MATHEMATICAL SURVEYS · *Number 7*

THE ALGEBRAIC THEORY OF SEMIGROUPS

VOLUME II

by

A. H. CLIFFORD and G. B. PRESTON

1967
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Providence, Rhode Island

А. КЛИФФОРД, Г. ПРЕСТОН

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ПОЛУГРУПП

Том 2

Перевод с английского
В. А. БАРАНСКОГО

Под редакцией
Л. Н. ШЕВРИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»

Москва 1972

УДК 519.4

Второй том этого капитального труда помимо интересных результатов о внутренней структуре некоторых типов полугрупп содержит изложение теории представлений полугрупп полными и частичными преобразованиями. Кроме того, рассмотрена теория конгруэнций и вложения полугруппы в группу.

Редакция литературы по математическим наукам

2-2-3
14-72

Предисловие к тому 2

В общих чертах том 2 следует плану, изложенному в предисловии к тому 1. Оба тома нужно рассматривать как одну работу, представляющую собой обзор теории полугрупп. Второй том в основном посвящен дополнительным разделам теории, которые в томе 1 были лишь затронуты. Большая часть материала этого тома взята из различных статей, опубликованных до составления первоначального плана книги. Тем не менее мы взяли на себя смелость включить в том 2 и, как нам кажется, наиболее важные недавние результаты, относящиеся к разделам, которым посвящен этот том. Однако в настоящем томе не отражены важные исследования по теории матричных представлений полугрупп, которые были проведены после выхода первого тома (см., в частности, работу Манна [1964b] и ссылки в ней).

Среди наиболее важных результатов последнего времени, включенных в книгу, можно отметить теорию Шайна представлений произвольной полугруппы частичными взаимно однозначными преобразованиями множества (§ 7.2, 7.3, 11.4), теорию Редеи конечно порожденных коммутативных полугрупп (§ 9.2) (наше изложение основывается на лекции, прочитанной Редеи в Оксфорде в 1960 г.; к сожалению, нам не удалось получить книгу Редеи [1963] до выхода нашей рукописи в свет), теорию Хауи свободных произведений полугрупп с амальгамой (§ 9.4) и теорию Тулли представлений полугрупп преобразованиями множеств (гл. 11).

В § 10.8 мы приводим принадлежащее А. И. Мальцеву [1952] описание конгруэнций на полной полугруппе преобразований, в § 12.6 и 12.8 — его результаты [1937, 1939, 1940] о необходимых и достаточных условиях вложимости полугруппы в группу. В обоих случаях изложение следует общему плану блестящих статей Мальцева, но мы считаем, что наше значительно более развернутое изложение необходимо для полноты доказательств (которые, как мы надеемся, не потребуют дальнейшего развертывания).

Материал § 7.4, гл. 9, § 10.7 и 10.8 составил содержание курса лекций под названием «Конгруэнции на полугруппах», прочитанного одним из авторов в летней школе по алгебре, организованной Национальным научным фондом и проходившей с 24 июня по 16 августа 1963 г. в Пенсильванском государственном университете. Эти лекции, записанные Хауи, были изданы математическим факультетом Пенсильванского государственного университета. Беседы со слушателями, посещавшими этот курс, и с доктором Хауи, помогавшим в его подготовке, принесли нам большую пользу.

Как и в первом томе, в тексте кое-где упомянуты различные нерешенные вопросы. На два вопроса из первого тома ответы найдены: вопрос на стр. 30 решен в работе Тамуры и Грэхема [1964], вопрос на стр. 102 решен (отрицательно) Кларком [1965].

Мы выражаем благодарность проф. Манну, д-ру Хауи и д-ру Рейли за ценные замечания по первому варианту гл. 7 и 8. В гл. 6 мы внесли некоторые поправки, любезно предложенные профессором Шварцем.

А. Х. К.

Г. Б. П.

Глава 6
МИНИМАЛЬНЫЕ ИДЕАЛЫ И УСЛОВИЯ МИНИМАЛЬНОСТИ

В первых пяти параграфах этой главы рассматриваются полугруппы, содержащие 0-минимальные идеалы. Изучаемые полугруппы будут иметь (двусторонний) нуль, обозначаемый, как обычно, через 0, и по крайней мере один ненулевой элемент.

В соответствии с соглашениями, принятыми в первом томе, сказанное означает, что $S = S^0$. Будем использовать это удобное сокращение и говорить: «пусть $S = S^0$ — полугруппа», подразумевая, что $|S| > 1$ и S обладает нулем. Так же, как и в первом томе, результаты для полугрупп с минимальными идеалами, вытекающие из соответствующих результатов для полугрупп с 0-минимальными идеалами (ср. § 2.5), будут формулироваться только в исключительных случаях.

В § 6.1 рассматриваются различные способы, посредством которых полугруппу с нулевым умножением можно вложить в качестве 0-минимального идеала в некоторую полугруппу. Центральными результатами § 6.2—6.4 являются структурные теоремы для левых и правых цоколей полугруппы. Первоначальные идеи и большинство результатов здесь принадлежат Шварцу [1951], но наша основная структурная теорема (теорема 6.29) для объединения левых и правых цоколей полугруппы, по-видимому, является существенно новой. Имеется глубокая аналогия между излагаемой теорией и теорией Дьедонне [1942] цоколей колец.

В § 6.5 получены характеризации различных 0-прямых объединений 0-простых полугрупп, которые возникают при изучении цоколей. Первые результаты в указанном направлении и здесь принадлежат Шварцу [1951]. Эти характеризации аналогичны характеризациям, которые были получены Круазо [1953] для полугрупп без нуля и были уже приведены нами в первом томе (см. § 4.1).

В последнем параграфе (§ 6.6) рассматриваются различные условия минимальности, в частности условия M_L, M_R и M_J, которые встречались в гл. 5. В упражнениях к § 6.6 рассмотрены также некоторые радикалы, определяемые для полугрупп. К изучению радикалов мы вернемся снова в § 11.6.

§ 6.1. 0-минимальные идеалы с нулевым умножением

Предварительный результат этого параграфа (теорема 6.4) дает необходимые и достаточные условия того, что полугруппа R с нулем может быть вложена в качестве невырожденного 0-минимального правого идеала в некоторую полугруппу S. Затем этот результат применяется к случаю, когда R — полугруппа с нулевым умножением (теорема 6.7). Аналогичный результат для двустороннего случая приведен в теореме 6.9. Эти результаты являются новыми, и соответствующая теория еще далека от завершения; см. абзац в конце списка упражнений.

Пусть A — некоторый 0-минимальный [левый, правый] идеал полугруппы $S = S^0$. Тогда либо $A^2 = A$, либо $A^2 = 0$ (§ 2.5). Очевидно, если A нильпотентен, то равенство $A^2 = A$ не может иметь места и, следовательно, нильпотентный 0-минимальный [левый, правый] идеал является полугруппой с нулевым умножением (§ 1.1).

Этот параграф посвящен главным образом 0-минимальным идеалам с нулевым умножением. Полугруппы с нулевым умножением в очевидном смысле тривиальны. Однако, как мы увидим, например, в § 6.2—6.4, полугруппы, содержащие 0-минимальные ненильпотентные односторонние идеалы, содержат, вообще говоря, и идеалы с нулевым умножением. Здесь же мы исследуем, каким образом 0-минимальные идеалы с нулевым умножением полугруппы S могут быть вложены в S.

Мы рассмотрим сначала односторонние идеалы и полученные результаты применим к ненильпотентным идеалам. Следующая лемма обобщает лемму 2.31, охватывая теперь и случай идеалов с нулевым умножением.

Лемма 6.1. *Пусть $S = S^0$ и R — некоторый 0-минимальный правый идеал из S. Тогда либо $rS = R$ для любого $r \in R \setminus 0$, либо $R = \{0, r\}$ и $rS = 0$.*

Доказательство. Так как для любого $r \in R$ множество rS является правым идеалом полугруппы S, содержащимся в R, в силу 0-минимальности идеала R выполняется либо равенство $rS = R$, либо равенство $rS = 0$. Если $r \neq 0$ и $rS = 0$, то $\{0, r\}$ есть правый идеал из S, содержащийся в R, так что снова в силу 0-минимальности R имеем $R = \{0, r\}$.

Правый идеал $R = \{0, r\}$ полугруппы S будем называть *вырожденным*, если $rS = 0$.

Нам понадобится некоторое обобщение правого регулярного представления (§ 1.3) полугруппы. Пусть R — произвольный правый идеал полугруппы S. Для каждого $x \in S$ определим отображение ρ_x идеала R в себя:

$$\rho_x \colon r \to rx \qquad (x \in R).$$

Легко проверить, что $\rho_x \rho_y = \rho_{xy}$ и потому

$$\rho_R \colon x \to \rho_x \qquad (x \in S)$$

есть представление полугруппы S в $\mathscr{T}_R$. Множество $S\rho_R$ является полугруппой правых сдвигов идеала R, содержащей полугруппу внутренних правых сдвигов этого идеала (§ 1.3).

Пусть φ — произвольное представление полугруппы S в $\mathscr{T}_X$ и Y — непустое подмножество множества X. Тогда говорят, что φ (или S, если φ — тождественное отображение) *транзитивно* на Y, если для любых $y_1, y_2 \in Y$ существует такое $s \in S$, что $y_1(s\varphi) = y_2$.

Для 0-минимального правого идеала R представление ρ_R обладает свойствами, сформулированными в следующей лемме.

Лемма 6.2. *Пусть R — невырожденный 0-минимальный правый идеал полугруппы $S = S^0$. Тогда ρ_R транзитивно на $R \setminus 0$ и $S\rho_R$ есть полугруппа правых сдвигов идеала R, содержащая полугруппу внутренних правых сдвигов этого идеала.*

Доказательство. По лемме 6.1 для $r_1 \in R \setminus 0$ имеем $r_1 S = R$. Следовательно, для $r_2 \in R \setminus 0$ существует такое $s \in S$, что $r_1 s = r_2$, т. е. $r_1(s\rho_R) = r_2$. Другими словами, ρ_R транзитивно на $R \setminus 0$.

Лемма 6.3. *Пусть $R = R^0$ — полугруппа и T — подполугруппа полугруппы правых сдвигов $\mathbf{R}$, которая содержит полугруппу внутренних правых сдвигов R и которая транзитивна на $R \setminus 0$. Тогда R может быть вложена в качестве невырожденного 0-минимального правого идеала в такую полугруппу S, что $S\rho_R = T$.*

Доказательство. Пусть $\Sigma = T \cup R$. Определим операцию $\circ$ на Σ, полагая

$$\begin{aligned} \rho \circ \sigma &= \rho\sigma, \\ \rho \circ r &= \rho\rho_r, \\ r \circ \rho &= r\rho, \\ r \circ s &= rs, \end{aligned}$$

где ρ и σ обозначают элементы из T, а r и s — элементы из R. По предположению ρ_r (внутренний правый сдвиг полугруппы R, соответствующий элементу r) принадлежит T и поэтому $\rho\sigma$ и $\rho\rho_r$ имеют смысл как произведения в T. Далее, rs имеет смысл как произведение в R, а $r\rho$ обозначает элемент из R, который является образом элемента r относительно правого сдвига ρ.

Для проверки ассоциативности операции $\circ$ на Σ нужно рассмотреть восемь случаев. Рассмотрим случай TRT. Здесь если $\rho, \sigma \in T$ и $r \in R$, то в силу определений имеем

$$(\rho \circ r) \circ \sigma = (\rho\rho_r) \circ \sigma = (\rho\rho_r)\,\sigma = \rho\,(\rho_r\sigma)$$

и

$$\rho \circ (r \circ \sigma) = \rho \circ (r\sigma) = \rho\rho_{r\sigma},$$

а по лемме 1.1 $\rho_r\sigma = \rho_{r\sigma}$.

Остальные случаи рассматриваются аналогично, и мы получаем, что $\Sigma(\circ)$ — полугруппа.

Любой правый сдвиг полугруппы с нулем оставляет нуль на месте: $0\rho = 0^2\rho = 0\,(0\rho) = 0$. Далее, $\rho \circ 0 = \rho\rho_0 = \rho_0$, $\rho \circ \rho_0 = \rho\rho_0 = \rho_0$, $r \circ \rho_0 = r\rho_0 = r\cdot 0 = 0$, $\rho_0 \circ r = \rho_0\rho_r = \rho_{0r} = \rho_0$, $\rho_0 \circ \rho = \rho_0\rho = \rho_0$. Таким образом, $\{0, \rho_0\} = Z$ является двусторонним идеалом полугруппы Σ. Обозначим через S фактор-полугруппу Σ/Z. Можно считать, что S получается из Σ отождествлением элементов ρ_0 и 0, и тогда S содержит R, причем ее нулем является нуль полугруппы R. Так как R является, очевидно, правым идеалом в Σ, он остается правым идеалом и в S. Далее, из предположения о транзитивности полугруппы T на $R\setminus 0$, очевидно, вытекает, что если $r \in R\setminus 0$, то $rS = R$. Следовательно, R — невырожденный 0-минимальный правый идеал из S.

Наконец, рассмотрим $S\rho_R$, т. е. множество правых сдвигов идеала R, индуцированных внутренними правыми сдвигами полугруппы S. Мы должны показать, что $S\rho_R = T$. Для $r \in R$ имеем $r\rho_R = \rho_r$, а по предположению $\rho_r \in T$. Для $s \in S\setminus R$ (заметим, что s в действительности совпадает с некоторым элементом σ из $\Sigma\setminus R$) и для $x \in R$ имеем

$$x\,(s\rho_R) = xs = x\circ s = x\sigma,$$

так что $s\rho_R = \sigma \in T$. Аналогично, легко проверить, что $T \subseteq S\rho_R$. Таким образом, $S\rho_R = T$, что завершает доказательство леммы.

Из предыдущих двух лемм непосредственно вытекает следующая

Теорема 6.4. *Пусть $R = R^0$ — полугруппа и T — подполугруппа полугруппы ее правых сдвигов. Тогда R может быть вложена в качестве невырожденного 0-минимального правого идеала в некоторую полугруппу S, для которой $S\rho_R = T$, в том и только в том случае, когда* (i) *T содержит полугруппу внутренних правых сдвигов полугруппы R и* (ii) *T транзитивна на $R\setminus 0$.*

Следствие 6.5. *Полугруппа $R = R^0$ является невырожденным 0-минимальным правым идеалом некоторой полугруппы тогда и только тогда, когда ее полугруппа правых сдвигов транзитивна на $R\setminus 0$.*

В следующем параграфе будет установлено (теорема 6.19 (5)), что 0-минимальный ненильпотентный правый идеал полугруппы S содержится в качестве 0-минимального правого идеала в некоторой ее 0-простой подполугруппе. 0-простые полугруппы, содержащие как 0-минимальные левые, так и 0-минимальные правые идеалы, являются вполне 0-простыми (теорема 2.48). 0-простые полугруппы, содержащие 0-минимальные правые идеалы, но не содержащие 0-минимальных левых идеалов, будут рассмотрены в § 8.3.

Рассмотрим теперь случай полугруппы $R = R^0$ с нулевым умножением. Здесь мы можем усилить предыдущие результаты, так как нам известна полугруппа правых сдвигов полугруппы R: элемент из $\mathscr{T}_R$ является правым сдвигом полугруппы R с нулевым умножением тогда и только тогда, когда он оставляет нуль из R неподвижным (см. аналогичное замечание в работе В. В. Вагнера [1956]). В частности, полугруппа правых сдвигов полугруппы R транзитивна на $R \setminus 0$, и поэтому из следствия 6.5 вытекает

Следствие 6.6. *Если $R = R^0$ — полугруппа с нулевым умножением, то существуют полугруппы, содержащие R в качестве 0-минимального правого идеала.*

Мы можем также усилить теорему 6.4 для случая полугрупп с нулевым умножением. Пусть φ — произвольное представление полугруппы S в $\mathscr{T}_X$ и Y — непустое подмножество множества X. Тогда говорят, что Y *инвариантно относительно* φ (или, если φ — тождественное отображение, *инвариантно относительно* S), если $Y(s\varphi) \subseteq Y$ для всех $s \in S$. Будем говорить, что элемент z *неподвижен*, если множество $\{z\}$ инвариантно. Инвариантное множество Y, содержащее неподвижный элемент z, называется *z-транзитивным*, если z есть единственный неподвижный элемент в Y и для любых $y, y' \in Y$, где $y \neq z$, существует такой $s \in S$, что $y(s\varphi) = y'$. В этом случае, если S содержит нуль 0, то $y(0\varphi)$ для любого $y \in Y$ есть неподвижный элемент множества Y, равный z.

Рассмотрим теперь частный случай, когда $Y = X = R$, где $R = R^0$ — полугруппа с нулевым умножением. Если R является 0-транзитивной относительно подполугруппы $T = T^0$ из $\mathscr{T}_R$, то нуль полугруппы T есть отображение, переводящее R в нуль полугруппы R, т. е. T содержит полугруппу внутренних правых сдвигов R. Отсюда мы получаем следующее усиление теоремы 6.4 для нашего случая.

Теорема 6.7. *Пусть $R = R^0$ — полугруппа с нулевым умножением и $T = T^0$ — подполугруппа из $\mathscr{T}_R$. Тогда R может быть вложена в качестве невырожденного 0-минимального правого идеала в некоторую полугруппу S, для которой $S\rho_R = T$, в том и только в том случае, когда R 0-транзитивна относительно T.*

Аналогичное исследование можно провести для 0-минимальных двусторонних идеалов. Ситуация здесь не намного сложней, чем в одностороннем случае. Следующая лемма есть аналог леммы 6.1 для случая двусторонних идеалов.

Мы будем использовать здесь (и в дальнейшем) понятие аннулятора множества. Пусть C — произвольное непустое подмножество полугруппы $S = S^0$. Положим

$$A_C = \{x \in S \mid Cx = 0\},$$

$$_CA = \{x \in S \mid xC = 0\},$$

$$_CA_C = \{x \in S \mid xC = 0 \quad \text{и} \quad Cx = 0\},$$

так что $_CA_C = {_CA} \cap A_C$. Множество A_C [$_CA$, $_CA_C$] называется *правым* [*левым*, *двусторонним*] *аннулятором множества C в S*. Если мы захотим в явном виде указать зависимость аннулятора от S, то будем писать, например, $A_C(S)$.

Как и для односторонних идеалов, будем говорить, что двусторонний идеал $M = M^0$ является *вырожденным* идеалом полугруппы $S = S^0$, если $M = \{0, m\}$ и $mS = Sm = 0$.

Лемма 6.8. *Пусть $S = S^0$ и M — невырожденный 0-минимальный двусторонний идеал из S. Тогда или* (a) $SmS = M$ *и, следовательно,* $Sm \neq 0$ *и* $mS \neq 0$ *для всех* $m \in M\setminus 0$, *или* (b) $Sm = 0$ *и* $mS = M$ *для всех* $m \in M\setminus 0$, *так что M есть 0-минимальный правый идеал с нулевым умножением и* $_MA = S$, *или* (c) $mS = 0$ *и* $Sm = M$ *для всех* $m \in M\setminus 0$, *так что M есть 0-минимальный левый идеал с нулевым умножением и* $A_M = S$.

Доказательство. Пусть $C = \{m \in M \mid SmS = 0\}$. Очевидно, C — идеал из S. Следовательно, в силу 0-минимальности идеала M либо (i) $C = 0$, либо (ii) $C = M$. В случае (i) для любого $m \in M\setminus 0$ множество SmS является ненулевым идеалом, а поэтому $SmS = M$, т. е. выполняется утверждение (a) леммы.

В случае (ii) имеем $SMS = 0$. В силу невырожденности идеала M соотношения $SM = 0$ и $MS = 0$ выполняться одновременно не могут. Предположим, что $MS \neq 0$. Тогда MS есть двусторонний идеал, содержащийся в 0-минимальном идеале M, следовательно, $MS = M$. Отсюда $SM = S(MS) = 0$. Таким образом, либо (iib) $MS \neq 0$ и $SM = 0$, либо, аналогично, (iic) $SM \neq 0$ и $MS = 0$. Предположим, что имеет место (iib). Тогда для $m \in M\setminus 0$ имеем $Sm = 0$, откуда в силу невырожденности M вытекает, что $mS \neq 0$. Множество mS является, таким образом, ненулевым двусторонним идеалом, содержащимся в M, и поэтому $mS = M$. Следовательно, случай (iib) дает нам утверждение (b) леммы. Аналогично, случай (iic) дает утверждение (c) леммы.

Из доказанной леммы вытекает, что, рассмотрев вложения односторонних 0-минимальных идеалов с нулевым умножением, мы можем для двусторонних идеалов ограничиться лишь случаем (a) этой леммы.

Если L — левый идеал полугруппы S, то через λ_L обозначим отображение, определенное двойственным образом по отношению к отображению ρ_R, где R — правый идеал. Таким образом, $S\lambda_L$ состоит из всех левых сдвигов идеала L, индуцированных внутренними левыми сдвигами полугруппы S.

Теорема 6.9. *Пусть $M = M^0$ — полугруппа с нулевым умножением, а $T = T^0$ и $U = U^0$ — подполугруппы из $\mathcal{T}_M$, каждая из которых содержит нулевой элемент, т. е. отображение, переводящее M в 0. Тогда M может быть вложена в качестве невырожденного 0-минимального двустороннего идеала в некоторую полугруппу S, для которой $SmS = M$ при $m \in M\diagdown 0$, $S\rho_M = T$ и $S\lambda_M = U$, в том и только в том случае, когда* (i) *каждый элемент из T коммутирует с каждым элементом из U и* (ii) *UT транзитивно на $M\diagdown 0$.*

Доказательство. Предположим, что M есть 0-минимальный двусторонний идеал из $S = S^0$. Тогда, очевидно, и $S\rho_M = T$ и $S\lambda_M = U$ содержат отображение, переводящее M в 0. Далее, если $u \in U$, $u = a\lambda_M$ $(a \in S)$ и если $t \in T$, $t = b\rho_M$ $(b \in S)$, то для $m \in M$ имеем $m(ut) = (mu)t = (am)t = (am)b = a(mb) = a(mt) = (mt)u = m(tu)$. Таким образом, $ut = tu$, т. е. каждый элемент из T коммутирует с каждым элементом из U. Далее, если $m \in M\diagdown 0$, то $M = SmS = (Sm)S = (mU)S = (mU)T = m(UT)$. Следовательно, UT транзитивно на $M\diagdown 0$.

Обратно, предположим, что T и U — подполугруппы из $\mathcal{T}_M$, содержащие в качестве нулевого элемента отображение, переводящее M в 0. Предположим, кроме того, что условия (i) и (ii) выполняются для U и T. Пусть $\overline{T}$ и $\overline{U}$ — две полугруппы, изоморфные полугруппам T и U соответственно и пересекающиеся лишь по нулю, скажем $\overline{T} \cap \overline{U} = \{z\}$. Положим, $\overline{T}^* = \overline{T}\diagdown z$, $\overline{U}^* = \overline{U}\diagdown z$ и $S = M \cup \overline{T}^* \cup \overline{U}^*$. Через α и $\overline{\alpha}$ будем обозначать элементы, соответствующие друг другу при изоморфизме T и $\overline{T}$ или U и $\overline{U}$. Определим операцию $\circ$ в S, полагая

$$\overline{\alpha} \circ \overline{\beta} = \begin{cases} \overline{\alpha\beta}, & \text{если } \overline{\alpha\beta} \neq z, \\ 0, & \text{если } \overline{\alpha\beta} = z, \end{cases}$$

где $\alpha, \beta \in T$;

$$\overline{\mu} \circ \overline{\nu} = \begin{cases} \overline{\nu\mu}, & \text{если } \overline{\nu\mu} \neq z, \\ 0, & \text{если } \overline{\nu\mu} = z, \end{cases}$$

где $\mu,\ \nu \in U$;

$$\overline{\alpha} \circ \overline{\mu} = 0 = \overline{\mu} \circ \overline{\alpha},$$

где $\alpha \in T,\quad \mu \in U$;

$$\overline{\alpha} \circ m = 0, \qquad m \circ \overline{\alpha} = m\alpha,$$

где $m \in M,\quad \alpha \in T$;

$$\overline{\mu} \circ m = m\mu, \quad m \circ \overline{\mu} = 0,$$

где $m \in M,\ \mu \in U$;

$$m \circ n = mn = 0,$$

где $m,\ n \in M$.

Для проверки ассоциативности операции $\circ$ нужно рассмотреть двадцать семь случаев в соответствии с тем, каким из множеств $\overline{T}^*$, $\overline{U}^*$ и M принадлежат три элемента. Мы опустим детали этой проверки. Во всех случаях, за исключением пяти: $\overline{T}^*\overline{T}^*\overline{T}^*$, $M\overline{T}^*\overline{T}^*$, $\overline{U}^*\overline{U}^*\overline{U}^*$, $\overline{U}^*\overline{U}^*M$ и $\overline{U}^*M\overline{T}^*$, все произведения равны нулю. В случае $\overline{U}^*M\overline{T}^*$ нужно учесть, что каждый элемент из U коммутирует с каждым элементом из T.

Из определения операции $\circ$, очевидно, вытекает, что M является двусторонним идеалом полугруппы S. Далее, для $m \in M \setminus 0$ имеем $(S \circ m) \circ S = (mU) \circ S = (mU)\ T = mUT = M$, так как UT транзитивно на $M \setminus 0$. Таким образом, M есть 0-минимальный двусторонний идеал в S. Непосредственно проверяется, что $S\rho_M = T$ и $S\lambda_M = U$.

Упражнения к § 6.1

1. Пусть C — непустое подмножество [правый идеал] полугруппы $S = S^0$. Тогда A_C является правым [двусторонним] идеалом из S.

2. Пусть R — правый идеал с нулевым умножением полугруппы $S = S^0$. Тогда $R \subseteq A_R$ и (двусторонний) идеал A_R будет $(\rho_R \circ \rho_R^{-1})$-классом, являющимся нулем полугруппы $S/(\rho_R \circ \rho_R^{-1})$.

3. Пусть U — объединение всех 0-минимальных правых идеалов с нулевым умножением полугруппы $S = S^0$. Предположим, что $U \neq \varnothing$. Тогда U — двусторонний идеал с нулевым умножением из S. Пусть R — произвольный 0-минимальный правый идеал с нулевым умножением из S. Тогда $U \subseteq {}_RA_R$.

4. Расширение S полугруппы R, построенное в доказательстве леммы 6.3 в случае, когда $R^2 = 0$, не принадлежит ни к одному из типов, рассмотренных в § 4.4, так как в этом случае R не слабо редуктивна. Тем не менее мы можем модифицировать методы § 4.4, заменив (теперь не обязательно взаимно однозначное) есте-

ственное отображение полугруппы R в ее сдвиговую оболочку $\overline{R}$ на некоторый изоморфизм φ. В данном случае такой изоморфизм можно найти при $|R| > 2$.

Пусть $T = T^0$ — полугруппа и $T^* = T \setminus 0$. Обозначим элементы из $R\varphi$ через $r\varphi$ $(r \in R)$. Пусть $S = R\varphi \cup T^*$ и $\overline{S} = \overline{R} \cup T^*$ (где $\overline{R}$ — сдвиговая оболочка полугруппы R). Предположим, что операция $\circ$ определена в S таким образом, что $S(\circ)$ есть расширение $R\varphi$ при помощи T. Тогда для каждого $A \in T^*$ существуют связанные левый и правый сдвиги λ_A и ρ_A соответственно полугруппы R, для которых

$$A \circ r\varphi = (r\lambda_A)\varphi \quad \text{и} \quad (r\varphi) \circ A = (r\rho_A)\varphi.$$

Тогда $\theta: A \to (\lambda_A, \rho_A)$ есть частичный гомоморфизм T^* в $\overline{R}$, и по теореме 4.19 θ определяет расширение $\overline{S}(*)$ полугруппы $\overline{R}$ при помощи T, для которого

$$A * B = \begin{cases} AB, & \text{если } AB \neq 0 \text{ в } T; \\ (A\theta)(B\theta), & \text{если } AB = 0 \text{ в } T; \end{cases}$$

$$A * \overline{r} = (A\theta)\overline{r}; \quad \overline{r} * A = \overline{r}(A\theta); \quad \overline{r} * \overline{s} = \overline{rs},$$

где $A, B \in T^*$ и $\overline{r}, \overline{s} \in \overline{R}$.

$S(\circ)$ будет подполугруппой в $\overline{S}(*)$ тогда и только тогда, когда

(1) $A \circ B = (A\theta)(B\theta)$, если $AB = 0$ в T;

(2) $(r\lambda_A)\varphi = (A\theta)r\varphi$ и $(r\rho_A)\varphi = (r\varphi)(A\theta)$

для всех $r \in R$ и $A \in T^*$.

В расширении, приведенном в конструкции, которая использована при доказательстве леммы 6.3, выполняется равенство $\lambda_A = \zeta$ для любого $A \in T^*$, где $r\zeta = 0$ для всех $r \in R$, тогда как $\{\rho_A \mid A \in T^*\}$ транзитивно на $R \setminus 0$. Ни для какого изоморфизма φ полугруппы R в $\overline{R}$ нельзя получить условие (2), и, следовательно, расширение, использованное в доказательстве леммы 6.3, нельзя получить модификацией метода § 4.4.

5. Пусть $R = R^0$ — полугруппа и $R^2 \neq 0$. Если полугруппа правых сдвигов R транзитивна на $R \setminus 0$, то $R^2 = R$.

6. Пусть $R = R^0$ — полугруппа, полугруппа правых сдвигов которой транзитивна на $R \setminus 0$, и $_RA = 0$. Тогда R 0-проста справа (§ 2.5).

7. (а) Пусть R — ненильпотентный 0-минимальный правый идеал полугруппы $S = S^0$, $A = {}_RA(R)$ и $B = R \setminus A$. Тогда A — такой двусторонний идеал полугруппы R, что $A^2 = 0$ и B — простая справа подполугруппа из R.

(b) Если, кроме того, R содержит ненулевой идемпотент, то B есть объединение изоморфных групп; ср. с теоремой 1.27. (Шварц [1951], § 6.)

8. Пусть S, R, A и B определены так же, как и в упражнении 7 (a). Для каждого $b \in B$ определим преобразование λ_b множества A, полагая $a\lambda_b = ba$ $(a \in A)$.

(a) $\lambda_b\lambda_{b'} = \lambda_{b'b}$ для всех b, $b' \in B$.

(b) Для каждого $b \in B$ преобразование λ_b отображает $A \setminus 0$ на $A \setminus 0$.

(c) Если $e^2 = e \in B$, то λ_e — тождественное преобразование множества A.

Если $b^2 \neq b \in B$, то 0 является единственной неподвижной точкой из A относительно λ_b.

Как описать строение ненильпотентного 0-минимального правого идеала R (произвольной) полугруппы $S = S^0$? Следствие 6.5 дает необходимые и достаточные условия существования для идеала R такой полугруппы S, но ничего не говорит о строении R. Для этого в обозначениях упражнения 7 (a) мы должны знать, как действует B на A слева. Зная же, как B действует на A слева, мы могли бы вложить R в качестве 0-минимального правого идеала в 0-простую полугруппу при помощи конструкции, указанной в упражнении 5 к § 8.3. Упражнение 8 выше показывает необходимость условий, наложенных в пункте (2) упражнения 5 к § 8.3.

§ 6.2. Двусторонний идеал, порожденный 0-минимальным правым идеалом

Целью этого параграфа является изучение строения идеала SR, где $R = R^2$ есть 0-минимальный правый идеал полугруппы S. Заметим сначала, что для любого $x \in S$ либо $xR = 0$, либо xR есть 0-минимальный правый идеал в S (лемма 2.32) и, следовательно, SR является объединением 0-минимальных правых идеалов из S. В действительности каждый 0-минимальный правый идеал из S, содержащийся в SR, имеет вид xR.

Лемма 6.10. *Пусть R' — произвольный 0-минимальный правый идеал из S, содержащийся в SR. Тогда существует такой $x \in S$, что $R' = xR$.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из приведенного выше замечания и того факта, что два различных 0-минимальных правых идеала из S пересекаются по нулю (§ 2.5).

Лемма 6.11. *Пусть $x \in SR \setminus 0$. Тогда $x \in xS$ и xS есть 0-минимальный правый идеал из S, содержащийся в SR. Следова-*

тельно, если R' — произвольный 0-*минимальный правый идеал из S, содержащийся в SR, то $r'S = R'$ для любого $r' \in R' \setminus 0$.*

Доказательство. Элемент x в силу предыдущей леммы должен принадлежать yR при некотором y из S. Тогда $x = yr$, где $r \in R \setminus 0$, и $xS = yrS = yR$ (лемма 2.32), т. е. xS есть 0-минимальный правый идеал в S. Очевидно, $x \in xS$.

Утверждение этой леммы эквивалентно тому, что *SR не содержит вырожденных* 0-*минимальных правых идеалов из S.*

Лемма 6.12. *Пусть R_1 и R_2 — два* 0-*минимальных правых идеала из S, содержащихся в SR. Тогда $R_1R_2 = R_1$ в том и только в том случае, когда $R_2^2 = R_2$; или, что эквивалентно, $R_1R_2 = 0$ в том и только в том случае, когда $R_2^2 = 0$.*

Доказательство. Так как R_1R_2 содержится в 0-минимальном правом идеале R_1 из S, то либо $R_1R_2 = R_1$, либо $R_1R_2 = 0$. Таким образом, два заключения леммы, как и утверждалось, эквивалентны.

Пусть $R_2^2 = 0$. Если $R_1R_2 = R_1$, то, умножая справа на R_2, мы получили бы

$$R_1 = R_1R_2 = (R_1R_2)\, R_2 = R_1R_2^2 = 0,$$

что противоречит предположению. Следовательно, в этом случае $R_1R_2 = 0$. Обратно, предположим, что $R_2^2 = R_2$. В силу леммы 6.10 существуют такие $x_1, x_2 \in S$, что $R_1 = x_1R$ и $R_2 = x_2R$. Из равенства $R_2^2{=}R_2$ вытекает, что $Rx_2\,R = R$ и, следовательно, $R_1R_2 = x_1\,(Rx_2R) = x_1R = R_1$. Лемма доказана.

Следствие 6.13. *Пусть R_1 есть* 0-*минимальный правый идеал из S, содержащийся в SR. Тогда $SR_1 = SR$ в том и только в том случае, когда $R_1^2 = R_1$.*

Доказательство. Если $R_1^2 = 0$, то $(SR_1)^2 = S\,(R_1S)\,R_1 \subseteq SR_1^2 = 0$. Однако $(SR)^2 \supseteq (RR)^2 = R^2 = R \neq 0$. Следовательно, $SR_1 \neq SR$ при $R_1^2 = 0$. Если $R_1^2 = R_1$, то по лемме $R_1R = R_1$ и $RR_1 = R$. Поэтому

$$SR = SRR_1 \subseteq SR_1 = SR_1R \subseteq SR,$$

откуда вытекает, что $SR = SR_1$.

Следующее утверждение показывает, что в SR правые идеалы из S совпадают с правыми идеалами из SR. Как показано в упражнении 1 к этому параграфу, соответствующее утверждение для левых идеалов неверно.

Следствие 6.14. *Подмножество из SR является* [0-*минимальным*] *правым идеалом в SR тогда и только тогда, когда оно есть* [0-*минимальный*] *правый идеал в S.*

Доказательство. Пусть C — правый идеал из SR. Пусть $C \neq 0$ и $x \in C \setminus 0$. Тогда по лемме 6.11 xS есть 0-минимальный правый идеал из S, содержащий x. Следовательно, по этой лемме $xSR = xS$. Отсюда вытекает, что C есть объединение 0-минимальных правых идеалов из S, чем и завершается доказательство нашего утверждения.

Следствие 6.15. *Аннулятор $A_R(SR) = A_{SR}(SR)$ есть объединение всех 0-минимальных правых идеалов с нулевым умножением из S [из SR], содержащихся в SR; ${}_{SR}A(SR) = 0$.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно вытекает из леммы, так как каждый ненулевой элемент из SR принадлежит 0-минимальному правому идеалу из S, который по предыдущему следствию является также 0-минимальным правым идеалом в SR.

Что же касается левого аннулятора, то для $x \in SR \setminus 0$ на основании леммы 6.12 и леммы 6.11 мы имеем $xSR = (xS)R = xS$. Следовательно, для $x \in SR$ из равенства $x\,SR = 0$ вытекает, что $x = 0$, так как по лемме 6.11 $x \in xS$.

В предыдущем абзаце мы также доказали, по существу, следующее утверждение, усиливающее одно из приведенных выше замечаний.

Следствие 6.16. *Полугруппа SR не содержит вырожденных 0-минимальных правых идеалов.*

Обозначим через B ($= B(R)$) объединение всех *ненильпотентных* 0-минимальных правых идеалов R' (т. е. $(R')^2 = R'$), содержащихся в SR. Таким образом,

$$B \setminus 0 = SR \setminus (A_{SR}(SR)).$$

Из следствия 6.13 вытекает, что $B(R) = B(R_1)$ для любого ненильпотентного 0-минимального правого идеала R_1 из S, содержащегося в SR. Множество B является, очевидно, подполугруппой из SR.

Аналогично следствию 6.14 получается

Лемма 6.17. *Подмножество из B является [0-минимальным] правым идеалом в B тогда и только тогда, когда оно есть [0-минимальный] правый идеал в S.*

Доказательство. Пусть $x \in B \setminus 0$. Так как $B \setminus 0 = SR \setminus (A_{SR}(SR))$, то $x(SR) = xB$. Оставшаяся часть доказательства проводится точно так же, как и для следствия 6.14.

Следствие 6.14 и лемма 6.17 являются обобщениями теоремы 2.35.

Из указанной леммы, в частности, вытекает, что полугруппа B содержит 0-минимальный правый идеал. Более того, B есть объединение своих попарно пересекающихся по нулю 0-минимальных правых идеалов, каждый из которых ненильпотентен по определению B. Любая полугруппа с таким свойством есть объединение попарно пересекающихся по нулю 0-простых (§ 2.5) подполугрупп (следствие 6.34). В качестве частного случая этого результата мы получаем следующее утверждение.

Лемма 6.18. *B является 0-простой полугруппой, содержащей 0-минимальный правый идеал.*

Доказательство. Пусть $x \in B \setminus 0$. Тогда по лемме 6.11 $xS = R'$ является 0-минимальным правым идеалом в S. Далее, по лемме 6.12 $R'R = R'$ и потому $xB = xSR = R'R = R'$. Следовательно, $BxB = BR'$. Отсюда по определению B и в силу леммы 6.12 мы имеем $BxB = B$. Таким образом, B является 0-простой полугруппой (лемма 2.28).

Объединяя результаты, которые мы доказали относительно SR, получаем теорему, принадлежащую Шварцу [1951]. По поводу обратного утверждения см. ниже.

Теорема 6.19. *Пусть R — ненильпотентный 0-минимальный правый идеал полугруппы $S = S^0$. Тогда SR есть наименьший двусторонний идеал из S, содержащий R и являющийся объединением попарно пересекающихся по нулю 0-минимальных правых идеалов из S. Пусть A $[B]$ — объединение $\{0\}$ и всех нильпотентных [ненильпотентных] 0-минимальных идеалов из S, содержащихся в SR. Тогда*

(1) $SR = A \cup B$ *и* $A \cap B = 0$;

(2) $A = A_R(SR) = A_{SR}(SR)$, *и поэтому A — такой двусторонний идеал из S, что $A^2 = 0$;*

(3) ${}_{SR}A(SR) = 0$;

(4) *Подмножество из SR $[B]$ является правым идеалом в SR $[B]$ тогда и только тогда, когда оно есть правый идеал в S; более того, каждый нетривиальный правый идеал из SR $[B]$ есть объединение 0-минимальных правых идеалов из S; SR не содержит вырожденных 0-минимальных правых идеалов;*

(5) *B есть правый идеал из S, который является 0-простой полугруппой, содержащей 0-минимальный правый идеал (из B).*

Пусть R_1 и R_2 — произвольные 0-минимальные правые идеалы из S, содержащиеся в SR. Тогда $R_1R_2 = R_1$ в том и только в том случае, когда $R_2^2 = R_2$, или, что эквивалентно, $R_1R_2 = 0$ в том и только в том случае, когда $R_2^2 = 0$. Далее, $SR_1 = SR$ тогда и только тогда, когда $R_1^2 = R_1$; таким образом, SR определяется любым содержащимся в нем ненильпотентным 0-минимальным правым идеалом из S.

Из этой теоремы следует, что если $A \neq 0$, то A есть объединение невырожденных 0-минимальных правых идеалов с нулевым умножением из SR. Свойства 0-минимальных правых идеалов были рассмотрены в § 6.1, и теперь мы применим результаты предыдущего параграфа. Пусть R' — произвольный 0-минимальный правый идеал из SR, содержащийся в A. Тогда по теореме 6.17 $\rho_{R'}$ есть представление полугруппы SR или (так как $A^2 = 0$) полугруппы B в $\mathcal{T}_{R'}$, так что R' является 0-транзитивным относительно $B\rho_{R'}$. Следовательно, ρ_A есть такое представление B в $\mathcal{T}_A$, что A распадается на множество попарно пересекающихся по нулю множеств R' (0-минимальных правых идеалов из SR, содержащихся в A), на каждом из которых ограничение отображения ρ_A совпадает с представлением $\rho_{R'}$.

Как и в теореме 6.7, имеет место обратное утверждение. Пусть φ — произвольное представление полугруппы S в $\mathcal{T}_X$. Мы будем говорить (§ 11.2), что φ *вполне приводимо* (*относительно элемента z из X*), если X есть объединение своих подмножеств, каждое из которых z-транзитивно относительно φ. Такое разложение множества X является обязательно разложением на попарно пересекающиеся по z подмножества. В этой терминологии представление ρ_A полугруппы B в $\mathcal{T}_A$ вполне приводимо относительно 0.

Пусть теперь B есть произвольная 0-простая полугруппа, являющаяся объединением своих 0-минимальных правых идеалов (каждый из которых ненильпотентен по лемме 2.34). Пусть A — произвольное множество, содержащее нуль 0 из B и не содержащее других элементов из B. Пусть φ — произвольное представление полугруппы B в $\mathcal{T}_A$, вполне приводимое относительно 0. Положим $S = A \cup B$ и определим следующим образом бинарную операцию $\circ$ в S:

$$\begin{aligned} b \circ b' &= bb'; \\ a \circ b &= a(b\varphi); \\ b \circ a &= 0; \\ a \circ a' &= 0 \end{aligned}$$

для всех $b, b' \in B$ и $a, a' \in A$. Как и в теореме 6.7, можно показать, что операция $\circ$ ассоциативна, так что S — полугруппа. Снова по теореме 6.7 каждое 0-транзитивное подмножество из A является невырожденным 0-минимальным правым идеалом с нулевым умножением в S. Далее, пусть R — произвольный 0-минимальный правый идеал из B. Тогда в силу 0-простоты B имеем $B \circ R = BR = B$. Если R' — произвольное 0-транзитивное подмножество из A, то, так как $R'(B\varphi) = R'$, имеем $R' \circ R = (R'B\varphi) \circ R = (R' \circ B) \circ R = R' \circ (B \circ R) = R' \circ B = R'(B\varphi) = R'$. Следовательно, $A \circ R = A$. Учитывая, что $B \circ R = B$, получаем $S \circ R = S$. Так как $B \circ A = 0$, ясно, что 0-минимальность правых идеалов в B сохраняется в S. Таким образом, $S \circ R$ удовлетворяет всем условиям теоремы 6.19.

Упражнения к § 6.2

1. Пусть S — полугруппа со следующими свойствами:

(1) S обладает единицей 1, и ее группа обратимых элементов H_1 не одноэлементна;

(2) S — полугруппа с правым сокращением;

(3) $R = S \setminus H_1 \neq \varnothing$.

Тогда R — идеал в S, но не каждый левый идеал из R ($= SR$) является левым идеалом в S. (См. упражнение 10 к § 8.1, где R является также минимальным правым идеалом в S.)

2. Если S — полугруппа, содержащая минимальный правый идеал R, то она содержит ядро K (§ 2.5) и $K = SR$. Ядро K есть объединение всех минимальных правых идеалов из S. Каждый правый идеал из K является также правым идеалом в S. (См. упражнение 13(b) к § 2.7 и теорему 2.35.)

3. В обозначениях теоремы 6.19 каждый идеал из S, строго содержащийся в SR, содержится в A.

§ 6.3. Правый цоколь полугруппы

В этом параграфе мы рассмотрим объединение идеала $\{0\}$ и всех 0-минимальных правых идеалов произвольной полугруппы $S = S^0$. Следуя Дьедонне [1942], мы будем называть это объединение *правым цоколем* $\Sigma_r = \Sigma_r(S)$ полугруппы S. Оно впервые исследовалось для полугрупп Шварцем. Как отмечено Шварцем [1951], Σ_r является двусторонним идеалом в S. В самом деле, как объединение правых идеалов, Σ_r есть, очевидно, правый идеал. С другой стороны, если R — произвольный 0-минимальный правый идеал из S, то для любого x из S либо $xR = 0$, либо xR является также 0-минимальным правым идеалом в S (лемма 2.32); в любом случае $xR \subseteq \Sigma_r$. Следовательно, $x\Sigma_r \subseteq \Sigma_r$, так что Σ_r является также левым идеалом в S. Наши результаты усиливают и расширяют ряд результатов Шварца [1951]; другие результаты цитированной работы Шварца содержатся в упражнениях.

Левый цоколь $\Sigma_l = \Sigma_l(S)$ полугруппы S есть объединение идеала $\{0\}$ и всех 0-минимальных левых идеалов из S. Для Σ_l справедливы результаты, двойственные к результатам этого параграфа. В следующем параграфе мы рассмотрим строение двустороннего идеала $\Sigma_r \cup \Sigma_l$ полугруппы S.

Лемма 6.20. *Если R_1 и R_2 — ненильпотентные 0-минимальные правые идеалы из S, то либо $SR_1 = SR_2$, либо $SR_1 \cap SR_2 = 0$.*

Доказательство. Если $R_2 \subseteq SR_1$, то по теореме 6.19 $SR_1 = SR_2$. Следовательно, мы можем предположить, что $R_2 \nsubseteq SR_1$. Отсюда следует, что $R_2R_1 = 0$; в противном случае $R_2 = R_2R_1 \subseteq SR_1$. Положим теперь $C = SR_1 \cap SR_2$. Тогда $C(SR_1) \subseteq SR_2SR_1 \subseteq SR_2R_1 = 0$. Таким образом, так как по теореме 6.19 ${}_{SR_1}A\,(SR_1) = 0$, мы получаем $C = 0$.

Пусть N — двусторонний аннулятор Σ_r в Σ_r.

Лемма 6.21. *Аннулятор N является двусторонним идеалом в S и совпадает с объединением идеала $\{0\}$ и всех 0-минимальных правых идеалов из S, которые не содержатся ни в каком SR, где R — ненильпотентный 0-минимальный правый идеал в S.*

Доказательство. Аннулятор N является, очевидно, двусторонним идеалом в S; в самом деле, двусторонний аннулятор любого двустороннего идеала из S является двусторонним идеалом в S. Далее, очевидно, что если R — ненильпотентный 0-минимальный правый идеал из S, то $N \cap SR = 0$. В самом деле, $N \cap SR \subseteq {}_{SR}A\,(SR) = 0$ по теореме 6.19 (3).

Пусть теперь R — произвольный 0-минимальный правый идеал из S, не содержащийся ни в каком множестве SR', где $(R')^2 = R'$. Пусть R_1 — произвольный 0-минимальный правый идеал из S. Если $RR_1 = R$, то $RR_1^2 = RR_1 = R$ и поэтому $R \subseteq SR_1$, где $R_1^2 = R_1$, что противоречит предположению. Следовательно, $RR_1 = 0$. Так как это верно для каждого такого R_1, то $R\Sigma_r = 0$. Аналогично, $R_1R = R_1$ влечет за собой $R^2 = R \subseteq SR$, что снова противоречит предположению относительно R, и поэтому также $\Sigma_rR = 0$. Таким образом, $R \subseteq N$. Этим доказательство леммы полностью завершено.

Пусть $\mathcal{M}_r$ — множество всех ненильпотентных 0-минимальных правых идеалов из S. Если $\mathcal{M}_r$ не пусто, то его *базисом* мы называем такое подмножество $\{R_i \mid i \in I\}$ из $\mathcal{M}_r$, что (i) если $R \in \mathcal{M}_r$, то $R \subseteq SR_i$ при некотором $i \in I$, и (ii) если $i \neq j$ в I, то $SR_i \neq SR_j$ (и поэтому $SR_i \cap SR_j = 0$ по лемме 6.20).

Из предыдущих двух лемм непосредственно вытекает следующая теорема. Заметим сначала, что объединение двух пересекающихся по нулю идеалов A и B полугруппы S является полугруппой, которая полностью определяется заданием идеалов A и B. В самом деле, $AB = BA = 0$, а другие произведения в $A \cup B$ суть произведения в A или в B. Обратно, если $S = A \cup B$ есть объединение пересекающихся по нулю подполугрупп A и B, причем $AB = BA = 0$, то A и B суть двусторонние идеалы в S. Мы будем говорить, что S есть *0-прямое объединение* подполугрупп $\{S_i \mid i \in I\}$, если S есть их объединение и при $i \neq j$ выполняются равенства $S_i \cap S_j = 0$ и $S_iS_j = S_jS_i = 0$. Полугруппы S_i будем называть *слагаемыми* в этом 0-прямом объединении.

Теорема 6.22. *Пусть $S = S^0$ — полугруппа и Σ_r — ее правый цоколь. Тогда Σ_r является двусторонним идеалом в S. Пусть $\mathcal{M}_r$ — множество всех ненильпотентных 0-минимальных правых идеалов из S. Если $\mathcal{M}_r$ пусто, то $\Sigma_r^2 = 0$. В противном случае пусть $\{R_i \mid i \in I\}$ — базис множества $\mathcal{M}_r$. Пусть N — двусторонний аннулятор Σ_r в Σ_r. Тогда N является двусторонним идеалом в S и Σ_r есть 0-прямое объединение идеала N и множества $\{SR_i \mid i \in I\}$ двусторонних идеалов из S.*

Как мы видели в теореме 6.19 (5), каждый 0-минимальный правый идеал из S, содержащийся в одном из идеалов SR_i, является невырожденным 0-минимальным правым идеалом в этом идеале SR_i и поэтому также невырожден в Σ_r. Это неверно для 0-минимальных идеалов из S, содержащихся в N, потому что Σ_r является правым аннулятором каждого такого идеала. В действительности каждый ненулевой элемент из N определяет вырожденный 0-минимальный правый идеал из Σ_r. Таким образом, Σ_r является объединением своих 0-минимальных правых идеалов, двусторонний аннулятор полугруппы Σ_r совпадает с объединением $\{0\}$ и ее вырожденных 0-минимальных правых идеалов (которые в действительности являются двусторонними идеалами), остальные 0-минимальные правые идеалы полугруппы Σ_r являются (невырожденными) 0-минимальными правыми идеалами в S. Используя упражнение 5, приведенное ниже, мы можем построить полугруппу S, в которой мощность $|N|$ множества N имеет наперед заданное значение и в которой $\Sigma_r \neq N$.

Пользуясь теоремой 6.19, мы можем построить следующее разложение полугруппы Σ_r. Пусть A_i — правый аннулятор полугруппы SR_i в SR_i $(i \in I)$. Каждый A_i является тогда двусторонним идеалом в S. Следовательно, это верно и для $A = \bigcup \{A_i \mid i \in I\} \bigcup N$. Легко видеть, что A есть в точности правый аннулятор полугруппы Σ_r в Σ_r и совпадает с объединением $\{0\}$ и всех 0-минимальных правых идеалов с нулевым умножением из S. Пусть B_i есть 0-простая часть полугруппы SR_i (см. теорему 6.19) и $B = \{0\} \cup \{B_i \mid i \in I\}$. Как объединение правых идеалов B_i из S, множество B является также правым идеалом в S. Очевидно, каждое B_i является двусторонним идеалом в B и различные B_i пересекаются по нулю. Правый идеал B совпадает также с объединением $\{0\}$ и всех ненильпотентных 0-минимальных правых идеалов из S. Мы доказали следующую теорему.

Теорема 6.23. *Пусть $S = S^0$ — полугруппа и Σ_r — ее правый цоколь. Обозначим через A $[B]$ объединение идеала $\{0\}$ и всех нильпотентных [ненильпотентных] 0-минимальных правых идеалов из S. Тогда*

(1) Σ_r есть объединение пересекающихся по нулю полугрупп A и B.

(2) $A = A_{\Sigma_r}(\Sigma_r)$, *откуда* $A^2 = 0$ *и* A *есть двусторонний идеал из* S;

(3) B *является правым идеалом в* S;

(4) *если полугруппа* B *отлична от нуля, то она является* 0-*прямым объединением множества* $\{B_i \mid i \in I\}$ *идеалов из* B, *где каждое* B_i *есть правый идеал из* S, *кроме того,* B_i *есть* 0-*простая полугруппа, содержащая* 0-*минимальный правый идеал* (*из* B_i).

Если R — нильпотентный правый идеал полугруппы $S = S^0$, то $R^k = 0$ при некотором натуральном k и $S^1R = R \cup SR$ — нильпотентный двусторонний идеал из S, содержащий R. В самом деле,

$$(S^1R)^k = S^1 (RS^1)^{k-1} R \subseteq S^1R^k = 0.$$

Определим 0-*радикал* N полугруппы S как объединение всех нильпотентных двусторонних идеалов из S; он содержит все нильпотентные односторонние идеалы из S. Как и для колец, N не обязательно сам нильпотентен. О других видах радикалов см. в § 11.6 и в упражнениях к § 6.6. Мы будем говорить, что S — полугруппа *без нильпотентных идеалов*, если $N = 0$.

Следствие 6.24. *Пусть* $S = S^0$ — *полугруппа без нильпотентных идеалов и* Σ_r — *ее правый цоколь. Тогда* Σ_r *является* 0-*прямым объединением идеала* $\{0\}$ *и множества* $\{B_i \mid i \in I\}$ *идеалов из* S, *где каждое* B_i *есть* 0-*простая полугруппа, содержащая* 0-*минимальный правый идеал* (*из* B_i).

Кроме того, каждое B_i *является* 0-*простым идеалом в* S, *и если* C — *произвольный* 0-*простой идеал из* S, *содержащий* 0-*минимальный правый идеал* (*из* C), *то* C *совпадает с одним из* B_i.

Доказательство. В обозначениях теоремы предположение о том, что S не имеет нильпотентных идеалов, влечет за собой равенство $A = 0$. Следовательно, $\Sigma_r = B$ есть 0-прямое объединение идеалов B_i из B, т. е. идеалов из Σ_r.

Докажем, что каждое B_i здесь является идеалом в S. Как видно из доказательства теоремы, каждое B_i является 0-простым слагаемым полугруппы SR_i, где $R_i = R_i^2$ есть 0-минимальный правый идеал из S, и $SR_i = A_i \cup B_i$, где $A_i^2 = 0$ и A_i — идеал в S. Так как S — полугруппа без нильпотентных идеалов, $A_i = 0$ и, следовательно, $B_i = SR_i$ является двусторонним идеалом в S.

Наконец, пусть C есть 0-простой идеал из S, содержащий свой 0-минимальный правый идеал R. Так как C является 0-простой полугруппой, $R^2 = R$ и поэтому $RS = R^2S = R(RS) \subseteq RC \subseteq R$; отсюда вытекает, что R есть 0-минимальный правый идеал в S. Следовательно, C совпадает с одним из слагаемых B_i правого цоколя Σ_r.

Упражнения к § 6.3.

1. В обозначениях теоремы 6.23 A является 0-радикалом правого цоколя Σ_r. (Шварц [1951], § 10.)

2. В обозначениях теоремы 6.23 следующие утверждения эквивалентны:

(a) B есть двусторонний идеал в S.

(b) B есть 0-прямое объединение $\{0\}$ и 0-минимальных двусторонних идеалов из S.

(c) A совпадает с двусторонним аннулятором Σ_r в Σ_r.

(d) Каждый ненильпотентный 0-минимальный правый идеал в S содержится в 0-минимальном двустороннем идеале полугруппы S. (Шварц [1951], § 10.)

3. Пусть $S = S^0$ — такая полугруппа с нетривиальным правым цоколем Σ_r, что $ab = 0$ $(a, b \in S)$ влечет за собой $ba = 0$. Тогда Σ_r является 0-прямым объединением полугруппы A с нулевым умножением и множества 0-простых полугрупп B_i, которые суть объединения своих 0-минимальных правых идеалов. Кроме того, B_i (так же как и A) является двусторонним идеалом в S. (Лефевр [1962], теорема 3.16 при $W = 0$.)

4. Пусть P и Q — непересекающиеся полугруппы и S состоит из P, Q, $P \times Q$ и символа 0. Сохраняя произведения в P и Q, определим произведение в S, полагая

$$pq = (p, q),$$
$$p'(p, q) = (p'p, q),$$
$$(p, q)\,q' = (p, qq')$$

для $p, p' \in P$ и $q, q' \in Q$. Все остальные произведения по определению считаем равными 0. Тогда S — полугруппа. Если Q — простая справа полугруппа, то правый цоколь полугр ппы S равен $0 \cup Q \cup (P \times Q)$. В обозначениях теоремы 6.23 $B = 0 \cup Q$, $A = 0 \cup (P \times Q)$, и мы имеем $SB = A \cup B$.

5. (a) Пусть F — конечное непустое множество и $N = F \cup 0$. Зададим операцию на N, превратив $N = N^0$ в полугруппу с нулевым умножением. Пусть T — бесконечная циклическая полугруппа, порожденная элементом α. Определим произведения $n\alpha$ $(n \in N)$, рассматривая α как отображение множества N в N, при котором (i) 0 переводится в 0 и (ii) элементы из F циклически переставляются. Определим произведения $n\alpha^r$, рассматривая α^r как r-ю степень отображения, соответствующего элементу α. Положим также $TN = 0$. Тогда $S = T \cup N$ превращается в полугруппу, для которой $\Sigma_r(S) = N$.

(b) Пусть $N = N^0$ — полугруппа произвольной бесконечной мощности с нулевым умножением и T — полугруппа правых сдвигов множества $N \setminus 0$, транзитивная на $N \setminus 0$. Предположим, что T не содержит минимальных правых идеалов. (Существование такой полугруппы T будет установлено в § 8.2.) Тогда существует полугруппа $S = N \cup T$, для которой $\Sigma_r(S) = N$ (ср. с теоремой 6.7).

(с) Пусть Σ_i — правый цоколь полугруппы $S_i = S_i^0$ и N_i — двусторонний аннулятор для Σ_i $(i \in I)$. Пусть S есть 0-прямое объединение полугрупп S_i. Тогда правый цоколь Σ полугруппы S равен 0-прямому объединению правых цоколей Σ_i и двусторонний аннулятор N для Σ равен 0-прямому объединению аннуляторов N_i $(i \in I)$.

6. Пусть Σ_r— правый цоколь полугруппы $S = S^0$. Подмножество $H \subseteq \Sigma_r \setminus 0$ будем называть *поперечным сечением* правого цоколя Σ_r, если оно пересекается с каждым 0-минимальным правым идеалом из S точно по одному элементу. Следуя Дюбрею [1941], подмножество H из S будем называть *0-чистым справа*, если для каждого $a \in S \setminus 0$ существует такой $x \in S$, что $ax \in H$. Непустое подмножество H из S будем называть *0-минимальным комплексом* для S, если (i) $0 \notin H$, (ii) H 0-чисто справа и (iii) никакое собственное подмножество из H не является 0-чистым справа.

(а) Если H есть 0-минимальный комплекс для S и $h \in H$, то hS^1 — невырожденный 0-минимальный правый идеал из S и каждый правый идеал из S, не являющийся идеалом с нулевым умножением, содержит некоторый hS^1, где $h \in H$. Множество H является поперечным сечением правого цоколя Σ_r.

(b) Пусть S — такая полугруппа с нулем, что каждый правый идеал из S, не являющийся идеалом с нулевым умножением, содержит некоторый невырожденный 0-минимальный правый идеал из S. Тогда любое поперечное сечение правого цоколя Σ_r является 0-минимальным комплексом для S. (Лефевр [1962], теоремы 3.4 и 3.7 при $W = 0$.)

§ 6.4. Объединенная теория левого и правого цоколей полугруппы

Предыдущий параграф был посвящен изучению строения правого цоколя Σ_r полугруппы $S = S^0$, и результаты, двойственные результатам § 6.3, применимы, конечно, к левому цоколю Σ_l. В данном параграфе мы рассмотрим оба цоколя вместе. Теорема 6.29 описывает строение двустороннего идеала $\Sigma_r \cup \Sigma_l$ полугруппы S. Заметим, что единственным ограничением, которое мы налагаем на S, является требование, чтобы S содержала нуль. Теорема 6.29 справедлива, конечно, и для вырожденного случая, когда S не имеет 0-минимальных правых [левых] идеалов и, следовательно, $\Sigma_r = 0$ $[\Sigma_l = 0]$.

В § 9 и 10 работы [1951] Шварц рассматривал объединенную теорию не только цоколей Σ_r и Σ_l, но также и объединения Σ_t

всех 0-минимальных двусторонних идеалов из S. Мы приводим два результата Шварца относительно Σ_t в упражнении 7 ниже. Все его результаты относительно Σ_r и Σ_l могут быть выведены из нашей основной теоремы 6.29.

Мы будем говорить, что идеал M полугруппы $S = S^0$ является *вполне 0-простым идеалом*, если M есть вполне 0-простая полугруппа (§ 2.7). Следующая теорема принадлежит Клиффорду [1948] и Ричу [1949]. (См. также упражнение 2 (b) ниже и упражнение 6 к § 2.7.)

Теорема 6.25. *Пусть $L = L^2$ $[R = R^2]$ есть 0-минимальный левый [правый] идеал полугруппы $S = S^0$. Тогда $SR = LS$ в том и только в том случае, когда $R \cap L \neq 0$; если это имеет место, то SR является вполне 0-простым идеалом в S.*

Обратно, если M — вполне 0-простой идеал из S, то существуют такие 0-минимальный левый идеал $L = L^2$ и 0-минимальный правый идеал $R = R^2$ из S, что $M = SR = LS$. В качестве L $[R]$ можно взять произвольный 0-минимальный левый [правый] идеал из M.

Доказательство. По теореме 6.19 SR есть объединение $A \cup B$, где $A \cap B = 0$, $A = A_{SR}(SR)$ и B есть 0-простая полугруппа, содержащая R в качестве своего 0-минимального правого идеала. По теореме, двойственной к теореме 6.19, LS есть объединение $A' \cup B'$, где $A' \cap B' = 0$, $A' = {}_{LS}A\,(LS)$ и B' есть 0-простая полугруппа, содержащая L в качестве своего 0-минимального левого идеала.

Предположим теперь, что $SR = LS = M$. Тогда правый аннулятор для SR является также правым аннулятором для LS и по теореме, двойственной к теореме 6.19 (3), он тривиален. Таким образом, $A = 0$. Аналогично, $A' = 0$. Следовательно, $M = B = B'$ есть 0-простая полугруппа, содержащая как 0-минимальный левый идеал, так и 0-минимальный правый идеал. По теореме 2.48 M является вполне 0-простой полугруппой. Отсюда, в частности, вытекает, что $R \cap L \neq 0$ (следствие 2.52b).

Обратно, пусть $R \cap L \neq 0$ и $x \in (R \cap L) \setminus 0$. Тогда $xS = R$ и $Sx = L$ (лемма 6.11). Следовательно, $SR = SxS = LS$.

Пусть теперь M — произвольный вполне 0-простой идеал из S и R $[L]$ — его 0-минимальный правый [левый] идеал. Пусть $r \in R \setminus 0$. Тогда $rS \subseteq rMS \subseteq rM = R = rM \subseteq rS$. Таким образом, $rS = R$ и поэтому R является 0-минимальным правым идеалом в S. Аналогично, L есть 0-минимальный левый идеал в S. Поскольку L и R являются 0-минимальными идеалами из M, имеют место равенства $L = L^2$, $R = R^2$ и $L \cap R \neq 0$. Следовательно, по первой, уже доказанной, части теоремы $SR = LS$ есть вполне 0-простой идеал из S, имеющий нетривиальное пересечение (содержащее $L \cup R$) с M. Отсюда вытекает, что $SR = LS = M$; это завершает доказательство теоремы.

Нам понадобятся три следующие леммы, в которых рассматривается случай $R \cap L = 0$.

Лемма 6.26. *Пусть* $L = L^2$ $[R = R^2]$ *есть* 0-*минимальный левый* [*правый*] *идеал полугруппы* $S = S^0$ *и* $R \cap L = 0$. *Тогда* $SR \cap LS \subseteq A \cap A'$ *и* $RA' = AL = 0$, *где* $A = A_{SR}(SR)$ *и* $A' = {}_{LS}A(LS)$.

Доказательство. Пусть $V = SR \cap LS$. Тогда $SRV \subseteq SRLS \subseteq S(R \cap L)S = 0$ и потому $V \subseteq A$; аналогично, $V \subseteq A'$. Так как $A' \subseteq LS$ и $RL \subseteq R \cap L = 0$, мы имеем $RA' = 0$ и, аналогично, $AL = 0$.

Лемма 6.27. *Пусть* $R = R^2$ *есть* 0-*минимальный правый идеал и* L — 0-*минимальный левый идеал с нулевым умножением полугруппы* $S = S^0$. *Тогда* $R \cap L = 0$.

Доказательство. Предположим, что $R \cap L \neq 0$, пусть $x \in (R \cap L) \setminus 0$. Тогда $R = xS \subseteq LS$, и поэтому $R^2 \subseteq (LS^2) = LSLS \subseteq L^2S = 0$, т. е. мы пришли к противоречию. Следовательно, $R \cap L = 0$.

Лемма 6.28. *Пусть* R *есть* 0-*минимальный правый идеал с нулевым умножением и* L — 0-*минимальный левый идеал полугруппы* $S = S^0$. *Тогда* $RL = 0$.

Доказательство. Предположим, что $RL \neq 0$, и пусть $x \in RL \setminus 0$. Так как $RL \subseteq R \cap L$, то $x \in R \setminus 0$ и $x \in L \setminus 0$. Из $RL \neq 0$ вытекает $RS \neq 0$ и $SL \neq 0$, так что R и L — невырожденные идеалы. Таким образом, в силу леммы 6.1 $R = xS$ и $L = Sx$. Следовательно, $x \in xS$ и потому

$$RL = xS \cdot Sx \subseteq xSx \subseteq xSxS = R^2 = 0,$$

что противоречит предположению о том, что $RL \neq 0$.

Теорема 6.29. *Пусть* Σ_l *и* Σ_r —*соответственно левый и правый цоколи полугруппы* $S = S^0$. *Введем следующие обозначения:*

A $[A']$ — *объединение* $\{0\}$ *и всех нильпотентных* 0-*минимальных правых* [*левых*] *идеалов из* S;

C $[C']$ — *объединение* $\{0\}$ *и всех ненильпотентных* 0-*минимальных правых* [*левых*] *идеалов из* S, *имеющих отличное от нуля пересечение с некоторым* 0-*минимальным левым* [*правым*] *идеалом из* S;

D $[D']$ — *объединение* $\{0\}$ *и всех ненильпотентных* 0-*минимальных правых* [*левых*] *идеалов из* S, *пересекающихся по нулю с каждым* 0-*минимальным левым* [*правым*] *идеалом из* S.

Положим также $E = A \cup A'$ *и* $F = A \cap A'$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

(1) $C = C'$ *и* C *есть двусторонний идеал в* S, *который равен* 0-*прямому объединению* $\{0\}$ *и всех вполне* 0-*простых идеалов из* S.

(2) D *есть правый идеал в* S, *который равен* 0-*прямому объединению* $\{0\}$ *и всех* 0-*минимальных двусторонних идеалов* B_i *из* D. *Каждый* B_i *есть правый идеал в* S, *содержащий* 0-*минимальный правый идеал из* S, *но не содержащий* 0-*минимальных левых идеалов из* S. *Далее, каждый* B_i *является* 0-*простой полугруппой, содержащей свой* 0-*минимальный правый идеал. Множество* D' — *левый идеал в* S, *который обладает свойствами, двойственными к свойствам, сформулированным для* D.

(3) A, A', E *и* F — *двусторонние идеалы из* S, *причем*

$$A^2 = A'^2 = AA' = 0,$$
$$CE = EC = DE = ED' = E^3 = 0,$$
$$CF = FC = F^2 = 0,$$

(4)

$$\Sigma_r = C \cup D \cup A,$$
$$\Sigma_l = C \cup D' \cup A',$$
$$\Sigma_r \cup \Sigma_l = C \cup D \cup D' \cup E,$$
$$\Sigma_r \cap \Sigma_l = C \cup F,$$

где в каждом из четырех разложений объединяемые множества попарно пересекаются по нулю.

Наконец, 0-*радикалы полугрупп* Σ_r, Σ_l, $\Sigma_r \cup \Sigma_l$ *и* $\Sigma_r \cap \Sigma_l$ *равны соответственно* A, A', E *и* F.

Замечания. Хотя каждый из идеалов B_i, описанных в (2), не содержит 0-минимальных левых идеалов из S, он может содержать свой 0-минимальный левый идеал. (См. упражнение 4 к настоящему параграфу и следствие 6.30.)

Разложения в (4) для Σ_r, Σ_l и $\Sigma_r \cap \Sigma_l$ в действительности являются 0-прямыми объединениями (см. упражнение 8), но это неверно для $\Sigma_r \cup \Sigma_l$, так как может случиться, что $D'D \neq 0$ (упражнение 4).

Доказательство. Пусть $\{R_i \mid i \in I\}$ — базис (§ 6.3) множества $\mathscr{M}_r$ всех ненильпотентных 0-минимальных правых идеалов из S. Пусть I' — множество таких $i \in I$, что существует некоторый 0-минимальный левый идеал L из S, для которого $R_i \cap L \neq 0$. По лемме 6.27 L ненильпотентен. На основании теоремы 6.25 SR_i является вполне 0-простым идеалом в S при $i \in I'$. Так как $R_i \subseteq SR_i$, множество C содержится в объединении C_0 всех вполне 0-простых идеалов из S и $\{0\}$. Обратно, пусть M — вполне 0-простой идеал из S и R $[L]$ — произвольный

0-минимальный правый [левый] идеал из M. Тогда по теореме 6.25 R [L] является таким 0-минимальным правым [левым] идеалом из S, что $R \cap L \neq 0$, откуда $R \subseteq C$. Поскольку M совпадает с объединением своих 0-минимальных правых идеалов, $M \subseteq C$, так что $C_0 \subseteq C$. Таким образом, $C = C_0$. Последнее же множество, очевидно, является двусторонним идеалом полугруппы S, и оно равно либо $\{0\}$, либо 0-прямому объединению вполне 0-простых слагаемых SR_i $(i \in I')$.

Пусть $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — базис множества $\mathscr{M}_l$ всех ненильпотентных 0-минимальных левых идеалов из S, а Λ' — множество таких $\lambda \in \Lambda$, что существует некоторый (ненильпотентный) 0-минимальный правый идеал R из S, для которого $R \cap L_\lambda \neq 0$. На основании рассуждений, двойственных предыдущим, $C' = C_0 = \{0\} \cup \{L_\lambda S \mid \lambda \in \Lambda'\}$. Это завершает доказательство утверждения (1) теоремы.

Пусть N [N'] — двусторонний аннулятор Σ_r в Σ_r [Σ_l в Σ_l], $I'' = I \setminus I'$ и $\Lambda'' = \Lambda \setminus \Lambda'$. По теореме 6.22 и двойственной к ней мы имеем

$$\Sigma_r = \bigcup \{SR_i \mid i \in I''\} \cup C \cup N,$$
$$\Sigma_l = \bigcup \{L_\lambda S \mid \lambda \in \Lambda''\} \cup C \cup N'.$$

Пусть A_i — правый аннулятор полугруппы SR_i в SR_i и A'_λ — левый аннулятор полугруппы $L_\lambda S$ в $L_\lambda S$. В обозначениях теоремы 6.23 $A = A_{\Sigma_r}(\Sigma_r) = \bigcup \{A_i \mid i \in I''\} \cup N$, так как $A_i = 0$ для каждого $i \in I'$. Двойственно, $A' = \bigcup \{A'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda''\} \cup N'$. На основании теоремы 6.19 мы имеем $SR_i = A_i \cup B_i$, где B_i есть объединение всех ненильпотентных 0-минимальных правых идеалов из S, содержащихся в SR_i. Для каждого $i \in I''$ множество B_i является 0-простой подполугруппой из SR_i, содержащей 0-минимальные правые идеалы из S (которые, очевидно, являются правыми идеалами и в SR_i), но не содержащей 0-минимальных левых идеалов из S, так как иначе SR_i была бы вполне 0-простым идеалом в S и мы имели бы $i \in I'$. Для $L_\lambda S = A'_\lambda \cup B'_\lambda$ $(\lambda \in \Lambda'')$ справедливы двойственные утверждения.

В силу предыдущих замечаний и по определению множеств D и D' мы имеем

$$D = \bigcup \{B_i \mid i \in I''\} \quad \text{и} \quad D' = \bigcup \{B'_\lambda \mid \lambda \in \Lambda''\}.$$

Свойства, сформулированные для D и D' в пункте (2) теоремы, вытекают теперь из теоремы 6.23.

Ясно, что

$$\Sigma_r = D \cup C \cup A \quad \text{и} \quad \Sigma_l = D' \cup C \cup A'$$

и, так как $E = A \cup A'$,

$$\Sigma_r \cup \Sigma_l = C \cup D \cup D' \cup E.$$

Очевидно, C пересекается по нулю с D, D' и E. Предположим, что $a \in (D \cap D') \setminus 0$. Тогда $a \in SR_i \cap L_\lambda S$ для некоторых $i \in I''$, $\lambda \in \Lambda''$ и по определению I'' (или Λ'') $R_i \cap L_\lambda = 0$. Следовательно, в силу леммы 6.26 $a \in A_i \cap A'_\lambda$. Но $A_i \cap D = 0$. Мы пришли к противоречию, и отсюда следует, что $D \cap D' = 0$. Из леммы 6.27 легко вывести, что $D \cap A' = 0$. Следовательно, $D \cap E = 0$. Двойственно, мы имеем $D' \cap E = 0$. Таким образом, C, D, D' и E — попарно пересекающиеся по нулю множества; это же верно и для C, D, A, и для C, D, A'. Тот факт, что

$$\Sigma_r \cap \Sigma_l = C \cup F,$$

где $C \cap F = C \cap A \cap A' = 0$, теперь очевиден. Итак, мы доказали, что имеют место четыре разложения, указанные в пункте (4) теоремы.

Так как по теореме 6.23 и двойственной к ней теореме A и A' являются двусторонними идеалами в S, двусторонним идеалом в S будет и $E = A \cup A'$. В силу того, что C и E суть двусторонние идеалы из S, пересекающиеся по нулю, имеют место равенства $CE = EC = 0$. Так как D — правый идеал, а E — двусторонний идеал в S, из уже доказанного вытекает, что $DE \subseteq D \cap E = 0$. Двойственно, $ED' = 0$.

Из леммы 6.28 непосредственно следует равенство $AA' = 0$. (Двойственное соотношение $A'A = 0$ не обязательно выполняется; см. упражнение 5.) Так как $A^2 = 0$ и $A'^2 = 0$, то

$$E^2 = (A \cup A')^2 = A^2 \cup AA' \cup A'A \cup A'^2 = A'A,$$
$$E^3 = (A \cup A')\, A'A = AA'A \cup A'^2A = 0.$$

Это заканчивает доказательство утверждения пункта (3) теоремы.

Так как E — нильпотентный идеал, он содержится в 0-радикале N полугруппы $\Sigma_r \cup \Sigma_l$. Но $N \cap R = 0$ для каждого ненильпотентного 0-минимального правого идеала R из S, поэтому $N \cap C = N \cap D = 0$. Аналогично, $N \cap D' = 0$. Таким образом, $N \subseteq E$ и E является 0-радикалом для $\Sigma_r \cup \Sigma_l$. Три других утверждения относительно 0-радикалов доказываются аналогично. Доказательство теоремы завершено.

Для полугрупп без нильпотентных идеалов доказанная теорема может быть усилена.

Следствие 6.30. *Пусть $S = S^0$ — полугруппа без нильпотентных идеалов, содержащая как 0-минимальные левые идеалы, так и 0-минимальные правые идеалы, и пусть Σ_r, Σ_l — соответственно левый и правый цоколи полугруппы S. Определим C, D, D' и E, как в теореме. Тогда $E = 0$ и*

$$\Sigma = \Sigma_r \cup \Sigma_l = C \cup D \cup D'$$

есть 0-прямое объединение полугрупп C, D и D'.

Далее, пусть Σ_λ и Σ_ρ — левый и правый цоколи полугруппы Σ соответственно. Определим C_1, D_1 и D'_1 для Σ аналогично соответствующим полугруппам C, D и D' для S и положим $C^* = C_1 \cap D$, $C^{*\prime} = C_1 \cap D'$. Тогда

$$\Sigma = \Sigma_\lambda \cup \Sigma_\rho = C_1 \cup D_1 \cup D'_1$$

есть 0-прямое объединение полугрупп C_1, D_1 и D'_1 и

$$C_1 = C \cup C^* \cup C^{*\prime},$$
$$D = D_1 \cup C^*,$$
$$D' = D'_1 \cup C^{*\prime},$$

где каждое объединение является 0-прямым.

Кроме того, D_1 $[D'_1]$, если оно отлично от $\{0\}$, равно 0-прямому объединению 0-простых полугрупп, каждая из которых содержит свой 0-минимальный правый [левый] идеал, но не содержит своих 0-минимальных левых [правых] идеалов.

Доказательство. В силу утверждения (3) теоремы имеем $E^3 = 0$. Так как по предположению S есть полугруппа без нильпотентных идеалов, отсюда следует, что $E = 0$. Снова на основании теоремы D — правый идеал, а C — двусторонний идеал в S. Следовательно, $DC \subseteq D \cap C = 0$. Тогда $(CD)^2 = CDCD = 0$, откуда в силу предположения двусторонний идеал CD полугруппы S равен 0. Аналогично, $D'C = 0 = C'D$. Снова, точно так же, как и для CD, получаем $DD' \subseteq D \cap D' = 0$ и $D'D = 0$. Следовательно, мы показали, что объединение множеств C, D и D' является 0-прямым. Теперь легко проверить, что разложения для C_1, D и D' также являются 0-прямыми.

Остается доказать, что 0-простые подполугруппы (если таковые имеются), объединение которых совпадает с D_1, не могут содержать 0-минимальных левых идеалов. Предположим, от противного, что L есть 0-минимальный левый идеал из B_1, где B_1 есть 0-простой двусторонний идеал из D_1, так что D_1 является 0-прямым объединением идеала B_1 и некоторого двустороннего идеала D^*. Пусть $l \in L \setminus 0$. Тогда, так как $\Sigma = C_1 \cup B_1 \cup D^* \cup D'_1$ есть 0-прямое объединение, $\Sigma l = B_1 l = L$. Таким образом, L является 0-минимальным левым идеалом в Σ. Далее, $L^2 = B_1 l B_1 l = B_1 l = L$ и по теореме 6.25 B_1 является вполне 0-простым идеалом в Σ. Таким образом, $B_1 \subseteq C_1$, что противоречит предположению о том, что $B_1 \subseteq D_1$. Для D'_1 справедливы двойственные замечания; это завершает доказательство следствия.

Упражнения к § 6.4

1. Пусть S — полугруппа без нуля, содержащая минимальные левые и правые идеалы. В качестве следствия теоремы 6.25 (примененной к S^0) получаем, что S обладает вполне простым ядром K.

Из теоремы 6.19 (4) и двойственной к ней теоремы вытекает, что каждый правый [левый] идеал ядра K является правым [левым] идеалом в S. (Клиффорд [1948].)

2. (a) Пусть R $[L]$ — такой 0-минимальный правый [левый] идеал из S, для которого $RL \neq 0$. Тогда R и L невырожденны, $R \cap L \neq 0$, $R^2 = R$ и $L^2 = L$.

(b) Пусть R $[L]$ есть 0-минимальный правый [левый] идеал из S, причем $RL \neq 0$ и $LR \neq 0$. Тогда LR является вполне 0-простым идеалом в S. (Рич [1949].)

3. Пусть S — регулярная рисовская полугруппа $\mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ (§ 3.1, стр. 124) над G^0, где G — группа, с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$. Пусть $p_{\varkappa j} = 0$ для некоторых $\varkappa \in \Lambda$, $j \in I$, и пусть

$$L_\varkappa = \{(a)_{i\varkappa} \mid a \in G^0,\ i \in I\},$$
$$R_j = \{(a)_{j\lambda} \mid a \in G^0,\ \lambda \in \Lambda\}.$$

Тогда R_j $[L_\varkappa]$ является ненильпотентным 0-минимальным правым [левым] идеалом в S, причем

$$R_jL_\varkappa = R_j \cap L_\varkappa = H_{i\varkappa} \cup \{0\} \neq 0,$$

но $L_\varkappa R_j = 0$. Таким образом, R_j и $L_\varkappa$ удовлетворяют условиям первой части теоремы 6.25, но не удовлетворяют условиям теоремы Рича (упражнение 2 (b)).

4. В упражнении 4 к § 6.3 пусть полугруппа Q проста справа, а полугруппа P проста слева. В обозначениях теоремы 6.29 $C = \{0\}$, $D = Q \cup \{0\}$, $D' = P \cup \{0\}$ и $A = A' = E = F = D'D = (P \times Q) \cup \{0\}$. Если Q также проста и слева, т. е. если Q — группа, то D является вполне 0-простой полугруппой, но не является вполне 0-простым идеалом полугруппы S. Этот пример показывает также, что полугруппа может содержать такие ненильпотентные 0-минимальные правый и левый идеалы R и L, что $RL = 0$ и $LR \neq 0$.

5. Пусть P и Q — непересекающиеся полугруппы, а e, 0 — элементы, не содержащиеся в P или Q. Пусть T есть объединение множеств P, Q, $P \times Q$, e, $P \times e$, $e \times Q$ и 0. Определим умножение в T следующей таблицей, где p и p' — произвольные элементы из P, а q и q' — из Q:

	p'	q'	(p', q')	e	(p', e)	(e, q')
p	pp'	(p, q')	(pp', q')	(p, e)	(pp', e)	(p, q')
q	0	qq'	0	0	0	0
(p, q)	0	(p, qq')	0	0	0	0
e	0	(e, q')	0	e	0	(e, q')
(p, e)	0	(p, q')	0	(p, e)	0	(p, q')
(e, q)	0	(e, qq')	0	0	0	0

Тогда T — полугруппа. (Полугруппа S из упражнения 4 является подполугруппой этой полугруппы. Так как $T = \langle S, e \rangle$, нам нужно применить тест ассоциативности Лайта (§ 1.2) лишь к одному элементу e.) Предположим теперь, что полугруппа P проста слева, а Q проста справа. В обозначениях теоремы 6.29 $A'A = (P \times Q) \cup \{0\}$ и $E^2 \neq 0$.

6. (a) Если правый цоколь Σ_r и левый цоколь Σ_l полугруппы S совпадают, то $\Sigma_r = \Sigma_l = C \cup E$, где C и E — идеалы из S, пересекающиеся по нулю, причем C равно $\{0\}$ или 0-прямому объединению вполне 0-простых полугрупп, E — полугруппа с нулевым умножением.

(b) Если S не содержит нильпотентных идеалов, то $\Sigma_r = \Sigma_l$ тогда и только тогда, когда каждый 0-минимальный двусторонний идеал из S, содержащий 0-минимальный левый идеал из S, также содержит и 0-минимальный правый идеал из S и наоборот. В этом случае Σ_r $(= \Sigma_l)$ равно $\{0\}$ или 0-прямому объединению вполне 0-простых полугрупп (Шварц [1951], § 9.)

7. Пусть Σ_t — объединение $\{0\}$ и всех 0-минимальных двусторонних идеалов полугруппы $S = S^0$. Если S не содержит нильпотентных идеалов, то $\Sigma_r \subseteq \Sigma_t$; и $\Sigma_r = \Sigma_t$ тогда и только тогда, когда каждый 0-минимальный двусторонний идеал из S содержит 0-минимальный правый идеал из S. (Шварц [1951], § 9.)

8. В обозначениях теоремы 6.29 $CD = DC = CD' = D'C = DD' = 0$, а $A'A$ $(= E^2)$ и $D'D$ содержатся в F.

9. Пусть $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ — рисовская полугруппа над группой с нулем G^0 с ненулевой сэндвич-матрицей P. Обозначим через M и N соответственно левый и правый аннуляторы полугруппы S. Положим

$$M \cap N = K, \ (S \setminus (M \cup N)) \cup \{0\} = C,$$
$$(M \setminus K) \cup \{0\} = A, \quad (N \setminus K) \cup \{0\} = B,$$
$$C \cup B = U \quad \text{и} \quad C \cup A = V.$$

Тогда:

(i) K — двусторонний аннулятор для S;

(ii) C — вполне 0-простая полугруппа;

(iii) M, N и K — полугруппы с нулевым умножением и двусторонние идеалы в S;

(iv) V совпадает со своим левым цоколем, C равно объединению ненильпотентных 0-минимальных левых идеалов полугруппы V и A равно объединению $\{0\}$ и нильпотентных 0-минимальных левых идеалов из V;

(v) C — левый идеал из V и $CA = A$;

(vi) для U, C и B выполняются утверждения, двойственные к утверждениям пунктов (iv) и (v);

(vii) $BA = K$;

(viii) $C = S$ тогда и только тогда, когда матрица P регулярна.

§ 6.5. 0-прямые объединения 0-простых полугрупп

В этом параграфе мы рассмотрим различные способы характеризации полугрупп, которые нам встречались в качестве подполугрупп цоколей полугруппы и которые равны 0-прямым объединениям 0-простых полугрупп. Основные теоремы, теоремы 6.32 и 6.33, по существу принадлежат Шварцу ([1951], § 2), то же касается и следствий 6.34 и 6.37 (Шварц [1951], § 9 и 10). Эти результаты можно сравнить с приведенными в § 4.1 результатами Круазо [1953], касающимися разложений полугрупп на простые полугруппы.

Мы будем говорить, что полугруппа $S = S^0$ является *би-0-наслоенной*, если $x \in SxyS$ и $y \in SxyS$ для всех таких $x, y \in S$, что $xy \neq 0$. Аналогично, мы скажем, что полугруппа S *0-наслоена справа* [*слева*], если $x \in xyS$ [$y \in Sxy$] для всех таких $x, y \in S$, что $xy \neq 0$. Понятия, эквивалентные этим, были введены Шварцем ([1951], § 2); см. упражнение 1.

В терминах отношений эквивалентности Грина (§ 2.1) полугруппа S 0-наслоена слева [справа, би-0-наслоена] тогда и только тогда, когда $y\mathscr{L}xy$ [$x\mathscr{R}xy$, $x\mathscr{J}xy\mathscr{J}y$] для всех таких $x, y \in S$, что $xy \neq 0$. Для того чтобы проверить, например, последнее из этих утверждений, заметим сначала, что $J_{xy} \leqslant J_x$ для любых x, y. Далее, если $xy \neq 0$ и $x \in SxyS$, то ясно, что $x \cup xS \cup Sx \cup \cup SxS \subseteq SxyS$, откуда $J_x \leqslant J_{xy}$. Таким образом, $J_x = J_{xy}$ и, аналогично, $J_{xy} = J_y$. Обратно, предположим, что $J_x = J_{xy} = J_y$. Тогда $x, y \in xy \cup xyS \cup Sxy \cup SxyS$, т. е. существуют такие $a, b, c, d \in S^1$, что $x = axyb$ и $y = cxyd$. Следовательно,

$$\begin{aligned} x &= axyb = ax\cdot cxyd\cdot b = \\ &= axc\cdot axyb\cdot ydb = (axca)\,xy\,(bydb) \in \\ &\in SxyS \end{aligned}$$

и, аналогично, $y \in SxyS$. Наше утверждение доказано.

Модифицируя терминологию Дюбрея [1941] (см. также § 9.4), мы скажем, что подмножество X полугруппы $S = S^0$ *0-плотно* [*слева*, *справа*], если включение $xy \in X\setminus 0$ влечет за собой включение $x \in X$ и $y \in X$ [соответственно $x \in X$, $y \in X$].

Лемма 6.31. *Полугруппа $S = S^0$ би-0-наслоена* [*0-наслоена слева, 0-наслоена справа*] *тогда и только тогда, когда каждый двусторонний* [*левый, правый*] *идеал из S 0-плотен* [*справа, слева*].

Доказательство. Пусть полугруппа S би-0-наслоена, I — двусторонний идеал из S и $xy \in I\setminus 0$. Так как S би-0-наслоена, $x, y \in SxyS \subseteq I$. Таким образом, идеал I 0-плотен. Аналогично, если S является 0-наслоенной слева [справа], то каждый левый [правый] идеал 0-плотен справа [слева].

Обратно, если каждый двусторонний идеал 0-плотен, то при $xy \neq 0$ элементы x, y принадлежат $J(xy) = xy \cup xyS \cup Sxy \cup SxyS$. Таким образом, $x = axyb$ и $y = cxyd$ для некоторых a, b, c, $d \in S^1$. Следовательно, рассуждая, как и выше, получаем, что $x, y \in SxyS$ при $xy \neq 0$, т. е. S би-0-наслоена. Односторонние случаи рассматриваются аналогично.

Теперь мы подготовлены к тому, чтобы сформулировать и доказать нашу первую основную теорему. Понятие 0-прямого объединения было определено непосредственно перед теоремой 6.22. Заметим, что если S есть 0-прямое объединение своих 0-минимальных идеалов M_i, то каждый 0-минимальный идеал из S совпадает с одним из M_i и поэтому идеалы M_i в любом таком 0-прямом разложении полугруппы S определены однозначно. Отсюда и из доказательства теоремы 6.32 следует, что если имеет место (В), то 0-простые компоненты S_j из S и полугруппа Z с нулевым умножением однозначно определяются полугруппой S. Компоненты S_j — это ненильпотентные идеалы M_i, а Z — это объединение нильпотентных идеалов M_i.

Теорема 6.32. *Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:*

(А) *S есть 0-прямое объединение своих 0-минимальных идеалов.*

(В) *S есть 0-прямое объединение 0-простых полугрупп и полугруппы с нулевым умножением.*

(С) *S би-0-наслоена.*

(D) *Каждый двусторонний идеал из S является 0-плотным.*

Доказательство. Эквивалентность утверждений (С) и (D) установлена в лемме 6.31. Так как 0-минимальный идеал является либо 0-простой полугруппой, либо полугруппой с нулевым умножением (теорема 2.29), (А) влечет за собой (В). Предположим, что выполняется (В), так что S есть 0-прямое объединение 0-простых полугрупп S_i $(i \in I)$ и полугруппы Z с нулевым умножением. Пусть $xy \in S \setminus 0$. Тогда, очевидно, элементы x и y не принадлежат Z и, следовательно, ввиду того, что $S_iS_j = 0$ при $i \neq j$, x и y принадлежат некоторому S_k. Тогда $SxyS = S_kxyS_k = S_k$, так как S_k 0-проста. Таким образом, $x, y \in SxyS$, т. е. S би-0-наслоена. Итак, (В) влечет за собой (С).

Докажем теперь, что (В) влечет за собой (А). Прежде всего пусть M — идеал из S, содержащийся в S_i. Тогда M является идеалом в S_i и в силу 0-простоты S_i либо $M = 0$, либо $M = S_i$. Таким образом, S_i является 0-минимальным идеалом в S. Через M_z обозначим множество $\{0, z\}$, где $z \in Z \setminus 0$. Тогда Z равно 0-прямому объединению множеств M_z $(z \in Z \setminus 0)$ и каждое M_z, очевидно, является вырожденным 0-минимальным идеалом в S. Таким образом, S равно 0-прямому объединению своих 0-минимальных идеалов; этим мы доказали, что (В) влечет за собой (А).

Предположим теперь, что выполняется (C). Обозначим через $\{S_i \mid i \in I\}$ семейство различных множеств $J_x \cup 0$ $(x \neq 0)$, где, как обычно, J_x есть $\mathscr{J}$-класс, содержащий x. Тогда $S_i \cap S_j = 0$ при $i \neq j$. Далее, если $J_x \neq J_y$, то $J_x J_y = 0$. В самом деле, если $u \in J_x$, $v \in J_y$ и $uv \neq 0$, то, как отмечено выше, $J_x = J_u = J_{uv} = J_v = J_y$. Следовательно, $S_i S_j = 0$ при $i \neq j$. Пусть $y, z \in J_x$. Если $yz \neq 0$, то снова $J_y = J_{yz} = J_z = J_x$, так что $yz \in J_x$. Таким образом, каждое S_i является подполугруппой и S есть 0-прямое объединение подполугрупп S_i. Мы уже доказали, что $I(x) = J(x) \setminus J_x$ равно $\{0\}$ для любого $x \neq 0$. Следовательно, S_i изоморфны главным факторам полугруппы S, которые, как известно, являются 0-простыми полугруппами или полугруппами с нулевым умножением (лемма 2.39). Очевидно, что 0-прямое объединение полугрупп с нулевым умножением является полугруппой с нулевым умножением. Таким образом, S равно 0-прямому объединению 0-простых полугрупп и полугруппы с нулевым умножением. Следовательно, (C) влечет за собой (B).

Это завершает доказательство теоремы.

Теперь мы получим аналогичные результаты, рассматривая 0-прямые объединения 0-простых полугрупп, каждая из которых содержит 0-минимальный односторонний идеал.

Теорема 6.33. *Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:*

(A) *S равна объединению 0-минимальных правых идеалов (другими словами, S совпадает со своим правым цоколем Σ_r).*

(B) *S является 0-наслоенной справа.*

(C) *Каждый правый идеал из S 0-плотен слева.*

Доказательство. Эквивалентность условий (B) и (C) установлена в лемме 6.31. Предположим, что выполняется (A). Пусть x и y — такие элементы из S, что $xy \neq 0$. Ввиду (A) $x \in R$ для некоторого 0-минимального правого идеала R из S. Так как $xy \neq 0$, идеал R не вырожден. В силу леммы 6.1 $R = xyS$ и, следовательно, $x \in xyS$. Таким образом, (A) влечет за собой (B).

Обратно, предположим, что выполняется (B). Пусть $x \in S \setminus 0$. Если $xS = 0$, то x принадлежит вырожденному 0-минимальному правому идеалу $\{0, x\}$. Пусть $xS \neq 0$. Тогда $xy \neq 0$ для некоторого $y \in S$ и по предположению $x \in xyS$, откуда $x \in xS$. Но xS является 0-минимальным правым идеалом в S. В самом деле, если $r \in xS \setminus 0$, то $r = xy \neq 0$ для некоторого $y \in S$ и $x \in xyS = rS$, откуда $xS \subseteq rS$. Следовательно, каждый элемент $x \neq 0$ из S принадлежит некоторому 0-минимальному правому идеалу из S, т. е. выполняется (A).

Для полугрупп без нильпотентных идеалов мы имеем более сильный результат.

Следствие 6.34. *Следующие условия для полугруппы* $S = S^0$ *без нильпотентных идеалов эквивалентны:*

(A) S *равна объединению своих* 0-*минимальных правых идеалов.*

(B) S *есть* 0-*прямое объединение* 0-*простых полугрупп, каждая из которых содержит* 0-*минимальный правый идеал.*

(C) S *является* 0-*наслоенной справа.*

(D) *Каждый правый идеал из* S 0-*плотен слева.*

Доказательство. Мы должны доказать лишь, что если S не имеет нильпотентных идеалов, то (B) эквивалентно любому из условий (A), (C), (D). Тот факт, что (A) влечет за собой (B), непосредственно вытекает из следствия 6.24.

Предположим теперь, что выполняется (B), т. е. S есть 0-прямое объединение множества $\{S_i \mid i \in I\}$ 0-простых идеалов, причем каждое S_i содержит 0-минимальный правый идеал. Пусть $x, y \in S$ и $xy \neq 0$. Тогда существует такое $k \in I$, что $x, y \in S_k$ и $xyS_k = xyS$. Но xyS_k есть 0-минимальный правый идеал из S_k, содержащий xy, и так как $xyS_k \subseteq xS_k$, то $xyS_k = xS_k$ есть 0-минимальный правый идеал из S_k, содержащий x. Таким образом, $x \in xyS$, а это показывает, что S 0-наслоена справа. Мы установили, что (B) влечет за собой (C).

Доказательство следствия завершено.

Из этого следствия вытекает

Следствие 6.35. *Пусть* $S = S^0$ — *полугруппа без нильпотентных идеалов. Если* S 0-*наслоена справа, то* S *би*-0-*наслоена.*

Теперь мы сформулируем в явном виде утверждение, которое следствие 6.34 дает для случая полугрупп без нуля (ср. § 8.2). Мы скажем, что S является *наслоенной справа* [*слева*] [1]) полугруппой, если $x \in xyS$ [$x \in Syx$] для всех $x, y \in S$. Таким образом, если S не имеет нуля, то S наслоена справа тогда и только тогда, когда S^0 является 0-наслоенной справа. Говорят, что подмножество X из S *плотно* [*слева, справа*] [2]), если $xy \in X$ влечет за собой $x \in X$ и $y \in X$ [$x \in X$, $y \in X$]. Таким образом, если S не имеет нуля и $X \subseteq S$, то X плотно слева в S тогда и только тогда, когда $X \cup \{0\}$ является 0-плотным слева в S^0.

Мы получаем следующую характеризацию простых полугрупп, содержащих минимальные правые идеалы (ср. Круазо [1953]).

Теорема 6.36. *Следующие условия для полугруппы* S *эквивалентны:*

(A) S *проста и имеет минимальный правый идеал.*

(B) S *есть объединение своих минимальных правых идеалов.*

1) В оригинале right [left] stratified.— *Прим. перев.*

2) В оригинале [left, right] consistent.— *Прим. перев.*

(C) *S наслоена справа.*

(D) *Каждый правый идеал из S плотен слева.*

Обратимся теперь к полугруппам с нулем, обладающим как 0-минимальным правым, так и 0-минимальным левым идеалами.

Теорема 6.37. *Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:*

(A) *S совпадает со своими левым и правым цоколями.*

(B) *S есть 0-прямое объединение полугруппы с нулевым умножением и вполне 0-простых полугрупп.*

(C) *S является 0-наслоенной и слева и справа.*

(D) *Каждый правый идеал из S 0-плотен слева и каждый левый идеал из S 0-плотен справа.*

Доказательство. Эквивалентность условий (C) и (D) доказана в лемме 6.31. Эквивалентность (A) и (C) следует непосредственно из теоремы 6.33 и двойственной к ней теоремы.

Предположим, что выполняется (A). В обозначениях теоремы 6.29 мы имеем

$$S = \Sigma_r = C \cup D \cup A,$$

$$S = \Sigma_l = C \cup D' \cup A',$$

где $E = A \cup A'$ есть полугруппа с нулевым умножением. Далее,

$$S = \Sigma_r \cup \Sigma_l = C \cup D \cup D' \cup E,$$

и каждое из этих трех разложений для S является разложением на попарно пересекающиеся по нулю полугруппы. Следовательно, $D = D' = \{0\}$ и $S = C \cup E$. По теореме 6.29 C является 0-прямым объединением вполне 0-простых полугрупп. Таким образом, (A) влечет за собой (B). То, что (B) влечет за собой (A), является очевидным. Это завершает доказательство теоремы.

Для случая полугрупп без нильпотентных идеалов (ср. упражнение 4 ниже) теорема 6.37 дает характеризацию 0-прямых объединений вполне 0-простых полугрупп. Теперь мы выведем дальнейшие характеризации таких полугрупп.

Полугруппы без нильпотентных идеалов, обладающие свойствами, рассмотренными в теореме 6.37, являются регулярными, т. е. $a \in aSa$ для любого $a \in S$ (§ 1.9). В регулярной полугруппе каждый главный (следовательно, каждый 0-минимальный) односторонний идеал порождается некоторым идемпотентом (лемма 1.13). Часть утверждения следующей леммы была приведена в упражнении 10 к § 2.7.

Лемма 6.38. *Пусть $S = S^0$ — регулярная полугруппа и e — ее ненулевой идемпотент. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *e примитивен.*

(2) *Se является 0-минимальным левым идеалом из S.*

(3) *eS является 0-минимальным правым идеалом из S.*

Доказательство. Предположим, что выполняется (1). Пусть L — левый идеал из S, содержащийся в Se. По лемме 1.13 существует такой идемпотент f, что $Sf \subseteq L$, причем $f \neq 0$ при $L \neq 0$. Тогда $f = f^2 \in Sf \subseteq Se$. Следовательно, $f = xe$ для некоторого $x \in S$. Так как $f^2 = xexe$, то $ef = exe \neq 0$. Очевидно, $e(ef) = ef = (ef)e$, т. е. $ef \leqslant e$. В силу примитивности e получаем, что $ef = e$. Отсюда $e \in Sf$ и потому $Se \subseteq Sf$. Таким образом, $Se = Sf$, т. е. Se есть 0-минимальный левый идеал. Итак, мы показали, что (1) влечет за собой (2). Симметрично, (1) влечет за собой (3).

Для завершения доказательства леммы достаточно, снова по соображениям симметрии, показать, что (2) влечет за собой (1). Предположим, что Se есть 0-минимальный левый идеал и $0 \neq f^2 = f \leqslant e$. Тогда $fe = f$ и потому $0 \neq Sf \subseteq Se$. В силу 0-минимальности идеала Se имеем $Sf = Se$. Следовательно, $e = xf$ для некоторого $x \in S$, поэтому $ef = xf^2 = xf = e$. Но так как $f \leqslant e$, то $ef = f$. Таким образом, из $0 \neq f^2 = f \leqslant e$ вытекает $e = f$, т. е. e — примитивный идемпотент. Итак, мы доказали, что из (2) следует (1).

Говорят, что регулярная полугруппа *примитивна*, если каждый ее ненулевой идемпотент примитивен. Теорема 6.39 дает описание строения всех примитивных регулярных полугрупп, поскольку строение вполне 0-простых полугрупп известно (теорема Риса). Указанный результат подтверждает справедливость предположения Шнейдера, высказанного им в 1959 г. в письме к одному из авторов (см. Престон [1969]). Этот результат был независимо получен также Венкатесаном в [1963] и [1966]. Эквивалентность условий (A), (B) и (C) доказана Штейнфельдом [1966]. Он привел и другие эквивалентные условия, использующие понятие 0-минимального квазиидеала (см. упражнение 17 к § 2.7).

Теорема 6.39. *Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:*

(A) *S есть 0-прямое объединение вполне 0-простых подполугрупп.*

(B) *S есть объединение 0-минимальных правых идеалов вида eS ($e^2 = e$).*

(C) *S регулярна и совпадает с объединением своих 0-минимальных правых идеалов.*

(D) *S — примитивная регулярная полугруппа.*

Доказательство. Сначала мы установим эквивалентность условий (B), (C) и (D). Ввиду симметричности условия (D) понятно, что условия, двойственные (B) и (C), также эквивалентны (D).

Предположим, что выполняется (B). Пусть $a \in S \setminus 0$. Тогда $a \in eS$ ($e^2 = e$), где eS есть 0-минимальный левый идеал. На основании леммы 6.1 $aS = eS$, поэтому $e = ax$ для некоторого $x \in S$. Из $a \in eS$ вытекает $ea = a$, следовательно, $axa = ea = a$. Мы доказали регулярность S. Таким образом, (B) влечет за собой (C).

Предположим, что выполняется (C). Пусть e — ненулевой идемпотент из S. Тогда e принадлежит некоторому 0-минимальному правому идеалу R из S и $R = eS$. По лемме 6.38 элемент e примитивен, т. е. имеет место (D).

Предположим, что выполняется (D). Пусть $a \in S \setminus 0$. Так как полугруппа S регулярна, $axa = a$ для некоторого $x \in S$. Полагая $e = ax$, мы имеем $e^2 = e \neq 0$ и $a \in eS$. По лемме 6.38 eS есть 0-минимальный правый идеал, т. е. имеет место (B).

Непосредственно проверяется, что (A) влечет за собой (D). Обратно, предположим, что выполняется (D). Тогда имеет место (B) и двойственное к нему условие. В силу следствия 6.34 ((A) влечет за собой (B)) и двойственного к нему утверждения, а также в силу замечания о единственности, сделанного перед теоремой 6.32, полугруппа S есть 0-прямое объединение 0-простых полугрупп S_i, каждая из которых содержит 0-минимальный правый идеал, а также 0-минимальный левый идеал. По теореме 2.48 каждая S_i вполне 0-проста.

Заметим, что результат, приведенный в упражнении 11 к § 2.7, есть непосредственное следствие теоремы 6.39. В частности, каждая примитивная регулярная полугруппа без нуля вполне проста.

Мы сформулируем теорему, в которой укажем более точно, каковы слагаемые, упомянутые в условии (A). Ее доказательство вытекает непосредственно из замечаний, сделанных перед теоремой 6.32.

Теорема 6.40. *Пусть $S = S^0$ — примитивная регулярная полугруппа. Тогда S равна 0-прямому объединению всех своих вполне 0-простых идеалов.*

Утверждение упражнения 6 к этому параграфу, за исключением условия (C), есть следствие теоремы 6.39 и служит для характеризации примитивных инверсных полугрупп, к изучению которых мы вернемся в § 7.7.

Упражнения к § 6.5

1. Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:
(a) S би-0-наслоена;
(b) если $x, y \in S \setminus 0$ и $x \in J(y)$, то $y \in J(x)$;

(c) каждый ненулевой $\mathcal{J}$-класс из S минимален в частично упорядоченном множестве всех ненулевых $\mathcal{J}$-классов из S (см. § 5.3).

Аналогичные утверждения выполняются в каждом из односторонних случаев.

(Условие (b) и его односторонние аналоги использовались Шварцем в § 2 работы [1951].)

2. Полугруппа является бинаслоенной ($x, y \in SxyS$) тогда и только тогда, когда она проста.

3. Следующие условия для полугруппы $S=S^0$ эквивалентны:

(A) S есть 0-прямое объединение 0-простых полугрупп (каждая из которых тогда является 0-минимальным двусторонним идеалом в S).

(B) S не содержит нильпотентных идеалов и би-0-наслоена.

(C) S не содержит нильпотентных идеалов и каждый двусторонний идеал из S 0-плотен.

4. Полугруппа $S = S^0$ является 0-прямым объединением вполне 0-простых полугрупп тогда и только тогда, когда она не содержит нильпотентных идеалов и 0-наслоена как слева, так и справа.

5. Каждый ненулевой идемпотент из $\Sigma_r \cup \Sigma_l$ примитивен. (Шварц [1951], § 7.)

6. Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:

(A) S — инверсная полугруппа, совпадающая с объединением своих 0-минимальных правых идеалов.

(B) S есть 0-прямое объединение вполне 0-простых инверсных полугрупп, т. е. полугрупп Брандта (см. теорему 3.9).

(C) Если $a \in S \setminus 0$, то существует такой единственный элемент $x \in S$, что $axa = a$.

(D) S — инверсная полугруппа, в которой каждый ненулевой идемпотент примитивен.

(Престон [1954b, 1969], эквивалентность условий (A), (B) и (D); Венкатесан [1962], эквивалентность условий (B), (C) и (D).)

Упражнения 7—12 ниже принадлежат Шварцу [1960] [1]. В данном случае нам будет удобней обозначать через AX $[XA]$ правый [левый] аннулятор подмножества X полугруппы $S = S^0$, нежели использовать предыдущее обозначение A_X $[{}_XA]$. Полугруппа $S = S^0$ называется *дуальной*, если $A\ (RA) = R$ для каждого правого идеала R из S и $(AL)\ A = L$ для каждого левого идеала L из S. Левый идеал L из S называется *максимальным*, если $L \neq S$ и L не содержится строго ни в каком собственном левом идеале из S.

---

[1] В недавней работе [1971] Шварцем продвинуто изучение дуальных полугрупп и, в частности, усилены некоторые из результатов этих упражнений.— *Прим. ред.*

7. Пусть S — дуальная полугруппа. Справедливы следующие утверждения (и двойственные к ним):

(a) $(\bigcap_i R_i) A = \bigcap_i (R_i A)$ для любого множества правых идеалов R_i из S.

(b) $R_1 \cap R_2 = 0$ влечет за собой $R_1 A \cup R_2 A = S$.

(c) $SA = 0$.

(d) Если R есть 0-минимальный правый идеал из S, то RA — максимальный левый идеал в S.

(e) Отображение $R \to RA$ есть антиизоморфизм (полной) структуры всех правых идеалов полугруппы S на (полную) структуру всех левых идеалов из S и отображение $L \to AL$ обратно к нему. Подструктура всех двусторонних идеалов из S антиизоморфна самой себе.

8. 0-прямое объединение $S = \bigcup_i S_i$ ($S_i \cap S_j = 0$ при $i \neq j$) является дуальной полугруппой тогда и только тогда, когда дуальна каждая компонента S_i.

9. Пусть N есть 0-радикал дуальной полугруппы S и J — такой ее двусторонний идеал, что $J \cap N = 0$.

(a) $JA = AJ$ и S есть 0-прямое объединение J и AJ.

(b) J и AJ — дуальные полугруппы.

10. Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:

(A) S — дуальная полугруппа без нильпотентных идеалов и каждый ее ненулевой двусторонний идеал содержит 0-минимальный двусторонний идеал из S.

(B) S равна 0-прямому объединению 0-простых дуальных полугрупп.

11. Пусть S — дуальная полугруппа и e — такой ее идемпотент, что Se есть 0-минимальный левый идеал из S. Тогда для каждого $x \in S$ либо $ex = x$, либо $ex = 0$.

12. Пусть S — вполне 0-простая полугруппа. Тогда S дуальна в том и только в том случае, когда она инверсна (и, следовательно, есть полугруппа Брандта в силу теоремы 3.9).

§ 6.6. M_R, M_L и аналогичные условия минимальности

Условия минимальности M_R, M_L и M_J, впервые рассмотренные Грином [1951], уже использовались в гл. 5 (стр. 223). Напомним, что M_R [M_L, M_J] — это следующее условие: в каждом непустом множестве главных правых [левых, двусторонних] идеалов полугруппы S, частично упорядоченном по включению, содержится минимальный элемент. Это равносильно тому, что каждая строго убывающая цепь главных правых [левых, двусторонних] идеалов полугруппы S конечна. Напомним также, что упорядочение главных правых [левых, двусторонних] идеалов можно интерпретировать как упорядочение $\mathscr{R}$-классов [$\mathscr{L}$-классов, $\mathscr{J}$-классов]. Мы имеем $R_a \leqslant R_b$ [$L_a \leqslant L_b$, $J_a \leqslant J_b$]

тогда и только тогда, когда $R(a) \subseteq R(b)$ $[L(a) \subseteq L(b)$, $J(a) \subseteq J(b)]$. Таким образом, S удовлетворяет условию M_R тогда и только тогда, когда каждое непустое множество $\mathscr{R}$-классов, частично упорядоченное отношением $\leqslant$, содержит минимальный элемент.

Мы будем иметь дело главным образом с двумя условиями: M_L^* и M_R^*, более слабыми, нежели условия M_L и M_R. Полугруппа S удовлетворяет условию M_L^* $[M_R^*]$ тогда и только тогда, когда для каждого $\mathscr{J}$-класса множество всех содержащихся в нем $\mathscr{L}$-классов $[\mathscr{R}$-классов$]$ содержит минимальный элемент. Эти условия впервые были рассмотрены Манном [1957]. Очень похожие условия, а именно условия левой и правой устойчивости, были также введены Уоллесом и Кохом [1957]. Для (топологических) полугрупп, рассматривавшихся Уоллесом и Кохом, условие левой [правой] устойчивости совпадает с условием M_L^* $[M_R^*]$. Мы модифицируем определение Уоллеса — Коха для того, чтобы это совпадение всегда имело место (см. в упражнении 1 ниже первоначальное определение Уоллеса и Коха). Следующие условия — условие левой и правой элементарности — принадлежат Шютценберже [1957]. Параграф заканчивается примерами, иллюстрирующими некоторые из рассматриваемых вопросов.

Определим на полугруппе S квазипорядки (т. е. рефлексивные, транзитивные бинарные отношения, иногда называемые предпорядками) λ и ρ, полагая

$$\lambda = \{(x, y) \mid L(x) \subseteq L(y)\},$$
$$\rho = \{(x, y) \mid R(x) \subseteq R(y)\}.$$

Тогда, очевидно, $\mathscr{L} = \lambda \cap \lambda^{-1}$, $\mathscr{R} = \rho \cap \rho^{-1}$. Следующая лемма принадлежит Манну [1957].

Лемма 6.41. *Условие M_L^* выполняется для полугруппы S тогда и только тогда, когда $\lambda \cap \mathscr{J} = \mathscr{L}$, т. е. тогда и только тогда, когда каждый $\mathscr{L}$-класс из произвольного $\mathscr{J}$-класса является минимальным в множестве $\mathscr{L}$-классов из данного $\mathscr{J}$-класса.*

Доказательство. Очевидно, если $\lambda \cap \mathscr{J} = \mathscr{L}$, то выполняется M_L^*. Обратно, предположим, что выполняется M_L^*. Пусть $(a, b) \in \lambda \cap \mathscr{J}$, так что $L_a \leqslant L_b \subseteq J_a = J_b$. По предположению существует $\mathscr{L}$-класс L_c, минимальный в множестве $\mathscr{L}$-классов из S, содержащихся в J_a. Теперь соотношение $L_a \leqslant L_b$ влечет за собой существование такого $x \in S^1$, что $a = xb$. Так как $J_b = J_c$, существуют такие $m, n \in S^1$, что $b = mcn$. Тогда $a = xb = xmcn$. Положим $xmc = d$. Тогда $L_d \leqslant L_c$. Если $L_d < L_c$, то в силу минимальности класса L_c в $J_a = J_c$ выполняется соотношение $J_d < J_c$, откуда $J_a = J_{dn} \leqslant J_d < J_c$, т. е. мы пришли к противоречию. Следовательно, $L_d = L_c$. Таким образом, существует такое $l \in S^1$, что $lxmc = c$. Тогда

$$b = mcn = m\,(lxmc)\,n = ml\,(xb) = (ml)\,a.$$

Из равенств $a = xb$ и $b = (ml)\,a$ вытекает $L_a = L_b$. Таким образом, $\lambda \cap \mathscr{Y} \subseteq \mathscr{L}$. Так как обратное включение выполняется всегда, лемма доказана.

Говорят, что полугруппа *устойчива слева* [*справа*], если для любых $a, b \in S$ из $a \in Sab$ $[a \in baS]$ следует $L\,(a) = L\,(ab)$ $[R\,(a) = R\,(ab)]$. Полугруппа *устойчива*, если она устойчива и слева, и справа. Следующая лемма принадлежит Уоллесу и Коху [1957].

Лемма 6.42. *Полугруппа S устойчива слева тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию M_L^*.*

Доказательство. Пусть S устойчива слева и $L_a \leqslant L_b \subseteq J_a = J_b$. Так как $J_a = J_b$, существуют такие $x, y \in S^1$, что $b = xay$. Если $y = 1$, то $b = xa$ и $L_b \leqslant L_a$, так что $L_a = L_b$. Если $y \in S$, то, поскольку $L_a \leqslant L_b$ влечет за собой $a = sb$ и $s \in S^1$, мы имеем $a = sxay \in Say$. В силу того что S устойчива слева, $L\,(a) = L\,(ay)$. Следовательно, $L\,(a) \subseteq L\,(b) = L\,(xay) \subseteq L\,(ay)$ влечет за собой $L\,(a) = L\,(b)$. Таким образом, L_b минимален в множестве $\mathscr{L}$-классов из J_a. Этим показано, что из устойчивости слева следует условие M_L^*.

Обратно, пусть S удовлетворяет условию M_L^* и $a \in Sab$. Тогда $a \cup Sa \cup aS \cup SaS \subseteq Sab \cup SabS$, так что $J\,(a) \subseteq J\,(ab)$. Так как всегда $J\,(ab) \subseteq J\,(a)$, то $J\,(a) = J\,(ab)$. Теперь из $a \in Sab$ непосредственно вытекает $L_a \leqslant L_{ab}$, и, так как $J_a = J_{ab}$, в силу леммы 6.41 получаем $L_a = L_{ab}$, т. е. $L\,(a) = L\,(ab)$. Таким образом, S устойчива слева; это завершает доказательство леммы.

Говорят, что полугруппа S *элементарна слева* [*справа*], если в ней $\lambda \cap \mathscr{R} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}$ $[\mathscr{L} \cap \rho = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}]$. Говорят, что полугруппа *элементарна*, если она элементарна и слева, и справа.

Лемма 6.43. *Полугруппа S элементарна слева тогда и только тогда, когда $\lambda \cap \mathscr{D} = \mathscr{L}$, т. е. тогда и только тогда, когда каждый $\mathscr{L}$-класс из произвольного $\mathscr{D}$-класса является минимальным в множестве $\mathscr{L}$-классов из данного $\mathscr{D}$-класса.*

Доказательство. Пусть S элементарна слева и $(a, b) \in \lambda \cap \mathscr{D}$. Так как $(a, b) \in \mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R}$, существует такое $c \in S$, что $L_a = L_c$ и $R_c = R_d$. Таким образом, в силу предположения $(c, b) \in \lambda \cap \mathscr{R} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}$. Следовательно, $L_b = L_c = L_a$. Это показывает, что $\lambda \cap \mathscr{D} \subseteq \mathscr{L}$. Так как обратное включение выполняется всегда, мы имеем $\lambda \cap \mathscr{D} = \mathscr{L}$, что и требовалось доказать.

Обратное утверждение непосредственно вытекает из того факта, что $\mathscr{R} \subseteq \mathscr{D}$.

Полугруппа полупроста, если каждый ее главный фактор либо 0-прост, либо прост (§ 2.6, стр. 107). Мы будем говорить, что полугруппа *вполне полупроста*, если каждый ее главный фактор либо вполне 0-прост, либо вполне прост (Манн [1957]). Если $a \in S$ и $I(a) \neq \varnothing$, то через L_a^0 будем обозначать подмножество $L_a \cup \{I(a)\}$ факторполугруппы $S/I(a)$.

Лемма 6.44. *Если $I(a) \neq \varnothing$, то $\mathcal{L}$-класс L_a полугруппы S минимален в множестве $\mathcal{L}$-классов из J_a тогда и только тогда, когда L_a^0 является* (0-*минимальным*) *левым идеалом в* $S/I(a)$.

Если $I(a) = \varnothing$, то L_a минимален в множестве $\mathcal{L}$-классов из J_a тогда и только тогда, когда L_a является (*минимальным*) *левым идеалом в S.*

Доказательство. Очевидно, L_a минимален в множестве $\mathcal{L}$-классов из J_a тогда и только тогда, когда не существует левого идеала полугруппы S, строго содержащегося между $L(a) \cup \cup I(a)$ и $I(a)$. Из этого непосредственно следуют утверждения леммы.

Замечание. Лемму 6.41 можно вывести как следствие леммы 6.44. В самом деле, если $I(a) \neq \varnothing$, то $J(a)/I(a)$ есть 0-минимальный двусторонний идеал в $S/I(a)$ (ср. с леммой 2.39). Следовательно, по теореме 2.33 полугруппа $J(a)/I(a)$ содержит 0-минимальный левый идеал из $S/I(a)$ тогда и только тогда, когда она является объединением 0-минимальных левых идеалов из $S/I(a)$. Таким образом, в силу предыдущей леммы J_a содержит минимальный $\mathcal{L}$-класс тогда и только тогда, когда он есть объединение минимальных $\mathcal{L}$-классов. Аналогичные замечания справедливы и в случае $I(a) = \varnothing$.

Первая часть следующей теоремы включает в себя теорему Уоллеса и Коха [1957] о том, что в устойчивой полугруппе $\mathcal{J} = \mathcal{D}$. Эквивалентность условий (A) и (D) для полупростых полугрупп была установлена Манном [1957].

Теорема 6.45. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:*

(A) *S удовлетворяет условиям M_L^* и M_R^*.*

(B) *S элементарна и $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.*

(C) *S устойчива.*

Если S полупроста, то любое из этих условий эквивалентно тому, что

(D) *S вполне полупроста.*

Доказательство. Эквивалентность условий (A) и (C) следует из леммы 6.42 и двойственной к ней леммы. Импликация (B) $\Rightarrow$ (A) вытекает из лемм 6.41 и 6.43. В силу этих же лемм из (A) следует, что полугруппа S элементарна. Для доказательства первой части теоремы осталось лишь установить, что (A) влечет за собой $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.

Предположим, что выполняется (A). Пусть $a\mathcal{J}b$ $(a, b \in S)$. Тогда $b = xay$ для некоторых $x, y \in S^1$ и $J_a = J_{xa} = J_b$. Учитывая лемму 6.41 и то, что $L_{xa} \leqslant L_a$, мы заключаем, что $L_{xa} = L_a$. На основании леммы, двойственной к лемме 6.41, и ввиду того, что $R_b \leqslant R_{xa}$, мы заключаем, что $R_b = R_{xa}$. Следовательно, $a\mathcal{L}xa$ и $xa\mathcal{R}b$, откуда $a\mathcal{D}b$.

Предположим теперь, что S полупроста и имеет место (A). Главными факторами полугруппы S являются факторполугруппы $J(a)/I(a)$ $[J(a)$ при $I(a) = \varnothing]$. По лемме 6.44 и двойственной к ней лемме $S/I(a)$ содержит 0-минимальные левый и правый идеалы, которые содержатся в $J(a)/I(a)$ (аналогичное утверждение справедливо и при $I(a) = \varnothing$). Следовательно, поскольку $J(a)/I(a)$ есть 0-минимальный двусторонний идеал в $S/I(a)$ и по предположению $J(a)/I(a)$ является 0-простой полугруппой, на основании следствия 2.50 полугруппа $J(a)/I(a)$ вполне 0-проста. Аналогично, в случае, когда $I(a) = \varnothing$, мы заключаем, что $J(a)$ является вполне простой полугруппой. Таким образом, имеет место (D).

Обратно, предположим, что выполняется (D). Достаточно доказать любое из трех эквивалентных условий (A), (B), (C); мы докажем (A). По предположению каждый главный фактор $J(a)/I(a)$ полугруппы S вполне прост [0-прост]. Из теоремы 2.35 [и двойственной к ней теоремы] следует, что $\mathcal{L}$-классы [$\mathcal{R}$-классы] из J_a относительно $J(a)/I(a)$ являются также $\mathcal{L}$-классами [$\mathcal{R}$-классами] относительно S. Так как каждый ненулевой $\mathcal{L}$-класс и каждый ненулевой $\mathcal{R}$-класс вполне простой [0-простой] полугруппы минимальны в своем $\mathcal{J}$-классе, (A) выполняется в силу условий M_L^* и M_R^*.

В качестве следствия мы получаем результат Грина [1951].

Следствие 6.46. *Пусть S — полупростая полугруппа, удовлетворяющая обоим условиям M_L и M_R. Тогда S вполне полупроста и, следовательно, $\mathcal{J} = \mathcal{D}$ в S.*

Регулярная полугруппа обязательно полупроста, так как каждый ее главный фактор содержит ненулевые идемпотенты. С другой стороны, для любого множества X полугруппа $\mathcal{T}_X$ регулярна (упражнение 1 к § 2.2), но если X бесконечно, то $\mathcal{T}_X$ не вполне полупроста (см. упражнение 3 ниже). Дальнейшим результатом Манна [1957] является

Лемма 6.47. *Регулярная полугруппа S удовлетворяет условию M_L^* тогда и только тогда, когда она удовлетворяет условию M_R^*.*

Доказательство. Это утверждение следует непосредственно из леммы 6.38. В самом деле, в силу леммы 6.44 M_L^* имеет место тогда и только тогда, когда все главные факторы полугруппы S содержат 0-минимальные (или минимальные) левые идеалы, а по лемме 6.38 (и ее аналогу для полугрупп без нуля) и лемме 1.13 регулярная полугруппа содержит 0-минимальный [минимальный] левый идеал тогда и только тогда, когда она содержит 0-минимальный [минимальный] правый идеал.

Таким образом, мы установили справедливость следующей теоремы.

Теорема 6.48. *Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:*

(A) *S вполне полупроста.*

(B) *S регулярна и удовлетворяет одному из условий M_L^* и M_R^*.*

(C) *S регулярна, элементарна слева или справа и $\mathcal{J} = \mathcal{D}$.*

Мы закончим этот параграф изучением связи между условиями M_L, M_R и M_J. Сначала приведем результат Грина [1951].

Теорема 6.49. *Пусть S удовлетворяет условиям M_L и M_R. Тогда S удовлетворяет условию M_J.*

Доказательство. Предположим, что S не удовлетворяет условию M_J. Тогда существует строго убывающая бесконечная цепь $\mathcal{J}$-классов $J_1 > J_2 > J_3 > \ldots > J_n > \ldots$. Пусть $a_i \in J_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Тогда, поскольку $J_i > J_{i+1}$, существуют такие $x_i, y_i \in S^1$, что $a_{i+1} = x_i a_i y_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Таким образом,

$$a_{i+1} = x_i x_{i-1} \ldots x_1 a_1 y_1 y_2 \ldots y_i.$$

Далее,

$$R(a_1) \supseteq R(a_1 y_1) \supseteq \ldots \supseteq R(a_1 y_1 y_2 \ldots y_n) \supseteq \ldots$$

и

$$L(x_1) \supseteq L(x_2 x_1) \supseteq \ldots \supseteq R(x_n x_{n-1} \ldots x_1) \supseteq \ldots .$$

Следовательно, если в S (а поэтому и в S^1) выполняются условия M_L и M_R, то должно существовать такое натуральное число m, что

$$R(a_1 y_1 y_2 \ldots y_m) = R(a_1 y_1 y_2 \ldots y_m y_{m+1})$$

и

$$L(x_m x_{m-1} \ldots x_1) = L(x_{m+1} x_m \ldots x_1).$$

Таким образом, существуют такие $u, v \in S^1$, что

$$a_1 y_1 y_2 \ldots y_{m+1} v = a_1 y_1 y_2 \ldots y_m$$

и

$$u x_{m+1} x_m \ldots x_1 = x_m x_{m-1} \ldots x_1.$$

Следовательно,

$$ux_{m+1} \ldots x_1 a_1 y_1 \ldots y_{m+1} v = x_m \ldots x_1 a_1 y_1 \ldots y_m,$$

т. е. $ua_{m+2}v = a_{m+1}$. Но отсюда вытекает $J_{m+1} \leqslant J_{m+2}$, что противоречит предположению. Теорема доказана.

Кроме связи, установленной в только что доказанной теореме, в остальном условия M_L, M_R и M_J независимы. Существование простых полугрупп без минимальных левых или минимальных правых идеалов (см., например, упражнения 8—10 к § 2.1 (Андерсен [1952])) показывает, что из условия M_J не вытекает ни M_L, ни M_R.

Пример Манна (пример 1 ниже) показывает, что в полугруппе может иметь место условие M_L $[M_R]$, хотя не выполняется условие M_R $[M_L]$ или условие M_J. Далее, могут иметь место условия M_L $[M_R]$ и M_J, хотя не выполняется M_R $[M_L]$: например, полугруппы Бэра — Леви, рассмотренные в § 8.1, просты справа и поэтому удовлетворяют условиям M_R и M_J, но не удовлетворяют условию M_L.

Пример 1. Пусть S — множество, состоящее из элемента 0 и всех упорядоченных пар (i, j), где i и j — такие положительные целые числа, что $i < j$. Определим произведение в S, полагая

$$(i, j)(r, s) = \begin{cases} (i, s), & \text{если } j = r, \\ 0, & \text{если } j \neq r; \end{cases}$$

$$0x = 0 = x0 \quad \text{для всех} \quad x \in S.$$

Тогда S превращается в полугруппу (S есть не что иное, как подполугруппа полугруппы матричных единиц (§ 2.7, упражнение 7). Левый идеал, порожденный (i, j), равен

$$\{0\} \cup \{(r, j) \mid 1 \leqslant r \leqslant i\};$$

так как это конечное множество, S удовлетворяет условию M_L. Аналогично, правый идеал R_{ij}, порожденный (i, j), равен

$$R_{ij} = \{0\} \cup \{(i, s) \mid s \geqslant j\},$$

а двусторонний идеал I_{ij}, порожденный (i, j), равен

$$I_{ij} = \{0\} \cup \{(r, s) \mid 1 \leqslant r \leqslant i, \ s \geqslant j\}.$$

Строго убывающие последовательности

$$R_{ij} \supset R_{i,j+1} \supset R_{i,j+2} \supset \ldots,$$

$$I_{ij} \supset I_{i,j+1} \supset I_{i,j+2} \supset \ldots$$

могут быть неограниченно продолжены. Таким образом, S удовлетворяет условию M_L, но не удовлетворяет ни одному из условий M_R, M_J.

Заметим, далее, что I_{ij}, $I_{i,j+1}$, $I_{i,j+2}$, ... является бесконечной строго убывающей последовательностью левых идеалов из S. Таким образом, условие M_L слабее условия минимальности для множества всех левых идеалов полугруппы. (Манн [1957].)

Пример 2. Пусть S есть 0-прямое объединение бесконечного множества 0-простых полугрупп $\{S_i \mid i \in I\}$. Тогда S удовлетворяет условию M_J, но не удовлетворяет условию минимальности для двусторонних идеалов.

Пример 3. Для любого множества X полугруппа $\mathscr{T}_X$ регулярна (§ 2.2, упражнение 1 (с)). Далее, в $\mathscr{T}_X$ имеем $\mathscr{D} = \mathscr{J}$ (теорема 2.9 (i)). Пусть $|X|$ бесконечно и D есть $\mathscr{D}$-класс, соответствующий $|X|$, т. е. D состоит из всех таких элементов α из $\mathscr{T}_X$, что $|X\alpha| = |X|$ (теорема 2.9). Существует взаимно однозначное соответствие между $\mathscr{L}$-классами из $\mathscr{T}_X$, содержащимися в D, и такими подмножествами Y из X, что $|Y| = |X|$; $\mathscr{L}$-класс $L(Y)$, соответствующий Y, состоит из всех α, для которых $X\alpha = Y$ (теорема 2.9). Легко установить, что $L(Y_1) \leqslant L(Y_2)$ тогда и только тогда, когда $Y_1 \subseteq Y_2$. Отсюда следует, что D не содержит минимальных $\mathscr{L}$-классов. Таким образом, $\mathscr{T}_X$ регулярна, но не вполне полупроста. (Престон [1958].)

Пример 4. Пусть S — полугруппа, все элементы которой имеют конечный порядок. Тогда $\mathscr{D} = \mathscr{J}$. В самом деле, пусть $(a, b) \in \mathscr{J}$, так что существуют $x, y, z, u \in S^1$, для которых

$$xay = b, \quad zbu = a.$$

Пусть целое число r выбрано так, что $(uy)^r$ является идемпотентом. Тогда, поскольку $(xz)^r b (uy)^r = b$, мы имеем $b(uy)^r = b$. Следовательно, полагая $c = bu$, получаем, что $(b, c) \in \mathscr{R}$. Аналогично, полагая $d = zb$, получаем, что $(b, d) \in \mathscr{L}$. Следовательно, $(bu, du) \in \mathscr{L}$, т. е. $(c, a) \in \mathscr{L}$. Таким образом, $(a, b) \in \mathscr{D}$. (Грин [1951].)

Пример 5. (а) Пусть $J(a) \supseteq J(b)$, где a, b — элементы полугруппы S. Тогда если главный фактор $J(b)/I(b)$ 0-прост (или прост при $I(b) = \varnothing$), то $b \in J_b a J_b$.

(b) Пусть S — полупростая полугруппа, удовлетворяющая условию M_L, и $J(a_1) \supseteq J(a_2) \supseteq \ldots \supseteq J(a_n) \supseteq \ldots$ — убывающая последовательность главных идеалов. Тогда существуют такие $x_i, y_i \in J_{a_i}$, что $a_i = x_i a_{i-1} y_i$ $(i = 2, 3, \ldots)$. В силу условия M_L для некоторого n имеем $L(a_n) = L(x_{n+1}a_n) = L(x_{n+2}x_{n+1}a_n) = \ldots$. Отсюда следует, что $J(a_n) = J(a_{n+1}) = J(a_{n+2}) = \ldots$. Таким образом, полупростая полугруппа, удовлетворяющая условию M_L, удовлетворяет также и условию M_J. (Манн [1957].)

Упражнения к § 6.6

1. Согласно первоначальному определению Уоллеса и Коха [1957], полугруппа S *устойчива*, если

(1) $a, b \in S$ и $Sa \subseteq Sab$ влечет за собой $Sa = Sab$ и

(2) $a, b \in S$ и $aS \subseteq baS$ влечет за собой $aS = baS$.

Полугруппа, устойчивая в этом смысле, всегда устойчива и в смысле определения, приведенного в тексте, но не наоборот. Для полугрупп с единицей и регулярных полугрупп эти два определения устойчивости совпадают.

2. Полугруппа S устойчива (в действительности даже устойчива в смысле Уоллеса и Коха, как в упражнении 1), если она обладает любым из следующих свойств:

(a) S коммутативна;

(b) S есть объединение групп;

(c) S периодическая.

(Уоллес и Кох [1957].)

3. Если A — идеал полугруппы S, то S удовлетворяет условию M_L $[M_R]$ тогда и только тогда, когда этому удовлетворяет и A, и S/A. (Манн [1957]; Сайто]1968].)

4. Пусть $\mathscr{C}$ — множество циклических подполугрупп полугруппы S. Множество $\mathscr{C}$ можно частично упорядочить по включению. Пусть M_C обозначает соответствующее условие минимальности, т. е. M_C имеет место в S, если каждое непустое подмножество из $\mathscr{C}$ содержит минимальный элемент. Полугруппа S удовлетворяет указанному условию тогда и только тогда, когда каждый элемент этой полугруппы имеет конечный порядок. (Грин [1951].)

5. Пусть S — полугруппа, удовлетворяющая условию M_J. Тогда для любого $a \in S$ существует такое натуральное число k (зависящее от a), что $J(a^k) = J(a^{2k})$. Следовательно, полагая $b = a^k$ и $c = a^{2k}$, имеем $c = b^2 \in J_b$. Таким образом, в полугруппе, удовлетворяющей условию M_J, некоторая степень каждого элемента принадлежит простому или 0-простому главному фактору. (Грин [1951].)

6. Следующие условия для полугруппы S эквивалентны:

(A) S вполне полупроста.

(B) S удовлетворяет условию M_L^* и каждый $\mathscr{H}$-класс из S содержит идемпотент.

(C) S регулярна и удовлетворяет условию M_L^*. (Манн [1957].)

7. Полугруппа является объединением групп тогда и только тогда, когда она регулярна слева (ср. с теоремой 4.2) и удовлетворяет условию M_R^*. (Манн [1957].)

8. Если вполне полупростая полугруппа удовлетворяет одному из условий M_L, M_R, M_J, то она также удовлетворяет и остальным условиям. (Манн [1957].)

В следующих упражнениях мы рассматриваем некоторые являющиеся идеалами радикалы, которые определялись для полугрупп по аналогии с радикалами колец. В § 11.6 мы исследуем радикалы полугруппы S, которые являются на ней конгруэнциями. Каждый из рассматриваемых здесь радикалов представляет собой такой идеал I полугруппы S, что S/I обладает некоторым свойством и I есть наименьший идеал, для которого S/I обладает данным свойством. Здесь существует аналогия с максимальным гомоморфным образом полугруппы, обладающим данным свойством (ср. с § 1.5, 4.3 и 11.6). За остальными подробностями мы отсылаем читателя к работам, упомянутым в тексте.

9. Пусть (α) — некоторое свойство, которое выполняется в полугруппе тогда и только тогда, когда каждый главный фактор полугруппы обладает свойством (β), где (β) — некоторое свойство, справедливое для одноэлементной полугруппы. Пусть I — пересечение всех таких идеалов A из S, что S/A обладает свойством (α). Тогда, если I не пусто, S/I обладает свойством (α) и мы можем назвать I (α)-*радикалом*. Например, пусть (α) — свойство полупростоты, а (β) — свойство простоты или 0-простоты. Тогда соответствующий (α)-радикал есть то, что Манн называл *верхним радикалом*. (Манн [1957].)

10. Пусть M — двусторонний идеал полугруппы S. Говорят, что идеал A из S является *M-нильпотентным*, если $A^n \subseteq M$ для некоторого натурального n. Любой односторонний M-нильпотентный идеал содержится в двустороннем M-нильпотентном идеале. Пусть N_M совпадает с объединением всех M-нильпотентных идеалов из S. Идеал N_M называется *M-радикалом* полугруппы S. Если N_M является M-нильпотентным идеалом, т. е. если S содержит максимальный M-нильпотентный идеал, то S/N_M не содержит нильпотентных идеалов. (Шварц [1943] и [1951].)

11. Предположим, что N' — верхний радикал, а N_M — M-радикал полугруппы S (см. упражнения 9 и 10). Тогда $N_M \subseteq N' \cup \cup M$. В частности, если S обладает ядром K, то $N_K \subseteq N'$. (Манн [1957].)

12. Пусть S — трехэлементная полугруппа, заданная таблицей умножения

	z	a	b
z	z	z	z
a	z	a	a
b	z	a	a

Тогда $K = \{z\}$ является ядром S, $N_K = K$ и $N' = S$ (см. упражнение 11). (Манн [1955].)

13. Идеал A полугруппы $S = S^0$ называется *нильидеалом*, если некоторая степень каждого элемента из A равна нулю. Пусть $N(S)$ обозначает объединение всех нильидеалов из S. Тогда $N_K \subseteq N(S)$. (Клиффорд [1949].) Далее, $N_K = N(S)$ тогда и только тогда, когда $N(S/N_K)$ равно нулю полугруппы S/N_K. (Луг [1960].)

14. Пусть $S = S^0$ — полугруппа, совпадающая со своим правым цоколем, и N_K — ее K-радикал, где $K = \{0\}$ есть ядро полугруппы S (упражнение 10). В обозначениях теоремы 6.23 $N_K = A$. Далее, полугруппа S/N_K не имеет нильпотентных идеалов (отличных от $\{0\}$) и к ней применимо следствие 6.34. (Шварц [1951].)

15. Пусть S — полугруппа, удовлетворяющая условиям M_L и M_R, а также условию обрыва возрастающих цепей двусторонних идеалов, т. е. любое множество двусторонних идеалов содержит максимальный элемент. Тогда S удовлетворяет условию M_J и потому содержит ядро K, которое является вполне простой полугруппой, так как S удовлетворяет условиям M_L^* и M_R^*. Условие максимальности для двусторонних идеалов обеспечивает K-нильпотентность K-радикала N_K. Применяя теорему 6.29 к S/N_K, получаем $\Sigma_l \cup \Sigma_r = C$, так как здесь D, D' и E равны $\{0\}$, т. е. $\Sigma_l \cup \Sigma_r$ (в S/N_K) есть 0-прямое объединение вполне 0-простых полугрупп. (Шварц [1943] и [1951], а также Манн [1957].)

Глава 7

ИНВЕРСНЫЕ ПОЛУГРУППЫ

Инверсные полугруппы — это регулярные полугруппы, в которых каждый элемент имеет единственный инверсный к нему элемент. Первоначальные сведения о таких полугруппах были приведены в § 1.9. В частности, там была доказана основная теорема о вложении (теорема 1.20): каждая инверсная полугруппа может быть вложена в симметрическую инверсную полугруппу $\mathcal{I}_X$.

Глава построена следующим образом.

После параграфа, в котором рассматривается естественный частичный порядок на инверсной полугруппе, мы снова вернемся к теме представлений инверсных полугрупп взаимно однозначными частичными преобразованиями множества. Результаты, которые мы приводим, принадлежат Шайну [1962], и § 7.2 и 7.3 посвящены их изложению. Ключевую роль здесь играют главные (частичные) правые конгруэнции Дюбрея, детальное рассмотрение которых проведено в § 10.2. Необходимые нам свойства этих частичных правых конгруэнций приведены в § 7.2. Будет отмечено, что эти частичные правые конгруэнции являются удобными для теории представлений обобщениями на случай инверсных полугрупп правых конгруэнций на группе, которые соответствуют разложению группы на правые смежные классы по подгруппе.

В § 7.3 показано, что транзитивные представления инверсной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями множества определяются частичными правыми конгруэнциями, введенными в § 7.2. Показано, что каждое представление однозначно распадается на транзитивные представления. Параграф заканчивается характеризацией эквивалентных представлений. К общей теории представлений произвольной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями мы вернемся снова в § 11.4, результаты которого также принадлежат Шайну [1961].

Основные свойства гомоморфизмов и конгруэнций на инверсной полугруппе рассматриваются в § 7.4. Отновным является тот факт, что произвольный гомоморфный образ инверсной полугруппы также является инверсной полугруппой (теорема 7.36). Конгруэнция на инверсной полугруппе определяется своими классами эквивалентности, содержащими идемпотенты (теорема 7.38). Точная природа этого явления есть тема второй половины этого параграфа.

В § 7.5 рассматриваются полуструктуры инверсных полугрупп, а § 7.6 посвящен гомоморфизмам, которые разделяют идемпотенты. В последнем параграфе (§ 7.7) изучаются гомоморфизмы инверсных полугрупп на примитивные инверсные полугруппы, т. е. на инверсные полугруппы, в которых каждый ненулевой идемпотент примитивен. Такие гомоморфизмы играют важную роль при изучении матричных представлений инверсных полугрупп [1]).

7.1. Естественный частичный порядок на инверсной полугруппе

Взаимно однозначные частичные преобразования (§ 1.9, стр. 51) множества X, рассматриваемые как подмножества из $X \times X$, частично упорядочены относительно включения. Произвольная инверсная полугруппа обладает точным представлением взаимно однозначными частичными преобразованиями (теорема 1.20). Следовательно, произвольная инверсная полугруппа обладает частичным упорядочением, индуцированным таким представлением. Если α и β — взаимно однозначные частичные преобразования множества X, то легко видеть, что $\alpha \subseteq \beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha\beta^{-1} = \alpha\alpha^{-1}$. Так как этот частичный порядок можно определить в терминах операций на инверсной полугруппе, он не зависит от выбора индуцирующего его точного представления взаимно однозначными частичными преобразованиями. Теперь, следуя Вагнеру [1952], мы приступим к изучению абстрактных свойств этого частичного порядка.

Определим отношение $\leqslant$ на инверсной полугруппе S, полагая $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда $ab^{-1} = aa^{-1}$. Это отношение называется *естественным частичным порядком на S*. В силу предыдущих замечаний мы видим, что $\leqslant$ действительно является частичным порядком на S. Ниже мы передокажем это непосредственно из определения, не обращаясь к представлению полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями. Всюду в этом параграфе через $\leqslant$ будем обозначать естественный частичный порядок на инверсной полугруппе S. В § 7.2 он будет обозначаться также через ω.

Лемма 7.1. *Если элементы a и b принадлежат инверсной полугруппе S, то $a \leqslant b$ тогда и только тогда, когда выполняется любое из следующих эквивалентных равенств:*

$$(1)\ ab^{-1} = aa^{-1};\quad (1')\ ba^{-1} = aa^{-1};$$
$$(2)\ a^{-1}b = a^{-1}a;\quad (2')\ b^{-1}a = a^{-1}a;$$
$$(3)\ ab^{-1}a = a;\quad (3')\ a^{-1}ba^{-1} = a^{-1}.$$

[1]) См. работу Престона [1969].— *Прим. ред.*

Доказательство. Для каждого k $(k = 1, 2, 3)$ равенство (k') получается из (k) взятием инверсного элемента, поэтому (k) эквивалентно (k').

Равенство (1) непосредственно дает $(ab^{-1})\,a = (aa^{-1})\,a$. Таким образом, поскольку $aa^{-1}a = a$, (1) влечет за собой (3). Далее, из (3′) вытекает $(a^{-1}b)\,(a^{-1}b) = a^{-1}b$, т. е. $a^{-1}b$ является идемпотентом. Следовательно, $(a^{-1}b)\,(a^{-1}a) = a^{-1}aa^{-1}b = a^{-1}b$, так как идемпотенты коммутируют. Таким образом, (3′) влечет за собой $a^{-1}b = a^{-1}ba^{-1}a = a^{-1}a$, т. е. из (3′) вытекает (2).

Для завершения доказательства достаточно установить, что из (2′) следует (1). Заметим сначала, что в силу (2′) элемент ab^{-1} является идемпотентом. В самом деле, $a\,(b^{-1}a)\,b^{-1} = a\,(a^{-1}\,a)b^{-1} = ab^{-1}$. Тогда $ab^{-1} = (aa^{-1}a)\,b^{-1} = (aa^{-1})\,(ab^{-1}) = (ab^{-1})\,(aa^{-1}) = a\,(b^{-1}a)\,a^{-1} = a\,(a^{-1}a)\,a^{-1} = aa^{-1}$, т. е. (2′) влечет за собой (1).

Лемма 7.2. *Бинарное отношение $\leqslant$ является стабильным частичным порядком на инверсной полугруппе S.*

Доказательство. Ясно, что отношение $\leqslant$ рефлексивно. Предположим, что $a \leqslant b$ и $b \leqslant a$. Тогда на основании леммы 7.1 $ab^{-1}a = a$, $ab^{-1} = bb^{-1}$ и $b^{-1}a = b^{-1}b$. Следовательно,

$$a = (ab^{-1})\,a = b\,(b^{-1}a) = bb^{-1}b = b.$$

Таким образом, отношение $\leqslant$ антисимметрично.

Предположим, что $a \leqslant b$ и $b \leqslant c$. Тогда, используя подходящим образом лемму 7.1, получаем

$$\begin{aligned} ac^{-1}a &= a\,(a^{-1}a)\,c^{-1}a = aa^{-1}\,(bc^{-1})\,a = \\ &= a\,(a^{-1}b)\,(b^{-1}a) = aa^{-1}aa^{-1}a = a, \end{aligned}$$

откуда $a \leqslant c$. Таким образом, отношение $\leqslant$ транзитивно.

Осталось доказать, что частичный порядок $\leqslant$ стабилен относительно умножения в S. Пусть $a \leqslant b$ и x — произвольный элемент из S. Тогда

$$\begin{aligned} (xa)\,(xb)^{-1} &= x\,(ab^{-1})\,x^{-1} = x\,(aa^{-1})\,x^{-1} = \\ &= (xa)\,(xa)^{-1} \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (ax)^{-1}\,(bx) &= x^{-1}\,(a^{-1}b)\,x = x^{-1}\,(a^{-1}a)\,x = \\ &= (ax)^{-1}\,(ax), \end{aligned}$$

так что $xa \leqslant xb$ и $ax \leqslant bx$.

Это завершает доказательство леммы.

Лемма 7.3. *Бинарное отношение $\leqslant$ на инверсной полугруппе S стабильно относительно взятия инверсного элемента, т. е. $a \leqslant b$ влечет за собой $a^{-1} \leqslant b^{-1}$.*

Доказательство. Это непосредственно следует из леммы 7.1, точнее, из того факта, что из (1) следует (2).

Заметим здесь, что естественный частичный порядок на инверсной полугруппе был использован в т. 1 при доказательстве теоремы Риса 1.23 о вложении реверсивной справа полугруппы с сокращениями в группу.

Мы будем говорить, что a *меньше* b и b *больше* a, если $a \leqslant b$. Если e и f — два идемпотента, то $e \leqslant f$ тогда и только тогда, когда $ef\ (= fe) = e$. Таким образом, ограничение естественного частичного порядка инверсной полугруппы на полуструктуре идемпотентов из S совпадает с естественным частичным порядком $\leqslant$ этой полуструктуры (§ 1.8, стр. 45).

Закончим этот параграф доказательством обобщения результата Либера [1954]. Предварительно нам понадобится следующая

Лемма 7.4. *Инверсная полугруппа S является объединением групп тогда и только тогда, когда левая и правая единицы* [1]) *каждого элемента из S совпадают.*

Доказательство. Если S — инверсная полугруппа, которая является объединением групп, то инверсный к каждому элементу лежит в той же группе, что и сам элемент. Отсюда вытекает, что левая и правая единицы элемента совпадают с единицей этой группы и, следовательно, равны между собой.

Обратно, если $aa^{-1} = e = a^{-1}a$, то a принадлежит максимальной подгруппе H_e из S (упражнение 3 к § 1.7.)

Для случая цепи длины 2 или длины 3 следующая теорема принадлежит Либеру [1954]. Упражнение 3 ниже показывает, что, вообще говоря, утверждение теоремы не верно для бесконечного E.

Теорема 7.5. *Пусть S — инверсная полугруппа с конечным множеством E идемпотентов. Если E образует цепь (относительно естественного порядка), то S есть объединение групп.*

Доказательство. Пусть $a \in S$ и $e = aa^{-1}$, $f = a^{-1}a$. Тогда $ea = af = a$, $a^{-1}e = fa^{-1} = a^{-1}$. По предположению либо $e \leqslant f$, либо $f \leqslant e$. Пусть выполняется последнее. Тогда $ef = fe = f$, и поэтому

$$ae = afe = af = a, \qquad ea^{-1} = (ae)^{-1} = a^{-1}.$$

Таким образом, e является единицей инверсной подполугруппы S_a из S, порожденной элементом a. Если $f \neq e$, то по лемме 1.31 S_a является бициклической полугруппой. Но бициклическая

[1]) Напомним (т. 1, стр. 52), что левой [правой] единицей элемента a является aa^{-1} $[a^{-1}a]$.

полугруппа имеет бесконечное число различных идемпотентов, что противоречит нашему предположению. Следовательно, должно быть $f = e$. Теперь утверждение теоремы следует из предыдущей леммы.

* Теорема 7.5 следует из следующего результата Шайна [1964]: если множество идемпотентов инверсной полугруппы S вполне упорядочено естественным отношением порядка, то S есть объединение групп. (Небольшое изменение доказательства в тексте дает этот результат [1]).) Задача характеризации всех полуструктур E с тем свойством, что каждая инверсная полугруппа, полуструктура идемпотентов которой изоморфна E, есть объединение групп, была решена Хауи и Шайном [1969].* [2])

Упражнения к § 7.1

1. Если множество идемпотентов полугруппы S образует полуструктуру, то множество T регулярных элементов из S образует подполугруппу, которая является инверсной полугруппой. (Вагнер [1953].)

2. Пусть a и b принадлежат инверсной полугруппе S и e — правая единица для ab, а f — правая единица для b. Тогда $e \leqslant f$.

3. В бициклической полугруппе множество идемпотентов образует цепь относительно естественного порядка, и бициклическая полугруппа не является объединением групп (ср. с теоремой 7.5).

4. Пусть S — инверсная полугруппа и $x \leqslant b$, $y \leqslant b$. Тогда существует такой элемент z, что $z \leqslant x$ и $z \leqslant y$ (например, $z = yy^{-1}x$). Таким образом, частично упорядоченное множество $\{x \in S \mid x \leqslant b\}$ является направленным (вниз).

§ 7.2. Частичные правые конгруэнции на инверсной полугруппе

В § 7.3 мы приведем общую теорию Шайна [1962] представлений инверсной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями множества. Для этой теории Шайн ввел обобщение на случай инверсных полугрупп понятия разложения группы на смежные классы. В данном параграфе мы рассмотрим эти отношения эквивалентности.

Нам будет удобно сменить обозначение для естественного частичного порядка на инверсной полугруппе. Всюду в этом

[1]) Изменение состоит лишь в том, что вместо замечания о бесконечности множества идемпотентов бициклической полугруппы S_a нужно отметить, что идемпотенты в S_a образуют цепь, упорядоченную по типу целых отрицательных чисел.— *Прим. ред.*

[2]) Здесь и далее звездочками в тексте, выделены добавления авторов к готовящемуся в США второму изданию тома 2.—*Прим. ред.*

параграфе мы будем естественный частичный порядок на рассматриваемой инверсной полугруппе обозначать через ω. Пусть S — инверсная полугруппа. Тогда через $s\omega$, где $s \in S$, обозначим множество $\{x \in S \mid s\omega x\}$ (§ 1.4, стр. 32). Распространяя это обозначение на любое подмножество H из S, мы пишем

$$H\omega = \bigcup \{h\omega \mid h \in H\}.$$

Будем называть $H\omega$ *замыканием* множества H (относительно ω). Подмножество H, совпадающее со своим замыканием, будем называть *замкнутым*.

Лемма 7.6. *Пусть H — подмножество инверсной полугруппы S и $s \in S$. Тогда*

$$(H\omega)\, s \subseteq (Hs)\, \omega.$$

Доказательство. Пусть $z \in (H\omega)\, s$. Тогда $z = xs$, где $h\omega x$ для некоторого $h \in H$. Так как ω стабильно (лемма 7.2), имеем $hs\omega xs = z$, т. е. $z \in (Hs)\, \omega$.

Лемма 7.7. *Пусть H — подполугруппа инверсной полугруппы S и $h \in H$. Тогда*

$$(H\omega)\, h \subseteq H\omega.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует непосредственно из предыдущей леммы, так как $Hh \subseteq H$.

Лемма 7.8. *Пусть H — подмножество инверсной полугруппы S и $s \in S$. Тогда*

$$(Hs)\, \omega = ((H\omega)\, s)\, \omega.$$

Доказательство. В силу леммы 7.6 мы имеем

$$((H\omega)\, s)\, \omega \subseteq (Hs)\, \omega^2 = (Hs)\, \omega.$$

Обратное включение очевидно, так как $H \subseteq H\omega$.

Напомним, что инверсной подполугруппой инверсной полугруппы S называется всякая подполугруппа H, для которой $H^{-1} \subseteq H$ (§ 1.9, стр. 52).

Лемма 7.9. *Пусть H — инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S. Тогда $H\omega$ является замкнутой инверсной подполугруппой из S.*

Доказательство. Так как ω транзитивно, ясно, что $H\omega$ замкнуто. Пусть $x, y \in H\omega$, так что существуют $h_1, h_2 \in H$, для которых $h_1\omega x$ и $h_2\omega y$. В силу стабильности ω мы имеем $h_1h_2\omega xy$. Отсюда $xy \in H\omega$, так как H является подполугруппой. Этим установлено, что $H\omega$ — подполугруппа.

Далее, пусть $x \in H\omega$, так что $h\omega x$ для некоторого $h \in H$. По лемме 7.3 $h^{-1}\omega x^{-1}$, откуда $x^{-1} \in H\omega$, так как $h^{-1} \in H$. Лемма доказана.

Для дальнейшего полезно расширить нашу терминологию и обозначения, касающиеся отношений эквивалентности. Пусть S — множество и T — подмножество из S. Пусть ρ — эквивалентность на T. Будем называть ρ также *частичной эквивалентностью на* S, множество T — *областью определения для* ρ, *а* $S \setminus T$ — *дополнением области определения*. Множество T/ρ ρ-классов иногда будет удобно обозначать через S/ρ. Легко проверить, что бинарное отношение ρ на S является частичной эквивалентностью тогда и только тогда, когда оно симметрично и транзитивно. Область определения частичной эквивалентности ρ на S есть множество $S\rho$ $(= \{x \in S \mid s\rho x$ для некоторого $s \in S\})$.

Пусть S — полугруппа и ρ — частичная эквивалентность на S. Говорят, что ρ *стабильна справа* [*слева*], если для каждого $s \in S$ из $a\rho b$ следует либо что $as\rho bs$ [$sa\rho sb$], либо что ни as, ни bs [ни sa, ни sb] не принадлежат области определения этой частичной эквивалентности. Стабильная справа [слева] частичная эквивалентность на S называется *частичной правой* [*левой*] *конгруэнцией*. Пусть τ — произвольная правая конгруэнция на S и T — объединение некоторых ее τ-классов. Обозначим через ρ ограничение τ на T. Тогда ρ является частичной правой конгруэнцией на S с областью определения T. Обратно, если ρ — частичная правая конгруэнция на S с областью определения T, то существует правая конгруэнция τ на S, ограничение которой на T совпадает с ρ. Этот результат приведен как следствие 10.5.

Отметим следующий технический прием, который мы будем применять несколько раз. Если e — произвольный идемпотент инверсной полугруппы S и $x, y \in S$, то $xe\omega x$, $ex\omega x$ и $xey\omega xy$.

Теорема 7.10. *Пусть K — инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S и ω — естественный частичный порядок на S. Положим $K\omega = H$ и определим π_K следующим образом:*

$$\pi_K = \{(s, t) \in S \times S \mid st^{-1} \in H\}.$$

Тогда π_K — частичная правая конгруэнция на S с областью определения $D_K = \{s \in S \mid ss^{-1} \in H\}$.

Классами эквивалентности по $\operatorname{mod} \pi_K$ *являются множества $(Ks)\,\omega$ $(= (Hs)\,\omega)$ при $s \in D_K$. Множество $(Hs)\,\omega$ является классом эквивалентности, содержащим s, и, в частности, H есть один из π_K-классов.*

Доказательство. Из леммы 7.9 следует, что H есть замкнутая инверсная подполугруппа. В частности, так как $H^{-1} \subseteq H$, из $st^{-1} \in H$ вытекает $ts^{-1} \in H$. Таким образом, отношение π_K симметрично. Пусть (s, t) и (t, u) принадлежат π_K. Тогда $st^{-1} \in H$ и tu^{-1}, $\in H$ и поэтому, так как H является подполугруппой, $st^{-1}tu^{-1} \in H$. В силу того что $t^{-1}t$— идемпотент, имеем $st^{-1}tu^{-1}\omega su^{-1}$. Следовательно, $su^{-1} \in H\omega = H$, так как H замкнуто. Таким образом, $(s, u) \in \pi_K$, т. е. π_K транзитивно. Итак, π_K — частичная эквивалентность.

Очевидно, D_K является областью определения для π_K. Пусть $(a, b) \in \pi_K$, так что $ab^{-1} \in H$, и $s \in S$. Если $as \in D_K$, то $as\,(as)^{-1} \in H$. Следовательно, $as\,(as)^{-1} \cdot ab^{-1} = ass^{-1}a^{-1}ab^{-1} = aa^{-1}ass^{-1}b^{-1} = as\,(bs)^{-1} \in H$. Таким образом, $(as, bs) \in \pi_K$ и $bs \in D_K$. Этим установлено, что π_K стабильно справа.

