АКАДЕМИЯ НАУК СССР

Н. Е. КОЧИН

ВЕКТОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ И НАЧАЛА ТЕНЗОРНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ИЗДАНИЕ ДЕВЯТОЕ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
Москва — 1965

Настоящее девятое издание книги акад. Н. Е. Кочина «Векторное исчисление и начала тензорного исчисления» перепечатано с матриц восьмого издания.

Ответственный редактор

академик П. Я. КОЧИНА

ПРЕДИСЛОВИЕ К СЕДЬМОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание является перепечаткой шестого издания с той разницей, что нами изменены обозначения скалярного и векторного произведений, упрощена система знаков препинания и устранены замеченные ошибки и опечатки.

П. Кочина.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее пособие имеет своей целью дать изучающим его, главным образом студентам вузов и втузов, необходимые сведения по векторному исчислению для того, чтобы можно было в дальнейшем изучать векторным способом другие дисциплины, как, например, теоретическую механику, гидромеханику, теорию электричества.

Курс снабжен большим количеством задач геометрического и элементарно-механического характера, помогающих лучшему усвоению понятий и методов векторного исчисления.

Н. Кочин.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ЧЕТВЕРТОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящее издание значительно расширено по сравнению с предыдущими. В частности, в целях иллюстрации понятий векторного анализа, введен ряд примеров физического характера.

Основу курса составляют главы о векторной алгебре и векторном анализе. В третьей и четвертой главах даны основы теории аффинных ортогональных тензоров с применением ее к теории упругости и основные элементы общей теории тензоров.

Н. Кочин.

ПРЕДИСЛОВИЕ К ПЯТОМУ И ШЕСТОМУ ИЗДАНИЯМ

Настоящее издание почти не отличается от предыдущего; в текст внесены некоторые исправления и устранен ряд замеченных опечаток.

Н. Кочин.

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определение скаляра и вектора. Равенство векторов

1. В математике и физике (в частности, в механике) приходится иметь дело с величинами двух родов: одни из величин связаны с понятием о направлении в пространстве, другие же имеют чисто числовой характер и не связаны с понятием о направлении. Рассмотрим, например, температуру, массу, плотность, энергию, перемещение точки, скорость, ускорение, силу. Резкое отличие последних четырех величин от первых четырех состоит в том, что с ними должно быть связано понятие о направлении: например, точка может перемещаться вверх или вниз, вперед или назад и т. д. Первые четыре величины, не связанные с понятием о направлении, принадлежат к классу величин, называемых с к а л я р а м и. Остальные четыре величины, имеющие определенное направление, относятся к классу величин, называемых в е к т о р а м и.

Рассмотрим один из скаляров — температуру. Чтобы охарактеризовать температуру воздуха в данном месте в некоторый момент, мы должны измерить температуру, например, в градусах Цельсия, полученное число (положительное или отрицательное) даст величину температуры. Точно так же мы можем измерить в соответствующих единицах массу тела, его плотность и т. д. Поэтому мы можем дать следующее определение скаляра:

Скаляром называется величина, характеризующаяся при выбранной единице меры одним числом.

Наиболее типичным скаляром является отвлеченное число. Другие примеры скаляров мы уже указывали: температура, масса, плотность, энергия.

Остановимся несколько на вопросе о сравнении и равенстве скаляров. Очевидно, нельзя сравнивать температуру и массу или температуру и плотность и т. д. Обе сравниваемые величины непременно должны обладать одинаковой размерностью, т. е. единицы их меры должны быть одинаковым образом связаны с основными единицами. В механике за основные единицы принимают единицу длины (символ L), единицу массы (символ M) и единицу времени (символ T) (вместо единицы массы в технической системе мер вводят в качестве основной единицу силы). Тогда,

например, плотность будет иметь размерность ML^{-3}, ибо единица плотности есть плотность однородного тела, имеющего объем, равный единице, при условии, что масса этого тела также равна единице. Поэтому, при увеличении единицы массы, например, в два раза, единица плотности также увеличивается в два раза; при увеличении же единицы длины в два раза единица плотности уменьшается в восемь раз. Символ ML^{-3} выражает только что указанную зависимость единицы плотности от основных единиц.

Два скаляра одной и той же размерности равны, если при измерении их одной и той же единицей меры получаются одинаковые числа.

Рассмотрим теперь один из векторов — скорость точки. Указания величины скорости, измеренной, скажем, в сантиметрах в секунду, недостаточно для характеристики скорости. Нужно еще задать направление движения точки. Точно так же имеют определенное направление и ускорение точки и сила, действующая на некоторую материальную точку. Дадим поэтому следующее определение:

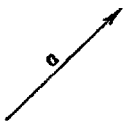
Вектором называется величина, характеризующаяся, помимо измеряющего ее в определенных единицах меры числа, еще своим направлением в пространстве.

Как простейшим скаляром является отвлеченное число, так простейшим вектором является прямолинейный отрезок $\overline{AB}$, имеющий определенную величину — длину AB и определенное направление — от начальной точки A к конечной точке B.

Мы уже указывали другие примеры векторов: перемещение точки, ускорение, сила. Каждому такому вектору можно сопоставить прямолинейный отрезок, имеющий направление рассматриваемого вектора и длину, равную численному значению вектора (отложенному в некотором масштабе).

Численное значение вектора называется величиной, модулем или длиной вектора.

На чертежах векторы обозначаются стрелками (фиг. 1). Направление стрелки указывает на направление вектора, длина стрелки дает длину вектора.



Фиг. 1

Обычно векторы обозначаются жирными готическими или латинскими буквами. Иногда мы будем обозначать вектор, начальная точка которого есть A, а конечная — B, символом $\overline{AB}$.

Длину вектора, т. е. его численную величину, мы будем обозначать теми же курсивными буквами: a, A, AB или же будем пользоваться знаком модуля:

$$|\mathfrak{a}| = a, \quad |\mathfrak{A}| = A, \quad |\overline{AB}| = AB$$

2. Перейдем к вопросу о сравнении и равенстве векторов. Сравниваемые векторы должны обладать одной и той же размерностью, например, нельзя сравнивать силу со скоростью, и т. п.

Два вектора **a** *и* **b**, *обладающие одной и той же размерностью, мы будем считать равными, если они имеют одно и то же направление и одну и ту же длину.*

Равенство двух векторов **a** и **b** мы будем обозначать следующим образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Таким образом, если два вектора имеют неодинаковую длину или неодинаковое направление, они не могут быть равными.

Возьмем какой-нибудь параллелограмм и снабдим две противоположные стороны его одним и тем же направлением; полученные векторы будут, по нашему определению, равными; таким образом, положение начальной точки вектора для нас роли не играет.

Легко видеть, что для численного задания вектора нужно указать три числа. В самом деле, одним числом нужно задать величину вектора и двумя числами — его направление (например в астрономии направление на небесное светило определяют, указывая: 1) азимут и высоту или 2) прямое восхождение и склонение или 3) долготу и широту светила).

Равенство двух векторов сводится к равенству попарно трех чисел, эти векторы определяющих. Таким образом, одно векторное равенство равносильно трем скалярным.

3. Отметим, что различают векторы трех родов: с в о б о д н ы е, п е р е д в и ж н ы е и о п р е д е л е н н ы е в е к т о р ы. Введенные нами векторы относятся к типу свободных, так как точку их приложения можно выбирать по произволу. У передвижных векторов точку приложения вектора можно перемещать произвольно вдоль самого вектора, так что последний может лежать на любой части определенной прямой. Примером передвижного вектора является сила, приложенная к твердому телу, так как за точку приложения силы можно взять любую точку на линии действия силы. Наконец, у определенных векторов точка приложения вектора должна быть зафиксирована. Так, например, при рассмотрении движения жидкости за точку приложения силы, действующей на какую-либо частицу жидкости, принимается некоторая точка самой частицы.

Изучение передвижных и определенных векторов сводится к изучению свободных векторов, почему достаточно ограничиться рассмотрением только последних.

В физике приходится рассматривать еще величины тоже направленного характера, но более сложного, чем векторы, строения. Эти величины называются т е н з о р а м и. Определение их будет дано в главе III. Сейчас укажем только несколько примеров: распределение моментов инерции относительно различных осей, проходящих через некоторую точку твердого тела, приводит к понятию тензора моментов инерции; распределение напряжений на различно направленные элементы в некоторой точке упругого тела приводит к понятию тензора упругих напряжений и т. д. Наконец, в главе IV будет дано еще более общее определение.

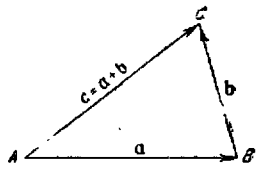
4. Скаляры, векторы и тензоры являются объектами, изучаемыми в векторном исчислении.

Как всякое исчисление, векторное исчисление должно ввести ряд операций с векторами и тензорами, как например сложение, умножение, дифференцирование, и изучить эти операции. Эти операции определяются таким образом, чтобы при их помощи легко было интерпретировать те комбинации векторов, которые приходится изучать в математике, механике и физике. Так, например, в физике очень часто встречается правило параллелограмма: параллелограмм скоростей, сил и т. д. Этому правилу отвечает операция сложения векторов, которая будет рассмотрена в следующем параграфе.

В результате как основные элементы векторного исчисления — вектор и тензор, так и операции с этими элементами, оказываются хорошо приспособленными для изучения тех геометрических, механических и физических явлений, в которых большую роль играет направление величин; поэтому применение векторного исчисления для изучения таких явлений, с одной стороны, упрощает исследование, а с другой стороны, ведет его более естественным и наглядным образом, не требуя введения посторонних элементов, как это имеет место в обычном методе координат.

§ 2. Сложение, вычитание и разложение векторов. Умножение вектора на скаляр. Единичные векторы

1. Чтобы подойти к понятию суммы двух векторов **a** и **b**, рассмотрим, что будет с некоторой точкой P, совершающей последовательно одно за другим два перемещения, представляемые векторами **a** и **b**. Первое перемещение переведет нашу точку из начального положения A (фиг. 2) в положение B (прямолинейный отрезок AB есть вектор **a**, т. е. $\overline{AB} = \mathbf{a}$), второе перемещение переведет рассматриваемую точку из положения B в положение C, такое, что $\overline{BC} = \mathbf{b}$. В результате точка перейдет из A в C. Перемещение AC определяет вектор **c**, который естественно назвать суммой векторов **a** и **b**. Отсюда вытекает следующее определение:



Фиг. 2

Чтобы получить вектор **c**, *представляющий геометрическую сумму двух векторов* **a** *и* **b**, *надо от произвольной точки A пространства отложить вектор* **a**, *к концу его приложить начало вектора* **b** *и соединить точку A с концом C вектора* **b**, *тогда $\overline{AC}$ по величине и направлению представляет* **c**.

Для обозначения операции сложения векторов пользуются обыкновенным знаком алгебраического сложения:

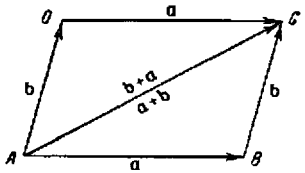
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{1}$$

Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ называются **слагаемыми векторами**, вектор $\mathbf{c}$ — **геометрической суммой** или **результирующим вектором**.

Из фиг. 3 видно, что сумма двух **векторов** $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ является диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Отсюда сразу вытекает формула

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \qquad (2)$$



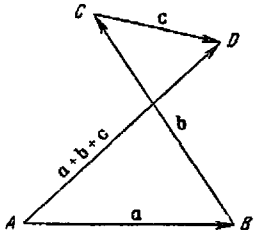
Фиг. 3

выражающая *коммутативность (т. е. переместительность) геометрического сложения: геометрическая сумма не меняется от перестановки слагаемых.*

Мы останавливаемся на этом простом свойстве геометрической суммы потому, что некоторые операции векторного исчисления таким свойством не обладают.

Чтобы образовать сумму трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, мы складываем сначала $\mathbf{a}$ с $\mathbf{b}$ и к результирующему вектору прибавляем $\mathbf{c}$, окончательно получаем (фиг. 4) вектор $\overline{AD}$; из чертежа очевидно, что тот же самый результат получится, если к $\mathbf{a}$ прибавить сумму $\mathbf{b} + \mathbf{c}$, таким образом имеем формулу

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \qquad (3)$$



Фиг. 4

выражающую *ассоциативность (сочетательность) геометрического сложения: в геометрической сумме скобки можно раскрывать и вводить как в обыкновенной алгебре.*

Для сложения трех и более векторов получается таким образом правило многоугольника векторов: *надо последовательно отложить в любом порядке векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, *совмещая начало каждого следующего с концом предыдущего, и образовать замыкающую линию полученной ломаной линии, ведя ее от начала первого вектора к концу последнего.* Из коммутативности и ассоциативности сложения вытекает, что мы можем складывать векторы в любом порядке, в частности можем заменять любое количество их соответствующим результирующим вектором.

Отметим особо правило сложения трех векторов, не лежащих в одной плоскости: геометрическая сумма таких трех векторов изображается диагональю параллелепипеда, построенного на данных трех векторах, как на ребрах. Так например, на фиг. 8 вектор $\overline{OD}$ равен геометрической сумме векторов $\overline{OK}$, $\overline{OL}$ и $\overline{OM}$.

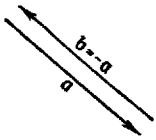
2. Перейдем к вычитанию векторов. Рассмотрим тот частный случай сложения двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, когда результирующий вектор сведется в точку, т. е. обратится в нуль (фиг. 5):

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0 \qquad (4)$$

Очевидно, в этом случае вектор $\mathbf{b}$ равен по величине, но противоположен по направлению вектору $\mathbf{a}$.

Если бы с уравнением (4) можно было поступать по правилам обычной алгебры, то мы легко вывели бы, что

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a} \tag{5}$$



Фиг. 5

В соответствии с этим *под вектором* — $\mathbf{a}$ *мы будем понимать вектор, противоположный* $\mathbf{a}$, *т. е. равный по величине, но противоположный по направлению вектору* $\mathbf{a}$.

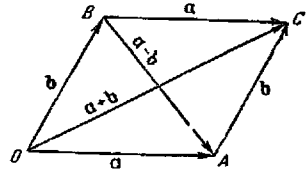
Вычитание, как действие, обратное сложению, определяется следующим образом: вектор $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ называется разностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если сумма $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ дает $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{a} \tag{6}$$

Прибавляя к обеим частям этого уравнения вектор $-\mathbf{b}$, мы получим:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{x} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \tag{7}$$

Таким образом, *чтобы вычесть из вектора* $\mathbf{a}$ *вектор* $\mathbf{b}$, *надо прибавить к вектору* $\mathbf{a}$ *вектор* $-\mathbf{b}$, *противоположный вектору* $\mathbf{b}$. Иначе можно получить вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ следующим образом: отложив оба вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общего начала O, проведем вектор из конца B вектора $\mathbf{b}$ к концу A вектора $\mathbf{a}$ (фиг. 6), это и будет $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.



Фиг. 6

В самом деле:

$$\overline{BA} = \overline{BO} + \overline{OA} = -\mathbf{b} + \mathbf{a}$$

Таким образом, в параллелограмме, построенном на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (фиг. 6), одна диагональ представляет сумму векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, другая — их разность.

3. Нужно отметить, что правило параллелограмма для геометрического сложения векторов ограничивает область направленных величин, которые мы можем назвать векторами. Например, вращение твердого тела около некоторой оси на конечный угол может быть представлено направленным отрезком, но это не будет вектор, ибо два последовательных вращения около разных осей складываются (как доказывается в кинематике) не по правилу параллелограмма, а по более сложному закону. Это объясняется тем, что направленная величина, представляющая поворот твердого тела на конечный угол около некоторой оси, является тензором, т. е. величиной более сложного характера, нежели вектор. Напротив, бесконечно малые вращения могут быть представлены векторами, ибо для них правило параллелограмма справедливо, так же как для сил, скоростей и т. д.

Таким образом, точнее было бы определить *вектор как величину, характеризующуюся своим численным значением, своим направлением в пространстве и подчиняющуюся правилу геометрического сложения.*

Действием, обратным геометрическому сложению, является, помимо геометрического вычитания, еще *геометрическое разложение, состоящее в том, что данный вектор заменяют равной ему суммой нескольких векторов.* Геометрически это сводится к построению ломаной линии, имеющей данный вектор замыкающей стороной. Очевидно, задача в таком виде имеет неопределенный характер и надо наложить на геометрические слагаемые ряд условий, чтобы сделать задачу определенной.

Важнейшие случаи разложения мы сейчас и рассмотрим, но предварительно остановимся на вопросе об умножении вектора на скаляр.

4. Пусть мы имеем вектор $\mathbf{a}$; умножить его на целое положительное число m — значит сложить между собою m векторов, равных $\mathbf{a}$; в результате, очевидно, получится вектор $\mathbf{b}$, имеющий то же направление, что и $\mathbf{a}$, но по длине в m раз больший:

$$\mathbf{b} = m\mathbf{a} = \mathbf{a}m, \quad b = ma \tag{8}$$

Отсюда можно вывести, что *при всяком положительном m мы должны принимать за вектор $m\mathbf{a}$ вектор длины ma, имеющий то же направление, что и $\mathbf{a}$.*

Раньше мы уже определили умножение вектора $\mathbf{a}$ на -1; это есть вектор, противоположный $\mathbf{a}$; поэтому *при умножении $\mathbf{a}$ на отрицательное число m мы получаем вектор длины $|m|a$, параллельный $\mathbf{a}$, но имеющий противоположное направление.*

Из этих определений непосредственно вытекает справедливость следующих формул:

$$(m + n)\,\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a} \tag{9}$$

$$m(n\mathbf{a}) = (mn)\,\mathbf{a} = n(m\mathbf{a}) \tag{10}$$

Если умножить два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на m и потом сложить, то получится результат, одинаковый с тем, который мы получили бы, если бы сначала сложили $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а потом умножили на m:

$$m\mathbf{a} + m\mathbf{b} = m(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \tag{11}$$

В этом выражается *дистрибутивный (распределительный) закон умножения вектора на скаляр: скобки можно раскрывать, как в обыкновенной алгебре.* Для доказательства достаточно представить себе геометрический смысл уравнения (11), которое выражает, что если мы изменим на фиг. 2 стороны $\triangle ABC$ в отношении m, то из полученных векторов составится новый треугольник, подобный данному.

Формула (11), очевидно, справедлива и для нескольких векторов

$$m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \ldots + m\mathbf{a}_n = m(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n) \tag{12}$$

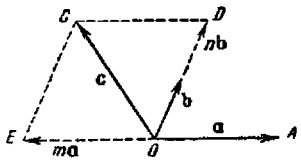
5. Только что рассмотренные нами векторы **a** и **b**:

$$\mathbf{b} = m\mathbf{a} \tag{13}$$

параллельны между собой; такие векторы называются также коллинеарными.

Обратно, всякий вектор **b** может быть выражен через коллинеарный вектор **a** по формуле (13), где m — скалярный множитель, представляющий отношение длин векторов **b** и **a**, взятое со знаком плюс или минус, смотря по тому, имеют ли векторы **a** и **b** одинаковое направление или как раз противоположное.

Особенно важен частный случай, когда один из коллинеарных векторов имеет длину, равную единице. Такие векторы называются единичными векторами или ортами. Орт вектора **a** часто обозначают через $\mathbf{a}_1$, указывая значком 1, что вектор $\mathbf{a}_1$ есть единичный. Тогда для всякого вектора **a** будем иметь:



Фиг. 7

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}_1 \tag{14}$$

В формуле (14) разделены два элемента, характеризующие вектор: его длина a и его направление $\mathbf{a}_1$.

6. Если векторы **a** и **b** не коллинеарны, то вектор

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \tag{15}$$

параллелен плоскости, определяемой векторами **a** и **b**, ибо геометрическая сумма векторов, лежащих в одной плоскости, лежит в той же плоскости.

В этом случае говорят, что векторы **a**, **b** и **c** компланарны, т. е. параллельны одной плоскости.

Обратно, всякий вектор **c**, компланарный двум неколлинеарным векторам **a** и **b**, может быть представлен формулой (15). Для доказательства отложим все три вектора **a**, **b** и **c** от общего начала O (фиг. 7) и проведем через конец C вектора **c** прямые CD и CE, параллельные векторам **a** и **b**; тогда **c** представится как геометрическая сумма двух векторов, коллинеарных соответственно векторам **a** и **b**, т. е. равных $m\mathbf{a}$ и $n\mathbf{b}$. В результате получается разложение (15). Это разложение единственное, так как если бы мы имели два разложения:

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = m'\mathbf{a} + n'\mathbf{b}$$

то, вычитая нижнее равенство из верхнего, мы получили бы

$$0 = (m - m')\,\mathbf{a} + (n - n')\,\mathbf{b} \tag{16}$$

Отсюда непременно

$$m - m' = 0, \quad n - n' = 0$$

т. е. $m = m'$, $n = n'$. В самом деле, если бы, например, $m - m \neq 0$, то, решая уравнение (16) относительно $\mathbf{a}$, мы нашли бы

$$\mathbf{a} = -\frac{n - n'}{m - m'}\,\mathbf{b}$$

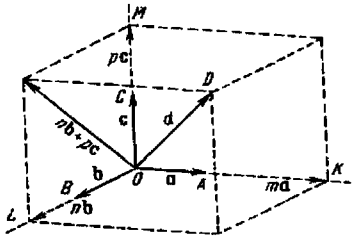
т. е. $\mathbf{a}$ был бы коллинеарен с $\mathbf{b}$, что противоречит предположению.