Остается доказать, что множества $(Ks)\,\omega$, где $s \in D_K$, являются π_K-классами. Заметим сначала, что по лемме 7.8 мы имеем $(Ks)\,\omega = ((K\omega)\,s)\,\omega$ для любого $s \in S$, т. е. $(Ks)\,\omega = (Hs)\,\omega$. Пусть $x \in (Hs)\,\omega$, где $s \in D_K$. Тогда существует такое $h \in H$, что $hs\omega x$. Следовательно, $hss^{-1}\omega xs^{-1}$. Далее, $ss^{-1} \in H$, так как $s \in D_K$. Таким образом, $xs^{-1} \in H\omega = H$, т. е. $x\pi_K s$. Следовательно, $(Hs)\,\omega$ содержится в π_K-классе, которому принадлежит s. Обратно, предположим, что $x\pi_K s$, т. е. $xs^{-1} \in H$. Тогда $xs^{-1}s \in Hs$ и, так как $s^{-1}s$ является идемпотентом, $x \in (Hs)\,\omega$. Это завершает доказательство теоремы.

В случае когда инверсная полугруппа S в теореме 7.10 является группой, K является подгруппой, естественный частичный порядок совпадает с отношением равенства, а π_K есть правая конгруэнция на S, классы эквивалентности которой суть правые смежные классы по подгруппе K. В общем случае мы будем говорить, что множества $(Ks)\,\omega$ при $s \in D_K$ являются *правыми ω-классами по K*.

Теперь мы получим характеризацию частичных правых конгруэнций, определенных в теореме 7.10.

Лемма 7.11. *Частичная правая конгруэнция, указанная в формулировке теоремы 7.10, удовлетворяет следующим трем условиям:*

(i) *в точности один π_K-класс, а именно $K\omega$, содержит идемпотенты;*

(ii) *каждый π_K-класс замкнут (относительно ω);*

(iii) *π_K—с правым сокращением в том смысле, что $(ax, bx) \in \pi_K$ влечет за собой $(a, b) \in \pi_K$.*

Доказательство. (i) Пусть e — идемпотент, принадлежащий некоторому π_K-классу. Тогда $(e, e) \in \pi_K$ и потому $e = ee^{-1} \in H\ (= K\omega)$. Следовательно, H — единственный π_K-класс, содержащий идемпотенты. Тот факт, что H на самом деле содержит идемпотенты, следует из инверсности полугруппы H.

(ii) Это непосредственно следует из теоремы, так как $\omega^2 = \omega$.

(iii) Пусть $(ax, bx) \in \pi_K$, т. е. $ax\,(bx)^{-1} \in H$. Тогда $axx^{-1}b^{-1} \in H$ и, так как xx^{-1} является идемпотентом, а множество H замкнуто, имеем $ab^{-1} \in H$, т. е. $(a, b) \in \pi_K$. Таким образом, π_K — частичная правая конгруэнция с правым сокращением.

Частичную правую конгруэнцию ρ на инверсной полугруппе, обладающую свойствами (i), (ii) и (iii) из предыдущей леммы, т. е. такую, что (i) точно один ρ-класс содержит идемпотенты, (ii) каждый ρ-класс замкнут и (iii) ρ с правым сокращением, будем называть *главной* частичной правой конгруэнцией.

Справедливо утверждение, обратное утверждению леммы 7.11.

Теорема 7.12. (i) *Пусть K — инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S и ω — естественный частичный порядок на S. Определим отношение π_K, полагая*

$$\pi_K = \{(s, t) \in S \times S \mid st^{-1} \in K\omega\}.$$

Тогда π_K — главная частичная правая конгруэнция.

(ii) *Пусть ρ — главная частичная правая конгруэнция на S и K — ее ρ-класс, содержащий идемпотенты. Тогда K является замкнутой инверсной подполугруппой из S и $\rho = \pi_K$.*

Доказательство. Утверждение (i) теоремы совпадает с леммой 7.11.

Докажем (ii). Пусть (s, t) — элемент главной частичной правой конгруэнции ρ. Так как $t = tt^{-1}t$ и ρ является частичной правой конгруэнцией, то $(st^{-1}t, tt^{-1}t) \in \rho$. Так как ρ — конгруэнция с правым сокращением, то $(st^{-1}, tt^{-1}) \in \rho$. Но tt^{-1} является идемпотентом и поэтому принадлежит ρ-классу K, содержащему идемпотенты. Следовательно, также и $st^{-1} \in K$. Таким образом, $(s, t) \in \rho$ влечет за собой $st^{-1} \in K$.

Чтобы доказать обратное, мы сначала установим, что K является замкнутой инверсной подполугруппой из S. Согласно одному из предположений относительно ρ множество K замкнуто. Если $k \in K$, то $(k, k) \in \rho$, так что по только что доказанному результату $kk^{-1} \in K$. Пусть $h, k \in K$. Тогда, поскольку $kk^{-1} \in K$ и K является ρ-классом, имеем $(h, kk^{-1}) \in \rho$. Следовательно, $(hk, k) \in \rho$ в силу того, что $k = kk^{-1}k \in K$. Таким образом, $hk \in K$. Этим доказано, что K является подполугруппой. Покажем, что K допускает взятие инверсных элементов. Пусть $k \in K$, так что $(k, kk^{-1}) \in \rho$. Отсюда $(kk^{-1}, kk^{-1}k^{-1}) \in \rho$. Из $(kk^{-1})\, k^{-1}\omega k^{-1}$ и $kk^{-1}k^{-1} \in K$ в силу замкнутости K получаем $k^{-1} \in K$.

Таким образом, K является замкнутой инверсной подполугруппой из S и $st^{-1} \in K$ тогда и только тогда, когда $(s, t) \in \pi_K$. Следовательно, мы показали, что $\rho \subseteq \pi_K$. Обратно, пусть $(s, t) \in \pi_K$. Тогда $st^{-1} \in K$. По теореме 7.10 $(s, t) \in \pi_K$ влечет за собой $tt^{-1} \in K$. Таким образом, $(st^{-1}, tt^{-1}) \in \rho$. Ввиду того что ρ — частичная правая конгруэнция с правым сокращением, отсюда вытекает $(s, t) \in \rho$. Итак, $\pi_K \subseteq \rho$, и мы заключаем, что $\rho = \pi_K$. Теорема доказана.

Теперь мы приведем характеризацию главных частичных правых конгруэнций, которая отлична от характеризации Шайна и которая отождествляет их с главными частичными правыми конгруэнциями в смысле Дюбрея [1941].

Пусть S — произвольная полугруппа и H — подмножество из S. Для любого $a \in S$ определим $a^{[-1]}H$ и $Ha^{[-1]}$, полагая

$$a^{[-1]}H = \{x \in S \mid ax \in H\},$$
$$Ha^{[-1]} = \{x \in S \mid xa \in H\}.$$

Используются и другие обозначения: $H \,.\!\cdot\, a$ для $a^{[-1]}H$ и $H \cdot\!. \,a$ для $Ha^{[-1]}$. Определим бинарные отношения $\mathscr{R}_H^*$ и $\mathscr{R}_H^*$ полагая:

$$\mathscr{R}_H = \{(a, b) \in S \times S \mid a^{[-1]}H = b^{[-1]}H\},$$
$$\mathscr{R}_H^* = \{(a, b) \in S \times S \mid a^{[-1]}H = b^{[-1]}H \neq \varnothing\}.$$

Справедливо следующее утверждение. (Дюбрей [1941].)

Лемма 7.13. *Пусть H — подмножество полугруппы S. Тогда $\mathscr{R}_H$ является правой конгруэнцией на S, а $\mathscr{R}_H^*$ — частичной правой конгруэнцией на S. Дополнение W_H^* области определения частичной правой конгруэнции $\mathscr{R}_H^*$ является, если оно не пусто, $\mathscr{R}_H$-классом и $\mathscr{R}_H$ совпадает с ограничением правой конгруэнции $\mathscr{R}_H$ на область определения для $\mathscr{R}_H^*$.*

Доказательство. Ясно, что $\mathscr{R}_H$ есть отношение эквивалентности на S и $\mathscr{R}_H^*$ есть отношение частичной эквивалентности на S. Пусть $(a, b) \in \mathscr{R}_H$. Тогда $a^{[-1]}H = b^{[-1]}H$ и поэтому для любого фиксированного элемента $c \in S$ включение $acx \in H$ имеет место тогда и только тогда, когда $bcx \in H$, другими словами, $(ac, bc) \in \mathscr{R}_H^*$. Таким образом, $\mathscr{R}_H$ является правой конгруэнцией на S.

Пусть $W_H = \{x \in S \mid x^{[-1]}H = \varnothing\}$. Тогда W_H есть, очевидно, дополнение области определения частичной эквивалентности $\mathscr{R}_H^*$, и если W_H не пусто, то оно является $\mathscr{R}_H$-классом. Далее очевидно, что $\mathscr{R}_H^*$ совпадает с ограничением $\mathscr{R}_H$ на $S \setminus W_H$.

Отношение $\mathscr{R}_H$ называется *главной правой конгруэнцией* (определенной подмножеством H), и $\mathscr{R}_H^*$ называется *главной частичной правой конгруэнцией* (определенной подмножеством H). Общее рассмотрение этих отношений будет проведено в § 10.2. А пока приведем лемму, оправдывающую нашу терминологию.

Лемма 7.14. *Пусть H —замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S. Тогда $\pi_H = \mathscr{R}_H^*$ и π_H-классами являются непустые множества $Ha^{[-1]}$ $(a \in S)$. Если $Ha^{[-1]} \neq \varnothing$, то $a^{-1} \in \in Ha^{[-1]}$.*

Доказательство. Пусть $(a, b) \in \pi_H$, т. е. $ab^{-1} \in H$. Тогда $b^{-1} \in a^{[-1]}H$, так что $a^{[-1]}H \neq \varnothing$. Для любого x, такого, что $ax \in H$, мы тогда имеем $ax(ax)^{-1}\cdot ab^{-1} \in H$. Следовательно, $aa^{-1}axx^{-1}b^{-1} = axx^{-1}b^{-1} \in H$. Таким образом, $(ax, bx) \in \pi_H$. Отсюда $bx \in H$, так как H есть π_H-класс (лемма 7.11 (i)). Аналогично, $bx \in H$ влечет за собой $ax \in H$. Итак, $a^{[-1]}H = b^{[-1]}H \neq \varnothing$, т. е. $(a, b) \in \mathcal{R}_H^*$. Таким образом, $\pi_H \subseteq \mathcal{R}_H^*$.

Обратно, пусть $(a, b) \in \mathcal{R}_H^*$. Тогда $ax, bx \in H$ для некоторого x. Следовательно, $(ax, bx) \in \pi_H$ и, так как π_H — конгруэнция с правым сокращением (лемма 7.11 (iii)), $(a, b) \in \pi_H$. Таким образом, $\mathcal{R}_H^{*\prime} \subseteq \pi_H$, что вместе с предыдущим включением дает $\mathcal{R}_H^* = \pi_H$.

Пусть $(a, b) \in \pi_H$, так что $ax, bx \in H$ для некоторого x. Тогда $a, b \in Hx^{[-1]}$. Пусть $y \in Hx^{[-1]}$, так что $yx \in H$. Тогда $ax(yx)^{-1} = axx^{-1}y^{-1} \in H$. Следовательно, ввиду замкнутости H имеем $ay^{-1} \in H$, т. е. $(a, y) \in \pi_H$. Таким образом, π_H-классом, содержащим a, является $Hx^{[-1]}$.

Далее, пусть $Ha^{[-1]} \neq \varnothing$. Тогда $za \in H$ для некоторого z, т. е. $z(a^{-1})^{-1} \in H$, откуда $(z, a^{-1}) \in \pi_H$. Следовательно, как и выше, $Ha^{[-1]}$ есть π_H-класс, содержащий a^{-1}.

Упражнения к § 7.2

1. Пусть ρ — частичная конгруэнция на S и A, B — два ρ-класса. Тогда либо AB содержится в некотором ρ-классе, либо AB содержится в дополнении области определения для ρ.

2. Пусть F — замкнутое подмножество инверсной полугруппы S. Предположим, что F содержит идемпотент и $FF^{-1}F \subseteq F$. Тогда F является инверсной подполугруппой из S.

3. Пусть H — замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S и D — область определения для π_H. Тогда либо $S \setminus D$ пусто, либо $S \setminus D$ является правым идеалом в S. Следовательно, $\pi_H \cup ((S \setminus D) \times (S \setminus D))$ есть правая конгруэнция на S, ограничение которой на D равно π_H.

4. Подмножество H полугруппы S называется *сильным* (§ 10.2), если для любых $a, b \in S$ из $a^{[-1]}H \cap b^{[-1]}H \neq \varnothing$ следует $a^{[-1]}H = b^{[-1]}H$.

Пусть H — инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S. Тогда H будет сильным подмножеством в том и только в том случае, когда она замкнута.

§ 7.3. *Представления взаимно однозначными частичными преобразованиями*

Напомним, что через $\mathcal{I}_X$ мы обозначаем симметрическую инверсную полугруппу на X, т. е. полугруппу всех взаимно однозначных частичных преобразований множества X. Теорема 1.20 показывает, что любая инверсная полугруппа S может быть точно представлена как полугруппа взаимно однозначных частичных преобразований множества, а именно S может быть вложена в $\mathcal{J}_S$. В этом параграфе мы изложим общую теорию представлений, не обязательно точных, инверсных полугрупп как полугрупп взаимно однозначных частичных преобразований.

Результаты, которые мы приводим, принадлежат Шайну [1962]. См. также § 11.4, где изложена построенная Шайном [1961] теория представлений произвольной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями. Другой подход для случая инверсных полугрупп был предложен Рейли [1965]; мы кратко опишем его в конце § 7.6.

Представления инверсных полугрупп изучались также И. С. Понизовским [1964].

Для удобства в этом параграфе мы условимся понимать под *представлением* инверсной полугруппы S ее гомоморфизм φ в некоторую симметрическую инверсную полугруппу $\mathcal{J}_X$.

В общем случае справедливо, как мы увидим ниже (§ 7.4), что гомоморфный образ инверсной полугруппы сам является инверсной полугруппой и что при гомоморфизме образ элемента, инверсного к данному, равен инверсному элементу для образа. В нашем частном случае для представлений этот результат легко можно получить следующим образом.

Лемма 7.15. *Пусть φ: $S \to \mathcal{J}_X$ есть представление полугруппы S. Тогда для любого $s \in S$ выполняется $(s\varphi)^{-1} = s^{-1}\varphi$. Следовательно, $S\varphi$ является инверсной подполугруппой из $\mathcal{J}_X$.*

Доказательство. Пусть $s \in S$. Тогда $s = ss^{-1}s$ и $s^{-1}ss^{-1} = s^{-1}$. Следовательно,

$$s\varphi = s\varphi \cdot s^{-1}\varphi \cdot s\varphi \quad \text{и} \quad s^{-1}\varphi \cdot s\varphi \cdot s^{-1}\varphi = s^{-1}\varphi.$$

Таким образом, в инверсной полугруппе $\mathcal{J}_X$ элемент $s^{-1}\varphi$ инверсен к элементу $s\varphi$ (§ 1.9, стр. 48). Однако $(s\varphi)^{-1}$ инверсен к $s\varphi$ в $\mathcal{J}_X$, откуда в силу единственности инверсного элемента имеем $(s\varphi)^{-1} = s^{-1}\varphi$.

Пусть H — инверсная подполугруппа из $\mathcal{J}_X$. Определим

$$\tau_H = \{(a, b) \in X \times X \mid (a, b) \in \eta \quad \text{для некоторого} \quad \eta \in H\}.$$

Тогда τ_H будем называть *отношением транзитивности*, соответствующим подполугруппе H.

Лемма 7.16. *Если H — инверсная подполугруппа из $\mathcal{J}_X$, то соответствующее ей отношение транзитивности τ_H является частичной эквивалентностью на X.*

Доказательство. Из определения произведения в $\mathcal{J}_X$ и из того, что $H^2 \subseteq H$, следует транзитивность отношения τ_H. Аналогично, из $H^{-1} \subseteq H$ вытекает симметричность отношения τ_H.

Классы эквивалентности отношения τ_H называются *классами транзитивности* полугруппы H. Говорят, что H *транзитивна* (на $X\tau_H$), если τ_H является универсальной эквивалентностью на своей области определения, т. е. $\tau_H = (X\tau_H) \times (X\tau_H)$. Таким образом, H транзитивна тогда и только тогда, когда для каждой пары элементов $x_1, x_2 \in X\tau_H$ существует некоторый элемент $h \in H$, который, рассматриваемый как частичное преобразование множества X, переводит x_1 в x_2. Говорят, что H — *эффективная* подполугруппа из $\mathcal{J}_X$, если $X\tau_H = X$.

Пусть φ — представление инверсной полугруппы S в $\mathcal{J}_X$. Тогда говорят, что φ *транзитивно*, если $S\varphi$ транзитивна, и φ *эффективно*, если $S\varphi$ эффективна.

Пусть φ: $S \to \mathcal{J}_X$ и ψ: $S \to \mathcal{J}_Y$ — два представления полугруппы S. Тогда говорят, что φ и ψ *эквивалентны*, если существует такое взаимно однозначное отображение θ множества X на Y, что для $x, x' \in X$ и $s \in S$ включение $(x, x') \in s\varphi$ выполняется в том и только в том случае, когда $(x\theta, x'\theta) \in s\psi$, т. е. $(x\,(s\varphi))\theta = (x\theta)\,s\psi$ всюду, где определены обе части этого равенства.

Пусть φ_i: $S \to \mathcal{J}_{X_i}$ $(i \in I)$ — семейство представлений инверсной полугруппы S и множества X_i попарно не пересекаются. Если последнее условие не выполняется, то его всегда можно обеспечить, заменяя каждое φ_i эквивалентным представлением. *Прямой суммой* или просто *суммой* представлений φ_i называется представление φ, определенное следующим образом:

$$s\varphi = \bigcup \{s\varphi_i \mid i \in I\}.$$

Тогда φ: $S \to \mathcal{J}_X$, где $X = \bigcup \{X_i \mid i \in I\}$. Легко видеть, что $S\varphi$ изоморфно подпрямому произведению всех $S\varphi_i$ $(i \in I)$ (см. замечания, предшествующие упражнению 10 к § 9.4). Далее, $s\varphi = t\varphi$ тогда и только тогда, когда $s\varphi_i = t\varphi_i$ для всех i. Следовательно,

$$\varphi \circ \varphi^{-1} = \bigcap \{\varphi_i \circ \varphi_i^{-1} \mid i \in I\}.$$

Кроме того, если мы положим $S\varphi = H$ и $S\varphi_i = H_i$ $(i \in I)$, то

$$\tau_H = \bigcup \{\tau_{H_i} \mid i \in I\}.$$

Теорема 7.17. *Эффективное представление инверсной полугруппы S есть сумма однозначно определенного семейства транзитивных эффективных представлений этой полугруппы.*

Доказательство. Пусть φ: $S \to \mathcal{J}_X$ — эффективное представление полугруппы S. Положим $S\varphi = H$. Пусть τ_H — отношение транзитивности полугруппы H и X_i $(i \in I)$ — классы транзитивности этой полугруппы. Тогда в силу эффективности

$$\begin{aligned} X &= \bigcup \{X_i \mid i \in I\}, \\ \tau_H &= \bigcup \{X_i \times X_i \mid i \in I\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Для каждого $i \in I$ определим отображение φ_i: $S \to \mathcal{J}_{X_i}$, полагая

$$s\varphi_i = s\varphi \cap (X_i \times X_i) \quad (s \in S).$$

Наконец, положим $S\varphi_i = H_i \quad (i \in I)$.

Тогда каждое φ_i является эффективным и транзитивным представлением полугруппы S. Докажем сначала, что φ_i есть представление. Рассмотрим $(st)\,\varphi_i$, где $s, t \in S$. Тогда $(a, b) \in (st)\,\varphi_i$ в том и только в том случае, когда $(a, b) \in X_i \times X_i$ и $(a, b) \in (st)\,\varphi = (s\varphi)(t\varphi)$. Далее, $(a, b) \in (s\varphi)(t\varphi)$ тогда и только тогда, когда $(a, c) \in s\varphi$ и $(c, b) \in t\varphi$ для некоторого $c \in X$. Из $(a, c) \in s\varphi$ следует $(a, c) \in \tau_H$, и поэтому $c \in X_i$, так как $a \in X_i$. Таким образом, $(a, b) \in (st)\,\varphi_i$ тогда и только тогда, когда $(a, c) \in s\varphi \cap (X_i \times X_i) = s\varphi_i$ и $(c, b) \in t\varphi \cap (X_i \times X_i) = t\varphi_i$. Другими словами, $(a, b) \in (st)\,\varphi_i$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in (s\varphi_i)(t\varphi_i)$. Итак, φ_i является представлением полугруппы S.

Пусть a, b — два произвольных элемента из X_i. Так как $(a, b) \in \tau_H$, существует такое $s \in S$, что $(a, b) \in s\varphi$. Следовательно, $(a, b) \in s\varphi_i$. Таким образом, $\tau_{H_i} = X_i \times X_i$, т. е. H_i, а поэтому φ_i, транзитивно. Одновременно установлена и эффективность представления φ_i.

Из определения φ_i и X_i вытекает, что

$$s\varphi = \bigcup \{s\varphi_i \mid i \in I\}.$$

Таким образом, φ есть сумма семейства $\{\varphi_i\}$ эффективных транзитивных представлений полугруппы S.

Осталось установить единственность семейства $\{\varphi_i\}$. Для этой цели предположим, что φ является также суммой семейства $\{\psi_j \mid j \in J\}$ эффективных транзитивных представлений полугруппы S, где ψ_j: $S \to \mathcal{J}_{Y_j}$ и множества Y_j попарно не пересекаются. Из определения суммы представлений непосредственно следует, что

$$X = \bigcup \{Y_j \mid j \in J\}.$$

Положим $S\psi_j = K_j$. Так как ψ_j транзитивно и эффективно для каждого j, имеем

$$\tau_{K_j} = Y_j \times Y_j.$$

Следовательно,

$$\tau_H = \bigcup \{\tau_{K_j} \mid j \in J\} = \bigcup \{Y_j \times Y_j \mid j \in J\}. \tag{2}$$

Сравнивая (1) и (2), мы видим, что множество $\{Y_j \mid j \in J\}$ совпадает с множеством $\{X_i \mid i \in I\}$. А поскольку для каждого j

$$s\psi_j = s\varphi \cap (Y_j \times Y_j) \quad (s \in S),$$

семейства $\{\psi_j\}$ и $\{\varphi_i\}$ совпадают.

Учитывая, что произвольное эффективное представление расщепляется в сумму транзитивных эффективных представлений, мы изучим теперь транзитивные представления и получим характеризацию Шайна таких представлений, используя главные частичные правые конгруэнции из предыдущего параграфа.

Пусть $\varphi\colon S \to \mathcal{J}_X$ — представление полугруппы S и $x \in X$, Положим

$$S_x = \{s \in S \mid (x, x) \in s\varphi\}.$$

Элементы из S_x назовем элементами, *фиксирующими* x (относительно φ).

Лемма 7.18. *Пусть* $\varphi\colon S \to \mathcal{J}_X$ *— представление инверсной полугруппы* S *и* $x \in X$. *Тогда* S_x, *если оно не пусто, является замкнутой инверсной подполугруппой из* S. *Ясно, что* S_x *не пусто, если* φ *эффективно.*

Доказательство. Очевидно, если $s, t \in S_x$, то $(x, x) \in (s\varphi)(t\varphi) = (st)\varphi$ и поэтому $st \in S_x$. Далее, $(x, x) \in s\varphi$ влечет за собой $(x, x) \in (s\varphi)^{-1} = s^{-1}\varphi$ (лемма 7.15). Таким образом, S_x является инверсной подполугруппой из S.

Предположим теперь, что $s\omega t$, где ω есть естественный порядок на S и $s \in S_x$. Тогда $ts^{-1} = ss^{-1}$ и поэтому $(t\varphi)(s^{-1}\varphi) = (s\varphi)(s^{-1}\varphi)$. Так как $(x, x) \in s\varphi \cap s^{-1}\varphi$, отсюда следует, что $(x, x) \in t\varphi$. Таким образом, S_x замкнуто.

Это завершает доказательство леммы.

Пусть H — произвольная инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S, π_H — главная частичная правая конгруэнция, определенная при помощи H, и $\mathcal{X}$ — множество правых ω-классов по H, т. е. $\mathcal{X}$ есть множество π_H-классов или, другими словами, множество всех таких $(Hs)\omega$, что $ss^{-1} \in H$ (теорема 7.10), где $s \in S$ и ω есть естественный частичный порядок на S. Определим отображение $\varphi_H\colon S \to \mathcal{B}_{\mathcal{X}}$, где через $\mathcal{B}_{\mathcal{X}}$ обозначена полугруппа всех бинарных отношений на $\mathcal{X}$ (§ 1.4), полагая для $s \in S$

$$s\varphi_H = \{(X, (Xs)\omega) \mid X \in \mathcal{X} \text{ и } (Xs)\omega \in \mathcal{X}\}. \tag{3}$$

Лемма 7.19. *Пусть* H *— замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы* S. *Тогда* φ_H, *определенное при помощи формулы* (3), *является эффективным транзитивным представлением полугруппы* S *в* $\mathcal{J}_{\mathcal{X}}$, *где* $\mathcal{X}$ *есть множество правых* ω*-классов по* H. *Подмножество* H *совпадает с множеством всех элементов, фиксирующих элемент* H *из* $\mathcal{X}$.

Доказательство. Так как π_H есть частичная правая конгруэнция, для любого $s \in S$ либо Xs содержится в дополнении области определения отношения π_H, либо Xs содержится в некотором элементе из $\mathscr{X}$. В последнем случае легко видеть, что этот элемент равен $(Xs)\,\omega$. В самом деле, пусть $X = (Ht)\,\omega$. Тогда, применяя лемму 7.8 к множеству Ht, мы получаем $(Xs)\,\omega = (((Ht)\,\omega)\,s)\,\omega = ((Ht)\,s)\,\omega = (Hts)\,\omega$. Далее, $(Hts)\,\omega$ является элементом из $\mathscr{X}$ тогда и только тогда, когда $(Ht)\,\omega s = Xs$ содержится в некотором элементе из $\mathscr{X}$, что доказывает наше утверждение.

Из того факта, что π_H — частичная конгруэнция с правым сокращением (лемма 7.11), вытекает взаимная однозначность отображения $s\varphi_H$ (мы считаем, в частности, что пустое отношение взаимно однозначно). Следовательно, φ_H отображает S в $\mathscr{I}_{\mathscr{X}}$. Элемент $X = (Ht)\,\omega$ из $\mathscr{X}$ переводится отображением $t^{-1}\varphi_H$ в $(Htt^{-1})\,\omega = H$, и если $ss^{-1} \in H$, то H переводится отображением $s\varphi_H$ в $(Hs)\,\omega$. Если мы установим, что φ_H есть представление полугруппы S, то отсюда будет следовать одновременно и эффективность, и транзитивность φ_H.

Пусть $s, t \in S$. Тогда $(X, Y) \in (st)\,\varphi_H$ в том и только в том случае, когда $Y = (Xst)\,\omega$ и Xst содержится в некотором π_H-классе. Так как π_H — конгруэнция с правым сокращением, Xst содержится в некотором π_H-классе только тогда, когда Xs содержится в некотором π_H-классе. Следовательно, $(X, Y) \in (st)\,\varphi_H$ тогда и только тогда, когда $(X, Z) \in s\varphi_H$ и $(Z, Y) \in t\varphi_H$, где $Z = (Xs)\,\omega \in \mathscr{X}$. Отсюда $(st)\,\varphi_H = (s\varphi_H)\,(t\varphi_H)$. Таким образом, φ_H является представлением.

Осталось определить подмножество S_H из S, фиксирующее элемент H из $\mathscr{X}$. Так как $Hh \subseteq H$, очевидно, $H \subseteq S_H$. Обратно, пусть s — произвольный элемент из S_H. Тогда $(Hs)\,\omega = H$. По теореме 7.10 $(Hs)\,\omega$ есть π_H-класс, содержащий s. Следовательно, $s \in H$. Таким образом, $S_H \subseteq H$. Итак, $S_H = H$, что и требовалось доказать.

Лемма 7.20. *Пусть $\varphi\colon S \to \mathscr{I}_Y$ — транзитивное эффективное представление полугруппы S и $y \in Y$. Положим $H = S_y$. Тогда φ эквивалентно φ_H.*

Доказательство. Согласно лемме 7.18 S_y является замкнутой инверсной подполугруппой из S, так что обозначение φ_H оправдано. Пусть $\mathscr{X}$ обозначает множество правых ω-классов по H. Так как φ эффективно и транзитивно, для любого $y' \in Y$ существует такой элемент $s \in S$, что $y\,(s\varphi) = y'$. Определим отображение θ, полагая

$$y'\theta = (Hs)\,\omega, \quad \text{если} \quad y' \in Y \quad \text{и} \quad y' = y\,(s\varphi).$$

Заметим сначала, что $(Hs)\,\omega \in \mathscr{X}$. В самом деле, $(y, y) \in (s\varphi)\,(s\varphi)^{-1} = (ss^{-1})\,\varphi$. Следовательно, $ss^{-1} \in H$, откуда (теорема 7.10) $(Hs)\,\omega \in \mathscr{X}$.

Докажем, что θ является взаимно однозначным отображением Y на $\mathscr{X}$. Рассмотрим сначала такие s и t, что $y' = y\,(s\varphi) = y\,(t\varphi)$.

Тогда $(y, y') \in s\varphi \cap t\varphi$. Таким образом, $st^{-1} \in H$, т. е. $(s, t) \in \pi_H$, и поэтому в силу теоремы 7.10 $(Hs)\,\omega = (Ht)\,\omega$. Это показывает, что θ действительно является (однозначным) отображением, а так как φ эффективно и транзитивно, θ отображает Y в $\mathscr{X}$.

Предположим теперь, что $y'\theta = y''\theta$, т. е. что $(Hs)\,\omega = (Ht)\,\omega$, где $y' = y\,(s\varphi)$ и $y'' = y\,(t\varphi)$. Тогда по теореме 7.10 $(s, t) \in \pi_H$, так что $st^{-1} \in H$. Следовательно, $(y, y) \in (st^{-1})\,\varphi = (s\varphi)\,(t^{-1}\varphi) = s\varphi\,(t\varphi)^{-1}$. Так как $(y, y') \in s\varphi$ и $(y, y'') \in t\varphi$, отсюда вытекает $y' = y''$. Это показывает, что θ взаимно однозначно.

Пусть $(Hs)\,\omega$ — произвольный элемент из $\mathscr{X}$. Тогда $ss^{-1} \in H$, и поэтому $(y, y) \in (ss^{-1})\,\varphi = (s\varphi)\,(s\varphi)^{-1}$. Таким образом, $(y, y') \in s\varphi$ для некоторого $y' \in Y$, откуда следует, что $y'\theta = (Hs)\,\omega$. Это показывает, что θ отображает Y на $\mathscr{X}$.

Для того чтобы доказать эквивалентность φ и φ_H, достаточно установить, что для любого $s \in S$ включение $(y', y'') \in s\varphi$ имеет место тогда и только тогда, когда $(y'\theta, y''\theta) \in s\varphi_H$. Выберем такие t' и t'', что $(y, y') \in t'\varphi$, $(y, y'') \in t''\varphi$. Тогда $y'\theta = (Ht')\,\omega$ и $y''\theta = (Ht'')\,\omega$. Теперь получаем следующую серию эквивалентных условий:

$$((Ht')\,\omega,\ (Ht'')\,\omega) \in s\varphi_H; \quad (Ht'')\,\omega = (Ht's)\,\omega;$$
$$(t'', t's) \in \pi_H; \quad t''\,(t's)^{-1} \in H; \quad (y, y) \in (t''\varphi)\,((t's)\,\varphi)^{-1}.$$

Но так как $(y, y'') \in t''\varphi$, последнее имеет место тогда и только тогда, когда $(y, y'') \in (t's)\,\varphi = (t'\varphi)\,(s\varphi)$. Так как $(y, y') \in t'\varphi$, это равносильно тому, что $(y', y'') \in s\varphi$. Таким образом, φ и φ_H эквивалентны. Доказательство леммы закончено.

Имеет место утверждение, обратное к лемме 7.20.

Лемма 7.21. *Пусть $\varphi\colon S \to \mathscr{I}_Y$ — представление инверсной полугруппы S и H — замкнутая инверсная подполугруппа из S. Предположим, что φ эквивалентно φ_H. Тогда существует такой элемент $y_0 \in Y$, что $H = S_{y_0}$ есть множество всех элементов из S, фиксирующих y_0.*

Доказательство. По предположению существует взаимно однозначное отображение θ правых ω-классов по H на Y. Полугруппа H является правым ω-классом по H (теорема 7.10). Положим $H\theta = y_0$. Тогда из определения эквивалентности вытекает, что

$$(H\,(s\varphi_H))\,\theta = y_0\,(s\varphi)$$

и, так как θ взаимно однозначно,

$$H\,(s\varphi_H) = H \text{ тогда и только тогда, когда } y_0\,(s\varphi) = y_0.$$

Таким образом, s фиксирует правый ω-класс H тогда и только тогда, когда s фиксирует элемент y_0. Следовательно, по лемме 7.19 $H = S_{y_0}$.

Сопоставляя леммы 7.19—7.21, мы получаем следующую характеризацию эффективных транзитивных представлений инверсных полугрупп. Представление φ_H из леммы 7.19 будем называть *представлением полугруппы S на правых ω-классах по H.*

Теорема 7.22 *Пусть H — произвольная замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S. Тогда представление полугруппы S на правых ω-классах по H эффективно и транзитивно. Кроме того, H совпадает с множеством всех элементов из S, фиксирующих правый ω-класс H.*

Пусть φ: $S \to \mathcal{J}_Y$ — эффективное транзитивное представление полугруппы S. Пусть $y \in Y$ и $H = S_y$ есть множество всех элементов из S, фиксирующих y относительно φ. Тогда H является замкнутой инверсной подполугруппой и представление φ эквивалентно φ_H. Если K — произвольная замкнутая инверсная подполугруппа из S, такая, что представление φ эквивалентно φ_K, то K совпадает с множеством всех элементов из S, фиксирующих некоторый элемент из Y.

Основываясь на этом подходе, мы выведем теперь другое доказательство того факта, что каждая инверсная полугруппа имеет точное представление (взаимно однозначными частичными преобразованиями множества). Для этой цели мы сначала найдем характеризацию конгруэнции $\varphi_H \circ \varphi_H^{-1}$. Отношение, определенное в лемме 7.23, есть главная конгруэнция Круазо [1957], которая будет рассмотрена в § 10.4.

Лемма 7.23. *Если H — замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S и φ_H — представление полугруппы S на правых ω-классах по H, то*

$$\varphi_H \circ \varphi_H^{-1} = \{(x, y) \in S \times S \mid sxt \in H \text{ тогда и только тогда, когда } syt \in H \quad \text{для} \quad s, t \in S\}.$$

Доказательство. По определению (3) представления φ_H включение $((Hs)\,\omega, (Ht^{-1})\,\omega) \in x\varphi_H$ имеет место тогда и только тогда, когда $sx\pi_H t^{-1}$, т. е. когда $sxt \in H$. Отсюда непосредственно вытекает заключение леммы.

Пусть e — некоторый идемпотент инверсной полугруппы S. Тогда $e\omega$ является замкнутой инверсной подполугруппой из S (лемма 7.9). Для $H = e\omega$ мы пишем φ_e вместо φ_H. Если e и f — идемпотенты, то $e\omega = f\omega$ тогда и только тогда, когда $e = f$.

Теорема 7.24. *Пусть E — множество всех идемпотентов инверсной полугруппы S и φ — сумма семейства $\{\varphi_e \mid e \in E\}$ представлений полугруппы S. Тогда φ является точным представлением.*

Доказательство. Пусть $x\varphi = y\varphi$. Тогда $x\varphi_e = y\varphi_e$ для всех $e \in E$. Следовательно, по лемме 7.23 $sxt \in e\omega$ тогда и только тогда, когда $syt \in e\omega$ для каждого $e \in E$. В частности, $xx^{-1}\omega xx^{-1}\cdot x\cdot x^{-1}$ тогда и только тогда, когда $xx^{-1}\omega xx^{-1}\cdot y\cdot x^{-1}$. Так как $xx^{-1}yx^{-1}\omega yx^{-1}$, отсюда следует, что $xx^{-1}\omega yx^{-1}$. Таким образом, $x = xx^{-1}x\omega yx^{-1}x\omega y$, т. е. $x\omega y$. Аналогично, $y\omega x$. Следовательно, $x = y$. Теорема доказана.

Пусть H и K — две замкнутые подполугруппы инверсной полугруппы S. Если φ_H эквивалентно φ_K, то говорят, что H и K *сопряжены*.

Из теоремы 7.22 непосредственно вытекает

Лемма 7.25. *Замкнутые инверсные подполугруппы H и K инверсной полугруппы S сопряжены тогда и только тогда, когда H совпадает с множеством всех элементов из S, фиксирующих некоторый правый ω-класс по K (относительно представления на правых ω-классах по K).*

Лемма 7.26. *Пусть H — замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S и $aa^{-1} \in H$, так что $(Ha)\,\omega$ является правым ω-классом по H. Тогда элементы из $a^{-1}Ha$ фиксируют правый ω-класс $(Ha)\,\omega$.*

Доказательство. Утверждение очевидно, потому что $(Ha)\,(a^{-1}Ha) \subseteq Ha$.

Эта лемма приводит к следующей характеризации сопряженных подполугрупп.

Теорема 7.27. *Замкнутые инверсные подполугруппы H и K инверсной полугруппы S сопряжены тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a \in S$, что*

$$a^{-1}Ha \subseteq K \quad \text{и} \quad aKa^{-1} \subseteq H.$$

Каждый такой элемент обязательно удовлетворяет условиям $aa^{-1} \in H$, $a^{-1}a \in K$.

Доказательство. Предположим, что H и K сопряжены. В силу леммы 7.25 существует такой правый ω-класс $(Ha)\,\omega$ по H, что K совпадает с множеством всех элементов из S, фиксирующих $(Ha)\,\omega$. На основании леммы 7.26 мы тогда заключаем, что $a^{-1}Ha \subseteq K$. Так как $(Ha)\,\omega$ есть правый ω-класс по H, мы также имеем $aa^{-1} \in H$.

Снова из того факта, что K фиксирует $(Ha)\,\omega$, получаем $(HaK)\,\omega = (Ha)\,\omega$, а это говорит о том, что каждый элемент из aK эквивалентен a по модулю главной частичной правой конгруэнции π_H. Таким образом, $aKa^{-1} \subseteq H$. Далее, так как $a^{-1}a$, очевидно, фиксирует $(Ha)\,\omega$, имеем $a^{-1}a \in K$.

Обратно, предположим, что существует элемент a, для которого $a^{-1}Ha \subseteq K$ и $aKa^{-1} \subseteq H$. Тогда $a\,(a^{-1}Ha)\,a^{-1} \subseteq aKa^{-1} \subseteq H$. Пусть e — произвольный идемпотент из H. Тогда $aa^{-1}\cdot e\cdot aa^{-1} = aa^{-1}\cdot e \in H$ и из того факта, что H замкнуто, вытекает включение $aa^{-1} \in H$. (Аналогично, имеет место $a^{-1}a \in K$.) Следовательно, $(Ha)\,\omega$ является правым ω-классом по H. Для завершения доказательства сопряженности подполугрупп H и K достаточно установить, что K совпадает с множеством всех элементов из S, фиксирующих $(Ha)\,\omega$.

Пусть x фиксирует $(Ha)\,\omega$. Тогда $(Hax)\,\omega = (Ha)\,\omega$ и поэтому $axa^{-1} \in H$. Таким образом, $a^{-1}axa^{-1}a \in a^{-1}Ha \subseteq K$, откуда в силу замкнутости K следует, что $x \in K$. Обратно, если $k \in K$, то $aka^{-1} \in H$, т. е. $ak\pi_H a$. Отсюда $(Hak)\,\omega = (Ha)\,\omega$, т. е. k фиксирует $(Ha)\,\omega$. Доказательство завершено.

Если инверсная подполугруппа H инверсной полугруппы S сопряжена только сама с собой, то говорят, что она *самосопряжена*. Обозначим через D_H, как и в теореме 7.10, область определения $\{s \mid ss^{-1} \in H\}$ отношения π_H. В случае когда H самосопряжена, D_H является инверсной подполугруппой из S и φ_H отличается лишь тривиально от представления полугруппы D_H. Далее, $D_H\varphi_H$ является группой. Приступим к доказательству этих утверждений.

Лемма 7.28. *Замкнутая инверсная подполугруппа H инверсной полугруппы S самосопряжена тогда и только тогда, когда $s^{-1}Hs \subseteq H$ для всех $s \in D_H$.*

Доказательство. Пусть $s \in D_H$. Тогда $(Hs)\,\omega$ является правым ω-классом по H. По лемме 7.26 $s^{-1}Hs$ фиксирует $(Hs)\,\omega$, и поэтому в силу теоремы 7.22 и леммы 7.25 $s^{-1}Hs$ содержится в полугруппе, сопряженной с H. Если H самосопряжена, то отсюда следует, что $s^{-1}Hs \subseteq H$.

Обратно, предположим, что $s^{-1}Hs \subseteq H$ для всех $s \in D_H$. Пусть K — подполугруппа, сопряженная с H. Тогда на основании леммы 7.25 существует правый ω-класс $(Ha)\,\omega$ по H, фиксируемый подполугруппой K. Таким образом, если $k \in K$, то $(Hak)\,\omega = (Ha)\,\omega$ и поэтому $aka^{-1} \in H$. По предположению и в силу того, что $a \in D_H$, имеем $a^{-1}Ha \subseteq H$. Следовательно, $a^{-1}\,(aka^{-1})\,a \in a^{-1}Ha \subseteq H$. Но $a^{-1}a\cdot ka^{-1}a\omega k$, и поэтому в силу замкнутости H выполняется $k \in H$. Таким образом, $K \subseteq H$.

Так как $a^{-1}Ha \subseteq H$ и $aa^{-1} \in H$, имеем $a^{-1}aa^{-1}a = a^{-1}a \in H$. Следовательно, $a^{-1} \in D_H$ и поэтому $aHa^{-1} \subseteq H$. Тогда для любого $h \in H$ выполняется $ah\pi_H a$, т. е. $(Hah)\,\omega = (Ha)\,\omega$. Таким образом, каждый элемент из H фиксирует $(Ha)\,\omega$. Отсюда $H \subseteq K$. Следовательно, $H = K$, и это показывает, что H самосопряжена.

Лемма 7.29. *Пусть H — самосопряженная замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S. Тогда D_H есть замкнутая инверсная подполугруппа из S.*

Доказательство. Пусть $s \in D_H$. По лемме 7.28 $s^{-1}Hs \subseteq H$. Следовательно, так как $ss^{-1} \in H$, имеем $s^{-1}s = s^{-1}(ss^{-1})s \in H$. Таким образом, $s^{-1} \in D_H$.

Пусть $s, t \in D_H$. Тогда $s^{-1} \in D_H$, как только что показано, и поэтому в силу леммы 7.28 $sHs^{-1} \subseteq H$. Следовательно, поскольку $tt^{-1} \in H$, имеем $st(st^{-1}) = stt^{-1}s^{-1} \in sHs^{-1} \subseteq H$. Таким образом, $st \in D_H$.

Осталось установить замкнутость D_H. Для этой цели рассмотрим $s \in D_H$ и такое t, что $s\omega t$. По лемме 7.3 $s^{-1}\omega t^{-1}$, и поэтому на основании леммы 7.2 $ss^{-1}\omega tt^{-1}$. Следовательно, в силу замкнутости H и того, что $ss^{-1} \in H$, имеем $tt^{-1} \in H$, т. е. $t \in D_H$. Это завершает доказательство леммы.

Пусть S — произвольная полугруппа и U — подмножество из S. Говорят, что U *унитарно слева* [*справа*] в S, если из $u \in U$ и $ux \in U$ [$xu \in U$] для $x \in S$ вытекает $x \in U$. Говорят, что подмножество U *унитарно в* S, если оно унитарно в S как слева, так и справа.

Лемма 7.30. *Пусть H — самосопряженная замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S. Тогда множество D_H унитарно в S.*

Доказательство. Пусть $u, ux \in D_H$. Тогда $uxx^{-1}u^{-1} \in H$ и по лемме 7.28

$$u^{-1}u \cdot xx^{-1} = u^{-1}(uxx^{-1}u^{-1})u \in u^{-1}Hu \subseteq H.$$

Так как H замкнуто, $xx^{-1} \in H$, т. е. $x \in D_H$. Таким образом, D_H унитарно слева.

Тот факт, что D_H унитарно справа, доказывается аналогично.

Лемма 7.31. *Пусть H — самосопряженная замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S и $s \in S \setminus D_H$. Тогда $s\varphi_H = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть X, Y — правые ω-классы по H. Тогда $(X, Y) \in s\varphi_H$ в том и только в том случае, когда $X = (Hx)\omega$ и $Y = (Hxs)\omega$ для некоторого $x \in D_H$. Таким образом, $(X, Y) \in s\varphi_H$ тогда и только тогда, когда $xs \in D_H$ для некоторого $x \in D_H$. Так как в силу предыдущей леммы D_H унитарно, $xs \in D_H$ влечет за собой $s \in D_H$. Следовательно, из $(X, Y) \in s\varphi_H$ вытекает, что $s \in D_H$, а это противоречит предположению. Лемма доказана.

Лемма 7.32. *Пусть H — самосопряженная замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S и $s \in D_H$. Тогда $s\varphi_H$ является подстановкой на множестве правых ω-классов по H.*

Доказательство. Мы знаем уже, что $s\varphi_H$ есть взаимно однозначное частичное преобразование множества правых ω-классов по H (лемма 7.19). Пусть X — произвольный правый ω-класс по H, так что $X = (Hx)\,\omega$ для некоторого $x \in D_H$. В силу леммы 7.29 $xs \in D_H$, и поэтому $(Hxs)\,\omega = Y$ есть правый ω-класс по H. Таким образом, для каждого правого ω-класса X по H существует такое Y, что $(X, Y) \in s\varphi_H$.

Аналогично, мы видим, что $(Hxs^{-1})\,\omega = Z$ является правым ω-классом по H и $(Z, X) \in s\varphi_H$. Это завершает доказательство леммы.

Из предыдущих четырех лемм вытекает следующая

Теорема 7.33. *Пусть H — самосопряженная замкнутая инверсная подполугруппа инверсной полугруппы S, $D_H = \{s \mid ss^{-1} \in H\}$ и φ_H — представление полугруппы S на правых ω-классах по H. Тогда*

(i) *D_H есть замкнутая унитарная инверсная подполугруппа из S;*

(ii) *если $D_H = S$, то $S\varphi_H$ есть группа подстановок правых ω-классов по H;*

(iii) *если $S \setminus D_H = W_H \neq \varnothing$, то $W_H\varphi_H$ равно пустому отображению, $D_H\varphi_H$ есть группа подстановок правых ω-классов по H и, следовательно, $S\varphi_H$ есть группа с нулем.*

К изучению гомоморфизмов полугруппы на группу мы еще вернемся в гл. 10. (См. упражнения к § 10.2.) Гомоморфизмы инверсных полугрупп на группы рассматриваются в § 7.7.

Упражнения 3 и 4 к настоящему параграфу дают новые характеризации самосопряженных замкнутых инверсных подполугрупп инверсной полугруппы.

Упражнения к § 7.3

1. Пусть S — полуструктура и φ: $S \to \mathcal{J}_X$ — ее транзитивное эффективное представление. Тогда $|X| = 1$. Следовательно, S не имеет точных транзитивных представлений при $|S| > 2$. (Шайн [1962].)

2. Пусть S — полуструктура. Тогда никакие две различные замкнутые инверсные подполугруппы из S не сопряжены. Если H — произвольная замкнутая инверсная подполугруппа из S, то π_H есть универсальная конгруэнция на своей области определения, равной H.

3. Подполугруппа инверсной полугруппы является замкнутой инверсной подполугруппой тогда и только тогда, когда она унитарна.

4. Унитарная подполугруппа H инверсной полугруппы S самосопряжена тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in S$ из $xy \in H$ следует $yx \in H$, т. е. тогда и только тогда, когда H рефлексивна (см. § 10.2).

5. Пусть R — некоторый $\mathscr{R}$-класс инверсной полугруппы S. Для каждого $a \in S$ определим следующим образом частичное преобразование ρ_a множества R: область определения отображения ρ_a равна $R \cap Sa^{-1}$ ($= R \cap Saa^{-1}$) и для каждого $x \in R \cap Sa^{-1}$ положим $x\rho_a = xa$.

(a) Пусть e — идемпотент из R (следствие 2.19 (i)). Тогда $x \in R \cap Saa^{-1}$ в том и только в том случае, когда $ex = x$, $xx^{-1} = e$ и $xaa^{-1} = x$.

(b) ρ_a есть взаимно однозначное отображение $R \cap Saa^{-1}$ на $R \cap Sa^{-1}a$ и $\rho_{a^{-1}}$ обратно к нему.

(c) $\rho_a\rho_b = \rho_{ab}$ для всех $a, b \in S$. (Как и в доказательстве теоремы 1.20, трудность состоит лишь в установлении равенства двух областей определения.)

(d) ρ_R: $a \to \rho_a$ есть транзитивное представление S взаимно однозначными частичными преобразованиями. Когда R пробегает $\mathscr{R}$-классы полугруппы S, представление ρ_R пробегает транзитивные компоненты (теорема 7.17) представления Вагнера — Престона из теоремы 1.20.

(e) Если полугруппа S 0-бипроста и $R \neq 0$, то ρ_R точно. (Рейли [1965], теорема 1.31.)

§ 7.4. *Гомоморфизмы инверсных полугрупп*

В этом параграфе мы докажем сначала, что любой гомоморфный образ инверсной полугруппы является также инверсной полугруппой. Затем мы установим, что любая конгруэнция на инверсной полугруппе однозначно определяется заданием своих классов эквивалентности, содержащих идемпотенты. Эти результаты получены Вагнером [1953] и независимо Престоном [1954a]. Имеется несколько способов, посредством которых можно восстановить конгруэнцию по тем или иным определяющим ее классам эквивалентности. Мы изложим здесь метод, принадлежащий Престону [1954a].

Лемма 7.34. *Пусть φ: $S \to S'$ — гомоморфизм инверсной полугруппы S на S' и e' — идемпотент из S'. Тогда $e'\varphi^{-1}$ есть инверсная подполугруппа из S.*

Доказательство. Пусть $a, b \in e'\varphi^{-1}$. Тогда $(ab)\varphi = a\varphi \cdot b\varphi = (e')^2 = e'$. Таким образом, $ab \in e'\varphi^{-1}$. Следовательно, $e'\varphi^{-1}$ — подполугруппа из S. Далее, пусть $a \in e'\varphi^{-1}$. Положим $x' = a^{-1}\varphi$. Из $aa^{-1}a = a$ и $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ мы получаем $e'x'e' = e'$ и $x'e'x' = x'$. Из $(aa^{-1})(a^{-1}a) = (a^{-1}a)(aa^{-1})$ вытекает, что

$(e'x')(x'e') = (x'e')(e'x')$. Следовательно,

$$e' = e'x'e' = e'(x'e'x')e' = e'(x'e'e'x')e' = \\ = e'(e'x'x'e')e' = e'x'x'e' = x'e'x' = x'.$$

Отсюда $a^{-1}\varphi = e'$, т. е. $a^{-1} \in e'\varphi^{-1}$. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 7.35. *Пусть φ: $S \to S'$ — гомоморфизм регулярной полугруппы S на полугруппу S'. Тогда S' регулярна.*

Доказательство. Пусть $a' = a\varphi$ — произвольный элемент из S' и x — элемент, инверсный к a в S. Тогда, очевидно, $x\varphi$ инверсен к a' в S'. Так как каждый элемент из S' имеет инверсный к нему элемент, полугруппа S' регулярна.

Теорема 7.36. ***Гомоморфный образ инверсной полугруппы является инверсной полугруппой. Кроме того, при любом гомоморфизме элемент, инверсный к данному, отображается на элемент, инверсный к образу данного элемента.***

Доказательство. Пусть φ: $S \to S'$ — гомоморфизм инверсной полугруппы S на полугруппу S'. В силу леммы 7.35 S' регулярна. По лемме 7.34 каждый идемпотент из S' является образом некоторого идемпотента из S. Так как идемпотенты в S коммутируют, отсюда следует, что идемпотенты из S' образуют полуструктуру. Тот факт, что S' есть инверсная полугруппа, теперь вытекает из теоремы 1.17.

Осталось установить, что $a^{-1}\varphi = (a\varphi)^{-1}$ для $a \in S$. Из равенств $aa^{-1}a = a$ и $a^{-1}aa^{-1} = a^{-1}$ вытекает, что

$$a\varphi(a^{-1}\varphi)a\varphi = a\varphi \quad \text{и} \quad a^{-1}\varphi(a\varphi)a^{-1}\varphi = a^{-1}\varphi.$$

Таким образом, $a^{-1}\varphi$ является инверсным для $a\varphi$, откуда в силу единственности инверсного элемента $a^{-1}\varphi = (a\varphi)^{-1}$.

Следствие 7.37. *Если A — идеал полугруппы S, то S инверсна тогда и только тогда, когда A и факторполугруппа Риса S/A инверсны.*

Доказательство. Пусть S — инверсная полугруппа. Так как S/A является гомоморфным образом S, в силу теоремы 7.36 S/A инверсна. Далее, пусть $a \in A$. Тогда, так как A является идеалом, $a^{-1} = a^{-1}aa^{-1} \in A$. Следовательно, $A^{-1} \subseteq A$, т. е. A является инверсной полугруппой.

Обратно, предположим, что A и S/A — инверсные полугруппы. Пусть $a \in S$. Если $a \in A$, то существует такой единственный $x \in A$, что $axa = a$ и $xax = x$. Далее, так как A — идеал, $xax \in A$ для любого $x \in S$. Следовательно, существует единственный $x \in S$, удовлетворяющий указанным равенствам. Если $a \in S \setminus A$, то, поскольку S/A инверсна, существует единственный элемент

$x \in S \setminus A$, для которого $axa = a$ и $xax = x$. Любой такой $x \in S$ должен принадлежать $S \setminus A$ снова ввиду того, что A является идеалом. Следовательно, S является инверсной полугруппой.

Пусть S — произвольная полугруппа и $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — множество ее попарно не пересекающихся подмножеств. Говорят, что $\mathcal{A}$ есть *допустимое* [*слева*, *справа*] *множество подмножеств из* S или что оно *допустимо* [*слева*, *справа*] *в* S, если существует такая [левая, правая] конгруэнция ρ на S, что каждое из множеств A_i $(i \in I)$ является ρ-классом. Обратно, о каждом таком ρ говорят, что оно *допускает* $\mathcal{A}$. Если $\mathcal{A}$ допустимо [слева, справа] и существует точно одна [левая, правая] конгруэнция на S, допускающая $\mathcal{A}$, то говорят, что $\mathcal{A}$—*нормальное* [*слева*, *справа*] *множество подмножеств из* S или что оно *нормально* [*слева*, *справа*] *в* S. Например, если S — группа и ρ — конгруэнция на ней, то любое непустое множество ρ-классов нормально в S. К рассмотрению допустимых и нормальных множеств мы вернемся еще в § 10.1. А сейчас мы хотим установить, что для любой конгруэнции ρ на инверсной полугруппе S множество всех ρ-классов, содержащих идемпотенты, нормально в S. Это вытекает из следующего более общего результата.

Теорема 7.38. *Пусть S —регулярная (в частности, инверсная) полугруппа, ρ — конгруэнция на ней и $\mathcal{A}$ — множество ρ-классов, содержащих идемпотенты. Тогда $\mathcal{A}$ нормально в S.*

Доказательство. Пусть σ — произвольная конгруэнция на S, допускающая $\mathcal{A}$. Достаточно установить, что $\sigma = \rho$.

Пусть $(x, y) \in \sigma$. Так как S регулярна, существуют такие $a, b \in S$, что $xax = x$, $axa = a$, $yby = y$, $byb = b$. Отсюда следует, в частности, что xa и by являются идемпотентами.

Так как σ стабильна справа, $(xa, ya) \in \sigma$ и в силу стабильности слева аналогичным образом $(bx, by) \in \sigma$. Ввиду того что по предположению σ допускает $\mathcal{A}$, σ-класс, содержащий идемпотент xa, совпадает с ρ-классом, содержащим xa. Таким образом, $(xa, ya) \in \rho$; аналогично, $(bx, by) \in \rho$.

Подходящим образом используя стабильность слева и справа отношения ρ, мы получаем

$$\begin{aligned} x &= xax, \\ (xax, yax) &\in \rho, \\ yax &= ybyax, \\ (ybyax, ybxax) &\in \rho, \\ ybxax &= ybx, \\ (ybx, yby) &\in \rho, \\ yby &= y. \end{aligned}$$

Отсюда в силу транзитивности отношения ρ получаем $(x, y) \in \rho$.

Следовательно, $\sigma \subseteq \rho$. Меняя ролями σ и ρ, можно аналогично доказать, что $\rho \subseteq \sigma$. Отсюда следует заключение теоремы.

Для инверсных полугрупп справедлив более сильный результат.

Теорема 7.39. *Пусть S — инверсная полугруппа, ρ — левая конгруэнция на ней и $\mathscr{A}$ — множество ρ-классов, содержащих идемпотенты. Тогда $\mathscr{A}$ нормально слева в S.*

Доказательство. Пусть σ — произвольная левая конгруэнция на S, допускающая $\mathscr{A}$. Как и в доказательстве теоремы 7.38, достаточно установить, что $\sigma \subseteq \rho$.

Пусть $(x, y) \in \sigma$. Поступая точно так же, как и в доказательстве предыдущей теоремы, но используя теперь лишь стабильность слева, мы получаем

$$(x^{-1}x, x^{-1}y) \in \rho \quad \text{и} \quad (y^{-1}x, y^{-1}y) \in \rho.$$

Далее, мы выводим

$$\begin{aligned} x &= xx^{-1}x, \\ (xx^{-1}x,\ xx^{-1}y) &\in \rho, \\ xx^{-1}y &= yy^{-1}xx^{-1}y, \end{aligned}$$

так как идемпотенты в S коммутируют,

$$\begin{aligned} (yy^{-1}xx^{-1}y,\ yy^{-1}xx^{-1}x) &\in \rho, \\ yy^{-1}xx^{-1}x &= yy^{-1}x, \\ (yy^{-1}x,\ yy^{-1}y) &\in \rho \\ yy^{-1}y &= y. \end{aligned}$$

Отсюда в силу транзитивности отношения ρ получаем, что $(x, y) \in \rho$. Теорема доказана.

По теореме 7.38 и определению нормальности конгруэнция ρ на инверсной полугруппе S однозначно определяется нормальным множеством $\mathscr{A}$ всех ρ-классов, содержащих идемпотенты. Приступим теперь к отысканию характеризаций таких множеств $\mathscr{A}$ и описанию конструкции для соответствующих конгруэнций.

Множество $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ называется *нормальной ядерной системой* инверсной полугруппы S, если

(K1) каждое A_i является инверсной подполугруппой из S;
(K2) $A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$;
(K3) каждый идемпотент из S содержится в некотором $A_i \in \mathscr{A}$;
(K4) для любых $a \in S$ и $i \in I$ существует такое j, что $a^{-1}A_ia \subseteq A_j$; мы будем писать $j = ia$, так что $a^{-1}A_ia \subseteq A_{ia}$;
(K5) если $a, ab, bb^{-1} \in A_i$, то $b \in A_i$.

Возможны некоторые вариации в выборе этих условий (см., например, упражнения 6 и 8 ниже).

Пусть φ — гомоморфизм инверсной полугруппы S. Множество идемпотентов полугруппы $S/(\varphi \circ \varphi^{-1})$ будем называть *ядром* гомоморфизма φ (и конгруэнции $\varphi \circ \varphi^{-1}$).

Лемма 7.40. *Пусть ρ — конгруэнция на инверсной полугруппе S. Тогда ядро конгруэнции ρ является нормальной ядерной системой полугруппы S.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — множество идемпотентов из S/ρ, т. е. $\mathscr{A}$ есть ядро конгруэнции ρ. Мы должны проверить, что $\mathscr{A}$ удовлетворяет условиям K1 — K5.

Непосредственно видно, что выполняется K2. Условие K1 следует из леммы 7.34. Обозначим через $\rho^{\natural}$ естественное отображение полугруппы S на S/ρ. Каждый идемпотент из S переводится отображением $\rho^{\natural}$ в идемпотент из S/ρ, откуда вытекает условие K3. Условие K4 почти очевидно.

Остается проверить условие K5. Пусть $a, ab, bb^{-1} \in A_i$ для некоторого $i \in I$, так что

$$a\rho^{\natural} = (a\rho^{\natural})(b\rho^{\natural}) = (b\rho^{\natural})(b\rho^{\natural})^{-1} = A_i$$

есть идемпотент из S/ρ; напомним, что в силу теоремы 7.36 $b^{-1}\rho^{\natural} = (b\rho^{\natural})^{-1}$. Отсюда следует, что

$$b\rho^{\natural} = (b\rho^{\natural})(b\rho^{\natural})^{-1}(b\rho^{\natural}) = A_i(b\rho^{\natural}) = (a\rho^{\natural})(b\rho^{\natural}) = A_i.$$

Таким образом, $b \in A_i$. Этим установлено, что выполняется условие K5. Лемма доказана.

Будем решать теперь обратную задачу. Любая нормальная ядерная система $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ полугруппы S определяет следующую конгруэнцию $\rho_{\mathscr{A}}$ на S:

$$\rho_{\mathscr{A}} = \{(a, b) \in S \times S \mid aa^{-1}, bb^{-1}, ab^{-1} \in A_i \text{ для некоторого } i \in I\} \qquad (1)$$

Чтобы доказать это, нам будут полезны некоторые предварительные леммы. Мы используем обозначение, введенное в формулировке условия K4.

Лемма 7.41. *Если $aa^{-1} \in A_i$, то $a^{-1}a \in A_{ia}$.*

Доказательство. Используя условие K4, получаем, что

$$a^{-1}a = a^{-1}(aa^{-1})a \in a^{-1}A_ia \subseteq A_{ia}.$$

Лемма 7.42. *Если $ab^{-1} \in A_i$, то $A_{ia} = A_{ib}$.*

Доказательство. Так как A_i есть инверсная подполугруппа полугруппы S (K1), из включения $ab^{-1} \in A_i$ вытекает, что $ba^{-1} \in A_i$. Следовательно, $(ab^{-1})(ba^{-1}) \in A_i$ и $(ba^{-1})(ab^{-1}) \in A_i$.

Отсюда
$$a^{-1}a\cdot b^{-1}b = a^{-1}a\cdot b^{-1}b\cdot a^{-1}a = \\ = a^{-1}(ab^{-1}\cdot ba^{-1})\,a \in A_{ia}$$
и
$$b^{-1}b\cdot a^{-1}a = b^{-1}b\cdot a^{-1}a\cdot b^{-1}b = \\ = b^{-1}(ba^{-1}\cdot ab^{-1})\,b \in A_{ib}.$$

Следовательно, $A_{ia}\cap A_{ib}\neq\varnothing$, откуда $A_{ia}=A_{ib}$ в силу условия K2.

Лемма 7.43. *Если aa^{-1}, bb^{-1}, $ab^{-1}\in A_i$, то $a^{-1}a$, $b^{-1}b$, $a^{-1}b\in$ $\in A_{ia}$ $(=A_{ib})$.*

Доказательство. По лемме 7.41 $a^{-1}a\in A_{ia}$, $b^{-1}b\in A_{ib}$, а по лемме 7.42 $A_{ia}=A_{ib}$. Осталось доказать, что $a^{-1}b\in A_{ia}$.

Положим $x=b^{-1}b$, $y=a^{-1}b$. Мы установили, что $x\in A_{ia}$. Далее,
$$xy = b^{-1}\cdot ba^{-1}\cdot b \in b^{-1}A_ib \subseteq A_{ib} = A_{ia}$$
и
$$yy^{-1} = a^{-1}\cdot bb^{-1}\cdot a \in a^{-1}A_ia \subseteq A_{ia}.$$

Следовательно, x, xy, $yy^{-1}\in A_{ia}$. Таким образом, на основании условия K5 $y=a^{-1}b\in A_{ia}$.

Лемма 7.44. (i) *Справедливо равенство $(ia)\,b=i\,(ab)$.*
(ii) *Если $aa^{-1}\in A_i$, то $(ia)\,a^{-1}=i$.*

Доказательство. (i) Из $a^{-1}A_ia\subseteq A_{ia}$ вытекает, что
$$(ab)^{-1}A_i\,(ab) = b^{-1}(a^{-1}A_ia)\,b \subseteq b^{-1}A_{ia}b \subseteq A_{(ia)\,b}.$$

Но $(ab)^{-1}A_i\,(ab)\subseteq A_{i(ab)}$; поэтому ввиду условия K2 имеем $(ia)\,b=i\,(ab)$.

(ii) Если $aa^{-1}\in A_i$, то $(aa^{-1})^{-1}A_i\,(aa^{-1})\subseteq A_i$. Однако $(aa^{-1})^{-1}A_i\,(aa^{-1})\subseteq A_{i\,aa^{-1}}$, откуда в силу условия K2 $i=$ $=i\,(aa^{-1})$. На основании (i) тогда имеем $(ia)\,a^{-1}=i$.

Теперь мы можем доказать следующее утверждение об отношении $\rho_{\mathcal{A}}$.

Лемма 7.45. *Пусть $\mathcal{A}=\{A_i\mid i\in I\}$ — нормальная ядерная система инверсной полугруппы S. Бинарное отношение $\rho_{\mathcal{A}}$, определенное формулой (1), является конгруэнцией на S.*

Доказательство. Очевидно, отношение $\rho_{\mathcal{A}}$ рефлексивно в силу условия K3 и симметрично в силу условия K1.

Докажем, что $\rho_{\mathcal{A}}$ транзитивно. Пусть (a, b), $(b, c)\in\rho_{\mathcal{A}}$. Тогда существует такое $i\in I$, что aa^{-1}, bb^{-1}, cc^{-1}, ab^{-1}, $bc^{-1}\in A_i$.

Таким образом, чтобы доказать, что $(a, c) \in \rho_{\mathcal{A}}$, достаточно установить, что $ac^{-1} \in A_i$.

Пусть $x = cb^{-1}$, $y = ac^{-1}$. Тогда $x = (bc^{-1})^{-1} \in A_i$. Далее, $xy = cb^{-1}ac^{-1} \in cA_{ia}c^{-1}$ по лемме 7.43. Но в силу леммы 7.42 $A_{ia} = A_{ib} = A_{ic}$. Следовательно, $cA_{ia}c^{-1} = cA_{ic}c^{-1} \subseteq A_{(ic)c^{-1}} = A_i$ на основании леммы 7.44 (ii). Таким образом, $xy \in A_i$. Наконец, $yy^{-1} = ac^{-1}ca^{-1} \in aA_{ic}a^{-1}$ по лемме 7.41. Но $A_{ic} = A_{ia}$, и поэтому $aA_{ic}a^{-1} = aA_{ia}a^{-1} \subseteq A_{(ia)a^{-1}} = A_i$ по лемме 7.44 (ii). Таким образом, $yy^{-1} \in A_i$. Следовательно, мы показали, что $x, xy, yy^{-1} \in A_i$, откуда $ac^{-1} = y \in A_i$ в силу условия K5. Итак, $\rho_{\mathcal{A}}$ является эквивалентностью на S.

Пусть $aa^{-1}, bb^{-1}, ab^{-1} \in A_i$. Тогда $(ca)(ca)^{-1} = c \cdot aa^{-1} \cdot c^{-1} \in cA_ic^{-1} \subseteq A_{ic^{-1}}$ и, аналогично, элементы $(cb)(cb)^{-1}$ и $(ca)(cb)^{-1}$ принадлежат $A_{ic^{-1}}$. Следовательно, $(a, b) \in \rho_{\mathcal{A}}$ влечет за собой $(ca, cb) \in \rho_{\mathcal{A}}$. Далее, лемма 7.43 утверждает, что $(a, b) \in \rho_{\mathcal{A}}$ влечет за собой $(a^{-1}, b^{-1}) \in \rho_{\mathcal{A}}$. Следовательно, из $(a, b) \in \rho_{\mathcal{A}}$ вытекает $(c^{-1}a^{-1}, c^{-1}b^{-1}) \in \rho_{\mathcal{A}}$, откуда в свою очередь вытекает $(ac, bc) \in \rho_{\mathcal{A}}$. Таким образом, $\rho_{\mathcal{A}}$ стабильно и слева, и справа. Доказательство леммы закончено.

Докажем теперь, что $\rho_{\mathcal{A}}$ допускает $\mathcal{A}$. В действительности справедлива следующая

Лемма 7 46. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — нормальная ядерная система инверсной полугруппы S. Тогда $\mathcal{A}$ является ядром конгруэнции $\rho_{\mathcal{A}}$.*

Доказательство. Мы должны установить, что каждое A_i является $\rho_{\mathcal{A}}$-классом. Пусть $a, b \in A_i$. Тогда в силу условия K1 $aa^{-1}, bb^{-1}, ab^{-1} \in A_i$ и поэтому $(a, b) \in \rho_{\mathcal{A}}$. Предположим теперь, что $a \in A_i$ и $(a, b) \in \rho_{\mathcal{A}}$. Тогда aa^{-1}, bb^{-1}, $ab^{-1} \in A_j$ для некоторого j в I. Но $a \in A_i$ влечет за собой $aa^{-1} \in A_i$. Следовательно, $i = j$ и $a, ab^{-1} \in A_i$. Далее, $a^{-1}a, b^{-1}b \in A_{ia}$ по лемме 7.43. Но $a \in A_i$ влечет за собой $a^{-1}a \in A_i$. Следовательно, $i = ia$ и $b^{-1}b \in A_i$. Отсюда $a, ab^{-1}, b^{-1}(b^{-1})^{-1} \in A_i$, так что $b^{-1} \in A_i$ в силу условия K5. Но тогда $b \in A_i$ на основании условия K1. Этим доказано, что A_i является $\rho_{\mathcal{A}}$-классом.

Ясно, что каждое A_i является идемпотентом полугруппы $S/\rho_{\mathcal{A}}$; в самом деле, каждое A_i есть инверсная полугруппа и поэтому содержит идемпотент. Обратно, из леммы 7.34 вытекает, что каждый идемпотент из $S/\rho_{\mathcal{A}}$ является $\rho_{\mathcal{A}}$-классом, содержащим идемпотенты. Но тогда в силу условия K3 каждый идемпотент из $S/\rho_{\mathcal{A}}$ является элементом системы $\mathcal{A}$. Следовательно, $\mathcal{A}$ есть ядро конгруэнции $\rho_{\mathcal{A}}$.

Лемма 7.47. *Пусть* $\mathcal{A}$ — *ядро конгруэнции* ρ *на инверсной полугруппе* S. *Тогда* $\rho = \rho_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из леммы 7.46 и теоремы 7.38.

Объединяя предыдущие леммы, получаем следующую теорему.

Теорема 7.48. *Пусть* $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — *нормальная ядерная система инверсной полугруппы* S. *Тогда отношение* $\rho_{\mathcal{A}}$, *заданное формулой* (1), *является конгруэнцией на* S *и* $\mathcal{A}$ *есть ядро этой конгруэнции.*

Обратно, пусть φ: $S \to S'$ — *гомоморфизм инверсной полугруппы* S *на полугруппу* S' *и* $\mathcal{A}$ — *ядро этого гомоморфизма. Тогда* $\mathcal{A}$ *является нормальной ядерной системой для* S *и* $\rho_{\mathcal{A}} = \varphi \circ \varphi^{-1}$.

Упражнения к § 7.4

1. Пусть π, ρ, σ — такие конгруэнции на S, что (i) $\pi \subseteq \rho$, (ii) S/π регулярна, (iii) $c^2\pi c$ ($c \in S$) влечет за собой $c\rho = c\sigma$. Тогда $\sigma \subseteq \rho$.

Из этого результата вытекают следующие утверждения:

(a) Теорема 7.38.

(b) Если ρ и σ — такие конгруэнции на регулярной полугруппе S, что S/ρ и S/σ регулярны, и σ допускает множество идемпотентов из S/ρ, то $\sigma = \rho$. (Ср. Престон [1961].)

2. Пусть φ: $S \to T$ — гомоморфизм инверсной полугруппы S на полугруппу T и H — инверсная подполугруппа из T. Тогда $H\varphi^{-1}$ есть инверсная подполугруппа из S. В частности, пусть $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — нормальная ядерная система полугруппы S. Тогда $A = \bigcup \{A_i \mid i \in I\}$ является инверсной подполугруппой из S.

3. Пусть φ: $S \to T$ — гомоморфизм инверсной полугруппы S на полугруппу T, $\mathcal{B} = \{B_i \mid i \in I\}$ — нормальная ядерная система для T и $A_i = B_i\varphi^{-1}$, $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$. Тогда $\mathcal{A}$ есть нормальная ядерная система для S.

4. Пусть $A = \{A_i \mid i \in I\}$ — нормальная ядерная система инверсной полугруппы S. Тогда для любых $i, j \in I$ существует такое $k \in I$, что $A_iA_j \subseteq A_k$ и $A_jA_i \subseteq A_k$.

5. Пусть S — инверсная полугруппа взаимно однозначных отображений, состоящая из отображений

$$\varnothing, \quad \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

Пусть

$$A_1 = \left\{\varnothing, \quad \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}\right\},$$

$$A_2 = \left\{\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}\right\}.$$

Тогда $\mathscr{A} = \{A_1, A_2\}$ удовлетворяет условиям K1 — K4 и для любых i, j оба произведения A_iA_j и A_jA_i содержатся в некотором A_k. Однако $\mathscr{A}$ не удовлетворяет условию K5.

6. Условие K5 может быть заменено следующим условием K5′: $a, ab^{-1}, bb^{-1} \in A_i$ влечет за собой $b \in A_i$. В самом деле, из K1 и K5′ следует K5, в то время как из K1, K2, K4 и K5 следует K5′.

7. Пусть $E = \{e_i \mid i \in I\}$ — множество идемпотентов инверсной полугруппы S. Положим $A_i = \{e_i\}$. Тогда $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ есть нормальная ядерная система для S и $\rho_{\mathscr{A}}$ совпадает с отношением равенства на S.

8. Пусть $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — множество подмножеств инверсной полугруппы S, удовлетворяющее условиям K1, K2, K3, K5′ (из упражнения 6), а также следующему условию K4′: если aa^{-1}, bb^{-1}, $ab^{-1} \in A_i$, то для любого $j \in I$ существует такое $k \in I$, что

$$aA_ja^{-1} \subseteq A_k \quad \text{и} \quad aA_jb^{-1} \subseteq A_k.$$

Тогда $\mathscr{A}$ является нормальной ядерной системой для S.

В действительности условия K1, K2, K3, K4′ и K5′ эквивалентны условиям K1 — K5. (Престон [1954a] и Ляпин [1960a, гл. 7].)

§ 7.5. Полуструктуры инверсных полугрупп

Так как нормальная ядерная система $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ инверсной полугруппы S является множеством идемпотентов фактор-полугруппы $S/\rho_{\mathscr{A}}$, объединение A элементов из $\mathscr{A}$ является полуструктурой инверсных полугрупп A_i $(i \in I)$ (§ 1.8, стр. 47). Обозначим через E_i множество идемпотентов полугруппы A_i, а через E — множество идемпотентов полугруппы A (а, значит, также и полугруппы S). Тогда, так как A является полуструктурой полугрупп A_i, очевидно, E является полуструктурой полугрупп E_i $(i \in I)$. Обратная импликация также имеет место. В качестве следствия теорем 4.5 и 4.11 (§ 4.2) получаем, что полугруппа, являющаяся объединением групп, будет полуструктурой групп тогда и только тогда, когда ее идемпотенты коммутируют, т. е. когда она есть инверсная полугруппа. Следующая теорема (Престон [1956]) вместе с теоремой 7.52 является обобщением этого результата.

Теорема 7.49. *Пусть S — инверсная полугруппа, являющаяся объединением попарно не пересекающихся инверсных полугрупп A_i $(i \in I)$ и E_i — множество идемпотентов из A_i. Положим $E = \bigcup \{E_i \mid i \in I\}$.*

Полугруппа S является полуструктурой полугрупп A_i $(i \in I)$ тогда и только тогда, когда E есть полуструктура полуструктур E_i $(i \in I)$.

Доказательство. Предположим, что E является полуструктурой полуструктур E_i $(i \in I)$. Тогда для любых $i, j \in I$ существует такое $k \in I$, что $E_iE_j\ (= E_jE_i) \subseteq E_k$.

Пусть $a \in A_i$, $b \in A_j$, и предположим, что $abb^{-1} \in A_p$. Тогда

$$abb^{-1}(abb^{-1})^{-1} = a \cdot bb^{-1} \cdot bb^{-1} \cdot a^{-1} = abb^{-1}a^{-1} \in E_p$$

и

$$(abb^{-1})^{-1}(abb^{-1}) = bb^{-1} \cdot a^{-1}a \cdot bb^{-1} = bb^{-1}a^{-1}a \in E_p.$$

Но

$$bb^{-1} \cdot a^{-1}a \in E_iE_j \subseteq E_k$$

для некоторого $k \in I$; поэтому, так как A_i попарно не пересекаются, $k = p$.

Предположим теперь, что $ab \in A_q$. Тогда

$$ab\,(ab)^{-1} = abb^{-1}a^{-1} \in E_q.$$

Уже было показано, что $abb^{-1}a^{-1} \in E_p$. Следовательно, $q = p = k$. Таким образом, для любых $a \in A_i$ и $b \in A_j$ имеет место $ab \in A_k$, где $E_iE_j \subseteq E_k$. Этим установлено, что S есть полуструктура полугрупп A_i $(i \in I)$.

Как мы уже отмечали, обратное очевидно.

Следствие 7.50. *Если инверсная полугруппа есть объединение связки I инверсных полугрупп, то связка I является полуструктурой.*

Следствие 7.51. *Инверсная полугруппа есть связка групп тогда и только тогда, когда она является полуструктурой групп.*

В действительности справедливо более сильное утверждение.

Теорема 7.52. *Пусть S — полуструктура инверсных полугрупп A_i $(i \in I)$. Тогда S является инверсной полугруппой.*

Доказательство. Так как каждая полугруппа A_i регулярна, сразу же получаем, что S также регулярна. Следовательно, достаточно доказать, что каждый элемент из S имеет единственный инверсный.

Пусть $a \in S$ и x — произвольный инверсный к a элемент: $axa = a$, $xax = x$. Существуют такие $j, k \in I$, что $a \in A_j$, $x \in A_k$. Так как S — полуструктура полугрупп A_i $(i \in I)$, существует такое $p \in I$, что

$$A_jA_k \subseteq A_p, \quad A_kA_j \subseteq A_p.$$

Тогда

$$a = axa \in A_jA_kA_j \subseteq A_p,$$
$$x = xax \in A_kA_jA_k \subseteq A_p.$$

Но $a \in A_j$. Таким образом, $p = j$ и $x \in A_j$. Следовательно, произвольный инверсный к a элемент лежит в A_j и в силу инверсности полугруппы A_j элемент a имеет единственный инверсный в S.

Следствие 7.53. *Полугруппа, являющаяся полуструктурой групп, инверсна.*

§ 7.6. Гомоморфизмы, разделяющие идемпотенты

Инверсная полугруппа с одним идемпотентом является группой. Следовательно, если φ есть гомоморфизм инверсной полугруппы S, разделяющий идемпотенты, т. е. индуцирующий изоморфизм на полуструктуре идемпотентов из S, то каждый элемент A_i ядра $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ этого гомоморфизма является группой. Обратно, если каждый элемент нормальной ядерной системы $\mathscr{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ инверсной полугруппы S является группой, то соответствующий естественный гомоморфизм $\rho^\natural_{\mathscr{A}}$ разделяет идемпотенты. Для нормальных ядерных систем такого вида мы получим простую характеризацию (Престон [1956]). Заметим сначала, что объединение элементов произвольной ядерной системы $\mathscr{A}$ полугруппы S является, очевидно, инверсной полугруппой из S; в самом деле, оно является полным прообразом при гомоморфизме $\rho^\natural_{\mathscr{A}}$ множества идемпотентов из $S/\rho_{\mathscr{A}}$ (см. упражнение 2 к § 7.4).

Пусть X — подмножество полугруппы S. Тогда *централизатор $C(X)$ множества X в S* определяется следующим образом:

$$C(X) = \{s \in S \mid sx = xs \quad \text{для всех} \quad x \in X\}.$$

Теорема 7.54. *Пусть E — множество идемпотентов инверсной полугруппы S. Обозначим через H_e ($e \in E$) максимальную подгруппу из S, содержащую e. Для каждого $e \in E$ выберем подгруппу N_e из H_e. Положим $\mathscr{N} = \{N_e \mid e \in E\}$ и*

$$N = \bigcup \{N_e \mid e \in E\}.$$

Тогда $\mathscr{N}$ является нормальной ядерной системой для S в том и только в том случае, когда (i) *N есть подполугруппа из S и* (ii) *$a^{-1}Na \subseteq N$ для всех $a \in S$.*

В этом случае N является полуструктурой E групп N_e и для каждого $a \in S$ имеет место $a^{-1}N_ea \subseteq N_f$, где $f = a^{-1}ea$. В частности, $N \subseteq C(E)$.

Доказательство. Если $\mathscr{N}$ — нормальная ядерная система, то, как уже отмечалось, выполняется условие (i). Далее, определяющее условие K4 для нормальных ядерных систем (§ 7.4) обеспечивает также выполнение условия (ii).

Обратно, предположим, что $\mathscr{N}$ удовлетворяет условиям (i) и (ii). Условия К1 — К3 из § 7.4 автоматически следуют из определения $\mathscr{N}$ без использования условий (i) и (ii). Мы должны лишь проверить выполнение условий К4 и К5.

На основании теоремы 7.49 и п. (i) полугруппа N является полуструктурой E полугрупп N_e $(e \in E)$. Для доказательства К4 достаточно установить, что $a^{-1}N_e a \subseteq N_f$, где $f = a^{-1}ea$ $(e \in E$, $a \in S)$. Пусть $n \in N_e$ и $b = a^{-1}na$. Тогда $bb^{-1} = a^{-1}n(aa^{-1})n^{-1}a = a^{-1}(aa^{-1})nn^{-1}a$, так как $n \in C(E)$ в силу леммы 4.8. Следовательно, $bb^{-1} = a^{-1}ea = f$. Аналогично, $b^{-1}b = f$. В силу (ii) имеем $b \in N$, откуда $b \in H_f \cap N = N_f$.

Заметим, что мы попутно доказали утверждения последнего абзаца из формулировки теоремы.

Проверим условие К5. Пусть a, b — такие элементы из S, что a, ab, $bb^{-1} \in N_e$ для некоторого $e \in E$. Тогда $a^{-1} \in N_e$ и $bb^{-1} = e = a^{-1}a$. Следовательно, $b = (bb^{-1})b = a^{-1}(ab) \in N_e$, т. е. выполняется условие К5. Доказательство теоремы закончено.

Будем называть нормальную ядерную систему, каждый элемент которой является группой, *групповой нормальной ядерной системой*. Если N_e (с единицей e) есть элемент групповой нормальной ядерной системы, то из теоремы 7.54 непосредственно следует, что N_e является нормальным делителем в максимальной подгруппе H_e из S, содержащей N_e. Это также очевидно и потому, что ограничение на H_e естественного гомоморфизма, соответствующего нормальной ядерной системе, является гомоморфизмом группы H_e с ядром N_e.

Для групповых нормальных ядерных систем тесная аналогия с групповой ситуацией, установленная в теореме 7.54, может быть продолжена дальше. А именно классы эквивалентности конгруэнции $\rho_{\mathscr{N}}$ являются «смежными классами» по элементам нормальной ядерной системы $\mathscr{N}$. Точнее, имеет место (Престон [1954a])

Теорема 7.55. *Пусть* $\mathscr{N} = \{N_e \mid e \in E\}$ — *групповая нормальная ядерная система инверсной полугруппы* S, *где* e *есть единица из* N_e, *и* a — *произвольный элемент из* S. *Тогда* $\rho_{\mathscr{N}}$*-класс, содержащий* a, *совпадает с* $N_f a = aN_g$, *где* $aa^{-1} = f$ *и* $a^{-1}a = g$.

Доказательство. Пусть $b \in N_f a$. Тогда $b = na$ для некоторого $n \in N_f$. Следовательно, $bb^{-1} = naa^{-1}n^{-1} = nfn^{-1} = nn^{-1} = f$. Далее, $ab^{-1} = a(na)^{-1} = aa^{-1}n^{-1} = fn^{-1} = n^{-1} \in N_f$. Таким образом, aa^{-1}, bb^{-1} и $ab^{-1} \in N_f$, т. е. $(a, b) \in \rho_{\mathscr{N}}$. Следовательно, $N_f a$ содержится в одном $\rho_{\mathscr{N}}$-классе.

Пусть теперь $b \in S$ и $(b, a) \in \rho_{\mathscr{N}}$. Тогда aa^{-1}, bb^{-1}, $ab^{-1} \in N_e$ для некоторого $e \in E$. Но $aa^{-1} = f$. Следовательно, $e = f$, $bb^{-1} = f$ и $ab^{-1} = n \in N_f$. Далее, $(b, a) \in \rho_{\mathscr{N}}$ аналогичным образом влечет за собой $a^{-1}a = b^{-1}b$ (лемма 7.43). Таким образом, $b = bb^{-1}b = ba^{-1}a = (ab^{-1})^{-1}a = n^{-1}a \in N_fa$. Так как $a = fa \in N_fa$, этим доказано, что N_fa есть $\rho_{\mathcal{N}}$-класс, содержащий a.

Двойственными рассуждениями доказывается равенство $N_fa = aN_g$, что завершает доказательство теоремы.

Необходимо отметить, что «смежные классы», такие, как N_fa, не надо путать с ω-классами, используемыми в теории Шайна из § 7.2. Правыми ω-классами по N_f являются множества $(N_fx)\,\omega$ для таких x, что $xx^{-1} \in N_f$, т. е. $xx^{-1} = f$, где через ω обозначен естественный частичный порядок. Таким образом, они являются замыканиями относительно ω только что рассмотренных «смежных классов».

Пусть E — множество идемпотентов инверсной полугруппы S и H_e — максимальная подгруппа из S с единицей e $(e \in E)$. Упражнение 1 к настоящему параграфу показывает, что, вообще говоря, $\{H_e \mid e \in E\}$ не является (групповой) нормальной ядерной системой для S. Таким образом, недостаточно взять произвольные нормальные делители N_e из каждой H_e, чтобы образовать групповую нормальную ядерную систему (см. также упражнение 2 ниже).

Пусть $\mathcal{M} = \{M_e \mid e \in E\}$ и $\mathcal{N} = \{N_e \mid e \in E\}$ — две групповые нормальные ядерные системы инверсной полугруппы S, где e является единицей групп N_e и M_e. Положим

$$\mathcal{M}\mathcal{N} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N} = \{M_eN_e \mid e \in E\},$$

$$\mathcal{M} \wedge \mathcal{N} = \{M_e \cap N_e \mid e \in E\}.$$

Теорема 7.56. *$\mathcal{M}\mathcal{N}$ и $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ являются групповыми нормальными ядерными системами для S. Кроме того,*

$$\rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}} = \rho_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \rho_{\mathcal{N}} \circ \rho_{\mathcal{M}}$$

и

$$\rho_{\mathcal{M}} \cap \rho_{\mathcal{N}} = \rho_{\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства того, что $\mathcal{M}\mathcal{N}$ есть групповая нормальная ядерная система. Так как каждое M_eN_e является группой, мы должны установить, что выполняются условия (i) и (ii) теоремы 7.54.

Пусть $e, f \in E$. Рассмотрим $M_eN_e \cdot M_fN_f$. Пусть $m \in M_e$, $n \in N_e$, $m' \in M_f$, $n' \in N_f$. Используя то, что $M, N \subseteq C(E)$, мы получаем

$$\begin{aligned} mnm'n'(mnm'n')^{-1} &= mnm'n'(m'n')^{-1}(mn)^{-1} = \\ &= mnf(mn)^{-1} = mn(mn)^{-1}f \\ &= ef. \end{aligned}$$

Аналогично показывается, что ef будет правой единицей для $mnm'n'$. Следовательно, $M_eN_e \cdot M_fN_f \subseteq H_{ef}$, где H_{ef} есть максимальная подгруппа из S с единицей ef. Так как $N \subseteq C(E)$, то $mnm'n' = mfnm'n'$. Следовательно,

$$mnm'n' = mm'(m')^{-1} nm'n'.$$

Но $mm' \in M_eM_f \subseteq M_{ef}$, а $(m')^{-1} nm' \in (m')^{-1} N_em' \subseteq N_{ef}$, так как $(m')^{-1} em' = ef$. Далее, $N_{ef}n' \subseteq N_{ef}N_f \subseteq N_{ef}$. Эти факты вместе показывают, что

$$mnm'n' \in M_{ef}N_{ef},$$

т. е. что $M_eN_e \cdot M_fN_f \subseteq M_{ef}N_{ef}$, а это означает в свою очередь, что $\mathcal{M}\mathcal{N}$ удовлетворяет условию (i) теоремы 7.54.

Докажем выполнение условия (ii). Пусть $a \in S$ и $e \in E$. Рассмотрим $a^{-1}M_eN_ea$. Так как $N \subseteq C(E)$, то имеем $a^{-1}M_eN_ea = a^{-1}M_ea\, a^{-1}N_ea$, так что $a^{-1}M_eN_ea \subseteq M_fN_f$, где $a^{-1}ea = f$; этим доказан требуемый результат.

Итак, мы установили, что $\mathcal{M}\mathcal{N}$ является групповой нормальной ядерной системой.

Теперь мы покажем, что $\mathcal{M}\mathcal{N}$ является ядром конгруэнции $\rho_{\mathcal{M}} \cdot \rho_{\mathcal{N}}$. Пусть $(a, b) \in \rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}}$, так что $(a, x) \in \rho_{\mathcal{M}}$ и $(x, b) \in \rho_{\mathcal{N}}$ для некоторого $x \in S$. Тогда $aa^{-1} = xx^{-1} = bb^{-1} = e$, $ax^{-1} \in M_e$, $xb^{-1} \in N_e$ и $a^{-1}a = x^{-1}x$. Следовательно, $ab^{-1} = aa^{-1}ab^{-1} = ax^{-1}xb^{-1} \in M_eN_e$. Таким образом, aa^{-1}, bb^{-1}, $ab^{-1} \in M_eN_e$, откуда $(a, b) \in \rho_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$, так что $\rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}} \subseteq \rho_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$.

Обратно, пусть $(a, b) \in \rho_{\mathcal{M}\mathcal{N}}$, так что $aa^{-1} = bb^{-1} = e$ и $ab^{-1} \in M_eN_e$ для некоторого $e \in E$. Пусть $ab^{-1} = mn$, где $m \in M_e$, $n \in N_e$. Положим $x = nb$. Тогда $xx^{-1} = nbb^{-1}n^{-1} \in N_e$, откуда $xx^{-1} = e$. Далее, $xx^{-1} = a(nb)^{-1} = ab^{-1}n^{-1} = mnn^{-1} = me = m$ и $xb^{-1} = nbb^{-1} = ne = n$. Следовательно, $aa^{-1} = xx^{-1} = e$ и $ax^{-1} \in M_e$, т. е. $(a, x) \in \rho_{\mathcal{M}}$; и $xx^{-1} = bb^{-1} = e$ и $xb^{-1} \in N_e$, т. е. $(x, b) \in \rho_{\mathcal{N}}$. Таким образом, $(a, b) \in \rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}}$, так что $\rho_{\mathcal{M}\mathcal{N}} \subseteq \rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}}$.

Сопоставляя это с предыдущим, мы получаем

$$\rho_{\mathcal{M}\mathcal{N}} = \rho_{\mathcal{M}} \circ \rho_{\mathcal{N}}.$$

Пусть $e, f \in E$. Тогда $M_eM_f \subseteq M_{ef}$ и $N_eN_f \subseteq N_{ef}$; следовательно, $(M_e \cap N_e)(M_f \cap N_f) \subseteq M_{ef} \cap N_{ef}$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ удовлетворяет условию (i) теоремы 7.54. Пусть $a \in S$. Положим $a^{-1}ea = g$. Тогда $a^{-1}M_ea \subseteq M_g$ и $a^{-1}N_ea \subseteq N_g$; следовательно, $a^{-1}(M_e \cap N_e)\, a \subseteq M_g \cap N_g$. Отсюда вытекает, что $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 7.54. Следовательно, $\mathcal{M} \wedge \mathcal{N}$ является групповой нормальной ядерной системой в силу теоремы 7.54.

Далее, $(a, b) \in \rho_{\mathscr{M}} \cap \rho_{\mathscr{N}}$ тогда и только тогда, когда $aa^{-1} = bb^{-1} = e$ и $ab^{-1} \in M_e \cap N_e$ для некоторого $e \in E$, т. е. тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \rho_{\mathscr{M} \wedge \mathscr{N}}$. Таким образом,

$$\rho_{\mathscr{M}} \cap \rho_{\mathscr{N}} = \rho_{\mathscr{M} \wedge \mathscr{N}}.$$

Доказательство теоремы закончено.

Если σ — такая конгруэнция на инверсной полугруппе S, что каждый ее класс содержит не более одного идемпотента, то будем говорить, что σ *разделяет идемпотенты*. Если σ разделяет идемпотенты, то ее ядро является групповой нормальной ядерной системой. Предыдущая теорема показывает, что множество конгруэнций, разделяющих идемпотенты инверсной полугруппы, образует подструктуру структуры всех конгруэнций этой полугруппы. В самом деле, по теореме 7.56 в случае, когда $\mathscr{M}$ и $\mathscr{N}$ суть групповые нормальные ядерные системы, $\rho_{\mathscr{M}} \circ \rho_{\mathscr{N}}$ равно объединению $\rho_{\mathscr{M}}$ и $\rho_{\mathscr{N}}$ в этой структуре. Далее, конструкция, приведенная в теореме 7.56 для $\rho_{\mathscr{M}} \circ \rho_{\mathscr{N}}$ и $\rho_{\mathscr{M}} \cap \rho_{\mathscr{N}}$, показывает, что структура конгруэнций, разделяющих идемпотенты, является подструктурой прямого произведения структур нормальных делителей максимальных подгрупп полугруппы. Структура нормальных делителей группы модулярна. Модулярность сохраняется при переходе к прямым произведениям и подструктурам. Следовательно, в инверсной полугруппе структура конгруэнций, разделяющих идемпотенты, модулярна.

Мы уже видели, что, вообще говоря, множество максимальных подгрупп инверсной полугруппы не образует нормальной ядерной системы. Однако существует единственная максимальная разделяющая идемпотенты конгруэнция. Следующий результат принадлежит Хауи [1964b].

Лемма 7.57. *Пусть S — инверсная полугруппа и E — множество всех ее идемпотентов. Определим отношение μ, полагая*

$$\mu = \{(x, y) \in S \times S \mid x^{-1}ex = y^{-1}ey \text{ для всех } e \in E\}.$$

Тогда μ есть разделяющая идемпотенты конгруэнция на S. Далее, если σ — произвольная разделяющая идемпотенты конгруэнция на S, то $\sigma \subseteq \mu$.

Доказательство. Очевидно, μ есть эквивалентность на S. Пусть $(x, y) \in \mu$ и z — произвольный элемент из S. Тогда $z^{-1}ez \in E$ для любого $e \in E$. Следовательно, $x^{-1}(z^{-1}ez)x = y^{-1}(z^{-1}ez)y$, т. е. $(zx)^{-1}e(zx) = (zy)^{-1}e(zy)$ для любого $e \in E$. Таким образом, $(zx, zy) \in \mu$, т. е. μ стабильно слева. Далее, $x^{-1}ex = y^{-1}ey$ влечет за собой $z^{-1}(x^{-1}ex)z = z^{-1}(y^{-1}ey)z$, т. е.

$(xz)^{-1}e(xz) = (yz)^{-1}e(yz)$. Следовательно, μ стабильно также и справа. Таким образом, μ является конгруэнцией на S.

Пусть $e, f \in E$, и предположим, что $(e, f) \in \mu$. Тогда, в частности, $e^{-1}ee = f^{-1}ef$ и $e^{-1}fe = f^{-1}ff$, т. е. $e = ef$ и $ef = f$. Таким образом, $e = f$. Этим доказано, что μ есть разделяющая идемпотенты конгруэнция.

Пусть теперь σ — произвольная разделяющая идемпотенты конгруэнция на S и $(x, y) \in \sigma$. Отсюда следует, что $(x^{-1}, y^{-1}) \in \sigma$, так как это имеет место для любой конгруэнции на S. Следовательно, в свою очередь $(ex, ey) \in \sigma$ и $(x^{-1}ex, y^{-1}ey) \in \sigma$ для любого $e \in E$. Но если $e \in E$, то $x^{-1}ex$ и $y^{-1}ey$ являются идемпотентами. Так как σ есть разделяющая идемпотенты конгруэнция, отсюда вытекает, что $x^{-1}ex = y^{-1}ey$ для всех $e \in E$, т. е. $(x, y) \in \mu$. Таким образом, $\sigma \subseteq \mu$.

Доказательство леммы закончено.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 7.58. *Множество всех разделяющих идемпотенты конгруэнций на инверсной полугруппе образует модулярную подструктуру с единицей и нулем в структуре всех конгруэнций на этой полугруппе.*

*Теорема 7.58 является частным случаем результата Манна [1964c]: для регулярных полугрупп структура конгруэнций, содержащихся в $\mathcal{H}$, модулярна. Шайн пишет, что этот результат был независимо получен Г. И. Житомирским [1965] [1]). Лаллеман [1966] доказал, что для регулярных полугрупп конгруэнция содержится в $\mathcal{H}$ тогда и только тогда, когда она разделяет идемпотенты. Таким образом, теорема 7.58 остается справедливой, если заменить слово «инверсная» на слово «регулярная». *

Справедливость аналогов теорем Жордана — Гёльдера — Шрейера для модулярных структур (см. Биркгоф [1948], гл. VI) означает возможность получить такие теоремы для ядер разделяющих идемпотенты конгруэнций на инверсной полугруппе. Указание, как это можно сделать для более широкого класса конгруэнций, содержится в статье Престона [1954a].

Кроме метода Шайна, описанного в § 7.3, имеются и другие интересные методы построения представлений инверсных полугрупп. Один из них дан в упражнении 5 ниже. Другой приведен Рейли в его диссертации [1965]. Дадим краткое описание этого метода.

Пусть S — инверсная полугруппа и G_e — подгруппа из S с единицей e. Подмножество A из S называется *смежным классом*

[1]) Г. И. Житомирский в действительности доказал аналогичное утверждение для обобщенных груд, откуда вытекает соответствующий результат для инверсных полугрупп.— *Прим. ред.*

по G_e в S, если $A = G_e a$ для некоторого $a \in S$, такого, что $aa^{-1} = e$. Пусть $\mathscr{B}$ — множество попарно не пересекающихся подгрупп из S и $\mathscr{C}$ — множество всех соответствующих им смежных классов. Показывается, что эти смежные классы попарно не пересекаются. Для каждого $a \in S$ следующим образом определяется частичное преобразование π_a. Областью определения для π_a служит множество $\{G_e b \in \mathscr{C} \mid G_e \in \mathscr{B},\ bb^{-1} = e,\ b \in Sa^{-1}\}$, и для каждого $G_e b$, принадлежащего области определения, полагаем $(G_e b)\,\pi_a = G_e\,(ba)$. Тогда отображение π: $a \to \pi_a$ является представлением S взаимно однозначными частичными преобразованиями множества $\mathscr{C}$. Оно сводится к представлению Вагнера — Престона (теорема 1.20), когда $\mathscr{B}$ состоит из всех одноэлементных подгрупп полугруппы S. Если каждый $\mathscr{D}$-класс полугруппы S содержит подгруппу, принадлежащую $\mathscr{B}$, то $\pi \circ \pi^{-1}$ разделяет идемпотенты. Более того, в этом случае $\pi \circ \pi^{-1}$ есть в точности максимальная разделяющая идемпотенты конгруэнция на S.

Упражнения к § 7.6

1. Пусть S — инверсная полугруппа, состоящая из следующих матриц:

$$I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},\quad E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},$$
$$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\quad E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\quad E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix},\quad 0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}.$$

Пусть E — множество идемпотентов из S. Для каждого $e \in E$ через N_e обозначим максимальную подгруппу из S с единицей e. Положим $\mathscr{N} = \{N_e \mid e \in E\}$. Тогда $\mathscr{N}$ удовлетворяет условию (ii) теоремы 7.54, но не является нормальной ядерной системой для S.

2. Пусть S — инверсная подполугруппа симметрической инверсной полугруппы на трехэлементном множестве $\{1, 2, 3\}$, состоящая из всех взаимно однозначных отображений подмножеств множества $\{1, 2, 3\}$, мощность которых $\leqslant 2$, в множество $\{1, 2, 3\}$. Положим $e = \begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$, $f = \begin{pmatrix}2&3\\2&3\end{pmatrix}$. Тогда $H_e = \left\{e,\ \begin{pmatrix}2&1\\1&2\end{pmatrix}\right\}$ и $H_f = \left\{f,\ \begin{pmatrix}3&2\\2&3\end{pmatrix}\right\}$ являются максимальными подгруппами из S с единицами e и f. Пусть $N_e = H_e$ и $N_f = \{f\}$. Тогда N_e и N_f являются нормальными делителями в H_e и H_f соответственно. Положим $a = \begin{pmatrix}1&2\\3&2\end{pmatrix}$. Тогда $a^{-1}N_e a = H_f$. Следовательно, ни для какого гомоморфизма полугруппы S ядра его ограничений на H_e и H_f не могут совпадать с N_e и N_f соответственно.

3. Пусть μ — максимальная разделяющая идемпотенты конгруэнция на инверсной полугруппе S и E — множество идемпотентов из S. Для $e \in E$ положим $N_e = C(E) \cap H_e$, где H_e есть максимальная подгруппа из S с единицей e. Тогда $\{N_e \mid e \in E\}$ является ядром конгруэнции μ и $\bigcup \{N_e \mid e \in E\} = C(E)$.

4. Пусть μ — максимальная разделяющая идемпотенты конгруэнция на инверсной полугруппе S и E — множество идемпотентов из S. Тогда (i) $S/\mu \cong E$ в том и только в том случае, когда S есть объединение групп; (ii) $S/\mu \cong E$ в том и только в том случае, когда E содержится в центре S. (Хауи [1964a].)

5. Пусть S — инверсная полугруппа, а E — множество ее идемпотентов. Для $e \in E$ через S_e обозначим множество eSe. Для $a \in S$ положим $aa^{-1} = f$, $a^{-1}a = g$ и определим отображение α_a:

$$\alpha_a\colon\ s \to s\alpha_a = a^{-1}sa \quad (s \in S_f).$$

Тогда α_a является изоморфизмом S_f на S_g и $\alpha\colon a \to \alpha_a$ $(a \in S)$ есть представление полугруппы S изоморфизмами между подполугруппами из S. Далее, ядром представления α является $\{B_e \mid e \in E\}$, где $B_e = H_e \cap C(E \cup S_e)$. (Престон [1957].)

6. Пусть S — инверсная полугруппа, а E — множество ее идемпотентов. Через β_a, где $a \in S$, обозначим отображение, которое переводит e в f $(e, f \in E)$ в том и только в том случае, когда e является левой единицей, а f — правой единицей элемента eaf[1]). Тогда β_a есть взаимно однозначное отображение подмножества из E в E и $\beta\colon\ a \to \beta_a$ $(a \in S)$ является представлением полугруппы S взаимно однозначными отображениями. Далее, $\beta\circ\beta^{-1} = \mu$ есть максимальная разделяющая идемпотенты конгруэнция на S. (Престон [1954c] и Хауи [1964a].)

§ 7.7. *Гомоморфизмы на примитивные инверсные полугруппы*

В этом параграфе мы изложим результаты Манна [1964a] и Престона [1969] о гомоморфизмах инверсных полугрупп на примитивные инверсные полугруппы. Напомним, что регулярную полугруппу $S = S^0$ называют *примитивной*, если примитивен каждый ее ненулевой идемпотент (§ 6.5). Ввиду теоремы 6.36 примитивная регулярная полугруппа $S = S^0$ есть 0-прямое объединение однозначно определенного множества ее вполне 0-простых идеалов. Если S инверсна, то каждый из этих вполне 0-простых идеалов является в силу теоремы 3.9 полугруппой Брандта. (См. также упражнение 6 к § 6.5.) Результаты о гомоморфизмах инверсных полугрупп на полугруппы Брандта принадлежат Манну. Эти результаты играют основную роль в решении Манном проблемы нахождения всех неприводимых представ-

[1] То есть $(eaf)(eaf)^{-1} = e$, $(eaf)^{-1}(eaf) = f$. — *Прим. перев.*

лений (конечными матрицами над полем) произвольной инверсной полугруппы [1964b]. Гомоморфизмы на произвольную примитивную инверсную полугруппу были рассмотрены Престоном [1969]; соответствующие результаты играют аналогичную роль в полном описании всех представлений произвольной инверсной полугруппы.

Сделаем сначала несколько замечаний, касающихся случая, когда полугруппа содержит идеал, являющийся примитивной инверсной полугруппой.

Ненулевой идеал A регулярной полугруппы $S = S^0$ будет называться *примитивным*, если каждый ненулевой идемпотент из A примитивен в S. Примитивный идеал является обязательно регулярным; в самом деле, любой идеал регулярной полугруппы регулярен. Для того чтобы идеал A был примитивен, достаточно примитивности каждого его ненулевого идемпотента в A. В самом деле, если $e^2 = e$, $f^2 = f$, $ef = fe = f$ и $e \in A$, то ввиду того, что A — идеал, имеем $f \in A$.

Теорема 7.59. *Следующие условия для регулярной полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:*

(A) *Правый цоколь Σ_r полугруппы S отличен от* 0.

(A′) *Левый цоколь Σ_l полугруппы S отличен от* 0.

(B) *S содержит примитивный идемпотент.*

(C) *S содержит примитивный идеал.*

Если выполняется хотя бы одно из этих условий, то $\Sigma_r = \Sigma_l$ и цоколь Σ $(= \Sigma_r = \Sigma_l)$ полугруппы S равен 0-прямому объединению вполне 0-простых идеалов из S. Цоколь Σ является максимальным примитивным идеалом из S; он содержит все примитивные идемпотенты из S, и примитивными идеалами в S являются в точности ненулевые идеалы цоколя Σ.

Доказательство. По определению правого цоколя (§ 6.3) условие (A) эквивалентно существованию в S 0-минимального правого идеала R. Так как S регулярна, $R = eS$ для некоторого идемпотента $e \neq 0$. В силу леммы 6.38 правый идеал eS 0-минимален тогда и только тогда, когда e примитивен. Таким образом, условия (A) и (B) эквивалентны. По той же лемме эквивалентны условия (A′) и (B).

Предполагая, что выполняется условие (A), получаем, что каждый ненулевой идемпотент из Σ_r порождает 0-минимальный правый идеал из S и поэтому примитивен. Таким образом, Σ_r — примитивный идеал из S, т. е. имеет место условие (C). Обратно, пусть A — произвольный примитивный идеал из S. Если $a \in A \setminus 0$ и $axa = a$, то ax является ненулевым идемпотентом из A, следовательно, он примитивен. Итак, (C) влечет (B).

Предположим снова, что выполняется условие (A). Любой 0-минимальный правый идеал eS из S (где e — примитивный идемпотент) пересекается с 0-минимальным левым идеалом Se из S по элементу e, и, следовательно, каждое из множеств A, A', D, D', указанных в теореме 6.29, равно 0. Из этой же теоремы вытекает, что $\Sigma_r = C = \Sigma_l$ и Σ есть 0-прямое объединение всех вполне 0-простых идеалов из S.

Пусть I — произвольный примитивный идеал из S и $a \in I \setminus 0$. Тогда $a = axa$ для некоторого $x \in S$ и $e = ax$ является идемпотентом $\neq 0$ из I. Следовательно, e примитивен, поэтому eS есть 0-минимальный правый идеал из S, откуда $eS \subseteq \Sigma$. Следовательно, $e \in \Sigma$, но тогда $a = ea \in \Sigma$. Таким образом, $I \subseteq \Sigma$. Эти рассуждения показывают также, что каждый примитивный идемпотент содержится в Σ.

Обратно, если I — произвольный ненулевой идеал из Σ, то I равен объединению некоторых или всех вполне 0-простых слагаемых из Σ. Следовательно, I есть идеал из S и, очевидно, он примитивен.

Рассмотрев одну из ситуаций, в которой может встретиться примитивная инверсная полугруппа, мы приступим теперь к рассмотрению гомоморфизмов на примитивные инверсные полугруппы. Сначала приведем очевидную лемму, которая понадобится нам для упрощения дальнейших рассуждений.

Лемма 7.60. *Пусть ρ — такая конгруэнция на полугруппе S, что $S/\rho = (S/\rho)^0$. Положим $V = 0(\rho^\natural)^{-1}$. Тогда V является идеалом в S и $(S/V)^0 = S/V$.*

Определим отношение $\bar\rho$ на S/V, полагая

$$\bar\rho = [\rho \cap (S \setminus V \times S \setminus V)] \cup [(V, V)].$$

Тогда $\bar\rho$ является конгруэнцией на S/V и естественное отображение

$$\begin{aligned} &x\bar\rho \to x\rho \quad (x \in S \setminus V), \\ &V \to V \end{aligned}$$

является изоморфизмом полугрупп $(S/V)/\bar\rho$ и S/ρ. В частности, нуль V из S/V является $\bar\rho$-классом.

Обратно, если V — идеал из S и σ — такая конгруэнция на S/V, что $\{V\}$ является σ-классом, то

$$\rho = [\sigma \cap (S \setminus V \times S \setminus V)] \cup (V \times V)$$

есть конгруэнция на S, для которой $V = (0\rho^\natural)^{-1}$ и $\bar\rho = \sigma$.

Указанная лемма показывает, что при рассмотрении гомоморфизмов полугруппы S на полугруппу $T = T^0$ без ограничения общности можно предположить, во-первых, что $S = S^0$ и, во-вторых, что нуль полугруппы S есть единственный элемент, который отображается на нуль полугруппы T. Общий случай легко сводится к этому частному, как будет более подробно объяснено в замечаниях после теоремы 7.70. В соответствии с этим мы вводим следующее определение.

Конгруэнцию ρ на инверсной полугруппе $S = S^0$ будем называть *0-ограниченной*, если $\{0\}$ является ρ-классом. Гомоморфизм φ полугруппы $S = S^0$ будем называть *0-ограниченным*, если 0-ограниченна конгруэнция $\varphi \circ \varphi^{-1}$. Гомоморфный образ 0-ограниченного гомоморфизма будем называть *0-ограниченным гомоморфным образом*.

Приступим теперь к доказательству того, что инверсная полугруппа обладает 0-ограниченным примитивным гомоморфным образом тогда и только тогда, когда она категорийна в нуле (полугруппа $S = S^0$ *категорийна в нуле*, если для любых $a, b, c \in S$ из $ab \neq 0$ и $bc \neq 0$ следует $abc \neq 0$).

Лемма 7.61. *Примитивная инверсная полугруппа категорийна в нуле.*

Доказательство. Как отмечено выше, примитивная инверсная полугруппа S равна 0-прямому объединению множества вполне 0-простых инверсных полугрупп, т. е. полугрупп Брандта B_i $(i \in I)$. Пусть $a, b, c \in S$. Предположим, что $ab \neq 0$ и $bc \neq 0$. Тогда a, b, c должны принадлежать одному и тому же слагаемому B_i, откуда по определению (§ 3.3, условие A2, стр. 139) $abc \neq 0$. Доказательство леммы закончено.

Лемма 7.62. *Пусть ρ — такая 0-ограниченная конгруэнция на полугруппе $S = S^0$, что S/ρ есть примитивная инверсная полугруппа. Тогда S категорийна в нуле.*

Доказательство. Пусть $abc = 0$ в S. Положим $\varphi = \rho^{\natural}$. Тогда $(abc)\,\varphi = (a\varphi)\,(b\varphi)\,(c\varphi) = 0\varphi$. Так как φ есть гомоморфизм на S/ρ, элемент 0φ является нулем для S/ρ. По предыдущей лемме S/ρ категорийна в нуле. Следовательно, $(a\varphi)\,(b\varphi) = 0$ или $(b\varphi)\,(c\varphi) = 0$, т. е. $(ab)\,\varphi = 0$ или $(bc)\,\varphi = 0$. В силу 0-ограниченности ρ мы заключаем, что $ab = 0$ или $bc = 0$. Этим установлена категорийность в нуле полугруппы S.

Следующая лемма носит технический характер и сформулирована для облегчения дальнейшего изложения.

Лемма 7.63. *Пусть $S = S^0$— инверсная полугруппа, категорийная в нуле. Тогда для $e, g, x, c \in S$*

(i) *если $e^2 = e$, $g^2 = g$, $ex \neq 0$, $gx \neq 0$, то $egx \neq 0$;*
(ii) *если $e^2 = e$, $ex \neq 0$, $cex = 0$, то $cx = 0$;*
(iii) *если $e^2 = e$, $ex \neq 0$, $exc = 0$, то $xc = 0$.*

Доказательство. (i) Предположим, что $egx = 0$. Тогда $egxx^{-1} = 0$, т. е. в силу того, что идемпотенты коммутируют, $exx^{-1}g = 0$. Так как S категорийна в нуле, имеем либо $exx^{-1} = 0$, либо $xx^{-1}g = gxx^{-1} = 0$. Таким образом, либо ex $(= exx^{-1}x) = 0$, либо gx $(= gxx^{-1}x) = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $egx \neq 0$.

(ii) Если $cex = 0$, то $cexx^{-1} = 0$, т. е. $cxx^{-1}e = 0$. Так как S категорийна в нуле, имеем либо $cx = 0$, либо $xx^{-1}e = 0$. Но $xx^{-1}e = 0$ влечет за собой $ex = (exx^{-1})\,x = (xx^{-1}e)\,x = 0$, что противоречит предположению. Следовательно, $cx = 0$.

(iii) Это утверждение следует непосредственно из категорийности в нуле полугруппы S.

Пусть теперь $S = S^0$ — произвольная инверсная полугруппа. Следуя Манну [1964a], определим на S следующее бинарное отношение β:

$$\beta = \beta(S) = \{(x, y) \in S \times S \mid ex = ey \neq 0 \text{ для некоторого } e = e^2 \text{ из } S\} \cup \{(0, 0)\}. \tag{1}$$

Лемма 7.64. *Пусть $S = S^0$ — категорийная в нуле инверсная полугруппа. Тогда отношение $\beta = \beta(S)$, определенное условием* (1), *есть 0-ограниченная конгруэнция на S и S/β примитивна.*

Кроме того, если σ — такая произвольная 0-ограниченная конгруэнция на S, что S/σ примитивна, то $\beta \subseteq \sigma$.

Доказательство. Очевидно, β рефлексивно и симметрично. Предположим, что $(x, 0) \in \beta$. Тогда, очевидно, $x = 0$. Следовательно, если (x, y), $(y, z) \in \beta$, то либо все три элемента x, y, z равны 0, либо ни один из них не равен 0. Если имеет место первый случай, то, очевидно, $(x, z) \in \beta$. Если же имеет место второй, то существуют такие идемпотенты e, g, что $ex = ey \neq 0$ и $gy = gz \neq 0$. В силу утверждения (i) предыдущей леммы $egy \neq 0$. Следовательно,

$$egx = g(ex) = gey = e(gy) = egz \neq 0,$$

откуда вытекает $(x, z) \in \beta$. Таким образом, мы установили, что β является эквивалентностью.

Докажем, что β стабильно. Возьмем $(x, y) \in \beta$. Если $x = y = 0$, то $(cx, cy) = (0, 0) \in \beta$ для любого $c \in S$. В противном случае существует такой идемпотент e, что $ex = ey \neq 0$. Пусть c — произвольный элемент из S. Если $cex = 0$, то $cey = 0$ и на основании утверждения (ii) предыдущей леммы $cx = 0 = cy$ и поэтому $(cx, cy) \in \beta$. Если $cex \neq 0$, то

$$(cec^{-1})\,cx = c\,(ec^{-1}c)\,x = (cc^{-1}c)\,ex = cex = cey = (cec^{-1})\,cy \neq 0.$$

Таким образом, $f = cec^{-1}$ есть идемпотент, причем $fcx = fcy \neq 0$. Следовательно, $(cx, cy) \in \beta$. Этим мы установили, что β стабильно слева.

Тот факт, что β стабильно справа, доказывается аналогично (и даже проще) с использованием утверждения (iii) предыдущей леммы. Таким образом, мы показали, что β является конгруэнцией на S. Ясно, что β есть 0-ограниченная конгруэнция.

Далее, пусть E, F — ненулевые идемпотенты из S/β. По лемме 7.34 существуют такие идемпотенты $e, f \in S$, что $e \in E$ и $f \in F$. Если $ef \neq 0$, то $e(ef) = ef \neq 0$ и поэтому $(ef, f) \in \beta$; аналогично, $(ef, e) \in \beta$. Следовательно, $(e, f) \in \beta$. Таким образом, либо $EF = 0$, либо $E = F$. Другими словами, каждый ненулевой идемпотент из S/β примитивен, т. е. S/β есть примитивная инверсная полугруппа.

Осталось доказать, что β есть наименьшая 0-ограниченная конгруэнция на S, для которой S/β примитивна. Пусть σ — произвольная 0-ограниченная конгруэнция на S, для которой S/σ примитивна, и $(x, y) \in \beta$. Если $x = y = 0$, то $(x, y) \in \sigma$. В противном случае существует такой идемпотент $e \in S$, что $ex = ey \neq 0$. Отсюда в силу 0-ограниченности σ имеем

$$(e\sigma^{\natural})(x\sigma^{\natural}) = (e\sigma^{\natural})(y\sigma^{\natural}) \neq 0$$

в одной из полугрупп Брандта, являющейся слагаемым в 0-прямом разложении для S/σ. Тогда по определению полугруппы Брандта (§ 3.3, стр. 139, условие A1) получаем $x\sigma^{\natural} = y\sigma^{\natural}$, т. е. $(x, y) \in \sigma$. Таким образом, мы установили, что $\beta \subseteq \sigma$; это завершает доказательство леммы.

Следствие 7.65. *Пусть $S = S^0$ — примитивная инверсная полугруппа. Тогда отношение $\beta = \beta(S)$, определенное формулой* (1), *совпадает с отношением равенства на S.*

Объединяя вместе предыдущие леммы, получаем следующую теорему.

Теорема 7.66. *Инверсная полугруппа $S = S^0$ обладает 0-ограниченным примитивным гомоморфным образом тогда и только тогда, когда S категорийна в нуле.*

Если S категорийна в нуле, то бинарное отношение $\beta = \beta(S)$, определенное условием (1), *есть наименьшая 0-ограниченная конгруэнция на S с тем свойством, что факторполугруппа по ней является примитивной инверсной полугруппой.*

Так как произвольный гомоморфный образ примитивной инверсной полугруппы также является примитивной инверсной полугруппой, мы можем сказать, что в терминах предложения 1.7 S/β есть *максимальный примитивный гомоморфный образ полугруппы S.*

При рассмотрении гомоморфизмов на вполне 0-простые полугруппы Манн [1964a] ввел следующее условие. Мы будем говорить, что нуль полугруппы $S = S^0$ *неразложим*, если для любых двух идеалов A и B этой полугруппы из равенства $A \cap B = 0$ следует, что $A = 0$ или $B = 0$. В противном случае говорят, что нуль полугруппы S *разложим*.

Лемма 7.67. *Пусть* φ — *такой* 0-*ограниченный гомоморфизм полугруппы* $S = S^0$, *что полугруппа* $S\varphi$ 0-*проста. Тогда нуль полугруппы* S *неразложим*.

Доказательство. Предположим, что A и B — идеалы из S и $A \cap B = 0$. Так как полугруппа $S\varphi$ 0-проста и $A\varphi$ является идеалом в $S\varphi$, мы имеем либо $A\varphi = 0$, либо $A\varphi = S\varphi$. Аналогично, либо $B\varphi = 0$, либо $B\varphi = S\varphi$. Если $A\varphi = B\varphi = S\varphi$, то $S\varphi = (S\varphi)^2 = (A\varphi)(B\varphi) = (AB)\varphi \subseteq (A \cap B)\varphi = 0\varphi$, что невозможно. Следовательно, либо $A\varphi = 0$, либо $B\varphi = 0$, откуда в силу 0-ограниченности гомоморфизма φ либо $A = 0$, либо $B = 0$. Таким образом, нуль полугруппы S неразложим.

Вполне 0-простой гомоморфный образ примитивной инверсной полугруппы S можно получить, проектируя S на одно из ее слагаемых, т. е. отображая все слагаемые, за исключением одного, на нуль, а оставшееся слагаемое отображая изоморфно на себя. Такой гомоморфизм 0-ограничен тогда и только тогда, когда S имеет лишь одно слагаемое, т. е. когда S вполне 0-проста. Более общо, из леммы 7.67 вытекает следующий результат.

Следствие 7.68. *Пусть* $S = S^0$ — *примитивная регулярная полугруппа. Тогда* S *обладает* 0-*ограниченным вполне* 0-*простым гомоморфным образом в том и только в том случае, когда она имеет лишь одно вполне* 0-*простое слагаемое, т. е. в том и только в том случае, когда* S *вполне* 0-*проста*.

Докажем теперь теорему Манна [1964a].

Теорема 7.69. *Инверсная полугруппа* $S = S^0$ *обладает* 0-*ограниченным вполне* 0-*простым гомоморфным образом тогда и только тогда, когда* (i) S *категорийна в нуле и* (ii) *нуль полугруппы* S *неразложим*.

Кроме того, если S *удовлетворяет условиям* (i) *и* (ii), *то бинарное отношение* $\beta = \beta(S)$, *определенное условием* (1), *является наименьшей* 0-*ограниченной конгруэнцией на* S *с тем свойством, что факторполугруппа по ней вполне* 0-*проста*.

Доказательство. Пусть φ — такой 0-ограниченный гомоморфизм полугруппы S, что $S\varphi$ вполне 0-проста. В частности, полугруппа $S\varphi$ примитивна и поэтому в силу теоремы 7.66 категорийна в нуле. На основании леммы 7.67 нуль полугруппы S неразложим. Таким образом, S удовлетворяет условиям (i) и (ii).

Обратно, предположим, что S удовлетворяет условиям (i) и (ii). По теореме 7.66 из условия (i) вытекает, что S/β является примитивной инверсной полугруппой. Пусть A и B — два вполне 0-простых слагаемых полугруппы S/β. Тогда $A_1 = A(\beta^\natural)^{-1}$ и $B_1 = B(\beta^\natural)^{-1}$ являются идеалами в S. Если A и B различны, то $A \cap B = 0$ и в силу 0-ограниченности β (теорема 7.66) имеем $A_1 \cap B_1 = 0$. Это противоречит предположению (ii). Следовательно, $A_1 = B_1$ и поэтому также $A = B$. Таким образом, S/β имеет лишь одно вполне 0-простое слагаемое, т. е. S/β является вполне 0-простой полугруппой. Итак, мы установили, что если S удовлетворяет условиям (i) и (ii), то она обладает 0-ограниченным вполне 0-простым гомоморфным образом.

Пусть S удовлетворяет условиям (i) и (ii) и σ — такая 0-ограниченная конгруэнция на S, что S/σ вполне 0-проста. В частности, S/σ является примитивной полугруппой, откуда ввиду теоремы 7.66 следует $\beta \subseteq \sigma$. Доказательство теоремы завершено.

Применим предыдущее к описанию всех конгруэнций ρ на инверсной полугруппе S, для которых S/ρ примитивна. Такие конгруэнции ρ будем называть *примитивными*.

Идеал V полугруппы S будем называть *категорийным*, если $V \neq S$ и

$$abc \in V \ (a, b, c \in S) \text{ влечет за собой } ab \in V \text{ или } bc \in V.$$

Идеал V из S категориен тогда и только тогда, когда полугруппа S/V категорийна в нуле. Для каждого категорийного идеала V из S положим

$$\beta_V = \{(x, y) \in S \times S \mid ex = ey \notin V \text{ для некоторого } e = e^2 \text{ из } S\} \cup \{V \times V\}.$$

По лемме 7.64 и на основании второй половины леммы 7.60 отношение β_V является конгруэнцией на S, причем $0(\beta_V^\natural)^{-1} = V$, фактор-полугруппа S/β_V примитивна и каждая примитивная конгруэнция ρ на S, для которой $0(\rho^\natural)^{-1} = V$, содержит β_V

Конгруэнция ρ на S индуцирует следующую 0-ограниченную конгруэнцию ρ' на S/β_V:

$$(x\beta_V, y\beta_V) \in \rho' \text{ тогда и только тогда, когда } (x, y) \in \rho. \qquad (2)$$

Обратно, по данной 0-ограниченной конгруэнции ρ' на S/β_V с помощью (2) можно определить такую конгруэнцию ρ на S, что $0(\rho^\natural)^{-1} = V$. Назовем ρ *естественным продолжением* конгруэнции ρ' на S.

Из предыдущего вытекает следующая

Теорема 7.70. *Пусть ρ — произвольная примитивная конгруэнция на инверсной полугруппе S и $V = 0(\rho^\natural)^{-1}$. Тогда V есть категорийный идеал из S, β_V есть примитивная конгруэнция на S*

и ρ совпадает с естественным продолжением на S 0-ограниченной конгруэнции на примитивной инверсной полугруппе S/β_V.

Эта теорема сводит задачу нахождения всех примитивных конгруэнций на инверсной полугруппе S к задаче нахождения (i) всех категорийных идеалов V из S и (ii) всех 0-ограниченных конгруэнций на примитивной инверсной полугруппе S/β_V для каждого категорийного идеала V.

Вторая из указанных задач решается следующим образом. Пусть $P = \bigcup \{B_i \mid i \in I\}$ — произвольная примитивная инверсная полугруппа, B_i — ее компоненты Брандта и ρ — произвольная 0-ограниченная конгруэнция на P. Предположим, что $(x, y) \in \rho$, где $x \in B_i$, $y \in B_j$ и $i \neq j$ в I. Тогда $(xx^{-1}x, xx^{-1}y) \in \rho$. Но $xx^{-1}x = x$ и $xx^{-1}y = 0$. В силу 0-ограниченности мы заключаем, что $x = 0$ и, следовательно, также $y = 0$. Таким образом, $\rho = \bigcup \{\rho_i \mid i \in I\}$, где каждое $\rho_i = \rho \cap \{B_i \times B_i)$ является конгруэнцией на B_i. Обратно, для данных конгруэнций ρ_i на B_i $(i \in I)$ их объединение является конгруэнцией на P. Таким образом, задача нахождения всех 0-ограниченных конгруэнций на примитивной инверсной полугруппе сводится к задаче нахождения всех таких конгруэнций на полугруппе Брандта, а эта задача будет решена в § 10.7.

Теперь мы намерены объяснить важность примитивных инверсных полугрупп для задачи нахождения всех представлений произвольной инверсной полугруппы $S = S^0$ конечными матрицами над полем. Пусть φ — такое представление полугруппы S. Рассматривая ранг матрицы, легко установить, что $S\varphi$ содержит примитивные идемпотенты и поэтому в силу теоремы 7.59 содержит наибольший примитивный идеал P. Тогда S содержит $P\varphi^{-1}$ в качестве идеала. Положим $V = 0\varphi^{-1}$. Тогда V является идеалом в $P\varphi^{-1}$ и по теореме 7.66 полугруппа $(P\varphi^{-1})/V$ категорийна в нуле. Будем пока предполагать, что $V = 0$. Тогда $P\varphi^{-1}$ категорийна в нуле и представление полугруппы $P\varphi^{-1}$, индуцированное ограничением представления φ на $P\varphi^{-1}$, задает представление 0-прямого объединения $(P\varphi^{-1})/\beta$ полугрупп Брандта, где $\beta = \beta\,(P\varphi^{-1})$ определено формулой (1). Представление 0-прямого объединения полугрупп Брандта распадается на представления, индуцированные его слагаемыми. Мы изложили теорию представлений вполне 0-простых полугрупп в § 5.4. Для частного случая полугрупп Брандта представления полностью определяются в терминах представлений структурных групп. (См. упражнение 4 к § 5.4. Это упражнение несовершенно в одном отношении. Для полноты картины к (а), (в) и (с) должно быть прибавлено следующее заключение (d): каждое собственное расширение является базисным.) Таким образом, могут быть определены представления полугруппы $P\varphi^{-1}$. Следующий шаг состоит в доказательстве того, что представление φ распадается на две компоненты φ_P и φ^*, где φ_P полностью определяется ограничением представления φ на $P\varphi^{-1}$. Затем аналогично поступаем с представлением φ^*. Если этот процесс заканчивается на n-м шаге и, следовательно, для φ получаются n компонент, таких, как φ_P, то существует идеальный ряд из $2n$ членов

$$0 \subseteq V \subseteq P\varphi^{-1} \subseteq \ldots,$$

первыми двумя членами которого являются V (мы опускаем теперь предположение, что $V = 0$) и $P\varphi^{-1}$. Такой идеальный ряд может быть охарактеризован абстрактно. Обратно, можно доказать, что каждому такому ряду соответствует представление полугруппы S, которое определяется произвольно заданными представлениями факторов этого ряда.

За деталями отсылаем читателя к работе Престона [1969].

Упражнения к § 7.7

1. Элемент $e \neq 0$ полугруппы $S = S^0$ называется *категорийной единицей*, если для каждого $x \in S$ элемент ex равен либо x, либо 0, а элемент xe — либо x, либо 0. В случае когда $ex = x$, будем называть e *категорийной левой единицей* элемента x. Двойственно определяется *категорийная правая единица элемента* x. Полугруппа $C = C^0$ называется *малой категорией с нулем*, если она удовлетворяет двум следующим условиям:

I. Каждый ненулевой элемент из C имеет категорийную левую единицу и категорийную правую единицу.

II. C категорийна в нуле.

Пусть C — малая категория с нулем.

(a) Каждый ненулевой элемент a из C имеет единственную категорийную левую единицу $e_l(a)$ и единственную категорийную правую единицу $e_r(a)$.

(b) Пусть $a, b \in C \setminus 0$. Тогда $ab \neq 0$ в том и только в том случае, когда $e_r(a) = e_l(a)$.

($C \setminus 0$ является малой абстрактной категорией; см., например, Маклейн [1965], стр. 41; термин «малая» означает, что $C \setminus 0$ является множеством, а не классом.) Обратно, если K — малая абстрактная категория, то мы можем присоединить новый символ 0 к K и положить $ab = 0$, если ab не определено в K, и $a0 = 0a = 00 = 0$ для всех $a \in K$. Полученная система $C = K \cup 0$ является малой категорией в смысле приведенного выше определения.

2. Ненулевой элемент a малой категории C с нулем (см. упражнение 1) называется *инвертируемым*, если существует такой элемент $a' \in C$, что $aa' = e_l(a)$ и $a'a = e_r(a)$. Следующие условия для полугруппы $S = S^0$ эквивалентны:

(A) S есть малая категория с нулем, каждый элемент которой инвертируем.

(B) S является примитивной инверсной полугруппой. (См. упражнение 6 к § 6.5.) (Хёнке [1962], стр. 146.)

3. (a) Пусть $\{X_i \mid i \in I\}$ — семейство попарно не пересекающихся множеств, S_{ij} $(i, j \in I)$ — множество всех отображений X_i на X_j и S — объединение всех S_{ij} и пустого отображения 0. Бинарной операцией на S будем считать суперпозицию отображений. Тогда S является малой категорией с нулем (упражнение 1). Категорийными единицами в S являются тождественные преобразования множеств X_i $(i \in I)$. Если $\alpha \in S_{ij}$ и $\beta \in S_{kl}$, то $\alpha\beta \neq 0$ тогда и только тогда, когда $j = k$.

(b) Пусть P_{ij} — множество всех взаимно однозначных отображений X_i на X_j, где $P_{ij} = \varnothing$, если $|X_i| \neq |X_j|$, и P — объединение всех P_{ij} и 0. Тогда P является малой категорией с нулем, каждый ненулевой элемент которой инвертируем (упражнение 2). Разложению полугруппы P на полугруппы Брандта соответствует разбиение множества $\{X_i \mid i \in I\}$ на множество равномощных множеств.

4. Пусть B — полугруппа Брандта со структурной группой G и множеством ненулевых идемпотентов I, H — группа, содержащая G в качестве подгруппы индекса $|I|$, S — множество, состоящее из пустого отображения и всех отображений правых смежных классов по G (в H) на правые смежные классы по G, которые индуцируются умножением справа на элементы из H. Рассмотрим в S операцию суперпозиции отображений. Тогда S есть полугруппа Брандта, изоморфная B. Следовательно, каждая малая категория с нулем, в которой инвертируем каждый ненулевой элемент (упражнение 2 выше), может быть точно представлена как категория взаимно однозначных отображений.

5. Вполне 0-простая полугруппа категорийна в нуле. Следовательно, примитивная регулярная полугруппа также является категорийной в нуле.

6. Пусть S — инверсная полугруппа. Определим отношение $\sim$ на S, полагая $x \sim y$ тогда и только тогда, когда существует такой идемпотент $e \in S$, что $ex = ey$. Тогда $\sim$ является конгруэнцией на S и $S/\sim$ есть группа. Кроме того, если σ есть произвольная конгруэнция на S, для которой S/σ является группой, то $\sim \subseteq \sigma$. Следовательно, каждая инверсная полугруппа обладает максимальным групповым гомоморфным образом (предложение 1.7). (Эта конгруэнция $\sim$ совпадает с конгруэнцией, использованной Рисом в доказательстве теоремы 1.23 (Оре) о вложении для реверсивных справа полугрупп с сокращениями.) (Манн [1961].)

7. Пусть $S = S^0$ — регулярная полугруппа, M_λ — ненулевой идеал из S, категорийный в нуле $(\lambda \in \Lambda)$, и $M = \bigcup \{M_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Тогда $M = M^0$ является регулярной полугруппой, категорийной в нуле. (Манн [1964a].)

8. Пусть $S = S^0$ — инверсная полугруппа, которая категорийна в нуле и нуль которой неразложим, M — ненулевой идеал из S. Определим $\beta_1 = \beta_1(S)$ и $\beta_2 = \beta_2(M)$ при помощи равенства (1), примененного к полугруппам S и M соответственно. Тогда $S/\beta_1 \cong M/\beta_2$. (Манн [1964a].)

9. Скажем, что полугруппа $S = S^0$ $n \times n$-матриц над полем *однородна*, если (a) она содержит нулевую матрицу и (b) все ее ненулевые элементы имеют один и тот же ранг.

(i) Пусть S — полугруппа Брандта $n \times n$-матриц над полем, нулевым элементом которой является нулевая матрица. Тогда S однородна.

(ii) Пусть S — однородная полугруппа $n \times n$-матриц над полем. Тогда S примитивна. (Манн [1964b].)

10. (i) Пусть S — полугруппа, состоящая из трех идемпотентов, $S = \{e, f, 0\}$, где 0 является нулем и $ef = fe = 0$. Тогда S категорийна в нуле и ее нуль разложим.

(ii) Пусть X — множество положительных целых чисел. Обозначим, как обычно, через $\mathcal{T}_X$ полную полугруппу преобразований на множестве X. Множество F всех элементов бесконечного ранга из $\mathcal{T}_X$ является $\mathcal{D}$-классом полугруппы $\mathcal{T}_X$ (лемма 2.8). Множество $I = \mathcal{T}_X \setminus F$, состоящее из всех элементов конечного ранга из $\mathcal{T}_X$, является идеалом в $\mathcal{T}_X$ (теорема 2.9 (ii)). Следовательно, $S = \mathcal{T}_X/I$ есть 0-простая полугруппа. Таким образом, нуль полугруппы S неразложим. Определим элементы $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$, полагая

$$x\alpha = \begin{cases} x, & \text{если } x \text{ нечетно,} \\ 1, & \text{если } x \text{ четно;} \end{cases}$$

$$x\beta = \begin{cases} 2, & \text{если } x \text{ нечетно,} \\ x, & \text{если } x \text{ четно.} \end{cases}$$

Тогда, обозначая через ε тождественное преобразование множества X, в S мы имеем $\alpha\varepsilon\beta = \alpha\beta = 0$, в то время как $\alpha\varepsilon = \alpha \neq 0$ и $\varepsilon\beta = \beta \neq 0$. Таким образом, S не категорийна в нуле. (Манн [1964a].)

11. Пусть S — полугруппа из упражнения 1 к § 6.6. Тогда $S = S^0$ и легко проверить, что S категорийна в нуле и нуль из S неразложим. Для любого $a \in S$ имеем $a^2 = 0$ и, следовательно, S не имеет вполне 0-простых гомоморфных образов.

Глава 8

ПРОСТЫЕ ПОЛУГРУППЫ

В предыдущих главах часто появлялись полугруппы, не имеющие собственных идеалов (разных типов). В главе 2 мы встретились с понятиями простой и 0-простой полугруппы. В главах 2 и 3 были детально изучены свойства вполне простых [0-простых] полугрупп. Напомним одну из характеризаций таких полугрупп: это простые [0-простые] полугруппы, содержащие минимальные [0-минимальные] левые идеалы и минимальные [0-минимальные] правые идеалы (теорема 2.48). В главе 6 рассматривались свойства полугрупп, разложимых в объединения простых полугрупп разных типов. Как отмечено в § 2.7, любой полугруппе сопоставляется множество ее главных факторов, причем каждый главный фактор является простой или 0-простой полугруппой либо полугруппой с нулевым умножением. Полугруппа, обладающая главным идеальным рядом, может быть построена из последовательности ее (однозначно определенных) главных факторов при помощи последовательных расширений. Такие расширения рассматривались в § 4.4 и 4.5. Полупростые полугруппы играют существенную роль в теории представлений, изложенной в гл. 5. Вполне полупростые полугруппы рассмотрены в § 6.6.

Таким образом, простые полугруппы чрезвычайно важны. Однако о простых [0-простых] полугруппах, не удовлетворяющих каким-либо дополнительным условиям, мало что известно. Аналогично, нам почти ничего не известно о бипростых полугруппах в общем случае.

В этой главе мы рассматриваем некоторые классы простых полугрупп (не обязательно являющихся вполне простыми полугруппами). Сначала мы описываем свойства простых справа полугрупп без идемпотентов, следуя работам Тессье [1953a, b] и модифицируя изложение в свете более поздней работы Круазо [1954a]. Круазо рассматривал общую ситуацию — он изучал простые полугруппы без идемпотентов, содержащие минимальные левые (или правые) идеалы. Мы приводим его основную теорему (теорема 8.18), согласно которой любая такая полугруппа может быть вложена в другую полугруппу такого же типа; эту последнюю можно было бы называть главной полугруппой, она строится вполне определенным способом. Эта теорема во всяком случае дает нам некоторое представление о том, объектами какого типа являются такие полугруппы. Однако мы не можем точно указать, как такие полугруппы вкладываются в главные полугруппы.

В § 8.3 рассматриваются 0-простые полугруппы, содержащие 0-минимальные односторонние идеалы и не содержащие ненулевых идемпотентов. Неполнота приведенных здесь результатов отражает современный уровень знаний в этой области.

В § 8.4 рассматриваются бипростые инверсные полугруппы. Теорема 8.44, принадлежащая Клиффорду [1953], показывает, что бипростая инверсная полугруппа с единицей полностью определяется некоторой подполугруппой, имеющей более простое строение.

В двух последних параграфах, § 8.5 и 8.6, приведены две теоремы о вложениях. В одной из них приведена конструкция Брака [1958] вложения произвольной полугруппы в простую полугруппу. В другой изложен результат Престона [1959] о вложении произвольной полугруппы в регулярную бипростую полугруппу.

§ *8.1. Полугруппы Бэра — Леви*

В своей статье [1932] Бэр и Леви построили пример простой справа полугруппы с правым сокращением, которая не является группой. Полугруппа, построенная ими, есть полугруппа всех таких взаимно однозначных отображений α счетного множества, скажем I, в себя, что множество $I \setminus I\alpha$ бесконечно. Более общо, мы будем говорить, что S является *полугруппой Бэра — Леви типа* (p, q) *на множестве* A, если $|A| = p$ и S есть полугруппа (относительно суперпозиции) всех взаимно однозначных отображений η множества A в себя, для которых множество $A \setminus A\eta$ бесконечно и имеет мощность q.

Первая цель данного параграфа — показать, что произвольная простая справа полугруппа с правым сокращением, не являющаяся группой, может быть вложена в полугруппу Бэра — Леви (теорема 8.5). Этот результат, принадлежащий Тессье [1953а], показывает, насколько широк загадочный «класс IV», с которым мы столкнулись в § 1.11 (стр. 63). В доказательстве мы следуем работе Круазо [1954а]. Далее, мы доказываем (теорема 8.8), что полугруппа может быть вложена в простую справа полугруппу с правым сокращением и без идемпотентов тогда и только тогда, когда она сама является полугруппой с правым сокращением и без идемпотентов. Этот результат принадлежит Кону [1956а]. Мы приводим новое доказательство. Мы установим фактически, что вложение происходит в полугруппу Бэра — Леви и, таким образом, теорема 8.5 является следствием теоремы 8.8. Однако нам кажется целесообразным привести также более простое доказательство теоремы 8.5, принадлежащее Круазо.

Лемма 8.1. *Для любых двух бесконечных мощностей p, q, таких, что $p \geqslant q$, существует полугруппа Бэра — Леви типа (p, q).*

Доказательство. Пусть A имеет мощность p и ξ, η — такие взаимно однозначные отображения A в себя, что $A \setminus A\xi$ и $A \setminus A\eta$ имеют мощность q. Нам достаточно установить, что $A \setminus A\xi\eta$ имеет мощность q.

Так как η взаимно однозначно, оно отображает $A \setminus A\xi$ взаимно однозначно на $A\eta \setminus A\xi\eta$. Далее, $A \setminus A\xi\eta = (A \setminus A\eta) \cup (A\eta \setminus A\xi\eta)$ есть объединение двух не пересекающихся множеств мощности q. Поскольку q бесконечно, $| A \setminus A\xi\eta | = q$.

Теорема 8.2. *Полугруппа Бэра — Леви является простой справа полугруппой с правым сокращением и без идемпотентов.*

Доказательство. Пусть S — полугруппа взаимно однозначных отображений η множества A мощности p в себя, для которых $A \setminus A\eta$ имеет мощность q.

Для любого $\eta \in S$ имеем $| A \setminus A\eta | = | A\eta \setminus A\eta^2 |$. Следовательно, так как q есть бесконечная мощность, $\eta^2 \neq \eta$. Таким образом, S не содержит идемпотентов.

Пусть α, $\beta \in S$. Для того чтобы доказать, что S является простой справа полугруппой, мы должны установить, что существует $\gamma \in S$, для которого $\alpha\gamma = \beta$. Зададим γ следующим образом. Для каждого $x \in A$ пусть γ переводит $x\alpha$ в $x\beta$. Тем самым γ определено на $A\alpha$. Так как $| A \setminus A\alpha | = | A \setminus A\beta | = q$, существует такое взаимно однозначное отображение δ множества $A \setminus A\alpha$ в $A \setminus A\beta$, что $(A \setminus A\beta) \setminus ((A \setminus A\alpha)\,\delta)$ имеет мощность q. По определению будем считать, что ограничение γ на $A \setminus A\alpha$ совпадает с каким-либо из таких δ. Построенное отображение γ принадлежит S и $\alpha\gamma = \beta$.

Остается доказать, что S — полугруппа с правым сокращением. Предположим, что $\alpha, \beta, \gamma \in S$ и $\alpha\beta = \gamma\beta$. Пусть $x \in A$. Тогда $x\alpha\beta = x\gamma\beta$, откуда в силу того, что β взаимно однозначно, $x\alpha = x\gamma$. Так как это выполняется для всех $x \in A$, мы имеем $\alpha = \gamma$.

Для доказательства нашей первой теоремы о вложении нужны две предварительные леммы.

Лемма 8.3. *Пусть S — простая справа полугруппа без идемпотентов. Тогда равенство $xy = y$ не может выполняться ни для каких элементов x, $y \in S$ (ср. с доказательством леммы* 1.0 *из* § 1.3).

Доказательство. Предположим, что $xy = y$. Так как S проста справа, $yS = S$. Следовательно, существует такой $z \in S$, что $yz = x$. Отсюда получаем $x^2 = x\,(yz) = (xy)\,z = yz = x$, т. е. x является идемпотентом, что противоречит условию.

Лемма 8.4. *Пусть S — простая справа полугруппа с правым сокращением и без идемпотентов. Тогда* $|S \setminus Ss| = |S|$ *для любого* $s \in S$.

Доказательство. Так как каждая конечная полугруппа содержит идемпотент (§ 1.6), S бесконечна. Пусть s — произвольный элемент из S. Определим следующим образом преобразование φ полугруппы S. Так как S проста справа, для каждого $x \in S$ существует такой элемент $x' \in S$, что $xx' = s$. В качестве $x\varphi$ мы выберем произвольный из таких элементов. Если $x\varphi = y\varphi$, то $x(x\varphi) = s = y(y\varphi) = y(x\varphi)$, откуда, сокращая справа, получаем $x = y$. Следовательно, отображение φ взаимно однозначно. Далее, $S\varphi \cap Ss = \varnothing$. В самом деле, если $z \in S\varphi \cap Ss$, то $z = x\varphi = ys$ для некоторых $x, y \in S$. Тогда $s = x(x\varphi) = xys$, что невозможно в силу леммы 8.3. Следовательно, $S\varphi \subseteq S \setminus Ss$ и

$$|S| = |S\varphi| \leqslant |S \setminus Ss| \leqslant |S|,$$

так что

$$|S \setminus Ss| = |S|.$$

Теорема 8.5. *Пусть S — простая справа полугруппа с правым сокращением и без идемпотентов. Тогда S может быть вложена в полугруппу Бэра — Леви типа (p, p), где $p = |S|$.*

Доказательство. По лемме 1.0 расширенное регулярное (правое) представление полугруппы S является точным представлением полугруппы S как полугруппы взаимно однозначных преобразований множества S^1. Элемент s полугруппы S представляется преобразованием

$$\rho_s: \quad \begin{cases} 1 \to s, \\ x \to xs, \quad x \in S. \end{cases}$$

Далее,

$$|S^1 \setminus S^1\rho_s| = |S^1 \setminus (s \cup Ss)| = |S \setminus Ss|,$$

поскольку $|S|$ бесконечна. Следовательно, по лемме 8.4

$$|S^1| = |S| = |S \setminus Ss| = |S^1 \setminus S^1\rho_s|.$$

Таким образом, ρ_s является элементом полугруппы Бэра — Леви типа (p, p), состоящей из преобразований множества S^1. В силу точности расширенного регулярного представления получаем требуемое вложение.

Следующие две леммы необходимы для доказательства теоремы Кона. Напомним, что если I — инверсная полугруппа и $A \subseteq I$, то инверсная подполугруппа, порожденная A, совпадает с пересечением всех инверсных подполугрупп из I, содержащих A.

Лемма 8.6. *Пусть I — бесконечная инверсная полугруппа с единицей 1, S — такая подполугруппа из I, что S порождает I как инверсную полугруппу и из $a \in S$ следует $aa^{-1} = 1$ и $a^{-1}a \neq 1$. Положим $p = |I|$ и обозначим через $\mathfrak{A}_I$ полугруппу Бэра — Леви типа (p, p) на множестве I. Через φ обозначим регулярное (правое) представление полугруппы I.*

Тогда ограничение φ на S является изоморфизмом полугруппы S в $\mathfrak{A}_I$

Доказательство. Поскольку S порождает инверсную полугруппу I, последняя состоит из произведений конечного числа элементов из S и инверсных к ним элементов. Следовательно, $|S| = |I| = p$. Далее, $S^{-1} \cap S = \varnothing$, где $S^{-1} = \{b \mid b^{-1} \in S\}$; в самом деле, $b^{-1} \in S$ влечет $bb^{-1} \neq 1$. Поэтому $|S^{-1}| = p$.

Пусть $a \in S$. Рассмотрим множество Ia. Мы имеем $Ia \cap S^{-1} = \varnothing$. В самом деле, пусть $b \in S$ и предположим, напротив, что $b^{-1} = xa$, где $x \in I$. Тогда $bb^{-1} = (xa)^{-1}xa = a^{-1}x^{-1}xa$. Но $a^{-1}x^{-1}xa \leqslant a^{-1}a$, где через $\leqslant$ обозначен естественный частичный порядок на I (см. § 7.1). Следовательно, $a^{-1}x^{-1}xa \neq 1$, т. е. $bb^{-1} \neq 1$, что противоречит предположению $b \in S$. Таким образом, $S^{-1} \subseteq I \setminus Ia$, откуда вытекает $|I \setminus Ia| = p$.

Далее, $Ia = I(a\varphi)$ и поэтому лемма будет доказана, если мы установим, что $a\varphi$ есть взаимно однозначное преобразование множества I для любого $a \in S$. Но последнее верно, так как если $x(a\varphi) = y(a\varphi)$ для $x, y \in I$, то $x = xaa^{-1} = (x(a\varphi))a^{-1} = (y(a\varphi))a^{-1} = yaa^{-1} = y$

Пусть S — полугруппа с правым сокращением и без идемпотентов. Напомним определение (см. § 1.9, стр. 54) *инверсной оболочки* полугруппы S. Пусть ρ: $s \to \rho_s$ $(s \in S)$ есть расширенное регулярное представление S. По лемме 1.0 каждое ρ_s является взаимно однозначным преобразованием множества S^1 и ρ есть точное представление. Инверсная оболочка полугруппы S совпадает с инверсной подполугруппой $\Sigma = \Sigma(S)$ из $\mathcal{J}_{S^1}$, порожденной $S\rho$. Здесь через $\mathcal{J}_{S^1}$ обозначена симметрическая инверсная полугруппа, состоящая из всех взаимно однозначных частичных преобразований множества S^1

Лемма 8.7. *Пусть S — полугруппа с правым сокращением и без идемпотентов, ρ — ее расширенное регулярное представление.*

Тогда тождественное преобразование множества S^1 является единицей 1 инверсной оболочки Σ полугруппы S. Далее, если $a \in S\rho$, то $aa^{-1} = 1$ и $a^{-1}a \neq 1$.

Доказательство. Каждый элемент из $S\rho$ является взаимно однозначным преобразованием множества S^1. Следовательно, если $a \in S\rho$, то $aa^{-1} = 1$, где 1 является, очевидно, единицей полугруппы Σ. Далее, $1 \notin \Sigma a$, поэтому $a^{-1}a \neq 1$.

Теорема 8.8. *Полугруппа может быть вложена в простую справа полугруппу с правым сокращением и без идемпотентов тогда и только тогда, когда она с правым сокращением и без идемпотентов* [1]).

Доказательство. Необходимость условий очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим полугруппу S с правым сокращением и без идемпотентов. Пусть ρ — расширенное регулярное представление полугруппы S и Σ — инверсная оболочка этой полугруппы. Так как полугруппа, не имеющая идемпотентов, бесконечна, лемма 8.7 показывает, что будут выполнены все условия леммы 8.6, если в качестве I и S взять соответственно Σ и $S\rho$. Следовательно, так как ρ есть точное представление, по лемме 8.6 полугруппа $S\rho$, а потому и S может быть вложена в полугруппу Бэра — Леви $\mathfrak{G}_\Sigma$ типа $(|\Sigma|, |\Sigma|)$. Теперь заключение теоремы вытекает из теоремы 8.2.

Поскольку в приведенном выше доказательстве, очевидно, $|\Sigma| = |S|$ теорема 8.5 является следствием теоремы 8.8.

Простая справа полугруппа, главные левые идеалы которой линейно упорядочены по включению, была названа Коном [1956b] *полугруппой с полуторалатеральным* [2]) *левым делением*. Такая полугруппа обязательно является полугруппой с правым сокращением. Для этих полугрупп Кон доказал следующую теорему: *полугруппа, главные левые идеалы которой линейно упорядочены по включению, может быть вложена в полугруппу с полуторалатеральным левым делением без идемпотентов тогда и только тогда, когда она с правым сокращением и без идемпотентов.*

Упражнения к § 8.1

1. Каждый $\mathscr{L}$-класс простой справа полугруппы без идемпотентов одноэлементен.

2. В простой справа полугруппе без идемпотентов каждое уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много решений.

3. Каждый элемент простой справа полугруппы без идемпотентов содержится в бесконечном числе различных главных левых идеалов.

4. Пусть S — простая справа полугруппа. Если $Sx = Syx$ для любых $x, y \in S$, то S является правой группой.

5. Простая справа полугруппа с правым сокращением, содержащая идемпотент, является группой.

---

[1]) Э. Г. Шутовым [1963] доказано более сильное утверждение: полугруппа с правым сокращением и без идемпотентов может быть вложена в полугруппу, обладающую, кроме перечисленных в теореме 8.8, еще и свойствами простоты (в смысле конгруэнций) и полноты (в смысле извлечения корня).— *Прим. ред.*

[2]) Sesquilateral.— *Прим. перев.*

6. Если S — простая справа полугруппа без идемпотентов, то для любого $x \in S$ такой же является полугруппа Sx.

7. Пусть S_1, S_2 — две простые справа полугруппы, одна из которых не содержит идемпотентов. Тогда $S_1 \times S_2$ — простая справа полугруппа без идемпотентов.

8. Пусть S — простая справа полугруппа без идемпотентов. Возьмем декартово произведение $M = S \times \Lambda$, где Λ есть произвольное множество. Пусть $\varphi\colon \Lambda \to S$ есть какое-либо отображение множества Λ в S. Определим следующим образом произведение в M: $(s, \lambda)(t, \mu) = (s(\lambda\varphi)t, \mu)$. Тогда M относительно этого произведения превращается в простую справа полугруппу без идемпотентов (M есть не что иное, как полугруппа матричного типа над S, ср. § 3.1). Если S — полугруппа с правым сокращением, то, вообще говоря, M не является полугруппой с правым сокращением.

9. Сохраняя обозначения упражнения 8, предположим, что имеется еще одно отображение

$$\chi\colon \Lambda \to \Lambda.$$

Определим новое произведение в M, полагая

$$(s, \lambda)(t, \mu) = (s(\lambda\varphi)t, \mu\chi).$$

Показать, что если

(i) $\chi^2 = \chi$ и

(ii) $x(\mu\chi)\varphi y = x(\mu\varphi)y$ для всех $x, y \in S$ и всех $\mu \in \Lambda$, то M будет полугруппой относительно нового умножения. Далее, M не содержит идемпотентов и проста справа тогда и только тогда, когда χ есть отображение *на* Λ, т. е. в силу (i) является тождественным отображением.

10. Пусть A — бесконечное множество и R — полугруппа Бэра — Леви типа $(|A|, |A|)$ на множестве A. Пусть H_1 — нетривиальная группа подстановок множества A с единицей 1. Положим $S = H_1 \cup R$. Тогда S является полугруппой относительно операции суперпозиции отображений.

Кроме того, S есть полугруппа с правым сокращением, R — ее двусторонний и минимальный правый идеал. Пусть $r \in R$, $g \in H_1$, $g \neq 1$. Тогда $gr \notin Rr$. Таким образом, $r \cup Rr$ — левый идеал из R, не являющийся левым идеалом в S. (Ср. упражнение 1 к § 6.2.)

§ 8.2. *Полугруппы Круазо — Тессье*

В этом параграфе мы рассмотрим обобщение полугрупп Бэра — Леви из § 8.1, которое будет играть для простых полугрупп без идемпотентов, являющихся объединениями своих минимальных правых идеалов, ту же роль, какую полугруппы Бэра — Леви играют в теореме 8.5 для простых справа полугрупп с правым сокращением и без идемпотентов. Этот тип полугрупп впервые был рассмотрен Тессье при изучении простых справа полугрупп без идемпотентов, не обязательно являющихся полугруппами с правым сокращением [1953b]. Приведенное здесь обобщение принадлежит Круазо [1954a].

Пусть p и q — бесконечные кардинальные числа, причем $p \geqslant q$, и A — множество, такое, что $|A| \geqslant p$. Пусть, далее, $\mathscr{E} = \{\mathscr{E}_i \mid i \in I\}$ — семейство различных эквивалентностей на A, для которых $|A/\mathscr{E}_i| = p$ $(i \in I)$. Подмножество $B \subseteq A$ назовем *вполне разделенным* [1]) *семейством* $\mathscr{E}$, если (i) $|B| = p$ и (ii) для любого $i \in I$ имеет место равенство $\mathscr{E}_i \cap (B \times B) = \iota_B$, где ι_B — отношение равенства на множестве B. Для каждого $i \in I$ через T_i обозначим множество всех преобразований η_i множества A, для которых (i) $\eta_i \circ \eta_i^{-1} = \mathscr{E}_i$ и (ii) существует такое вполне разделенное семейством $\mathscr{E}$ множество B (зависящее, вообще говоря, от η_i), что $A\eta_i \subseteq B$ и $|B \setminus A\eta_i| = q$. Если существует хотя бы одно вполне разделенное подмножество в A, то ясно, что каждое T_i не пусто. В случае, когда A содержит вполне разделенное семейством $\mathscr{E}$ подмножество, через $\mathrm{CT}(A, \mathscr{E}, p, q)$ будем обозначать множество отображений $\bigcup \{T_i \mid i \in I\}$.