Итак, разложение (15) единственно.

7. Если три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ не компланарны, то всякий вектор $\mathbf{d}$ может быть представлен в форме

$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} \qquad (17)$$

т. е. разложен на три составляющие, параллельные соответственно векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.



Фиг. 8

Для доказательства отложим все четыре вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ от общего начала O (фиг. 8) и проведем через конец D вектора $\mathbf{d}$ плоскости, параллельные граням трехгранного угла, образованного векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$; тогда $\mathbf{d}$ представится как сумма трех векторов (например $\overline{OK}$, $\overline{OL}$, $\overline{OM}$), коллинеарных соответственно векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, т. е. равных $m\mathbf{a}$, $n\mathbf{b}$ и $p\mathbf{c}$. В результате получается разложение (17). Это разложение единственное, так как, если бы мы имели два разложения:

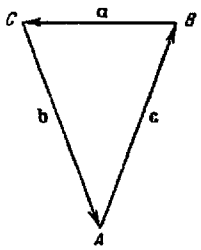
$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}$$

$$\mathbf{d} = m'\mathbf{a} + n'\mathbf{b} + p'\mathbf{c}$$

мы из них получили бы

$$0 = (m - m')\,\mathbf{a} + (n - n')\,\mathbf{b} + (p - p')\,\mathbf{c}$$

и если бы хоть одна из разностей $m - m'$, $n - n'$, $p - p'$ не равнялась нулю, то векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ оказались бы компланарными, что противоречит предположению. Поэтому $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$, т. е. разложение (17) единственно.



Фиг. 9

Разберем несколько примеров на сложение и разложение векторов.

Задача 1. Какому условию должны удовлетворять три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, чтобы из них можно было образовать треугольник (фиг. 9).

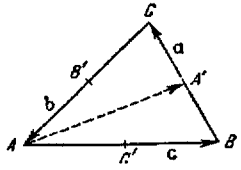
Из чертежа видно, что искомым условием является

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$$

так как тогда и только тогда ломаная линия $BCAB$ замкнется и образуется треугольник.

Задача 2. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного $\triangle ABC$ (фиг. 10).

Обозначим середины сторон BC, CA и AB соответственно через A', B' и C'. Выразим векторы, представляющие медианы треугольника, т. е. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$, через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найдем, например, $\overline{AA'}$:



Фиг. 10

$$\overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{BA'} = \mathbf{c} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a}$$

ибо

$$\overline{BA'} = \tfrac{1}{2}\overline{BC} = \tfrac{1}{2}\mathbf{a}$$

Циклической перестановкой (т. е. заменой $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ на $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a}$) получаем

$$\overline{BB'} = \mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{b}, \quad \overline{CC'} = \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{c}$$

Проверяем условие задачи 1, что из векторов $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ можно составить треугольник; для чего составляем

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \mathbf{c} + \tfrac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{a} + \tfrac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{b} + \tfrac{1}{2}\mathbf{c} = \tfrac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$$

Условие задачи 1 выполняется; следовательно, из $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$ действительно можно составить треугольник.

Прежде чем переходить к дальнейшим примерам, мы введем несколько необходимых нам понятий.

Положение какой-нибудь точки пространства P может быть определено вектором $\overline{OP}$, начальной точкой которого служит некоторая определенным образом выбранная точка O, а концом — точка P; *вектор $\overline{OP}$ мы будем называть радиусом-вектором точки P относительно точки O и будем обозначать обычно буквой* $\mathbf{r}$. *Про точку P, заданную радиусом-вектором* $\mathbf{r}$, *мы будем говорить, для сокращения речи, что дана точка P* ($\mathbf{r}$).

Задача 3. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ середины C отрезка AB, зная точки A ($\mathbf{r}_1$) и B ($\mathbf{r}_2$). Вычисляем

$$\mathbf{r} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \tfrac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \tfrac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) =$$

$$= \mathbf{r}_1 + \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \qquad (18)$$

Задача 4. Доказать, что если диагонали четырехугольника делят друг друга пополам, то четырехугольник есть параллелограмм.

В самом деле, если радиусы-векторы четырех последовательных вершин четырехугольника $ABCD$ суть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$, то середина диагонали AC будет иметь радиус-вектор

$$\mathbf{r}' = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3)$$

а середина диагонали BD будет иметь радиус-вектор

$$\mathbf{r}'' = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4)$$

Но так как диагонали делят друг друга пополам, то эти точки совпадают; откуда

$$\frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4)$$

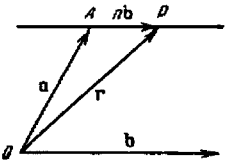
или

$$\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4$$

т. е. вектор $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ равен и параллелен вектору $\overline{DC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4$, а следовательно $ABCD$ есть параллелограмм.

Задача 5. Выяснить геометрическое значение уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + n\mathbf{b} \qquad (19)$$



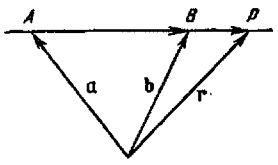
Фиг. 11

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — заданные векторы, n — переменный параметр, $\mathbf{r}$ — переменный вектор.

Найдем геометрическое место конца P радиуса-вектора $\mathbf{r}$ (фиг. 11); если конец радиуса-вектора $\mathbf{a}$ есть точка A, то

$$\overrightarrow{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a} = n\mathbf{b}$$

будет коллинеарен с $\mathbf{b}$, следовательно, $\overrightarrow{AP}$ параллелен $\mathbf{b}$; поэтому искомое геометрическое место есть прямая, проходящая через точку A и параллельная $\mathbf{b}$. Уравнение (19) есть векторное уравнение этой прямой.



Фиг. 12

Задача 6. Показать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы три точки A ($\mathbf{a}$), B ($\mathbf{b}$) и P ($\mathbf{r}$), где

$$\mathbf{r} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \qquad (20)$$

лежали на одной прямой, состоит в том, чтобы

$$m + n = 1 \qquad (21)$$

Исключение представляет случай коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, когда при всяких m и n точки A, B и P лежат на одной прямой.

В самом деле, пусть точки A, B и P лежат на одной прямой (фиг. 12), тогда векторы $\overrightarrow{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ и $\overrightarrow{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ коллинеарны, следовательно,

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = n(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \qquad (22)$$

Отсюда

$$\mathbf{r} = \mathbf{a} + n(\mathbf{b} - \mathbf{a}) = (1 - n)\mathbf{a} + n\mathbf{b}$$

так что в силу единственности разложения вектора $\mathbf{r}$ по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (в случае их неколлинеарности) мы должны иметь

$$m = 1 - n, \quad m + n = 1$$

Обратно, пусть $m + n = 1$, тогда

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} - \mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} - (m + n)\mathbf{a} = n(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

Следовательно, $\overline{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a}$ коллинеарен с $\overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$, т. е. $\overline{AB}$ и $\overline{AP}$ параллельны, а так как эти векторы отложены от одной точки A, то A, B и P лежат на одной прямой.

Таким образом уравнение (20) при условии (21) можно рассматривать, как векторное уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A (a) и B (b). Полезно выяснить значение коэффициентов m и n. Из формулы (22) видно, что n равно отношению длин AP и AB, взятому со знаком плюс, если точки B и P лежат по одну сторону точки A, и со знаком минус, если эти точки лежат по разные стороны A. Точно так же m равно отношению длин BP и BA, взятому с надлежащим знаком. Как простое приложение этого замечания, найдем радиус-вектор точки P, делящей AB в заданном отношении $x : y$. По условию

$$\frac{AP}{PB} = \frac{x}{y}$$

Отсюда

$$\frac{AP}{AB} = \frac{AP}{AP + PB} = \frac{x}{x+y} = n$$

Следовательно

$$m = 1 - n = \frac{y}{x+y}$$

$$\mathbf{r} = \frac{y\mathbf{a} + x\mathbf{b}}{x+y} \tag{23}$$

Задача 7. Показать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы четыре точки A (a), B (b), C (c) и P (r), где

$$\mathbf{r} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} \tag{24}$$

лежали в одной плоскости, состоит в том, чтобы

$$m + n + p = 1 \tag{25}$$

Исключение составляет случай компланарности векторов a, b и c, когда при всяких m, n и p вектор r будет им компланарен, так что при всяких m, n и p точки A, B, C и P будут лежать в одной плоскости.

В самом деле, чтобы доказать необходимость условия (25), предположим, что точки A, B, C и P лежат в одной плоскости. Тогда векторы

$$\overline{AP} = \mathbf{r} - \mathbf{a}, \quad \overline{AB} = \mathbf{b} - \mathbf{a}, \quad \overline{AC} = \mathbf{c} - \mathbf{a}$$

будут компланарны, следовательно

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = n(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + p(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}(1 - n - p) + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}$$

так что в силу единственности разложения вектора по векторам a, b, c (в случае их некомпланарности) мы должны иметь

$$m = 1 - n - p, \quad m + n + p = 1$$

Обратно, пусть $m + n + p = 1$, тогда

$$\mathbf{r} - \mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} - \mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} - (m + n + p)\,\mathbf{a} =$$

$$= n(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + p(\mathbf{c} - \mathbf{a})$$

следовательно, вектор $\overline{AP}$ компланарен векторам $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$, так что A, B, C и P лежат в одной плоскости.

Таким образом, уравнение (24) при условии (25) можно рассматривать как векторное уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки A (a), B (b) и C (c).

Задача 8. Пусть радиусы-векторы вершин $\triangle ABC$ суть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$. Доказать, что медианы треугольника пересекаются в одной точке и найти радиус-вектор этой точки.

Обозначим середины сторон BC, CA, AB через A', B', C'. Радиус-вектор A' будет, по задаче 3, равен

$$\mathbf{r}' = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3)$$

поэтому уравнение медианы AA', как уравнение прямой, проходящей через точки A и A', будет по задаче 6

$$\mathbf{r} = m\mathbf{r}_1 + \frac{1-m}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \tag{26}$$

Точно так же найдем уравнение медианы BB':

$$\mathbf{r} = n\mathbf{r}_2 + \frac{1-n}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) \tag{27}$$

Чтобы найти точку пересечения медиан AA' и BB', надо приравнять оба выражения (26) и (27), так как для этой точки оба вычисления должны давать одно и то же выражение; итак

$$m\mathbf{r}_1 + \frac{1-m}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) = n\mathbf{r}_2 + \frac{1-n}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3) \tag{28}$$

Мы удовлетворим этому уравнению, если приравняем коэффициенты при $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_3$ в обеих частях равенства (28):

$$m = \frac{1-n}{2}, \qquad \frac{1-m}{2} = n; \qquad \frac{1-m}{2} = \frac{1-n}{2}$$

Отсюда находим

$$m = n = \tfrac{1}{3}$$

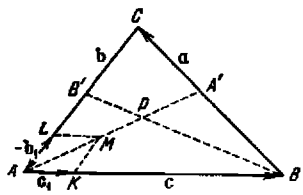
так что искомая точка пересечения D медиан AA' и BB' имеет следующий радиус-вектор:

$$\mathbf{r} = \tfrac{1}{3}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3) \tag{29}$$

Если бы мы стали определять точку пересечения медиан BB' и CC', мы получили бы, по симметрии полученного выражения (29), тот же самый результат, так что третья медиана проходит через ту же точку D.

Задача 9. Доказать, что биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке.

Проведем биссектрисы AA' и BB' углов с вершинами A и B и обозначим точку пересечения этих биссектрис через P (фиг. 13).



Фиг. 13

Обозначим орты векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ соответственно через

$$\mathbf{a}_1 = \frac{\mathbf{a}}{a}, \quad \mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{b}}{b}, \quad \mathbf{c}_1 = \frac{\mathbf{c}}{c}$$

Если мы на сторонах AB и AC отложим единичные векторы $\overline{AK} = \mathbf{c}_1$ и $\overline{AL} = -\mathbf{b}_1$ и построим на них параллелограмм, то диагональ его и будет, очевидно, биссектрисой угла A. Поэтому вектор $\overline{AP}$, направленный по этой биссектрисе, будет коллинеарен с вектором

$$\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1 = \frac{\mathbf{c}}{c} - \frac{\mathbf{b}}{b}$$

служащим диагональю параллелограмма $AKML$, поэтому

$$\overline{AP} = x(\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_1) = x\left(\frac{\mathbf{c}}{c} - \frac{\mathbf{b}}{b}\right)$$

где x — не определенный пока параметр.

Циклической перестановкой (т. е. заменой a на b, b на c, c на a, x на y) получим аналогичное уравнение для вектора $\overline{BP}$:

$$\overline{BP} = y(\mathbf{a}_1 - \mathbf{c}_1) = y\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right)$$

Чтобы найти x и y, заметим, что

$$\overline{AP} = \overline{AB} + \overline{BP}$$

$$x\left(\frac{\mathbf{c}}{c} - \frac{\mathbf{b}}{b}\right) = \mathbf{c} + y\left(\frac{\mathbf{a}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right) \tag{30}$$

Мы не можем в этом уравнении приравнять по отдельности коэффициенты при $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, так как эти векторы компланарны, а именно

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0 \tag{31}$$

Исключим поэтому $\mathbf{a}$; из уравнения (31) мы найдем

$$\mathbf{a} = -\mathbf{b} - \mathbf{c}$$

Подставляем это выражение в уравнение (30):

$$x\left(\frac{\mathbf{c}}{c} - \frac{\mathbf{b}}{b}\right) = \mathbf{c} + y\left(-\frac{\mathbf{b}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{a} - \frac{\mathbf{c}}{c}\right)$$

Теперь мы можем приравнять по отдельности коэффициенты при $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, ибо разложение по двум не коллинеарным векторам $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ должно быть единственно:

$$-\frac{x}{b}=-\frac{y}{a}, \qquad \frac{x}{c}=1-\frac{y}{a}-\frac{y}{c}$$

Решая эти уравнения, находим

$$y=\frac{ac}{a+b+c}, \qquad x=\frac{bc}{a+b+c}$$

Следовательно

$$\overline{AP}=\frac{b\mathbf{c}-c\mathbf{b}}{a+b+c}, \qquad \overline{BP}=\frac{c\mathbf{a}-a\mathbf{c}}{a+b+c}$$

Если бы мы стали искать точку P' пересечения биссектрис BB' и CC', то нашли бы результат, который можно получить из предыдущего циклической перестановкой букв:

$$\overline{BP'}=\frac{c\mathbf{a}-a\mathbf{c}}{a+b+c}, \qquad \overline{CP'}=\frac{a\mathbf{b}-b\mathbf{a}}{a+b+c}$$

Отсюда видно, что $\overline{BP}=\overline{BP'}$, т. е. точки P и P' тождественны, что и требовалось доказать.

Задача 10. Найти радиус-вектор точки пересечения биссектрис $\triangle ABC$, радиусы-векторы вершин которого суть A ($\mathbf{r}_1$), B ($\mathbf{r}_2$), C ($\mathbf{r}_3$), а противолежащие этим вершинам стороны суть a, b, c.

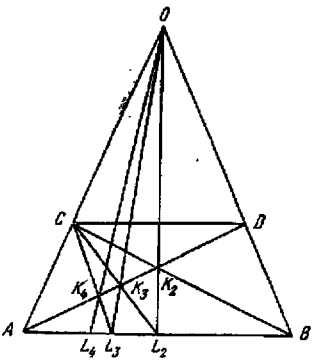
Ответ:

$$r=\frac{a\mathbf{r}_1+b\mathbf{r}_2+c\mathbf{r}_3}{a+b+c}$$

Задача 11. Доказать, что следующим построением можно найти любую целую часть (половину, треть, четверть и т. д.) отрезка AB.

Проведем (фиг. 14) прямую CD, параллельную AB, внешнюю точку O соединим с точками A и B прямыми, которые пусть пересекут CD в точках C и D.

Проведем диагонали получившейся трапеции AD и BC и соединим точку их пересечения K_2 с O прямой OK_2, которая пусть пересечет AB в точке L_2, тогда $AL_2=\frac{1}{2}AB$; соединим далее L_2 с C, найдем точку пересечения K_3 прямых AD и L_2C, проведем прямую OK_3, тогда в пересечении последней с AB найдем точку L_3, такую, что $AL_3=\frac{1}{3}AB$ и т. д.



Фиг. 14

Для доказательства возьмем точку O за начало радиусов-векторов и будем обозначать радиус-вектор какой-лкбо точки P через $\mathbf{r}_P$.

Прежде всего из подобия треугольников OCD и OAB заключаем, что

$$\mathbf{r}_A = l\mathbf{r}_C, \quad \mathbf{r}_B = l\mathbf{r}_D \tag{32}$$

где l есть совершенно определенное число — коэффициент подобия. Впрочем, формулы (32) можно вывести и не прибегая к теореме о подобии треугольников: прежде всего в силу коллинеарности с одной стороны $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_C$, с другой стороны $\overline{CD}$ и $\overline{AB}$ и, наконец, $\mathbf{r}_B$ и $\mathbf{r}_D$, имеем

$$\mathbf{r}_A = l_1\mathbf{r}_C, \quad \overline{AB} = l_1\overline{CD}, \quad \mathbf{r}_B = l_2\mathbf{r}_D$$

Но так как

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \overline{AB}, \quad \mathbf{r}_D = \mathbf{r}_C + \overline{CD}$$

то

$$\mathbf{r}_A + \overline{AB} = l_1\mathbf{r}_C + l_1\overline{CD} = l_2\mathbf{r}_D = l_2\mathbf{r}_C + l_2\overline{CD}$$

Отсюда и вытекает

$$l_1 = l, \quad l_2 = l$$

т. е. теорема о подобии треугольников и одновременно вторая формула (32).

Теперь пишем уравнения прямых AD и BC:

$$\mathbf{r} = m\mathbf{r}_A + (1 - m)\,\mathbf{r}_D = m\mathbf{r}_A + \frac{1-m}{l}\,\mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{r} = p\mathbf{r}_B + (1 - p)\,\mathbf{r}_C = p\mathbf{r}_B + \frac{1-p}{l}\,\mathbf{r}_A$$

Для точки пересечения этих прямых K_2 должно быть

$$m = \frac{1-p}{l}, \quad \frac{1-m}{l} = p$$

Отсюда можем найти m, p и $\mathbf{r}_{K_2}$:

$$m = \frac{1}{l+1}, \quad p = \frac{1}{l+1}, \quad \mathbf{r}_{K_2} = \frac{1}{l+1}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)$$

Точка L_2 является точкой пересечения прямых OK_2 и AB. Но уравнение прямой OK_2 есть

$$\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}_{K_2} = \frac{\lambda}{l+1}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)$$

и чтобы точка этой прямой лежала на прямой AB, необходимо и достаточно, чтобы сумма коэффициентов при $\mathbf{r}_A$ и $\mathbf{r}_B$ равнялась единице (задача 6):

$$\frac{2\lambda}{l+1} = 1, \quad \lambda = \frac{l+1}{2}$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_{L_2} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)$$

так что, действительно, L_2 является серединой AB.

Теперь мы покажем, что от точки L_n можно притти к точке L_{n+1}. Мы предполагаем, что

$$AL_n = \frac{1}{n} AB$$

так что радиус-вектор точки L_n есть

$$\mathbf{r}_{L_n} = \frac{(n-1)\,\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{n}$$

Уравнение прямой CL_n есть

$$\mathbf{r} = q\mathbf{r}_{L_n} + (1-q)\,\mathbf{r}_C = q\frac{(n-1)\,\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{n} + \frac{1-q}{l}\,\mathbf{r}_A$$

Для точки пересечения K_{n+1} прямых AD и CL_n должно быть

$$m = q\frac{n-1}{n} + \frac{1-q}{l}, \qquad \frac{1-m}{l} = \frac{q}{n}$$

Отсюда

$$m = \frac{n}{l+n}, \qquad q = \frac{n}{l+n}, \qquad \mathbf{r}_{K_{n+1}} = \frac{n\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{l+n}$$

Точка L_{n+1} является точкой пересечения прямой OK_{n+1}

$$\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}_{K_{n+1}} = \frac{\lambda}{l+n}(n\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B)$$

с прямой AB, так что должно быть

$$\frac{\lambda}{l+n}(n+1) = 1, \qquad \lambda = \frac{l+n}{n+1}$$

Отсюда

$$\mathbf{r}_{L_{n+1}} = \frac{n\mathbf{r}_A + \mathbf{r}_B}{n+1}$$

это показывает, что L_{n+1} делит AB в отношении $1 : n$, так что

$$AL_{n+1} = \frac{1}{n+1} AB$$

Что и требовалось доказать.