Лемма 8.9. *Любое множество отображений* $\mathrm{CT}(A, \mathscr{E}, p, q)$ *образует относительно суперпозиции полугруппу без идемпотентов, в которой каждое подмножество* T_i *является правым идеалом.*

Доказательство. Пусть $\xi \in T_i$, $\eta \in T_j$, так что существуют вполне разделенные семейством $\mathscr{E}$ подмножества X и Y из A, причем $A\xi \subseteq X$, $A\eta \subseteq Y$ и $|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = q$. Тогда $\xi\eta \in T_i$. В самом деле, во-первых, $\xi\eta \circ (\xi\eta)^{-1} = \xi \circ (\eta \circ \eta^{-1}) \circ \xi^{-1} = \xi \circ \mathscr{E}_j \circ \xi^{-1} = \xi \circ \iota_X \circ \xi^{-1} = \xi \circ \xi^{-1} = \mathscr{E}_i$. Во-вторых, поскольку X — вполне разделенное множество, ограничение η на X является взаимно однозначным отображением и потому $|X\eta| = |X| = p$. Далее, $X\eta \subseteq A\eta \subseteq Y$, так что $X\eta$ содержится во вполне разделенном подмножестве. Следовательно, поскольку $|X\eta| = p$, множество $X\eta$ является вполне разделенным.

Далее, $A\xi \subseteq X$ и поэтому $A\xi\eta \subseteq X\eta$, а так как ограничение η на X взаимно однозначно, мы имеем $|X \setminus A\xi| = |(X \setminus A\xi)\eta| = |X\eta \setminus A\xi\eta|$. Таким образом, $|X\eta \setminus A\xi\eta| = q$, что завершает доказательство справедливости включения $\xi\eta \in T_i$.

Итак, мы показали, что $\mathrm{CT}(A, \mathscr{E}, p, q)$ есть полугруппа относительно суперпозиции и каждое подмножество T_i является ее правым идеалом. Тот факт, что $\mathrm{CT}(A, \mathscr{E}, p, q)$ не содержит

[1]) В оригинале well separated.— *Прим. перев.*

идемпотентов, проверяется легко. В самом деле, предположим, что $\xi^2 = \xi$ и $A\xi$ содержится во вполне разделенном множестве X, причем $|X \setminus A\xi| = q$. Так как ограничение ξ на X взаимно однозначно, мы получаем $|X\xi \setminus A\xi^2| = q$. Но $X\xi \subseteq A\xi$, и поэтому из $\xi^2 = \xi$ следует $X\xi \setminus A\xi^2 = \varnothing$, что невозможно, так как q — бесконечное кардинальное число.

Полугруппы типа СТ $(A, \mathscr{E}, p, q)$ будем называть *полугруппами Круазо — Тессье*. Прежде чем продолжить изложение, приведем теорему существования. Для этой цели у нас имеется пример, принадлежащий Сикорскому (устное сообщение). Пусть A — декартово произведение $|I|$ экземпляров множества E мощности p, так что мы можем записать $A = \{(a_i) \mid i \in I,\ a_i \in E\}$. Для каждого $j \in I$ положим по определению $\mathscr{E}_j = \{(a, b) \mid a = (a_i),\ b = (b_i),\ a_j = b_j\}$. Тогда $|A/\mathscr{E}_j| = |E| = p$. Далее, $B = \{(b_i) \mid b_i = b_j$ для всех i, j из $I\}$ является, очевидно, вполне разделенным подмножеством из A. Теперь ясно, что для любого бесконечного $q \leqslant p$ полугруппа СТ $(A, \mathscr{E}, p, q)$ существует. Более того, мощность $|I|$ множества ее правых идеалов T_i (см. лемму 8.9) может быть произвольной. В примере Сикорского в силу соображений симметрии все T_i изоморфны. Как показывает упражнение 7 к настоящему параграфу, в общем случае это неверно.

Среди полугрупп Круазо — Тессье особый интерес для нас представляют полугруппы, для которых $p = q$, т. е. полугруппы СТ $(A, \mathscr{E}, p, p)$. Оказывается, эти полугруппы просты и их правые идеалы T_i являются минимальными правыми идеалами. Следующая лемма, которая может быть выведена из результатов § 6.3, облегчает доказательство этих утверждений.

Лемма 8.10. *Полугруппа, являющаяся объединением своих минимальных правых идеалов, проста.*

Доказательство. Пусть $\{R_i \mid i \in I\}$ — семейство минимальных правых идеалов S, так что $S = \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$. Пусть $x \in S$ и $y \in R_i$. Тогда yxS есть правый идеал из S, содержащийся в R_i. Следовательно, $yxS = R_i$. Отсюда $S = \bigcup \{R_i \mid i \in I\} = \bigcup \{yxS \mid y \in S\} = SxS$. Таким образом, S проста (лемма 2.28).

Теперь мы можем доказать следующую теорему.

Теорема 8.11. *Каждая полугруппа* СТ $(A, \mathscr{E}, p, p)$ *проста, не содержит идемпотентов и совпадает с объединением своих минимальных правых идеалов* T_i, $i \in I$.

Доказательство. В силу лемм 8.9 и 8.10 достаточно установить, что каждый правый идеал T_i является минимальным правым идеалом. Таким образом, мы должны доказать, что для заданных $\xi, \eta \in T_i$ существует $\zeta \in S$, для которого $\eta = \xi\zeta$.

Для ξ и η существуют соответственно такие вполне разделенные подмножества X и Y из A, что $A\xi \subseteq X$, $A\eta \subseteq Y$ и $|X \setminus A\xi| = |Y \setminus A\eta| = p$. Определим сначала ограничение ζ на $A\xi$, полагая ζ: $x\xi \to x\eta$ $(x \in A)$. Так как $\xi \circ \xi^{-1} = \mathscr{E}_i = \eta \circ \eta^{-1}$, определенное таким образом ограничение ζ на $A\xi$ является однозначным отображением (точнее, взаимно однозначным отображением $A\xi$ на $A\eta$). Продолжим теперь ζ на все множество A следующим образом. Так как $A\xi \subseteq X$ и X является вполне разделенным, в $A\xi$ существует не более одного элемента из каждого $\mathscr{E}_i$-класса. Для каждого $x \in A$ пусть ζ переводит весь $\mathscr{E}_i$-класс, содержащий $x\xi$, в $x\eta$. Пусть C — множество тех $\mathscr{E}_i$-классов, которые не имеют общих элементов с $A\xi$. Тогда $|C| \leqslant p$, так как $|A/\mathscr{E}_i| = p$. Поскольку p бесконечно и $|Y \setminus A\eta| = p$, существует такое взаимно однозначное отображение δ множества C в $Y \setminus A\eta$, что $|(A \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p$. Зафиксируем любое такое отображение δ и определим отображение ζ на остальных элементах из A, т. е. на элементах $\mathscr{E}_i$-классов, принадлежащих C, полагая, что ζ переводит все элементы любого $\mathscr{E}_i$-класса в элемент, являющийся образом данного $\mathscr{E}_i$-класса при отображении δ. Тогда $\zeta \circ \zeta^{-1} = \mathscr{E}_i$, $A\zeta \subseteq Y$ и $|Y \setminus A\zeta| = |(Y \setminus A\eta) \setminus C\delta| = p$. Таким образом, $\zeta \in S$. Кроме того, очевидно, $\xi\zeta = \eta$. Это завершает доказательство теоремы.

Теперь мы докажем ряд результатов, кульминационным пунктом которых является теорема о том, что каждая простая полугруппа без идемпотентов с минимальными правыми идеалами может быть вложена в некоторую полугруппу СТ $(A, \mathscr{E}, p, p)$. Простые полугруппы с минимальными правыми идеалами, содержащие идемпотенты, являются в действительности вполне простыми. Это не что иное, как результат упражнения 12 к § 2.7 (Шварц [1951], теорема 7.2), примененный к полугруппам без нуля. Но чтобы изложение здесь было замкнутым в себе, мы сделаем отступление и докажем этот факт. Следующая лемма по существу совпадает с упражнением 14 к § 2.7.

Лемма 8.12. *Пусть e — идемпотент полугруппы S. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(A) *eSe является группой.*

(B) *Se — минимальный левый идеал.*

(B′) *eS — минимальный правый идеал.*

(C) *e примитивен и SeS проста.*

Доказательство. (A) влечет за собой (B). Предположим, что $eSe = G$ является группой и L — левый идеал из S, содержащийся в Se. Пусть $x \in L$. Тогда $ex \in L$, так как L — левый идеал, и $xe = x$, так как $L \subseteq Se$. Следовательно, $ex = y \in G$ и поэтому $Se = Sy^{-1}y \subseteq L$, где y^{-1} — элемент, обратный для y в группе G. Таким образом, полугруппа Se не содержит левых идеалов полугруппы S, отличных от нее самой, т. е. мы установили, что (A) влечет за собой (B).

Обратно, покажем, что (B) влечет за собой (A). Предположим, что Se — минимальный левый идеал из S. Тогда $Se \cdot exe = Se$ для любого $x \in S$. Таким образом, $eSe \cdot exe = eSe$ для любого $exe \in eSe$. Следовательно, eSe есть простая слева полугруппа с левой единицей и поэтому является группой.

По соображениям симметрии (A) эквивалентно (B′). Осталось доказать, что условие (C) эквивалентно любому из условий (A) — (B′).

Предположим, что имеет место (A). Тогда, очевидно, SeS проста. Предположим, что $f = f^2$ и $f \leqslant e$, так что $fe = ef = f$. Тогда $f = efe \in eSe$, а так как группа имеет лишь один идемпотент, получаем $f = e$. Таким образом, e — примитивный идемпотент, т. е. мы установили, что (A) влечет за собой (C).

В силу леммы 2.47 из (C) вытекает (A).

Следующую лемму можно вывести из результатов § 6.2 и 6.3 (ср. с леммой 6.18). Она включает в себя утверждение, обратное к лемме 8.10.

Лемма 8.13. *Пусть S — простая полугруппа, содержащая минимальный правый идеал. Тогда S является объединением своих попарно не пересекающихся минимальных правых идеалов; xS есть минимальный правый идеал, содержащий x; каждый минимальный правый идеал является простой справа полугруппой.*

Доказательство. Пусть R — минимальный правый идеал полугруппы S. Для каждого $x \in S$ множество xR является минимальным правым идеалом из S (лемма 2.32). Для каждого $r \in R$ имеем $S = SrS \subseteq SR$. Таким образом, $S = SR = \bigcup \{xR \mid x \in S\}$ есть объединение минимальных правых идеалов. Так как пересечение двух правых идеалов либо пусто, либо является правым идеалом, два различных минимальных правых идеала не пересекаются. Далее, минимальный правый идеал, содержащий x, должен содержать правый идеал xS и поэтому должен совпадать с xS.

Пусть теперь T — правый идеал минимального правого идеала R из S. Тогда $TR \subseteq T$. Но $(TR)S = T(RS) \subseteq TR$, так что TR — правый идеал в S. Таким образом, $TR = R \subseteq T$. Следовательно, $T = R$, т. е. R — простая справа полугруппа.

Замечание. Если R — минимальный правый идеал произвольной полугруппы S, то ясно, что из приведенного выше доказательства следует, что он является простой справа полугруппой.

Теперь как следствие получается результат, упомянутый ранее (Шварц [1951], Кох [1953], Уоллес [1955], Манн [1957], Сайто и Хори [1958]).

Теорема 8.14. *Пусть S — простая полугруппа, содержащая минимальный правый идеал. Полугруппа S будет вполне простой тогда и только тогда, когда она содержит идемпотент.*

Доказательство. Необходимость условия следует из определения вполне простой полугруппы (§ 2.7). Достаточность вытекает из того, что если e — идемпотент из S, то по лемме 8.13 eS есть минимальный правый идеал из S, содержащий e. Следовательно, в силу леммы 8.12 e примитивен и поэтому S вполне проста.

После нашего отступления, посвященного вполне простым полугруппам, вернемся снова к главной теме этого параграфа — простым полугруппам, обладающим минимальными односторонними идеалами и не являющимся вполне простыми. В силу теоремы 8.14 мы будем поэтому рассматривать простые полугруппы без идемпотентов.

Важную роль в дальнейшем будет играть следующее обобщение леммы 8.3.

Лемма 8.15. *Пусть S — простая полугруппа без идемпотентов, содержащая минимальный правый идеал. Тогда равенство $xy = y$ не выполняется ни для каких $x, y \in S$.*

Доказательство. Предположим, что x принадлежит минимальному правому идеалу R из S (лемма 8.13). Если $xy = y$, то $y \in R$. Но R есть простая справа полугруппа (лемма 8.13) и по лемме 8.3 равенство $xy = y$ в ней невозможно.

Следующие две леммы являются частью доказательства нашей теоремы вложения. Первая лемма есть непосредственное обобщение леммы 8.4.

Лемма 8.16. *Пусть S — простая полугруппа без идемпотентов, содержащая минимальный правый идеал. Тогда*

$$| Ss | = | Ss \setminus Sts | = | Su \setminus Svu | = | Su |$$

для любых $s, t, u, v \in S$.

Доказательство. Пусть R_i $(i \in I)$ — минимальные правые идеалы из S, так что $S = \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$ (лемма 8.13). Поскольку $R_i s \subseteq R_i$ для любого $s \in S$ и R_i попарно не пересекаются, лемма будет доказана, если мы установим, что $R_i s$ и $R_i s \setminus R_i ts$ — множества одной и той же мощности независимо от выбора s и t в S. Приступим к доказательству этого.

Пусть $s, u \in S$. Тогда на основании теоремы 6.36 существует такой $x \in S$, что $s = sux$. Следовательно, $R_i s = R_i sux$ и поэтому $| R_i s | \geqslant | R_i su | \geqslant | R_i sux | = | R_i s |$. Отсюда $| R_i s | = | R_i su |$. Но $R_i s \subseteq R_i$, и поэтому $| R_i su | \leqslant | R_i u |$. Таким образом,

$|R_i s| \leqslant |R_i u|$. Аналогично, $|R_i u| \leqslant |R_i s|$. Следовательно, $|R_i s| = |R_i u|$ для любых $s, u \in S$.

Осталось показать, что $|R_i s| = |R_i s \setminus R_i ts|$ для любых $s, t \in S$. Предположим, что $t \in R_j$. Для каждого $u \in R_j s$ существует такой $x' \in R_i$, что $ux' = t$. Действительно, $u = xs$ для некоторого $x \in R_j$, откуда $uR_i = xsR_i = R_j$. Для каждого $u \in R_j s$ выберем некоторый элемент $u' \in R_i$, такой, что $uu' = t$. Тогда отображение μ: $u \to u's$ является взаимно однозначным отображением $R_j s$ в $R_i s$. В самом деле, предположим, что $u\mu = v\mu$, т. е. $u's = v's$. По лемме 8.13 существует такой $z \in S$, что $s = su'sz$. Пусть x, y — элементы, для которых $u = xs$, $v = ys$ ($u, v \in R_j s$). Тогда $u = xs = (xs) u'sz = (uu') sz = tsz = v (v's) z = vu'sz = y (su'sz) = ys = v$. Таким образом, $u\mu = v\mu$ влечет за собой $u = v$, т. е. μ взаимно однозначно.

Фактически μ отображает $R_j s$ в $R_i s \setminus R_i ts$. В самом деле, предположим, что $u \in R_j s$ и $u\mu \in R_i ts$. Тогда $u\mu = u's = zts$, где $z \in R_i$. Следовательно, $ts = uu's = (uz)(ts)$, что невозможно в силу леммы 8.15.

Итак, $|R_j s| \leqslant |R_i s \setminus R_i ts| \leqslant |R_i s|$. По соображениям симметрии $|R_j s| = |R_i s|$ для всех $i, j \in I$. Но тогда последнее неравенство превращается в равенство, что завершает доказательство леммы.

Лемма 8.17. *Пусть S — простая полугруппа без идемпотентов и R — ее минимальный правый идеал. Определим отношение $\mathscr{E}$ на S, полагая*

$$\mathscr{E} = \{(x, y) \mid xr = yr \text{ для некоторого } r \in R\}.$$

Тогда $\mathscr{E}$ — отношение эквивалентности на S, причем $\mathscr{E} \cap (St \times St) = \iota_{St}$ для любого $t \in R$ и $|S/\mathscr{E}| = |St|$.

Доказательство. Из того факта, что $xr = yr$ для некоторого $r \in R$ имеет место тогда и только тогда, когда $xr = yr$ для любого $r \in R$, вытекает, что $\mathscr{E}$ является отношением эквивалентности на S.

Пусть теперь $t \in R$ и $x, y \in St$. Если $(x, y) \in \mathscr{E}$, то $xr = yr$ для всех $r \in R$. Следовательно, полагая $x = ut$, $y = vt$, мы получаем $utr = vtr$ для $tr \in R$. Отсюда вытекает, что $ur' = vr'$ для всех $r' \in R$, в частности $ut = vt$, т. е. $x = y$. Таким образом, $\mathscr{E} \cap (St \times St) = \iota_{St}$.

Рассмотрим отображение μ: $s \to st$ полугруппы S на St (для некоторого $t \in R$). Тогда, очевидно, $\mu \circ \mu^{-1} = \mathscr{E}$, так что $|S/\mathscr{E}| = |St|$.

Теперь мы можем доказать теорему Круазо о вложении.

Теорема 8.18. *Пусть S — простая полугруппа без идемпотентов, содержащая минимальный правый идеал, и $p = |Ss|$ для некоторого $s \in S$. Тогда S может быть вложена в полугруппу* CT $(A, \mathscr{E}, p, p)$ *для некоторого множества A.*

При этом S можно вложить в подходящую полугруппу CT $(A, \mathscr{E}, p, p)$ *таким образом, что каждый минимальный правый идеал из* CT $(A, \mathscr{E}, p, p)$ *будет содержать в точности один минимальный правый идеал из S.*

Доказательство. Мы знаем, что $S = \bigcup\{R_i \mid i \in I\}$, где каждое R_i есть минимальный правый идеал из S (лемма 8.13). Возьмем в качестве A множество $S \cup \Theta$, где $\Theta = \{\theta_0\} \cup \{\theta_i \mid i \in I\}$ и θ_0, θ_i не принадлежат S. Пусть $\mathscr{E} = \{\mathscr{E}_i \mid i \in I\}$ — семейство отношений эквивалентности на A, заданных следующим образом:

$$\mathscr{E}_i = \{(x, y) \in S \times S \mid xr_i = yr_i\ (r_i \in R_i)\} \cup$$

$$\cup ((\Theta \setminus \theta_i) \times (\Theta \setminus \theta_i)) \cup \{(\theta_i, \theta_i)\}.$$

По лемме 8.17 имеем $|A/\mathscr{E}_i| = |Sr_i \cup \{\theta_i, \theta_0\}| = |Sr_i| = |Ss|$ для любого $s \in S$ (последнее равенство выполняется в силу леммы 8.16). Таким образом, $|A/\mathscr{E}_i| = p$ для каждого $i \in I$. Далее, если $i \neq j$, то $(\theta_0, \theta_j) \in \mathscr{E}_i \setminus \mathscr{E}_j$, откуда $\mathscr{E}_i \neq \mathscr{E}_j$. Таким образом, $\mathscr{E}$ — семейство различных отношений эквивалентности на A.

Пусть $X = Sr_i \cup \{r_i, \theta_0\}$ для некоторого $r_i \in R_i$. Тогда X является множеством, вполне разделенным семейством $\mathscr{E}$. В самом деле, во-первых, $|X| = p$. Далее, в силу леммы 8.17 $\mathscr{E}_i$ индуцирует отношение равенства на Sr_i и, так как $r_i \notin Sr_i$ (лемма 8.15), $\mathscr{E}_i \cap (X \times X) = \iota_X$. Предположим теперь, что $(x, y) \in \mathscr{E}_j$, $j \neq i$ и $x, y \in X$. Имеется пять возможностей: (i) $x = ur_i$, $y = vr_i$; (ii) $x = ur_i, y = r_i$ $[x = r_i, y = vr_i]$; (iii) $x = ur_i, y = \theta_0$ $[x = \theta_0, y = vr_i]$; (iv) $x = r_i, y = \theta_0$ $[x = \theta_0, y = r_i]$; (v) $x = y$. Поскольку $(x, y) \in \mathscr{E}_j$, возможности (iii) и (iv) сразу же исключаются. В случае (i) из $(x, y) \in \mathscr{E}_j$ вытекает либо $x = y$, либо $xr_j = yr_j$ для всех $r_j \in R_j$. Но тогда $ut_i = vt_i$, так как $r_ir_j = t_i \in R_i$, и поэтому $us = vs$ для всех $s \in R_i$. В частности, $x = ur_i = vr_i = y$, т. е. $x = y$. В случае (ii) из $(x, y) \in \mathscr{E}_j$ аналогичным образом вытекает $r_ir_j = t_i \in St_i$ для $t_i \in R_i$, что невозможно в силу леммы 8.15. Таким образом, $(x, y) \in \mathscr{E}_j \cap (X \times X)$ влечет за собой $x = y$. Следовательно, X, как и утверждалось, является вполне разделенным множеством.

Обозначим через $\mathscr{S}$ полугруппу Круазо — Тессье CT $(A, \mathscr{E}, p, p)$, соответствующую построенным A и $\mathscr{E}$, и через T_i $(i \in I)$, как и выше, обозначим минимальные правые идеалы из $\mathscr{S}$ (лемма 8.11). Тогда каждому элементу s из S поставим в соответствие элемент $s\alpha$ из $\mathcal{S}$, заданный следующим образом:

$$x(s\alpha)=\begin{cases} xs & (x\in S),\\ s & (x=\theta_i \text{ и } s\in R_i),\\ \theta_0 & (x=\theta_j,\ j\neq i).\end{cases}$$

Отображение

$$\alpha\colon S\to\mathcal{S}$$

осуществляет изоморфное вложение S в $\mathcal{S}$.

Мы должны показать сначала, что $s\alpha\in\mathcal{S}$. Пусть $s\in R_i$. Тогда $s\alpha\in T_i$. В самом деле, так как $xs\neq s$ для любого $x\in\mathcal{S}$, из определения отношения $\mathcal{E}_i$ следует, что $x(s\alpha)=y(s\alpha)$ тогда и только тогда, когда $(x, y)\in\mathcal{E}_i$. Далее, поскольку S проста, $S^2=S$ и поэтому существуют такие $u, v\in S$, что $s=vu$. Следовательно, $A(s\alpha)=Ss\cup\{s,\theta_0\}=Svu\cup\{vu,\theta_0\}\subseteq Su\cup\{\theta_0\}\subseteq Su\cup\{u,\theta_0\}=A'$. Обозначим множества $Su\cup\{u,\theta_0\}$ через A'. Как было доказано, A' — вполне разделенное множество. Так как $|A'\setminus A(s\alpha)|=|Su\setminus Svu|=p$ (лемма 8.16), получаем $s\alpha\in\mathcal{S}$.

Докажем теперь, что α — изоморфизм. Предположим, что $s\alpha=t\alpha$ для $s, t\in S$. Пусть $s\in R_i$, $t\in R_j$. Тогда $\theta_i(s\alpha)=s$, и если $i\neq j$, то $\theta_i(t\alpha)=\theta_0$. Таким образом, $s\alpha=t\alpha$ влечет за собой $i=j$. Отсюда вытекает, далее, $s=\theta_i(s\alpha)=\theta_i(t\alpha)=t$. Следовательно, α взаимно однозначно.

Для того чтобы доказать, что α есть гомоморфизм, рассмотрим $(s\alpha)(t\alpha)$, где $s\in R_i$, $t\in R_j$. Тогда для $x\in S$ имеем $x(s\alpha)(t\alpha)=(xs)(t\alpha)=xst=x((st)\alpha)$. Далее, так как s и st оба принадлежат R_i, имеем $\theta_i(s\alpha)(t\alpha)=s(t\alpha)=st=\theta_i((st)\alpha)$ и при $k\neq i$ получаем $\theta_k(s\alpha)(t\alpha)=\theta_0(t\alpha)=\theta_0=\theta_k((st)\alpha)$. Таким образом, $(s\alpha)(t\alpha)=(st)\alpha$.

Наконец, как мы уже видели, $s\in R_i$ влечет за собой $s\alpha\in T_i$, т. е. $R_i\alpha\subseteq T_i$. Из того факта, что $\mathcal{E}_i\neq\mathcal{E}_j$ при $i\neq j$, следует, что $T_i\cap T_j=\varnothing$ при $i\neq j$.

Таким образом, каждый минимальный правый идеал из $\mathcal{S}$ содержит в точности один минимальный правый идеал из $S\alpha$. Это завершает доказательство теоремы.

Теперь мы можем распространить теорему 8.8 на полугруппы, не обладающие правым сокращением. Соответствующая теорема принадлежит Кону [1956a], а приведенное здесь доказательство является новым [1]).

Теорема 8.19. *Полугруппа S может быть вложена в простую права полугруппу без идемпотентов тогда и только тогда, когда*

---

[1]) Еще одно доказательство этой теоремы, а также ее усиление (состоящее в добавлении условия простоты в смысле конгруэнций для полугруппы, в которую происходит вложение) имеется в работе Э. Г. Шутова [1964].— *Прим. ред.*

(a) *S без идемпотентов и* (b) *$xu = yu$ для $x, y, u \in S$ влечет за собой $xv = yv$ для всех $v \in S$.*

Доказательство. Необходимость условий очевидна. Для доказательства достаточности рассмотрим полугруппу S, удовлетворяющую условиям (a) и (b). Определим следующим образом отношение эквивалентности ε на S:

$$\varepsilon = \{(x, y) \mid xu = yu \text{ для некоторого } u \in S\}.$$

В силу условия (b) отношение ε является отношением эквивалентности на S.

Пусть I — произвольное множество, для которого $|I| = p$, где $p = |S/\varepsilon|$. Положим $A = S^1 \times I$ и определим следующим образом отношение $\mathscr{E}$ на A:

$$\mathscr{E} = \{((x, i), (y, i)) \mid i \in I,\ x, y \in S^1 \text{ и } xu = yu \text{ для некоторого } u \in S\}.$$

Тогда $|A/\mathscr{E}| = p$. В самом деле, в силу условия (b) для отображения φ_u: $x \to xu$ ($x \in S$) имеем $\varphi_u \circ \varphi_u^{-1} = \varepsilon$. Следовательно, $p = |S/\varepsilon| = |Su|$ для любого $u \in S$. Поскольку Su — полугруппа без идемпотентов, p бесконечно. Отсюда следует, что

$$|A/\mathscr{E}| = |Su \times I| = p^2 = p$$

для любого $u \in S$.

Далее, для каждого $u \in S$ положим

$$A_u = S^1u \times I \text{ и } B_u = A_u \cup (\{1\} \times I).$$

Тогда B_u — подмножество из A, вполне разделенное семейством $\{\mathscr{E}\}$. В самом деле, пусть $((x, i), (y, j)) \in \mathscr{E} \cap (B_u \times B_u)$. Тогда $i = j$, $xv = yv$ для некоторого $v \in S$ и $x, y \in S^1u \cup \{1\}$. Предположим, что $x = au$, $y = bu$, $a, b \in S^1$. Тогда $auv = buv$, где $uv \in S$. Следовательно, если $a, b \in S$, то в силу условия (b) имеем $au = bu$, т. е. $x = y$. Если $a = b = 1$, то снова $x = y$. Если $a = 1$ и $b \in S$, то $u = bu$ для $u, b \in S$. Но это невозможно, так как отсюда следует, что $bu = b^2u$, откуда в свою очередь на основании условия (b) получаем $b^2 = b^3$, так что $b^4 = b^2$. Таким образом, b^2 есть идемпотент, что противоречит условию (a). Остается лишь две возможности: $x = y = 1$ или $x = 1$, $y \in S^1u$. Последняя возможность приводит к равенству $v = yv$, но, как мы уже установили, такое равенство несовместимо с условиями (a) и (b). Следовательно, в любом из случаев мы имеем $x = y$. Это показывает, что B_u является множеством, вполне разделенным семейством $\{\mathscr{E}\}$.

Определим теперь для каждого $u \in S$ отображение $\rho_u : A \to A$, полагая

$$(x, i)\,\rho_u = (xu, i), \quad \text{где} \quad x \in S^1,\ i \in I.$$

Тогда $A\rho_u = A_u$. Далее, $B_u \setminus A_u = \{1\} \times I$ и поэтому $|B_u \setminus A_u| = p$. Так как B_u есть вполне разделенное множество и $\rho_u \circ \rho_u^{-1} = \mathscr{E}$, это показывает, что каждое ρ_u принадлежит простой справа полугруппе без идемпотентов $CT(A, \mathscr{E}, p, p)$.

Доказательство теоремы будет закончено, если мы покажем, что ρ: $u \to \rho_u$ есть изоморфизм S в $CT(A, \mathscr{E}, p, p)$. Но это очевидно.

Следует отметить, что для частного случая полугруппы с правым сокращением приведенное выше доказательство дает другое доказательство теоремы 8.8. В самом деле, если S — полугруппа с правым сокращением, то $\mathscr{E}$ совпадает с отношением равенства на A и $CT(A, \mathscr{E}, p, p)$ сводится к полугруппе Бэра — Леви типа (p, p) на A, которая является полугруппой с правым сокращением.

В дополнение к приведенным выше теоремам о вложении упомянем теорему Кона [1956a], дающую характеризацию подполугрупп правой группы.

Полугруппы, аналогичные полугруппам Круазо — Тессье, были построены Сайто и Хори [1958]; они доказали аналогичную теорему о вложении. Их результаты сформулированы ниже в упражнениях 8 и 9.

Упражнения к § 8.2

1. Пусть S — простая полугруппа без идемпотентов, содержащая минимальный правый идеал. Тогда $\mathscr{L} = \mathscr{H} = \iota_S$ и, следовательно, $\mathscr{R} = \mathscr{D}$.

Далее, $\mathscr{R}$ — конгруэнция на S и $S/\mathscr{R}$ — полугруппа левых нулей, равномощная множеству минимальных правых идеалов из S.

2. Простая полугруппа без идемпотентов, содержащая минимальный правый идеал, удовлетворяет следующему модифицированному закону сокращения : $axy = bxy$ влечет за собой $ax = bx$.

3. Пусть S — простая полугруппа без идемпотентов, содержащая минимальный правый идеал. Тогда для каждого $s \in S$ множество Ss является простой полугруппой без идемпотентов с правым сокращением, содержащей минимальный правый идеал.

4. В обозначениях и условиях леммы 8.17 $\mathscr{E}$ является левой конгруэнцией на S. Если S, кроме того, проста справа, то $\mathscr{E}$ является конгруэнцией на S и $S/\mathscr{E}$ есть простая справа полугруппа без идемпотентов с правым сокращением (Тессье [1953a].)

5. В обозначениях и предположениях доказательства теоремы 8.18 $R_i\alpha = T_i \cap S\alpha$ для каждого $i \in I$.

6. Пусть S — простая справа полугруппа без идемпотентов. Рассмотрим декартово произведение $M = \Lambda \times S$, где Λ — произ-

вольное множество, и пусть φ: $\Lambda \to S$ — произвольное отображение множества Λ в S. Определим произведение в M, полагая $(\lambda, s)(\mu, t) = (\lambda, s(\mu\varphi)t)$. Тогда M превращается относительно этого умножения в простую полугруппу без идемпотентов, содержащую минимальный правый идеал. Минимальными правыми идеалами из M являются полугруппы $\{\lambda\} \times S$ (ср. упражнение 8 к § 8.1).

7. Пусть A — некоторое бесконечное множество, $\mathscr{E}_1$ — отношение равенства на A и $\mathscr{E}_2$ — такое отношение эквивалентности на A, что один $\mathscr{E}_2$-класс содержит два элемента, в то время как все другие $\mathscr{E}_2$-классы одноэлементны. Пусть $\mathscr{E} = \{\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2\}$, $|A| = p$ и $\mathscr{S} = \mathrm{CT}(A, \mathscr{E}, p, p)$. Обозначим через T_i $(i = 1, 2)$ множество всех $\beta \in \mathscr{S}$, для которых $\beta \circ \beta^{-1} = \mathscr{E}_i$. Тогда в T_1 выполняется, а в T_2 не выполняется закон правого сокращения. $\mathscr{S}$ есть простая полугруппа, являющаяся объединением двух неизоморфных правых идеалов T_1 и T_2. (Тессье [1953b].)

8. Пусть $\{K_{i\lambda} \mid i \in I,\ \lambda \in \Lambda\}$ — семейство непересекающихся множеств, где I и Λ — произвольные множества индексов, такие, что $|K_{i\lambda}| = m_\lambda$ есть бесконечное кардинальное число для каждого $i \in I$. Положим $K_i = \bigcup \{K_{i\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\}$ и $K_i^* = K_i \cup \{\theta_i\}$, где все θ_i различны и $\theta_i \notin K = \bigcup \{K_i \mid i \in I\}$. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ пусть m'_λ есть такое бесконечное кардинальное число, что $m'_\lambda \leqslant m_\lambda$.

Обозначим через R_i^j множество взаимно однозначных отображений $\alpha_i^j : K_i^* \to K_j$, удовлетворяющих условиям $K_{i\lambda}\alpha_i^j \subseteq K_{j\lambda}$ и $|K_{j\lambda} \setminus K_{i\lambda}\alpha_j^i| = m'_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$. Пусть $i \to \lambda_i$ — некоторое фиксированное отображение множества I в Λ. Обозначим через R_i множество всех элементов $\alpha_i = (\alpha_i^j)$ декартова произведения $\prod \{R_i^j \mid j \in I\}$, таких, что $\theta_i\alpha_i^j \in K_{j\lambda_i}$. Пусть $S = \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$. Определим произведение $\alpha_i\beta_k$ двух элементов $\alpha_i = (\alpha_i^j)$ и $\beta_k = (\beta_k^j)$ из S $(\alpha_i \in R_i,\ \beta_k \in R_k)$ как $\gamma_i = (\gamma_i^j) \in R_i$, для которого $\gamma_i^j = \alpha_i^k\beta_k^j$ (суперпозиция преобразований).

Тем самым S превращается в простую полугруппу, являющуюся объединением своих минимальных правых идеалов R_i $(i \in I)$. Далее, если $xa = ya$ для всех $a \in S$, то $x = y$. (Сайто и Хори [1958].)

9. Пусть S — простая полугруппа без идемпотентов, содержащая минимальный правый идеал. Предположим, далее, что в S выполняется следующее условие: если $xa = ya$ для всех $a \in S$, то $x = y$. Пусть $\{R_i \mid i \in I\}$ — семейство различных минимальных правых идеалов из S. Для каждого $i \in I$ определим отношение μ_i, полагая

$$\mu_i = \{(x, y) \mid xr_i = yr_i \text{ для некоторого } r_i \in R_i\}.$$

Тогда μ_i — отношение эквивалентности на S.

Пусть $K_i = S/\mu_i$ — множество μ_i-классов; мы можем и будем считать, что K_i и K_j не пересекаются для $i \neq j$; будем приписывать индекс i каждому элементу из K_i. Обозначим через K_{ij} множество всех элементов из K_i, содержащихся в R_j. Тогда $K_i = \bigcup \{K_{ij} \mid j \in I\}$. Положим $K_i^* = K_i \cup \{\theta_i\}$, где все θ_i различны и $\theta_i \notin \bigcup \{K_i \mid i \in I\}$.

Пусть $a \in S$. Тогда для некоторого $i \in I$ $a \in R_i$ и a определяет отображения $a_i^j\colon K_i^* \to K_j$, заданные следующим образом:

$$xa_i^j = \begin{cases} a\mu_j^{\natural}, & \text{если } x = \theta_i, \\ (sa)\mu_j^{\natural}, & \text{если } x = s\mu_i^{\natural}. \end{cases}$$

Обозначим через a_i вектор $(a_i^j \mid j \in I)$.

Тогда $a \to a_i$, где $a \in R_i$, есть изоморфизм S в полугруппу, построенную из K_i, как и в упражнении 8, причем множество Λ теперь отождествляется с I и $i \to \lambda_i$ является тождественным отображением. Кардинальные числа m_i и m'_j $(i \in I,\ j \in I)$, участвующие в этом построении, должны быть все равны между собой (и равны $|Rs| = |Rs \setminus Rts|$, где R — минимальный правый идеал из S и $s, t \in S$: см. лемму 8.16 и ее доказательство). (Сайто и Хори [1958].)

§ 8.3. 0-*простые полугруппы, содержащие 0-минимальные односторонние идеалы; эквивалентности Глускина*

Напомним, что полугруппа S называется 0-простой полугруппой, если она обладает нулем и $SsS = S$ для каждого ненулевого элемента s из S или, что равносильно, если она не содержит собственных ненулевых двусторонних идеалов и не является двухэлементной полугруппой с нулевым умножением (§ 2.5).

Для полугрупп, указанных в заглавии этого параграфа, можно доказать аналоги многих результатов предыдущего параграфа, причем по существу теми же методами. Мы начнем с аналога леммы 8.12. Заметим, что приводимый здесь результат не справедлив для произвольной полугруппы $S = S^0$ (см. упражнение 1 к настоящему параграфу и ср. лемму 6.38).

Лемма 8.20. *Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая ненулевой идемпотент e. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

(A) *eSe — группа с нулем.*

(B) *Se — 0-минимальный левый идеал из S.*

(B′) *eS — 0-минимальный правый идеал из S.*

(C) *e примитивен.*

Доказательство. (A) влечет за собой (B). Предположим, что $eSe = G^0$ есть группа с нулем и L — ненулевой левый идеал из S, содержащийся в Se. Так как $L \neq 0$ и S 0-проста, мы имеем $S = SLS \subseteq LS$ и поэтому $S = LS$. Поскольку $eS = eLS \neq 0$, получаем $eL \neq 0$. Пусть $y \in eL \setminus 0$. Так как $L \subseteq Se$, то $y \in G$. Пусть y^{-1} — элемент, обратный к y в G. Тогда $e = y^{-1}y \in y^{-1}eL \subseteq L$. Следовательно, $Se \subseteq L$. Отсюда $L = Se$, т. е. Se — 0-минимальный левый идеал. Мы показали, что (A) влечет за собой (B).

Предположим теперь, что выполняется (B). Пусть $x \in eSe \setminus 0$. Тогда $x \in Se \setminus 0$ и, поскольку Se 0-минимален, $Sex = Se$. Таким образом, $eSe \cdot x = eSe$. Это показывает, что eSe есть 0-простая слева полугруппа. Следовательно, в силу теоремы 2.27 $eSe \setminus 0$ — простая слева полугруппа. А так как $eSe \setminus 0$ содержит идемпотент e, $eSe \setminus 0$ является группой. Таким образом, (B) влечет за собой (A).

В силу соображений симметрии (A) эквивалентно (B′).

Тот факт, что условие (C) эквивалентно любому из условий (A), (B) и (B′), теперь следует из леммы 2.47 и теоремы 2.48.

Из теоремы 2.33, леммы 2.34 и леммы 6.1 вытекает

Лемма 8.21. *Если S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал, то S совпадает с объединением своих пересекающихся по нулю 0-минимальных правых идеалов, каждый из которых ненильпотентен. 0-минимальный правый идеал, содержащий $x \neq 0$, равен xS.*

В качестве следствия мы получаем теорему, принадлежащую Шварцу [1951, теорема 7.2].

Теорема 8.22. *0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал, вполне 0-проста тогда и только тогда, когда она содержит ненулевой идемпотент.*

Характеризацию 0-простых полугрупп, содержащих 0-минимальные правые идеалы, можно непосредственно извлечь из следствия 6.34. Теперь наше внимание будет главным образом обращено на те из таких полугрупп, которые не являются вполне 0-простыми, т. е. на полугруппы, не содержащие ненулевых идемпотентов.

Если S есть 0-простая полугруппа без ненулевых идемпотентов, содержащая 0-минимальный правый идеал, то можно показать, что $xy = y$ $(x, y \in S)$ влечет за собой $y = 0$ (ср. лемму 8.15). Лемма 8.16 также имеет аналог, и мы получаем

$$| Ss | = | Ss \setminus Sts |$$

независимо от выбора s, t из S. Однако отсюда не вытекает результат, аналогичный теореме 8.18, и поэтому мы не будем далее проводить соответствующие рассмотрения.

В работе [1959b] Л. М. Глускин рассматривал отношения эквивалентности на 0-простых полугруппах, не имеющие аналогов для простых полугрупп. Мы приведем теперь результаты Глускина. Будет полезна следующая предварительная

Лемма 8.23. *0-простая полугруппа S, содержащая 0-минимальный правый идеал, категорийна в нуле* (§ 7.7).

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$ и $ab \neq 0$, $bc \neq 0$. Мы должны доказать, что $abc \neq 0$. В силу леммы 8.21 $S = \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$, где R_i суть 0-минимальные правые идеалы из S. Предположим, что $a \in R_i$, $b \in R_j$ и $c \in R_k$. Поскольку $bc \neq 0$, мы имеем $bcS = bR_k = R_j$ (лемма 8.21). Аналогично, $aR_j = R_i$, поскольку $ab \neq 0$. Следовательно, $abcS = aR_j = R_i$, откуда $abc \neq 0$.

Рассмотрим теперь главную правую конгруэнцию $\mathscr{R}_{\{0\}}$, заданную множеством $\{0\}$ (§ 7.2). Для простоты обозначим $\mathscr{R}_{\{0\}}$ через $\mathscr{P}$. Таким образом (ср. упражнение 1 к § 10.4),

$$\mathscr{P} = \{(x, y) \in S \times S \mid xa = 0 \text{ тогда и только тогда, когда } ya = 0 \ (a \in S)\}. \tag{1}$$

Лемма 8.24. *Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал, $a, b \in S$ и $ab \neq 0$. Тогда $ab \mathscr{P} b$.*

Доказательство. Пусть $abx = 0$ для $x \in S$. Тогда по предыдущей лемме, поскольку $ab \neq 0$, имеем $bx = 0$. Обратно, $bx = 0$ влечет за собой $abx = 0$. Следовательно, $ab \mathscr{P} b$.

Лемма 8.25. *Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал. Тогда $\mathscr{L} \subseteq \mathscr{P}$.*

Доказательство. Предположим, что $(a, b) \in \mathscr{L}$. Если $a = b$, то включение $(a, b) \in \mathscr{P}$ тривиально. Если $a \neq b$, то $ua = b$ и $vb = a$ для некоторых $u, v \in S$. Если $ax = 0$, то $bx = u(ax) = 0$, и если $bx = 0$, то $ax = v(bx) = 0$; поэтому $(a, b) \in \mathscr{P}$.

Для каждого $a \in S$ через P_a обозначим $\mathscr{P}$-класс, содержащий a. Как обычно, R_a обозначает $\mathscr{R}$-класс, содержащий a.

Лемма 8.26. *Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал, $a, b \in S$ и $ab \neq 0$. Тогда*

$$a(R_b \cap P_b) = R_a \cap P_b.$$

Доказательство. Пусть $x \in a(R_b \cap P_b)$. Тогда $x = ac$, где $c \in R_b \cap P_b$. Так как $\mathscr{R}$ — левая конгруэнция (§ 2.1), $c \mathscr{R} b$ влечет за собой $ac \mathscr{R} ab$; отсюда $ac \neq 0$. Далее, $ac \in aS$. Так как aS есть 0-минимальный правый идеал, содержащий a (см. лемму 8.21), то $ac \mathscr{R} a$, т. е. $x \in R_a$. Кроме того, поскольку $ac \neq 0$, в силу леммы 8.24 имеем $ac\mathcal{P}c$; отсюда $ac\mathcal{P}b$, т. е. $x \in P_b$. Таким образом, $x \in R_a \cap P_b$.

Обратно, пусть $x \in R_a \cap P_b$ и $R_1 = aS$, $R_2 = bS$. Так как $ab \neq 0$, $aR_2 = R_1$. Из $x \in R_a = R_1 \setminus 0$ мы заключаем, что $x = ac$, где $c \in R_2 \setminus 0 = R_b$. По лемме 8.24 $ac\mathcal{P}c$, и, поскольку $ac = x\mathcal{P}b$, мы выводим $c\mathcal{P}b$. Таким образом, $c \in R_b \cap P_b$ и $x = ac \in a(R_b \cap P_b)$. Это завершает доказательство леммы.

Определим теперь эквивалентность Глускина $\mathcal{K}$, полагая $\mathcal{K} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$. Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал. Тогда, поскольку равенства $xS = 0$ и $x = 0$ равносильны, $\{0\}$ является $\mathcal{R}$-классом и $\mathcal{P}$-классом одновременно. Следовательно, $\{0\}$ есть $\mathcal{K}$-класс. Пусть $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — ненулевые $\mathcal{P}$-классы из S. По лемме 8.21 $S = \bigcup \{R_i \mid i \in I\}$, где R_i суть 0-минимальные правые идеалы из S. Тогда $\{R_i^* \mid R_i^* = R_i \setminus 0,\ i \in I\}$ — ненулевые $\mathcal{R}$-классы из S и $K_{i\lambda} = R_i^* \cap P_\lambda$ $(i \in I,\ \lambda \in \Lambda)$ — ненулевые $\mathcal{K}$-классы из S. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ определим I_λ, полагая

$$I_\lambda = \{i \in I \mid P_\lambda R_i \neq 0\}. \tag{2}$$

В только что приведенных обозначениях справедлива

Лемма 8.27. *$P_\lambda R_i \neq 0$ тогда и только тогда, когда $xr \neq 0$ для всех $x \in P_\lambda$ и всех $r \in R_i^*$.*

Доказательство. Предположим, что $P_\lambda R_i \neq 0$. Тогда существуют $x_1 \in P_\lambda$ и $r_1 \in R_i^*$, такие, что $x_1 r_1 \neq 0$. Пусть $x \in P_\lambda$ и $r \in R_i^*$. Из $(x, x_1) \in \mathcal{P}$ и $x_1 r_1 \neq 0$ мы заключаем, что $xr_1 \neq 0$. Так как $rS = R_i$, существует такой $s \in S$, что $rs = r_1$, и из $0 \neq xr_1 = xrs$ вытекает $xr \neq 0$. Обратное тривиально.

Лемма 8.28. *$I_\lambda \neq \varnothing$ для каждого $\lambda \in \Lambda$. Кроме того, $I = \bigcup\{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.*

Доказательство. Пусть $a \in P_\lambda$. Тогда $a \neq 0$ и поэтому $aS \neq 0$. Следовательно, $aR_i \neq 0$ для некоторого $i \in I$. Таким образом, $P_\lambda R_i \neq 0$ и $I_\lambda \neq \varnothing$.

Возьмем теперь элемент $a \in R_i^*$. Тогда $SaS = S$ и поэтому $Sa \neq 0$. Следовательно, $P_\lambda a \neq 0$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Таким образом, $P_\lambda R_i \neq 0$ и $i \in I_\lambda$. Итак, $I = \bigcup \{I_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$.

Сопоставляя леммы 8.26 и 8.27, мы получаем следующее утверждение.

Лемма 8.29. *Пусть $i, j \in I$, $\lambda, \mu \in \Lambda$ и $k_{i\lambda} \in K_{i\lambda}$. Тогда*

$$k_{i\lambda} K_{j\mu} = \begin{cases} K_{i\mu}, & \text{если } j \in I_\lambda; \\ 0, & \text{если } j \notin I_\lambda. \end{cases}$$

Отсюда следует, что

$$K_{i\lambda}K_{j\mu}=\begin{cases} K_{i\mu}, & \text{если } j\in I_\lambda;\\ 0, & \text{если } j\notin I_\lambda.\end{cases}$$

Для каждого $i\in I$ определим Λ_i, полагая

$$\Lambda_i=\{\lambda\mid i\in I_\lambda\}. \qquad (3)$$

Тогда включения $\lambda\in\Lambda_i$ и $i\in I_\lambda$ равносильны, и поэтому $\Lambda_i\neq\varnothing$ для каждого $i\in I$ и $\Lambda=\bigcup\{\Lambda_i\mid i\in I\}$.

Для каждого $i\in I$ определим T_i, полагая

$$T_i=\bigcup\{K_{i\lambda}\mid\lambda\in\Lambda_i\}.$$

Тогда $T_i\subseteq R_i^*$. Положим $A_i=R_i\setminus T_i$.

Лемма 8.30. *Для каждого $i\in I$ множество T_i является простой справа подполугруппой из S (в частности, $T_i\neq\varnothing$) и $A_i^2=0$.*

Доказательство. $T_i\neq\varnothing$, так как $\Lambda_i\neq\varnothing$. Пусть $x\in T_i$. Тогда $x=k_{i\lambda}\in K_{i\lambda}$ для некоторого $\lambda\in\Lambda_i$. Следовательно, по лемме 8.29

$$xT_i=\bigcup\{k_{i\lambda}K_{i\mu}\mid\mu\in\Lambda_i\}=$$
$$=\bigcup\{K_{i\mu}\mid\mu\in\Lambda_i\},$$

т. е. $xT_i=T_i$. Это показывает, что T_i — простая справа подполугруппа из S.

Пусть $x,y\in A_i$. Если x или y равно нулю, то $xy=0$. В противном случае $x\in K_{i\lambda}$ и $y\in K_{i\mu}$, где, в частности, $\lambda\notin\Lambda_i$, т. е. $i\notin I_\lambda$. В силу леммы 8.29 получаем $xy=0$. Таким образом, $A_i^2=0$. Это завершает доказательство леммы.

Ссылаясь на упражнение 7 (a) к § 6.1, отметим, что

$$T_i=\{t\in R_i\mid tR_i=R_i\},$$
$$A_i=\{a\in R_i\mid aR_i=0\}.$$

В самом деле, каждый элемент $x\in R_i^*$ принадлежит в точности одному из множеств $K_{i\lambda}=P_\lambda\cap R_i^*$. Если $P_\lambda R_i\neq 0$, то $xR_i\neq 0$ по лемме 8.27 и, следовательно, $xR_i=R_i$. Если $P_\lambda R_i=0$, то $xR_i=0$. Но по определению T_i и A_i выполняется включение $K_{i\lambda}\subseteq T_i$ или $K_{i\lambda}\subseteq A_i$ в зависимости от того, равно или не равно 0 множество $P_\lambda R_i$.

Наконец, приведем результат, касающийся различных T_i и A_i из S. Заметим, что для любых $i,j\in I$ всегда существует такой элемент $a\in R_i$, что $aR_j=R_i$. В самом деле, $R_iR_j=R_i$ на основании леммы 6.12, и поэтому существует такой $a\in R_i$, что $aR_j\neq 0$. Но тогда aR_j есть ненулевой правый идеал, содержащийся в R_i, так что $aR_j=R_i$.

Лемма 8.31. *Пусть $i, j \in I$ и a — такой элемент из R_i, что $aR_j = R_i$. Тогда*

$$T_i = \{ar \mid r \in R_j,\ ra \in T_j\}$$

и

$$A_i = \{ar \mid r \in R_j,\ ra = 0\}.$$

Доказательство. Так как $a \in R_i$ и $a \neq 0$, то $a = k_{i\lambda} \in K_{i\lambda}$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$. Пусть $r = k_{j\mu} \in K_{j\mu}$ есть произвольный элемент из R_j^*. Из $aR_j = R_i \subseteq P_\lambda R_j$ мы заключаем, что $j \in I_\lambda$. Следовательно, по лемме 8.29 $ar = k_{i\lambda}k_{j\mu} \in K_{i\mu}$. Таким образом, $ar \in T_i$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \Lambda_i$. Но, снова по лемме 8.29, $ra = k_{j\mu}k_{i\lambda} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $\mu \in \Lambda_i$. Однако если $ra \neq 0$, то $ra \in K_{j\lambda} \subseteq T_j$, так как $j \in I_\lambda$. Этого достаточно для доказательства первого утверждения леммы. Что касается второго утверждения, то мы заметим, что если $ra = 0$, то $\mu \notin \Lambda_i$ и $ar \in K_{i\mu} \subseteq A_i$.

Сопоставляя вместе предыдущие леммы, мы получаем следующую теорему (Глускин [1959b]).

Теорема 8.32. *Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал. Тогда $S = \bigcup\{R_i \mid i \in I\}$, где R_i суть 0-минимальные правые идеалы из S. Пусть $\{P_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — ненулевые $\mathcal{P}$-классы из S, где $\mathcal{P}$ задано формулой (1). Каждый $\mathcal{P}$-класс есть объединение $\mathcal{L}$-классов. Положим $R_i^* = R_i \setminus 0$, так что $\{R_i^* \mid i \in I\}$ — семейство ненулевых $\mathcal{R}$-классов. Положим также $K_{i\lambda} = R_i^* \cap P_\lambda$ $(i \in I,\ \lambda \in \Lambda)$. Тогда $K_{i\lambda}$ — ненулевые $\mathcal{K}$-классы из S, где $\mathcal{K} = \mathcal{R} \cap \mathcal{P}$.*

Кроме того, если $k_{i\lambda} \in K_{i\lambda}$, то

$$k_{i\lambda}K_{j\mu} = \begin{cases} K_{i\mu}, & \text{если } j \in I_\lambda; \\ 0, & \text{если } j \notin I_\lambda, \end{cases}$$

где множества I_λ заданы формулой (2). Отсюда следует, что

$$K_{i\lambda}K_{j\mu} = \begin{cases} K_{i\mu}, & \text{если } j \in I_\lambda; \\ 0, & \text{если } j \notin I_\lambda. \end{cases}$$

Наконец, для каждого $i \in I$ положим

$$T_i = \bigcup\{K_{i\lambda} \mid K_{i\lambda}^2 = K_{i\lambda}\}$$

и

$$A_i = \bigcup\{K_{i\lambda} \mid K_{i\lambda}^2 = 0\}.$$

Тогда T_i — простые справа подполугруппы из S, $A_i^2 = 0$ и $A_i = R_i \setminus T_i$.

Упражнения к § 8.3

1. Пусть $S = \{0, e, a\}$ — полугруппа, заданная таблицей

	0	e	a
0	0	0	0
e	0	e	0
a	0	a	0

Тогда eSe — группа с нулем, но $Se = S$ не является 0-минимальным левым идеалом, так как строго содержит левый идеал $L = \{0, a\}$ (ср. с леммой 8.20).

2. Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал и не содержащая ненулевых идемпотентов. Тогда эквивалентности $\mathcal{L}$ и $\mathcal{H}$ совпадают с отношением равенства на S и, следовательно, $\mathcal{D} = \mathcal{R}$.

3. Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал. Тогда если S содержит единицу, то S является группой с нулем.

4. Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал. Тогда $x^2 \neq 0$ для некоторого $x \in S$. Кроме того, если $x^2 \neq 0$, то $x^n \neq 0$ для любого натурального n.

5. Пусть A — полугруппа с нулевым умножением, T — простая справа полугруппа без идемпотентов, не пересекающаяся с A. Положим $R = T \cup A$ и зададим следующим образом умножение в R:

(1) $AT = 0$.

(2) $ta = a\lambda_t$ $(t \in T,\ a \in A \setminus 0)$, где λ_t — отображение $A \setminus 0$ на себя, не имеющее неподвижных точек и такое, что $\lambda_{st} = \lambda_t\lambda_s$ для всех $s, t \in T$.

(3) 0 действует как нуль в R.

(4) Произведение двух элементов из T $[A]$ совпадает с их произведением в полугруппе T $[A]$.

Тогда R — полугруппа и A — ее максимальный двусторонний идеал.

Пусть Λ — некоторое множество и $\varphi\colon \Lambda \to \mathcal{S}$ — отображение Λ на $\mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ есть множество правых сдвигов полугруппы R (§ 1.3), удовлетворяющих следующим условиям. (Мы не знаем, всегда ли существует такое множество.)

(a) Для каждого $s \in R \setminus 0$ существует такое $\sigma \in \mathcal{S}$, что $s\sigma \in T$.

(b) Для каждого $\sigma \in \mathcal{S}$ существует такой $s \in R \setminus 0$, что $s\sigma \in T$.

Зададим теперь произведение в $M = \Lambda \times R$, полагая $(\lambda, s)(\mu, t) = (\lambda, (s(\mu\varphi)t)$.

Тогда M превращается в полугруппу, в которой подмножество $I = \Lambda \times \{0\}$ является идеалом. Кроме того, факторполугруппа M/I есть 0-простая полугруппа без ненулевых идемпотентов, содержащая 0-минимальный правый идеал. Множества $\{\lambda\} \times R$ (по $\operatorname{mod} I$) являются 0-минимальными правыми идеалами из M/I ($\lambda \in \Lambda$). Если $\iota_R \in \mathscr{S}$ и $\lambda_1\varphi = \iota_R$, то $\{\lambda_1\} \times R \cong R$ и поэтому R вкладывается в M/I как 0-минимальный правый идеал. (Ср. упражнения 7 и 8 к § 6.1.)

6. Пусть $S = R^+ \times R^+$, где R^+ — множество положительных действительных чисел. Зададим произведение в S, полагая $(a, b)(c, d) = (ac, bc + d)$. Тогда S — простая полугруппа (она совпадает с полугруппой отображений R^+ в себя, если отождествить каждый элемент (a, b) с отображением $x \to ax + b$) и на S каждое из отношений $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$, $\mathscr{H}$ и $\mathscr{D}$ равно ι_S. (Ср. упражнения 9 и 10 к § 2.1.) (Андерсен [1952].)

7. Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал R. Определим отношение $\mathscr{E}$ на S, полагая

$$\mathscr{E} = \{(x, y) \mid xr = yr \text{ для всех } r \in R \setminus 0\}.$$

Пусть A — левый аннулятор R в R и $T = R \setminus A$. Тогда $\mathscr{E}$ — отношение эквивалентности на S и $\mathscr{E} \cap (St \times St) = \iota_{St}$ для любого $t \in T$. Далее, $|S/\mathscr{E}| = |St|$.

8. Пусть S — вполне 0-простая полугруппа с сэндвич-матрицей $P = (p_{\lambda i})$, где $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Определим отношение $\sim$ на ненулевых $\mathscr{L}$-классах из S, полагая $L_\lambda \sim L_\mu$ тогда и только тогда, когда λ-я и μ-я строки из P имеют нули на одних и тех же местах, т. е. $p_{\lambda i} = 0$ тогда и только тогда, когда $p_{\mu i} = 0$ $(i \in I)$. Тогда $\sim$ является отношением эквивалентности на ненулевых $\mathscr{L}$-классах из S. Ненулевые $\mathscr{P}$-классы из S являются объединениями $\sim$-классов.

9. Пусть S есть 0-простая полугруппа, содержащая 0-минимальный правый идеал, и, как обычно, $S^1 = S \cup \{1\}$. Далее мы используем обозначения теоремы 8.32.

(a) Зададим $I \times \Lambda$-матрицу $\Delta = (\delta_{i\lambda})$, полагая

$$\delta_{i\lambda} = \begin{cases} 1, & \text{если } P_\lambda R_i \neq 0, \\ 0, & \text{если } P_\lambda R_i = 0. \end{cases}$$

Тогда Δ содержит хотя бы по одной единице в каждой строке и в каждом столбце.

(b) Если $\delta_{i\lambda} = 0$, то $K_{i\lambda} \cup 0$ — полугруппа с нулевым умножением. Если $\delta_{i\lambda} = 1$, то $K_{i\lambda}$ — простая справа подполугруппа из S. В каждом из возможных случаев $K_{i\lambda} \cup 0$ является левым идеалом из R_i.

(c) Для каждого элемента $k_{i\lambda} \in K_{i\lambda}$ мы имеем

$$k_{i\lambda} K_{j\mu} = \delta_{j\lambda} K_{i\mu} \quad \text{и} \quad k_{i\lambda} R_j = \delta_{j\lambda} R_i.$$

(d) $T_i = \bigcup \{\delta_{i\lambda} K_{i\lambda} \mid \lambda \in \Lambda\} \setminus 0.$

§ 8.4. Бипростые инверсные полугруппы

Поскольку инверсная полугруппа всегда содержит идемпотенты, простая инверсная полугруппа с минимальным односторонним идеалом обязательно является вполне простой (теорема 8.14). Так как идемпотенты инверсной полугруппы коммутируют, такая вполне простая полугруппа может содержать только один примитивный идемпотент, и, следовательно, она содержит только один идемпотент. Таким образом, вполне простая инверсная полугруппа является группой. Поэтому, рассматривая простые инверсные полугруппы, мы можем ограничиться случаем, когда полугруппа не содержит минимальных односторонних идеалов.

Мы начнем с характеризации простых инверсных полугрупп. Затем перейдем к рассмотрению бипростых полугрупп, т. е. полугрупп, обладающих только одним $\mathscr{D}$-классом. Результаты, которые мы приводим, принадлежат Клиффорду [1953]. В доказательствах мы широко пользуемся общими свойствами инверсных полугрупп и их представлений частичными преобразованиями.

Теорема 8.33. *Инверсная полугруппа S будет простой тогда и только тогда, когда для любых двух идемпотентов $e, f \in S$ существует элемент из S, левая единица которого равна e, а правая единица меньше или равна f.*

Доказательство. Предположим, что указанное условие выполнено, и пусть a, b — произвольные элементы из S. Положим $aa^{-1} = e$ и $bb^{-1} = f$. Тогда существует $u \in S$, для которого $uu^{-1} = e$ и $u^{-1}u \leqslant f$. Следовательно, $ub(b^{-1}u^{-1}a) = u(u^{-1}u)(bb^{-1})u^{-1}a = u(u^{-1}u)fu^{-1}a = uu^{-1}uu^{-1}a = ea = a$, т. е. уравнение $xby = a$ имеет решение $x = u$, $y = b^{-1}u^{-1}a$. Таким образом, S является простой.

Обратно, предположим, что S проста. Пусть e, f — произвольные идемпотенты из S. Тогда существуют такие $x, y \in S$, что $e = xfy$, и мы можем считать, что $ex = x = xf$, $fy = y = ye$. Следовательно, $xyx = (xfy)x = ex = x$ и $yxy = y(xfy) = ye = y$. Таким образом, $y = x^{-1}$ и поэтому $xx^{-1} = xy = xfy = e$. Далее, $x^{-1}x \cdot f = x^{-1}x$. Итак, $xx^{-1} = e$ и $x^{-1}x \leqslant f$. Это завершает доказательство теоремы.

В § 8.5 будет доказано, что существуют простые инверсные полугруппы, содержащие произвольное число $\mathscr{D}$-классов.

Перейдем теперь к бипростым полугруппам и начнем с того, что соберем некоторые факты о $\mathscr{D}$-классах инверсной полугруппы. Напомним прежде всего, что каждый $\mathscr{R}$-класс и каждый $\mathscr{L}$-класс инверсной полугруппы S содержат в точности один идемпотент (следствие 2.19). Поэтому (лемма 2.12), что если e — идемпотент, то R_e состоит из всех элементов полугруппы S, для которых e служит левой единицей. Двойственным образом, L_e состоит из всех элементов S, для которых e — правая единица. Отсюда следует, в частности, что $L_e = R_e^{-1}$ и $R_e = L_e^{-1}$. Из этого вытекает также, что если e и f — идемпотенты из одного и того же $\mathscr{D}$-класса D, то в D найдется элемент, для которого e является левой, а f — правой единицей. Обратно, если S — такая инверсная полугруппа, что для любых двух ее идемпотентов e и f существует элемент, левой единицей которого является e, а правой — f, то $e\mathscr{D}f$ и поэтому в силу леммы 2.12 полугруппа S бипроста. Таким образом, мы получаем следующий аналог теоремы 8.33.

Лемма 8.34. *Инверсная полугруппа S будет бипростой тогда и только тогда, когда для любых двух идемпотентов $e, f \in S$ существует элемент из S, левой единицей которого является идемпотент e, а правой — идемпотент f.*

Утверждение (i) следующей леммы, справедливое для любого регулярного $\mathscr{D}$-класса, сформулировано как упражнение 2 к § 2.3.

Лемма 8.35. *Пусть S — инверсная полугруппа и e — произвольный ее идемпотент. Тогда*

(i) $L_eR_e = D_e$;

(ii) *если $l, l_1 \in L_e$ и $r, r_1 \in R_e$, то $lr = l_1r_1$ тогда и только тогда, когда существует такой $u \in H_e$, что $lu = l_1$ и $ur_1 = r$.*

Доказательство. (i) Пусть $a \in D_e$. Возьмем $b \in R_e \cap L_a$ и $c \in R_a \cap L_e$. Тогда по теореме 2.17 $H_cb = H_a$ (здесь H_x обозначает $\mathscr{H}$-класс, содержащий x). Таким образом, $a \in H_cb \subseteq L_eb \subseteq L_eR_e$. Это показывает, что $D_e \subseteq L_eR_e$. Обратное включение выполняется на основании теоремы 2.4. Итак, $L_eR_e = D_e$.

(ii) Пусть $l, l_1 \in L_e$ и $r, r_1 \in R_e$. Предположим, что $lr = l_1r_1$. Тогда $lrr_1^{-1} = l_1r_1r_1^{-1} = l_1e = l_1$. Положим $rr_1^{-1} = u$. Тогда $lu = l_1$. Далее, $lr = l_1r_1$ влечет за собой $l^{-1}lrr_1^{-1} = l^{-1}l_1r_1r_1^{-1}$, т. е. $(er)\,r_1^{-1} = l^{-1}(l_1e)$, т. е. $rr_1^{-1} = l^{-1}l_1$. Таким образом, $u = l^{-1}l_1$ и поэтому $ur_1 = l^{-1}l_1r_1 = l^{-1}lr = er = r$, т. е. $ur_1 = r$. Наконец, $uu^{-1} = l^{-1}(l_1r_1)\,r^{-1} = l^{-1}lrr^{-1} = e^2 = e$ и поэтому $u \in R_e$; кроме того, $u^{-1}u = r_1r^{-1}\cdot l^{-1}l_1 = r_1(lr)^{-1}\cdot l_1 = r_1(l_1r_1)^{-1}l_1 = r_1r_1^{-1}\cdot l_1^{-1}l_1 = e^2 = e$ и поэтому $u \in L_e$. Таким образом, $u \in H_e$.

Обратно, если $lu = l_1$ и $ur_1 = r$, то, очевидно, $lr = l_1r_1$.

Замечание. В обозначениях утверждения (ii) леммы предположим, что $lp = lu$, где $u \in H_e$. Тогда $ep = u$. В частности, элемент u, участвующий в (ii), единствен.

Мы будем говорить, что e является *единицей для D_e*, если $ea = a = ae$ для всех $a \in D_e$, не предполагая при этом, что D_e является подполугруппой.

Лемма 8.36. *Если S — инверсная полугруппа, то ее идемпотент e является единицей для D_e тогда и только тогда, когда R_e — подполугруппа.*

Доказательство. Предположим, что e — единица для D_e. Пусть $a, b \in R_e$. Тогда $ab(ab)^{-1} = a(bb^{-1})a^{-1} = aea^{-1} = aa^{-1} = e$, т. е. $ab \in R_e$. Следовательно, R_e является подполугруппой.

Обратно, предположим, что R_e — подполугруппа. Чтобы установить, что e является единицей для D_e, достаточно, очевидно, показать, что $ef\,(=fe) = f$ для любого идемпотента $f \in D_e$. Рассмотрим поэтому идемпотент $f \in D_e$ и возьмем $a \in R_e \cap L_f$. Так как R_e — подполугруппа, $ae \in R_e$. Таким образом, $aea^{-1} = ae(ae)^{-1} = e$. Следовательно, $a^{-1}aea^{-1}a = a^{-1}(ea) = a^{-1}a$, т. е. $fef = f$, откуда $ef = f$. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 8.37. *Пусть S — инверсная полугруппа и e — ее идемпотент. Предположим, что R_e является подполугруппой. Тогда R_e — полугруппа с правым сокращением и e — ее единица.*

Доказательство. Как установлено в предыдущей лемме, e является единицей в R_e. Предположим, что $ax = bx$, где a, b, $x \in R_e$. Тогда $a = ae = (ax)x^{-1} = bxx^{-1} = be = b$. Таким образом, R_e — полугруппа с правым сокращением.

Наши рассуждения в конечном счете преследуют цель описать бипростые инверсные полугруппы с единицей. Для указанной цели будет полезно охарактеризовать те $\mathcal{D}$-классы, которые являются подполугруппами; это имеет и самостоятельный интерес. Такие подполугруппы являются обязательно бипростыми (см. упражнение 6 к § 2.3).

Если X — произвольное подмножество полугруппы S, то мы будем обозначать через $E(X)$ множество всех идемпотентов из X.

Лемма 8.38. *Если D есть $\mathcal{D}$-класс инверсной полугруппы S, то D является подполугруппой тогда и только тогда, когда $E(D)$ есть подполугруппа.*

Кроме того, если D — подполугруппа, то D является бипростой полугруппой.

Доказательство. Предположим, что $E(D)$ — подполугруппа. Пусть $a, b \in D$. Положим $bb^{-1} = g$ и $a^{-1}a = f$. Тогда по предположению $gf \in D$. Далее, $ag \in L_{gf}$. Следовательно, $ag(ag^{-1}) \in D$, т. е. $aga^{-1} = ab(ab)^{-1} \in D$, и поэтому $ab \in D$. Это показывает, что D — подполугруппа. Обратно, если D — подполугруппа, то, очевидно, $E(D)$ также является подполугруппой.

Наконец, пусть D — подполугруппа из S и $a, b \in D$. Предположим, что $a\mathcal{R}b$. Тогда $a(a^{-1}b) = b$ и $b(b^{-1}a) = a$, где $a^{-1}b$, $b^{-1}a \in D$. Таким образом, в D выполняется $a\mathcal{R}b$. Аналогично, если два элемента $\mathscr{L}$-эквивалентны в S и содержатся в D, то они $\mathscr{L}$-эквивалентны в полугруппе D. Следовательно, D — бипростая полугруппа.

Из этой леммы непосредственно вытекает

Следствие 8.39. *Если D есть $\mathscr{D}$-класс инверсной полугруппы S и R есть $\mathscr{R}$-класс из S, содержащийся в D, то D является подполугруппой тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in R$ существует такой $c \in R$, что $Sa \cap Sb = Sc$.*

Доказательство. Предположим, что D — подполугруппа из S. Пусть $a, b \in R$. Положим $a^{-1}a = f$, $b^{-1}b = g$. Тогда $Sa = Sf$, $Sb = Sg$ и $Sa \cap Sb = Sfg$ (лемма 1.19). По предположению $fg \in D$. Возьмем $c \in R \cap L_{fg}$. Тогда $Sfg = Sc$.

Обратно, пусть f, g — произвольные идемпотенты из D. Тогда существуют такие $a, b \in R$, что $a^{-1}a = f$ и $b^{-1}b = g$. Выберем $c \in R$, для которого $Sa \cap Sb = Sc$. Тогда $c^{-1}c = fg$ (лемма 1.19 и следствие 2.19). Значит, $fg \in D$. Требуемый результат следует теперь из предыдущей леммы.

Для $\mathscr{D}$-классов с единицей справедлива следующая лемма. Будет удобно через f_x обозначать правую единицу элемента x.

Лемма 8.40. *Пусть e — идемпотент инверсной полугруппы S, являющийся единицей для D_e. Обозначим R_e через R.*
Тогда
(i) *если $a \in R$, то $Sa \cap R = Ra$;*
(ii) *если a, b, $c \in R$ и $f_a f_b = f_c$, то $Ra \cap Rb = Rc$.*

Доказательство. (i) В силу лемм 8.36 и 8.37 R есть полугруппа с правым сокращением, единицей которой является e. Следовательно, $Ra \subseteq R \cap Sa$. Пусть $x \in R \cap Sa$. Тогда $x = sa$ $(s \in S)$ и $sa\,(sa)^{-1} = e$. Таким образом, $e = saa^{-1}s^{-1} = ses^{-1} = se\,(se)^{-1}$. Следовательно, se равно некоторому $r \in R$. Отсюда $x = sa = s\,(ea) = (se)\,a = ra \in Ra$ и поэтому $R \cap Sa \subseteq Ra$. Сопоставляя два включения, мы получаем, что $R \cap Sa = Ra$.

(ii) Пусть a, b, $c \in R$ и $f_a f_b = f_c$. Тогда $Sc = Sf_c = Sf_a \cap Sf_b = Sa \cap Sb$. Следовательно, в силу утверждения (i) $Rc = R \cap Sc = (R \cap Sa) \cap (R \cap Sb) = Ra \cap Rb$.

Лемма 8.41. *Пусть D есть $\mathscr{D}$-класс инверсной полугруппы S и D является подполугруппой с единицей e. Обозначим R_e через R.*

Тогда для любых a, $b \in R$ существует такой $c \in R$, что $Ra \cap Rb = Rc$, т. е., поскольку $Ra = a \cup Ra$, главные левые идеалы из R образуют полуструктуру относительно теоретико-множественного пересечения.

Доказательство. Если $a, b \in R$, то f_a, $f_b \in D$. Так как $D^2 \subseteq D$, то $f_a f_b \in D$. Следовательно, существует такой $c \in R$, что $f_c = f_a f_b$. Отсюда в силу леммы 8.40 вытекает равенство $Rc = Ra \cap Rb$.

В только что доказанной лемме D является бипростой полугруппой (лемма 8.38). Таким образом, сопоставляя предыдущие леммы, получаем доказательство большей части следующей теоремы.

Теорема 8.42. *Пусть S — бипростая инверсная полугруппа с единицей e. Обозначим R_e через R, а L_e — через L.*

Тогда R — полугруппа с правым сокращением, обладающая единицей, и главные левые идеалы из R образуют полуструктуру относительно теоретико-множественного пересечения.

Кроме того, $L = R^{-1}$ и $LR = S$. Каждый элемент из S может быть записан в виде $a^{-1}b$, где a, $b \in R$. Если a, b, c, $d \in R$, то $a^{-1}b = c^{-1}d$ тогда и только тогда, когда существует $u \in H_e$, для которого $a = uc$, $b = ud$.

Пусть $a^{-1}b$, $c^{-1}d$ — произвольные элементы из S $(a, b, c, d \in R)$ и $Rb \cap Rc = Rx$, где $x \in R$. Положим $p = xb^{-1}$, $q = xc^{-1}$. Тогда p, $q \in R$ и $bc^{-1} = p^{-1}q$. Следовательно, $(a^{-1}b)(c^{-1}d) = (pa)^{-1}(qd)$, где pa, $qd \in R$.

Доказательство. Остается лишь доказать утверждения последнего абзаца.

Пусть $Rb \cap Rc = Rx$, где b, c, $x \in R$. По лемме 8.40 $Sb \cap Sc \cap R = Sx \cap R$, т. е. $Sf_b f_c \cap R = Sx \cap R$. Далее, S бипроста и, следовательно, левый идеал $Sf_b f_c$ порождается некоторым $z \in R$. Тогда $f_z = f_b f_c$. Так как $z \in Sx$, мы имеем $f_z f_x = f_z$. Однако $x \in Sx \cap R$ и поэтому $x \in Sf_b f_c$. Таким образом, $f_x (f_b f_c) = f_x$, т. е. $f_x f_z = f_x$. Отсюда следует, что $f_b f_c = f_z = f_x$.

Поскольку $x \in Rx = Rb \cap Rc$, существуют p, $q \in R$, для которых $x = pb = qc$. Тогда $p = pe = pbb^{-1} = xb^{-1}$ и, аналогично, $q = xc^{-1}$. Далее, $p^{-1}q = bx^{-1}xc^{-1} = bf_x c^{-1} = bf_b f_c c^{-1} = bc^{-1}$, так как $f_x = f_b f_c$. Это завершает доказательство теоремы.

Следующее утверждение показывает, что S полностью определяется подполугруппой R.

Следствие 8.43. *Пусть S — бипростая инверсная полугруппа с единицей e. Обозначим R_e через R и H_e — через H.*

На множестве $R \times R$ определим отношение эквивалентности τ, полагая $(a, b)\,\tau\,(a', b')$ тогда и только тогда, когда $a = ua'$ и $b = ub'$ для некоторого $u \in H$.

Определим следующим образом произведение на фактормножестве $(R \times R)/\tau$:

$$(a, b)\,\tau\,(c, d)\,\tau = (pa, qd)\,\tau, \qquad (1)$$

где $Rb \cap Rc = Rx$ и $x = pb = qc$.

Тогда относительно этого произведения $(R \times R)/\tau$ превращается в полугруппу, изоморфную S.

Если R — произвольная полугруппа с единицей, множество главных левых идеалов которой замкнуто относительно теоретико-множественного пересечения, то, обозначая через H ее группу обратимых элементов, мы получаем, что отношение τ, определенное на $R \times R$ точно так же, как в следствии 8.43, является отношением эквивалентности. Однако если мы попытаемся определить произведение в $(R \times R)/\tau$ при помощи условия (1), то это произведение, вообще говоря, будет определено некорректно, т. е. будет зависеть от выбора представителей в τ-классах. Такая ситуация имеет место, например, в случае, когда R есть левая группа с присоединенной единицей, не являющаяся группой с присоединенной единицей. Если R — полугруппа с правым сокращением, то указанная конструкция всегда может быть осуществлена и в этом случае $(R \times R)/\tau$ является бипростой инверсной полугруппой с единицей, причем $\mathcal{R}$-класс, содержащий единицу, изоморфен R. Этот результат Клиффорда [1953] вытекает из только что приведенного следствия и такой теоремы:

Теорема 8.44. *Пусть R — полугруппа с правым сокращением и единицей* 1, *в которой пересечение любых двух главных левых идеалов является главным левым идеалом. Пусть $\Sigma = \Sigma(R)$ — инверсная оболочка полугруппы R.*

Тогда Σ есть бипростая инверсная полугруппа с единицей, $\mathcal{R}$-класс P которой, содержащий единицу, изоморфен R.

Доказательство. Пусть $\rho\colon a \to \rho_a$ $(a \in R)$ — регулярное правое представление полугруппы R. По определению Σ есть порожденная $R\rho$ инверсная подполугруппа в симметрической инверсной полугруппе $\mathcal{I}_R$. Положим $P = R\rho$. Тогда P содержит тождественное преобразование ι множества R. Очевидно, ι является единицей в Σ. Докажем, что P совпадает с $\mathcal{R}$-классом R_ι из Σ, содержащим ι.

Пусть $\xi \in \Sigma$ и $\xi\xi^{-1} = \iota$. Отсюда следует, что ξ отображает все множество R в R. В частности, элемент $1 \in R$ переводится в некоторый элемент $t \in R$. В силу утверждения (i) леммы 1.21 ξ является частичным правым сдвигом полугруппы R. Следовательно, поскольку областью определения ξ служит все R, для любого $r \in R$ выполняется $r\xi = (r1)\,\xi = r\,(1\xi) = rt$. Таким образом, $\xi = \rho_t$ и поэтому $\xi \in P$. Следовательно, $R_\iota \subseteq P$. Кроме того, из включения $\xi \in P$ непосредственно вытекает, что $\xi\xi^{-1} = \iota$. Итак, $P = R_\iota$.

Заметим, далее, что ρ есть точное представление, поскольку R содержит единицу. Следовательно, полугруппа P изоморфна R.

Осталось показать, что Σ — бипростая полугруппа. Так как P^{-1} является $\mathcal{L}$-классом из Σ, содержащим ι, для этого достаточно установить, что $P^{-1}P = \Sigma$ (теорема 2.4). Поскольку $\Sigma = \langle P \cup P^{-1}\rangle$, мы получим равенство $P^{-1}P = \Sigma$, если докажем, что для любых ξ, $\eta \in P$ элемент $\xi\eta^{-1}$ может быть записан в виде $\alpha^{-1}\beta$, где α, $\beta \in P$.

Так как полугруппа P изоморфна R, для любых ξ, $\eta \in P$ существует такое $\zeta \in P$, что $P\xi \cap P\eta = P\zeta$. Существуют такие a, b, $c \in R$, что $\xi = \rho_a$, $\eta = \rho_b$, $\zeta = \rho_c$. Тогда $\varepsilon_\xi = \xi^{-1}\xi$, $\varepsilon_\eta = \eta^{-1}\eta$ и $\varepsilon_\zeta = \zeta^{-1}\zeta$ являются соответственно тождественными преобразованиями множеств Ra, Rb и Rc. Следовательно, $\varepsilon_\xi\varepsilon_\eta$ является тождественным преобразованием множества $Ra \cap Rb$. Но $Ra \cap Rb = Rc$; это следует из того, что ρ является изоморфизмом R на P и $P\xi \cap P\eta = P\zeta$. Следовательно, $\varepsilon_\zeta = \varepsilon_\xi\varepsilon_\eta$.

Далее, $\zeta \in P\zeta = P\xi \cap P\eta$, поэтому существуют такие α, $\beta \in P$, что $\zeta = \alpha\xi = \beta\eta$. Тогда $\alpha = \alpha\xi\xi^{-1} = \zeta\xi^{-1}$ и $\beta = \beta\eta\eta^{-1} = \zeta\eta^{-1}$. Таким образом, $\alpha^{-1}\beta = \xi\zeta^{-1}\zeta\eta^{-1} = \xi\varepsilon_\zeta\eta^{-1} = \xi\varepsilon_\xi\varepsilon_\eta\eta^{-1} = \xi\eta^{-1}$. Это завершает доказательство теоремы.

Теорема 8.44 дает способ построения бипростых инверсных полугрупп Σ из более известных полугрупп R. Следствие 8.43 позволяет реализовать эту конструкцию на упорядоченных парах элементов из R. Если, например, R есть мультипликативная полугруппа положительных целых чисел, то $Rb \cap Rc = R\,(b \vee c)$, где через $b \vee c$ обозначено наименьшее общее кратное чисел b и c. В обозначениях следствия 8.43 τ совпадает здесь с отношением равенства на $R \times R$ и $R \times R$ превращается в бипростую инверсную полугруппу, если произведение задать следующим образом:

$$(a,\ b)\,(c,\ d) = \left(\frac{b \vee c}{b}\,a,\ \frac{b \vee c}{c}\,d\right).$$

Та же самая формула справедлива для случая, когда R является положительным конусом структурно упорядоченной абелевой группы и через $b \vee c$ обозначается объединение элементов b и c в соответствующей структуре. Например, если R — аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел, то $b \vee c$ равно $(b,\ c)$ и

$$(a,\ b)\,(c,\ d) = (a - b + \max\,(b,\ c),\ d - c + \max\,(b,\ c)).$$

В этом случае Σ является бициклической полугруппой (ср. упражнение 2 к § 1.12).

В заключение кратко упомянем о недавних работах Уорна [1964], [1965], [1966a], [1966b] и Рейли [1965], [1966], посвященных некоторым специальным классам бипростых инверсных полугрупп [1]).

---

[1]) Имеются и более поздние работы этих авторов, а также Рейли и Клиффорда, Манна, Б. П. Кочина о бипростых или близких к ним инверсных полугруппах. Обзор последних результатов зарубежных авторов в этой области содержится в статье Манна [1969] (см. также Б. П. Кочин [1968]).— *Прим. ред.*

В работе [1964] Уорн описывает гомоморфизмы одной бипростой инверсной полугруппы с единицей на другую такую же полугруппу. Здесь же он показывает (теорема 2.2), что если P — полугруппа с правым сокращением и с единицей, в которой отношение Грина $\mathscr{L}$ является конгруэнцией, то P есть шрейерово расширение ее группы обратимых элементов U при помощи $P/\mathscr{L}$. Последняя полугруппа есть полугруппа с правым сокращением и с единицей, группа обратимых элементов которой тривиальна. Этот результат обобщает теорему Риса [1948]. (Понятие шрейерова расширения было перенесено Редеи [1952] с групп на полугруппы, причем были получены аналоги теоретико-групповых результатов. Мы не будем останавливаться здесь на определении этого понятия; отметим лишь, что оно нам уже встречалось в упражнении 8 к § 4.3.) Кроме того, в P пересечение любых двух главных левых идеалов является главным левым идеалом (ср. теорему 8.42) тогда и только тогда, когда это условие выполняется для $P/\mathscr{L}$. В силу следствия 8.43 это утверждение легко можно превратить в следующую теорему: Если S — бипростая инверсная полугруппа с единицей и отношение Грина $\mathscr{H}$ на ней является конгруэнцией, то S есть шрейерово расширение своей группы обратимых элементов U при помощи $S/\mathscr{H}$, причем последняя полугруппа является бипростой инверсной полугруппой с единицей, группа обратимых элементов которой тривиальна.

В работе [1965] Уорн получил некоторые характеризации бипростой инверсной полугруппы S, полуструктура идемпотентов E_S которой линейно упорядочена. Каждый элемент такой полугруппы либо регулярен слева, либо регулярен справа (§ 4.1) и S есть объединение групп, подполугрупп с правым сокращением и подполугрупп с левым сокращением. Однако это еще полностью не выясняет строения таких полугрупп S. В работе [1966a] на E_S накладываются менее ограничительные условия.

Рейли [1966] (см. также [1965]) получил изящное описание строения всех бипростых инверсных полугрупп, для которых E_S линейно упорядочено по типу множества отрицательных целых чисел, т. е. $E_S = \{e_0, e_1, e_2, \ldots\}$ и $e_0 > e_1 > e_2 > \ldots$. Полугруппы S, для которых E_S имеет такое строение, названы ω-полугруппами. Пусть G — группа и α — ее эндоморфизм. Обозначим через $S = S(G, \alpha)$ множество всех троек $(m; g; n)$, где m и n — неотрицательные целые числа и $g \in G$. Определим произведение в S, полагая

$$(m; g; n)(p; h; q) = (m + p - r;\ g\alpha^{p-r} \cdot h\alpha^{n-r};\ n + q - r),$$

где $r = \min(p, q)$ и через α^0 обозначается тождественный автоморфизм группы G. Тогда S — бипростая инверсная ω-полугруппа. Обратно, каждая бипростая инверсная ω-полугруппа S имеет такое строение, где G есть группа ее обратимых элементов. Кроме того, в этом случае $\mathscr{H}$ является конгруэнцией на S и $S/\mathscr{H}$ изоморфна бициклической полугруппе.

В работе [1966b] Уорн показал, как теорема Рейли может быть выведена из его теоремы 2.2 в [1964].

Упражнения к § 8.4

1. Если S — простая инверсная полугруппа, то $|Ss| = |tS|$ для любых $s, t \in S$.

2. Пусть S — бипростая инверсная полугруппа с единицей e. Обозначим R_e через R. Если $a, b, c \in R$, то $Ra \cap Rb = Rc$ тогда и только тогда, когда $f_a f_b = f_c$ (где f_x — правая единица элемента x).

3. Если e и f — идемпотенты полугруппы S, то $e \in SfS$ тогда и только тогда, когда существует такой идемпотент $g \in S$, что $e\mathscr{D}g$ и $g \leqslant f$.

Следовательно, инверсная полугруппа S проста тогда и только тогда, когда для любых идемпотентов $e, f \in S$ существует такой идемпотент $g \in S$, что $e\mathscr{D}g$ и $g \leqslant f$.

4. Пусть S — бипростая инверсная полугруппа с единицей e. Обозначим R_e через R.

(a) Каждый идемпотент из S имеет вид $a^{-1}a$, где $a \in R$.

(b) Главные левые идеалы из R образуют полуструктуру относительно теоретико-множественного пересечения, которая изоморфна полуструктуре идемпотентов из S. (Клиффорд [1953].)

§ 8.5. *Любая полугруппа может быть вложена в простую полугруппу*

В этом параграфе мы докажем теорему Брака [1958] о том, что каждая полугруппа S может быть вложена в простую полугруппу $\mathscr{C}(S)$, обладающую единицей. Затем мы рассмотрим некоторые свойства, которые сохраняются при переходе от S^1 к $\mathscr{C}(S)$. Последние результаты являются новыми.

Теорема 8.45. *Любая полугруппа может быть вложена в простую полугруппу с единицей.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно рассмотреть полугруппу $S = S^1$ с единицей 1.

Пусть $\mathscr{C}(S)$ — полугруппа, порожденная $S \cup \{a, b\}$, где $a, b \notin S$, и заданная определяющими соотношениями $ab = 1$, $as = a$, $sb = b$ для всех $s \in S$ и соотношениями, выполняющимися в S. Полагая $a^0 = 1$, $b^0 = 1$, легко заметить, что элементы из $\mathscr{C}(S)$ можно представить в виде $b^i s a^j$ ($s \in S$, i, j — неотрицательные целые числа); кроме того, нетрудно установить, что $b^i s a^j = b^m t a^n$ тогда и только тогда, когда $i = m$, $s = t$ и $j = n$ (ср. упражнения 1 и 2 к настоящему параграфу для двух других конструкций полугруппы $\mathscr{C}(S)$).

Пусть $\alpha = b^i s a^j$ и $\beta = b^m t a^n$ — произвольные элементы из $\mathscr{C}(S)$. Тогда $\alpha = b^i s a^{m+1} \cdot \beta \cdot b^{n+1} 1 a^j$, так что $\mathscr{C}(S)$ — простая полугруппа; кроме того, 1 является единицей в $\mathscr{C}(S)$. Это завершает доказательство теоремы.

По-прежнему будем обозначать через $\mathscr{C}(S)$ полугруппу, построенную в доказательстве теоремы.

Рассмотрим частный случай, когда S является одноэлементной полугруппой. Тогда элементы из $\mathscr{C}(S)$ можно записать в виде $b^i 1 a^j = b^i a^0 a^j = b^i a^j$ (где i, j — неотрицательные целые числа), а определяющими соотношениями будут $ab = 1$, $a1 = a$, $1b = b$, $a^0 = 1$, $b^0 = 1$. Следовательно, $\mathscr{C}(S)$ является в этом случае бициклической полугруппой $\mathscr{C}$ (§ 1.12), т. е. $\mathscr{C}(\langle 1 \rangle) = \mathscr{C}$.

Если $S = S^1$ — произвольная полугруппа с единицей, то гомоморфизм S на $\langle 1 \rangle$ индуцирует следующий гомоморфизм $\mathscr{C}(S)$ на $\mathscr{C}$:

$$\varphi_1 \colon b^i s a^j \to b^i a^j \quad (s \in S).$$

Таким образом, каждую полугруппу $\mathscr{C}(S)$ можно рассматривать как расширение бициклической полугруппы $\mathscr{C}$.

Опишем теперь $\mathscr{L}$-классы [$\mathscr{R}$-классы, $\mathscr{D}$-классы] полугруппы $\mathscr{C}(S)$ на языке $\mathscr{L}$-классов [$\mathscr{R}$-классов, $\mathscr{D}$-классов] полугруппы S. Будет удобно через A и B обозначать следующие подполугруппы из $\mathscr{C}(S)$:

$$A = \{a^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\},$$
$$B = \{b^i \mid i = 0, 1, 2, \ldots\},$$

Лемма 8.46. (i) *Если $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ — семейство $\mathscr{L}$-классов из S, то $\{BL_\lambda a^n \mid \lambda \in \Lambda,\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ является семейством $\mathscr{L}$-классов из $\mathscr{C}(S)$.*

(ii) Если *$\{R_i \mid i \in I\}$ — семейство $\mathscr{R}$-классов из S, то $\{b^m R_i A \mid i \in I,\ m = 0, 1, 2, \ldots\}$ является семейством $\mathscr{R}$-классов из $\mathscr{C}(S)$.*

(iii) *Если $\{D_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ — семейство $\mathscr{D}$-классов из S, то $\{BD_\delta A \mid \delta \in \Delta\}$ является семейством $\mathscr{D}$-классов из $\mathscr{C}(S)$.*

Доказательство. (i) Элементы $b^i s a^j$ и $b^m t a^n$ являются $\mathscr{L}$-эквивалентными в $\mathscr{C}(S)$ тогда и только тогда, когда существуют такие $b^p x a^q$, $b^u y a^v \in \mathscr{C}(S)$, что

$$b^p x a^q b^i s a^j = b^m t a^n, \tag{1}$$
$$b^u y a^v b^m t a^n = b^i s a^j. \tag{2}$$

Имеется несколько возможностей. Выписывая их, мы получаем

$$b^p x a^q b^i s a^j = \begin{cases} b^p x a^{j+q-i}, & \text{если } q > i, \\ b^p x s a^j, & \text{если } q = i, \\ b^{p+i-q} s a^j, & \text{если } q < i, \end{cases}$$

и, аналогично,

$$b^u ya^v b^m ta^n = \begin{cases} b^u ya^{n+v-m}, & \text{если } v > m, \\ b^u yta^n, & \text{если } v = m, \\ b^{u+m-v} ta^n, & \text{если } v < m. \end{cases}$$

Предположим, что $q > i$. Тогда в силу равенства (1) $j + (q - i) = n$ и в силу равенства (2) $n \leqslant j$, что невозможно. Следовательно, $q \leqslant i$ и, аналогично, $v \leqslant m$. Отсюда получаем $j = n$.

Так как $q \leqslant i$, из равенства (1) вытекает либо $p = m$ и $xs = t$, либо $p + (i - q) = m$ и $s = t$. Так как $v \leqslant m$, из равенства (2) вытекает либо $u = i$ и $yt = s$, либо $u + (m - v) = i$ и $t = s$. Для любых неотрицательных целых чисел i, m мы можем найти неотрицательные целые числа p, q, u, v, которые удовлетворяют полученным условиям. Следовательно, мы показали, что $b^i sa^j$ и $b^m ta^n$ являются $\mathscr{L}$-эквивалентными в $\mathscr{C}(S)$ тогда и только тогда, когда $n = j$ и $s\mathscr{L}t$ в S.

(ii) Это утверждение двойственно утверждению (i).

(iii) Элементы $b^i sa^j$ и $b^m ta^n$ являются $\mathscr{D}$-эквивалентными в $\mathscr{C}(S)$ тогда и только тогда, когда существует такой $b^p xa^q$, что $b^i sa^j \mathscr{L} b^p xa^q \mathscr{R} b^m ta^n$. В силу утверждений (i), (ii) это верно тогда и только тогда, когда $j = q$, $p = m$ и $s\mathscr{L}x\mathscr{R}t$ в S. Следовательно, $b^i sa^j \mathscr{D} b^m ta^n$ в $\mathscr{C}(S)$ тогда и только тогда, когда $s\mathscr{D}t$ в S. Отсюда вытекает утверждение (iii).

Из теоремы непосредственно вытекает следующее утверждение (Престон [1959]).

Следствие 8.47. *$\mathscr{C}(S)$ бипроста тогда и только тогда, когда $S = S^1$ бипроста.*

В следующем параграфе мы укажем, каким образом произвольную полугруппу можно вложить в бипростую полугруппу.

Пусть $b^i sa^j$ и $b^m ta^n$ — два элемента из $\mathscr{C}(S)$, где $s, t \in S$. Тогда легко проверить, что

$$(b^i sa^j)(b^m ta^n)(b^i sa^j) = \begin{cases} b^i s^2 a^j, & \text{если } j > m,\ n + (j - m) = i, \\ b^i stsa^j, & \text{если } j = m,\ n = i; \end{cases}$$

и только в этих случаях произведение, стоящее слева, равно $b^i xa^j$ для некоторого $x \in S$. Отсюда следует, что элемент, инверсный к $b^i sa^j$ в $\mathscr{C}(S)$, равен $b^j ta^i$, где t инверсен к s в S. Кроме того, отсюда следует, что $b^i sa^j$ имеет единственный инверсный к нему элемент в $\mathscr{C}(S)$ тогда и только тогда, когда s имеет единственный инверсный к нему элемент в S. Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 8.48. *Пусть $S = S^1$. Полугруппа $\mathscr{C}(S)$ регулярна тогда и только тогда, когда S регулярна. Полугруппа $\mathscr{C}(S)$ инверсна тогда и только тогда, когда S инверсна.*

Поскольку полугруппа S регулярна [инверсна] тогда и только тогда, когда регулярна [инверсна] полугруппа S^1, справедливо такое

Следствие 8.49. *Любая регулярная [инверсная] полугруппа может быть вложена в простую регулярную [инверсную] полугруппу с единицей.*

* Шутов [1963] доказал, что любая инверсная полугруппа может быть вложена в инверсную полугруппу, не имеющую нетривиальных конгруэнций [1]). *

Следствие 8.50. *Существуют простые инверсные (и, следовательно, регулярные) полугруппы с произвольным числом $\mathscr{D}$-классов.*

Доказательство. Учитывая теорему 8.48 и утверждение (iii) леммы 8.46, достаточно отметить, что в инверсной полугруппе идемпотентов все $\mathscr{D}$-классы одноэлементны.

Упражнения к § 8.5

1. Пусть N — множество неотрицательных целых чисел. Обозначим через U декартово произведение $N \times S^1 \times N$, где S — некоторая полугруппа. Определим умножение в U, полагая

$$(m, s, n)(m', s', n') = (m + [m' - n],$$
$$f(n - m'; s, s'),\ n' + [n - m']),$$

где

$$[x] = x \text{ при } x \geqslant 0 \text{ и } [x] = 0 \text{ при } x < 0,$$

$$f(x; s, s') = \begin{cases} s, & \text{если } x > 0, \\ ss', & \text{если } x = 0, \\ s', & \text{если } x < 0. \end{cases}$$

Тогда U превращается в полугруппу, которая изоморфна полугруппе $\mathscr{C}(S)$, построенной в доказательстве теоремы 8.45. Для любого фиксированного неотрицательного целого числа n отображение $s \to (n, s, n)$ является изоморфизмом S в U. (Для доказательства ассоциативности операций в U нужно заметить, что

$$[x] + [y - [-x]] = [x + [y]]$$

и

$$f(x + [y]; f(y; s, s'), s'') = f(y - [-x]; s, f(x; s', s'')).)$$

(Брак [1958].)

---

[1]) В цитированной работе Э. Г. Шутова, а также в его статьях [1964] и [1965] и в работе Л. А. Бокутя [1963] содержится много других результатов о вложении полугрупп в простые полугруппы.— *Прим. ред.*

2. (a) Пусть T — полугруппа с единицей 1 и S — ее подполугруппа, содержащая 1. Пусть a и b — такие элементы из T, что (i) $T = \langle S \cup \{a, b\}\rangle$, (ii) $ab = 1$, (iii) $ba \notin S$, (iv) $as = a$ и $sb = b$ для всех $s \in S$. Тогда каждый элемент из T однозначно представим в виде $b^i s a^j$, где $s \in S$ и i, j — неотрицательные целые числа.

(b) Пусть S — произвольная полугруппа и M — множество, не пересекающееся с S^1, причем $|M \cup S^1| = |M|$. Положим $X = M \cup S^1$. Пусть α — некоторое взаимно однозначное отображение X на M. Обозначим через β отображение X на X, которое определяется следующим образом: ограничение $\beta \mid M$ совпадает с α^{-1} и $s\beta = 1$ для всех $s \in S^1$. Для каждого $s \in S^1$ определим следующим образом преобразование τ_s множества X:

$$x\tau_s = \begin{cases} xs, & \text{если } x \in S^1, \\ x, & \text{если } x \in M. \end{cases}$$

Обозначим через T подполугруппу из $\mathscr{T}_X$, порожденную множеством $\Sigma \cup \{\alpha, \beta\}$, где $\Sigma = \{\tau_s \mid s \in S^1\}$. Тогда выполняются условия (i) — (iv) пункта (a), где роли S, a, b играют соответственно Σ, α, β. Кроме того, $\Sigma \cong S$ и $T \cong \mathscr{C}(S)$.

3. Пусть φ: $S \to T$ — гомоморфизм полугруппы $S = S^1$ на $T = T^1$. Тогда

$$\varphi^*: b^i s a^j \to b^j (s\varphi) a^j \quad (s \in S)$$

является гомоморфизмом $\mathscr{C}(S)$ на $\mathscr{C}(T)$.

4. Пусть e — идемпотент полугруппы $S = S^1$. Тогда в обозначениях, приведенных перед леммой 8.46, BeA есть подполугруппа полугруппы $\mathscr{C}(S)$, изоморфная $\mathscr{C}$.

5. Идемпотенты из $\mathscr{C}(S)$ имеют вид $b^m e a^m$, где e — идемпотент из $S = S^1$.

6. Идемпотенты полугруппы $\mathscr{C}(S)$ коммутируют тогда и только тогда, когда коммутируют идемпотенты из $S = S^1$.

§ 8.6. *Любая полугруппа может быть вложена в бипростую полугруппу с единицей*

Мы начнем с построения одного класса бипростых полугрупп с единицей, открытого Шютценберже (см. Престон [1959]).

Пусть A — некоторое бесконечное множество. Обозначим через $\mathscr{M}(A)$ множество всех таких отображений ξ множества A в себя, что (i) $|A\xi| = |A|$ и (ii) $|b\xi^{-1}| < |A|$ для любого $b \in A\xi$. Здесь через $b\xi^{-1}$ обозначено множество всех элементов из A, которые ξ переводит в b. Следующая теорема Престона [1962] дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы $\mathscr{M}(A)$ являлось полугруппой. На нее можно также смотреть как на характеризацию регулярных кардинальных чисел. Мощность $|A|$ множества A называется *регулярным кардинальным числом*, если не существует разбиения $\{A_i \mid i \in I\}$ множества A, такого, что $|I| < |A|$ и $|A_i| < |A|$ для любого $i \in I$. Для заданного кардинального числа p всегда существует регулярное кардинальное число q, такое, что $q > p$ (см. Бахман [1955, гл. 7] [1])).

Теорема 8.51. *Если A — бесконечное множество, то $\mathscr{M}(A)$ является полугруппой относительно суперпозиции тогда и только тогда, когда $|A|$ есть регулярное кардинальное число.*

Доказательство. Предположим сначала, что $|A|$ — регулярное кардинальное число. Пусть $\xi, \eta \in \mathscr{M}(A)$. Тогда $|A(\xi\eta)| = |A\xi| = |A|$. В самом деле, предположим, что $|B| < |A|$, где $B = A\xi\eta$. Имеем $A\xi = B\eta^{-1} \cap A\xi = \bigcup\{b\eta^{-1} \cap \cap A\xi \mid b \in B\}$ и, поскольку $\eta \in \mathscr{M}(A)$, для каждого $b \in B$ выполняется неравенство $|b\eta^{-1} \cap A\xi| < |A|$. Но это вместе с условиями $|A\xi| = |A|$ и $|B| < |A|$ противоречит регулярности $|A|$. Итак, $|B| = |A|$. Далее, $b(\xi\eta)^{-1} = (b\eta^{-1})\xi^{-1}$ для каждого $b \in B$. Положим $b\eta^{-1} = C$, так что $|C| < |A|$. Тогда $b(\xi\eta)^{-1} = \bigcup\{c\xi^{-1} \mid c \in C\}$ и, поскольку $|c\xi^{-1}| < |A|$, в силу регулярности $|A|$ получаем $|b(\xi\eta)^{-1}| < |A|$. Таким образом, $\xi\eta$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) из определения $\mathscr{M}(A)$, т. е. $\xi\eta \in \in \mathscr{M}(A)$, так что $\mathscr{M}(A)$ — полугруппа.

Обратно, предположим, что $|A|$ не регулярно. Тогда существует такое семейство попарно не пересекающихся подмножеств $\{B_i \mid i \in I\}$ из A, что $|B_i| < |A|$ и $|I| < |A|$, в то время как $|B| = |A|$, где $B = \bigcup\{B_i \mid i \in I\}$; кроме того, мы можем предположить, что $|A \setminus B| = |A|$. Тогда существует некоторый элемент $\xi \in \mathscr{M}(A)$, который отображает $A \setminus B$ на B (например, взаимно однозначно) и который для каждого $i \in I$ переводит множество B_i в один элемент из B_i. Тогда $\xi^2 \notin \mathscr{M}(A)$. В самом деле, $A\xi^2 = B\xi$ и $|B\xi| = |I| < |A|$. Таким образом, если $\mathscr{M}(A)$ является полугруппой, то $|A|$ регулярно. Это завершает доказательство теоремы.

Далее мы будем предполагать, что $|A|$ регулярно. Покажем, что $\mathscr{M}(A)$ есть бипростая полугруппа (с единицей, которой является тождественное преобразование множества A). Нам понадобятся две предварительные леммы.

Лемма 8.52. *Если $\xi, \eta \in \mathscr{M}(A)$, то $\xi\mathscr{L}\eta$ тогда и только тогда, когда $A\xi = A\eta$.*

Лемма 8.53. *Если $\xi, \eta \in \mathscr{M}(A)$, то $\xi\mathscr{R}\eta$ тогда и только тогда, когда $\xi \circ \xi^{-1} = \eta \circ \eta^{-1}$.*

---

[1]) См. также П. С. Александров [1948].— *Прим. ред.*

Эти леммы являются просто переформулировками для $\mathcal{M}(A)$ лемм 2.5 и 2.6, касающихся полугруппы $\mathcal{T}_A$. Сохраняются и соответствующие доказательства.

Теперь мы можем легко показать, что если $|A|$ — бесконечное регулярное кардинальное число, то $\mathcal{M}(A)$ является бипростой полугруппой. Пусть $\xi, \eta \in \mathcal{M}(A)$. Будем искать отображение $\alpha \in \mathcal{M}(A)$, для которого $\xi \mathcal{L} \alpha \mathcal{R} \eta$. Обозначим через ρ отношение эквивалентности $\eta \circ \eta^{-1}$. Тогда $|A/\rho| = |A\eta| = |A| = |A\xi|$. Пусть θ — произвольное взаимно однозначное отображение A/ρ на $A\xi$ и α — отображение множества A в себя, которое переводит элементы каждого данного ρ-класса в элемент, являющийся образом этого ρ-класса при отображении θ. Тогда $\alpha \circ \alpha^{-1} = \eta \circ \eta^{-1}$ и $A\alpha = A\xi$. Далее, из равенства $\alpha \circ \alpha^{-1} = \rho$ вытекает, что $|A\alpha| = |A/\rho| = |A|$ и для каждого $a \in A\alpha$ множество $a\alpha^{-1}$ является ρ-классом и поэтому его мощность меньше $|A|$. Таким образом, $\alpha \in \mathcal{M}(A)$. Следовательно, на основании лемм 8.52 и 8.53 $\xi \mathcal{L} \alpha \mathcal{R} \eta$, т. е. полугруппа $\mathcal{M}(A)$ бипроста. Мы доказали следующую теорему, принадлежащую Шютценберже (сообщено в письме одному из авторов).

Теорема 8.54. *Если A — бесконечное множество, для которого $|A|$ регулярно, то $\mathcal{M}(A)$ является бипростой полугруппой с единицей.*

Отсюда, используя доказательство, предложенное Шютценберже, мы выводим следующую теорему (Престон [1959]). В указанной статье содержится конструктивное доказательство, которое не опирается на теорему 8.54.

Теорема 8.55. *Каждая полугруппа может быть вложена в (обязательно регулярную) бипростую полугруппу с единицей.*

Доказательство. Пусть S — произвольная полугруппа. Возьмем множество A, содержащее S и такое, что $|A|$ является бесконечным регулярным кардинальным числом, большим $|S|$. Пусть a_0 — произвольный (фиксированный) элемент из $A \setminus S$. Для каждого $s \in S$ определим отображение ρ_s множества A в себя, полагая

$$x\rho_s = \begin{cases} xs, & \text{если } x \in S, \\ s, & \text{если } x = a_0, \\ x, & \text{если } x \in A \setminus \{S \cup a_0\}. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\rho_s \in \mathcal{M}(A)$. Кроме того, отображение $s \to \rho_s$ есть изоморфизм S в $\mathcal{M}(A)$ (ср. с расширенным регулярным правым представлением полугруппы S). Это в силу теоремы 8.54 завершает доказательство теоремы.

В приведенной конструкции данная полугруппа вкладывается в полугруппу, мощность которой больше мощности исходной полугруппы. В действительности, если $|S|$ — бесконечное кардинальное число, то S может быть вложена в бипростую полугруппу той же мощности. Докажем это.

Заметим, что полугруппа T с единицей бипроста тогда и только тогда, когда для любых $a, b \in T$ существуют такие $s, t, u, v \in T$, что $as = ub$, $ast = a$ и $vub = b$. Пусть теперь M — произвольная бипростая полугруппа с единицей, в которую вкладывается полугруппа S. Присоединяя единицу полугруппы M к S, получим подполугруппу S^1 из M. Поскольку M является бипростой полугруппой с единицей, для каждой пары элементов $a, b \in S^1$ существуют такие $s, t, u, v \in \mathcal{M}$, что $as = ub$, $ast = a$ и $vub = b$. Для каждой пары элементов $a, b \in S^1$ выберем некоторые элементы s, t, u, v с указанным свойством и обозначим множество всех выбранных таким образом элементов из M через P. Пусть $S(1)$ — подполугруппа из M, порожденная множеством $P \cup S^1$. Построим, далее, $S(2)$, исходя из $S(1)$, точно так же, как мы строили $S(1)$, исходя из S^1. Аналогично мы построим $S(n+1)$, исходя из $S(n)$, для любого целого числа $n \geqslant 1$. Положим $T = \bigcup_{n=1}^{\infty} S(n)$.

Тогда T, очевидно, содержит единицу полугруппы M. Кроме того, для любых $a, b \in T$ существует такое целое число n, что $a, b \in S(n)$, поэтому существуют $s, t, u, v \in S(n+1) \subseteq T$, для которых $as = ub$, $ast = a$ и $vub = b$. Таким образом, полугруппа T бипроста. Легко установить, что если $|S|$ бесконечно, то $|S| = |T|$, и, если $|S|$ конечно, то $|T|$ не более чем счетно. Мы доказали

Следствие 8.56. *Каждая полугруппа S может быть вложена в бипростую полугруппу T с единицей, причем $|T| = |S|$, если $|S|$ бесконечно, и $|T|$ не более чем счетно, если $|S|$ конечно.*

Рейли [1965] установил, что утверждение следствия 8.56 остается справедливым, если всюду мы заменим слово «полугруппа» на слова «инверсная полугруппа».

Глава 9

КОНЕЧНО ОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПОЛУГРУППЫ И СВОБОДНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ С АМАЛЬГАМОЙ

В этой главе мы рассмотрим некоторые теоретико-полугрупповые конструкции. Каждая из них будет задаваться либо явным указанием закона перемножения, либо описанием некоторой конгруэнции. В § 9.1 собраны предварительные результаты о свободных полугруппах. Самостоятельный интерес представляют характеризация свободных полугрупп, данная в теореме 9.6, принадлежащей Леви [1944] и Дюбрей-Жакотэн [1947], а также характеризация свободных подполугрупп свободной полугруппы, принадлежащая Шютценберже [1955], и результат Эванса [1952] о том, что каждая счетная полугруппа может быть вложена в полугруппу с двумя образующими.

§ 9.2 посвящен доказательству того, что если полугруппа конечно определена (в том смысле, что она задана конечным числом образующих и конечным числом определяющих соотношений) относительно одного порождающего множества, то она также конечно определена относительно любого другого конечного порождающего множества. Таким образом, понятие конечно определенной полугруппы не зависит от выбора конечного порождающего множества.

§ 9.2 служит также введением к § 9.3, в котором приводятся результаты Редеи [1963], посвященные описанию конгруэнций на конечно порожденной свободной коммутативной полугруппе F. Редеи доказывает вначале, что с каждой конгруэнцией ассоциируется единственная *конгруэнц-пара* (M, f), где M — подгруппа свободной абелевой группы, порожденной полугруппой F, а f — некоторое специальным образом заданное отображение M в множество идеалов из F (теорема 9.17). Эта характеризация играет основную роль в доказательстве следующего результата (теорема 9.28): любая конечно порожденная коммутативная полугруппа является конечно определенной (Редеи [1963]).

Пусть S и T — две полугруппы с такой общей подполугруппой U, что $S \cap T = U$. Когда существует полугруппа, в которую могут быть вложены S и T с сохранением пересечения $S \cap T = U$? Как было показано Кимурой [1957], такое вложение не всегда возможно. Хауи провел систематическое исследование этой проблемы, и § 9.4 посвящен изложению его результатов. Основной результат Хауи (теорема 9.44) дает достаточные условия, обеспечивающие возможность такого вложения (Хауи [1962]). Приложения этого результата показывают, в какой степени сохраняются различные свойства полугрупп S, T и U по отношению друг к другу (Хауи [1963a, b, c] и [1964a, b]).

Заметим, что основным инструментом здесь является свободное произведение некоторого множества полугрупп $\{S_i \mid i \in I\}$. В случае когда каждая полугруппа S_i есть группа, свободное произведение полугрупп не совпадает с обычным теоретико-групповым свободным произведением. В нашей терминологии теоретико-групповое свободное произведение групп G_i $(i \in I)$ совпадает со свободным (полугрупповым) произведением полугрупп G_i с объединенной единицей.

В последнем параграфе этой главы приводятся различные конструкции конгруэнции с сокращениями, порожденной данным отношением. Сначала приводится конструкция, которую можно считать аналогом конструкции, задающей конгруэнцию посредством элементарных переходов. Затем приводится остроумный и хорошо известный метод построения конгруэнций с сокращениями при помощи введения формальных левых и правых обратных элементов. Мы не знаем, кто изобрел этот метод. Наконец, в теореме 9.54, принадлежащей Круазо [1954], рассматриваются так называемые канонические формы.

§ 9.1. Свободные полугруппы

Понятие свободной полугруппы $\mathscr{F}_X$ на множестве X было введено в § 1.12. $\mathscr{F}_X$ состоит из всех конечных непустых слов в алфавите X, а произведение в ней есть приписывание слов. В полугруппе $\mathscr{F}_X^1$ единицу можно считать «пустым словом». Если φ — изоморфизм полугруппы $\mathscr{F}_X$ на S, то S также будем называть свободной полугруппой (на множестве $X\varphi$).

Дадим теперь некоторые альтернативные характеризации свободных полугрупп и, в частности, получим необходимые и достаточные условия того, чтобы подполугруппа свободной полугруппы была свободной. Результаты, которые мы приводим, принадлежат Леви [1944; 1946], Дюбрей-Жакотэн [1947] и Шютценберже [1955/6].

Теорема 9.1. *Полугруппа S является свободной полугруппой на множестве $X \subseteq S$ тогда и только тогда, когда каждый элемент из S может быть однозначно представлен в виде произведения элементов из X.*

Доказательство. Если $S = \mathscr{F}_X$, то в силу определения свободной полугруппы каждый элемент из S однозначно представим в виде произведения элементов из X.

Обратно, предположим, что каждый элемент полугруппы S может быть однозначно представлен как произведение элементов ее подмножества X. На основании леммы 1.28 тождественное отображение множества X в S может быть продолжено до гомоморфизма φ полугруппы $\mathscr{F}_X$ на S. Тот факт, что φ взаимно однозначно и, следовательно, есть изоморфизм, является по существу точной формулировкой того, что мы понимаем под однозначностью представления элементов из S в качестве произведения элементов из X.

Если S — свободная полугруппа на X, то под *длиной* элемента $w = x_1 x_2 \ldots x_n$ $(x_i \in X)$ из S мы понимаем число n элементов из X, участвующих в записи w в виде произведения элементов из X.

Следствие 9.2. *Если S — свободная полугруппа на X, то $X = S \setminus S^2$.*

Следствие 9.3. *Пусть S и T — свободные полугруппы соответственно на множествах X и на Y и φ — изоморфизм S на T. Тогда $X\varphi = Y$.*

Доказательство. По предыдущему следствию $X = S \setminus S^2$ и $Y = T \setminus T^2$. Очевидно, однако, $S^2\varphi = S\varphi \cdot S\varphi \subseteq T^2$ и поэтому $X\varphi = T \setminus S^2\varphi \supseteq Y$. По соображениям симметрии $X\varphi = Y$.

Следующая теорема дает важную характеризацию свободных полугрупп. Заметим, что если S свободна на $M\mu$, то в силу леммы 1.28 гомоморфизм φ однозначно определяется при помощи μ и ν.

Теорема 9.4. *Пусть M — множество и μ: $M \to S$ — взаимно однозначное отображение M на порождающее множество полугруппы S. Тогда S является свободной полугруппой на $M\mu$ в том и только в том случае, когда для произвольной полугруппы T и отображения ν: $M \to T$ существует такой гомоморфизм φ: $S \to T$, что $\mu\varphi = \nu$.*

Доказательство. Предположим, что S есть свободная полугруппа на $M\mu$. Так как μ взаимно однозначно, отображение ν: $M \to T$ определяет отображение $\mu^{-1}\nu$ множества $M\mu$ в полугруппу T. На основании леммы 1.28 $\mu^{-1}\nu$ можно продолжить (однозначно) до некоторого гомоморфизма φ: $S \to T$. Тогда $\mu\varphi = \nu$.

Обратно, предположим, что каждое отображение множества $M\mu$ в полугруппу T можно продолжить до гомоморфизма S в T. Возьмем в качестве T свободную полугруппу $\mathscr{F}_X$ на множестве $X = M\mu$ и выберем ν: $M \to \mathscr{F}_X$ таким образом, чтобы $\mu^{-1}\nu$ совпадало с тождественным отображением X в $\mathscr{F}_X$. Тогда ν также является взаимно однозначным отображением и по лемме 1.28 отображение $\nu^{-1}\mu$: $X \to S$ можно продолжить до гомоморфизма полугруппы $\mathscr{F}_X$ в S. Следовательно, существуют гомоморфизмы φ: $S \to \mathscr{F}_X$ и ψ: $\mathscr{F}_X \to S$, являющиеся продолжениями тождественного отображения множества X на себя, так что ограничения отображений $\varphi\psi$: $S \to S$ и $\psi\varphi$: $\mathscr{F}_X \to \mathscr{F}_X$ на X совпадают с тождественным отображением X на себя. Ввиду того что X порождает как S, так и $\mathscr{F}_X$, отображения $\varphi\psi$ и $\psi\varphi$ являются тождественными на S и на $\mathscr{F}_X$ соответственно. Следовательно, S и $\mathscr{F}_X$ изоморфны. Таким образом, S есть свободная полугруппа на $X\psi$, т. е. на $X = M\mu$.

Следствие 9.5. *Пусть S — произвольная полугруппа, M — ее порождающее множество и X — произвольное множество, для которого $|X| \geqslant |M|$. Тогда существует такая конгруэнция ρ на $\mathscr{F}_X$, что $\mathscr{F}_X/\rho \cong S$.*

Доказательство. Так как $|X| \geqslant |M|$, существует некоторое отображение ν множества X на M. Так как ν является тогда отображением X в S, из теоремы (или леммы 1.28) вытекает существование гомоморфизма φ: $\mathscr{F}_X \to S$, который продолжает ν. В силу того что ν отображает X на порождающее множество полугруппы S, отображение φ является гомоморфизмом полугруппы $\mathscr{F}_X$ на S. Взяв $\rho = \varphi \circ \varphi^{-1}$, мы получим, что $\mathscr{F}_X/\rho \cong S$.

Пусть a, b, c — элементы некоторой полугруппы и $a = bc$. Тогда говорят, что b и c — *делители* элемента a, причем b — его *левый*, а c — *правый делитель*.

Следующая теорема принадлежит Леви и Дюбрей-Жакотэн.

Теорема 9.6. *Полугруппа S свободна тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

(1) *в S выполняются левый и правый законы сокращения;*

(2) *S не содержит двусторонней единицы;*

(3) *если $ax = by$ для a, b, x, $y \in S$, то $a = b$ или один из элементов a, b является левым делителем другого;*

(4) *каждый элемент из S имеет конечное число левых делителей.*

Доказательство. Необходимость условий легко проверить, опираясь на теорему 9.1.

Предположим, что выполняются условия теоремы. Через X обозначим множество $S \setminus S^2$, т. е. множество элементов из S, не имеющих делителей. Будем доказывать, что X свободно порождает S.

Прежде всего X не пусто и порождает S. В самом деле, пусть a — произвольный элемент из S. Если a не имеет делителей, то $a \in X$. В противном случае $a = bc$, где $b, c \in X$, или $a = xyz$, и т. д. Либо этот процесс заканчивается и мы получаем выражение a в виде произведения элементов из X, либо для любого сколь угодно большого n существуют такие $a_1, a_2, \ldots, a_n \in S$, что $a = a_1a_2 \ldots a_n$. Если $a = a_1a_2 \ldots a_n$, то a_1, a_1a_2, ..., $a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ являются левыми делителями элемента a. Они все различны, потому что если $x = xy$ в S, то $xy = xy^2$, и, сокращая слева (условие (1)), получаем $y = y^2$. Но произвольный идемпотент в полугруппе с сокращениями должен быть единицей (см. упражнение 1 (b) к § 1.1). Следовательно, в силу условия (2) в полугруппе S нет идемпотентов. Таким образом, a_1, a_1a_2, ..., $a_1a_2 \ldots a_{n-1}$ — различные левые делители элемента a. Но n можно выбрать сколько угодно большим, что противоречит условию (4). Итак, множество X порождает S.

Предположим, что $x_1x_2x_3 \ldots x_r = x'_1x'_2x'_3 \ldots x'_s$, где x_i, x'_j принадлежат X. Пусть $x_2 \ldots x_r = x$ и $x'_2 \ldots x'_s = x'$. Тогда $x_1x = x'_1x'$. Следовательно, в силу условия (3) $x_1 = x'_1$ или один из элементов x_1, x'_1 имеет делители. Последняя возможность исключается по определению X. Таким образом, $x_1 = x'_1$ и в силу условия (1) $x = x'$. Теперь аналогично получаем $x_2 = x'_2$, и, продолжая этот процесс шаг за шагом, мы, наконец, получим $r = s$ и $x_i = x'_i$ для $i = 1, 2, \ldots, r$. Таким образом, каждый элемент из S может быть однозначно представлен в виде произведения элементов из X. Следовательно, на основании теоремы 9.1 S есть свободная полугруппа на X.

Замечание. Заключение теоремы не изменится, если условия (3) и (4) заменить на двойственные.

Так как условия (1), (2) и (4) автоматически выполняются для подполугруппы свободной полугруппы, мы получаем

Следствие 9.7. *Подполугруппа T свободной полугруппы тогда и только тогда сама является свободной полугруппой, когда из равенства $ax = by$ $(a, b, x, y \in T)$ вытекает, что либо $a = b$, либо один из элементов a, b является левым делителем другого в T.*

Этому следствию, как и теореме, недостает симметричности. Симметричную характеризацию свободных подполугрупп свободной полугруппы дает следующий полезный результат, принадлежащий Шютценберже [1955/6] [1]).

Следствие 9.8. *Подполугруппа T свободной полугруппы S тогда и только тогда является свободной полугруппой, когда для любого $w \in S$ из условия $Tw \cap T \neq \varnothing$ и $wT \cap T \neq \varnothing$ вытекает, что $w \in T$.*

Доказательство. Предположим, что T есть свободная полугруппа, и пусть aw и wb принадлежат T для некоторых $a, b \in T$ и $w \in S$. Тогда $a(wb) = (aw)b \in T$ и поэтому на основании предыдущего следствия либо $a = aw$, либо $a = (aw)u$, либо

---

1) Он независимо получен также Л. Н. Шевриным [1960], см. также Кон [1962].— *Прим. ред.*

$av = aw$, где $u, v \in T$. Так как эти равенства выполняются в свободной полугруппе S, отсюда вытекает (теорема 9.1), что $av = aw$, т. е. $v = w$. Таким образом, $w \in T$ и мы доказали необходимость условия следствия.

Обратно, предположим, что для любого $w \in S$ из условия $Tw \cap T \neq \varnothing$ и $wT \cap T \neq \varnothing$ вытекает, что $w \in T$. Пусть $ax = by$ для некоторых $a, b, x, y \in T$. Так как $a, b, x, y \in S$, то либо $a = b$, либо $a = bu$, либо $b = av$, где $u, v \in S$. Предположим, что $a = bu$. Тогда $ax = bux = by$ и, сокращая слева, получаем $ux = y \in T$. Следовательно, $ux \in uT \cap T$ и $bu \in Tu \cap T$. Отсюда в силу предположения вытекает, что $u \in T$. Аналогично, если $b = av$, то $v \in T$. В силу предыдущего следствия T является свободной полугруппой.

В качестве приложения рассмотрим свободную полугруппу A с двумя образующими: $A = \mathcal{F}_X$, где $X = \{x, y\}$. Положим $a_i = yx^iy$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть B — подполугруппа из A, порожденная всеми a_i. Тогда элемент из A принадлежит B в том и только в том случае, когда он может быть представлен в виде $yx^iy^2x^jy^2 \ldots \ldots y^2x^ky$, где $i > 0$, $j > 0$, $\ldots$, $k > 0$. Следовательно, если $u \in B$ и $wu \in B$, то $w \in B$, и если $v \in B$ и $vw \in B$, то $w \in B$. Тогда в силу следствия 9.8 B является свободной полугруппой. (Это видно и непосредственно: применяя теорему 9.1, легко усмотреть, что B является свободной полугруппой на множестве $\{a_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$.) Легко видеть, что множество $\{a_i \mid i = 1, 2, \ldots\}$ есть минимальное порождающее множество полугруппы B.

Этот пример был использован Эвансом [1952] для доказательства того, что любая счетная полугруппа может быть вложена в полугруппу с двумя образующими. Приведем теперь доказательство Эванса указанного результата.

Прежде всего сформулируем следующую лемму.

Лемма 9.9. *Пусть T — подполугруппа полугруппы S, τ — конгруэнция на T и σ — конгруэнция на S. Факторполугруппа T/τ вкладывается естественным образом (отображением $t\tau \to t\sigma$ $(t \in T)$) в S/σ тогда и только тогда, когда $\tau = \sigma \cap (T \times T)$.*

Доказательство. Предположим, что отображение $t\tau \to t\sigma$ вкладывает T/τ в S/σ. Тогда включение $(t_1, t_2) \in \tau$ равносильно тому, что $t_1, t_2 \in T$ и $t_1\sigma = t_2\sigma$, т. е. $(t_1, t_2) \in \sigma \cap (T \times T)$. Таким образом, $\tau = \sigma \cap (T \times T)$.

Обратно, предположим, что $\sigma \cap (T \times T) = \tau$. В частности, тогда $\tau \subseteq \sigma$ и поэтому $t_1\tau = t_2\tau$ влечет за собой $t_1\sigma = t_2\sigma$. Таким образом, $t\tau \to t\sigma$ является отображением полугруппы T/τ в T/σ. Далее, легко проверить, что это отображение является гомоморфизмом.

Предположим, что $t_1\sigma = t_2\sigma$, где $t_1, t_2 \in T$. Тогда $(t_1, t_2) \in \sigma \cap (T \times T) = \tau$. Таким образом, $t_1\tau = t_2\tau$. Следовательно, отображение $t\tau \to t\sigma$ взаимно однозначно. Это заканчивает доказательство леммы.

Рассмотрим снова полугруппу A, свободно порожденную множеством $\{x, y\}$ и содержащую свободную подполугруппу B на множестве $\{a_i = yx^iy \mid i = 1, 2, \ldots\} = Y$. Пусть S — произвольная счетная полугруппа. Выберем в S порождающее множество M (оно в силу счетности S не более чем счетно). Так как $|Y| \geqslant |M|$, на основании следствия 9.5 существует такая конгруэнция β на B, что $B/\beta \cong S$. Пусть α — конгруэнция на A, порожденная β.

Предположим, что $(w_1, w_2) \in \alpha \cap (B \times B)$. Так как β порождает α, элемент w_2 получается из w_1 конечной последовательностью элементарных β-переходов в A (§ 1.5, стр. 38). Мы хотим доказать, что $(w_1, w_2) \in \beta$. Для этого достаточно установить, что $(w_1, w_2) \in \beta$, если w_2 $(w_2 \in A)$ получается из w_1 $(w_1 \in B)$ одним элементарным β-переходом. Для этой цели предположим, что $w_1 = upv$ и $w_2 = uqv$, где $u, v \in A^1$ и $(p, q) \in \beta$. Тогда $w_1 \in B$, $p \in B$ и $w_1 = upv$. Вспоминая, что элемент из A принадлежит B тогда и только тогда, когда он имеет вид $yx^iy^2x^jy^2 \ldots y^2x^ky$, получаем $u, v \in B^1$. Следовательно, так как β является конгруэнцией на B, имеем $(w_1, w_2) \in \beta$.

Таким образом, в силу доказанного, а также в силу очевидного включения $\beta \subseteq \alpha \cap (B \times B)$ выполняется равенство $\beta = \alpha \cap (B \times B)$. Теперь из леммы 9.9 следует, что B/β естественно вкладывается в A/α. Так как полугруппа S изоморфна B/β, она также вкладывается в A/α. В силу того что A порождается множеством $\{x, y\}$, полугруппа A/α порождается множеством $\{x\alpha, y\alpha\}$. Следовательно, мы доказали теорему Эванса.

Теорема 9.10. *Любая счетная полугруппа может быть вложена в полугруппу с двумя образующими.*

Другой подход к этому результату содержится в статье Б. Неймана [1960]. Аналогично соответствующему теоретико-групповому понятию, Нейман следующим образом определяет сплетение двух полугрупп.

Пусть A и B — полугруппы и φ: $b \to b\varphi$ есть антипредставление полугруппы B в полугруппу эндоморфизмов полугруппы A. Тогда $A \times B$ становится полугруппой, если следующим образом определить произведение:

$$(a, b)(a', b') = (a(a'(b\varphi)), bb').$$

Далее, пусть S — полугруппа и Y — непустое множество. Обозначим через S^Y полугруппу всех отображений множества Y в S относительно операции (покомпонентного умножения), определенной следующим образом:

$$y(fg) = (yf)(yg) \text{ для } y \in Y \text{ и } f, g \in S^Y.$$

Пусть T есть (или имеет точное представление как) подполугруппа из $\mathcal{T}_Y$. Тогда φ: $t \to t\varphi$ $(t \in T)$ является антипредставлением T в полугруппу эндоморфизмов полугруппы S^Y, если мы определим $t\varphi$, полагая

$$y\,(f\,(t\varphi)) = (yt)\,f \text{ для } y \in Y \text{ и } f \in S^Y.$$

Здесь yt есть образ элемента y относительно t.

Взяв в предыдущей конструкции S^Y и T в качестве A и B, мы получим полугруппу $A \times B$, которая называется *сплетением* полугрупп S и T.

Теперь мы можем привести набросок доказательства Неймана теоремы Эванса. Пусть Q — счетная полугруппа и S — полугруппа, полученная из Q присоединением, если это необходимо, нуля и единицы ($S = (Q^0)^1$). Через T обозначим подходящую циклическую группу (порядка $\geqslant 3d$, где d есть число элементов в некотором порождающем множестве полугруппы S, если d конечно, и бесконечного порядка в противном случае). Пусть $Y = T$. Тогда S, а поэтому и Q, вкладывается в подполугруппу сплетения полугрупп S и T, которая имеет три образующих, если T бесконечна, и два образующих, если T конечна. Отсюда вытекает теорема Эванса.

Для конечных полугрупп метод Неймана позволяет получить более сильное заключение о том, что конечная полугруппа может быть вложена в конечную полугруппу с двумя образующими. При таком вложении сохраняются и некоторые другие свойства полугруппы Q. Например, если Q конечно порождена и периодична, то Q может быть вложена в периодическую полугруппу с двумя образующими. За уточнениями читатель отсылается к статье Неймана [1960].

Упражнения к § 9.1

1. Полугруппа $\mathcal{F}_X$ изоморфна $\mathcal{F}_Y$ тогда и только тогда, когда $|X| = |Y|$.

2. Группа автоморфизмов полугруппы $\mathcal{F}_X$ изоморфна симметрической группе $\mathcal{G}_X$ на множестве X.

3. Пусть $T = \langle a, ab, ba\rangle$ — подполугруппа свободной полугруппы $\mathcal{F}_{\{a,b\}}$. T не является свободной полугруппой.

4. Пусть T — такая подполугруппа из S, что из соотношения $xTy \cap T \neq \varnothing$ $(x, y \in S)$ следует, что $x, y \in T$. Пусть τ — конгруэнция на T и σ — конгруэнция на S, порожденная τ, если рассматривать τ как отношение на S. Тогда $\tau = \sigma \cap (T \times T)$ и, следовательно, T/τ вкладывается естественным образом в S/σ.

5. Пусть T — подполугруппа полугруппы S, τ — конгруэнция на T и σ — конгруэнция на S. Тогда $t\tau \to t\sigma$ $(t \in T)$ определяет гомоморфизм T/τ в S/σ в том и только в том случае, когда $\tau \subseteq \sigma \cap (T \times T)$.

§ 9.2. Конечно определенные полугруппы

Результаты этого параграфа, по-видимому, хорошо известны. Они важны для дальнейшего, поэтому мы приводим их с доказательствами.

Нам будет удобно пользоваться следующими обозначениями. Через ρ^* будем обозначать конгруэнцию на полугруппе, порожденную бинарным отношением ρ на этой полугруппе (§ 1.5, стр. 37).

Если для полугруппы S мы найдем множество X и отношение ρ на $\mathscr{F}_X$, такие, что $\mathscr{F}_X/\rho^* \cong S$, то будем говорить, что $\mathscr{F}_X/\rho^*$ *представляет* S *при помощи образующих и определяющих соотношений*. Множество X будем называть *множеством образующих*, а ρ — *множеством определяющих соотношений* полугруппы S в этом представлении (см. § 1.12). Если в качестве X можно выбрать конечное множество, то говорят, что S *конечно порождена* (в действительности образ множества $X\rho^*$ является в таком случае конечным порождающим множеством полугруппы S). Если ρ есть конечное множество, то будем говорить, что $\mathscr{F}_X/\rho^*$ есть *представление с конечным числом определяющих соотношений*. Если X конечно и ρ конечно, то говорят, что $\mathscr{F}_X/\rho^*$ *конечно представляет* S. Полугруппу будем называть *конечно определенной*, если ее можно задать при помощи конечного числа образующих и определяющих соотношений. Цель этого параграфа доказать, что если S имеет конечное представление и $S \cong \mathscr{F}_Y/\sigma$, где Y конечно, то σ содержит конечное подмножество τ, для которого $\tau^* = \sigma$. Таким образом, конечно определенную полугруппу можно задать конечным числом определяющих соотношений относительно любого ее конечного порождающего множества.

Следующая лемма, которая является важным инструментом для наших рассуждений, представляет и некоторый самостоятельный интерес.

Лемма 9.11. *Пусть y — элемент, не содержащийся в множестве X, $Y = X \cup y$, ρ — бинарное отношение на $\mathscr{F}_X$, $w \in \mathscr{F}_X$ и $\sigma = \rho \cup (w, y)$. Тогда гомоморфизм, порожденный отображением $x\rho^* \to x\sigma^*$ $(x \in X)$, является изоморфизмом $\mathscr{F}_X/\rho^*$ на $\mathscr{F}_Y/\sigma^*$.*

Доказательство. Мы можем считать $\mathscr{F}_X$ подполугруппой из $\mathscr{F}_Y$ и применить лемму 9.9. Так как $\rho \subseteq \sigma \cap (\mathscr{F}_X \times \mathscr{F}_X)$, то $\rho^* \subseteq \sigma^* \cap (\mathscr{F}_X \times \mathscr{F}_X)$. Обратно, если $(a, b) \in \sigma^* \cap (\mathscr{F}_X \times \mathscr{F}_X)$, то $a, b \in \mathscr{F}_X$ и b получается из a конечной последовательностью элементарных σ-переходов $a = a_0 \to a_1 \to \ldots \to a_n = b$. Предположим, что элемент y участвует в этих переходах, и пусть $a_i = uwv \to uyv = a_{i+1}$, где $u, v \in \mathscr{F}_X^1$, есть первый переход, в котором вводится y. Так как $b \in \mathscr{F}_X$, это вхождение y должно быть заменено некоторым более поздним σ-переходом $a_j \to a_{j+1}$, причем

σ-переход может заменить y только на w. По определению σ это вхождение y не затрагивается никаким σ-переходом $a_{i+1} \to \ldots \ldots \to a_j$. Отсюда следует, что мы можем просто уничтожить σ-переходы $a_i \to a_{i+1}$ и $a_j \to a_{j+1}$, переходя от a_i к a_{j+1} при помощи σ-переходов, аналогичных исходным. Применяя эти рассуждения столько раз, сколько необходимо, мы получим, что b можно вывести из a при помощи σ-переходов, в которых не участвует y, т. е. b можно вывести из a при помощи ρ-переходов. Следовательно, $(a, b) \in \rho^*$ и мы доказали, что $\sigma^* \cap (\mathscr{F}_X \times \mathscr{F}_X) \subseteq \rho^*$. Таким образом, $\sigma^* \cap (\mathscr{F}_X \times \mathscr{F}_X) = \rho^*$. Тогда по лемме 9.9 $\mathscr{F}_X/\rho^*$ вкладывается естественным образом в $\mathscr{F}_Y/\sigma^*$ отображением $a\rho^* \to a\sigma^*$ $(a \in \mathscr{F}_X)$, т. е. гомоморфизмом, порожденным отображением $x\rho^* \to x\sigma^*$ $(x \in X)$. Так как $y \in w\sigma^*$, этот гомоморфизм отображает $\mathscr{F}_X/\rho^*$ на $\mathscr{F}_Y/\sigma^*$. Это завершает доказательство леммы.

Нам понадобится следующий частный случай леммы 9.9.

Лемма 9.12. *Пусть σ — конгруэнция на $\mathscr{F}_Y$ и $\tau \subseteq \sigma$. Предположим, что $\mathscr{F}_Y/\tau^*$ вкладывается естественным образом в $\mathscr{F}_Y/\sigma$ отображением $b\tau^* \to b\sigma$ $(b \in \mathscr{F}_Y)$. Тогда $\tau^* = \sigma$.*

Нам будет удобно ввести некоторые дальнейшие обозначения. Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — конечное подмножество полугруппы S и b — элемент из S, который может быть представлен в виде произведения элементов из X. Выберем некоторое выражение элемента b в виде такого произведения. Будем обозначать это выражение через $b(x)$. Пусть $x_i \to v_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — отображение множества X в некоторую полугруппу T. Заменим каждое вхождение x_i в данном выражении $b(x)$ на v_i для $i = 1, 2, \ldots, n$. Полученное произведение элементов v_i будем обозначать через $b(v)$.

Следующая лемма, носящая технический характер, понадобится при доказательстве теоремы.

Лемма 9.13. *Пусть σ — бинарное отношение на полугруппе S x_i, v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — элементы из S; $a_k(x)$, $b_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, t)$ — элементы из S, представленные некоторым образом в виде произведений элементов x_i. Положим*

$$\mu = \sigma \cup \{(x_i, v_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \cup \{(a_k(x), b_k(x)) \mid k = 1, 2, \ldots, t\},$$

$$\nu = \sigma \cup \{(x_i, v_i) \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \cup \{(a_k(v), b_k(v)) \mid k = 1, 2, \ldots, t\}.$$

Тогда $\mu^* = \nu^*$.

Доказательство. Замена одного вхождения x_j на v_j в данном выражении $a_k(x)$ является элементарным μ-переходом. Таким образом, $a_k(v)$ получается из $a_k(x)$ конечной последовательностью элементарных μ-переходов. Следовательно, $(a_k(x), a_k(v)) \in \mu^*$. Аналогично, $(b_k(x), b_k(v)) \in \mu^*$. Так как $(a_k(x), b_k(x)) \in \mu^*$, то $(a_k(v), b_k(v)) \in \mu^*$. Отсюда $\nu^* \subseteq \mu^*$. Аналогично, $\mu^* \subseteq \nu^*$, откуда $\mu^* = \nu^*$, что завершает доказательство.

Теорема 9.14. *Пусть* $X = \{x_i \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$, $Y = \{y_j \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$, ρ — *конечное бинарное отношение на* $\mathcal{F}_X$,

$$\rho = \{(a_k(x), b_k(x)) \mid k = 1, 2, \ldots, t\},$$

σ — *конгруэнция на* $\mathcal{F}_Y$ *и*

$$\alpha\colon \mathcal{F}_X/\rho^* \to \mathcal{F}_Y/\sigma$$

— *изоморфизм на* $\mathcal{F}_Y/\sigma$.

Тогда существует такое конечное подмножество τ *из* σ, *что* $\tau^* = \sigma$.

Именно, в качестве τ *мы можем взять множество*

$$\tau = \{(a_k(v), b_k(v)) \mid k = 1, 2, \ldots, t\} \cup \cup \{(y_j, u_j(v)) \mid j = 1, 2, \ldots, m\},$$

где v_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — *такие элементы из* $\mathcal{F}_Y$, *что*

$$(x_i\rho^*)\alpha = v_i\sigma,$$

и $u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — *такие элементы из* $\mathcal{F}_X$, *что*

$$(u_j(x)\rho^*)\alpha = y_j\sigma.$$

Доказательство. Начнем шаг за шагом присоединять элементы из Y к X. Положим $Y_1 = X \cup y_1$, $Y_2 = Y_1 \cup y_2, \ldots$ $\ldots, Y_m = Y_{m-1} \cup y_m = X \cup Y$. Положим также $\rho_1 = \rho \cup (y_1, u_1(x))$, $\rho_2 = \rho_1 \cup (y_2, u_2(x)), \ldots, \rho_m = \rho_{m-1} \cup (y_m, u_m(x))$, где $u_j(x)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ суть такие элементы из $\mathcal{F}_X$, что $(u_j(x)\rho^*)\alpha = y_j\sigma$. Последовательное применение леммы 9.11 показывает, что $\mathcal{F}_X/\rho^*$ изоморфна $\mathcal{F}_{Y_1}/\rho_1^*, \mathcal{F}_{Y_2}/\rho_2^*, \ldots, \mathcal{F}_{Y_m}/\rho_m^*$ и отображение $x_i\rho^* \to x_i\rho_m^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ порождает изоморфизм β полугруппы $\mathcal{F}_X/\rho^*$ на $\mathcal{F}_{Y_m}/\rho_m^*$.

Выберем такие элементы $v_i(y)$ из $\mathcal{F}_Y$, что $(x_i\rho^*)\alpha = v_i(y)\sigma$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Заметим, что $\{v_i(y)\sigma \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$ является порождающим множеством для $\mathcal{F}_Y/\sigma$, потому что α есть отображение на $\mathcal{F}_Y/\sigma$. Тогда $(x_i, v_i(y)) \in \rho_m^*$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В самом деле, так как $(y_j, u_j(x)) \in \rho_m^*$, то

$$\begin{aligned}(v_i(y)\rho_m^*)\beta^{-1}\alpha &= (v_i(u)\rho_m^*)\beta^{-1}\alpha = \\ &= (v_i(u(x))\rho^*)\alpha = \\ &= v_i(y)\sigma = \\ &= (x_i\rho_m^*)\beta^{-1}\alpha.\end{aligned}$$

Отсюда в силу взаимной однозначности $\beta^{-1}\alpha$ имеем $x_i\rho_m^* = v_i(y)\rho_m^*$, т. е. $(x_i, v_i(y)) \in \rho_m^*$.

Положим

$$\mu = \{(a_k(x), b_k(x)) \mid k = 1, 2, \ldots, t\} \cup \cup \{(x_i, v_i(y)) \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \cup \{(y_j, u_j(x)) \mid j = 1, 2, \ldots, m\},$$

так что ввиду доказанного имеем $\mu^* = \rho_m^*$, положим, далее,

$$\nu = \{(a_k(v), b_k(v)) \mid k = 1, 2, \ldots, t\} \cup \cup \{(x_i, v_i(y)) \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \cup \cup \{(y_j, u_j(v)) \mid j = 1, 2, \ldots, m\}.$$

Применяя лемму 9.13, получаем, что $\nu^* = \mu^*$ $(=\rho_m^*)$. Таким образом, гомоморфизм β, порожденный отображением $x_i\rho^* \to v_i(y)\nu^*$, является изоморфизмом $\mathscr{F}_X/\rho^*$ на $\mathscr{F}_{X\cup Y}/\nu^*$.

Теперь, применяя лемму 9.11, выбросим x_i из $X \cup Y$. Последовательные применения этой леммы позволяют нам выбросить каждое x_i, одновременно исключая $(x_i, v_i(y))$ из множества, порождающего конгруэнцию. Этот процесс заканчивается нахождением изоморфизма δ полугруппы $\mathscr{F}_{X\cup Y}/\nu^*$ на $\mathscr{F}_Y/\tau^*$, где

$$\tau = \{(a_k(v), b_k(v)) \mid k = 1, 2, \ldots, t\} \cup \cup \{(y_j, u_j(v)) \mid j = 1, 2, \ldots, m\}$$

и δ порождается отображением $v_j(y)\nu^* \to v_j(y)\tau^*$.

Рассмотрим теперь изоморфизм $\delta^{-1}\beta^{-1}\alpha$ полугруппы $\mathscr{F}_Y/\tau^*$ на $\mathscr{F}_Y/\sigma$. Он порождается отображением $v_j(y)\tau^* \to v_j(y)\sigma$ и поэтому совпадает с естественным вложением $\mathscr{F}_Y/\tau^*$ в $\mathscr{F}_Y/\sigma$. Далее, $\tau \subseteq \sigma$. В самом деле, $y_j\sigma = (u_j(x)\rho^*)\alpha = u_j(v)\sigma$, так что $(y_j, u_j(v)) \in \sigma$; $a_k(v)\sigma = (a_k(x)\rho^*)\alpha = (b_k(x)\rho^*)\alpha = b_k(v)\sigma$, так что $(a_k(v), b_k(v)) \in \sigma$. Следовательно, $\tau \subseteq \sigma$. Из леммы 9.12 вытекает теперь, что $\tau^* = \sigma$.

Это завершает доказательство теоремы.

Упражнения к § 9.2

1. Подполугруппа конечно определенной полугруппы не обязательно является конечно определенной.

2. Пусть U — подполугруппа полугруппы S и $\mathscr{F}_Y/\sigma^*$ представляет U при помощи образующих и определяющих соотношений. Тогда существуют множество X, содержащее Y, и отношение ρ на $\mathscr{F}_X$, такие, что $\sigma = \rho \cap (\mathscr{F}_Y \times \mathscr{F}_Y)$ и $\mathscr{F}_X/\rho^*$ есть представление S при помощи образующих и определяющих соотношений.

Кроме того, если S является конечно определенной полугруппой и $\mathscr{F}_Y/\sigma^*$ конечно представляет U, то X и ρ могут быть выбраны так, что $\mathscr{F}_X/\rho^*$ представляет S конечно.

3. Пусть S и T — такие полугруппы, что $S \cap T = U$, и $\mathscr{F}_Y/\sigma^*$ представляет U при помощи образующих и определяющих соотношений. Тогда существуют такие множества X и Z, что $X \cap Z = Y$, и отношения ρ на $\mathscr{F}_X$ и τ на $\mathscr{F}_Z$, для которых

$$\sigma = \rho \cap (\mathscr{F}_Y \times \mathscr{F}_Y) = \tau \cap (\mathscr{F}_Y \times \mathscr{F}_Y),$$

а полугруппы $\mathscr{F}_X/\rho^*$ и $\mathscr{F}_Z/\tau^*$ представляют соответственно S и T при помощи образующих и определяющих соотношений.

§ 9.3. *Конечно порожденные коммутативные полугруппы являются конечно определенными*

Результаты, которые мы приводим в этом параграфе, принадлежат Редеи [1963]. Пусть F — свободная коммутативная полугруппа с n образующими и G — свободная абелева группа, порожденная полугруппой F. Сначала мы приведем характеризацию Редеи (теорема 9.17) произвольной конгруэнции ρ на F в терминах некоторой ассоциированной подгруппы M из G и отображения M в множество идеалов из F. Следуя Редеи ([1963], § 33), мы используем эту характеризацию для доказательства того, что каждая конгруэнция на F конечно порождена. Дальнейшие детали, включая явное описание различных типов конгруэнций на F, читатель может найти в книге Редеи [1963].

Свободную коммутативную полугруппу на множестве $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ можно определить как множество всех слов $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$, где a_i являются неотрицательными целыми числами, и произведение элементов $x_1^{a_1} x_2^{a_2} \ldots x_n^{a_n}$ и $x_1^{b_1} x_2^{b_2} \ldots x_n^{b_n}$ в ней положить по определению равным $x_1^{a_1+b_1} x_2^{a_2+b_2} \ldots x_n^{a_n+b_n}$. Эта полугруппа изоморфна множеству всех последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_i — неотрицательные целые числа, с операцией сложения

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n) =$$
$$= (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Точнее, указанная полугруппа есть свободная коммутативная полугруппа с единицей (которой соответствует последовательность $(0, 0, \ldots, 0)$). Она изоморфна прямому произведению (§ 1.11) бесконечных циклических полугрупп с присоединенными единицами. Она изоморфна также полугруппе $\mathscr{F}_X^1/\rho^*$, где $\rho = \{(x_i x_j, x_j x_i) \mid i, j = 1, 2, \ldots, n\}$, и это ее представление показывает, что конечно порожденная свободная коммутативная полугруппа является конечно определенной.

На протяжении этого параграфа через F мы будем обозначать определенную выше свободную коммутативную полугруппу, состоящую из всех конечных последовательностей длины n вида $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, где a_i являются неотрицательными целыми числами. Полугруппа F содержится в свободной аддитивной абелевой группе с n образующими, состоящей из всех конечных последовательностей целых чисел $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ длины n. На протяжении данного параграфа эту группу будем обозначать через G.

Определим отношение $\leqslant$ на F, полагая

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n) \leqslant (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

тогда и только тогда, когда $a_i \leqslant b_i$ для каждого $i = 1, 2, \ldots, n$. Это отношение является частичным порядком на F. Более того, относительно этого частичного порядка F является структурой. Если $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, то

$$\alpha \vee \beta = (a_1 \vee b_1, a_2 \vee b_2, \ldots, a_n \vee b_n)$$

и

$$\alpha \wedge \beta = (a_1 \wedge b_1, a_2 \wedge b_2, \ldots, a_n \wedge b_n)$$

являются соответственно точной верхней и точной нижней гранью множества $\{\alpha, \beta\}$, где $a_i \vee b_i$ равно $\max\{a_i, b_i\}$, а $a_i \wedge b_i$ равно $\min\{a_i, b_i\}$.

Этот частичный порядок на F естественным образом распространяется на G. Для этого полагаем $\alpha \geqslant \beta$ в G тогда и только тогда, когда $\alpha - \beta \in F$. Тогда G является структурой относительно частичного порядка $\geqslant$. Кроме того, если $\alpha \geqslant \beta$ в G и $\gamma \in G$, то $\alpha + \gamma \geqslant \beta + \gamma$. Таким образом, G есть структурно упорядоченная абелева группа и $F \setminus 0$ — множество ее положительных элементов. Характеризация Редеи конгруэнций на F, к изложению которой мы теперь приступаем (теорема 9.17), применима к более общей ситуации, где в качестве G можно взять произвольную структурно упорядоченную абелеву группу, а в качестве $F \setminus 0$ — множество положительных элементов этой группы.

Будем использовать следующие обозначения. Для $\mu \in G$ определим μ^+ и μ^-, полагая

$$\mu^+ = \mu \vee 0,$$
$$\mu^- = (-\mu) \vee 0.$$

Тогда $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Далее, в этих обозначениях для любых $\mu, \nu \in G$ мы имеем

$$\mu \vee \nu = (\mu - \nu)^+ + \nu = (\mu - \nu)^- + \mu,$$
$$\mu \wedge \nu = \mu - (\mu - \nu)^+ = \nu - (\mu - \nu)^-.$$

Заметим также, что если $\mu, \nu \in G$ и $\pi \in F$, то

$$(\pi + \mu) \vee (\pi + \nu) = \pi + \mu \vee \nu,$$
$$(\pi + \mu) \wedge (\pi + \nu) = \pi + \mu \wedge \nu.$$

Рассмотрим теперь произвольную конгруэнцию ρ на F. Поставим ей в соответствие следующее подмножество M_ρ:

$$M_\rho = \{\alpha - \beta \in G \mid (\alpha, \beta) \in \rho\}. \tag{1}$$

Легко видеть, что M_ρ есть подгруппа из G. В самом деле, пусть μ и ν — произвольные элементы из M_ρ, $\mu = \alpha - \beta$, $\nu = \gamma - \delta$, где $(\alpha, \beta) \in \rho$ и $(\gamma, \delta) \in \rho$. Тогда $\mu - \nu = \alpha + \delta - (\beta + \gamma)$ и $(\alpha + \delta, \beta + \gamma) \in \rho$, так как ρ есть конгруэнция. Следовательно, $\mu - \nu \in M_\rho$, откуда вытекает, что M_ρ является подгруппой.

Каждый элемент $\mu \in M_\rho$ определяет следующий идеал μf_ρ из F:

$$\mu f_\rho = \{\xi \in F \mid (\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \rho\}. \tag{2}$$

По определению (1) подгруппы M_ρ существуют такие $\alpha, \beta \in F$, что $\mu = \alpha - \beta$ и $(\alpha, \beta) \in \rho$. Тогда $\alpha \wedge \beta \in \mu f_\rho$; в самом деле, $\alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^+ = \alpha \wedge \beta + \mu^+ = \alpha$ и $\alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^- = \alpha \wedge \beta + \mu^- = \beta$. Следовательно, множество μf_ρ непустое. Кроме того, так как ρ является конгруэнцией, $(\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \rho$ влечет за собой $(\eta + \xi + \mu^+, \eta + \xi + \mu^-) \in \rho$ для любого $\eta \in F$. Таким образом, из включения $\xi \in \mu f_\rho$ следует, что $\xi + \eta \in \mu f_\rho$ для любого $\eta \in F$. Это показывает, как и утверждалось, что μf_ρ является идеалом в F.

Лемма 9.15. *Пусть ρ — конгруэнция на F, M_ρ — подгруппа, определенная равенством* (1), *$f = f_\rho$ — отображение подгруппы M_ρ в множество идеалов из F, определенное равенством* (2). *Тогда f обладает следующими свойствами:*

C (i) $0f = F$;

C (ii) $\mu f = (-\mu) f$ *для любого* $\mu \in M_\rho$,

C (iii) $(\mu^+ + (\mu f)) \cap (\nu^+ + (\nu f)) \subseteq (\mu \vee \nu) + (\mu - \nu) f$ *для любых* $\mu, \nu \in M_\rho$.

Доказательство. Свойства C (i) и C (ii) непосредственно вытекают из того факта, что ρ рефлексивно и симметрично.

Для доказательства C (iii) рассмотрим элемент $\xi \in (\mu^+ + (\mu f)) \cap (\nu^+ + (\nu f))$. По определению идеала μf элемент ξ принадлежит $\mu^+ + (\mu f)$ тогда и только тогда, когда $(\xi, \xi - \mu^+ + \mu^-) = (\xi, \xi - \mu)$ принадлежит ρ. Аналогично, $(\xi, \xi - \nu) \in \rho$. Положим $\eta = \xi - \mu \vee \nu$. Тогда

$$\eta + (\mu - \nu)^+ = \xi - \mu \vee \nu + (\mu - \nu)^+ = \xi - \nu$$

и

$$\eta + (\mu - \nu)^- = \xi - \mu \vee \nu + (\mu - \nu)^- = \xi - \mu.$$

Теперь в силу транзитивности ρ из включений $(\xi, \xi - \mu) \in \rho$ и $(\xi, \xi - \nu) \in \rho$ вытекает, что $(\xi - \nu, \xi - \mu) \in \rho$. Следовательно, $(\eta + (\mu - \nu)^+, \eta + (\mu - \nu)^-) \in \rho$, т. е. $\eta \in (\mu - \nu) f$. Отсюда $\xi \in \mu \vee \nu + (\mu - \nu) f$, что и требовалось доказать.

Пусть M — произвольная подгруппа из G и f — отображение подгруппы M в множество идеалов из F, которое обладает свойствами C (i) — C (iii) предыдущей леммы. Тогда пару (f, M) будем называть *конгруэнц-парой на F*.

Любая конгруэнц-пара $\mathcal{F} = (f, M)$ определяет отношение $\rho(\mathcal{F})$ на F:

$$\rho(\mathcal{F}) = \{(\alpha, \beta) \in F \times F \mid \alpha - \beta \in M \text{ и } \alpha \wedge \beta \in (\alpha - \beta) f\}. \quad (3)$$

Лемма 9.16. *Если $\mathcal{F} = (f, M)$ — конгруэнц-пара, то отношение $\rho = \rho(\mathcal{F})$, определенное равенством* (3), *является конгруэнцией на F.*

Доказательство. Если $\alpha \in F$, то $\alpha \wedge \alpha = \alpha \in (\alpha - \alpha) f = 0f$, так как $0f = F$ ввиду C (i). Таким образом, ρ рефлексивно. Аналогично, свойство C (ii) обеспечивает симметричность ρ. Предположим, что $(\alpha, \beta) \in \rho$ и $\xi \in F$. Тогда $(\alpha + \xi) \wedge (\beta + \xi) = \xi + \alpha \wedge \beta$, и поэтому в силу того, что $(\alpha - \beta) f$ является идеалом в F, имеем $\xi + \alpha \wedge \beta \in (\alpha - \beta) f$. Следовательно, $(\alpha + \xi, \beta + \xi) \in \rho$. Таким образом, отношение ρ стабильно.

Осталось доказать транзитивность отношения ρ. Пусть (α, β), $(\beta, \gamma) \in \rho$. Тогда $\alpha - \beta \in M$ и $\beta - \gamma \in M$ влечет за собой $\alpha - \gamma \in M$, а из $\alpha \wedge \beta \in (\alpha - \beta) f$ и $\beta \wedge \gamma \in (\beta - \gamma) f$ вытекает, что

$$\beta - (\beta - \alpha)^+ \in (\alpha - \beta) f = (\beta - \alpha) f$$

и

$$\beta - (\beta - \gamma)^+ \in (\beta - \gamma) f.$$

Следовательно,

$$\beta \in ((\beta - \alpha)^+ + (\beta - \alpha) f) \cap ((\beta - \gamma)^+ + (\beta - \gamma) f).$$

Отсюда, применяя C (iii), мы получаем, что

$$\beta \in (\beta - \alpha) \vee (\beta - \gamma) + (\alpha - \gamma) f,$$

т. е.

$$\beta \in \beta + (-\alpha) \vee (-\gamma) + (\alpha - \gamma) f.$$

Таким образом,

$$0 \in (-\alpha) \vee (-\gamma) + (\alpha - \gamma) f$$

и, так как $(-\alpha) \vee (-\gamma) = -(\alpha \wedge \gamma)$, мы заключаем, что $\alpha \wedge \gamma \in (\alpha - \gamma) f$. Следовательно, ρ транзитивно. Этим доказательство леммы полностью завершено.

Мы доказали, что каждая конгруэнция ρ на F определяет конгруэнц-пару $(f_\rho, M_\rho) = \mathcal{F}(\rho)$ и, обратно, каждая конгруэнц-пара $\mathcal{F} = (f, M)$ определяет конгруэнцию $\rho(\mathcal{F})$ на F. В действительности это соответствие между конгруэнциями и конгруэнц-парами является взаимно однозначным. Следующая теорема есть «Основная теорема» Редеи ([1963], стр. 20). Редеи называет f_ρ «ядерной функцией», ассоциированной с ρ.

Теорема 9.17. *Отображение* $\rho \to (f_\rho, M_\rho) = \mathcal{F}(\rho)$, *определенное равенствами* (1) *и* (2), *является взаимно однозначным отображением множества всех конгруэнций на* F *на множество всех конгруэнц-пар, ассоциированных с* F. *Обратным к этому отображению является отображение* $(f, M) = \mathcal{F} \to \rho(\mathcal{F})$, *определенное равенством* (3).