Задача 12. Найти соотношение между шестью отрезками AM, MB, BK, KC, CL, LA, которое должно выполняться для того, чтобы три прямые AK, BL, CM, соединяющие вершины треугольника ABC с противоположными сторонами, пересекались в одной точке P (фиг. 15).

Беря вне плоскости треугольника произвольную точку O, назовем через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ радиусы-векторы вершин треугольника ABC относительно точки O, через $\mathbf{R}$ же назовем радиус-вектор точки пересечения P трех прямых: AK, BL, CM. Разлагая $\mathbf{R}$ по трем некомпланарным векторам $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, будем иметь

$$\mathbf{R} = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 + \alpha_2\mathbf{r}_3$$

При этом, согласно задаче 7

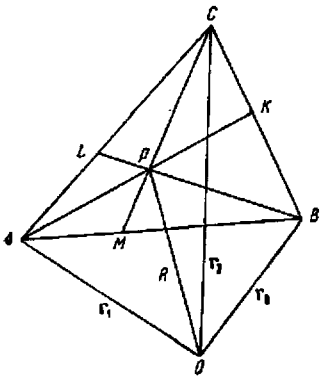
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Так как точка K лежит на прямой AP, то для радиуса-вектора $\mathbf{r}_K$ этой точки будем, согласно задаче 6, иметь

$$\mathbf{r}_K = k\mathbf{R} + (1 - k)\,\mathbf{r}_1 = (k\alpha_1 + 1 - k)\,\mathbf{r}_1 + k\alpha_2\mathbf{r}_2 + k\alpha_3\mathbf{r}_3$$

Так как точка K лежит в то же время на прямой BC, то мы должны еще иметь согласно той же задаче

$$k\alpha_1 + 1 - k = 0, \quad k\alpha_2 + k\alpha_3 = 1$$



Фиг. 15

При этом оба эти соотношения приводят к одному и тому же результату

$$k = \frac{1}{1 - \alpha_1} = \frac{1}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

Итак

$$\mathbf{r}_K = \frac{\alpha_2\mathbf{r}_2 + \alpha_3\mathbf{r}_3}{\alpha_2 + \alpha_3}$$

Сравнивая это с формулой (23), заключаем, что

$$\frac{BK}{KC} = \frac{\alpha_2}{\alpha_3}$$

Аналогично получим

$$\frac{CL}{LA} = \frac{\alpha_1}{\alpha_3}, \quad \frac{AM}{MB} = \frac{\alpha_3}{\alpha_1}$$

Перемножая полученные три равенства, найдем требуемое условие

$$\frac{BK \cdot CL \cdot AM}{KC \cdot LA \cdot MB} = 1$$

или

$$BK \cdot CL \cdot AM = KC \cdot LA \cdot MB \tag{33}$$

Это условие является, очевидно, и достаточным условием пересечения прямых AK, BL, CM, так как если обозначить через P точку пересечения прямых AK и BL, то прямая CP должна, согласно предыдущему, пересечь AB в такой точке M', для которой

$$\frac{AM'}{M'B} = \frac{KC \cdot LA}{BK \cdot CL}$$

Но если выполняется условие (33), то мы имеем

$$\frac{AM}{MB} = \frac{KC \cdot LA}{BK \cdot CL}$$

и, следовательно, точки M' и M должны совпасть.

Задача 13. Доказать компланарность векторов

$$n\mathbf{c} - p\mathbf{b}, \quad p\mathbf{a} - m\mathbf{c}, \quad m\mathbf{b} - n\mathbf{a}$$

Задача 14. Найти центр тяжести системы трех материальных точек M_1 ($\mathbf{r}_1$), M_2 ($\mathbf{r}_2$), M_3 ($\mathbf{r}_3$), в которых сосредоточены массы m_1, m_2, m_3, зная, что центр тяжести двух масс лежит на линии, соединяющей эти массы, и делит ее в отношении, обратно-пропорциональном массам.

Центр тяжести точек M_1 и M_2, который мы обозначим через M' ($\mathbf{r}'$), определяется по формуле (23):

$$\mathbf{r}' = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2}{m_1 + m_2}$$

Поэтому центр тяжести системы трех точек будет

$$\mathbf{r} = \frac{(m_1 + m_2)\,\mathbf{r}' + m_3\mathbf{r}_3}{(m_1 + m_2) + m_3} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{34}$$

Задача 15. Пусть A', B', C' середины сторон $\triangle ABC$ (фиг. 10), а O — какая-либо точка: доказать равенство

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

Задача 16. Хорды APB и CPD круга с центром O пересекаются в точке P под прямым углом. Доказать равенство:

$$\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC} + \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{PO}$$

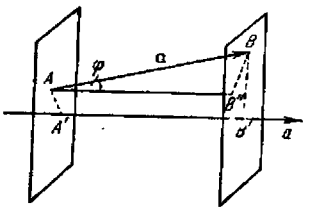
§ 3. Проекция вектора на какое-либо направление. Координаты вектора. Правая и левая системы координат. Аналитическое выражение равенства, сложения и вычитания векторов

1. Выберем какое-нибудь определенное направление, характеризуемое единичным вектором $\mathbf{u}$. Рассмотрим какой-нибудь вектор $\mathbf{a}$ (фиг. 16).

Проекцией a_u вектора $\mathbf{a}$ *на направление* $\mathbf{u}$ *называется длина отрезка $A'B'$, отсекаемого на какой-нибудь прямой, параллельной* $\mathbf{u}$, *плоскостями, перпендикулярными к* $\mathbf{u}$ *и проходящими через концы A и B вектора* $\mathbf{a}$, *взятая со знаком плюс или минус, смотря по тому, имеет ли $\overrightarrow{A'B'}$ то же направление, что* $\mathbf{u}$, *или как раз противоположное.*

Проекцию вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{u}$ мы будем обозначать a_u. Проводя через точку A до пересечения с плоскостью, перпендикулярной к $\mathbf{u}$ и проходящей через B, прямую AB'', параллельную и очевидно равную $A'B'$, из прямоугольного треугольника ABB'' найдем, вводя угол φ между векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{u}$:

$$a_u = a\cos\varphi \tag{1}$$



Фиг. 16

Если φ не превышает $\frac{1}{2}\pi$, это следует сразу из рассмотрения прямоугольного треугольника ABB'' и того обстоятельства, что в этом

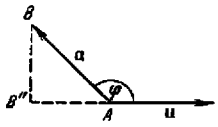
случае $\overline{A'B'}$ направлен одинаково с $\mathbf{u}$. Если же φ превышает $\frac{1}{2}\pi$, то (фиг. 17)

$$AB'' = a\cos(\pi - \varphi) \tag{2}$$

Но в этом случае $\overline{AB''}$ направлен противоположно $\mathbf{u}$, поэтому

$$a_u = -AB'' = -a\cos(\pi - \varphi) = a\cos\varphi \tag{3}$$

Следовательно, всегда *проекция вектора на какую-либо ось равна произведению длины вектора на косинус угла между вектором и осью.*



Фиг. 17

Мы можем рассматривать проекцию вектора $\mathbf{a}$ на направление $\mathbf{u}$ как вектор; тогда мы будем обозначать этот вектор через $\mathbf{a}_u$; очевидно,

$$\mathbf{a}_u = a_u\mathbf{u} = a\cos\varphi\,\mathbf{u} \tag{4}$$

2. Теорема. *Проекция геометрической суммы векторов на какое-либо направление* $\mathbf{u}$ *равна алгебраической сумме проекций слагаемых векторов на то же направление*:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n)_u = a_{1u} + a_{2u} + \ldots + a_{nu} \tag{5}$$

Достаточно, очевидно, доказать теорему для суммы двух векторов, т. е. из

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{6}$$

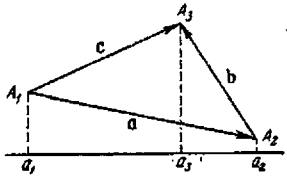
вывести

$$c_u = a_u + b_u \tag{7}$$

Докажем предварительно, что если на оси имеются три точки a_1, a_2, a_3, то всегда

$$a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = 0 \tag{8}$$

если брать отрезки a_ia_j со знаком плюс или минус, смотря по тому, совпадает ли направление a_ia_j с направлением оси или ему противоположно (фиг. 18).



Фиг. 18

В самом деле, одна из точек a_1, a_2, a_3 лежит между двумя другими; пусть, например, a_3 лежит между a_1 и a_2; тогда

$$a_1a_3 + a_3a_2 = a_1a_2$$

Отсюда, перенося все в правую часть и замечая, что $a_2a_3 = -a_3a_2$, $a_2a_1 = -a_1a_3$, найдем уравнение (8).

Аналогично рассматриваются случаи нахождения a_1 или a_2 между двумя другими точками.

Так как (фиг. 18)

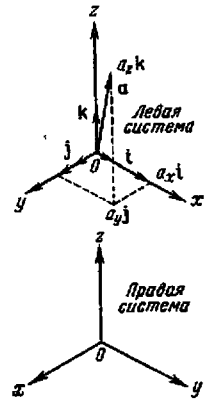
$$a_u = a_1a_2,\ b_u = a_2a_3,\quad c_u = a_1a_3 \tag{9}$$

то в силу (8)

$$a_u + b_u - c_u = 0 \tag{10}$$

что и требовалось доказать.

3. В § 2 мы видели, что всякий вектор **d** можно разложить по трем некомпланарным векторам **a**, **b** и **c**. Возьмем за векторы **a**, **b**, **c** взаимно перпендикулярные единичные векторы, направленные по трем осям прямолинейной прямоугольной системы координат $Oxyz$ (фиг. 19). Эти единичные векторы называются основными векторами или ортами и обозначаются **i**, **j**, **k**.



Фиг. 19

Назовем проекции вектора **a** по направлениям **i**, **j**, **k** или, что то же, по осям x, y, z через a_x, a_y, a_z; тогда при разложении вектора **a** по векторам **i**, **j**, **k** мы получим

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_x + \mathbf{a}_y + \mathbf{a}_z = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (11)$$

В том, что коэффициентом при **i** является a_x можно еще убедиться, составляя проекции обеих частей равенства (11) на ось x, пользуясь теоремой о проекции геометрической суммы и принимая во внимание, что проекции **j** и **k** на ось x, очевидно, равны 0.

Проекции a_x, a_y, a_z называются прямоугольными координатами или составляющими, или слагающими, или компонентами вектора **a**.

Они однозначно определяются по формуле (1) в виде

$$a_x = a\cos(\mathbf{a}, x), \quad a_y = a\cos(\mathbf{a}, y), \quad a_z = a\cos(\mathbf{a}, z) \qquad (12)$$

Обратно, если мы зададим вектор **a** его составляющими a_x, a_y, a_z, то мы полностью определим его. В самом деле, его длина получается, как диагональ прямоугольного параллелепипеда, по теореме Пифагора:

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \qquad (13)$$

Направление же вектора **a** получится из формулы (12):

$$\cos(\mathbf{a}, x) = \frac{a_x}{a}, \quad \cos(\mathbf{a}, y) = \frac{a_y}{a}, \quad \cos(\mathbf{a}, z) = \frac{a_z}{a} \qquad (14)$$

Возвышая три равенства (14) в квадрат и складывая, получим в силу (13)

$$\cos^2(\mathbf{a}, x) + \cos^2(\mathbf{a}, y) + \cos^2(\mathbf{a}, z) = 1 \qquad (15)$$

соотношение, справедливое для всякого вектора **a**.

4. Отметим, что различают два рода прямоугольных прямолинейных координатных систем, а именно: правую и левую системы. В левой системе (фиг. 19) вращение от оси x кратчайшим образом к оси y вокруг оси z

происходит по часовой стрелке (в правой против часовой стрелки); если мы одновременно с вращением от оси x к оси y будем перемещаться вдоль оси z, то получим движение винта с левой нарезкой, при левой системе, и соответственно винта с правой нарезкой (пробочника), при правой системе. Наконец, можно указать еще правило правой и левой руки. Направим большой, указательный и средний пальцы соответственно по осям x, y и z, тогда правая рука укажет соотношение осей в правой системе, а левая в левой. Мы будем в дальнейшем пользоваться как правой, так и левой системами.

5. Если два вектора равны между собой, то их координаты равны между собой и обратно, т. е. если

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{16}$$

то

$$a_x = b_x, \quad a_y = b_y, \quad a_z = b_z \tag{17}$$

Это — непосредственное следствие единственности разложения вектора по трем некомпланарным направлениям.

Координаты геометрической суммы нескольких векторов равны алгебраическим суммам координат слагаемых векторов, т. е. если

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n \tag{18}$$

то

$$\begin{aligned} b_x &= a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx} \\ b_y &= a_{1y} + a_{2y} + \ldots + a_{ny} \\ b_z &= a_{1z} + a_{2z} + \ldots + a_{nz} \end{aligned} \tag{19}$$

Для доказательства надо применить теорему о проекции геометрической суммы к осям x, y, z.

В частности, если

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} \tag{20}$$

то

$$c_x = a_x - b_x, \quad c_y = a_y - b_y, \quad c_z = a_z - b_z \tag{21}$$

Наконец, умножение на скаляр столь же просто выражается в координатах вектора

$$m\mathbf{a} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}) = ma_x\mathbf{i} + ma_y\mathbf{j} + ma_z\mathbf{k} \tag{22}$$

6. Мы рассматривали прямоугольные проекции и прямоугольные компоненты вектора $\mathbf{a}$.

Но с равным успехом мы могли бы ввести три единичных некомпланарных вектора $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, образующих косоугольную систему координат. Разложим вектор $\mathbf{a}$ по этим ортам:

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \tag{23}$$

тогда мы можем назвать a_x, a_y, a_z — **косоугольными компонентами** вектора $\mathbf{a}$. Но в общем случае косоугольные составляющие не будут определяться формулами (12), так как для определения, например, a_x нужно через концы вектора $\mathbf{a}$ провести плоскости, параллельные

двум другим осям y и z и найти отсекаемый ими на оси x отрезок; последний будет зависеть не только от угла между $\mathbf{a}$ и плоскостью yz, но еще и от угла между осью x и плоскостью yz. Отметим, что теорема о проекции геометрической суммы векторов и ее следствие — соотношения (19) справедливы и для общего случая косоугольных координат.

7. Выведенные в этом параграфе формулы и теоремы имеют большие приложения, например, в статике.

Равнодействующая нескольких сил $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, . . . , $\mathbf{F}_n$, действующих на материальную точку, выражается геометрической суммой их:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

Проекция равнодействующей на какое-либо направление равна сумме проекций на то же направление всех действующих сил:

$$R_u = F_{1u} + F_{2u} + \ldots + F_{nu}$$

Если проекции силы $\mathbf{F}_i$ на оси x, y, z обозначить через X_i, Y_i, Z_i, то проекции равнодействующей будут

$$R_x = X_1 + \ldots + X_n, \quad R_y = Y_1 + \ldots + Y_n, \quad R_z = Z_1 + \ldots + Z_n$$

Величина и направление равнодействующей определяются по формулам (13) и (14) (только для прямоугольной системы координат):

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$$

$$\cos(\mathbf{R}, x) = \frac{R_x}{R}, \quad \cos(\mathbf{R}, y) = \frac{R_y}{R}, \quad \cos(\mathbf{R}, z) = \frac{R_z}{R}$$

Если точка, находящаяся под действием системы сил, находится в покое, то $\mathbf{R} = 0$, и обратно, если $\mathbf{R} = 0$ и точка в начальный момент покоилась, она и дальше будет находиться в состоянии покоя.

Векторное равенство $\mathbf{R} = 0$ равносильно трем алгебраическим:

$$\begin{aligned} R_x &= X_1 + \ldots + X_n = 0 \\ R_y &= Y_1 + \ldots + Y_n = 0 \\ R_z &= Z_1 + \ldots + Z_n = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

В задачах статики на равновесие системы сил, пересекающихся в одной точке, не может быть более трех неизвестных, так как условий равновесия, как мы только что видели, три. Эти неизвестные всегда можно определить, спроектировав уравнение $\mathbf{R} = 0$ на оси координат x, y, z, т. е. написав уравнения (24). Но часто удается проектировать уравнение $\mathbf{R} = 0$ на такое направление, чтобы все неизвестные, кроме одной, пропали, тогда сразу получается эта неизвестная.

Примеры на этот параграф мы дадим в конце следующего параграфа.

§ 4. Преобразование координат. Преобразование составляющих вектора при переходе от одной системы координат к другой

1. Зная компоненты вектора **a** по осям x, y, z, мы можем вычислить его компонент по любому направлению **u**. Возьмем для этого проекции на направление **u** обеих частей равенства (11) предыдущего параграфа и воспользуемся теоремой о проекции геометрической суммы; в результате получим

$$a_u = a_x \cos(\mathbf{u}, x) + a_y \cos(\mathbf{u}, y) + a_z \cos(\mathbf{u}, z) \qquad (1)$$

Таким образом, компонент вектора **a** по любому направлению может быть выражен через компоненты по осям прямоугольной системы, притом, как видно из формулы (1), линейным образом. Это свойство характерно для векторов и должно было бы быть положено в основу определения вектора, если бы мы исходили из аналитического определения вектора при помощи его координат.

В формуле (1) поставим вместо a_u, a_x, a_y, a_z их выражения по формулам (1) и (12) § 3 и сократим на a; обозначая через φ угол между направлениями векторов **a** и **u**, найдем

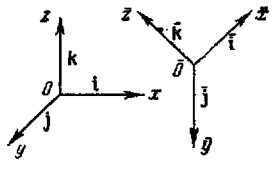
$$\cos\varphi = \cos(\mathbf{a}, \mathbf{u}) = \cos(\mathbf{a}, x)\cos(\mathbf{u}, x) + \cos(\mathbf{a}, y)\cos(\mathbf{u}, y) + \cos(\mathbf{a}, z)\cos(\mathbf{u}, z) \qquad (2)$$

Получили формулу аналитической геометрии, дающую косинус угла φ между двумя направлениями **a** и **u**.

2. Допустим, что мы знаем компоненты вектора в некоторой координатной системе $Oxyz$ (фиг. 20); возьмем другую координатную систему $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, определенную тремя взаимно перпендикулярными ортами $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$; компоненты вектора по новым осям будут иметь уже другие значения $a_{\bar{x}}$, $a_{\bar{y}}$, $a_{\bar{z}}$. Спрашивается, как выражаются новые компоненты вектора **a** через старые?

Ответ дается формулой (1).

Чтобы упростить писание формул, мы введем таблицу косинусов десяти углов, составленных новыми осями со старыми:



Фиг. 20

	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$
x	α_1	α_2	α_3
y	β_1	β_2	β_3
z	γ_1	γ_2	γ_3

(3)

Так, например

$$\alpha_1 = \cos(\bar{x}, x), \quad \alpha_2 = \cos(x, \bar{y}), \quad \beta_1 = \cos(\bar{x}, y) \text{ и т. д.}$$

Эти косинусы представляют координаты новых ортов по старым осям; в самом деле,

$$\begin{aligned} \bar{i}_x &= 1\cdot\cos(\bar{x}, x) = \alpha_1, & \bar{j}_x &= \alpha_2, & \bar{k}_x &= \alpha_3 \\ \bar{i}_y &= 1\cdot\cos(\bar{x}, y) = \beta_1, & \bar{j}_y &= \beta_2, & \bar{k}_y &= \beta_3 \\ \bar{i}_z &= 1\cdot\cos(\bar{x}, z) = \gamma_1, & \bar{j}_z &= \gamma_2, & \bar{k}_z &= \gamma_3 \end{aligned} \tag{4}$$

Отметим, что между девятью косинусами таблицы (3) существует шесть зависимостей, так что только три косинуса независимы между собой (последнее обстоятельство отвечает тому, что ориентация одного координатного триэдра относительно другого может быть задана тремя параметрами, например тремя углами Эйлера). В самом деле, по формуле (2) можем написать следующие 6 соотношений:

$$\begin{aligned} 1 = \cos(\bar{x}, \bar{x}) &= \cos^2(\bar{x}, x) + \cos^2(\bar{x}, y) + \cos^2(\bar{x}, z) = \\ &= \alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2 = 1 \\ &\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2 = 1 \\ &\alpha_3^2 + \beta_3^2 + \gamma_3^2 = 1 \end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned} 0 = \cos(\bar{y}, \bar{z}) = \cos(\bar{y}, x)\cos(\bar{z}, x) + \cos(\bar{y}, y)\cos(\bar{z}, y) + \cos(\bar{y}, z)\cos(\bar{z}, z) = \\ = \alpha_2\alpha_3 + \beta_2\beta_3 + \gamma_2\gamma_3 = 0 \\ \alpha_3\alpha_1 + \beta_3\beta_1 + \gamma_3\gamma_1 = 0 \\ \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0 \end{aligned}$$

Если мы будем рассматривать систему $\bar{O}\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ как старую, а систему $Oxyz$ как новую, то получим шесть совершенно аналогичных соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \quad & \beta_1\gamma_1 + \beta_2\gamma_2 + \beta_3\gamma_3 = 0 \\ \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \quad & \gamma_1\alpha_1 + \gamma_2\alpha_2 + \gamma_3\alpha_3 = 0 \\ \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \quad & \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_2 = 0 \end{aligned} \tag{6}$$

Напишем теперь новые компоненты вектора a. По формуле (1)

$$a_{\bar{x}} = a_x\cos(\bar{x}, x) + a_y\cos(\bar{x}, y) + a_z\cos(\bar{x}, z) \tag{7}$$

$$\begin{aligned} a_{\bar{x}} &= a_x\alpha_1 + a_y\beta_1 + a_z\gamma_1 \\ a_{\bar{y}} &= a_x\alpha_2 + a_y\beta_2 + a_z\gamma_2 \\ a_{\bar{z}} &= a_x\alpha_3 + a_y\beta_3 + a_z\gamma_3 \end{aligned} \tag{8}$$

Обратно, a_x, a_y, a_z выразятся через $a_{\bar{x}}$, $a_{\bar{y}}$, $a_{\bar{z}}$ по следующим формулам:

$$\begin{aligned} a_x &= a_{\bar{x}}\alpha_1 + a_{\bar{y}}\alpha_2 + a_{\bar{z}}\alpha_3 \\ a_y &= a_{\bar{x}}\beta_1 + a_{\bar{y}}\beta_2 + a_{\bar{z}}\beta_3 \\ a_z &= a_{\bar{x}}\gamma_1 + a_{\bar{y}}\gamma_2 + a_{\bar{z}}\gamma_3 \end{aligned} \tag{9}$$

Как частный случай, отсюда можно получить преобразование координат при переходе от одной системы координат к другой, имеющей то же начало, системе координат.

Возьмем точку M и соединим общее начало обоих координатных триэдров O с точкой M.

Полученный радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M будет иметь в старой координатной системе координаты x, y, z, а в новой координатной системе координаты $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$. По формулам (8) и (9) будем иметь:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z, & x &= \alpha_1 \bar{x} + \alpha_2 \bar{y} + \alpha_3 \bar{z} \\ \bar{y} &= \alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 z, & y &= \beta_1 \bar{x} + \beta_2 \bar{y} + \beta_3 \bar{z} \\ \bar{z} &= \alpha_3 x + \beta_3 y + \gamma_3 z, & z &= \gamma_1 \bar{x} + \gamma_2 \bar{y} + \gamma_3 \bar{z} \end{aligned} \tag{10}$$

3. Когда мы задаем вектор его составляющими в какой-нибудь системе, то мы тем самым подразумеваем, что его составляющие в любой другой системе будут определяться по формулам (8) преобразования компонентов вектора. Но можно задавать вектор еще другим способом, а именно указать некоторый способ вычисления его составляющих в любой координатной системе. В последнем случае надо еще проверить, выполняются ли формулы (8), когда мы от одной системы координат переходим к любой другой.

В качестве примера положим, что компоненты x, y, z радиуса-вектора $\mathbf{r}$ суть некоторые функции параметра t; определим составляющие нового вектора $\mathbf{v}$ формулами:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \qquad v_y = \frac{dy}{dt}, \qquad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{11}$$

для всякой координатной системы. Проверим, что это действительно вектор

$$v_{\bar{x}} = \frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{d(\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 z)}{dt} = \alpha_1 \frac{dx}{dt} + \beta_1 \frac{dy}{dt} + \gamma_1 \frac{dz}{dt} = \\ = \alpha_1 v_x + \beta_1 v_y + \gamma_1 v_z \tag{12}$$

(α_1, β_1, γ_1 дифференцировать не надо, так как это суть постоянные косинусы углов между неподвижной осью $\bar{x}$ и неподвижными же осями x, y, z), аналогичные формулы получатся для других составляющих. Действительно, $\mathbf{v}$ есть вектор.

Отметим еще несколько следствий из выведенных формул.

В § 3 была выведена формула (13), дающая длину вектора через его компоненты

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 \tag{13}$$

Здесь выражение слева не зависит от того, в какой координатной системе вычисляются компоненты вектора a_x, a_y, a_z, поэтому выражение $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ сохраняет свое значение при всех переходах от одной прямоугольной координатной системы к другой; в этом случае говорят об

инвариантности $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ для всех таких переходов. Составляя выражение $\bar{a}_{\bar{x}}^2 + \bar{a}_{\bar{y}}^2 + \bar{a}_{\bar{z}}^2$ по формулам (8) и приравнивая его $a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$, мы сразу получили бы все соотношения (6)

Задача 17. Найти координаты точки пересечения медиан треугольника, вершины которого заданы координатами (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3).

По формуле (29) § 2 имеем для радиуса-вектора рассматриваемой точки

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3}{3} \tag{14}$$

следовательно

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \tag{15}$$

Задача 18. Найти координаты центра тяжести системы трех материальных точек M_1, M_2, M_3, в которых сосредоточены массы m_1, m_2, m_3

По формуле (34) § 2:

$$\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + m_3\mathbf{r}_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{16}$$

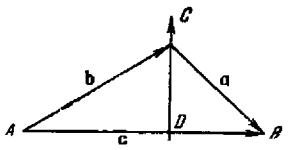
отсюда, проектируя на оси x, y, z, находим

$$x = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad y = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3}{m_1 + m_2 + m_3}, \quad z = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3}{m_1 + m_2 + m_3} \tag{17}$$

Задача 19. Рассмотрим $\triangle ABC$ (фиг. 21) и выведем некоторые формулы прямолинейной тригонометрии.

Спроектируем ломаную линию ACB и ее замыкающую на AB, по теореме о сумме проекций мы получим:

$$a\cos B + b\cos A = c \tag{18}$$



Фиг. 21

циклической перестановкой получим отсюда еще две формулы:

$$b\cos C + c\cos B = a, \quad c\cos A + a\cos C = b$$

Спроектируем теперь ту же ломаную линию и ее замыкающую на перпендикуляр DC к AB.

Проекция замыкающей на перпендикулярное направление будет 0, проекция AC есть $b\sin A$, проекция CB есть $-a\sin B$, следовательно

$$b\sin A = a\sin B$$

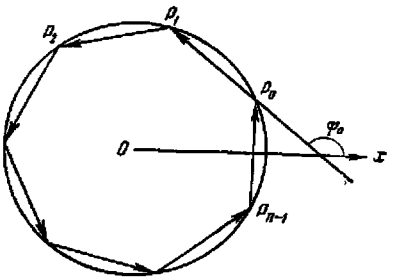
точно так же найдем две другие формулы

$$c\sin B = b\sin C, \quad a\sin C = \sin A$$

в результате получаем теорему синусов:

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c} \tag{19}$$

Задача 20. Впишем в круг единичного радиуса (фиг. 22) правильный n-угольник $P_0P_1 \ldots P_{n-1}$ и пусть сторона $\overline{P_0P_1}$ составляет с осью Ox угол φ_0, каждая следующая сторона будет составлять с осью Ox угол на $2\pi/n$ больше, чем предыдущая, так что



Фиг. 22

$\overline{P_1P_2}$ составит угол $\varphi_0 + \frac{2\pi}{n}$

$\overline{P_2P_3}$ составит угол $\varphi_0 + \frac{4\pi}{n}$

наконец,

$\overline{P_{n-1}P_0}$ составит угол $\varphi_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}$

Спроектируем теперь замкнутую ломаную линию $P_0P_1 \ldots P_{n-1}P_0$ на ось x; так как все стороны ее равны между собой, то получим тригонометрическое тождество:

$$\cos\varphi_0 + \cos\left(\varphi_0 + \frac{2\pi}{n}\right) + \cos\left(\varphi_0 + \frac{4\pi}{n}\right) + \ldots + \cos\left(\varphi_0 + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) = 0$$

Например, будет:

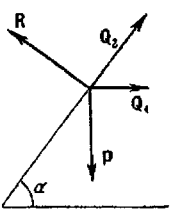
при $\varphi_0 = 0$

$$1 + \cos\frac{2\pi}{n} + \cos\frac{4\pi}{n} + \ldots + \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

при $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$

$$\sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{4\pi}{n} + \ldots + \sin\frac{2(n-1)\pi}{n} = 0$$

Задача 21. Тяжелая точка веса P находится в равновесии на гладкой наклонной плоскости под действием двух сил Q_1 и Q_2 (фиг. 23); величина каждой из этих сил равна $\frac{1}{2}P$, сила Q_1 горизонтальна, сила Q_2 направлена вдоль наклонной плоскости вверх. Требуется определить угол α наклона плоскости к горизонту.



Фиг. 23

Если мы введем в рассмотрение еще реакцию плоскости $\mathbf{R}$, направление которой перпендикулярно к наклонной плоскости, четыре силы $\mathbf{P}$, $\mathbf{Q_1}$, $\mathbf{Q_2}$ и $\mathbf{R}$ будут находиться в равновесии, так что

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q_1} + \mathbf{Q_2} + \mathbf{R} = 0 \qquad (20)$$

Величина реакции $\mathbf{R}$ нам неизвестна, она нас не интересует, поэтому уравнение (20) надо проектировать на такое направление, чтобы проекция $\mathbf{R}$ пропала, т. е. нужно проектировать на направление силы $\mathbf{Q_2}$. Так как угол между $\mathbf{Q_1}$ и $\mathbf{Q_2}$ есть α, между $\mathbf{P}$ и $\mathbf{Q_2}$ есть $90° + \alpha$, то проек-

цией Q_1 будет служить $\frac{1}{2}P\cos\alpha$, проекцией P будет служить $P\cos(90^\circ+\alpha)=-P\sin\alpha$, наконец, проекцией Q_2 будет $\frac{1}{2}P$:

$$\tfrac{1}{2}P\cos\alpha+\tfrac{1}{2}P-P\sin\alpha=0$$

Отсюда

$$\tfrac{1}{2}\cos\alpha+\tfrac{1}{2}-\sin\alpha=0, \quad \text{или} \quad \cos\alpha+1-2\sin\alpha=0$$

Но

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}, \quad \sin\alpha=2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

Следовательно

$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}-4\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}\right)=0$$

Отсюда, сокращая на $\cos\frac{\alpha}{2}$ $\left(\text{так как } \alpha<90^\circ, \text{ то } \cos\frac{\alpha}{2}\neq 0\right)$, имеем

$$\cos\frac{\alpha}{2}-2\sin\frac{\alpha}{2}=0, \qquad \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}, \qquad \alpha=53^\circ7'48''$$

Задача 22. Точка M (r) притягивается неподвижными точками M_1 ($\mathbf{r}_1$), . . . , M_n ($\mathbf{r}_n$) с массами $m_1, \ldots, m_n$, причем силы притяжения пропорциональны расстояниям до этих точек и массам их. Найти результирующую силу и положение равновесия точки M.

Сила притяжения точки M точкою M_1 равна, очевидно, $km_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})$, где k — коэффициент пропорциональности, ибо этот вектор направлен от M к M_1 и пропорционален расстоянию MM_1. Точно так же найдутся и другие силы. Поэтому результирующая сила будет

$$\mathbf{R}=km_1(\mathbf{r}_1-\mathbf{r})+km_2(\mathbf{r}_2-\mathbf{r})+\ldots+km_n(\mathbf{r}_n-\mathbf{r})$$

Преобразуем это выражение

$$\mathbf{R}=k(m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\ldots+m_n\mathbf{r}_n)-k(m_1+\ldots+m_n)\mathbf{r}$$

Введем центр тяжести масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$, обозначив его радиус-вектор через ρ:

$$\rho=\frac{m_1\mathbf{r}_1+m_2\mathbf{r}_2+\ldots+m_n\mathbf{r}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

Тогда

$$\mathbf{R}=k(m_1+\ldots+m_n)(\rho-\mathbf{r})$$

т. е. результирующая сила есть сила притяжения точки M к центру тяжести масс $m_1, \ldots, m_n$, в котором сосредоточена масса $m_1+\ldots+m_n$.

Отсюда сразу вытекает, что точка M будет в равновесии, если

$$\rho=\mathbf{r}$$

т. е. если точка M находится в центре тяжести масс $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Если мы введем прямоугольные координаты x, y, z, то для положения равновесия точки M получим:

$$x = \frac{m_1x_1 + \ldots + m_nx_n}{m_1 + \ldots + m_n}, \quad y = \frac{m_1y_1 + \ldots + m_ny_n}{m_1 + \ldots + m_n}, \quad z = \frac{m_1z_1 + \ldots + m_nz_n}{m_1 + \ldots + m_n}$$

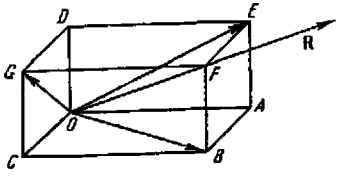
В общем случае для проекций результирующей силы получим:

$$X = k(m_1x_1 + \ldots + m_nx_n) - k(m_1 + \ldots + m_n)x$$

$$Y = k(m_1y_1 + \ldots + m_ny_n) - k(m_1 + \ldots + m_n)y$$

$$Z = k(m_1z_1 + \ldots + m_nz_n) - k(m_1 + \ldots + m_n)z$$

Задача 23. К вершине O прямоугольного параллелепипеда $OABCDEFG$ приложены три силы, изображаемые векторами $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OE}$, $\overrightarrow{OG}$, найти величину и направление равнодействующей $\mathbf{R}$ (фиг. 24).



Фиг. 24

Очевидно,

$$\mathbf{R} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OG}$$

Обозначим $\overrightarrow{OA} = \mathbf{a}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{b}$, $\overrightarrow{OD} = \mathbf{c}$; тогда

$$\overrightarrow{OB} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad \overrightarrow{OE} = \mathbf{a} + \mathbf{c}, \quad \overrightarrow{OG} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$$

Откуда

$$\mathbf{R} = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{a} + \mathbf{c} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 2(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 2\overrightarrow{OF}$$

т. е. искомая равнодействующая изображается удвоенной диагональю параллелепипеда $\overrightarrow{OF}$.

Задача 24. На точку действуют три силы, проекции которых на прямоугольные оси равны: $X_1 = 1$, $Y_1 = 2$, $Z_1 = 3$; $X_2 = -2$, $Y_2 = 3$, $Z_2 = -4$; $X_3 = 3$, $Y_3 = -4$, $Z_3 = 5$; найти величину и направление равнодействующей.

Ответ. $R = \sqrt{21}$, $\cos(\mathbf{R}, x) = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\cos(\mathbf{R}, y) = \frac{2}{\sqrt{21}}$, $\cos(\mathbf{R}, z) = \frac{4}{\sqrt{21}}$

Задача 25. Пусть в $\triangle ABC$ угол A прямой и пусть AD есть высота, опущенная на гипотенузу BC. Доказать, что равнодействующей двух сил, приложенных к точке A, из которых

одна направлена по AB и равна $\frac{1}{AB}$,

другая направлена по AC и равна $\frac{1}{AC}$,

является сила $\frac{1}{AD}$, направленная по AD.

Задача 26. Пусть $ABCDEF$ есть правильный шестиугольник. Найти равнодействующую сил $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, приложенных к точке A.

Ответ. $3\overrightarrow{AD}$.

§ 5. Скалярное или внутреннее произведение двух векторов. Его свойства

1. В § 2 дано было определение геометрической суммы двух векторов и было показано, какие соображения геометрического и физического характера привели к установлению этого понятия. Оказывается, что если мы хотим соответствующим образом ввести понятие произведения двух векторов, то мы должны определить два различных действия умножения: умножение скалярное и умножение векторное.

Остановимся сначала на скалярном произведении двух векторов.

Вспомним простейшее определение работы A, производимой постоянной силой $\mathbf{F}$ на прямолинейном перемещении $\mathbf{s}$ при условии, что сила составляет с перемещением постоянный угол α

$$A = Fs\cos\alpha \tag{1}$$

Выражения, построенные аналогично выражению (1), встречаются очень часто в математике и физике. Поэтому представляется целесообразным ввести операцию составления из двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ выражения, аналогичного (1). Введем поэтому следующее определение:

Скалярным или внутренним произведением двух векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется произведение длин обоих векторов, умноженное на косинус угла между обоими векторами.*

Будем обозначать скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ точкой, т. е. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$; итак

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{2}$$

Среди других обозначений скалярного произведения отметим, как наиболее употребляемые, еще такие [1]:

$$\mathbf{ab} \quad \text{и} \quad (\mathbf{a}, \mathbf{b})$$

В результате скалярного умножения получается скаляр, что и объясняет название скалярного произведения. Так, в вышеуказанном примере у нас получилось выражение для работы — скалярной величины, в виде скалярного произведения вектора силы $\mathbf{F}$ и вектора перемещения $\mathbf{s}$.

Скалярное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ положительно, если эти векторы составляют между собой острый угол, и отрицательно, если угол между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — тупой. В частности $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, если $\mathbf{b}$ перпендикулярно $\mathbf{a}$ (так как тогда $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos\frac{1}{2}\pi = 0$). Если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ имеют одинаковое

[1] Последнее из указываемых обозначений для скалярного произведения было принято в предыдущих изданиях книги Н. Е. Кочина.

Однако в настоящее время обозначения «точка» для скалярного произведения векторов, т. е. $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, и «косой крест» для векторного произведения векторов, т. е. $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ (определение векторного произведения; см. следующий § 6), получили более широкое распространение в нашей научной литературе, чем ранее принятые символы $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ для скалярного произведения и $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ для векторного произведения.

направление, то $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos 0 = 1$, поэтому $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = ab$, произведению длин обоих векторов (отсюда ясно наименование всей операции умножением). В частности $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$; если $\mathbf{a}$ как раз противоположно $\mathbf{b}$, то $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = -1$ и $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = -ab$.

2. По самому определению скалярное произведение коммутативно, т. е. не меняется от перестановки множителей:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} \tag{3}$$

Группируя в формуле (2) разными способами множители, составляющие $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, мы получим:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot b = a_b b \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= b \cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \cdot a = b_a a \end{aligned} \tag{4}$$

т. е. *скалярное произведение двух векторов равно произведению длины одного из векторов на проекцию другого вектора на направление первого.*

Отсюда сразу выводится дистрибутивность скалярного произведения:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} \tag{5}$$

т. е. мы имеем право перемножать почленно, как в обыкновенной алгебре.

В самом деле, по теореме о проекции геометрической суммы имеем

$$(\mathbf{b} + \mathbf{c})_a = b_a + c_a \tag{6}$$

умножая обе части этого уравнения на a, получим формулу (5), что и требовалось доказать.

Таким образом, мы имеем право раскрывать скобки, как в обыкновенном умножении, например:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d} \tag{7}$$

Очевидно далее, что скалярный множитель можно выносить из-под знака скалярного произведения

$$m\mathbf{a} \cdot n\mathbf{b} = mn\,(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \tag{8}$$

т. е. скалярное произведение ассоциативно по отношению к скалярному множителю.

Составляя скалярное произведение основных ортов, получим

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0 \tag{9}$$

При помощи этих формул легко найти выражение $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ через координаты:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \cdot (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) = \\ &= a_x b_x (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) + a_x b_y (\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) + a_x b_z (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) + a_y b_x (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) + a_y b_y (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) + a_y b_z (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) + \\ &\quad + a_z b_x (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) + a_z b_y (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) + a_z b_z (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \end{aligned} \tag{10}$$

Так как выражение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ не зависит от координатной системы, то выражение $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ *инвариантно* по отношению ко всем прямоугольным прямолинейным координатным системам, т. е.

$$a_{\bar{x}} b_{\bar{x}} + a_{\bar{y}} b_{\bar{y}} + a_{\bar{z}} b_{\bar{z}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \tag{11}$$

Эту инвариантность можно проверить непосредственно по формулам (8) и (6) § 4.

Из формулы (10) легко вывести, далее, условие перпендикулярности двух векторов, заданных своими составляющими, а именно:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0 \qquad (\mathbf{a} \perp \mathbf{b}) \tag{12}$$

При помощи символа скалярного произведения можно легко представить ряд важных величин. Составим, например, скалярное произведение вектора

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{i} = a_x \tag{13}$$

получилась проекция вектора $\mathbf{a}$ на направление орта $\mathbf{i}$.

Если вектор $\mathbf{a}$ сам есть единичный вектор, то скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}$ дает косинус угла между направлением вектора $\mathbf{a}$ и осью x. Так, например, выбирая за вектор $\mathbf{a}$ орт $\bar{\mathbf{j}}$ (фиг. 20), мы найдем, что $\mathbf{i}\cdot\bar{\mathbf{j}} = \cos(x, \bar{y}) = \alpha_2$. Таким образом, все девять косинусов таблицы § 4 могут быть представлены скалярными произведениями соответствующих ортов.