Доказательство. Пусть ρ — конгруэнция на F. Положим $\mathcal{F} = (f_\rho, M_\rho)$. Будем доказывать, что $\rho(\mathcal{F}) = \rho$. Так как каждое из включений $(\alpha, \beta) \in \rho$ и $(\alpha, \beta) \in \rho(\mathcal{F})$ в отдельности влечет за собой $(\alpha - \beta) \in M_\rho$, достаточно доказать, что для $(\alpha - \beta) \in M_\rho$ имеет место $(\alpha, \beta) \in \rho$ тогда и только тогда, когда $\alpha \wedge \beta \in (\alpha - \beta) f_\rho$, т. е. тогда и только тогда, когда $(\alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^+, \alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^-) \in \rho$. Но это выполняется, так как $\alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^+ = \alpha$ и $\alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^- = \beta$.

Обратно, пусть $\mathcal{F} = (f, M)$ — произвольная конгруэнц-пара, ассоциированная с F. Положим $\rho = \rho(\mathcal{F})$. Будем доказывать, что $f_\rho = f$ и $M_\rho = M$. Сначала пусть $\mu \in M_\rho$. Тогда в силу (1) имеем $\mu = \alpha - \beta$ для некоторых таких α, β, что $(\alpha, \beta) \in \rho$. Но в силу (3) из $(\alpha, \beta) \in \rho$ вытекает, что $\alpha - \beta \in M$. Таким образом, $M_\rho \subseteq M$. Обратно, пусть $\mu \in M$. Выберем $\xi \in \mu f$. Тогда $\xi = \xi + 0 = \xi + (\mu^+ \wedge \mu^-) = (\xi + \mu^+) \wedge (\xi + \mu^-) \in \mu f$ и $\xi + \mu^+ - (\xi + \mu^-) = \mu$. Следовательно, в силу (3) имеем $(\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \rho$, откуда в силу (1) вытекает, что $\mu \in M_\rho$. Таким образом, $M \subseteq M_\rho$, т. е. $M = M_\rho$.

Если $\mu \in M$, то $\xi \in \mu f_\rho$ тогда и только тогда, когда $(\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \rho$, т. е. когда

$$\xi = \xi + 0 = \xi + (\mu^+ \wedge \mu^-) = (\xi + \mu^+) \wedge (\xi + \mu^-) \in \mu f.$$

Таким образом, $f = f_\rho$. Это завершает доказательство теоремы.

Оставшаяся часть данного параграфа посвящена доказательству теоремы Редеи о том, что каждая конгруэнция на F конечно порождена. Следующая теорема, на которую опирается это доказательство, как указывает Редеи, принадлежит Диксону [1913]. В книге Редеи ([1963], стр. 52) она приводится в такой формулировке: *произвольное подмножество из* F, *любые два элемента которого несравнимы, конечно*. Это утверждение было доказано также Бурном [1949] для несколько более общего случая (когда полугруппа порождена группой и n коммутирующими переменными) в следующей форме, аналогичной теореме Гильберта о базисах для полиномиальных колец: *каждый идеал из* F *имеет конечный базис* (следствие 9.20 ниже).

Пусть A — подмножество из F. Тогда говорят, что α — *минимальный элемент* в A, если $\alpha \in A$ и для $\beta \in F$ из $\beta \leqslant \alpha$ следует $\beta = \alpha$ или $\beta \notin A$.

Теорема 9.18. *Пусть A — подмножество из F. Тогда множество N всех минимальных элементов из A конечно. Кроме того, если $\alpha \in A$, то существует такое $\nu \in N$, что $\nu \leqslant \alpha$.*

Доказательство. Проведем индукцию по числу n образующих полугруппы F. Утверждение теоремы очевидно для $n = 1$. Предположим, что это утверждение выполняется для свободной коммутативной полугруппы с $n - 1$ образующими. Рассмотрим множество целых чисел, которые встречаются в качестве j-й компоненты в элементах из A, и пусть l_j есть наименьшее из чисел в этом множестве. Обозначим через A_j множество всех элементов из A, у которых j-я компонента равна l_j. По предположению индукции множество M_j всех минимальных элементов из A_j конечно. Положим $M = M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n$. Пусть m_j — наибольшая j-я компонента элементов (конечного) множества M. Положим $\mu = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$. Тогда, очевидно, каждый элемент из M меньше или равен μ.

Обозначим через N_j множество всех минимальных элементов из A с j-й компонентой p_j, удовлетворяющей соотношению $l_j \leqslant p_j \leqslant m_j$. По предположению индукции каждое множество N_j конечно. Положим $N = N_1 \cup N_2 \cup \ldots \cup N_n$. Тогда N является конечным множеством. Далее, N есть множество всех минимальных элементов из A.

В самом деле, пусть $\gamma = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — произвольный минимальный элемент из A. Если $\gamma \notin N$, то $\gamma \notin N_j$ для всех $j = 1, 2, \ldots, n$ и поэтому в силу определения N_j и l_j имеем $c_j > m_j$. Таким образом, $\gamma > \mu$ и, следовательно, каждый элемент из M меньше γ, что противоречит минимальности элемента γ в A.

Последнее утверждение теоремы следует из того, что каждая строго убывающая цепь элементов из A конечна.

Множество всех минимальных элементов подмножества A из F будем называть *базисом* множества A.

Следствие 9.19. *Пусть M — подгруппа группы G и $S = M \cap (F \setminus 0)$ содержит хотя бы один ненулевой элемент. Тогда S является конечно порожденной подполугруппой из F; например, базис множества S является конечным порождающим множеством полугруппы S.*

Доказательство. Пусть B — базис множества S и $\alpha \in S$. Тогда существует такое $\beta \in B$, что $\alpha \geqslant \beta$. Следовательно, $\alpha - \beta \geqslant 0$ и поэтому $\alpha - \beta \in F$. Кроме того, α, $\beta \in M$ и потому $\alpha - \beta \in M$. Таким образом, либо $\alpha = \beta$, либо $\alpha - \beta \in M \cap (F \setminus 0) = S$. Следовательно, если $\alpha \neq \beta$, то существует такое $\beta' \in B$, что $\alpha - \beta \geqslant \beta'$. Отсюда, как и выше, либо $\alpha - \beta - \beta' \in S$, либо $\alpha = \beta + \beta'$. Этот процесс должен закончиться на некотором шаге, и мы получим $\alpha = \beta + \beta' + \ldots + \beta^{(k)}$; этим установлено, что B порождает S.

Следствие 9.20. *Пусть A — идеал из F и B — его базис. Тогда идеал из F, порожденный множеством B, равен A. Кроме того, любое порождающее множество идеала A должно содержать B.*

Таким образом, произвольный идеал из F содержит единственное минимальное конечное порождающее множество.

Доказательство. Пусть $\alpha \in A$. Тогда существует такое $\beta \in B$, что $\alpha \geqslant \beta$. Так как $\alpha - \beta \geqslant 0$, элемент $\eta = \alpha - \beta$ принадлежит F. Следовательно, так как $\alpha = \eta + \beta$, элемент α принадлежит идеалу из F, порожденному множеством B.

Пусть C — произвольное порождающее множество идеала A. Тогда каждый элемент из A можно записать в виде $\eta + \gamma$, где $\eta \in F$, а γ есть (непустая) сумма элементов из C. В частности, если $\beta \in B$, то β равен такой сумме: $\beta = \eta + \gamma$. Отсюда следует, что β больше любого отличного от него элемента из C, участвующего в сумме γ. Так как β является минимальным элементом в A, то $\beta \in C$. Это завершает доказательство следствия.

Говорят, что два элемента $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\beta = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ из G *совместимы*, если для любого $i = 1, 2, \ldots, n$ неравенства $a_i \geqslant 0$ и $b_i \geqslant 0$ равносильны. Множество попарно совместимых элементов из G будем называть *совместимым множеством.*

Лемма 9.21. *Пусть $\{\alpha_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$ — совместимое множество элементов из G и $\mu = \sum \{c_j\alpha_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$, где каждое $c_j \geqslant 0$. Тогда*

$$\mu^+ = \sum \{c_j\alpha_j^+ \mid j = 1, 2, \ldots, k\},$$
$$\mu^- = \sum \{c_j\alpha_j^- \mid j = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Доказательство. Утверждение леммы следует из того, что для любого $\mu \in G$ элемент μ^+ получается из μ уничтожением его отрицательных компонент и что $\mu^- = (-\mu)^+$.

Обозначим через Φ подгруппу группы автоморфизмов группы G, состоящую из всех таких φ, которые лишь меняют знаки некоторых компонент каждого элемента из G. Пусть $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Тогда

$$\alpha^\varphi = ((-1)^{\varphi_1} a_1, (-1)^{\varphi_2} a_2, \ldots, (-1)^{\varphi_n} a_n),$$

где $(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$ есть последовательность нулей 0 и единиц 1, определяемая φ. Группа Φ содержит 2^n элементов. Для каждого $\varphi \in \Phi$ автоморфизм φ^2 является тождественным преобразованием группы G.

Лемма 9.22. *Пусть M — подгруппа группы G. Тогда существует такое конечное подмножество C из M, что каждый эле-*

мент из M можно представить в виде суммы неотрицательных кратных элементов некоторого совместимого подмножества из C.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \Phi$. Обозначим через M^φ подгруппу $M^\varphi = \{\alpha^\varphi \mid \alpha \in M\}$ из G. Тогда множество $M^\varphi \cap (F \setminus 0)$, если оно не пусто, обладает конечным базисом (теорема 9.18). Обозначим этот конечный базис через M_φ. Если $M^\varphi \cap (F \setminus 0) = \varnothing$, то положим $M_\varphi = \varnothing$.

Будем писать $M_\varphi^\varphi = \{\alpha^\varphi \mid \alpha \in M_\varphi\}$. Тогда M_φ^φ является совместимым подмножеством из G, потому что каждый элемент из M_φ принадлежит F. Положим $C = \bigcup\{M_\varphi^\varphi \mid \varphi \in \Phi\}$. Тогда C конечно, так как конечно каждое M_φ^φ и конечно Φ. Очевидно, $C \subseteq M$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент $\mu \neq 0$ из M. Очевидно, существует такое $\varphi \in \Phi$, что $\mu^\varphi \in F \setminus 0$. Тогда для этого φ выполняется $\mu^\varphi \in M^\varphi \cap (F \setminus 0)$. Применяя следствие 9.19, получаем, что μ^φ есть сумма неотрицательных кратных элементов из M_φ,

$$\mu^\varphi = \sum \{c_i\alpha_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $\alpha_i \in M_\varphi$ и $c_i \geqslant 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Таким образом, в силу того что $(\mu^\varphi)^\varphi = \mu$, имеем

$$\mu = \sum \{c_i\alpha_i^\varphi \mid i = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $\alpha_i^\varphi \in M_\varphi^\varphi \subseteq C$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$. Это завершает доказательство леммы.

Замечание. В качестве непосредственного следствия леммы 9.22 получаем, что каждая подгруппа конечно порожденной свободной абелевой группы конечно порождена; отсюда вытекает, что каждая подгруппа конечно порожденной абелевой группы конечно порождена.

Лемма 9.23. *Пусть ρ — конгруэнция на F, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(\rho) = (f, M)$ и $\{\mu_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$ — совместимое подмножество из M. Тогда если $c_j \geqslant 0$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, то*

$$\bigcap \{\mu_j f \mid j = 1, 2, \ldots, k\} \subseteq (c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_k\mu_k) f.$$

Доказательство. Докажем это утверждение для $k = 1$. Мы должны установить, что $\mu f \subseteq (m\mu) f$ для любого μ и для любого неотрицательного целого числа m. Проведем индукцию по m. Требуемое включение, очевидно, имеет место для $m = 0$, так как $0f = F$. Предположим, что оно имеет место для $m - 1$. Пусть $\xi \in \mu f$, т. е. $(\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \rho$. По предположению индукции $\xi \in ((m - 1)\mu) f$, т. е. $(\xi + ((m - 1)\mu)^+, \xi + ((m - 1)\mu)^-) \in \rho$. Но $((m - 1)\mu)^+ = (m - 1)\mu^+$ и $((m - 1)\mu)^- = (m - 1)\mu^-$. Таким образом, $(\xi + (m - 1)\mu^+, \xi + (m - 1)\mu^-) \in \rho$. Используя стабильность отношения ρ, мы получаем, что

$((\xi + (m-1)\mu^+) + \mu^+, (\xi + (m-1)\mu^-) + \mu^+) \in \rho$, т. е. $(\xi + (m\mu)^+, \xi + (m-1)\mu^- + \mu^+) \in \rho$ и снова $((\xi + \mu^+) + (m-1)\mu^-, (\xi + \mu^-) + (m-1)\mu^-) \in \rho$, т. е. $(\xi + (m-1)\mu^- + \mu^+, \xi + (m\mu)^-) \in \rho$. Таким образом, используя транзитивность, приходим к включению $(\xi + (m\mu)^+, \xi + (m\mu)^-) \in \rho$, т. е. $\xi \in (m\mu) f$. Итак, $\mu f \subseteq ((m-1)\mu) f$ влечет за собой $\mu f \subseteq (m\mu) f$. Следовательно, это включение выполняется для всех неотрицательных целых чисел m.

Пусть теперь μ, ν — два совместимых элемента. Тогда $(\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \rho$ влечет за собой $(\xi + \mu^+ + \nu^+, \xi + \mu^- + \nu^+) \in \rho$ и $(\xi + \nu^+, \xi + \nu^-) \in \rho$ влечет за собой $(\xi + \nu^+ + \mu^-, \xi + \mu^- + \nu^-) \in \rho$. Следовательно, из включения $\xi \in \mu f \cap \nu f$ вытекает, что $(\xi + \mu^+ + \nu^+, \xi + \mu^- + \nu^-) \in \rho$, т. е. в силу совместимости μ и ν, используя лемму 9.21, получаем, что $(\xi + (\mu + \nu)^+, \xi + (\mu + \nu)^-) \in \rho$. Таким образом, $\mu f \cap \nu f \subseteq (\mu + \nu) f$.

Теперь мы можем провести индукцию по k. Утверждение леммы уже доказано для $k = 1$. Предположим, что оно выполняется для любого совместимого множества из $k - 1$ элементов. Положим $\mu = c_1\mu_1 + c_2\mu_2 + \ldots + c_{k-1}\mu_{k-1}$ и $\nu = c_k\mu_k$. Тогда μ и ν совместимы и поэтому на основании только что доказанного $\mu f \cap \nu f \subseteq (\mu + \nu) f$. По нашему индуктивному предположению относительно k имеем

$$\bigcap \{\mu_j f \mid j = 1, 2, \ldots, k-1\} \subseteq \mu f.$$

Случай $k = 1$ дает $\mu_k f \subseteq \nu f$. Следовательно,

$$\bigcap \{\mu_j f \mid j = 1, 2, \ldots, k\} \subseteq \mu f \cap \nu f \subseteq (\mu + \nu) f,$$

что и требовалось доказать.

Пусть ρ — конгруэнция на F и $\mathscr{P}(\rho) = \mathscr{P} = (f_\rho, M_\rho) = (f, M)$ — ассоциированная с ней конгруэнц-пара. Тогда *сердцевина* [1] $k(\rho)$ (или $k(\mathscr{P})$) конгруэнции ρ (или пары $\mathscr{P}$) определяется следующим образом:

$$k(\rho) = k(\mathscr{P}) = \bigcap \{\mu f \mid \mu \in M\}.$$

Сердцевина конгруэнции ρ, если она не пуста, является идеалом полугруппы F. Приступим к доказательству того, что $k(\rho) \neq \varnothing$ для любой конгруэнции ρ на F.

Теорема 9.24. *Сердцевина $k(\rho)$ конгруэнции ρ на F не пуста.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{P} = \mathscr{P}(\rho) = (f, M)$ и $\mu \in M$. По лемме 9.22 M содержит такое конечное подмножество C, не зависящее от μ, что

$$\mu = \sum \{c_j\mu_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\},$$

[1] В оригинале — core.— *Прим. перев.*

где c_j — неотрицательные целые числа и $\{\mu_j \mid j = 1, 2, \ldots, k\}$ — совместимое подмножество из C. В силу леммы 9.23

$$\bigcap \{\mu_j f \mid j = 1, 2, \ldots, k\} \subseteq \mu f.$$

Следовательно, для любого $\mu \in M$

$$\bigcap \{\nu f \mid \nu \in C\} \subseteq \mu f.$$

Тогда

$$\bigcap \{\nu f \mid \nu \in C\} = \bigcap \{\mu f \mid \mu \in M\} = k(\rho).$$

Так как C конечно, $k(\rho)$ совпадает с пересечением конечного множества идеалов. Таким образом, $k(\rho)$ не пусто.

Пусть A — произвольный идеал из F и $B = \{\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k\}$ — его базис. Определим следующим образом *норму* $\| A \|$ идеала A:

$$\| A \| = \sum \{ \| \beta_i \| \, i = 1, 2, \ldots, k\},$$

где норма $\| \alpha \|$ элемента $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ из F определяется равенством

$$\| \alpha \| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n.$$

(Мы предпочитаем термин «норма» термину «высота», который употреблял Редеи.)

Сердцевина конгруэнции ρ на F является идеалом в F. Определим *норму* $\| \rho \|$ (или $\| \mathcal{P} \|$) конгруэнции ρ (или конгруэнцпары $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\rho)$), полагая

$$\| \rho \| = \| \mathcal{P} \| = \| k(\rho) \|.$$

Пусть M — подгруппа из G. Тогда M определяет следующую конгруэнцию ρ_M на F:

$$\rho_M = \{(\alpha, \beta) \in F \times F \mid \alpha - \beta \in M\}.$$

Конгруэнция ρ_M есть ограничение на F конгруэнции на G, определяемой нормальным делителем M.

Доказательство того, что конгруэнция на F является конечно порожденной, будет проводиться при помощи двойной индукции по ее норме и числу образующих полугруппы F. Начнем со случая нулевой нормы; такие конгруэнции описаны в следующей лемме.

Лемма 9.25. *Пусть ρ — конгруэнция на F. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

(i) $\rho = \rho_M$ *для некоторой подгруппы M из G.*

(ii) $\| \rho \| = 0$.

(iii) $k(\rho) = F$.

При этом подгруппа M, фигурирующая в условии (i), *совпадает с M_ρ.*

Доказательство. Очевидно, $k(\rho) = F$ тогда и только тогда, когда $\| \rho \| = 0$. Таким образом, (ii) и (iii) эквивалентны.

Пусть $\rho = \rho_M$. Тогда $M_\rho = \{\alpha - \beta \mid (\alpha, \beta) \in \rho\}$, откуда в силу определения ρ_M непосредственно получаем $M_\rho = M$. Пусть $\mu \in M$. Тогда $\mu f_\rho = \{\xi \in F \mid (\xi + \mu^+, \xi + \mu^-) \in \rho\}$. Так как $\xi + \mu^+ - (\xi + \mu^-) = \mu \in M$, имеем $\mu f_\rho = F$. Следовательно, $k(\rho) = F$ и $\| \rho \| = 0$, т. е. из (i) вытекают свойства (ii), (iii) и $M = M_\rho$.

Предположим, что выполняется условие (iii). Пусть $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\rho) = (f_\rho, M_\rho) = (f, M)$. Если $(\alpha, \beta) \in \rho$, то по определению M имеем $\alpha - \beta \in M$. Обратно, предположим, что $\alpha - \beta = \mu \in M$. Так как $k(\rho) = F$, отсюда вытекает, что $\mu f = F$. Следовательно, в частности, $\alpha \wedge \beta \in \mu f$, т. е. $(\alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^+, \alpha \wedge \beta + (\alpha - \beta)^-) \in \rho$, откуда $(\alpha, \beta) \in \rho$. Таким образом, (iii) влечет за собой (i). Это завершает доказательство леммы.

Тот факт, что конгруэнция нулевой нормы конечно порождена, как мы теперь покажем, следует непосредственно из леммы 9.22.

Лемма 9.26. *Пусть* ρ — *конгруэнция на* F *и* $\| \rho \| = 0$. *Тогда* ρ *конечно порождена.*

Доказательство. В силу предыдущей леммы $\rho = \rho_M$, где $M = M_\rho$. На основании леммы 9.22 M обладает таким конечным подмножеством C, что каждый элемент из M можно представить в виде суммы неотрицательных кратных элементов некоторого совместимого подмножества из C. Таким образом, если $\mu \in M$, то

$$\mu = \sum \{c_i \nu_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\},$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — неотрицательные целые числа, а $\{\nu_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\}$ — совместимое подмножество из C. Тогда по лемме 9.21 имеем

$$\mu^+ = \sum \{c_i \nu_i^+ \mid i = 1, 2, \ldots, k\},$$
$$\mu^- = \sum \{c_i \nu_i^- \mid i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Так как $\rho = \rho_M$ и каждое ν_i принадлежит M, имеем $(\nu_i^+, \nu_i^-) \in \rho$. Из предыдущих выражений для μ^+ и μ^- вытекает, что μ^- можно получить из μ^+ при помощи последовательности элементарных ρ-переходов, причем каждый ρ-переход заменяет вхождение ν_i^+ на ν_i^-.

Положим

$$\sigma = \{(\nu^+, \nu^-) \mid \nu \in C\}.$$

Тогда σ конечно, $\sigma \subseteq \rho$ и мы установили, что $(\mu^+, \mu^-) \in \sigma^*$ для любого $\mu \in M$. Пусть теперь (α, β) — произвольный элемент из ρ, т. е. $\alpha - \beta \in M$. Положим $\alpha - \beta = \mu$. Тогда $\alpha = \alpha \wedge \beta + \mu^+$ и $\beta = \alpha \wedge \beta + \mu^-$. Так как $(\mu^+, \mu^-) \in \sigma^*$, очевидно также, что $(\alpha \wedge \beta + \mu^+, \alpha \wedge \beta + \mu^-) \in \sigma^*$, т. е. $(\alpha, \beta) \in \sigma^*$. Таким образом, мы доказали, что $\rho \subseteq \sigma^*$, откуда $\rho = \sigma^*$. Следовательно, ρ конечно порождена и доказательство леммы завершено.

Для того чтобы начать проведение индукции, мы должны рассмотреть случай $n = 1$, т. е. случай, когда F является коммутативной свободной полугруппой с одним образующим. Здесь непосредственно проверяется, что каждая конгруэнция конечно порождена; существует даже одноэлементное подмножество в каждой конгруэнции, порождающее ее. Детали см. в упражнении 5 к данному параграфу.

В качестве одного из шагов нашего доказательства мы покажем, как, исходя из некоторой конгруэнции на F, можно конструировать другие конгруэнции меньшей нормы.

Лемма 9.27. *Пусть ρ — такая конгруэнция на F, что некоторый элемент из базиса сердцевины $k(\rho)$ имеет ненулевую первую компоненту. Обозначим через λ элемент* $(1, 0, 0, \ldots, 0)$ *из F. Определим отношение ρ_1, полагая*

$$\rho_1 = \{(\alpha, \beta) \in F \times F \mid (\alpha + \lambda, \beta + \lambda) \in \rho\}.$$

Тогда ρ_1 является конгруэнцией на F и $\| \rho_1 \| < \| \rho \|$.

Доказательство. Очевидно, ρ_1 наследует свойства рефлексивности, симметричности, транзитивности и стабильности от ρ. Таким образом, ρ_1 есть конгруэнция на F. Далее, отметим, что, очевидно, $M_\rho = M_{\rho_1}$, и обозначим это множество через M.

Покажем прежде всего, что $k(\rho) \subseteq k(\rho_1)$ и $k(\rho_1) + \lambda \subseteq k(\rho)$. В самом деле, если $\beta \in k(\rho)$, т. е. $(\beta + \mu^+, \beta + \mu^-) \in \rho$ для всех $\mu \in M$, то $(\beta + \lambda + \mu^+, \beta + \lambda + \mu^-) \in \rho$, т. е. $(\beta + \mu^+, \beta + \mu^-) \in \rho_1$ для всех $\mu \in M$, откуда $\beta \in k(\rho_1)$. Следовательно, $k(\rho) \subseteq k(\rho_1)$; второе утверждение доказывается аналогично. Будем использовать в дальнейшем эти два соотношения без особых ссылок.

Пусть $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ — базис сердцевины $k(\rho)$. Предположим, что $\beta_1, \ldots, \beta_t$ — элементы базиса, имеющие положительную первую компоненту. По предположению $t \geqslant 1$. Положим $\gamma_j = \beta_j - \lambda$ для $j \leqslant t$. Тогда γ_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$ являются различными элементами базиса сердцевины $k(\rho_1)$. В самом деле, во-первых, γ_j являются элементами из F. Далее, $\gamma_j \in k(\rho_1)$. Действительно, $(\beta_j + \mu^+, \beta_j + \mu^-) \in \rho$, т. е. $(\gamma_j + \lambda + \mu^+, \gamma_j + \lambda + \mu^-) \in \rho$, откуда $(\gamma_j + \mu^+, \gamma_j + \mu^-) \in \rho_1$ для всех $\mu \in M$. Предположим, что $\alpha \in k(\rho_1)$ и $\alpha \leqslant \gamma_j$. Тогда $\alpha + \lambda \leqslant \gamma_j + \lambda = \beta_j$. Но $\alpha + \lambda \in k(\rho)$, следовательно, $\alpha + \lambda = \beta_j$, так как β_j является элементом базиса сердцевины $k(\rho)$. Отсюда $\alpha = \gamma_j$, т. е. мы установили, что γ_j есть элемент базиса сердцевины $k(\rho_1)$.

Рассмотрим теперь произвольный элемент γ из базиса сердцевины $k(\rho_1)$. Тогда $\gamma + \lambda \in k(\rho)$ и поэтому существует такой элемент β_i из базиса сердцевины $k(\rho)$, что $\beta_i \leqslant \gamma + \lambda$. Если $i \leqslant t$, то $\gamma_i = \beta_i - \lambda \leqslant \gamma$, откуда $\gamma_i = \gamma$, так как γ_i есть элемент из $k(\rho_1)$. Если $i > t$, то первая компонента элемента β_i равна 0 и поэтому $\beta_i \leqslant \gamma$. Но $\beta_i \in k(\rho_1)$, следовательно, $\beta_i = \gamma$, так как γ является минимальным элементом в $k(\rho_1)$.

Таким образом, мы доказали, что базис сердцевины $k(\rho_1)$ распадается на два подмножества. Одно подмножество состоит из γ_j $(j = 1, 2, \ldots, t)$, которым соответствуют элементы $\beta_j = \gamma_j + \lambda$ базиса сердцевины $k(\rho)$. Это подмножество не пусто и $\| \gamma_j \| < \| \beta_j \|$ для каждого j. Другое подмножество, возможно пустое, состоит из элементов базиса сердцевины $k(\rho_1)$, которые являются также элементами базиса сердцевины $k(\rho)$. Теперь непосредственно получаем $\| \rho_1 \| < \| \rho \|$. Это завершает доказательство леммы.

Теперь можно закончить доказательство теоремы Редеи. Как мы установили, конгруэнция ρ на F конечно порождена, если $\| \rho \| = 0$ (лемма 9.26) или n — число образующих полугруппы F — равно 1 (замечание, следующее за леммой 9.26). Предположим, что $n > 1$, $\| \rho \| = s > 0$ и утверждение справедливо для конгруэнций на F с меньшей нормой и для произвольных конгруэнций на свободной коммутативной полугруппе с менее чем n образующими.

Так как $\| \rho \| = s > 0$, существует ненулевой элемент в базисе сердцевины $k(\rho)$. Без ограничения общности можно предположить, что в базисе сердцевины $k(\rho)$ содержится элемент с ненулевой компонентой. Тогда конструкция леммы 9.27 дает конгруэнцию ρ_1 на F, для которой $\| \rho_1 \| < s$. По предположению индукции ρ_1 конечно порождена. Пусть σ_1 — конечное порождающее множество конгруэнции ρ_1. Положим

$$\sigma = \{(\alpha + \lambda, \ \beta + \lambda) \mid (\alpha, \beta) \in \sigma_1\}.$$

По определению конгруэнции ρ_1 имеем $\sigma \subseteq \rho$.

Обозначим через H_{n-1} множество элементов из F с нулевой первой компонентой. Тогда H_{n-1} есть подполугруппа, изоморфная свободной коммутативной полугруппе с $n - 1$ образующими. Очевидно, $\rho \cap (H_{n-1} \times H_{n-1})$ является конгруэнцией на H_{n-1}. По предположению индукции $\rho \cap (H_{n-1} \times H_{n-1})$ порождается конечным подмножеством τ.

Рассмотрим теперь множество, возможно пустое, всех $(\alpha, \beta) \in \rho$, для которых $\alpha \in H_{n-1}$ и $\beta \notin H_{n-1}$. Обозначим это множество через W. Положим

$$A = \{\alpha \mid (\alpha, \beta) \in W \text{ для некоторого } \beta\}.$$

По теореме 9.18 множество всех минимальных элементов в A конечно. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — минимальные элементы в A. Выберем такие $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$, что $(\alpha_i, \beta_i) \in W$ $(i = 1, 2, \ldots \ldots, k)$, и положим

$$\pi = \{(\alpha_i, \beta_i) \mid i = 1, 2, \ldots, k\}.$$

Приступим теперь к доказательству того, что $(\pi \cup \tau \cup \sigma)^* = \rho$. Пусть $(\alpha, \beta) \in \rho$. Если $\alpha = \beta$, то $(\alpha, \beta) \in (\pi \cup \tau \cup \sigma)^*$. Для остальных пар (α, β) либо (a) элементы α и β имеют положительную первую компоненту, т. е. $\alpha \notin H_{n-1}$ и $\beta \notin H_{n-1}$, либо (b) $(\alpha, \beta) \in H_{n-1} \times H_{n-1}$, либо (c) (α, β) или (β, α) принадлежит W. Рассмотрим каждый случай отдельно.

(a) Здесь $\alpha - \lambda$ и $\beta - \lambda$ принадлежат F и поэтому $(\alpha - \lambda, \beta - \lambda) \in \rho_1$. Следовательно, $\beta - \lambda$ можно получить из $\alpha - \lambda$ конечной последовательностью элементарных σ_1-переходов. Добавляя всюду λ, мы выводим, что β можно получить из α конечной последовательностью элементарных σ-переходов. Таким образом, $(\alpha, \beta) \in \sigma^*$ и, тем более, $(\alpha, \beta) \in (\pi \cup \tau \cup \sigma)^*$.

(b) Здесь $(\alpha, \beta) \in \rho \cap (H_{n-1} \times H_{n-1})$. Следовательно, $(\alpha, \beta) \in \tau^*$, откуда $(\alpha, \beta) \in (\pi \cup \tau \cup \sigma)^*$.

(c) Достаточно рассмотреть случай, когда $(\alpha, \beta) \in W$. Пусть α_i — такой минимальный элемент из A, что $\alpha_i \leqslant \alpha$. Тогда $\alpha - \alpha_i \in F$. Добавляя $\alpha - \alpha_i$ к обоим элементам пары (α_i, β_i), мы получаем, что $(\alpha, \alpha - \alpha_i + \beta_i) \in \pi^*$, так как $(\alpha_i, \beta_i) \in \pi$. Так как $\pi^* \subseteq \rho$ и $(\alpha, \beta) \in \rho$, мы заключаем, что $(\alpha - \alpha_i + \beta_i, \beta) \in \rho$. В силу того что $\beta_i, \beta \notin H_{n-1}$, на основании случая (a) имеем $(\alpha - \alpha_i + \beta_i, \beta) \in \sigma^*$. Следовательно, $(\alpha, \beta) \in (\pi \cup \sigma)^* \subseteq (\pi \cup \tau \cup \sigma)^*$.

Заметим, наконец, что если ρ есть конгруэнция на полугруппе S, то $\rho^1 = \rho \cup \{(1, 1)\}$ является конгруэнцией на S^1 и ρ конечно порождена тогда и только тогда, когда ρ^1 конечно порождена. Итак, мы доказали теорему Редеи ([1963], стр. 124).

Теорема 9.28. *Конечно порожденная коммутативная полугруппа является конечно определенной полугруппой.*

∗ Краткий и элегантный вывод теоремы 9.28 из теоремы Гильберта о базисах, примененной к целочисленным полугрупповым кольцам, см. в работе Фрейда [1968]. ∗

Упражнения к § 9.3

1. Пусть ρ — конгруэнция на полугруппе S. Тогда ρ является подполугруппой прямого произведения $S \times S$. Предположим, что ρ конечно порождается *как подполугруппа* своим конечным подмножеством σ. Тогда $\sigma^* = \rho$.

Обратное не выполняется. В качестве примера можно взять бесконечную полугруппу S с нулевым умножением. Отношение равенства ι_S на S является тогда конечно порожденной конгруэнцией на S, но ι_S не является конечно порожденной подполугруппой из $S \times S$.

2. Пусть F — свободная коммутативная полугруппа с единицей и n образующими, состоящая из всех упорядоченных n-к $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ неотрицательных целых чисел, и S — ее подполугруппа, состоящая из всех упорядоченных n-к положительных целых чисел. Тогда при $n > 1$ полугруппа S не конечно порождена: любое порождающее множество полугруппы должно содержать все n-ки $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, для которых $a_i = 1$ хотя бы для одного $i = 1, 2, \ldots, n$.

3. Пусть F — свободная коммутативная полугруппа с единицей и одним образующим, так что F можно считать аддитивной полугруппой неотрицательных чисел. Тогда любая подполугруппа из F конечно порождена. (Редеи [1963], стр. 137.)

4. Пусть S — такая полугруппа, что каждая подполугруппа из $S \times S$ конечно порождена. Тогда каждая конгруэнция на S конечно порождена.

5. Пусть F — аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел и ρ — конгруэнция на ней. Тогда либо ρ есть отношение равенства на F, либо существуют такие целые числа $r \geqslant 0$ и $m > 0$, что $(r, r+m) \in \rho$. Выберем r и m так, чтобы $r+m$ принимало здесь наименьшее возможное значение. Тогда $\{(r, r+m)\}^* = \rho$.

6. Пусть F — аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел и ρ — конгруэнция на ней, не являющаяся отношением равенства. Выберем r и m, как в упражнении 5, так что $\{(r, r+m)\}^* = \rho$. Если ρ — отношение равенства, то мы можем включить эту конгруэнцию в нашу схему, полагая $r = \infty$, $m = 0$, где ∞ присоединяется к F в качестве нуля и где мы считаем $m < \infty$ для любого $m \in F$. Тогда мы формально пишем $\iota_F = \{(\infty, \infty + 0)\}^*$.

В этих обозначениях пусть $\rho = \{(r, r+m)\}^*$ и $\sigma = \{(s, s+n)\}^*$ — две произвольные конгруэнции на F. Тогда $\rho \subseteq \sigma$ в том и только в том случае, когда (i) $r \geqslant s$ и (ii) $n \mid m$ (т. е. n делит m). Таким образом, структура конгруэнций на F изоморфна структуре, двойственной прямому произведению структур L и M, где L обозначает F^0 с естественным порядком и M обозначает структуру F неотрицательных целых чисел относительно обычного отношения деления. Структуры L и M дистрибутивны. Отсюда следует, что структура $L \times M$ конгруэнций на F также дистрибутивна.

7. Пусть F — аддитивная полугруппа неотрицательных целых чисел и ρ — конгруэнция на ней, отличная от ι_F. В обозначениях упражнения 5 $\rho = \{(r, r+m)\}^*$ для некоторых целых чисел $r \geqslant 0$ и $m > 0$. Тогда M_ρ — (циклическая) подгруппа из G,

порожденная m, и если $\mu \in M_\rho \setminus 0$, то μf_ρ есть идеал из F, порожденный числом r. Таким образом, в частности, условие «$\mu f_\rho = F$ для всех $\mu \in M_\rho$» эквивалентно каждому из условий: (i) $r = 0$, (ii) F/ρ — группа, (iii) $\rho = \rho_{M_\rho}$.

8. Пусть $A = \mu^+ + \mu f$, $B = \nu^+ + \nu f$ и $C = \mu \vee \nu + (\mu - \nu) f$, где $\mu, \nu \in M$, и (f, M) есть конгруэнц-пара на F. Тогда

$$A \cap B = B \cap C = C \cap A.$$

(Указание: применить свойство C (iii) отображения f из леммы 9.15 к паре $(-\nu, \mu - \nu)$ и добавить ν к обеим сторонам.) (Редеи [1963], стр. 30.)

9. Пусть ρ — конгруэнция на F и $M = M_\rho = \{\alpha - \beta \mid (\alpha, \beta) \in \rho\}$. Тогда F/ρ есть полугруппа с сокращениями в том и только в том случае, когда $\rho = \rho_M$ (в обозначениях леммы 9.25). (Редеи [1963], стр. 121.)

10. Пусть ρ — конгруэнция на F и (f, M) — ассоциированная с ней конгруэнц-пара. Тогда сердцевина $k(\rho) = \bigcap \{\mu f \mid \mu \in M\}$ конгруэнции ρ состоит из всех элементов $\xi \in F$, обладающих следующим свойством: если α и β — такие элементы из F, что $\alpha \geqslant \xi$, $\beta \geqslant \xi$ и $\alpha - \beta \in M$, то $(\alpha, \beta) \in \rho$. (Редеи [1963], стр. 98.)

§ 9.4. *Вложение полугрупповых амальгам; свободные произведения с амальгамами*

Все результаты, приведенные в этом параграфе, за исключением примера Кимуры [1957], принадлежат Хауи ([1962], [1963a, b, c], [1964a, b]). Мы упростили первоначальное изложение Хауи, введя понятие так называемого «собственного слова».

Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп, индексированных некоторым множеством I, и U — некоторая полугруппа. Предположим, что каждая полугруппа S_i содержит подполугруппу, изоморфную U. Таким образом, для каждого $i \in I$ существует изоморфизм φ_i: $U \to S_i$ полугруппы U в S_i. Такую систему полугрупп и изоморфизмов будем обозначать через $[\{S_i \mid i \in I\}; U; \{\varphi_i \mid i \in I\}]$, а также будем использовать одно из следующих более кратких обозначений: $[\{S_i\}; U; \{\varphi_i\}]$, $[S_i; U; \varphi_i]$, $[\{S_i\}; U]$ или $[S_i; U]$. Систему $[S_i; U; \varphi_i]$ будем называть *полугрупповой амальгамой*.

Полугрупповая амальгама $[S_i; U; \varphi_i]$ определяет следующий частичный группоид $\mathcal{G} = \mathcal{G}[S_i; U; \varphi_i]$.

Во-первых, для каждого $i \in I$ положим $U_i = U\varphi_i$ и

$$S_i' = (S_i \setminus U_i) \cup U.$$

Определим операцию $*$ в S_i' таким образом, чтобы отображение

$$\chi_i\colon\ S_i' \to S_i,$$

заданное условием

$$a\chi_i = \begin{cases} a, & \text{если } a \in S_i \setminus U_i, \\ a\varphi_i, & \text{если } a \in U, \end{cases}$$

являлось изоморфизмом полугруппы S'_i на S_i. Это условие однозначно определяет операцию $*$. Во-вторых, предположим, и это весьма важно, что $S'_i \cap S'_j = U$ для $i \neq j$. Ограничение на U операции $*$, определенной в S'_i, совпадает с операцией в полугруппе U. Таким образом, $U = (U, *)$ является подполугруппой из $(S'_i, *)$ для всех $i \in I$. Определим теперь $\mathcal{G}$. Как множество частичный группоид $\mathcal{G}$ равен

$$\bigcup \{S'_i \mid i \in I\}.$$

Операция в $\mathcal{G}$ совпадает с операцией $*$ всюду, где последняя определена. На протяжении этого параграфа символы S'_i и χ_i будут всегда иметь указанный выше смысл.

Нам будет удобно включить в наши рассмотрения случаи, когда U пусто. Частичный группоид $\mathcal{G}[S_i; \varnothing]$ является тогда просто объединением попарно не пересекающихся полугрупп S_i.

Нас интересует вопрос, когда для данной полугрупповой амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$ ее частичный группоид $\mathcal{G}[S_i; U; \varphi_i]$ может быть вложен в полугруппу. Вложение, конечно, должно быть таким, чтобы произведение, определенное в $\mathcal{G}$, совпадало с произведением в полугруппе, в которую осуществлено это вложение. Если $\mathcal{G}[S_i; U; \varphi_i]$ может быть вложен в полугруппу T, то мы будем говорить, что *полугрупповая амальгама* $[S_i; U; \varphi_i]$ может быть вложена в T. Начнем с примера Кимуры [1957], который показывает, что полугрупповая амальгама не всегда может быть вложена в полугруппу.

Пусть $U = \{u, v, w, z\}$ — полугруппа с нулевым умножением, нуль которой равен z. Положим $S_1 = U \cup \{a\}$, где $a \notin U$, $au = ua = v$ и все остальные произведения в S_1 равны z. Положим также $S_2 = U \cup \{b\}$, где $b \notin S_1$, $bv = vb = w$ и все остальные произведения в S_2 равны z. Тогда $S_1 \cap S_2 = U$ и непосредственно проверяется, что относительно только что определенных произведений S_1 и S_2 являются полугруппами. Предположим, что существует полугруппа T, в которую может быть вложено $S = S_1 \cup S_2$. Тогда в силу ассоциативности операции в T имеют место следующие равенства:

$$w = bv = bua = za = z.$$

Таким образом, элементы w и z должны совпадать в T. Следовательно, $[\{S_1, S_2\}; U]$ нельзя вложить ни в какую полугруппу.

Разберем сначала два простых случая. Во-первых, заметим, что $\mathcal{G}[S_i; U; \varphi_i]$ является полугруппой тогда и только тогда, когда U_i есть собственная подполугруппа из S_i, т. е. $U_i \neq S_i$, самое большее лишь для одного $i \in I$. Если $\mathcal{G}$ не является полугруппой, т. е. если операция $*$ определена не для всех пар из $\mathcal{G}$, то $[S_i; U_i; \varphi_i]$ будем называть *собственной амальгамой.*

Во-вторых, поставим вопрос: *вкладывается ли собственная амальгама $[S_i; U]$ в полугруппу простым присоединением нуля к $\mathcal{G}[S_i; U]$ и доопределением операции умножения следующим образом: сохраняя все уже определенные произведения, положим все остальные равными нулю?*

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Предварительно нам потребуется одно определение. Подмножество C, возможно пустое, полугруппы T называется *плотным*[1]) *подмножеством* в T, если включение $ab \in C$ для $a, b \in T$ влечет за собой $a \in C$ и $b \in C$. В частности, пустое множество является плотным подмножеством в T. (Дюбрей [1941].)

Теорема 9.29. *Пусть $[S_i; U; \varphi_i]$ — собственная амальгама, такая, что U_i строго содержится в S_i хотя бы для двух индексов $i \in I$. Определим группоид $\mathcal{G}^0$ присоединением нуля 0 к $\mathcal{G}$. Положим все произведения элементов из $\mathcal{G}^0$, не определенные в $\mathcal{G}$, равными 0 и сохраним произведения в $\mathcal{G}$.*

Тогда $\mathcal{G}^0$ является полугруппой в том и только в том случае, когда U_i есть плотная подполугруппа в S_i для каждого $i \in I$.

Доказательство. Напомним, что в силу леммы 3.7 $\mathcal{G}^0$ является полугруппой тогда и только тогда, когда для любых $a, b, c \in \mathcal{G}$ выполняются следующие условия:

(i) если $a * b$ и $(a * b) * c$ определены, то определены также $b * c$ и $a * (b * c)$ и

$$a * (b * c) = (a * b) * c,$$

(ii) если $b * c$ и $a * (b * c)$ определены, то определены также $a * b$ и $(a * b) * c$ и

$$(a * b) * c = a * (b * c).$$

Предположим, что U_i — плотная подполугруппа из S_i для каждого $i \in I$. Пусть a, b, c — такие элементы из $\mathcal{G}$, что $a * b$ и $(a * b) * c$ определены. Так как $a * b$ определено, существует такое $i \in I$, что $a, b \in S'_i$. Аналогично, существует такое $j \in I$, что $a * b, c \in S'_j$. Если $i = j$, то $b * c$ и $a * (b * c)$ определены в S'_i и $a * (b * c) = (a * b) * c$. Если $i \neq j$, то $a * b \in U$, откуда ввиду плотности U_i в S_i имеем $a, b \in U$. Следовательно, $a, b \in S'_j$ и требуемое заключение получается, как и выше. Этим установлено, что выполняется условие (i). Аналогично проверяется условие (ii). Таким образом, $\mathcal{G}^0$ является полугруппой.

Обратно, предположим, что $\mathcal{G}^0$ является полугруппой, но U_i не плотно в S_i. Тогда существуют такие $a, b \in S'_i$, что $ab \in U$, но, например, $a \notin U$. Пусть c — элемент из $S_j \setminus U_j$, где $j \neq i$.

[1]) Consistent.— *Прим. перев.*

По предположению относительно $[S_i; U; \varphi_i]$ существует такое $j \neq i$, что $S_j \setminus U_j \neq \varnothing$. Тогда $c * (a * b)$ определено. Однако $c * a$ не определено в $\mathcal{G}$. Таким образом, для $\mathcal{G}$ не выполняется условие (ii). Следовательно, $\mathcal{G}^0$ не является полугруппой, что противоречит предположению. Итак, если $\mathcal{G}^0$ — полугруппа, то U_i есть плотное подмножество в S_i для каждого $i \in I$. Это завершает доказательство теоремы.

Обратимся теперь к ключевому понятию для нашей темы — понятию свободного произведения полугрупп с объединенной подполугруппой. Мы увидим (теорема 9.31), что полугрупповая амальгама может быть вложена в некоторую полугруппу тогда и только тогда, когда она может быть вложена в ассоциированное с ней свободное произведение с амальгамой.

Определим сначала *свободное произведение* полугрупп S_i $(i \in I)$. Предположим, что $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Образуем множество W, состоящее из всех таких конечных непустых последовательностей $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, что если a_j принадлежат $S_{i(j)}$ для $j = 1, 2, \ldots, k$, то $i(j) \neq i(j+1)$ для $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Определим теперь следующим образом произведение $\circ$ в множестве «слов» W:

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \circ (b_1, b_2, \ldots, b_s) = (a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, b_2, \ldots, b_s)$
если $a_k \in S_i$, $b_1 \in S_j$ и $i \neq j$;

$(a_1, a_2, \ldots, a_k) \circ (b_1, b_2, \ldots, b_s) = (a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k b_1, b_2, \ldots, b_s)$,
если $a_k \in S_i$ и $b_1 \in S_i$ для некоторого $i \in I$.

Короткая непосредственная проверка показывает, что операция $\circ$ ассоциативна, т. е. $(W, \circ)$ — полугруппа. Будем называть полугруппу $(W, \circ)$ *свободным произведением полугрупп* S_i $(i \in I)$ и обозначать через $\prod^* \{S_i \mid i \in I\}$ или, более просто, через $\prod^* \{S_i\}$ или $\prod^* S_i$.

Частным случаем свободного произведения полугрупп является свободная полугруппа $\mathcal{F}_X$ на множестве X. Если $X = \{x_i \mid i \in I\}$, то $\mathcal{F}_X$ есть свободное произведение бесконечных циклических полугрупп $\langle x_i \rangle$ $(i \in I)$ (см. § 1.12).

Для каждого $i \in I$ определим следующим образом отображение $\varkappa_i$: $S_i \to \prod^* S_i$:

$$\varkappa_i\colon\ a \to a\varkappa_i = (a) \qquad (a \in S_i).$$

Тогда $\varkappa_i$ является изоморфным вложением, которое называется *каноническим изоморфизмом* или *вложением полугруппы* S_i в $\prod^* S_i$. Мы часто будем отождествлять S_i, если нет опасности возникновения двусмысленности, с ее каноническим образом $S_i\varkappa_i$ в $\prod^* S_i$. Тогда можно считать, что $\prod^* S_i$ порождается своими подполугруппами S_i $(i \in I)$. Если произведено такое отождествление, то элемент $(a_1, a_2, \ldots, a_k) \in \prod^* S_i$ отождествляется с $(a_1, a_2, \ldots, a_k) = (a_1) \circ (a_2) \circ \ldots \circ (a_k) = a_1 \circ a_2 \circ \ldots \circ a_k$.

Последнее слово мы будем записывать просто в виде $a_1a_2 \ldots a_k$. Таким образом, элементами полугруппы $\prod^* S_i$ являются такие непустые конечные слова $a_1a_2 \ldots a_k$, что $a_j \in S_{i(j)}$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, k$ и $i(j) \neq i(j+1)$ для $j = 1, 2, \ldots, k-1$. Слово $a_1a_2 \ldots a_k$, удовлетворяющее этим условиям, будем называть *неприводимым*.

Рассмотрим одно свойство полугруппы $\prod^* \{S_i \mid i \in I\}$, которое понадобится в дальнейшем. Пусть $\psi_i \colon S_i \to T$ есть гомоморфизм полугруппы S_i в T для каждого $i \in I$. Определим следующим образом $\varphi \colon \prod^* S_i \to T$. Пусть w — произвольный элемент из $\prod^* S_i$ и $w = a_1a_2 \ldots a_k$ — представление этого элемента в виде неприводимого слова. Пусть $a_j \in S_{(i)j}$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$. Определим $w\varphi$, полагая

$$w\varphi = a_1\psi_{i(1)} \ldots a_k\psi_{i(k)}.$$

Этим $w\varphi$ определено однозначно, потому что в силу определения $\prod^* S_i$ различные неприводимые произведения являются различными элементами в $\prod^* S_i$. Легко проверить, что φ есть изоморфизм $\prod^* S_i$ в T. Кроме того, для каждого $i \in I$ ограничение на S_i гомоморфизма φ совпадает с ψ_i и, так как полугруппа $\prod^* S_i$ порождается полугруппами S_i, φ является единственным гомоморфизмом полугруппы $\prod^* S_i$, продолжающим каждый из гомоморфизмов ψ_i.

Эквивалентные определения свободного произведения встретятся в упражнениях 1 и 2 к настоящему параграфу.

Рассмотрим теперь полугрупповую амальгаму $[\{S_i \mid i \in I\}; U; \{\varphi_i \mid i \in I\}]$, где опять для простоты рассуждений мы предполагаем, что $S_i \cap S_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Определим отношение υ на $\prod^* S_i$, полагая

$$\upsilon = \{((u_i), (u_j)) \mid u_i = u\varphi_i,\ u_j = u\varphi_j \text{ для некоторых } i, j \in I \text{ и некоторого } u \in U\}.$$

Более просто, отождествляя каждое S_i с его каноническим образом в $\prod^* S_i$, мы имеем

$$\upsilon = \{(u_i, u_j) \mid u_i = u\varphi_i,\ u_j = u\varphi_j \text{ для некоторых } i, j \in I \text{ и некоторого } u \in U\}.$$

Назовем тогда полугруппу $(\prod^* \{S_i \mid i \in I\})/\upsilon^*$ *свободным произведением полугрупп* $\{S_i,\ i \in I\}$ *с объединенной подполугруппой* U, *определенным полугрупповой амальгамой* $[S_i; U; \varphi_i]$. Мы продолжаем обозначать (см. § 9.2) через ρ^* конгруэнцию, порожденную отношением ρ. Это свободное произведение с объединенной подполугруппой будем обозначать также через $\prod_U^* \{S_i \mid i \in I\}$

или просто через $\prod_U^* S_i$. Кратко $\prod_U^* S_i$ может быть названо *свободным произведением амальгамы* $[S_i; U]$.

Некоторые эквивалентные определения свободного произведения амальгамы содержатся в упражнениях 3—5 к настоящему параграфу.

Отождествляя каждую полугруппу S_i с ее каноническим образом в $\prod^* S_i$, определим *канонический гомоморфизм* μ_i: $S_i \to \to \prod_U^* S_i$, полагая

$$\mu_i: \quad a \to a\mu_i = av^* \qquad (a \in S_i).$$

Тогда для любых $u \in U$ выполняется

$$u\varphi_i\mu_i = u\varphi_j\mu_j,$$

так как $(u\varphi_i, u\varphi_j) \in v^*$. Положим $\varphi_i\mu_i = \varphi_j\mu_j = \mu$ для $i, j \in I$. Тогда μ есть гомоморфизм полугруппы U в $\prod_U^* S_i$.

Канонические гомоморфизмы μ_i индуцируют следующий гомоморфизм γ частичного группоида $\mathcal{G} = \mathcal{G}[S_i; U; \varphi_i]$ в $\prod_U^* S_i$:

$$\gamma: \quad a \to a\gamma = a\chi_i\mu_i, \quad \text{если} \quad a \in S_i'.$$

Легко проверить, что γ является гомоморфизмом частичного группоида $\mathcal{G}$ в том смысле, что если $a, b \in \mathcal{G}$ и $a * b$ определено в $\mathcal{G}$, то $(a * b)\gamma = a\gamma b\gamma$. Отображение γ будем называть *каноническим гомоморфизмом частичного группоида* $\mathcal{G}$ в $\prod_U^* S_i$. Гомоморфизмы μ_i определяют γ и, обратно, γ определяет μ_i $(i \in I)$. Более точное описание ситуации дает следующая

Лемма 9.30. *Пусть* $[S_i; U; \varphi_i]$ — *полугрупповая амальгама*, $\mathcal{G}$ — *ее частичный группоид и* T — *полугруппа.*

Пусть δ: $\mathcal{G} \to T$ *есть гомоморфизм. Тогда* $\psi_i = \chi_i^{-1}\delta$ *является гомоморфизмом* S_i *в* T *и* $\varphi_i\psi_i = \varphi_j\psi_j$ *для всех* $i, j \in I$.

Обратно, пусть ψ_i: $S_i \to T$ — *такое семейство гомоморфизмов, что* $\varphi_i\psi_i = \varphi_j\psi_j$ *для всех* $i, j \in I$. *Определим* δ: $\mathcal{G} \to T$, *полагая*

$$\delta: \quad a \to a\delta = a\chi_i\psi_i, \quad \textit{если} \quad a \in S_i'.$$

Тогда δ *является гомоморфизмом.*

Кроме того, соответствие, установленное в двух предыдущих абзацах между гомоморфизмами δ *частичного группоида* $\mathcal{G}$ *и семействами* $\{\psi_i\}$ *гомоморфизмов полугрупп* $\{S_i\}$, *взаимно однозначно.*

Доказательство. Так как ограничение δ на S_i' является гомоморфизмом полугруппы S_i', очевидно, что ψ_i есть гомоморфизм полугруппы S_i. Из определения χ_i вытекает, что $\varphi_i\psi_i = \delta \mid U$.

Обратно, для того, чтобы доказать, что δ есть гомоморфизм для данных ψ_i, достаточно установить, что δ является однозначным отображением, т. е. δ однозначно на U. Но это обеспечивается условием $\varphi_i\psi_i = \varphi_j\psi_j$ для всех $i, j \in I$.

Оставшееся утверждение леммы очевидно. То, что понятие свободного произведения амальгамы является центральным для нашей проблемы вложения, показывает следующая

Теорема 9.31. 1. *Полугрупповая амальгама* $[\{S_i \mid i \in I\}; U; \{\varphi_i \mid i \in I\}]$ *может быть вложена в полугруппу тогда и только тогда, когда канонический гомоморфизм* γ *частичного группоида* $\mathcal{G} = \mathcal{G}[S_i; U; \varphi_i]$ *является вложением частичного группоида* $\mathcal{G}$ *в* $\prod_U^* S_i$, *т. е. тогда и только тогда, когда* γ *взаимно однозначен.*

2. *Гомоморфизм* γ *взаимно однозначен тогда и только тогда, когда выполняются условия:*

(i) *каждый канонический гомоморфизм* μ_i: $S_i \to \prod_U^* S_i$ *взаимно однозначен,*

(ii) $S_i\mu_i \cap S_j\mu_j = U\mu$ *для* $i \neq j$, *где* $\mu = \varphi_i\mu_i$.

Доказательство. Докажем сначала утверждения п. 2. Предположим, что гомоморфизм γ взаимно однозначен. Пусть $a \in S_i$, $b \in S_j$ и $a\mu_i = b\mu_j$. Выберем такие $x \in S_i'$ и $y \in S_j'$, что $x\chi_i = a$, $y\chi_j = b$. Тогда $x\chi_i\mu_i = y\chi_j\mu_j$, т. е. $x\gamma = y\gamma$. Отсюда в силу взаимной однозначности γ имеем $x = y$. Если $i = j$, то предыдущее показывает, что μ_i взаимно однозначно. Если $i \neq j$, то мы заключаем, что $S_i\mu_i \cap S_j\mu_j \subseteq U\mu$. Тогда, поскольку $U\mu \subseteq S_i\mu_i$ для всех i, мы имеем $S_i\mu_i \cap S_j\mu_j = U\mu$. Таким образом, выполняются оба условия (i) и (ii).

Обратно, предположим, что выполняются условия (i) и (ii). Пусть $a, b \in \mathcal{G}$, так что $a \in S_i'$, $b \in S_j'$. Если $a\gamma = b\gamma$, то $a\chi_i\mu_i = b\chi_j\mu_j$. Если $i = j$, то $a = b$ в силу взаимной однозначности μ_i и χ_i. Если $i \neq j$, то условие (ii) влечет за собой $a\chi_i\mu_i = u\mu = u\varphi_i\mu_i$ для некоторого $u \in U$. В силу (i) имеем $a\chi_i = u\varphi_i$, откуда $a = u \in U$ и $a\chi_i\mu_i = a\mu$. Аналогично, $b \in U$ и $b\chi_j\mu_j = b\mu$, откуда $a\mu = b\mu$. В силу взаимной однозначности φ_i и μ_i взаимно однозначно и μ, поэтому $a = b$. Следовательно, γ взаимно однозначно.

Докажем первое утверждение теоремы. Очевидно, если $\mathcal{G}$ может быть вложено в $\prod_U^* S_i$ отображением γ, то амальгама $[S_i; U; \varphi_i]$ вложима в полугруппу. Обратно, предположим, что $[S_i; U; \varphi_i]$ вкладывается в полугруппу T, т. е. $\mathcal{G}$ вкладывается в T отображением δ. Тогда по лемме 9.30 $\psi_i = \chi_i^{-1}\delta$ является гомоморфизмом S_i в T. Так как χ_i и δ взаимно однозначны, ψ_i также взаимно однозначно.

Определим теперь ψ: $\prod^* S_i \to T$ как такой единственный гомоморфизм $\prod^* S_i$ в T, что $\psi \mid S_i = \psi_i$ для каждого $i \in I$. Пусть (u_i, u_j) — произвольный элемент из $\mathfrak{v}$, так что $u_i = u\varphi_i$, $u_j = u\varphi_j$

для некоторого $u \in U$. Тогда $u_i\psi = u\varphi_i\psi = u\chi_i\psi_i = u\delta = u_j\psi$. Следовательно, $\upsilon \subseteq \psi \circ \psi^{-1}$, так что $\upsilon^* \subseteq \psi \circ \psi^{-1}$. Таким образом, существует такой гомоморфизм φ: $\prod_U^* S_i \to T$, что $\psi = (\upsilon^*)^\natural \varphi$. Пусть $a \in \mathcal{G}$ и $a \in S_i'$. Тогда $a\gamma\varphi = a\chi_i\mu_i\varphi = a\chi_i(\upsilon^*)^\natural \varphi = a\chi_i\psi = a\chi_i\psi_i = a\delta$. Таким образом, $\gamma\varphi = \delta$; отсюда вытекает взаимная однозначность γ, так как δ взаимно однозначно. Это завершает доказательство.

Перейдем теперь к изложению основного результата Хауи [1962], дающего достаточное условие вложимости амальгамы в полугруппу. Нам понадобится одно новое понятие.

Напомним, что подмножество U полугруппы S *унитарно слева в* S, если условия $u \in U$, $s \in S$ и $us \in U$ влекут за собой $s \in U$. Двойственным образом определяется *унитарность справа*. Подмножество U *унитарно*, если оно унитарно и слева, и справа (§ 7.3). Хауи обобщил понятие унитарности, введя понятие почти унитарности. Подмножество U из S называется *почти унитарным в* S (*относительно отображений* λ *и* ρ), если существуют отображения λ и ρ полугруппы S в себя, обладающие следующими свойствами:

(a) λ и ρ — соответственно левый и правый сдвиги полугруппы S, коммутирующие между собой.

(b) λ и ρ — идемпотенты.

(c) λ и ρ связаны, т. е. $s(\lambda t) = (s\rho)t$ для всех $s, t \in S$ (см. § 1.3).

(d) Ограничения λ и ρ на U совпадают с тождественным отображением на U.

(e) U унитарно в $\lambda S\rho$.

Обозначения. Нам будет удобно, имея дело с почти унитарными подмножествами, писать λ слева, а ρ — справа, как это сделано выше в (c) и (e). Элементы $(\lambda a)\rho$ и $\lambda(a\rho)$ равны в силу свойства (a), поэтому мы их будем записывать без скобок в виде $\lambda a\rho$ $(a \in S)$. В соответствии с п. (e) и (d) имеем $U \subseteq \lambda S\rho$. Множество $\lambda S\rho$ является подполугруппой из S, так как $\lambda a\rho \cdot \lambda b\rho = \lambda(a\rho \cdot \lambda b)\rho$ $(a, b \in S)$.

Пусть U — произвольное унитарное подмножество из S. Тогда U почти унитарно в S, где в качестве соответствующих отображений берутся тождественные отображения множества S. Связь между унитарностью и почти унитарностью вскрывается полнее следующими двумя теоремами.

Теорема 9.32. *Пусть U — подполугруппа полугруппы S, содержащая единицу e. Тогда U почти унитарна в S в том и только в том случае, когда U унитарна в eSe.*

Доказательство. Пусть подполугруппа U унитарна в eSe. Возьмем в качестве λ и ρ внутренние левый и правый сдвиги

λ_e и ρ_e полугруппы S (§ 1.3). Тогда легко проверить, что U почти унитарна в S относительно этих отображений.

Обратно, предположим, что U почти унитарна в S относительно отображений λ и ρ. Так как $e \in U$, в силу условия (d) мы имеем $\lambda e = e$ и $e\rho = e$. Следовательно, $eSe \subseteq \lambda S\rho$, откуда в силу условия (e) вытекает унитарность U в eSe.

Замечание. В общем случае если U почти унитарна в S относительно отображений λ и ρ, то существует, вообще говоря, много различных пар отображений λ и ρ, которые можно взять в качестве соответствующих отображений. Предыдущая теорема показывает, что если U содержит единицу e, то пару λ, ρ можно заменить на λ_e, ρ_e.

Следствие 9.33. *Пусть U — подгруппа полугруппы S. Тогда U почти унитарна в S.*

Доказательство. Пусть e — единица из U. На основании теоремы достаточно установить унитарность U в eSe. Предположим, что $u \in U$ и $eseu \in U$. Тогда $u^{-1} \in U$ и поэтому $eseuu^{-1} = ese^2 = ese \in U$. Это показывает, что U унитарна справа в eSe. Аналогично проверяется унитарность U слева в S.

Теорема 9.34. *Пусть U — подполугруппа полугруппы S. Тогда U почти унитарна в S в том и только в том случае, когда, присоединяя идемпотент e к S, можно образовать такую полугруппу $S^e = S \cup \{e\}$, что выполняются условия:*

(i) $eS \subseteq S$ *и* $Se \subseteq S$;

(ii) e *является единицей в* $U^e = U \cup \{e\}$;

(iii) U^e *унитарна в* eSe.

Доказательство. Предположим, что к S можно присоединить идемпотент e таким образом, что выполняются условия (i), (ii) и (iii). Возьмем в качестве λ и ρ ограничение на S соответственно сдвигов λ_e и ρ_e полугруппы S^e. Так как $se \neq e$ и $es \neq e$ для $s \in S$, непосредственно получаем, что полугруппа U почти унитарна в S относительно отображений λ и ρ.

Обратно, пусть U почти унитарна в S относительно отображений λ и ρ. Положим $e = (\lambda, \rho)$ и доопределим умножение на $S \cup \{e\}$, полагая $se = s\rho$ и $es = \lambda s$ для $s \in S$ и $e^2 = e$ (ср. построение сдвиговой оболочки в § 1.3). Непосредственная проверка показывает, что e обладает требуемыми свойствами. Это завершает доказательство теоремы.

Пусть S — группа и U — ее унитарная подполугруппа. Тогда если через e обозначена единица, то $eu = u \in U$ влечет за собой $e \in U$ и $uu^{-1} = e \in U$ влечет за собой $u^{-1} \in U$ для любого u из U. Следовательно, U является подгруппой. Обратно, любая подгруппа, очевидно, унитарна. Таким образом, *подполугруппа группы унитарна тогда и только тогда, когда она является подгруппой* (см. упражнение 3 к § 7.3). Из теоремы 9.32 непосредственно вытекает, что для подполугрупп группы понятия унитарности и почти унитарности совпадают.

Основной результат Хауи состоит в том, что полугрупповая амальгама $[S_i;\ U;\ \varphi_i]$ может быть вложена в полугруппу, если подполугруппа $U_i\ (=U\varphi_i)$ почти унитарна в S_i для каждого i. Этот результат основывается на нескольких комбинаторных леммах, которые мы теперь приведем.

Предположим, что $[\{S_i \mid i \in I\};\ U;\ \{\varphi_i \mid i \in I\}]$ есть полугрупповая амальгама и $U_i = U\varphi_i$ почти унитарна в S_i относительно отображений λ_i и ρ_i $(i \in I)$. Пусть слово $w = a_1 a_2 \ldots a_k$ является (неприводимым) элементом из $\prod^* S_i$. Тогда $a_1, a_2, \ldots, a_k$ будем называть *слогами* слова w. Слог a_1 назовем *левым концевым* слогом, а a_k — *правым концевым* слогом слова w. Если $k > 2$, то $a_2, \ldots, a_{k-1}$ назовем *внутренними* слогами слова w. Говорят, что слово w является *собственным* словом, если (i) все его внутренние слоги принадлежат $\bigcup \lambda_i S_i \rho_i$, (ii) его левый концевой слог при $k \geqslant 2$ принадлежит $\bigcup S_i \rho_i$ и (iii) его правый концевой слог при $k \geqslant 2$ принадлежит $\bigcup \lambda_i S_i$. Слово w будем называть *собственным справа* [*слева*], если оно собственное и его правый [левый] концевой слог принадлежит $\bigcup S_i \rho_i$ $[\bigcup \lambda_i S_i]$. Слово w называется *бисобственным*, если оно собственное и слева, и справа. Таким образом, произвольное слово из одного слога собственное, но, вообще говоря, не собственное справа или слева.

Рассмотрим подробней элементарные υ-переходы. Элементарный υ-переход заменяет $u_i \in U_i$ в слове w на $u_j \in U_j$, где $u_i = u\varphi_i$ и $u_j = u\varphi_j$ для некоторого $u \in U$. Такая замена может быть трех видов (относительно слогов слова w): (a) u_i есть слог слова w; (b) s_i есть слог слова w и $s_i = u_i b_i$ или $s_i = a_i u_i$; (c) s_i есть слог слова w и $s_i = a_i u_i b_i$. Переходы типов (a), (b) и (c) будем называть соответственно *S-шагами*, *E-шагами* и *M-шагами* [1]). Естественно, что последующее приведение нового слова к неприводимому виду должно рассматриваться как часть элементарного υ-перехода.

Таким образом, последовательность элементарных υ-переходов является последовательностью S-шагов, E-шагов и M-шагов. Нашей первой целью является установление основного комбинаторного результата о том, что при некоторых общих условиях можно предполагать, что все S-шаги выполняются в такой последовательности первыми.

---

[1]) Здесь взяты первые буквы соответствующих английских терминов: слог (syllable), конец (end) и середина (middle).— *Прим. перев.*

Нам будет удобно ниже для произвольного элемента x из U через x_i обозначать элемент $x\varphi_i \in U_i$ $(i \in I)$.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма 9.35. *Пусть w' получается из w при помощи M-шага и следующего за ними S-шага. Тогда w' можно получить из w при помощи такой последовательности элементарных $\mathfrak{v}$-переходов длины не более двух, что если длина равна двум, то второй переход не является S-шагом.*

Доказательство. Пусть $s_i = a_iu_ib_i \in S_i$ есть слог слова w, который преобразуется в $a_iu_jb_i$, где $j \neq i$, при помощи M-шага. Тогда a_i, u_j и b_i являются слогами слова w'', полученного из w при помощи M-шага. Если слог слова w'', который заменяется S-шагом для получения w', не является соседним с a_i или b_i, то, очевидно, данные M-шаг и S-шаг могут быть выполнены в обратном порядке для получения w'. Если слог u'_k слова w'' непосредственно предшествует слогу a_i (аналогично рассматривается случай, когда u'_k непосредственно следует за b_i) и заменяется на u'_m при помощи S-шага, то снова, если $m \neq i$, M-шаг и S-шаг можно поменять местами. Если $m = i$, то опять возможна простая перестановка шагов. В самом деле, w' можно получить из w при помощи S-шага и следующего за ним M-шага, причем M-шаг преобразует слог $u'_ia_iu_ib_i$ в $u'_ia_iu_jb_i$.

Осталось рассмотреть три случая. Во-первых, пусть S-шаг заменяет $a_i = u'_i$ на u'_m. В этом случае $s_i = a_iu_ib_i = u'_iu_ib_i$ и E-шаг, примененный к w, заменяет s_i на $u'_mu_ib_i$; далее, можно при помощи E-шага заменить $u'_mu_ib_i$ на $u'_mu_jb_i$. Таким образом, w' можно получить из w при помощи двух E-шагов. Аналогично рассматривается второй случай, когда слогом, заменяемым при помощи S-шага, является b_i. Наконец, предположим, что S-шаг заменяет u_j на u_m. Если $m = i$, то $w' = w$. Если $m \neq i$, то достаточно одного M-шага, заменяющего u_i на u_m, для получения w' из w. Доказательство леммы закончено.

Результаты, сформулированные в следующей лемме, содержат несколько непосредственных следствий из определения почти унитарной подполугруппы. Они будут использоваться в вычислениях, там, где это необходимо, без всяких пояснений.

Лемма 9.36. *Пусть U — почти унитарная подполугруппа полугруппы S относительно отображений λ и ρ. Тогда если $u \in U$ и $s, t \in S$, то*

$$\lambda (sut) \rho = (\lambda s\rho) u (\lambda t\rho);$$

$$\lambda (su) = \lambda (su) \rho = (\lambda s\rho) u;$$

$$(us) \rho = \lambda (us) \rho = u (\lambda s\rho).$$

Последовательность $w = w_0 \to w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_n = w'$ элементарных $\mathfrak{v}$-переходов будем называть *собственной* [*слева*, *справа*, *бисобственной*], если w_i собственно [слева, справа, бисобственно] для каждого $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Теперь мы докажем, что последовательность переходов между двумя собственными словами можно считать собственной. Для удобства дадим следующее определение.

Пусть $w = a_1 a_2 \ldots a_k$, где $a_i \in S_{j(i)}$ есть неприводимое слово. Если $k > 1$, положим $b_i = \lambda_{j(i)} a_i \rho_{j(i)}$ для $i \notin \{1, k\}$ и $b_1 = a_1 \rho_{j(1)}$, $b_k = \lambda_{j(k)} a_k$; если $k = 1$, положим $b_1 = a_1$. Тогда $w^* = b_1 b_2 \ldots b_k$ есть собственное слово, которое называется *собственным словом, ассоциированным с* w.

Полагая $b_1 = \lambda_{j(1)} a_1 \rho_{j(1)}$ или $b_k = \lambda_{j(k)} a_k \rho_{j(k)}$ или вводя одновременно обе эти модификации в предыдущее определение, мы получаем соответственно собственное слева или собственное справа, или бисобственное слово, ассоциированное с w. Хотя мы формулируем и доказываем следующую лемму лишь для (немодифицированных) собственных слов и последовательностей, легко видеть, что ее результаты остаются верными при замене слова «собственное» на «собственное слева», «собственное справа» или «бисобственное». Впоследствии у нас возникнут ситуации, в которых мы будем обращаться к этим аналогам леммы 9.37.

Лемма 9.37. *Пусть* $w = w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_n = w'$ *есть последовательность элементарных* $\mathfrak{v}$*-переходов от собственного слова* w *к собственному слову* w' *и* w_t^* *— собственное слово, ассоциированное с* w_t, *где* $t = 0, 1, \ldots, n$.

Тогда

$$w = w_0^* \to w_1^* \to \ldots \to w_n^* = w'$$

есть собственная последовательность элементарных $\mathfrak{v}$*-переходов. Кроме того,* $w_t^* \to w_{t+1}^*$ *является* S*-шагом,* M*-шагом или* E*-шагом в зависимости от того, является ли* $w_t \to w_{t+1}$ *соответственно* S*-шагом,* M*-шагом или* E*-шагом.*

Доказательство. Пусть $w_t = a_1 a_2 \ldots a_k$ — неприводимое слово, где $a_i \in S_{j(i)}$. Тогда $w_t^* = b_1 b_2 \ldots b_k$, где $b_i \in S_{j(i)}$. Предположим, что $w_t \to w_{t+1}$ является S-шагом. Тогда $a_i = u_{j(i)} \in U_{j(i)}$ для некоторого i и w_{t+1} получается из w_t заменой $u_{j(i)}$ на некоторое u_m. В этом случае $a_i = u_{j(i)} = \lambda_{j(i)} u_{j(i)} \rho_{j(i)} = b_i$. Если u_m есть слог слова w_{t+1}, то u_m также является и слогом слова w_{t+1}^*. Если u_m не является слогом слова w_{t+1}, то u_m вместе с некоторым слогом слова w_t образует слог слова w_{t+1}. Предположим, что $m = j(i+1)$. Тогда $u_m a_{i+1}$ есть слог слова w_{t+1} и ассоциированный слог слова w_{t+1}^* равен $\lambda_m u_m a_{i+1} \rho_m$ или $\lambda_m u_m a_{i+1}$ для $i + 1 = k$. Но $\lambda_m u_m a_{i+1} = u_m \lambda_m a_{i+1}$, $\lambda_m u_m a_{i+1} \rho_m = u_m \lambda_m a_{i+1} \rho_m$ и $u_m = \lambda_m u_m \rho_m$. Аналогичные замечания справедливы при $m = j(i-1)$. Следовательно, в любом случае $w_t^* \to w_{t+1}^*$ есть элементарный $\mathfrak{v}$-переход, являющийся S-шагом, при котором $a_i = u_{j(i)}$ заменяется на u_m.

Предположим, что $w_t \to w_{t+1}$ есть M-шаг. Тогда $a_i = c_i u_{j(i)} d_i$ для некоторого i, где $u_{j(i)} \in U_{j(i)}$, и w_{t+1} получается из w_t заменой $u_{j(i)}$ на u_m, где $m \neq j(i)$. Так как $a_i = (c_i \rho_{j(i)})\, u_{j(i)}\, (\lambda_{j(i)}\, d_i)$, очевидно, что w_{t+1}^* также получается из w_t^* при помощи M-шага.

Предположим, что $w_t \to w_{t+1}$ есть E-шаг. Тогда $a_i = c_i u_{j(i)}$ (или возможен совершенно аналогичный случай, когда $a_i = u_{j(i)}\, d_i$) для некоторого i, где $u_{j(i)} \in U_{j(i)}$, и w_{t+1} получается из w_t заменой $u_{j(i)}$ на u_m. Если u_m есть слог слова w_t, то ввиду того, что $a_i = (c_i \rho_{j(i)})\, u_{j(i)}$, слово w_{t+1}^* получается из w_t^* при помощи E-шага, который при $i > 1$ заменяет $b_i = \lambda_{j(i)}\, c_i \rho_{j(i)} u_{j(i)}$ на $\lambda_{j(i)}\, c_i \rho_{j(i)}\, u_m$ или, если $i = 1$, заменяет $b_1 = c_1 \rho_{j(1)}\, u_{j(1)}$ на $c_1 \rho_{j(1)}\, u_m$. Если u_m не является слогом слова w_{t+1}, то $m = j(i+1)$ и, так как $\lambda_m u_m a_{i+1} \rho_m = u_m \lambda_m a_{i+1} \rho_m$ и $\lambda_m u_m a_{i+1} = u_m \lambda_m a_{i+1}$, аналогично получаем, что w_{t+1}^* получается из w_t^* при помощи E-шага. Доказательство леммы закончено.

Слово w из $\prod^* S_i$, каждый слог которого принадлежит $\bigcup \{U_i\}$, будем называть *U-словом*. Слово w из $\prod^* S_i$, каждый слог которого принадлежит либо S_i, либо $\bigcup \{U_i\}$, будем называть *(U, i)-словом*. Таким образом, U-слово является (U, i)-словом для любого i. Пусть w есть (U, i)-слово. Заменим каждый слог $u_m \in U_m$ из w на u_i для всех $m \neq i$. Полученное слово обозначим через $w(i)$.

Лемма 9.38. *Пусть w — собственное слева (U, k)-слово [U-слово] и w' — бисобственное слово, полученное из w собственной слева последовательностью E-шагов. Тогда w' является также (U, k)-словом [U-словом] и $w(k) = w'(k)$.*

Доказательство. Пусть заданной собственной слева последовательностью является последовательность

$$w = w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_{n-1} \to w_n = w'.$$

Докажем лемму индукций по n. Предположим, что утверждение леммы выполняется для последовательностей длины $n-1$. Доказательство утверждения для одного E-шага можно вывести из шага индукции от $n-1$ до n, положив $w' = w_1$.

Если w_1 является (U, k)-словом, то по предположению индукции мы заключаем, что w' есть (U, k)-слово и $w'(k) = w_1(k)$. Очевидно, $w_1(k) = w_0(k) = w(k)$, и, следовательно, в этом случае утверждение доказано. Таким образом, мы можем предположить, что w_1 не является (U, k)-словом.

Переход $w_0 \to w_1$ не может происходить в слоге из S_k, так как тогда w_1 было бы (U, k)-словом. Следовательно, переход должен иметь вид

$$w_0 = \ldots u_i \ldots = \ldots u_i' a_i \ldots \to \ldots u_j' a_i \ldots = w_1$$

(где $i \neq k$) или может быть $a_i u_i'$ вместо $u_i' a_i$. Так как мы, очевидно, можем предположить, что $j \neq i$, ясно, что a_i есть слог слова w_1. Предположим, что a_i не является правым концевым слогом слова w_1. Тогда, так как w_1 собственно слева, $\lambda_i a_i \rho_i = a_i$. Следовательно, используя лемму 9.36, получаем

$$u_i = \lambda_i u_i \rho_i = \lambda_i (u_i' a_i) \rho_i = u_i' (\lambda_i a_i \rho_i) = u_i' a_i.$$

Так как $a_i \in \lambda_i S_i \rho_i$ и полугруппа U_i унитарна в $\lambda_i S_i \rho_i$, мы заключаем, что $a_i \in U_i$. Отсюда следует, что w_1 есть (U, k)-слово, т. е. мы пришли к противоречию с предположением. Таким образом, a_i должно быть правым концевым слогом слова w_1.

Но тогда u_i является правым концевым слогом слова $w_0 = w$ и поэтому слово w бисобственно. Теперь мы можем, применив одну из модификаций леммы 9.37, заменить данную последовательность на бисобственную последовательность

$$w = w_0 \to w_1^* \to \ldots \to w_{n-1}^* \to w_n = w'.$$

Два крайних члена не изменяются, так как они уже являются бисобственными.

Как и выше, мы получаем, что $a_i \in U_i$ теперь уже для любого расположения a_i, поэтому w_1^* является (U, k)-словом. Далее, по предположению индукции заключаем, что $w_n = w'$ также есть (U, k)-слово и $w'(k) = w_1^*(k) = w(k)$.

Изложенное доказательство полностью проходит и для случая U-слов (см. формулировку леммы).

Исследуем теперь возможность перенесения S-шага вперед, когда ему предшествует E-шаг. Как мы увидим в следующей лемме, это можно проделать непосредственно, за исключением следующей ситуации. Пусть $w = \ldots s_i s_j$, где $s_i \in S_i$ и $s_j \in S_j$ являются двумя последними слогами. Предположим, что $s_i = a_i u_i$ $(u_i \in U_i)$ и $u_j s_j = u_j' \in U_j$. Пусть E-шаг и S-шаг имеют вид

$$\begin{aligned} w = \ldots s_i s_j = \ldots a_i u_i s_j &\xrightarrow{E} \\ \xrightarrow{E} \ldots a_i u_j s_j = \ldots a_i u_j' &\xrightarrow{S} \\ \xrightarrow{S} \ldots a_i u_m'. \end{aligned}$$

Если $s_j \notin \lambda_j S_j \rho_j$, то, следуя Хауи, будем называть эту последовательность *неприводимой ES-конфигурацией*. Аналогично, можно рассмотреть неприводимые ES-конфигурации, затрагивающие два первых слога слова w.

Лемма 9.39. *Пусть w' получается из w при помощи E-шага и следующего за ним S-шага: $w \overset{E}{\to} w'' \overset{S}{\to} w'$. Предположим, что эта последовательность собственная.*

Тогда, за исключением, быть может, случая, когда E-шаг и S-шаг образуют неприводимую ES-конфигурацию, w' можно получить из w такой собственной последовательностью элементарных υ-переходов длины не более двух, что если длина равна двум, то второй переход не является S-шагом.

Доказательство. Пусть $s_i \in S_i$ является слогом слова w, к которому применяется E-шаг. Предположим, что $s_i = a_i u_i$ и E-шаг преобразует s_i в $(a_i \rho_i)\, u_j$. Заметим, что мы должны иметь $a_i \rho_i$, а не просто a_i после преобразования слога s_i, потому что в силу предположения слово w'' собственное. Строго говоря, мы сначала делаем «внутренний переход» $\ldots a_i u_i \ldots \to \ldots (a_i \rho_i)\, u_i \ldots$ на w, который не меняет неприводимого слова, ассоциированного с w, так как $a_i u_i = a_i\, (\lambda_i u_i) = (a_i \rho_i)\, u_i$, и затем выполняем E-шаг $\ldots (a_i \rho_i)\, u_i \ldots \to \ldots (a_i \rho_i)\, u_j \ldots$.

Оттого что мы будем считать $\ldots a_i u_i \ldots \to \ldots (a_i \rho_i)\, u_j \ldots$ E-шагом, недоразумение не возникнет.

Аналогичные рассмотрения можно провести в случае, когда переход $w \to w''$ начинается с левого E-шага вместо правого E-шага. Существует несколько возможностей для S-шага $w'' \to w'$, которые мы теперь изучим.

Прежде всего если S-шаг применяется к слогу слова w'', который является также слогом слова w, то S-шаг и E-шаг можно выполнить в обратном порядке для получения слова w' из w. Если S-шаг меняет u_j на u_m, то достаточно одного E-шага (или даже совсем не нужно шагов, если $m = i$), заменяющего $s_i = a_i u_i$ на $(a_i \rho_i)\, u_m$ для получения w' из w. Если S-шаг заменяет слог $a_i \rho_i$ слова w'', то $a_i \rho_i = u_i'$ и S-шаг преобразует u_i' в u_m'. Тогда $s_i = u_i' u_i$ можно заменить сначала на $u_m' u_m$, а затем на $u_m' u_j$ (последний шаг можно и не выполнять при $j = m$). Таким образом, w' получается из w либо одним S-шагом, либо S-шагом и следующим за ним E-шагом. Заметим, что в каждом случае последовательность, с помощью которой w' получается из w, является собственной.

Наконец, остался случай, когда для слога s_j из S_j, соседнего справа с s_i в w, элемент $u_j s_j$ является слогом (слова w''), к которому применяется S-шаг. Тогда $u_j s_j = u_j'$ и S-шаг меняет u_j' на u_m'. Предположим, что s_j есть внутренний слог слова w. Так как w собственно, $s_j \in \lambda_j S_j \rho_j$. Следовательно, в силу унитарности множества U_j в $\lambda_j S_j \rho_j$ равенство $u_j s_j = u_j'$ влечет за собой соотношение

$s_j = u_j'' \in U_j$. Тогда

$$w = \ldots a_i u_i u_j'' \ldots \xrightarrow{S} \ldots a_i u_i u_m'' \ldots \xrightarrow{E}$$
$$\xrightarrow{E} \ldots (a_i\rho_i)\, u_m u_m'' \ldots = \ldots (a_i\rho_i)\, u_m' \ldots = w',$$

т. е. w' получается из w при помощи S-шага и следующего за ним E-шага. Кроме того, эта последовательность собственная.

Предположим теперь, что s_j есть правый концевой слог слова w. Тогда либо мы имеем неприводимую ES-конфигурацию, что исключено предположением, либо $s_j \in \lambda_j S_j \rho_j$. В последнем случае можно провести точно такие же рассуждения, как и для случая внутреннего слога. Лемма доказана.

Если в предыдущей лемме мы заменим слово «собственное» на «бисобственное», то неприводимая ES-конфигурация возникнуть не может. Это также имеет место, если полугруппа U_i унитарна в S_i для каждого i и в качестве λ_i и ρ_i взяты тождественные преобразования множества S_i, так что $\lambda_i S_i \rho_i = S_i$ для каждого i. Из лемм 9.35 и 9.39 мы получаем

Следствие 9.40. *Произвольная последовательность элементарных $\mathfrak{v}$-переходов от одного бисобственного слова w до другого бисобственного слова w' может быть заменена на бисобственную последовательность от w до w', в которой все S-шаги, если они имеются, выполняются первыми. В частности, это имеет место для произвольных слов w и w', если U_i унитарна в S_i для всех $i \in I$.*

Для того чтобы приступить к общему случаю, мы должны развить технику обхода неприводимых ES-конфигураций.

Заметим, что если $w \xrightarrow{E} w'' \xrightarrow{S} w'$ есть неприводимая ES-конфигурация, затрагивающая два последних слога, то последний слог слова w'', в нашем обозначении u_j', удовлетворяет равенству $u_j' = u_j' \rho_j$.

Лемма 9.41. *Пусть $s_k \in S_k$ и $s_k \to \ldots \to w$ есть собственная последовательность элементарных $\mathfrak{v}$-переходов от s_k до w, не содержащая S-шагов. Предположим, что t_j есть последний слог слова w и $t_j = t_j \rho_j$. Тогда $s_k = s_k \rho_k$.*

Доказательство. Применим индукцию по числу M-шагов в последовательности $\mathfrak{v}$-переходов.

Предположим сначала, что w получается из s_k при помощи одних лишь E-шагов. Первый из них должен быть одного из видов: $s_k = u_k s_k' \to u_j s_k'$ или $s_k = s_k' u_k \to s_k' u_j$. Во втором случае утверждение леммы очевидно, следовательно, мы можем считать, что имеет место первый случай. Тогда $\lambda_k s_k = s_k$, т. е. слово s_k является собственным слева. Ввиду этого мы можем, используя соответствующий аналог леммы 9.37, перейти от данной последовательности $s_k \to \ldots \to w$ к собственной слева последовательности $s_k \to \ldots \to w^*$. Так как w^* получается из w лишь заменой левого концевого слога b_j на $\lambda_j b_j$, очевидно, w^* собственно также и справа, а поэтому является бисобственным словом. Теперь, применяя лемму 9.3, мы заключаем, что w^* является (U, k)-словом и $w^*(k) = w(k) = s_k$. Так как w^* бисобственно, ясно, что $w^*(k)\rho_k = w^*(k)$ и поэтому $s_k\rho_k = s_k$.

Предположим теперь, что утверждение леммы справедливо для любой последовательности от s_k до w, содержащей менее p M-шагов. Пусть число M-шагов, содержащихся в последовательности от s_k до w, равно p. Рассмотрим часть последовательности от последнего M-шага до w.

Пусть $w_1 = \ldots a_m u_m b_m \ldots \xrightarrow{M} \ldots a_m u_n b_m \ldots = w_2$, где $a_m u_m b_m \in S_m$ есть слог слова w_1, является последним M-шагом и $w_2 \to w_3 \to \ldots \to w_q = w$ суть остальные переходы от w_2 до w. По предположению все переходы от w_2 до w являются E-шагами. Заметим сначала, что после применения E-шага к слогу $s_m \in S_m$ от него остается некоторый непустой слог s_m', также принадлежащий S_m; будем называть s_m' *потомком* слога s_m; введенное отношение «быть потомком» будем по определению считать рефлексивным и транзитивным. Каждое слово в последовательности $w_2 \to w_3 \to \ldots \to w_q$ будет, таким образом, содержать слоги из S_m, которые являются потомками слогов a_m и b_m слова w_2. Пусть $a_m^{(r)}$ и $b_m^{(r)}$ — соответственно потомки слогов a_m и b_m слова w_r $(r = 3, \ldots, q)$. Положим $a_m^{(2)} = a_m$ и $b_m^{(2)} = b_m$. Пусть $w_r = \ldots a_m^{(r)} y_r b_m^{(r)} \ldots$. Для $r = 2$ слово $y_2 = u_n$ является U-словом. Предположим, что мы уже доказали, что y_r есть U-слово. Если E-шаг $w_r \to w_{r+1}$ действует на слог слова y_r, то по лемме 9.38 y_{r+1} также является U-словом. Если E-шаг действует на слог слова w_r слева от $a_m^{(r)}$ или справа от $b_m^{(r)}$, то $y_r = y_{r+1}$. Если E-шаг, действуя на $a_m^{(r)}$, убирает слог слева или, аналогично, убирает у $b_m^{(r)}$ слог справа, то снова $y_r = y_{r+1}$. В остальных случаях к y_r добавляется U-слог либо слева, либо справа. Таким образом, в любом случае y_{r+1} есть U-слово. По индукции каждое y_r является U-словом.

Заменяя y_r в w_r для каждого $r = 2, 3, \ldots, q$ на $y_r(m)$, получим слово $w_r' = \ldots a_m^{(r)} y_r(m) b_m^{(r)} \ldots$. Тогда легко видеть, что каждое преобразование $w_r' \to w_{r+1}'$ $(r = 2, 3, \ldots, q-1)$ является либо элементарным $\mathfrak{v}$-переходом, либо оставляет w_r' без изменения. Так как y_q есть внутреннее слово из w_q, слово w_q' имеет тот же последний слог, что и $w_q = w$. Так как $w_2' = w_1$, число M-шагов в последовательности от s_k до w_q', полученной из последовательности от s_k до w, равно $p - 1$. В силу предположения индукции имеем поэтому $s_k\rho_k = s_k$. Это завершает доказательство леммы.

Детали процедуры, использованной в последних двух абзацах доказательства леммы 9.41, нам понадобятся снова. Для удобства ссылок сформулируем их в виде леммы.

Лемма 9.42. *Пусть* $w_1 = \ldots a_m u_m b_m \ldots \overset{M}{\to} \ldots a_m u_n b_m \ldots$ $\ldots = w_2$ — *собственный* M-*шаг, где* $a_m u_m b_m \in S_m$ *есть слог слова* w_1, *и* $w_2 \to w_3 \to \ldots \to w_q$ — *собственная последовательность* E-*шагов.*

Тогда w_q *можно записать как неприводимое слово в виде* $w_q =$ $= xyz$, *где* x, z *суть непустые слова и* y *есть* U-*слово, причем существует собственная последовательность* $w_1 \to w_3' \to \ldots \to w_q'$, *состоящая лишь из* E-*шагов, от* w_1 *до* $w_q' = xy\,(m)\,z$.

Опираясь на доказанные результаты, выведем следующую лемму.

Лемма 9.43. *Пусть* $s_k \in S_k$, $s_h \in S_h$ *и* $(s_k, s_h) \in \mathfrak{v}^*$. *Тогда существует последовательность элементарных* $\mathfrak{v}$-*переходов от* s_k *до* s_h, *в которой все* S-*шаги, если они имеются, выполняются первыми.*

Доказательство. По предположению существует последовательность элементарных $\mathfrak{v}$-переходов от s_k до s_h. В силу леммы 9.37 мы можем предположить, что эта последовательность является собственной. Если в ней нет S-шагов, то доказывать нечего. В противном случае рассмотрим первый S-шаг в последовательности. Если он непосредственно следует за M-шагом или за E-шагом, не входящим в неприводимую конфигурацию, то на основании лемм 9.35 и 9.39 мы можем найти собственную последовательность от s_k до s_h, в которой либо на один S-шаг меньше, либо первый S-шаг встречается раньше, чем в исходной последовательности от s_k до s_h.

Продолжим эту процедуру до тех пор, пока не получим собственную последовательность от s_k до s_h, в которой либо первый S-шаг является первым переходом, либо на один S-шаг меньше, чем в исходной последовательности от s_k до s_h, либо первый S-шаг следует за E-шагом в неприводимой ES-конфигурации. В последнем случае, вспоминая замечание, приведенное перед леммой 9.41, и используя лемму 9.41, мы получим, что $s_k\rho_k = s_k$ (или, двойственно, $\lambda_k s_k = s_k$).

Предположим теперь, что $w_1 \to w_2$ есть произвольный $\mathfrak{v}$-переход между двумя словами w_1 и w_2, причем последний слог $t_j \in S_j$ слова w_1 удовлетворяет равенству $t_j\rho_j = t_j$. Пусть $s_n \in S_n$ есть последний слог слова w_2 и w_2' получено из w_2 заменой последнего слога на $s_n\rho_n$. Тогда $w_2 \to w_2'$ также является элементарным $\mathfrak{v}$-переходом. Это легко проверить, перебирая все возможности. Например, пусть $t_j = a_j u_j b_j$, где $u_j \in U_j$ и u_j заменяется на u_m при помощи перехода $w_1 \to w_2$. Тогда $b_j = s_n$ и, так как $t_j = t_j\rho_j$, мы имеем $t_j = a_j u_j\,(b_j\rho_j)$. Таким образом, $w_1 \to w_2'$ есть элементарный υ-переход. Другие случаи аналогичны. Кроме того, ясно, что $w_1 \to w_2'$ является соответственно E-шагом, M-шагом или S-шагом, если $w_1 \to w_2$ есть E-шаг, M-шаг или S-шаг.

Предположим теперь, что E-шаг и S-шаг в рассматриваемой неприводимой ES-конфигурации имеют вид

$$w = \ldots s_i s_j = \ldots a_i u_i s_j \xrightarrow{E}$$
$$\xrightarrow{E} \ldots a_i u_j s_j = \ldots a_i u_j' = w'' \xrightarrow{S}$$
$$\xrightarrow{S} \ldots a_i u_m' = w'.$$

Так как $s_k \rho_k = s_k$, только что приведенные рассуждения показывают, что последовательность от s_k до w можно заменить на собственную последовательность той же длины, не содержащую S-шагов, от s_k до $w_1 = \ldots s_i (s_j \rho_j)$, где w_1 получено из w заменой последнего слога на $s_j \rho_j$. Так как $u_j' = u_j' \rho_j = u_j (s_j \rho_j)$, переход $w_1 \to w''$ является E-шагом.

Теперь S-шаг $w'' \to w'$ является первым S-шагом в собственной последовательности $s_k \to \ldots \to w_1 \xrightarrow{E} w'' \xrightarrow{S} w'$, но ввиду того, что $s_j \rho_j \in \lambda_j S_j \rho_j$, последние E-шаг и S-шаг не образуют больше неприводимой ES-конфигурации. Следовательно, мы можем применить лемму 9.39, как и выше, для этой пары переходов.

Таким образом, в любом случае исходную последовательность от s_k до s_h можно заменить на собственную последовательность от s_k до s_h, в которой либо S-шагов меньше, чем в исходной последовательности, либо их столько же, но уже первый υ-переход является S-шагом.

Далее, если последовательность υ-переходов от s_k до s_h имеет вид

$$s_k \xrightarrow{S} w_1 \to \ldots \to s_h,$$

то s_k равно некоторому u_k, а w_1 — некоторому u_l и мы можем применить описанную выше процедуру к последовательности $w_1 \to \ldots \to s_h$. Повторяя эту процедуру с S-шагами достаточное число раз, мы завершим доказательство леммы.

Теперь уже нетрудно доказать основной результат Хауи о вложениях полугрупповых амальгам.

Теорема 9.44. *Пусть* $[\{S_i \mid i \in I\}; U; \{\varphi_i \mid i \in I\}] = [S_i; U; \varphi_i]$ — *полугрупповая амальгама и подполугруппа* U_i $(=U\varphi_i)$ *почти унитарна в* S_i *относительно отображений* λ_i *и* ρ_i *для каждого* $i \in I$.

Тогда полугрупповая амальгама $[S_i; U_i; \varphi_i]$ *может быть вложена в полугруппу.*

Доказательство. В силу утверждения 1 теоремы 9.31 достаточно доказать, что $[S_i;\ U;\ \varphi_i]$ может быть вложена в $\prod_U^* S_i$. В силу утверждения 2 теоремы 9.31 для этого достаточно установить, что

(i) каждый канонический гомоморфизм μ_k: $S_k \to \prod_U^* S_i$ является взаимно однозначным;

(ii) $S_k\mu_k \cap S_h\mu_h = U\mu$ для $h \neq k$, где $\mu = \varphi_h\mu_h$.

Пусть $s_h \in S_h$ и $s_h' \in S_h$. Предположим, что $s_k\mu_k = s_h'\mu_h$, т. е. $(s_k, s_h') \in \upsilon^*$. На основании леммы 9.43 существует последовательность элементарных υ-переходов от s_k до s_h', в которой все S-шаги, если они имеются, выполняются первыми. Если в этой последовательности есть несколько S-шагов, то их можно заменить одним S-шагом; пусть он имеет вид $s_k \to s_l$. Рассмотрим последовательность от s_l до s_h'. Заметим, что каждый E-шаг или M-шаг увеличивает число слогов в односложном слове и не может уменьшить число слогов ни в каком слове. Таким образом, последовательность от s_l до s_h', которая по предположению не содержит S-шагов и применяется к односложному слову, не может содержать ни E-шагов, ни M-шагов. Таким образом, $s_l = s_h'$.

Следовательно, существует лишь две возможности. Во-первых, в последовательности от s_k до s_h' нет S-шагов. Тогда мы заключаем, что $s_k = s_h'$. Во-вторых, преобразование s_k в s_h' можно осуществить одним S-шагом. В этом случае $s_k = u_k \in U_k$ и $s_h' = u_h$. Таким образом, мы показали, что если $s_k\mu_k = s_h'\mu_h$, то либо $s_k = s_h'$, либо $h \neq k$ и $s_k \in U_k$. Чтобы доказать свойство (i), мы должны предположить $h = k$, но тогда сразу же получим первое заключение. Докажем (ii). Так как всегда $U\mu \subseteq S_k\mu_k \cap S_h\mu_h$, достаточно установить, что если $x \in S_k\mu_k \cap S_h\mu_h$ для $k \neq h$, то $x \in U\mu$. Следовательно, мы предполагаем, что $x = s_k\mu_k = s_h'\mu_h$. Так как $k \neq h$, мы получаем второе заключение $s_k \in U_k$. Таким образом, $s_k = u\varphi_k$ для некоторого $u \in U$ и $x = s_k\mu_k = u\varphi_k\mu_k = u\mu \in U\mu$. Это завершает доказательство теоремы.

Комбинаторный аппарат, построенный для доказательства предыдущей теоремы, можно применить для получения другой информации о свободных произведениях амальгамы. Приведем несколько результатов Хауи.

Теорема 9.45. *Пусть $[S_i;\ U;\ \varphi_i]$ — полугрупповая амальгама, в которой U_i является унитарной подполугруппой из S_i для каждого $i \in I$. Тогда $S_i\mu_i$ является унитарной подполугруппой из $\prod_U^* S_i$ для каждого $i \in I$. Кроме того, $U\mu$ есть унитарная подполугруппа из $\prod_U^* S_i$.*

Доказательство. Из предыдущей теоремы вытекает, что $S_i\mu_i \cap S_j\mu_j = U\mu$ при $i \neq j$. Следовательно, так как пересечение двух унитарных подполугрупп само является унитарной подполугруппой, достаточно установить, что каждая подполугруппа $S_i\mu_i$ унитарна в $\prod_U^* S_i$.

Будем доказывать, что $S_i\mu_i$ унитарна справа в $\prod_U^* S_i$. Унитарность слева доказывается аналогично. Предположим, что $s_i, t_i \in S_i$, $w \in \prod^* S_i$ и $(ws_i, t_i) \in \mathfrak{v}^*$. Мы должны установить, что $w\mathfrak{v}^* \in S_i\mu_i$.

Ввиду следствия 9.40 существует последовательность элементарных $\mathfrak{v}$-переходов от t_i до ws_i, в которой все S-шаги, если они имеются, выполняются первыми. Все начальные S-шаги можно заменить одним S-шагом, поэтому в любом случае существует последовательность от некоторого $t_j \in S_j$ до ws_i, не содержащая S-шагов, где t_j является (U, i)-словом. Доказательство будем вести индукцией по числу M-шагов в этой последовательности.

Предположим сначала, что последовательность состоит лишь из E-шагов. Тогда, так как по предположению все слова являются бисобственными, на основании леммы 9.38 ws_i есть (U, i)-слово. Следовательно, w является (U, i)-словом, откуда $w\mathfrak{v}^* \in S_i\mu_i$.

Предположим теперь, что желаемое заключение можно вывести для последовательности, число M-шагов в которой меньше p. Пусть число M-шагов в последовательности от t_j до ws_i равно p. Рассмотрим участок последовательности от последнего M-шага до ws_i. Применяя лемму 9.42, мы можем записать ws_i как неприводимое слово в виде xyz, где x, z суть непустые слова и y есть непустое U-слово, кроме того, существует последовательность элементарных $\mathfrak{v}$-переходов от t_j до $xy\,(m)\,z = w'$ для некоторого $m \in I$, не содержащая S-шагов, число M-шагов в которой равно $p - 1$.

Рассмотрим некоторые возможности для w'. Мы имеем $ws_i = xyz$ и слово xyz неприводимо, т. е. последний слог слова x и первый слог слова y лежат в различных S_i и, аналогично, последний слог слова y и первый слог слова z лежат в различных S_i. Заметим также, что s_i не обязательно является слогом слова ws_i. Отсюда вытекает, что последний слог слова z равен a_is_i, где a_i либо принадлежит S_i, либо пусто. Следовательно, $w' = xy\,(m)\,z$ можно записать в виде $w' = w''s_i$, где $w'' = xy\,(m)\,b$ и $bs_i = z$. Здесь b может быть и пустым словом. Применяя предположение индукции к последовательности от t_j до $w''s_i$, мы получаем, что $w''\mathfrak{v}^* \in S_i\mu_i$. Однако $w = xyb$ и поэтому $(w, w'') \in \mathfrak{v}^*$. Следовательно, $w\mathfrak{v}^* \in S_i\mu_i$. Этого достаточно для завершения доказательства теоремы.

Усилить теорему, заменяя унитарность на почти унитарность, нельзя. Контрпример см. в упражнении 7 к настоящему параграфу.

Приведем теперь теорему о порождении подполугрупп в $\prod_U^* S_i$. О некоторых ситуациях, когда выполняются условия теоремы, см. в упражнении 8 ниже. Упражнение 9 показывает, что теорема будет неверна, если опустить предположение о том, что T_i почти унитарна в S_i для каждого i.

Теорема 9.46. *Пусть* $[S_i; U; \varphi_i]$ — *полугрупповая амальгама, в которой полугруппа* U_i *почти унитарна в* S_i *относительно отображений* λ_i *и* ρ_i *для каждого* $i \in I$. *Для каждого* $i \in I$ *пусть* T_i *есть почти унитарная подполугруппа из* S_i *относительно тех же отображений* λ_i *и* ρ_i, *содержащая* U_i. *Тогда полугруппы* $T_i\mu_i$ *порождают в* $\prod_U^* S_i$ *подполугруппу, изоморфную* $\prod_U^* T_i$.

Доказательство. Так как $T_i \subseteq S_i$, имеем $\prod^* T_i \subseteq \subseteq \prod^* S_i$. Ввиду того что $[T_i; U; \varphi_i]$ является полугрупповой амальгамой, отношение $\mathfrak{v} = \{(u_i, u_j) \mid i, j \in I, u\varphi_i = u_i, u\varphi_j = u_j$ для некоторого $u \in U\}$ есть отношение на $\prod^* T_i$. Обозначим через $\mathfrak{v}^\dagger$ конгруэнцию на $\prod^* T_i$, порожденную $\mathfrak{v}$. Тогда $\prod^* T_i/\mathfrak{v}^\dagger$ совпадает с $\prod_U^* T_i$. В силу леммы 9.9, для того, чтобы доказать, что $\prod_U^* T_i$ вкладывается естественным образом в $\prod_U^* S_i$, т. е. что $\prod_U^* T_i$ изоморфно подполугруппе из $\prod_U^* S_i$, порожденной полугруппами $T_i\mu_i$, достаточно установить, что

$$\mathfrak{v}^\dagger = \mathfrak{v}^* \cap (\prod^* T_i \times \prod^* T_i).$$

А для доказательства этого остается лишь показать, что

$$\mathfrak{v}^* \cap (\prod^* T_i \times \prod^* T_i) \subseteq \mathfrak{v}^\dagger.$$

Рассмотрим для этой цели такие слова $w, w' \in \prod^* T_i$, что $(w, w') \in \mathfrak{v}^*$. Так как для каждого i по предположению $T_i \subseteq \subseteq \lambda_i S_i \rho_i$, слова w и w' являются бисобственными. В силу следствия 9.40 существует такая бисобственная последовательность $\mathfrak{v}$-переходов

$$w = w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_s \to w_{s+1} \to \ldots \to w_n = w'$$

от w до w', что первые s переходов $(0 \leqslant s \leqslant n)$ являются S-шагами, в то время как остальные $n - s$ суть E-шаги или M-шаги. Приступим к доказательству того, что $w_r \in \prod^* T_i$ для всех $r = 0, 1, \ldots$ $\ldots, n$; этим доказательство будет завершено.

Сделаем сначала два замечания относительно $\mathfrak{v}$-перехода $w_r \to w_{r+1}$. Слог, не принадлежащий $\bigcup T_i$, будем называть *не-T-слогом*.

(1) S-шаг не может увеличить число не-T-слогов.

(2) E-шаг или M-шаг не может уменьшить число не-T-слогов.

Докажем (1). Пусть $w_r = \ldots s_i u_j s'_k \ldots \to w_{r+1} = \ldots s_i u_l s'_k \ldots$ есть S-шаг. Если $l \neq i$ и $l \neq k$, то изменения в числе не-T-слогов не происходит, так как u_j и u_l оба принадлежат $\bigcup T_i$. Если $l =$

$= i \neq k$ и $s_i \in T_i$, то также $s_i u_i \in T_i$. Если $l = i = k$ и s_i, $s_i' \in T_i$, то $s_i u_i s_i' \in T_i$. Остальные случаи очевидны.

Докажем (2). Пусть $w_r = \ldots s_i \ldots = \ldots a_i u_i b_i \ldots \to \to w_{r+1} = \ldots a_i u_k b_i \ldots$ есть M-шаг. Если $s_i \notin T_i$, то либо $a_i \notin T_i$, либо $b_i \notin T_i$. В самом деле, из включений $a_i \in T_i$ и $b_i \in T_i$ вытекает, что $s_i = a_i u_i b_i \in T_i$.

Пусть $w_r = \ldots s_i s_k \ldots = \ldots a_i u_i s_k \ldots \to w_{r+1} = \ldots \ldots a_i u_l s_k \ldots$ есть E-шаг. Если $s_i \notin T_i$, то, как и выше, $a_i \notin T_i$. Предположим, что $s_k \notin T_k$ и $l = k$. Так как w_r — бисобственное слово, $s_k \in \lambda_k S_k \rho_k$. Следовательно, в силу унитарности T_k в $\lambda_k S_k \rho_k$ имеем $u_k s_k \notin T_k$. Если $l \neq k$, то s_k является не-T-слогом слова w_{r+1}.

Теперь $w = w_0$ не имеет не-T-слогов. Тогда ввиду свойства (1) это должно выполняться и для w_s. Но не-T-слоги не могут появиться в последовательности $w_s \to \ldots \to w_r = w'$. В самом деле, если они появятся, то в силу (2) их число уже не сможет уменьшиться, но тогда w' не будет принадлежать $\prod^* T_i$. Следовательно, каждое $w_r \in \prod^* T_i$. Доказательство теоремы завершено.

Закончим этот параграф изложением результатов Хауи о прямой сумме полугрупповой амальгамы.

Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство попарно не пересекающихся полугрупп и σ — отношение на $\prod^* S_i$, определенное следующим образом:

$$\sigma = \{(s_i s_j, s_j s_i) \mid s_i \in S_i, \ s_j \in S_j, \ i, j \in I, \ i \neq j\}.$$

Тогда *прямой суммой* полугрупп S_i, которую мы будем обозначать через $\sum \{S_i \mid i \in I\}$, называется полугруппа

$$\sum S_i = (\prod^* S_i)/\sigma^*.$$

Заметим, что если каждое S_i имеет единицу и если $|I|$ конечно, то $\sum S_i$ не обязательно изоморфна прямому произведению $\prod S_i$. (По этой причине могут быть предпочтительней другие термины, например *свободная сумма*. Другие замечания о прямых произведениях и прямых суммах см. в упражнениях 10—13 к настоящему параграфу.)

Рассмотрим теперь полугрупповую амальгаму $[S_i; U; \varphi_i]$. Как обычно, определим отношение υ на $\prod^* S_i$. Тогда *прямой суммой амальгамы* $[S_i; U; \varphi_i]$ или *прямой суммой полугрупп с объединенной подполугруппой* U, которую мы обозначаем через $\sum_U S_i$, называется полугруппа

$$\sum_U S_i = (\prod^* S_i)/(\sigma \cup \upsilon)^*.$$

Нашей целью является получение достаточных условий, при которых полугрупповая амальгама может быть вложена естественным образом в свою прямую сумму.

Отождествляя каждое S_i со своим каноническим образом в $\prod^* S_i$, мы следующим образом определим канонические гомоморфизмы ν_i: $S_i \to \sum_U S_i$:

$$\nu_i\colon\ a \to a\nu_i = a(\sigma \cup \upsilon)^* \qquad (a \in S_i).$$

Тогда для любого $u \in U$ имеем

$$u\varphi_i\nu_i = u\varphi_j\nu_j,$$

так как $(u\varphi_i, u\varphi_j) \in \upsilon \subseteq (\sigma \cup \upsilon)^*$. Следовательно, применяя лемму 9.30, мы выводим, что отображение π, заданное условием

$$\pi\colon\ a \to a\pi = a\chi_i\nu_i, \quad \text{если} \quad a \in S_i',$$

является гомоморфизмом частичного группоида $\mathcal{G} = \mathcal{G}[S_i; U; \varphi_i]$ в $\sum_U S_i$. Если π взаимно однозначно, то говорят, что амальгама $[S_i; U; \varphi_i]$ *вкладывается естественным образом в свою прямую сумму.*

Говорят, что подполугруппа U полугруппы S *центральна* в S, если $us = su$ для каждого $u \in U$ и каждого $s \in S$. Приведем вначале необходимое условие вложимости амальгамы.

Лемма 9.47. *Пусть π — взаимно однозначное отображение $\mathcal{G}$ в $\sum_U S_i$. Тогда если $|I| > 1$, то подполугруппа U_i центральна в S_i для каждого $i \in I$.*

Доказательство. Пусть $u \in U$, $u_i = u\varphi_i$, $s_i \in S_i$. Выберем $j \in I$ и $j \neq i$. Положим $u_j = u\varphi_j$. По определению σ и υ имеем

$$(s_iu_j,\ u_js_i) \in \sigma,$$
$$(s_iu_j,\ s_iu_i) \in \upsilon^*,$$
$$(u_js_i,\ u_is_i) \in \upsilon^*,$$

откуда в силу транзитивности

$$(s_iu_i,\ u_is_i) \in (\sigma \cup \upsilon)^*.$$

Следовательно, $(s_iu_i)\pi = (u_is_i)\pi$, откуда непосредственно вытекает, что если π взаимно однозначно, то $s_iu_i = u_is_i$. Это показывает, что подполугруппа U_i центральна в S_i.

В случае когда U_i почти унитарна в S_i для каждого $i \in I$, условие леммы 9.47 является также и достаточным.

Теорема 9.48. *Пусть $[\{S_i \mid i \in I\}; U; \{\varphi_i \mid i \in I\}] = [S_i; U; \varphi_i]$ — такая полугрупповая амальгама, что $|I| > 1$ и U_i $(= U\varphi_i)$ почти унитарна в S_i относительно отображений λ_i и ρ_i для каждого $i \in I$.*

Тогда $[S_i; U; \varphi_i]$ *вкладывается естественным образом в свою прямую сумму в том и только в том случае, когда подполугруппа* U_i *центральна в* S_i *для каждого* $i \in I$.

Доказательство. Ввиду леммы 9.47 остается рассмотреть лишь достаточность. Мы знаем, что $[S_i; U; \varphi_i]$ вкладывается естественным образом в $\prod_U^* S_i$ (теорема 9.44 и теорема 9.31), поэтому мы могли бы лишь показать, что если U_i центрально в S_i для каждого i, то естественный гомоморфизм $\prod_U^* S_i$ на $\sum_U S_i$ не стягивает $\mathcal{G}$. Однако мы предпочитаем прямой путь. Легко видеть, что π взаимно однозначно тогда и только тогда, когда имеют место следующие два условия:

(i) Каждый канонический гомоморфизм ν_i: $S_i \to \sum_U S_k$ взаимно однозначен.

(ii) $S_i\nu_i \cap S_j\nu_j = U\nu$ для $i \neq j$, где $\nu = \varphi_i\mu_i$.

В самом деле, доказательство проводится аналогично доказательству пункта (2) теоремы 9.31. Покажем, что в наших предположениях справедливы утверждения (i) и (ii).

Заметим, что элементарный $(\sigma \cup \mathfrak{v})$-переход является либо элементарным $\mathfrak{v}$-переходом, а потому E-шагом, M-шагом или S-шагом, либо элементарным σ-переходом.

Предположим, что $s_i \in S_i$ и $(s_i, w) \in (\sigma \cup \mathfrak{v})^*$. Тогда существует последовательность

$$s_i = w_0 \to w_1 \to \ldots \to w_n = w$$

элементарных $(\sigma \cup \mathfrak{v})$-переходов от s_i до w. Применяя лишь σ-переходы, каждое слово w_r можно преобразовать в такое слово v_r, что никакие два его слога не принадлежат одной и той же полугруппе S_i. В общем случае существует более одного слова v_r, которое можно получить из w_r таким способом. Выберем по одному такому слову для каждого w_r $(r = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

Заметим сначала, что либо не существует переходов в данной последовательности и поэтому $s_i = w$, либо $s_i \in \lambda_i S_i \rho_i$.

Действительно, $w_0 \to w_1$ не может быть σ-переходом, а тогда $s_i = u_i \in U_i$ или $s_i = a_i u_i$, или $s_i = u_i b_i$, или $s_i = a_i u_i b_i$, где $a_i, b_i \in S_i$. Рассмотрим случай $s_i = a_i u_i b_i$. Так как подполугруппа U_i центральна в S_i,

$$s_i = a_i b_i u_i = a_i b_i (u_i \rho_i) = (a_i b_i u_i)\, \rho_i = s_i \rho_i$$

и

$$s_i \rho_i = a_i b_i u_i = u_i a_i b_i = (\lambda_i u_i)\, a_i b_i = \lambda_i (u_i a_i b_i) = \lambda_i s_i \rho_i.$$

Таким образом, $s_i \in \lambda_i S_i \rho_i$. Остальные случаи проверяются аналогично. Для использования в дальнейшем мы также заметим, что если $w_n = w$ является односложным словом (и $n > 0$) в S_j, то

$w_{n-1} \to w_n$ должно быть $\mathfrak{v}$-переходом; отсюда мы заключаем, что $w \in \lambda_j S_j \rho_j$.

Предположим теперь, что $n > 0$, и определим следующим образом v_r^* для каждого r. Пусть $v_r = s_{i(1)} s_{i(2)} \ldots$, где $s_{i(j)} \in S_{i(j)}$. Тогда мы полагаем $v_r^* = \lambda_{i(1)} s_{i(1)} \rho_{i(1)} \cdot \lambda_{i(2)} s_{i(2)} \rho_{i(2)} \ldots$. Мы имеем $s_i = w_0 = v_0 = v_0^*$, так как было показано, что $s_i \in \lambda_i S_i \rho_i$. Кроме того, v_0^* является (U, i)-словом и $s_i = v_0^*(i)$. Предположим, что уже установлено, что v_r^* есть (U, i)-слово и $s_i = v_r^*(i)$. Будем доказывать, что тогда v_{r+1}^* является (U, i)-словом и $v_{r+1}^*(i) = s_i$.

Рассмотрим возможности, которые могут выполняться для $w_r \to w_{r+1}$. Если это σ-переход, то, очевидно, множество слогов слова v_{r+1} совпадает с множеством слогов слова v_r. Следовательно, v_{r+1}^* есть (U, i)-слово и, так как подполугруппа U_i центральна в S_i, имеем $v_{r+1}^*(i) = v_r^*(i) = s_i$.

Предположим, что $w_r \to w_{r+1}$ является E-шагом и $s_m = a_m u_m$, где $u_m \in U_m$, есть слог слова w_r, который преобразуется в $a_m u_k$ этим переходом. В v_r элемент $a_m u_m$ появляется в слоге $t_m = x a_m u_m y$, где x и y — либо пустые слова, либо принадлежат S_m. Таким образом, $\lambda_m t_m \rho_m$ есть слог слова v_r^* (в действительности $t_m = \lambda_m t_m \rho_m$). Но v_r^* является (U, i)-словом, следовательно, либо $m = i$, либо $\lambda_m t_m \rho_m \in U_m$. В первом случае $\lambda_m x a_m y \rho_m \in S_i$. Во втором случае, так как $\lambda_m t_m \rho_m = \lambda_m x a_m y \rho_m u_m$ и U_m унитарна в $\lambda_m S_m \rho_m$, имеем $\lambda_m x a_m y \rho_m \in U_m$. Таким образом, в обоих случаях слог $\lambda_m x a_m y \rho_m$ слова v_{r+1}^*, содержащийся в S_m, является (U, i)-словом. Непосредственно видно, что слог слова v_{r+1}^*, содержащийся в S_k, также является (U, i)-словом. Следовательно, v_{r+1}^* есть (U, i)-слово. Так как подполугруппа U_i центральна в S_i, то, оценивая $v_r^*(i)$, получаем $v_{r+1}^*(i) = v_r^*(i) = s_i$.

Ввиду центральности U_m в S_m для каждого $m \in I$ очень похожие рассуждения можно применить в случае, когда $w_r \to w_{r+1}$ является M-шагом или S-шагом. Таким образом, заключаем, что всегда $v_{r+1}^*(i) = s_i$. Отсюда по индукции следует, что $v_n^*(i) = s_i$.

Предположим, что w является односложным словом $w_n = w = t_j \in S_j$. Тогда либо $n = 0$, либо, как отмечено ранее, $t_j \in \lambda_j S_j \rho_j$. Таким образом, если $n > 0$, то $t_j = w_n = v_n = v_n^*$ и поэтому t_j есть (U, i)-слово и $t_j(i) = s_i$. Следовательно, имеется лишь две возможности: первая — $j = i$ и $t_j = s_i$; вторая — $t_j = u_j \in U_j$ и $s_i = u_i$. Эти две возможности вместе показывают, что для отображений ν_i $(i \in I)$ выполняются условия (i) и (ii). Теорема доказана.

Упражнения к § 9.4

1. Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп. Предположим, что для каждого i полугруппа S_i задана образующими X_i и определяющими соотношениями σ_i, т. е. $S_i \cong \mathcal{F}_{X_i}/\sigma_i^*$. Пусть $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$. Положим $X = \bigcup \{X_i \mid i \in I\}$ и $\sigma = \bigcup \{\sigma_i \mid i \in I\}$.

Тогда $\mathcal{F}_X/\sigma^*$ равна, с точностью до изоморфизма, свободному произведению $\prod^* \{S_i \mid i \in I\}$.

2. Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп и полугруппа S порождается изоморфными образами $S_i\nu_i$ $(i \in I)$ полугрупп S_i, где ν_i: $S_i \to S$ есть изоморфное вложение $(i \in I)$. Предположим. что S обладает следующим свойством: для любой полугруппы T, такой, что существуют гомоморфизмы ψ_i: $S_i \to T$ для каждого $i \in I$, существует гомоморфизм φ: $S \to T$, для которого $\nu_i\varphi = \psi_i$ при каждом $i \in I$. Тогда S изоморфна $\prod^* \{S_i \mid i \in I\}$.

3. Пусть $[S_i; U; \varphi_i]$ — полугрупповая амальгама. Предположим, что для каждого i полугруппа S_i задана образующими X_i и определяющими соотношениями σ_i, где $X_i \cap X_j = \varnothing$ для $i \neq j$, т. е. $S_i \cong \mathcal{F}_{X_i}/\sigma_i^*$. Положим $V_i = (U\varphi_i)(\sigma_i^{*\natural})^{-1}$ и $\tau = \{(v_i, v_j) \in \in V_i \times V_j \mid v_i\sigma_i^* = u\varphi_i,\ v_j\sigma_j^* = u\varphi_j$ для некоторых i, j и некоторого $u \in U\}$. Положим также $\sigma = (\bigcup \{\sigma_i\}) \cup \tau$ и $X = \bigcup \{X_i\}$. Тогда полугруппа $\mathcal{F}_X/\sigma^*$ изоморфна свободному произведению $\prod_U^* S_i$ амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$ (Хауи [1962]).

4. Пусть $[S_i; U; \varphi_i]$ — полугрупповая амальгама и полугруппа U задана образующими Y и определяющими соотношениями π, т. е. $U \cong \mathcal{F}_Y/\pi^*$. Тогда существуют такие множества X_i, что $X_i \supseteq Y$ и $X_i \cap X_j = Y$, если $i \neq j$, и отношения σ_i на $\mathcal{F}_{X_i}$, для которых $S_i \cong \mathcal{F}_{X_i}/\sigma_i^*$ и $\pi^* = \sigma_i^* \cap (\mathcal{F}_Y \times \mathcal{F}_Y)$ для каждого i. (См. упражнения 2 и 3 к § 9.2.) Положим $X = \bigcup \{X_i\}$ и $\sigma = =\bigcup \{\sigma_i\}$. Тогда $\mathcal{F}_X/\sigma^*$ изоморфна свободному произведению $\prod_U^* S_i$ амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$.

5. Пусть $[\{S_i \mid i \in I\}; U; \{\varphi_i \mid i \in I\}]$ — полугрупповая амальгама и S — полугруппа, порожденная гомоморфными образами $S_i\nu_i$ $(i \in I)$ полугрупп S_i относительно гомоморфизмов ν_i: $S_i \to S$, где $\varphi_i\nu_i = \varphi_j\nu_j$ для всех $i, j \in I$. Предположим далее, что S и семейство гомоморфизмов ν_i обладают следующим свойством: пусть T — произвольная полугруппа, такая, что существуют гомоморфизмы ψ_i: $S_i \to T$ $(i \in I)$, для которых $\varphi_i\psi_i = = \varphi_j\psi_j$ при всех $i, j \in I$; тогда существует гомоморфизм φ: $S \to T$, такой, что $\nu_i\varphi = \psi_i$ для каждого $i \in I$. В этом случае S изоморфна свободному произведению $\prod_U^* S_i$ амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$.

6. Пусть $[S_i; U; \varphi_i]$ — такая собственная полугрупповая амальгама, что каждая полугруппа S_i является группой. Предположим, что $[S_i; U; \varphi_i]$ может быть вложена в полугруппу. Тогда U есть группа. (Ср. теорему 1.11.) (Хауи [1962].)

7. Пусть полугруппа U задана образующими $\Gamma = \{e, u_1, \ldots, u_5\}$ и определяющими соотношениями
$\rho = \{(e^2, e), (u_1u_3, u_2), (u_4u_5, u_1)\} \cup \{(eu_r, u_r), (u_re, u_r): 1 \leqslant r \leqslant 5\}$.
Пусть полугруппа S задана образующими $\Gamma \cup \{s\}$ и определяю-

щими соотношениями

$$\rho' = \rho \cup \{(u_1 s,\ u_2),\ (ese,\ u_3),\ (s^2,\ ses)\}.$$

Пусть полугруппа T задана образующими $\Gamma \cup \{t\}$ и определяющими соотношениями

$$\rho'' = \rho \cup \{(u_4 t,\ u_1),\ (ete,\ u_5),\ (t^2,\ tet)\}.$$

Тогда U является подполугруппой из S, унитарной в eSe и поэтому (теорема 9.32) почти унитарной в S. Аналогично, U почти унитарна в T. Следовательно, амальгама $[\{S, T\}; U]$ вкладывается в $\prod_U^* \{S, T\}$.

Обозначим (ср. с теоремой 9.31) канонические изоморфизмы S, T и U в $\prod_U^* \{S, T\}$ соответственно через μ_1, μ_2 и μ. Тогда мы можем показать, что $(e\mu)(t\mu_2)(s\mu_1)(e\mu) \notin U\mu$, в то время как $(u_4\mu)(e\mu)(t\mu_2)(s\mu_1)(e\mu) = u_2\mu \in U\mu$. Следовательно, $U\mu$ не унитарна в $(e\mu) \cdot \prod_U^* \{S, T\} \cdot (e\mu)$, откуда на основании теоремы 9.32 $U\mu$ не является почти унитарной в $\prod_U^* \{S, T\}$. (Хауи [1963b].)

8. Пусть $[S_i;\ U;\ \varphi_i]$ — полугрупповая амальгама и T_i — подполугруппа из S_i, содержащая U_i, для каждого $i \in I$. Предположим, далее, что T_i почти унитарна в S_i относительно отображений λ_i и ρ_i.

Тогда условия теоремы 9.46 выполняются в том и только в том случае, когда

(i) U_i — унитарная подполугруппа из $\lambda_i S_i \rho_i$.

Предположим, что U_i почти унитарна в S_i относительно отображений γ_i и δ_i. Тогда каждое из следующих условий достаточно для того, чтобы выполнялось (i).

(ii) $\lambda_i S_i \rho_i \subseteq \gamma_i S_i \delta_i$.

(iii) U_i и T_i унитарны в S_i.

(iv) T_i содержит единицу e_i, которая принадлежит U_i.

(v) U является группой и T_i есть подгруппа из S_i. (Хауи [1963b].)

9. Пусть U — свободная полугруппа с двумя образующими u, v; T_1 — свободная полугруппа с четырьмя образующими u, v, t_1, t_1'; S_1 — полугруппа, заданная образующими u, v, t_1, t_1', s_1 и определяющими соотношениями $\{(s_1 u,\ t_1),\ (s_1 v,\ t_1')\}$; $T_2 = S_2$ — полугруппа, заданная образующими u, v, t_2, t_2' и определяющим соотношением $(ut_2,\ vt_2')$.

Тогда U унитарна в S_1 и S_2 (т. е. естественный образ U в S_1 и S_2 унитарен). Кроме того, T_1 является подполугруппой из S_1. Это можно доказать, заметив, что S_1 изоморфна (лемма 9.11) свободной полугруппе на множестве $\{u, v, s_1\}$, и используя следствие 9.8 для доказательства того, что подполугруппа этой свободной полугруппы, порожденная u, v, $s_1 u$ и $s_1 v$, является свободной полугруппой на этих образующих.

Полугрупповая амальгама $[\{S_1, S_2\}; U]$ вкладывается в $\prod_U^* \{S_1, S_2\}$ и полугрупповая амальгама $[\{T_1, T_2\}; U]$ вкладывается в $\prod_U^* \{T_1, T_2\}$.

Пусть μ_i — каноническое вложение (теорема 9.31) полугруппы S_i в $\prod_U^* \{S_1, S_2\}$ $(i = 1, 2)$. Тогда подполугруппа из $\prod_U^* \{S_1, S_2\}$, порожденная $T_1\mu_1$ и $T_2\mu_2$, не будет естественно изоморфна полугруппе $\prod_U^* \{T_1, T_2\}$. В самом деле, $t_1\mu_1 t_2\mu_2 = t'_1\mu_1 t'_2\mu_2$ в $\prod_U^* \{S_1, S_2\}$, в то время как $t_1\mu_1 t_2\mu_2 \neq t'_1\mu_1 t'_2\mu_2$ в $\prod_U^* \{T_1, T_2\}$. (Хауи [1963b].)

Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп. Через $S = \prod \{S_i \mid i \in I\} = \prod S_i$ обозначим *прямое произведение полугрупп* S_i, которое определяется следующим образом. Множество S равно декартову произведению множеств S_i, т. е. состоит из всех множеств (или последовательностей) $\{a_i \mid i \in I\}$, где $a_i \in S_i$ для каждого i. Произведение элементов из S задается покомпонентно:

$$\{a_i\} \cdot \{b_i\} = \{a_i b_i\}.$$

Говорят, что a_i есть *i-я компонента элемента* $\{a_i\}$. Если $x \in \prod S_i$, то i-я компонента элемента x обозначается также через x_i.

Подполугруппа B из S называется *подпрямым произведением полугрупп* S_i, если для каждого $i \in I$ и для каждого $a_i \in S_i$ существует элемент в B, i-я компонента которого равна a_i.

10. Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп. Для каждого $i \in I$ добавим к S_i единицу e_i (независимо от того, обладает уже S_i единицей или нет). Положим $T_i = S_i \cup \{e_i\}$. Пусть B — подпрямое произведение полугрупп T_i, состоящее из всех элементов t из $\prod T_i$, у которых лишь конечное число компонент $t_i \neq e_i$. Обозначим через e единицу из $\prod T_i$ $(e = \{e_i\})$.

Тогда $A = B \setminus \{e\}$ есть подполугруппа из $\prod T_i$, изоморфная $\sum S_i$, и A есть подпрямое произведение полугрупп T_i.

Обозначим через $\overline{S}_j$ множество всех элементов $t \in A$, для которых $t_i = e_i$ при $i \neq j$. Тогда $\overline{S}_j$ есть подполугруппа из A, изоморфная S_j. Если $j \neq k$, то каждый элемент из $\overline{S}_j$ коммутирует с каждым элементом из $\overline{S}_k$. Полугруппа A порождается своими подполугруппами $\overline{S}_j$ $(j \in I)$.

11. Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп.

(a) Пусть S — множество всех отображений f множества I в $\bigcup \{S_i\}$, таких, что $if \in S_i$ для каждого $i \in I$. Зададим на S произведение, полагая для $f, g \in S$

$$i\,(fg) = (if)\,(ig) \qquad (i \in I).$$

Тогда S совпадает с прямым произведением $\prod S_i$.

(b) Пусть Σ — множество всех отображений f непустых конечных подмножеств из I в $\bigcup \{S_i\}$, таких, что $if \in S_i$ для каждого $i \in I$, для которого определено if. Зададим на Σ произведение, считая, что $i\,(fg)$ определено для $f, g \in \Sigma$ и $i \in I$, если определено if или ig, и полагая в этом случае

$$i\,(fg) = \begin{cases} (if)\,(ig), & \text{если определено } if \text{ и } ig, \\ if, & \text{если } ig \text{ не определено}, \\ ig, & \text{если } if \text{ не определено}. \end{cases}$$

Тогда Σ есть полугруппа, изоморфная прямой сумме $\Sigma\, S_i$.

12. Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп и $\mathcal{J}$ — семейство подмножеств из I. Обозначим через D множество всех отображений f элементов из $\mathcal{J}$ в $\bigcup S_i$, для которых $if \in S_i$ в случае, когда if определено.

Пусть $f, g \in D$. Предположим, что f и g являются соответственно отображениями элементов J и K из $\mathcal{J}$ в $\bigcup S_i$. Определим fg: $J \cup K \to \bigcup \{S_i\}$, полагая

$$i\,(fg) = \begin{cases} (tf)\,(ig), & \text{если } i \in J \cap K, \\ if, & \text{если } i \in J \setminus K, \\ ig, & \text{если } i \in K \setminus J. \end{cases}$$

Тогда относительно этого умножения D является полугруппой **в том и только в том случае, когда $\mathcal{J}$ замкнуто относительно операции объединения, т. е. когда $\mathcal{J}$ есть полуструктура относительно операции объединения.**

Для каждого $i \in I$ присоединим к S_i единицу e_i (независимо от того, обладает уже S_i единицей или нет). Положим $T_i = S_i \cup \{e_i\}$ и обозначим через $e = \{e_i\}$ единицу из $\prod T_i$. Тогда D, **если оно является полугруппой, изоморфно некоторой подполугруппе из** $\prod T_i$.

Если $\mathcal{J}$ есть множество всех подмножеств из I, то D изоморфна $\prod T_i$. Если единственным элементом $\mathcal{J}$ является I, то D изоморфна $\prod S_i$.

13. Пусть $\{S_i \mid i \in I\}$ — семейство полугрупп. Для каждого $i \in I$ **присоединим к S_i единицу e_i (независимо от того, обладает уже S_i единицей или нет). Положим $T_i = S_i \cup \{e_i\}$ и обозначим через θ_{ij} тождественное преобразование полугруппы S_i, если $i = j$, и отображение S_i на e_j, если $i \neq j$. Пусть S — полугруппа.**

Тогда S изоморфна прямой сумме $\sum S_i$ в том и только в том случае, когда для каждого $i \in I$ существуют такие гомоморфизмы

$$f_i\colon\ S_i \to S,$$
$$g_i\colon\ S \to T_i,$$

что $f_i g_j = \theta_{ij}$ для всех $i, j \in I$ и для каждого $s \in S$

$$s = \prod \{sg_i f_i \mid i \in I \quad \text{и} \quad sg_i \in S_i\},$$

величина этого произведения не зависит от порядка, в котором берутся элементы $sg_i f_i$. Заметим, что, так как в полугруппе имеет смысл рассматривать лишь произведения конечного числа элементов, из предыдущего выражения для s как произведения вытекает, что $sg_i \in S_i$ лишь для конечного числа элементов $i \in I$.

§ 9.5. *Построение конгруэнций с сокращениями*

Под *представлением полугруппы S с сокращениями* мы будем понимать здесь задание такого множества X и отношения ρ на свободной полугруппе $\mathcal{F}_X$, что $\mathcal{F}_X/\rho^c \cong S$, где ρ^c есть наименьшая конгруэнция, содержащая ρ, для которой $\mathcal{F}_X/\rho^c$ является полугруппой с сокращениями. Вообще говоря, ρ^c больше, чем конгруэнция ρ^*, порожденная ρ, и поэтому это понятие представления полугруппы S отличается от понятия представления, введенного в § 9.2. Мы, возможно, должны были бы назвать это представление «представлением с сокращениями», но такая предосторожность вряд ли необходима.

В случае групп мы сначала строим свободную группу $\mathcal{F}\mathcal{G}_X$ на подходящем множестве X (т. 1, стр. 68). Затем, чтобы представить данную группу G, нужно лишь найти такое отношение ρ на $\mathcal{F}\mathcal{G}_X$, что $\mathcal{F}\mathcal{G}_X/\rho^* \cong G$. Аналогично, в случае коммутативных полугрупп сначала строится свободная коммутативная полугруппа F_X (§ 9.3) и затем подбирается такое отношение ρ на F_X, что F_X/ρ^* изоморфна данной полугруппе. Таким образом, в этих двух важных случаях благодаря «опорным системам» $\mathcal{F}\mathcal{G}_X$ и F_X мы можем использовать лишь конгруэнцию ρ^*, порожденную отношением ρ. Но такой «опорной системы» не существует для всего класса полугрупп с сокращениями. Причина состоит в том, что этот класс не замкнут относительно операции взятия гомоморфного образа. Мы должны довольствоваться — пока нет лучшего метода — полугруппой $\mathcal{F}_X$ и должны развить технику построения отношения ρ^c по данному отношению ρ.

Для большей общности в настоящем параграфе мы изучаем построение ρ^c по ρ не только на $\mathcal{F}_X$, но и на произвольной полугруппе S. Результаты для произвольной полугруппы S (теоремы 9.50 и 9.53) являются новыми.

Последняя часть этого параграфа посвящена подробному изложению остроумного метода Круазо [1954b] получения множества Y «канонических форм» в полугруппе S относительно конгруэнции ρ на S, т. е. такого множества Y, что каждый элемент из S конгруэнтен по mod ρ точно одному члену из Y. Этот метод применим для произвольных конгруэнций, так же как и для конгруэнций с сокращениями. В применении к важному частному случаю $S = \mathscr{F}_X$ он дает нам метод описания строения полугрупп [с сокращениями], исходя прямо из их представления [с сокращениями], без обращения к представлениям различного вида (преобразованиями, матрицами, упорядоченными n-ками и т. д.).

Говорят, что конгруэнция σ на полугруппе S является *конгруэнцией с сокращениями*, если S/σ есть полугруппа с сокращениями. Таким образом, если σ есть конгруэнция на S, то σ является конгруэнцией с сокращениями тогда и только тогда, когда для любых a, b, $c \in S$ каждое из включений $(ab, ac) \in \sigma$ и $(ba, ca) \in \in \sigma$ влечет за собой $(b, c) \in \sigma$. Легко доказывается следующая

Лемма 9.49. *Пусть $\{\sigma_i \mid i \in I\}$ — семейство конгруэнций с сокращениями на полугруппе S. Тогда $\sigma = \bigcap\{\sigma_i \mid i \in I\}$ является конгруэнцией с сокращениями на S.*

Так как универсальное отношение $S \times S$ на S является конгруэнцией с сокращениями, эта лемма показывает, что для данного бинарного отношения ρ на S существует наименьшая конгруэнция с сокращениями на S, которая содержит ρ, а именно пересечение всех конгруэнций с сокращениями на S, содержащих ρ. Будем обозначать эту конгруэнцию через ρ^c и будем говорить, что ρ^c есть конгруэнция с сокращениями на S, порожденная соотношением ρ. Целью данного параграфа является изложение различных конструкций для ρ^c.

Следующие обозначения упростят описание нашей первой конструкции. Обозначим через $\mathscr{B} = \mathscr{B}_S$ множество всех бинарных отношений на полугруппе S и определим следующим образом отображения C^*, D, G и θ множества $\mathscr{B}$ в себя. Для любого $\rho \in \mathscr{B}$ полагаем:

$$\begin{aligned}
C^*&: \quad \rho \to \rho C^* = \{(x, y) \mid x = sut,\ y = svt;\ s, t \in S^1;\ (u, v) \in \rho\},\\
D&: \quad \rho \to \rho D = \{(x, y) \mid u = xa,\ v = ya;\ a \in S^1;\ (u, v) \in \rho\},\\
G&: \quad \rho \to \rho G = \{(x, y) \mid u = ax,\ v = ay;\ a \in S^1;\ (u, v) \in \rho\},\\
\theta&: \quad \rho \to \rho^\theta = (\rho \circ \rho) \cup \rho C^* \cup \rho D \cup \rho G.
\end{aligned}$$

Следующую теорему можно рассматривать как аналог теоремы 1.8.

Теорема 9.50. *Пусть ρ — бинарное отношение на полугруппе S и $\tau = \rho \cup \rho^{-1} \cup \iota_S$. Тогда*

$$\rho^c = \bigcup \{\tau^{\theta^n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Доказательство. Положим $\sigma = \bigcup \{\tau^{\theta^n} \mid n = 1, 2, 3, \ldots\}$. Покажем сначала, что σ есть конгруэнция с сокращениями, содержащая ρ.

Так как τ рефлексивно, имеем $\tau \subseteq \tau \circ \tau$ и поэтому $\rho \subseteq \tau \subseteq \subseteq \tau \circ \tau \subseteq \tau^\theta \subseteq \sigma$. Так как $\iota_S \subseteq \tau$, имеем также $\iota_S \subseteq \sigma$. Следовательно, σ есть рефлексивное отношение, содержащее ρ.

Отношение τ симметрично по построению, а для рефлексивных и симметричных отношений каждое из отображений $\circ$, $\bigcup$, C^*, D и G, использованных при определении θ, сохраняет симметрию. Таким образом, θ и (по индукции) каждая степень θ^n является симметричным отношением. Значит, σ симметрично.

Как уже было замечено, $\tau \subseteq \tau^\theta$; следовательно, $\tau^{\theta^n} \subseteq \tau^{\theta^{n+1}}$ для каждого n. Используем это соотношение для доказательства того, что σ транзитивно. В самом деле, пусть (a, b) и (b, c) принадлежат σ. По определению σ для некоторых m, n имеем $(a, b) \in \in \tau^{\theta^n}$ и $(b, c) \in \tau^{\theta^m}$. Таким образом, если через p обозначить наибольшее из чисел m, n, то (a, b), $(b, c) \in \tau^{\theta^p}$, откуда $(a, c) \in \in \tau^{\theta^p} \circ \tau^{\theta^p} \subseteq \tau^{\theta^{p+1}} \subseteq \sigma$.

Докажем, что σ стабильно. Возьмем $(a, b) \in \sigma$. Для некоторого целого числа n имеем $(a, b) \in \tau^{\theta^n}$. Тогда $(ac, bc) \in \tau^{\theta^n}C^* \subseteq \subseteq \tau^{\theta^{n+1}} \subseteq \sigma$ для любого $c \in S$. Таким образом, σ стабильно справа; стабильность слева доказывается аналогично.

Наконец, докажем, что σ—конгруэнция с сокращениями. Возьмем $(ac, bc) \in \sigma$. Для некоторого целого числа n имеем $(ac, bc) \in \tau^{\theta^n}$. Тогда $(a, b) \in \tau^{\theta^n} D \subseteq \sigma$. Таким образом, σ — конгруэнция с правым сокращением; тот факт, что σ—конгруэнция с левым сокращением, доказывается аналогично.

Для завершения доказательства теоремы достаточно установить, что $\sigma \subseteq \rho^c$. С этой целью рассмотрим произвольное отношение β, содержащееся в ρ^c. Тогда легко проверить, что $\beta^\theta \subseteq \rho^c$. Например, пусть $(x, y) \in \beta D$; тогда для некоторого $(u, v) \in \beta$ и $a \in S^1$ имеем $u = xa$ и $v = ya$. Таким образом, $(xa, ya) \in \beta \subseteq \rho^c$. Так как ρ^c с правым сокращением, отсюда вытекает $(x, y) \in \rho^c$. Другие три возможности проверяются аналогично. Следовательно, так как $\tau \subseteq \rho^c$, по индукции имеем $\tau^{\theta^n} \subseteq \rho^c$ для $n = =1, 2, \ldots$, откуда $\sigma \subseteq \rho^c$. Доказательство теоремы закончено.

Нашу вторую конструкцию для ρ^c мы приведем сначала для отношения ρ на свободной полугруппе $\mathscr{F}_X$. В конструкции используются два экземпляра множества X,

$$X^L = \{x^L \mid x \in X\} \quad \text{и} \quad X^R = \{x^R \mid x \in X\},$$

где $x \to x^L$ и $x \to x^R$ являются взаимно однозначными отображениями и множества X^L и X^R попарно не пересекаются между собой и с множеством X. Положим $Y = X \cup X^L \cup X^R$ и рассмотрим следующие виды преобразований элементов из $\mathscr{F}_Y$:

(i) Элементарный ρ-переход.

(ii) *Вставка* элемента x^Lx или xx^R $(x \in X)$: $w \to w'$, где $w = w_1w_2$, $w' = w_1x^Lxw_2$ или $w' = w_1xx_Rw_2$ и $w_1, w_2 \in \mathscr{F}_Y^1$.

(iii) *Вычеркивание* элемента $x^L x$ или xx^R $(x \in X)$; вычеркивание есть преобразование, обратное преобразованию типа (ii).

Цепь

$$w = w_1 \to w_2 \to \ldots \to w_{n+1} = w'$$

преобразований $w_i \to w_{i+1}$ типа (i), (ii) или (iii) будем называть ρ-*допустимой* (где ρ есть отношение на $\mathscr{F}_X$), если w и w' принадлежат $\mathscr{F}_X$ и если любые элементы x^L или x^R, участвующие в некоторой вставке, вычеркиваются в порядке, обратном порядку их вставки. Более точно, предположим, что шаг $w_i \to w_{i+1}$ является вставкой, вводящей слово $x^L x$. Тогда, так как w' принадлежит $\mathscr{F}_X$, это вхождение x^L должно вычеркиваться на некотором шаге в цепи от w до w'. Для ρ-допустимой цепи мы требуем, чтобы это вхождение x^R в w_{i+1} вычеркивалось прежде, чем вычеркиваются другие индексированные элементы y^R или y^L, уже присутствующие в w_{i+1}. Это требование относится также к вхождениям x^L, если таковые имеются, уже присутствующим в w_{i+1}. Точно такие же условия накладываются на вставки и вычеркивания элементов множества X^R. Для того чтобы обеспечить выполнение этих условий, мы должны следить за появлением каждого индексированного символа в цепи, различая каждое повторение одного и того же символа при последовательном их появлении расстановкой, например, номеров 1, 2, 3, ... Для разъяснения этого приведем следующий пример допустимой цепи.

Пусть $X = \{p, q, r, s, t, u, v, x, y, z\}$ и $\rho = \{(qt, rs), (rt. xy), (px, zq), (qy, ut), (us, vt)\}$. Тогда

$$\begin{gathered} pq \to pq\underset{1}{t}t^R \to prs\underset{1}{t^R} \to prt\underset{2}{t^R}s\underset{1}{t^R} \to \\ \to pxy\underset{2}{t^R}s\underset{1}{t^R} \to zqy\underset{2}{t^R}s\underset{1}{t^R} \to \\ \to zut\underset{2}{t^R}s\underset{1}{t^R} \to zus\underset{1}{t^R} \to zvt\underset{1}{t^R} \to \\ \to zv \end{gathered}$$

есть ρ-допустимая цепь от pq до zv.

Теорема 9.51. *Пусть ρ — отношение на $\mathscr{F}_X$ и $w, w' \in \mathscr{F}_X$. Тогда $(w, w') \in \rho^c$ в том и только в том случае, когда существует ρ-допустимая цепь от w до w'.*

Доказательство. Рассмотрим следующее отношение $\bar{\rho} = \{(w, w') \mid$ существует ρ-допустимая цепь от w до $w'\}$. Тогда, очевидно, $\bar{\rho}$ рефлексивно. Так как ρ-допустимая цепь, записанная в обратном порядке, также остается ρ-допустимой цепью, $\bar{\rho}$ симметрично. Предположим, что (w_1, w_2) и (w_2, w_3) принадлежат $\bar{\rho}$; так что существуют ρ-допустимые цепи

$$w_1 \to \ldots \to w_2 \quad \text{и} \quad w_2 \to \ldots \to w_3.$$

Тогда цепь от w_1 до w_3, полученная присоединением к первой цепи второй, является $\bar{\rho}$-допустимой. Таким образом, $(w_1, w_3) \in \bar{\rho}$; это показывает, что $\bar{\rho}$ транзитивно.

Пусть $(w_1, w_2) \in \bar{\rho}$ и $w \in \mathscr{F}_X$. Тогда, исходя из ρ-допустимой цепи $w_1 \to \ldots \to w_2$, строим другую ρ-допустимую цепь $ww_1 \to \ldots \to ww_2$. Таким образом, $(ww_1, ww_2) \in \bar{\rho}$. Следовательно, $\bar{\rho}$ стабильно слева и, аналогично, стабильно справа. Итак, мы доказали, что $\bar{\rho}$ является конгруэнцией на $\mathscr{F}_X$.

Докажем, что $\bar{\rho}$ с сокращениями. Рассмотрим сначала пару $(xw_1, xw_2) \in \bar{\rho}$, где $x \in X$. Таким образом, существует ρ-допустимая цепь

$$xw_1 \to \ldots \to xw_2$$

и поэтому цепь

$$w_1 \to x_L x w_1 \to \ldots \to x^L x w_2 \to w_2$$

также является ρ-допустимой. Таким образом, $(w_1, w_2) \in \bar{\rho}$. Это показывает, что мы можем сокращать слева на элементы из X. Следовательно, сокращая последовательно по одному образующему, мы получаем, что для любого $w \in \mathscr{F}_X$ из $(ww_1, ww_2) \in \bar{\rho}$ вытекает $(w_1, w_2) \in \bar{\rho}$. Аналогично доказывается, что $\bar{\rho}$ с правым сокращением.

Ясно, что $\rho^c \subseteq \bar{\rho}$, так как $\rho \subseteq \bar{\rho}$. Приступим теперь к доказательству того, что справедливо и обратное включение.

Для этой цели рассмотрим $(w, w') \in \bar{\rho}$. Тогда существует ρ-допустимая цепь от w до w'. Если в этой цепи встречаются лишь элементарные ρ-переходы, то $(w, w') \in \rho^* \subseteq \rho^c$. В противном случае на некотором участке цепи встречается вставка. Будем рассматривать случай, когда первая вставка есть вставка элемента из X^L. Рассуждения аналогичны, если первая вставка является вставкой элемента из X^R. Проведем индукцию по длине цепи от w до w'. Наше утверждение справедливо для цепи длины 1, так как в этом случае она состоит лишь из одного элементарного ρ-перехода.

Предположим, что имеется ρ-допустимая цепь

$$w \xrightarrow{(a)} w_1 w_2 \xrightarrow{(b)} w_1 x^L x w_2 \xrightarrow{(c)} w_3 x^L x w_4 \xrightarrow{(d)} w_3 w_4 \xrightarrow{(e)} w',$$

где

(a) состоит из цепи элементарных ρ-переходов,
(b) есть вставка элемента $x^L x$,
(c) есть допустимая цепь, в которой x^L не преобразуется,
(d) есть вычеркивание элемента $x^L x$ и
(e) есть ρ-допустимая цепь от слова $w_3 w_4 \in \mathscr{F}_X$ до w'.

Заметим, что ввиду ρ-допустимости цепи от w до w' слово $w_3 w_4$, полученное в результате уничтожения x^L на стадии (d), принадлежит $\mathcal{F}_X$; следовательно, выполняется утверждение, высказанное о цепи (e).

Утверждение о том, что (c) состоит из переходов, не затрагивающих x^L, вытекает из определения ρ-допустимой цепи. Следовательно, в цепи (c) символ x^L играет роль барьера, т. е. переходы в (c) происходят независимо либо слева, либо справа от x^L. Если рассмотреть в виде последовательности переходы слева от x^L, то легко видеть, что получится ρ-допустимая цепь от w_1 до w_3. Аналогично, переходы справа от x^L образуют ρ-допустимую цепь от xw_2 до xw_4. Каждая из этих цепей, от w_1 до w_3 и от xw_2 до xw_4, имеет длину, меньшую чем длина заданной цепи от w до w'. Следовательно, по предположению индукции $(w_1, w_3) \in \rho^c$ и $(xw_2, xw_4) \in \rho^c$.

Так как ρ^c — конгруэнция с сокращениями, отсюда вытекают включения $(w_1, w_3) \in \rho^c$ и $(w_2, w_4) \in \rho^c$, что влечет за собой $(w_1w_2, w_3w_4) \in \rho^c$. Цепи от w до w_1w_2 и от w_3w_4 до w' имеют длины, меньшие чем длина заданной цепи от w до w'. Следовательно, ввиду ρ-допустимости этих цепей и на основании предположения индукции $(w, w_1w_2) \in \rho^c$ и $(w_3w_4, w') \in \rho$. В силу транзитивности ρ^c мы заключаем, что $(w, w') \in \rho^c$. Это завершает доказательство.

Прежде чем распространить конструкцию теоремы 9.51 со свободных полугрупп на произвольные полугруппы, сформулируем следующую лемму. Сначала дадим одно определение.

Пусть α: $A \to B$ есть отображение множества A в множество B. Определим отображение (α, α): $A \times A \to B \times B$, полагая

$$(a, a')(\alpha, \alpha) = (a\alpha, a'\alpha) \quad \text{для} \quad (a, a') \in A \times A.$$

Лемма 9.52. *Пусть* φ: $S \to T$ *есть гомоморфизм полугруппы* S *на полугруппу* T.

(i) *Отображения* $\sigma \to \sigma(\varphi, \varphi)$ *и* $\tau \to \tau(\varphi, \varphi)^{-1}$ *являются взаимно обратными взаимно однозначными отображениями множества всех конгруэнций* σ *на* S, *содержащих* $\varphi \circ \varphi^{-1}$, *на множество всех конгруэнций* τ *на* T, *и наоборот. Кроме того, эти отображения таковы, что соответствующие факторполугруппы изоморфны; точнее, если* τ *есть конгруэнция на* T, *то естественное отображение*

$$\varphi_\tau^*\colon\ a(\tau(\varphi, \varphi)^{-1}) \to (a\varphi)\tau \qquad (a \in S)$$

является изоморфизмом $S/\tau(\varphi, \varphi)^{-1}$ *на* T/τ.

(ii) *Если* τ — *конгруэнция на* T, *то* τ *будет конгруэнцией с сокращениями тогда и только тогда, когда* $\tau(\varphi, \varphi)^{-1}$ — *конгруэнция с сокращениями.*

(iii) *Пусть* ρ — *произвольное рефлексивное бинарное отношение на* T. *Тогда* $(\rho^*)(\varphi, \varphi)^{-1} = (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^*$ *и* $(\rho^c)(\varphi, \varphi)^{-1} = (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^c$.

Доказательство. (i) Пусть τ — конгруэнция на T и $(a, b) \in S \times S$. Так как $(a, b) \in \tau(\varphi, \varphi)^{-1}$ тогда и только тогда, когда $(a\varphi, b\varphi) \in \tau$, а это в свою очередь тогда и только тогда, когда $a\varphi\tau^{\natural} = b\varphi\tau^{\natural}$, мы имеем $\tau(\varphi, \varphi)^{-1} = \varphi\tau^{\natural} \circ (\varphi\tau^{\natural})^{-1}$. Так как $\varphi\tau^{\natural}$ является гомоморфизмом S на T/τ, это показывает, что $\tau(\varphi, \varphi)^{-1}$ есть конгруэнция на S. Ввиду того что $\tau \supseteq \iota_T$, мы имеем

$$\tau(\varphi, \varphi)^{-1} \supseteq \iota_T(\varphi, \varphi)^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1}.$$

Обратно, пусть σ — произвольная конгруэнция на S, содержащая $\varphi \circ \varphi^{-1}$. Положим $\tau = \sigma(\varphi, \varphi)$. Тогда τ является конгруэнцией на T. Рефлексивность τ следует из того, что φ есть отображение S *на* T. Очевидно, τ симметрично. Транзитивность вытекает из того, что $\sigma \supseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$. В самом деле, пусть (a, b), $(b, c) \in \tau$, так что существуют x, y, z, u, для которых $x\varphi = a$, $y\varphi = b$, $z\varphi = b$, $u\varphi = c$ и (x, y), $(z, u) \in \sigma$. Так как $y\varphi = z\varphi$ и $\varphi \circ \varphi^{-1} \subseteq \sigma$, имеем $(y, z) \in \sigma$. Следовательно, $(x, u) \in \sigma$, откуда $(a, c) \in \tau$. Докажем стабильность отношения τ. Возьмем $(a, b) \in \tau$ и $c \in T$ и выберем такие $x, y, z \in S$, что $x\varphi = a$, $y\varphi = b$, $(x, y) \in \sigma$ и $z\varphi = c$. Тогда (zx, zy), $(xz, yz) \in \sigma$, откуда (ca, cb), $(ac, bc) \in \tau$. Таким образом, мы доказали, что $\tau = \sigma(\varphi, \varphi)$ является конгруэнцией на полугруппе T.

Нетрудно видеть, что эти два отображения взаимно обратны; мы опускаем детали доказательства этого утверждения.

Закончим доказательство утверждения (i). Пусть τ — произвольная конгруэнция на T. Покажем сначала, что φ_τ^* однозначно. Для этой цели рассмотрим такие $a, b \in S$, что $a(\tau(\varphi, \varphi)^{-1}) = b(\tau(\varphi, \varphi)^{-1})$. Мы должны установить равенство $(a\varphi)\tau = (b\varphi)\tau$; но это следует непосредственно из определения $\tau(\varphi, \varphi)^{-1}$. Тот факт, что φ_τ^* является отображением на T/τ, очевиден. Предположим, далее, что $(a(\tau(\varphi, \varphi)^{-1}))\varphi_\tau^* = (b(\tau(\varphi, \varphi)^{-1}))\varphi_\tau^*$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда $(a\varphi)\tau = (b\varphi)\tau$, т. е. $(a, b)(\varphi, \varphi) \in \tau$, откуда $(a, b) \in \tau(\varphi, \varphi)^{-1}$. Это показывает, что φ_τ^* взаимно однозначно, и, так как φ_τ^*, очевидно,— гомоморфизм, мы доказали, что φ_τ^* есть изоморфизм $S/\tau(\varphi, \varphi)^{-1}$ на T/τ.

(ii) Это утверждение непосредственно вытекает из того, что T/τ и $S/\tau(\varphi, \varphi)^{-1}$ изоморфны.

(iii) Пусть ρ — рефлексивное бинарное отношение на T. Как мы видели в начале доказательства утверждения (i), рефлексивности ρ достаточно, чтобы $\varphi \circ \varphi^{-1} \subseteq \rho(\varphi, \varphi)^{-1}$. Следовательно, $\varphi \circ \varphi^{-1}$ содержится как в $(\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^*$, так и в $(\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^c$.

Так как $\rho \subseteq \rho^*$, имеем $\rho(\varphi, \varphi)^{-1} \subseteq \rho^*(\varphi, \varphi)^{-1}$ и, следовательно, $(\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^* \subseteq \rho^*(\varphi, \varphi)^{-1}$ ввиду п. (i). Обратно, $\rho(\varphi, \varphi)^{-1} \subseteq (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^*$, откуда $\rho \subseteq (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^*(\varphi, \varphi)$. В силу (i) тогда $\rho^* \subseteq (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^*(\varphi, \varphi)$, откуда $\rho^*(\varphi, \varphi)^{-1} \subseteq (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^*$. Сопоставляя это включение с ранее установленным включением, получаем $\rho^*(\varphi, \varphi)^{-1} = (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^*$.

Рассуждая аналогично и используя (ii), мы получаем $\rho^c(\varphi, \varphi)^{-1} = (\rho(\varphi, \varphi)^{-1})^c$.