Далее, при помощи скалярных произведений очень просто вывести формулы перехода от одной координатной системы к другой, например:

$$a_{\bar{x}} = \mathbf{a}\cdot\bar{\mathbf{i}} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot\bar{\mathbf{i}} =$$

$$= a_x(\mathbf{i}\cdot\bar{\mathbf{i}}) + a_y(\mathbf{j}\cdot\bar{\mathbf{i}}) + a_z(\mathbf{k}\cdot\bar{\mathbf{i}}) = a_x\alpha_1 + a_y\beta_1 + a_z\gamma_1 \tag{14}$$

Аналогично выводятся все остальные формулы преобразования составляющих вектора § 4.

Составим таблицу важнейших свойств скалярного произведения:

1) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ab\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ (определение)

2) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

3) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = 0$, если $\mathbf{a} = 0$ или $\mathbf{b} = 0$, или $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$

4) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \pm ab$, если $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны, в частности $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2$

5) $$\left(\sum_{i=1}^{m} \mathbf{a}_i\right)\cdot\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_i\cdot\mathbf{b}_j$$

6) $m\mathbf{a}\cdot n\mathbf{b} = mn(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$

7) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$

Разберем несколько примеров.

Задача 27. Дан прямолинейный треугольник ABC (фиг. 21). Вывести основную формулу прямолинейной тригонометрии

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C \tag{15}$$

Для доказательства достаточно помножить обе части тождества

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

скалярно сами на себя

$$c^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = a^2 + 2ab\cos(\mathbf{a},\mathbf{b}) + b^2$$

Но угол $(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = 180° - C$; следовательно, $\cos(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \cos(180° - C) = -\cos C$.
Отсюда

$$c^2 = a^2 - 2ab\cos C + b^2$$

что и требовалось доказать.

Задача 28. Выведем несколько соотношений между сторонами и диагоналями параллелограмма.

Пусть стороны параллелограмма $OABC$ (фиг. 6) представляют векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, так что $\overline{OA} = \overline{BC} = \mathbf{a}$, $\overline{AC} = \overline{OB} = \mathbf{b}$, тогда диагонали его представят векторы $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \overline{OC}$ и $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \overline{BA}$. Составим тождества

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = a^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = a^2 - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + b^2 \tag{16}$$

Складывая их, получим:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 + (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 2(a^2 + b^2) \tag{17}$$

т. е. сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

Вычитая нижнее тождество (16) из верхнего, найдем:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{18}$$

т. е. скалярное произведение на сторон параллелограмма равно четверти разности квадратов диагоналей. Отметим, между прочим, что из этого результата можно сразу вывести выражение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$ через составляющие векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 = (a_x + b_x)^2 + (a_y + b_y)^2 + (a_z + b_z)^2 =$$
$$= a_x^2 + 2a_xb_x + b_x^2 + a_y^2 + 2a_yb_y + b_y^2 + a_z^2 + 2a_zb_z + b_z^2$$

$$(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = (a_x - b_x)^2 + (a_y - b_y)^2 + (a_z - b_z)^2 =$$
$$= a_x^2 - 2a_xb_x + b_x^2 + a_y^2 - 2a_yb_y + b_y^2 + a_z^2 - 2a_zb_z + b_z^2$$
$$4(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2 - (\mathbf{a} - \mathbf{b})^2 = 4(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)$$

Отсюда

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$$

Составим, наконец,

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{b} = a^2 - b^2 \tag{19}$$

Следовательно, скалярное произведение диагоналей параллелограмма равно разности квадратов сторон, поэтому диагонали параллелограмма тогда и только тогда взаимно перпендикулярны, когда $a = b$, т. е. когда параллелограмм есть ромб.

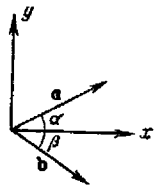
З а д а ч а 29. Доказать, что работа равнодействующей $\mathbf{R}$ нескольких сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$, приложенных к одной и той же точке, на перемещении $\mathbf{s}$ этой точки, равна алгебраической сумме работ составляющих сил.

В самом деле, умножая скалярно на $\mathbf{s}$ обе части равенства

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

получим

$$\mathbf{R}\cdot\mathbf{s} = \mathbf{F}_1\cdot\mathbf{s} + \mathbf{F}_2\cdot\mathbf{s} + \ldots + \mathbf{F}_n\cdot\mathbf{s} \tag{20}$$



Фиг. 25

т. е. работа равнодействующей равна сумме работ составляющих.

З а д а ч а 30. Вывести формулу для косинуса суммы двух углов.

Возьмем в плоскости xy (фиг. 25) два единичных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, составляющих с осью x соответственно углы α и $-\beta$ (отсчитываем углы от оси x к оси y) и составим $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$. С одной стороны это есть косинус угла между векторами, т. е. $\cos(\alpha + \beta)$, с другой стороны это есть $a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z$; но

$$\begin{aligned} a_x &= \cos\alpha, \quad a_y = \sin\alpha, \quad a_z = 0 \\ b_x &= \cos\beta, \quad b_y = -\sin\beta, \quad b_z = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Следовательно

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{22}$$

З а д а ч а 31. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ заданы косоугольными составляющими a_x, a_y, a_z и b_x, b_y, b_z; найти аналитическое выражение для $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

Ответ вытекает из формулы (10), в которой надо подставить вместо $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}$ его значение $\cos(x, y)$, далее $\mathbf{j}\cdot\mathbf{k} = \cos(y, z)$, $\mathbf{k}\cdot\mathbf{i} = \cos(z, x)$

$$\begin{aligned} \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z + (a_xb_y + a_yb_x)\cos(x, y) + \\ + (a_xb_z + a_zb_x)\cos(x, z) + (a_yb_z + a_zb_y)\cos(y, z) \end{aligned} \tag{23}$$

В частности длина вектора $\mathbf{a}$, заданного своими косоугольными координатами a_x, a_y, a_z, выражается следующей формулой:

$$a^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 + 2a_xa_y\cos(x, y) + 2a_ya_z\cos(y, z) + 2a_za_x\cos(z, x) \tag{24}$$

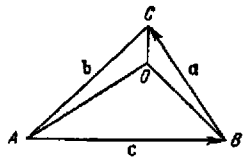
З а д а ч а 32. Доказать, что вектор $\mathbf{x} = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$ перпендикулярен вектору $\mathbf{c}$.

З а д а ч а 33. Доказать, что три высоты треугольника пересекаются в одной точке.

Обозначим точку пересечения высот, опущенных из вершин A и B, через O (фиг. 26). Введем векторы $\overrightarrow{OA} = \mathbf{x}$, $\overrightarrow{OB} = \mathbf{y}$, $\overrightarrow{OC} = \mathbf{z}$, тогда, как видно из чертежа:

$$\mathbf{a} = \mathbf{z} - \mathbf{y}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{x} - \mathbf{z}, \quad \mathbf{c} = \mathbf{y} - \mathbf{x}$$

Условие перпендикулярности OA к BC и OB к AC дает:



Фиг. 26

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{x}\cdot(\mathbf{z} - \mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot\mathbf{z} - \mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$$
$$\mathbf{y}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{y}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{z}) = \mathbf{y}\cdot\mathbf{x} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = 0$$

Складывая эти два равенства, найдем

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{z} - \mathbf{y}\cdot\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})\cdot\mathbf{z} = -\mathbf{c}\cdot\mathbf{z} = 0$$

а следовательно OC перпендикулярен к AB, так что O лежит и на высоте, опущенной из точки C.

Другое доказательство основывается на решении задачи 12. Легко видеть, что в рассматриваемом случае

$$AM = b\cos A, \quad MB = a\cos B, \quad BK = c\cos B$$
$$KC = b\cos C, \quad CL = a\cos C, \quad LA = c\cos A$$

и, следовательно, условие пересечения трех высот

$$BK\cdot CL\cdot AM = KC\cdot LA\cdot MB$$

выполнено.

З а д а ч а 34. Если радиусы-векторы вершин треугольника ABC суть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, то найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки пересечения высот этого треугольника.

Согласно решению задачи 12 мы имеем

$$\mathbf{r} = \alpha_1\mathbf{r}_1 + \alpha_2\mathbf{r}_2 + \alpha_3\mathbf{r}_3$$

где α_1, α_2, α_3 должны определять из равенств

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{BK}{KC}, \quad \frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \frac{CL}{LB}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{AM}{MB}; \quad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Но в нашем случае имеем, например

$$BK = c\cos B, \quad KC = b\cos C$$

Поэтому

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{c\cos B}{b\cos C}$$

Но по теореме синусов

$$\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$$

Следовательно

$$\frac{\alpha_3}{\alpha_2} = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} B}$$

И аналогично

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} C}, \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A}; \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

Отсюда легко получить

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} A}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}, \quad \alpha_2 = \frac{\operatorname{tg} B}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}, \quad \alpha_3 = \frac{\operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

Следовательно, для точки пересечения высот треугольника получаем выражение

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}_1 \operatorname{tg} A + \mathbf{r}_2 \operatorname{tg} B + \mathbf{r}_3 \operatorname{tg} C}{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B + \operatorname{tg} C}$$

Задача 35. Найти уравнение плоскости, перпендикулярной к заданному вектору **a** и проходящей через данную точку M_1 ($\mathbf{r}_1$).

Возьмем любую точку M ($\mathbf{r}$) плоскости, тогда, при перпендикулярности плоскости и вектора **a**, вектор $\overrightarrow{M_1M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ будет перпендикулярен к вектору **a** и обратно, если вектор $\overrightarrow{M_1M}$ перпендикуляреи к **a**, то точка M лежит в плоскости; выразим это условие перпендикулярности векторно:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{a} = 0$$

т. е.

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{a}$$

представляет уравнение искомой плоскости. Вводя координаты x_1, y_1, z_1 точки M_1 и составляющие a_x, a_y, a_z вектора **a**, найдем аналитическое уравнение плоскости

$$a_x(x - x_1) + a_y(y - y_1) + a_z(z - z_1) = 0$$

или

$$a_x x + a_y y + a_z z = a_x x_1 + a_y y_1 + a_z z_1$$

Задача 36. Найти расстояние от точки M_1 ($\mathbf{r}_1$) до плоскости

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \alpha \tag{25}$$

Плоскость (25) перпендикулярна к **a**; в самом деле, пусть две точки M' ($\mathbf{r}'$) и M'' ($\mathbf{r}''$) лежат в плоскости, тогда

$$\mathbf{r}'\cdot\mathbf{a} = \alpha, \quad \mathbf{r}''\cdot\mathbf{a} = \alpha$$

следовательно $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\cdot\mathbf{a} = 0$, т. е. $\overrightarrow{M'M''}$ перпендикулярно к **a**, так что всякая прямая плоскости перпендикулярна к **a**, что может быть только при условии перпендикулярности плоскости и вектора **a**.

Легко написать уравнение перпендикуляра, опущенного из точки M_1 ($\mathbf{r}_1$) на плоскость (25):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{a}\lambda \tag{26}$$

где λ — переменный параметр, пробегающий все значения. Найдем точку пересечения этого перпендикуляра с плоскостью, для чего надо совместно решить уравнения (25) и (26).

Подставляя выражение для $\mathbf{r}$ из уравнения (26) в (25), найдем:

$$(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}\lambda)\cdot\mathbf{a} = \alpha, \quad \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{a} + a^2\lambda = \alpha, \quad \lambda = \frac{\alpha - \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{a}}{a^2}$$

Самый перпендикуляр представляется вектором $\lambda\mathbf{a}$, длина же его

$$d = |\lambda\mathbf{a}| = \frac{|\alpha - \mathbf{r}_1\,\mathbf{a}|}{a} = \frac{|\alpha - (a_x x_1 + a_y y_1 + a_z z_1)|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{27}$$

В частности расстояние d_0 от начала координат до плоскости (25) выражается формулой:

$$d_0 = \frac{|\alpha|}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \tag{28}$$

Задача 37. Точка M ($\mathbf{r}$) движется с постоянной скоростью $\mathbf{v}$; в начальный момент она находилась в точке M_0 ($\mathbf{r}_0$); узнать, в какой момент она встретит плоскость, заданную уравнением

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = \alpha$$

Очевидно, точка M пробегает прямую

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t$$

и надо определить момент t, отвечающий пересечению этой прямой с плоскостью; вставляем выражение для $\mathbf{r}$ в уравнение плоскости

$$(\mathbf{r}_0 + \mathbf{v}t)\cdot\mathbf{a} = \alpha, \quad \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{a} + (\mathbf{v}\cdot\mathbf{a})\,t = \alpha$$

Отсюда

$$t = \frac{\alpha - \mathbf{r}_0\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{v}\cdot\mathbf{a}} = \frac{\alpha - (a_x x_0 + a_y y_0 + a_z z_0)}{v_x a_x + v_y a_y + v_z a_z}$$

Задача 38. Найти уравнение плоскости, проходящей через середину отрезка, соединяющего две точки M_1 ($\mathbf{r}_1$) и M_2 ($\mathbf{r}_2$), и перпендикулярной к этому отрезку.

Ответ. $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2}(r_1^2 - r_2^2)$

Задача 39. Найти уравнение сферы радиуса a с центром в начале координат, а также уравнение касательной плоскости к сфере в точке сферы M_1 ($\mathbf{r}_1$).

Уравнение сферы, как геометрического места точек, удаленных от начала координат на расстояние a, имеет, очевидно, следующий вид:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2$$

или в координатной форме:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

Касательная плоскость проходит через точку M_1 ($\mathbf{r}_1$) и перпендикулярна к вектору $\mathbf{r}_1$, следовательно, ее уравнение можно написать в таком виде:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1 = a^2, \text{ или } xx_1 + yy_1 + zz_1 = a^2$$

Задача 40. Рассмотрим сферу радиуса a с центром в начале координат. Две точки, лежащие на одном луче, проходящем через начало координат, и находящиеся на таких расстояниях R и R' от последнего, что произведение $RR' = a^2$, называются гармоническими. Доказать следующее свойство гармонических точек: отношение расстояний любой точки сферы до двух гармонических точек есть величина постоянная.

В самом деле, если радиус-вектор одной гармонической точки P есть $\lambda\mathbf{a}$, причем $|\mathbf{a}| = a$, то радиус-вектор другой гармонической точки Q будет $\frac{1}{\lambda}\mathbf{a}$. Возьмем теперь произвольную точку M (r) на сфере, так что

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = a^2$$

Составим выражения для MP^2 и MQ^2:

$$MP^2 = (\mathbf{r} - \lambda\mathbf{a})\cdot(\mathbf{r} - \lambda\mathbf{a}) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - 2\lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + \lambda^2\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2 - 2\lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + \lambda^2 a^2$$

$$MQ^2 = \left(\mathbf{r} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{a}\right)\cdot\left(\mathbf{r} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{a}\right) = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} - 2\frac{1}{\lambda}\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} =$$

$$= a^2 - 2\frac{1}{\lambda}\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} + \frac{1}{\lambda^2}a^2$$

Очевидно, $MP^2 = \lambda^2 MQ^2$, так что $MP = \lambda MQ$, что и требовалось доказать.

Задача 41. Какой угол составляют между собой два вектора:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}, \quad \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

Ответ. 135°.

Задача 42. Какой угол составляют между собой два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если известно, что вектор $\mathbf{a} + 3\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $7\mathbf{a} - 5\mathbf{b}$, а вектор $\mathbf{a} - 4\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $7\mathbf{a} - 2\mathbf{b}$?

Ответ. 60°.

Задача 43. Пусть $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор точки в плоскости. Какая кривая выражается уравнением $\mathbf{r}\cdot(\mathbf{r} - 2\mathbf{a}) = 0$? Какое свойство этой кривой вытекает непосредственно из только что написанного уравнения кривой?

Ответ. Окружность; вписанный в окружность угол, опирающийся на диаметр, есть прямой.

Задача 44. Доказать, что если A, B, C — вершины треугольника, P — точка пересечения его медиан, а O — какая-либо точка, то имеет место тождество

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 + 9OP^2 = 3(OA^2 + OB^2 + OC^2)$$

Задача 45. Доказать, что если A, B, C — вершины треугольника, A', B', C' — середины противоположных сторон (фиг. 10) и O — какая-либо точка, то имеет место тождество

$$AB^2 + BC^2 + CA^2 + 4\{(OA')^2 + (OB')^2 + (OC')^2\} = 4[OA^2 + OB^2 + OC^2].$$

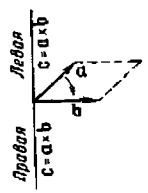
§ 6. Векторное или внешнее произведение двух векторов. Изображение площадей векторами. Вектор замкнутой поверхности. Свойства векторного произведения. Полярные и аксиальные векторы. Приложения к статике и кинематике

1. В предыдущем параграфе мы рассмотрели скалярное умножение двух векторов. Теперь мы рассмотрим векторное умножение двух векторов, в результате которого получается новый вектор.

К необходимости рассматривать такую операцию приводят требования геометрического и физического характера.

Например, вспомним определение момента относительно начала координат O силы $\mathbf{F}$, приложенной к точке P, характеризуемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$; это есть вектор, равный по величине площади параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, и направленный по перпендикуляру к этой площади. Вектор, таким образом составленный из $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$, и называется векторным произведением $\mathbf{r}$ и $\mathbf{F}$. Дадим более точное определение.

Векторным или внешним произведением двух векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *называется вектор, по величине равный площади параллелограмма, построенного на векторах* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *перпендикулярный плоскости этих векторов и направленный в такую сторону, чтобы вращение от* $\mathbf{a}$ *к* $\mathbf{b}$ *на кратчайшем пути вокруг полученного вектора происходило в ту же сторону, как вращение от оси* x *к оси* y *вокруг оси* z.



Фиг. 27

Если выбрать левую систему координат, то нужно вращать ось x вокруг оси z по часовой стрелке, чтобы совместить ее с осью y. Поэтому векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ нужно направлять в такую сторону, чтобы, глядя оттуда, видеть вектор $\mathbf{a}$ слева от $\mathbf{b}$, т. е. переход от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ видеть совершающимся по часовой стрелке (фиг. 27). Если же пользоваться правой системой координат, в которой вращение от оси x к оси y на кратчайшем пути вокруг оси z происходит против часовой стрелки, то векторное произведение векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ придется направить в противоположную сторону, как показывает фиг. 27.

Будем обозначать векторное произведение $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ косым крестом, т. е.

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b} \tag{1}$$

Из других обозначений наиболее употребительны $[\mathbf{ab}]$, $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$.

Длина вектора $\mathbf{c}$ по определению равна

$$c = ab \sin (\mathbf{a}, \mathbf{b}) \tag{2}$$

Отсюда сразу же можно вывести, что при параллельности $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ векторное произведение $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$ равно нулю:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = 0 \quad (\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}) \tag{3}$$

В частности всегда

$$\mathbf{a}\times\mathbf{a} = 0 \tag{4}$$

Напротив, если **a** перпендикулярно **b**, то

$$c = ab \tag{5}$$

2. От перестановки сомножителей векторное произведение меняет свой знак.

$$\mathbf{b}\times\mathbf{a} = -\,\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{6}$$

ибо величина параллелограмма и его плоскость не меняются, направление же произведения мы должны изменить на прямо противоположное. *Таким образом, векторное произведение некоммутативно.*

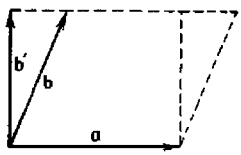
Далее, векторное произведение ассоциативно по отношению к скалярному множителю, т. е. скалярный множитель можно выносить из-под знака векторного произведения:

$$m\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = m\mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{7}$$

при положительном m эта формула очевидна, ибо она выражает, что при увеличении одной стороны параллелограмма в m раз площадь параллелограмма тоже увеличится в m раз. Чтобы убедиться в справедливости формулы (7) для случая отрицательного m, достаточно обратить внимание на то, что при изменении знака одного из множителей величина векторного произведения остается неизменной, направление же этого произведения меняется на прямо противоположное.

Теперь мы докажем дистрибутивность векторного произведения, т. е. формулу:

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c} \tag{8}$$



Фиг. 28

Для доказательства разложим векторы **b** и **c** на две составляющие, параллельно и перпендикулярно вектору **a**:

$$\mathbf{b} = m\mathbf{a} + \mathbf{b}' \quad (\mathbf{b}' \perp \mathbf{a})$$
$$\mathbf{c} = n\mathbf{a} + \mathbf{c}' \quad (\mathbf{c}' \perp \mathbf{a}) \tag{9}$$

тогда $\mathbf{b}+\mathbf{c}$ тоже разложится на две составляющие:

$$\mathbf{b}+\mathbf{c} = (m+n)\,\mathbf{a} + (\mathbf{b}'+\mathbf{c}') \quad (\mathbf{b}'+\mathbf{c}' \perp \mathbf{a}) \tag{10}$$

Заметим теперь, что

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{b}' \tag{11}$$

ибо площадь параллелограмма, построенного на **a** и **b**, равна площади прямоугольника, построенного на **a** и **b**′ (фиг. 28).