Из доказанной леммы и теоремы 9.51 непосредственно вытекает

Теорема 9.53. *Пусть ρ — бинарное отношение на полугруппе S. Выберем такое множество X и отображение φ: $\mathcal{F}_X \to S$, что φ является гомоморфизмом свободной полугруппы $\mathcal{F}_X$ на полугруппу S. Положим $\tau = (\rho \cup \iota_{(S)})(\varphi, \varphi)^{-1}$.*

Тогда $(a, b) \in \rho^c$ в том и только в том случае, когда для $w, w' \in \mathcal{F}_X$, таких, что $w\varphi = a$ и $w'\varphi = b$, существует τ-допустимая цепь преобразований, начинающаяся с w и заканчивающаяся на w'.

Мы закончим этот параграф изложением результатов Круазо [1954b] о канонических формах, ассоциированных с конгруэнциями и конгруэнциями с сокращениями на полугруппе. Если σ — конгруэнция на полугруппе S, то под *множеством канонических форм в S для σ* мы понимаем поперечное сечение (см. теорему 2.10 (i)) разбиения S, соответствующего конгруэнции σ. Таким образом, $Y \subseteq S$ есть множество канонических форм в S для σ тогда и только тогда, когда Y пересекается с каждым σ-классом точно по одному элементу.

Пусть ρ — бинарное отношение на полугруппе S. Отображение $a \to \bar{a}$ полугруппы S в себя называется *канонической ρ^*-проекцией*, если

(i) $(a, \bar{a}) \in \rho^*$;

(ii) $(a, b) \in \rho \cup \rho^{-1} \cup \iota_S$ влечет за собой $\bar{a} = \bar{b}$;

(iii) $\overline{\bar{a}\bar{b}} = \overline{ab}$

для всех $a, b \in S$. Отображение $a \to \bar{a}$ полугруппы S в себя называется *канонической ρ^c-проекцией*, если выполняются условия (ii), (iii), а также

(i′) $(a, \bar{a}) \in \rho^c$;

(iv) $\overline{ac} = \overline{bc}$ или $\overline{ca} = \overline{cb}$ влечет за собой $\bar{a} = \bar{b}$ для всех $a, b, c \in S$.

Теорема 9.54. *Пусть ρ — бинарное отношение на полугруппе S.*

Пусть Y — подмножество из S и φ: $S \to Y$ есть отображение S на Y. Тогда Y есть множество канонических форм для ρ^* [ρ^c] в S, если $a \to a\varphi$ является канонической ρ^*-проекцией [ρ^c-проекцией] полугруппы S.

Обратно, пусть Y — множество канонических форм для ρ^* [ρ^c] в S. Определим отображение φ полугруппы S на Y, полагая

$$\{a\varphi\} = a\rho^* \cap Y \; [= a\rho^c \cap Y] \qquad (a \in S).$$

Тогда φ есть каноническая ρ^*-проекция [ρ^c-проекция] полугруппы S.

Доказательство. Будем доказывать утверждения теоремы лишь для ρ^*, предоставляя читателю самому провести аналогичные рассуждения для конгруэнций с сокращениями.

Обратная часть теоремы очевидна. Для того чтобы доказать первую часть теоремы, предположим, что $\varphi\colon S \to Y$ является канонической ρ^*-проекцией S на Y. Так как ввиду (i) для каждого $a \in S$ имеем $(a, a\varphi) \in \rho^*$, существует элемент множества Y в каждом ρ^*-классе. Пусть $x, y \in Y$ и $(x, y) \in \rho^*$. Тогда ввиду того, что φ есть отображение на Y, существуют $a, b \in S$, для которых $a\varphi = x$ и $b\varphi = y$. Так как $(a, a\varphi) \in \rho^*$ и $(b, b\varphi) \in \rho^*$, мы имеем $(a, b) \in \rho^*$. Таким образом, b можно получить из a (теорема 1.8) конечной последовательностью элементарных ρ-переходов. Пусть $upv \to uqv$ — один из этих переходов, так что $u, v \in S^1$ и $(p, q) \in \rho \cup \rho^{-1} \cup \iota_S$. Используя (ii), получаем $p\varphi = q\varphi$. Тогда, несколько раз применяя равенство (iii), получаем

$$\begin{aligned}(upv)\,\varphi &= ((up)\,\varphi\,(v\varphi))\,\varphi = ((((u\varphi)\,(p\varphi))\,\varphi)\,(v\varphi))\,\varphi = \\ &= ((((u\varphi)\,(q\varphi))\,\varphi)\,(v\varphi))\,\varphi = \\ &= (uqv)\,\varphi.\end{aligned}$$

Применяя этот результат к каждому переходу от a до b, мы заключаем, что $a\varphi = b\varphi$. Таким образом, $x = y$, и это завершает доказательство теоремы.

Используя теорему 9.54, часто бывает удобно задавать отображение $w \to \overline{w} = w\varphi$ при помощи вспомогательного преобразования ψ полугруппы S, обладающего следующими свойствами:

(1) $w \to w\psi$ является элементарным ρ-переходом для каждого $w \in S$.

(2) Для каждого $w \in S$ существует такое n, что

$$w\psi^{n+1} = w\psi^n.$$

(3) Для каждой пары $w_1, w_2 \in S$ существуют такие положительные целые числа k и l, что

$$\begin{aligned}(w_1w_2)\,\psi^{k+1} &= ((w_1\psi)\,w_2)\,\psi^k,\\ (w_1w_2)\,\psi^{l+1} &= (w_1\,(w_2\psi))\,\psi^l.\end{aligned}$$

Условие (2) означает, что после n применений ψ к w мы получаем слово $w\psi^n$, которое неподвижно относительно ψ. Положим $\overline{w}\ (= w\varphi) = w\psi^n$. Очевидно, (1) влечет за собой (i) и (3) влечет за собой (iii). В самом деле, из (3), очевидно, вытекает

$$((w_1\psi)\,w_2)\,\varphi = (w_1w_2)\,\varphi = (w_1\,(w_2\psi))\,\varphi.$$

Отсюда получаем

$$((w_1\psi)\,(w_2\psi))\,\varphi = (w_1w_2)\,\varphi.$$

Последовательно применяя полученное равенство, выводим равенство $((w_1\varphi)(w_2\varphi))\varphi = (w_1w_2)\varphi$, т. е. выполняется (iii). Условия (ii) и, в соответствующем случае, (iv) должны быть проверены отдельно.

В качестве примера рассмотрим $X = \{x, y, z\}$ и отношение

$$\rho = \{(zx, xy), (yx, xz), (zy, yz)\}$$

на свободной полугруппе $\mathscr{F}_X$. Пусть для каждого $w \in \mathscr{F}_X$ слово $w\psi$ получается следующим образом из w.

Если за некоторым z в w следует x или y, то выберем самое последнее такое z в w и заменим zx на xy или zy на yz, в зависимости от того, какой случай имеет место. Если таких z не существует и за некоторым y в w следует x, то выберем самое последнее y с таким свойством в w и заменим yx на xz. Если не существует таких z и таких y, то считаем, что $w\psi$ равно w.

Утверждение (1) очевидно; утверждение (2) легко проверяется, причем $\overline{w} = w\psi^n$ имеет вид $x^\alpha y^\beta z^\gamma$. Докажем первое равенство из (3); доказательство второго равенства проводится аналогично. Предположим, что

$$w_1 = w_3pw_4 \quad \text{и} \quad w_1\psi = w_3qw_4,$$

где $(p, q) \in \rho$. Из определения ρ и ψ следует, что существует неотрицательное целое число k, для которого первые k применений ψ к w_1w_2 или к $(w_1\psi)w_2$ затрагивают лишь w_4w_2, в то время как следующее применение ψ к $(w_1w_2)\psi^k$ есть замена $p \to q$. Если $k > 0$, то мы имеем

$$(w_1w_2)\psi^{k+1} = [w_3p((w_4w_2)\psi^k]\psi = w_3q((w_4w_2)\psi^k) =$$
$$= (w_3qw_4w_2)\psi^k = ((w_1\psi)w_2)\psi^k.$$

Если же $k = 0$, то

$$(w_1w_2)\psi = (w_1\psi)w_2,$$

откуда для любого $k > 0$ получаем

$$(w_1w_2)\psi^{k+1} = ((w_1\psi)w_2)\psi^k.$$

Например, предположим, что $w_1 = w_3zxw_4$ и $w_1\psi = w_3xyw_4$. После k применений ψ к w_1w_2 мы передвинем все z в w_4w_2 к правому концу слова:

$$(w_1w_2)\psi^k = w_3zx((w_4w_2)\psi^k).$$

Следующее применение ψ должно заменить zx на xy:

$$(w_1w_2)\psi^{k+1} = w_3xy((w_4w_2)\psi^k).$$

Но то же самое мы получим после k применений ψ к

$$w_3xyw_4w_2 = (w_1\psi)w_2.$$

Проверка условия (ii) совершенно тривиальна:

$$\overline{zx} = xy = \overline{xy}, \quad \overline{yx} = xz = \overline{xz}, \quad \overline{zy} = yz = \overline{yz}.$$

Мы заключаем, что

$$Y = \{x^\alpha y^\beta z^\gamma \mid \alpha \geqslant 0,\ \beta \geqslant 0,\ \gamma \geqslant 0,\ \alpha + \beta + \gamma > 0\}$$

является множеством канонических ρ^*-форм.

Этот метод не является самым легким методом установления того, что Y есть множество канонических ρ^*-форм. Легко видеть непосредственно, что для каждого слова из $\mathscr{F}_X$ существует ρ^*-эквивалентное слово из Y; трудность здесь состоит в доказательстве того, что различные элементы из Y не являются ρ^*-эквивалентными. Последнее можно установить следующим образом.

Непосредственными стандартными вычислениями доказывается, что

$$(x^\alpha y^\beta z^\gamma \cdot x^{\alpha'} y^{\beta'} z^{\gamma'})\,\varphi = \begin{cases} x^{\alpha+\alpha'} y^{\beta+\beta'} z^{\gamma+\gamma'}, & \text{если } \alpha' \text{ четно}, \\ x^{\alpha+\alpha'} y^{\gamma+\beta'} z^{\beta+\gamma'}, & \text{если } \alpha' \text{ нечетно}. \end{cases} \quad (1)$$

Пусть T — множество упорядоченных троек (α, β, γ) неотрицательных целых чисел, исключая $(0, 0, 0)$. Определим произведение в T в соответствии с формулой (1). Утомительной, но стандартной проверкой можно установить, что эта операция ассоциативна. Кроме того, мы заметим, что тройки $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ удовлетворяют определяющим соотношениям ρ, где они играют соответственно роль x, y, z. Следовательно, отображение $x \to (1, 0, 0)$, $y \to (0, 1, 0)$, $z \to (0, 0, 1)$ индуцирует гомоморфизм $R = \mathscr{F}_X/\rho^*$ на T, и если два элемента из Y были равны в R, то они будут равны и в T.

Главное состоит в том, что метод Круазо дает нам дополнительный способ проверки ρ^*-каноничности некоторого множества слов Y. Кроме того, это единственный способ, в котором рассматриваются лишь слова из $\mathscr{F}_X$, без обращения к представлению преобразованиями множества, матрицами или n-ками.

Упражнения к § 9.5

1. Пусть $X = \{p, q, e\}$ и ρ — отношение на $\mathscr{F}_X$, определенное следующим образом:

$$\rho = \{(pq, e), (ep, p), (pe, p), (eq, q), (qe, q)\}.$$

Пусть $Y = \{q^m p^n \mid m, n \geqslant 0\}$, где мы полагаем $q^0 = p^0 = e$. Тогда Y есть множество канонических форм для ρ^* в $\mathscr{F}_X$ и $\mathscr{F}_X/\rho^*$ является бициклической полугруппой (см. упражнения 1 и 2 к § 1.12).

2. Пусть $X = \{l, m, n\}$ и ρ — отношение на $\mathscr{F}_X$, определенное следующим образом:

$$\rho = \{(ml, l^2m), (nl^2, ln), (mn, nm)\}.$$

Пусть $Y = \{n^\nu l^\lambda m^\mu \mid \nu \geqslant 0, \lambda \geqslant 0, \mu \geqslant 0, \lambda + \mu + \nu > 0\}$, где нулевая степень любого элемента просто опускается в записи.

Тогда Y есть множество канонических форм для ρ^* в $\mathscr{F}_X$. Кроме того, если мы определим произведение на Y, полагая

$$n^\nu l^\lambda m^\mu \cdot n^{\nu'} l^{\lambda'} m^{\mu'} = n^{\nu+\nu'} l^{2^{\nu'}\lambda + 2^\mu \lambda'} m^{\mu+\mu'},$$

то Y становится полугруппой, изоморфной $\mathscr{F}_X/\rho^*$. Другими словами, элемент из Y, стоящий в правой части равенства, содержится в том же ρ^*-классе, что и элемент из $\mathscr{F}_X$, стоящий в левой части равенства. (Круазо [1954b].)

3. Пусть φ — гомоморфизм полугруппы S на полугруппу T и (φ, φ), $(\varphi, \varphi)^{-1}$ — отображения из леммы 9.52. Рассматривая φ как отношение $\{(x, a) \in S \times T \mid x\varphi = a\}$ и определяя, как обычно, произведение для бинарных отношений, имеем (в обозначениях леммы 9.52)

$$\tau = \sigma(\varphi, \varphi) \quad \text{тогда и только тогда, когда } \tau = \varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi,$$
$$\sigma = \tau(\varphi, \varphi)^{-1} \text{ тогда и только тогда, когда } \sigma = \varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}.$$

Из $\tau \supseteq \iota_T$ вытекает $\sigma \supseteq \varphi \circ \iota_T \circ \varphi^{-1} = \varphi \circ \varphi^{-1}$. Из этого и $\varphi^{-1} \circ \varphi = \iota_T$ легко можно вывести, что

$$\varphi^{-1} \circ (\varphi \circ \tau \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi = \tau,$$
$$\varphi \circ (\varphi^{-1} \circ \sigma \circ \varphi) \circ \varphi^{-1} = \sigma.$$

Это дает еще одно доказательство утверждения (i) леммы 9.52.

Глава 10
КОНГРУЭНЦИИ

В предыдущей главе конгруэнции существенно привлекались при рассмотрении некоторых теоретико-полугрупповых конструкций. Здесь мы продолжаем изучение конгруэнций, но теперь наше внимание будет непосредственно обращено на конгруэнции сами по себе.

Глава начинается с параграфа, в котором изучается, насколько конгруэнция определяется некоторым подмножеством ее классов эквивалентности. Ряд результатов в этом направлении для регулярных и инверсных полугрупп был сформулирован в виде теоремы 7.38 и ее следствий. В следующих двух параграфах (§ 10.2, 10.3) рассматриваются два важных типа конгруэнций (вообще говоря, односторонних), которые могут быть определены на произвольной полугруппе. Впервые они были введены в основополагающей статье Дюбрея [1941]. Наш обзор ограничивается исключительно общей теорией этих конгруэнций и читатель отсылается к обширной литературе, особенно французской школы, за дальнейшими деталями. Важность главных эквивалентностей Дюбрея (§ 10.2) была уже видна из их приложения к представлениям инверсных полугрупп взаимно однозначными частичными преобразованиями (§ 7.2, 7.3). Как будет видно в § 11.4, эти эквивалентности играют также основную роль в представлениях произвольной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями. Ключевым результатом для этого последнего приложения служит теорема 10.22. В конце § 10.2 приводится характеризация конгруэнций, факторполугруппы по которым являются либо группами, либо группами с нулем. Аналогичные результаты Леви [1944], [1946] родственны упомянутым результатам Дюбрея. В § 10.3 продолжается изучение реверсивных эквивалентностей.

Главные эквивалентности и реверсивные эквивалентности Дюбрея являются односторонними конгруэнциями. В § 10.4 изучаются конгруэнции, аналогичные главным эквивалентностям Дюбрея и названные Круазо билатеральными эквивалентностями. Результаты этого параграфа принадлежат Круазо. Центральное место занимает содержащееся в теоремах 10.37 и 10.39 описание всех гомоморфизмов произвольной полугруппы на полугруппу с сокращениями, обладающую ядром.

В литературе имеется несколько упоминаний о возможных теоретико-полугрупповых аналогах теорем Жордана — Гёльдера для групп (см. Рис [1940] и Престон [1954a]). Они являются фактически теоремами о конгруэнциях на полугруппе и ее подполугруппах. Одно из возможных обобщений теорем Жордана — Гёльдера, применимое, в частности, к полугруппам, указано в книге Биркгофа [1948]. В § 10.5, 10.6 для случая полугрупп мы изучаем принадлежащую Голди [1950] общую теорию, посвященную теоремам типа Жордана — Гёльдера. Изложение этой теории для универсальных алгебр, в которых любые две конгруэнции коммутируют, можно найти в недавно вышедшей книге Кона [1965].

В последних двух параграфах данной главы рассматриваются конгруэнции на полугруппах двух специальных типов. Параграф 10.7 посвящен вполне 0-простым полугруппам и начинается с описания конгруэнций на них, опирающегося на результаты работ Глускина [1956], Тамуры [1960] и Престона [1961]. Здесь же приводится (см. теорему 10.52) интересный пример использования разложения вполне 0-простой полугруппы на двойные смежные классы для описания гомоморфизмов таких полугрупп на группы (Шварц [1962]). Параграф заканчивается результатом (теорема 10.58) Мальцева [1952], который используется в следующем параграфе. Этот результат содержит описание конгруэнций на вполне 0-простых полугруппах вида I_{n+1}/I_n, где I_m — подполугруппа из $\mathcal{T}_X$, состоящая из всех элементов, ранг которых меньше m.

В последнем параграфе (§ 10.8) приводятся результаты Мальцева [1952] о конгруэнциях на полугруппе $\mathcal{T}_X$. Если $|X|$ конечно, то, как будет установлено, структура конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ является цепью, причем каждая конгруэнция есть либо рисовская конгруэнция по идеалу, либо конгруэнция, построенная по некоторой конгруэнции на одной из вполне 0-простых полугрупп I_{n+1}/I_n (теорема 10.68). Если $|X|$ бесконечно, то ситуация усложняется. В этом случае определяется третий тип конгруэнций и доказывается, что эти три типа конгруэнций образуют порождающее множество структуры конгруэнций на полугруппе $\mathcal{T}_X$.

Каждой конгруэнции на $\mathcal{T}_X$, отличной от конгруэнций двух первых типов, соответствует некоторая конечная последовательность (бесконечных) кардинальных чисел, и, используя эту последовательность, можно дать явную конструкцию соответствующей конгруэнции в терминах упомянутого выше порождающего множества.

§ 10.1. Допустимые и нормальные множества

В § 1.5 (теорема 1.8) мы показали, как строится конгруэнция, порожденная произвольным (бинарным) отношением на полугруппе. В этом параграфе мы рассмотрим аналогичный вопрос для односторонних конгруэнций и в дополнение к утверждению о том, что для каждого отношения эквивалентности на полугруппе существует наименьшая содержащая его конгруэнция, установим, что каждое отношение эквивалентности содержит наибольшую среди содержащихся в нем конгруэнций. Мы рассмотрим также семейства конгруэнций с заданным общим множеством классов эквивалентности. Идеи, развиваемые в этом параграфе, восходят к статьям Ляпина [1950] и Марианны Тессье [1951]. Мы следуем более общим рассмотрениям Престона [1961]. Параграф содержит ряд новых результатов, в первую очередь это леммы 10.1—10.3, теорема 10.4 и ее следствия.

Пусть S — полугруппа, $\mathcal{S}$ — множество всех симметричных (бинарных) отношений на S, $\mathcal{E}$ — множество всех эквивалентностей на S и $\mathcal{P}$ [$\mathcal{Q}$, $\mathcal{C}$] — множество всех левых [правых, двусторонних] конгруэнций на S. Пусть $\mathcal{F}$ — любое из множеств $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{C}$. Если $\rho_i \in \mathcal{F}$ $(i \in I)$, то легко проверить, что также $\bigcap \{\rho_i \mid i \in I\} \in \mathcal{F}$. Далее, $S \times S \in \mathcal{F}$. Следовательно, если определить обычным образом операцию $\bigvee$, полагая

$$\bigvee \{\rho_i \mid i \in I\} = \bigcap \{\rho \mid \rho \in \mathcal{F},\ \rho \supseteq \rho_i \text{ для всех } i \in I\},$$

то $\mathcal{F}$ становится полной структурой относительно $\bigcap$ и $\bigvee$.

Лемма 10.1. *Пусть $\mathcal{F}$ — любое из множеств $\mathcal{E}$, $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{C}$. Для $\rho, \sigma \in \mathcal{F}$ положим*

$$\tau = \{(a, b) \mid a\rho x_1\sigma x_2\rho \ldots \sigma x_m\rho b \text{ для некоторых } x_1, \ldots, x_m \in S\}.$$

Тогда $\tau = \rho \bigvee \sigma$.

Замечание. Здесь, как и всюду ниже, запись $a\rho x_1\sigma x_2\rho \ldots \ldots \sigma x_m\rho b$ используется в качестве сокращения записи $(a, x_1) \in \rho$, $(x_1, x_2) \in \sigma, \ldots, (x_m, b) \in \rho$.

Доказательство. Так как $\rho \bigvee \sigma$ есть отношение эквивалентности, а потому транзитивное отношение, содержащее σ и ρ, мы имеем $\tau \subseteq \rho \bigvee \sigma$. Следовательно, достаточно доказать, что $\tau \in \mathcal{F}$. Ясно, что τ рефлексивно и симметрично. Пусть $(a, b) \in \tau$ и $(b, c) \in \tau$, так что существуют $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, y_2, \ldots, y_n \in S$, для которых $a\rho x_1\sigma x_2\rho \ldots \sigma x_m\rho b$ и $b\rho y_1\sigma y_2\rho \ldots \ldots \sigma y_n\rho c$. Учитывая, что $b\sigma b$, и соединяя эти две цепи, мы получим цепь нужного вида от a до c. Таким образом, $(a, c) \in \tau$, т. е. τ транзитивно. Очевидно, что если ρ и σ стабильны [слева, справа], то тем же свойством обладает τ. Таким образом, $\tau \in \mathcal{F}$.

Так как конструкция для $\rho \vee \sigma$ не зависит от выбора $\mathscr{F}$, мы непосредственно получаем

Следствие 10.2. *Множества $\mathscr{E}$, $\mathscr{A}$ и $\mathscr{C}$ являются подструктурами структуры $\mathscr{E}$. Множество $\mathscr{C}$ есть подструктура структур $\mathscr{P}$ и $\mathscr{A}$; более того, $\mathscr{C} = \mathscr{P} \cap \mathscr{A}$.*

Определим теперь шесть отображений L, L^*, R, R^* и C, C^* множества $\mathscr{B}$ в себя, где $\mathscr{B}$ есть множество всех отношений на S. Отображение C^* уже было определено в § 9.5. Пусть $\rho \in \mathscr{B}$; тогда положим

$$\rho L = \{(x, y) \mid (sx, sy) \in \rho \text{ для всех } s \in S^1\},$$

$$\rho L^* = \{(x, y) \mid x = su,\ y = sv \text{ для некоторых } (u, v) \in \rho,\ s \in S^1\},$$

$$\rho C = \{(x, y) \mid (sxt, syt) \in \rho \text{ для всех } s, t \in S^1\},$$

$$\rho C^* = \{(x, y) \mid x = sut,\ y = svt \text{ для некоторых } (u, v) \in \rho,\ s, t \in S^1\},$$

Определим ρR и ρR^* двойственным образом по отношению к ρL и ρL^*.

Ясно, что для любого ρ

$$\rho L \subseteq \rho \subseteq \rho L^*,$$

$$\rho R \subseteq \rho \subseteq \rho R^*,$$

$$\rho C \subseteq \rho \subseteq \rho C^*.$$

Более точно, если обозначить через ρT транзитивное замыкание отношения ρ (в первом томе, стр. 14, транзитивное замыкание $\bigcup \{\rho^n \mid n = 1, 2, \ldots\}$ обозначалось через ρ^t), то справедлива следующая

Лемма 10.3. *Отображение L $[R, C]$ есть сохраняющее пересечения идемпотентное отображение $\mathscr{E}$ на $\mathscr{P}$ $[\mathscr{A}, \mathscr{C}]$ и*

$$LR = RL = C.$$

Отображение L^*T $[R^*T, C^*T]$ есть идемпотентное отображение $\mathscr{S}$ на $\mathscr{P}$ $[\mathscr{A}, \mathscr{C}]$ и

$$L^*TR^*T = R^*TL^*T = C^*T.$$

Если *$\rho \in \mathscr{E}$, то ρL $[\rho R, \rho C]$ есть наибольшая левая [правая, двусторонняя] конгруэнция, содержащаяся в ρ. Если $\rho \in \mathscr{S}$, то ρL^*T $[\rho R^*T, \rho C^*T]$ есть наименьшая левая [правая, двусторонняя] конгруэнция, содержащая ρ.*

Доказательство. Сначала рассмотрим отображения, не отмеченные звездочками.

Пусть $(x, y) \in \rho L$. Тогда $(sx, sy) \in \rho$ для всех $s \in S^1$. Следовательно, для любого $z \in S$

$$(szx, szy) \in \rho$$

при всех $s \in S^1$. Таким образом, $(zx, zy) \in \rho L$, т. е. ρL стабильно слева. Если теперь $\rho \in \mathscr{E}$, то ясно, что ρL рефлексивно и симметрично. Далее, ρL транзитивно; в самом деле, ввиду транзитивности ρ из $(sx, sy) \in \rho$ и $(sy, sz) \in \rho$ вытекает, что $(sx, sz) \in \rho$ для любого $s \in S^1$. Следовательно, ρL есть левая конгруэнция, т. е. $\rho L \in \mathscr{P}$.

Рассмотрим теперь $\rho \in \mathscr{P}$. Ввиду того что ρ стабильно слева, $(x, y) \in \rho$ влечет за собой $(sx, sy) \in \rho$ для всех $s \in S^1$. Таким образом, $\rho \subseteq \rho L$. Как было отмечено, мы всегда имеем $\rho L \subseteq \rho$, откуда $\rho = \rho L$. Следовательно, L есть идемпотентное отображение $\mathscr{E}$ на $\mathscr{P}$.

Пусть $\rho_i \in \mathscr{E}$ $(i \in I)$. Тогда

$$(x, y) \in (\bigcap \rho_i) L$$

в том и только в том случае, когда $(sx, sy) \in \bigcap \rho_i$ для всех $s \in S^1$, т. е. когда $(sx, sy) \in \rho_i$. А это имеет место тогда и только тогда, когда

$$(x, y) \in \bigcap (\rho_i L).$$

Следовательно,

$$(\bigcap \rho_i) L = \bigcap (\rho_i L),$$

т. е. L сохраняет пересечения.

Наконец, пусть $\rho \in \mathscr{E}$ и σ — произвольная левая конгруэнция, содержащаяся в ρ. Тогда $\sigma \cap \rho = \sigma$ и поэтому в силу того, что L сохраняет пересечения, имеем

$$\sigma L \cap \rho L = \sigma L.$$

Но, так как $\sigma \in \mathscr{P}$, выполняется $\sigma L = \sigma$. Таким образом,

$$\sigma \cap \rho L = \sigma,$$

т. е. $\sigma \subseteq \rho L$. Следовательно, ρL есть наибольшая левая конгруэнция, содержащаяся в ρ.

Соответствующие утверждения для R и C доказываются аналогично. Непосредственно из определений вытекает $LR = RL = C$.

Рассмотрим отображения, отмеченные звездочками. Заметим сначала, что утверждение о том, что C^*T отображает $\mathscr{S}$ в $\mathscr{C}$, есть просто переформулировка части утверждения теоремы 1.8. То, что C^*T есть идемпотент, очевидно, вытекает из теоремы 1.8 или прямо из определения, отсюда следует, что C^*T отображает $\mathscr{S}$ на $\mathscr{C}$. Таким же путем можно получить аналогичные утверждения об L^*T и R^*T. Простыми вычислениями можно проверить, что L^*T и R^*T коммутируют и их произведение равно C^*T.

Что касается остальных утверждений леммы об отображениях, отмеченных звездочкой, то для C^*T они составляют часть теоремы 1.8. Для L^*T и R^*T эти утверждения доказываются аналогично. Рассмотрим, например, L^*T. Из определения ясно, что

если $\rho \in \mathcal{S}$, то
$$\rho \subseteq \rho L^* \subseteq \rho L^* T.$$
Пусть σ — произвольная левая конгруэнция, содержащая ρ, и $(x, y) \in \rho L^*$. Тогда существуют такие s, u, v, что $x = su$, $y = sv$, $(u, v) \in \rho$ и $s \in S^1$. Далее, $\rho \subseteq \sigma$ и поэтому $(u, v) \in \sigma$. Так как σ есть левая конгруэнция, $(su, sv) \in \sigma$, т. е. $(x, y) \in \sigma$. Следовательно, $\rho L^* \subseteq \sigma$, откуда $\rho L^* T \subseteq \sigma T = \sigma$. Таким образом, $\rho L^* T$ является наименьшей левой конгруэнцией, содержащей ρ. Доказательство леммы закончено.

Теперь мы применим рассмотренные конструкции для получения одного обобщения упомянутого выше результата Ляпина [1950] и Тессье [1951], дающего необходимые и достаточные условия для того, чтобы данное подмножество полугруппы было классом некоторой конгруэнции.

Пусть $\mathcal{A}$ — семейство попарно не пересекающихся подмножеств полугруппы S. Напомним (§ 7.4), что $\mathcal{A}$ *допустимо* [*слева*, *справа*] в S, если $\mathcal{A}$ есть подмножество множества классов эквивалентности по некоторой [левой, правой] конгруэнции на S; и если ρ — такая эквивалентность, что элементы из $\mathcal{A}$ являются ρ-классами, то говорят, что ρ *допускает* $\mathcal{A}$.

Следует отметить, что если $\mathcal{A}$ допустимо и слева, и справа, то $\mathcal{A}$ не обязательно допустимо. Например, пусть S — группа и семейство $\mathcal{A}$ состоит из одного подмножества H, являющегося подгруппой. Тогда $\mathcal{A}$ допустимо и слева, и справа. Однако $\mathcal{A}$ допустимо тогда и только тогда, когда H является нормальным делителем в S.

Вообще говоря, если $\mathcal{A}$ допустимо [слева, справа], то могут существовать несколько [левых, правых] конгруэнций на S, допускающих $\mathcal{A}$. Легко видеть, что пересечение и определенное выше объединение $\bigvee$ любого множества эквивалентностей, допускающих $\mathcal{A}$, также допускает $\mathcal{A}$. Таким образом, множество [левых, правых] конгруэнций, допускающих $\mathcal{A}$, образует полную подструктуру в структуре всех [левых, правых] конгруэнций на S. Найдем нули и единицы этих подструктур. Для определенности рассмотрим левые конгруэнции.

Начнем с нуля и единицы структуры эквивалентностей на S, допускающих $\mathcal{A}$. Предположим, что $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$, где A_i — попарно не пересекающиеся подмножества из S. Положим
$$\left.\begin{aligned} A &= \bigcup \{A_i \mid i \in I\}, \\ \alpha(\mathcal{A}) = \alpha &= \bigcup \{A_i \times A_i \mid i \in I\} \cup \{(x, x) \mid x \in S \setminus A\}, \\ \beta(\mathcal{A}) = \beta &= \bigcup \{A_i \times A_i \mid i \in I\} \cup \{S \setminus A \times S \setminus A\}. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$
Тогда, очевидно, α есть наименьшая, а β — наибольшая эквивалентности, допускающие $\mathcal{A}$. Далее, каждое A_i есть объединение некоторых ρ-классов тогда и только тогда, когда $\rho \subseteq \beta$.

Следовательно, в силу предыдущей леммы βL есть наибольшая левая конгруэнция на S, для которой каждое A_i есть объединение некоторых ее классов эквивалентности. Аналогично, так как $\alpha \subseteq \rho$ тогда и только тогда, когда каждое A_i содержится в некотором ρ-классе, в силу предыдущей леммы $\alpha L^* T$ является наименьшей левой конгруэнцией на S, для которой каждое A_i целиком содержится в некотором ее классе эквивалентности.

Предположим, что $\mathcal{A}$ допустимо слева и ρ — левая конгруэнция на S. Множество A_i является ρ-классом тогда и только тогда, когда оно одновременно есть объединение ρ-классов и содержится в некотором ρ-классе. Таким образом, в силу предыдущих замечаний очевидно, что левая конгруэнция ρ допускает $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда

$$\alpha L^* T \subseteq \rho \subseteq \beta L. \tag{2}$$

Далее, очевидно, что $\mathcal{A}$ допустимо слева тогда и только тогда, когда

$$\alpha L^* T \subseteq \beta L. \tag{3}$$

Мы доказали, таким образом, утверждение (i) следующей теоремы.

Теорема 10.4. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — семейство попарно не пересекающихся подмножеств множества S. Определим A, $\alpha = \alpha(\mathcal{A})$ и $\beta = \beta(\mathcal{A})$ соотношениями* (1). *Тогда*

(i) *$\mathcal{A}$ допустимо слева в том и только в том случае, когда*

$$\alpha L^* T \subseteq \beta L, \tag{3}$$

и левая конгруэнция ρ допускает $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда

$$\alpha L^* T \subseteq \rho \subseteq \beta L. \tag{2}$$

(ii) *$\mathcal{A}$ допустимо слева тогда и только тогда, когда для любых $x \in S^1$ и $i, j \in I$*

$$xA_i \cap A_j \neq \varnothing \quad \textit{влечет за собой} \quad xA_i \subseteq A_j. \tag{4}$$

Доказательство. Остается доказать лишь утверждение (ii) теоремы. Необходимость условия (4) очевидна; в самом деле, это условие непосредственно вытекает из того факта, что элементы из $\mathcal{A}$ являются классами эквивалентности некоторой левой конгруэнции на S.

Обратно, предположим, что $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию (4). Тогда каждое A_i является βL-классом. В самом деле, пусть $a, a' \in A_i$ и $x \in S^1$. Тогда либо $xa \in A_j$ для некоторого $j \in I$, либо $xa \in S \setminus A$. В первом случае $xA_i \cap A_j \neq \varnothing$, так что $xA_i \subseteq A_j$ ввиду (4). Следовательно, $xa' \in A_j$. Во втором случае $xa' \in S \setminus A$; в самом деле, допустив противное, рассуждениями, аналогичными приведенным выше, мы получили бы $xa \in A$. Таким образом, для любого $x \in S^1$ имеем $(xa, xa') \in \beta$. Вспоминая определение операции L, мы выводим, что $(a, a') \in \beta L$. Следовательно, каждый класс A_i содержится в одном βL-классе.

Обратно, пусть $a \in A_i$ и $(x, a) \in \beta L$. Тогда ввиду того, что $\beta L \subseteq \beta$, имеем $(x, a) \in \beta$, откуда непосредственно вытекает $x \in A_i$. Следовательно, каждое A_i является βL-классом, т. е. βL допускает $\mathcal{A}$.

Так как βL есть левая конгруэнция на S, это завершает доказательство леммы.

В качестве следствия мы получаем ранее приведенное (в замечаниях, предшествующих теореме 7.10) утверждение о частичных правых конгруэнциях.

Следствие 10.5. *Пусть ρ — частичная правая конгруэнция с областью определения T на полугруппе S. Тогда существует такая правая конгруэнция τ на S, что ρ есть ограничение τ на T.*

Доказательство. Утверждение следствия равносильно тому, что множество ρ-классов допустимо справа в S.

Пусть $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — множество ρ-классов и $x \in S^1$. Предположим, что $A_i x \cap A_j \neq \varnothing$ для некоторых $i, j \in I$. Тогда $ax \in A_j$ для некоторого $a \in A_i$. Пусть $a' \in A_i$. Тогда $(a, a') \in \rho$ и поэтому в силу того, что ρ есть частичная правая конгруэнция на S, имеем $(ax, a'x) \in \rho$. Таким образом, $a'x \in A_j$, откуда $A_i x \subseteq A_j$. В силу утверждения, двойственного утверждению (ii) теоремы, $\mathcal{A}$ допустимо справа.

Так как допустимое слева и справа семейство подмножеств из S не обязательно допустимо, мы сформулируем отдельно двусторонний аналог теоремы 10.4. Доказательство проводится соверш нно аналогично.

Теорема 10.6. *Пусть $\mathcal{A} = \{A_i \mid i \in I\}$ — семейство попарно не пересекающихся подмножеств из S. Определим $\mathcal{A}$, $\alpha = \alpha(\mathcal{A})$ и $\beta = \beta(\mathcal{A})$ соотношениями* (1). *Тогда*

(i) *$\mathcal{A}$ допустимо в том и только в том случае, когда*

$$\alpha C^* T \subseteq \beta C; \tag{5}$$

конгруэнция ρ допускает $\mathcal{A}$ в том и только в том случае, когда

$$\alpha C^* T \subseteq \rho \subseteq \beta C. \tag{6}$$

(ii) *$\mathcal{A}$ допустимо тогда и только тогда, когда для любых $x, y \in S^1$ и $i, j \in I$*

$$xA_i y \cap A_j \neq \varnothing \text{ влечет за собой } xA_i y \subseteq A_j. \tag{7}$$

Далее, напомним (см. § 7.4), что допустимое [слева, справа] множество $\mathcal{A}$ называется *нормальным* [*слева*, *справа*] в S, если существует точно одна [левая, правая] конгруэнция на S, допускающая $\mathcal{A}$. Если S есть группа, то любая ее подгруппа нормальна и слева, и справа в этом смысле. Любой нормальный делитель или смежный класс по нормальному делителю, где «нормальность» используется в обычном теоретико-групповом смысле, нормален и в вышеприведенном смысле. Из теоремы 10.4 непосредственно вытекает

Следствие 10.7. *$\mathcal{A}$ является нормальным слева множеством подмножеств из S тогда и только тогда, когда*

$$\alpha L^* T = \beta L.$$

Другой формулировкой этого результата является

Следствие 10.8. *Пусть $\mathcal{A}$ — допустимое слева множество подмножеств из S. Тогда $\mathcal{A}$ нормально слева в том и только в том случае, когда для любой левой конгруэнции, допускающей $\mathcal{A}$, имеет место*

$$\beta L \subseteq \rho.$$

Это следствие по существу использовалось при доказательстве нормальности в различных местах § 7.4.

Мы закончим этот параграф замечанием о том, что из определения $\beta = \beta(\mathcal{A})$ и R вытекает соотношение

$$\beta R = \{(x, y) \mid xs \in A_i \text{ тогда и только тогда, когда } ys \in A_i \text{ для всех } s \in S^1,\ i \in I\}. \tag{8}$$

Если мы положим $\beta_i = \beta(\{A_i\}) = \{(A_i \times A_i) \cup (S \setminus A_i \times S \setminus A_i)\}$ для каждого $i \in I$, то из (8) непосредственно следует

$$\beta R = \bigcap \{\beta_i R \mid i \in I\}. \tag{9}$$

Заметим также, для использования в дальнейшем, что, аналогично,

$$\beta C = \{(x, y) \mid sxt \in A_i \text{ тогда и только тогда, когда } syt \in A_i \text{ для всех } s, t \in S^1,\ i \in I\}, \tag{10}$$

и

$$\beta C = \bigcap \{\beta_i C \mid i \in I\}. \tag{11}$$

Отношение $\beta_i R$ есть в точности главная частичная правая конгруэнция Дюбрея [1941], определенная множествами A_i; $\beta_i C$ есть главная конгруэнция Круазо [1957]. Мы будем рассматривать их соответственно в § 10.2 и 10.4.

Упражнения к § 10.1

1. Пусть S — полугруппа левых нулей или правых нулей (т. 1, стр. 19). Тогда каждая эквивалентность на S является конгруэнцией.

2. Если ρ — рефлексивное и симметричное отношение на множестве S, то, вообще говоря, не существует наибольшего отношения эквивалентности, содержащегося в ρ.

3. Для ограничений отображений T и L^* на $\mathscr{E}$ (в обозначениях леммы 10.3) имеет место $TL^* = L^*$. Таким образом, вообще говоря, $TL^* \neq L^*T$.

4. Пусть S — циклическая группа порядка 12: $S = \langle a \rangle$, $a^{12} = e$. Пусть ρ_1 — эквивалентность на S с классами эквивалентности $\{e, a, a^6, a^7\}$, $\{a^2, a^8\}$, $\{a^3, a^4, a^9, a^{10}\}$ и $\{a^5, a^{11}\}$. Тогда $\rho_1 L$ есть конгруэнция на S, заданная подгруппой $\langle a^6 \rangle$. Пусть ρ_2 — эквивалентность на S с классами эквивалентности $\{e, a^2, a^3, a^5, a^6, a^8, a^9, a^{11}\}$ и $\{a, a^4, a^7, a^{10}\}$. Тогда $\rho_2 L$ есть конгруэнция на S, заданная подгруппой $\langle a^3 \rangle$. Таким образом, $\rho_1 L \vee \rho_2 L = \rho_2 L$. Следовательно, вообще говоря, L не является структурным гомоморфизмом структуры $\mathscr{E}$ на $\mathscr{P}$ (ср. с леммой 10.3).

5. Используя обозначения леммы 10.3 и рассматривая отображения, определенные на $\mathscr{S}$, имеем $L^*R^* = R^*L^* = C^*$.

6. Пусть S — прямое произведение группы G и полугруппы E левых нулей: $S = G \times E$. Тогда S является левой группой, а поэтому она вполне проста и регулярна. Пусть ρ — эквивалентность на S, классами которой являются одноэлементные множества $\{(\varepsilon, e)\}$, где ε — единица группы G и $e \in E$, и множества $\{(\alpha, e) \mid e \in E\}$ для каждого $\alpha \in G \setminus \varepsilon$. Тогда ρ есть левая конгруэнция на S и ρ-классы, содержащие идемпотенты, одноэлементны. Следовательно, аналог теоремы 7.39 для инверсных полугрупп не выполняется для вполне простых полугрупп (и, следовательно, для регулярных полугрупп).

7. Пусть S — группа с нулем, $S = G^0 = G \cup \{0\}$. Присоединяя новую единицу e к S, получим полугруппу S^*. Пусть ρ $[\sigma]$ — конгруэнция на S^*, классы эквивалентности которой суть множества $\{e\}$ и S $[\{e\}, \{0\}$ и $G]$. Тогда ρ и σ обе допускают $\{\{e\}\}$. Следовательно, S^* есть инверсная полугруппа, на которой конгруэнции не определяются своими ненулевыми идемпотентными классами (ср. с теоремой 7.38 и упражнение 4 к § 10.7).

§ 10.2. Главные эквивалентности Дюбрея

Пусть S — группа и H — ее подгруппа. Определим следующим образом отношение $\mathscr{R}_H$ на S:

$$\mathscr{R}_H = \{(a, b) \in S \times S \mid Ha = Hb\}.$$

Отношение $\mathscr{R}_H$ является правой конгруэнцией на S и классы эквивалентности по $\operatorname{mod} \mathscr{R}_H$ суть правые смежные классы $\{Ha \mid a \in S\}$. Обратно, если ρ — произвольная правая конгруэнция на S, то ρ-класс H, содержащий единицу, является подгруппой и $\rho = \mathscr{R}_H$. Дюбрей [1941] рассмотрел два способа распространения на случай полугрупп конструкции, задающей правые конгруэнции на группах. В этом и следующем параграфах мы приводим результаты Дюбрея [1941].

Переходя к описанию первого из упомянутых способов, заметим прежде всего, что если H есть подгруппа группы S, то мы можем записать $\mathcal{R}_H$ в виде

$$\mathcal{R}_H = \{(a, b) \in S \times S \mid \text{для любого } x \in S \text{ включения } ax \in H \text{ и } bx \in H \text{ равносильны}\}.$$

Эту форму задания отношения $\mathcal{R}_H$ для группы Дюбрей взял в качестве определения отношения $\mathcal{R}_H$ для полугруппы. Это определение уже приводилось в § 7.2. Оно отличается от определения отношения $\beta_H = \beta(\{H\}) R$ (см. конец § 10.1) лишь тем, что x пробегает S вместо S^1. Эти два отношения совпадают во многих важных случаях, даже когда $S \neq S^1$, например если H является унитарной справа подполугруппой полугруппы S. Таким образом, мы можем использовать β_H вместо $\mathcal{R}_H$ в теоремах 10.22 и 10.24, наиболее значительных результатах этого параграфа. Теория, использующая отношение β_H, вообще говоря, немного проще теории, использующей $\mathcal{R}_H$, потому что H всегда совпадает с объединением β_H-классов, но не всегда является объединением $\mathcal{R}_H$-классов. Мы считаем, тем не менее, что лучше следовать первоначальному изложению Дюбрея.

Пусть S — полугруппа и H — ее подмножество. Напомним, что для каждого $a \in S$ множество $a^{[-1]}H$ определяется следующим образом:

$$a^{[-1]}H = \{x \in S \mid ax \in H\}.$$

Как и в § 7.2, мы полагаем

$$\mathcal{R}_H = \{(a, b) \in S \times S \mid a^{[-1]} H = b^{[-1]}H\}$$

и

$$\mathcal{R}^*_H = \{(a, b) \in S \times S \mid a^{[-1]}H = b^{[-1]}H \neq \varnothing\}.$$

В силу леммы 7.13 отношение $\mathcal{R}_H$ есть правая конгруэнция на S, которую мы называем *главной правой конгруэнцией* на S, определенной множеством H; в силу той же леммы $\mathcal{R}^*_H$ является частичной правой конгруэнцией на S, которую мы называем *главной частичной правой конгруэнцией* на S, определенной множеством H. Положим $W_H = \{x \in S \mid x^{[-1]}H = \varnothing\}$. Тогда $S \setminus W_H$ есть область определения отношения $\mathcal{R}^*_H$ и $\mathcal{R}^*_H$ совпадает с ограничением $\mathcal{R}_H$ на $S \setminus W_H$. Множество W_H называется *правым вычетом* множества H. Двойственным образом *главная левая конгруэнция* на S, определенная множеством H, задается формулой

$${}_H\mathcal{R} = \{(a, b) \in S \times S \mid Ha^{[-1]} = Hb^{[-1]}\}.$$

Множество ${}_HW = \{x \in S \mid Hx^{[-1]} = \varnothing\}$ называется *левым вычетом* множества H.

Лемма 10.9. *Если H — подмножество полугруппы S и $W_H \neq \emptyset$, то W_H является $\mathcal{R}_H$-классом и правым идеалом в S.*

Доказательство. Тот факт, что W_H есть $\mathcal{R}_H$-класс, доказан в лемме 7.13.

Пусть $w \in W_H$ и $a \in S$. Предположим, что $x \in (wa)^{[-1]}H$, т. е. $wax \in H$. Тогда $ax \in w^{[-1]}H$. Это противоречит тому, что по предположению $w \in W_H$, т. е. что $w^{[-1]}H = \emptyset$. Следовательно, $(wa)^{[-1]}H = \emptyset$, т. е. $wa \in W_H$. Таким образом, W_H является правым идеалом в S.

Говорят, что подмножество H из S является *сильным* (в S), если для любых $a, b \in S$

$$a^{[-1]}H \cap b^{[-1]}H \neq \emptyset \text{ влечет за собой } a^{[-1]}H = b^{[-1]}H.$$

Следующая лемма показывает, что это понятие совпадает с двойственным к нему понятием.

Лемма 10.10. *Пусть H — подмножество полугруппы S. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(A) *H есть сильное подмножество.*

(B) *Для произвольных $a, b, x, y \in S$ если любые три из элементов ax, bx, ay, by принадлежат H, то и четвертый элемент также принадлежит H.*

(C) *Для любых $a, b \in S$*

$$Ha^{[-1]} \cap Hb^{[-1]} \neq \emptyset \text{ влечет за собой } Ha^{[-1]} = Hb^{[-1]}.$$

Доказательство. (A) влечет за собой (B). Предположим, что H есть сильное подмножество. Рассмотрим четыре элемента ax, bx, ay и by. Если мы выберем три из них, то они будут иметь вид pu, pv, qu, а четвертый — qv, где $\{p, q\} = \{a, b\}$ и $\{x, y\} = \{u, v\}$. Если $pu, pv, qu \in H$, то $u \in p^{[-1]}H \cap q^{[-1]}H \neq \emptyset$, откуда в силу того, что H есть сильное подмножество, имеем $p^{[-1]}H = q^{[-1]}H$. Следовательно, из $pv \in H$, т. е. $v \in p^{[-1]}H$, мы получаем $v \in q^{[-1]}H$, т. е. $qv \in H$.

(B) влечет за собой (A). Предположим, что имеет место (B) и $a^{[-1]}H \cap b^{[-1]}H \neq \emptyset$. Пусть $x \in a^{[-1]}H \cap b^{[-1]}H$. Тогда $ax \in H$ и $bx \in H$. Пусть y — произвольный элемент из $a^{[-1]}H$, так что $ay \in H$. Из условия (B) вытекает, что $by \in H$, т. е. $y \in b^{[-1]}H$. Таким образом, $a^{[-1]}H \subseteq b^{[-1]}H$; обратное включение доказывается аналогично. Следовательно, H является сильным подмножеством.

Так как условие (B) двойственно себе, его эквивалентность условию (C) вытекает из эквивалентности условию (A).

В случае когда H является сильным подмножеством, мы имеем следующий аналог леммы 7.14.

Лемма 10.11. *Пусть H — сильное подмножество полугруппы S. Тогда $\mathcal{R}_H$-классами являются непустые члены семейства*

$$\{Hx^{[-1]} \mid x \in S\} \cup \{W_H\}.$$

Доказательство. Пусть $(a, b) \in \mathcal{R}_H$, так что $a^{[-1]}H = b^{[-1]}H$. Если $a^{[-1]}H = \varnothing$, то $a, b \in W_H$ и, как уже было доказано в лемме 7.13, W_H есть $\mathcal{R}_H$-класс. Предположим, что $x \in a^{[-1]}H = b^{[-1]}H$, т. е. $ax \in H$ и $bx \in H$. Тогда $a \in Hx^{[-1]}$ и $b \in Hx^{[-1]}$.

Обратно, пусть $a, b \in Hx^{[-1]}$. Тогда $x \in a^{[-1]}H \cap b^{[-1]}H$. В силу того что H есть сильное подмножество, имеем $a^{[-1]}H = b^{[-1]}H$ и поэтому $(a, b) \in \mathcal{R}_H$. Это завершает доказательство леммы.

Если H — подгруппа группы S, то $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_X$ для любого $\mathcal{R}_H$-класса X. В общем случае, когда H является сильным подмножеством, имеет место следующая

Теорема 10.12. *Пусть H — сильное подмножество полугруппы S и X — такой $\mathcal{R}_H$-класс, что $X \neq W_H$. Тогда X является сильным подмножеством и*

$$W_H \subseteq W_X, \quad \mathcal{R}_H \subseteq \mathcal{R}_X.$$

Ограничение $\mathcal{R}_H$ на $S \setminus W_X$ равно $\mathcal{R}_X^*$. Кроме того, если $H \subseteq X$, то $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_X$.

Доказательство. Поскольку $X \neq W_H$, в силу леммы 10.11 существует такой $x \in S$, что $X = Hx^{[-1]}$. Предположим, что $y, z \in S$ и $y^{[-1]} X \cap z^{[-1]} X \neq \varnothing$. Пусть $a \in y^{[-1]} X \cap z^{[-1]} X$. Тогда $ya \in X$, т. е. $yax \in H$. Аналогично, $zax \in H$. Таким образом, $ax \in y^{[-1]} H \cap z^{[-1]} H \neq \varnothing$, следовательно, $y^{[-1]}H = z^{[-1]}H$. Пусть b — произвольный элемент из $y^{[-1]}X$. Тогда $ybx \in H$, т. е. $bx \in y^{[-1]}H = z^{[-1]} H$, откуда $zbx \in H$, т. е. $b \in z^{[-1]}X$. Таким образом, $y^{[-1]}X \subseteq z^{[-1]} X$; обратное включение доказывается аналогично. Итак, мы установили, что X является сильным подмножеством.

Предположим, что $(a, b) \in \mathcal{R}_H$, т. е. $a^{[-1]}H = b^{[-1]}H$. Тогда $(a^{[-1]}H) x^{[-1]} = (b^{[-1]}H) x^{[-1]}$. Но, как легко проверить, это равенство эквивалентно равенству $a^{[-1]} (Hx^{[-1]}) = b^{[-1]} (Hx^{[-1]})$, т. е. $a^{[-1]}X = b^{[-1]}X$, откуда $(a, b) \in \mathcal{R}_X$. Следовательно, $\mathcal{R}_H \subseteq \mathcal{R}_X$. В частности, W_H содержится в некотором $\mathcal{R}_x$-классе. Так как $a^{[-1]}H = \varnothing$ влечет за собой $a^{[-1]}X = a^{[-1]} (Hx^{[-1]}) = (a^{[-1]}H)x^{[-1]} = \varnothing$, имеем $W_H \subseteq W_X$.

Так как $\mathcal{R}_H \subseteq \mathcal{R}_X$, множество W_X есть объединение $\mathcal{R}_H$-классов. Докажем теперь, что отношение $\mathcal{R}_H$ совпадает с $\mathcal{R}_X$. Для этого достаточно установить, что из $a, b \in S \setminus W_X$ и $(a, b) \in \mathcal{R}_X$ вытекает $(a, b) \in \mathcal{R}_H$. Рассмотрим такие $a, b \in S$, что $a^{[-1]}X = b^{[-1]}X \neq \varnothing$. Тогда

$$(a^{[-1]}H) x^{[-1]} = (b^{[-1]}H) x^{[-1]} \neq \varnothing,$$

и поэтому существует такое z, что $zx \in a^{[-1]}H \cap b^{[-1]}H$. Так как H есть сильное подмножество, отсюда получаем $(a, b) \in \mathscr{R}_H$.

Осталось доказать, что $W_H = W_X$ для $H \subseteq X$. Для этого достаточно установить, что $W_X \subseteq W_H$. Пусть $a \in W_X$, т. е. $a^{[-1]}X = \varnothing$. Так как $H \subseteq X$, имеем $a^{[-1]}H \subseteq a^{[-1]}X$. Следовательно, $a^{[-1]}H = \varnothing$. Таким образом, $a \in W_H$. Итак, мы доказали, что $\mathscr{R}_H = \mathscr{R}_X$ для $H \subseteq X$. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 10.13. *Пусть H — сильное подмножество полугруппы S. Тогда для любого $a \in S$ множества $a^{[-1]}H$ и $Ha^{[-1]}$ являются сильными подмножествами в S.*

Доказательство. Пустое подмножество в S является сильным. Для непустых множеств утверждение следствия вытекает непосредственно из леммы 10.11, теоремы 10.12 и двойственных к ним утверждений, которые справедливы в силу леммы 10.10

Непустое подмножество H полугруппы S называется *совершенным справа*, если оно является сильным подмножеством и содержится в некотором $\mathscr{R}_H$-классе, отличном от W_H. Таким образом, если H есть сильное подмножество, то оно совершенно справа тогда и только тогда, когда $h^{[-1]}H \cap h_1^{[-1]}H \neq \varnothing$ для всех $h, h_1 \in H$. Через U_H мы будем обозначать $\mathscr{R}_H$-класс, содержащий совершенное справа подмножество H. На основании предыдущей теоремы U_H есть сильное подмножество и $\mathscr{R}_H = \mathscr{R}_{U_H}$.

Лемма 10.14. *Пусть H — совершенное справа подмножество полугруппы S. Тогда H допустимо справа.*

Обратно, если H допустимо справа, то H содержится в некотором $\mathscr{R}_H$-классе. Кроме того, если H является также сильным подмножеством и $h^{[-1]}H \neq \varnothing$ для некоторого $h \in H$, то H совершенно справа.

Доказательство. Предположим, что H совершенно справа и $Hx \cap H \neq \varnothing$, где $x \in S^1$. Если $x = 1$, то $Hx = H$ и $Hx \subseteq H$. Если $x \in S$, то существует такое $h \in H$, что $hx \in H$, т. е. $x \in h^{[-1]}H$. Так как H совершенно справа, $x \in h_1^{[-1]}H$ для любого $h_1 \in H$, т. е. $h_1 x \in H$ для любого $h_1 \in H$. Таким образом, $Hx \subseteq H$. Следовательно, в силу утверждения, двойственного утверждению (ii) теоремы 10.4, множество H допустимо справа.

Если H допустимо справа, то в силу утверждения, двойственного утверждению (i) теоремы 10.4, множество H является классом эквивалентности правой конгруэнции β_H, где β_H есть сокращенное обозначение правой конгруэнции $\beta(\{H\})R$ (см. § 10.1). В силу равенства (8) из § 10.1

$$\beta_H = \{(x, y) \mid \text{ для любого } s \in S^1 \text{ включения } xs \in H \text{ и } ys \in H \text{ эквивалентны}\}.$$

Таким образом, непосредственно из определения конгруэнции $\mathcal{R}_H$ вытекает, что $\beta_H \subseteq \mathcal{R}_H$. Следовательно, H содержится в некотором $\mathcal{R}_H$-классе.

Оставшееся утверждение леммы становится очевидным, если мы заметим, что условие $h^{[-1]}H \neq \varnothing$ для некоторого $h \in H$ эквивалентно тому, что $H \nsubseteq W_H$.

Особый интерес в дальнейшем будет представлять случай, когда H является подполугруппой.

Лемма 10.15. *Сильная подполугруппа совершенна справа.*

Доказательство. Пусть H — сильная подполугруппа полугруппы S. Тогда $hH \subseteq H$ для любого $h \in H$, следовательно, $H \subseteq h^{[-1]} H$ для всех $h \in H$. Отсюда вытекает, что H совершенна справа.

Лемма 10.16. *Пусть H — сильная подполугруппа полугруппы S. Тогда $\mathcal{R}_H$-класс U_H, содержащий H, является унитарной справа подполугруппой из S. Кроме того, $H = U_H$ тогда и только тогда, когда H унитарна в S.*

Доказательство. В силу леммы 10.15 $H \subseteq U_H$ и $h^{[-1]} H \neq \varnothing$ для $h \in H$, причем очевидно, что $H \subseteq h^{[-1]}H$. Так как подполугруппа H является сильной, $u \in U_H$ тогда и только тогда, когда $H \subseteq u^{[-1]} H$, т. е. когда $uH \subseteq H$. Предположим, что $u_1, u_2 \in U_H$. Тогда включение $u_2H \subseteq H$ влечет за собой $u_1u_2H \subseteq u_1H \subseteq H$. Таким образом, $u_1u_2 \in U_H$. Следовательно, U_H является подполугруппой.

Докажем, что U_H унитарна справа. Возьмем такие $u \in U_H$ и $x \in S$, что $xu \in U_H$. Тогда $xuh \in H$ для некоторого, $h \in H$. Так как $u \in U_H$, имеем $uh \in H$, т. е. $uh = h_1$, где $h_1 \in H$. Следовательно, $xh_1 \in H$, т. е. $h_1 \in x^{[-1]} H$. Так как подполугруппа H является сильной, $x \in U_H$. Итак, мы установили, что U_H унитарна справа.

Предположим теперь, что H унитарна справа. Пусть $u \in U_H$, так что $uH \subseteq H$. В силу того что H унитарна справа, отсюда непосредственно вытекает $u \in H$. Это завершает доказательство леммы.

Для сильных подполугрупп результат теоремы 10.12 можно усилить.

Теорема 10.17. *Пусть H — сильная подполугруппа полугруппы S и X — такой $\mathcal{R}_H$-класс, что $X \neq W_H$. Тогда $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_X$.*

Доказательство. В силу теоремы 10.12 достаточно доказать, что $W_H = W_X$, а для этого в силу той же теоремы достаточно установить, что $W_X \subseteq W_H$.

В силу леммы 10.11 мы можем предположить, что $X = Hx^{[-1]}$. Пусть $a \in W_X$ и $b \in X$. Тогда $a^{[-1]} (Hx^{[-1]}) = \varnothing$ и $bx \in H$. Мы должны доказать, что $a^{[-1]}H = \varnothing$. Предположим противное и возьмем $z \in a^{[-1]}H$. Тогда $az \in H$ и, поскольку $bx \in H$, имеем $a(zb)x \in H$. Таким образом, $zb \in a^{[-1]}(Hx^{[-1]})$, что противоречит предположению. Следовательно, $a^{[-1]}H = \varnothing$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь связь между главными правыми конгруэнциями $\mathcal{R}_H$ и произвольными правыми конгруэнциями на полугруппе.

Лемма 10.18. *Пусть ρ — правая конгруэнция на полугруппе S и H — ее класс эквивалентности. Тогда $\rho \subseteq \mathcal{R}_H$.*

Доказательство. Пусть $(a, b) \in \rho$ и $ax \in H$. Так как ρ стабильно справа, $(ax, bx) \in \rho$, откуда, поскольку H есть ρ-класс, вытекает, что $bx \in H$. Аналогично, $bx \in H$ влечет за собой $ax \in H$. Следовательно, $(a, b) \in \mathcal{R}_H$.

Пусть ρ — правая конгруэнция на полугруппе S. Будем говорить, что она *с частичным правым сокращением относительно вычета* W, если W является ρ-классом и если из включений $ac, bc \in S \setminus W$ и $(ac, bc) \in \rho$ следует, что $(a, b) \in \rho$ $(a, b, c \in S)$.

Правую конгруэнцию с правым сокращением также будем считать правой конгруэнцией с частичным правым сокращением (в этом случае $W = \varnothing$).

Теорема 10.19. *Если H — сильное подмножество полугруппы S, то $\mathcal{R}_H$ является правой конгруэнцией с частичным правым сокращением относительно вычета W_H.*

Обратно, пусть ρ — правая конгруэнция с частичным правым сокращением относительно вычета W, а H — ее класс эквивалентности $\neq W$. Тогда $\rho \subseteq \mathcal{R}_H$ и ограничение ρ на $S \setminus W_H$ совпадает с $\mathcal{R}_H^*$.

Доказательство. Если $ac, bc \in S \setminus W_H$ и $(ac, bc) \in \mathcal{R}_H^*$, то $(ac)^{[-1]}H = (bc)^{[-1]}H \neq \varnothing$. Пусть $x \in (ac)^{[-1]}H$. Тогда $acx \in H$ и $bcx \in H$. Таким образом, $cx \in a^{[-1]}H \cap b^{[-1]}H$. Отсюда в силу того, что H— сильное подмножество, получаем $a^{[-1]}H = b^{[-1]}H \neq \varnothing$, т. е. $(a, b) \in \mathcal{R}_H$ и $a, b \notin W_H$. Значит $(a, b) \in \mathcal{R}_H^*$.

Обратно, пусть ρ — произвольная правая конгруэнция с частичным правым сокращением на S относительно вычета W, а H — ее класс эквивалентности $\neq W$. По лемме 10.18 $\rho \subseteq \mathcal{R}_H$. Пусть $(a, b) \in \mathcal{R}_H^*$, так что существует $x \in a^{[-1]}H = b^{[-1]}H$. Тогда $ax, bx \in H$, откуда, поскольку H есть ρ-класс, получаем $(ax, bx) \in \rho$. В силу того что ρ есть правая конгруэнция с частичным правым сокращением относительно вычета W, из включений $ax, bx \in S \setminus W$ и $(ax, bx) \in \rho$ вытекает, что $(a, b) \in \rho$. Следовательно, $\mathcal{R}_H^* \subseteq \rho$, а это завершает доказательство теоремы.

Следующее утверждение дает необходимые и достаточные условия для того, чтобы главная правая конгруэнция $\mathcal{R}_H$ была с правым сокращением. Предварительно необходимо ввести одно определение.

Говорят, что подмножество C, возможно пустое, полугруппы S *плотно*[1]) *слева* в S, если для любых a, $b \in S$ из $ab \in C$ следует $a \in C$ (см. § 9.4).

Следствие 10.20. *Пусть H — сильное подмножество полугруппы S. Тогда $\mathcal{R}_H$ будет конгруэнцией с правым сокращением в том и только в том случае, когда W_H плотно слева в S.*

Доказательство. Пусть $a, b, c \in S$ и $(ac, bc) \in \mathcal{R}_H$. Если $ac, bc \in S \setminus W_H$, то по теореме $(a, b) \in \mathcal{R}_H$. Предположим теперь, что $ac, bc \in W_H$. Если W_H плотно слева, то отсюда вытекает включение $a, b \in W_H$, так что $(a, b) \in \mathcal{R}_H$.

Обратно, пусть $\mathcal{R}_H$ с правым сокращением. Предположим, что $ac \in W_H$. Тогда $acS \cap H = \varnothing$ и поэтому $accS \cap H = \varnothing$, т. е. $acc \in W_H$. Таким образом, $(ac, acc) \in \mathcal{R}_H$, откуда $(a, ac) \in \mathcal{R}_H$, т. е. $a \in W_H$. Это показывает, что W_H плотно слева, что и требовалось доказать.

Для случая, когда H является подполугруппой, мы можем получить более детальные результаты.

Лемма 10.21. *Пусть H — унитарная слева подполугруппа полугруппы S. Если $h \in H$ и $a \in S$, то $(ha, a) \in \mathcal{R}_H$.*

Кроме того, если $a \in S \setminus W_H$ и $b \in S$, то существует такое $c \in S$, что $(ac, b) \in \mathcal{R}_H$.

Доказательство. Если $ax \in H$, то $hax \in H$, откуда $ax \in H$ в силу левой унитарности подполугруппы H. Таким образом, $ax \in H$ тогда и только тогда, когда $(ha)\,x \in H$; другими словами, $(ha, a) \in \mathcal{R}_H$.

Если $a \in S \setminus W_H$, то существует такое $s \in S$, что $as \in H$, откуда для любого $b \in S$ имеем $((as)\,b, b) \in \mathcal{R}_H$. Положим $sb = c$. Тогда $(ac, b) \in \mathcal{R}_H$.

Если H является сильной подполугруппой полугруппы S, то в силу леммы 10.16 H содержится в некотором унитарном справа $\mathcal{R}_H$-классе $U_H = U$. Равенство $H = U$ выполняется тогда и только тогда, когда H унитарна справа.

Кроме того, из теоремы 10.17 вытекает, что $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_U$. Если U к тому же унитарно слева и, следовательно, унитарно, то из леммы 10.21 вытекает, что $(ua, a) \in \mathcal{R}_U$ для любых $u \in U$ и $a \in S$. Теперь мы получаем характеризацию таких главных правых конгруэнций $\mathcal{R}_U$.

Теорема 10.22. *Пусть U— сильная унитарная подполугруппа полугруппы S. Тогда $\rho = \mathcal{R}_U$ есть правая конгруэнция на S.*

[1]) Consistent. — *Прим. перев.*

Обозначим через $W = W_U$ *правый вычет множества* U. *Тогда либо* $W = \varnothing$, *либо* W *есть собственный правый идеал из* S, *совпадающий с одним из* ρ-*классов. Кроме того,*

(i) *если* $ac, bc \in S \setminus W$ *и* $(ac, bc) \in \rho$, *то* $(a, b) \in \rho$;

(ii) *существует такое* $u \in S$, *что* $(ua, a) \in \rho$ *для всех* $a \in S$;

(iii) *если* $a \in S \setminus W$ *и* $b \in S$, *то существует такое* $c \in S$, *что* $(ac, b) \in \rho$.

Обратно, если ρ *есть правая конгруэнция на* S, *удовлетворяющая условиям* (i), (ii) *и* (iii), *причем либо* $W = \varnothing$, *либо* W *является* ρ-*классом и собственным правым идеалом в* S, *то множество* U *всех* $u \in S$, *для которых выполняется условие* (ii), *есть сильная унитарная подполугруппа из* S *и* $\rho = \mathscr{R}_U$. *Кроме того,* W *совпадает с правым вычетом множества* U *и* U *является* ρ-*классом.*

Указанное соответствие между U *и* $\mathscr{R}_U$ *взаимно однозначно.*

Доказательство. В одну сторону утверждение теоремы вытекает из леммы 10.9, теоремы 10.19 и леммы 10.21.

Для доказательства обратного утверждения предположим, что ρ есть правая конгруэнция на S, удовлетворяющая сформулированным условиям. Пусть U — множество всех $u \in S$, для которых имеет место условие (ii), и $u_1, u_2 \in U$. Тогда $(u_1(u_2a), u_2a) \in \rho$ и $(u_2a, a) \in \rho$ для всех $a \in S$, откуда $((u_1u_2)a, a) \in \rho$ для всех $a \in S$. Следовательно, $u_1u_2 \in U$, т. е. U является подполугруппой из S.

Пусть $u \in U$ и $ux \in U$. Так как $ux \in U$, для всех $a \in S$ мы имеем $(uxa, a) \in \rho$. Так как $u \in U$, для всех $a \in S$ имеем $(u(xa), xa) \in \rho$. Отсюда вытекает, что $(xa, a) \in \rho$ для всех $a \in S$, т. е. $x \in U$. Таким образом, U унитарна слева.

Покажем теперь, что $U \cap W = \varnothing$. Предположим, от противного, что $u \in U \cap W$. Тогда $(ua, a) \in \rho$ для всех $a \in S$. По предположению $W \neq S$, поэтому $S \setminus W \neq \varnothing$. Возьмем $b \in S \setminus W$. Так как W — правый идеал, $ub \in W$. В силу того что W есть ρ-класс, $(ub, b) \in \rho$ влечет за собой $b \in W$. Это противоречит выбору элемента b. Итак, $U \cap W = \varnothing$.

Пусть $u \in U$ и $(x, u) \in \rho$. Тогда, поскольку ρ является правой конгруэнцией, $(xa, ua) \in \rho$ для всех $a \in S$. Ввиду того что $u \in U$, имеем $(ua, a) \in \rho$ для всех $a \in S$. Следовательно, $(xa, a) \in \rho$ для всех $a \in S$, т. е. $x \in U$. Далее, пусть $u_1, u_2 \in U$. Возьмем $c \in S \setminus W$. Тогда $(u_1c, c) \in \rho$ и $(u_2c, c) \in \rho$, откуда $(u_1c, u_2c) \in \rho$. Так как W, если оно не пусто, является ρ-классом, $u_1c, u_2c \in S \setminus W$. Отсюда в силу свойства (i) получаем $(u_1, u_2) \in \rho$. Таким образом, мы доказали, что U является ρ-классом.

Обозначим через W_U правый вычет множества U. Предположим, что $a \in S \setminus W$ и $u \in U$. В силу свойства (iii) существует такое $x \in S$, что $(ax, u) \in \rho$. Так как U является ρ-классом, отсюда вытекает, что $ax \in U$ и, следовательно, $a \notin W_U$. Мы установили тем самым, что $W_U \subseteq W$. Обратно, предположим, что $a \in W$.

Если $a \notin W_U$, то $ax \in U$ для некоторого $x \in S$. С другой стороны, $ax \in W$, поскольку W — правый идеал. Это противоречит тому, что $U \cap W = \varnothing$. Следовательно, $W \subseteq W_U$. Сопоставляя доказанные включения, мы получаем $W = W_U$.

Так как U есть ρ-класс, по лемме 10.18 $\rho \subseteq \mathcal{R}_U$. Если $(a, b) \in \mathcal{R}_U$ и $a, b \in W_U$, то $(a, b) \in \rho$, как мы только что доказали. В противном случае $(a, b) \in \mathcal{R}_U$ влечет за собой $ax, bx \in U$ для некоторого $x \in S$. Возьмем $c \in S \setminus W$. Тогда $(axc, c) \in \rho$ и $(bxc, c) \in \rho$, откуда $(axc, bxc) \in \rho$ и, поскольку W, если оно не пусто, является ρ-классом, $axc, bxc \in S \setminus W$. В силу свойства (i) мы получаем, что $(a, b) \in \rho$. Таким образом, $\mathcal{R}_U \subseteq \rho$, откуда $\rho = \mathcal{R}_U$.

Докажем, что U является сильным подмножеством. Рассмотрим $ax, bx, by \in U$. Так как U есть ρ-класс, $(ax, bx) \in \rho$; ввиду свойства (i) и того, что $U \cap W = \varnothing$, отсюда вытекает $(a, b) \in \rho$. Так как ρ является правой конгруэнцией, имеем $(ay, by) \in \rho$. Отсюда, снова ввиду того, что U есть ρ-класс, получаем, что $ay \in U$. Таким образом, на основании леммы 10.10 U является сильным подмножеством.

Последнее утверждение теоремы о подполугруппе U — то, что U унитарна справа (левая унитарность U установлена выше),— теперь непосредственно следует из леммы 10.16.

Утверждение теоремы о том, что соответствие между сильными унитарными подполугруппами U и главными правыми конгруэнциями $\mathcal{R}_U$ является взаимно однозначным, будет доказано, если мы установим, что любая такая подполугруппа U состоит из всех элементов $x \in S$, для которых $(xa, a) \in \mathcal{R}_U$ при всяком $a \in S$. В силу леммы 10.21 мы знаем, что каждый элемент из U обладает этим свойством. Если $(xa, a) \in \mathcal{R}_U$ для всех $a \in S$, то, в частности, $(xu, u) \in \mathcal{R}_U$ для $u \in U$. На основании леммы 10.16 U является $\mathcal{R}_U$-классом, следовательно, $xu \in U$. Тогда ввиду того, что подполугруппа U унитарна справа, $x \in U$. Это завершает доказательство теоремы.

Перейдем теперь к рассмотрению конгруэнций. Говорят, что подмножество H полугруппы S *симметрично*, если $W_H = {}_HW$ и $\mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}$. В этом случае $\mathcal{R}_H$ является конгруэнцией на S.

Подмножество H полугруппы S называется *рефлексивным*, если оно удовлетворяет условию:

$ab \in H$ тогда и только тогда, когда $ba \in H$ для всех $a, b \in S$,

т. е. $a^{[-1]}H = Ha^{[-1]}$ для всех $a \in S$.

Теорема 10.23. *Сильная подполугруппа полугруппы S симметрична тогда и только тогда, когда она рефлексивна.*

Доказательство. Ясно, что любое рефлексивное подмножество из S симметрично.

Обратно, предположим, что H есть симметричная сильная подполугруппа из S. Пусть $a^{[-1]}H = \varnothing$. Тогда $a \in W_H = {}_HW$, откуда $Ha^{[-1]} = \varnothing$, т. е. $a^{[-1]}H = Ha^{[-1]}$. Предположим, что $x \in a^{[-1]}H$, т. е. $ax \in H$. Тогда $a \in Hx^{[-1]} = X$ и X является в силу леммы 10.11 $\mathscr{R}_H$-классом. Так как H симметрична, X является ${}_H\mathscr{R}$-классом, отличным от ${}_HW = W_H$, и поэтому в силу леммы, двойственной к лемме 10.11, $X = y^{[-1]}H$ для некоторого $y \in S$. Таким образом, $a \in y^{[-1]}H$, т. е. $ya \in H$.

На основании леммы 10.15 H содержится в некотором $\mathscr{R}_H$-классе U. В силу леммы 10.16 и леммы, двойственной к ней, U является унитарной подполугруппой в S. По теореме 10.17 и теореме, двойственной к ней, $\mathscr{R}_H = \mathscr{R}_U = {}_U\mathscr{R}$. Так как $ya \in U$, $ax \in U$ и U унитарно, для $z \in S$ мы имеем $zy \in U$ тогда и только тогда, когда $zy(ax) \in U$, т. е. $(y, y(ax)) \in {}_U\mathscr{R}$. Аналогично, $(x, (ya)x) \in \mathscr{R}_U$. Следовательно, $(x, y) \in \mathscr{R}_U = {}_H\mathscr{R}$, откуда вытекает, что $ya \in H$ влечет за собой $xa \in H$, т. е. $x \in Ha^{[-1]}$.

Таким образом, мы установили, что $a^{[-1]}H \subseteq Ha^{[-1]}$; обратное включение доказывается аналогично. Теорема доказана.

Теорема 10.24. *Пусть H — сильная и рефлексивная (а следовательно, и симметричная) подполугруппа полугруппы S. Положим $\rho = \mathscr{R}_H = {}_H\mathscr{R}$. Тогда либо $W_H \neq \varnothing$, если S/ρ есть группа с нулем W_H и единицей U_H, либо $W_H = \varnothing$, если S/ρ есть группа с единицей U_H. Множество $U = U_H$ является сильной рефлексивной и унитарной подполугруппой из S и $\rho = \mathscr{R}_U$.*

Обратно, пусть ρ — такая конгруэнция на S, что S/ρ является либо группой, либо группой с нулем, и U — единица факторполугруппы S/ρ. Тогда U есть сильная рефлексивная и унитарная подполугруппа из S и $\rho = \mathscr{R}_U$. Кроме того, $W_U \neq \varnothing$ тогда и только тогда, когда S/ρ имеет нуль. В этом случае нулем группы S/ρ является W_U.

Доказательство. Пусть H — сильная, рефлексивная подполугруппа из S. На основании теоремы 10.23 H симметрична, так что $\mathscr{R}_H = {}_H\mathscr{R} = \rho$ и $W_H = {}_HW = W$.

По лемме 10.16 и двойственной к ней лемме H содержится в некотором ρ-классе $U_H = {}_HU = U$ и U является унитарной подполугруппой из S. Кроме того, в силу теоремы 10.12 U есть сильное подмножество. По теореме 10.17 и двойственной к ней теореме $\rho = \mathscr{R}_U = {}_U\mathscr{R}$. Так как W, если оно не пусто, является идеалом из S (лемма 10.9), W есть нуль полугруппы S/ρ. Следовательно, в силу первой части теоремы 10.22 и двойственного к ней утверждения (пункт (iii)), либо $W \neq \varnothing$, если S/ρ является группой с нулем, либо $W = \varnothing$, если S/ρ является группой. Подполугруппа U является единицей полугруппы S/ρ, поскольку U есть ненулевой идемпотент из S/ρ. Рефлексивность U вытекает непосредственно из теоремы 10.23.

Обратно, пусть ρ — такая конгруэнция на S, что S/ρ является либо группой, либо группой с нулем. Положим $W = \varnothing$, если S/ρ есть группа, и обозначим через W нуль полугруппы S/ρ, если S/ρ есть группа с нулем. Тогда W, если оно не пусто, является идеалом в S. Обозначим через U единицу полугруппы S/ρ. Тогда, очевидно, U состоит из всех элементов $u \in S$, для которых $(ua, a) \in \rho$ при любом $a \in S$ или, что равносильно, для которых $(au, u) \in \rho$ при любом $a \in S$. Условия (i), (ii) и (iii) теоремы 10.22, а также двойственные к ним условия, очевидно, выполняются для ρ; отсюда в силу этой же теоремы $\rho = \mathscr{R}_U = {}_U\mathscr{R}$ и U есть сильная унитарная подполугруппа из S. Снова по теореме 10.22 и двойственной к ней теореме $W = W_U = {}_UW$. Следовательно, U симметрична, а тогда и рефлексивна по теореме 10.23. Остальные утверждения теоремы вытекают из обратного утверждения теоремы 10.22 и леммы 10.16.

Другое, но весьма близкое к изложенному рассмотрение гомоморфизмов полугруппы на группу содержится в двух статьях Леви [1944] и [1946]. Леви называет подполугруппу N полугруппы S *нормальной* в S, если для $a, b, c \in S$ из того, что произвольные два из элементов abc, ac, b принадлежат N, вытекает, что и третий элемент принадлежит N. Согласно Леви, множество N называется *полным* (по Дюбрею — *чистым справа*), если его вычет W_N пуст. Леви установил, что существует взаимно однозначное соответствие между полными нормальными подполугруппами полугруппы S и конгруэнциями на S, факторполугруппы по которым являются группами. Конгруэнция ρ_N на S, соответствующая полной нормальной подполугруппе N, определяется следующим условием:

$$\rho_N = \{(a, b) \mid \text{существует такое } x \in S, \text{ что } ax, bx \in N\}.$$

Легко проверить (см. упражнение 17 к настоящему параграфу), что подполугруппа N из S нормальна и полна в смысле Леви тогда и только тогда, когда она рефлексивна, сильна, унитарна и имеет пустой вычет. Кроме того, $\rho_N = \mathscr{R}_N$.

Упражнения к § 10.2

1. Полугруппа S называется *строгой*, если $W_H = {}_HW = \varnothing$ для каждого непустого сильного подмножества H из S.

Пусть S — строгая полугруппа, ρ — конгруэнция с сокращением на S и H — произвольный ρ-класс. Тогда H есть сильное симметричное множество и $\rho = \mathscr{R}_H = {}_H\mathscr{R}$. (Дюбрей [1941].)

2. Пусть G — группа и H — ее непустое подмножество. Тогда для H следующие условия эквивалентны:

(i) H есть сильное множество;

(ii) Если $h_1, h_2, h_3 \in H$, то $h_1h_2^{-1}h_3 \in H$;

(iii) H является правым [левым] смежным классом по некоторой подгруппе из G. (Дюбрей [1941].)

3. Пусть H — сильная подполугруппа полугруппы S. Предположим, что $W_H = {}_HW \neq \varnothing$. Тогда W_H является вполне изолированным идеалом в S, т. е. $S \setminus W_H$ есть подполугруппа. (Дюбрей [1941].)

4. Пусть ρ — конгруэнция на полугруппе S. Предположим, что S/ρ есть группа или группа с нулем и X — произвольный ρ-класс, отличный от нуля, если таковой имеется. Тогда $\rho = \mathscr{R}_X = {}_X\mathscr{R}$ и ${}_XW = W_X$.

5. Пусть $S = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ — мультипликативная полугруппа положительных целых чисел и $H = \{h\}$ для некоторого $h \in S$. Тогда $r^{[-1]} H = \varnothing$, если r не делит h, и $r^{[-1]}H = \{h/r\}$, если r делит h. Множество H является сильным. Эквивалентность $\mathscr{R}_H$ разбивает S на конечное число классов эквивалентности; W_H состоит из всех положительных целых чисел, не делящих h; каждый делитель числа h образует одноэлементный класс эквивалентности. Пусть x делит h и $X = \{x\}$. Если x — собственный делитель h, то W_H строго содержится в W_X. На множестве $S \setminus W_X$ отношения $\mathscr{R}_H$ и $\mathscr{R}_X$ совпадают. (Дюбрей [1941].)

6. Пусть X и Y — непустые подмножества полугруппы S. Определим $X^{[-1]}Y$ и $YX^{[-1]}$, полагая

$$X^{[-1]}Y = \{a \in S \mid Xa \subseteq Y\},$$

$$YX^{[-1]} = \{a \in S \mid aX \subseteq Y\}.$$

Если X, Y, Z — непустые подмножества из S, то

$$(X^{[-1]}Y)\, Z^{[-1]} = X^{[-1]}\, (YZ^{[-1]}),$$

$$X^{[-1]}\, (Y^{[-1]}Z) = (YX)^{[-1]}Z,$$

$$(XY^{[-1]})\, Z^{[-1]} = X\, (ZY)^{[-1]}.$$

7. Пусть H — подмножество полугруппы S. Определим отношения ρ_1 и ρ_2, полагая

$$\rho_1 = \{(a, b) \in S \times S \mid Ha = Hb\},$$

$$\rho_2 = \{(a, b) \in S \times S \mid \text{для всех } x \in S \text{ включения } Hax \subseteq H \text{ и } Hbx \subseteq H \text{ равносильны}\}.$$

Тогда ρ_1 и ρ_2 являются правыми конгруэнциями. Кроме того, если S есть группа и H — ее подгруппа, то $\rho_1 = \rho_2 = \mathscr{R}_H$.

8. Множество всех унитарных справа подмножеств полугруппы S образует полную структуру, в которой пересечением является теоретико-множественное пересечение.

9. (a) Подмножество H полугруппы S унитарно справа в S тогда и только тогда, когда $(S \setminus H) H \subseteq S \setminus H$.

(b) Если A — правый идеал из S, то $S \setminus A$ унитарно справа.

(c) Если $S \setminus H$ — вполне изолированный собственный правый идеал из S, то H является унитарной справа подполугруппой в S. (Чодхури [1959].)

10. Предположим, что S есть регулярная полугруппа с левым сокращением, т. е. правая группа (упражнение 4 к § 1.11). Тогда каждое непустое унитарное слева подмножество из S является подполугруппой.

Напомним, что S изоморфна прямому произведению $G \times E$, где G есть группа, а E — полугруппа правых нулей (§ 1.11). Унитарными слева непустыми подмножествами в $G \times E$ являются подполугруппы $H \times F$, где H — подгруппа из G, а F — непустое подмножество из E.

Непустое подмножество из $G \times E$ унитарно справа тогда и только тогда, когда оно унитарно. Унитарными подмножествами из $G \times E$ являются подмножества $H \times E$, где H — подгруппа из G. (Чодхури [1959].)

11. (a) Пусть S — полугруппа с сокращениями. Предположим, что существует такой элемент $h \in S$, что $h \in Sa \cap aS$ для всех $a \in S$. Тогда S является группой.

(b) Пусть H — сильное симметричное подмножество полугруппы S. Предположим, что вычет $W_H = {}_HW$ подмножества H пуст. Тогда $S/\mathscr{R}_H$ является группой. (Круазо [1952].)

12. (a) Пусть ρ — такая конгруэнция на полугруппе S, что S/ρ есть группа, и H — класс эквивалентности по $\bmod\ \rho$. Тогда H является сильным симметричным подмножеством с пустым вычетом. Кроме того, $\rho = \mathscr{R}_H$.

(b) Пусть ρ и σ — такие конгруэнции на полугруппе S, что S/ρ и S/σ являются группами и ρ и σ имеют общий класс эквивалентности H. Тогда $\rho = \sigma$. (Круазо [1952].)

13. Пусть $\mathscr{U} = \mathscr{U}(S)$ — множество сильных рефлексивных унитарных подполугрупп из S, вычет которых пуст. Обозначим через $\mathscr{G}$ множество таких конгруэнций ρ на S, что S/ρ является группой.

Отображение $U \to \mathscr{R}_U$ $(U \in \mathscr{U})$ есть взаимно-однозначное отображение множества $\mathscr{U}$ на $\mathscr{G}$. Кроме того, $U_1 \subseteq U_2$ для $U_1, U_2 \in \mathscr{U}$ тогда и только тогда, когда $\mathscr{R}_{U_1} \subseteq \mathscr{R}_{U_2}$.

Пусть E — множество идемпотентов из S. Предположим, что $E \neq \varnothing$. Тогда E содержится в каждой подполугруппе $U \in \mathscr{U}$, поэтому пересечение M всех U из $\mathscr{U}$ не пусто. Если E имеет пустой вычет, то $M \in \mathscr{U}$ и, следовательно, на основании предложения 1.7 любая полугруппа, для которой E имеет пустой вычет, обладает максимальным групповым гомоморфным образом. Последний, кроме того, единствен с точностью до изоморфизма (см. § 11.6). Приведем явное описание полугруппы M для трех важных типов полугрупп.

(a) Для инверсной полугруппы S

$$M = \{x \in S \mid ex = e \text{ для некоторого } e \in E\}.$$

(Ср. с упражнением 6 к § 7.7.)

(b) Пусть S — вполне простая полугруппа, G — произвольная максимальная подгруппа из S и N — нормальный делитель группы G, порожденный множеством $\{ef \mid e = e^2,\ f = f^2,\ ef \in G\}$. Тогда

$$M = \bigcup \{fNe \mid e = e^2,\ f = f^2,\ ef \in N\}.$$

(c) Пусть S — полугруппа с зероидами, т. е. S содержит минимальный идеал, который является группой. (См. упражнения к § 2.5.) Тогда

$$M = \{x \in S \mid ex = e\},$$

где e — единица упомянутого идеала S. (Ср. с упражнением 16 к § 2.7.) (Столл [1951].)

14. Пусть ρ — правая конгруэнция с правым сокращением на полугруппе S. Обозначим через $\mathcal{A}$ множество ρ-классов. Тогда

$$\rho = \bigcap \{\mathcal{R}_A \mid A \in \mathcal{A}\}.$$

(Тьеррен [1953].)

15. Пусть $\varphi: S \to T$ есть гомоморфизм полугруппы S на полугруппу T. Тогда подмножество V из T является унитарной справа подполугруппой в T в том и только в том случае, когда $V\varphi^{-1}$ есть унитарная справа подполугруппа в S. Следовательно, в частности, если $e \in T$ есть правая единица из T, то $e\varphi^{-1}$ является унитарной справа подполугруппой в S.

16. (a) Структура правых конгруэнций на группе G изоморфна структуре подгрупп группы G.

(b) Если H, K — подгруппы группы G, то $HK = KH$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{R}_H \circ \mathcal{R}_K = \mathcal{R}_K \circ \mathcal{R}_H$. (Дюбрей [1954, стр. 153—154].)

17. Следующие условия эквивалентны для подполугруппы N полугруппы S:

(A) N рефлексивна и унитарна.

(B) N сильна, симметрична и унитарна.

(C) N нормальна в смысле Леви (см. конец § 10.2).

18. Пусть S — коммутативная полугруппа с сокращениями. Тождественное отношение $\Delta = \iota_S$ на S является унитарной рефлексивной подполугруппой прямого произведения $S \times S$ и имеет пустой вычет. Группа $(S \times S)/\mathcal{R}_\Delta$ изоморфна группе частных полугруппы S. (Хьюлин, устное сообщение.)

§ 10.3. Реверсивные эквивалентности Дюбрея

Пусть S — группа и H — ее подгруппа. Определим отношение P_H на S, полагая

$$P_H = \{(a, b) \in S \times S \mid h_1 a = h_2 b \text{ для некоторых } h_1, h_2 \in H\}.$$

Тогда H является правой конгруэнцией на S и ее классы эквивалентности суть правые смежные классы $\{Ha \mid a \in S\}$. Это второй из упомянутых в начале § 10.2 способов задания правых конгруэнций на группах, которые Дюбрей [1941] использовал в качестве отправной точки исследования аналогичных конгруэнций на полугруппах.

Полугруппа S называется *реверсивной справа* [*слева*], если $Sa \cap Sb \neq \varnothing$ [$aS \cap bS \neq \varnothing$] для всех $a, b \in S$ (см. § 1.10). Полугруппа S называется *реверсивной*, если она реверсивна и слева, и справа.

Пусть S — произвольная полугруппа и H — ее реверсивная справа подполугруппа. Тогда *реверсивное справа отношение эквивалентности* P_H, соответствующее H, определяется следующим образом:

$$P_H = \{(a, b) \in S \times S \mid ua = vb \text{ для некоторых } u, v \in H\}.$$

Отношение P_H является правой конгруэнцией на S. В самом деле, оно, очевидно, рефлексивно и симметрично. Докажем, что оно транзитивно. Рассмотрим такие $a, b, c \in S$, что aP_Hb и bP_Hc. Тогда существуют $u, v, u', v' \in H$, для которых

$$ua = vb, \quad u'b = v'c.$$

Так как H реверсивна справа, существуют такие $x, y \in H$, что $xv = yu'$. Тогда

$$xua = xvb = yu'b = yv'c.$$

В силу того что $xu, yv' \in H$, мы получаем aP_Hc. Таким образом, P_H является эквивалентностью на S. Ясно, что P_H стабильно справа. Следовательно, P_H есть правая конгруэнция на S.

Теорема 10.25. *Пусть H — реверсивная справа подполугруппа полугруппы S. Тогда*

(i) *H содержится в некотором P_H-классе U;*

(ii) $U = \bigcup \{h^{[-1]}H \mid h \in H\}$;

(iii) *если $a \in S$ и $u \in U$, то $(ua, a) \in P_H$;*

(iv) *U является унитарной слева и реверсивной справа подполугруппой из S;*

(v) *$H = U$ в том и только в том случае, когда H унитарна слева;*

(vi) $P_U = P_H$;

(vii) $P_U \subseteq \mathscr{R}_U$.

Доказательство. (i) Пусть $h, k \in H$. Так как H реверсивна справа, существуют такие $u, v \in H$, что $uh = vk$, т. е. $(h, k) \in P_H$. Следовательно, H содержится в некотором P_H-классе.

(ii) Пусть $u \in U$. Тогда по определению U для $h \in H$ имеем $(u, h) \in P_H$, откуда $xu = yh$ для некоторых $x, y \in H$. Так как H является подполугруппой, $yh \in H$. Таким образом, $u \in x^{[-1]}H$, где $x \in H$.

Обратно, пусть u — произвольный элемент из $y^{[-1]}H$, где $y \in H$. Тогда $yu = h \in H$. Таким образом, $(hy)\, u = hh$, откуда, поскольку $hy \in H$, имеем $(u, h) \in P_H$, т. е. $u \in U$.

Следовательно, $U = \bigcup \{h^{[-1]}H \mid h \in H\}$.

(iii) Пусть $u \in U$, $a \in S$ и $h \in H$. Тогда существуют такие $x, y \in H$, что $xu = yh$. Отсюда получаем $x\,(ua) = (yh)\, a$, и, так как $x, yh \in H$, это влечет $(ua, a) \in P_H$.

(iv) Пусть u_1, u_2 — произвольные элементы из U. Ввиду (iii) имеем $(u_1u_2, u_2) \in P_H$, откуда в силу того, что U является P_H-классом, получаем $u_1, u_2 \in U$. Таким образом, U есть подполугруппа из S. Докажем, что U унитарна слева. Пусть $ua \in U$, где $u \in U$ и $a \in S$. Из включения $(ua, a) \in P_H$ вытекает, что $a \in U$. Кроме того, если $u, v \in U$, то $(u, v) \in P_H$ и поэтому существуют такие $x, y \in H$, что $xu = yv$. Так как $H \subseteq U$, это показывает, что полугруппа U реверсивна справа.

(v) В силу (iv), если $H = U$, то H унитарна слева. Обратно, предположим, что H унитарна слева. Пусть $u \in U$, так что $(u, h) \in P_H$ для $h \in H$. Отсюда $h_1u = h_2h$ для некоторых $h_1, h_2 \in H$. Далее, $h_2h \in H$. Следовательно, h_1u и h_1 принадлежат H, откуда в силу унитарности слева подполугруппы H получаем $u \in H$. Таким образом, $H = U$.

(vi) Так как $H \subseteq U$, ясно, что $P_H \subseteq P_U$. Обратно, пусть $(a, b) \in P_U$, так что существуют $x, y \in U$, для которых $xa = yb$. Ввиду того что $x \in U$, из (ii) вытекает существование таких $h_1, h_2 \in H$, что $h_1x = h_2$. Так как U является подполугруппой, $h_1y \in U$, поэтому существуют $h_3, h_4 \in H$, для которых $h_3h_1y = h_4$. Тогда элемент $h_3h_2 = h_5$ принадлежит также H. Следовательно,

$$h_5a = h_3h_2a = h_3h_1xa = h_3h_1yb = h_4b,$$

откуда $(a, b) \in P_H$. Таким образом, $P_U \subseteq P_H$.

(vii) Пусть $(a, b) \in P_U$, так что $ua = vb$ для некоторых $u, v \in$ $\in U$. Предположим, что $ax \in U$. Тогда $uax \in U$. Но $uax = vbx$, откуда в силу унитарности слева подполугруппы U имеем $bx \in U$. Аналогично, $bx \in U$ влечет за собой $ax \in U$. Следовательно, $(a, b) \in \mathcal{R}_U$.

Рассмотрим теперь ситуацию, когда отношение P_H совпадает с двойственным к нему отношением ${}_HP$, заданным следующим образом:

$${}_HP = \{(a, b) \in S \times S \mid au = bv \text{ для некоторых } u, v \in H\}.$$

Заметим, что ${}_HP$ является левой конгруэнцией, если подполугруппа H реверсивна слева.

Пусть H — непустое подмножество полугруппы S. Тогда говорят, что H есть *глобально центральное подмножество*[1]), если $aH = Ha$ для всех $a \in S$. Будем называть H *глобально центральной подполугруппой*, если H есть глобально центральное подмножество и подполугруппа в S.

Лемма 10.26. *Пусть H—глобально центральная подполугруппа полугруппы S. Тогда H реверсивна и ${}_HP = P_H$.*

Доказательство. Если $u, v \in H$, то существуют такие $x, y \in H$, что $vu = xv$ и $uv = vy$, так как по предположению $vH = Hv$. Следовательно, H реверсивна. Учитывая соображения симметрии, нам нужно доказать лишь, что $P_H \subseteq {}_HP$. Пусть a, b — такие элементы из S, что $(a, b) \in P_H$. Это означает, что существуют $u, v \in H$, для которых $ua = vb$. Так как $aH = Ha$ и $bH = Hb$, существуют такие $x, y \in H$, что $ax = ua$ и $by = vb$. Следовательно, $ax = by$, где $x, y \in H$, т. е. $(a, b) \in {}_HP$.

Теорема 10.27. *Пусть H — глобально центральная подполугруппа полугруппы S и U есть P_H-класс, содержащий H. Предположим, что вычет множества H пуст, т. е. ${}_HW = W_H = \varnothing$.*

Тогда U является реверсивной, унитарной, рефлексивной и сильной подполугруппой из S, кроме того, $P_H = P_U = \mathcal{R}_U$ и поэтому S/P_U является группой.

Доказательство. На основании предыдущей леммы подполугруппа H реверсивна и ${}_HP = P_H$, следовательно, P_H является конгруэнцией на S. В силу теоремы 10.25 H содержится в некотором реверсивном справа и унитарном слева P_H-классе U. По теореме, двойственной к теореме 10.25, U реверсивна слева и унитарна справа. Таким образом, U является унитарной и реверсивной подполугруппой из S.

В силу утверждения (iii) теоремы 10.25 и двойственного к нему утверждения U есть единица полугруппы S/P_U. Если $a \in S$, то существует такой $x \in S$, что $ax \in U$, так как $H \subseteq U$ и $W_H = \varnothing$. Через A обозначим P_U-класс, содержащий a. Таким образом, существует такое X из S/P_U, что $AX = U$. Следовательно, S/P_U является группой.

---

[1]) В оригинале centric. Мы не можем переводить этот термин словом «центральное», так как оно используется в более сильном смысле, означающем принадлежность центру — множеству всех элементов, перестановочных с любым элементом полугруппы (в § 9.4 рассматривались центральные подполугруппы именно в таком смысле). Глобально центральные подмножества из S — это в точности элементы центра полугруппы всех подмножеств полугруппы S (глобальной полугруппы для S).— *Прим. перев.*

Тот факт, что $P_U = \mathcal{R}_U$ и U есть сильная и рефлексивная подполугруппа, вытекает теперь непосредственно из теоремы 10.24.

Следствие 10.28. *Если H — унитарная глобально центральная подполугруппа из S с пустым вычетом, то H является рефлексивной сильной подполугруппой и $P_H = \mathcal{R}_H$.*

Пусть H — глобально центральная подполугруппа полугруппы S. В силу леммы 10.26 и двойственной к ней леммы подполугруппа H содержится в некотором P_H-классе U, который является реверсивной и унитарной подполугруппой. Кроме того, ${}_HP = P_H$ ввиду леммы 10.26 и поэтому P_H есть конгруэнция на S. По теореме 10.25 (iii) и двойственной к ней теореме U является единицей полугруппы S/P_H. Возникает вопрос: что еще можно сказать о полугруппе $S' = S/P_H$ кроме того, что она обладает единицей? Ответ: ничего. В действительности ничего нового нельзя сказать даже в том случае, когда H является унитарной подполугруппой. В самом деле, если S — произвольная полугруппа с единицей e, то $H = \{e\}$ является унитарной глобально центральной подполугруппой из S и $(a, b) \in P_H$ тогда и только тогда, когда $a = b$. Заметим попутно, что H не обязательно должна быть рефлексивной. В самом деле, из $ab = e$ не обязательно вытекает $ba = e$ (в качестве примера можно взять бициклическую полугруппу (§ 1.12)).

Далее, мы знаем, что $({}_HP=)_UP= P_U$ $(= P_H)$. Но это условие не является достаточным для того, чтобы U была глобально центральной подполугруппой, так что утверждение, обратное к лемме 10.26, неверно. Например, пусть S — полугруппа на множестве $\{h, t, a, b\}$ с таблицей умножения

	h	t	a	b
h	h	h	b	b
t	h	t	a	b
a	b	b	b	b
b	b	b	b	b

Пусть $H = \{h\}$. Тогда H глобально центральна. Множество U совпадает с множеством всех таких $x \in S$, что $xh = h$, так что $U = \{h, t\}$. Ввиду того что $aU = b$ и $Ua = \{a, b\}$, подполугруппа U не является глобально центральной.

Приведенный пример показывает, что если $P_H = P_U$, то равенство $\mathcal{R}_H = \mathcal{R}_U$ может и не выполняться. Классами эквивалентности в этом примере являются множества:

$$\mathcal{R}_H: \ \{h\}, \ \{t\}, \ \{a, b\};$$

$$\mathcal{R}_U: \{h, t\}, \ \{a, b\}.$$

С другой стороны, всегда $W_H = W_U$; здесь $W_H = W_U = \{a, b\}$.

Для каких полугрупп S мы можем получить все групповые гомоморфные образы при помощи реверсивных отношений эквивалентности? Конечно, не для всех полугрупп. В самом деле, если мы рассмотрим такой гомоморфизм S на одноэлементную группу, то сразу же получаем, что S должна быть реверсивна хотя бы с одной стороны. Но следующая теорема показывает, что мы получим таким методом все групповые образы полугруппы S, если S глобально центральна, т. е. если $aS = Sa$ для всех $a \in S$. Для коммутативных полугрупп S с сокращениями этот результат был доказан в статье Дюбрея и Дюбрей-Жакотэн [1940].

Теорема 10.29. *Пусть S — глобально центральная полугруппа.*

(i) *Унитарная подполугруппа H с пустым вычетом из S глобально центральна тогда и только тогда, когда она рефлексивна.*

(ii) *Пусть φ: $S \to G$ есть гомоморфизм S на группу G и H — полный прообраз единицы. Тогда H есть унитарная глобально центральная подполугруппа с пустым вычетом из S и $\varphi \circ \varphi^{-1} = P_H$.*

Доказательство. (i) Мы уже видели, что если H глобально центральна, то она также рефлексивна (следствие 10.28). Докажем обратное. Предположим, что H рефлексивна. Ввиду соображений симметрии достаточно установить, что $aH \subseteq Ha$ для всех $a \in S$. Пусть u — произвольный элемент из H. Так как по предположению S глобально центральна, существует такой $c \in S$, что $au = ca$. Поскольку H — подполугруппа с пустым вычетом, существует $b \in S$, для которого $ab \in H$, откуда $ba \in H$ в силу рефлексивности H. Следовательно, $b(ca) = b(au) = (ba)u \in H$. Снова в силу рефлексивности H имеем $c(ab) = (ca)b \in H$. Наконец, ввиду унитарности H получаем $c \in H$, что и требовалось доказать.

(ii) Так как H является единицей полугруппы $S/\varphi \circ \varphi^{-1}$, которая изоморфна G, из теоремы 10.24 и только что доказанного вытекает, что H есть унитарная глобально центральная подполугруппа с пустым вычетом. На основании теоремы 10.24 мы получаем также, что $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathcal{R}_H$, а из теоремы 10.27,— что $\mathcal{R}_H = P_H$. Это завершает доказательство теоремы.

Закончим параграф классическим примером реверсивного отношения эквивалентности (см., например, Ландау [1927], часть 10, глава 4, § 4). Пусть S — мультипликативная полугруппа целых идеалов в конечном поле алгебраических чисел и N — подполугруппа главных идеалов. Множество N является глобально центральным и рефлексивным, поскольку S коммутативна, и, легко видеть, это множество унитарно. Утверждение о том, что N имеет пустой вычет, совпадает с содержанием теоремы (теорема 771 у Ландау), согласно которой каждый идеал делит главный идеал. Таким образом, S/P_N есть абелева группа (в этом случае конечного порядка), которая называется «группой классов идеалов».

Упражнения к § 10.3

1. Пусть S — полугруппа с сокращениями и G — ее подгруппа. Тогда G реверсивна и унитарна в S. Классами эквивалентности правой конгруэнции P_G являются множества $\{Gx \mid x \in S\}$ и P_G — конгруэнция с правым сокращением.

2. Пусть S — полугруппа с правым сокращением и H — ее реверсивная справа подполугруппа. Тогда P_H есть правая конгруэнция с правым сокращением. (Дюбрей [1941].)

3. Пусть S — полугруппа с правым сокращением. Тогда каждая реверсивная справа и унитарная слева подполугруппа U из S является сильной и унитарной справа. Кроме того, если U — такая подполугруппа, то $P_U \subseteq \mathscr{R}_U$ и P_U совпадает с $\mathscr{R}_U$ на множестве $S \setminus W_U$. (Дюбрей [1941].)

§ 10.4. Главные конгруэнции

Двусторонние аналоги главных эквивалентностей Дюбрея рассматривались несколькими авторами. Пирс [1954] использовал их для характеризации гомоморфизмов на дизъюнктивные полугруппы (его результат сформулирован ниже в качестве упражнения 1). Они были использованы также Престоном [1954c] в формулировке одного условия, при котором представления некоторых инверсных полугрупп являются точными. Систематическое изучение свойств этих двусторонних аналогов главных эквивалентностей было проведено в статье Круазо [1957], из которой и заимствован материал, изложенный в данном параграфе.

Любому подмножеству H полугруппы S и любому $a \in S$ поставим в соответствие подмножество $H\,.\,.\,a$, заданное следующим образом:

$$H\,.\,.\,a = \{(x, y) \in S \times S \mid xay \in H\}.$$

Положим

$$\mathscr{P}_H = \{(a, b) \in S \times S \mid H\,.\,.\,a = H\,.\,.\,b\}.$$

Это отношение находится в такой же связи с $\beta(\{H\})\,C$ (§ 10.1), в какой отношение $\mathscr{R}_H$ находится с $\beta(\{H\})\,R$, и замечания, сделанные в начале § 10.2, можно отнести и к рассматриваемому случаю. Ясно, что $\mathscr{P}_H$ есть отношение эквивалентности на S. Если $(a, b) \in \mathscr{P}_H$, то включения $(x, y) \in H\,.\,.\,(ac)$, $(x, cy) \in$

$\in H \,..\, a$ равносильны; аналогично, равносильны включения $(x, y) \in H \,..\, (bc)$, $(x, cy) \in H \,..\, b$. Из равенства $H \,..\, a = H \,..\, b$ вытекает, что $H \,..\, (ac) = H \,..\, (bc)$. Таким образом, $(ac, bc) \in \mathcal{P}_H$. Аналогично, $(ca, cb) \in \mathcal{P}_H$. Следовательно, $\mathcal{P}_H$ является конгруэнцией на S. Отношение $\mathcal{P}_H$ называется *главной конгруэнцией* на S, соответствующей подмножеству H.

Бивычетом W множества H называется множество

$$W = \{a \in S \mid H \,..\, a = \varnothing\}.$$

Лемма 10.30. *Если H — подмножество полугруппы S, W — его бивычет и $W \neq \varnothing$, то W является (двусторонним) идеалом в S и $\mathcal{P}_H$-классом.*

Доказательство. Пусть $w \in W$, $a \in S$. Предположим, что $(x, y) \in H \,..\, (wa)$, т. е. $xway \in H$. Тогда $(x, ay) \in H \,..\, w$, но это противоречит предположению о том, что $w \in W$. Следовательно, $H \,..\, (wa) = \varnothing$, т. е. $wa \in W$. Аналогично, $aw \in W$. Итак, W является идеалом в S.

Подмножество H из S называется *бисильным* (в S), если для любых $a, b \in S$

$(H \,..\, a) \cap (H \,..\, b) \neq \varnothing$ влечет за собой $H \,..\, a = H \,..\, b$.

Теорема 10.31. *Пусть H — бисильное подмножество полугруппы S и X есть $\mathcal{P}_H$-класс, отличный от бивычета W подмножества H. Обозначим через W^X бивычет множества X. Тогда X является бисильным подмножеством и*

$$W \subseteq W^X \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_H \subseteq \mathcal{P}_X.$$

Ограничения отношений $\mathcal{P}_H$ и $\mathcal{P}_X$ на $S \setminus W^X$ совпадают. Кроме того, если $H \subseteq X$, то $\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_X$.

Доказательство. Заметим, что если $x \in X$ и $(a, b) \in H \,..\, x$, то в силу того, что H бисильно,

$(u, v) \in X \,..\, y$ тогда и только тогда, когда $(au, vb) \in H \,..\, y$.

В самом деле, $(u, v) \in X \,..\, y$ всегда влечет за собой $(au, vb) \in H \,..\, y$; обратно, $(au, vb) \in H \,..\, y$ влечет за собой $(a, b) \in (H \,..\, x) \cap (H \,..\, uyv)$, откуда в силу того, что H является бисильным, имеем $uyv \in X$, т. е. $(u, v) \in X \,..\, y$. Теперь непосредственно получаем, что если $y \notin W^X$, то $y \notin W$. Таким образом, $W \subseteq W^X$.

Предположим, что $(p, q) \in \mathcal{P}_H$, т. е. $H \,..\, p = H \,..\, q$. На основании приведенного выше замечания $(u, v) \in X \,..\, p$ тогда и только тогда, когда $(au, vb) \in H \,..\, p$, и $(v, u) \in X \,..\, q$ тогда и только тогда, когда $(au, vb) \in H \,..\, q$. Так как $H \,..\, p =$

$= H\ .\ .\ q$, мы заключаем, что $X\ .\ .\ p = X\ .\ .\ q$. Следовательно, $(p, q) \in \mathcal{P}_X$. Это показывает, что $\mathcal{P}_H \subseteq \mathcal{P}_X$.

Предположим теперь, что $(p, q) \in \mathcal{P}_X$ и $p, q \in S \setminus W^X$. Тогда существует $(u, v) \in X\ .\ .\ p = X\ .\ .\ q$. Следовательно, $(au, vb) \in \in (H\ .\ .\ p) \cap (H\ .\ .\ q)$, откуда ввиду того, что H является бисильным, $(p, q) \in \mathcal{P}_H$. Этим установлено, что $\mathcal{P}_X$ совпадает с $\mathcal{P}_H$ на $S \setminus W^X$.

Пусть $H \subseteq X$. Чтобы доказать равенство $\mathcal{P}_H = \mathcal{P}_X$, достаточно проверить включение $W^X \subseteq W$. Возьмем $p \in W^X$. Имеем $X\ .\ .\ p = \varnothing$. Предположим, что $(u, v) \in H\ .\ .\ p$. Тогда $upv \in H$. Отсюда $upv \in X$, так как $H \subseteq X$, и поэтому $(u, v) \in X\ .\ .\ p$, что противоречит предположению. Следовательно, $H\ .\ .\ p = \varnothing$, т. е. $p \in W$. Доказательство теоремы закончено.

Непустое подмножество H полугруппы S называется *бисовершенным*, если оно является бисильным и содержится в некотором $\mathcal{P}_H$-классе, отличном от бивычета множества H.

Если S обладает единицей e, то каждое ее непустое бисильное подмножество H является бисовершенным. В самом деле, $(e, e) \in H\ .\ .\ h$ для всех $h \in H$. Такое же заключение справедливо в случае, когда существуют $a, b \in S$, для которых $axb = x$ при любом $x \in S$. Однако, как показывает следующая лемма, интересная сама по себе, эти два случая совпадают. (См. Круазо [1957], а также Франклин и Линдсей [1960/61].)

Лемма 10.32. *Пусть S — полугруппа, содержащая такие элементы a, b, что $axb = x$ для всех $x \in S$. Тогда S обладает единицей e и $e = ab = ba$.*

Доказательство. Для любого $x \in S$ мы имеем

$$abx = a\,(abx)\,b = (aab)\,xb = axb = x;$$

$$xab = a\,(xab)\,b = ax\,(abb) = axb = x.$$

Таким образом, ab является единицей в S. Следовательно, $(ab)^2 = ab$, но $(ab)^2 = a\,(ba)\,b = ba$, т. е. $ab = ba$.

Как и для одностороннего случая (лемма 10.15), справедлива следующая

Лемма 10.33. *Бисильная подполугруппа бисовершенна.*

Доказательство. Если H является бисильной подполугруппой, то $(h, h') \in H\ .\ .\ h$ для любых $h, h' \in H$.

Используя бисильные подполугруппы с пустым бивычетом, можно получить еще один метод описания гомоморфизмов полугрупп на группы.

Следующая теорема до некоторой степени аналогична теоремам 10.24 и 10.27.

Теорема 10.34. *Пусть H — бисильная подполугруппа полугруппы S и ее бивычет пуст. Тогда H содержится в некотором $\mathscr{P}_H$-классе U и U есть бисильная унитарная подполугруппа из S с пустым вычетом. Равенство $H = U$ выполняется тогда и только тогда, когда H унитарна. Кроме того, $\mathscr{P}_H = \mathscr{P}_U = \mathscr{R}_U$ и $S/\mathscr{P}_H$ является группой.*

Обратно, если ρ — такая конгруэнция на S, что S/ρ является группой, и U — единица группы S/ρ, то U есть бисильная унитарная подполугруппа с пустым вычетом и, кроме того, $\rho = \mathscr{P}_U$.

Соответствие между U и $\mathscr{P}_U$, описанное выше, является взаимно однозначным.

Доказательство. Если H — бисильная подполугруппа из S, то на основании леммы 10.33 H бисовершенна. Пусть U есть $\mathscr{P}_H$-класс, содержащий H.

Пусть $u, v \in U$. Тогда $(u, h) \in \mathscr{P}_H$ и $(v, h) \in \mathscr{P}_H$ для $h \in H$. Так как $\mathscr{P}_H$ является конгруэнцией, отсюда вытекает, что $(uv, h^2) \in \mathscr{P}_H$. В силу того что $h^2 \in H$, получаем включение $uv \in U$. Следовательно, U есть подполугруппа.

Пусть $u \in U$, $xu \in U$. Существует $(a, b) \in H \,..\, (xu)$, откуда $(a, ub) \in H \,..\, x$. Далее, $H \,..\, (xu) = H \,..\, (u'u)$ для $u' \in U$, так как U является полугруппой и $\mathscr{P}_H$-классом. Следовательно, $(a, b) \in H \,..\, (u'u)$, т. е. $(a, ub) \in H \,..\, u'$. Таким образом, $(H \,..\, x) \cap (H \,..\, u') \neq \varnothing$, откуда в силу того, что H является бисильной, $x \in U$. Этим доказано, что полугруппа U унитарна справа. Аналогично, U унитарна слева.

Из того факта, что $H \subseteq U$, непосредственно вытекает, что U имеет пустой бивычет. На основании теоремы 10.31 U является бисильной.

Предположим, что H унитарна. Пусть $u \in U$, т. е. $H \,..\, u = H \,..\, h \neq \varnothing$ для $h \in H$. Тогда $huh \in H$, так как $h^3 \in H$. В силу унитарности H из включения $h\,(uh) \in H$ вытекает, что $uh \in H$, откуда в свою очередь получаем, что $u \in H$. Таким образом, $H = U$ тогда и только тогда, когда H унитарна.

На основании теоремы 10.31 $\mathscr{P}_H = \mathscr{P}_U$. Рассмотрим теперь факторполугруппу $S/\mathscr{P}_U$. Если $a, b, \ldots$ — элементы из S, то обозначим соответственно через $A, B, \ldots$ элементы из $S/\mathscr{P}_U$, их содержащие. Пусть $AB = AC$, т. е. $(ab, ac) \in \mathscr{P}_U$. Так как U имеет пустой вычет, существует $(x, y) \in U \,..\, (ab) = U \,..\, (ac)$. Таким образом, $(xa, y) \in (U \,..\, b) \cap (U \,..\, c)$, откуда $(b, c) \in \mathscr{P}_U$ и $B = C$. Значит, $S/\mathscr{P}_U$ — полугруппа с левым сокращением. Аналогично проверяется и выполнение правого сокращения.

Далее, U является идемпотентом в полугруппе $S/\mathscr{P}_U$, поэтому U есть единица в $S/\mathscr{P}_U$, так как $S/\mathscr{P}_U$ — полугруппа с сокращениями. В силу того что U имеет пустой вычет, для данного X существуют такие $A, B \in S/\mathscr{P}_U$, что $AXB = U$. Отсюда получаем $(XBA)^2 = XB(AXB)A = XBUA = XBA = U$, так как единица является единственным идемпотентом в полугруппе с сокращениями. Это показывает, что $S/\mathcal{P}_U$ есть группа.

Наконец, равенство $\mathcal{P}_U = \mathcal{R}_U$ вытекает из теоремы 10.24.

Обратно, предположим, что U есть единица группы S/ρ. Очевидно (см. теорему 10.24), что U является унитарной подполугруппой из S. А так как S/ρ является группой, U имеет пустой бивычет. Пусть $(x, y) \in (U\ .\ .\ a) \cap (U\ .\ .\ b)$. Тогда $XAY = U = XBY$, где большими буквами обозначаются ρ-классы, аналогично тому, как это мы делали выше для $\mathcal{P}_U$-классов. Пусть $(p, q) \in U\ .\ .\ a$. Тогда $PAQ = U$. Но $XAY = XBY$ влечет за собой $A = B$. Следовательно, $PBQ = U$, откуда $pbq \in U$, т. е. $(p, q) \in U\ .\ .\ b$. Этим установлено, что $U\ .\ .\ a \subseteq U\ .\ .\ b$. В силу соображений симметрии отсюда вытекает, что U есть бисильная подполугруппа.

Далее, $(a, b) \in \rho$, т. е. $A = B$, тогда и только тогда, когда существуют такие X, Y, что $XAY = U = XBY$. А это в свою очередь имеет место тогда и только тогда, когда существуют такие x, y, что $(x, y) \in (U\ .\ .\ a) \cap (U\ .\ .\ b)$, т. е. когда $(a, b) \in \mathcal{P}_U$. Таким образом, $\rho = \mathcal{P}_U$.

Ясно, что соответствие, которое мы установили между бисильными унитарными подполугруппами с пустым бивычетом и такими конгруэнциями ρ на S, что S/ρ есть группа, взаимно однозначно.

Следствие 10.35. *Пусть H — непустое подмножество полугруппы S. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(A) *H есть бисильная унитарная подполугруппа из S с пустым бивычетом.*

(B) *H есть сильная рефлексивная и унитарная подполугруппа из S с пустым правым вычетом.*

Доказательство. Это утверждение получаем непосредственно, сравнивая теоремы 10.34 и 10.24.

До сих пор мы выводили для главных конгруэнций только результаты, аналогичные соответствующим результатам для главных правых конгруэнций. В частности, мы показали, что при помощи главных конгруэнций можно описать гомоморфизмы полугрупп на группы. Теперь мы используем главные конгруэнции для получения описания гомоморфизмов полугрупп на полугруппы с сокращениями, обладающие ядром.

Сначала дадим характеризацию ядра полугруппы.

Теорема 10.36. *Полугруппа S имеет ядро тогда и только тогда, когда существует элемент из S с пустым бивычетом. В этом случае ядро полугруппы S совпадает с множеством элементов из S, имеющих пустые бивычеты.*

Эта теорема является частным случаем одного результата Шайна [1966].

Доказательство. Полугруппа S имеет ядро тогда и только тогда, когда в S существует элемент, принадлежащий каждому двустороннему идеалу из S, т. е. тогда и только тогда, когда существует такой элемент a, что $a \in SxS$ для всех $x \in S$. Но это выполняется тогда и только тогда, когда $a\,.\,.\,x$ (мы пишем $a\,.\,.\,x$ вместо $\{a\}\,.\,.\,x$) не пусто для всех $x \in S$, т. е. когда a имеет пустой бивычет.

Из сказанного непосредственно вытекает, что ядро полугруппы S, если оно существует, совпадает с множеством элементов из S, имеющих пустые бивычеты.

Теорема 10.37. *Пусть H — бисовершенное подмножество полугруппы S, имеющее пустой бивычет в S. Тогда $S/\mathcal{P}_H$ является полугруппой с сокращениями, обладающей ядром.*

Доказательство. Пусть $(ad,\ bd) \in \mathcal{P}_H$. Так как бивычет множества H пуст, существуют такие $x,\ y \in S$, что $(x,\ y) \in H\,.\,.\,(ad) = H\,.\,.\,(bd)$. Отсюда $(x,\ dy) \in (H\,.\,.\,a) \cap (H\,.\,.\,b)$, и в силу того, что H является бисильным, получаем, что $(a,\ b) \in \mathcal{P}_H$. Таким образом, $\mathcal{P}_H$ — конгруэнция с правым сокращением. Аналогично, $\mathcal{P}_H$ — конгруэнция с левым сокращением. Следовательно, $S/\mathcal{P}_H$ есть полугруппа с сокращениями.

Так как H бисовершенно, оно содержится в некотором $\mathcal{P}_H$-классе X. Ясно, что бивычет множества X также пуст. Следовательно, $S/\mathcal{P}_H$ содержит элемент с пустым бивычетом. Тогда из теоремы 10.36 вытекает, что $S/\mathcal{P}_H$ имеет ядро.

Лемма 10.38. *Пусть S — полугруппа, ρ — конгруэнция с сокращениями на ней и X — некоторый ρ-класс. Тогда X является бисильной в S.*

Кроме того, $\rho \subseteq \mathcal{P}_X$, и если W есть бивычет множества X в S, то ρ совпадает с $\mathcal{P}_X$ на $S \setminus W$.

Доказательство. Пусть $(a,\ b) \in (X\,.\,.\,p) \cap (X\,.\,.\,q)$, так что $(apb,\ aqb) \in \rho$. Так как ρ — конгруэнция с сокращениями, отсюда получаем $(p,\ q) \in \rho$. Предположим, что $(u,\ v) \in X\,.\,.\,p$. Тогда $upv \in X$, а из включения $(p,\ q) \in \rho$ вытекает, что $(upv,\ uqv) \in \rho$. Таким образом, в силу того, что X есть ρ-класс, $uqv \in X$, т. е. $(u,\ v) \in X\,.\,.\,q$. Следовательно, $X\,.\,.\,p \subseteq X\,.\,.\,q$. По соображениям симметрии мы имеем $X\,.\,.\,p = X\,.\,.\,q$, и это показывает, что X является бисильным.

Если $(a,\ b) \in \rho$, то в силу того, что X есть ρ-класс, $paq \in X$ тогда и только тогда, когда $pbq \in X$. Следовательно, $(a,\ b) \in \mathcal{P}_X$. Если $(a,\ b) \in \mathcal{P}_X$ и $a,\ b \in S \setminus W$, то существуют такие p и q, что $paq \in X$ и $pbq \in X$. Тогда $(paq, pbq) \in \rho$, откуда $(a, b) \in \rho$, так как ρ — конгруэнция с сокращениями.

Теперь мы можем доказать теорему, являющуюся обратной к теореме 10.37.

Теорема 10.39. *Пусть φ: $S \to T$ есть гомоморфизм полугруппы S на полугруппу T. Предположим, что T является полугруппой с сокращениями и обладает ядром K.*

Пусть $k \in K$. Положим $H = k\varphi^{-1}$. Тогда H есть бисовершенное подмножество из S с пустым бивычетом и имеет место равенство $\mathcal{P}_H = \varphi \circ \varphi^{-1}$.

Доказательство. В силу теоремы 10.36 элемент k имеет пустой бивычет в T. Пусть $x \in S$. Положим $x\varphi = u$. Пусть $(p, q) \in k\,.\,.\,u$, так что $puq = k$. Возьмем, a, $b \in S$, для которых $a\varphi = p$, $b\varphi = q$. Это сделать можно, поскольку φ есть отображение *на* T. Тогда $axb \in H$, т. е. $(a, b) \in H\,.\,.\,x$. Таким образом, $H\,.\,.\,x \neq \varnothing$ для всех $x \in S$, т. е. H имеет пустой бивычет.

Далее, $\varphi \circ \varphi^{-1}$ является конгруэнцией с сокращениями, так как T есть полугруппа с сокращениями. Множество H есть $\varphi \circ \varphi^{-1}$-класс. На основании предыдущей леммы мы заключаем, что H бисовершенно и $\mathcal{P}_H = \varphi \circ \varphi^{-1}$.

Теоремы 10.37 и 10.39 вместе дают способ построения всех гомоморфизмов полугрупп на полугруппы с сокращениями, обладающие ядром.

Мы закончим параграф теоремой Круазо [1957].

Теорема 10.40. *Пусть S — полугруппа с сокращениями, обладающая ядром K. Предположим, что K содержит идемпотент. Тогда $K = S$ и S является группой.*

Доказательство. Теорема легко доказывается непосредственно, но мы только отметим, что она вытекает из теоремы 10.39, если мы возьмем в качестве φ тождественное преобразование множества S, в качестве k — идемпотент из K, а затем применим теорему 10.34.

Для того чтобы доказать, что простая полугруппа с сокращениями не обязательно является группой, достаточно заметить, что полугруппа всех матриц

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & 1 \end{pmatrix},$$

где a, b — действительные положительные числа, является простой полугруппой с сокращениями, но не содержит идемпотентов. Этот пример есть частный случай упражнения 10 (а) к § 2.1. Другие примеры можно найти в статье Круазо [1957].

Упражнения к § 10.4

1. Скажем, что идеал I полугруппы S удовлетворяет условию (ι) [1]), если $SaS \subseteq I$ влечет за собой $a \in I$. Говорят, что полугруппа S *дизъюнктивна*, если $S = S^0$ и главная конгруэнция $\mathcal{P}_0$, соответствующая подмножеству $\{0\}$, является отношением равенства.

Пусть I — идеал полугруппы S, удовлетворяющий условию (ι). Тогда $S/\mathcal{P}_I$ является дизъюнктивной полугруппой. Обратно, если $\varphi\colon S \to T$ есть гомоморфизм S на дизъюнктивную полугруппу T, то $I = 0\varphi^{-1}$ — идеал из S, удовлетворяющий условию (ι), и $\varphi \circ \varphi^{-1} = \mathcal{P}_I$. (Пирс [1954].)

Следующие упражнения взяты из статьи Круазо [1957].

2. Пусть $\{H_i \mid i \in I\}$ — семейство бисильных подмножеств полугруппы S. Тогда $\bigcap \{H_i \mid i \in I\}$ является бисильным подмножеством в S.

3. Пусть ρ — конгруэнция на полугруппе S и A — некоторый ρ-класс. Тогда $\rho \subseteq \mathcal{P}_A$.

4. Пусть S — полугруппа и $H \subseteq S$. Обозначим через W_H, ${}_HW$ и W соответственно правый вычет, левый вычет и бивычет подмножества H в S.

(a) Если ${}_HW \subseteq W_H$, то ${}_HW \subseteq W$.

(b) Если $H \cap S^2 \cap W_H \cap W = \varnothing$, то $W \subseteq {}_HW$.

(c) Если H — подполугруппа, то $W \subseteq {}_HW \cap W_H$.

5. Пусть S — полугруппа и H — сильное симметричное подмножество из S. Тогда H является бисильным. Обозначим через W бивычет подмножества H. Тогда

$$\mathcal{R}\ (= \mathcal{R}_H = {}_H\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{P}_H \text{ и } {}_HW = W_H \subseteq W.$$

Кроме того, $\mathcal{R}$ и $\mathcal{P}_H$ совпадают на $S \setminus W$.

6. Пусть S — простая справа полугруппа. Тогда каждое бисильное подмножество из S является сильным.

7. Пусть S — полугруппа, H — ее бисовершенная подполугруппа и U есть $\mathcal{P}_H$-класс, содержащий H. Тогда U совпадает с пересечением всех унитарных подполугрупп из S, содержащих H.

8. Пусть H — симметричное совершенное подмножество полугруппы S. Тогда H бисовершенно и

$${}_H\mathcal{R} = \mathcal{R}_H = \mathcal{P}_H, \quad {}_HW = W_H = W,$$

где через W обозначен бивычет подмножества H в S.

9. Пусть ρ — конгруэнция с сокращениями на полугруппе S. Тогда

$$\rho = \bigcap \{\mathcal{P}_H \mid H \text{ есть } \rho\text{-класс}\}.$$

[1]) В оригинале для идеала с таким свойством введен термин «inclusive», который далее в книге не используется.— *Прим. перев.*

10. Пусть G — группа. Тогда $H \subseteq G$ является бисильным подмножеством в том и только в том случае, когда $xHH^{-1}x^{-1}H \subseteq \subseteq H$ для всех $x \in G$. Бисильное подмножество из G является сильным. Подгруппа группы G является бисильной тогда и только тогда, когда она инвариантна в G.

Следовательно, бисильными подмножествами группы являются смежные классы по инвариантным подгруппам.

11. Пусть G — группа и $H \subseteq G$. Тогда конгруэнция $\mathcal{P}_H$ равна главной конгруэнции, соответствующей наибольшей инвариантной подгруппе, которая содержится в $\bigcap\{Hh^{-1} \mid h \in H\}$.

12. Пусть S — полугруппа и I — ее идеал. Тогда I является бивычетом некоторого подмножества H из S в том и только в том случае, когда

$$I = S^{[-1]}\,(AS^{[-1]})$$

для некоторого множества $A \subseteq S$. (Обозначения см. в упражнении 6 к § 10.2.)

§ 10.5. Теоремы о гомоморфизмах для подполугрупп

В изложении материала настоящего параграфа мы следуем работе Голди [1950], касающейся произвольных алгебр (с конечноместными операциями). Соответствующая теория для алгебр является несколько более сложной, чем в случае полугрупп.

Пусть S — полугруппа и T_1, T_2 — ее подполугруппы. Предположим, что $T_1 \cap T_2 = P$ не пусто. Пусть τ_i — конгруэнция на T_i $(i = 1, 2)$. Заметим, что

$$P\tau_i = \{y \in T_i \mid (p, y) \in \tau_i \text{ для некоторого } p \in P\}$$

является подполугруппой из S. Если R — произвольная подполугруппа из S, то через $(\tau_i)_R$ будем обозначать пересечение $\tau_i \cap \cap (R \times R)$. *По определению считаем, что* $\tau_1 * \tau_2$ *есть конгруэнция на* $P\tau_2$, *порожденная ограничениями* $(\tau_1)_{P\tau_2}$ *и* $(\tau_2)_{P\tau_2}$ *конгруэнций* τ_1 *и* τ_2 *на* $P\tau_2$. Если $T_1 = T_2 = P$, то $\tau_1 * \tau_2$ равно объединению $\tau_1 \vee \tau_2$ конгруэнций τ_1 и τ_2 в структуре конгруэнций на P. Таким образом, для любых T_1 и T_2, не обязательно равных,

$$(\tau_1)_P * (\tau_2)_P = (\tau_1)_P \vee (\tau_2)_P.$$

Заметим также, что $\tau_1 * \tau_2 = (\tau_1)_P * \tau_2$.

В первом утверждении следующей леммы дается конструкция конгруэнции $\tau_1 * \tau_2$, в двух других утверждениях приводятся некоторые следствия, которые понадобятся нам позднее.

Лемма 10.41. (i) *В приведенных выше обозначениях* $(a, b) \in \in \tau_1 * \tau_2$ *тогда и только тогда, когда существует конечная после-*

довательность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_{2m} \in S$, *для которых*

$$a\tau_2 x_1 \tau_1 x_2 \tau_2 \ldots \tau_1 x_{2m} \tau_2 b.$$

Каждый член x_i *любой такой последовательности должен принадлежать* P.

(ii) $(\tau_1 * \tau_2)_P = (\tau_1)_P * (\tau_2)_P = (\tau_1)_P \vee (\tau_2)_P$.

(iii) *Если* K — *произвольная подполугруппа из* P, *то*

$$K(\tau_1 * (\tau_2)_P)\tau_2 = K(\tau_1 * \tau_2).$$

Замечание. В этом и следующем параграфах мы будем ради удобства часто обозначать композицию отношений просто приписыванием.

Доказательство. (i) Обозначим через τ отношение, определенное в формулировке леммы. По определению отношения τ ясно, что если $(a, b) \in \tau$, то каждый из элементов a и b принадлежит $P\tau_2$, так как он τ_2-эквивалентен некоторому элементу из $T_1 \cap T_2$. Следовательно, τ есть бинарное отношение на $P\tau_2$.

Пусть $a \in P\tau_2$. Тогда существует такое $b \in P$, что $(a, b) \in \tau_2$. Таким образом,

$$a\tau_2 b \tau_1 b \tau_2 a,$$

откуда $(a, a) \in \tau$, т. е. τ рефлексивно. Очевидно, τ симметрично. Докажем, что оно транзитивно. Пусть $(a, b) \in \tau$ и $(b, c) \in \tau$, т. е. существуют такие $x_1, x_2, \ldots, x_{2m}$ и $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, что

$$a\tau_2 x_1 \tau_1 x_2 \ldots \tau_1 x_{2m} \tau_2 b$$

и

$$b\tau_2 y_1 \tau_1 y_2 \ldots \tau_1 y_{2n} \tau_2 c.$$

Так как $x_{2m}\tau_2 b \tau_2 y_1$, то $x_{2m}\tau_2 y_1$. Следовательно,

$$a\tau_2 x_1 \tau_1 x_2 \ldots \tau_1 x_{2m} \tau_2 y_1 \tau_1 \ldots \tau_1 y_{2n} \tau_2 c,$$

т. е. $(a, c) \in \tau$. Таким образом, τ является эквивалентностью на $P\tau_2$.

Докажем теперь, что τ есть конгруэнция. Пусть $(a, b) \in \tau$ и $(c, d) \in \tau$, так что

$$a\tau_2 x_1 \tau_1 x_2 \ldots \tau_1 x_{2m} \tau_2 b$$

и

$$c\tau_2 y_1 \tau_1 y_2 \ldots \tau_1 y_{2n} \tau_2 d.$$

Мы можем предположить, что $m = n$; в самом деле, если, например, $m < n$, то длину первой цепи можно увеличить, вставляя подходящее число членов

$$x_{2m}\tau_2 x_{2m} \tau_1 x_{2m}.$$

Так как τ_1 и τ_2 являются конгруэнциями на своих областях определения, мы сразу же получаем

$$(ac)\ \tau_2\ (x_1y_1)\ \tau_1\ (x_2y_2)\ \ldots\ \tau_1\ (x_{2n}y_{2n})\ \tau_2\ (bd),$$

т. е. $(ac,\ bd) \in \tau$.

Конгруэнция τ, очевидно, содержит $(\tau_1)_{P\tau_2}$ и $(\tau_2)_{P\tau_2}$ и содержится в любой конгруэнции на $P\tau_2$ с этим свойством. Следовательно, $\tau = \tau_1 * \tau_2$.

(ii) Так как по определению $\tau_1 * \tau_2$ содержит $(\tau_1)_{P\tau_2}$ и $(\tau_2)_{P\tau_2}$, ясно, что $(\tau_1 * \tau_2)_P$ содержит $(\tau_1)_P$ и $(\tau_2)_P$, а следовательно, и их пересечение.

Обратно, пусть $(a,\ b) \in (\tau_1 * \tau_2)_P$. В силу (i)

$$a\tau_2x_1\tau_1x_2\tau_2\ \ldots\ \tau_1x_{2m}\tau_2b$$

для некоторых $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2m} \in P$. Так как $a,\ b \in P$, мы заключаем, что $(a,\ b) \in (\tau_1)_P \vee (\tau_2)_P$.

(iii) Пусть $a \in K\ (\tau_1 * \tau_2)$. Тогда $(k,\ a) \in \tau_1 * \tau_2$ для некоторого $k \in K$ и в силу (i) существуют такие $x_1,\ \ldots,\ x_{2m} \in P$, что

$$k\tau_2x_1\tau_1x_2\tau_2\ \ldots\ \tau_1x_{2m}\tau_2a.$$

Поскольку k принадлежит P, мы можем заменить в этой цепи каждое τ_2, кроме последнего, на $(\tau_2)_P$. Так как

$$k\ (\tau_2)_P\ x_1\tau_1x_2\ (\tau_2)_P\ \ldots\ \tau_1x_{2m}\ (\tau_2)_P\ x_{2m},$$

мы имеем $(k,\ x_{2m}) \in \tau_1 * (\tau_2)_P$. Следовательно, $x_{2m} \in K\ (\tau_1 * (\tau_2)_P)$ и из соотношения $x_{2m}\tau_2a$ мы заключаем, что

$$a \in K\ (\tau_1 * (\tau_2)_P)\ \tau_2.$$

Обратно, пусть $a \in K\ (\tau_1 * (\tau_2)_P)\ \tau_2$. Тогда $b\tau_2a$ для некоторого $b \in K\ (\tau_1 * (\tau_2)_P)$ и в силу (i) существует $k \in K$ и такие $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2m} \in P$, что

$$k\ (\tau_2)_P\ x_1\tau_1x_2\ (\tau_2)_P\ \ldots\ \tau_1x_{2m}\ (\tau_2)_P\ b.$$

Из соотношений $x_{2m}\tau_2b$ и $b\tau_2a$ вытекает, что $x_{2m}\tau_2a$. Следовательно,

$$k\tau_2x_1\tau_1x_2\tau_2\ \ldots\ \tau_1x_{2m}\tau_2a,$$

откуда в силу (i) получаем $(k,\ a) \in \tau_1 * \tau_2$, т. е. $a \in K\ (\tau_1 * \tau_2)$. Доказательство леммы 10.41 закончено.

Прежде чем привести теорему о гомоморфизмах, докажем еще одну лемму.

Лемма 10.42. *Пусть T — подполугруппа полугруппы S и σ — конгруэнция на S. Тогда $t\sigma_T \to t\sigma$ $(t \in T)$ является изоморфизмом полугруппы T/σ_T на $T\sigma/\sigma_{T\sigma}$.*

Замечание. Ограничение $\sigma_{T\sigma}$ конгруэнции σ на $T\sigma$ совпадает с $\iota_T * \sigma$.

Доказательство. Отображение $t\sigma_T \to t\sigma$ является взаимно однозначным. В самом деле, $(t_1, t_2) \in \sigma_T$ тогда и только тогда, когда $(t_1, t_2) \in \sigma$, $(t_1, t_2) \in T$. Оно является, очевидно, отображением *на* $T\sigma/\sigma_{T\sigma}$ и изоморфизмом, так как

$$(t_1\sigma_T)(t_2\sigma_T) = (t_1t_2)\sigma_T \to (t_1t_2)\sigma = (t_1\sigma)(t_2\sigma).$$

Теорема 10.43. *Пусть T — подполугруппа полугруппы S, σ — конгруэнция на S и τ — конгруэнция на T. Определим естественные отображения α и β, полагая*

$$(t\tau)\alpha = t(\tau * \sigma_T) \qquad (t \in T),$$

$$(t(\tau * \sigma_T))\beta = t(\tau * \sigma) \qquad (t \in T).$$

Тогда α является гомоморфизмом полугруппы T/τ на $T/(\tau * \sigma_T)$, а β — изоморфизмом $T/(\tau * \sigma_T)$ на $T\sigma/(\tau * \sigma)$.

Доказательство. Отношения τ и σ_T являются конгруэнциями на T, следовательно, $\tau * \sigma_T$ совпадает с их объединением. В частности, $\tau * \sigma_T$ есть конгруэнция на T, содержащая τ, и поэтому α является гомоморфизмом.

Рассматривая β, применим лемму 10.41 (ii) к случаю $T_1 = T$, $T_2 = S$, $P = T_1 \cap T_2 = T$, $\tau_1 = \tau$ и $\tau_2 = \sigma$. Мы получим $(\tau * \sigma)_T = \tau \vee \sigma_T$. Применим лемму 10.42, заменяя S на $T\sigma$ и σ на $\tau * \sigma$. Так как $T(\tau * \sigma) = T\sigma$ и $(\tau * \sigma)_{T\sigma} = \tau * \sigma$, мы заключаем, что отображение $t(\tau * \sigma)_T \to t(\tau * \sigma)$ является изоморфизмом $T/(\tau * \sigma)_T$ на $T\sigma/(\tau * \sigma)$. В силу того что $(\tau * \sigma)_T = \tau \vee \sigma_T = \tau * \sigma_T$, это отображение совпадает с β.

В качестве следствия мы получаем следующий аналог леммы Цассенхауза для групп.

Следствие 10.44. *Пусть T_1 и T_2 — такие подполугруппы полугруппы S, что $P = T_1 \cap T_2$ не пусто, и τ_1, τ_2 — конгруэнции соответственно на T_1 и T_2. Тогда естественный гомоморфизм*

$$p(\tau_2 * \tau_1) \to p(\tau_1 * \tau_2) \qquad (p \in P)$$

является изоморфизмом и, таким образом,

$$P\tau_1/(\tau_2 * \tau_1) \cong P\tau_2(\tau_1 * \tau_2).$$

Доказательство. Если мы в теореме заменим S на $P\tau_1$, T на P, σ на τ_1 и τ на $(\tau_2)_P$, то изоморфизм β превратится в изоморфизм

$$p((\tau_2)_P * (\tau_1)_P) \to p((\tau_2)_P * \tau_1) \qquad (p \in P)$$

полугруппы $P/((\tau_2)_P * (\tau_1)_P)$ на $P\tau_1/((\tau_2)_P * \tau_1)$. Учитывая соображения симметрии, мы также заключаем, что отображение

$$p((\tau_1)_P * (\tau_2)_P) \to p((\tau_1)_P * \tau_2) \qquad (p \in P)$$

является изоморфизмом $P/((\tau_1)_P * (\tau_2)_P)$ на $P\tau_2/((\tau_1)_P * \tau_2)$. Как отмечено ранее,

$$(\tau_1)_P * (\tau_2)_P = (\tau_1)_P \vee (\tau_2)_P = (\tau_2)_P * (\tau_1)_P,$$
$$(\tau_1)_P * \tau_2 = \tau_1 * \tau_2$$

и

$$(\tau_2)_P * \tau_1 = \tau_2 * \tau_1.$$

Сопоставляя теперь два установленных выше изоморфизма, мы получаем утверждение следствия.

Упражнения к § 10.5

1. Пусть T — подполугруппа полугруппы S и σ — конгруэнция Риса ($\sigma = J \times J \cup \iota_{S \setminus J}$) на S, соответствующая идеалу J из S, причем $J \cap T \neq \varnothing$. Пусть $\tau = \iota_T$. Тогда теорема 10.43 непосредственно дает

$$T/(J \cap T) \cong (J \cup T)/J,$$

что является утверждением теоремы 2.36.

2. Пусть R и S — подполугруппы некоторой полугруппы и r, s — идеалы соответственно из R и S. Положим

$$T = r \cup (R \cap S), \quad t = r \cup (R \cap s),$$
$$U = s \cup (R \cap S), \quad u = s \cup (r \cap S).$$

Тогда t, u являются идеалами соответственно в T, U и

$$T/t \cong U/u.$$

Этот результат Риса [1940] есть частный случай следствия 10.44, когда $R \cap S \neq \varnothing$; впрочем, он по существу тривиален.

§ 10.6. Слабо перестановочные отношения и теорема Жордана — Гёльдера[1])

Пусть S — полугруппа, K — ее подполугруппа и R, T — такие подполугруппы из S, что $R \cap T \supseteq K$. Пусть ρ — конгруэнция на R и τ — конгруэнция на T. Тогда говорят, что ρ и τ *слабо перестановочны* над K, если $K\rho_T\tau_R = K\tau_R\rho_T$. (Здесь, как и в § 10.5, $\rho_T = \rho \cap (T \times T)$.) Предположим, что $T = R$, т. е. $\rho_T = \rho$ и $\tau_R = \tau$. Тогда если ρ и τ коммутируют, т. е. $\rho \circ \tau = \tau \circ \rho$, то они также слабо перестановочны над K. Обратное не выполняется (см., например, упражнение 1 ниже).

---

[1]) На протяжении этого параграфа верхние индексы будут использоваться для различения отмеченных ими объектов, а не для обозначения степеней или присоединения единицы (в случае индекса 1).

В этом параграфе мы используем понятие слабой перестановочности, принадлежащее Голди [1950], для получения теоретико-полугрупповых аналогов теорем Жордана — Гёльдера — Шрейера для групп. Изложение базируется на статье Голди [1950]. Важность коммутирующих конгруэнций впервые подчеркивалась Дюбреем и Дюбрей-Жакотэн [1939], которые ограничились рассмотрением отношений эквивалентности на множествах. Голди развил их результаты в двух направлениях. Во-первых, вместо эквивалентностей на множествах он стал рассматривать конгруэнции на алгебрах; во-вторых, ввел в рассмотрение конгруэнции на подалгебрах.

Мы начнем изложение, не накладывая пока условий слабой перестановочности на рассматриваемые конгруэнции. Эти условия будут введены только там, где будет необходимо.

Последовательность конгруэнций ρ^i на подполугруппах R^i полугруппы S $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ будет называться *нормальной K-последовательностью длины m от S до T*, если:

(1) K есть подполугруппа из S;
(2) $R^i \supseteq K$ при $i = 1, 2, \ldots, m+1$;
(3) $R^1 = S$ и $\rho^1 = S \times S$;
(4) $R^{m+1} = T$ и $\rho^{m+1} = \iota_T$;
(5) $R^{i+1} \supseteq K\rho^i \supseteq K\rho^{i+1}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$;
(6) $K\rho^i\rho^{i+1} = K\rho^i$ при $i = 1, 2, \ldots, m$.

В дальнейшем будем говорить, что нормальная последовательность *редуцирована*, если $K\rho^i = R^{i+1}$ для любого $i = 1, 2, \ldots, m$.

Из условий (3), (4) и (5) вытекает

$$S = K\rho^1 \supseteq K\rho^2 \supseteq \ldots \supseteq K\rho^m \supseteq K\rho^{m+1} = K.$$

Условие (6) показывает, что каждое $K\rho^i$, которое в силу свойства (5) является подполугруппой области определения R^{i+1} конгруэнции ρ^{i+1}, есть объединение ρ^{i+1}-классов.

Если ρ^i $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ есть нормальная последовательность от S до T, то через $\bar\rho^{i+1}$ обозначим ограничение конгруэнции ρ^{i+1} на $K\rho^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и положим $\bar\rho^1 = \rho^1$. Тогда легко проверить, что $\bar\rho^i$ $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$ является редуцированной нормальной K-последовательностью от S до $K\rho^m$. Говорят, что последовательность $\bar\rho^i$ есть редуцированная нормальная последовательность, *ассоциированная с последовательностью* ρ^i.

Фактормножеством последовательности ρ^i называется множество полугрупп $\{K\rho^i/\bar\rho^{i+1} \mid i = 1, 2, \ldots, m\}$. Последовательность ρ^i и ассоциированная с ней редуцированная последовательность $\bar\rho^i$ имеют одинаковые фактормножества.

Говорят, что две нормальные K-последовательности от S до T *изоморфны*, если они имеют одинаковую длину и если существует такое взаимно однозначное соответствие между их фактормножествами, что элементы, соответствующие друг другу, являются изоморфными полугруппами.

Последовательность конгруэнций $\rho^1, \ldots, \rho^{m+1}$ называется *уплотнением* последовательности $\sigma^1, \ldots, \sigma^{n+1}$, если $\sigma^1, \ldots$ $\ldots, \sigma^{n+1}$ есть подпоследовательность последовательности $\rho^1, \ldots$ $\ldots, \rho^{m+1}$.

Заметим, что мы не ограничиваемся использованием термина «уплотнение» лишь для нормальных последовательностей конгруэнций.

Пусть

$$A\colon \rho^1, \rho^2, \ldots, \rho^{m+1} \quad \text{и} \quad B\colon \sigma^1, \sigma^2, \ldots, \sigma^{n+1}$$

— две редуцированные нормальные K-последовательности от S до T. Как и выше, пусть R^i есть подполугруппа из S, на которой определена конгруэнция ρ^i $(i = 1, 2, \ldots, m+1)$. Предположим также, что S^j есть подполугруппа из S, на которой определена конгруэнция σ^j $(j = 1, 2, \ldots, n+1)$.

Положим теперь

$$\rho^{j,i} = \sigma^j * \rho^{i+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n+1),$$

$$\sigma^{i,j} = \rho^i * \sigma^{j+1} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m+1;\ j = 1, 2, \ldots, n).$$

Символом $*$ здесь обозначена операция, введенная в § 10.5. Тогда последовательности

$$C: \rho^1(=\rho^{1,1}), \rho^{2,1}, \ldots, \rho^{n,1}, \rho^2, \rho^{2,2}, \ldots, \rho^{n,i}, \rho^{i+1}, \rho^{2,i+1}, \ldots, \rho^{m+1},$$

$$D: \sigma^1(=\sigma^{1,1}), \sigma^{2,1}, \ldots, \sigma^{m,1}, \sigma^2, \sigma^{2,2}, \ldots, \sigma^{m,j}, \sigma^{j+1}, \sigma^{2,j+1}, \ldots, \sigma^{n+1}$$

являются уплотнениями соответственно последовательностей A и B. Каждая из последовательностей C и D содержит $nm + 1$ не обязательно различных членов. Назовем C и D *уплотнениями Цассенхауза* последовательностей A и B.

Обозначим через $R^{j,i}$ подполугруппу, на которой определено $\rho^{j,i}$, а через $S^{i,j}$ — подполугруппу, на которой определено $\sigma^{i,j}$. Тогда по определению произведения $*$ имеем

$$R^{j+1,i} = (S^{j+1} \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1},$$

$$S^{i+1,j} = (R^{i+1} \cap S^{j+1})\,\sigma^{j+1}.$$

Следовательно, по лемме Цассенхауза (следствие 10.44) мы получаем

$$R^{j+1,i}/\rho^{j+1,i} \cong S^{i+1,j}/\sigma^{i+1,j}$$

для $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n$.

В дальнейшем нам потребуется следующая лемма о слабо перестановочных конгруэнциях.

Лемма 10.45. *Пусть R и T — подполугруппы полугруппы S, каждая из которых содержит подполугруппу K, ρ — конгруэн-*

ция на R и τ — конгруэнция на T. Предположим, что ρ и τ слабо перестановочны над K.

Тогда

$$K(\rho_T * \tau) = K(\rho * \tau) = (K\rho \cap T)\,\tau$$

и

$$K(\tau_R * \rho) = K(\tau * \rho) = (K\tau \cap R)\,\rho.$$

Доказательство. Из слабой перестановочности ρ и τ над K непосредственно вытекает, что

$$K\rho_T\tau_R = K\tau_R\rho_T = K\tau_R(\rho_T\rho_T) = (K\tau_R\rho_T)\,\rho_T = K\rho_T\tau_R\rho_T.$$

Следовательно, по индукции мы получаем

$$K\rho_T\tau_R = K\rho_T\tau_R\rho_T\tau_R \ldots \tau_R\rho_T.$$

В силу леммы 10.41 (i) эта совокупность равенств влечет за собой $K\rho_T\tau_R = K(\tau_R * \rho_T)$. Аналогично, $K\tau_R\rho_T = K(\rho_T * \tau_R)$. Следовательно, учитывая равенство $K\rho_T\tau_R = K\tau_R\rho_T$, мы заключаем, что

$$K\rho_T\tau_R = K(\tau_R * \rho_T) = K(\rho_T * \tau_R) = K\tau_R\rho_T.$$

На основании леммы 10.41 (iii)

$$K(\rho_T * \tau) = K(\rho * \tau) = K\rho_T\tau_R\tau = K\rho_T\tau.$$

Но $K\rho_T = K\rho \cap T$, откуда

$$K(\rho_T * \tau) = K(\rho * \tau) = (K\rho \cap T)\,\tau.$$

Второе утверждение леммы верно в силу соображений симметрии.

Вернемся к рассмотрению уплотнений Цассенхауза редуцированных последовательностей A и B. Предположим теперь, что каждая конгруэнция ρ^i из последовательности A слабо перестановочна над K с каждой конгруэнцией σ^j из последовательности B. Посвятим оставшуюся часть этого параграфа доказательству того, что *уплотнения Цассенхауза C и D последовательностей A и B являются изоморфными нормальными K-последовательностями от S до T.*

Сначала мы должны установить, что C и D являются нормальными K-последовательностями от S до T. Мы докажем это для последовательности C; аналогичные рассуждения справедливы и для D.

Мы должны проверить, что C удовлетворяет условиям (1) — (6). Ясно, что условия (1) — (4) выполняются.

Для последовательности C выполняется условие (5).

Для этого нужно показать, что

(a) $R^{2,i} \supseteq K\rho^i \supseteq K\rho^{2,i}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$;

(b) $R^{i+1} \supseteq K\rho^{n,i} \supseteq K\rho^{i+1}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$;

(c) $R^{j+1,\,i} \supseteq K\rho^{j,\,i} \supseteq K\rho^{j+1,\,i}$ при $i = 1, 2, \ldots, m$ и $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Доказательство утверждения (a). В силу предыдущей леммы

$$K\rho^{2,\,i} = K(\sigma^2 * \rho^{i+1}) = (K\sigma^2 \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1},$$

так как по предположению σ^2 и ρ^{i+1} слабо перестановочны над K. Так как A редуцирована, $R^{i+1} = K\rho^i$. Следовательно,

$$(K\sigma^2 \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1} = (K\sigma^2 \cap K\rho^i)\,\rho^{i+1} \subseteq K\rho^i\rho^{i+1} = K\rho^i$$

на основании условия (6), которое выполняется для последовательности A. Таким образом,

$$K\rho^{2,\,i} \subseteq K\rho^i.$$

Кроме того, как мы уже видели,

$$R^{2,\,i} = (S^2 \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}.$$

Поскольку для последовательности B выполняются условия (5) и (3), имеем

$$S = K\sigma^1 \subseteq S^2,$$

откуда $S = S^2$, так что $S^2 \cap R^{i+1} = R^{i+1}$. Следовательно,

$$R^{2,i} = (S^2 \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1} = R^{i+1}\rho^{i+1} = R^{i+1}.$$

В силу того что $K\rho^i \subseteq R^{i+1}$ (на самом деле даже $K\rho^i = R^{i+1}$), утверждение (a) доказано. В действительности мы установили нечто большее, а именно

$$R^{2,i} = K\rho^i \supseteq K\rho^{2,i}.$$

Доказательство утверждения (b). Так как σ^n и ρ^{i+1} по предположению слабо перестановочны над K, в силу леммы 10.45 мы имеем

$$K\rho^{n,i} = K(\sigma^n * \rho^{\,i+1}) = (K\sigma^n \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}.$$

Далее, $K\sigma^n \supseteq K$, $R^{i+1} \supseteq K$, поэтому

$$K\rho^{n,i} = (K\sigma^n \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1} \supseteq K\rho^{i+1}.$$

Кроме того,

$$(K\sigma^n \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1} \subseteq R^{i+1}\,\rho^{i+1} = R^{i+1},$$

что завершает доказательство утверждения (b).

Доказательство утверждения (c). Так как по предположению σ^{j+1} и ρ^{i+1} слабо перестановочны над K, на основании леммы 10.45 мы имеем

$$K\rho^{j+1,i} = (K\sigma^{j+1} \cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}.$$

Кроме того,

$$(K\sigma^{j+1}\cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}\subseteq(K\sigma^{j}\cap R^{i+1})\,\rho^{i+1},$$

поскольку для последовательности B выполняется условие (5). Заменяя в последнем равенстве j на $j+1$, получаем

$$(K\sigma^{j}\cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}=K\rho^{j,i}.$$

Отсюда

$$K\rho^{j+1,i}\subseteq K\rho^{j,i}.$$

Далее,

$$R^{j+1,i}=(S^{j+1}\cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}=(K\sigma^{j}\cap R^{i+1})\,\rho^{i+1},$$

так как B редуцирована. Но снова по предыдущей лемме

$$(K\sigma^{j}\cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}=K\rho^{j,i}.$$

Следовательно, мы показали, что

$$R^{j+1,i}=K\rho^{j,i}\supseteq K\rho^{j+1,i},$$

и это выполняется при $i=1,2,\ldots,m$ и $j=2,3,\ldots,n-1$.

Это завершает проверку того, что C удовлетворяет условию (5). Заметим, что мы не показали, что C редуцирована. Однако в случаях (a) и (c) мы получили равенства, необходимые для того, чтобы сделать C редуцированной последовательностью. Мы используем их в дальнейшем.

Последовательность C удовлетворяет условию (6).

Мы должны установить, что

(d) $K\rho^{i}\rho^{2,i}=K\rho^{i}$ при $i=1,2,\ldots,m$;

(e) $K\rho^{n,i}\rho^{i+1}=K\rho^{n,i}$ при $i=1,2,\ldots,m$;

(f) $K\rho^{j,i}\rho^{j+1,i}=K\rho^{j,i}$ при $i=1,2,\ldots,m$ и $j=2,3,\ldots$ $\ldots,n-1$.

Так как, исследуя условие (5), мы доказали, что $R^{2,i}=K\rho^{i}$ и $R^{j+1,i}=K\rho^{j,i}$, условия (d) и (f), очевидно, выполняются. Условие (e) есть очевидное следствие равенства $K\rho^{n,i}=$ $=(K\sigma^{n}\cap R^{i+1})\,\rho^{i+1}$.

Это завершает доказательство того, что C есть нормальная K-последовательность от S до T.

Покажем теперь, что последовательности C и D изоморфны. Используя равенства, установленные выше в (a) и (c), мы получаем, что фактормножество последовательности C равно

$$\{R^{j+1,i}/\rho^{j+1,i}\mid i=1,2,\ldots,m;\ j=1,2,\ldots,n-1\}\cup$$
$$\cup\{K\rho^{n,i}/(\rho^{i+1}\cap(K\rho^{n,i}\times K\rho^{n,i}))\mid i=1,2,\ldots,m\},$$

а фактормножество последовательности D, аналогично, равно

$$\{S^{i+1,j}/\sigma^{i+1,j}\mid i=1,2,\ldots,m-1;\ j=1,2,\ldots,n\}\cup$$
$$\cup\{K\sigma^{m,j}/(\sigma^{j+1}\cap(K\sigma^{m,j}\times K\sigma^{m,j}))\mid j=1,2,\ldots,n\}.$$

Как мы уже выяснили, использовав лемму Цассенхауза,

$$R^{j+1,i}/\rho^{j+1,i} \cong S^{i+1,j}/\sigma^{i+1,j}$$

при $i = 1, 2, \ldots, m-1$ и $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Это устанавливает изоморфизмы между $(m-1)(n-1)$ парами полугрупп из фактормножеств последовательностей C и D. Рассмотрим остальные $m+n-1$ пар.

Рассмотрим $n-1$ элементов $R^{j+1,m}/\rho^{j+1,m}$ $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n-1)$ из фактормножества последовательности C. Докажем, что

$$R^{j+1,m}/\rho^{j+1,m} \cong K\sigma^{m,j}/(\sigma^{j+1} \cap (K\sigma^{m,j} \times K\sigma^{m,j}))$$

при $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Имеем $R^{j+1,m} = (S^{j+1} \cap R^{m+1})\,\rho^{m+1}$, откуда в силу того, что A удовлетворяет условию (4), получаем $R^{j+1,m} = S^{j+1} \cap T$. Кроме того, так как последовательность B редуцирована, $K\sigma^j = S^{j+1}$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, откуда, поскольку B удовлетворяет условию (5), заключаем, что

$$S^{j+1} \supseteq K\sigma^n = S^{n+1} = T$$

при $j = 1, 2, \ldots, n$. Следовательно, в частности, $S^{j+1} \cap T = T$ и поэтому $R^{j+1,m} = T$ при $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

Кроме того,

$$\rho^{j+1,m} = \sigma^{j+1} * \rho^{m+1} = \sigma_T^{j+1} * \iota_T = \sigma_T^{j+1}.$$

На основании теоремы 10.43

$$T/\sigma_T^{j+1} \cong T\sigma^{j+1}/(\iota_T * \sigma^{j+1}).$$

Но $T = R^{m+1} \cap S^{j+1} = K\rho^m \cap S^{j+1}$, и поэтому в силу леммы 10.45

$$T\sigma^{j+1} = (K\rho^m \cap S^{j+1})\,\sigma^{j+1} = K\sigma^{m,j}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \iota_T * \sigma^{j+1} &= \sigma^{j+1} \cap (T\sigma^{j+1} \times T\sigma^{j+1}) = \\ &= \sigma^{j+1} \cap (K\sigma^{m,j} \times K\sigma^{m,j}). \end{aligned}$$

Отсюда, наконец,

$$R^{j+1,m}/\rho^{j+1,m} = T/\sigma_T^{j+1} \cong K\sigma^{m,j}/(\sigma^{j+1} \cap (K\sigma^{m,j} \times K\sigma^{m,j}))$$

при $j = 1, 2, \ldots, n-1$.

В силу соображений симметрии получаем также

$$K\rho^{n,i}/(\rho^{i+1} \cap (K\rho^{n,i} \times K\rho^{n,i})) \cong S^{i+1,n}/\sigma^{i+1,n}$$

при $i = 1, 2, \ldots, m-1$.

Для завершения доказательства того, что C и D изоморфны, осталось лишь установить, что элементы

$$K\rho^{n,m}/(\rho^{m+1} \cap (K\rho^{n,m} \times K\rho^{n,m})) \quad \text{из} \quad C$$

и

$$K\sigma^{m,n}/(\sigma^{n+1} \cap (K\sigma^{m,n} \times K^{m,n})) \quad \text{из} \quad D$$

суть изоморфные полугруппы. Но

$$\begin{aligned} K\rho^{n,m} &= (K\sigma^n \cap R^{m+1})\,\rho^{m+1} = \\ &= (S^{n+1} \cap R^{m+1})\,\rho^{m+1} = \\ &= T\iota_T = T \end{aligned}$$

и поэтому

$$\rho^{m+1} \cap (K\rho^{n,m} \times K\rho^{n,m}) = \iota_T.$$

Таким образом, в силу симметрии каждый из двух рассматриваемых элементов равен T/ι_T; это завершает доказательство.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 10.46. *Пусть S — полугруппа, T, K —ее подполугруппы, причем $T \supseteq K$.*

Тогда любые две редуцированные нормальные K-последовательности от S до T, такие, что каждая конгруэнция в одной из них слабо перестановочна над K с каждой конгруэнцией в другой, имеют изоморфные уплотнения, которые являются нормальными K-последовательностями.

Упражнение к § 10.6

1. Пусть S — полугруппа, на которой существуют две не коммутирующие конгруэнции ρ и σ. Присоединим (даже если $S = S^1$) единицу e к S. Полученную полугруппу обозначим через S^*. Определим отношения ρ^* и σ^*, полагая

$$\rho^* = \rho \cup \{(e, e)\},$$
$$\sigma^* = \sigma \cup \{(e, e)\}.$$

Тогда $\rho^* \circ \sigma^* \neq \sigma^* \circ \rho^*$ и ρ^*, σ^* являются конгруэнциями на S^*. Положим $K = \{e\}$. Тогда $K\rho^* \circ \sigma^* = K\sigma^* \circ \rho^* = \{e\}$. Таким образом, ρ^* и σ^* слабо перестановочны над K.

§ *10.7. Конгруэнции на вполне 0-простых полугруппах*

Как было доказано в лемме 3.10, нетривиальный гомоморфный образ вполне 0-простой полугруппы является вполне 0-простой полугруппой. Этот результат Глускина [1956] (см. также Престон

[1959]) вместе с принадлежащей Манну теоремой 3.11 (эквивалентный результат был независимо получен Глускиным [1956]) служит основой для определения всех конгруэнций на вполне 0-простых полугруппах. Предварительные результаты были получены Глускиным [1956], который описал классы эквивалентности конгруэнций, содержащие идемпотенты. Независимо друг от друга Тамура [1960] и Престон [1961] дали полное описание конгруэнций на вполне 0-простых полугруппах. Мы приведем здесь это описание, следуя Престону.

Мы будем существенно использовать теорему 3.11, поэтому начнем с ее переформулировки. В действительности нам понадобится частный случай этой теоремы для гомоморфизмов *на*.

Теорема 10.47. *Пусть* $S = \mathcal{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ *— рисовская полугруппа над группой с нулем* G^0, *сэндвич-матрица* P *которой равна* $(p_{\lambda i})$, *и* $S^* = \mathcal{M}^0(G^*; I^*, \Lambda^*; P^*)$ *— рисовская полугруппа над группой с нулем* $(G^*)^0$, *сэндвич-матрица* P^* *которой равна* $(p^*_{\lambda^* i^*})$.

Пусть $i \to u_i$ *и* $\lambda \to v_\lambda$ *— отображения соответственно* I *и* Λ *в* G^*, φ *и* ψ *— отображения соответственно* I *на* I^* *и* Λ *на* Λ^*. *Пусть* ω *— такой нетривиальный гомоморфизм* G^0 *на* $(G^*)^0$, *что для всех* $\lambda \in \Lambda$ *и* $i \in I$

$$p_{\lambda i}\omega = v_\lambda p^*_{\lambda\psi,\, i\varphi}\, u_i. \tag{1}$$

Для каждого элемента $(a; i, \lambda) \in S$ положим

$$(a; i, \lambda)\,\theta = [u_i(a\omega)v_\lambda;\ i\varphi,\ \lambda\psi] \tag{2}$$

(*квадратные скобки используются здесь для обозначения элементов из* S^*). *Тогда* θ *является гомоморфизмом* S *на* S^*. *Обратно, если* S *регулярна, то каждый гомоморфизм* S *на* S^* *получается таким способом.*

Сама по себе сформулированная теорема еще не приводит к нашей цели — определить все конгруэнции на вполне 0-простой полугруппе S. Однако если учесть лемму 3.10, в которой, как уже упоминалось, утверждается, что каждый нетривиальный гомоморфный образ (т. е. гомоморфный образ, содержащий более одного элемента) вполне 0-простой полугруппы является снова вполне 0-простой полугруппой, то можно утверждать, что с точностью до изоморфизма каждый нетривиальный гомоморфный образ полугруппы S представим в виде подходящей полугруппы S^* из теоремы 10.47.

Нам будет удобно отождествить I^* с $I/\varphi\circ\varphi^{-1}$ и Λ^* с $\Lambda/\psi\circ\psi^{-1}$. Ограничения общности из-за этого не произойдет, так как I^* и Λ^* являются просто множествами индексов, а φ и ψ — отображениями соответственно на множества I^* и Λ^*. Мы произведем это отождествление и будем писать $i\varphi = i^*$ $(i \in I)$ и $\lambda\psi = \lambda^*$ $(\lambda \in$

$\in \Lambda$), т. е. i^* будет рассматриваться как $\varphi \circ \varphi^{-1}$-класс, содержащий i, а λ^* — как $\psi \circ \psi^{-1}$-класс, содержащий λ.

Рассмотрим теперь $\mathcal{H}$-класс $H^*_{i^*\lambda^*} = \{[a^*; i^*, \lambda^*] \mid a^* \in G^*\}$ полугруппы S^*. Его полный прообраз относительно θ равен $\bigcup\{H_{j\mu} \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$, где через $H_{i\mu}$ обозначается $\mathcal{H}$-класс $H_{j\mu} = \{(a; j, \mu) \mid a \in G\}$ полугруппы S. Через Z обозначим $I \times \Lambda$-прямоугольник $\mathcal{H}$-классов $H_{i\lambda}$ $(i \in I, \lambda \in \Lambda)$. В силу равенства (1) $p^*_{\lambda^* i^*} = 0$ тогда и только тогда, когда $p_{\mu j} = 0$ для любых $j \in i^*$ и $\mu \in \lambda^*$. Таким образом, $\{H_{j\mu} \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$ состоит либо лишь из $\mathcal{H}$-классов, являющихся группами, либо из $\mathcal{H}$-классов, каждый из которых не является группой. В первом случае мы будем говорить, что $\{H_{j\mu} \mid i \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$ есть *вполне простой подпрямоугольник* (*со сторонами* i^* *и* λ^*) из Z. В последнем случае, т. е. когда $p^*_{\lambda^* i^*} = 0$, множество $\{H_{j\mu} \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$ будем называть *подпрямоугольником с нулевым умножением из* Z. В оправдание нашей терминологии заметим, что если $\{H_{j\mu} \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$ есть вполне простой подпрямоугольник, то $\bigcup\{H_{j\mu} \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$ есть вполне простая полугруппа (над G^0 с $i^* \times \lambda^*$-подматрицей матрицы P в качестве сэндвич-матрицы); и если $\{H_{j\mu} \mid j \in i^*, \mu \in \Lambda^*\}$ есть подпрямоугольник с нулевым умножением, то произведение любых двух элементов из $\bigcup\{H_{j\mu} \mid j \in i^*, \lambda \in \Lambda^*\}$ равно нулю. Только что описанные подпрямоугольники прямоугольника Z будем называть *подпрямоугольниками* конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$.

Говорят, что разбиение прямоугольника Z на подпрямоугольники является *допустимым*, если оно индуцируется разбиениями множеств I и Λ, т. е. если множества сторон прямоугольников образуют соответственно разбиения множеств I и Λ и если каждый подпрямоугольник состоит либо лишь из $\mathcal{H}$-классов, являющихся группами (тогда он называется *вполне простым классом разбиения*), либо лишь из $\mathcal{H}$-классов, не являющихся группами (тогда он называется *классом разбиения с нулевым умножением*). Таким образом, разбиение прямоугольника Z, описанное в предыдущем абзаце, является допустимым. Будем называть его *разбиением, соответствующим конгруэнции* $\theta \circ \theta^{-1}$.

Опишем теперь классы эквивалентности по $\mathrm{mod}\, \theta \circ \theta^{-1}$. Без ограничения общности мы можем предположить, что Λ и I имеют общий элемент 1 и что H_{11} есть группа. Пусть N — нормальный делитель группы H_{11}, являющийся ядром ограничения отображения θ на H_{11}. Будем доказывать, что существуют такие элементы $e_i \in H_{i1}$ $(i \in I)$ и $f_\lambda \in H_{1\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda)$, что, за исключением класса $\{0\}$, $\theta \circ \theta^{-1}$-классами являются множества

$$\bigcup\{e_j N a f_\mu \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\},$$

где $a \in H_{11}$ и i^*, λ^* суть стороны подпрямоугольника разбиения прямоугольника Z, соответствующего конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$. Заметим, прежде чем приступить к доказательству, что вместе с $\{0\}$ эти классы являются компонентами разбиения полугруппы S.

Так как ω есть отображение на полугруппу $(G^*)^0$, существуют такие $x_i \in G$ $(i \in I)$ и $y_\lambda \in G$ $(\lambda \in \Lambda)$, что

$$x_i\omega = u_i,$$
$$y_\lambda\omega = v_\lambda.$$

Положим $(x_i^{-1}p_{11}^{-1};\ i,\ 1) = e_i$ и $(p_{11}^{-1}y_\lambda^{-1};\ 1,\ \lambda) = f_\lambda$.

Далее, $N \subseteq H_{11}$ и поэтому для некоторого $M \subseteq G$ имеем $N = (M;\ 1,\ 1)$, и если $a \in H_{11}$, то $a = (g;\ 1,\ 1)$ для некоторого $g \in G$. Тогда

$$e_jNaf_\mu = (x_j^{-1}Mp_{11}gy_\mu^{-1};\ j,\ \mu),$$

откуда на основании равенства (2)

$$(e_jNaf_\mu)\,\theta = [u_j\,(x_j^{-1}Mp_{11}gy_\mu^{-1})\,\omega v_\mu;\ i^*,\ \lambda^*] = [g\omega;\ i^*,\ \lambda^*],$$

так как $x_j\omega = u_j$, $y_\mu\omega = v_\mu$ и $u_1\,(M\omega)\,v_1 = (p^*_{1^*1^*})^{-1}$ по определению группы N. Следовательно, для каждого $a \in H_{11}$ и для каждой пары сторон i^*, λ^* подпрямоугольника конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$ множество

$$\bigcup\{e_jNaf_\mu \mid j \in i^*,\ \mu \in \lambda^*\}$$

содержится в одном $\theta \circ \theta^{-1}$-классе.

Ясно, что любые два $\theta \circ \theta^{-1}$-эквивалентных элемента из S принадлежат одному подпрямоугольнику конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$, поэтому если $r\theta = s\theta$, то $r,\ s \in \bigcup\{H_{j\mu} \mid j \in i^*,\ \mu \in \lambda^*\}$ для некоторых i^* и λ^*. Таким образом, существуют такие $a,\ b \in H_{11}$, что $r \in e_jNaf_\mu$ и $s \in e_kNbf_\varkappa$, где $j,\ k \in i^*$ и $\mu,\ \varkappa \in \lambda^*$. В самом деле, как уже отмечалось, множества вида e_jNaf_μ $(a \in H_{11},\ j \in I,\ \mu \in \Lambda)$ образуют разбиение множества $S \setminus 0$. Пусть $a = (g;\ 1,\ 1)$ и $b = (h;\ 1,\ 1)$. Тогда, как и выше, $(e_jNaf_\mu)\,\theta = [g\omega;\ i^*,\ \lambda^*]$ и $(e_kNbf_\varkappa)\,\theta = [h\omega;\ i^*,\ \lambda^*]$. Из равенства $r\theta = s\theta$ вытекает, что $g\omega = h\omega$, откуда $a\theta = [u_1\,(g\omega)\,v_1;\ 1^*,\ 1^*] = [u_1\,(h\omega)\,v_1;\ 1^*, 1^*] = b\theta$, а это влечет за собой $Na = Nb$. Следовательно,

$$r,\ s \in \bigcup\ \{e_jNaf_\mu \mid j \in i^*,\ \mu \in \lambda^*\};$$

это заканчивает доказательство того факта, что такое множество является $\theta \circ \theta^{-1}$-классом.

Каждой конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$ мы поставили в соответствие допустимое разбиение $\mathscr{P}$ прямоугольника Z (классы этого разбиения, или $\mathscr{P}$-классы, являются подпрямоугольниками конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$), нормальный делитель N группы H_{11} и два множества элементов из S, первое — $\{e_i\}$, где $e_i \in H_{i1}$ $(i \in I)$, и второе — $\{f_\lambda\}$, где $f_\lambda \in H_{1\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda)$. Обратно, как мы покажем ниже, по этим $\mathscr{P}$, N, $\{e_i\}$, $\{f_\lambda\}$ конгруэнция $\theta \circ \theta^{-1}$ восстанавливается однозначно. (Мы будем писать $\theta \circ \theta^{-1} = [\mathscr{P},\ N,\ \{e_i\},\ \{f_\lambda\}]$.)

Предположим, что $H_{i\lambda}$ принадлежит подпрямоугольнику с нулевым умножением конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$. Тогда $f_\lambda e_i \in H_{1\lambda} H_{i1} = 0$, так как $p_{\lambda i} = 0$. Следовательно, если $H_{i\lambda}$ принадлежит подпрямоугольнику с нулевым умножением, то $N f_\lambda e_i = 0$. Предположим, что $H_{i\lambda}$ и $H_{j\mu}$ принадлежат одному и тому же вполне простому подпрямоугольнику конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$. Тогда

$$\begin{aligned}(f_\lambda e_i)\,\theta &= (p_{11}^{-1} y_\lambda^{-1} p_{\lambda i} x_i^{-1} p_{11}^{-1};\ 1,\ 1)\,\theta = \\ &= [u_1\,(p_{11}^{-1})\,\omega v_\lambda^{-1} v_\lambda p^*{}_{\lambda^* i^*} u_i u_i^{-1}\,(p_{11}^{-1})\,\omega v_1;\ 1^*, 1^*] = \\ &= [u_1\,(p_{11}^{-1})\,\omega p^*_{\lambda^* i^*}\ (p_{11}^{-1})\,\omega v_1;\ 1^*,\ 1^*] = \\ &= (f_\mu e_j)\,\theta,\end{aligned}$$

так как $i^* = j^*$ и $\lambda^* = \mu^*$. Отсюда следует, что

$$N f_\lambda e_i = N f_\mu e_j. \tag{3}$$

Таким образом, мы установили, что это равенство выполняется всегда, когда $H_{i\lambda}$ и $H_{j\mu}$ принадлежат одному и тому же подпрямоугольнику конгруэнции $\theta \circ \theta^{-1}$.

Покажем теперь, как набор $\mathscr{P}$, N, $\{e_i\}$, $\{f_\lambda\}$ определяет конгруэнцию. Пусть $\mathscr{P}$ — допустимое разбиение $I \times \Lambda$-прямоугольника $\mathscr{H}$-классов $H_{i\lambda}$ вполне 0-простой полугруппы $S = \mathscr{M}^0(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$. Предположим, что $1 \in I \cap \Lambda$ и что H_{11} есть группа. Пусть N — нормальный делитель группы H_{11}, и пусть для любых $i \in I$ и $\lambda \in \Lambda$ выбраны элементы $e_i \in H_{i1}$ и $f_\lambda \in H_{1\lambda}$, причем выполняется условие (3) (заметим, что условие (3) выполняется автоматически для $\mathscr{P}$-классов с нулевым умножением), когда $H_{i\lambda}$ и $H_{j\mu}$ принадлежат одному и тому же $\mathscr{P}$-классу. Тогда, как легко видеть, множество $\{0\}$ вместе с множествами

$$\bigcup \{e_j N a f_\mu \mid j \in i^*,\ \mu \in \lambda^*\},$$

где $a \in H_{11}$ и $i^*\ (\subseteq I)$, $\lambda^*\ (\subseteq \Lambda)$ — стороны $\mathscr{P}$-класса, являются компонентами разбиения полугруппы S. Таким образом, они являются классами некоторой эквивалентности ρ на S. Мы будем писать $\rho = [\mathscr{P},\ N,\ \{e_i\},\ \{f_\lambda\}]$. Покажем, что ρ является конгруэнцией.

Пусть $(r,\ s) \in \rho$, т. е. либо $r = s = 0$ и в этом случае легко получить желаемое заключение, либо существует такой $\mathscr{P}$-класс π со сторонами i^*, λ^* и элемент $a \in H_{11}$, что $r \in e_j N a f_\mu$, $s \in e_k N a f_\varkappa$ для некоторых j, $k \in i^*$ и некоторых μ, $\varkappa \in \lambda^*$. Пусть $t \in S$. Если $t = 0$, то $rt = st = 0$, откуда $(rt,\ st) \in \rho$. Если $t \neq 0$, то $t \in e_l N b f_\nu$ для некоторого $b \in H_{11}$, где $l \in m^*$ и $\nu \in \eta^*$, причем m^* и η^* являются сторонами некоторого $\mathscr{P}$-класса. Таким образом,

$$rt \in e_j N a f_\mu e_l N b f_\nu$$

и

$$st \in e_k N a f_\varkappa e_l N b f_\nu.$$

Так как $\mathscr{P}$ допустимо, m^* и λ^* являются сторонами некоторого $\mathscr{P}$-класса. Следовательно, $f_\mu e_l = 0$ тогда и только тогда, когда $f_\varkappa e_l = 0$, откуда $rt = 0$ тогда и только тогда, когда $st = 0$. Если $f_\mu e_l \neq 0$, то в силу условия (3)

$$\begin{aligned} Naf_\mu e_l Nb &= aNf_\mu e_l Nb = \\ &= aNf_\varkappa e_l Nb = \\ &= Naf_\varkappa e_l Nb = \\ &= Naf_\varkappa e_l Nb. \end{aligned}$$

Следовательно, rt и st принадлежат одному ρ-классу. Таким образом, в любом случае $(rt, st) \in \rho$. Доказательство стабильности слева проводится аналогично.

Отметим также, что существует элемент $a \in H_{11}$, для которого $e_1 Naf_1 = N$. Для этого элемента a группа N совпадает с пересечением H_{11} и ρ-класса $\bigcup\{e_i Naf_\lambda \mid i \in 1^*, \lambda \in 1^*\}$.

Мы доказали следующую теорему.

Теорема 10.48. *Пусть Z есть $I \times \Lambda$-прямоугольник $\mathscr{H}$-классов $H_{i\lambda}$ $(i \in I, \lambda \in \Lambda)$, содержащий ненулевые элементы вполне 0-простой полугруппы S. Пусть $1 \in I \cap \Lambda$. Предположим без ограничения общности, что H_{11} есть группа. Пусть ρ — конгруэнция на S, которая не является универсальной конгруэнцией, и N — нормальный делитель группы H_{11}, который является классом эквивалентности ограничения конгруэнции ρ на H_{11}.*

Тогда существует допустимое разбиение $\mathscr{P}$ прямоугольника Z на подпрямоугольники и существуют элементы $f_\lambda \in H_{1\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda)$ и $e_i \in H_{i1}$ $(i \in I)$, обладающие свойствами:

$$\text{(i)} \qquad Nf_\lambda e_i = Nf_\mu e_j, \tag{3}$$

если $H_{i\lambda}$ и $H_{j\mu}$ принадлежат одному и тому же $\mathscr{P}$-классу;

(ii) *множества $\bigcup\{e_j Naf_\mu \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$, где $a \in H_{11}$ и i^* $(\subseteq I)$, λ^* $(\subseteq \Lambda)$ суть стороны подпрямоугольника прямоугольника $\mathscr{P}$, являются ρ-классами из S, содержащими ненулевые элементы, т. е. ρ совпадает с конгруэнцией $[\mathscr{P}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$.*

Обратно, пусть $\mathscr{P}$ — допустимое разбиение прямоугольника Z и пусть N (нормальный делитель из H_{11}), $f_\lambda \in H_{1\lambda}$ и $e_i \in H_{i1}$ выбраны так, что выполняется условие (i). *Тогда эквивалентность $[\mathscr{P}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$ является конгруэнцией на S и N совпадает с классом эквивалентности ее ограничения на H_{11}.*

Если S — вполне 0-простая полугруппа и $S \setminus 0$ является подполугруппой, то $S \setminus 0$ вполне проста. Обратно, присоединяя 0 к вполне простой полугруппе, мы получим вполне 0-простую полугруппу. Следовательно, предыдущую теорему можно применить для получения аналогичного описания конгруэнций на вполне простой полугруппе.

Мы рассмотрим частный случай таких конгруэнций. Ясно, что если полугруппа $S \setminus 0$ вполне проста, то любое разбиение прямоугольника Z, индуцированное разбиениями множеств I и Λ, является допустимым. В частности, разбиение $\mathcal{U}$, единственным классом которого является Z, допустимо. Факторполугруппы по конгруэнциям $[\mathcal{U}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$ на S являются группами с нулем. Рассмотрение этой ситуации включает в себя как легкий частный случай рассмотрение групповых гомоморфных образов вполне простых полугрупп. Мы выведем (теорема 10.51) результат Столла [1951] о таких гомоморфизмах (ср. с упражнением 13 к § 10.2). Докажем сначала общий результат о сравнимости конгруэнций.

Теорема 10.49. *Пусть* $\rho = [\mathcal{P}, M, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$ *и* $\sigma = [\mathcal{Q}, N, \{g_i\}, \{h_\lambda\}]$ *— две конгруэнции на вполне 0-простой полугруппе* S. *Включение* $\rho \subseteq \sigma$ *выполняется тогда и только тогда, когда*

(i) $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$;

(ii) $M \subseteq N$;

(iii) *для каждого* $\mathcal{P}$*-класса со сторонами* i^* *и* λ^* *существуют такие* a_{i^*} *и* b_{λ^*} *в* H_{11}, *что для* $j \in i^*$ *и* $\mu \in \lambda^*$

$$e_jf_1 = g_jn_ja_{i^*}h_1,$$

$$e_1f_\mu = g_1n_\mu b_{\lambda^*}h_\mu,$$

где $n_j, n_\mu \in N$.

Доказательство. Предположим, что $\rho \subseteq \sigma$. Тогда, очевидно, $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$ и, рассматривая ограничения ρ и σ на H_{11}, получаем $M \subseteq N$.

Рассмотрим ρ-класс $\bigcup\{e_jMf_\nu \mid j \in i^*, \nu \in 1^*\}$, где i^*, 1^* являются сторонами $\mathcal{P}$-класса π, содержащего H_{11}. Так как $\rho \subseteq \sigma$, этот ρ-класс содержится в σ-классе $\bigcup\{g_jNa_{i^*}h_\nu \mid j \in i^+, \nu \in 1^+\}$, где $a_{i^*} \in H_{11}$ и i^+, 1^+ являются сторонами $\mathcal{Q}$-класса, который содержит π. Так как $(p_{11}^{-1}; 1, 1) \in M$, имеем $e_jf_\nu \in e_jMf_\nu$. Следовательно, в частности, $e_jf_1 \in g_jNa_{i^*}h_1$ и поэтому существует такое $n_j \in N$, что $e_jf_1 = g_jn_ja_{i^*}h_1$ для $j \in i^*$. Аналогично, существует такое $b_{\lambda^*} \in H_{11}$, что $e_1f_\mu = g_1n_\mu b_{\lambda^*}h_\mu$ и $n_\mu \in N$, когда $\mu \in \lambda^*$.

Обратно, предположим, что для конгруэнций ρ и σ выполняются условия (i) — (iii). Пусть $\bigcup\{e_jMaf_\mu \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\}$ есть ρ-класс. Так как $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{Q}$, существует такой $\mathcal{Q}$-класс со сторонами i^+, λ^+, что $i^* \subseteq i^+$, $\lambda^* \subseteq \lambda^+$. Следовательно, учитывая включение $M \subseteq N$, условие (iii) и то, что N является нормальным делителем в H_{11}, получаем

$$\begin{aligned}\bigcup\{e_jMaf_\mu \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\} &\subseteq \{e_jNaf_\mu \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\} = \\ &= \bigcup\{g_jn_ja_{i^*}h_1f_1^{-1}Nae_1^{-1}g_1n_\mu b_{\lambda^*}h_\mu \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\} = \\ &= \bigcup\{g_jNch_\mu \mid j \in i^*, \mu \in \lambda^*\} \subseteq \\ &\subseteq \bigcup\{g_jNch_\mu \mid j \in i^+, \mu \in \lambda^+\},\end{aligned}$$

где $c = a_{i*}h_1f^{-1}_1ae^{-1}_1g_1b_{\lambda*}$, а последнее множество является σ-классом. Следовательно, $\rho \subseteq \sigma$. Доказательство теоремы закончено.

Из теоремы 10.49 непосредственно вытекает условие равенства двух конгруэнций, представленных в виде $[\mathcal{P}, M, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$: для таких двух конгруэнций должны выполняться условия (i), (ii) и (iii) и им симметричные. Более сильный результат содержит

Следствие 10.50. *Пусть*

$$\rho = [\mathcal{P}, M, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$$

и

$$\sigma = [\mathcal{P}, M, \{g_i\}, \{h_\lambda\}].$$

Тогда если $\rho \subseteq \sigma$, *то* $\rho = \sigma$.

Доказательство. Если $\rho \subseteq \sigma$, то ввиду условия (iii) теоремы для $\mathcal{P}$-класса со сторонами i^*, λ^* существуют такие a_{i*}, $b_{\lambda*} \in H_{11}$ и m_j, $m_\mu \in M$, что

$$e_jf_1 = g_jm_ja_{i*}h_1,$$

$$e_1f_\mu = g_1m_\mu b_{\lambda*}h_\mu,$$

где $j \in i^*$ и $\mu \in \lambda^*$. Следовательно,

$$g_jh_1 = e_jf_1h_1^{-1}a_{i*}^{-1}m_j^{-1}h_1f_1^{-1}f_1 = e_jm'_jc_{i*}f_1,$$

где $m'_j \in M$ и $c_{i*} = f_1h^{-1}_1a_{i*}^{-1}h_1f_1^{-1}$ в силу того, что M — нормальный делитель в H_{11}. Аналогично,

$$g_1h_\mu = e_1m'_\mu d_{\lambda*}f_1,$$

где $m'_\mu \in M$ и $d_{\lambda*} \in H_{11}$. На основании теоремы из этих двух совокупностей равенств вытекает, что $\rho = \sigma$.

Используем теперь предыдущую теорему для доказательства теоремы Столла [1951], которую мы приводим здесь в следующей формулировке (эквивалентной исходной).

Теорема 10.51. *Пусть T — вполне простая полугруппа. Тогда среди всех конгруэнций ρ на T, для которых T/ρ является группой, существует наименьшая.*

Доказательство. Будем рассматривать вполне 0-простую полугруппу S, полученную присоединением нуля к T, и докажем эквивалентный результат, что существует наименьшая конгруэнция в множестве всех конгруэнций ρ на S, для которых S/ρ есть группа с нулем.

В наших предыдущих обозначениях такие конгруэнции совпадают с конгруэнциями $[\mathcal{U}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$, где $\mathcal{U}$ — разбиение, единственным классом которого является Z. Ввиду условия (i) теоремы 10.48

$$Nf_\lambda e_i = Nf_1 e_1$$

для всех $i \in I$, $\lambda \in \Lambda$. Таким образом, существуют такие элементы $n_{\lambda i} \in N$, что

$$f_\lambda e_i n_{\lambda i} = f_1 e_1 = g^{-1},$$

где $g \in H_{11}$.

Тогда

$$(e_i n_{\lambda i} g f_\lambda)^2 = e_i n_{\lambda i} g (f_\lambda e_i n_{\lambda i}) g f_\lambda = \\ = e_i n_{\lambda i} g g^{-1} g f_\lambda = \\ = e_i n_{\lambda i} g f_\lambda,$$

так что $e_i n_{\lambda i} g f_\lambda = e_{i\lambda}$, где $e_{i\lambda}$ — единица группы $H_{i\lambda}$. Тогда

$$e_{1\lambda} e_{i1} = e_1 n_{\lambda 1} g f_\lambda e_i n_{1i} g f_1 = \\ = e_1 n_{\lambda 1} (n_{\lambda i})^{-1} n_{1i} g f_1 \in \\ \in e_1 N g f_1 = N,$$

так как $e_1 n_{11} g f_1 = e_{11} \in N \cap e_1 N g f_1$.

Пусть теперь E есть нормальный делитель из H_{11}, порожденный множеством $\{e_{1\lambda} e_{i1} \mid i \in I, \ \lambda \in \Lambda\}$. Так как $Ee_{1\lambda} e_{i1} = E$, отношение $\mu = [\mathcal{U}, E, \{e_{i1}\}, \{e_{1\lambda}\}]$ является конгруэнцией на S. Далее,

$$\mu \subseteq [\mathcal{U}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}].$$

В самом деле, мы уже видели, что $E \subseteq N$, и равенств $e_{i1} = e_i n_{1i} g f_1$, $e_{1\lambda} = e_1 n_{\lambda 1} g f_\lambda$, которые выполняются для всех i и λ, достаточно в силу теоремы 10.49 для доказательства этого включения. Таким образом, μ есть искомая наименьшая конгруэнция на S.

Используя следствие 10.50, нетрудно установить (мы оставляем это читателю), что любые две конгруэнции $[\mathcal{U}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$ и $[\mathcal{U}, N, \{g_i\}, \{h_\lambda\}]$ на S, где полугруппа $S \setminus 0$ вполне проста, равны между собой. Кроме того, если $N \supseteq E$, то $[\mathcal{U}, N, \{e_{i1}\}, \{e_{1\lambda}\}]$ является конгруэнцией на S. Следовательно, существует взаимно однозначное соответствие между конгруэнциями на S, факторполугруппы по которым являются группами, и нормальными делителями группы H_{11}, содержащими E. Классами конгруэнции $[\mathcal{U}, N, \{e_{i1}\}, \{e_{1\lambda}\}]$ являются множества $\bigcup\{e_{i1} N a e_{1\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ и множество $\{0\}$. За исключением $\{0\}$, пересечение каждого из этих множеств с H_{11} равно некоторому смежному классу по N, поэтому каждый ненулевой класс однозначно определяет N. Следовательно, каждая из конгруэнций ρ на S, для которых S/ρ есть группа с нулем, однозначно определяется любым из своих классов, отличных от $\{0\}$. Возвращаясь к случаю вполне простых полугрупп, мы получаем, что каждая из конгруэнций ρ на вполне простой полугруппе T, для которых T/ρ есть группа, однозначно определяется любым из своих классов.

Рассмотрим снова классы эквивалентности $\bigcup \{e_{i1}Nae_{1\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}$ ограничения на T конгруэнции на S, соответствующей нормальному делителю N из H_{11}. Классом эквивалентности, содержащим все идемпотенты из T, является класс

$$K = \bigcup \{e_{i1}Ne_{1\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\}.$$

Тогда для $a \in H_{11}$ мы имеем

$$KaK = \bigcup \{e_{i1}Ne_{1\mu}ae_{j1}Ne_{1\lambda} \mid i, j \in I;\ \lambda, \mu \in \Lambda\} = \bigcup \{e_{i1}Nae_{1\lambda} \mid i \in I, \lambda \in \Lambda\},$$

так как $e_{1\mu}a = a = ae_{j1}$ (лемма 2.14). Таким образом, KaK есть класс эквивалентности, содержащий a. Никакой особой роли $\mathscr{H}$-класс H_{11} здесь не играет, так как все $\mathscr{H}$-классы из T являются группами. Следовательно, для любого $a \in T$ множество KaK есть класс эквивалентности, содержащий a. Заметим также, что K является, очевидно, вполне простой подполугруппой из T и пересечение K с произвольным $\mathscr{H}$-классом является нормальным делителем этого $\mathscr{H}$-класса. В действительности, как мы видели, пересечение K с любым $\mathscr{H}$-классом однозначно определяет K, и такое пересечение должно удовлетворять лишь условию, что оно является нормальным делителем этого $\mathscr{H}$-класса и содержит все произведения пар идемпотентов из T, принадлежащие этому $\mathscr{H}$-классу (для $\mathscr{H}$-класса H_{11} такими произведениями являются элементы $e_{1\lambda}e_{i1}$ $(i \in I, \lambda \in \Lambda)$). Таким образом, мы доказали бо́льшую часть следующей теоремы (Шварц [1962]).

Теорема 10.52. *Пусть T — вполне простая полугруппа. Тогда конгруэнции ρ на T, для которых T/ρ есть группа, получаются следующим образом.*

Пусть K — вполне простая подполугруппа из T, содержащая все идемпотенты из T, и H есть $\mathscr{H}$-класс из T. Предположим, что $K \cap H$ есть нормальный делитель в H, который содержит все произведения пар идемпотентов из T, принадлежащие H. Тогда множества KaK $(a \in T)$ являются классами эквивалентности такой конгруэнции ρ, что T/ρ есть группа. При этом K является единицей группы T/ρ.

Доказательство теоремы будет полностью завершено, когда мы установим, что если K есть вполне простая подполугруппа из T, содержащая все идемпотенты из T, то $K \cap H$ однозначно определяет K. (Мы уже знаем это в случае, когда K является классом эквивалентности такой конгруэнции ρ, что T/ρ есть группа.) Используя наши предыдущие обозначения, предположим, что

H есть $\mathscr{H}$-класс H_{11} и $H_{i\lambda}$ есть другой $\mathscr{H}$-класс. Пусть $e_{j\mu}$ снова обозначает идемпотент из $H_{j\mu}$ ($j \in I$, $\mu \in \Lambda$). Пусть $N_{i\lambda} = K \cap H_{i\lambda}$. Тогда в силу того, что каждое $e_{j\mu}$ принадлежит K, имеем $e_{i1}N_{11}e_{1\lambda} \subseteq \subseteq N_{i\lambda}$ и $e_{1i}N_{i\lambda}e_{\lambda 1} \subseteq N_{11}$. Теперь по лемме 2.2 отображения $x \to e_{i1}xe_{1\lambda}$ ($x \in H_{11}$) и $y \to e_{1i}ye_{\lambda 1}$ ($y \in H_{i\lambda}$) являются взаимно однозначными отображениями соответственно H_{11} на $H_{i\lambda}$ и $H_{i\lambda}$ на H_{11}. Следовательно, $e_{i1}N_{11}e_{1\lambda} = N_{i\lambda}$ и $e_{1i}N_{i\lambda}e_{\lambda 1} = N_{11}$; это доказывает то, что требовалось.

Интересное замечание о разложении на двойные смежные классы вполне простой полугруппы содержится в следующем результате Клиффорда [1963].

Теорема 10.53. *Пусть S — регулярная полугруппа и φ: $S \to G$ — гомоморфизм S на группу G. Положим $K = e\varphi^{-1}$, где e — единица группы G. Множества KsK являются $\varphi \circ \varphi^{-1}$-классами тогда и только тогда, когда K — простая полугруппа.*

Доказательство. Предположим сначала, что K — простая полугруппа. Пусть s, $t \in S$ и $s\varphi = t\varphi$. Пусть x инверсен элементу t и y инверсен элементу s в S. Так как K содержит все идемпотенты из S, имеем, в частности, ys, $xt \in K$. Следовательно,

$$KsK \cdot KxK \supseteq Ks \cdot ys \cdot xt \cdot xK = KsxK = K,$$

так как $sx \in K$ и K — простая полугруппа. Но $(KsK \cdot KxK)\varphi = = s\varphi \cdot x\varphi = e$, так как $s\varphi = t\varphi$. Следовательно,

$$KsK \cdot KxK \subseteq K.$$

Таким образом, $KsK \cdot KxK = K$. Аналогично, $KxK \cdot KsK = K$. В частности, при $t = s$ получаем $KxK \cdot KtK = K$. Отсюда в силу того, что $K^2 = K$, мы имеем

$$\begin{aligned} KsK &= Ks\,(KxK \cdot KtK) = \\ &= (KsK \cdot KxK)\,KtK = \\ &= K^2tK = KtK. \end{aligned}$$

Тогда, в частности, если $t\varphi = s\varphi$, то $t \in KsK$. Так как, обратно, $(KsK)\,\varphi = s\varphi$, отсюда вытекает равенство $(s\varphi)\,\varphi^{-1} = KsK$. Этим доказана достаточность условия теоремы.

Необходимость очевидна. В самом деле, если $k \in K$ и KkK есть класс эквивалентности конгруэнции $\varphi \circ \varphi^{-1}$, то $KkK = K$. Доказательство теоремы завершено.

Мы закончим этот параграф теоремой Мальцева [1957], описывающей конгруэнции на тех вполне 0-простых полугруппах, которые возникают как главные факторы полной полугруппы преобразований $\mathscr{T}_X$.

Напомним, что если $\alpha \in \mathscr{T}_X$, то $|X\alpha|$ есть *ранг* преобразования α (§ 2.2). Если $\alpha, \beta \in \mathscr{T}_X$, то

$$\text{ранг } (\alpha\beta) \leqslant \min (\text{ранг } \alpha, \text{ ранг } \beta).$$

Следовательно, если r есть произвольное кардинальное число, большее 1, то множество

$$I_r = \{\alpha \in \mathscr{T}_X \mid \text{ранг } \alpha < r\}$$

является идеалом в $\mathscr{T}_X$.

Следующая лемма обобщает на случай бесконечного множества утверждение, высказанное на стр. 132 тома 1 для конечного X.

Лемма 10.54. *Для любого множества X и любого такого положительного целого числа n, что $1 < n \leqslant |X|$, полугруппа I_{n+1}/I_n вполне 0-проста.*

Доказательство. Пусть $\alpha, \beta \in I_{n+1} \setminus I_n$. Тогда $|X\alpha| = |X\beta| = n$. Таким образом, мы можем написать

$$X\alpha = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$
$$X\beta = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}.$$

Для каждого i выберем некоторый элемент a_i' из $a_i\alpha^{-1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) и обозначим через γ преобразование, которое для каждого i переводит $b_i\beta^{-1}$ в a_i'. Через δ обозначим преобразование, которое a_i переводит в b_i и которое отображает $X \setminus \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ на b_1. Тогда γ и δ принадлежат $I_{n+1} \setminus I_n$ и $\gamma\alpha\delta = \beta$. Это показывает, что I_{n+1}/I_n является 0-простой полугруппой.

Осталось установить, что I_{n+1}/I_n содержит примитивный идемпотент. Ясно, что $I_{n+1} \setminus I_n$ содержит идемпотенты. Пусть η, θ — два идемпотента из $I_{n+1} \setminus I_n$, для которых $\eta\theta = \theta\eta = \theta$. Тогда $X\theta = X\theta\eta \subseteq X\eta$, откуда в силу конечности числа $|X\theta| = |X\eta|$ имеем $X\theta = X\eta$. Следовательно, для любого $x \in X$ существует такой $y \in X$, что $x\eta = y\theta$. Тогда $x\eta = y\theta = y\theta\eta = y\theta^2\eta = (y\theta)\,\theta\eta = x\eta\theta\eta = x\theta$ для любого $x \in X$. Таким образом, $\eta = \theta$, т. е. идемпотент η примитивен. Доказательство леммы закончено.

Найдем теперь конгруэнции на I_{n+1}/I_n. Для этого мы должны прежде всего описать $\mathscr{H}$-классы полугруппы I_{n+1}/I_n, чему и посвящены следующие аналоги лемм 2.5 и 2.6.

Лемма 10.55. *Если $\alpha, \beta \in I_{n+1} \setminus I_n$, то $\alpha\mathscr{L}\beta$ в I_{n+1}/I_n тогда и только тогда, когда $X\alpha = X\beta$.*

Доказательство. Если $\alpha\mathscr{L}\beta$, т. е. если $\alpha = \beta$ или $\xi\alpha = \beta$ и $\eta\beta = \alpha$ для некоторых $\xi, \eta \in I_{n+1} \setminus I_n$, то, очевидно,

$X\alpha = X\beta$. Обратно, если $X\alpha = X\beta$, то обозначим через ξ преобразование, которое для каждого $y \in X\beta$ переводит все элементы множества $y\beta^{-1}$ в один и тот же элемент из $y\alpha^{-1}$. Тогда $\xi \in I_{n+1} \setminus I_n$ и $\xi\alpha = \beta$. Аналогично, существует такое $\eta \in I_{n+1} \setminus I_n$, что $\eta\beta = \alpha$. Следовательно, $\alpha\mathscr{L}\beta$.

$\mathscr{L}$-класс полугруппы I_{n+1}/I_n, состоящий из всех таких $\alpha \in \mathscr{T}_X$, что $X\alpha = Y$ (где $|Y| = n$), назовем $\mathscr{L}$-классом, *соответствующим множеству* Y.

Лемма 10.56. *Если* α, $\beta \in I_{n+1} \setminus I_n$, *то* $\alpha\mathscr{R}\beta$ *в* I_{n+1}/I_n *тогда и только тогда, когда* $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$.

Доказательство. Пусть $\alpha\mathscr{R}\beta$, так что либо $\alpha = \beta$, либо существуют ξ, $\eta \in I_{n+1} \setminus I_n$, для которых $\alpha\xi = \beta$ и $\beta\eta = \alpha$ (на самом деле такие ξ и η существуют и при $\alpha = \beta$). В первом случае, очевидно, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$. Во втором случае $\alpha \circ \alpha^{-1} = (\beta\eta) \circ (\beta\eta)^{-1} = \beta \circ (\eta \circ \eta^{-1}) \circ \beta^{-1} \supseteq \beta \circ \beta^{-1}$ и, аналогично, $\beta \circ \beta^{-1} \supseteq \alpha \circ \alpha^{-1}$. Следовательно, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$, что и требовалось доказать.

Обратно, предположим, что $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$. Определим преобразование ξ множества X, полагая $z\xi = x\beta$, если $z = x\alpha \in X\alpha$, и $z\xi = x_0\beta$, если $z \in X \setminus X\alpha$, где x_0 — некоторый фиксированный элемент из X. В силу условия $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$ равенство $x\alpha = y\alpha$ выполняется тогда и только тогда, когда $x\beta = y\beta$. Следовательно, ограничение преобразования ξ на $X\alpha$ является взаимно однозначным отображением $X\alpha$ на $X\beta$. Так как $X\xi \subseteq X\beta$, имеем $X\xi = X\beta$ и поэтому $\xi \in I_{n+1} \setminus I_n$. Кроме того, $\alpha\xi = \beta$. Аналогично, существует такое $\eta \in I_{n+1} \setminus I_n$, что $\beta\eta = \alpha$. Таким образом, $\alpha\mathscr{R}\beta$, что и требовалось доказать.

$\mathscr{R}$-класс полугруппы I_{n+1}/I_n, состоящий из всех $\alpha \in \mathscr{T}_X$, для которых $\alpha \circ \alpha^{-1} = \pi$ (где $|X/\pi| = n$), назовем $\mathscr{R}$-классом, *соответствующим разбиению* π.

Из предыдущей леммы вытекает (ср. с теоремой 2.9 (vi)), что $\mathscr{H}$-классы полугруппы I_{n+1}/I_n, отличные от $\{0\}$, можно проиндексировать упорядоченными парами (π, Y), где π есть эквивалентность на X и Y есть такое подмножество из X, что $|X/\pi| = |Y| = n$. А именно $\mathscr{H}$-классом, *соответствующим паре* (π, Y), назовем пересечение $\mathscr{R}$-класса, состоящего из всех α со свойствами $\alpha \circ \alpha^{-1} = \pi$, и $\mathscr{L}$-класса, состоящего из всех α со свойством $X\alpha = Y$.

В следующей лемме мы используем аналог теоремы 2.10 (i): *$\mathscr{H}$-класс, соответствующий паре* (π, Y), *является группой тогда и только тогда, когда* Y *содержит в точности один элемент из каждого* π*-класса.*

Лемма 10.57. (i) *Пусть* π_1 *и* π_2 — *различные эквивалентности на* X, *причем* $|X/\pi_1| = |X/\pi_2| = n$. *Тогда существует подмно-*

жество Y из X, для которого в точности один из $\mathscr{H}$-классов, соответствующих (π_1, Y) и (π_2, Y), является группой.

(ii) *Пусть Y_1 и Y_2 — различные подмножества из X, причем $|Y_1| = |Y_2| = n > 1$. Тогда существует эквивалентность π на Y, для которой в точности один из $\mathscr{H}$-классов, соответствующих (π, Y_1) и (π, Y_2), является группой.*

Доказательство. (i) Так как $\pi_1 \neq \pi_2$, существуют такие a, $b \in X$, что $(a, b) \in \pi_1$, но $(a, b) \notin \pi_2$. Пусть Y — подмножество из X, содержащее a, b и пересекающееся с каждым π_2 классом в точности по одному элементу. Тогда $|Y| = n$ и $\mathscr{H}$-класс, соответствующий (π_2, Y), является группой. Однако $(a, b) \in \pi_1$, т. е. $\mathscr{H}$-класс, соответствующий (π_1, Y), не является группой.

(ii) В силу конечности числа $|Y_1| = |Y_2| = n$ и того, что $Y_1 \neq Y_2$, существуют $a, b \in X$, для которых $a \in Y_1$, $a \notin Y_2$, $b \notin Y_1$, $b \in Y_2$. Так как $n > 1$, существует $c \neq b$ в Y_2. Пусть π — произвольная эквивалентность на X, такая, что Y_1 пересекается с каждым π-классом в точности по одному элементу и элементы b и c попадают в один π-класс. Тогда $\mathscr{H}$-класс, соответствующий паре (π, Y_1), является группой, а $\mathscr{H}$-класс, соответствующий паре (π, Y_2), не является группой. Доказательство леммы закончено.

Из леммы вытекает, что единственным допустимым разбиением прямоугольника $\mathscr{H}$-классов ненулевых элементов из I_{n+1}/I_n является разбиение, соответствующее отношению равенства. На основании теоремы 10.49 легко видеть, что конгруэнция $[\mathcal{J}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$ (в обозначениях этой теоремы), где $\mathcal{J}$ есть разбиение, соответствующее отношению равенства, однозначно определяется нормальным делителем N и что в качестве e_i можно выбрать произвольный элемент из H_{i1} $(i \in I)$, а в качестве f_λ — произвольный элемент из $H_{1\lambda}$ $(\lambda \in \Lambda)$; в самом деле, каждый класс разбиения содержит лишь один $\mathscr{H}$-класс. Кроме того, в качестве N можно выбрать произвольный нормальный делитель группы H_{11}. Итак, мы доказали следующий результат Мальцева [1952].

Теорема 10.58. *Для любого целого числа n, такого, что $1 < n \leqslant |X|$, полугруппа I_{n+1}/I_n вполне 0-проста и конгруэнции на I_{n+1}/I_n, отличные от универсальной, находятся во взаимно однозначном соответствии с нормальными делителями произвольного $\mathscr{H}$-класса из I_{n+1}/I_n, являющегося группой. Если N — такой нормальный делитель, то классами конгруэнции, соответствующей N, являются множества aNb, где a, $b \in I_{n+1}/I_n$.*

Сравнивая леммы 10.55 и 10.56 с леммами 2.5 и 2.6, мы видим, что ненулевые $\mathscr{H}$-классы полугруппы I_{n+1}/I_n совпадают с

$\mathscr{H}$-классами полугруппы $\mathscr{T}_X$, содержащимися в $I_{n+1}\setminus I_n$ [1]). Таким образом, из теоремы 2.10 (ii) вытекает, что групповые $\mathscr{H}$-классы из $I_{n+1}\setminus I_n$ изоморфны симметрической группе $\mathscr{G}_n$ степени n. Например, если $n = 4$, то существуют в точности две нетривиальные конгруэнции на I_{n+1}/I_n.

Дальнейшую информацию о структуре конгруэнций на вполне 0-простой полугруппе читатель может найти в статье Престона [1965]. Там показано, что если в структуре конгруэнций на вполне 0-простой полугруппе между конгруэнциями ρ и σ можно провести максимальную цепь конечной длины, то любая максимальная цепь конгруэнций от ρ до σ конечна и имеет ту же длину [2]).

Упражнения к § 10.7

1. Пусть $S = \mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ — рисовская вполне 0-простая полугруппа, для которой $\mathscr{H}$-класс H_{11} является группой, и $\rho = [\mathscr{P}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$ — конгруэнция на S. Пусть I^* — множество сторон $\mathscr{P}$-классов, содержащихся в I, а Λ^* — множество сторон $\mathscr{P}$-классов, содержащихся в Λ. Положим $G^* = H_{11}/N$ и обозначим $\Lambda^* \times I^*$-матрицу $(p^*_{\lambda^* i^*})$, где $p^*_{\lambda^* i^*} = Nf_\mu e_j$ для $j \in i^*$ и $\mu \in \lambda^*$, через P^*. Тогда отображение полугруппы S/ρ в $\mathscr{M}^0(G^*, I^*, \Lambda^*; P^*)$, которое переводит 0 в 0 и каждый элемент $e_j Na f_\mu$ в $[Na; i^*, \lambda^*]$, где $j \in i^*$, $\mu \in \lambda^*$ и $a \in H_{11}$, является изоморфизмом полугруппы S/ρ на $\mathscr{M}^0(G^*; I^*, \Lambda^*; P^*)$.

2. Пусть θ — гомоморфизм вполне 0-простой полугруппы $S = \mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; P)$ на вполне 0-простую полугруппу $S^* = \mathscr{M}^0(G^*; I^*, \Lambda^*; P^*)$. Предположим, что θ задано, как в теореме 10.47:

$$(a; i, \lambda)\theta = [u_i(a\omega)v_\lambda; i\varphi, \lambda\psi].$$

Пусть $x_i\omega = u_i$ и $y_\lambda\omega = v_\lambda$. Рассмотрим изоморфизм

$$\alpha_\theta\colon (a; i, \lambda) \to (x_i a y_\lambda; i, \lambda)$$

полугруппы S на $S_1 = \mathscr{M}^0(G; I, \Lambda; Y^{-1}PX^{-1})$, где Y^{-1} есть диагональная $\Lambda \times \Lambda$-матрица с y_λ^{-1} на (λ, λ)-м месте и X^{-1} есть диагональная $I \times I$-матрица с x_i^{-1} на (i, i)-м месте (см. лемму 3.6).

Положим $Q = Y^{-1}PX^{-1}$ и $S_2 = \mathscr{M}^0(G\omega; I, \Lambda; Q\omega)$. Тогда отображение

$$\theta_\omega : (a; i, \lambda) \to (a\omega; i, \lambda)$$

является гомоморфизмом полугруппы S_1 на S_2.

---

[1]) Здесь имеется в виду, что ненулевые элементы из I_{n+1}/I_n, как обычно, отождествляются с соответствующими элементами из $I_{n+1} \subseteq \mathscr{T}_X$.— *Прим. ред.*

[2]) Развернутому изучению конгруэнций (главным образом исследованию структуры конгруэнций) на вполне 0-простых полугруппах посвящена книга Кэппа и Шнейдера [1969], содержащая целый ряд новых результатов.— *Прим. ред.*

Пусть $S_3 = \mathcal{M}^0(G\omega;\ I^*, \Lambda;\ Q_3)$, где $Q_3 = (q_{\lambda i*})$ есть $\Lambda \times I^*$-матрица, в которой $q_{\lambda i*} = p^*_{\lambda\psi,\, i*}$. Тогда отображение

$$\theta_r\colon (b;\ i, \lambda) \to (b;\ i\varphi, \lambda)$$

является гомоморфизмом полугруппы S_2 на S_3.

Далее, отображение

$$\theta_l\colon (b;\ i^*, \lambda) \to [b;\ i^*, \lambda\psi]$$

является гомоморфизмом полугруппы S_3 на S^*.

Наконец, мы имеем $\theta = \alpha_\theta\theta_\omega\theta_r\theta_l$. (Глускин [1956].)

3. Пусть ξ — произвольное кардинальное число, большее 1 и не превосходящее мощности множества X. Через ξ' обозначим наименьшее кардинальное число, большее ξ. Тогда $I_{\xi'}/I_\xi$ является 0-бипростой полугруппой (ср. с леммой 10.54).

4. Каждая конгруэнция ρ на вполне 0-простой полугруппе S однозначно определяется множеством ρ-классов, содержащих ненулевые идемпотенты из S.

§ 10.8. Конгруэнции на полной полугруппе преобразований

Структура конгруэнций на полной полугруппе преобразований $\mathcal{T}_X$ порождается конгруэнциями трех простых типов. Изложению этого результата А. И. Мальцева [1952] посвящен данный параграф. Теорема Мальцева разбита ниже на две части — теоремы 10.68 и 10.72.

Первый из упомянутых типов — это конгруэнции Риса, соответствующие идеалам. Если I — идеал из $\mathcal{T}_X$, то через I^* будем обозначать конгруэнцию на $\mathcal{T}_X$, определяющую факторполугруппу $\mathcal{T}_X/I$ (см. § 1.5).

В теореме 10.59, являющейся обобщением утверждения (ii) теоремы 2.9, дается характеризация идеалов полугруппы $\mathcal{T}_X$ (Мальцев [1952]). Мы будем использовать следующие обозначения. Для произвольного кардинального числа ξ положим

$$I_\xi = \{\alpha \in \mathcal{T}_X \mid \text{ранг}\,\alpha < \xi\},$$
$$D_\xi = \{\alpha \in \mathcal{T}_X \mid \text{ранг}\,\alpha = \xi\}.$$

Нам будет удобно в данном параграфе обозначать через ξ' наименьшее кардинальное число, превосходящее ξ. Таким образом,

$$I_{\xi'} = I_\xi \cup D_\xi.$$

Если $1 \leqslant \xi \leqslant |X|$, то в силу утверждения (ii) теоремы 2.9 множество $I_{\xi'}$ является главным идеалом из $\mathcal{T}_X$, который порождается любым элементом ранга ξ, а на основании утверждения (iii) теоремы 2.9 множество D_ξ есть $\mathcal{D}$-класс полугруппы $\mathcal{T}_X$.

Теорема 10.59. *Пусть X — некоторое множество и ξ — такое кардинальное число, что $1 < \xi \leqslant |X|'$. Тогда I_ξ является идеалом в $\mathcal{T}_X$. Более того, каждый идеал из $\mathcal{T}_X$ совпадает с одним из идеалов I_ξ и соответствие между ξ и I_ξ является взаимно однозначным.*

Доказательство. Так как для любых $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$ ранг$(\alpha \cdot \beta) \leqslant \min$ {ранг α, ранг β}, каждое I_ξ является, очевидно, идеалом в $\mathcal{T}_X$.

Обратно, пусть I — произвольный идеал из $\mathcal{T}_X$ и ξ — наименьшее кардинальное число, превосходящее ранги всех элементов из I. Тогда, конечно, $I \subseteq I_\xi$. Обратно, если $\alpha \in I_\xi$, то по определению ξ существует такой элемент $\beta \in I$, что ранг $\beta \geqslant$ ранг α. На основании теоремы 2.9 (ii) α принадлежит главному идеалу из $\mathcal{T}_X$, порожденному элементом β. Следовательно, $\alpha \in I$; этим установлено, что $I_\xi \subseteq I$. Таким образом, $I = I_\xi$, что и требовалось доказать.

Второй тип конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ определяется в следующей теореме. Здесь, как и всюду в этом параграфе, символ ι используется для обозначения отношения равенства на полугруппе $\mathcal{T}_X$. Единица полугруппы $\mathcal{T}_X$ будет обозначаться через ι_X.

Теорема 10.60. *Пусть n — конечное кардинальное число, такое, что $1 < n \leqslant |X|$, и σ — конгруэнция на I_{n+1}/I_n, отличная от универсальной конгруэнции. Определим отношение $\sigma^\dagger$ на $\mathcal{T}_X$, полагая*

$$\sigma^\dagger = \iota \cup [\sigma \cap (D_n \times D_n)] \cup [I_n \times I_n].$$

Тогда $\sigma^\dagger$ является конгруэнцией на $\mathcal{T}_X$.

Доказательство. Непосредственно проверяется, что $\sigma^\dagger$ есть отношение эквивалентности, поэтому нам нужно лишь установить, что это отношение стабильно.

Пусть $(\alpha, \beta) \in \sigma^\dagger$ и $\gamma \in \mathcal{T}_X$. Если $\alpha = \beta$ или $\alpha, \beta \in I_n$, то, очевидно, $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \in \sigma^\dagger$. Осталось рассмотреть случай, когда $(\alpha, \beta) \in \sigma \cap (D_n \times D_n)$. В этом случае, если $\gamma \in I_{n+1}$, то $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \in \sigma^\dagger$, так как σ является 0-ограниченной конгруэнцией на I_{n+1}/I_n.

Предположим теперь, что $\gamma \in \mathcal{T}_X \setminus I_{n+1}$. Как отмечено перед теоремой 10.58, единственным допустимым разбиением прямоугольника $\mathcal{H}$-классов ненулевых элементов из I_{n+1}/I_n является разбиение, соответствующее отношению равенства. Следовательно, $(\alpha, \beta) \in \sigma$ влечет за собой $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}$. В частности, на основании леммы 10.56 имеем $X\alpha = X\beta$. Тогда $X\alpha\gamma = X\beta\gamma$, так что ранг $(\alpha\gamma) =$ ранг $(\beta\gamma)$. Если оба ранга меньше n, то $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \in I_n \times I_n \subseteq \sigma^\dagger$. В противном случае $X\alpha\gamma = X\beta\gamma = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$ для некоторых c_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Пусть $X\alpha = X\beta = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Можно считать, что $a_i\gamma = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Определим отображение δ, полагая $(X \setminus X\alpha)\,\delta = c_1$

и $a_i\delta = c_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Тогда $\delta \in I_{n+1} \setminus I_n$ и поэтому $(\alpha\delta, \beta\delta) \in \sigma$. Но $\alpha\delta = \alpha\gamma$ и $\beta\delta = \beta\gamma$. Следовательно, $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \in \in \sigma \cap (D_n \times D_n) \subseteq \sigma^\dagger$.

Это завершает доказательство того, что отношение $\sigma^\dagger$ стабильно справа. Аналогичные рассуждения показывают, что $\sigma^\dagger$ стабильно слева и поэтому является конгруэнцией на $\mathcal{T}_X$.

Заметим, что рассмотренный второй тип конгруэнций полностью определяется конгруэнциями на полугруппах I_{n+1}/I_n, а эти конгруэнции были описаны в теореме 10.58.

Третий тип конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ имеет смысл рассматривать лишь в случае, когда X бесконечно. Для любых α, β из $\mathcal{T}_X$ положим

$$X_0 = X_0(\alpha, \beta) = \{x \in X \mid x\alpha \neq x\beta\}.$$

Если $X_0 = \varnothing$ (т. е. $\alpha = \beta$), то положим $\eta = 0$; если $X_0 \neq \varnothing$, то пусть $\eta = \max\{|X_0\alpha|, |X_0\beta|\}$. Назовем η *рангом различия*[1]) пары (α, β) и будем писать $\eta = \mathrm{dr}(\alpha, \beta)$. Если ξ — бесконечное кардинальное число или $\xi = 1$, то положим

$$\Delta_\xi = \{(\alpha, \beta) \in \mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_X \mid \mathrm{dr}(\alpha, \beta) < \xi\}.$$

Лемма 10.61. *Для любого бесконечного кардинального числа ξ отношение Δ_ξ является конгруэнцией на $\mathcal{T}_X$.*

Доказательство. Очевидно, отношение Δ_ξ рефлексивно и симметрично. Для доказательства транзитивности возьмем (α, β) и (β, γ) из Δ_ξ. Положим $M = X_0(\alpha, \beta)$ и $N = X_0(\beta, \gamma)$. Тогда по предположению $|M\alpha|$, $|M\beta|$, $|N\beta|$ и $|N\gamma|$ меньше ξ. Положим $Q = X_0(\alpha, \gamma)$. Тогда Q можно следующим образом разбить на два подмножества:

$$Q = \{x \in X \mid x\alpha \neq x\beta \text{ и } x\alpha \neq x\gamma\} \cup$$
$$\cup \{x \in X \mid x\alpha = x\beta \text{ и } x\alpha \neq x\gamma\}.$$

Первое из указанных множеств обозначим через A, второе — через B. Очевидно, $A \subseteq M$ и $B \subseteq N$. Отсюда получаем, что $A\alpha \subseteq M\alpha$ и $B\alpha = B\beta \subseteq N\beta$. Следовательно,

$$Q\alpha = A\alpha \cup B\alpha \subseteq M\alpha \cup N\beta,$$

откуда

$$|Q\alpha| \leqslant |M\alpha| + |N\beta| < \xi;$$

последнее неравенство выполняется в силу того, что ξ бесконечно. Аналогично, так как

$$Q = \{x \in X \mid x\beta \neq x\gamma \text{ и } x\alpha \neq x\gamma\} \cup$$
$$\cup \{x \in X \mid x\beta = x\gamma \text{ и } x\alpha \neq x\gamma\}$$

[1]) Difference rank.— *Прим. перев.*

и первый из членов объединения содержится в N, а второй — в M, мы выводим, что $|Q\gamma| < \xi$. Таким образом, $(\alpha, \gamma) \in \Delta_\xi$, т. е. мы установили, что Δ_ξ является отношением эквивалентности на $\mathcal{T}_X$.

Пусть $(\alpha, \beta) \in \Delta_\xi$ и $\gamma \in \mathcal{T}_X$. Положим $M = X_0(\alpha, \beta)$, $R = X_0(\gamma\alpha, \gamma\beta)$ и $S = X_0(\alpha\gamma, \beta\gamma)$. Тогда, очевидно, $R\gamma \subseteq M$. Следовательно, $|R\gamma\alpha|$ и $|R\gamma\beta|$ меньше ξ, т. е. $(\gamma\alpha, \gamma\beta) \in \Delta_\xi$. Далее, $S \subseteq M$ и поэтому $S\alpha\gamma \subseteq M\alpha\gamma$ и $S\beta\gamma \subseteq M\beta\gamma$. Так как $|M\alpha\gamma| \leqslant |M\alpha|$ и $|M\beta\gamma| \leqslant |M\beta|$, отсюда вытекает, что $|S\alpha\gamma|$ и $|S\beta\gamma|$ меньше ξ, т. е. $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \in \Delta_\xi$. Таким образом, мы показали, что отношение Δ_ξ стабильно. Лемма доказана.

Заметим, что если X конечно, то для любого бесконечного кардинального числа ξ отношение Δ_ξ совпадает с универсальной конгруэнцией на $\mathcal{T}_X$. Таким образом, конгруэнции Δ_ξ имеет смысл рассматривать лишь для бесконечного X.

Чтобы потом не прерывать изложения, приведем сейчас две необходимые для дальнейшего леммы, носящие технический характер.

Лемма 10.62. (i) *Если α и β — элементы различного ранга из $\mathcal{T}_X$ и ранг хотя бы одного из них бесконечен, то*

$$\operatorname{dr}(\alpha, \beta) = \max\{\text{ранг } \alpha, \text{ ранг } \beta\}.$$

(ii) *Если ξ — бесконечное кардинальное число, то*

$$I_\xi^* \subseteq \Delta_\xi \subseteq I_\xi^* \cup \mathcal{D}.$$

Доказательство. (i) Пусть $\lambda =$ ранг α, $\mu =$ ранг β и $\lambda > \mu$. Положим $X\alpha = \{a_i \mid i \in I\}$ и $R_i = \{x \in X \mid x\alpha = a_i\}$. Для каждого индекса $i \in I$ выберем в R_i такой элемент r_i, что $r_i \in X_0 = X_0(\alpha, \beta)$ в случае если $R_i \cap X_0 \neq \varnothing$. Пусть $I_0 = \{i \in I \mid r_i \in X_0\}$ и $I_1 = I \setminus I_0$. Тогда $I_1 = \{i \in I \mid r_i\alpha = r_i\beta\}$. Так как $a_i \in X\beta$ для $i \in I_1$, мы имеем $|I_1| \leqslant |X\beta| = \mu < \lambda$. В силу того что по предположению λ бесконечно, получаем $|I_0| = \lambda$. Следовательно,

$$|X_0\alpha| = |\{a_i \mid i \in I_0\}| = |I_0| = \lambda,$$

откуда $\operatorname{dr}(\alpha, \beta) \geqslant \lambda = \max\{\text{ранг } \alpha, \text{ ранг } \beta\}$. Так как обратное неравенство выполняется тривиально, утверждение (i) доказано.

(ii) Первое включение тривиально. Докажем второе. Пусть $(\alpha, \beta) \in \Delta_\xi \setminus \mathcal{D}$. По теореме 2.9 (iii) ранг $\alpha \neq$ ранг β. Если оба ранга конечны, то $(\alpha, \beta) \in I_\xi^*$, так как ξ бесконечно. В противном случае $\max\{\text{ранг } \alpha, \text{ ранг } \beta\} < \xi$ ввиду (i), откуда $(\alpha, \beta) \in I_\xi^*$.

Лемма 10.63. (i) *Пусть η_1 и η_2 — бесконечные кардинальные числа, удовлетворяющие неравенству $\eta_1 \leqslant \eta_2$, и α, β — такие* *элементы из* $\mathscr{T}_X$, *что*

$$\text{ранг } \alpha = \text{ранг } \beta = \eta_2, \ \operatorname{dr}(\alpha, \beta) = \xi \leqslant \eta_1.$$

Тогда существует такое $\gamma \in \mathscr{T}_X$, *что*

$$\text{ранг } \alpha\gamma = \text{ранг } \beta\gamma = \eta_1, \quad \operatorname{dr}(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \xi.$$

(ii) *Если* ξ *и* η *— такие кардинальные числа, что* η *бесконечно и* $\xi \leqslant \eta \leqslant |X|$, *то существуют* $\alpha, \beta \in \mathscr{T}_X$, *для которых*

$$\text{ранг } \alpha = \text{ранг } \beta = \eta, \quad \operatorname{dr}(\alpha, \beta) = \xi.$$

Доказательство. (i) Пусть $X_0 = X_0(\alpha, \beta)$ и $C = X_0\alpha \cup X_0\beta$. Очевидно, $X\alpha \setminus C = X\beta \setminus C$. Так как доказываемое утверждение тривиально в случае $\eta_1 = \eta_2$ (здесь в качестве γ можно взять ι_X), мы можем предположить, что $\eta_1 < \eta_2$. Тогда $|C| < \eta_2 = |X\alpha|$, поэтому $|X\alpha \setminus C| = \eta_2$. Обозначим через γ элемент из $\mathscr{T}_X$, отображающий $X\alpha \setminus C$ на множество Y мощности η_1 и переводящий остальные элементы из X в себя. Тогда

$$|X\alpha\gamma| = |Y \cup (C \cap X\alpha)| = |Y| = \eta_1,$$
$$|X\beta\gamma| = |Y \cup (C \cap X\beta)| = |Y| = \eta_1.$$

Таким образом, ранги элементов $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$ равны η_1 и осталось лишь доказать, что $\operatorname{dr}(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \xi$.

Очевидно, $X_0(\alpha\gamma, \beta\gamma) \subseteq X_0(\alpha, \beta) = X_0$. Обратно, если $x \in X_0$, то $x\alpha \neq x\beta$; и так как γ действует тождественно на C и $x\alpha, x\beta \in C$, мы имеем $x\alpha\gamma \neq x\beta\gamma$. Следовательно, $X_0(\alpha\gamma, \beta\gamma) = X_0$. Так как $X_0\alpha\gamma = X_0\alpha$ и $X_0\beta\gamma = X_0\beta$, мы заключаем, что $\operatorname{dr}(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \xi$.

(ii) Пусть Y — подмножество мощности ξ из X и δ — произвольная подстановка множества X, оставляющая на месте элементы из $X \setminus Y$ и передвигающая каждый элемент из Y. Тогда $\operatorname{dr}(\iota_X, \delta) = \xi$. В силу утверждения (i) существует такое $\gamma \in \mathscr{T}_X$, что

$$\text{ранг } \gamma = \text{ранг } \delta\gamma = \eta, \quad \operatorname{dr}(\gamma, \delta\gamma) = \xi.$$

Взяв $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta\gamma$, получаем требуемое.

Теорема Мальцева, которую мы намерены доказать, утверждает, что любая конгруэнция на $\mathscr{T}_X$ выражается через конгруэнции трех указанных выше типов. Доказательство этой теоремы довольно длинное. Сначала мы установим несколько основных фактов о конгруэнциях на $\mathscr{T}_X$.

Для любого $x \in X$ через ζ_x обозначим отображение, переводящее каждый элемент из X в x.

Лемма 10.64. *Пусть* ρ *— конгруэнция на* $\mathscr{T}_X$, *отличная от отношения равенства. Тогда все элементы из* D_1 *принадлежат одному* ρ*-классу* K_ρ *и* K_ρ *является идеалом в* $\mathscr{T}_X$.

Доказательство. По предположению существуют такие $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$, что $\alpha \neq \beta$ и $(\alpha, \beta) \in \rho$. Так как $\alpha \neq \beta$, существует $c \in X$, для которого $c\alpha \neq c\beta$. Пусть $a, b \in X$ и γ — произвольное преобразование множества X, переводящее $c\alpha$ в a, $c\beta$ в b. Тогда $\zeta_c\alpha\gamma = \zeta_a$ и $\zeta_c\beta\gamma = \zeta_b$. Ввиду того что $(\alpha, \beta) \in \rho$, имеет место включение $(\zeta_a, \zeta_b) \in \rho$.

Это показывает, что все элементы из D_1 принадлежат одному ρ-классу; обозначим его через K_ρ. Так как D_1 является идеалом в $\mathcal{T}_X$, идеалом будет и K_ρ; в самом деле, любой класс конгруэнции, содержащий идеал, сам является идеалом.

На основании теоремы 10.59 $K_\rho = I_\eta$ для некоторого η. Будем ниже обозначать указанное число η через $\eta(\rho)$. Положим по определению $\eta(\iota) = 1$.

Таким образом, $(\alpha, \beta) \in \rho$, если ранги элементов α и β меньше $\eta(\rho)$. Следующее утверждение дает частичное обращение только что сформулированного: *если* $(\alpha, \beta) \in \rho$ *и* ранг $\alpha \neq$ ранг β, *то ранги элементов* α *и* β *меньше* $\eta(\rho)$.

Теорема 10.65. *Пусть* ρ — *конгруэнция на* $\mathcal{T}_X$, *отличная от отношения равенства. Тогда*

$$I^*_{\eta(\rho)} \subseteq \rho \subseteq I^*_{\eta(\rho)} \cup \mathcal{D}.$$

Доказательство. Из леммы 10.64 и определения числа $\eta(\rho)$ вытекает включение $I^*_{\eta(\rho)} \subseteq \rho$. Пусть $(\alpha, \beta) \in \rho$ и $\eta =$ ранг $\alpha >$ ранг β. Для доказательства включения $\rho \subseteq I^*_{\eta(\rho)} \cup \mathcal{D}$ достаточно установить, что $\eta < \eta(\rho)$. Разобьем доказательство на два случая в зависимости от того, конечно или бесконечно η.

(i) η *бесконечно*. Так как $|X\alpha| > |X\beta|$, имеем $|X\alpha \setminus X\beta| = |X\alpha|$. Пусть γ — произвольное преобразование множества X, которое отображает $X\beta$ на некоторый элемент c, а $X\alpha \setminus X\beta$ — на $X\alpha$. Тогда ранг $(\alpha\gamma) =$ ранг α и $\beta\gamma = \zeta_c$. Отсюда в силу того, что $(\alpha, \beta) \in \rho$, получаем $(\alpha\gamma, \zeta_c) \in \rho$. Следовательно, $\alpha\gamma \in K_\rho = I_{\eta(\rho)}$. Так как ранг $(\alpha\gamma) = \eta$, этим установлено, что $\eta < \eta(\rho)$.

(ii) $\eta = r$ *конечно*. Пусть $|X\beta| = s$, так что $s < r$. Если $X\alpha \cap X\beta = \varnothing$, то через γ обозначим преобразование множества X, которое отображает $X\beta$ на некоторый элемент c и отображает $X \setminus X\beta$ тождественно на себя. Тогда $\alpha\gamma = \alpha$ и $\beta\gamma = \zeta_c$, откуда $(\alpha, \zeta_c) \in \rho$, т. е. $\alpha \in K_\rho = I_{\eta(\rho)}$ и снова $\eta < \eta(\rho)$.

Теперь предположим, что $C = X\alpha \cap X\beta = \{c_1, c_2, \ldots, c_t\}$, где $0 < t \leqslant s < r$. Пусть γ_0 отображает $X \setminus X\alpha$ на c_1 и оставляет все другие элементы из X на месте. Тогда $\alpha\gamma_0 = \alpha$ и $X\beta\gamma_0 = C$. Для $i = 1, 2, \ldots, t$ обозначим через γ_i преобразование, переводящее c_i в c_1 и оставляющее все другие элементы из X на месте. Положим $\alpha\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_i = \alpha_i$ и $\beta\gamma_0\gamma_1 \ldots \gamma_i = \beta_i$. Тогда $(\alpha, \beta) \in \rho$ влечет за собой $(\alpha_i, \beta_i) \in \rho$ для любого $i = 0, 1, 2, \ldots, t$.

Далее, β_0 имеет ранг t, α_0 — ранг r и для любого $i = 1, 2, \ldots$ $\ldots, t$ элемент β_i имеет ранг $t + 1 - i$, а α_i — ранг $r + 1 - i$. Таким образом, ранг β_t равен 1 и поэтому $(\alpha_t, \beta_t) \in \rho$ влечет за собой $\alpha_t \in K_\rho$. Так как $r > t$, ранг $\alpha_t = r + 1 - t > 1$. Следовательно, $\eta(\rho) > 2$, откуда в силу того, что ранг β_{t-1} равен 2, имеем $\beta_{t-1} \in K_\rho$. Из $(\alpha_{t-1}, \beta_{t-1}) \in \rho$ вытекает $\alpha_{t-1} \in K_\rho$. Последовательно мы выводим, что все элементы $\beta_{t-2}, \alpha_{t-2}, \beta_{t-3}, \ldots, \alpha_1$ принадлежат K_ρ. Так как ранг α_1 равен r, получаем $r < \eta(\rho)$.

Заметим здесь, что если $\rho = \Delta_\xi$, то $\eta(\rho) = \xi$. Это вытекает непосредственно из леммы 10.62 (i) и определения числа $\eta(\rho)$. Таким образом, утверждение (ii) леммы 10.62 является следствием теоремы 10.65.

Рассуждения теперь разбиваются на два случая в зависимости от того, бесконечно или конечно $\eta(\rho)$. Если $\eta(\rho)$ конечно, то мы можем легко описать различные возможности для ρ; приступим к этому описанию.

Лемма 10.66. *Пусть ρ — конгруэнция на $\mathcal{T}_X$ и $\eta(\rho)$ конечно. Если α — элемент конечного ранга, большего или равного $\eta(\rho)$, и $(\alpha, \beta) \in \rho$, то $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}$.*

Доказательство. Если $\rho = \iota$, то $\alpha = \beta$ и $(\alpha, \beta) \in \mathcal{H}$. Предположим, что $\rho \neq \iota$. На основании только что установленной теоремы ранг β = ранг α; следовательно, $|X\alpha| = |X\beta| = r$. Так как $\eta(\rho) > 1$, имеем $r > 1$. Следовательно, если $X\alpha \neq X\beta$, то мы можем выбрать $c \in X\beta \setminus X\alpha$ и определить преобразование γ множества X, которое переводит c в $X\beta \setminus \{c\}$ и оставляет все остальные элементы из X на месте. Тогда $\alpha\gamma = \alpha$, откуда $(\alpha, \beta\gamma) \in \rho$. Но ранг α равен r, а ранг $\beta\gamma$ равен $r - 1$, поэтому в силу теоремы 10.65 получаем $\eta(\rho) > r$. Это противоречит нашим предположениям; следовательно, $X\alpha = X\beta$.

Предположим, что $\alpha \circ \alpha^{-1} \neq \beta \circ \beta^{-1}$. Тогда существует $(a, b) \in \alpha \circ \alpha^{-1} \setminus \beta \circ \beta^{-1}$. Пусть B — множество, пересекающееся с каждым $\beta \circ \beta^{-1}$-классом в точности по одному элементу и такое, что $a, b \in B$. Пусть γ — отображение множества $X\beta = X\alpha$ на B, переводящее каждый элемент из $X\beta$ в свой прообраз из B при отображении β и оставляющее другие элементы из X на месте. Тогда $X\beta\gamma = B$ и для $x \in B$ имеем $x\beta\gamma = x$. Следовательно, $(\beta\gamma)^2 = \beta\gamma$. Мы имеем $X\alpha\gamma = B$, но $X(\alpha\gamma)^2 \subset B$, поскольку $a, b \in B$ и $a\alpha = b\alpha$. Таким образом, ранг $(\alpha\gamma)^2 <$ ранг $(\alpha\gamma)$. Далее, $((\alpha\gamma)^2, (\beta\gamma)^2) = ((\alpha\gamma)^2, \beta\gamma) \in \rho$, так как $(\alpha, \beta) \in \rho$, и в силу того, что $(\alpha\gamma)^2$ и $\beta\gamma$ имеют различные ранги, на основании теоремы 10.65 мы получаем $\eta(\rho) > r = \max$ {ранг $(\alpha\gamma)^2$, ранг $(\beta\gamma)$}. Пришли к противоречию; следовательно, $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$.

Теперь утверждение леммы непосредственно вытекает из лемм 2.6 и 2.7.

Лемма 10.67. *Пусть* ρ — *конгруэнция на* $\mathcal{T}_X$, $\eta(\rho)$ *конечно и* α — *элемент конечного ранга* $r \geqslant \eta(\rho)$. *Если существует такое* β, *что* $(\alpha, \beta) \in \rho$ *и* $\alpha \neq \beta$, *то* $r = \eta(\rho)$.

Доказательство. В силу леммы 10.66 имеем $(\alpha, \beta) \in \in \mathcal{H}$, откуда $\alpha \circ \alpha^{-1} = \beta \circ \beta^{-1}$ и $X\alpha = X\beta$. Пусть $M_1, M_2, \ldots, M_r$ — классы эквивалентности по $\mathrm{mod}\, \alpha \circ \alpha^{-1}$ и $M_i\alpha = a_i$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. Тогда $M_i\beta = a_{i\sigma}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$, где σ есть подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, r\}$. Поскольку $\alpha \neq \beta$, существует такое p, что $p \neq p_\sigma$, и, так как $r > 1$, существует отличное от p число $k \in \{1, 2, \ldots, r\}$.

Определим теперь преобразование γ множества X, полагая

$$\gamma : \begin{cases} M_k \cup M_p \to m_k, \\ \qquad M_j \to m_j, \end{cases}$$

где $j \neq k, p$ и $m_i \in M_i$ для $i \neq p$. Тогда

$$X\gamma\alpha = \{a_i \mid i \neq p\},$$

$$X\gamma\beta = \{a_{i\sigma} \mid i \neq p\}.$$

Так как $p \neq p\sigma$, имеем $X\gamma\alpha \neq X\gamma\beta$. Следовательно, $(\gamma\alpha, \gamma\beta) \in \mathcal{H}$ и поэтому в силу леммы 10.66 ранг $r - 1$ элемента $\gamma\alpha$ меньше $\eta(\rho)$. Отсюда непосредственно вытекает равенство $r = \eta(\rho)$.

Теорема 10.68. *Пусть* ρ — *нетривиальная* (*т. е. не совпадающая ни с отношением равенства, ни с универсальным отношением*) *конгруэнция на* $\mathcal{T}_X$ *и* $\eta(\rho)$ *конечно*, $\eta(\rho) = n$. *Тогда* $\rho = \sigma^\dagger$, *где* σ *есть некоторая конгруэнция на* I_{n+1}/I_n *и* $\sigma^\dagger$ *определяется так же, как в теореме* 10.60.

Доказательство. Если $n = 1$, то ρ является отношением равенства, а если $n = |X|'$, то ρ является универсальной конгруэнцией. Поэтому $1 < n < |X|'$, откуда следует, что I_n есть собственный идеал из $\mathcal{T}_X$. В силу леммы 10.67 для любого элемента α конечного ранга, большего n, из включения $(\beta, \alpha) \in \rho$ вытекает $\beta = \alpha$. Предположим, что α имеет бесконечный ранг и $(\alpha, \beta) \in \rho$. На основании теоремы 10.65 ранг α = ранг β. Пусть $\alpha \neq \beta$. Тогда существует такое $c \in X$, что $c\alpha \neq c\beta$. Мы можем следующим образом определить преобразование γ множества X. Положим $c\alpha = a$ и $c\beta = b$, и пусть γ отображает $(X \setminus X\alpha) \cup \{a, b\}$ тождественно на себя и отображает $X\alpha \setminus \{a, b\}$ на конечное множество, содержащее более n элементов. Тогда $c\alpha\gamma = a$ и $c\beta\gamma = b$, откуда $\alpha\gamma \neq \beta\gamma$. Кроме того, ранг $(\alpha\gamma)$ конечен и больше n и $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \in \rho$. Это противоречит ранее полученному утверждению. Следовательно, ρ индуцирует отношение равенства на множестве всех элементов ранга больше n.

Ограничение конгруэнции ρ на I_{n+1} является конгруэнцией на I_{n+1}, и, так как I_n есть ρ-класс, ρ индуцирует конгруэнцию σ на I_{n+1}/I_n. Теперь ясно, что ρ совпадает с $\sigma^{\dagger}$.

Доказанная теорема дает полное описание всех конгруэнций ρ на $\mathcal{T}_X$, для которых $\eta(\rho)$ конечно. В частности, если X конечно, то теорема дает описание всех конгруэнций на $\mathcal{T}_X$. Используя тот факт, что конгруэнции на конечной симметрической группе образуют цепь, легко установить, что структура конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ является цепью.

Обратимся теперь к случаю, когда $\eta(\rho)$ бесконечно. Ключевой здесь является следующая

Теорема 10.69. *Пусть ρ — конгруэнция на $\mathcal{T}_X$. Предположим, что существуют элементы α и β бесконечного ранга η, для которых* $\operatorname{dr}(\alpha, \beta) = \xi$ *и* $(\alpha, \beta) \in \rho$. *Тогда*

(i) *если ξ бесконечно, то*

$$(I_{\eta'} \times I_{\eta'}) \cap \Delta_{\xi'} \subseteq \rho;$$

(ii) *если ξ конечно и отлично от нуля, то*

$$(I_{\eta'} \times I_{\eta'}) \cap \Delta_{\aleph_0} \subseteq \rho.$$

Заметим, что включение, указанное в условии (i), выполняется и для конечного ξ; в этом случае условие (ii) является более сильным, нежели (i).

Прежде чем приступить к длинному доказательству этой теоремы, мы покажем, как из нее вытекает вторая часть теоремы Мальцева.

Для каждого кардинального числа λ, удовлетворяющего неравенствам $\eta(\rho) \leqslant \lambda \leqslant |X|$, через λ^* будем обозначать наименьшее кардинальное число, превосходящее каждое кардинальное число ξ, для которого существуют такие $\alpha, \beta \in \mathcal{T}_X$, что $(\alpha, \beta) \in \rho$,

$$\text{ранг } \alpha = \text{ранг } \beta = \lambda \quad \text{и} \quad \operatorname{dr}(\alpha, \beta) = \xi.$$

Лемма 10.70. *Пусть λ и μ — кардинальные числа из интервала* $[\eta(\rho), |X|]$. *Тогда* (i) $\lambda^* \leqslant \eta(\rho)$ *и* (ii) $\lambda < \mu$ *влечет за собой* $\mu^* \leqslant \lambda^*$.

Доказательство. (i) Предположим, от противного, что $\lambda^* > \eta(\rho)$. По определению λ^* должна существовать пара таких элементов α и β ранга λ из $\mathcal{T}_X$, что $(\alpha, \beta) \in \rho$ и $\xi = \operatorname{dr}(\alpha, \beta) \geqslant \eta(\rho)$. На основании теоремы 10.69 конгруэнция ρ содержит каждую пару из $I_{\lambda'} \times I_{\lambda'}$, ранг различия которой $\leqslant \xi$. Так как $\eta(\rho) \leqslant \xi$, получаем, что каждая пара элементов из $I_{\eta(\rho)'}$ принадлежит ρ, что противоречит определению числа $\eta(\rho)$.

(ii) Предположим, от противного, что $\lambda < \mu$ и $\lambda^* < \mu^*$. По определению μ^* существуют такие элементы α и β ранга μ из $\mathscr{T}_X$, что $(\alpha, \beta) \in \rho$ и $\lambda^* \leqslant \xi = \operatorname{dr}(\alpha, \beta) < \mu^*$. Ввиду утверждения (i) имеем $\mu^* \leqslant \eta(\rho)$, и поэтому $\xi < \eta(\rho) \leqslant \lambda < \mu$. Применяя лемму 10.63 (i) при $\eta_1 = \lambda$ и $\eta_2 = \mu$, получаем, что существует $\gamma \in \mathscr{T}_X$, для которого

$$\text{ранг } \alpha\gamma = \text{ранг } \beta\gamma = \lambda \quad \text{и} \quad \operatorname{dr}(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \xi.$$

Очевидно, $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \in \rho$, откуда вытекает $\xi < \lambda^*$, что противоречит неравенству $\lambda^* \leqslant \xi$.

Лемма 10.70 показывает, что $\lambda \to \lambda^*$ есть монотонное невозрастающее отображение интервала $[\eta(\rho), |X|]$ в интервал $[1, \eta(\rho)]$. Так как кардинальные числа вполне упорядочены, область значений этого отображения должна быть конечной. В самом деле, в противном случае она должна содержать бесконечную возрастающую последовательность $\lambda_1^* < \lambda_2^* < \ldots$, откуда вытекает существование бесконечной убывающей последовательности $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots$ кардинальных чисел. Обозначим область значений отображения $\lambda \to \lambda^*$ через $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k\}$, где $\xi_1 > > \xi_2 > \ldots > \xi_k$. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ через η_i обозначим наименьшее кардинальное число с тем свойством, что $\eta_i^* = \xi_i$. Для удобства будем считать, что $\eta_{k+1} = |X|'$, где $|X|'$ есть наименьшее кардинальное число, превосходящее $|X|$. Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} &\xi_k < \xi_{k-1} < \ldots < \xi_2 < \xi_1 \leqslant \eta(\rho) = \\ &= \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_k < \eta_{k+1} = |X|'. \end{aligned}$$

Будем называть $\{\xi_k, \ldots, \xi_1, \eta_1, \ldots, \eta_k\}$ *последовательностью кардинальных чисел конгруэнции* ρ. Заметим, что все ξ_i бесконечны, за исключением, быть может, ξ_k, и если ξ_k конечно, то $\xi_k = 1$. В самом деле, если $1 < \xi_i = r < \aleph_0$, то существуют два ρ-эквивалентных элемента ранга η_i, ранг различия которых отличен от нуля и равен $r - 1$. Тогда из теоремы 10.69 (ii) вытекает, что любые два элемента ранга η_i с конечным рангом различия ρ-эквивалентны. Это противоречит предположению о том, что ξ_i конечно.

Лемма 10.71. *Для каждого* λ *из интервала* $[\eta(\rho), |X|]$

$$\Delta_{\lambda^*} \cap (D_\lambda \times D_\lambda) \subseteq \rho.$$

Следовательно, если $\eta_i \leqslant \eta < \eta_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, *то*

$$\Delta_{\xi_i} \cap (D_\eta \times D_\eta) \subseteq \rho.$$

Доказательство. Пусть α и β — элементы ранга λ из $\mathscr{T}_X$, причем $\xi = \operatorname{dr}(\alpha, \beta) < \lambda^*$. По определению λ^* существуют такие элементы γ и δ ранга λ из $\mathscr{T}_X$, что $(\gamma, \delta) \in \rho$ и $\operatorname{dr}(\gamma, \delta) \geqslant \geqslant \xi$. В силу теоремы 10.69 имеем $(\alpha, \beta) \in \rho$.

По определению числа η_i

$$\eta_i \leqslant \eta < \eta_{i+1} \text{ влечет за собой } \eta^* = \xi_i \qquad (1 \leqslant i \leqslant k).$$

Теперь непосредственно из первого следует второе утверждение леммы.

Мы приходим теперь ко второй части теоремы Мальцева.

Теорема 10.72. *Пусть X — бесконечное множество, k — натуральное число и ξ_i, η_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ суть $2k$ кардинальных чисел, удовлетворяющих условиям:*

(i) $\xi_k < \xi_{k-1} < \ldots < \xi_1 \leqslant \eta_1 < \eta_2 < \ldots < \eta_k \leqslant |X|$;

(ii) *все ξ_i и η_i бесконечны, за исключением, быть может, ξ_k, и если ξ_k конечно, то $\xi_k = 1$.*

Определим отношение τ на $\mathscr{T}_X$, полагая

$$\tau = I^*_{\eta_1} \cup (\Delta_{\xi_1} \cap I^*_{\eta_2}) \cup \ldots \cup (\Delta_{\xi_{k-1}} \cap I^*_{\eta_k}) \cup \Delta_{\xi_k}.$$

Тогда τ является конгруэнцией на $\mathscr{T}_X$ и (i) *есть ее последовательность кардинальных чисел.*

Обратно, если ρ — такая конгруэнция на $\mathscr{T}_X$, отличная от универсальной конгруэнции, что $\eta(\rho)$ бесконечно, и если (i) *есть ее последовательность кардинальных чисел (где $\eta_1 = \eta(\rho)$), то ρ совпадает с определенным выше отношением τ.*

Доказательство. Для удобства положим $\xi_0 = |X|'$ и $\eta_{k+1} = |X|'$. Тогда Δ_{ξ_0} и $I^*_{\eta_{k+1}}$ являются универсальными конгруэнциями на $\mathscr{T}_X$ и мы можем записать

$$\tau = \bigcup_{i=0}^{k} (\Delta_{\xi_i} \cap I^*_{\eta_{i+1}}).$$

Ясно, что τ рефлексивно и симметрично. Докажем транзитивность. Пусть $(\alpha, \beta) \in \tau$ и $(\beta, \gamma) \in \tau$. Тогда $(\alpha, \beta) \in \Delta_{\xi_i} \cap I^*_{\eta_{i+1}}$ и $(\beta, \gamma) \in \in \Delta_{\xi_j} \cap I^*_{\eta_{j+1}}$ для некоторых i и j. Мы можем предположить, что $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$ и $i \leqslant j$.

Если ранги элементов α и β не равны, то ξ_i бесконечно, поскольку лишь ξ_k может быть конечным и в этом случае $\xi_k = 1$ и $\Delta_{\xi_k} = \iota$. Следовательно, если ранги элементов α и β различны и оба конечны, то в силу утверждения (i) леммы 10.62 оба они меньше ξ_i. Итак, в любом случае оба ранга меньше η_1. Аналогично, если ранги элементов β и γ не равны, то оба они меньше η_1. В этом случае мы имеем $(\alpha, \gamma) \in I^*_{\eta_1} \subseteq \tau$. Такое же заключение, очевидно, имеет место, если ранги элементов β и γ равны, так как ранг $\beta < \eta_1$.

Таким образом, мы можем предположить, что ранги элементов α, β, γ все равны η. Следовательно, ранг γ = ранг $\alpha < \eta_{i+1}$, поэтому $(\alpha, \gamma) \in I^*_{\eta_{i+1}}$. Из $i \leqslant j$ вытекает, что $\xi_i \geqslant \xi_j$ и $\Delta_{\xi_j} \subseteq \Delta_{\xi_i}$.

Отсюда $(\beta, \gamma) \in \Delta_{\xi_i}$. Поскольку Δ_{ξ_i} является конгруэнцией (лемма 10.61), имеем $(\alpha, \gamma) \in \Delta_{\xi_i}$. Следовательно, $(\alpha, \gamma) \in \Delta_{\xi_i} \cap$ $\cap I^*_{\eta_{i+1}} \subseteq \tau$.

Этим установлено, что τ есть отношение эквивалентности на $\mathcal{T}_X$. Но τ является объединением стабильных отношений, а именно конгруэнций $\Delta_{\xi_i} \cap I^*_{\eta_{i+1}}$, и поэтому само стабильно. Следовательно, τ есть конгруэнция на $\mathcal{T}_X$.

Так как $I^*_{\eta_1} \subseteq \tau$, мы знаем, что $\eta(\tau) \geqslant \eta_1$. Докажем, что $\eta_1 = \eta(\tau)$. Пусть $\alpha \in K_\tau$. Тогда $(\alpha, \zeta_a) \in \tau$ для некоторого $\zeta_a \in D_1$ ($x\zeta_a = a$ для всех $x \in X$). Мы докажем, что $\eta =$ ранг $\alpha < \eta_1$. Предположим, от противного, что $\eta \geqslant \eta_1$. Тогда $(\alpha, \zeta_a) \in \Delta_{\xi_i} \cap$ $\cap I^*_{\eta_{i+1}}$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant k)$, и мы можем предположить, что i выбрано таким образом, что $\eta_i \leqslant \eta < \eta_{i+1}$. Пусть $X_0 =$ $= X_0(\alpha, \zeta_a)$. Тогда $|X_0\alpha| < \xi_i \leqslant \eta_i \leqslant \eta$, так что $|X\alpha \setminus X_0\alpha| =$ $= \eta$. Но $y \in X\alpha \setminus X_0\alpha$ влечет за собой $y = x\alpha$, где $x \notin X_0$, поэтому $y = x\alpha = x\zeta_a = a$, откуда $\eta = 1$, что противоречит неравенству $\eta \geqslant \eta_1$ и предположению о том, что η_1 бесконечно.

Докажем теперь, что если $\eta_i \leqslant \eta < \eta_{i+1}$ $(1 \leqslant i \leqslant k)$, то $\eta^* = \xi_i$. Предположим, что $(\alpha, \beta) \in \tau$ и ранг $\alpha =$ ранг $\beta = \eta$. Тогда $(\alpha, \beta) \in I^*_{\eta_{i+1}}$ и по определению отношения τ для некоторого j $(0 \leqslant j \leqslant k)$ имеем $(\alpha, \beta) \in \Delta_{\xi_j} \cap I^*_{\eta_{j+1}}$. Так как $(\alpha, \beta) \notin$ $\notin I^*_{\eta_i}$, $\Delta_{\xi_i} \supseteq \Delta_{\xi_j}$ и $I^*_{\eta_{i+1}} \subseteq I^*_{\eta_{j+1}}$ для $i \leqslant j$, мы получаем, что $(\alpha, \beta) \in \Delta_{\xi_i} \cap I^*_{\eta_{i+1}}$. Таким образом, $\mathrm{dr}(\alpha, \beta) < \xi_i$. Пусть ξ — произвольное кардинальное число, меньшее ξ_i. На основании леммы 10.63 (ii) существуют такие γ и δ в $\mathcal{T}_X$, что

$$\text{ранг } \gamma = \text{ранг } \delta = \eta, \quad \mathrm{dr}(\gamma, \delta) = \xi,$$

и поэтому $(\gamma, \delta) \in \Delta_{\xi_i} \cap I^*_{\eta_{i+1}}$. Следовательно, ξ_i есть наименьшее кардинальное число, превосходящее $\mathrm{dr}(\alpha, \beta)$ для всех $(\alpha, \beta) \in$ $\in \tau \cap (D_\eta \times D_\eta)$, т. е. $\xi_i = \eta^*$.

Предыдущее также показывает, что η_i есть наименьшее из кардинальных чисел, для которых $\eta^* = \xi_i$, откуда вытекает, что (i) является последовательностью кардинальных чисел конгруэнции τ.

Перейдем теперь к обратному утверждению. Пусть ρ — конгруэнция на $\mathcal{T}_X$, для которой $\eta_1 = \eta(\rho)$ бесконечно. Предположим, что ρ отлично от универсальной конгруэнции, так что $\eta_1 \leqslant$ $\leqslant |X|$. Пусть (i) есть последовательность кардинальных чисел конгруэнции ρ. Положим снова $\eta_{k+1} = |X|'$. Мы должны доказать, что $\rho = \tau$.

Покажем сначала, что $\rho \subseteq \tau$. Пусть $(\alpha, \beta) \in \rho$. В силу теоремы 10.65 либо $(\alpha, \beta) \in I^*_{\eta_1} \subseteq \tau$, либо ранг $\alpha =$ ранг $\beta = \eta$, где $\eta \geqslant \eta_1$. В последнем случае $\eta_i \leqslant \eta < \eta_{i+1}$ для некоторого i

$(1 \leqslant i \leqslant k)$. По определению числа η^* имеем $\operatorname{dr}(\alpha, \beta) < \eta^*$. Но $\eta^* = \xi_i$. Следовательно, $(\alpha, \beta) \in \Delta_{\xi_i} \cap I^*_{\eta_{i+1}} \subseteq \tau$.

Обратно, пусть $(\alpha, \beta) \in \tau$. Если $(\alpha, \beta) \in I^*_{\eta_1}$, то $(\alpha, \beta) \in \rho$, поскольку $\eta_1 = \eta(\rho)$. В противном случае $(\alpha, \beta) \in \Delta_{\xi_i} \cap I^*_{\eta_{i+1}}$ для некоторого i $(1 \leqslant i \leqslant k)$. Теперь ранги элементов α и β не могут быть оба конечными, так как $(\alpha, \beta) \notin I^*_{\eta_1}$ и η_1 бесконечно. Предположим, что они не равны. Например, ранг $\alpha >$ ранг β. В силу леммы 10.62 (i) имеем $\xi = \operatorname{dr}(\alpha, \beta) =$ ранг α. Следовательно, ранг $\alpha < \xi_i \leqslant \eta_1$, что невозможно. Итак, ранг $\alpha =$ = ранг $\beta = \eta$. Мы можем считать, что i выбрано таким образом, что $\eta_i \leqslant \eta < \eta_{i+1}$. Но тогда $(\alpha, \beta) \in \Delta_\xi \cap (\mathscr{D}_\eta \times \mathscr{D}_\eta) \subseteq \rho$ по лемме 10.71.

Это завершает доказательство того, что теорема 10.72 вытекает из теоремы 10.69. Вернемся теперь к доказательству последней. Метод Мальцева состоял в том, чтобы шаг за шагом свести задачу к описанию нормальных делителей бесконечных симметрических групп, полученному Шрейером и Уламом [1933] для счетного случая и Бэром [1934] в общем случае. Первый шаг этого сведения приведен в нашем доказательстве теоремы 10.69, которое следует за леммой 10.76 ниже. Не найдя удовлетворяющего нас развернутого изложения метода Мальцева для остальных шагов, мы заменили их другими выкладками, не сводящими задачу к результатам Шрейера, Улама и Бэра. Наше доказательство распадается на ряд лемм.

В первоначальном доказательстве авторов две части теоремы 10.69 требовали последовательности из трех громоздких лемм. Авторы признательны Бакдейлу, предложившему лемму, которая привела к изложенному ниже доказательству леммы 10.73. Открытие этого доказательства существенно сократило доказательство утверждения теоремы 10.69. Соответствующее упрощение выкладок, содержащихся в леммах 10.74, 10.75 и 10.76, относящихся к утверждению (ii) теоремы 10.69, к сожалению, еще не найдено.

Лемма 10.73. *Пусть X — бесконечное множество и ρ — конгруэнция на $\mathscr{T}_X$. Если ρ содержит пару (α, β), для которой ранг различия ξ бесконечен, то $I_{\xi'} \times I_{\xi'} \subseteq \rho$ (т. е. $\xi < \eta(\rho)$).*

Доказательство. Пусть $X_0 = X_0 \cdot (\alpha, \beta)$. Тогда $\operatorname{dr}(\alpha, \beta) = \max \{|X_0\alpha|, |X_0\beta|\} = \xi$. Без ограничения общности можно предположить, что $|X_0\beta| = \xi$.

Пусть $\mathscr{F}$ — семейство всех таких подмножеств Y из X, что $Y\alpha \cap Y\beta = \varnothing$. Тогда $\mathscr{F}$ не пусто; в самом деле, оно содержит каждое множество $\{y\}$, где $y \in X_0$. Пусть $\mathscr{C}$ — цепь, содержащаяся в $\mathscr{F}$, и $Z = \bigcup \{Y \mid Y \in \mathscr{C}\}$. Тогда легко проверить, что $Z \in \mathscr{F}$, поэтому, применяя лемму Цорна, мы получаем, что $\mathscr{F}$ содержит максимальные элементы.

Пусть M — максимальный элемент из $\mathcal{F}$. Предположим, что $|M\alpha|$ или $|M\beta|$, для определенности пусть $|M\beta|$, больше или равно ξ. Пусть γ — некоторый элемент из $\mathcal{T}_X$, отображающий X на M, и δ — элемент из $\mathcal{T}_X$, который отображает $X \setminus M\alpha$ тождественно на себя и любой элемент из $M\alpha$ переводит в фиксированный элемент $a \in X$. Тогда $\gamma\alpha\delta = \zeta_a$, где ζ_a есть отображение, переводящее любой элемент из X в a. Так как $M\alpha \cap M\beta = \varnothing$, имеем $X\gamma\beta\delta = M\beta\delta = M\beta$, так что ранг $(\gamma\beta\delta) \geqslant \xi$. Далее, $(\alpha, \beta) \in \rho$ влечет за собой $(\gamma\alpha\delta, \gamma\beta\delta) \in \rho$, т. е. $(\zeta_a, \gamma\beta) \in \rho$. Следовательно, элемент $\gamma\beta$ ранга $\geqslant \xi$ принадлежит $K\rho$ (лемма 10.64), откуда $\xi < \eta(\rho)$.

Если $|M\alpha|$ и $|M\beta|$ оба меньше ξ, то положим $B = (M\alpha \cup M\beta)\beta^{-1} \cap X_0$ и $A = X_0 \setminus B$. Докажем, что $A \in \mathcal{F}$ и $|A\beta| = \xi$. Мы можем тогда рассуждать для множества A точно так же, как и для M в предыдущем абзаце, откуда снова будет следовать, что $\xi < \eta(\rho)$, и доказательство леммы будет завершено.

Заметим сначала, что если $x \in X_0$, то либо $x\alpha \in M\alpha \cup M\beta$, либо $x\beta \in M\alpha \cup M\beta$; в самом деле, так как M является максимальным элементом в $\mathcal{F}$, если $x \notin M$, то $(M\alpha \cup x\alpha) \cap (M\beta \cup x\beta) \neq \varnothing$. Следовательно, либо $x\alpha \in M\beta$, либо $x\beta \notin M\alpha$, поскольку $x\alpha \neq x\beta$. Таким образом, в силу того, что по определению A из включения $x \in A$ вытекает соотношение $x\beta \notin M\alpha \cup M\beta$, мы имеем $A\alpha \subseteq M\alpha \cup M\beta$ и $A\alpha \cap A\beta = \varnothing$. Следовательно, $A \in \mathcal{F}$. Кроме того, $B\beta = M\alpha \cup M\beta$ и поэтому $|B\beta| = |M\alpha \cup M\beta| < \xi$ и $|X_0\beta| = |(A \cup B)\beta| = |A\beta \cup B\beta| = \xi$. Таким образом, $|A\beta| = \xi$ и доказательство леммы закончено.

Следующая последовательность лемм ведет к доказательству утверждения (ii) теоремы 10.69.

Лемма 10.74. *Пусть X — множество мощности $\aleph_0$, ρ — конгруэнция на $\mathcal{T}_X$ и β — такой элемент из $\mathcal{T}_X$, что $(\iota_X, \beta) \in \rho$ и $\beta \neq \iota_X$, где ι_X есть единица полугруппы $\mathcal{T}_X$. Предположим далее, что β передвигает лишь конечное число элементов из X. Тогда ρ содержит каждую пару (ι_X, β'), где β' есть элемент из $\mathcal{T}_X$, который передвигает лишь конечное число элементов из X.*

Доказательство. Мы можем предположить, что β имеет бесконечный ранг, так как в противном случае на основании теоремы 10.65 конгруэнция ρ является универсальной. Так как β перемещает лишь конечное число элементов из X, множество F неподвижных точек отображения β бесконечно. В силу того что $\beta \neq \iota_X$, существует $x_0 \in X$, для которого $x_0\beta \neq x_0$.

Пусть теперь y_1 и y_2 — произвольные различные элементы из X и γ — элемент из $\mathcal{T}_X$, переводящий y_1 в x_0 и отображающий $X \setminus y_1$ взаимно однозначно на $F \setminus x_0\beta$. Определим следующим образом элемент δ из $\mathcal{T}_X$: δ действует на множестве $(F \setminus x_0\beta) \cup x_0$

как элемент, обратный к γ, и переводит все другие элементы из X в y_2. Таким образом,

$$x\delta = \begin{cases} x\gamma^{-1}, & \text{если } x \in F \text{ и } x \neq x_0\beta, \\ y_1, & \text{если } x = x_0, \\ y_2 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\gamma\delta = \iota_X$, $y_1\gamma\beta\delta = x_0\beta\delta = y_2$ и для $x \in X \setminus y_1$ имеем $x\gamma\beta\delta = x\gamma\delta = x$, так как $x\gamma \in F$ и β действует тождественно на F. Следовательно, ρ содержит $(\iota_X, \gamma\beta\delta)$, где $\gamma\beta\delta$ переводит y_1 в y_2 и оставляет остальные элементы из X на месте. Обозначим это преобразование через

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Так как y_1 и y_2 были произвольными различными элементами из X, конгруэнция ρ содержит все (ι_X, τ), где

$$\tau = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Множество S всех таких $\alpha \in \mathscr{T}_X$, что $(\iota_X, \alpha) \in \rho$, является подполугруппой из $\mathscr{T}_X$. Докажем, что S содержит каждый элемент из $\mathscr{T}_X$, который передвигает лишь конечное число элементов из X.

Заметим, что если $\alpha \in S$ и $\lambda\mu = \iota_X$, то $\lambda\alpha\mu \in S$; в самом деле, $(\iota_X, \alpha) \in \rho$ влечет за собой $(\iota_X, \lambda\alpha\mu) = (\lambda\iota_X\mu, \lambda\alpha\mu) \in \rho$.

Пусть x_1, x_2 — произвольные различные элементы из X. Докажем, что S содержит транспозицию $(x_1 x_2)$. Пусть y_1, y_2, y_3, y_4 — различные элементы из X, отличные от x_1 и x_2. Обозначим остальные элементы из X через z_1, z_2, z_3, $\ldots$. Положим

$$\lambda = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & z_1 & z_2 & z_3 \ldots \\ y_1 & y_2 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \ldots \end{pmatrix},$$

$$\mu = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & z_1 & z_2 & z_3 & z_4 & z_5 & z_6 & z_7 \ldots \\ z_1 & z_2 & x_1 & x_2 & x_2 & x_1 & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & z_1 & z_2 & z_3 \ldots \end{pmatrix}.$$

Тогда $\lambda\mu = \iota_X$ и

$$\lambda = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_3 y_4 \end{pmatrix} \mu = (x_1 x_2).$$

Так как S содержит

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_2 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 y_2 \\ y_3 y_4 \end{pmatrix},$$

она содержит также и $(x_1 \; x_2)$.

Приступим к доказательству (по индукции) того, что S содержит каждый элемент α из $\mathcal{T}_X$, который передвигает точно n элементов из $\mathcal{T}_X$ (n — конечное число). Мы доказали справедливость этого утверждения для $n = 1$. Предположим, что оно верно для $n - 1$, и пусть

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x'_1 & x'_2 & \dots & x'_n \end{pmatrix}.$$

Здесь элементы x_i в верхней строке различны и α оставляет на месте все остальные элементы из X.

Предположим, что некоторый элемент из верхней строки, например x_1, не встречается в нижней строке. Тогда

$$\alpha = \alpha' \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha' = \begin{pmatrix} x_2 & \dots & x_n \\ x'_2 & \dots & x'_n \end{pmatrix}.$$

По предположению индукции $\alpha' \in S$. Так как S содержит

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix},$$

она содержит также и α.

Предположим, что некоторый элемент из нижней строки, например x'_1, не встречается в верхней строке. Тогда

$$\alpha = \begin{pmatrix} x_1 \\ x'_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & \dots & x_n \\ x'_2 & \dots & x'_n \end{pmatrix}$$

и снова по предположению индукции $\alpha \in S$.

Следовательно, мы можем считать, что α индуцирует подстановку на множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Так как любая подстановка равна произведению транспозиций и все транспозиции содержатся в S, мы снова получаем, что $\alpha \in S$. Доказательство леммы закончено.

Лемма 10.75. *Пусть* $|X| = \aleph_0$ *и* ρ — *конгруэнция на* $\mathcal{T}_X$. *Предположим, что существует такая пара* ρ-*эквивалентных элементов* α, β *ранга* $\aleph_0$, *что* $\mathrm{dr}(\alpha, \beta)$ *конечен и не равен* 0. *Тогда* $\Delta_{\aleph_0} \subseteq \rho$.

Доказательство. Так как $\alpha \neq \beta$ и α и β имеют бесконечный ранг, на основании теоремы 10.68 $\eta(\rho) = \aleph_0$. Следовательно, для доказательства леммы достаточно рассмотреть лишь элементы бесконечного ранга из $\mathcal{T}_X$.

Пусть α и β удовлетворяют сформулированным условиям и $X\alpha = \{a_i \mid i \in I\}$. Положим $R_i = a_i\alpha^{-1}$. Пусть 1 — такой индекс из I, что R_1 содержит некоторый элемент r_1 из $X_0 = X_0(\alpha, \beta)$. Зафиксируем и для каждого из остальных $i \in I$ элемент $r_i \in R_i$. Пусть γ — взаимно однозначное отображение множества X на $\{r_i \mid i \in I\}$. Обозначим через x_i элемент, переходящий в r_i при отображении γ. Через δ обозначим отображение, переводящее a_i в x_i для каждого $i \in I$, а все остальные элементы из X (если таковые существуют) — в x_2, где 2 есть индекс из I, отличный от 1.

Тогда $x_i\gamma\alpha\delta = r_i\alpha\delta = a_i\delta = x_i$, поэтому $\gamma\alpha\delta = \iota_X$. Приступим к доказательству того, что $\gamma\beta\delta \neq \iota_X$. Мы имеем $x_1\gamma\beta\delta = r_1\beta\delta$. Так как $r_1 \in X_0$, получаем $r_1\beta \neq r_1\alpha = a_1$. Если $r_1\beta \in X\alpha$, то $r_1\beta = a_i$ для некоторого $i \in I \setminus 1$. Тогда $r_1\beta\delta = a_i\delta = x_i \neq x_1$. Если $r_1\beta \notin X\alpha$, то $r_1\beta\delta = x_2 \neq x_1$. В обоих случаях $x_1\gamma\beta\delta \neq x_1$, откуда $\gamma\beta\delta \neq \iota_X$.

Так как $\gamma\alpha\delta = \iota_X$, из $(\alpha, \beta) \in \rho$ вытекает $(\iota_X, \gamma\beta\delta) \in \rho$. Если $\gamma\beta\delta$ передвигает бесконечное число элементов из X, то, применяя лемму 10.73 к паре $(\iota_X, \gamma\beta\delta)$, мы заключаем, что ρ есть универсальная конгруэнция на $\mathscr{T}_X$, и утверждение леммы становится очевидным. Следовательно, можно предположить, что $\gamma\beta\delta$ передвигает лишь конечное число элементов из X. Но тогда, применяя лемму 10.74 к паре $(\iota_X, \gamma\beta\delta)$, мы получаем, что ρ содержит все пары (ι_X, λ), где λ есть произвольный элемент из $\mathscr{T}_X$, передвигающий лишь конечное число элементов. Следовательно, ρ содержит все пары (λ, μ), где λ и μ передвигают лишь конечное число элементов из X.

Пусть теперь (α', β') есть произвольная пара элементов бесконечного ранга из $\mathscr{T}_X$, для которых $\mathrm{dr}(\alpha', \beta')$ конечен. Покажем, что $(\alpha', \beta') \in \rho$, чем полностью завершится доказательство леммы.

Пусть $X_0 = X_0(\alpha', \beta')$. По предположению множество $D = X_0\alpha' \cup X_0\beta'$ конечно, в то время как $C = X\alpha' \cup X\beta'$ бесконечно. Пусть $D = \{c_1, c_2, \ldots, c_n\}$. Так как $D \subseteq C$, мы можем записать $C = \{c_1, c_2, \ldots, c_n, c_{n+1}, \ldots\}$.

Пусть $R_{ij} = \{x \in X \mid x\alpha' = c_i,\ x\beta' = c_j\}$. Если $x \in R_{ij}$ и $i \neq j$, то $x \in X_0$, поэтому $x\alpha'$ и $x\beta'$ принадлежат D, откуда $i \leqslant n$ и $j \leqslant n$. Следовательно, $R_{ij} = \varnothing$, если $i \neq j$ и либо $i > n$, либо $j > n$.

Из каждого непустого множества R_{ij} $(i, j \leqslant n)$ выберем по одному представителю r_{ij}. Через Q обозначим множество всех таких r_{ij}. Пусть $Y = X \setminus (D \cup Q)$. Так как множества D и Q конечны, Y бесконечно. Обозначим элементы из Y следующим образом: $Y = \{y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots\}$. Определим теперь элементы γ', δ', λ', μ' из $\mathscr{T}_X$, полагая:

$$\begin{cases} R_{ij}\gamma' = r_{ij} & (i, j \leqslant n,\ R_{ij} \neq \varnothing), \\ R_{ii}\gamma' = y_i & (i > n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\delta' = x & (x \in D \cup Q), \\ y_i\delta' = c_i & (i > n); \end{cases}$$

$$\begin{cases} r_{ij}\lambda' = c_i & (r_{ij} \in Q), \\ x\lambda' = x & (x \in X \setminus Q); \end{cases}$$
$$\begin{cases} r_{ij}\mu' = c_j & (r_{ij} \in Q), \\ x\mu' = x & (x \in X \setminus Q). \end{cases}$$

Тогда:

$$\begin{aligned} R_{ij}\gamma'\lambda'\delta' &= r_{ij}\lambda'\delta' = c_i\delta' = c_i = R_{ij}\alpha' && (i, j \leqslant n), \\ R_{ii}\gamma'\lambda'\delta' &= y_i\lambda'\delta' = y_i\delta' = c_i = R_{ii}\alpha' && (i > n); \\ R_{ij}\gamma'\mu'\delta' &= r_{ij}\mu'\delta' = c_j\delta' = c_j = R_{ij}\beta' && (i, j \leqslant n), \\ R_{ii}\gamma'\mu'\delta' &= y_i\mu'\delta' = y_i\delta' = c_i = R_{ii}\beta' && (i > n). \end{aligned}$$

Следовательно, $\gamma'\lambda'\delta' = \alpha'$ и $\gamma'\mu'\delta' = \beta'$. Но λ' и μ' передвигают лишь конечное число элементов из X и поэтому $(\lambda', \mu') \in \rho$. Так как ρ есть конгруэнция на $\mathscr{T}_X$, получаем $(\gamma'\lambda'\delta', \gamma'\mu'\delta') = (\alpha', \beta') \in \rho$. Доказательство леммы закончено.

В дальнейшем мы будем использовать обозначение

$$\alpha = \begin{pmatrix} P_i \\ a_i \end{pmatrix},$$

понимая под α элемент из $\mathscr{T}_X$, область значений которого равна $X\alpha = \{a_i\}$ и для которого $P_i = a_i\alpha^{-1}$. В целях экономии мы не будем выписывать множество индексов, которое пробегает i. Какое именно это множество, будет всегда ясно из контекста. В разных случаях у нас будут фигурировать различные индексные множества, но для обозначения переменных индексов мы будем использовать одну и ту же букву, например i, что не приведет к недоразумениям.

Лемма 10.76. *Пусть X — бесконечное множество и ρ — конгруэнция на $\mathscr{T}_X$. Предположим, что $(\alpha, \beta) \in \rho$, ранг α = ранг $\beta = \aleph_0$ и $\mathrm{dr}(\alpha, \beta)$ конечен и не равен 0. Тогда*

$$\Delta_{\aleph_0} \cap (I_{\aleph_0'} \times I_{\aleph_0'}) \subseteq \rho.$$

Доказательство. По теореме 10.68 $\eta(\rho)$ бесконечно, поэтому для доказательства леммы достаточно установить, что если ранг α' = ранг $\beta' = \aleph_0$ и $(\alpha', \beta') \in \Delta_{\aleph_0'}$, то $(\alpha', \beta') \in \rho$.

Пусть α, β удовлетворяют условиям леммы. Так как $\mathrm{dr}(\alpha, \beta) \neq 0$, существует такой элемент $x_0 \in X$, что $x_0\alpha \neq x_0\beta$. Пусть $x_0\alpha = a$ и $x_0\beta = b$. Тогда $x_0 \in X_0(\alpha, \beta)$ и a, $b \in C = X_0\alpha \cup X_0\beta$. Пусть $C = A \cup B$, где $A \cap B = \varnothing$ и $a \in A$, $b \in B$. По предположению C конечно, поэтому множество $F = X\alpha \setminus C = X\beta \setminus C$ счетно и бесконечно. Мы можем записать $F = \{f_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$.

Пусть δ — преобразование множества X, которое переводит A в f_1, B в f_2 и оставляет остальные элементы из X на месте. Тогда

$x_0\alpha\delta = a\delta = f_1$ и $x_0\beta\delta = b\delta = f_2$. Таким образом, $\alpha\delta \neq \beta\delta$. Очевидно, $\mathrm{dr}(\alpha\delta, \beta\delta) \leqslant 2$, и мы можем представить $\alpha\delta$ и $\beta\delta$ в виде

$$\alpha\delta = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \dots \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots \end{pmatrix},$$

$$\beta\delta = \begin{pmatrix} L_1 & L_2 & L_3 & \dots \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots \end{pmatrix}.$$

Так как $x_0\alpha\delta = f_1$, имеем $x_0 \in K_1$ и, аналогично, $x_0 \in L_2$. Возможно, что $K_2 = \varnothing$ или $L_1 = \varnothing$ (например, оба множества пусты, если $X_0 = \{x_0\}$). Множества K_j для $j > 2$ все не пусты.

Для каждого $j \neq 2$ выберем элемент $k_j \in K_j$ и, в частности, положим $k_1 = x_0$. Если $K_2 \neq \varnothing$, то возьмем также $k_2 \in K_2$. Положим

$$\gamma = \begin{pmatrix} K_j \\ k_j \end{pmatrix},$$

где индекс $j = 2$ опускается, если $K_2 = \varnothing$. Тогда $\gamma\alpha\delta = \alpha\delta$ и

$$\gamma\beta\delta = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \dots \\ f_1 & f_n & f_3 & \dots \end{pmatrix},$$

потому что $k_1 = x_0 \in L_2$. Здесь если $K_2 \neq \varnothing$, то $n = 1$ или 2; если $K_2 = \varnothing$, то столбец

$$\begin{pmatrix} K_2 \\ f_n \end{pmatrix}$$

можно опустить.

Если $K_2 \neq \varnothing$, то определим ε как элемент из $\mathscr{T}_X$, который переводит f_j в k_j для каждого j. Если $K_2 = \varnothing$, то в качестве ε возьмем элемент из $\mathscr{T}_X$, который переводит f_j в k_j для $j \neq 2$ и переводит f_2 в k_3. В первом случае

$$\gamma\alpha\delta\varepsilon = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \dots \\ k_1 & k_2 & k_3 & \dots \end{pmatrix},$$

$$\gamma\beta\delta\varepsilon = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \dots \\ k_1 & k_n & k_3 & \dots \end{pmatrix},$$

в то время как в последнем случае

$$\gamma\alpha\delta\varepsilon = \begin{pmatrix} K_1 & K_3 & K_4 & \dots \\ k_1 & k_3 & k_4 & \dots \end{pmatrix},$$

$$\gamma\beta\delta\varepsilon = \begin{pmatrix} K_1 & K_3 & K_4 & \dots \\ k_3 & k_3 & k_4 & \dots \end{pmatrix}$$

В обоих случаях $\gamma\alpha\delta\varepsilon$ и $\gamma\beta\delta\varepsilon$ являются ρ-эквивалентными элементами и их ранг различия конечен и не равен нулю.

Пусть $Y = \{k_j\}$ (где k_2 опускается, если $K_2 = \varnothing$). Обозначим через $\mathscr{T}_Y^*$ подмножество из $\mathscr{T}_X$, состоящее из таких элементов полугруппы $\mathscr{T}_X$, которые индуцируют отображение множества $\{K_j\}$ (где K_2 опускается, если $K_2 = \varnothing$) в Y. Тогда естественное отображение

$$\begin{pmatrix} K_j \\ k_{j\sigma} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} k_j \\ k_{j\sigma} \end{pmatrix},$$

(где $\sigma\colon j \to j\sigma$ есть произвольное преобразование множества $\{1, 2, 3, \ldots\}$ или множества $\{1, 3, 4, \ldots\}$ в случае, когда $K_2 = \varnothing$) является изоморфизмом $\mathscr{T}_Y^*$ на $\mathscr{T}_Y$.

Пусть ρ_Y — конгруэнция на $\mathscr{T}_Y$, соответствующая при этом изоморфизме конгруэнции $\rho \cap (\mathscr{T}_Y^* \times \mathscr{T}_Y^*)$ на $\mathscr{T}_Y^*$. Образы элементов $\gamma\alpha\delta\varepsilon$ и $\gamma\beta\delta\varepsilon$ являются ρ-эквивалентными элементами. Они оба имеют ранг $|Y| = \aleph_0$, и их ранг различия конечен и отличен от нуля. Тогда в силу леммы 10.75 любые два элемента ранга $\aleph_0$ из $\mathscr{T}_Y$, ранг различия которых конечен, ρ-эквивалентны. Отсюда получаем, что любые два элемента ранга $\aleph_0$ из $\mathscr{T}_Y^*$, ранг различия которых конечен, ρ-эквивалентны.

Для удобства запишем теперь $Y = \{y_j \mid j = 1, 2, \ldots\}$ и обозначим множество $y_j\gamma^{-1}$ через Y_j. Это даст нам возможность рассматривать случаи, когда $K_2 = \varnothing$ и $K_2 \neq \varnothing$, одновременно.

Пусть α' и β' — произвольные элементы ранга $\aleph_0$ из $\mathscr{T}_X$, для которых $\operatorname{dr}(\alpha', \beta')$ конечно. Положим

$$\alpha' = \begin{pmatrix} A_i \\ r_i \end{pmatrix}, \quad \beta' = \begin{pmatrix} B_i \\ s_i \end{pmatrix}.$$

Множество непустых пересечений $A_i \cap B_j$ счетно, поэтому оно находится во взаимно однозначном соответствии с множеством Y. Обозначим через y_{ij} элемент y_n из Y, соответствующий $A_i \cap B_j$, и пусть $Y_{ij} = Y_n$, если $y_{ij} = y_n$. Зафиксируем элемент d_{ij} в $A_i \cap B_j$ и положим

$$\theta = \begin{pmatrix} Y_{ij} \\ d_{ij} \end{pmatrix}, \quad \theta' = \begin{pmatrix} A_i \cap B_j \\ y_{ij} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\theta'\theta = \begin{pmatrix} A_i \cap B_j \\ d_{ij} \end{pmatrix}$$

и, так как $d_{ij}\alpha' = r_i$ и $d_{ij}\beta' = s_j$, имеем

$$\theta'\theta\alpha' = \begin{pmatrix} A_i \cap B_j \\ r_i \end{pmatrix} = \alpha'$$

$$\theta'\theta\beta' = \begin{pmatrix} A_i \cap B_j \\ s_j \end{pmatrix} = \beta'.$$

Далее,

$$\theta\alpha' = \begin{pmatrix} Y_{ij} \\ r_i \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \theta\beta' = \begin{pmatrix} Y_{ij} \\ s_j \end{pmatrix}$$

имеют те же области определения, что и α' и β' соответственно, т. е. имеют ранг $\aleph_0$ и конечный ранг различия, поскольку, вообще говоря,

$$\operatorname{dr}(\theta\alpha', \theta\beta') \leqslant \operatorname{dr}(\alpha', \beta').$$

Мы можем предположить, что $|X| > \aleph_0$, потому что в противном случае лемма 10.76 сводится к лемме 10.75. Следовательно, существует подстановка π множества X, которая отображает $X\alpha' \cup X\beta'$ на Y. Тогда $\theta\alpha'\pi$ и $\theta\beta'\pi$ принадлежат $\mathscr{T}_Y^*$, имеют ранг $\aleph_0$ и их ранг различия конечен, откуда $(\theta\alpha'\pi, \theta\beta'\pi) \in \rho$. Умножая на θ' слева и на π^{-1} справа, мы заключаем, что $(\alpha', \beta') \in \in \rho$. Это завершает доказательство леммы.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 10.69.

Доказательство теоремы 10.69. По предположению существуют такие элементы α и β бесконечного ранга η, что $\operatorname{dr}(\alpha, \beta) = \xi$ и $(\alpha, \beta) \in \rho$.

Пусть $X_0 = X_0(\alpha, \beta)$ и $C = X_0\alpha \cup X_0\beta$. Тогда $X\alpha \setminus C = X\beta \setminus C = D$. Пусть $C = \{c_i\}$, $D = \{d_j\}$, $M_i = c_i\alpha^{-1}$, $N_i = c_i\beta^{-1}$ и $R_j = d_j\alpha^{-1} = d_j\beta^{-1}$. Тогда мы можем записать, следуя соглашению, введенному перед леммой 10.76:

$$\alpha = \begin{pmatrix} M_i & R_j \\ c_i & d_j \end{pmatrix}, \tag{1}$$

$$\beta = \begin{pmatrix} N_i & R_j \\ c_i & d_j \end{pmatrix}. \tag{2}$$

В данном случае мы расширяем это соглашение, считая, что некоторые M_i и N_i могут быть пустыми (так как, например, некоторые из c_i не обязательно принадлежат $X\alpha$). Однако для любого заданного i по крайней мере одно из множеств M_i и N_i не пусто.

Для каждого j выберем элемент r_j из R_j. Пусть γ есть элемент из $\mathscr{T}_X$, который переводит d_j в r_j для каждого j и оставляет остальные элементы из X на месте. Тогда

$$\alpha\gamma = \begin{pmatrix} M_i & R_j \\ c_i & r_j \end{pmatrix}, \tag{3}$$

$$\beta\gamma = \begin{pmatrix} N_i & R_j \\ c_i & r_j \end{pmatrix}, \tag{4}$$

и эти элементы имеют ранг η и $\operatorname{dr}(\alpha\gamma, \beta\gamma) = \xi$.

Если C пересекается с множеством $\bigcup R_j$, то мы изменим наше обозначение, добавляя к C такие элементы r_j, что $R_j \cap C \neq \varnothing$. Если ξ бесконечно, то $|C|$ остается равным ξ. Если ξ конечно, то новое множество C остается конечным. Если C конечно, то мы произведем дальнейшее изменение: присоединим к C таким образом $\aleph_0$ элементов r_i, чтобы множество оставшихся r_i, не присоединенных к C, имело мощность η. Если $\eta > \aleph_0$, то последнее условие выполняется автоматически. Для нового множества C имеем $|C| = \aleph_0$. В этих обозначениях каждый элемент r_j, присоединенный к C, становится одним из c_i и ассоциированное с ним R_j становится соответственно одним из M_i в (3) и одним из N_i в (4). Если окажется, что $r_j \in C$, скажем $r_j = c_i$, то мы заменим M_i на $M_i \cup R_j$ и N_i на $N_i \cup R_j$.

Мы имеем $\bigcup M_i = \bigcup N_i$. Положим $M = \bigcup M_i$ и $R = \bigcup R_j$. Тогда $\alpha\gamma$ и $\beta\gamma$ принадлежат

$$\mathcal{T}^*_M = \{\varphi \in \mathcal{T}_X \mid M\varphi \subseteq M,\ R_j\varphi = r_j\}.$$

Если $\varphi \in \mathcal{T}^*_M$, то ограничение $\varphi \mid M$ отображения φ на M принадлежит $\mathcal{T}^*_M$ и $\varphi \to \varphi \mid M$ есть изоморфизм $\mathcal{T}^*_M$ на $\mathcal{T}_M$. Ограничение конгруэнции ρ на $\mathcal{T}^*_M$ определяет при этом изоморфизме конгруэнцию ρ_M на $\mathcal{T}_M$, для которой $(\varphi \mid M, \psi \mid M) \in \rho_M$ тогда и только тогда, когда

$$(\varphi, \psi) \in \rho \cap (\mathcal{T}^*_M \times \mathcal{T}^*_M).$$

Далее, $\alpha\gamma \mid M$ и $\beta\gamma \mid M$ являются ρ_M-эквивалентными элементами из $\mathcal{T}_M$, которые, если ξ бесконечно, имеют ранги, равные ξ, и ранг различия их равен ξ, а если ξ конечно, имеют ранги, равные $\aleph_0$, и конечный ранг различия. Таким образом, (i) если ξ бесконечно, то в силу леммы 10.73 любые два элемента ранга $\leqslant \xi$ из $\mathcal{T}_M$ являются ρ_M-эквивалентными, и (ii) если ξ конечно, то в силу леммы 10.76 любые элементы ранга $\aleph_0$ из $\mathcal{T}_M$, ранг различия которых конечен, ρ_M-эквивалентны. Рассуждения для случаев (i) и (ii) проведем отдельно.

(i) Так как $|M| \geqslant \xi$, существует такой элемент $\mu \in \mathcal{T}_M$, что

$$\mu = \begin{pmatrix} M'_i \\ m_i \end{pmatrix},$$

где $m_i \in M'_i$ для каждого i и где $|\{m_i\}| = \xi$. Этот элемент ρ_M-эквивалентен элементу

$$\begin{pmatrix} M \\ m_1 \end{pmatrix}.$$

Возвращаясь от $\mathcal{T}_M$ к $\mathcal{T}^*_M$, получаем

$$\begin{pmatrix} M'_i & R_j \\ m_i & r_j \end{pmatrix} \rho \begin{pmatrix} M & R_j \\ m_1 & r_j \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Если $|\{r_j\}| < \eta$ (что может иметь место лишь при $\xi = \eta$, так как ранг $\alpha\gamma = \eta$), то ранг одного из этих элементов равен η, а другого — меньше, чем η. Утверждение (i) теоремы 10.69 теперь непосредственно вытекает из теоремы 10.65. Остается рассмотреть случай, когда $|\{r_j\}| = \eta$.

Пусть $(\alpha', \beta') \in (I_{\eta'} \times I_{\eta'}) \cap \Delta_{\xi'}$. Применяя к α' и β' процедуру, использованную ранее для представления α и β в виде (1) и (2), мы можем представить α' и β' в форме

$$\alpha' = \begin{pmatrix} P_n & S_l \\ b_n & t_l \end{pmatrix},$$

$$\beta' = \begin{pmatrix} Q_n & S_l \\ b_n & t_l \end{pmatrix}.$$

Для каждого n по крайней мере одно из множеств P_n и Q_n не пусто. Заметим, что из наших обозначений не вытекает, что α' и β' имеют один и тот же ранг.

Так как ξ бесконечно, $|\{b_n\}| \leqslant \xi$. Поскольку также $|\{t_l\}| \leqslant \eta$, существует элемент $\delta \in \mathcal{T}_X$, который индуцирует взаимно однозначные отображения

$$b_n \to m_{i_n}, \quad t_l \to r_{j_l}$$

соответственно $\{b_n\}$ в $\{m_i\}$ и $\{t_l\}$ в $\{r_j\}$. Пусть ε — элемент из $\mathcal{T}_X$, который индуцирует отображения, обратные к этим отображениям.

Умножая (5) слева на

$$\alpha'\delta = \begin{pmatrix} P_n & S_l \\ m_{i_n} & r_{j_l} \end{pmatrix}$$

и полагая $P = \bigcup P_n$, мы получаем

$$\alpha'\delta \, \rho \begin{pmatrix} P & S_l \\ m_1 & r_{j_l} \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$\alpha' = \alpha'\delta\varepsilon \, \rho \begin{pmatrix} P & S_l \\ m_1\varepsilon & t_l \end{pmatrix}.$$

Аналогично,

$$\beta' = \beta'\delta\varepsilon \, \rho \begin{pmatrix} P & S_l \\ m_1\varepsilon & t_l \end{pmatrix},$$

так как $\bigcup Q_n = \bigcup P_n = P$. Отсюда вытекает $(\alpha', \beta') \in \rho$, и это завершает доказательство утверждения (i) теоремы 10.69.

(ii) ξ *конечно*. Пусть

$$(\alpha', \beta') \in (I_{\eta'} \times I_{\eta'}) \cap \Delta_{\aleph_0}.$$

Применяя указанную выше процедуру, мы можем записать

$$\alpha' = \begin{pmatrix} P_n & S_l \\ b_n & t_l \end{pmatrix},$$

$$\beta' = \begin{pmatrix} Q_n & S_l \\ b_n & t_l \end{pmatrix},$$

где $\{b_n\} = \{b_1, b_2, \ldots, b_k\}$, $|\{t_l\}| \leqslant \eta$ и $\operatorname{dr}(\alpha', \beta') \leqslant k$. Мы можем предположить, что $\operatorname{dr}(\alpha', \beta') \neq 0$. Как и раньше, P_n или Q_n может быть пусто, но для каждого n одно из множеств P_n и Q_n не пусто.

Теперь в силу леммы 10.76, как уже отмечалось, мы получаем, что любые два элемента ранга $\aleph_0$ из $\mathcal{T}_M$, ранг различия которых конечен, ρ_M-эквивалентны. Следовательно, так как $|M| \geqslant \aleph_0$, существуют ρ_M-эквивалентные элементы

$$\begin{pmatrix} M_1' & M_2' \ldots M_{k+1}' & M_{k+1+i}' \\ m_1 & m_2 \ldots m_{k+1} & m_{k+1+i} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} M_1' & M_2' \ldots M_{k+1}' & M_{k+1+i}' \\ m_1 & m_1 \ldots m_1 & m_{k+1+i} \end{pmatrix}$$

из $\mathcal{T}_M$, где $m_t \in M_t'$ для всех t ранга $\aleph_0$, которые, как показано, имеют ранг различия k. Возвращаясь от $\mathcal{T}_M$ к $\mathcal{T}_M^*$, получаем, что

$$\begin{pmatrix} M_1' \ldots M_{k+1}' & M_{k+1+i}' & R_j \\ m_1 \ldots m_{k+1} & m_{k+1+i} & r_j \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} M_1' \ldots M_{k+1}' & M_{k+1+i}' & R_j \\ m_1 \ldots m_1 & m_{k+1+i} & r_j \end{pmatrix}$$

являются ρ-эквивалентными элементами из $\mathcal{T}_X$. Напомним, что при построении M в случае, когда ξ конечно, мы условливались, что $|\{r_j\}| = \eta$ (которое по предположению $\geqslant \aleph_0$). Следовательно, существует элемент δ из $\mathcal{T}_X$, который индуцирует взаимно однозначные отображения

$$b_n \to m_n \quad (n = 1, 2, \ldots, k),$$
$$t_l \to r_{j_l}$$

множества $\{b_n\}$ в $\{m_n\}$ и $\{t_l\}$ в $\{r_j\}$ соответственно. Обозначим через ε элемент из $\mathcal{T}_X$, который индуцирует обратные отображения

$$m_n \to b_n \quad (n = 1, 2, \ldots, k),$$
$$r_{j_l} \to t_l$$

множества $\{m_n \mid n = 1, 2, \ldots, k\}$ в $\{b_n\}$ и множества $\{r_{j_l}\}$ в $\{t_l\}$.

Теперь мы можем закончить рассуждения, показав, что $(\alpha', \beta') \in \rho$, точно так же как это мы сделали при доказательстве утверждения (i).

Это завершает доказательство теоремы 10.69, а следовательно, и теоремы 10.72.

Теоремы Мальцева 10.68 и 10.72 вместе показывают, что структура конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ порождается конгруэнциями типа $\sigma^\dagger$ (в обозначениях теоремы 10.68), Δ_ξ и I^*_η. Мы уже отмечали, что если X конечно, то структура конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ является цепью. Вообще говоря, как мы покажем в следующей теореме, структура конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ является подструктурой структуры бинарных отношений на $\mathcal{T}_X$, т. е. структуры всех подмножеств множества $\mathcal{T}_X \times \mathcal{T}_X$. Насколько нам известно, этот результат еще не отмечался в литературе.

Теорема 10.77. *Структура конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ является подструктурой структуры всех бинарных отношений на $\mathcal{T}_X$. В частности, она является дистрибутивной структурой.*

Доказательство. В структуре конгруэнций на любой полугруппе операция пересечения совпадает с операцией теоретико-множественного пересечения. Для доказательства теоремы достаточно установить, что операция объединения в структуре конгруэнций на $\mathcal{T}_X$ совпадает с операцией теоретико-множественного объединения.

Пусть ρ, τ — две конгруэнции на $\mathcal{T}_X$. Обозначим через $\vee$ операцию объединения в структуре конгруэнций на $\mathcal{T}_X$, так что $\rho \vee \tau$ есть пересечение всех конгруэнций на $\mathcal{T}_X$, которые содержат ρ и τ. Мы должны установить, что $\rho \vee \tau = \rho \cup \tau$. Доказательство разобьем на несколько случаев.

(i) Если одно из отношений ρ и τ является отношением равенства или универсальной конгруэнцией, то ясно, что $\rho \vee \tau = \rho \cup \tau$.

(ii) Если $\eta(\rho) = n$ конечно (так что по теореме 10.68 $\rho = \sigma^\dagger$, где σ есть конгруэнция на I_{n+1}/I_n) и $\eta(\tau)$ бесконечно, то, поскольку $I^*_{\eta(\tau)} \subseteq \tau$ и потому $\rho \subseteq \tau$, мы имеем $\rho \vee \tau = \tau = \rho \cup \tau$.

(iii) Если $\eta(\rho) = n$ и $\eta(\tau) = m$ и оба числа m и n конечны, то $\rho = \sigma^\dagger$, где σ есть конгруэнция на I_{n+1}/I_n, и $\tau = \theta^\dagger$, где θ есть конгруэнция на I_{m+1}/I_m. Если $n < m$, то $\rho \subseteq \tau$ и поэтому $\rho \vee \tau = \rho \cup \tau = \tau$. Если $m = n$, то в силу теорем 10.68 и 10.69 одно из отношений ρ, τ содержится в другом, так как нормальные делители симметрической группы $\mathcal{G}_n$ образуют цепь.

(iv) Если $\eta(\rho)$ и $\eta(\tau)$ оба бесконечны, то, представляя ρ и τ в виде, заданном в теореме 10.72, и применяя дистрибутивный закон, мы можем записать $\rho \cup \tau$ как пересечение отношений типа I^*_η, Δ_ξ и $I^*_\eta \cup \Delta_\xi$, где η и ξ бесконечны. Если мы докажем, что $I^*_\eta \cup \Delta_\xi$ всегда является конгруэнцией на $\mathcal{T}_X$, то отсюда будет следовать, что $\rho \cup \tau$ есть конгруэнция на $\mathcal{T}_X$, и этого достаточно, чтобы установить равенство $\rho \vee \tau = \rho \cup \tau$.

Рассмотрим отношение $I^*_\eta \cup \Delta_\xi$. Если $\eta \leqslant \xi$, то ранг различия любых двух элементов из I_η меньше ξ и поэтому $I^*_\eta \subseteq \Delta_\xi$. Таким образом, $I^*_\eta \cup \Delta_\xi = \Delta_\xi$. Если $\xi < \eta$, то этот результат уже содержится в теореме 10.72 при $k = 1$.

Глава 11

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ МНОЖЕСТВА

В гл. 5 мы изложили теорию представлений полугрупп линейными преобразованиями векторного пространства. Здесь мы рассматриваем представления преобразованиями множества, не наделенного какой-либо структурой (в смысле Бурбаки). Это является расширением классической теории представлений групп подстановками множества. По этой теории мы рекомендуем книгу Цассенхауза [1937], тем более что она служила нам образцом.

Среди первых, кто рассматривал обобщение этой теории с групп на полугруппы, были А. К. Сушкевич [1922, 1926], Столл [1944], В. В. Вагнер [1956] и Е. С. Ляпин [1960b]. Материал настоящей главы взят главным образом из работ Тулли [1960], Шайна [1961, 1962] и Хёнке [1963, 1966] [1]).

* Авторы обязаны Б. М. Шайну за указание на пионерские работы А. К. Сушкевича. *

К упомянутому выше тесно примыкает рассмотрение представлений полугрупп частичными преобразованиями. Построению теории представлений инверсных полугрупп взаимно однозначными частичными преобразованиями положили начало В. В. Вагнер [1952] и Престон [1954c]. Эту теорию значительно расширил Б. М. Шайн [1962]. Детальное изложение последней работы было дано в гл. 7. В § 11.4 мы излагаем теорию Шайна [1961] представлений произвольной полугруппы взаимно однозначными частичными преобразованиями. Как отмечено В. В. Вагнером [1956], теорию частичных преобразований можно свести к теории полных (т. е. обычных) преобразований. В настоящей главе мы большей частью используем это сведéние, хотя не всегда естественно и удобно это делать. Нужно иметь в виду, что любой результат о представлениях полными преобразованиями, имеющими заданное множество неподвижных точек, может быть интерпретирован как результат о представлениях частичными преобразованиями, если удалить одну или более неподвижных точек.

---

[1]) Заметим, что в цитированных работах В. В. Вагнера, Е. С. Ляпина и Б. М. Шайна [1961] приводятся различные конструкции, описывающие все представления произвольной полугруппы. Эти результаты из общей теории представлений не отражены в настоящей главе.— *Прим. ред.*

Другая тесно примыкающая к рассматриваемому кругу вопросов тема — представления полугрупп мономиальными матрицами над группой с нулем, которые изучались в гл. 3. В § 11.8 мы указываем связь этих представлений с обычными представлениями. Как и в соответствующей теории для групп (Цассенхауз [1937], гл. V, § 1), любое неприводимое представление φ полугруппы S преобразованиями множества эквивалентно некоторому представлению этой полугруппы мономиальными по строкам матрицами над группой с нулем G^0, где G есть произвольная группа, которая антиизоморфна некоторой подгруппе группы операторных автоморфизмов операнда, ассоциированного с φ.

Понятие операнда есть очевидный аналог понятия пространства представления из гл. 5, и имеется такая же тесная связь между операндом и ассоциированным с ним представлением, как и между аналогичными понятиями для матричных представлений. Любое понятие, например «неприводимость», определяемое для одного из них, будет применяться к другому без пояснений.

§ 11.1. Основные определения

Представлением полугруппы S преобразованиями множества M называется любой гомоморфизм φ полугруппы S в $\mathcal{T}_M$, где $\mathcal{T}_M$ есть полная полугруппа преобразований на M (§ 1.3).

Правым операндом (или *правой S-системой*) *M_S над полугруппой S* мы называем множество M вместе с отображением $(x, a) \to xa$ множества $M \times S$ в M, удовлетворяющим условию

$$x(ab) = (xa)\,b \qquad (\text{для всех } x \in M;\ a, b \in S).$$

Двойственно, *левым операндом* $_SM$ мы называем множество M, на которое S действует слева:

$$(ab)\,x = a\,(bx) \quad (\text{для всех } x \in M;\ a, b \in S).$$

Так как мы главным образом будем рассматривать правые операнды, термин «операнд» будет использоваться в смысле «правый операнд».

Если задан операнд M_S над S, то мы получаем представление φ полугруппы S преобразованиями множества M, полагая

$$x\,(a\varphi) = xa \quad (\text{для всех } x \in M,\ a \in S).$$

Обратно, для заданного представления φ полугруппы S указанное равенство служит определением xa для всех $x \in M$ и $a \in S$, посредством чего M превращается в правый операнд M_S над S. Назовем φ *представлением, ассоциированным с операндом* M_S, а M_S — *операндом, ассоциированным с представлением* φ.

Если ${}_SM$ есть левый операнд над S и если мы определим отображение ψ: $S \to \mathcal{T}_M$, полагая

$$x\,(a\psi) = ax \quad (\text{для всех } x \in M,\ a \in S),$$

то

$$(ab)\,\psi = (b\psi)\,(a\psi) \quad (\text{для всех } a,\ b \in S).$$

Назовем ψ *антипредставлением* полугруппы S, *ассоциированным с* ${}_SM$. Обратно, если ψ есть антипредставление полугруппы S преобразованиями множества M, то равенство $ax = x\,(a\psi)$ превращает M в левый операнд ${}_SM$ над S.

Под *ядром* представления φ полугруппы S мы понимаем конгруэнцию $\varkappa = \varphi \circ \varphi^{-1}$. Представление φ называется *точным*, если $\varkappa = \iota_S$, где ι_S есть отношение равенства на S. Любое представление φ индуцирует точное представление φ' факторполугруппы $S/\varkappa$ (§ 1.5), определяемое равенством

$$(a\varkappa)\,\varphi' = a\varphi \quad (a \in S).$$

Образ $S\varphi$ полугруппы S является подполугруппой из $\mathcal{T}_M$, которая изоморфна $S/\varkappa$; в самом деле, φ' есть изоморфизм полугруппы $S/\varkappa$ на $S\varphi$.

Под *операторным гомоморфизмом* (или *S-гомоморфизмом*) θ: $M_S \to M'_S$ одного операнда M_S над S в другой операнд M'_S мы понимаем такое отображение θ: $M \to M'$, что

$$(xa)\,\theta = (x\theta)\,a \quad (\text{для всех } x \in M,\ a \in S).$$

Если θ есть взаимно однозначное отображение *на*, то мы называем его *операторным изоморфизмом* (или *S-изоморфизмом*), а операнды M_S, M'_S и ассоциированные с ними представления φ и φ' полугруппы S называем *эквивалентными*.

Операторными эндоморфизмами (или *S-эндоморфизмами*) операнда M_S являются операторные гомоморфизмы M_S в себя; *операторным автоморфизмом* (или *S-автоморфизмом*) операнда M_S называется операторный изоморфизм M_S на себя. Множество $\mathcal{E}\,(M_S)$ всех операторных эндоморфизмов операнда M_S является подполугруппой из $\mathcal{T}_M$; эта подполугруппа совпадает с *централизатором подполугруппы $S\varphi$ в $\mathcal{T}_M$*, т. е. с множеством всех элементов из $\mathcal{T}_M$, коммутирующих с каждым элементом из $S\varphi$. Множество $\mathcal{A}\,(M_S)$ всех операторных автоморфизмов операнда M_S совпадает с группой обратимых элементов (§ 1.7) из $\mathcal{E}\,(M_S)$. Если T — произвольная подполугруппа полугруппы, двойственной к $\mathcal{E}\,(M_S)$ (полугруппой, *двойственной к полугруппе S*, мы называем полугруппу $S\,(\circ)$, элементами которой являются элементы из S и в которой бинарная операция $\circ$ определена следующим образом: $a \circ b = ba$ для всех $a,\ b \in S$), то мы можем рассматривать M_S как $(T,\ S)$-биоперанд ${}_TM_S$, записывая θx вместо $x\theta$ ($x \in M$, $\theta \in T$). Мы проделаем это в § 11.8 для подполугруппы T, содержащейся в полугруппе, двойственной к $\mathcal{A}$ (M_S). (Определение биоперанда см. на следующей странице.)

Отношение эквивалентности σ на операнде M_S будем называть *операторной эквивалентностью*, или *S-эквивалентностью*, или *конгруэнцией*, если $x\sigma y$ $(x, y \in M)$ влечет за собой $xa\sigma ya$ для всех $a \in S$. *Фактороперанд* M_S/σ состоит по определению из всех σ-классов множества M, и произведение $x\sigma$ на любой элемент $a \in S$ задается равенством

$$(x\sigma)\, a = (xa)\, \sigma \qquad (x \in M,\ a \in S).$$

Это определение не зависит от выбора элемента x в σ-классе $x\sigma$; в самом деле, если $x\sigma = y\sigma$, то $x\sigma y$, откуда $xa\sigma ya$ и поэтому $(xa)\,\sigma = (ya)\,\sigma$.

Если ρ и σ — такие операторные эквивалентности на M_S, что $\rho \supseteq \sigma$, то мы можем определить отношение $\rho' = \rho/\sigma$ на $M'_S = M_S/\sigma$, полагая

$$\rho' = \{(x\sigma,\ y\sigma) \in M'_S \times M'_S \mid (x,\ y) \in \rho\}.$$

Легко видеть, что ρ' является операторной эквивалентностью на M'_S. Обратно, если ρ' есть операторная эквивалентность на M'_S и мы определим отношение ρ на M_S, полагая

$$\rho = \{(x,\ y) \in M_S \times M_S \mid (x\sigma,\ y\sigma) \in \rho'\},$$

то ρ будет операторной эквивалентностью на M_S, $\rho \supseteq \sigma$ и $\rho' = \rho/\sigma$.

Следующее утверждение аналогично утверждению (i) леммы 9.52.

Лемма 11.1. *Если σ есть операторная эквивалентность на операнде M_S над полугруппой S, то отображение $\rho \to \rho/\sigma$ является изоморфизмом структуры всех операторных эквивалентностей ρ на M_S, содержащих σ, и структуры всех операторных эквивалентностей на фактороперанде M_S/σ. Для любых $x, y \in M$ имеем $(x\sigma,\ y\sigma) \in \rho/\sigma$ тогда и только тогда, когда $(x,\ y) \in \rho$.*

Ряд результатов § 1.5 можно почти дословно перенести на эту (более общую) ситуацию. Для удобства ссылок мы сформулируем следующую теорему, объединяя аналог теоремы 1.5 (основной теоремы о гомоморфизмах) и аналог теоремы 1.6 (теоремы об индуцированном гомоморфизме).

Теорема 11.2. *Пусть θ — операторный гомоморфизм операнда M_S над полугруппой S на операнд M'_S над S. Тогда $\theta \circ \theta^{-1}$ есть операторная эквивалентность на M_S. Если σ — такая произвольная операторная эквивалентность на M_S, что $\sigma \subseteq \theta \circ \theta^{-1}$, то равенство $(x\sigma)\,\theta' = x\theta$ $(x \in M)$ определяет операторный гомоморфизм θ' фактороперанда M_S/σ на M'_S, для которого $\sigma^{\natural}\theta' = \theta$. Если $\sigma = \theta \circ \theta^{-1}$, то θ' является операторным изоморфизмом.*

Подмножество $N \neq \varnothing$ операнда M_S называется *инвариантным*, или *подоперандом*, или *S-подсистемой*, если $NS \subseteq N$; другими словами, если из включений $x \in N$ и $a \in S$ вытекает, что $xa \in N$. Множество N, конечно, также является операндом N_S над S. Если N состоит из одного элемента z, то $za = z$ для всех $a \in S$; такой элемент z мы называем *инвариантным* или *неподвижным* элементом из M (см. § 6.1).

Инвариантное подмножество N из M_S определяет следующую операторную эквивалентность ν на M: $x\nu y$ $(x, y \in M)$ тогда и только тогда, когда $x = y$ или x и y принадлежат N. Мы будем писать M_S/N вместо M_S/ν и будем называть этот фактороперанд по аналогии с § 1.5 *фактороперандом Риса* операнда M по N. Ясно, что в M_S/N элемент N является инвариантным.

Под *разложением* операнда M_S мы понимаем разбиение множества M на семейство $\{N_i \mid i \in I\}$ попарно не пересекающихся инвариантных подмножеств N_i. Говорят, что операнд M_S *неразложим*, если он не обладает разложениями, для которых $|I| > 1$. Обратно, если $\{N_i \mid i \in I\}$ есть семейство попарно не пересекающихся операндов над S, то их объединение $M = \bigcup N_i$ можно превратить в точности одним способом в такой операнд над S, что каждое N_i будет подоперандом из M_S.

Операнд M_S называется *транзитивным* (ср. § 6.1), если для каждой пары элементов $x, y \in M$ существует такой $a \in S$, что $xa = y$. Очевидно, операнд M_S транзитивен тогда и только тогда, когда M не содержит собственных инвариантных подмножеств. Транзитивный операнд, очевидно, неразложим.

Операнд M_S называется *унитальным*, если S имеет единицу 1 и $x1 = x$ для всех $x \in M$. В унитальном операнде обратимые элементы из S (§ 1.7) представляются подстановками множества M.

Пусть S и T — две полугруппы (не обязательно не пересекающиеся). Под *(S, T)-биоперандом* ${}_SM_T$ мы понимаем множество M, которое является левым операндом ${}_SM$ над S и правым операндом M_T над T, причем выполняется условие

$$(sx)\,t = s\,(xt) \qquad (\text{для всех } x \in M,\ s \in S,\ t \in T).$$

Общее значение выражений $(sx)\,t$ и $s\,(xt)$ мы будем обозначать через sxt. Подмножество N из M называется *инвариантным слева* [*справа*], если N инвариантно, когда M рассматривается как левый операнд ${}_SM$ [правый операнд M_T]; подмножество называется инвариантным, если оно инвариантно и слева, и справа. Отношение эквивалентности σ на M называется *левой* [*правой*] *операторной эквивалентностью* или *левой* [*правой*] *конгруэнцией* на M, если оно является операторной эквивалентностью на M, рассматриваемом как левый операнд ${}_SM$ [правый операнд M_T]; и σ называется *операторной эквивалентностью* или *конгруэнцией* на M, если оно является и левой, и правой конгруэнцией на M.

Если ${}_SM'_T$ — некоторый второй биоперанд, то отображение $\theta\colon M \to M'$ называется *операторным гомоморфизмом*, если $(sx)\,\theta = s\,(x\theta)$ для всех $s \in S$ и $x \in M$ и $(xt)\,\theta = (x\theta)\,t$ для всех $t \in T$ и $x \in M$. Биоперанд ${}_SM_T$ называется *транзитивным*, если для любых $x,\ y \in M$ существуют такие $s \in S$ и $t \in T$, что $sxt = y$. Биоперанд ${}_SM_T$ называется *унитальным*, если полугруппы S и T имеют единицы 1_S и 1_T, причем $1_Sx = x = x1_T$ для всех $x \in M$.

$(S,\ T)$-биоперанд ${}_SM_T$ определяет следующим образом правый операнд M_P над прямым произведением $P = S^* \times T$ полугруппы S^*, двойственной к S, и полугруппы T:

$$x\,(s,\ t) = sxt \qquad (\text{для всех } x \in M,\ s \in S,\ t \in T).$$

Назовем M_P правым операндом, *ассоциированным с* ${}_SM_T$. Если S и T обладают единицами, то существует взаимно однозначное соответствие между унитальными $(S,\ T)$-биоперандами и унитальными правыми операндами над $P = S^* \times T$ (упражнение 4 к настоящему параграфу). В этом важном случае понятия инвариантного подмножества, операторной эквивалентности, операторного гомоморфизма и транзитивности, определенные в предыдущем абзаце для $(S,\ T)$-биоперандов, легко видеть, эквивалентны соответствующим понятиям для ассоциированных с ними правых операндов. По этой причине мы не будем формулировать аналогов леммы 11.1 и теоремы 11.2 для биоперандов.

Полугруппа S относительно правого регулярного представления (§ 1.3) сама является операндом S_S. Аналогично, относительно левого регулярного антипредставления S является левым операндом ${}_SS$. Понятия, определенные выше для произвольного операнда M_S, сводятся в случае S_S $[{}_SS]$ к следующим понятиям:

операторная эквивалентность $\to$ правая [левая] конгруэнция,

инвариантное подмножество $\to$ правый [левый] идеал,

транзитивный операнд $\to$ простая справа [слева] полугруппа.

Мы можем также рассматривать S как $(S,\ S)$-биоперанд ${}_SS_S$. Тогда три указанных понятия сводятся соответственно к понятиям конгруэнции, идеала и простой полугруппы.

Под *центрированным операндом* M_S над полугруппой S мы понимаем операнд, содержащий единственный инвариантный элемент 0_M. Если операнд M_S центрирован и S имеет нуль 0_S, то $x0_S = 0_M$ для каждого $x \in M$. В самом деле, ясно, что $x0_S$ является инвариантным элементом из M.

Если M_S — центрированный операнд над полугруппой S с нулем, то каждое инвариантное подмножество N из M_S содержит 0_M и N_S также является центрированным операндом. Под 0-*разло-*

жением операнда M_S мы понимаем представление множества M в виде объединения $\bigcup \{N_i \mid i \in I\}$ инвариантных подмножеств N_i, попарно пересекающихся по 0_M. Под *0-неразложимым* операндом M_S мы понимаем операнд, не имеющий нетривиальных 0-разложений. Мы называем *0-транзитивным* такой операнд M_S, что для каждой пары элементов $x,\ y \in M \setminus 0_M$ существует элемент $a \in S$, для которого $xa = y$.