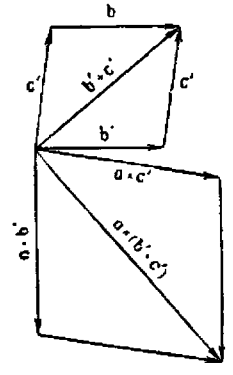
Точно так же

$$\mathbf{a}\times\mathbf{c} = \mathbf{a}\times\mathbf{c}', \quad \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}'+\mathbf{c}') \tag{12}$$

Но нетрудно показать, что

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}'+\mathbf{c}')=\mathbf{a}\times\mathbf{b}'+\mathbf{a}\times\mathbf{c}' \tag{13}$$

ибо, если выбрать, например, левую систему координат и если вектор $\mathbf{a}$, перпендикулярный к фиг. 29, выполненной в плоскости векторов $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{c}'$, направлен от чертежа вперед к нам, то векторное произведение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}'$ будет представляться отрезком длины ab', повернутым на 90° по часовой стрелке.



Фиг. 29

Таким образом, весь параллелограмм, построенный на $\mathbf{b}'$ и $\mathbf{c}'$, поворачивается на 90° и удлиняется в отношении a, а так как при этом диагональ продолжает оставаться геометрической суммой сторон параллелограмма, то получается соотношение (13). В силу равенств (11) и (12) это соотношение равносильно (8).

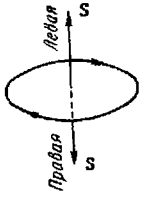
3. Приведем другое доказательство формулы (8), для чего покажем сначала, как можно при помощи векторов изображать не только направленные отрезки, но и направленные площади.

Такая площадь только что встретилась нам в виде параллелограмма, построенного на векторах $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, причем был существен порядок, в котором следовали векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Откладывая сначала вектор $\mathbf{a}$, а потом $\mathbf{b}$, мы получаем определенное направление контура параллелограмма (фиг. 27); этот параллелограмм мы изобразили вектором $\mathbf{c}$.

Мы будем *всякую площадку S, на контуре которой задано направление обхода, изображать вектором, длина которого равна площади площадки, а направление совпадает с направлением положительной нормали к площадке.*

При этом положительной нормалью к площадке называется перпендикуляр, восставленный к площадке и направленный в ту сторону, откуда обход по контуру кажется совершающимся по часовой стрелке, если выбрана левая система координат, и против часовой стрелки, если выбрана правая система.

Иначе это можно высказать следующим образом: будем ввинчивать в площадку винт, вращая его в направлении обхода контура, тогда он будет перемещаться и поступательно в направлении положительной нормали к площадке, если только пользоваться при левой системе координат винтом с левой нарезкой, а в правой системе винтом с правой нарезкой или буравчиком.



Фиг. 30

Мы будем обозначать вектор, изображающий площадку S, через $\mathbf{S}$ или $S\mathbf{n}$, понимая под $\mathbf{n}$ — единичный вектор, направленный по положительной нормали (фиг. 30).

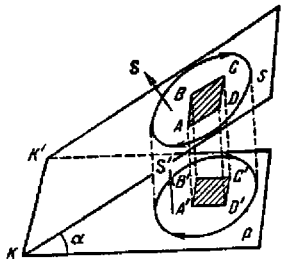
Дальше мы несколько остановимся на свойствах векторов такого рода.

Докажем теперь следующую теорему: *проекция площади S, изображаемой вектором* S, *на какую-либо плоскость P может быть изображена вектором, являющимся проекцией вектора* S *на перпендикуляр к плоскости P.*

Пусть плоскости S и P составляют между собой угол α (фиг. 31); обозначим линию их пересечения через KK'.

Рассмотрим прямоугольник $ABCD$, две стороны которого AB и CD параллельны прямой KK', а две другие стороны AD и BC перпендикулярны KK'. Этот прямоугольник спроектируется в прямоугольник $A'B'C'D'$, две стороны которого $A'B' = C'D'$ будут равны $AB = CD$, две же другие стороны, очевидно, уменьшатся, а именно:

$$A'D' = B'C' = AD\cos\alpha = BC\cos\alpha$$



Фиг. 31

Поэтому площадь dS четырехугольника $ABCD$ спроектируется в площадь $dS' = dS\cos\alpha$. А отсюда следует, что проекция S' всей площади S равна $S' = S\cos\alpha$, так как площадь S можно составить из большого числа прямоугольников вида $ABCD$ со сторонами, параллельными и перпендикулярными к KK', каждый из которых будет при проектировании уменьшаться в отношении $\cos\alpha$.

Спроектируем с другой стороны вектор S (на фиг. 31 принята левая система координат) на перпендикуляр к плоскости P.

Так как угол между перпендикулярами к плоскостям S и P равен углу между самими плоскостями, т. е. α, то проекция S на перпендикуляр к плоскости P равна $S\cos\alpha$, т. е. величине площади S'.

С другой стороны, из чертежа видно, что проекция S на перпендикуляр к P, рассматриваемая как вектор, является положительной нормалью для S'.

Поэтому S' может быть представлена проекцией S на нормаль к P, что и требовалось доказать.

Возьмем теперь какую-нибудь многогранную поверхность S, на контуре которой задано определенное направление обхода.

Приведем в соответствие каждой грани $S_1, S_2, \ldots, S_n$ этой поверхности изображающий ее вектор $S_1, S_1, \ldots, S_n$, причем направление положительного обхода каждой грани определяем из направления обхода всей поверхности.

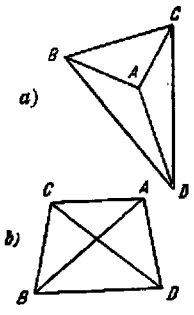
Сумму векторов $S_1 + S_2 + \ldots + S_n$ *мы будем считать вектором, представляющим нашу многогранную поверхность.*

Если поверхность замкнута, то за положительное направление нормали к каждой грани мы будем принимать направление внешней нормали.

Если мы имеем дело с кривой поверхностью, на контуре которой задано какое-нибудь направление, то мы можем определить представ-

ляющий эту поверхность вектор следующим образом. Впишем в данную поверхность многогранную поверхность с очень малыми гранями, определим для нее представляющий ее вектор и перейдем к пределу, устремляя все грани к нулю; полученный вектор и называется вектором данной поверхности.

4. Докажем теперь важную теорему: *Вектор замкнутой поверхности всегда равен нулю.*



Фиг. 32

Докажем теорему сначала для тетраэдра.

Достаточно доказать, что любая проекция вектора поверхности тетраэдра равна нулю.

Спроектируем его на какую-нибудь плоскость, например, плоскость xy, в проекции мы получим треугольный (фиг. 32, *a*) или четырехугольный контур (фиг. 32, *b*).

Каждый треугольник проекции представляется вектором, направленным по положительной или отрицательной оси z, смотря по тому, составляет ли внешняя нормаль к той грани, проекция которой рассматривается, с осью z острый или тупой угол.

В случае фиг. 32, *a* треугольники BAC, BDA, DCA представляются векторами, направленными противоположно вектору BCD, ибо если грань, отвечающая BCD, смотрит в одну сторону оси z, то три другие грани будут направлены в другую сторону оси z. А так как

$$\text{пл. } BCD = \text{пл. } BAC + \text{пл. } BDA + \text{пл. } DCA$$

то сумма векторов проекций граней тетраэдра равна нулю, так что для этого случая теорема доказана.

Точно так же разбирается случай фиг. 32, *b*; в этом случае треугольники BAC, BDA представляются векторами, направленными противоположно векторам треугольников BCD, CAD.

В соответствии с этим здесь имеется соотношение:

$$\text{пл. } BAC + \text{пл. } BDA = \text{пл. } BCD + \text{пл. } CAD$$

Итак, проекция вектора поверхности тетраэдра на плоскость xy равна нулю; так как за плоскость xy можно принять любую плоскость, то проекция вектора поверхности тетраэдра на любую плоскость равна нулю, а значит, самый вектор тождественно равен нулю.

Теперь докажем теорему для замкнутого многогранника. Мы всегда можем разбить последний на ряд тетраэдров. Применим теорему для каждого из последних и сложим результаты, тогда получится, что сумма векторов всех граней многогранника плюс сумма векторов по всем добавочным граням, которые мы провели при разбитии многогранника на тетраэдры, равна нулю. Но рассмотрим какую-нибудь добавочную грань; она будет служить гранью для двух тетраэдров, причем один раз мы

должны за внешнюю нормаль к ней брать одно направление нормали, а другой раз как раз противоположное. Поэтому сумма векторов, отвечающих добавочным граням, тождественно равна нулю, так что сумма векторов по всем граням замкнутого многогранника или, что то же, вектор замкнутого многогранника, равен нулю.

Непосредственным следствием отсюда является вывод, что вектор всякой замкнутой поверхности равен нулю, ибо, вписывая в эту поверхность ряд многогранников с гранями, стремящимися к нулю, мы будем получать равные нулю векторы этих многогранников, а следовательно, и в пределе получим для вектора замкнутой поверхности нуль.

Только что доказанная теорема допускает очень простую физическую интерпретацию.

Рассмотрим несжимаемую жидкость, находящуюся в покое, причем никакие внешние силы на нее не действуют. По закону Паскаля гидростатическое давление всюду будет одним и тем же; обозначим его через p.

Выделим теперь некоторый объем жидкости, ограниченный произвольной поверхностью S; так как выделенный объем жидкости находится в равновесии, то геометрическая сумма всех приложенных к нему сил должна равняться нулю.

Но внешних сил нет, следовательно, на выделенный объем будут действовать только силы гидростатического давления.

Рассмотрим какую-нибудь малую часть поверхности, ограничивающей выделенный объем; пусть эта часть поверхности представляется вектором S_1, тогда действующая на эту часть поверхности сила будет равна pS_1 и будет направлена по нормали к поверхности внутрь поверхности, т. е. как раз противоположно вектору S_1.

Значит, действующая на рассматриваемую часть поверхности сила равна $-pS_1$.

Поэтому геометрическая сумма всех сил, действующих на поверхность S, только множителем $-p$ отличается от геометрической суммы всех векторов S_1, равной вектору замкнутой поверхности S. И так как геометрическая сумма всех сил по вышесказанному равна нулю, то и вектор замкнутой поверхности S должен равняться нулю.

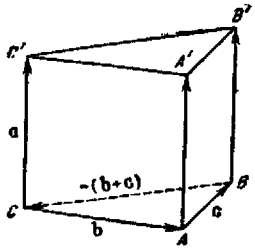
5. Применим только что доказанную теорему для вывода формулы (8):

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

Построим для этого геометрическую сумму векторов $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ и на получившемся таким образом (фиг. 33) $\triangle ABC$ построим призму, ребра которой равны и параллельны вектору $\mathbf{a}$.

Вектор полученной замкнутой поверхности, равный по только что доказанному нулю, составляется из пяти членов.

Два члена, отвечающие граням ABC и $A'B'C'$, очевидно взаимно уничтожаются, ибо площади этих граней равны, а внешние нормали к ним как раз противоположны.



Фиг. 33

Три остальные грани при пользовании левой системой координат и при расположении векторов, указанном на чертеже, чего всегда можно добиться перестановкой векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, дают соответственно векторы:

$$\text{грань } CC'A'A \ldots \mathbf{a}\times\mathbf{b}$$
$$\text{» } AA'B'B \ldots \mathbf{a}\times\mathbf{c}$$
$$\text{» } BB'C'C \ldots \mathbf{a}\times[-(\mathbf{b}+\mathbf{c})]$$

ибо когда мы, смотря извне, обходим, например, грань $CC'A'A$ по стрелке часов, то вектор $\mathbf{b} = \overline{C'A'}$ следует за вектором $\mathbf{a} = \overline{CC'}$. Складывая три полученных вектора, мы должны получить нуль, так что

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c} - \mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = 0$$

Отсюда

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}+\mathbf{c}) = \mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\mathbf{c}$$

Что и требовалось доказать.

6. Образуем векторные произведения основных ортов; прежде всего, в силу (4), имеем

$$\mathbf{i}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}\times\mathbf{k} = 0 \tag{14}$$

далее, непосредственно из самого определения векторного произведения вытекают формулы

$$\mathbf{i}\times\mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{i} = \mathbf{j}$$
$$\mathbf{j}\times\mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k}\times\mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j} \tag{15}$$

При помощи этих формул легко найти составляющие $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, если известны составляющие $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; в самом деле, вычислим

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\times(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}) =$$
$$= a_xb_x(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + a_xb_y(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + a_xb_z(\mathbf{i}\times\mathbf{k}) + a_yb_x(\mathbf{j}\times\mathbf{i}) + a_yb_y(\mathbf{j}\times\mathbf{j}) +$$
$$+ a_yb_z(\mathbf{j}\times\mathbf{k}) + a_zb_x(\mathbf{k}\times\mathbf{i}) + a_zb_y(\mathbf{k}\times\mathbf{j}) + a_zb_z(\mathbf{k}\times\mathbf{k}) \tag{16}$$

В силу формул (14) и (15) произойдут большие сокращения:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{i}(a_yb_z - a_zb_y) + \mathbf{j}(a_zb_x - a_xb_z) + \mathbf{k}(a_xb_y - a_yb_x) \tag{17}$$

Отсюда

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x = a_yb_z - a_zb_y$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y = a_zb_x - a_xb_z \tag{18}$$
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z = a_xb_y - a_yb_x$$

Укажем, как непосредственное приложение этих формул, вывод условий параллельности двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, заданных своими соста-

вляющими. В этом случае $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0$, приравнивая составляющие этого вектора нулю, получим:

$$\frac{b_x}{a_x}=\frac{b_y}{a_y}=\frac{b_z}{a_z}\quad(\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}) \tag{19}$$

т. е. соответствующие составляющие двух параллельных векторов пропорциональны.

Этот результат, впрочем, ясен и из того обстоятельства, что в силу коллинеарности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ один из них выражается произведением другого на скалярный множитель: $\mathbf{b}=\lambda\mathbf{a}$, откуда

$$b_x=\lambda a_x,\quad b_y=\lambda a_y,\quad b_z=\lambda a_z$$

что равносильно (19).

Из формул (18) можно вывести, далее, ряд соотношений, связывающих косинусы углов, составляемых осями двух прямоугольных систем координат (фиг. 20). В самом деле, возьмем, например, за вектор $\mathbf{a}$ орт $\bar{\mathbf{i}}$, а за вектор $\mathbf{b}$ орт $\bar{\mathbf{j}}$, тогда вектором $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ будет служить $\bar{\mathbf{k}}$, если новая система $Oxyz$ ориентирована так же, как старая, и $-\bar{\mathbf{k}}$, если новая система будет ориентирована противоположно старой.

Выписывая из таблицы девяти косинусов § 4 компоненты векторов $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$, $\bar{\mathbf{k}}$ и подставляя их в формулы (18), мы найдем:

$$\begin{aligned}\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1&=\pm\alpha_3\\ \gamma_1\alpha_2-\gamma_2\alpha_1&=\pm\beta_3\\ \alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1&=\pm\gamma_3\end{aligned} \tag{20}$$

где верхний знак берется при одинаковой ориентации старых и новых осей, нижний — при разной. Циклической перестановкой значков 1, 2 и 3 мы можем получить еще шесть новых формул.

Составим таблицу важнейших свойств векторного произведения.

1) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$, $c=ab\sin(\mathbf{a},\mathbf{b})$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{a}$, $\mathbf{c}\perp\mathbf{b}$, вращение от $\mathbf{a}$ к $\mathbf{b}$ вокруг $\mathbf{c}$ таково же, как вращение от оси x к оси y вокруг оси z (определение)

2) $$\mathbf{b}\times\mathbf{a}=-\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

3) $$\mathbf{a}\times\mathbf{b}=0,\text{ если }\mathbf{a}=0\text{ или }\mathbf{b}=0\text{ или }\mathbf{a}\parallel\mathbf{b}$$

4) $$\mathbf{a}\times\mathbf{a}=0$$

5) $$\sum_{r=1}^{m}\mathbf{a}_r\times\sum_{s=1}^{n}\mathbf{b}_s=\sum_{r=1}^{m}\sum_{s=1}^{n}\mathbf{a}_r\times\mathbf{b}_s$$

6) $$m\mathbf{a}\times n\mathbf{b}=mn\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

7) $$\begin{cases}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x=a_yb_z-a_zb_y\\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y=a_zb_x-a_xb_z\\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z=a_xb_y-a_yb_x\end{cases}$$

7. Прежде чем иллюстрировать теорию примерами, мы остановимся еще на одном свойстве векторного произведения.

В сущности представление векторного произведения вектором чисто условно; гораздо естественнее было бы изображать его площадкой, например, параллелограммом, построенным на векторах a и b, имеющим определенное направление обхода в зависимости от порядка сомножителей. Однако для целей векторного анализа гораздо удобнее оперировать с вектором, представляющим эту площадку и являющимся как бы ее дополнением в нашем трехмерном пространстве.

Такие векторы, связанные с направлением некоторого обхода, называются аксиальными, осевыми, или псевдовекторами.

К числу их принадлежит, помимо вектора, представляющего площадку, и помимо векторного произведения двух обыкновенных или, как их обычно называют, полярных векторов, еще, например, угловая скорость вращения твердого тела, которую можно представлять вектором, направленным по оси вращения в ту или другую сторону в зависимости от наличия обхода вокруг оси в ту или другую сторону (отсюда название аксиальный, или осевой, вектор).

Полярными же векторами являются, например, перемещение, скорость, ускорение, сила.

Природу того или другого механического вектора можно узнать по следующему правилу.

Отразим явление в плоскости, перпендикулярной к рассматриваемому вектору; если при этом направление, в котором протекает явление, изменится на обратное, то вектор есть полярный; если же направление явления останется прежним, то мы имеем дело с аксиальным вектором. Так, отражая векторное произведение двух полярных векторов в плоскости составляющих векторов, мы последние, очевидно, не изменим, явление не изменится, следовательно, векторное произведение двух полярных векторов есть вектор аксиальный.

В качестве другого примера рассмотрим вращение твердого тела вокруг оси.

Отражая явление вращения в плоскости, перпендикулярной оси вращения, увидим, что вращение будет происходить опять в ту же самую сторону, поэтому вектор угловой скорости мы должны считать вектором аксиальным. Напротив, отражая вектор скорости точки в перпендикулярной к нему плоскости, мы увидим, что точка будет двигаться в обратную сторону, следовательно, вектор скорости есть полярный вектор.

Когда мы имеем дело с координатным представлением, то различие между полярными и аксиальными векторами сказывается в том, что при зеркальном отображении в одной из координатных плоскостей, например yz, т. е. при переходе от одной прямолинейной прямоугольной системы к другой по формулам

$$\bar{x} = -x, \quad \bar{y} = y, \quad \bar{z} = z \tag{21}$$

составляющие полярного вектора преобразуются как координаты по формулам

$$a_{\bar{x}} = -a_x, \quad a_{\bar{y}} = a_y, \quad a_{\bar{z}} = a_z \tag{22}$$

в то время как составляющие аксиального вектора меняют еще свой знак; так, например, вычислим составляющие векторного произведения $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ двух полярных векторов. По условию

$$\begin{aligned} a_{\bar{x}} &= -a_x, & a_{\bar{y}} &= a_y, & a_{\bar{z}} &= a_z \\ b_{\bar{x}} &= -b_x, & b_{\bar{y}} &= b_y, & b_{\bar{z}} &= b_z \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_{\bar{x}} &= a_{\bar{y}}b_{\bar{z}} - a_{\bar{z}}b_{\bar{y}} = a_y b_z - a_z b_y = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_x \\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_{\bar{y}} &= a_{\bar{z}}b_{\bar{x}} - a_{\bar{x}}b_{\bar{z}} = -a_z b_x + a_x b_z = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_y \\ (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_{\bar{z}} &= a_{\bar{x}}b_{\bar{y}} - a_{\bar{y}}b_{\bar{x}} = -a_x b_y + a_y b_x = -(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z \end{aligned} \tag{23}$$

Точно так же, если мы произведем инверсию координатных осей, т. е. преобразование

$$\bar{x} = -x, \quad \bar{y} = -y, \quad \bar{z} = -z \tag{24}$$

то составляющие полярного вектора изменят свой знак на обратный, в то время как составляющие аксиального вектора остаются без изменения.

Заметим, что при зеркальном отображении и при инверсии левая система координат переходит в правую и обратно, так что пока мы остаемся в области одних левых или одних правых систем координат, никакого различия между полярными и аксиальными векторами нет.

Когда же мы переходим от левой системы к правой или обратно, то аксиальный вектор изменяет свое направление на прямо противоположное, в то время как полярный вектор остается без изменения.

Это и вызывает то различие в поведении составляющих вектора, которое было выше указано.