Операнд M_S называется *тривиальным*[1]), если $xa = x$ для всех $x \in M$ и $a \in S$; мы будем говорить также, что S *действует тождественно* (или *тривиально*) на M. Центрированный операнд называется *нулевым*, если $xa = 0_M$ для всех $x \in M$ и $a \in S$.

Под *частичным преобразованием* множества M мы понимаем такое бинарное отношение α на M, что для каждого $x \in M$ существует не более одного элемента $y \in M$, для которого $x\alpha y$. Если α и β — частичные преобразования множества M, то их композиция $\alpha \circ \beta$ также является частичным преобразованием (§ 1.4) и, следовательно, множество $\mathcal{PT}_M$ всех частичных преобразований множества M есть подполугруппа полугруппы $\mathcal{B}_M$ всех бинарных отношений на M. *Область определения* $D(\alpha)$ частичного преобразования α есть множество всех таких $x \in M$, что $x\alpha y$ для некоторого $y \in M$; мы пишем $y = x\alpha$. Мы можем рассматривать α как отображение множества $D(\alpha)$ в M или на его *область значений* $M\alpha = D(\alpha)\,\alpha$. Мы будем также обозначать $D(\alpha)$ через $M\alpha^{-1}$. Множество $D(\alpha \circ \beta)$ состоит из всех таких $x \in D(\alpha)$, что $x\alpha \in D(\beta)$; для таких x мы имеем $x(\alpha \circ \beta) = (x\alpha)\,\beta$. Частичное преобразование α называется *взаимно однозначным*, если $\alpha^{-1} \in \mathcal{PT}_M$; мы можем тогда рассматривать α как взаимно однозначное отображение множества $D(\alpha)$ на $M\alpha$ и α^{-1} как обратное отображение.

Теория частичных преобразований множества M может быть включена в теорию (обычных) преобразований множества $M^0 = M \cup 0_M$, состоящего из M и одного дополнительного элемента 0_M, посредством следующей процедуры (Вагнер [1956]). Для любого $\alpha \in \mathcal{PT}_M$ определим преобразование α^0 множества M^0, полагая

$$x\alpha^0 = \begin{cases} x\alpha, & \text{если } x \in D(\alpha), \\ 0_M, & \text{если } x \in M^0 \setminus D(\alpha). \end{cases}$$

Тогда α^0 принадлежит подполугруппе ${}^0\mathcal{T}_M$ полугруппы $\mathcal{T}_{M^0}$, состоящей из всех преобразований множества M^0, которые оставляют 0_M на месте. Обратно, если $\beta \in {}^0\mathcal{T}_M$, то его ограничение на M

$$\beta \mid M = \beta \cap (M \times M)$$

[1]) В оригинале наряду с этим термином употребляется также термин «неподвижный» (fixed).— *Прим. перев.*

является частичным преобразованием множества M. Область определения частичного преобразования $\beta \mid M$ есть множество всех $x \in M$, для которых $x\beta \neq 0_M$. Ясно, что отображения $\alpha \to \alpha^0$ и $\beta \to \beta \mid M$ являются взаимно обратными изоморфизмами полугрупп $\mathcal{PT}_M$ и ${}^0\mathcal{T}_M$ друг на друга.

Под *представлением полугруппы S частичными преобразованиями множества M* мы понимаем гомоморфизм φ полугруппы S в $\mathcal{PT}_M$. Если мы положим

$$xa = x(a\varphi) \qquad (x \in M,\ a \in S),$$

когда $x(a\varphi)$ определено, то M превратится в *частичный операнд над S*, в том смысле, что $x(ab)$ определено ($x \in M$, $a \in S$) тогда и только тогда, когда определены xa и $(xa)b$, и в этом случае

$$x(ab) = (xa)b.$$

Обратно, если M есть частичный операнд над S, то равенство $x(a\varphi) = xa$ определяет для каждого $a \in S$ такое частичное преобразование $a\varphi$ множества M, что отображение φ полугруппы S в $\mathcal{PT}_M$ является гомоморфизмом.

Теория представлений полугруппы S частичными преобразованиями может быть включена в теорию представлений полугруппы S обычными преобразованиями посредством упомянутой выше процедуры Вагнера. Это достигается вложением частичного операнда M в обычный операнд $M^0 = M \cup 0_M$, для которого мы определяем $xa = 0_M$, если xa не определено в M ($x \in M$, $a \in S$), и $0_M a = 0_M$ для всех $a \in S$. Обратно, если M^0 есть операнд над S с неподвижным элементом 0_M (не обязательно единственным), то $M = M^0 \setminus 0_M$ является частичным операндом над S.

В этой главе мы будем рассматривать почти исключительно центрированные операнды M_S над полугруппой S с нулем. Для полугрупп S с нулем это не ограничивает общности, так как каждый операнд над S однозначно разложим на центрированные операнды (см. упражнение 2 к настоящему параграфу). Если S — полугруппа без нуля, то мы можем его присоединить (§ 1.1); обозначим нуль через 0_S и положим $S^0 = S \cup 0_S$. Если M_S — центрированный операнд над S, то мы можем превратить M в центрированный операнд M_{S^0} над S^0, полагая $x0_S = 0_M$ для всех $x \in M$. Если M — произвольный операнд над S, то положим $M^0 = M \cup 0_M$ и определим $x0_S = 0_M a = 0_M 0_S = 0_M$ для всех $x \in M$, $a \in S$. Тогда M^0 становится центрированным операндом $M^0_{S^0}$ над S^0, который отличается от M_S тривиальным образом. Заметим, в частности, что $M^0_{S^0}$ является 0-транзитивным операндом тогда и только тогда, когда M транзитивен, и что существует взаимно однозначное соответствие между 0-разложениями операнда $M^0_{S^0}$ и разложениями операнда M_S.

Упражнения к § 11.1

1. Существует взаимно однозначное соответствие между разложениями операнда M_S над полугруппой S и такими операторными эквивалентностями σ на M, что $x\sigma xa$ для всех $x \in M$ и $a \in S$.

2. Каждый операнд M_S над полугруппой S с нулем 0_S однозначно разложим на центрированные операнды. Операторная эквивалентность σ на M, задающая это разложение, определяется так:

$$\sigma = \{(x, y) \in M \times M \mid x0_S = y0_S\}.$$

Операнд M_S над полугруппой S называется *раздуванием* операнда N_S, если N есть собственное инвариантное подмножество из M, обладающее следующим свойством. Каждому элементу $x \in N$ ставится в соответствие подмножество N_x из M, такое, что (i) $N_x \cap N = \{x\}$, (ii) $M = \bigcup \{N_x \mid x \in N\}$ и (iii) $xa = ya$ для всех $x \in N$, $y \in N_x$ и $a \in S$. Ясно, что для заданного N_S мы можем построить все раздувания M_S тривиальным образом: для каждого $x \in N$ выберем такое множество N_x, что все N_x попарно не пересекаются и $x \in N_x$; через M обозначим объединение всех N_x и условием (iii) определим действие полугруппы S на M.

Следующее упражнение взято из работы Тулли [1960]. Этот результат также приведен в книге Ляпина [1960а, стр. 32].

3. (а) Пусть M_S — операнд над полугруппой S и $\sigma = \{(x, y) \in \in M \times M \mid xa = ya$ для всех $a \in S\}$. Выберем такие представители $r(A)$ из каждого σ-класса A, что $r(A) \in MS$, если $A \cap MS \neq \neq \varnothing$. Пусть P — множество всех таких представителей $r(A)$ и $N = P \cup MS$. Каждому $x \in N$ поставим в соответствие множество N_x, полагая $N_x = \{x\} \cup \{x\sigma \setminus MS\}$, если $x \in P$, и $N_x = \{x\}$, если $x \notin P$. Тогда либо $N = M$, либо M_S есть раздувание операнда N_S и N_S не является раздуванием никакого собственного подоперанда.

(b) Операнд M_S есть раздувание собственного подоперанда тогда и только тогда, когда в обозначениях пункта (а) либо (i) существуют такие $x \in M \setminus MS$ и $y \in MS$, что $x\sigma y$, либо (ii) существует такой σ-класс A, содержащий более одного элемента, что $A \cap MS = \varnothing$.

4. Если S и T — полугруппы с единицами и $P = S^* \times T$, где S^* есть полугруппа, двойственная к S, то каждый унитальный правый операнд M_P над P является операндом, ассоциированным с некоторым унитальным биоперандом ${}_SM_T$.

5. Пусть S — подполугруппа полной полугруппы преобразований $\mathcal{T}_M$ на множестве M. Будем рассматривать M как (точный) операнд M_S над S. Для каждой операторной эквивалентности λ на M определим

$$\lambda^\dagger = \{(\alpha, \beta) \in S \times S \mid \alpha^{-1} \circ \beta \subseteq \lambda\}.$$

Тогда $\lambda^{\dagger}$ является конгруэнцией на S; а именно $\lambda^{\dagger}$ есть ядро представления полугруппы S, соответствующего фактороперанду M/λ. Если ρ — конгруэнция на S, то мы определим $\rho^{\downarrow}$ как пересечение всех таких операторных эквивалентностей λ на M, что $\rho \subseteq \lambda^{\dagger}$. Тогда

(i) $\lambda \subseteq \mu$ влечет за собой $\lambda^{\dagger} \subseteq \mu^{\dagger}$;

(ii) $\rho \subseteq \sigma$ влечет за собой $\rho^{\downarrow} \subseteq \sigma^{\downarrow}$;

(iii) $\lambda^{\dagger\downarrow} \subseteq \lambda$; (iv) $\rho \subseteq \rho^{\downarrow\dagger}$;

(v) $\rho^{\downarrow} \subseteq \lambda$ тогда и только тогда, когда $\rho \subseteq \lambda^{\dagger}$.

Назовем операторную эквивалентность $\lambda[\rho]$ *замкнутой*, если $\lambda^{\dagger\downarrow} = \lambda$ $[\rho^{\downarrow\dagger} = \rho]$. Тогда $(^{\dagger})$ является изоморфизмом структуры всех замкнутых операторных эквивалентностей операнда M на структуру всех замкнутых конгруэнций полугруппы S и отображение $(_{\downarrow})$ обратно к отображению $(^{\dagger})$. (Терстон [1952].)

§ 11.2. Разложение операнда; вполне приводимые операнды и полугруппы

В этом параграфе мы приводим теоретико-полугрупповой аналог классической теоремы о том, что каждое представление группы подстановками некоторого множества разложимо на транзитивные представления, и находим класс полугрупп, для которого выполняется эта классическая теорема (в подходящей формулировке). Как отмечено в конце предыдущего параграфа, мы рассматриваем только центрированные операнды над полугруппой с нулем.

Пусть M_S — центрированный операнд над полугруппой S с нулем 0_S. Если N есть произвольное инвариантное подмножество из M, то будем писать N^- вместо $N \setminus 0_M$.

Определим бинарное отношение τ на M^-, полагая

$$\tau = \{(x, y) \in M^- \times M^- \mid x = y \text{ или } xa = y \text{ для некоторого } a \in S\}.$$

Назовем τ *отношением транзитивности* на M^-. Под *отношением связности* τ^* на M^- мы понимаем наименьшее отношение эквивалентности на M^-, содержащее τ. Очевидно, $y\tau^*z$ $(y, z \in M^-)$ тогда и только тогда, когда $y = z$ или существует такая конечная последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M^-$, что $x_1 = y$, $x_n = z$ и $(x_i, x_{i+1}) \in \tau \cup \tau^{-1}$ для $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Для каждого $x \in M^-$ и каждого $a \in S$ либо $xa = 0_M$, либо $xa\tau^*x$. Отсюда вытекает, что $x\tau^* \cup 0_M$ является инвариантным подмножеством из M и

$$M = \bigcup \{x\tau^* \cup 0_M \mid x \in M^-\} \tag{1}$$

есть 0-разложение операнда M на инвариантные подмножества. Доказательство следующей теоремы покажет, что это 0-разложение является единственным 0-разложением операнда M на 0-неразложимые подоперанды. То утверждение теоремы, которое игнорирует слова в квадратных скобках (оно получается из другого утверждения, если присоединить 0_M, как описано в конце предыдущего параграфа), было впервые доказано Столлом [1944] для конечных операндов.

Теорема 11.3. *Каждый [центрированный] операнд над полугруппой [с нулем] однозначно разложим [0-разложим] на неразложимые [0-неразложимые] подоперанды.*

Доказательство. Скажем, что подмножество N центрированного операнда M_S над полугруппой S с нулем является *коинвариантным*, если одновременно N и $M \setminus N^-$ — инвариантные подмножества. Это эквивалентно тому, что N есть член некоторого 0-разложения операнда M на инвариантные подмножества и, следовательно, каждое $x\tau^* \cup 0_M$ $(x \in M^-)$ коинвариантно. Докажем, что если N коинвариантно и $y \in N^-$, то $y\tau^* \cup 0_M \subseteq N$.

Предположим противное, а именно, пусть существует $z \in M \setminus \setminus N^-$, для которого $y\tau^* z$. Очевидно, $y \neq z$, поэтому существует такая конечная последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \in M^-$, что $x_1 = y$, $x_n = z$ и $(x_i, x_{i+1}) \in \tau \cup \tau^{-1}$ для $i = 1, 2, \ldots \ldots, n-1$. Каждое x_i принадлежит либо N^-, либо $M^- \setminus N^-$ и, так как $x_1 \in N^-$ и $x_n \in M^- \setminus N^-$, должно существовать такое i, что $x_i \in N^-$ и $x_{i+1} \in M^- \setminus N^-$.

Но $(x_i, x_{i+1}) \in \tau$ влечет за собой $x_{i+1} \in N^-$, так как N инвариантно и $x_{i+1} \neq 0_M$. Аналогично, $(x_i, x_{i+1}) \in \tau^{-1}$ влечет за собой $x_i \in M^- \setminus N^-$, следовательно, мы пришли к противоречию.

Предыдущее показывает, что если N есть коинвариантное подмножество из M, то

$$N = \bigcup \{y\tau^* \cup 0_M \mid y \in N^-\}. \tag{2}$$

Следовательно, либо N сводится к одному множеству $y\tau^* \cup 0_M$, либо операнд N_S является 0-разложимым. Таким образом, (1) есть 0-разложение операнда M на 0-неразложимые подоперанды и в силу только что сделанного замечания такое 0-разложение единственно.

Выражение (2) показывает также, что произвольное 0-разложение операнда M можно получить, объединяя некоторые члены 0-разложения (1).

[Центрированный] операнд M_S называется *вполне приводимым* [*0-приводимым*], если он разложим [0-разложим] на транзитивные [0-транзитивные] подоперанды. Это, очевидно, эквивалентно тому, что неразложимые [0-неразложимые] конституенты операнда M_S являются транзитивными [0-транзитивными]. Полугруппа S называется *вполне приводимой справа*, если ее регулярный правый операнд S_S вполне приводим (ср. Вагнер [1957] и Шайн [1963]).

Следующий аналог Основной теоремы о представлениях полугрупповых алгебр (§ 5.1) принадлежит по существу Хёнке [1965]. Заметим, что из условия (А) теоремы вытекает, что каждый операнд M_S над S, для которого $MS = M$, вполне приводим [0-приводим]. Но последним условием нельзя было бы ограничиться, характеризуя полную приводимость [0-приводимость] полугруппы S, так как оно не выполняется для произвольной нильпотентной полугруппы. Условие (С) теоремы эквивалентно тому, что S совпадает со своим правым цоколем Σ_r (§ 6.3) и не содержит вырожденных 0-минимальных правых идеалов (§ 6.1).

Теорема 11.4. *Для любой полугруппы S [с нулем] следующие утверждения эквивалентны:*

(А) *Если M_S — произвольный [центрированный] операнд над S, то $(MS)_S$ вполне приводим [0-приводим].*

(В) *S вполне приводима [0-приводима] справа;*

(С) *S равна объединению своих минимальных [невырожденных 0-минимальных] правых идеалов.*

Если для полугруппы S выполняется одно из этих трех эквивалентных условий, то каждый транзитивный [0-транзитивный] операнд над S есть операторный гомоморфный образ некоторого минимального [0-минимального] правого идеала из S.

Доказательство. Мы докажем лишь утверждения, учитывающие слова в квадратных скобках; утверждения, игнорирующие эти слова, получаются из указанных, если присоединить 0_M (см. конец § 11.1).

Предположим, что справедливо утверждение (А). Пусть M_S — расширенный регулярный правый операнд $(S^1)_S$ полугруппы S (см. § 1.3). Тогда $(MS)_S$ совпадает с регулярным правым операндом S_S полугруппы S. Следовательно, (А) влечет за собой (В).

Из (В) вытекает, что S есть объединение своих 0-минимальных правых идеалов. Никакой 0-минимальный правый идеал R из S не может быть вырожденным; в самом деле, это означало бы, что $R = \{0, a\}$ и $aS = 0$, т. е. R_S был бы не 0-транзитивен. Таким образом, (В) влечет за собой (С).

Предположим, что выполняется (С). Пусть M_S — произвольный центрированный операнд над S и $\{R_i \mid i \in I\}$ — совокупность 0-минимальных правых идеалов из S. Ввиду (С) полугруппа S равна объединению R_i $(i \in I)$ и каждый R_i не вырожден. Если $x \in M \setminus 0_M$, то либо $xR_i = 0_M$, либо xR_i есть 0-транзитивное инвариантное подмножество из M. В самом деле, если $xa \in xR_i \setminus 0_M$ $(a \in R_i)$, то $aS = R_i$, так как R_i невырожден, и поэтому $(xa)S = xR_i$. Поскольку

$$MS = \bigcup \{xR_i \mid x \in M,\ i \in I\},$$

мы получаем, после удаления повторяющихся членов, 0-разложение операнда MS на 0-транзитивные инвариантные подмножества. Это доказывает утверждение (А).

Докажем последнее утверждение теоремы. Пусть S удовлетворяет условию (С) и M_S есть 0-транзитивный операнд над S. Тогда $M = xS$ для некоторого $x \in M$. Ввиду условия (С) должен существовать такой 0-минимальный правый идеал R из S, что $xR \neq 0_M$, и поэтому $xR = M$. Отображение $r \to xr$ является, очевидно, операторным гомоморфизмом R_S на M_S.

Упражнения к § 11.2

1. Пусть S — полугруппа левых нулей, M — некоторое множество и F — произвольное подмножество из M. Для каждого $a \in S$ через $a\varphi$ обозначим произвольную проекцию множества M на F[1]). Тогда φ есть представление полугруппы S и каждое представление этой полугруппы может быть получено таким способом.

2. Пусть $S = \{a, b\}$ — полугруппа левых нулей $(a \neq b)$, M — множество неотрицательных целых чисел. Положим

$$xa = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \text{ нечетно}, \\ x, & \text{если } x \text{ четно}; \end{cases}$$

$$xb = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \text{ нечетно}, \\ x, & \text{если } x \text{ четно}. \end{cases}$$

Получившийся операнд M_S неразложим и не является раздуванием никакого собственного подоперанда (см. упражнение 3 (b) к § 11.1). (Тулли [1960].)

3. Расширенное регулярное правое представление (§ 1.3) произвольной полугруппы неразложимо.

4. Для полугруппы S с единицей [и нулем] каждый [центрированный] унитальный операнд над S вполне приводим [0-приводим] тогда и только тогда, когда S является группой [с нулем].

5. Каждый подоперанд и каждый операторный гомоморфный образ вполне приводимого операнда вполне приводим. (Хёнке [1965].)

6. Пусть φ — представление полугруппы S частичными преобразованиями множества M и M_S — соответствующий частичный операнд над S. Пусть $M_S^0 = M_S \cup 0_M$, как определено в § 11.1. Мы скажем, что φ (и M_S) вполне приводимо, если M_S^0 вполне 0-приводимо. Представление φ вполне приводимо тогда и только

[1]) То есть F есть множество неподвижных точек преобразования $a\varphi$.— *Прим. перев.*

тогда, когда отношение транзитивности τ (на $(M^0)^- = M$) симметрично. (Вагнер [1957].)

7. Пусть $\{\varphi_i \mid i \in I\}$ — произвольное семейство представлений полугруппы S частичными преобразованиями. Тогда существует такая полугруппа T с нулем 0, содержащая S в качестве подполугруппы, что для каждого $i \in I$ существует правый идеал R_i из T, для которого φ_i эквивалентно представлению полугруппы S, ассоциированному с частичным операндом $R_i \setminus 0$ над S.

Любую такую полугруппу T можно построить следующим образом. Пусть M_i — частичный операнд над S, ассоциированный с φ_i. Выберем M_i так, чтобы они не пересекались друг с другом и с S. Пусть 0 — символ, не принадлежащий ни S, ни любому из M_i. Положим $T = \bigcup \{M_i \mid i \in I\} \cup S \cup 0$ и определим следующим образом произведение в T (где a, $b \in S$; $x_i \in M_i$); (i) ab имеет то же значение, что и в S; (ii) $x_i a$ имеет то же значение, что и в частичном операнде M_i, если оно там определено, и $x_i a = 0$ в противном случае; (iii) все остальные произведения положим равными 0. (Ляпин [1960b].)

§ 11.3. Строго циклические операнды и модулярные правые конгруэнции

Операнд M_S над полугруппой S называется [*строго*] *циклическим*, если существует $x \in M$, для которого $M = xS \cup x$ [$M = xS$]. Такой элемент x называется [*строго*] *порождающим* элементом операнда M_S.

Каждый транзитивный или 0-транзитивный операнд M_S является строго циклическим, причем любой элемент из $M \setminus 0_M$ строго порождает M_S. Если M_S — строго циклический операнд, то любой порождающий элемент является строго порождающим. Если M_S — циклический, но не строго циклический операнд, скажем $M = x \cup xS$, где $x \notin xS$, то x является единственным порождающим элементом операнда M.

Для любого циклического операнда M_S множество $I(M)$ не порождающих элементов из M либо пусто, либо инвариантно. Следующая лемма очевидна.

Лемма 11.5. *Пусть M_S — циклический операнд над полугруппой S. Если M_S — не строго циклический операнд, скажем $M = x \cup xS$, где $x \notin xS$, то $I(M) = xS$ и $M/I(M)$ есть нулевой операнд порядка 2. Предположим, что M_S есть строго циклический операнд. Если $I(M) = \varnothing$, то операнд M_S транзитивен. Если $I(M) \neq \varnothing$, то операнд $M/I(M)$ 0-транзитивен.*

Если M_S — произвольный операнд над S и $x \in M$, то $C_x = x \cup xS$ является циклическим подоперандом из M. Таким образом, как отмечалось Столлом [1944], *каждый операнд является* *объединением циклических операндов* (см. также упражнение 2 к настоящему параграфу). *Главными факторами* операнда M_S назовем операнды $C_x/I\,(C_x)$, считая, что $C_x/\varnothing = C_x$. Предыдущая лемма показывает, что каждый главный фактор является транзитивным операндом, 0-транзитивным операндом или нулевым операндом порядка 2. Важным является случай, когда $M_S = S_S$. Здесь $C_a = R\,(a) = a \cup aS$ $(a \in S)$ и $C_a \setminus I\,(C_a)$ совпадает с $\mathcal{R}$-классом R_a, содержащим a. Мы вернемся к этому случаю в § 11.8.

Правая конгруэнция ρ на полугруппе S называется *модулярной*, если существует такой элемент $e \in S$, что $ea\rho a$ для всех $a \in S$; этот элемент e называется *левой единицей полугруппы* S *по* $\mathrm{mod}\,\rho$. Напомним, что фактороперанд S_S/ρ, обозначение которого мы будем сокращать до S/ρ, состоит из множества ρ-классов $a\rho$ полугруппы S $(a \in S)$, причем умножение элемента $a\rho$ на элемент $b \in S$ задается равенством $(a\rho)\,b = (ab)\,\rho$. Конечно, если S имеет левую единицу, то каждая правая конгруэнция на S модулярна.

Следующая теорема, принадлежащая Тулли [1960, 1961], является естественным обобщением на полугруппы классической теоремы о том, что каждое транзитивное представление группы G подстановками эквивалентно представлению, полученному действием на множество правых смежных классов $\{Ha \mid a \in G\}$ по некоторой подгруппе H из G. Эта теорема была независимо доказана также Шайном [1961].

Теорема 11.6. *Пусть M_S — строго циклический операнд над полугруппой S и x — его строго порождающий элемент. Положим*

$$\rho = \{(a,\ b) \in S \times S \mid xa = xb\}.$$

Тогда ρ является модулярной правой конгруэнцией на S и операнд S/ρ эквивалентен M_S. Если $xe = x$, то e есть левая единица полугруппы S по $\mathrm{mod}\,\rho$.

Обратно, если ρ — модулярная правая конгруэнция на S, то S/ρ является строго циклическим операндом. Если e — левая единица S по $\mathrm{mod}\,\rho$, *то $e\rho$ строго порождает S/ρ. Множество левых единиц S по* $\mathrm{mod}\,\rho$ *есть унитарная слева подполугруппа из S, насыщенная по ρ (т. е. являющаяся объединением некоторых ρ-классов).*

Доказательство. Ясно, что ρ есть правая конгруэнция на S. Так как $x \in M = xS$, существует такой элемент $e \in S$, что $xe = x$. Если $xe = x$, то $xea = xa$ для всех $a \in S$, откуда $ea\rho a$ для всех $a \in S$. Таким образом, e есть левая единица S по $\mathrm{mod}\,\rho$ и правая конгруэнция ρ модулярна.

Определим отображение $\theta\colon S \to M$, полагая $a\theta = xa$. Это отображение является операторным гомоморфизмом S_S на M_S с ядром $\theta \circ \theta^{-1} = \rho$. На основании теоремы 11.2 отображение

$\theta' : S/\rho \to M$, заданное равенством $(a\rho)\,\theta' = a\theta$ $(a \in S)$, есть операторный изоморфизм. Следовательно, S/ρ и M_S эквивалентны.

Обратно, пусть ρ — модулярная правая конгруэнция на S и e — левая единица S по mod ρ. Тогда $(e\rho)\,a = (ea)\,\rho = a\rho$ для любого $a \in S$. Следовательно, $e\rho$ строго порождает S/ρ и S/ρ является строго циклическим операндом. Пусть U — множество левых единиц S по mod ρ. Если e и f принадлежат U, то $efa\rho fa\rho a$ для всех $a \in S$, поэтому $ef \in S$. Если $e \in U$, $s \in S$ и $es \in U$, то $sa\rho esa\rho a$ для всех $a \in S$, поэтому $s \in U$. Таким образом, U — унитарная слева подполугруппа. Если $e \in U$, $s \in S$ и $e\rho s$, то $ea\rho sa$ для всех $a \in S$, откуда $sa\rho ea\rho a$. Таким образом, $s \in U$; это показывает, что U насыщена по ρ.

Пусть ρ — правая конгруэнция на полугруппе S. Элемент $c \in S$ будем называть *обратимым справа по* mod ρ, если для каждого $a \in S$ существует такой элемент $s \in S$, что $cs\rho a$. В частности, любая левая единица S по mod ρ есть обратимый справа элемент по mod ρ. Очевидно, c является обратимым справа элементом из S по mod ρ тогда и только тогда, когда $c\rho$ строго порождает S/ρ.

Теперь мы можем сформулировать следующий результат (Шайн [1963].)

Следствие 11.7. *Все транзитивные представления полугруппы S получаются из операндов вида S/ρ, где ρ есть модулярная правая конгруэнция на S, для которой каждый элемент из S является обратимым справа элементом по* mod ρ. *Все 0-транзитивные представления полугруппы S получаются из операндов вида S/ρ, где ρ есть модулярная правая конгруэнция на S, один из классов эквивалентности W которой является правым идеалом в S и каждый элемент из $S \setminus W$ есть обратимый справа элемент по* mod ρ.

Если ρ — модулярная правая конгруэнция на S, то ядро $\varphi \circ \varphi^{-1}$ представления φ полугруппы S, ассоциированного с операндом S/ρ, совпадает с отношением ρL, введенным в § 10.1:

$$\rho L = \{(a,\ b) \in S \times S \mid sa\rho sb \text{ для всех } s \in S^1\}.$$

В самом деле, $(s\rho)\,(a\varphi) = (sa)\,\rho$ и поэтому $a\varphi = b\varphi$ тогда и только тогда, когда $(sa)\,\rho = (sb)\,\rho$ для всех $s \in S$. Взяв в качестве s любую левую единицу S по mod ρ, мы заключаем, что $a\rho = b\rho$, т. е. S можно заменить на S^1. В силу леммы 10.3 (или непосредственно) мы видим, что ρL есть наибольшая конгруэнция (а также наибольшая левая конгруэнция) на S, содержащаяся в ρ. В частности, S/ρ *является точным операндом тогда и только тогда, когда ρ не содержит* [*левых*] *конгруэнций, отличных от* ι.

Назовем ρL *ядром* модулярной правой конгруэнции ρ. Если S — группа и ρ — правая конгруэнция по подгруппе H из S.

то ρL есть конгруэнция по наибольшей инвариантной подгруппе из S, содержащейся в H (равной пересечению всех подгрупп, сопряженных с H).

Обращаясь к задаче нахождения полного семейства неэквивалентных строго циклических (в частности, транзитивных и 0-транзитивных) представлений полугруппы S и учитывая теорему 11.6, поставим следующий естественный вопрос: когда двум модулярным правым конгруэнциям на S соответствуют эквивалентные операнды? Один из ответов на этот вопрос дается ниже теоремой 11.10. Результаты оставшейся части параграфа являются новыми.

Если ρ — правая конгруэнция на S и $c \in S$, то

$$\rho^c = \{(s, t) \in S \times S \mid (cs, ct) \in \rho\}$$

также является правой конгруэнцией на S [1]). Если c — обратимый справа элемент из S по $\operatorname{mod} \rho$, то мы называем ρ^c правой конгруэнцией, *сопряженной* с ρ. Заметим, что $(\rho^c)^d = \rho^{cd}$ $(c, d \in \in S)$ и из $c\rho d$ следует, что $\rho^c = \rho^d$.

Лемма 11.8. *Пусть ρ — модулярная правая конгруэнция на полугруппе S и c — обратимый справа элемент из S по* $\operatorname{mod} \rho$. *Тогда ρ^c также является модулярной правой конгруэнцией на S и отображение θ: $S/\rho^c \to S/\rho$, заданное равенством $(s\rho^c)\,\theta = = (cs)\,\rho$, есть операторный изоморфизм.*

Отношение сопряженности есть отношение эквивалентности на множестве модулярных правых конгруэнций на S.

Доказательство. Так как c есть обратимый справа элемент из S по $\operatorname{mod} \rho$, мы можем найти $f \in S$, для которого $cf\rho c$. Тогда $cfa\rho ca$ для любого $a \in S$, поэтому $fa\rho^c a$. Следовательно, f есть левая единица из S по $\operatorname{mod} \rho^c$, т. е. ρ^c модулярна.

Докажем, что θ — взаимно однозначное отображение. В самом деле, заметим, что равенства $s\rho^c = t\rho^c$ и $(cs)\,\rho = (ct)\,\rho$ эквивалентны, так как первое равносильно тому, что $s\rho^c t$, а последнее — тому, что $cs\rho ct$. Для заданного $a \in S$ мы можем найти такой $s \in S$, что $cs\rho a$, т. е. $(s\rho^c)\,\theta = a\rho$. Следовательно, θ есть отображение *на*. Если $a, s \in S$, то

$$((s\rho^c)\,a)\,\theta = ((sa)\,\rho^c)\,\theta = (csa)\rho = ((cs)\,\rho)\,a = ((s\rho^c)\,\theta)\,a,$$

т. е. θ является операторным изоморфизмом.

Пусть ρ — модулярная правая конгруэнция на S и e — левая единица из S по $\operatorname{mod} \rho$. Тогда $ea\rho a$ для всех $a \in S$, поэтому $a\rho b$ эквивалентно $ea\rho eb$. Следовательно, $\rho^e = \rho$. Так как e является

[1]) Авторы называют эту правую конгруэнцию *трансляцией* (translate) конгруэнции ρ при помощи c, но далее этим термином нигде не пользуются.— *Прим. перев.*

обратимым справа элементом по mod ρ, это показывает, что ρ сопряжена с самой собой.

Пусть ρ^c — правая конгруэнция, сопряженная с ρ, и $(\rho^c)^d$ — правая конгруэнция, сопряженная с ρ^c, где c $[d]$ есть обратимый справа элемент из S по mod ρ $[\rho^c]$. Так как $(\rho^c)^d = \rho^{cd}$, транзитивность будет установлена, если мы докажем, что cd является также обратимым справа элементом по mod ρ. Пусть $a \in S$. Найдем такое $t \in S$, что $ct\rho a$, а затем найдем такое $s \in S$, что $ds\rho^c t$. Тогда $cds\rho ct\rho a$, так что s удовлетворяет соотношению $(cd)\, s\rho a$.

Наконец, докажем симметричность. Пусть ρ^c — правая конгруэнция, сопряженная с ρ. Найдем d, для которого $cd\rho e$, где e есть некоторая левая единица из S по mod ρ. Тогда $(\rho^c)^d = \rho^e = \rho$. Для завершения доказательства достаточно установить, что конгруэнция ρ сопряжена с ρ^c. Мы должны показать, что d есть обратимый справа элемент по mod ρ^c. Пусть $a \in S$ и $s = ca$. Тогда $cds\rho es\rho s = ca$, так что $ds\rho^c a$.

Лемма 11.9. *Если ρ и σ — такие модулярные правые конгруэнции на полугруппе S, что $S/\rho \cong S/\sigma$, то ρ и σ сопряжены.*

Доказательство. Пусть θ — операторный изоморфизм полугруппы S/σ на S/ρ и e — левая единица из S по mod σ. Выберем такой элемент $c \in (e\sigma)\,\theta$, что $(e\sigma)\,\theta = c\rho$. Тогда для любого $s \in S$ имеем

$$(s\sigma)\,\theta = ((es)\,\sigma)\,\theta = ((e\sigma)\,s)\,\theta = ((e\sigma)\,\theta)\,s = (c\rho)\,s = (cs)\,\rho.$$

Так как θ взаимно однозначен, $s\sigma = t\sigma$ $(s,\ t \in S)$ эквивалентно $(cs)\,\rho\,(ct)$. Это показывает, что $\sigma = \rho^c$. Так как θ есть отображение *на*, для заданного $a \in S$ существует такое $s \in S$, что $(s\sigma)\,\theta = a\rho$, откуда $cs\rho a$. Следовательно, c является обратимым справа элементом по mod ρ, т. е. $\sigma = \rho^c$ сопряжено с ρ.

Из теоремы 11.6 и лемм 11.8 и 11.9 непосредственно вытекает

Теорема 11.10. *Каждый строго циклический операнд над S эквивалентен S/ρ для некоторой модулярной правой конгруэнции ρ на S. Для модулярных правых конгруэнций ρ и σ на S операнды S/ρ и S/σ эквивалентны тогда и только тогда, когда ρ и σ сопряжены.*

Упражнения к § 11.3

1. Пусть S — полугруппа $\{a,\ b,\ 0\}$, где $a^2 = a$, $ba = b$ и все остальные произведения по определению равны 0. Пусть ρ $[\sigma]$ — правая конгруэнция на S, заданная разбиением $S = A \cup B$ $[S = C \cup Z]$, где

$$A = \{a\},\quad B = \{b,\ 0\},\quad C = \{a,\ b\},\quad Z = \{0\}.$$

Тогда S/ρ и S/σ являются эквивалентными операндами, хотя конгруэнция ρ модулярна, а σ не модулярна.

2. Пусть M_S — частичный операнд над полугруппой S и τ — отношение транзитивности на M (§ 11.2). Подмножество N из M называется *плотным*[1]), если $N\tau = M$. *Весом* частичного операнда M_S называется такое наименьшее кардинальное число w, что существует плотное подмножество из M мощности w.

(a) M_S является циклическим операндом тогда и только тогда, когда его вес равен 1.

(b) Любой частичный операнд веса w есть объединение w подоперандов веса 1. (См. Вагнер [1956].)

3. Строго циклический операнд над вполне простой полугруппой транзитивен. (См. Столл [1944].)

§ 11.4. Представления взаимно однозначными частичными преобразованиями

Под представлением полугруппы S взаимно однозначными частичными преобразованиями множества M мы понимаем любой гомоморфизм φ полугруппы S в симметрическую инверсную полугруппу $\mathcal{I}_M$ всех взаимно однозначных частичных преобразований множества M. В § 7.2 и 7.3 мы привели результаты Шайна [1962] о таких представлениях инверсной полугруппы S. Теперь мы изложим его теорию [1961] для произвольной полугруппы S. Так как на основании теоремы 1.20 каждая инверсная полугруппа T может быть вложена в $\mathcal{I}_T$, полугруппа S может быть вложена в инверсную полугруппу тогда и только тогда, когда она допускает точное представление взаимно однозначными частичными преобразованиями некоторого множества M.

В § 11.1 мы привели указанный Вагнером прием превращения частичного преобразования α множества M в полное преобразование α^0 множества $M^0 = M \cup 0_M$, оставляющее 0_M на месте. Легко видеть, что α будет взаимно однозначно тогда и только тогда, когда α^0 обладает свойством

$$x\alpha^0 = y\alpha^0 \neq 0_M \quad (x,\ y \in M^0) \text{ влечет за собой } x = y.$$

Преобразование α^0 множества M^0, оставляющее 0_M на месте и обладающее указанным свойством, будем называть *частично взаимно однозначным*. Множество всех таких преобразований является подполугруппой ${}^0\mathcal{I}_M$ из ${}^0\mathcal{T}_M$, причем соответствие $\alpha \leftrightarrow \alpha^0$ устанавливает изоморфизм между $\mathcal{I}_M$ и ${}^0\mathcal{I}_M$.

Таким образом, нет существенной разницы между теорией представлений полугруппы S взаимно однозначными частичными преобразованиями множества M и теорией представлений полугруппы S частично взаимно однозначными преобразованиями

[1]) Dense.— *Прим. перев.*

множества M^0. В этом параграфе мы будем вести изложение на языке второй теории, хотя результаты можно формулировать в любой из эквивалентных форм.

Частичный операнд M_S над полугруппой S называется операндом *с сокращением*, если $xa = ya$ $(x, y \in M;\ a \in S)$ влечет за собой $x = y$. Очевидно, представление φ полугруппы S, ассоциированное с M_S, является представлением взаимно однозначными преобразованиями множества M тогда и только тогда, когда M_S — операнд с сокращением. В силу теоремы 11.3 каждый частичный операнд M_S над S однозначно разложим на неразложимые частичные подоперанды, и, очевидно, M_S является операндом с сокращением тогда и только тогда, когда это верно для каждой его неразложимой конституэнты. Следовательно, мы можем ограничить свое внимание неразложимыми частичными операндами с сокращением.

Заметим сначала, что неразложимый частичный операнд с сокращением M_S над S при $|M| > 1$ не может содержать неподвижного элемента. В самом деле, предположим, что z — неподвижный элемент из M, т. е. $za = z$ для всех $a \in S$. Если $z = xb$ для некоторого $x \in M$ и некоторого $b \in S$, то $zb = xb$, откуда $x = z$. Таким образом, $M = \{z\} \cup (M \setminus z)$ является разложением для M_S. Следовательно, если мы присоединим *нулевую точку* 0_M к M, то 0_M будет единственным неподвижным элементом в множестве $M^0 = M \cup 0_M$, так что M_S^0 есть центрированный операнд. Конечно, операнд M_S^0 является 0-неразложимым.

Центрированный операнд $M_S^0 = M_S \cup 0_M$ называется операндом *с 0-сокращением*, если $xa = ya \neq 0_M$ $(x, y \in M;\ a \in S)$ влечет за собой $x = y$. Очевидно, M_S^0 является операндом с 0-сокращением тогда и только тогда, когда частичный операнд $M_S = M_S^0 \setminus 0_M$ с сокращением.

Правую конгруэнцию ρ на полугруппе S будем называть *центрированной*, если в точности один ρ-класс W_ρ является правым идеалом в S. Ясно, что это имеет место тогда и только тогда, когда S/ρ есть центрированный операнд с нулевой точкой W_ρ. Мы скажем, что ρ является центрированной правой конгруэнцией *с правым 0-сокращением*, если

$$ac\rho bc \notin W_\rho \quad (a,\ b,\ c \in S) \text{ влечет за собой } a\rho b.$$

Ясно, что ρ будет конгруэнцией с правым 0-сокращением тогда и только тогда, когда S/ρ есть операнд с 0-сокращением.

Пусть ρ — правая конгруэнция на полугруппе S. Будем говорить, что ρ — *с правым сокращением*, если $ac\rho bc$ $(a, b, c \in S)$ влечет за собой $a\rho b$. Это, конечно, эквивалентно тому, что S/ρ есть операнд с сокращением. В целях единообразия мы считаем правую конгруэнцию ρ на S центрированной, если ни один ρ-класс не является правым идеалом в S. В этом случае мы полагаем $W_\rho = \varnothing$ и считаем W_ρ нулевой точкой, присоединенной к S/ρ. При таком соглашении правая конгруэнция ρ будет с правым сокращением тогда и только тогда, когда она с правым 0-сокращением. Но иногда, как, например, в следствии 11.11, мы будем все же выделять в рассмотрениях случай $W_\rho = \varnothing$.

Во второй части следствия 11.7, очевидно, W есть единственный ρ-класс, который является правым идеалом, поэтому ρ центрирована с нулевой точкой $W_\rho = W$. Из следствия 11.7 непосредственно вытекает

Следствие 11.11. *0-транзитивные представления полугруппы S частично взаимно однозначными преобразованиями (следовательно, все транзитивные представления полугруппы S взаимно однозначными частичными преобразованиями) получаются из операндов вида S/ρ, где ρ есть центрированная модулярная правая конгруэнция с правым 0-сокращением, для которой все элементы из $S \setminus W_\rho$ являются обратимыми справа по* $\mathrm{mod}\ \rho$.

Все транзитивные представления полугруппы S взаимно однозначными преобразованиями получаются из операндов вида S/ρ, где ρ есть модулярная правая конгруэнция с правым сокращением, для которой каждый элемент из S является обратимым справа по $\mathrm{mod}\ \rho$.

В работе Дюбрея [1941] изложен метод построения всех таких правых конгруэнций ρ на полугруппе S. Пусть H — сильная унитарная подполугруппа из S (§ 10.2), $\mathcal{R}_H$ — главная правая конгруэнция Дюбрея на S и W_H — правый вычет для H (§ 10.2). На основании теоремы 10.22 $\rho = \mathcal{R}_H$ обладает всеми свойствами, сформулированными для ρ в следствии 11.11, и $W_\rho = W_H$. Обратно, каждое такое ρ совпадает с $\mathcal{R}_H$ для некоторой сильной унитарной подполугруппы H из S. Кроме того, H есть множество всех левых единиц из S по $\mathrm{mod}\ \mathcal{R}_H$ и является $\mathcal{R}_H$-классом. В частности, соответствие $H \leftrightarrow \mathcal{R}_H$ взаимно однозначно. Сопоставляя полученное со следствием 11.11, мы можем сформулировать следующий результат.

Теорема 11.12. *Пусть H — сильная унитарная подполугруппа полугруппы S, $\mathcal{R}_H$ — главная правая эквивалентность Дюбрея и W_H — правый вычет для H. Если $W_H = \varnothing$, то $S/\mathcal{R}_H$ есть транзитивный операнд с сокращением. Если $W_H \neq \varnothing$, то $S/\mathcal{R}_H$ есть 0-транзитивный операнд с 0-сокращением, нулевой точкой которого является W_H. Обратно, каждый транзитивный [0-транзитивный] операнд с сокращением [0-сокращением] над S эквивалентен $S/\mathcal{R}_H$ для некоторой сильной унитарной подполугруппы H из S.*

Таким образом, мы получим все транзитивные представления полугруппы S взаимно однозначными преобразованиями множества, исходя из сильных унитарных подполугрупп H из S, для которых $W_H = \varnothing$, и все 0-транзитивные представления полугруппы S частично взаимно однозначными преобразованиями, следовательно, все транзитивные представления полугруппы S взаимно однозначными частичными преобразованиями, исходя из сильных унитарных подполугрупп H из S, для которых $W_H \neq \neq \varnothing$. Возникает естественный вопрос: когда две сильные унитарные подполугруппы из S приводят к эквивалентным представлениям?

Для частного случая инверсной полугруппы S этот вопрос был решен в теореме 7.27. Подполугруппа инверсной полугруппы унитарна тогда и только тогда, когда она является замкнутой инверсной подполугруппой (упражнение 3 к § 7.3) и любая такая подполугруппа обязательно является сильной (упражнение 4 к § 7.2). Теперь мы дадим обобщение упомянутой теоремы на случай произвольной полугруппы S. Результат (теорема 11.13) является новым.

Две сильные унитарные подполугруппы H и K полугруппы S называются *сопряженными*, если существуют такие элементы c, $d \in S$, что

$$cd \in H,\ dc \in K,\ cKd \subseteq H,\ dHc \subseteq K. \tag{1}$$

Если H и K — замкнутые инверсные подполугруппы, т. е. сильные унитарные подполугруппы инверсной полугруппы S, то из (1) вытекают включения $cKc^{-1} \subseteq H$ и $c^{-1}Hc \subseteq K$, так что на основании теоремы 7.27 подполугруппы H и K сопряжены в смысле определения из § 7.3. В самом деле, если $k \in K$, то $(ckc^{-1})(cd) = (ckd)(cd)^{-1}(cd) \in H$, откуда $ckc^{-1} \in H$; следовательно, $ckc^{-1} \subseteq H$ и, аналогично, $c^{-1}Hc \subseteq K$. Обратная импликация очевидна.

Теорема 11.13. *Пусть H и K — сильные унитарные подполугруппы полугруппы S. Операнды $S/\mathcal{R}_H$ и $S/\mathcal{R}_K$ эквивалентны тогда и только тогда, когда H и K сопряжены.*

Доказательство. В силу теоремы 11.10 нам необходимо лишь установить, что $\mathcal{R}_H$ и $\mathcal{R}_K$ сопряжены тогда и только тогда, когда сопряжены H и K.

Предположим сначала, что подполугруппы H и K сопряжены. Тогда существуют такие $c, d \in S$, что выполняется условие (1). Будем доказывать, что $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_H^c$. Так как $cd \in H$ и каждый элемент из H является левой единицей по mod $\mathcal{R}_H$, элемент c является обратимым справа элементом по mod $\mathcal{R}_H$. Таким образом, из равенства $\mathcal{R}_K = \mathcal{R}_H^c$ будет следовать, что $\mathcal{R}_K$ и $\mathcal{R}_H$ сопряжены.

Пусть $a\mathcal{R}_H^c b$ $(a, b \in S)$. Это означает, что $ca\mathcal{R}_H cb$. Пусть $as \in K$ $(s \in S)$. Тогда $(ca)(sd) \in cKd \subseteq H$ ввиду (1) и $ca\mathcal{R}_H cb$

влечет за собой $(cb)(sd) \in H$. Следовательно, $(dc)(bs)(dc) \in dHc \subseteq \subseteq K$. Так как $dc \in K$ и полугруппа K унитарна, мы заключаем, что $bs \in K$. Аналогично, мы можем показать, что $bs \in K$ влечет за собой $as \in K$. Следовательно, $a\mathscr{R}_K b$.

Пусть $a\mathscr{R}_K b$ $(a, b \in S)$. Приступим к доказательству того, что $ca\mathscr{R}_H cb$, т. е. $a\mathscr{R}_H^c b$. Отсюда будет следовать $\mathscr{R}_K = \mathscr{R}_H^c$. Пусть $(ca)s \in H$ $(s \in S)$. Тогда $(dc)(asc) \in dHc \subseteq K$ и поэтому $asc \in K$, так как K унитарна. Из $a\mathscr{R}_K b$ мы заключаем, что $bsc \in K$ и, следовательно, $(cbs)(cd) \in cKd \subseteq H$. Так как $cd \in H$ и H унитарна, мы получаем $(cb)s \in H$. Аналогично, мы можем доказать, что $(cb)s \in H$ влечет за собой $(ca)s \in H$. Таким образом, $ca\mathscr{R}_H cb$.

Обратно, предположим, что $\mathscr{R}_H$ и $\mathscr{R}_K$ сопряжены. Тогда существует такой обратимый справа по mod $\mathscr{R}_H$ элемент c, что $\mathscr{R}_K = \mathscr{R}_H^c$. По определению обратимого справа элемента по mod $\mathscr{R}_H$ существует $d \in S$, для которого $cd \in H$.

Заметим сначала, что $ca\mathscr{R}_H c$ влечет за собой $a \in K$. В самом деле, пусть k — произвольный элемент из K. Тогда $cak\mathscr{R}_H ck$, откуда $ak\mathscr{R}_H^c k$ или $ak\mathscr{R}_K k$. Но это влечет за собой $ak \in K$ и поэтому $a \in K$.

Далее, $cd \in H$ и каждый элемент из H есть левая единица по mod $\mathscr{R}_H$. Следовательно, $cdc\mathscr{R}_H c$, откуда в силу предыдущего замечания вытекает $dc \in K$. Пусть $h \in H$. Тогда $cdh \in H^2 \subseteq H$. Следовательно, как и выше, $cdhc\mathscr{R}_H c$, и мы заключаем, что $dhc \in \in K$. Это показывает, что $dHc \subseteq K$.

Прежде чем доказать, что $cKd \subseteq H$, мы заметим, что из $dbc \in \in K$ следует $b \in H$. В самом деле, так как K есть сильная подполугруппа, из включений $dbc \in K$ и $dc \in K$ вытекает $db\mathscr{R}_K d$. Но это влечет за собой в свою очередь $cdb\mathscr{R}_H cd$. Так как $cd \in H$ и подполугруппа H унитарна, мы выводим, что $b \in H$.

Пусть теперь $k \in K$ и $b = ckd$. Тогда $dbc = (dc)k(dc) \in K$, и мы заключаем в силу предыдущего замечания, что $b \in H$. Таким образом, $cKd \subseteq H$ и мы установили, что H и K сопряжены. Доказательство теоремы закончено.

Пусть M_S — центрированный операнд с 0-сокращением над полугруппой S с единицей 1. Для каждого $x \in M$ имеем $(x1)1 = = x1$ и поэтому $x1$ равно либо x, либо 0_M. Положим

$$M_0 = \{x \in M \mid x1 = 0_M\}, \quad M_1 = \{x \in M \mid x1 = x\}.$$

Тогда $M = M_0 \cup M_1$ есть 0-разложение операнда M_S на нулевой операнд M_0 и унитальный операнд M_1.

Если полугруппа S не имеет единицы, то любой центрированный унитальный операнд с 0-сокращением над S^1 является центрированным операндом с 0-сокращением над S. Обратно, если M_S есть центрированный операнд с 0-сокращением над S, то, определяя $x1 = x$ для всех $x \in M$, мы превратим M_S в центрированный унитальный операнд с 0-сокращением над S^1.

Эти рассуждения показывают, что без ограничения общности мы можем сосредоточить свое внимание на центрированных унитальных операндах с 0-сокращением над полугруппой с единицей. Мы поступим так в оставшейся части данного параграфа и будем также рассматривать унитальный операнд с сокращением M_S как центрированный унитальный операнд с 0-сокращением, потому что операнд $M_S^0 = M_S \cup 0_M$ обладает этим свойством.

Если H — произвольное сильное подмножество полугруппы S с единицей (не обязательно унитарная подполугруппа из S), то $S/\mathcal{R}_H$ есть унитальный операнд с 0-сокращением над S. Будем считать в случае $W_H = \varnothing$, что W_H присоединено к $S/\mathcal{R}_H$ в качестве нулевой точки. Пусть φ_H — представление полугруппы S, ассоциированное с операндом $S/\mathcal{R}_H$. Ядро $\mathcal{P}_H$ представления φ_H является *главной двусторонней эквивалентностью* Круазо (§ 10.4), соответствующей подмножеству H (см. лемму 7.23):

$$\mathcal{P}_H = \{(a,\ b) \in S \times S \mid sat \in H \text{ тогда и только тогда, когда } sbt \in H \quad (s,\ t \in S)\}. \tag{2}$$

В самом деле, как определено в § 11.3,

$$\mathcal{P}_H = \mathcal{R}_H L = \{(a,\ b) \in S \times S \mid (sa,\ sb) \in \mathcal{R}_H \text{ для всех } s \in S^1\}$$

и здесь по предположению $S^1 = S$. Первым этот факт отметил, вероятно, Шютценберже [1955/6]; имея в виду приложения к теории кодирования, он назвал $\mathcal{P}_H$ «синтаксической эквивалентностью».

Пусть $\{H_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ — совокупность всех сильных подмножеств из S и $M_\delta = S/\mathcal{R}_{H_\delta}$, где мы считаем M_{δ_1} и M_{δ_2} не пересекающимися, если $\delta_1 \neq \delta_2$. (Мы можем, например, взять в качестве элементов из M_δ пары $(X,\ \delta)$, где $X \in S/\mathcal{R}_{H_\delta}$.) Очевидным образом объединение M всех M_δ превращается в операнд над S и множество W всех нулевых точек $W_\delta = W_{H_\delta}$ $(\delta \in \Delta)$ есть инвариантное подмножество из M. Рисовский фактор $\hat{M} = M/W$ является тогда центрированным унитальным операндом с 0-сокращением над S.

Пусть $\hat{\varphi}$ — представление полугруппы S, ассоциированное с операндом $\hat{M}_S$, и $\hat{\varkappa}$ — его ядро. Так как $\hat{M}_S$ 0-разложим на операнды, эквивалентные M_δ (в действительности каждый из них совпадает с M_δ с точностью до нулевой точки W_δ из M_δ, которая заменена на нулевую точку из $\hat{M}$), очевидно, что

$$\hat{\varkappa} = \bigcap\{\mathcal{P}_{H_\delta} \mid \delta \in \Delta\}.$$

Пересечение произвольного семейства сильных подмножеств из S, если оно не пусто, также является сильным подмножеством в S. Для каждого $a \in S$ через $\hat{a}$ обозначим пересечение всех сильных подмножеств из S, содержащих a (среди них находится само S). Определим следующим образом эквивалентность $\hat{\varepsilon}$ на S:

$$\hat{\varepsilon} = \{(a, b) \in S \times S \mid \hat{a} = \hat{b}\}. \qquad (3)$$

Приступим к доказательству того, что $\hat{\varepsilon}$ является конгруэнцией на S. Заметим сначала, что если H есть сильное подмножество и $c \in S$, то подмножество

$$Hc^{[-1]} = \{x \in S \mid xc \in H\}$$

на основании следствия 10.13 также является сильным.

Предположим теперь, что $a\hat{\varepsilon}b$ и $c \in S$. В силу соображений симметрии для того, чтобы установить, что $ac\hat{\varepsilon}bc$, достаточно доказать, что если H есть сильное подмножество из S, содержащее ac, то H содержит также и bc. Но $ac \in H$ влечет за собой $a \in Hc^{[-1]}$. Так как $a\hat{\varepsilon}b$ и $Hc^{[-1]}$ есть сильное подмножество, имеем $b \in Hc^{[-1]}$ и поэтому $bc \in H$. Аналогично, мы можем показать, что $ca\hat{\varepsilon}cb$.

Теперь мы можем сформулировать основной результат Шайна [1961].

Теорема 11.14. *Если S — произвольная полугруппа с единицей и $\hat{\varepsilon}$ — конгруэнция на S, заданная равенством* (3), *то фактор-полугруппа $S/\hat{\varepsilon}$ допускает точное представление частично взаимно однозначными* (*или взаимно однозначными частичными*) *преобразованиями. Если φ — произвольное представление* (*не обязательно точное*) *полугруппы S частично взаимно однозначными преобразованиями, то ядро представления φ содержит $\hat{\varepsilon}$ и поэтому φ индуцирует представление ψ полугруппы $S/\hat{\varepsilon}$, для которого $\varphi = \hat{\varepsilon}^{\natural}\psi$.*

Доказательство. Мы докажем первое утверждение теоремы, если установим, что $\hat{\varepsilon}$ совпадает с ядром $\hat{\varkappa}$ представления $\hat{\varphi}$ полугруппы S, построенного выше исходя из совокупности $\{H_\delta \mid \delta \in \Delta\}$ всех сильных подмножеств из S. В самом деле, на основании теоремы 11.2 представление $\hat{\varphi}$ индуцирует такое точное представление $\hat{\psi}$ полугруппы $S/\hat{\varkappa}$, что $\hat{\varphi} = \hat{\varkappa}^{\natural}\hat{\psi}$.

Докажем сначала, что $\hat{\varkappa} \subseteq \hat{\varepsilon}$. Пусть $a\hat{\varkappa}b$ $(a, b \in S)$. Тогда $a\mathcal{P}_{H_\delta}b$ для каждого $\delta \in \Delta$, следовательно, $sat \in H_\delta$ тогда и только тогда, когда $sbt \in H_\delta$. Положив $s = t = 1$, мы заключаем, что $a \in H_\delta$ тогда и только тогда, когда $b \in H_\delta$ (для всех $\delta \in \Delta$). Это эквивалентно тому, что $a\hat{\varepsilon}b$.

Обратное включение $\hat{\varepsilon} \subseteq \hat{\varkappa}$ есть частный случай второго утверждения теоремы ($\hat{\varepsilon} \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$ для любого представления φ полугруппы S частично взаимно однозначными преобразованиями), и поэтому достаточно доказать последнее утверждение.

Пусть M_S — центрированный операнд с 0-сокращением над S, ассоциированный с φ. Для каждой пары элементов $x, y \in M_S \setminus 0_M$, такой, что $(x, y) \in \tau$, где τ есть отношение транзитивности для φ, положим

$$H_{x,y} = \{a \in S \mid xa = y\}.$$

Тогда $H_{x,y}$ является сильным подмножеством. В самом деле, оно не пусто, и если $a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1 \in H_{x,y}$, то $xa_1b_1 = y = xa_2b_1$. Так как $y \neq 0_M$ и M_S — операнд с 0-сокращением, это дает $xa_2 = xa_1$. Следовательно, $xa_2b_2 = xa_1b_2 = y$ и $a_2b_2 \in H_{x,y}$.

Пусть теперь $a\hat{\varepsilon}b$ и $x \in M$. Если $xa \neq 0_M$, то также $x \neq 0_M$ и $a \in H_{x,xa}$. Так как $H_{x,xa}$ есть сильное подмножество и $a\hat{\varepsilon}b$, мы заключаем, что $b \in H_{x,xa}$, откуда $xb = xa$. Аналогично, если $xb \neq 0_M$, то $xa = xb$. Осталась лишь возможность $xa = 0_M = xb$, следовательно, $xa = xb$ в любом случае. Таким образом, $a\varphi = b\varphi$ или $(a, b) \in \varphi \circ \varphi^{-1}$, что доказывает включение $\hat{\varepsilon} \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$. Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из теоремы 11.2.

Следствие 11.15. *Полугруппа S с единицей может быть вложена в инверсную полугруппу тогда и только тогда, когда для любых ее различных элементов существует сильное подмножество в S, содержащее один из этих элементов, но не содержащее другой.*

Доказательство. Как указывалось в начале параграфа, S может быть вложена в инверсную полугруппу тогда и только тогда, когда она допускает точное представление взаимно однозначными преобразованиями множества. В силу теоремы 11.14 это имеет место тогда и только тогда, когда $\hat{\varepsilon}$ есть тождественное отношение на S, но $(a, b) \notin \hat{\varepsilon}$, очевидно, эквивалентно тому, что существует сильное подмножество из S, для которого $a \in H$ и $b \notin H$ или $a \notin H$ и $b \in H$.

Упражнения к § 11.4

1. Пусть M_S — центрированный 0-транзитивный операнд с 0-сокращением над полугруппой S. Для каждого $x \in M_S \setminus 0_M$ положим $H_x = \{a \in S \mid xa = x\}$.

(a) H_x является сильной унитарной подполугруппой из S и $M_S \cong S/\mathcal{R}_{H_x}$, где $\mathcal{R}_{H_x}$ есть главная правая конгруэнция Дюбрея, соответствующая H_x.

(b) Если K — сильная унитарная подполугруппа из S, то K сопряжена с H_x тогда и только тогда, когда $K = H_y$ для некоторого $y \in M \setminus 0_M$.

2. Пусть H — сильная унитарная подполугруппа полугруппы S и W_H — ее правый вычет. Тогда каждый идемпотент из S принадлежит $H \cup W_H$.

§ 11.5. Неприводимые и транзитивные операнды и полугруппы

Обозначим через FM множество неподвижных (или инвариантных) элементов операнда M_S над полугруппой S. Следуя Хёнке [1966], мы будем говорить, что операнд M_S *неприводим*, если $MS \nsubseteq FM$ и единственным инвариантным подмножеством из M, содержащим более одного элемента, является само M. Мы будем применять этот же термин к представлению полугруппы S, ассоциированному с M_S. В лемме 11.16 ниже мы покажем, что операнд M_S неприводим тогда и только тогда, когда он либо транзитивен, либо 0-транзитивен (§ 11.1).

Следуя Тулли [1960, 1961], назовем полугруппу S *транзитивной* [0-*транзитивной*] *справа*, если она обладает точным транзитивным [0-транзитивным] операндом (или представлением). Хёнке называет полугруппу S «примитивной», если она обладает точным неприводимым представлением. Следовательно, на основании леммы 11.16 полугруппа S примитивна в этом смысле тогда и только тогда, когда она транзитивна справа или 0-транзитивна справа в смысле Тулли. Мы будем называть такие полугруппы *неприводимыми справа*. Полугруппа S называется *транзитивной* [0-*транзитивной*] *слева*, если она обладает точным транзитивным [0-транзитивным] левым операндом (или антипредставлением). Полугруппа S транзитивна [0-транзитивна] слева тогда и только тогда, когда двойственная к ней полугруппа S^* транзитивна [0-транзитивна] справа.

Ряд примеров полугрупп, транзитивных с одной стороны, но не транзитивных с другой, а также полугрупп, транзитивных с обеих сторон, приведен в упражнениях. Остальные результаты этого параграфа, все принадлежащие Тулли [1960, 1961], описывают ряд менее тривиальных классов транзитивных полугрупп. Особенно интересен тот факт (теорема 11.20), что, за одним исключением, любое свободное произведение транзитивно и поэтому (следствие 11.21) любая свободная полугруппа более чем с одним порождающим элементом транзитивна.

Лемма 11.16. (A) *Пусть M_S — операнд над полугруппой S, для которого единственным инвариантным подмножеством, содержащим более одного элемента, является само M. Тогда M_S неприводим или $|M| = 2$ и M_S либо нулевой, либо тривиальный операнд.*

(B) *Операнд M_S над полугруппой S неприводим тогда и только тогда, когда он либо транзитивен, либо 0-транзитивен.*

Доказательство. (A) Если $FM = \varnothing$, то M_S неприводим по определению. Следовательно, мы можем предположить, что $FM \neq \varnothing$. Так как FM является инвариантным подмножеством из M, мы должны иметь либо $FM = M$, либо $|FM| = 1$. Если $FM = M$, то M есть тривиальный операнд, а так как каждое подмножество из M инвариантно, мы получаем $|M| = 2$. Если $|FM| = 1$, то $FM = \{0_M\}$. Если M_S не является тривиальным операндом, то $MS \subseteq FM$, т. е. $MS = 0_M$. Таким образом, M_S есть нулевой операнд и, так как каждое подмножество из M, содержащее 0_M, инвариантно, мы снова получаем $|M| = 2$.

(B) Пусть операнд M_S неприводим. Возможность $FM = M$ исключена условием $MS \not\subseteq FM$, и, следовательно, $FM = \varnothing$ или $|FM| = 1$. Предположим последнее, и пусть снова $FM = \{0_M\}$. Для любого $x \in M \setminus 0_M$ подмножество xS инвариантно и поэтому либо $|xS| = 1$, либо $xS = M$. Тот факт, что M есть 0-транзитивный операнд, будет установлен, если мы покажем невозможность условия $|xS| = 1$. Если $xS = \{y\}$, то $y \in FM$, откуда $y = 0_M$. Тогда $\{x, 0_M\}$ есть инвариантное подмножество из M и, следовательно, оно равно M. Но тогда $MS = \{0_M\}$, что противоречит условию $MS \not\subseteq FM$.

Если $FM = \varnothing$, то мы можем аналогично доказать, что операнд M_S транзитивен.

Обратно, пусть M_S есть 0-транзитивный операнд. Если N — инвариантное подмножество из M и $|N| > 1$, то N содержит элемент $x \in M \setminus 0_M$. Тогда $M = xS \subseteq N$, поэтому $N = M$. Очевидно, $FM = \{0_M\}$, и если $x \in M \setminus 0_M$, то $xa = x$ для некоторого $a \in S$, так что $MS \not\subseteq FM$. Следовательно, M_S неприводим.

Аналогично, если M_S — транзитивный операнд, то $FM = \varnothing$ и M есть единственное инвариантное подмножество из M, так что M_S неприводим.

Теорема 11.17. *Пусть S — полугруппа, содержащая невырожденный минимальный* [0-*минимальный*] *правый идеал R. Полугруппа S транзитивна* [0-*транзитивна*] *справа тогда и только тогда, когда $ra = rb$ $(a, b \in S)$ для всех $r \in R$ влечет за собой $a = b$.*

Доказательство. Мы докажем лишь утверждение, учитывающее слова в квадратных скобках; доказательство другого утверждения аналогично.

Если выполняется сформулированное условие, то R_S, очевидно, является точным операндом над S. Если $r \in R \setminus 0$, то в силу леммы 6.1 $R = rS$ и поэтому R_S есть 0-транзитивный операнд.

Обратно, предположим, что M_S есть точный 0-транзитивный операнд над S. В силу точности операнда M_S имеем $MR \neq 0_M$ и, следовательно, существует такой $x \in M \setminus 0_M$, что $xR \neq 0_M$. Так как xR есть инвариантное подмножество $\neq 0_M$ из M и M_S неприводим в силу леммы 11.16, мы заключаем, что $xR = M$. Отображение $r \to xr$ является операторным гомоморфизмом операнда R_S на M_S. Пусть a и b — такие элементы из S, что $ra = rb$ для всех $r \in R$. Если $y \in M$, то $y = xr$ для некоторого $r \in R$

и, следовательно, $ya = xra = xrb = yb$. Так как операнд M_S точен, мы получаем $a = b$.

Взаимосвязь между 0-транзитивными представлениями и мономиальными представлениями будет указана в § 11.8. Следующее утверждение перекликается с упражнением 2 к § 3.6.

Следствие 11.18. *Регулярная рисовская полугруппа $S = \mathcal{M}^0(G;\ I,\ \Lambda;\ P)$ является 0-транзитивной справа тогда и только тогда, когда любые два различных столбца сэндвич-матрицы P не пропорциональны.*

Доказательство. Пусть $i \in I$ и R_i — множество всех таких элементов $(c;\ i, \lambda) \in S$, что $c \in G$ и $\lambda \in \Lambda$. В силу леммы 3.2 множество $R_i^0 = R_i \cup 0$ является 0-минимальным правым идеалом в S.

Пусть $(a;\ j, \mu)$ и $(b;\ k, \nu)$ — ненулевые элементы из S. Если

$$(c;\ i, \lambda)\,(a;\ j, \mu) = (c;\ i, \lambda)\,(b;\ k, \nu)$$

для всех $(c;\ i, \lambda) \in R_i^0$, то, осуществляя перемножение, получаем

$$(cp_{\lambda j}a;\ i, \mu) = (cp_{\lambda k}b;\ i, \nu)$$

для всех $c \in G$ и $\lambda \in \Lambda$. Это в свою очередь эквивалентно тому, что $\mu = \nu$ и

$$p_{\lambda j}a = p_{\lambda k}b \quad (\text{для всех } \lambda \in \Lambda).$$

Последнее условие и означает то, что мы называем пропорциональностью j-го и k-го столбцов из P $(a,\ b \in G\setminus 0)$.

Следовательно, в этом случае условие теоремы 11.17 эквивалентно тому, что любые два различных столбца из P не пропорциональны.

Следующий результат был получен также Шайном [1963]

Лемма 11.19. *Полугруппа S транзитивна справа тогда и только тогда, когда транзитивна справа полугруппа S^1.*

Доказательство. Если S имеет единицу, то $S = S^1$ и утверждение леммы тривиально, поэтому мы можем предположить, что S — полугруппа без единицы.

Пусть S транзитивна справа. Тогда существует точный транзитивный операнд M_S над S. Превратим M в операнд M_{S^1} над S^1, полагая $x1 = x$ для всех $x \in M$. Очевидно, операнд M_{S^1} транзитивен. Докажем, что он точен. Предположим, что $x1 = xa$ для всех $x \in M$ и для некоторого элемента $a \in S$. Тогда для каждого $s \in S$ имеем $xas = x1s = xs$ и $xsa = xs1 = xs$. Так как M_S точен, мы заключаем, что $as = s = sa$ для $s \in S$, но это противоречит предположению о том, что S не имеет единицы.

Обратно, пусть полугруппа S^1 транзитивна справа и M_{S^1} — точный транзитивный операнд над S^1. Операнд M_{S^1} является унитальным; в самом деле, если $x \in M$, то $xa = x$ для некоторого $a \in S^1$ и поэтому $x1 = xa1 = xa = x$. Очевидно, M является также точным операндом M_S над S. Если $x, y \in M$, то существует такой $a \in S^1$, что $xa = y$. Если $x \neq y$, то $a \in S$, так как $x1 = x$. Если $| M | = 1$, то, очевидно, операнд M_S транзитивен. Предположим, что $| M | > 1$ и $x, y \in M$, где $x \neq y$. Тогда $xa = y$ и $yb = x$ для некоторых $a, b \in S$ и поэтому $xab = x$. Это показывает, что $xS = M$ для любого $x \in M$ и, следовательно, операнд M_S транзитивен.

Теорема 11.20. *Пусть P — свободное произведение двух полугрупп S и T. Тогда полугруппа P транзитивна с обеих сторон, за исключением случая, когда $| S | = | T | = 1$.*

Доказательство. Мы можем предположить, что $|S| > 1$. (Об исключенном случае см. в упражнении 6 ниже.) В силу соображений симметрии нам нужно установить лишь, что P транзитивна справа. Учитывая лемму 11.19, мы будем доказывать это для P^1.

Приступим к построению множества, которое по аналогии с процедурой Круазо из § 9.5 можно было бы назвать множеством канонических форм правой конгруэнции на P^1. Как и в приложении теоремы 9.54 в § 9.5, мы начнем с построения вспомогательного преобразования E.

Пусть a — фиксированный элемент из S

Каждый элемент из P однозначно представим в виде произведения элементов, взятых поочередно из S и T. Пусть $p \in P$. Тогда pE определяется следующим образом:

(1) если p начинается с элемента $t \in T$, то отбросим t;

(2) если p начинается с st $(s \in S \setminus a,\ t \in T)$, то отбросим st;

(3) если p начинается с множителя вида

$$(at_1)(at_2)\ \ldots\ (at_n)(s_1t_1')(s_2t_2')\ \ldots\ (s_nt_n'),$$

где $t_i, t_i' \in T$; $s_i \in S$ $(i = 1, \ldots, n)$ и $s_1 \neq a$, то отбросим этот множитель;

(4) Если ни один из случаев (1) — (3) не выполняется, то положим $pE = p$.

Последняя возможность $pE = p$ имеет место тогда и только тогда, когда либо $p = 1$, либо $p \in S$, либо

$$p = (at_1)(at_2)\ \ldots\ (at_n)\,q,$$

где q есть элемент из P^1, длина которого меньше $2n$. Назовем указанные элементы *каноническими формами* относительно E.

Преобразование E может перевести p в 1, например в случае $p = st$. Мы считаем также, что $1E = 1$. Заметим, что E есть преобразование множества P^1. В силу того что либо $pE = p$, либо длина элемента pE меньше длины элемента p, должно существовать положительное целое число k, для которого $\bar{p} = pE^k$ является канонической формой. Назовем ее *канонической формой элемента* p.

Заметим, что

$$\overline{\bar{p}q} = \overline{pq} \quad (\text{для всех } p, q \in P^1).$$

Это тривиально в случае, когда $\bar{p} = p$. В других случаях это равенство легко устанавливается индукцией по наименьшему целому числу k, для которого $\bar{p} = pE^k$, с использованием того факта, что если $pE \neq p$, то $(pq)E = (pE)q$. Следовательно, отношение эквивалентности σ на P^1, состоящее из тех и только тех пар (p, q), для которых $\bar{p} = \bar{q}$, является правой конгруэнцией. В самом деле, если $p\sigma q$ и $r \in P^1$, то

$$\overline{pr} = \overline{\bar{p}r} = \overline{\bar{q}r} = \overline{qr},$$

откуда $pr\sigma qr$. Докажем, что P^1/σ есть точный транзитивный операнд.

Транзитивность будет установлена, если мы покажем, что для заданного $p \in P^1$ существует такое $q \in P^1$, что $pq\sigma 1$. В самом деле, тогда $(p\sigma)\, qr = r\sigma$ для произвольного $r \in P^1$. В качестве q достаточно взять элемент $(bt)^n$, где $b \in S \setminus a$, $t \in T$ и n равно длине слова $\bar{p}$.

Докажем, что операнд P^1/σ является точным. Мы должны для этого установить, что если $p \neq q$ в P^1, то существует $r \in P^1$, для которого $(rp, rq) \notin \sigma$. Из определения P легко видеть, что либо $ap \neq aq$, либо $tp \neq tq$. Таким образом, если мы положим

$$r = \begin{cases} (at)^n, & \text{если } ap = aq \ (\text{и поэтому } tp \neq tq), \\ (at)^n a, & \text{если } ap \neq aq, \end{cases}$$

то $rp \neq rq$. Если мы возьмем в качестве n число, большее чем длина p и q, то $\overline{rp} = rp$ и $\overline{rq} = rq$, откуда $(rp, rq) \notin \sigma$.

Следствие 11.21. *Свободная полугруппа более чем с одним образующим транзитивна с обеих сторон.*

Теорема 11.22. *Каждая полугруппа Бэра — Леви транзитивна с обеих сторон.*

Доказательство. Пусть S — полугруппа Бэра — Леви типа (p, q). По определению (§ 8.1) S состоит из всех таких взаимно однозначных преобразований α некоторого множества M бесконечной мощности p, что $|M \setminus M\alpha| = q$. Очевидно, так как полугруппа S проста справа, тождественное отображение на S

является транзитивным представлением полугруппы S, поэтому нам осталось лишь доказать, что S транзитивна слева.

Вполне упорядочим M по типу первого порядкового числа, имеющего мощность p. Тогда каждое подмножество N из M вполне упорядочено ограничением на N введенного порядка. Если $|N| = p$, то порядковый тип множества N не больше порядкового типа множества M и, поскольку мощность его равна p, он должен быть равен порядковому типу множества M. Следовательно, существует (единственное) сохраняющее порядок взаимно однозначное отображение π_N множества N на M. Тогда для каждого $\alpha \in S$ преобразование $\alpha\pi_{M\alpha}$ является подстановкой на M.

Для $\alpha, \beta \in S$ положим $\alpha\sigma\beta$ тогда и только тогда, когда $\alpha\pi_{M\alpha} = \beta\pi_{M\beta}$. Ясно, что σ есть отношение эквивалентности на S. Докажем, что $\alpha\sigma\beta$ равносильно тому, что

$$x\alpha < y\alpha \text{ тогда и только тогда, когда } x\beta < y\beta \ (x, y \in M). \tag{1}$$

Отсюда непосредственно вытекает, что $\alpha\sigma\beta$ влечет за собой $\gamma\alpha\sigma\gamma\beta$ для всех $\gamma \in S$, т. е. σ есть левая конгруэнция на S.

Так как π_N сохраняет порядок, условие (1) равносильно тому, что

$$x\alpha\pi_{M\alpha} < y\alpha\pi_{M\alpha} \text{ тогда и только тогда, когда } x\beta\pi_{M\beta} < y\beta\pi_{M\beta}. \tag{2}$$

Если $\alpha\sigma\beta$, то условие (2) выполняется тривиально и поэтому выполняется условие (1). Но из условия (2) вытекает, что $\alpha\sigma\beta$. В самом деле, если мы положим $\varphi = \alpha\pi_{M\alpha}$ и $\psi = \beta\pi_{M\beta}$ и если $x < y$, то $(x\varphi^{-1})\varphi < (y\varphi^{-1})\varphi$, так что (2) влечет за собой $x\varphi^{-1}\psi < y\varphi^{-1}\psi$. Следовательно, $\varphi^{-1}\psi$ есть подстановка, сохраняющая порядок вполне упорядоченного множества M. Так как этим свойством обладает только тождественная подстановка, мы заключаем, что $\varphi = \psi$, откуда $\alpha\sigma\beta$.

Докажем, что любой операнд $_S(S/\sigma)$ транзитивен. Пусть $\alpha, \beta \in S$. Мы должны установить, что существует $\gamma \in S$, для которого $\gamma\alpha\sigma\beta$. Выберем такое произвольное подмножество P из $M\alpha$, что $|P| = p$ и $|M\alpha \setminus P| = q$, и положим $\delta = \beta\pi_{M\beta}\pi_P^{-1}$. Так как δ есть взаимно однозначное отображение M на P и

$$|M \setminus P| = |M \setminus M\alpha| + |M\alpha \setminus P| = q + q = q,$$

мы получаем $\delta \in S$. Для $x \in M$ имеем $x\delta \in P \subseteq M\alpha$ и существует такой единственный $y \in M$, что $x\delta = y\alpha$. Положим $x\gamma = y$. Тогда $x\delta = y\alpha = x\gamma\alpha$ для всех $x \in M$, поэтому $\delta = \gamma\alpha$. Так как δ взаимно однозначно, то γ также взаимно однозначно. Кроме того,

$$M\gamma = \{y \in M \mid y\alpha \in M\delta\} = P\alpha^{-1},$$

$$|M \setminus M\gamma| = |M \setminus P\alpha^{-1}| = |M\alpha \setminus P| = q,$$

откуда $\gamma \in S$. То, что $\delta\sigma\beta$, ясно ввиду равенства $P = M\delta$ и определения δ.

Докажем, что левый операнд S/σ является точным. Пусть α и β — различные элементы из S. Мы должны установить, что существует $\gamma \in S$, для которого $\alpha(\gamma\sigma) \neq \beta(\gamma\delta)$, т. е. $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \notin \sigma$.

Предположим сначала, что $(\alpha, \beta) \notin \sigma$. Тогда ввиду условия (1) существуют такие $x, y \in M$, что $x\alpha < y\alpha$ и $x\beta > y\beta$. Очевидно, существует элемент $\gamma \in S$, оставляющий на месте каждый из элементов $x\alpha$, $x\beta$, $y\alpha$, $y\beta$. Тогда $x\alpha\gamma < y\alpha\gamma$ и $x\beta\gamma > y\beta\gamma$, так что в силу (1) имеем $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \notin \sigma$.

Пусть теперь $(\alpha, \beta) \in \sigma$. Так как $\alpha \neq \beta$, существует такой $x \in M$, что $x\alpha \neq x\beta$, и мы можем считать, что $x\alpha < x\beta$. Выберем элемент $y \neq x$ в M и положим

$$u_1 = x\alpha, \quad v_1 = y\alpha, \quad u_2 = x\beta, \quad v_2 = y\beta.$$

Тогда $u_1 < u_2$. Так как α взаимно однозначно, $u_1 \neq v_1$. Если $u_1 < v_1$, то $u_2 < v_2$; верно и обратное, так как $\alpha\sigma\beta$. Следовательно, возможны два случая:

$$\text{(i) } u_1 < v_1, \ u_1 < u_2 < v_2;$$

$$\text{(ii) } u_2 > v_2, \ u_2 > u_1 > v_1.$$

В случае (i) через γ обозначим элемент из S, который переставляет u_2 и v_2, оставляет на месте u_1 и оставляет на месте v_1, если $v_1 \neq u_2$ и $v_1 \neq v_2$. Очевидно, в S такой элемент γ существует. Тогда $v_1\gamma \in \{v_1, u_2, v_2\}$, так что $u_1\gamma < v_1\gamma$. Но неравенство $u_2\gamma > v_2 y$ показывает, что $(\alpha\gamma, \beta\gamma) \notin \sigma$. В случае (ii) мы приходим к такому же заключению, выбирая в качестве γ элемент из S, который переставляет u_1 и v_1, оставляет u_2 на месте и оставляет на месте v_2, если $v_2 \neq u_1$ и $v_2 \neq v_1$.

Упражнения к § 11.5

1. Неодноэлементная транзитивная справа полугруппа не может иметь левых нулей.

2. Полная полугруппа преобразований $\mathscr{T}_M$ на множестве M, где $|M| > 1$, транзитивна справа, но не транзитивна слева. (Хёнке [1966].)

3. (a) Транзитивная справа полугруппа редуктивна слева (§ 1.3).

(b) Простая справа и редуктивная слева полугруппа транзитивна справа; в частности, правая группа транзитивна справа.

(c) Если правая группа транзитивна слева, то она является группой. (Тулли [1960].)

4. Коммутативная полугруппа S транзитивна [0-транзитивна] тогда и только тогда, когда она является группой [с нулем]. (Тулли [1960] и Шайн [1963].)

5. Бициклическая полугруппа транзитивна с обеих сторон. (Тулли [1960, 1961].)

6. Пусть $S = \{e\}$ и $T = \{f\}$ — одноэлементные полугруппы и P — их свободное произведение. Произвольный транзитивный операнд над P должен быть конечным и поэтому не может быть точным. Таким образом, P не является транзитивной полугруппой (см. теорему 11.20).

7. Любая 0-бипростая инверсная полугруппа 0-транзитивна с обеих сторон (см. упражнение 5 (е) к § 7.3).

§ 11 6. Различные радикалы полугруппы

Понятия $\mathscr{C}$-радикала полугруппы и производного типа $\mathscr{C}'$ для типа $\mathscr{C}$, а также первые две теоремы данного параграфа принадлежат Тулли (неопубликовано). После рассмотрения общего случая мы переходим к случаю $\mathscr{C} = \mathfrak{J}$, где $\mathfrak{J}$ — класс неприводимых справа полугрупп (§ 11.5), и устанавливаем открытую Зайделем интересную связь между $\mathfrak{J}$-радикалом и нильрадикалом полугруппы [1]).

Не считая изложения неопубликованных ранее результатов Тулли, единственной нашей претензией на новизну в данном параграфе является теорема 11.25. В этой теореме используется понятие максимального гомоморфного образа типа $\mathscr{C}$ [2]). Нам понадобится несколько более ограничительное определение этого понятия, нежели то, которое дано в предложении 1.7 из § 1.5.

Под *типом* полугрупп мы понимаем класс $\mathscr{C}$ полугрупп (вообще говоря не множество), для которого (i) если $S \in \mathscr{C}$ и S изоморфно S', то $S' \in \mathscr{C}$, (ii) любая одноэлементная полугруппа принадлежит $\mathscr{C}$.

Если S — произвольная полугруппа и $\mathscr{C}$ — произвольный тип полугрупп, то полугруппа S^* называется *максимальным гомоморфным образом типа* $\mathscr{C}$ полугруппы S, если $S^* \in \mathscr{C}$ и существует гомоморфизм η полугруппы S на S^* с *факторизационным свойством*: для любого гомоморфизма φ полугруппы S на полугруппу T типа $\mathscr{C}$ существует такой гомоморфизм θ полугруппы S^* на T, что $\eta\theta = \varphi$.

---

[1]) Укажем на работу Клиффорда [1970], которую автор считает продолжением настоящего параграфа.— *Прим. ред.*

[2]) И понятие максимального гомоморфного образа типа $\mathscr{C}$, и понятие $\mathscr{C}$-радикала (под разными названиями) принадлежат к сравнительно давно освоенным понятиям общей алгебры и относятся к любым алгебраическим системам. Первое из них называют также $\mathscr{C}$-репликой (см., например, книгу А. И. Мальцева [1970]). Второе в случае групп, когда $\mathscr{C}$ есть многообразие, по существу совпадает с понятием вербальной подгруппы. Теоремы 11.23—11.25, как и упражнение 2 ниже, также относятся к любым алгебраическим системам и выражают хорошо известные свойства.— *Прим. ред.*

Факторизационное свойство гомоморфизма η было опущено в упомянутом выше определении. Для данного усиленного определения легко показать, что если существует максимальный гомоморфный образ типа $\mathscr{C}$ полугруппы S, то он единствен с точностью до изоморфизма. Но это утверждение не верно для слабого варианта определения, так как две неизоморфные полугруппы (в частности, группы) могут быть гомоморфными образами друг друга.

Предложение 1.7 остается справедливым, если понятие максимального гомоморфного образа типа $\mathscr{C}$ толковать в его новом смысле. В самом деле, предположим, что пересечение ρ всех конгруэнций σ на S, имеющих тип $\mathscr{C}$ (т. е. $S/\sigma \in \mathscr{C}$), также имеет тип $\mathscr{C}$. Тогда S/ρ является максимальным гомоморфным образом типа $\mathscr{C}$ полугруппы S в сильном смысле, где в качестве η берется естественный гомоморфизм $\rho^\natural$ полугруппы S на S/ρ. В самом деле, пусть φ — гомоморфизм S на полугруппу T типа $\mathscr{C}$. Тогда $\sigma = \varphi \circ \varphi^{-1}$ есть конгруэнция типа $\mathscr{C}$ на S, так как $S/\sigma \cong T$ и $T \in \mathscr{C}$. Отсюда $S/\sigma \in \mathscr{C}$ в силу условия (i) из определения типа. Следовательно, $\rho \subseteq \sigma$ по определению ρ. Так как $\rho = \rho^\natural \circ (\rho^\natural)^{-1}$, по теореме 1.6 существует такой (единственный) гомоморфизм θ полугруппы S/ρ на T, что $\rho^\natural\theta = \varphi$.

Заметим в связи с этим, что нам неизвестно, остается ли справедливым упражнение 16 к § 2.7, если соответствующие понятия трактовать по-новому. Оно остается справедливым в предположении, что H_e есть «гомоморфный ретракт» полугруппы S, т. е. существует гомоморфизм S на H_e, оставляющий на месте все элементы из H_e.

* На этот вопрос — будет ли максимальная подгруппа H_e вполне простого ядра полугруппы S максимальным групповым гомоморфным образом полугруппы S (в новом смысле), если она является гомоморфным образом S,— отрицательный ответ дан Племмонсом [1970].*

Пусть S — полугруппа, $\mathscr{C}$ — некоторый тип и $\mathscr{C}_S$ — множество всех конгруэнций типа $\mathscr{C}$ на S. Множество $\mathscr{C}_S$ не пусто, так как оно содержит в силу условия (ii) из определения типа универсальную конгруэнцию ω_S на S. Определим *$\mathscr{C}$-радикал* полугруппы S, полагая

$$\mathscr{C}\text{-rad}\, S = \bigcap \{\sigma \mid \sigma \in \mathscr{C}_S\}.$$

Очевидно, он является конгруэнцией на S. *Производным типом* $\mathscr{C}'$ к типу $\mathscr{C}$ является класс всех таких полугрупп S, что $\mathscr{C}\text{-rad}\, S = \iota_S$, где ι_S есть отношение равенства на S [1]). Если $S \in \mathscr{C}'$, то мы скажем, что S есть полугруппа *без $\mathscr{C}$-радикала.* Очевидно, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{C}'$; в самом деле, если $S \in \mathscr{C}$, то $\iota_S \in \mathscr{C}_S$.

[1]) В терминологии книги А. И. Мальцева [1970] $\mathscr{C}'$ есть не что иное, как реплично полный класс, порожденный классом $\mathscr{C}$.— *Прим. ред.*

Теорема 11.23. *Если S — произвольная полугруппа и $\mathscr{C}$ — произвольный тип полугрупп, то $S/\mathscr{C}\text{-rad}\, S$ имеет тип $\mathscr{C}'$.*

Доказательство. Пусть $\rho = \mathscr{C}\text{-rad}\, S$ и $S' = S/\rho$. Мы должны установить, что $\mathscr{C}\text{-rad}\, S' = \iota_{S'}$.

Если σ — конгруэнция на S, содержащая ρ, то σ индуцирует конгруэнцию $\sigma' = \sigma/\rho$ на S', которая задается следующим образом:

$(a\rho)\ \sigma'\ (b\rho)$ тогда и только тогда, когда $a\sigma b$ $(a,\ b \in S)$.

Отображение λ: $\sigma \to \sigma'$ есть изоморфизм структуры всех конгруэнций полугруппы S, содержащих ρ, на структуру всех конгруэнций полугруппы S'. Кроме того,

$$S'/\sigma' = (S/\rho)/(\sigma/\rho) \cong S/\sigma.$$

Следовательно, $\sigma' \in \mathscr{C}_{S'}$ тогда и только тогда, когда $\sigma \in \mathscr{C}_S$. Так как λ сохраняет пересечения,

$$\rho\lambda = (\bigcap \{\sigma \mid \sigma \in \mathscr{C}_S\})\, \lambda = \bigcap \{\sigma' \mid \sigma' \in \mathscr{C}_{S'}\} = \mathscr{C}\text{-rad}\, S'.$$

Но $\rho\lambda = \rho/\rho = \iota_{S'}$, откуда $\mathscr{C}\text{-rad}\, S' = \iota_{S'}$ и $S' \in \mathscr{C}'$.

Теорема 11.24. *Для любого типа $\mathscr{C}$ полугрупп имеет место $\mathscr{C}'' = \mathscr{C}'$. Для любой полугруппы S выполняется равенство $\mathscr{C}'\text{-rad}\, S = \mathscr{C}\text{-rad}\, S$.*

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение.

Пусть $\rho \in \mathscr{C}'_S$ и $S' = S/\rho$. Тогда $S' \in \mathscr{C}'$ и поэтому

$$\bigcap \{\sigma' \mid \sigma' \in \mathscr{C}_{S'}\} = \iota_{S'}.$$

Пусть λ: $\sigma \to \sigma' = \sigma/\rho$ есть отображение, введенное в доказательстве теоремы 10.23. Тогда

$$(\bigcap \{\sigma \mid \sigma \in \mathscr{C}_S,\ \sigma \supseteq \rho\})\, \lambda = \bigcap \{\sigma' \mid \sigma' \in \mathscr{C}_{S'}\} = \iota_{S'}.$$

Так как $\rho\lambda = \rho/\rho = \iota_{S'}$ и λ взаимно однозначно, мы заключаем, что

$$\bigcap \{\sigma \mid \sigma \in \mathscr{C}_S,\ \sigma \supseteq \rho\} = \rho.$$

Другими словами, каждая конгруэнция ρ типа $\mathscr{C}'$ на S есть пересечение всех конгруэнций σ типа $\mathscr{C}$, содержащих ρ.

Мы заключаем, что

$$\mathscr{C}'\text{-rad}\, S = \bigcap \{\rho \mid \rho \in \mathscr{C}'_S\} = \bigcap \{\rho \mid \rho \in \mathscr{C}_S\} = \mathscr{C}\text{-rad}\, S.$$

Из этого равенства вытекает первое утверждение теоремы. В самом деле, если $S \in \mathscr{C}''$, то $\iota_S = \mathscr{C}'\text{-rad}\, S = \mathscr{C}\text{-rad}\, S$, откуда $S \in \mathscr{C}'$; обратное включение тривиально.

Теорема 11.25. (A) *Полугруппа S имеет максимальный гомоморфный образ S^* типа $\mathscr{C}$ тогда и только тогда, когда $S/\mathscr{C}\text{-rad}\, S$ имеет тип $\mathscr{C}$, и в этом случае мы можем считать $S^* = S/\mathscr{C}\text{-rad}\, S$.*

(B) *Каждая полугруппа S имеет максимальный гомоморфный образ типа $\mathscr{C}'$, а именно $S/\mathscr{C}$-rad S.*

(C) *Тип $\mathscr{C}$ тогда и только тогда обладает тем свойством, что каждая полугруппа S имеет максимальный гомоморфный образ типа $\mathscr{C}$, когда $\mathscr{C}' = \mathscr{C}$.*

Доказательство. (A) Достаточность условия совпадает с доказанным выше новым вариантом предложения 1.7. Обратно, пусть η — гомоморфизм S на S^* с факторизационным свойством. Тогда $\rho = \eta \circ \eta^{-1}$ имеет тип $\mathscr{C}$. Равенство $\rho = \mathscr{C}$-rad S будет доказано, если мы установим, что для любой конгруэнции σ типа $\mathscr{C}$ на S выполняется включение $\rho \subseteq \sigma$.

Так как $\sigma^\natural$ есть гомоморфизм полугруппы S на полугруппу S/σ типа $\mathscr{C}$, на основании факторизационного свойства гомоморфизма η существует гомоморфизм θ полугруппы S^* на S/σ, для которого $\eta\theta = \sigma^\natural$. Если a и b — такие элементы из S, что $a\rho b$, то $a\eta = b\eta$ (так как $\rho = \eta \circ \eta^{-1}$) и поэтому $a\sigma^\natural = a\eta\theta = b\eta\theta = b\sigma^\natural$. Но это показывает, что $a\sigma b$, т. е. $\rho \subseteq \sigma$.

(B) В силу теоремы 11.23 $S/\mathscr{C}$-rad S имеет тип $\mathscr{C}'$. На основании теоремы 11.24 $\mathscr{C}$-rad $S = \mathscr{C}'$-rad S, следовательно, $S/\mathscr{C}'$-rad S имеет тип $\mathscr{C}'$. Отсюда ввиду (A) получаем заключение теоремы.

(C) Достаточность условия вытекает непосредственно из (B). Обратно, предположим, что каждая полугруппа имеет максимальный гомоморфный образ типа $\mathscr{C}$. Нам нужно лишь установить, что $\mathscr{C}' \subseteq \mathscr{C}$, так как обратное включение тривиально. Пусть $S \in \mathscr{C}'$. На основании (A) и нашего предположения мы получаем, что $S/\mathscr{C}$-rad S принадлежит $\mathscr{C}$. Но по определению $\mathscr{C}'$ выполняется равенство $\mathscr{C}$-rad $S = \iota_S$, следовательно, $S = S/\iota_S \in \mathscr{C}$.

Другую характеризацию типов $\mathscr{C}$ полугрупп, для которых $\mathscr{C}' = \mathscr{C}$, см. в упражнении 2 (b) к настоящему параграфу.

Обратимся теперь к классу $\mathscr{I}$ неприводимых справа полугрупп, т. е. примитивных в смысле Хёнке, а именно полугрупп, допускающих точное неприводимое представление. В § 11.5 мы рассмотрели различные подклассы из $\mathscr{I}$. Будем писать rad S вместо $\mathscr{I}$-rad S. Начнем с характеризации rad S, принадлежащей Зайделю [1965].

Для любого элемента a полугруппы S положим

$$\mu(a) = \{(b, c) \in S \times S \mid a^m b = a^n c \text{ для некоторых неотрицательных чисел } m, n\}.$$

Здесь под a^0 мы понимаем элемент $1 \in S^1$. Очевидно, $\mu(a)$ есть правая конгруэнция на S; кроме того, она модулярна, так как a является левой единицей из S по mod ρ (§ 11.3).

Теорема 11.26. *Для любой полугруппы S*

$$\text{rad } S = \{(a, b) \in S \times S \mid (a, b) \in \mu(as) \cap \mu(bs) \text{ для всех } s \in S^1\}.$$

Доказательство. Пусть $(a, b) \notin \operatorname{rad} S$. Тогда существует такой неприводимый операнд M_S над S и элемент $x \in M$, что $xa \neq xb$. Элементы xa и xb не могут быть одновременно равны 0_M (если такой существует), и мы можем предположить, что $xa \neq 0_M$. Тогда $xaS = M$. Пусть s — такой элемент из S, что $xas = x$. Докажем, что $(a, b) \notin \mu(as)$. В самом деле, если это не так, то $(as)^m a = (as)^n b$ для некоторых $m, n \geqslant 0$ и мы заключаем, что

$$xa = x(as)^m a = x(as)^n b = xb.$$

Обратно, предположим, что $(a, b) \notin \mu(as) \cap \mu(bs)$ для некоторого $s \in S^1$. Тогда мы можем считать, что $(a, b) \notin \mu(as)$. Пусть $\sigma = \mu(as)$. В силу теоремы 11.6 $M_S = S/\sigma$ есть такой строго циклический операнд над S со строго порождающим элементом $(as)\sigma$, что $a\sigma \neq b\sigma$. На основании леммы 11.5 операнд $M/I(M) = M'_S$ транзитивен или 0-транзитивен и, следовательно, неприводим по лемме 11.16. Так как as есть левая единица из S по $\operatorname{mod} \sigma$, мы имеем

$$((as)\sigma)a = a\sigma \neq b\sigma = ((as)\sigma)b.$$

Таким образом, $a\varphi \neq b\varphi$, где φ есть представление полугруппы S, ассоциированное с M'_S. Так как $S/\varphi \circ \varphi^{-1}$ изоморфна неприводимой полугруппе $S\varphi$ преобразований на M', конгруэнция $\varphi \circ \varphi^{-1}$ на S имеет тип $\mathcal{J}$. Ввиду того что $(a, b) \notin \varphi \circ \varphi^{-1}$ и $\operatorname{rad} S$ есть пересечение всех конгруэнций типа $\mathcal{J}$ на S, мы получаем $(a, b) \notin \operatorname{rad} S$.

Для полугруппы S с нулем 0 Хёнке [1963] определяет $\operatorname{rad}^0 S$ как ($\operatorname{rad} S$)-класс, содержащий 0. Напомним (упражнение 13 к § 6.6), что *нильрадикал* $N(S)$ полугруппы S есть по определению объединение всех нильидеалов из S, где под *нильидеалом* из S понимается идеал, каждый элемент которого нильпотентен [1]. Следующий результат принадлежит Зайделю [1965].

Следствие 11.27. $\operatorname{rad}^0 S = N(S)$.

Доказательство. Пусть $a \in N(S)$ и M_S — произвольный неприводимый операнд над S. В силу леммы 11.16 M_S транзитивен или 0-транзитивен. Очевидно, должно выполняться последнее, так как S имеет нуль. Если $Ma \neq 0_M$, то существует такой $x \in M$, что $xa \neq 0_M$, и поэтому $xaS = M$. Следовательно, $xas = x$ для некоторого $s \in S$. Но $as \in N(S)$ и поэтому $(as)^n = 0$ для некоторого n, откуда $x = x(as)^n = x0 = 0_M$. Последнее противоречит неравенству $xa \neq 0_M$, и мы заключаем, что $Ma = 0_M$. Так как это выполняется для любого неприводимого операнда M_S над S, мы имеем $(a, 0) \in \operatorname{rad} S$, т. е. $a \in \operatorname{rad}^0 S$.

---

[1] Нильрадикал называют также радикалом Клиффорда. О соотношениях между этим радикалом и другими радикалами, определяемыми в терминах тех или иных идеалов, см. работу Босака [1968].— *Прим. ред.*

Обратно, пусть $a \in \operatorname{rad}^0 S$, т. е. $(a, 0) \in \operatorname{rad} S$. Очевидно, $\mu(0) = \omega_S$, и на основании теоремы 11.26 мы заключаем, что $(a, 0) \in \mu(as)$ для всех $s \in S^1$. Но это означает, что существуют неотрицательные целые числа m и n, для которых

$$(as)^m a = (as)^n 0.$$

Следовательно, $(as)^{m+1} = 0$ и a принадлежит нильидеалу $aS^1 \subseteq \subseteq N(S)$.

Упражнения к § 11.6

1. Пусть $\mathscr{G}$ — класс всех групп и $\mathscr{G}'$ — производный класс. Любая бесконечная циклическая полугруппа принадлежит $\mathscr{G}'$. Следовательно, $\mathscr{G} \neq \mathscr{G}'$.

* Шайном [1965] доказано, что любая коммутативная полугруппа с сокращениями принадлежит $\mathscr{G}'$. *

2. (a) Пусть $\mathscr{C}$ — произвольный тип полугрупп и $\mathscr{C}'$ — производный тип. Произвольная полугруппа тогда и только тогда принадлежит $\mathscr{C}'$, когда она изоморфна подпрямому произведению полугрупп типа $\mathscr{C}$. (По теореме Биркгофа (см. его книгу [1952] [1])) существует взаимно однозначно соответствие между представлениями полугруппы S в виде подпрямого произведения полугрупп S_i $(i \in I)$ и такими множествами $\{\theta_i \mid i \in I\}$ конгруэнций на S, что $\bigcap \{\theta_i \mid i \in I\} = \iota_S$. Здесь $S_i \cong S/\theta_i$.)

(b) Пусть $\mathscr{C}$ — некоторый тип полугрупп. Каждая полугруппа тогда и только тогда обладает максимальным гомоморфным образом типа $\mathscr{C}$, когда $\mathscr{C}$ замкнуто относительно взятия подпрямых произведений, т. е. когда произвольное подпрямое произведение полугрупп типа $\mathscr{C}$ также имеет тип $\mathscr{C}$.

§ 11.7. *Нормализатор правой конгруэнции* ρ *и эндоморфизмы операнда* S/ρ

Пусть M_S — операнд над полугруппой S и φ — ассоциированное с ним представление этой полугруппы преобразованиями множества M. Множество $\mathscr{E}(M_S)$ операторных эндоморфизмов операнда M_S является полугруппой относительно суперпозиции; оно совпадает с централизатором полугруппы $S\varphi$ в $\mathscr{T}_M$. Единственная теорема этого небольшого параграфа, принадлежащая Тулли [1960] и Хёнке [1966], показывает, как можно построить $\mathscr{E}(M_S)$, когда M_S есть строго циклический операнд. В силу теоремы 11.6 это эквивалентно построению полугруппы $\mathscr{E}(S/\rho)$, где ρ есть модулярная правая конгруэнция на S.

---

[1]) См. также цитированную выше книгу А. И. Мальцева и книгу А. Г. Куроша [1962].— *Прим. ред.*

Определим следующим образом *нормализатор* $\mathcal{N}(\rho)$ правой конгруэнции ρ на S:

$$\mathcal{N}(\rho) = \{a \in S \mid s\rho t \ \ (s, t \in S) \text{ влечет за собой } as\rho at\}.$$

Очевидно, $\mathcal{N}(\rho)$ является подполугруппой из S. Кроме того, $\mathcal{N}(\rho)$ есть объединение некоторого множества ρ-классов. В самом деле, если $a \in \mathcal{N}(\rho)$ и $a\rho b$, то $as\rho bs$ и $at\rho bt$ для любых $s, t \in S$. Следовательно, если $s\rho t$, то $as\rho at$, откуда ввиду транзитивности ρ получаем $bs\rho bt$. Очевидно, что $\rho' = \rho \cap (\mathcal{N}(\rho) \times \mathcal{N}(\rho))$ является (двусторонней) конгруэнцией на $\mathcal{N}(\rho)$. Факторполугруппа $\mathcal{N}(\rho)/\rho'$ состоит из всех ρ-классов $a\rho$ полугруппы S, для которых $a \in \mathcal{N}(\rho)$; мы будем обозначать ее через $\mathcal{N}(\rho)/\rho$.

Для каждого элемента $a \in \mathcal{N}(\rho)$ определим преобразование λ_a множества S/ρ, полагая

$$(s\rho)\,\lambda_a = (as)\,\rho \quad (\text{для всех } s \in S).$$

Преобразование λ_a взаимно однозначно, так как $a \in \mathcal{N}(\rho)$. Кроме того, оно является операторным эндоморфизмом операнда S/ρ. В самом деле, если $s, t \in S$, то

$$((s\rho)\,t)\,\lambda_a = ((st)\,\rho)\,\lambda_a = (ast)\,\rho = ((as)\,\rho)\,t = ((s\rho)\,\lambda_a)\,t.$$

Очевидно, $\lambda_a\lambda_b = \lambda_{ba}$ для всех $a, b \in \mathcal{N}(\rho)$. Если $a\rho b$ $(a, b \in \mathcal{N}(\rho))$, то $as\rho bs$ для всех $s \in S$ и, следовательно,

$$(s\rho)\,\lambda_a = (as)\,\rho = (bs)\,\rho = (s\rho)\,\lambda_b$$

и $\lambda_a = \lambda_b$. Мы заключаем, что $\lambda\colon a\rho \to \lambda_a$ есть антигомоморфизм полугруппы $\mathcal{N}(\rho)/\rho$ в полугруппу $\mathcal{E}(S/\rho)$ операторных эндоморфизмов операнда S/ρ.

Предположим теперь, что ρ модулярна и e — левая единица из S по $\operatorname{mod} \rho$. Тогда $e \in \mathcal{N}(\rho)$. В самом деле, если $s\rho t$, то $es\rho s\rho t\rho et$. Если $a \in \mathcal{N}(\rho)$, то $(e\rho)\,(a\rho) = (ea)\,\rho = a\rho$, так что $e\rho$ есть левая единица из $\mathcal{N}(\rho)/\rho$. Положим

$$\mathcal{N}_e(\rho) = \{a \in \mathcal{N}(\rho) \mid ae\rho a\}.$$

Ясно, что $\mathcal{N}_e(\rho)$ есть левый идеал в $\mathcal{N}(\rho)$, являющийся объединением некоторого множества ρ-классов. Факторполугруппа $\mathcal{N}_e(\rho)/\rho$ совпадает с главным левым идеалом из $\mathcal{N}(\rho)/\rho$, порожденным идемпотентом $e\rho$.

Теорема 11.28. *Пусть ρ — модулярная правая конгруэнция на полугруппе S, e — левая единица из S по* $\operatorname{mod} \rho$, *$\mathcal{N}(\rho)$ — нормализатор ρ, $\mathcal{E}_e(\rho)$ — левый идеал из $\mathcal{N}(\rho)$, определенный выше, и $\lambda\colon a\rho \to \lambda_a$ есть определенный выше антигомоморфизм полугруппы $\mathcal{N}(\rho)/\rho$ в полугруппу $\mathcal{E}(S/\rho)$ операторных эндоморфизмов операнда S/ρ. Тогда ограничение λ на $\mathcal{N}_e(\rho)/\rho$ является антигомоморфизмом полугруппы $\mathcal{N}_e(\rho)/\rho$ на $\mathcal{E}(S/\rho)$.*

Доказательство. Пусть $\mu \in \mathscr{E}(S/\rho)$ и $(e\rho)\mu = c\rho$. Для любого $s \in S$ имеем

$$(s\rho)\mu = ((es)\rho)\mu = ((e\rho)s)\mu = ((e\rho)\mu)s = (c\rho)s = (cs)\rho.$$

Отсюда для $s\rho t$ получаем

$$(cs)\rho = (s\rho)\mu = (t\rho)\mu = (ct)\rho,$$

откуда $cs\rho ct$, т. е. $c \in \mathscr{N}(\rho)$. Следовательно, по определению преобразования λ_c равенство (1) превращается в равенство $(s\rho)\mu = (s\rho)\lambda_c$, откуда $\mu = \lambda_c$. Если $s = e$, то в силу равенства (1) и определения элемента c имеем $c\rho = (e\rho)\mu = (ce)\rho$. Следовательно, $ce\rho c$ и $c \in \mathscr{N}_e(\rho)$. Таким образом, каждый элемент μ из $\mathscr{E}(S/\rho)$ имеет вид λ_c, где $c \in \mathscr{N}_e(\rho)$. Это показывает, что ограничение отображения λ на $\mathscr{N}_e(\rho)/\rho$ есть отображение на $\mathscr{E}(S/\rho)$.

Докажем, что такое ограничение отображения λ взаимно однозначно. Пусть a и b — такие элементы из $\mathscr{N}_e(\rho)$, что $\lambda_a = \lambda_b$. Тогда

$$a\rho = (ae)\rho = (e\rho)\lambda_a = (e\rho)\lambda_b = (be)\rho = b\rho,$$

так что a и b определяют один и тот же элемент из $\mathscr{N}_e(\rho)/\rho$.

Упражнение к § 11.7

1. Выбор левой единицы e из S по $\mathrm{mod}\ \rho$ в теореме 11.28 несуществен в следующем смысле. Если f — любой другой такой элемент и $a \in \mathscr{N}_e(\rho)$, то $af \in \mathscr{N}_f(\rho)$ и $\lambda_{af} = \lambda_a$.

§ 11.8. *Представления мономиальными матрицами*

Напомним (§ 3.1), что матрица A над группой с нулем G называется *мономиальной по строкам*, если каждая строка из A содержит не более одного ненулевого элемента из G^0. Любое представление φ полугруппы S преобразованиями множества M можно рассматривать как представление мономиальными по строкам $M \times M$-матрицами над двухэлементной группой с нулем $E^0 = \{0, 1\}$; для каждого элемента $a \in S$ положим $N(a) = (n_{xy}(a))$ $(x, y \in M)$, где

$$n_{xy}(a) = \begin{cases} 1, & \text{если } x(a\varphi) = y, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{1}$$

(См. упражнение 4 к § 3.5.) Легко проверяется, что $N(ab) = N(a)N(b)$ для всех $a, b \in S$.

Пусть V — множество мономиальных M-векторов над E^0. Для каждого $x \in M$ через $x\theta$ обозначим элемент из V, имеющий 1 на x-м месте и нули на остальных местах. Превратим V в операнд V_S над S, полагая $(x\theta)\,a = (x\theta)\,N\,(a)$. Тогда θ является операторным изоморфизмом M_S на V_S.

В некоторых случаях, особенно когда заданное представление φ неприводимо, мы можем превратить φ в представление мономиальными по строкам матрицами над нетривиальной группой с нулем. Это хорошо известно для представлений групп подстановками (см., например, § 1 гл. V книги Цассенхауза [1937]) и было впервые обобщено на полугруппы Тулли [1960], а также, независимо, Хёнке [1963] [1]). В данном параграфе нас будет интересовать возможность такой замены.

В качестве важного частного случая мы докажем, что для представления полугруппы S, индуцированного в главном правом идеале из S регулярным правым представлением полугруппы S, такая замена приводит к представлению Шютценберже (§ 3.5). Эта связь впервые была отмечена Тулли [1960].

Результаты данного параграфа можно очевидным образом превратить в двойственные к ним утверждения о замене антипредставлений преобразованиями на антипредставления мономиальными по столбцам матрицами. *Мы будем рассматривать лишь 0-транзитивные представления.* Из полученных утверждений легко выводятся результаты для транзитивных представлений. Заметим, что они приводят к представлениям строго мономиальными по строкам матрицами, т. е. матрицами, которые имеют в каждой строке в точности один отличный от нуля элемент.

Пусть M_S есть 0-транзитивный операнд над полугруппой S и 0_M — его нулевая точка. Обозначим через $\mathcal{A} = \mathcal{A}\,(M_S)$ группу операторных автоморфизмов операнда M_S. Она, конечно, совпадает с группой обратимых элементов полугруппы $\mathcal{E}\,(M_S)$, рассмотренной в предыдущем параграфе. Пусть G — произвольная подгруппа из группы $\mathcal{A}^*$, двойственной к $\mathcal{A}$. Тогда мы можем превратить M в (G, S)-биоперанд, полагая $gx = x\gamma$, где $x \in M$, $g \in G$ и γ есть элемент из $\mathcal{A}$, соответствующий элементу $g \in \mathcal{A}^*$. Заметим, что ${}_GM$ является точным унитальным левым операндом над G и $M \setminus 0_M$ инвариантно относительно G.

По теореме, двойственной к теореме 11.3, $M \setminus 0_M$ разлагается в объединение попарно не пересекающихся транзитивных левых операндов N_i $(i \in I)$ над G. Кроме того, каждый N_i *просто транзитивен*, т. е. для любых двух элементов $u, v \in N_i$ существует такой единственный элемент $g \in G$, что $gu = v$. Так как N_i транзитивен, нам нужно доказать лишь, что $gu = hu$ $(g, h \in G)$ влечет за собой $g = h$. Пусть $x \in M$. В силу 0-транзитивности операнда M_S и того, что $u \neq 0_M$, существует $a \in S$, для которого $ua = x$. Следовательно, $gx = gua = hua = hx$. Так как это

---

[1]) Для вполне 0-простых полугрупп такие представления рассматривались Л. М. Глускиным [1959c].— *Прим. ред.*

выполняется для каждого $x \in M$ и левый операнд ${}_G M$ точен, мы заключаем, что $g = h$.

Из каждого N_i выберем элемент u_i. Так как N_i просто транзитивен над G, любой элемент из $M \setminus 0_M$ однозначно представим в виде gu_i, где $i \in I$ и $g \in G$.

Пусть V — множество мономиальных I-векторов над G^0. Элемент $v \in V$ есть отображение множества I в G^0, имеющее ненулевое значение не более чем для одного элемента из I. Если $iv = g \in G$ и $jv = 0$ для всех $j \neq i$, мы пишем $v = (g)_i$. Нулевой вектор будем обозначать по-разному: то через 0_V, то через $(0)_i$ для любого $i \in I$. Определим отображение θ: $M \to V$, полагая $0_M\theta = (0)_i$ и $(gu_i)\,\theta = (g)_i$. Очевидно, θ есть взаимно однозначное отображение M на V. Превратим V в операнд V_S над S, эквивалентный M_S, полагая $(x\theta)\,a = (xa)\,\theta$ для каждого $x \in M$, $a \in S$.

Для каждого элемента $a \in S$ определим следующим образом $I \times I$-матрицу $F(a) = (f_{ij}(a))$ над G^0:

$$f_{ij}(a) = \begin{cases} h, & \text{если } u_i a = hu_j, \\ 0, & \text{если } u_i a \notin N_j\,(= Gu_j). \end{cases} \tag{2}$$

Так как либо $u_i a = 0$, либо $u_i a \in N_j$ в точности для одного $j \in I$, матрица $F(a)$ мономиальна по строкам. Докажем, что $va = vF(a)$ для каждого $v \in V$, где $vF(a)$ есть обычное произведение матриц.

Мы имеем $v = x\theta$ для некоторого $x \in M$. Если $x = 0_M$, то va и $vF(a)$ равны 0_V, поэтому мы можем предположить, что $x \neq 0_M$. Тогда $x = gu_i$ для некоторого $g \in G$ и $i \in I$, откуда $v = x\theta = (gu_i)\,\theta = (g)_i$. Предположим сначала, что $u_i a \neq 0_M$. Тогда $u_i a = hu_k$ для некоторого $h \in G$, $k \in I$ и (2) дает

$$f_{ij}(a) = \begin{cases} h, & \text{если } j = k, \\ 0, & \text{если } j \neq k. \end{cases}$$

Следовательно, i-я строка $(1)_i F(a)$ из $F(a)$ равна вектору $(h)_k$ из V. Таким образом, мы имеем

$$va = (x\theta)\,a = (xa)\,\theta = (gu_i a)\,\theta = (ghu_k)\,\theta = (gh)_k,$$

$$vF(a) = (g)_i\,F(a) = g\,(1)_i\,F(a) = g\,(h)_k = (gh)_k.$$

Если $u_i a = 0_M$, то $va = (gu_i a)\,\theta = 0_M\theta = 0_V$. Также ввиду (2) i-я строка $(1)_i\,F(a)$ из $F(a)$ равна 0_V и поэтому $vF(a) = g0_V = 0_V$.

Если $a, b \in S$ и $v \in V$, мы имеем

$$vF(ab) = v\,(ab) = (va)\,b = (vF(a))\,F(b) = v\,(F(a)\,F(b))$$

и, так как это выполняется для любого $v \in V$,

$$F(ab) = F(a)\,F(b).$$

Таким образом, $a \to F(a)$ есть представление полугруппы S мономиальными по строкам $I \times I$-матрицами над G^0.

Теорема 11.29. *Пусть M_S есть 0-транзитивный операнд над полугруппой S, G — произвольная подгруппа группы, двойственной к группе операторных автоморфизмов операнда M_S. Превратим M_S в биоперанд ${}_GM_S$. Тогда существует такое подмножество $\{u_i \mid i \in I\}$ из $M \setminus 0_M$, что каждый элемент из $M \setminus 0_M$ однозначно представим в виде gu_i, где $g \in G$, $i \in I$. Каждому $a \in S$ поставим в соответствие $I \times I$-матрицу $F(a)$ над G^0, определенную условием* (2). *Тогда $F(a)$ мономиальна по строкам и $F(ab) = F(a)F(b)$ для всех $a, b \in S$.*

Это представление эквивалентно исходному в следующем смысле. Пусть V — множество мономиальных I-векторов $(g)_i$ над G^0, рассматриваемое как биоперанд ${}_GV_\Sigma$, где Σ есть полугруппа всех мономиальных по строкам $I \times I$-матриц над G^0. Превратим V в операнд над S, полагая $va = vF(a)$ для каждого $v \in V$ и $a \in S$. Тогда отображение θ, заданное равенствами $(gu_i)\theta = (g)_i$, $0_M\theta = 0_V$, является операторным изоморфизмом M_S на V_S.

Свяжем предыдущее с (правосторонним) представлением Шютценберже (1) из § 3.5.

Пусть R есть $\mathscr{R}$-класс полугруппы S и $a \in R$. Мы будем исключать тривиальный случай, когда $|R| = 1$. Следовательно, $a \in aS$, так как в противном случае $R = \{a\}$. Таким образом, aS является строго циклическим операндом над S. В силу леммы 11.5 фактороперанд $R^0 = aS/I(aS)$ является 0-транзитивным операндом для $I(aS) \neq \varnothing$. Обозначая через 0_R нулевую точку операнда R^0, мы имеем $R^0 = R \cup 0_R$. Если $I(aS) = \varnothing$, то операнд R сам является транзитивным. В целях единообразия присоединим в этом случае нулевую точку 0_R к R.

Пусть H есть $\mathscr{H}$-класс полугруппы S, содержащий R. В § 2.4 мы определили

$$T'(H) = \{u \in S^1 \mid uH \subseteq H\}.$$

Обозначим через λ_u левый внутренний сдвиг $s \to us$ полугруппы S^1 и положим $\gamma'_u = \lambda_u \mid H$.

Пусть $u \in T'(H)$ и $h \in H$. Тогда $uh\mathscr{H}h$ и поэтому $uh\mathscr{L}h$. В силу леммы, двойственной к лемме Грина 2.2, $\lambda_u \mid R_h$ есть взаимно однозначное отображение R_h на R_{uh}, сохраняющее $\mathscr{L}$-классы. Здесь $R_h = R_{uh} = R$, и поэтому $\gamma''_u = \lambda_u \mid R$ есть подстановка на R, сохраняющая $\mathscr{H}$-классы. Следовательно, $\Gamma'' = \{\gamma''_u \mid u \in T'\}$ — группа. Так как Γ'' действует транзитивно на H, которое может быть любым $\mathscr{H}$-классом из S, содержащимся в R, ясно, что $\mathscr{H}$-классы из S, содержащиеся в R, являются классами транзитивности на R относительно Γ''. Очевидно, $\gamma''_u \to \gamma^*_u$ $(= \gamma''_u \mid H)$

есть изоморфизм Γ'' на двойственную группу Шютценберже $\Gamma'(H)$, определение которой приведено в § 2.4.

Так как для каждого $u \in T'$ левый внутренний сдвиг λ_u коммутирует с каждым преобразованием на R^0, индуцированным некоторым правым внутренним сдвигом полугруппы S, это же верно и для каждого γ''_u. Тогда Γ'' есть подгруппа группы $\mathcal{A}(R^0)$ операторных автоморфизмов. (Если R регулярно, то $\Gamma'' = \mathcal{A}(R^0)$; см. упражнение 2 к настоящему параграфу.) Возьмем в качестве G группу, двойственную к Γ''.

По теореме 2.24 группа G изоморфна (правой) группе Шютценберже $\Gamma(H)$. Для того чтобы применить (2) с формулой (1) из § 3.5 к (правому) представлению Шютценберже $M_D(s) = (m_{\lambda\mu}(s))$ полугруппы S, мы должны установить некоторый изоморфизм между G и Γ, или, что то же самое, некоторый антиизоморфизм между Γ'' и Γ. То, что мы делаем, опирается на доказательство теоремы 2.24. Выберем и зафиксируем элемент $h_1 \in H$. Если $\gamma'' \in \Gamma''$, то $h_1\gamma'' \in H$ и поэтому $h_1\gamma'' = h_1\gamma$ для единственного $\gamma \in \Gamma$. Положим $\gamma = \gamma''\varphi$. Ясно, что φ есть антиизоморфизм Γ'' на Γ.

Пусть $\{H_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ есть множество $\mathcal{H}$-классов из R. Для каждого $\lambda \in \Lambda$ выберем элемент $h_\lambda \in H_\lambda$. При этом $H = H_1$ и h_1 есть ранее выбранный элемент из H. Тогда представление F, заданное условием (2), принимает вид

$$f_{\lambda\mu}(a) = \begin{cases} \gamma''(u)\,\varphi, & \text{если } h_\lambda a = uh_\mu\ (u \in T'), \\ 0, & \text{если } h_\lambda a \notin H_\mu. \end{cases} \tag{3}$$

Другими словами, $f_{\lambda\mu}(a)$ равно 0, если не имеет место включение $h_\lambda a \in H_\mu$; в последнем случае существует такое $u \in T'$, что $h_\lambda a = uh_\mu$ и соответствующий элемент $\gamma''(u) \in \Gamma''$ однозначно определен, так как $u_1h_\mu = u_2h_\mu$ влечет за собой $\gamma''(u_1) = \gamma''(u_2)$. Возьмем тогда в качестве $f_{\lambda\mu}(a)$ соответствующий элемент $\gamma''(u)\,\varphi$ из Γ, который в данном случае принадлежит G.

Как и в § 3.5, существуют такие элементы q_λ и q'_λ из S, что $h_\lambda = h_1q_\lambda$ и $h_1 = h_\lambda q'_\lambda$. Соотношение $h_\lambda a = uh_\mu$ мы можем теперь переписать в виде

$$h_1q_\lambda a = uh_1q_\mu$$

или

$$h_1q_\lambda aq'_\mu = uh_1q_\mu q'_\mu = uh_1 = h_1\gamma''(u).$$

Следовательно, $\gamma''(u)\,\varphi = \gamma(q_\lambda aq'_\mu)$ и (3) записывается в виде

$$f_{\lambda\mu}(a) = \begin{cases} \gamma(q_\lambda aq'_\mu), & \text{если } h_\lambda a \in H_\mu, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{4}$$

Замечая, что $h_\lambda a \in H_\mu$ влечет за собой $H_\lambda a = H_\mu$, мы видим, что условие (4) совпадает с условием (1) из § 3.5.

Упражнения к § 11.8

1. В представлении $a \to F(a)$, заданном условием (2), строки матрицы $F(a)$ могут быть заполнены произвольным образом в том смысле, что для фиксированных $i, j \in I$ и $g \in G$ существует такое $a \in S$, что $f_{ij}(a) = g$. (Тулли [1960].)

2. Пусть R — регулярный $\mathscr{R}$-класс полугруппы S. Тогда (левая) группа Шютценберже для R (действие которой расширено на все R, как в тексте) совпадает с группой $\mathscr{A}(R^0)$ операторных автоморфизмов операнда R^0_S. (Это не известно для иррегулярного R.)

§ 11.9. Другие типы представлений

Цель этого заключительного параграфа — обратить внимание на некоторые типы операндов (или представлений), которые более специальны, нежели неприводимые операнды. Мы не углубляемся в их теорию, которая находится еще в зачаточном состоянии, и отсылаем читателя за деталями к работам Тулли [1960, 1961] и Хёнке [1963, 1966].

Операнд M_S над полугруппой S называется *примитивным*, если единственными операторными эквивалентностями на M являются отношение равенства ι_M и универсальное отношение ω_M. Это условие эквивалентно следующему: если θ есть операторный гомоморфизм M_S на некоторый операнд M'_S над S, то либо $|M'| = 1$, либо θ является изоморфизмом. Следовательно, полугруппа эндоморфизмов $\mathscr{E}(M_S)$ примитивного операнда M_S есть группа или группа с нулем.

Пусть FM — множество неподвижных точек операнда M_S. Операнд M_S называется *вполне неприводимым* (Хёнке), если он примитивен и $MS \nsubseteq FM$. Очевидно, операнд примитивен тогда и только тогда, когда он либо вполне неприводим, либо состоит не более чем из двух элементов и является тривиальным или нулевым. Примитивный операнд не может иметь собственного инвариантного подмножества более чем из одного элемента; следовательно, по лемме 11.16 он либо неприводим, либо имеет мощность не больше двух и является нулевым или тривиальным. Таким образом, вполне неприводимый операнд неприводим.

Назовем правую конгруэнцию ρ на полугруппе S *максимальной*, если для любой правой конгруэнции σ на S из $\rho \subseteq \sigma \subseteq \omega_S$ следует $\sigma = \rho$ или $\sigma = \omega_S$ (возможность $\rho = \omega_S$ допускается). Если ρ и σ — правые конгруэнции на S, $\rho \subseteq \sigma$ и ρ модулярна, то σ модулярна; следовательно, при использовании термина «максимальная модулярная правая конгруэнция» путаницы не возникнет. Следующий результат принадлежит Тулли [1960] и Хёнке [1966].

Лемма 11.30. (i) *Если операнд M_S над полугруппой S вполне неприводим, то существует максимальная модулярная конгруэнция ρ на S, для которой M_S эквивалентен S/ρ.*

(ii) *Если ρ — правая конгруэнция на полугруппе S, то S/ρ примитивен тогда и только тогда, когда ρ максимальна. Операнд S/ρ вполне неприводим тогда и только тогда, когда ρ максимальна и выполняются условия:* (C1) *существует не более одного ρ-класса, который является правым идеалом из S, и* (C2) *если R есть ρ-класс, являющийся правым идеалом из S, то $S^2 \nsubseteq R$.*

Доказательство. (i) Если M_S вполне неприводим, то он неприводим, как отмечено выше, и в силу леммы 11.16 является строго циклическим. На основании теоремы 11.6 существует такая модулярная правая конгруэнция ρ на S, что M_S эквивалентен S/ρ. Если ρ не максимальна, то существует правая конгруэнция σ на S, для которой $\rho \subset \sigma \subset \omega_S$. По лемме 11.1 существует операторная эквивалентность на S/ρ, которая не является ни отношением равенства, ни универсальным отношением, и, так как S/ρ эквивалентен M_S, это противоречит нашим предположениям.

(ii) Пусть ρ — конгруэнция на S. Так как по лемме 11.1 существует изоморфизм между структурой операторных эквивалентностей на S/ρ и структурой операторных эквивалентностей (т. е. правых конгруэнций) на S, содержащих ρ, ясно, что операнд S/ρ примитивен тогда и только тогда, когда конгруэнция ρ максимальна. Предположим, что S/ρ примитивен. Тогда (C1) утверждает, что S/ρ не является тривиальным операндом, если он имеет больше одного элемента, и (C2) утверждает, что S/ρ не является нулевым, и если он тривиален, то S/ρ имеет больше одного элемента.

Хёнке называет полугруппу *вполне примитивной*, если она допускает точное вполне неприводимое представление. Он исследовал $\mathscr{C}$-радикал полугруппы S для класса $\mathscr{C}$ вполне примитивных полугрупп [1966]. Группа вполне примитивна тогда и только тогда, когда она примитивна в классическом смысле; это имеет место тогда и только тогда, когда она содержит максимальную подгруппу H, пересечение всех сопряженных с которой равно единичной подгруппе.

Тулли [1960] называет операнд M_S над полугруппой S *дизъюнктивным*, если отношение равенства ι_M на M есть единственная операторная эквивалентность на M, имеющая одноэлементный класс эквивалентности. Он доказал следующее утверждение.

Лемма 11.31. (i) *Если M_S — дизъюнктивный операнд над полугруппой S, то M не содержит собственных инвариантных под-*

множеств мощности более единицы и поэтому будет одного из следующих типов: транзитивный; 0-транзитивный; нулевой, содержащий не более двух элементов; тривиальный, содержащий не более двух элементов.

(ii) *Каждый примитивный операнд дизъюнктивен. Каждый дизъюнктивный операнд, содержащий инвариантный элемент, примитивен.*

Доказательство. (i) Предположим, что N есть собственное инвариантное подмножество из M и $|N| > 1$. Если ν есть соответствующая эквивалентность Риса на M, то $\nu \neq \iota_M$, так как $|N| > 1$, в то время как каждый элемент из $M \setminus N$ ($\neq \varnothing$) образует одноэлементный ν-класс. Тогда M_S не дизъюнктивен. Второе утверждение из (i) является непосредственным следствием леммы 11.16.

(ii) Из определений сразу же следует, что каждый примитивный операнд дизъюнктивен. Пусть M_S — дизъюнктивный операнд, содержащий инвариантный элемент z и σ — произвольная операторная эквивалентность на M. Тогда $(z\sigma)a = (za)\sigma = z\sigma$ для всех $a \in S$. Следовательно, $N = z\sigma$ есть инвариантное подмножество из M. Ввиду (i) имеем $N = M$ или $|N| = 1$. Если $N = M$, то $\sigma = \omega_M$. Если $|N| = 1$, то $\sigma = \iota_M$, так как M_S дизъюнктивен. Следовательно, ω_M и ι_M — единственные операторные эквивалентности на M, т. е. M_S примитивен.

Следующая лемма, принадлежащая Тулли [1960], дает одну из характеризаций дизъюнктивных операндов.

Лемма 11.32. *Операнд M_S над полугруппой S дизъюнктивен тогда и только тогда, когда он удовлетворяет следующему условию: если x, y, z — произвольные различные элементы из M, то существует такой элемент $a \in S$, что либо $xa = z$ и $ya \neq z$, либо $xa \neq z$ и $ya = z$.*

Если $|M|$ не больше двух, то это условие выполняется тривиально и, следовательно, M дизъюнктивен, что, впрочем, здесь и так ясно.

Доказательство. Для каждого элемента $z \in M$ определим следующим образом отношение τ_z на M:

$$\tau_z = \{(z, z)\} \cup \{(x, y) \in (M \setminus z) \times (M \setminus z) \mid xs = z \text{ тогда и только тогда, когда } ys = z \quad (s \in S)\}.$$

Это отношение есть аналог главной регулярной правой эквивалентности Дюбрея, соответствующей множеству $\{z\}$. Ясно, что τ_z есть операторная эквивалентность на M, один из классов которой есть $\{z\}$, и $\tau_z \neq \omega_M$, за исключением случая, когда $|M| = 1$.

Легко видеть, что условие леммы равносильно тому, что $\tau_z = \iota_M$ для каждого $z \in M$. Ясно, что это так, если операнд M_S дизъюнктивен.

Предположим, что M_S не дизъюнктивен. Тогда существует такая операторная эквивалентность σ на M, имеющая одноэлементный σ-класс $\{z\}$, что $\sigma \neq \iota_M$. Имеем $\sigma \subseteq \tau_z$. В самом деле, если $(x, y) \in \sigma$, то $(xs, ys) \in \sigma$ для каждого $s \in S$, так что $xs = z$ [или $x = z$] тогда и только тогда, когда $ys = z$ [или $y = z$]. Следовательно, $\tau_z \neq \iota_M$ и условие леммы не выполняется.

Операнд M_S называется *дважды транзитивным*, если для любых элементов $u, v, x, y \in M$, где $u \neq v$, существует такой $a \in S$, что $ua = x$ и $va = y$.

Любой дважды транзитивный операнд примитивен. В самом деле, предположим, что σ есть операторная эквивалентность на M и $\sigma \neq \iota_M$. Тогда существует $u \neq v$ в M, для которых $u\sigma v$. Пусть $x, y \in M$. Тогда существует такой $a \in S$, что $ua = x$ и $va = y$. Но $u\sigma v$ влечет за собой $ua\sigma va$. Следовательно, $x\sigma y$, т. е. $\sigma = \omega_M$.

Пусть M_S — операнд без неподвижных точек. Тогда мы имеем следующие импликации: дважды транзитивность *влечет за собой* примитивность *влечет за собой* дизъюнктивность *влечет за собой* транзитивность. Примеры, приведенные в упражнениях, показывают, что не выполняется ни одна из импликаций, обратных к данным.

Упражнения к § 11.9

1. Пусть G — циклическая группа простого порядка. Тогда G_G есть примитивный операнд над G, который не дважды транзитивен.

2. Пусть G — абелева группа, порядок которой не является простым числом. Тогда G_G есть дизъюнктивный операнд над G, который не примитивен.

3. Пусть S состоит из константных преобразований множества M и $|M| > 2$. Тогда операнд M_S, определенный очевидным образом, транзитивен, но не дизъюнктивен.

Глава 12

ВЛОЖЕНИЕ ПОЛУГРУППЫ В ГРУППУ

В теореме 1.23 было установлено, что реверсивная справа полугруппа с сокращениями может быть вложена в группу. Здесь мы рассмотрим общую задачу вложения полугруппы в группу. То, что не всякая полугруппа с сокращениями вложима в группу, впервые было доказано А. И. Мальцевым [1937]. В § 12.4 мы указываем на его контрпример [1]). Необходимые и достаточные условия вложимости полугруппы в группу были найдены А. И. Мальцевым в статье [1939]. Каждое из условий Мальцева состоит в том, что из выполнимости в данной полугруппе конечного набора равенств определенного типа вытекает выполнимость в ней некоторого другого равенства. Множество этих условий счетно и никакого его конечного подмножества уже не достаточно для возможности вложения полугруппы в группу. Эти результаты А. И. Мальцева мы излагаем в § 12.6 и 12.8. Аналогичный набор квазитождеств был найден Ламбеком [1951]. В § 12.5 мы приводим результаты Ламбека, а в § 12.7 устанавливаем соотношение между условиями Ламбека и условиями Мальцева.

Характерная черта доказательств Ламбека состоит в использовании понятия частных, которые являются обобщением соответствующих понятий, применяемых в частном случае реверсивных справа полугрупп (теорема 1.23). В § 12.4 вводится одно принадлежащее Мальцеву условие, которому обязательно удовлетворяет полугруппа, вложимая в группу, и показывается, что для полугруппы, удовлетворяющей этому условию, всегда можно построить группу частных. Полугруппа вложима в группу тогда и только тогда, когда она естественным образом вкладывается в свою группу частных.

В § 12.1 и 12.2 вводится понятие свободной группы на полугруппе. Это понятие играет основную роль в рассматриваемом вопросе. В качестве следствия устанавливается, что полугруппа может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда в группу может быть вложена каждая ее конечно порожденная подполугруппа. Из того факта, что полугруппа может быть вложена в группу

---

[1]) См. стр. 365.— *Прим. перев.*

тогда и только тогда, когда она может быть вложена в свободную группу на ней, мы выводим в § 12.3 необходимые и достаточные условия вложимости, принадлежащие Птаку [1949].

§ 12.1. Свободная группа на полугруппе

В теореме 9.4 доказано, что если M — некоторое множество и μ: $M \to S$ — взаимно однозначное отображение множества M в полугруппу S, то S является свободной полугруппой на $M\mu$ тогда и только тогда, когда для любой полугруппы T и любого отображения ν: $M \to T$ существует такой гомоморфизм φ: $S \to T$, что $\mu\varphi = \nu$. Мы будем называть такую свободную полугруппу *свободной полугруппой* (S, μ) и, допуская вольность речи, назовем ее свободной полугруппой на M.

Аналог теоремы 9.4 выполняется для свободных групп. Пусть M — множество и ν: $M \to G$ — взаимно однозначное отображение множества M в группу G. (G, ν) является *свободной группой на* M (точнее, на $M\nu$) тогда и только тогда, когда для любой группы H и любого отображения δ: $M \to H$ существует такой гомоморфизм θ: $G \to H$, что $\nu\theta = \delta$. Эту характеризацию можно получить, используя определение свободной группы на множестве (§ 1.12) точно так же, как получается соответствующая характеризация для полугрупп в доказательстве теоремы 9.4.

Если S и S' — полугруппы, μ и μ' — отображения множества M соответственно в S и S', то говорят, что (S, μ) и (S', μ') *эквивалентны*, если существует изоморфизм σ полугруппы S на S', такой, что $\mu\sigma = \mu'$ и, следовательно, $\mu'\sigma^{-1} = \mu$. Если (S, μ) — свободная полугруппа на M и полугруппа (S', μ') эквивалентна (S, μ), то легко видеть, что (S', μ') также является свободной полугруппой на M. Аналогично, если (G, ν) — свободная группа на M и группа (G, ν) эквивалентна (G', ν'), то последняя является свободной группой на M. В каждом из этих случаев справедливы обратные утверждения, т. е. имеет место

Лемма 12.1. (a) *Если* (S, μ) — *свободная полугруппа на множестве* M, *то* (S', μ') *является свободной полугруппой на* M, *где* μ': $M \to S'$, *тогда и только тогда, когда* (S', μ') *эквивалентна* (S, μ).

(b) *Если* (G, ν) — *свободная группа на множестве* M, *то* (G', ν') *является свободной группой на* M, *где* ν': $M \to G'$, *тогда и только тогда, когда* (G', ν') *эквивалентна* (G, ν).

Доказательство. Утверждения (a) и (b) доказываются аналогично, поэтому мы докажем лишь первое из них.

Как уже было отмечено, достаточность справедлива. Предположим теперь, что (S, μ) и (S', μ') — свободные полугруппы на M. Тогда на основании теоремы 9.4 существуют гомоморфизмы $\varphi: S \to S'$ и $\varphi': S' \to S$, для которых $\mu\varphi = \mu'$ и $\mu'\varphi' = \mu$. Следовательно, $\mu\varphi\varphi' = \mu$ и $\mu'\varphi'\varphi = \mu'$. Таким образом, $\varphi\varphi'$ и $\varphi'\varphi$ индуцируют тождественные преобразования соответственно на множествах $M\mu$ и $M\mu'$. В силу этого $\varphi\varphi'$ должно быть тождественным преобразованием всей полугруппы S, поскольку $M\mu$ есть ее порождающее множество; аналогично, $\varphi'\varphi$ является тождественным преобразованием всей полугруппы S'. Следовательно, φ есть изоморфизм полугруппы S на S', а φ' — обратный к нему изоморфизм. Из равенства $\mu\varphi = \mu'$ теперь вытекает, что (S, μ) и (S', μ') эквивалентны. Это доказывает необходимость условия и завершает доказательство леммы.

Пусть A — подмножество группы G. Пересечение всех подгрупп из G, содержащих A, является подгруппой. Эту подгруппу будем обозначать через $[A]$ и будем говорить, что она *порождается множеством* A. Множество A называется множеством *групповых образующих* подгруппы $[A]$. Термин «групповые образующие» дает возможность подчеркнуть различие между полугруппой $\langle A \rangle$, порожденной множеством A, и группой $[A]$, порожденной множеством A. Вообще говоря, $\langle A \rangle$ не равно $[A]$. Например, если (G, ν) — свободная группа на M, то $[M\nu] = G$, в то время как $(\langle M\nu \rangle, \nu)$ является свободной полугруппой на M.

Пару (H, η) будем называть *группой на полугруппе* S или просто S-*группой*, если H — группа и η — гомоморфизм полугруппы S в H, такой, что $S\eta$ является множеством групповых образующих группы H. Пару (G, γ) будем называть *свободной группой на полугруппе* S или *свободной* S-*группой*, если (G, γ) является S-группой и если для любой S-группы (H, η) существует такой гомоморфизм θ группы G в H, что $\gamma\theta = \eta$ (т. е. следующая диаграмма коммутативна).

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\gamma"] \arrow[dr, "\eta"'] & G \arrow[d, "\theta"] \\ & H \end{tikzcd}$$

Если ограничения двух гомоморфизмов α и β полугруппы [группы] S в полугруппу T совпадают на некотором множестве образующих [групповых образующих] полугруппы [группы] S, то $\alpha = \beta$. Следовательно, гомоморфизм θ группы G в H однозначно определяется условием $\gamma\theta = \eta$, поскольку $S\gamma$ есть множество групповых образующих группы H.

Как и в случае свободных полугрупп и свободных групп, мы будем говорить, что две S-группы (H, η) и (H', η') *эквивалентны*, если существует такой изоморфизм τ группы H на H', что $\eta\tau = \eta'$ и (следовательно) $\eta'\tau^{-1} = \eta$. Доказательство следующей леммы проводится точно так же, как доказательство леммы 12.1.

Лемма 12.2. *Если (G, γ) — свободная группа на полугруппе S, то S-группа (G', γ') является свободной группой на полугруппе S тогда и только тогда, когда она эквивалентна (G, γ).*

Теперь мы покажем, опираясь на следующую конструкцию, что для любой полугруппы S существует свободная группа на S. Приводимая конструкция более сложна, чем это требуется для теоремы существования. Общность этой конструкции окажется удобной в дальнейшем.

Конструкция 12.3. *Пусть S — полугруппа и Γ — ее порождающее множество. Пусть M — произвольное множество той же мощности, что и Γ, а σ — взаимно однозначное отображение множества M на Γ. Обозначим через (T, τ) свободную полугруппу на M и через (F, φ) свободную группу на M.*

Пусть α — гомоморфизм полугруппы T в F, такой, что $\tau\alpha = \varphi$, и β — гомоморфизм полугруппы T в S, такой, что $\tau\beta = \sigma$. Обозначим через ρ отношение $\rho = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha$ на F и через ρ_1 — конгруэнцию на F, порожденную ρ. Тогда (G, γ) является свободной группой на S, где $G = F/\rho_1$ и γ — гомоморфизм полугруппы S в G, такой, что $\sigma\gamma = \varphi\rho_1^\natural$.

$$
\begin{tikzcd}
 & M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[d, "\tau"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
S \arrow[dr, "\gamma"'] & T \arrow[l, "\beta"'] \arrow[r, "\alpha"] & F \arrow[dl, "\rho_1^\natural"] \\
 & G = F/\rho_1 &
\end{tikzcd}
$$

Проверка. На основании теоремы 9.4 указанные гомоморфизмы α и β полугруппы T существуют. Кроме того, α и β являются единственными отображениями с требуемыми свойствами (действительно, $\langle M\sigma\rangle = S$ и $[M\varphi] = F$). Таким образом, отношение ρ (а поэтому и ρ_1) на группе F определяется однозначно.

Далее, отображение $M\sigma$ в G, переводящее произвольный элемент $m\sigma$ $(m \in M)$ в $m\varphi\rho_1^\natural$, единственным образом продолжается до гомоморфизма γ полугруппы S в G. В самом деле, пусть γ — такой гомоморфизм, что $\sigma\gamma = \varphi\rho_1^\natural$, и $s \in S$. Тогда, так как по предположению $M\sigma$ порождает S, мы имеем $s = m_1\sigma m_2\sigma \ldots$ $\ldots m_n\sigma$ для некоторых $m_i \in M$ и поэтому должны иметь $s\gamma = m_1\sigma\gamma m_2\sigma\gamma \ldots m_n\sigma\gamma = m_1\varphi\rho_1^\natural m_2\varphi\rho_1^\natural \ldots\ldots m_n\varphi\rho_1^\natural$. С другой стороны, используя последнее выражение, мы можем однозначно определить $s\gamma$. В самом деле, предположим, что $s = m'_1\sigma \ldots m'_p\sigma$ при $m'_j \in M$. Положим $u = m_1\tau m_2\tau \ldots m_n\tau$ и $u' = m'_1\tau \ldots m'_p\tau$. Тогда $u\beta = s = u'\beta$, поскольку $\tau\beta = \sigma$. Следовательно, $(u\alpha, u'\alpha) \in \alpha^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha$. Таким образом, $u\alpha\rho_1^{\natural} = u'\alpha\rho_1^{\natural}$. Используя равенство $\tau\alpha = \varphi$, мы получаем отсюда $m_1\varphi\rho_1^{\natural} \ldots m_n\varphi\rho_1^{\natural} = m'_1\varphi\rho_1^{\natural} \ldots m'_p\varphi\rho_1^{\natural}$, откуда в свою очередь вытекает $m_1\sigma\gamma m_2\sigma\gamma \ldots m_n\sigma\gamma = m'_1\sigma\gamma \ldots m'_p\sigma\gamma$.

Теперь непосредственно видно, что заданное отображение является гомоморфизмом. В самом деле, если $s = m_1\sigma \ldots m_n\sigma$ и $t = m'_1\sigma \ldots m'_p\sigma$, то $st = m_1\sigma \ldots m_n\sigma m'_1\sigma \ldots m'_p\sigma$. Следовательно, $(st)\,\gamma = m_1\sigma\gamma \ldots m_n\sigma\gamma m'_1\sigma\gamma \ldots m'_p\sigma\gamma = (s\gamma)\,(t\gamma)$.

Далее, $M\varphi$ является множеством групповых образующих группы F, и поэтому $M\varphi\rho_1^{\natural}$ является множеством групповых образующих группы $G = F/\rho_1$. Поскольку $M\varphi\rho_1^{\natural} = M\sigma\gamma \subseteq S\gamma$, отсюда вытекает, что $S\gamma$ есть множество групповых образующих группы G. Итак, мы установили, что (G, γ) является S-группой.

Пусть (H, η) — произвольная S-группа. Тогда $\sigma\eta$ есть отображение множества M в H. Так как (F, φ) — свободная группа на M, существует такой гомоморфизм λ группы F в H, что $\sigma\eta = \varphi\lambda$. Докажем, что $\rho \subseteq \lambda \circ \lambda^{-1}$. Возьмем $(w, w') \in \rho$. Тогда существуют такие $u, u' \in T$, что $u\alpha = w$, $u'\alpha = w'$ и $u\beta = u'\beta$. Пусть $u = m_1\tau \ldots m_n\tau$ и $u' = m'_1\tau \ldots m'_p\tau$ $(m_i, m'_j \in M)$. Тогда

$$\begin{aligned} w\lambda &= (m_1\varphi \ldots m_n\varphi)\,\lambda = \\ &= m_1\varphi\lambda \ldots m_n\varphi\lambda = \\ &= m_1\sigma\eta \ldots m_n\sigma\eta = \\ &= (m_1\sigma \ldots m_n\sigma)\,\eta = \\ &= (u\beta)\,\eta \end{aligned}$$

и, аналогично, $w'\lambda = (u'\beta)\,\eta$.

Следовательно, поскольку $u\beta = u'\beta$; мы имеем $w\lambda = w'\lambda$, т. е. $(w, w') \in \lambda \circ \lambda^{-1}$. Итак, $\rho \subseteq \lambda \circ \lambda^{-1}$ и поэтому $\rho_1 \subseteq \lambda \circ \lambda^{-1}$.

Из леммы 1.6 вытекает теперь существование такого гомоморфизма θ группы G в H, что $\rho_1^{\natural}\theta = \lambda$. Мы имеем $\sigma\,(\gamma\theta) = (\sigma\gamma)\,\theta = \varphi\,(\rho_1^{\natural}\theta) = \varphi\lambda = \sigma\eta$. Таким образом, ограничения отображений η и $\gamma\theta$ на $M\sigma$ совпадают. Поскольку $M\sigma$ порождает S, отсюда вытекает $\eta = \gamma\theta$.

Построение гомоморфизма θ, удовлетворяющего этому равенству, завершает проверку конструкции и показывает, что (G, γ) является свободной группой на S.

§ 12.2. *Общая задача вложения полугруппы в группу*

Следующая теорема показывает важность свободной группы на полугруппе для рассматриваемой задачи.

Теорема 12.4. *Пусть (G, γ) — свободная группа на полугруппе S. Полугруппа S может быть вложена в группу тогда и толь-*

ко тогда, когда отображение γ *является вложением полугруппы* S *в* G.

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь необходимость. Предположим, что S может быть вложена в группу, так что существует изоморфизм η полугруппы S в группу H. Очевидно, мы можем считать, что $S\eta$ является множеством групповых образующих группы H. Таким образом, (H, η) является S-группой и поэтому, так как (G, γ) есть свободная S-группа, существует гомоморфизм θ: $G \to H$, такой, что $\gamma\theta = \eta$. Отсюда в силу взаимной однозначности отображения η следует взаимная однозначность отображения γ. Итак, γ вкладывает S в G.

Мы скажем, что группа H является *группой, порожденной полугруппой*[1] S, если существует такой изоморфизм φ полугруппы S в H, что $S\varphi$ является множеством групповых образующих группы H. Из доказательства теоремы 12.4 следует, что если S может быть вложена в группу, то свободная группа G на S является наибольшей из групп, порожденных полугруппой S, в том смысле, что любая группа, порожденная полугруппой S, есть гомоморфный образ группы G. Упражнение 1 к настоящему параграфу показывает, что существуют и минимальные группы, порожденные полугруппой S, а упражнение 2 — что могут существовать две минимальные порожденные полугруппой S группы H_1 и H_2, такие, что не существует изоморфизма над S группы H_1 на H_2.

Возможность вложения полугруппы в группу зависит только от ее конечно порожденных подполугрупп. Мы используем конструкцию 12.3 для вывода этого результата из теоремы 12.4. Нам понадобится одна вспомогательная лемма (доказательство которой непосредственно вытекает из соответствующих определений).

Лемма 12.5. (a) *Пусть* (S, μ) *— свободная полугруппа на* M *и* M' *— непустое подмножество из* M. *Положим* $\mu' = \mu \mid M'$ *и* $S' = \langle M'\mu' \rangle$. *Тогда* (S', μ') *является свободной полугруппой на* M'.

(b) *Пусть* (G, γ) *— свободная группа на* M *и* M' *— непустое подмножество из* M. *Положим* $\gamma' = \gamma \mid M'$ *и* $G' = [M'\gamma']$. *Тогда* (G', γ') *является свободной группой на* M'.

Теорема 12.6. *Полугруппа вложима в группу тогда и только тогда, когда этим свойством обладает каждая ее конечно порожденная подполугруппа.*

Доказательство. В доказательстве нуждается лишь достаточность условия. Предположим, что каждая конечно порож-

[1]) В оригинале receiving group.— *Прим. перев.*

денная подполугруппа S может быть вложена в группу, а сама полугруппа S не вложима в группу. Отсюда, в частности, вытекает, что если (G, γ) — произвольная свободная группа на S, то γ не является взаимно однозначным отображением.

В качестве (G, γ) возьмем свободную группу на S, указанную в конструкции 12.3, а в качестве порождающего множества $M\sigma$ полугруппы S возьмем саму S. Поскольку γ не взаимно однозначно, существуют такие $m, m' \in M$, что $m\sigma\gamma = m'\sigma\gamma$, но $m\sigma \neq m'\sigma$. Так как $\sigma\gamma = \varphi\rho_1^{\natural}$, из $m\sigma\gamma = m'\sigma\gamma$ вытекает $(m\varphi, m'\varphi) \in \rho_1$. В силу того что ρ_1 есть конгруэнция, порожденная отношением ρ, существуют такие элементы $w_0 = m\varphi, w_1, \ldots, w_n = m'\varphi$ из F, что $w_{i-1} \to w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ есть элементарный ρ-переход, т. е. $w_{i-1} = a_i y_i b_i$ и $w_i = a_i x_i b_i$, где $(y_i, x_i) \in \rho \cup \rho^{-1} \cup \iota_F$ и $a_i, b_i \in F$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Так как $M\varphi$ является множеством групповых образующих группы F, каждый из элементов a_i, b_i, x_i, y_i есть произведение конечного числа элементов из $M\varphi \cup (M\varphi)^{-1}$. Для каждого из a_i, b_i, x_i, y_i выберем произвольное (но фиксированное) выражение в виде такого произведения и через N обозначим множество всех элементов m из M, для которых $m\varphi$ или $(m\varphi)^{-1}$ входит в качестве сомножителя в одно из указанных выражений для a_i, b_i, x_i, y_i. Тогда N является конечным множеством.

Пусть S' — подполугруппа из S, порожденная множеством $N\sigma$, и $M' = S'\sigma^{-1}$. Обозначим через F' подгруппу из F, порожденную множеством $M'\varphi$, и положим $\varphi' = \varphi \mid M'$. Тогда (F', φ') есть свободная группа на M' (лемма 12.5 (b)). Пусть T' — подполугруппа из T, порожденная множеством $M'\tau$, и $\tau' = \tau \mid M'$. Тогда (T', τ') является свободной полугруппой на M' (лемма 12.5 (a)). Далее, если $\alpha' = \alpha|T'$ и $\beta' = \beta \mid T'$, то $\tau'\alpha' = \varphi'$ и $\tau'\beta' = \sigma'$.

Положим $\rho' = \rho \cap (F' \times F') = (\alpha')^{-1} \circ \beta' \circ (\beta')^{-1} \circ \alpha'$. Тогда на основании конструкции 12.3 $(F'/\rho'_1, \gamma')$ (где ρ'_1 есть конгруэнция на F', порожденная отношением ρ', и $\gamma' = \gamma/S'$) является свободной группой на S'. Так как S' порождается конечным множеством $N\sigma$, в силу наших предположений S' может быть вложена в группу. Применяя теперь теорему 12.4, мы выводим, что γ' является изоморфизмом. Пришли к противоречию. В самом деле, группа F' была построена так, что переход от $m\varphi = w_0$ к $m'\varphi = w_n$ посредством элементарных ρ-переходов $w_{i-1} \to w_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ осуществляется на самом деле внутри F'. Следовательно, $(m\varphi, m'\varphi) \in \rho'_1$ и поэтому $m\varphi' (\rho'_1)^{\natural} = m'\varphi' (\rho'_1)^{\natural}$, т. е. $m\sigma'\gamma' = m'\sigma'\gamma'$. Но $m\sigma' = m\sigma$ и $m'\sigma' = m'\sigma$ являются по предположению различными элементами из S и принадлежат S'. Таким образом, отображение γ' в действительности не является взаимно однозначным. Это завершает доказательство теоремы.

Упражнения к § 12.2

1. Пусть S — полугруппа, вложимая в группу, и (G, φ) — свободная группа на S. Обозначим через P множество всех конгруэнций ρ на G с тем свойством, что $\varphi\rho^{\natural}$ вкладывает S в G/ρ. Тогда каждая конгруэнция из P содержится в максимальной конгруэнции из P.

Пусть ρ_1, ρ_2 — две различные максимальные конгруэнции из P. Тогда группа G/ρ_1 не изоморфна над S группе G/ρ_2, т. е. не существует такого изоморфизма μ группы G/ρ_1 на G/ρ_2, что $s\varphi\rho_1^{\natural}\mu = s\varphi\rho_2^{\natural}$ для всех $s \in S$. (Мальцев [1939].)

2. Пусть S — свободная полугруппа на двухэлементном множестве $\{a, b\}$ и (G, φ) — свободная группа на S. Обозначим через ρ_1 конгруэнцию на G, порожденную отношением $\{((a\varphi)(b\varphi)^{-1}, (b\varphi)(a\varphi)^{-1})\}$, а через ρ_2 — конгруэнцию на G, порожденную отношением $\{((a\varphi)(b\varphi)^{-1}(a\varphi)(b\varphi)^{-1}, (b\varphi)(a\varphi)^{-1})\}$. Тогда в обозначениях упражнения 1 $\rho_1, \rho_2 \in P$ и группа G/ρ_1 не изоморфна над S группе G/ρ_2. (Мальцев [1939].)

3. Пусть S — полугруппа и ρ_i $(i \in I)$ — такие конгруэнции на S, что S/ρ_i являются группами. Положим $\rho = \bigcap \{\rho_i \mid i \in I\}$. Тогда полугруппа S/ρ может быть вложена в группу, а именно в прямое произведение групп S/ρ_i. Следовательно, S/ρ есть подпрямое произведение групп S/ρ_i (см. упражнение 2 к § 11.6).

§ 12.3. *Условия Птака*

В этом параграфе мы рассматриваем необходимые и достаточные условия вложимости полугруппы в группу, принадлежащие Птаку [1949]. В первой части параграфа мы считаем более удобным работать с конгруэнциями, нежели с нормальными делителями. Основной результат Птака мы выведем как следствие 12.8 теоремы 12.7. В следствии и теореме сформулированы эквивалентные результаты, один выражен в терминах подгрупп, другой — в терминах конгруэнций. Используя следствие, мы выводим интересное достаточное условие вложимости, также принадлежащее Птаку.

Теорема 12.7. *Полугруппа S тогда и только тогда может быть вложена в группу, когда*

$$\beta \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \rho_1 \circ \alpha^{-1}.$$

(*Обозначения см. в конструкции* 12.3.)

Доказательство. Мы будем продолжать использовать без особых ссылок обозначения, введенные в конструкции 12.3.

Предположим, что полугруппа S вложима в группу. Тогда по теореме 12.4 отображение γ взаимно однозначно. Следовательно, $\gamma \circ \gamma^{-1} = \iota_S$. Мы имеем $\beta \circ \beta^{-1} = \beta \circ \gamma \circ \gamma^{-1} \circ \beta^{-1} = (\beta\gamma) \circ \circ (\beta\gamma)^{-1}$. Но $\sigma\gamma = \varphi\rho_1^\natural$, и поэтому в силу равенств $\tau\beta = \sigma$ и $\tau\alpha = \varphi$ мы получаем, что $\tau\beta\gamma = \tau\alpha\rho_1^\natural$. Таким образом, ограничения отображений $\beta\gamma$ и $\alpha\rho_1^\natural$ на порождающем множестве $M\tau$ полугруппы T совпадают, следовательно, $\beta\gamma = \alpha\rho_1^\natural$. Тогда $\beta \circ \beta^{-1} = (\beta\gamma) \circ \circ (\beta\gamma)^{-1} = (\alpha\rho_1^\natural) \circ (\alpha\rho_1^\natural)^{-1} = \alpha \circ \rho_1 \circ \alpha^{-1}$. Итак, мы установили, что если полугруппа S вложима в группу, то $\beta \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \rho_1 \circ \alpha^{-1}$.

Обратно, предположим, что $\beta \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \rho_1 \circ \alpha^{-1}$. Тогда

$$\beta \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \rho_1^\natural \circ (\rho_1^\natural)^{-1} \circ \alpha^{-1} = \alpha\rho_1^\natural \circ (\alpha\rho_1^\natural)^{-1} = \\ = (\beta\gamma) \circ (\beta\gamma)^{-1}.$$

Отсюда непосредственно вытекает, что отображение γ взаимно однозначно. В самом деле, возьмем $(s, s') \in \gamma \circ \gamma^{-1}$. Так как β есть отображение на S, существуют $t, t' \in T$, для которых $t\beta = s$, $t'\beta = s'$. Тогда пара (t, t'), принадлежащая по построению $\beta \circ (\gamma \circ \gamma^{-1}) \circ \beta^{-1}$, принадлежит также $\beta \circ \beta^{-1}$. Таким образом, $s = s'$, т. е. отображение γ взаимно однозначно. Это завершает доказательство теоремы.

Следствие 12.8. *Обозначим через A подмножество*

$$\{ab^{-1} \mid a, b \in T\alpha \quad \text{и} \quad (a, b) \in \rho\}$$

из F, а через A^* — нормальный делитель группы F, порожденный множеством A. Полугруппа S тогда и только тогда вложима в группу, когда для любых $a, b \in T\alpha$ из $ab^{-1} \in A^*$ вытекает, что $ab^{-1} \in A$.

(*Обозначения снова см. в конструкции* 12.3.)

Доказательство. Следствие является лишь переформулировкой теоремы. В самом деле, A^* совпадает с ρ_1-классом, содержащим единицу. Следовательно, $ab^{-1} \in A^*$ тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \rho_1$. Отсюда вытекает, что для $a, b \in T\alpha$ импликация «$ab^{-1} \in A^*$ влечет $ab^{-1} \in A$» справедлива тогда и только тогда, когда $\rho_1 \cap (T\alpha \times T\alpha) = \rho$, т. е. когда $\rho_1 \cap (T\alpha \times T\alpha) = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha$. Но $\alpha \circ [\rho_1 \cap (T\alpha \times T\alpha)] \circ \alpha^{-1} = \alpha \circ \rho_1 \circ \alpha^{-1}$ и $\alpha \circ \alpha^{-1} = \iota_T$. Таким образом, требуемая импликация справедлива тогда и только тогда, когда $\beta \circ \beta^{-1} = \alpha \circ \rho_1 \circ \alpha^{-1}$. Теперь для завершения доказательства следствия достаточно сослаться на теорему.

Достаточное условие вложимости (Птак [1949]) опирается на тот факт, что если S есть полугруппа с сокращениями, то всегда справедливо (снова в обозначениях конструкции 12.3) равенство $\beta \circ \beta^{-1} = \alpha \circ R(\rho) \circ \alpha^{-1}$, где через $R(\rho)$ обозначена правая конгруэнция на F, порожденная отношением ρ. Теперь будет удобней вести изложение в терминах подгрупп, и мы переформулируем этот результат в следующей лемме.

Сделаем сначала одно замечание о свободных группах. Каждый элемент из F является произведением элементов из $M\varphi \cup (M\varphi)^{-1}$. Говорят, что элемент из F, представленный как произведение элементов из $M\varphi \cup (M\varphi)^{-1}$, представлен *редуцированным словом*, если это произведение не содержит сомножителей вида $(m\varphi)$ $(m\varphi^{-1})$, где $m \in M$. Каждый элемент из F, отличный от единицы, однозначно представим в виде редуцированного слова (см., например, М. Холл [1959], гл. 7).

Лемма 12.9. *Пусть S — полугруппа с сокращениями. Для $a, b \in T\alpha$ тогда и только тогда имеет место $ab^{-1} \in [A]$, когда $ab^{-1} \in A$. (Обозначения см. в конструкции 12.3 и следствии 12.8.)*

Доказательство. Из определения отношения ρ ясно, что $\rho = \rho^{-1}$. Таким образом, $ab^{-1} \in A$ выполняется тогда и только тогда, когда $ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in A$. Следовательно, $A = A^{-1}$, где через A^{-1} обозначено множество всех элементов, обратных к элементам из A. Отсюда получаем

$$[A] = \bigcup \{A^n \mid n \text{ есть целое положительное число}\},$$

где, как обычно, через A^n обозначено множество всех произведений, содержащих n сомножителей из A. Индукцией по n докажем, что для любых $a, b \in T\alpha$ из включения $ab^{-1} \in A^n$ вытекает, что $ab^{-1} \in A$.

Рассмотрим сначала случаи $n = 1$ и $n = 2$. Для $n = 1$ утверждение тривиально. Предположим, что a, b, c, d, f, g — элементы из $T\alpha$, $cd^{-1} \in A$, $fg^{-1} \in A$ и $ab^{-1} = cd^{-1}fg^{-1}$. Так как S является полугруппой с сокращениями и $\alpha \circ \alpha^{-1} = \iota_T$, легко получить, что ограничение ρ на $T\alpha$ есть конгруэнция с сокращениями. Следовательно, мы можем предположить, что ab^{-1}, cd^{-1} и fg^{-1} представлены редуцированными словами. При таком предположении равенство $ab^{-1} = cd^{-1}fg^{-1}$ может выполняться только в случаях, когда либо (1) $f = dr$, либо (2) $d = fr$, где в каждом из случаев $r \in T\alpha$ или r равно единице группы F. В случае (1) мы имеем $cd^{-1}fg^{-1} = crg^{-1}$. Если $r \in T\alpha$, то элемент crg^{-1}, очевидно, представлен редуцированным словом и мы должны иметь $a = cr$ и $b = g$. Следовательно, $a = cr\rho dr = f\rho g = b$, так что $a\rho b$, т. е. $ab^{-1} \in A$. Если $f = d$, то $(c, d) \in \rho$ и $(d, g) \in \rho$, откуда в силу транзитивности отношения ρ на $T\alpha$ получаем $(c, g) \in \rho$. Следовательно, $ab^{-1} = cg^{-1} \in A$. Случай (2) рассматривается аналогично; это завершает доказательство нашего утверждения при $n = 2$.

Предположим по индукции для $n > 2$, что из $ab^{-1} \in A^j$ следует $ab^{-1} \in A$ для всех $j = 1, \ldots, n-1$ $(a, b \in T\alpha)$.

Пусть

$$ab^{-1} = a_1b_1^{-1}a_2b_2^{-1} \ldots a_nb_n^{-1},$$

где $a_ib_i^{-1} \in A$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Мы можем считать, что каждый $a_ib_i^{-1}$, а также ab^{-1} представлены редуцированным словом. Пусть k — наибольшее целое число, для которого

$$a_1b_1^{-1}a_2b_2^{-1} \ldots a_{k-1}b_{k-1}^{-1}a_k \in T_\alpha.$$

Поскольку $a_1 \in T\alpha$, такое целое число k существует. Рассмотрим три случая.

(a) $k = n$. Пусть $g = a_1b_1^{-1} \ldots a_{n-1}b_{n-1}^{-1}$. Тогда ga_n равно некоторому элементу c из $T\alpha$. Следовательно, $g = ca_n^{-1}$ и по предположению индукции $(c, a_n) \in \rho$. Так как $ab^{-1} = ca_n^{-1}a_nb_n^{-1}$, в силу нашего индуктивного предположения мы имеем $ab^{-1} \in A$.

(b) $1 < k < n$. Так же как в случае (a), положим $a_1b_1^{-1} \ldots$ $\ldots a_{k-1}b_{k-1}^{-1}a_k = c$, где $c \in T\alpha$. Тогда по предположению индукции $cb_k^{-1} \in A$ (так как $k < n$). Следовательно, $ab^{-1} = cb^{-1}a_{k+1}b_{k+1}^{-1} \ldots$ $\ldots a_nb_n^{-1} \in A^{n-k+1} \subseteq A$; здесь мы снова воспользовались индуктивным предположением, поскольку $n - k + 1 < n$.

(c) $k = 1$. Так как ab^{-1} и каждый $a_ib_i^{-1}$ представлены редуцированными словами и так как $a_1b_1^{-1} \ldots b_{k-1}^{-1}a_k \notin T\alpha$ для каждого $k > 1$, мы имеем $a = a_1$. Чтобы доказать это, рассмотрим сначала $a_1b_1^{-1}a_2$. Этот элемент не лежит в $T\alpha$. Следовательно, редуцированное слово для элемента $b_1^{-1}a_2$ должно иметь вид $c_1^{-1}d_2$, где $c_1 \in T\alpha$. Таким образом, поскольку $a_2b_2^{-1}$ представлен редуцированным словом, так же представлен и элемент $d_2b_2^{-1}$, откуда следует, что $a_1c_1^{-1}d_2b_2^{-1}$ является редуцированным словом для элемента $a_1b_1^{-1}a_2b_2^{-1}$. Применяя аналогичные рассуждения для каждого k, мы, наконец, получим, что редуцированное слово для элемента $a_1b_1^{-1}a_2b_2^{-1} \ldots a_nb_n^{-1}$ имеет вид $a_1f_1^{-1} \ldots$, где $f_1 \in T\alpha$. Итак, как и утверждалось, $a = a_1$.

Теперь

$$b_1b^{-1} = a_2b_2^{-1} \ldots a_nb_n^{-1},$$

т. е. b_1b^{-1} является произведением $n - 1$ элементов из A. По предположению индукции для $j = n - 1$ мы получаем $b_1b^{-1} \in A$. Наконец, $ab^{-1} = ab_1^{-1}b_1b^{-1}$, т. е. ab^{-1} есть произведение двух элементов из A, поэтому $ab^{-1} \in A$.

Это завершает доказательство леммы.

Из леммы и следствия 12.8 непосредственно вытекает теорема Птака. Мы снова используем обозначения, введенные в конструкции 12.3 и в следствии 12.8.

Теорема 12.10. *Полугруппа S с сокращениями вложима в группу, если подгруппа из F, порожденная множеством A, является нормальным делителем в F.*

Птак [1949], используя этот результат, дал другое доказательство теоремы Оре (теорема 1.23), установив, что если S является реверсивной справа полугруппой ($Sa \cap Sb \neq \varnothing$ для всех $a, b \in S$) с сокращениями, то подгруппа из F, порожденная множеством A, является нормальным делителем в F.

§ 12.4. Построение группы частных

Если полугруппа S вложима в группу, то она может быть вложена в группу, для которой S есть множество групповых образующих. Каждый элемент такой группы будет произведением конечного числа элементов из S и обратных к ним элементов. В этом параграфе мы рассматриваем одно условие, необходимое для вложимости полугруппы в группу. Для полугруппы S, удовлетворяющей этому условию, мы строим группу правых [левых] частных и показываем, что эта группа, вместе с подходящим отображением, образует свободную группу на S. Мы приводим другое доказательство теоремы Оре (теорема 1.23), которое ближе к первоначальному доказательству Оре аналогичного утверждения для колец. В следующем параграфе мы применяем понятие группы правых частных для получения необходимых и достаточных условий Ламбека вложимости полугруппы в группу.

Будем говорить, что полугруппа S удовлетворяет *условию равенства частных*, если для любых $a, b, c, d, x, y, u, v \in S$ из трех равенств

$$\left.\begin{aligned} xa &= yb \\ xc &= yd \\ ua &= vb \end{aligned}\right\} \tag{Z}$$

вытекает равенство

$$uc = vd. \tag{z}$$

Это условие в работе А. И. Мальцева [1937] называлось условием Z.

Заметим, что условие равенства частных симметрично себе. Действительно, импликация «из $ax = by$, $cx = dy$ и $au = bv$ вытекает $cu = dv$» с точностью до переобозначения символов совпадает с импликацией «из (Z) следует (z)».

Предположим, что полугруппа S может быть вложена в группу G (без ограничения общности будем считать S подполугруппой из G). Пусть в S выполняются равенства (Z). Тогда в G мы имеем

$$\begin{aligned} uc &= ux^{-1}(xc) = ux^{-1}(yd) = ux^{-1}(yb)\,b^{-1}d = \\ &= ux^{-1}(xa)\,b^{-1}d = (ua)\,b^{-1}d = (vb)\,b^{-1}d = \\ &= vd. \end{aligned}$$

Таким образом, в полугруппе S выполняется также равенство (z). Нами доказана

Лемма 12.11. *Если полугруппа может быть вложена в группу, то она удовлетворяет условию равенства частных.*

Этот результат был использован А. И. Мальцевым [1937] для решения в то время еще открытого вопроса о том, всякая ли полугруппа с сокращениями может быть вложена в группу. Контрпримером Мальцева является частный случай (при $n = 1$) полугрупп S_n, построенных в § 12.8.

Пусть S — полугруппа с сокращениями, удовлетворяющая условию равенства частных. Для элементов $a, b \in S$, таких, что $Sa \cap Sb \neq \varnothing$, определим *правое частное* a/b, полагая

$$a/b = \{(x, y) \mid xa = yb\}.$$

Если $Sa \cap Sb = \varnothing$, то a/b не определено.

Аналогично, в случае, когда $aS \cap bS \neq \varnothing$, мы определяем *левое частное* $a \backslash b$, полагая

$$a \backslash b = \{(x, y) \mid ax = by\}.$$

Лемма 12.12. *Пусть S — полугруппа с сокращениями, удовлетворяющая условию равенства частных, и $a, b, c, d \in S$. Тогда*
(i) $a/b = c/d$ *тогда и только тогда, когда* $a/b \cap c/d \neq \varnothing$.
(ii) $a \backslash b = c \backslash d$ *тогда и только тогда, когда* $a \backslash b \cap c \backslash d \neq \varnothing$.

Доказательство. Докажем утверждение (i). Если $a/b = c/d$, то оба частных определены и поэтому $a/b \cap c/d = a/b \neq \varnothing$.

Обратно, возьмем $(x, y) \in a/b \cap c/d$. Тогда $xa = yb$ и $xc = yd$. Пусть $(u, v) \in a/b$, так что $ua = vb$. Тогда условие равенства частных непосредственно дает $uc = vd$, т. е. $(u, v) \in c/d$. Следовательно, $a/b \subseteq c/d$. Аналогично, $c/d \subseteq a/b$. Итак, $a/b = c/d$.

Справедливость утверждения (ii) обеспечивается симметричностью условия равенства частных.

Конструкция 12.13. *Пусть S — полугруппа с сокращениями, удовлетворяющая условию равенства частных. Обозначим через Q множество всех правых частных пар элементов из S:*

$$Q = \{a/b \mid a, b \in S,\ Sa \cap Sb \neq \varnothing\},$$

а через $\varkappa$ — взаимно однозначное отображение $a \to (ax)/x$ полугруппы S в Q. Пусть (T, τ) — свободная полугруппа на Q (без ограничения общности мы будем отождествлять a/b с $(a/b)\tau$). Определим отношение ρ на T, полагая

$$\rho = \{(xy, z) \mid x = a/b,\ y = b/c,\ z = a/c \text{ для некоторых } a/b,\ b/c,\ a/c \in Q\}.$$

Пусть ρ_1 — конгруэнция на T, порожденная ρ, $G = T/\rho_1$ и γ — отображение $\varkappa\rho_1^\natural$ ($= \varkappa\tau\rho_1^\natural$) полугруппы S в G. Тогда (G, γ) является свободной группой на S.

Пару (G, γ) будем называть *группой правых частных* полугруппы S.

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[drr, "\gamma"'] & Q \subset T \arrow[r, phantom, "\tau"] & {} \\ & & T/\rho_1 = G \end{tikzcd}$$

$$T \xrightarrow{\rho_1^\natural} T/\rho_1 = G$$

Проверка. Доказательство высказанных утверждений проводится стандартными рассуждениями. Установим сначала, что $\varkappa$ есть взаимно однозначное отображение полугруппы S в Q. В самом деле, во-первых, $(ax)/x$ всегда определено и не зависит от x из S, поскольку $(a, a^2) \in (ax)/x$ для любого x (лемма 12.12). Во-вторых, $(ax)/x = (by)/y$ влечет за собой $aby = a^2y$, так как в этом случае $(a, a^2) \in (by)/y$. Следовательно, в силу закона сокращения получаем $a = b$.

Покажем, далее, что T/ρ_1 является группой. Очевидно, для каждого $a \in S$ правое частное a/a определено, так как оно содержит (x, x) при любом $x \in S$. Следовательно, по лемме 12.12 $a/a = b/b$ для всех $a, b \in S$. Обозначим a/a через E. Для любого частного $a/b \in Q$, очевидно, $(a/b \cdot E, a/b) = (a/b \cdot b/b, a/b)$ принадлежит ρ. Следовательно, E есть правая единица полугруппы T/ρ_1.

Заметим теперь, что a/b существует тогда и только тогда, когда существует b/a; действительно, $(x, y) \in a/b$ тогда и только тогда, когда $(y, x) \in b/a$. Возьмем произвольный элемент $t = (a_1/b_1) \ldots (a_n/b_n)$ из T. Тогда $t^* = (b_n/a_n) \ldots (b_1/a_1)$ также является элементом из T. Далее, $(tt^*, E) \in \rho_1$. В самом деле, для любого $a/b \in Q$ ясно, что $(a/b \cdot b/a, E) \in \rho$. Таким образом, последовательностью из $2n - 1$ элементарных ρ-переходов tt^* можно свести к E. Следовательно, каждый элемент из T/ρ_1 имеет правый обратный относительно E. Это доказывает, что T/ρ_1 является группой.

Для любых $a, b \in S$ мы можем записать $a\varkappa = (abx)/(bx)$, $b\varkappa = (bx)/x$ и $(ab)\varkappa = (abx)/x$. Замечая, что $((abx)/(bx)(bx)/x, (abx)/x) \in \rho$, мы выводим $a\varkappa\rho_1^\natural \cdot b\varkappa\rho_1^\natural = (ab)\varkappa\rho_1^\natural$, т. е. $(a\gamma)(b\gamma) = (ab)\gamma$, т. е. γ — гомоморфизм полугруппы S в G.

Легко видеть, что $(a/b)\rho_1^\natural = (a\gamma)(b\gamma)^{-1}$ для любого $a/b \in Q$. Поэтому $S\gamma$ есть множество групповых образующих группы G. Это показывает, что (G, γ) является группой на полугруппе S. Осталось установить, что (G, γ) является свободной S-группой.

Пусть (H, η) — произвольная S-группа. Определим отображение $\chi\colon Q \to H$, полагая $(a/b)\,\chi = (a\eta)\,(b\eta)^{-1}$. Легко проверить, что χ определено корректно. Так как T является свободной полугруппой на множестве Q, существует такой гомоморфизм θ полугруппы T в H, что $\tau\theta = \chi$. Легко проверить, что ρ, а поэтому и ρ_1 содержатся в $\theta \circ \theta^{-1}$. В силу теоремы об индуцированном гомоморфизме (теорема 1.6) существует гомоморфизм ψ группы $G = T/\rho_1$ в H, для которого $\rho_1^\natural\psi = \theta$.

Наконец, мы имеем $\gamma\psi = \eta$. В самом деле, $\varkappa\chi = \eta$, поскольку $a\varkappa\chi = ((ax)/x)\,\chi = (ax)\,\eta\,(x\eta)^{-1} = a\eta$. Отсюда мы получаем $a\eta = a\varkappa\chi = a\varkappa\tau\theta = a\,(\varkappa\tau\rho_1^\natural)\,\psi = a\gamma\psi$, что доказывает требуемое.

Итак, (G, γ) — свободная группа на S. Проверка завершена.

$$
\begin{tikzcd}
S \arrow[r, "\varkappa"] \arrow[dr, "\eta"] \arrow[ddr, "\gamma"'] & Q \arrow[r, phantom, "\overset{\tau}{\subset}"] \arrow[d, "\chi"] & T \arrow[dl, "\theta"'] \arrow[ddl, "\rho_1^\natural"] \\
& H & \\
& G \arrow[u, "\psi"] &
\end{tikzcd}
$$

В качестве непосредственного следствия, используя теорему 12.4, мы получаем такое утверждение.

Лемма 12.14. *Пусть S — полугруппа с сокращениями, удовлетворяющая условию равенства частных. Полугруппа S может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда она может быть вложена в свою группу правых частных.*

Рассмотрим снова условие Оре для вложимости полугрупп. Напомним, что полугруппа S называется *реверсивной слева*, если $aS \cap bS \neq \varnothing$ для любых $a, b \in S$.

Лемма 12.15. *Реверсивная слева полугруппа с сокращениями удовлетворяет условию равенства частных.*

Доказательство. Пусть S — реверсивная слева полугруппа с сокращениями и для $a, b, c, d, x, y, u, v \in S$ выполняются равенства

$$\left.\begin{aligned} xa &= yb \\ xc &= yd \\ ua &= vb \end{aligned}\right\}. \tag{Z}$$

Мы должны доказать, что выполняется равенство

$$uc = vd. \tag{z}$$

Так как полугруппа S реверсивна слева, существуют такие $p, q \in S$, что $ap = cq$. Следовательно, $xap = xcq$, откуда в силу (Z) $ybp = ydq$. Сокращая на y, получаем $bp = dq$. Таким образом, $ucq = uap = vbp = vdq$, т. е. $ucq = vdq$. Сокращая на q, получаем требуемое равенство $uc = vd$.

Опираясь на эту лемму, применим конструкцию 12.13 к реверсивной слева полугруппе с сокращениями и покажем, что такая полугруппа вкладывается при помощи этой конструкции в свою группу правых частных. Обозначения, введенные в конструкции 12.13, используются нами без особых ссылок. Вычисления разобьем на ряд шагов. Через S будем обозначать реверсивную слева полугруппу с сокращениями.

(a) *Пусть $b_1, a_2, b_2, a_3, b_3, \ldots, b_{m-1}, a_m$ принадлежат S. Тогда существуют такие $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$, что $b_i x_i = a_{i+1} x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$.*

Действительно, в силу реверсивности слева мы можем выбрать такие элементы $u_1, y_2; u_2, y_3; \ldots; u_{m-1}, y_m$ из S, что $b_1 u_1 = a_2 y_2$; $b_2 y_2 u_2 = a_3 y_3$; $b_3 y_3 u_3 = a_4 y_4$; $\ldots$; $b_{m-1} y_{m-1} u_{m-1} = a_m y_m$. Полагая $x_1 = u_1 u_2 \ldots u_{m-1}$, $x_2 = y_2 u_2 \ldots u_{m-1}$, $\ldots$, $x_{m-1} = y_{m-1} u_{m-1}$, $x_m = y_m$, получаем требуемый набор элементов x_i.

(b) *Если a/b, $b/c \in Q$, то $(a/b \cdot b/c,\ (ax)/x \cdot x/(cx)) \in \rho_1$.*

Мы имеем $((ax)/x \cdot x/(bx), a/b) \in \rho$ и $((bx)/x \cdot x/(cx), b/c) \in \rho$. Следовательно,

$$\begin{aligned} a/b \cdot b/c &\to (ax)/x \cdot x/(bx) \cdot b/c \to \\ &\to (ax)/x \cdot x/(bx) \cdot (bx)/x \cdot x/(cx) \to \\ &\to (ax)/x \cdot x/x \cdot x/(cx) \to \\ &\to (ax)/x \cdot x/(cx) \end{aligned}$$

является последовательностью элементарных ρ-переходов.

Заметим, что из существования элементов a/b и b/c не следует еще существование элемента a/c.

(c) *Если a/b, b/c, $\ldots$, g/e, e/f существуют, то $a/b \cdot b/c \cdot \ldots \cdot g/e \cdot e/f \ \rho_1 \ (ax)/x \cdot x/(fx)$.*

Это утверждение является лишь распространением утверждения (b) на произвольное число множителей.

(d) *Каждый элемент из T ρ_1-эквивалентен элементу $(ax)/x \cdot x/(bx)$ для некоторых $a, b \in S$.*

Пусть $a_1/b_1 \cdot a_2/b_2 \cdot \ldots \cdot a_m/b_m$ — произвольный элемент из T. В силу утверждения (a) существуют такие $x_1, x_2, \ldots, x_m \in S$, что $b_i x_i = a_{i+1} x_{i+1}$ $(i = 1, 2, \ldots, m-1)$. Следовательно, $a_1/b_1 \cdot a_2/b_2 \cdot \ldots \cdot a_m/b_m = a/c_1 \cdot c_1/c_2 \cdot \ldots \cdot c_{m-1}/b$, где $a_1 x_1 = a$, $b_1 x_1 = a_2 x_2 = c_1$, $b_2 x_2 = a_3 x_3 = c_2$, $\ldots$, $b_m x_m = b$. Применяя утверждение (c), мы получаем требуемое.

(e) *Пусть $t = a_1/a_2 \cdot a_2/a_3 \cdot \ldots \cdot a_{m-1}/a_m \in T$ и $t \to t'$ — некоторый элементарный ρ-переход. Тогда $t' = (a_1 x)/b_2 \cdot b_2/b_3 \cdot \ldots \cdot b_k/(a_m x)$ для некоторых $b_2, b_3, \ldots, b_k \in S$.*

Возможны два случая. Во-первых, ρ-переход может заменять $a_{i-1}/a_i \cdot a_i/a_{i+1}$ на a/b. В этом случае $a_{i-1}/a_i = a/c$ и $a_i/a_{i+1} = c/b$ для некоторого $c \in S$. Так как полугруппа S реверсивна слева, существуют такие $x, y \in S$, что $a_{i-1}x = ay$. Тогда $a_ix = cy$ и $a_{i+1}x = by$. В самом деле, возьмем $(u, v) \in a_{i-1}/a_i = a/c$. Мы имеем $ua_{i-1} = va_i$ и $ua = vc$, поэтому $va_ix = ua_{i-1}x = uay = vcy$. Следовательно, $va_ix = vcy$. Сокращая на v, получаем $a_ix = cy$. Аналогично, $a_{i+1}x = by$. Следовательно,

$$t' = (a_1x)/(a_2x) \dots (a_{i-2}x)/(a_{i-1}x) \cdot (a_{i-1}x)/(a_{i+1}x) \cdot (a_{i+1}x)/(a_{i+2}x) \dots \dots (a_{m-1}x)/(a_mx),$$

что и требовалось доказать.

Во-вторых, ρ-переход может заменить a_i/a_{i+1} на $a/b \cdot b/c$. В этом случае $a_i/a_{i+1} = a/c$. Выберем такие x, y, что $a_ix = ay$. Тогда, как и в первом случае, $a_{i+1}x = cy$, и мы можем записать t' в требуемом виде.

Рассмотрим теперь произвольное частное $a/b \in T$. Если элемент t эквивалентен по mod ρ_1 элементу a/b, то, поскольку t можно получить из a/b последовательностью элементарных ρ-переходов, на основании утверждения (e) имеем

$$t = (ax)/b_1 \cdot b_1/b_2 \dots b_k/(bx)$$

для некоторых $x, b_i \in S$. Следовательно, если t само является частным, то $t = (ax)/(bx)$ для некоторого $x \in S$. Но $(ax)/(bx) = a/b$. Таким образом, единственным частным, ρ_1-эквивалентным a/b, является само a/b. Отсюда, в частности, непосредственно следует, что отображение $\gamma = \varkappa\rho_1^\natural$ взаимно однозначно, т. е. γ вкладывает S в G.

Далее, в силу утверждения (d) каждый элемент из G может быть записан в виде $a\gamma\,(b\gamma)^{-1}$ для некоторых $a, b \in S$.

Обратно, предположим, что $\gamma\colon S \to H$ вкладывает S в H и каждый элемент из H может быть записан в виде $a\gamma\,(b\gamma)^{-1}$ при некоторых $a, b \in S$. Тогда, в частности, для данных $a, b \in S$ должны существовать такие $x, y \in S$, что $(a\gamma)^{-1}\,b\gamma = x\gamma\,(y\gamma)^{-1}$, т. е. $(by)\,\gamma = (ax)\,\gamma$. Отсюда в силу взаимной однозначности отображения γ вытекает $by = ax$. Таким образом, $aS \cap bS \neq \varnothing$ для заданных $a, b \in S$, т. е. полугруппа S реверсивна слева.

Итак, мы завершили новое доказательство теорем Оре (теорема 1.23) и Дюбрея (теорема 1.24): *полугруппа с сокращениями тогда и только тогда может быть вложена в свою группу правых частных* [1]), *когда она реверсивна слева.*

---

[1]) Термин «группа правых частных» используется здесь в его старом смысле, т. 1, стр. 59.

Упражнения к § 12.4

1. Пусть R — реверсивная слева полугруппа с сокращениями, содержащая единицу, и φ — эндоморфизм полугруппы R на собственную унитарную слева подполугруппу $R\varphi$ из R. Обозначим через Z аддитивную полугруппу неотрицательных целых чисел. Положим $S = Z \times R$ и определим следующим образом произведение в S: $(m, a)(n, b) = (m + n, a\varphi^n b)$, где $m, n \in Z$, $a, b \in R$ (под φ^0 понимается тождественное отображение). Тогда S — реверсивная слева полугруппа с левым сокращением, обладающая единицей, но S не реверсивна справа. Если эндоморфизм φ взаимно однозначен, то S есть полугруппа с сокращениями.

2. Пусть S — полугруппа, содержащая обратимые элементы. Так как произведение двух сократимых элементов снова является сократимым элементом, подмножество C всех сократимых элементов из S образует подполугруппу. Пусть M — некоторая подполугруппа из C. Тогда говорят, что полугруппа G является *полугруппой правых частных для S относительно M*, если (1) $S \subseteq G$, (2) G содержит единицу 1, (3) для $m \in M$ существует такой $g \in G$, что $mg = gm = 1$, и (4) для $g \in G$ существует такой $m \in M$, что $gm \in S$.

Полугруппу S будем называть *M-реверсивной слева*, если $sM \cap mS \neq \varnothing$ для всех $m \in M$ $s \in S$.

Пусть полугруппа S M-реверсивна слева.

(i) Если для $s_1, s_2 \in S$ и $m_1, m_2 \in M$ существуют такие $x, y \in S$, что $s_1x = s_2y$ и $m_1x = m_2y \in M$, то для любых $x', y' \in S$ из $m_1x' = m_2y'$ следует, что $s_1x' = s_2y'$.

(ii) Определим отношение ρ на $S \times M$ следующим образом: $(s_1, m_1)\,\rho\,(s_2, m_2)$ имеет место тогда и только тогда, когда существуют $x, y \in S$, для которых $s_1x = s_2y$ и $m_1x = m_2y \in M$. Тогда ρ является отношением эквивалентности на $S \times M$.

(iii) Равенство $(s_1, m_1)\rho \cdot (s_2, m_2)\rho = (s_1s_3, m_2m_3)\rho$, где $s_2m_3 = m_1s_3$, задает произведение на множестве $(S \times M)/\rho$, превращая это множество в полугруппу.

(iv) Отображение $s \to (sm, m)\rho$ вкладывает S в полугруппу $(S \times M)/\rho$, и если отождествить S с ее образом при этом отображении, то $(S \times M)/\rho$ превращается в полугруппу правых частных для S относительно M.

(v) Полугруппа правых частных для S относительно M определяется однозначно с точностью до изоморфизма.

Обратно, предположим, что существует полугруппа правых частных для S относительно M. Тогда S является M-реверсивной слева полугруппой. (Мурата [1950]; ср. также Асано [1949] и Шифердеккер [1955].)

3. Пусть S — M-реверсивная слева (в терминологии предыдущего упражнения) полугруппа с левым сокращением. Тогда полу-

группа правых частных для S относительно M является полугруппой с левым сокращением. Если в S выполняется также закон правого сокращения, то полугруппа правых частных для S относительно M является полугруппой с сокращениями.

4. Элемент m полугруппы S называется *реверсивным слева*, если $aS \cap mS \neq \varnothing$ для всех $a \in S$. Обозначим через N множество всех реверсивных слева элементов из S. Тогда N, если оно не пусто, является плотной слева подполугруппой из S (т. е. из $xy \in N$ вытекает $x \in N$). Если S — полугруппа с левым сокращением, то N является плотной полугруппой. Говорят, что S *квазиреверсивна слева*, если N не пусто и если для $a, b \in S$ из соотношения $aS \cap bS \neq \varnothing$ следует либо $aN \cap bS \neq \varnothing$, либо $aS \cap bN \neq \varnothing$. Если S — квазиреверсивная слева полугруппа с левым сокращением, то S является N-реверсивной слева (в смысле упражнения 2). (Досс [1948].)

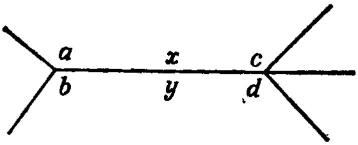
5. Пусть w, w' — элементы свободной полугруппы F. Тогда говорят, что полугруппа S *удовлетворяет тождеству* $w = w'$, если $w\varphi = w'\varphi$ для любого гомоморфизма $\varphi\colon F \to S$. Если w и w' — различные элементы из F, то тождество $w = w'$ называется *нетривиальным*.

Пусть S — полугруппа с сокращениями, удовлетворяющая нетривиальному тождеству. Тогда S реверсивна слева и поэтому может быть вложена в группу. (Мальцев [1953].)

§ 12.5 Условия Ламбека

В этом параграфе мы приводим принадлежащие Ламбеку [1951] «геометрические условия» вложимости полугруппы в группу. Эти условия сформулированы в терминах эйлерова многогранника, т. е. многогранника, для которого $V + F = E + 2$, где V — число вершин, F — число граней и E — число ребер, и который гомеоморфен двумерной сфере в трехмерном евклидовом пространстве. На протяжении этого параграфа под *многогранником* мы будем понимать именно такой многогранник. Для наших целей будет достаточно наглядного представления о таких многогранниках, и в доказательствах мы иногда будем обращаться к рисункам. Чисто алгебраическую трактовку см. у Буша [1963].

Каждое ребро многогранника принадлежит двум граням. Мы будем говорить, что ребро имеет две *стороны*, по одной на каждой грани. Каждое ребро имеет две *вершины* — это концы ребра. В каждой вершине ребро имеет два *угла*, по одному на каждой стороне ребра. Например, на диаграмме, приведенной ниже, ребро, проведенное через две вершины, имеет стороны, помеченные символами x и y, углы одной из вершин — символами a и b, углы другой вершины — символами c и d. Углы, помеченные буквами a и c, находятся на стороне x, а углы b и d — на стороне y.



Будем говорить, что ребро состоит из двух *полуребер*, каждое из которых соответствует одной из вершин. Каждое полуребро имеет две стороны, а именно — стороны ребра, которому оно принадлежит, и два угла в его вершине, по одному на каждой из сторон. На следующей диаграмме мы пометили буквами стороны ребра и углы полуребра этого ребра. При таких обозначениях равенство $xa = yb$ будем называть *полуреберным равенством*, соответствующим этому полуребру.

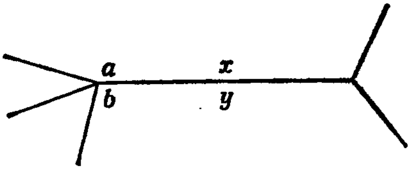


Диаграмма 1.

Пусть S — произвольная полугруппа. Будем говорить, что S удовлетворяет *условию Ламбека*[1]), если для любого многогранника, все стороны и углы которого помечены элементами из S, каждое полуреберное равенство является следствием всех других полуреберных равенств.

Теперь мы можем сформулировать теорему Ламбека.

Теорема 12.16. *Полугруппа может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда она* (1) — *полугруппа с сокращениями и* (2) *удовлетворяет условию Ламбека.*

Остальная часть параграфа посвящена доказательству этой теоремы. Сначала мы установим необходимость условий. Очевидно, что S обязательно является полугруппой с сокращениями. Докажем по индукции необходимость условий Ламбека.

Пусть P — произвольный многогранник, помеченный элементами из S (т. е. его стороны и углы помечены элементами из S). Триангулируем P. Для этого выберем точку (которую назовем *центром*) внутри каждой грани и проведем линии из центра до каждой вершины этой грани и из некоторой внутренней точки

[1]) В оригинале полиэдральному (polyhedral) условию.— *Прим. перев.*

(которую назовем *средней точкой*) каждого ребра данной грани до ее центра. Ориентируем такую триангуляцию, установив положительное направление (1) от центра до вершины, (2) от средней точки ребра до центра и (3) от средней точки до вершины.

Заданная пометка многогранника P элементами из S определяет следующим образом пометку триангулированного многогранника. Предположим, что полуребра многогранника P помечены, как в диаграмме 1. Тогда мы пометим буквой x линию от средней точки ребра до центра, лежащую со стороны x, буквой a — линию от этого центра до вершины полуребра. Само полуребро мы пометим буквой p, где $p = xa$. Если имеет место полуреберное равенство, то, поступая так же с y и b, мы припишем полуребру ту же самую букву p, поскольку $yb = xa = p$. Полученная пометка изображена на диаграмме 2.

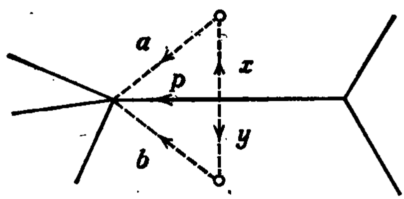


Диаграмма 2.

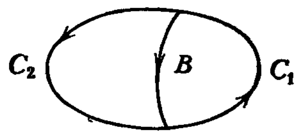
Предположим теперь, что в S выполняются все полуреберные равенства, за исключением, быть может, одного. Тогда указанная выше процедура приписывает последовательно каждому ребру триангуляции единственную букву, за исключением, быть может, одного полуребра, а именно того, для которого мы не предполагаем выполнения полуреберного равенства. Если предположить, что именно это полуребро изображено на диаграмме 1, то процедура пометки триангулированного многогранника припишет буквы a, x, b, y ребрам триангуляции, как на диаграмме 2, но не припишет никакой буквы полуребру, помеченному буквой p на диаграмме 2.

Мы хотим установить, что если S может быть вложена в группу, то $xa = yb$. Предположим, что $yb = p$, и припишем этот элемент p оставшемуся непомеченным полуребру. Теперь достаточно доказать, что $xa = p$.

Предположим без ограничения общности, что S содержится в группе G с единицей 1. Каждый треугольник триангуляции, за исключением, быть может, одного, соответствует равенству вида $yb = p$. Это равенство может быть также записано в любой из следующих шести форм: $ybp^{-1} = 1$, $bp^{-1}y = 1$, $p^{-1}yb = 1$, $y^{-1}pb^{-1} = 1$, $b^{-1}y^{-1}p = 1$ и $pb^{-1}y^{-1} = 1$. Эти шесть равенств соответствуют при данной ориентации ребер шести способам обхода ребер треугольника. Каждый из обходов треугольника начинается на любом из ребер и происходит в любом из направлений. Более точно, левая часть каждого из указанных равенств получается следующей процедурой, относящейся к более общему случаю.

Рассмотрим произвольный путь C, состоящий из ребер триангуляции. Пусть $E_1, E_2, \ldots, E_n$ — последовательные ребра этого пути. Пусть x_i — буква, приписанная ребру E_i. Тогда этот путь, вместе с ориентацией ребер, определяет произведение $C\alpha = x_1^{\varepsilon_1}x_2^{\varepsilon_2} \ldots x_n^{\varepsilon_n}$, где ε_i равно $+1$, если ребро E_i проходится в положительном направлении, и равно -1, если ребро E_i проходится в отрицательном направлении.

Мы видели, что простой [1]) замкнутый путь, соответствующий одному треугольнику, для которого выполняется «треугольное» равенство, определяет произведение, равное 1. Предположим теперь по индукции, что это верно для всех простых замкнутых путей, состоящих из ребер триангуляции и образующих границу для связного множества менее чем k треугольников, для каждого из которых справедливо «треугольное» равенство. Пусть C — простой замкнутый путь, являющийся границей связного множества k треугольников, для каждого из которых выполняется «треугольное» равенство. Тогда существует такой путь B, ребра которого выбраны из ребер k треугольников, ограниченных путем C, что конечные точки пути B делят C на два пути C_1 и C_2, причем (1) путь, составленный из B и C_1, является простым путем, для которого выполняется наше индуктивное предположение, и (2) путь, составленный из B^{-1} и C_2 (где B^{-1} получается из B прохождением его в обратном направлении), тоже является простым путем, для которого выполняется наше индуктивное предположение.



Следовательно, мы имеем $(BC_1)\,\alpha = (B\alpha)\,(C_1\alpha) = 1$ и $(B^{-1}C_2)\,\alpha = (B^{-1}\alpha)\,(C_2\alpha) = 1$. Отсюда $C\alpha = (C_1\alpha)\,(C_2\alpha) = (B\alpha)^{-1}(B^{-1}\alpha)^{-1} = 1$, так как, очевидно, $(B\alpha)\,(B^{-1}\alpha) = (BB^{-1})\,\alpha = 1$.

Итак, по индукции $C\alpha = 1$ для любого простого замкнутого пути C, являющегося границей произвольного связного множества треугольников, для которых выполняются «треугольные» равенства.

---

[1]) То есть без повторяющихся ребер.— *Прим. ред.*

Пусть теперь C — путь, ограничивающий все треугольники триангулированного многогранника, за исключением треугольника, для которого мы должны вывести соответствующее ему равенство. Тогда $C\alpha = 1$. Легко видеть, что C совпадает с одним из шести путей обхода исключенного треугольника. Следовательно, из равенства $C\alpha = 1$ вытекает $xa = p$.

Это завершает доказательство необходимости условия Ламбека.

Докажем теперь достаточность. Пусть S — полугруппа с сокращениями, удовлетворяющая условию Ламбека. Тогда S удовлетворяет условию равенства частных (§ 12.4). В самом деле, рассмотрим помеченный многогранник, заданный диаграм-

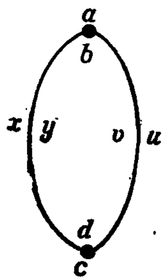


Диаграмма 3.

мой 3. Предположим, что в S выполняются равенства $xa = yb$, $xc = yd$ и $ua = vb$. Тогда, глядя на диаграмму 3 и используя условия Ламбека, мы заключаем, что $uc = vd$. Таким образом, S удовлетворяет условию равенства частных. Следовательно, мы установим, что S может быть вложена в группу, если покажем, что отображение γ из конструкции 12.13 есть изоморфизм. Для этого достаточно доказать, что два элемента из Q (мы используем теперь терминологию конструкции 12.13) ρ_1-эквивалентны тогда и только тогда, когда они равны. Последнее является непосредственным следствием условия Ламбека, если подходящим образом построить многогранники. Процедура, которую мы собираемся описать, рассмотрена ниже на специальном примере, иллюстрацией к которому служит диаграмма 5.

Пусть a/b, c/d принадлежат Q и эти элементы ρ_1-эквивалентны. Тогда существуют такие элементы w_0 $(= a/b)$, w_1, w_2, ..., w_n $(= c/d)$ из T, что $w_{i-1} \to w_i$ является элементарным ρ-переходом для $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть длина w_i как слова в алфавите Q $(= Q\tau)$ равна n_i (см. § 9.1) $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Тогда каждое слово w_i определяет множество из n_i целочисленных точек (j, i), где $j = 1, 2, \ldots, n_i$. Мы используем множество всех таких точек (j, i), где $j = 1, 2, \ldots, n_i$ и $i = 0, 1, 2, \ldots, n$, для построения многогранника. Предположим прежде всего, что (j, i) соответствует j-й (слева) букве слова w_i. Точка (j, i) будет спределять вершину многогранника, если либо (a) j-я буква слова w_i получается в результате замены j-й и $(j+1)$-й букв слова w_{i-1} при ρ-переходе $w_{i-1} \to w_i$, либо (b) j-я буква слова w_i заменяется на j-ю и $(j+1)$-ю букву слова w_{i+1} при ρ-переходе $w_i \to w_{i+1}$.

Предположим, что если j-я буква слова w_i получается после «склеивания» j-й и $(j+1)$-й букв слова w_{i-1}, то эта буква не заменяется на две буквы в слове w_{i+1} при переходе $w_i \to w_{i+1}$. Это предположение не ограничивает общности; действительно, если у нас появится такая последовательность $w_{i-1} \to w_i \to w_{i+1}$, то мы ее можем заменить на последовательность $w_{i-1} \to w_i \to \to w_i \to w_{i+1}$, полученную повторением слова w_i. В этом случае можно считать $w_i \to w_i$ ρ-переходом, что не приведет к недоразумениям.

Построим, далее, ребра многогранника, проводя линии следующим образом. Если буквы не меняются при переходе $w_{i-1} \to w_i$, то соответствующие точки соединим прямыми линиями. Если две соседние буквы слова w_{i-1} заменяются в w_i на одну букву, то две соответствующие точки соединим прямой линией с соответствующей вершиной. Если одна буква заменяется на две соседние буквы, то соответствующую вершину соединим прямой линией с двумя соответствующими точками. Наконец, соединим точки $(1, 0)$ и $(1, n)$ произвольной простой кривой, пересекающей другие ребра лишь в ее концевых точках.

Так построенный многогранник имеет три ребра и поэтому три угла в каждой вершине. Пометим эти углы следующим образом. Предположим, что p/q в w_{i-1} заменяется на $p/r \cdot r/q$. Тогда углы вершины, соответствующей p/q, пометим буквами p, r, q по ходу движения часовой стрелки, причем r припишем углу, расположенному между ребрами, идущими вверх от вершины (см. диаграмму 4).

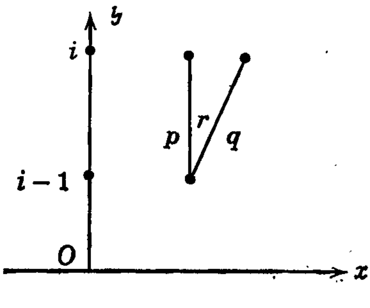


Диаграмма 4.

Аналогично, если $p/r\cdot r/q$ в w_{i-1} заменяется на p/q в w_i, то углы вершины, соответствующей p/q, пометим буквами p, r, q против хода движения часовой стрелки, причем r припишем углу, расположенному между ребрами, идущими вниз от вершины.

Описанная процедура проиллюстрирована для частного случая диаграммой 5, на которой вершинами являются точки, обведенные кружочками.

На этой диаграмме изображен многогранник, соответствующий такой последовательности ρ-переходов:

$$\begin{aligned} w_0 = a/b \to w_1 &= a/z\cdot z/b = x/y\cdot z/b \\ \to w_2 &= x/v\cdot v/y\cdot z/b = x/v\cdot s/t\cdot t/u \\ \to w_3 &= x/v\cdot s/u = x/v\cdot q/r \\ \to w_4 &= x/v\cdot q/p\cdot p/r = l/m\cdot m/n\cdot p/r \\ \to w_5 &= l/n\cdot p/r = c/h\cdot h/d \\ \to w_6 &= c/d. \end{aligned}$$

Заметим, что для нашей процедуры здесь необходимо повторение слова w_3. Равенства обозначают равенства в свободной полугруппе T на множестве Q.

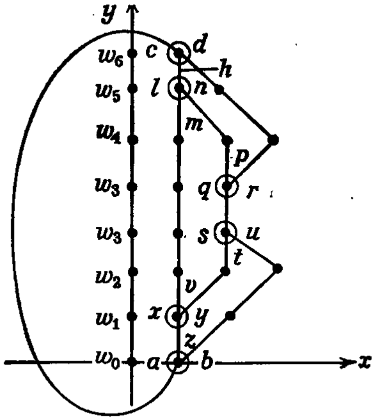


Диаграмма 5.

Рассмотрим произвольное ребро многогранника, исключая ребро, соединяющее вершины (1, 0) и (1, n). Пометка углов произведена таким образом, что частные

(буква, приписанная углу,

соответствующему стороне 1)/

(буква, приписанная углу, соответствующему стороне 2)

совпадают для двух полуребер каждого такого ребра. Следовательно, существует пара элементов из S, которыми можно пометить стороны ребра так, чтобы для этого ребра выполнялись полуреберные равенства. Припишем таким образом элементы из S сторонам каждого ребра многогранника, исключая ребро, соединяющее вершины $(1, 0)$ и $(1, n)$. Для последнего ребра поступим следующим образом. Существуют такие $x, y \in S$, что $xa = yb$. Припишем буквы x, y сторонам этого ребра так, чтобы в вершине $(1, 0)$ выполнялось полуреберное равенство. Тогда в силу условия Ламбека $xc = yd$. Таким образом, $a/b \cap c/d \neq \varnothing$ и поэтому, наконец, $a/b = c/d$.

Это завершает доказательство теоремы Ламбека.

§ 12.6. *Условия Мальцева*

В этом параграфе мы приводим исторически первое решение задачи о вложимости полугруппы в группу. В работе [1939] А. И. Мальцев нашел необходимые и достаточные условия вложимости полугруппы в группу в форме бесконечного набора импликаций, аналогичные условиям Ламбека, рассмотренным в предыдущем параграфе.

Система Ламбека, как и система Мальцева, по определению состоит из четного числа q равенств вида $x_i y_j = x_k y_l$ от $2q$ переменных $x_1, x_2, \ldots, x_q$; $y_1, y_2, \ldots, y_q$ («иксы» всегда находятся слева, а «игреки»— справа), причем каждая переменная встречается в точности два раза. Заданная полугруппа S с сокращениями может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда для каждой системы Ламбека при любой замене переменных элементами из S из того, что выполняются произвольные $q - 1$ равенств системы, следует, что выполняется также оставшееся равенство. Мы увидим, что такое же утверждение справедливо для систем Мальцева, за тем исключением, что в данном случае одно вполне определенное равенство является следствием остальных $q - 1$ равенств. В связи с этим *системой Мальцева* мы будем называть упомянутые $q - 1$ равенств, а равенство, вытекающее из них, будем называть *замыкающим* равенством системы.

В § 12.7 доказано, что система Ламбека является системой Мальцева тогда и только тогда, когда она строится по двухвершинному многограннику. В частности, условие равенства частных соответствует некоторой системе Мальцева. Было бы интересно найти общее описание систем указанного выше вида, служащих для определения условий, при которых полугруппа вложима в группу.

А. И. Мальцев [1940] показал также, что никакое конечное подмножество его условий не достаточно для вложимости. Этому результату посвящен последний параграф данной главы (§ 12.8). В настоящем параграфе, как и в § 12.8, мы следуем А. И. Мальцеву.

Опишем сначала, как составляется система Мальцева. Начнем с введения $2k+2p$ символов:

$$L_1, \ldots, L_k;\ L_1^*, \ldots, L_k^*;$$
$$R_1, \ldots, R_p;\ R_1^*, \ldots, R_p^*.$$

Последовательность Мальцева (длины $q=2k+2p$) есть последовательность из этих q символов, в которой каждый символ содержится в точности один раз и в которой

(i) символы L_i и R_j расположены в их естественном порядке;

(ii) L_i^* $(1 \leqslant i \leqslant k)$ всегда стоит после L_i, и если L_j находится между L_i и L_i^*, то L_j^* также находится между ними; аналогичные условия выполняются для R_i^*.

Например (при $k=3$, $p=2$), такая последовательность является последовательностью Мальцева:

$$L_1L_2R_1L_2^*R_2L_3R_2^*L_3^*L_1^*R_1^*.$$

Легко видеть (хотя это нам и не понадобится в дальнейшем), что существует взаимно однозначное соответствие между последовательностями Мальцева и такими последовательностями $\{i_1, \ldots, i_q\}$ целых чисел, что

(i) каждое i_r равно $+1$, -1, $+2$ или -2,

(ii) для каждого n, где $1 \leqslant n \leqslant q$,

$$\sum_{r=1}^{n} \{i_r \mid i_r = \pm 1\} \geqslant 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \{i_r \mid i_r = \pm 2\} \geqslant 0,$$

причем равенство выполняется для $n=q$. Мы просто заменяем каждое L_i на $+1$, каждое L_i^* на -1, каждое R_i на $+2$ и каждое R_i^* на -2. Таким образом, для указанной выше последовательности мы получаем $\{1, 1, 2, -1, 2, 1, -2, -1, -1, -2\}$. Легко видеть, как можно обратить эту процедуру, хотя соответствующие формулировки громоздки.

Теперь мы покажем, как получается система Мальцева $\sigma(I)$, соответствующая заданной последовательности Мальцева I. Если длина I равна q, то $q-1$ пар соседних символов из I определяют $q-1$ равенств из $\sigma(I)$ при помощи следующей таблицы:

Таблица 1

L_i	L_i^*	R_i	R_i^*
d_ia_i	c_ib_i	A_iD_i	B_iC_i
c_ia_i	d_ib_i	A_iC_i	B_iD_i

Мы имеем здесь восемь последовательностей переменных:

$$a_i,\ b_i,\ c_i,\ d_i,\ A_i,\ B_i,\ C_i,\ D_i \quad (i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Если, например, парой соседних символов является $L_i^* R_j$, то равенством будет $c_i b_i = A_j C_j$. Левая [правая] часть равенства строится по первому [второму] члену пары, и она совпадает с выражением, стоящим в первой [второй] строке таблицы, причем индекс выбирается тот же самый, что и у символа, по которому находится это выражение. Замыкающее равенство системы получается таким же образом с использованием последнего и первого членов последовательности I.

Например, последовательность Мальцева

$$L_1 L_2 R_1 L_2^* R_2 L_3 R_2^* L_3^* L_1^* R_1^*$$

приводит к системе

$$\begin{aligned} d_1 a_1 &= c_2 a_2 \\ d_2 a_2 &= A_1 C_1 \\ A_1 D_1 &= d_2 b_2 \\ c_2 b_2 &= A_2 C_2 \\ A_2 D_2 &= c_3 a_3 \\ d_3 a_3 &= B_2 D_2 \\ B_2 C_2 &= d_3 b_3 \\ c_3 b_3 &= d_1 b_1 \\ c_1 b_1 &= B_1 D_1, \end{aligned}$$

замыкающим равенством которой служит

$$B_1 C_1 = c_1 a_1.$$

Теперь мы можем сформулировать теорему А. И. Мальцева.

Теорема 12.17. *Полугруппа S с единицей может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда для любой последовательности Мальцева I из выполнимости в S системы равенств σ (I) вытекает выполнимость в S ее замыкающего равенства.*

Для доказательства теоремы Мальцева мы должны привести сначала еще одну конструкцию свободной группы на полугруппе. Во избежание некоторых незначительных затруднений мы ограничим наши рассмотрения, как это было сделано в формулировке теоремы, полугруппами с единицей.

Конструкция 12.18. *Пусть S — полугруппа с единицей, Γ — некоторое ее порождающее множество и M — произвольное множество той же мощности, что и Γ. Пусть M^L и M^R — не пересекающиеся между собой и с M множества, причем $|M^L| = |M^R| = |M|$. Обозначим через σ некоторое взаимно однозначное ото-*

бражение множества M *на* Γ, *а через*

$$m \to m^L \qquad (m \in M)$$

и

$$m \to m^R \qquad (m \in M)$$

некоторые взаимно однозначные отображения множества M *соответственно на* M^L *и на* M^R.

Пусть μ — *каноническое вложение множества* M *в* $M \cup M^L \cup M^R$ [1]), $(K, \varkappa)$ — *свободная полугруппа с единицей на множестве* M *и* (T, τ) — *свободная полугруппа с единицей на множестве* $M \cup M^L \cup M^R$. *Пусть, далее,* $\alpha\colon K \to T$ — *гомоморфизм, такой, что* $\varkappa\alpha = \mu\tau$, *и* $\beta\colon K \to S$ — *гомоморфизм, такой, что* $\varkappa\beta = \sigma$.

Положим $\pi_1 = \alpha^{-1} \circ \beta \circ \beta^{-1} \circ \alpha$ *и* $\pi_2 = \{(w, 1)\} \cup \{(1, w)\}$, *где* w *пробегает все слова из* T *вида* mm^R *или вида* $m^L m$ $(m \in M = M\mu = M\mu\tau)$ *и где символом* 1 *обозначена единица из* T. *Наконец, положим* $\rho = \pi_1 \cup \pi_2$ *и обозначим через* ρ_1 *конгруэнцию на* T, *порожденную отношением* ρ. *Пусть* γ — *такой гомоморфизм полугруппы* S *в* T/ρ_1, *что* $\sigma\gamma = \mu\tau\rho_1^\natural$. *Тогда* (G, γ), *где* $G = T/\rho_1$, *является свободной группой на полугруппе* S.

$$\begin{tikzcd}
& M \arrow[dl, "\sigma"'] \arrow[d, "\varkappa", "\subset"'] \arrow[rr, "\mu\ \subset"] & & M \cup M^L \cup M^R \arrow[d, "\tau\ \subset"] \\
S \arrow[drr, "\gamma"'] & K \arrow[l, "\beta"] \arrow[rr, "\subset", "\alpha"'] & & T \arrow[dl, "\rho_1^\natural"] \\
& & G = T/\rho_1 &
\end{tikzcd}$$

Проверка утверждений конструкции проводится стандартными рассуждениями, аналогичными соответствующим рассуждениям для других конструкций этой главы. Без ограничения общности мы можем считать μ, τ, $\varkappa$ и α каноническими вложениями. Элементы из K являются тогда словами в алфавите M, элементы из T — словами в алфавите $M \cup M^L \cup M^R$ и в качестве единицы полугрупп K и T можно взять пустое слово.

Так как (G, γ) является свободной группой на полугруппе S, полугруппа S может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда γ взаимно однозначно (теорема 12.4). Заметим, что, поскольку $\varkappa\beta = \sigma$, $\varkappa\alpha = \mu\tau$ и $M\varkappa$ есть порождающее множество для K, равенство $\sigma\gamma = \mu\tau\rho_1^\natural$ равносильно равенству $\beta\gamma = \alpha\rho_1^\natural$.

[1]) То есть отображение, переводящее каждый элемент из M в себя. В оригинале используется термин «inclusion mapping».— *Прим. перев.*

Таким образом, $\gamma \circ \gamma^{-1} = \beta^{-1} \circ \alpha \circ \rho_1 \circ \alpha^{-1} \circ \beta$. Отсюда легко вывести, что отображение γ тогда и только тогда взаимно однозначно (т. е. $\gamma \circ \gamma^{-1}$ есть отношение равенства на S), когда отношение, индуцированное ρ_1 на $K\alpha$, совпадает с π_1. Другими словами, полугруппа S может быть вложена в группу тогда и только тогда, когда для любых $w, w' \in K$ $(= K\alpha)$ из включения $(w, w') \in \rho_1$ вытекает, что $(w, w') \in \pi_1$, т. е. в S выполняется равенство $w\beta = w'\beta$.

Перейдем теперь к доказательству того, что $(w, w') \in \rho_1$ для $w, w' \in K$ тогда и только тогда, когда в S выполняется определенный набор равенств.

Предположим, что $w, w' \in K$ и $(w, w') \in \rho_1$. Тогда существует последовательность $X = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ элементов из T, для которой $w = w_0$, $w' = w_n$ и $w_i \to w_{i+1}$ является элементарным ρ-переходом при $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Будем говорить, что любая другая последовательность элементов из T, которая выводит w' из w элементарными ρ-переходами, *эквивалентна* последовательности X. Такие последовательности будем называть *ρ-цепями (в T) от w до w'*.

Будем называть ρ-цепь X от w до w' *нормальной*, если w, $w' \in K$ и не существует ρ-перехода $w_i \to w_{i+1}$ из X, который действует правее (в очевидном смысле) какого-либо элемента m^R или левее какого-либо элемента m^L из w_i $(m\mu\tau = m \in M)$.

Следующая лемма является основной.

Лемма 12.19. *Любая ρ-цепь в T между двумя элементами из K эквивалентна некоторой нормальной ρ-цепи.*

Доказательство. Пусть $X = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ есть ρ-цепь, причем $w_0, w_n \in K$. Тогда w_0 и w_n являются словами в алфавите M и поэтому не содержат элементов из M^L и M^R. По ходу цепи X элементы из M^L и M^R будут вводиться, но в конечном счете они будут удалены. Будем обозначать элементы из M^L, вводимые в X, через $d_1^L, d_2^L, \ldots$ в том порядке, в каком они вводятся, а через $D_1^R, D_2^R, \ldots$ — соответствующие элементы из M^R, где $d_1, d_2, \ldots, D_1, D_2, \ldots$ принадлежат M. Элементы вида d_s^L (и D_t^R) не обязательно различны, но такое обозначение позволит нам отличать друг от друга разные вхождения одного и того же элемента из M^L (и M^R). Таким образом, *символ* d_s^L появляется в определенный момент в цепи X, находится там некоторое время, затем исчезает и никогда вновь не появляется.

Предположим, что k соответствующих переходов T_i: $w_i \to w_{i+1}$ являются π_2-переходами, которые вводят элементы из M^L, и p переходов T_i являются π_2-переходами, которые вводят элементы из M^R.

Предположим, далее, что $j-1$ есть число вводимых элементов из M^L $(1 \leqslant j \leqslant k+1)$, для которых нет ρ-преобразований, происходящих левее их при каком-либо переходе T_i. Тогда при $j < k+1$ найдется некоторый элемент d_s^L из M^L, не удовлетворяющий этому условию. Следовательно, для некоторых i, l

$$w_i = ab \to w_{i+1} = ad_s^L d_s b \to \ldots \to w_{l-1} = \\ = a_1 d_s^L d_s b_1 \to w_l = a_1 b_1,$$

где a, b, a_1, b_1 — элементы из T.

Поскольку d_s^L может принять участие только в ρ-переходах, указанных в выписанной последовательности (т. е. в T_i и T_{l-1}), ρ-переходы, преобразующие a в a_1, не зависят от ρ-переходов, преобразующих $d_s b$ в $d_s b_1$. Следовательно, мы можем изменить порядок расположения ρ-переходов (сохраняя его для ρ-переходов от a до a_1 и от $d_s b$ до $d_s b_1$) для того, чтобы получить последовательность

$$w_i = ab \to \ldots \to a_1 b \to a_1 d_s^L d_s b \to \ldots \to a_1 d_s^L d_s b_1 \to a_1 b_1 = w_l.$$

Вставляя эту последовательность между w_i и w_l, мы получим новую последовательность, эквивалентную последовательности X. В новой последовательности имеется j вводимых элементов из M^L, для которых не существует ρ-переходов, происходящих левее их. Рассмотрим это детальней. Пусть исходная ρ-цепь имеет следующий ряд шагов преобразований:

шаг 1: $ab \to ad_s^L d_s b$,
шаг 2: $ad_s^L d_s b \to \ldots \to a_1 d_s^L d_s b_1$,
шаг 3: $a_1 d_s^L d_s b_1 \to a_1 b_1$;

новая ρ-цепь имеет шаги:

шаг 1′: $ab \to \ldots \to a_1 b$,
шаг 2′: $a_1 b \to a_1 d_s^L d_s b$,
шаг 3′: $a_1 d_s^L d_s b \to \ldots \to a_1 d_s^L d_s b_1$,
шаг 4′: $a_1 d_s^L d_s b_1 \to a_1 b_1$.

Теперь ясно, что новая ρ-цепь построена таким образом, что левее вводимого элемента d_s^L не происходит никаких ρ-переходов. Докажем, что это свойство сохраняется для других $j-1$ вводимых элементов из M^L, которые по предположению обладали им в первой цепи. В самом деле, пусть d_u^L — один из этих элементов. Так как на любом из шагов 1, 2 и 3 никакой ρ-переход не может происходить левее d_u^L, никакой ρ-переход не может произойти левее d_u^L на шаге 1′ (от a до a_1) или на шаге 3′ (от $d_s b$ до $d_s b_1$). Далее, так как преобразование на шаге 1 происходит левее b, элемент d_u^L не входит в слово b, поэтому преобразование на шаге 2′ не происходит левее b. Наконец, поскольку преобразование на шаге 3 происходит левее b_1, мы получаем, очевидно, что преобразование на шаге 4′ не происходит левее d_u^L.

Будем повторять этот процесс до тех пор, пока не получим цепь, эквивалентную цепи X, такую, что в ней нет ρ-переходов, происходящих левее какого-либо из k элементов множества M^L.

Аналогично, мы могли бы начать с элементов из M^R и получить ρ-цепь с требуемым свойством для этих элементов. Предположим, что мы начали с элементов из M^R и получили ρ-цепь, эквивалентную X, в которой не существует ρ-перехода, действующего правее какого-либо элемента из M^R. Повторим теперь предыдущие рассуждения для символов из M^L. Докажем, что замена шагов 1—3 на шаги $1'$—$4'$ не вводит преобразования, действующего правее какого-либо элемента D_t^R.

В самом деле, пусть D_t^R — элемент из M^R, встречающийся в качестве сомножителя в некотором слове цепи. Поскольку ρ-переход на шаге 1 действует правее a, символ D_t^R не входит в слово a. Аналогично, рассмотрев шаг 3, мы видим, что D_t^R не входит в слово a_1. Следовательно, если D_t^R вводится на шаге 2 левее d_s^L, то на этом же шаге он должен удаляться. Таким образом, если D_t^R вводится на шаге $1'$, то на этом же шаге он удаляется, причем на шаге $1'$ никакой ρ-переход не может действовать правее D_t^R. Ясно, что на шаге $2'$ ρ-переход действует правее слова, в которое не входит D_t^R. На шаге $3'$ в преобразованиях от d_sb до d_sb_1 никакой ρ-переход не может действовать правее D_t^R, так как в противном случае он действовал бы правее D_t^R на шаге 2. Наконец, на шаге $4'$ ρ-переход действует правее слова, в которое не входит, как отмечалось выше, символ D_t^R.

Это доказывает наше утверждение. Процесс преобразования цепи X заканчивается получением нормальной цепи от w_0 до w_n. Это завершает доказательство леммы.

Если w — произвольное слово нормальной цепи, то ясно, что каждый его сомножитель, принадлежащий M^L, предшествует каждому его сомножителю, принадлежащему M^R. *Сердцевиной* слова w мы называем часть слова w, лежащую между последним сомножителем из M^L и первым сомножителем из M^R. Например, если в w не входят символы из $M^L \cup M^R$, то w совпадает со своей сердцевиной.

Пусть $X = (w_0, w_1, \ldots, w_n)$ — нормальная цепь. Цепь X называется *собственной*, если

(1) n нечетно (будем считать, что $n = 2q + 1$);

(2) T_{2j}: $w_{2j} \to w_{2j+1}$ $(j = 0, 1, \ldots, q)$ является π_1-переходом;

(3) T_{2j+1}: $w_{2j+1} \to w_{2j+2}$ $(j = 0, 1, \ldots, q-1)$ является π_2-переходом.

Теперь мы можем усилить предыдущую лемму.

Лемма 12.20. *Любая нормальная ρ-цепь эквивалентна собственной нормальной ρ-цепи.*

Доказательство. Для доказательства леммы достаточно сделать два замечания. Во-первых, так как пара (1, 1) принадлежит π_1, между любыми двумя последовательными π_2-переходами можно вставить тривиальный π_1-переход. Во-вторых, нормальную цепь последовательных π_1-переходов можно заменить одним π_1-переходом, поскольку такую цепь можно рассматривать как цепь π_1-переходов на сердцевинах слов, π_1 есть конгруэнция на K и сердцевины всех слов в нормальной цепи принадлежат K. Оба типа рассмотренных замен преобразуют нормальную цепь в нормальную цепь. Ясно, что, используя указанные замены, мы можем преобразовать нормальную цепь в эквивалентную ей собственную нормальную цепь.

Лемма доказана.

Пусть $X = (w_0, w_1, \ldots, w_{2q+1})$ — собственная нормальная цепь. Тогда X определяет следующую последовательность Мальцева $I = (X_1, X_2, \ldots, X_q)$ длины q: X_j совпадает с L_i, L_i^*, R_i или R_i^* в зависимости от того, вставляет ли пару $d_i^L d_i$, удаляет ли пару $d_i^L d_i$, вставляет ли пару $D_i D_i^R$ или удаляет пару $D_i D_i^R$ переход T_{2j-1}. (Как и выше, через $d_1^L, d_2^L, \ldots, d_k^L$ $[D_1^R, D_2^R, \ldots, D_k^R]$ мы будем обозначать элементы из M^L $[M^R]$ в порядке их появления в ρ-цепи.) Ясно, что построенная таким образом последовательность I удовлетворяет условиям (i) и (ii) для последовательности Мальцева.

Предположим, что T_{2j-1} вставляет пару $d_i^L d_i$ в слово w_{2j-1}. Так как X — нормальная цепь, должны существовать такие c_i, $a_i \in K$, что $c_i a_i$ является сердцевиной слова w_{2j-1} и $w_{2j} = \ldots c_i d_i^L d_i a_i \ldots$. Тогда сердцевина слова w_{2j} равна $d_i a_i$. Заметим также, что ввиду нормальности цепи X слово c_i, находящееся левее d_i^L, не будет затрагиваться ρ-переходами до тех пор, пока не будет удален символ d_i^L. Аналогично, если T_{2j-1} вставляет пару $D_i D_i^R$ в w_{2j-1}, то сердцевину слова w_{2j-1} мы будем записывать в виде $A_i C_i$, где $w_{2j} = A_i D_i D_i^R C_i \ldots$. Тогда сердцевина слова w_{2j} равна $A_i D_i$ и C_i не будет затрагиваться ρ-переходами до тех пор, пока не будет удален символ D_i^R. Если T_{2j-1} удаляет пару $d_i^L d_i$ из слова w_{2j-1}, то сердцевину слова w_{2j-1} мы условимся записывать в виде $d_i b_i$. Это возможно, поскольку в силу нормальности цепи пару $d_i^L d_i$ можно удалить из w_{2j-1} только в случае, когда d_i является первым сомножителем в сердцевине слова w_{2j-1}. Учитывая замечание, сделанное выше об элементе c_i, мы можем сказать, что $w_{2j-1} = \ldots c_i d_i^L d_i b_i \ldots$ и что $c_i b_i$ является сердцевиной слова w_{2j}. Аналогично, если T_{2j-1} удаляет пару $D_iD_i^R$ из w_{2j-1}, то мы можем записать сердцевину слова w_{2j-1} в виде B_iD_i. Тогда сердцевина слова w_{2j} равна B_iC_i.

Описанный процесс определяет форму записи сердцевины всех элементов из X, за исключением w_0 и w_{2q+1}. Результаты сведем в следующую таблицу:

Таблица 2

T_{2j-1}	Сердцевина слова w_{2j-1}	Сердцевина слова w_{2j}
Вставляет $d_i^Ld_i$	c_ia_i	d_ia_i
Удаляет $d_i^Ld_i$	d_ib_i	c_ib_i
Вставляет $D_iD_i^R$	A_iC_i	A_iD_i
Удаляет $D_iD_i^R$	B_iD_i	B_iC_i

Теперь ясно, как цепь X определяет систему Мальцева $\sigma(I)$ и ее замыкающее равенство. Действительно, из таблицы 2 при соответствующей интерпретации получается таблица 1 этого параграфа. Равенства из $\sigma(I)$ определяют преобразования сердцевин (и определяются этими преобразованиями), индуцированные переходами T_{2j} $(j = 0, 1, \ldots, q-1)$. Например, предположим, что T_{2j-1} вставляет $d_i^Ld_i$, а T_{2j+1} удаляет $D_kD_k^R$. Тогда сердцевина слова w_{2j} равна d_ia_i, а сердцевина слова w_{2j+1} равна B_kD_k. Таким образом, T_{2j} при своем действии заменяет d_ia_i на B_kD_k. Пара T_{2j-1}, T_{2j+1} определяет пару $L_iR_k^*$ в последовательности Мальцева I, и из таблицы 1 видно, что соответствующим равенством из $\sigma(I)$ будет $d_ia_i = B_kD_k$. Это равенство в точности совпадает с равенством, определяемым переходом T_{2j}. Равенство $d_ia_i = B_kD_k$, вообще говоря, не выполняется в T. Однако, так как π_1 есть конгруэнция на K $(\subseteq T)$, мы имеем $d_ia_i\pi_1B_kD_k$, и поэтому $(d_i\beta)(a_i\beta) = (B_k\beta)(D_k\beta)$ есть равенство, выполняющееся в S. Замыкающее равенство для $\sigma(I)$ определяется аналогично сердцевинами слов w_{2q} и w_1. Поскольку $(w_{2q}, w_{2q+1}) \in \pi_1$ и $(w_0, w_1) \in \pi_1$, включение $(w_0, w_{2q+1}) \in \pi_1$ имеет место тогда и только тогда, когда $(w_{2q}, w_1) \in \pi_1$, т. е. когда $w_{2q}\beta = w_1\beta$. В качестве примера укажем собственную нормальную цепь, которая приводит к системе Мальцева, использованной выше в качестве примера. Сердцевины слов подчеркнуты. Слова, объединенные фигурными скобками, дают равенства системы.

$$
\begin{gathered}
w_0 \\
\underline{c_1a_1} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ \underline{d_1a_1} \\ c_1d_1^L\ \underline{c_2a_2} \end{cases} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ c_2d_2^L\ \underline{d_2a_2} \\ c_1d_1^L\ c_2d_2^L\ \underline{A_1C_1} \end{cases} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ c_2d_2^L\ \underline{A_1D_1}\ D_1^RC_1 \\ c_1d_1^L\ c_2d_2^L\ \underline{d_2b_2}\ D_1^RC_1 \end{cases} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ \underline{c_2b_2}\ D_1^RC_1 \\ c_1d_1^L\ \underline{A_2C_2}\ D_1^RC_1 \end{cases} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ \underline{A_2D_2}\ D_2^RC_2\ D_1^RC_1 \\ c_1d_1^L\ \underline{c_3a_3}\ D_2^RC_2\ D_1^RC_1 \end{cases} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ c_3d_3^L\ \underline{d_3a_3}\ D_2^RC_2\ D_1^RC_1 \\ c_1d_1^L\ c_3d_3^L\ \underline{B_2D_2}\ D_2^RC_2\ D_1^RC_1 \end{cases} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ c_3d_3^L\ \underline{B_2C_2}\ D_1^RC_1 \\ c_1d_1^L\ c_3d_3^L\ \underline{d_3b_3}\ D_1^RC_1 \end{cases} \\
\begin{cases} c_1d_1^L\ \underline{c_3b_3}\ D_1^RC_1 \\ c_1d_1^L\ \underline{d_1b_1}\ D_1^RC_1 \end{cases} \\
\begin{cases} \underline{c_1b_1}\ D_1^RC_1 \\ \underline{B_1D_1}\ D_1^RC_1 \end{cases} \\
\underline{B_1C_1} \\
w_{21}
\end{gathered}
$$

Мы установили, что любая собственная нормальная цепь X определяет: (1) последовательность Мальцева $I = I_X$, (2) набор элементов из π_1, которые задают равенства $\sigma(I)$, и (3) элемент из π_1, который задает замыкающее равенство системы $\sigma(I)$. Обратно, предположим, что нам дана последовательность Мальцева I вместе с множеством равенств $\sigma(I)$. Подставим тогда вместо переменных a_i, b_i, c_i, d_i, A_i, B_i, C_i, D_i, где $d_i, D_i \in M$, элементы из K таким образом, чтобы обе части каждого равенства из $\sigma(I)$ составляли компоненты пары из π_1. Тогда легко видеть, что мы можем использовать указанные элементы из π_1 в качестве сердцевин элементов некоторой собственной нормальной цепи, которая в свою очередь только что описанной процедурой будет определять исходную последовательность I и множество элементов из π_1, которые были получены из $\sigma(I)$. Так построенная собственная нормальная цепь единственна с точностью до добавления π_1-эквивалентных элементов на каждом из концов.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы 12.17. Предположим сначала, что S может быть вложена в группу. Пусть I — произвольная последовательность Мальцева и символы $a_i, b_i, \ldots, D_i$ имеют такие значения в S, что выполняются равенства $\sigma(I)$. Выберем порождающее множество Γ из S таким образом, чтобы все d_i, D_j принадлежали Γ, т. е. чтобы в M существовали элементы, которые переводятся в элементы d_i и D_j при отображении σ (а поэтому и при отображении β). При таком выборе множества M мы можем выбрать значения для символов $a_i, b_i, \ldots, D_i$ в K так, чтобы образами этих значений при отображении β были соответственно значения этих символов в S и чтобы значения символов d_i, D_j принадлежали M. При таком выборе левая и правая части каждого равенства из $\sigma(I)$ определяют элемент из π_1. Эти элементы из π_1 определяют указанной выше процедурой некоторую собственную нормальную цепь X от w до w'. Мы имеем $w, w' \in K$ и $(w, w') \in \rho_1$. Следовательно, $(w, w') \in \pi_1$, так как S вложима в группу. Принимая во внимание замечания, сделанные выше о построении по цепи X замыкающего равенства, и используя отображение β, мы легко получаем, что замыкающее равенство системы $\sigma(I)$ выполняется в S.

Обратно, предположим, что для любой последовательности Мальцева I выполнимость в S всех равенств из $\sigma(I)$ влечет за собой выполнимость в S замыкающего равенства системы $\sigma(I)$. Пусть $w, w' \in K$ и $(w, w') \in \rho_1$. Тогда, как мы уже видели, существует некоторая собственная нормальная ρ-цепь X, преобразующая w в w', которая определяет последовательность Мальцева I_X и множество элементов из π_1, задающих с учетом отображения β систему истинных в S равенств $\sigma(I_X)$. Отсюда в силу нашего предположения следует, что в S выполняется также замыкающее равенство системы $\sigma(I_X)$. Это равносильно тому, что $(w_1, w_1') \in \pi_1$, где $w \to w_1$ есть первый переход, а $w_1' \to w$ есть второй переход цепи X. Оба указанных перехода являются π_1-переходами. Следовательно, $(w, w') \in \pi_1$, откуда непосредственно вытекает, что полугруппа S может быть вложена в группу.

Это завершает доказательство теоремы Мальцева.

Заметим в заключение, что приведенное выше доказательство достаточности дает более сильный результат, нежели сформулированный в теореме. В качестве M можно выбрать произвольное множество, для которого $M\sigma = \Gamma$ является порождающим множеством полугруппы S. Для вложимости полугруппы S в группу достаточно, чтобы из выполнимости в S системы равенств σ (I), для которой $d_i, D_j \in \Gamma$, вытекала выполнимость в S замыкающего равенства этой системы. Мы используем указанное замечание в § 12.8.

Упражнения к § 12.6

1. Пусть I — последовательность Мальцева. Если XY — пара соседних символов из I, то XY определяет с учетом таблицы 1 некоторое равенство из σ (I). Назовем левой частью этого равенства ту из частей, которая отыскивается в таблице 1 по символу X. Образуем равенство, которое будем обозначать через (α). Для этого перемножим все левые части равенств из σ (I) и приравняем полученное выражение произведению всех правых частей (равенства можно брать в любом порядке).

Пусть S — коммутативная полугруппа с сокращениями. Предположим, что в S выполняются равенства σ (I). Тогда (α) также выполняется в S, и, сокращая в равенстве (α), получаем, что в S выполняется замыкающее равенство системы σ (I). Следовательно, S может быть вложена в группу.

2. Пусть S — квазиреверсивная слева полугруппа с сокращениями (см. упражнение 4 к § 12.4). Тогда S вложима в группу. (Досс [1948] [1].)

3. Полугруппа с единицей тогда и только тогда будет полугруппой с сокращениями, когда для каждой последовательности Мальцева I длины 2 из выполнимости в S системы σ (I) вытекает выполнимость в S замыкающего равенства этой системы.

§ 12.7. *Сравнение систем Мальцева и Ламбека*

В этом параграфе мы покажем, что системы Мальцева, образующие вместе с их замыкающими равенствами системы Ламбека в смысле, разъясненном ниже,— это в точности те системы Ламбека, которые возникают из двухвершинных многогранников.

[1]) Укажем также на работу С. И. Адяна [1960] (подробное изложение см. в [1966]), где найдено одно достаточное условие вложимости в группу конечно определенной полугруппы, из которого вытекает, в частности, что полугруппа с сокращениями, заданная одним определяющим соотношением, вложима в группу. С другой стороны, существуют полугруппы с сокращениями, заданные двумя определяющими соотношениями, которые не вложимы в группу; в цитированных работах приведены такие примеры, принадлежащие П. С. Новикову и С. И. Адяну (в построенном А. И. Мальцевым исторически первом примере полугруппы с сокращениями, не вложимой в группу, полугруппа была задана тремя определяющими соотношениями).— *Прим. ред.*

Соотношение между системами Мальцева и Ламбека рассматривалось также Бушем [1963]. Мы продолжаем использовать обозначения предыдущего параграфа.

Под системой Ламбека мы понимаем систему полуреберных равенств, которые возникают при пометке буквами всех сторон и углов эйлерова многогранника способом, описанным в § 12.5. Кроме того, в целях сравнения с системами Мальцева мы будем предполагать, что никакая буква не используется дважды в пометке многогранника. Это соответствует нашему соглашению относительно систем Мальцева, когда при построении последовательности Мальцева из цепи элементарных переходов мы присваивали новые имена каждому новому вхождению буквы.

Теорема 12.21. *Система Мальцева равенств $\sigma(I)$ вместе с ее замыкающим равенством образует систему Ламбека тогда и только тогда, когда последовательность I имеет вид*

$$L_1 \dots L_n R_1 L_n^* \dots L_1^* L_{n+1} \dots L_{n+m} R_1^* L_{n+m}^* \dots L_{n+1}^*,$$

причем $n + m > 0$. В этом случае система Ламбека возникает из двухвершинного многогранника с $n + m + 1$ ребрами.

Обратно, пусть P — двухвершинный многогранник и $\mathcal{S}(P)$ — система Ламбека равенств, соответствующих P. Выберем из $\mathcal{S}(P)$ произвольное равенство $\overline{P}$. Тогда существует система Мальцева I, для которой $\overline{P}$ является замыкающим равенством и $\mathcal{S}(P) \setminus \overline{P} = \sigma(I)$.

Прежде всего нам понадобятся две леммы. Мы будем использовать следующую терминологию. Будем говорить, что равенство, считываемое по паре символов XY в таблице 1 (§ 12.6), *открывается* символом X и *закрывается* символом Y. Далее, если I — последовательность Мальцева, то мы предполагаем, что соответствующие равенства $\sigma(I)$ вместе с замыкающим равенством упорядочены в порядке их считывания из таблицы 1, причем считывание мы начинаем с первого символа цепи I, движемся последовательно вдоль I и завершаем полный цикл первым символом цепи I, так что последним равенством будет замыкающее равенство системы $\sigma(I)$.

Два полуреберных равенства, соответствующих одному ребру многогранника, имеют вид $xa = yb$ и $xc = yd$, где x, y, a, b, c, d различны в силу нашего соглашения. Эти два равенства имеют в точности две общие буквы, а именно x и y, причем x и y являются левыми сомножителями членов этих равенств. Мы будем говорить, что эти два равенства имеют *два общих левых сомножителя*. О системе Ламбека можно сказать, что она состоит из такого набора пар равенств, что два равенства каждой пары имеют два общих левых сомножителя. Этот факт является исходным пунктом нашего доказательства теоремы.

Лемма 12.22. *Если два последовательных равенства системы Мальцева имеют два общих левых сомножителя, то они соответствуют одной из следующих троек в последовательности Мальцева:* $L_iR_jL_i^*$, $L_iR_j^*L_i^*$, $L_i^*R_j^*L_i$ *или* $L_i^*R_jL_i$ (*последние два случая выполняются лишь тогда, когда вся цепь имеет вид* $L_i \ldots L_i^*R_j^*$ *или* $R_jL_i \ldots L_i^*$ *соответственно*).

Доказательство. Буквы a_i, b_i, C_i и D_i встречаются только в качестве правых сомножителей в системе Мальцева, поэтому мы можем ограничить свое внимание буквами A_i, B_i, c_i, d_i. Буква c_i встречается только в равенстве, открывающемся символом L_i^*, и в равенстве, закрывающемся символом L_i. Следовательно, если c_i является общим левым сомножителем двух последовательных равенств, то соответствующая тройка в последовательности Мальцева должна иметь вид $L_i^*XL_i$ или $L_i^*X^*L_i$. Используя таблицу 1, легко проверить, что $X = R_j$ является единственной возможностью, которая дает второй общий левый сомножитель. Однако в последовательности Мальцева L_i^* должно встречаться после L_i. Кроме того, последовательность Мальцева должна начинаться с символа без звездочки и должна заканчиваться символом со звездочкой. Следовательно, указанные возможности осуществляются лишь тогда, когда вся последовательность имеет вид $R_jL_i \ldots L_i^*$ или $L_i \ldots L_i^*R_j^*$.

Буква d_i встречается лишь в равенствах, открываемых символом L_i, и в равенствах, закрываемых символом L_i^*. Аналогичный перебор возможностей показывает, что два общих левых сомножителя, один из которых есть d_i, появляются только для троек $L_iR_jL_i^*$ и $L_iR_j^*L_i^*$. Каждая из букв A_i и B_i может быть общим левым сомножителем только в рассмотренных нами случаях; действительно, A_i $[B_i]$ является общим левым сомножителем тогда и только тогда, когда средним символом тройки является R_i $[R_i^*]$.

Лемма 12.23. *Если два не соседних равенства системы Мальцева имеют два общих левых сомножителя, то соответствующие пары соседних символов в последовательности Мальцева должны быть одного из следующих типов:* L_iL_{i+1} *и* $L_{i+1}^*L_i^*$; $L_i^*L_j$ *и* $L_j^*L_i$ (*последняя возможность осуществляется лишь в случае, когда вся последовательность имеет вид* $L_i \ldots L_i^*L_j \ldots L_j^*$).

Доказательство. Каждая из букв A_i и B_i может встречаться в качестве общего левого сомножителя лишь для соседних равенств. Следовательно, общими левыми буквами двух равенств, не являющихся последовательными равенствами, могут быть только буквы c_i и d_j. Буква c_i встречается в равенстве, открываемом символом L_i^*, и в равенстве, закрываемом символом L_i, а буква d_i встречается в равенстве, открываемом символом L_i, и в равенстве, закрываемом символом L_i^*. Следовательно, все возможности для пар исчерпываются следующими: (i) $L_i^*L_j$ и $L_j^*L_i$, (ii) L_iL_j и $L_j^*L_i^*$. Используя определение последовательности Мальцева, в случае (ii) получаем $j = i + 1$. Что касается случая (i), то снова по определению последовательности Мальцева обе пары $L_i^*L_j$ и $L_j^*L_i$ не могут быть расположены в таком порядке в исходной последовательности, поэтому одна из них, например $L_j^*L_i$, соответствует замыкающему равенству системы. Отсюда следует, что L_i является первым членом, а L_j^* — вторым членом последовательности. Это завершает доказательство леммы.

Перейдем теперь к доказательству первого утверждения теоремы. Предположим сначала, что в последовательности Мальцева I не встречаются символы R_j, так что I состоит исключительно из символов L_i и соответствующих им символов L_i^*. Если L_j — последний символ такого типа в последовательности I, то по определению последовательности Мальцева следующим символом в I будет L_j^*. Пара $L_jL_j^*$ определяет равенство $d_ja_j = d_jb_j$. Это равенство не может принадлежать системе Ламбека, поскольку в силу нашего соглашения все стороны и углы помечены различными буквами. Следовательно, последовательности I принадлежит некоторый из символов R_j, скажем R_1.

На основании лемм 12.22 и 12.23 последовательность I, содержащая символ R_1, должна иметь вид $\ldots L_nR_1L_n^* \ldots$ или $R_1L_1 \ldots L_1^*$. В первом случае перед символом L_n могут находиться только символы вида L_j и L_i^*; но тогда рассуждениями, аналогичными приведенным, можно показать, что перед L_n символы типа L_i^* не встречаются. Следовательно, в этом случае, снова учитывая лемму 12.22, мы видим, что последовательность I начинается следующим образом:

$$L_1 \ldots L_nR_1L_n^* \ldots L_1^* \ldots .$$

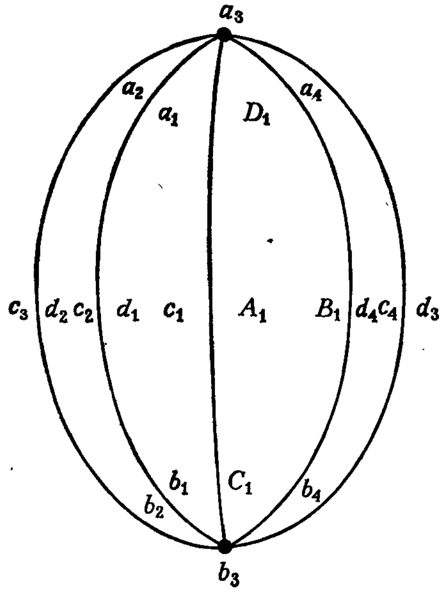
В силу леммы 12.22 последовательность может теперь закончиться символом R_1^* (случай $m = 0$ теоремы) или, поскольку пара $L_1^*R_2$ не может возникнуть в силу наших лемм, последовательность продолжается $\ldots L_{n+1} \ldots$. Снова применяя леммы, мы легко получаем, что последовательность I должна иметь вид, указанный в теореме. Аналогичные рассуждения проводятся в оставшемся случае (случай $n = 0$ теоремы).

Мы должны теперь показать, что наши системы Ламбека — это системы, возникающие из двухвершинных многогранников; сделаем это, обращаясь к рисункам подходящим образом помеченных многогранников для случаев $n = 0$, $m = 0$ и $mn \neq 0$. Из наших рассуждений будет видно, что выполняется также и обратное утверждение теоремы. В каждом случае через $\overline{P}$ будем обозначать равенство, произвольным образом выбранное из системы Ламбека $\mathcal{S}(P)$, соответствующей многограннику P.

На каждой из диаграмм в качестве нижней вершины будем брать ту из вершин, в которой полуребро определяет равенство $\overline{P}$.

Случай $n = 0$. Правая сторона ребра, полуребро которого определяет $\overline{P}$, помечена символом A_1, а его левая сторона — символом c_1. Соседнее справа ребро или, если правее нет ребер, крайнее слева ребро помечено с левой стороны символом B_1, а с правой стороны — символом d_m. Оставшиеся $m - 1$ левых сторон ребер помечаются последовательно символами $c_2, \ldots, c_m$, при этом, начиная с ребра, определяющего $\overline{P}$, мы движемся влево до крайнего левого ребра и затем, начиная с правого края диаграммы, мы снова движемся влево. Правую сторону ребра, левая сторона которого помечена символом c_i, пометим символом d_{i-1} $(i = 2, 3, \ldots, m)$.

Теперь пометим следующим образом углы. В нижней вершине, начиная с угла, расположенного левее полуребра, определяющего $\overline{P}$, и двигаясь против хода часовой стрелки, пометим последовательно углы символами $b_1, \ldots, b_m, C_1$. В верхней вершине, начиная с угла, расположенного левее ребра, нижнее полуребро которого определяет $\overline{P}$, и двигаясь по ходу часовой стрелки, пометим последовательно углы символами $a_1, a_2, \ldots, a_m, D_1$. Диаграмма иллюстрирует случай $m = 4$.



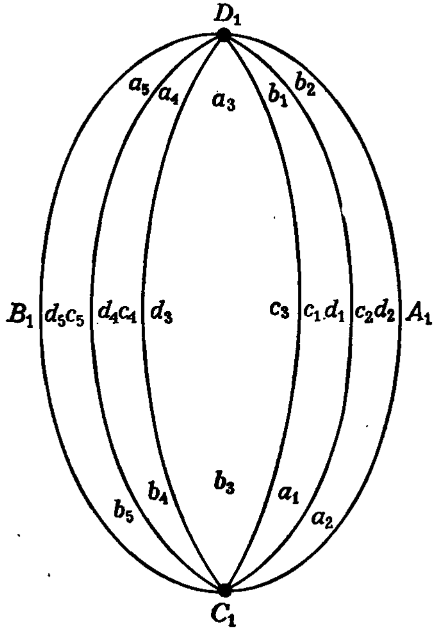
Случай $n = 0$, $m = 4$.

Такая система Ламбека является системой Мальцева, равенства которой (включая замыкающее равенство $c_1b_1 = A_1C_1$) соответствуют последовательности Мальцева

$$R_1L_1 \ldots L_mR_1^*L_m^* \ldots L_1^*.$$

Случай $m = 0$. Чтобы получить диаграмму для этого случая, мы просто возьмем диаграмму предыдущего случая $n = 0$, поменяем в ней местами A_1 и B_1, C_1 и D_1, заменим n на m и после этого перевернем ее. Замыкающим равенством здесь будет $B_1C_1 = c_1a_1$.

Случай $mn \neq 0$. Здесь нам понадобится подходящая комбинация двух только что описанных рисунков. Пометим прежде всего символом c_1 правую сторону ребра, полуребро которого определяет $\bar{P}$, и символом c_{n+1} левую сторону этого ребра. Осталось пометить $n + m$ ребер. Пометим левые стороны оставшихся ребер последовательно символами $c_{n+2}, \ldots, c_{n+m}$, B_1, d_n, $d_{n-1}, \ldots, d_1$, двигаясь влево от уже помеченного ребра до крайнего слева ребра и затем снова двигаясь влево от правого края диаграммы. Пометим правые стороны оставшихся $n + m$ ребер в том же порядке символами $d_{n+1}, \ldots, d_{n+m}$, A_1, c_n, $c_{n-1}, \ldots, c_2$.



Случай $n = 2$, $m = 3$.

Далее, пометим следующим образом углы. В нижней вершине, начиная с угла, расположенного на стороне B_1, и двигаясь по ходу часовой стрелки, пометим последовательно углы символами C_1, b_{n+m}, ..., b_{n+1}, a_1, ..., a_n. В верхней вершине, начиная с угла, расположенного на стороне A_1, и двигаясь против хода часовой стрелки, пометим последовательно углы символами D_1, a_{n+m}, ..., a_{n+1}, b_1, ..., b_n. Диаграмма иллюстрирует случай $n = 2$ и $m = 3$.

Получающаяся система Ламбека является системой Мальцева равенств (вместе с замыкающим равенством $c_1a_1 = c_{n+1}b_{n+1}$), соответствующих последовательности Мальцева

$$L_1 \ \ldots \ L_nR_1L_n^* \ \ldots \ L_1^*L_{n+1} \ \ldots \ L_{n+m}R_1^*L_{n+m}^* \ \ldots \ L_{n+1}^*,$$

где $n > 0$ и $m > 0$. Доказательство теоремы закончено.

§ 12.8. *Конечные множества квазитождеств*

Множество всех последовательностей Мальцева счетно. Следовательно, и множество необходимых и достаточных условий для возможности вложения полугруппы в группу, указанных в теореме 12.17, счетно. В этом параграфе мы докажем еще один результат А. И. Мальцева [1940] о том, что никакое конечное подмножество этих условий не достаточно для возможности вложения.

На самом деле мы докажем более общий результат, также принадлежащий А. И. Мальцеву [1940]. *Квазитождеством* [1]) называется условие, состоящее в том, что выполнение одного конечного набора равенств влечет за собой выполнение другого конечного набора равенств [2]). Поясним сказанное. Каждое равенство можно записать формально в виде $w = w'$, где w и w' — слова из некоторой свободной полугруппы $\mathcal{F}$. Подчеркнем, что, говоря о «равенстве», мы не имеем в виду равенство слов в свободной полугруппе. Пусть $w_i = w_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — одна конечная система равенств и $v_j = v_j'$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ — другая конечная система равенств. Будем говорить, что в полугруппе S система равенств $w_i = w_i'$ *влечет за собой* равенства $v_j = v_j'$, если для любого гомоморфизма φ: $\mathcal{F} \to S$ из того, что $w_i\varphi = w_i'\varphi$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, следует, что $v_j\varphi = v_j'\varphi$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$.

Мы докажем, что никакое конечное множество квазитождеств не является достаточным для возможности вложения полугруппы в группу. Как и к системам Мальцева, эта теорема применима к системам Ламбека. Таким образом, не существует такого конечного набора многогранников, что выполнимость соответствующих

---

[1]) В оригинале эквациональной импликацией (equational implication). В русской литературе применяется также термин «условное тождество».— *Прим. перев.*

[2]) Чаще в определении квазитождества этот второй набор считают состоящим из одного равенства. Разумеется, данное отличие в определениях не существенно.— *Прим. ред.*

им квазитождеств является достаточным условием вложимости полугруппы в группу.

Следующая лемма является основной. Мы используем понятия, введенные в конструкции 12.18. Кроме того, мы продолжаем считать α каноническим вложением и поэтому будем его опускать. Отображения $\varkappa$, μ и τ также будем считать каноническими вложениями всюду, где это не приводит к недоразумениям. Таким образом, мы, например, будем писать $\pi_1 = \beta \circ \beta^{-1}$.

Лемма 12.24. *Пусть $M = P \cup Q$, где P и Q — непересекающиеся множества. Предположим, что $\beta \circ \beta^{-1}$ порождается (как конгруэнция на K) множеством пар вида $(pq, p'q')$, где $p, p' \in P$ и $q, q' \in Q$. Обозначим через $l(w)$ длину элемента $w \in K$, рассматриваемого как слово в алфавите M. Пусть $(w, w') \in \rho_1 \cap (K \times K)$. Тогда*

$$w = a_1 a_2 \ldots a_n$$

и

$$w' = a'_1 a'_2 \ldots a'_n,$$

где для $i = 1, 2, \ldots, n$

(i) $a_i, a'_i \in K$;

(ii) $(a_i, a'_i) \in \rho_1$;

(iii) $l(a_i) = l(a'_i)$;

(iv) *либо* (a) $l(a_i) = 1$, *если a_i и a'_i принадлежат одновременно P или Q, либо* (b) $l(a_i) = 2$, *если $a_i = pq$, $a'_i = p'q'$ для некоторых $p, p' \in P$ и $q, q' \in Q$.*

Доказательство. По лемме 12.20 существует собственная нормальная цепь от w до w'. Из множества всех таких собственных нормальных цепей выберем цепь X, которая содержит наименьшее число π_2-переходов, использующих символы из $P^L \cup P^R$. Здесь $P^L = \{m^L \mid m^L \in M^L,\ m \in P\}$, $P^R = \{m^R \mid m^R \in M^R,\ m \in P\}$.

Нам понадобится несколько определений. Обозначим через π множество пар $(pq, p'q')$, которые по предположению порождают конгруэнцию π_1 на K. Тогда любой π_1-переход эквивалентен конечной последовательности π-переходов. При каждом π-переходе, а поэтому при каждом π_1-переходе элемент из P $[Q]$ либо не меняется, либо заменяется на элемент из P $[Q]$. Предположим, например, что p $[q]$ заменяется на элемент p' $[q']$, который в свою очередь заменяется на p'' $[q'']$, и т. д. Тогда $p, p', p'', \ldots$ $[q, q', q'', \ldots]$ будем называть *консеквентами* элемента p $[q]$. Мы не включаем в число консеквентов элемента p консеквенты любого другого вхождения этого элемента.

Рассмотрим теперь π_2-переход цепи X, который вводит элемент из $P^L \cup P^R$. Пусть, например, этот переход вводит пару pp^R.

Тогда p^R удаляется на более позднем этапе при вычеркивании пары pp^R. Будем говорить, что элемент p^R *моногамен*, если то вхождение элемента p, с которым он удаляется, является консеквентом элемента p, с которым он вводится. Если элемент p^R не является моногамным, то будем говорить, что он *полигамен*. Аналогично мы определяем моногамные и полигамные элементы из P^L.

Покажем, что все элементы из $P^L \cup P^R$, вводимые переходами цепи X, являются моногамными.

Предположим противное. Пусть p^L — последний полигамный элемент из $P^L \cup P^R$, который вводится в цепи X $(p^L \in P^L)$. Тогда элемент p^L не может быть удален в цепи X раньше консеквентов элемента p, с которым он вводился. В самом деле, во-первых, p^L не может быть удален вместе с элементом, лежащим левее его (так как $p^L \in M^L$), и, во-вторых, до тех пор, пока в цепи имеются консеквенты элемента p, элемент p^L не может быть удален вместе с каким-либо элементом, лежащим правее такого консеквента. Таким образом, если элемент p^L удаляется раньше этих консеквентов, то он должен быть удален с некоторым элементом, вводимым после p^L. Но это, легко видеть, противоречит предположению о том, что p^L является последним полигамным элементом, вводимым в цепи X.

Следовательно, некоторый консеквент p' элемента p должен быть удален в цепи X раньше p^L. Кроме того, p' должен быть удален с некоторым элементом из P^R; действительно, любой элемент из P^L, с которым можно было бы удалить p', должен вводиться после p^L, но по предположению такие элементы моногамны. По этой же причине элемент из P^R, с которым удаляется p', должен вводиться раньше элемента p^L. Таким образом, X содержит подцепь (ξ) следующего вида:

$$\begin{aligned} &UN \xrightarrow{(1)} Up'p'^RN \to \overset{(2)}{\ldots} \to KAp'^RN \xrightarrow{(3)} \\ &\to Kp^LpAp'^RN \to \overset{(4)}{\ldots} \to Kp^LBp'p'^RN \xrightarrow{(5)} \\ &\to Kp^LBN \to \overset{(6)}{\ldots} \to Kp^LpV \xrightarrow{(7)} KV. \end{aligned} \tag{ξ}$$

Здесь p'^R вводится на шаге (1) и удаляется на шаге (5) вместе с консеквентом p' элемента p. Договоримся использовать заглавные буквы для обозначения элементов из T, сохраняя строчные буквы для обозначения элементов из $M \cup M^L \cup M^R$.

Шаг (4) состоит из последовательности переходов, которая преобразует pA в Bp', где p' является консеквентом элемента p. Поскольку элементы из P встречаются лишь в качестве левых сомножителей элементов пар из π, ни элемент p, ни любой из его консеквентов не может участвовать в переходе, затрагивающем элемент, лежащий слева от него. Таким образом, переходы на шаге (4) можно расщепить на две независимые последовательности, а именно: последовательность, преобразующую pA в p', и последовательность, преобразующую пустое слово в B. Учитывая, что цепь X нормальна, мы получаем, что преобразование pA в p' должно осуществляться последовательностью (η) следующего вида:

$$\begin{gathered} pA \to \overset{(\eta_1)}{\ldots} \to pA_0 = pqA_1 \xrightarrow{(\eta_2)} p_1q_1A_1 \to \overset{(\eta_3)}{\ldots} \\ \ldots \to p_1q_2A_2 \xrightarrow{(\eta_4)} p_2q_3A_2 \to \ldots \to p_{r-1}q_{2r-2}A_r \to \\ \xrightarrow{(\eta_{2r})} p_rq_{2r-1}A_r \to \overset{(\eta_{2r+1})}{\ldots} \to p_r = p'. \end{gathered} \tag{η}$$

Здесь $\eta_2, \eta_4, \ldots, \eta_{2r}$ являются π-переходами, в то время как η_{2i+1} естб последовательность переходов, не затрагивающих p_i (мы полагаем $p = p_0$).

Обозначим через (ζ) следующую последовательность переходов, преобразующую p в некоторое слово $p'C$:

$$\begin{gathered} p \to pqq^R \to p_1q_1q^R \to p_1q_2q_2^Rq_1q^R \to p_2q_3q_2^Rq_1q^R \to \ldots \\ \ldots \to p_rq_{2r-1}q_{2r-2}^Rq_{2r-3} \ldots q_1q^R = p'C. \end{gathered} \tag{ζ}$$

Цепи (η) и (ζ) могут быть использованы для замены (ξ) следующей эквивалентной ей последовательностью (χ):

$$\begin{gathered} UN \xrightarrow{(4')} UBN \to \overset{(6)}{\ldots} \to UpV \to \overset{(\zeta)}{\ldots} \\ \ldots \to Up'CV \to \overset{(2)}{\ldots} \to KACV \to \overset{(\eta_1)}{\ldots} \\ \ldots \to KA_0CV = KqA_1CV \to Kqq_1^Lq_1A_1CV \to \overset{(\eta_3)}{\ldots} \\ \ldots \to Kqq_1^Lq_2A_2CV \to Kqq_1^Lq_2q_3^Lq_3A_2CV \to \ldots \\ \ldots \to Kqq_1^Lq_2q_3^L \ldots q_{2r-1}^Lq_{2r-1}A_rCV \to \overset{(\eta_{2r+1})}{\ldots} \\ \ldots \to Kqq_1^Lq_2q_3^L \ldots q_{2r-1}^LCV = Kqq_1^Lq_2q_3^L \ldots \\ \ldots q_{2r-1}^Lq_{2r-1}q_{2r-2}^R \ldots q_1q^RV \to \ldots \to KV. \end{gathered} \tag{χ}$$

Здесь через (4′) обозначена последовательность переходов, содержащаяся в последовательности (4) и преобразующая пустое слово в B. Последовательность (χ) является, очевидно, нормальной, и поэтому нормальна последовательность Y, полученная из X заменой подпоследовательности (ξ) на (χ). Тривиальным образом последовательность Y можно превратить в собственную нормальную последовательность.

В последовательности (χ) никакой π_2-переход не затрагивает элементов из $P^L \cup P^R$, которые не встречаются в X. Более того, в (χ) π_2-переходов, затрагивающих элементы из $P^L \bigcup P^R$, на два меньше, чем в (ξ); действительно, элементы p'^R и p^L вводятся в (ξ), но не вводятся в (χ). Таким образом, Y эквивалентна X и содержит меньше π_2-переходов, затрагивающих элементы из $P^L \bigcup P^R$, чем X. Это противоречит выбору цепи X. Аналогичные рассуждения приводят к противоречию, когда последний полигамный элемент из $P^L \bigcup P^R$, вводимый в X, принадлежит P^R. Отсюда следует, что каждый элемент из $P^L \bigcup P^R$, вводимый в X, является моногамным.

Теперь мы можем легко завершить доказательство леммы. Поскольку в цепи X от w до w' каждый вводимый элемент из $P^L \bigcup P^R$ является моногамным, консеквенты каждого элемента из P, присутствующего в w, не могут быть удалены преобразованиями из цепи X. Следовательно, каждый элемент из P, присутствующий в w, имеет консеквент в w'. В силу соображений симметрии каждый элемент из P, присутствующий в w', является консеквентом некоторого элемента из P, присутствующего в w. Аналогично можно установить, что сомножители слова w', принадлежащие Q, являются консеквентами сомножителей слова w, принадлежащих Q, и каждый такой элемент из w имеет консеквент в w'.

Далее, элемент из P $[Q]$ и его консеквенты не могут участвовать в переходах, действующих на соседний слева [справа] элемент (за исключением случая, когда удаляется этот элемент или его консеквент). Это утверждение справедливо в силу предположений относительно множества π. Таким образом, если w распадается на два слова $w = w_1w_2$, причем w_1 оканчивается элементом q или w_2 начинается с элемента p $(p \in P,\ q \in Q)$, то в преобразовании от w до w' слова w_1 и w_2 преобразуются независимо в соответствующие им подслова из w'. Применяя это замечание к словам w_1, w_2 и т. д., мы, наконец, получаем, что w распадается на подслова трех типов, каждое из которых преобразуется независимо: (a) элемент из P, (b) элемент из Q и (c) слово pq, где $p \in P$ и $q \in Q$. Эти замечания завершают доказательство леммы.

Построим теперь бесконечную серию полугрупп S_n $(n = 1, 2, \ldots)$, не вложимых в группы, обладающую следующим замечательным свойством: каждая конечная система квазитождеств, выполняющаяся во всех группах, выполняется в S_n для любого достаточно большого n. Приводимая конструкция и результат принадлежат А. И. Мальцеву [1940].

Пусть I_n — последовательность Мальцева

$$I_n = L_1R_1 \ldots R_nL_1^*R_n^* \ldots R_1^*.$$

Обозначим через π^n множество пар, считываемых в таблице 1 (§ 12.6), которое определяет систему Мальцева $\sigma(I_n)$ и которое, для использования в дальнейшем, мы выписываем в виде следующей таблицы:

$$\text{Группа I}\left\{\begin{array}{c}(d_1a_1,\ A_1C_1)\\(A_1D_1,\ A_2C_2)\\(A_2D_2,\ A_3C_3)\\ \dots\dots\dots\\(A_{n-1}D_{n-1}, A_nC_n)\\(A_nD_n,\ d_1b_1)\end{array}\right.$$

$$\text{Группа II}\left\{\begin{array}{c}(c_1b_1,\ B_nD_n)\\(B_nC_n, B_{n-1}D_{n-1})\\ \dots\dots\dots\\(B_3C_3,\ B_2D_2)\\(B_2C_2,\ B_1D_1)\end{array}\right.$$

Парой, «замыкающей» π^n, будет (B_1C_1, c_1a_1). Положим

$$P_n = \{A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots, B_n, c_1, d_1\},$$
$$Q_n = \{a_1, b_1, C_1, C_2, \ldots, C_n, D_1, D_2, \ldots, D_n\}.$$

Тогда все элементы из π^n имеют вид $(pq, p'q')$, где $p, p' \in P_n$ и $q', q \in Q_n$.

Заметим теперь, что π $(= \pi^n)$, P $(= P_n)$ и Q $(= Q_n)$ обладают следующими свойствами:

(1) Каждый элемент из P $[Q]$ является сомножителем не менее чем в одном и не более чем в двух словах, встречающихся в качестве компонент пар из π.

(2) Число элементов из P $[Q]$, встречающихся в точности один раз в качестве такого сомножителя, не более двух.

Пусть π' — некоторое непустое подмножество из π. Обозначим через P' $[Q']$ подмножество из P $[Q]$, состоящее из тех элементов множества P $[Q]$, которые встречаются в качестве сомножителей слов из пар, образующих π'.

Лемма 12.25. *Свойства* (1) *и* (2) *выполняются для* π', P' *и* Q' *тогда и только тогда, когда либо* $\pi = \pi'$, *либо* π' *состоит из одного элемента множества* π.

Доказательство. Достаточность условий очевидна. Для доказательства необходимости предположим, что $\pi' \neq \pi$, $\pi' \neq \varnothing$ и что свойства (1) и (2) выполняются для π', P' и Q'. Теперь достаточно установить, что π' будет одноэлементным множеством.

Заметим, что члены множества π из группы I связывают половину членов множества P в один цикл:

$$d_1 - A_1 - A_2 - \ldots - A_n - d_1,$$

в то время как члены множества π из группы II связывают оставшиеся члены множества P в одну цепь:

$$c_1 - B_n - B_{n-1} - \ldots - B_1.$$

(Эта цепь также была бы циклом, если бы мы включили замыкающую пару.)

Рассмотрим элементы из π', попадающие в группу II, упорядоченную, как указано (сверху вниз). Первый и последний будут содержать по непарному члену из P'. Каждый разрыв последовательности дает непарные члены из P', и, поскольку в силу предположения таких членов не больше двух, мы заключаем, что множество элементов из π', содержащихся в группе II, должно быть либо пустым, либо последовательностью без разрывов.

Случай (i). Множество элементов из π', содержащихся в группе II, пусто. Заметим, что каждый член из Q встречается в группе I в точности один раз. Поскольку π' содержится в группе I и только два непарных члена из Q' могут встретиться в π', мы заключаем, что $|\pi'| = 1$.

Случай (ii). Множество элементов из π', содержащихся в группе II, состоит из непустой последовательности без разрывов. В данном случае имеются в точности два непарных члена в P', которые появляются в первом и последнем членах последовательности. (Эти члены совпадают, если длина последовательности равна 1.) Следовательно, в группе I не могут появиться непарные члены из P'. Отсюда вытекает, что множество элементов из π', попадающих в группу I, либо пусто, либо совпадает со всей группой I. В первом случае, поскольку элементы из Q, встречающиеся в группе II, встречаются в ней в точности по одному разу и поскольку теперь π' содержится в группе II, π' может содержать только один элемент. Во втором случае группа I содержится в π' и a_1, C_1 являются непарными членами из Q', поэтому в Q' нет других непарных членов. Отсюда вытекает, что π' содержит всю группу II и поэтому $\pi' = \pi$, что противоречит предположению.

Для дальнейшего нам нужен аналог леммы 9.11, относящийся к группам. Мы хотим доказать, что если к образующим и определяющим соотношениям группы добавить еще один образующий вместе с соотношением, выражающим его через другие образующие, то новая группа будет изоморфна исходной группе. В этом случае некоторые элементы группы получат лишь новые имена.

Теперь нам будет удобно использовать часть обозначений конструкции 12.18. Заметим, что T/π_2^*, где π_2^* есть конгруэнция на T, порожденная отношением π_2, является свободной группой на M. Пусть ζ — бинарное отношение на K и ξ — конгруэнция на T, порожденная отношением $\zeta \cup \pi_2$. Возьмем T/ξ в качестве исходной группы, заданной образующими и определяющими соотношениями. Через n обозначим новый образующий, а через n^L, n^R — два новых элемента. Пусть T' — свободная полугруппа, имеющая $M \cup M^L \cup M^R \cup \{n, n^L, n^R\}$ в качестве множества своих свободных образующих, так что $T \subseteq T'$. Обозначим через K' свободную полугруппу, имеющую $M \cup \{n\}$ в качестве множества своих свободных образующих, так что $K \subseteq K'$. В качестве нового определяющего соотношения возьмем (w_1, w_2), где $w_1 \in K'$ и $w_2 \in K$, причем w_1 содержит n в виде сомножителя в точности один раз. Обозначим через χ конгруэнцию на T', порожденную отношением

$$\xi \cup \pi_2 \cup \{(1, n^L n),\ (1, nn^R)\} \cup \{(w_1, w_2)\}.$$

Лемма 12.26. *Отображение $x\xi \to x\chi$ $(x \in T)$ является изоморфизмом группы T/ξ на группу T'/χ.*

Доказательство. Мы три раза применим лемму 9.11. По предположению $w_1 = unv$, где $u, v \in K$. Если $w = m_1 m_2 \ldots$ $\ldots m_k$, где $m_i \in M$, то через w^L будем обозначать слово $m_k^L \ldots m_2^L m_1^L$, а через m^R — слово $m_k^R \ldots m_2^R m_1^R$. Тогда существует последовательность, состоящая из π_2-переходов и следующего за ними (w_1, w_2)-перехода, которая преобразует n в $u^L w_2 v^R$. Обратно, поскольку mm^L и $m^R m$ при $m \in M$ можно получить π_2-переходами из пустого слова, существует последовательность, состоящая из $(n, u^L w_2 v^R)$-перехода и следующих за ним π_2-переходов, которая преобразует w_1 в w_2. Отсюда вытекает, что конгруэнция, порожденная отношением $\xi \cup \{(w_1, w_2)\}$, совпадает с конгруэнцией, порожденной отношением $\xi \cup \{(n, u^L w_2 v^R)\}$.

Слово $u^L w_2 v^R$ принадлежит T, поэтому мы можем применить лемму 9.11. В самом деле, обозначим через T_1 подполугруппу из T', порожденную множеством $T \cup \{n\}$, а через ξ_1 — конгруэнцию на T_1, порожденную отношением $\xi \cup \{(n, u^L w_2 v^R)\}$. Тогда по лемме 9.11 отображение $x\xi \to x\xi_1$ $(x \in T)$ является изоморфизмом группы T/ξ на T_1/ξ_1.

Обозначим через T_2 подполугруппу из T', порожденную множеством $T_1 \cup \{n^L\}$, а через ξ_2 — конгруэнцию на T_2, порожденную отношением $\xi_1 \cup \{(n^L, vw_2^L u)\}$. Тогда по лемме 9.11 отображение $x\xi_1 \to x\xi_2$ $(x \in T_1)$ является изоморфизмом группы T_1/ξ_1 на T_2/ξ_2.

Наконец, обозначим через ξ_3 конгруэнцию на T', порожденную отношением $\xi_2 \cup \{(n^R, n^L)\}$. Тогда, снова по лемме 9.11, отображение $x\xi_2 \to x\xi_3$ $(x \in T_2)$ является изоморфизмом группы T_2/ξ_2 на T'/ξ_3.

Итак, отображение $x\xi \to x\xi_3$ $(x \in T)$ является изоморфизмом группы T/ξ на T'/ξ_3. Легко проверить, что $\xi_3 = \chi$. Это завершает доказательство леммы.

Вернемся теперь к обозначениям леммы 12.24 и к тому, что было установлено перед леммой 12.25. Пусть η — непустое подмножество из π ($= \pi^n$). Выберем из η некоторую пару $(p_1q_1, p_1'q_1')$, для которой один из элементов p_1, q_1, p_1', q_1', пусть это будет p_1, не встречается в качестве сомножителя ни в одном из элементов оставшихся пар из η. Пусть T_1 — подполугруппа из T, порожденная множеством $(M \cup M^L \cup M^R) \setminus \{p_1, p_1^L, p_1^R\}$. Обозначим через ξ конгруэнцию на T_1, порожденную отношением

$$(\eta \setminus \{(p_1q_1, p_1'q_1')\}) \cup (\pi_2 \setminus \{(1, p_1p_1^R), (p_1p_1^R, 1), (1, p_1^Lp_1), (p_1^Lp_1, 1)\}).$$

Тогда в силу леммы 12.26 отображение $x\xi \to x\chi$ $(x \in T_1)$ является изоморфизмом группы T_1/ξ на T/χ, где χ есть конгруэнция на T, порожденная отношением $\eta \cup \pi_2$. Мы получаем

Следствие 12.27. *Если $w, w' \in T_1$, то $(w, w') \in \chi$ тогда и только тогда, когда $(w, w') \in \xi^*$, где ξ^* есть конгруэнция на T, порожденная отношением ξ.*

Доказательство. Поскольку $\xi \subseteq \chi$, мы имеем $\xi^* \subseteq \chi$. По лемме 9.9 $\chi \cap (T_1 \times T_1) = \xi$. Следовательно, $\xi^* \cap (T_1 \times T_1) = \xi$. Таким образом, $(w, w') \in \xi^*$ тогда и только тогда, когда $(w, w') \in \xi$; отсюда, поскольку отображение $x\xi \to x\chi$ $(x \in T_1')$ взаимно однозначно, вытекает утверждение следствия.

Следующие две леммы необходимы для доказательства нашей теоремы.

Лемма 12.28. *Пусть π' — непустое подмножество из π, причем $\pi' \neq \pi$, и ρ_1' — конгруэнция на T, порожденная отношением $\pi' \cup \pi_2$. Возьмем $p, p' \in P$ и $q, q' \in Q$. Включение $(pq, p'q') \in \rho_1'$ имеет место тогда и только тогда, когда либо $p = p'$ и $q = q'$, либо $(pq, p'q') \in \pi'$.*

Доказательство. Обозначим через π'' подмножество из π', для которого $\pi' \setminus \pi''$ строится следующим образом. Предположим, что из $\pi' \setminus \pi''$ выбрано уже некоторое, возможно, пустое подмножество σ. Тогда элементом множества $\pi' \setminus \pi''$ мы считаем такой элемент $(w, w') \in \pi' \setminus \sigma$, что либо w, либо w' имеет сомножитель из $P \cup Q$, который не является снова сомножителем какого-либо слова, входящего в другой элемент из $\{\pi' \setminus \sigma\} \cup \cup \{(pq, p'q')\}$. Построение будет завершено, когда мы не сможем найти новых элементов. Множество π'' является собственным подмножеством из π. Далее, если через P'' $[Q'']$ обозначить подмножество элементов из P $[Q]$, участвующих в формировании слов, которые входят в элементы из π'', то по построению либо π'' пусто, либо π'', P'', Q'' обладают свойствами (1) и (2), указанными в лемме 12.25. Следовательно, по этой лемме либо π'' пусто, либо π'' есть одноэлементное множество.

Следствие 12.27 сформулировано так, что оно применимо к каждому шагу приведенного выше построения множества π''.

Применяя его каждый раз, мы, наконец, заключаем, что $(pq, p'q') \in \rho_1'$ тогда и только тогда, когда $(pq, p'q') \in \rho_1''$, где ρ_1'' есть конгруэнция на T, порожденная отношением $\pi_2 \cup \pi''$.

Заключение данной леммы очевидно при $\pi'' = \varnothing$. В самом деле, тогда T/ρ_1'' является свободной группой на $P \cup Q$. Осталось доказать лемму для случая, когда π' является одноэлементным множеством; будем считать, что $\pi' = \{(p_1q_1, p_1'q_1')\}$.

Прежде всего мы можем считать, что $\{p_1, q_1, p_1', q_1'\} \subseteq \{p, q, p', q'\}$; действительно, в противном случае, используя указанное выше построение, мы можем заменить π' на $\pi'' = \varnothing$. Поскольку π' есть подмножество из π, мы знаем, что $p_1 \neq p_1'$ и $q_1 \neq q_1'$. Следовательно, мы должны иметь $\{p_1, p_1'\} = \{p, p'\}$ и $\{q_1, q_1'\} = \{q, q'\}$. Без ограничения общности можно считать, что $p_1 = p$ и $p_1' = p'$. Если $q_1 = q$, то выполняется заключение леммы. Предположим, что $q_1 = q'$, так что $q_1' = q$. Покажем, что это невозможно.

Мы докажем, что если $\pi' = \{(pq', p'q)\}$, то $(pq, p'q')$ не может принадлежать ρ_1'. Пусть φ — произвольный гомоморфизм полугруппы T на циклическую группу $\langle a\rangle$ пятого порядка, который переводит p, q, p' и q' соответственно в a, a^3, a^2 и a^4 и для которого $m^L\varphi = m^R\varphi = (m\varphi)^{-1}$ при $m \in M$. Тогда $\pi' \cup \pi_2 \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$ и поэтому $\rho_1' \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$. Но $(pq)\,\varphi = aa^3 = a^4$ и $(p'q')\,\varphi = a^2a^4 = a$. Следовательно, $(pq, p'q') \notin \varphi \circ \varphi^{-1}$ и, a fortiori, $(pq, p'q') \notin \rho_1'$. Это завершает доказательство леммы.

Лемма 12.29. *Если* $p, p' \in P$ $[q, q' \in Q]$, *то* $(p, p') \in \rho_1$ $[(q, q') \in \rho_1]$ *тогда и только тогда, когда* $p = p'$ $[q = q']$.

Доказательство. Пусть φ — гомоморфизм полугруппы T в циклическую группу $\langle a\rangle$, заданный следующим отображением образующих $M \cup M^L \cup M^R$ полугруппы T

$$\begin{array}{ll} a_1 \to a^2 & b_1 \to a^{5n+2} \\ c_1 \to a & d_1 \to a^0 \\ A_i \to a^{2i} & B_i \to a^{2i+1} \\ C_i \to a^{3(i-1)} & D_i \to a^{3i+2} \end{array}$$
$$m^L\varphi = m^R\varphi = (m\varphi)^{-1} \quad (m \in M).$$

Легко проверить, что $\pi \cup \pi_2 \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$. Следовательно, $\rho_1 \subseteq \varphi \circ \varphi^{-1}$. Далее, если порядок группы $\langle a\rangle$ не меньше $5n + 2$, то при отображении φ образы любых двух различных элементов из P $[Q]$ различны. Отсюда непосредственно вытекает утверждение леммы.

Определим теперь серию полугрупп S_n $(n = 1, 2, \ldots)$, полагая $S_n = K_n/\pi_1^n$, где K_n $(= K)$ есть свободная полугруппа на $M_n = P_n \cup Q_n$ $(M_n = M,\ P_n = P,\ Q_n = Q)$ и π_1^n $(= \pi_1)$ есть конгруэнция на K_n, порожденная отношением π^n $(= \pi)$.

Рассмотрим квазитождество: из набора равенств $w_i = w'_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ вытекает одно равенство $w = w'$. Предположим, что это квазитождество выполняется в любой группе. Пусть n — натуральное число, которое не меньше, чем сумма длин всех слов w_i, w'_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$. В частности, эти слова можно считать элементами полугруппы K_n. Мы докажем, что если φ: $K_n \to S_n$ есть произвольный гомоморфизм, для которого $w_i\varphi = w'_i\varphi$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, то $w\varphi = w'\varphi$.

Начнем с определения нормальной формы слов из K. Элементы множества π, выписанного ранее в виде таблицы, имеют первую и вторую компоненты. Нормальная форма любого слова получается заменой в нем всех двухэлементных подслов, являющихся вторыми компонентами элементов из π, на соответствующие им первые компоненты. Очевидно, для каждого слова нормальная форма находится однозначно. Поскольку нормальная форма слова получается применением последовательности π-переходов, слово и его нормальная форма π_1-эквивалентны. Докажем, что каждый π_1-класс содержит в точности одно слово в нормальной форме.

Чтобы установить это, заметим прежде всего, что если u — слово, то двухэлементные подслова из u, которые являются компонентами элементов из π, образуют однозначно определенное множество не накладывающихся друг на друга подслов из u; действительно, элемент из $P \cup Q$ не может и начинать и заканчивать компоненты некоторых слов из π. Каждый π-переход, примененный к u, лишь заменяет эти подслова на другие компоненты элементов из π, которым они принадлежат. Отсюда непосредственно вытекает, что π_1-эквивалентные слова имеют одну и ту же нормальную форму.

Пусть равенства

$$w_i = x_1x_2 \ldots x_l, \quad w'_i = x'_1x'_2 \ldots x'_m$$

задают слова w_i и w'_i через образующие полугруппы K. Обозначим через u_j $[u'_j]$ единственное слово в нормальной форме, π_1-эквивалентное слову $x_j\varphi$ $[x'_j\varphi]$. Положим

$$w_i\psi = u_1u_2 \ldots u_l, \quad w'_i\psi = u'_1u'_2 \ldots u'_m.$$

Теперь $w_i\varphi = w'_i\varphi$ влечет за собой $(w_i\psi, w'_i\psi) \in \pi_1$. Но это означает, что два слова $w_i\psi$ и $w'_i\psi$ из K имеют одну и ту же нормальную форму. Поскольку слова u_j $[u'_j]$ уже находятся в нормальной форме, для приведения слова $w_i\psi$ $[w'_i\psi]$ к нормальной форме требуется не более чем $l - 1$ $[m - 1]$ π-переходов. Следовательно, $w_i\psi$ можно преобразовать в $w'_i\psi$ менее чем за $l + m$ π-переходов. Таким образом, общее число π-переходов, необходимых для преобразования $w_i\psi$ в $w'_i\psi$ при $i = 1, 2, \ldots, k$, может быть взято в силу выбора n меньше чем n. Следовательно, существует такое собственное подмножество π' из π, что лишь π'-переходов достаточно для преобразования $w_i\psi$ в $w_i'\psi$ при $i = 1, 2, \ldots, k$. Тогда $(w_i\psi, w_i'\psi) \in \pi_1'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$, где через π_1' обозначена конгруэнция на K, порожденная отношением π'.

Рассмотрим теперь конгруэнцию ρ_1' на T, порожденную отношением $\pi_1' \cup \pi_2$. Так как $(w_i\psi, w_i'\psi) \in \rho_1'$ и T/ρ_1' есть группа, по предположению мы имеем $(w\psi, w'\psi) \in \rho_1'$. Тогда в силу леммы 12.24 мы получаем

$$w\psi = a_1a_2 \ldots a_s \text{ и } w'\psi = a_1'a_2' \ldots a_s',$$

где (i) $a_j, a_j' \in K$, (ii) $(a_j, a_j') \in \rho_1'$, (iii) $l(a_j) = l(a_j')$ и (iv) либо (a) $l(a_j) = 1$, когда a_j и a_j' оба принадлежат P или принадлежат Q, либо (b) $l(a_j) = 2$, когда $a_j = pq$ и $a_j' = p'q'$ для некоторых $p, p' \in P$ и $q, q' \in Q$. Поскольку $\pi' \subseteq \pi$ и $\pi' \neq \pi$, по лемме 12.29 в случае (iv) (a) мы имеем $a_j = a_j'$ и по лемме 12.28 в случае (iv) (b) мы имеем $(a_j, a_j') \in \pi'$. Следовательно, $(w\psi, w'\psi) \in \pi_1'$ и, a fortiori, $(w\psi, w'\psi) \in \pi_1$. Это завершает доказательство того, что для всех достаточно больших n в S_n из равенств $w_i = w_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ вытекает равенство $w = w'$.

Очевидно, мы можем распространить наши рассуждения на произвольное конечное число таких квазитождеств.

Заметим, наконец, что ни одна из полугрупп S_n не может быть вложена в группу. В самом деле, если бы S_n была вложима в группу, то в S_n выполнялось бы замыкающее равенство системы π. Однако слово B_1C_1 (первая компонента замыкающей пары) не допускает никаких π-переходов. Следовательно, она π_1-эквивалентна только самой себе. Итак, мы доказали следующее утверждение.

Теорема 12.30. *Серия полугрупп S_n $(n = 1, 2, \ldots)$ состоит из полугрупп, каждая из которых не может быть вложена в группу, причем если какой-нибудь конечный набор квазитождеств выполняется в любой группе, то он выполняется в S_n для всех достаточно больших n.*

Вспоминая определение полугрупп S_n, мы непосредственно получаем сформулированное ниже следствие. Аналогичное утверждение справедливо для систем Ламбека, поскольку Бушем [1963] установлено, что каждая система Мальцева получается из некоторой системы Ламбека (как, впрочем, и обратно).

Следствие 12.31. *Любое квазитождество, которое выполняется в каждой группе (в частности, которое выполняется в каждой полугруппе, вложимой в группу), получается из некоторой системы Мальцева, а именно некоторой системы $\sigma(I_n)$, где I_n есть последовательность Мальцева $L_1R_1 \ldots R_nL_1^*R_n^* \ldots R_1^*$.*

Библиография [1])

Адян С. И.

[1960]* О вложимости полугрупп в группы, ДАН СССР, 133, № 2, 255—257.

[1966]* Определяющие соотношения и алгоритмические проблемы для групп и полугрупп, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 85.

Александров П. С.

[1948]* Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат.

Андерсен (Andersen O.)

[1952] Ein Bericht über die Struktur abstrakter Halbgruppen, Диссертация, Hamburg.

Асано (Asano K.)

[1949] Über die Quotientenbildung von Schiefringen, *J. Math. Soc. Japan*, 1, 73—78.

Бахман (Bachmann H.)

[1955] Transfinite Zahlen, Ergebnisse der Mathematik, Heft 1 (N.F.), Springer, Berlin.

Биркгоф (Birkhoff G.)

[1948] Lattice theory, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., Vol. 25, New York, Baltimore, (Русский перевод: Биркгоф Г., Теория структур, ИЛ, 1952.)

Бокуть Л. А.

[1963]* Некоторые теоремы вложения для колец и полугрупп, I, *Сиб. матем. ж.*, 4, 500—518.

Босак (Bosák J.)

[1968]* On radicals of semigroups, *Mat. Časopis*, 18, 204—212.

Брак (Bruck R. H.)

[1958] A survey of binary systems, Ergebnisse der Math. Heft 20, Springer, Berlin.

Бурн (Bourne S. G.)

[1949] Ideal theory in a commutative semigroup, Диссертация, Baltimore.

Буш (Bush G. C.)

[1963] The embedding theorems of Malcev and Lambek, *Canad. J. Math.*, 15, 49—58.

---

[1]) Значком ° отмечены работы, добавленные авторами к готовящемуся в США второму изданию тома 2, а значком * — добавленные при переводе.— *Прим. ред.*

Бэр (Baer R.)

[1934] Die Kompositionsreihe der Gruppe aller eineindeutigen Abbildungen einer unendlichen Menge auf sich, *Studia Math.*, 5, 15—17.

Бэр, Леви (Baer R., Levi F.)

[1932] Vollständige irreduzibele Systeme von Gruppenaxiomen (Beiträge zur Algebra № 18), *Sitzber. Heidelberger Akad. Wiss., Abh.* 2, 1—12.

Вагнер В. В.

[1952] Обобщенные группы, *ДАН СССР*, 84, 1119—1122.

[1953] Теория обобщенных груд и обобщенных групп, *Матем. сб.*, 32, 545—632.

[1956] Представление упорядоченных полугрупп, *Матем. сб.*, 38, 203—240.

[1957] Полугруппы частичных преобразований с симметричным отношением транзитивности, *Изв. вузов, Математика*, 1 (1957), 81—88.

Венкатесан (Venkatesan P. S.)

[1962] On a class of inverse semigroups, *Amer. J. Math.*, 84, 578—582.

[1963] The algebraic theory of semigroups, Диссертация, Madrace, 1963.

[1966] On decomposition of semigroups with zero, *Math. Z.*, 92, 164—174.

Глускин Л. М.

[1956] Вполне простые полугруппы, *Уч. зап. Харьковского пед. инст.*, 18, 41—55.

[1959a] Полугруппы и кольца линейных преобразований, *ДАН СССР*, 127, 1151—1154.

[1959b] Полугруппы и кольца эндоморфизмов линейных пространств, *ИАН СССР*, сер. матем., 23, 841—870.

[1959c]*Идеалы полугрупп преобразований, *Матем сб.*, 47, 111—130.

Голди (Goldie A. W.)

[1950] The Jordan—Hölder Theorem for general abstract algebras, *Proc. Lond. Math.* Soc., (2) 52, 107—131.

Грин (Green J. A.)

[1951] On the structure of semigroups, *Ann. of Math.* (2), 54, 163—172.

Диксон (Dickson L. E.)

[1913]° Finiteness of the odd perfect and primitive abundant numbers with n distinct prime factors, *Amer. J. Math.*, 35, 413—422.

Досс (Doss R.)

[1948] Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe, *Bull. Sci. Math.*, (2) 72, 139—150.

Дьедонне (Dieudonné J.)

[1942] Sur le socle d'un anneau et les anneaux simples infinis, *Bull. Soc. Math. France*, 70, 46—75.

Дюбрей (Dubreil P.)

[1941] Contribution à la théorie des demi-groupes, *Mém. Acad. Sci. Inst. France*, (2) 63, n°3.

[1954] Algèbre, Tome I, Équivalences, opèrations, groupes, anneaux, corps. 2 éme ed. Cahiers Scientifiques, Fasc. XX, Gauthier-Villars, Paris.

Дюбрей, Дюбрей-Жакотэн (Dubreil P., Dubreil-Jacotin M.-L.)

[1939] Théorie algébrique des relations d'équivalence, *J. Math.*, (9) 18, 63—95.

[1940] Équivalences et opérations, *Ann. Univ. Lyon.*, Sect. A (3), 3,7—23.

Дюбрей-Жакотэн (Dubreil-Jacotin M.-L.)
[1947] Sur l'immersion d'un semi-groupe dans un groupe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 225, 787—788.
Житомирский Г. И.
[1965]° О решетке отношений конгруэнтности в обобщенной груде, *Изв. вузов*, Математика, 1 (44), 56—61.
Зейдель (Seidel H.)
[1965] Über das Radikal einer Halbgruppe, *Math. Nachr.*, 29, 255—263.
Кимура (Kimura N.)
[1957] On semigroups. Диссертация, The Tulane Univ. of Louisiana.
Кларк (Clark W. E.)
[1965] Remarks on the kernel of a matrix semigroup, *Czechoslovak Math. J.*, 15, 305—310.
Клиффорд (Clifford A. H.)
[1948] Semigroups containing minimal ideals, *Amer. J. Math.*, 70, 521—526.
[1949] Semigroups without nilpotent ideals, *Amer. J. Math.*, 71, 833—844.
[1953] A class of d-simple semigroups, *Amer. J. Math.*, 75, 547—556.
[1963] Note on a double coset decomposition of semigroups due to Štefan Schwarz, *Mat.-Fyz. Časopis Sloven Akad. Vied.*, 13, 55—57.
[1970]* Radicals in semigroups, Semigroup Forum, 1, 103—127.
Кон (Cohn P. M.)
[1956a] Embeddings in semigroups with one-sided division, *J. Lond. Math. Soc.*, 31, 169—181.
[1956b] Embeddings in sesquilateral division semigroups, *J. Lond. Math. Soc.*, 31, 181—191.
[1962]* On subsemigroups of free semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13, N 3, 347—351.
[1965] Universal Algebra, Harper and Row, New York. (Русский перевод: Кон П., Универсальная алгебра, «Мир», М., 1968.)
Кох, Уоллес (Koch R. J., Wallace A. D.)
[1957] Stability in semigroups, *Duke Math. J.*, 24, 193—195.
Кочин Б. П.
[1968]* Строение инверсных идеально простых ω-полугрупп, *Вестник ЛГУ*, сер. матем., мех., астр., 7, 41—50.
Круазо (Croisot R.)
[1952] Propriétés des complexes forts et symétriques des demi-groupes, *Bull. Soc. Math. France*, 80, 217—223.
[1953] Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples, *Ann. Sci. École Norm. Sup.*, (3) 70, 361—379.
[1954a] Demi-groups simples inversifs à gauche, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 239, 845—847.
[1954b] Automorphismes intérieures d'un semi-groupe, *Bull. Soc. Math. France*, 82, 161—194.
[1957] Équivalences principales bilatères définies dans un demi-groupe, *J. Math. Pures Appl.*, (9) 36, 373—417.
Курош А. Г.
[1962]* Лекции по общей алгебре, Физматгиз, М.
Кэпп, Шнейдер (Kapp K. M., Schneider H.)
[1969]* Completely 0-simple semigroups, New York, Amsterdam.

Лайош (Lajos S.)

[1961] Generalized ideals in semigroups, *Acta. Sci. Math. Szeged*, 22, 217—222.

Лаллеман (Lallement G.)

[1966]° Congruences et equivalences de Green sur un demigroupe regulier, *C.R. Acad. Sci. Paris*, 262, A613—A616.

Ламбек (Lambek J.)

[1951] The immersibility of a semigroup into a group, *Canad. J. Math.*, 3, 34—43.

Ландау (Landau E.)

[1927] Vorlesungen über Zahlentheorie, Vol. 3, Hirzel, Leipzig.

Леви (Levi F. W.)

[1944] On semigroups, *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 36, 141—146.

[1946] On semigroups., II. *Bull. Calcutta Math. Soc.*, 38, 123—124.

Лефевр (Lefebvre P.)

[1962] Sur certaines conditions minimales en théorie des demi-groupes, *Ann. Mat. Pura Appl.*, 59, 77—163.

Либер А. Е.

[1954] К теории обобщенных групп, *ДАН СССР*, 97, 25—28.

Луг (Luh J.)

[1960] On the concepts of radical of semigroup having kernel, *Portugal. Math.*, 19, 189—198.

Ляпин Е. С.

[1950] Нормальные комплексы ассоциативных систем, *ИАН СССР*, 14, 179—192.

[1960a] Полугруппы, «Наука», М., 1960.

[1960b] О представлениях полугрупп частичными преобразованиями, *Матем. сб.*, 52, 589—596.

Макалистер (McAlister D. B.)

[1968] Characters on commutative semigroups, *Quart. J. Math. Oxford.*, 19, 141—157.

Маклейн (MacLane S.)

[1965] Categorical algebra, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71, 40—106.

Мальцев А. И.

[1937] On the immersion of an algebraic ring into a field, *Math. Ann.*, 113, 686—691.

[1939] О включении ассоциативных систем в группы, *Матем. сб.*, 6, 331—336.

[1940] О включении ассоциативных систем в группы, II, *Матем. сб.*, 8, 251—264.

[1952] Симметрические группоиды, *Матем. сб.*, 31, 136—151.

[1953] Нильпотентные полугруппы, *Уч. зап. Ивановского пед. инст.*, 4, 107—111.

[1970]* Алгебраические системы, «Наука», М., 1970.

Манн (Munn W. D.)

[1955] On semigroup algebras, Proc., *Cambridge Philos. Soc.*, 51, 1—15.

[1957] Semigroups satisfying minimal conditions, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 3, 145—152.

[1961] A class of irreducible matrix representations of an arbitrary inverse semigroup, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 5, 41—48.

[1964a] Brandt congruences on inverse semigroups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **14**, 154—164.

[1964b] Matrix representations of inverse semigroups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **14**, 165—181.

[1964c]° A certain sublattice of the lattice of congruences on a semigroup, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **60**, 385—391.

[1969]* Some recent results on the structure of inverse semigroups, Proc. of a symp. on semigroups held at Wayne State Univ., Detroit (1968), Acad. Press.

Мурата (Murata K.)

[1950] On the quotient semi-group of a noncommutative semi-group, *Osaka Math. J.*, **2**, 1—5.

Нейманн (Neumann B. H.)

[1960] Embedding theorems for semigroups, *J. Lond. Math. Soc.*, **35**, 184—192.

Пирс (Pierce R. S.)

[1954] Homomorphisms of semigroups, *Ann. of Math.*, (2) 59, 287—291.

Племмонс (Plemmons R. J.)

[1970]° On a conjecture concerning semigroup homomorphisms, *Canad. J. Math.*, 22, 641—644.

Понизовский И. С.

[1964]° О представлениях инверсных полугрупп частичными взаимно однозначными преобразованиями, *ИАН СССР*, сер. матем., **28**, 5, 989—1002.

Престон (Preston G. B.)

[1954a] Inverse semigroups, *J. Lond. Math. Soc.*, 29 (1954), 396—403.

[1954b] Inverse semigroups with minimal right ideals, *J. Lond. Math. Soc.*, **29**, 404—411.

[1954c] Representations of inverse semigroups, *J. Lond. Math. Soc.*, **29**, 411—419.

[1956] The structure of normal inverse semigroups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 3, 1—9.

[1958] Matrix representations of semigroups, *Quart. J. Math. Oxford Ser.*, (2) 9, 169—176.

[1959] Embedding any semigroup in a $\mathscr{L}$-simple semigroup, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **93**, 351—355.

[1961] Congruences on completely 0-simple semigroups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3), **11**, 557—576.

[1962] A characterization of inaccessible cardinals, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, 5, 153—157.

[1965] Chains of congruences on a completely 0-simple semigroup, *J. Australian Math. Soc.*, 5.

[1969] Matrix representations of inverse semigroups, *J. Australian Math. Soc.*, 9, 29—61.

Птак (Ptàk V.)

[1949] Immersibility of semigroups, *Acta Fac. Nat. Univ. Carol. Prague*, no. **192**.

Редеи (Rédei L.)

[1952] Die Verallgemeinerung der Schreierschen Erweiterungstheorie, *Acta Sci. Math. Szeged*, 14, 252—273.

[1963] Theorie der endlich erzeugbaren kommutativen Halbgruppen, Hamburger mathematische Einzelschriften, Heft 41, Physica-Verlag, Würzburg.

Рейли (Reilly N. R.)
[1965] Contributions to the theory of inverse semigroups, Диссертация.
[1966] Bisimple ω-semigroups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **7**, 160—167.

Рис (Rees D.)
[1940] On semi-groups, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, **36**, 387—400.

Рич (Rich R. P.)
[1949] Completely simple ideals of a semigroup, *Amer. J. Math.*, **71**, 883—885.

Сайто (Saitô T.)
[1968]° Note on the minimal conditions for prineipal ideals in a semigroup, *Math. Japon*, **13**, 95—104.

Сайто, Хори (Saitô T., Hori S.)
[1958] On semigroups with minimal left ideals and without minimal right ideals, *J. Math. Soc. Japan*, **10**, 64—70.

Столл (Stoll R. R.)
[1944] Representations of finite simple semigroups, *Duke Math. J.*, **11**, 251—256.
[1951] Homomorphisms of a semigroup onto a group, *Amer. J. Math.*, **73**, 475—481.

Сушкевич А. К.
[1922]° Теория действия как общая теория групп, Диссертация, Воронеж.
[1926]° Über die Darstellung der eindeutig nicht umkehrlaren Gruppen mittels der verallgemeinerten Substitutionen, *Матем. сб.*, **33** 371—371.

Тамура (Tamura T.)
[1960] Decompositions of a completely simple semigroup, *Osaka Math. J.*, **12**, 269—275.

Тамура, Грэхем (Tamura T., Graham N.)
[1964] Certain embedding problems of semigroups, *Proc. Japan Acad.*, **40**, 8—13.

Тессье (Teissier Marianne)
[1951] Sur les équivalences régulières dans les demi-groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **232**, 1987—1989.
[1953a] Sur les demi-groupes admettant l'existence du quotient d'un côté, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **236**, 1120—1122.
[1953b] Sur les demi-groupes ne contenant pas d'élément idempotent, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **237**, 1375—1377.

Терстон (Thurston H. A.)
[1952] Equivalences and mappings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **2**, 175—182.

Тулли (Tully E. J., Jr.)
[1960] Representation of a semigroup by transformations of a set, Диссертация, The Tulane Univ. of Louisiana.
[1961] Representation of a semigroup by transformations acting transitively on a set, *Amer. J. Math.*, **83**, 533—541.

Тьеррен (Thierrin G.)
[1953] Sur la caractérisation des équivalences régulières dans les demigroupes, *Acad. Roy. Belg. Bull. Cl. Sci.*, (5) **39**, 942—947.

Уорн (Warne R. J.)
[1964] Homomorphisms of *d*-simple inverse semigroups with identity, *Pacific J. Math.*, **14**, 1111—1122.

[1965] A characterization of certain regular d-classes in semigroups. Ill. *J. Math.*, 9, 304—306.
[1966a] Regular D-classes whose idempotents obey certain conditions, *Duke Math. J.*, **33**, 187—195.
[1966b] A class of bisimple inverse semigroups, *Pacific J. Math.*, **18**, 563—577.

Франклин, Линдсей (Franklin S. P., Lindsay J. W.)
[1960/61] Straddles on semigroups, *Math. Mag.*, 34, 269—270.

Фрейд (Freyd P.)
[1968]° Redei's finiteness theorem for commutative semigroups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19**, 1003.

Фулп (Fulp R. O.)
[1967] On extending semigroup characters, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, **15**, 199—202.

Хауи (Howie J. M.)
[1962] Embedding theorems with amalgamation for semigroups, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **12**, 511—534.
[1963a] An embedding theorem with amalgamation for cancellative semigroups, *Proc. Glasgow Math. Assoc.*, **6**, 19—26.
[1963b] Subsemigroups of amalgamated free products of semigroups, *Proc. London Math. Soc.*, (3) **13**, 672—686.
[1963c] Embedding theorems for semigroups, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2), **14**, 254—258.
[1964a] Subsemigroups of amalgamated free products of semigroups, II, *Proc. Lond. Math. Soc.*, (3) **14**, 537—544.
[1964b] The maximum idempotent-separating congruence on an inverse semigroup, *Proc. Edinburgh Math. Soc.*, (2) **14**, 71—79.
[1964c] The embedding of semigroup amalgams, *Quart. J. Math. Oxford*, Ser., (2) **15**, 55—68.

Хауи, Шайн (Howie J. M., Schein B. M.)
[1969]° Anti-uniform semilattices, *Bull. Australian Math. Soc.*, **1**, 263—268.

Хёнке (Hoehnke H.-J.)
[1962] Zur Theorie der Gruppoide, I., *Math. Nachr.*, **24**, 137—168.
[1963] Zur Strukturtheorie der Halbgruppen, *Math. Nachr.*, **26**, 1—13.
[1966] Structure of semigroups, *Canad. J. Math.*, **18**, 449—491.

Холл М. (Hall M.)
[1959] The theory of groups, The Macmillan Co., New York. (Русский перевод: Холл М., Теория групп, ИЛ, М., 1962.)

Цассенхауз (Zassenhaus H.)
[1949] The theory of groups, Chelsea, New York.

Чодхури (Chaudhuri N. P.)
[1959] Sur les complexes unitaires dans un demi-groupe, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **248**, 1750—1752.

Шайн Б. М.
[1961] Вмещение полугрупп в обобщенные группы, *Матем. сб.*, **55** (97), 379—400.
[1962] Представления обобщенных групп, *Изв. вузов*, Математика, **3** (28), 164—176.
[1963] О транзитивных представлениях полугрупп, *Успехи матем. наук*, 18, 3 (111), 215—222.
[1964]° Generalized groups with the well-ordered set of idempotents, *Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Akad. Vied.*, **14**, 259—262.

[1965]° A class of commutative semigroup, *Publ. Math. Dubrecen*, 12, 87—88.
[1966]° Homomorphisms and subdirect decompositions of semigroups, *Pacific J. Math.*, 17, 529—547.

Шварц (Schwarz Š.)
[1943] Zur Theorie der Halbgruppen, *Sbornik prác Prirodovedekej Fak. Sloven. Univ. v Bratislave*, № 6, 1—64.
[1951] On semigroups having a kernel, *Czechoslovak Math. J.*, 1 (76), 229—264.
[1960] Dual semigroups, *Czechoslovak Math. J.*, 10, 201—230.
[1962] Homomorphisms of a completely simple semigroup onto a group, *Mat.-Fyz. Časopis Sloven. Acad. Vied.*, 12, 293—300.
[1971]* On the structure of dual semigroups, *Czechoslovak. Math. J.*, 21 (96), 461—483.

Шеврин Л. Н.
[1960]* О подполугруппах свободных полугрупп, *ДАН СССР*, 133, № 3, 537—539.

Шифердеккер (Schieferdecker E.)
[1955] Zur Einbettung metrischer Halbgruppen in ihre Quotientenhalbgruppen, *Math. Z.*, 62, 443—468.

Шрейер (Schreier J.)
[1937] Über Abbildungen einer abstrakten Menge auf ihre Teilmengen, *Fund. Math.*, 28, 261—264.

Шрейер, Улам (Schreier J., Ulam S.)
[1933] Über die Permutationsgruppe der natürlichen Zahlenfolge, *Studia Math.*, 4, 134—141.

Штейнфельд (Steinfeld O.)
[1966] On semigroups which are unions of completely 0-simple semigroups, *Czechoslovak Math. J.*, 16 (91), 63—69.

Шутов Э. Г.
[1963]° Погружения полугрупп в простые и полные полугруппы, *Матем, сб.*, 62, 496—511.
[1964]* Погружение полугрупп в простые полугруппы с односторонним делением, *Изв. вузов*, Математика, 5 (42), 143—148.
[1965]* О некоторых погружениях полугрупп с сокращением, *Матем, сб.*, 67, 167—180.

Шютценберже (Schützenberger M. P.)
[1955/56] Une théorie algébrique du codage, (1) Sém. Dubreil-Pisot 1955/56, exposé no. 15, Fac. Sci. Paris, (2) *C. R. Acad. Sci, Paris*, 242, 862—864.
[1957] $\overline{\mathcal{D}}$-représentation des demi-groupes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 244, 1994—1996.

Эванс (Evans T.)
[1952] Embedding theorems for multiplicative systems and projective geometries, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3, 614—620.,

Указатель обозначений

$\rho^\natural$ — естественное отображение $a \to a\rho$ полугруппы S на S/ρ.
$L(a)$ — главный левый идеал S^1a полугруппы S.
$R(a)$ — главный правый идеал aS^1 полугруппы S.
$J(a)$ — главный двусторонний идеал S^1aS^1 полугруппы S.
$\mathscr{L}$ — отношение $\{(a, b) \in S \times S \mid L(a) = L(b)\}$.
$\mathscr{R}$ — отношение $\{(a, b\} \in S \times S \mid R(a) = R(b)\}$.
$\mathscr{J}$ — отношение $\{(a, b) \in S \times S \mid J(a) = J(b)\}$.
$\mathscr{H}$ — отношение $\mathscr{L} \cap \mathscr{R}$.
$\mathscr{D}$ — отношение $\mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L}$.
L_a, R_a, J_a, H_a, D_a — соответственно $\mathscr{L}$-класс, $\mathscr{R}$-класс, $\mathscr{J}$-класс, $\mathscr{H}$-класс, $\mathscr{D}$-класс,содержащий элемент a. (§ 2.1)
$I(a)$ — множество $J(a) \setminus J_a$ (которое либо пусто, либо идеал полугруппы S).
$J(a)/I(a)$ — главный фактор полугруппы S, соответствующий элементу a. (§ 2.6)
$\mathscr{T}_X$ — полная полугруппа преобразований множества X. (§. 1.1)
$\mathscr{P}\mathscr{T}_X$ — полугруппа всех частичных преобразований множества X. (§ 11.1)
${}^0\mathscr{T}_X$ — полугруппа всех преобразований множества $X^0 = X \cup 0_X$, оставляющих на месте 0_X. (§ 11.4)
$\mathscr{G}_X$ — группа всех подстановок на множестве X. (§ 1.1)
$\mathscr{I}_X$ — симметрическая инверсная полугруппа на множестве X, т. е. полугруппа всех взаимно однозначных частичных преобразований множества X. (§ 1.9)
${}^0\mathscr{I}_X$ — полугруппа всех частичных взаимно однозначных преобразований множества $X^0 = X \cup 0_X$, оставляющих на месте 0_X. (§ 11.4)
$\mathscr{B}_X$ — полугруппа всех бинарных отношений на множестве X. (§ 1.12)
$\mathscr{F}_X$ — свободная полугруппа на множестве X. (§ 1.12)
$\mathscr{F}\mathscr{G}_X$ — свободная группа на множестве X. (§ 1.12)
$\mathscr{C}$ — бициклическая полугруппа. (§ 1.12)
$M^0(G, I, \Lambda; P)$ — рисовская полугруппа над группой с нулем G^0 с сэндвич-матрицей P. (§ 3.1)
$M(G; I, \Lambda, P)$ — рисовская полугруппа над группой G с сэндвич-матрицей P. (§ 3.1)

M_L, M_R, M_J — условие минимальности соответственно для множества главных левых, правых, двусторонних идеалов полугруппы. (§ 5.3, 5.4)

M_L^* [M_R^*] — условие, состоящее в том, что для каждого $\mathcal{J}$-класса J полугруппы выполняется условие минимальности в множестве главных правых [левых] идеалов, порожденных элементами из J. (§ 6.6)

$A_C = A_C(S)$ [$_CA = {_CA}(S)$] — главный правый [левый] аннулятор подмножества C полугруппы $S = S^0$. (§ 6.1)

$_CA_C = {_CA_C}(S) = A_C \cap {_CA}$.

$\Sigma_r = \Sigma_r(S)$ [$\Sigma_l = \Sigma_l(S)$] — правый [левый] цоколь полугруппы S, т. е. объединение 0 и всех 0-минимальных правых идеалов из S. (§ 6.3)

$a^{[-1]}H = \{x \in S \mid ax \in H\}$, $Ha^{[-1]} = \{x \in S \mid xa \in H\}$. (§ 7.2)

$\mathcal{R}_H$ [$_H\mathcal{R}$] — главная правая [левая] конгруэнция $\{(a, b) \in S \times S \mid a^{[-1]}H = b^{[-1]}H\}$, соответствующая подмножеству H полугруппы S. (§ 7.2, 10.2)

$\mathcal{R}_H^*$ [$_H\mathcal{R}^*$] — главная частичная правая [левая] конгруэнция $\{(a, b) \in S \times S \mid a^{[-1]}H = b^{[-1]}H \neq \varnothing\}$, соответствующая подмножеству H полугруппы S. (§ 7.2, 10.2)

$W_H = \{x \in S \mid x^{[-1]}H = \varnothing\}$, $_HW = \{x \in S \mid Hx^{[-1]} = \varnothing\}$ (§ 7.2)

τ_H — отношение транзитивности на множестве X, соответствующее инверсной подполугруппе H из $\mathcal{I}_X$. (§ 7.3)

$\rho_{\mathcal{A}}$ — конгруэнция на инверсной полугруппе, соответствующая нормальной ядерной системе $\mathcal{A}$. (§ 7.4)

$C(X)$ — централизатор подмножества X в полугруппе S. (§ 7.6)

$CT(A, \mathcal{E}, p, q)$ — полугруппа Круазо — Тессье. (§ 8.2)

$\mathcal{C}(S)$ — простая полугруппа Брака, содержащая полугруппу S. (§ 8.5)

$[S_i; U]$ и $[S_i; U; \varphi_i]$ — сокращенные обозначения полугрупповой амальгамы $[\{S_i; i \in I\}; U; \{\varphi_i; i \in I\}]$. (§ 9.4)

$\prod^* S_i$ и $\prod^* \{S_i\}$ — сокращенные обозначения свободного произведения $\prod^* \{S_i \mid i \in I\}$. (§ 9.4)

$\prod_U^* S_i = \prod_U^* \{S_i \mid i \in I\}$ — свободное произведение амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$. (§ 9.4)

$\sum S_i$ — прямая сумма полугрупп S_i $(i \in I)$. (§ 9.4)

$\sum_U S_i$ — прямая сумма амальгамы $[S_i; U; \varphi_i]$. (§ 9.4)

Пусть ρ — отношение на полугруппе S.

ρD — отношение $\{(x, y) \in S \times S \mid (xs, ys) \in \rho$ для некоторого $s \in S^1\}$.

ρG — отношение, двойственное к ρD. (§ 9.5)

ρR — отношение $\{(x, y) \in S \times S \mid (xs, ys) \in \rho$ для всех $s \in S^1\}$.

ρL — отношение, двойственное к ρR. (§ 10.1)

ρR^* — отношение $\{(us, vs) \mid (u, v) \in \rho,\ s \in S^1\}$.

ρL^* — отношение, двойственное к ρR^*. (§ 10.1)

ρC — отношение $\{(x, y) \in S \times S \mid (sxt, syt) \in \rho$ для всех $s, t \in S^1\}$. (§ 9.5)

ρC^* — отношение $\{(sut, svt) \mid (u, v) \in \rho,\ st \in S^1\}$. (§ 9.5)

ρT — транзитивное замыкание отношения ρ. (§ 10.1)

ρ^c — конгруэнция с сокращениями, порожденная отношением ρ. (§ 9.5)

$\alpha(\mathscr{A})$ $[\beta(\mathscr{A})]$ — минимальное [максимальное] отношение эквивалентности на полугруппе S, допускающее семейство $\mathscr{A}$ попарно непересекающихся подмножеств из S. (§ 10.1)

P_H $[{}_HP]$ — правая [левая] конгруэнция $\{(a, b) \in S \times S \mid ua = vb$ для некоторых $u, v \in H\}$, соответствующая реверсивной справа [слева] подполугруппе H из S. (§ 10.3)

$H..a$ — отношение $\{(x, y) \in S \times S \mid xay \in H\}$.

$\mathscr{P}_H$ — главная конгруэнция $\{(a, b) \in S \times S \mid H..a = H..b\}$. (§ 10.4)

$[\mathscr{P}, N, \{e_i\}, \{f_\lambda\}]$ — конгруэнция на вполне 0-простой полугруппе, соответствующая (i) допустимому разбиению $\mathscr{P}$ прямоугольника ненулевых $\mathscr{H}$-классов $H_{i\lambda}$, (ii) нормальной подгруппе N из H_{11} и (iii) элементам $e_i \in H_{i1}$, $f_\lambda \in H_{1\lambda}$, таким, что $Nf_\lambda e_i = Nf_\mu e_j$, если $H_{i\lambda}$ и $H_{j\mu}$ принадлежат одному и тому же $\mathscr{P}$-классу. (§ 10.7).

M_S $[{}_SM]$ — правый [левый] операнд над полугруппой S. (§ 11.1)

${}_SM_T$ — биоперанд над полугруппами S и T. (§ 11.1)

$\mathscr{E}(M_S)$ — полугруппа операторных эндоморфизмов операнда M_S. (§ 11.1, 11.7)

$A(M_S)$ — группа операторных автоморфизмов операнда M_S. (§ 11.1, 11.8)

FM — множество неподвижных элементов операнда M_S. (§ 11.5)

$\mathscr{C}$-rad S — пересечение всех таких конгруэнций σ на S, что S/σ есть полугруппа типа $\mathscr{C}$. (§ 11.6)

rad S — $\mathscr{J}$-rad S, где $\mathscr{J}$ есть тип неприводимых справа полугрупп. $\mathrm{rad}^0 S$ — (rad S)-класс, содержащий 0; он совпадает с нильрадикалом $N(S)$ полугруппы S. (§ 6.6, 11.6)

Предметный указатель

Оглавление

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу:

129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., д. 2, издательство «Мир».