Значение различия между аксиальными и полярными векторами состоит в том, что, подобно тому как складывать, вычитать и приравнивать можно только величины одинаковой размерности, так точно векторы разного рода не могут быть складываемы или сравниваемы. В самом деле, иначе при переходе от левой системы координат к правой составляющие некоторых членов суммы или равенства изменили бы свой знак на обратный, в то время как другие члены сохранили бы его, при этом значение суммы изменилось бы, а равенство нарушилось.

Оказывается, что и скаляры, подобно векторам, надо делить на две группы: скаляры первого рода, или просто скаляры, и скаляры второго рода или псевдоскаляры. Все величины скалярного характера, получающиеся в результате измерения какого-либо физического объекта, например масса, температура и т. д., являются скалярами первого рода; напротив, некоторые из выражений, получающихся в результате математических операций над векторами,

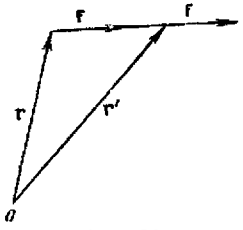
могут изменять свой знак на обратный при переходе от левой системы к правой или от правой системы к левой.

Такие величины называются псевдоскалярами. Так, например, скалярное произведение полярного и аксиального векторов является псевдоскаляром.

8. Мы указывали в самом начале этого параграфа, что момент силы $\mathbf{F}$ относительно начала координат O есть $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$, где $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор точки приложения силы. Обозначая момент силы $\mathbf{F}$ относительно точки O символом $m_0(\mathbf{F})$, будем поэтому иметь

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{F}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{25}$$

В статике доказывается, что силу, приложенную к твердому телу, можно, не изменяя ее действия на твердое тело, переносить вдоль линии ее действия (иными словами, сила, приложенная к твердому телу, есть передвижной вектор). Докажем, что при таком переносе момент силы не меняется. В самом деле, пусть радиус-вектор новой точки приложения силы есть $\mathbf{r}'$ (фиг. 34), так как мы можем переносить точку приложения силы только вдоль самой силы, то вектор $\mathbf{r}'-\mathbf{r}$ должен быть коллинеарен с $\mathbf{F}$, так что



Фиг 34

$$\mathbf{r}'-\mathbf{r}=\lambda\mathbf{F},\quad \mathbf{r}'=\mathbf{r}+\lambda\mathbf{F}$$

Вычислим новый момент

$$\mathbf{r}'\times\mathbf{F}=(\mathbf{r}+\lambda\mathbf{F})\times\mathbf{F}=\mathbf{r}\times\mathbf{F}+\lambda(\mathbf{F}\times\mathbf{F})=\mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

Видим, что момент не изменился.

Докажем теорему Вариньона: момент относительно какой-нибудь точки O равнодействующей двух сил $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$, приложенных в одной и той же точке, равен сумме моментов этих сил.

Если O выбрать за начало координат и обозначить радиус-вектор точки приложения силы через $\mathbf{r}$, то теорема явится непосредственным следствием формулы

$$\mathbf{r}\times(\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2)=\mathbf{r}\times\mathbf{F}_1+\mathbf{r}\times\mathbf{F}_2 \tag{26}$$

Рассмотрим систему сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2 \ldots, \mathbf{F}_n$, приложенных к твердому телу. Геометрическая сумма этих сил называется главным вектором сил:

$$\mathbf{R}=\mathbf{F}_1+\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{F}_n \tag{27}$$

Геометрическая сумма моментов данных сил относительно точки O называется главным моментом системы сил относительно точки O:

$$\mathbf{L}_0=\mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1+\mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2+\ldots+\mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_n \tag{28}$$

где $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \ldots, \mathbf{r}_n$ — радиусы-векторы точек приложения сил $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \ldots, \mathbf{F}_n$ относительно точки O.

Изучим, как изменяется главный момент системы сил при различном выборе точки O. Возьмем точку C, радиус-вектор которой есть $\mathbf{r}_c$, и вычислим главный момент системы относительно точки C; радиусы-векторы точек приложения сил относительно точки C суть очевидно

$$\mathbf{r}_1' = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c, \quad \mathbf{r}_2' = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_c, \ \ldots, \ \mathbf{r}_n = \mathbf{r}_n - \mathbf{r}_c$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_c &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n' \times \mathbf{F}_n = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}_1 + \ldots + (\mathbf{r}_n - \mathbf{r}_c) \times \mathbf{F}_n = \\ &= \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{r}_n \times \mathbf{F}_n - \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_1 - \ldots - \mathbf{r}_c \times \mathbf{F}_n = \\ &= \mathbf{L}_0 - \mathbf{r}_c \times (\mathbf{F}_1 + \ldots + \mathbf{F}_n) = \\ &= \mathbf{L}_0 - (\mathbf{r}_c \times \mathbf{R}) \end{aligned} \tag{29}$$

Если $\mathbf{R} = 0$, т. е. главный вектор системы сил равен нулю, то $\mathbf{L}_c = \mathbf{L}_0$, т. е. главный момент системы в этом случае постоянен. Если же $\mathbf{R}$ не равно нулю, то главный момент системы определяется для любой точки C по формуле (29).

Докажем, что скалярное произведение $\mathbf{L}_c \cdot \mathbf{R}$ есть величина постоянная. В самом деле,

$$\mathbf{L}_c \cdot \mathbf{R} = \mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{R} - (\mathbf{r}_c \times \mathbf{R}) \cdot \mathbf{R}$$

Но так как $\mathbf{r}_c \times \mathbf{R}$ перпендикулярно к $\mathbf{R}$, а скалярное произведение двух перпендикулярных векторов равно нулю, то

$$\mathbf{L}_c \cdot \mathbf{R} = \mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{R} \tag{30}$$

Что и требовалось доказать.

Главный вектор системы $\mathbf{R}$ и скалярное произведение $\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{R}$ называются **статическими инвариантами системы**, потому что они не зависят от того, какая точка O выбирается за основную.

Найдем составляющие главного вектора и главного момента:

$$\begin{aligned} R_x &= X_1 + \ldots + X_n \\ R_y &= Y_1 + \ldots + Y_n \\ R_z &= Z_1 + \ldots + Z_n \end{aligned} \tag{31}$$

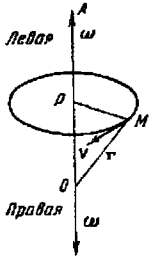
$$\begin{aligned} L_{0x} &= (y_1 Z_1 - z_1 Y_1) + \ldots + (y_n Z_n - z_n Y_n) \\ L_{0y} &= (z_1 X_1 - x_1 Z_1) + \ldots + (z_n X_n - x_n Z_n) \\ L_{0z} &= (x_1 Y_1 - y_1 X_1) + \ldots + (x_n Y_n - y_n X_n) \end{aligned}$$

$$\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{R} = L_{0x} R_x + L_{0y} R_y + L_{0z} R_z$$

9. Другое важное приложение векторного произведения связано с выражением для скорости точек твердого тела, вращающегося около некоторой оси.

Пусть твердое тело вращается около оси OA (фиг. 35). Возьмем какую-нибудь точку M твердого тела; при вращении твердого тела эта точка будет описывать окружность, лежащую в плоскости, перпендикулярной к оси вращения, и имеющую свой центр P на оси вращения.

За время Δt радиус PM повернется на угол $\Delta\theta$ и точка M опишет путь $PM\cdot\Delta\theta$, скорость же точки M будет равна



Фиг. 35

$$v = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{PM\cdot\Delta\theta}{\Delta t} = PM\cdot\omega$$

и будет направлена по перпендикуляру к PM. Величина

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

называется угловой скоростью вращения тела.

Отложим от точки O вектор $\boldsymbol{\omega}$, равный по величине ω и направленный по прямой OA в ту сторону, откуда вращение кажется совершающимся по часовой стрелке, если выбрана левая система координат, и против часовой стрелки, если выбрана правая система; назовем этот вектор вектором угловой скорости. Обозначим далее через $\mathbf{r}$ радиус-вектор точки M относительно какой-нибудь точки O оси вращения и составим векторное произведение $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$. Величина его равна $\omega r\sin(AOM) = \omega\cdot PM = v$, направление же перпендикулярно к OA и OM и притом оно направлено так же, как $\mathbf{v}$, так как, глядя с конца вектора $\mathbf{v}$, мы видим $\boldsymbol{\omega}$ слева от $\mathbf{r}$ при выборе левой системы координат и справа от $\mathbf{r}$ при выборе правой. Таким образом $\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$ совпадает с $\mathbf{v}$ как по величине, так и по направлению, т. е.

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r} \tag{32}$$

Напишем составляющие скорости любой точки M:

$$\begin{aligned} v_x &= \omega_y z - \omega_z y\\ v_y &= \omega_z x - \omega_x z\\ v_z &= \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \tag{33}$$

Если твердое тело принимает участие одновременно в нескольких вращениях около разных осей, проходящих через одну и ту же точку O, причем векторы угловых скоростей суть $\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\omega}_2, \ldots, \boldsymbol{\omega}_n$ (пример — гироскоп), то составные скорости точки M будут

$$\mathbf{v}_1 = \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r},\quad \mathbf{v}_2 = \boldsymbol{\omega}_2\times\mathbf{r},\ \ldots,\ \mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega}_n\times\mathbf{r}$$

Так как скорость составного движения равна геометрической сумме скоростей составляющих движений, то

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n = \boldsymbol{\omega}_1\times\mathbf{r} + \ldots + \boldsymbol{\omega}_n\times\mathbf{r} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \ldots + \boldsymbol{\omega}_n)\times\mathbf{r} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

где положено

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \ldots + \boldsymbol{\omega}_n \tag{34}$$

Получили теорему сложения угловых скоростей: если твердое тело принимает участие в ряде вращений около точки O, то оно вращается с угловой скоростью ω, равной геометрической сумме угловых скоростей данных вращений.

Задача 46. Доказать, что

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = a^2b^2$$

В самом деле,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})^2 = a^2b^2\sin^2(\mathbf{a},\mathbf{b}), \quad (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 = a^2b^2\cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b})$$

Складывая эти два равенства, получим требуемый результат.

Введя составляющие векторов a и b, мы получим следующее алгебраическое тождество, часто встречающееся и известное под именем тождества Эйлера-Лагранжа:

$$(a_yb_z - a_zb_y)^2 + (a_zb_x - a_xb_z)^2 + (a_xb_y - a_yb_x)^2 + (a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z)^2 = \\ = (a_x^2 + a_y^2 + a_z^2)(b_x^2 + b_y^2 + b_z^2) \qquad (35)$$

Задача 47. Вычислить $(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b})$

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\times(\mathbf{a}-\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times\mathbf{a} + \mathbf{b}\times\mathbf{a} - \mathbf{a}\times\mathbf{b} - \mathbf{b}\times\mathbf{b} = -2\mathbf{a}\times\mathbf{b}$$

Геометрический смысл этого равенства состоит в том, что площадь параллелограмма, построенного на диагоналях параллелограмма, в два раза больше площади самого параллелограмма.

Задача 48. Найти формулу для $\sin(\alpha+\beta)$.

Рассмотрим векторное произведение двух единичных векторов a и b, лежащих в плоскости xy (фиг. 25) и составляющих с осью x соответственно углы α и β. Непосредственное определение $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ дает $-\sin(\alpha+\beta)\,\mathbf{k}$; вычисляя с другой стороны z-ую координату $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ через составляющие векторов a и b, найдем

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})_z = a_xb_y - a_yb_x = -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta = \\ = -(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$$

Сравнивая эти два выражения, найдем требуемую формулу:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

Задача 49. Пусть вершины ABC треугольника заданы своими радиусами-векторами $A(\mathbf{r}_1)$, $B(\mathbf{r}_2)$, $C(\mathbf{r}_3)$. Найти вектор S, представляющий треугольную площадку ABC, на которой задано направление обхода контура от A к B и от B к C.

Так как $\overline{AB} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$, $\overline{BC} = \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2$, то искомый вектор есть

$$\mathbf{S} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)\times(\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2) = \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3 - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3 - \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_2 + \tfrac{1}{2}\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2 = \\ = \tfrac{1}{2}(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3 + \mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)$$

Задача 50. Найти уравнение прямой, проходящей через M_1 ($\mathbf{r}_1$) и параллельной данному вектору $\mathbf{a}$. Если радиус-вектор какой-либо точки прямой есть $\mathbf{r}$, то вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ должен быть коллинеарен с $\mathbf{a}$, т. е.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_1 = \lambda \mathbf{a}$$

где λ — переменный параметр (задача 5). Чтобы исключить последний, умножим обе части уравнения векторно на $\mathbf{a}$, тогда получим

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{a} = 0, \text{ или } \mathbf{r} \times \mathbf{a} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}$$

Это и есть векторное уравнение прямой. Вводя компоненты вектора $\mathbf{a}$, можно написать уравнение прямой в одном из следующих двух видов:

$$\frac{x - x_1}{a_x} = \frac{y - y_1}{a_y} = \frac{z - z_1}{a_z}$$

или

$$\begin{aligned} a_y z - a_z y &= a_y z_1 - a_z y_1 \\ a_z x - a_x z &= a_z x_1 - a_x z_1 \\ a_x y - a_y x &= a_x y_1 - a_y x_1 \end{aligned}$$

Задача 51. Найти уравнение кругового цилиндра радиуса ρ, ось которого проходит через начало координат и имеет направление, заданное ортом $\mathbf{u}$.

Нам нужно выразить, что расстояние точек цилиндра до оси равно ρ. Составим векторное произведение $\mathbf{u} \times \mathbf{r}$; величина этого вектора есть $1 \cdot r \cdot \sin(\mathbf{u}, \mathbf{r})$, т. е. как раз ρ, следовательно, искомое уравнение есть

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{r})^2 = \rho^2$$

Проще всего взять такую систему координат, чтобы ось цилиндра пошла по оси z, тогда $\mathbf{u} = \mathbf{k}$ и так как

$$(\mathbf{k} \times \mathbf{r})_x = -y, \quad (\mathbf{k} \times \mathbf{r})_y = x, \quad (\mathbf{k} \times \mathbf{r})_z = 0$$

уравнение цилиндра принимает простой вид $x^2 + y^2 = \rho^2$.

Задача 52. Найти величину площади параллелограмма, сторонами которого являются векторы $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

Ответ. $7\sqrt{5}$.

Задача 53. Найти вектор, лежащий в плоскости yz, имеющий длину, равную 10, и перпендикулярный к вектору $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Ответ. $\pm(6\mathbf{j} + 8\mathbf{k})$.

Задача 54. Найти длину p перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую $(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1) \times \mathbf{a} = 0$.

Ответ. $p = \frac{|\mathbf{r}_1 \times \mathbf{a}|}{a}$.

Задача 55. Найти главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{L}_0$ относительно начала координат O системы сил, представленных последовательными сторонами плоского многоугольника, если вектор площади этого многоугольника есть $\mathbf{S}$.

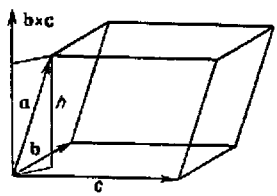
Ответ. $\mathbf{R} = 0$, $\mathbf{L}_0 = 2\mathbf{S}$.

§ 7. Произведения трех векторов. Их свойства

1. Перейдем к вопросу о перемножении трех векторов **a**, **b** и **c**. В силу двойственности понятия умножения, из векторов **a**, **b** и **c** можно составить несколько произведений разного рода. Чтобы составить из **a**, **b**, **c** произведение, мы должны сначала перемножить два вектора, а потом полученный результат помножить на третий вектор. Если мы перемножим первые два вектора, например **b** и **c**, скалярно, то произведение будет скаляром $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$, который нужно затем умножить на вектор **a**, в результате получится вектор $\mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$, коллинеарный с **a**. Такого же типа будут произведения $\mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})$ и $\mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.

Пусть **b** множится на **c** векторно; вектор **a** можно умножить на полученное произведение $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ или скалярно, или векторно. В результате получаются две величины $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ и $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, первая из которых есть скаляр и может быть названа *векторно-скалярным произведением*; вторая же величина есть вектор и называется *двойным векторным произведением векторов* **a**, **b** и **c**.

2. Начнем с выяснения геометрического значения векторно-скалярного произведения $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$. Выберем основную систему координат определенного вида, например левую. Применим формулу (4) § 5, по которой скалярное произведение двух векторов равно произведению из величины одного вектора на проекцию другого вектора на направление первого.



Фиг 36

В нашем случае величина вектора $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ равна площади параллелограмма, построенного на векторах **b** и **c**. Чтобы найти, чему равна проекция вектора **a** на направление $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, построим на векторах **a**, **b**, **c** параллелепипед (фиг. 36).

Направление $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ есть направление перпендикуляра к грани с ребрами **b** и **c**, поэтому проекция **a** на это направление равна высоте h параллелепипеда, опущенной на грань **b**, **c** и взятой со знаком плюс, если ребра **a**, **b** и **c** образуют левую систему (потому что в этом случае угол между **a** и направлением $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ острый), и со знаком минус, если **a**, **b** и **c** образуют правую систему (в этом случае угол между **a** и $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ тупой).

Так как произведение площади грани с ребрами **b** и **c** на высоту, опущенную на эту грань, равно объему параллелепипеда v, то мы получаем замечательную формулу:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \pm v \tag{1}$$

где нужно брать знак плюс, если векторы **a**, **b** и **c** образуют левую систему, и знак минус, если векторы **a**, **b** и **c** дают правую систему.

Если бы мы взяли за основную — правую систему координат, то совершенно аналогичными рассуждениями мы пришли бы к заключению,

что в формуле (1) надо брать знак плюс, если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют правую систему, и знак минус в противном случае.

Поэтому получается общее заключение: если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют систему, одноименную с основной, то в формуле (1) надо брать знак плюс; если же система векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ разноименна с основной, то в формуле (1) надо брать знак минус.

Из этой формулы сразу вытекает следующее следствие:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{2}$$

т. е. *при циклической перестановке векторов* (*замена* $\mathbf{a}$ *на* $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ *на* $\mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ *на* $\mathbf{a}$) *векторно-скалярное произведение не меняется*. В самом деле, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ образуют, например, левую систему, то, как легко видеть, векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ тоже будут образовывать левую систему.

При перестановке только двух векторов из числа трех левая система переходит в правую или наоборот; поэтому векторно-скалярное произведение меняет знак:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \mathbf{c}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = -\,\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \tag{3}$$

При компланарности трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ объем параллелепипеда обращается в нуль, поэтому

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0 \tag{4}$$

($\mathbf{a}$ компланарно с $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$).

В частности, если два из векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ равны между собой, векторно-скалярное произведение обращается в нуль.

Обратно, при выполнении равенства (4) объем параллелепипеда равен нулю, а поэтому или один из векторов равен нулю, или два из них коллинеарны или же они компланарны.

3. Чтобы найти выражение $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ через составляющие векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, заметим, что из свойств скалярного и векторного произведений вытекает дистрибутивность векторно-скалярного произведения, выражающаяся формулами:

$$(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}_1\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}_2\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$
$$\mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_2)] = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}_1) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}_2)$$

Поэтому

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = (a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})\cdot[(b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k})\times(c_x\mathbf{i} + c_y\mathbf{j} + c_z\mathbf{k})]$$

может быть представлено в виде суммы двадцати семи членов, однако только шесть из них отличны от нуля, именно те, в которых комбинируются $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$, так как все члены вида

$$\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{j}), \quad \mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{i})$$

в которые входят два одинаковых орта, обращаются в нуль. Поэтому

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = a_xb_yc_z - a_xb_zc_y + a_yb_zc_x - a_yb_xc_z + a_zb_xc_y - a_zb_yc_x \tag{5}$$

Мы взяли со знаком плюс три коэффициента при

$$\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k}),\quad \mathbf{j}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{i}),\quad \mathbf{k}\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{j})$$

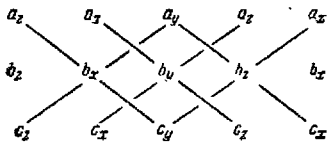
(ибо эти произведения равны объему куба с ребрами длины единицы) и со знаком минус три коэффициента при

$$\mathbf{i}\cdot(\mathbf{k}\times\mathbf{j})=-1,\quad \mathbf{j}\cdot(\mathbf{i}\times\mathbf{k})=-1,\quad \mathbf{k}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{i})=-1$$

Выражение в правой части формулы (5) называется определителем третьего порядка из составляющих векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и обозначается следующим символом:

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{6}$$

Правило для раскрытия определителя 3-го порядка состоит в том, что мы должны приписать справа и слева от определителя по одной колонне (согласно схемы, приведенной здесь справа), составить произведения из трех элементов каждой из шести получающихся диагоналей и взять со знаком плюс произведения, отвечающие диагоналям, идущим сверху слева вправо вниз, и со знаком минус три остальные произведения.



Укажем еще, что определитель 2-го порядка раскрывается по формуле

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x \tag{7}$$

Итак

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = \pm v \tag{8}$$

Эта формула, указывающая тесную связь векторно-скалярных произведений и определителей 3-го порядка, дает, таким образом, также выражение объема параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$.

Как важное применение этой формулы, выведем соотношение между девятью косинусами углов, составляемых осями двух координатных триэдров (фиг. 20). Выбирая за векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ соответственно векторы $\bar{\mathbf{i}}$, $\bar{\mathbf{j}}$ и $\bar{\mathbf{k}}$, мы получим, что

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = \pm 1 \tag{9}$$

где нужно взять знак плюс или минус, смотря по тому, имеют ли оба триэдра одинаковую ориентацию или разную.

Попутно отметим, что векторное произведение двух векторов a и b также можно представить в форме определителя, а именно:

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \tag{10}$$

Для доказательства достаточно раскрыть определитель правой части этой формулы, получится формула (17) § 6.

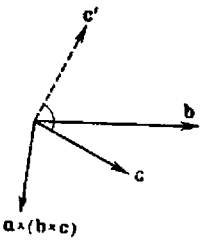
4. Перейдем к рассмотрению двойного векторного произведения $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$; этот вектор, с одной стороны, перпендикулярен к a, с другой стороны, будучи перпендикулярным к $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, т. е. к перпендикуляру к плоскости, определяемой векторами b и c, он должен быть компланарен векторам b и c. Итак, вектор $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$ направлен по линии пересечения плоскости, перпендикулярной к a, с плоскостью, компланарной векторам b и c.

Вектор $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$, компланарный векторам b и c, можно разложить по этим векторам, так что

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = m\mathbf{b} + n\mathbf{c} \tag{11}$$

где m и n — подлежащие определению скаляры.

Примем, что основная система координат есть левая система. Для определения m мы исключим n, для чего умножим обе части уравнения скалярно на вектор c′, лежащий в плоскости векторов b и c, перпендикулярный к c и направленный так, чтобы c′, c и $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ образовали левую систему. Фиг. 37, выполненная в плоскости векторов b и c, показывает, что вектор c′ нужно направлять в сторону вектора b (вектор $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ направлен от чертежа вперед). В результате умножения получается



Фиг. 37

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot\mathbf{c}' = m\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}') \tag{12}$$

Преобразуем векторно-скалярное произведение левой части по формуле (2):

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot\mathbf{c}' = [(\mathbf{b}\times\mathbf{c}')\times\mathbf{c}']\cdot\mathbf{a}$$

Но двойное векторное произведение $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{c}'$ можно вычислить непосредственно.

Вектор $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$ имеет величину $bc\sin(\mathbf{b},\mathbf{c})$ и направлен по перпендикуляру к чертежу (фиг. 37), вперед от чертежа. Поэтому вектор $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{c}'$ имеет длину $bc\sin(\mathbf{b},\mathbf{c})\cdot c' = cbc'\sin(\mathbf{b},\mathbf{c}) = cbc'\cos(\mathbf{b},\mathbf{c}') = c\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}')$ и направлен по вектору c, а значит

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\times\mathbf{c}' = \mathbf{c}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}')$$

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\cdot\mathbf{c}' = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}')$$

Подставляя это выражение в уравнение (12) и сокращая на $\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}'$ величину, не равную нулю, если только $\mathbf{b}$ не параллельно $\mathbf{c}$, найдем

$$m = \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \tag{13}$$

Чтобы найти n, перепишем формулу (11) в виде

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{b}) = -m\mathbf{b} - n\mathbf{c}$$

Применяя только что найденный результат, сразу найдем

$$-n = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \tag{14}$$

так что окончательная формула будет

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \tag{15}$$

Эта формула остается справедливой и при коллинеарности $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, так как тогда обе части равенства обращаются в нуль.

Отметим, что в двойном векторном произведении очень важно подчеркивать порядок перемножения. Так, например, вычисляя $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$, мы получим совершенно другой вектор:

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c} = -\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{c}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) \tag{16}$$

Сопоставляя формулы (15) и (16), можно вывести следующее правило для запоминания разложения двойного векторного произведения:

Скалярное произведение крайних векторов надо взять коэффициентом при среднем векторе и вычесть из полученного вектора произведение другого вектора, заключенного во внутренние скобки, на скалярное произведение двух остальных векторов.

Формулу (15) очень легко вывести другим путем, если найти составляющие вектора $\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$:

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_x = a_y(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_z - a_z(\mathbf{b}\times\mathbf{c})_y = a_y(b_xc_y - b_yc_x) - a_z(b_zc_x - b_xc_z) =$$
$$= b_x(a_yc_y + a_zc_z) - c_x(a_yb_y + a_zb_z)$$

прибавим и вычтем по $a_xb_xc_x$, тогда получим:

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]_x = b_x(a_xc_x + a_yc_y + a_zc_z) - c_x(a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z) =$$
$$= b_x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - c_x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

Так как совершенно аналогичные формулы получаются для двух других составляющих, то имеем право написать векторное равенство

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

восстанавливающее формулу (15).

5. При циклической перестановке векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ формула (15) приводит к трем разным векторам:

$$[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$
$$[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a})] = \mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{a}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$
$$[\mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = \mathbf{a}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})$$

Складывая эти три равенства вместе, получаем тождество

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0 \tag{17}$$

Наконец, важное применение формулы (15) состоит в выводе *разложения данного вектора* $\mathbf{b}$ *на две составляющие, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к заданному вектору* $\mathbf{a}$.

А именно, положив в формуле (15) $\mathbf{c} = \mathbf{a}$, найдем

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) = \mathbf{b}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) - \mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{b}a^2 - \mathbf{a}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$$

решаем это уравнение относительно $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{a}\,\mathbf{b}}{a^2}\mathbf{a} + \frac{1}{a^2}\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) \tag{18}$$

Первый из слагаемых векторов правой части, очевидно параллелен $\mathbf{a}$, а второй перпендикулярен.

Формула для разложения упрощается, если $\mathbf{a}$ будет единичный вектор:

$$\mathbf{b} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{a}) \quad a = 1 \tag{19}$$

Разобранные нами случаи произведений трех векторов играют большую роль в векторной алгебре. Произведения четырех и большего числа векторов могут быть сведены к низшим произведениям; мы их рассмотрим в качестве примеров.

Задача 56. Через точку $M_1(\mathbf{r}_1)$ провести плоскость, параллельную векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Если радиус-вектор какой-либо другой точки плоскости есть $\mathbf{r}$, то вектор $\mathbf{r} - \mathbf{r}_1$ должен быть перпендикулярен к $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, т. е. должно быть

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = 0 \tag{20}$$

В декартовых координатах уравнение плоскости будет

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \tag{21}$$

$$= (a_y b_z - a_z b_y)(x - x_1) + (a_z b_x - a_x b_z)(y - y_1) + (a_x b_y - a_y b_x)(z - z_1) = 0$$

Задача 57. Вычислить $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$.

Обозначим на время $\mathbf{c}\times\mathbf{d} = \mathbf{e}$; в векторно-скалярном произведении $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{e}$ произведем перестановку

$$\begin{aligned}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{e} = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{e}) = \mathbf{a}\cdot[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] = \\ &= \mathbf{a}\cdot[\mathbf{c}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - \mathbf{d}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})] = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) = \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} \end{vmatrix}\end{aligned} \tag{22}$$

В частном случае при $\mathbf{d} = \mathbf{a}$, найдем

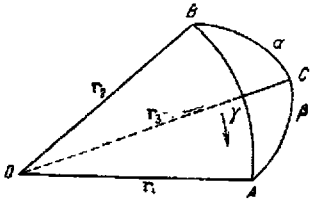
$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}) - (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) \tag{23}$$

Из этой формулы легко вывести основную формулу сферической тригонометрии, для чего рассмотрим на сфере единичного радиуса сферический треугольник ABC, радиусы-векторы вершин которого относительно начала координат пусть будут $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ (фиг. 38). Из формулы (23) при $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_3$ получим:

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_3 - (\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_3) \quad (24)$$

Но если обозначить стороны треугольника через α, β, γ, то

$$\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2 = \cos\gamma, \quad \mathbf{r}_2\cdot\mathbf{r}_3 = \cos\alpha, \quad \mathbf{r}_3\cdot\mathbf{r}_1 = \cos\beta$$



Фиг. 38

Вектор $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$, по величине равный $\sin\gamma$, перпендикулярен к плоскости OAB, точно так же вектор $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3$, по величине равный $\sin\beta$, перпендикулярен к плоскости OAC. Угол между векторами $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2$ и $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3$ равен поэтому углу между плоскостями OAB и OAC, т. е. равен двугранному углу A, а поэтому

$$(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_3) = \sin\beta \sin\gamma \cos A$$

Подставляя все найденные выражения в формулу (24), найдем

$$\sin\beta \sin\gamma \cos A = \cos\alpha - \cos\beta \cos\gamma$$

или, как эту формулу обычно пишут:

$$\cos\alpha = \cos\beta \cos\gamma + \sin\beta \sin\gamma \cos A \quad (25)$$

Задача 58. Вычислить $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$.

Этот вектор должен лежать как в плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (ибо он перпендикулярен к $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$), так и в плоскости векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$; следовательно, он направлен по линии пересечения плоскости векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ с плоскостью векторов $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$.

Чтобы вычислить его, заменим в формуле

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{b}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}) - \mathbf{a}\,(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})$$

вектор $\mathbf{c}$ на $\mathbf{c} \times \mathbf{d}$, тогда получим искомую формулу:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = \mathbf{b}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c} \times \mathbf{d})] - \mathbf{a}[\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c} \times \mathbf{d})] \quad (26)$$

Эта формула дает разложение произведения по векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; но его можно разложить также и по векторам $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$:

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d}) = -(\mathbf{c} \times \mathbf{d}) \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -\mathbf{d}[\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] + \mathbf{c}[\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] \quad (27)$$

Если мы сравним два найденных выражения для произведения четырех векторов, то получим следующую связь между четырьмя произвольными векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ и $\mathbf{d}$:

$$\mathbf{a}[\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] + \mathbf{b}[\mathbf{d}\cdot(\mathbf{c} \times \mathbf{a})] + \mathbf{c}[\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b})] - \mathbf{d}\,[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{c})] = 0 \quad (28)$$

Если a, b, c не компланарны, то можем решить это уравнение относительно d:

$$\mathbf{d} = \mathbf{a}\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + \mathbf{b}\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} + \mathbf{c}\frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \tag{29}$$

Эта формула дает в явной форме разложение вектора d по трем некомпланарным векторам a, b и c.

Особенно простой вид принимает формула (26), если положить $\mathbf{d} = \mathbf{a}$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})] \tag{30}$$

Что в этом случае произведение четырех векторов коллинеарно с a, ясно из того соображения, что плоскость векторов a и b и векторов a и c пересекаются очевидно по a.

Задача 59. Вычислить $(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]$. Прежде всего вычисляем

$$(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{c}) = \mathbf{a}\,[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$$

Поэтому

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})][(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot\mathbf{a}] = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2 \tag{31}$$

Задача 60. Применить формулу (30) для вывода теоремы синусов сферической тригонометрии.

Обращаемся к обозначениям и чертежу задачи 57. Полагая в формуле (30), $\mathbf{a} = \mathbf{r}_1$, $\mathbf{b} = \mathbf{r}_2$, $\mathbf{c} = \mathbf{r}_3$, найдем

$$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3) = \mathbf{r}_1\,[\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)]$$

Мы уже выяснили, что величины векторов $\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_3$ суть $\sin\gamma$ и $\sin\beta$, а угол между ними равен A, поэтому величина произведения четырех векторов слева равна $\sin\beta\sin\gamma\sin A$ и мы получаем таким образом интересную зависимость

$$\sin\beta\sin\gamma\sin A = |[\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)]| \tag{32}$$

выражающую объем параллелепипеда, построенного на трех единичных векторах, произведением синусов двух сторон сферического треугольника и синуса угла между ними.

Так как все равно, какие стороны брать за β, γ, мы можем написать еще две формулы

$$\sin\gamma\sin\alpha\sin B = |\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)|$$
$$\sin\alpha\sin\beta\sin C = |\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)|$$

Сравнивая эти три формулы, найдем

$$\sin\beta\sin\gamma\sin A = \sin\gamma\sin\alpha\sin B = \sin\alpha\sin\beta\sin C$$

откуда и выведем теорему синусов делением на $\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$:

$$\frac{\sin A}{\sin\alpha} = \frac{\sin B}{\sin\beta} = \frac{\sin C}{\sin\gamma} \tag{33}$$

Задача 61. Выяснить, что векторно-скалярное произведение трех полярных векторов есть псевдоскаляр, а двойное векторное произведение трех полярных векторов тоже есть полярный вектор.

Задача 62. Каким вектором ρ изображается перпендикуляр, опущенный из начала координат на прямую $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\times\mathbf{a}=0$?

Ответ:

$$\rho=\frac{\mathbf{a}\times(\mathbf{r}_1\times\mathbf{a})}{a^2}$$

Задача 63. Найти линию пересечения двух плоскостей $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=\alpha$ и $\mathbf{r}\cdot\mathbf{b}=\beta$.

Ответ:

$$\mathbf{r}\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\beta\mathbf{a}-\alpha\mathbf{b}$$

Задача 64. Доказать формулы

$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]=(\mathbf{b}\cdot\mathbf{d})(\mathbf{a}\times\mathbf{c})-(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{a}\times\mathbf{d})$$
$$\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]=[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]\mathbf{b}-(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{c}\times\mathbf{d})$$

Задача 65 Доказать формулу

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{d})\times(\mathbf{e}\times\mathbf{f})]=[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{e}]\,[\mathbf{f}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]-[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{f}]\,[\mathbf{e}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{d})]$$

§ 8. Векторные уравнения

1. В силу двойственности понятия об умножении векторов нельзя поставить вопроса о действии деления векторов в обычном смысле слова. Приходится заменять это действие решением различных векторных уравнений, как например,

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=m \quad\text{или}\quad \mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{b}$$

где $\mathbf{r}$ есть неизвестный вектор.

Рассмотрим в этом параграфе несколько вопросов теории векторных уравнений.

Мы уже ранее при определении действия вычитания векторов рассмотрели уравнение

$$\mathbf{r}+\mathbf{a}=\mathbf{b} \tag{1}$$

и показали, что его решением является

$$\mathbf{r}=\mathbf{b}-\mathbf{a} \tag{2}$$

Уравнение

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=m \tag{3}$$

имеет бесчисленное множество решений, так как оно определяет только составляющую вектора $\mathbf{r}$ в направлении вектора $\mathbf{a}$, величина которой будет $r_a=m/a$; составляющая же в направлении, перпендикулярном к $\mathbf{a}$, остается совершенно произвольной. Таким образом, если рассматривать $\mathbf{r}$ как радиус вектор некоторой точки M относительно начала координат O, то геометрическое место концов всех векторов $\mathbf{r}$, удовлетворяющих

уравнению (3), будет плоскостью, перпендикулярной к вектору a и отстоящей от начала координат на расстоянии m/a.

Причина такой неопределенности решения векторного уравнения (3) заключается в том, что вектор полностью определяется тремя составляющими, а уравнение (3) дает только одну алгебраическую зависимость между этими тремя составляющими

$$a_x x + a_y y + a_z z = m \tag{4}$$

где x, y, z — составляющие вектора r.

2. Полностью вектор r может быть определен из системы двух векторных уравнений, дающих скалярное и векторное произведение r на a:

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = m, \qquad \mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{5}$$

где, конечно, b должно быть перпендикулярно к a.

Для решения этой системы применим формулу (18) § 7, дающую разложение вектора r на две составляющие, из которых одна параллельна, а другая перпендикулярна к a:

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}}{a^2}\mathbf{a} + \frac{1}{a^2}\mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{a})$$

Подставляя сюда данные выражения r·a и r×a, найдем единственное решение системы (5), в виде

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{a}}{a^2} + \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{a^2} \tag{6}$$

(проверка показывает, что это r действительно удовлетворяет системе).

Такая определенность решения получилась благодаря тому, что система (5) равносильна трем алгебраическим уравнениям, служащим для определения трех составляющих вектора r:

$$\begin{aligned} a_x x + a_y y + a_z z &= m \\ a_z y - a_y z &= b_x \\ -a_z x + a_x z &= b_y \\ a_y x - a_x y &= b_z \end{aligned} \tag{7}$$

(Из трех последних уравнений этой системы одно является следствием двух других, в чем легко убедиться, умножая их соответственно на a_x, a_y, a_z, складывая результаты и принимая во внимание соотношение $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0$.)

Таким образом решение трех линейных уравнений системы (7) есть

$$\begin{aligned} x &= \frac{ma_x}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_y b_z - a_z b_y}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ y &= \frac{ma_y}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_z b_x - a_x b_z}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ z &= \frac{ma_z}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} + \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \end{aligned} \tag{8}$$

Если мы хотим найти общее решение уравнения (3)

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = m \tag{3}$$

то должны считать $\mathbf{b}$ произвольным (мы можем в данном случае отбросить условие $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0$, так как в $\mathbf{b}\times\mathbf{a}$ параллельная $\mathbf{a}$ составляющая вектора $\mathbf{b}$ все равно пропадает), так что общее решение уравнения (3) можно написать в виде

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{a}}{a^2} + \mathbf{a}\times\mathbf{B} \tag{9}$$

где $\mathbf{B}$ — произвольный вектор.

Если же мы ищем решение уравнения

$$\mathbf{r}\times\mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = 0) \tag{10}$$

то должны считать m произвольным, так что, вводя вместо $\frac{m}{a^2}$ произвольный параметр μ, будем иметь

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{a^2} + \mu\mathbf{a} \tag{11}$$

Очевидно, это есть уравнение прямой, параллельной вектору $\mathbf{a}$.

3. Поставим теперь задачу решить систему уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} &= \alpha \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} &= \beta \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{c} &= \gamma \end{aligned} \tag{12}$$

где $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ образуют систему трех некомпланарных векторов, необходимым и достаточным условием чего является

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \neq 0 \tag{13}$$

Геометрическое значение решения этой системы легко выяснить, если считать $\mathbf{r}$ радиусом-вектором некоторой точки относительно начала координат. Тогда конец $\mathbf{r}$ должен лежать в трех плоскостях, определяемых каждым из уравнений системы, так что задача сводится к нахождению точки пересечения трех плоскостей

Мы начнем с решения более простой системы, а именно

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} &= 1 \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} &= 0 \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{c} &= 0 \end{aligned} \tag{14}$$

Два последних уравнения указывают на перпендикулярность $\mathbf{r}$ как к $\mathbf{b}$, так и к $\mathbf{c}$, следовательно, на параллельность $\mathbf{r}$ вектору $\mathbf{b}\times\mathbf{c}$, так что

$$\mathbf{r} = m\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$$

где m — подлежащий определению скаляр, который можно найти из первого уравнения системы (14)

$$m\{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\} = 1$$

Отсюда

$$m = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}$$

Таким образом решение системы (14) есть

$$\mathbf{r} = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \tag{15}$$

Обозначим этот вектор через $\mathbf{a}^*$.

Точно так же можно найти решение двух других систем, а именно:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} &= 0, \quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} &= 1, \quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{c} &= 0, \quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{c} = 1 \end{aligned} \tag{16}$$

в виде векторов $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{c}^*$

$$\mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \tag{17}$$

Три вектора $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{c}^*$

$$\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{b}\times\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mathbf{b}^* = \frac{\mathbf{c}\times\mathbf{a}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}, \quad \mathbf{c}^* = \frac{\mathbf{a}\times\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \tag{18}$$

называются взаимными с $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ векторами.

Они получились у нас как решение трех систем уравнений:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a} &= 1, \quad \mathbf{b}^*\cdot\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{c}^*\cdot\mathbf{a} = 0 \\ \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{b} &= 0, \quad \mathbf{b}^*\cdot\mathbf{b} = 1, \quad \mathbf{c}^*\cdot\mathbf{b} = 0 \\ \mathbf{a}^*\cdot\mathbf{c} &= 0, \quad \mathbf{b}^*\cdot\mathbf{c} = 0, \quad \mathbf{c}^*\cdot\mathbf{c} = 1 \end{aligned} \tag{19}$$

Теперь легко убедиться, что вектор

$$\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{b}^* + \gamma\mathbf{c}^* \tag{20}$$

является решением данной системы уравнений

$$\begin{aligned} \mathbf{r}\cdot\mathbf{a} &= \alpha \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{b} &= \beta \\ \mathbf{r}\cdot\mathbf{c} &= \gamma \end{aligned}$$

В самом деле, проверим, например, первое уравнение

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a} = (\alpha\mathbf{a}^* + \beta\mathbf{b}^* + \gamma\mathbf{c}^*)\cdot\mathbf{a} = \alpha\,(\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{a}) + \beta\,(\mathbf{b}^*\cdot\mathbf{a}) + \gamma\,(\mathbf{c}^*\cdot\mathbf{a}) = \alpha$$

Это решение единственное. В самом деле, если бы имелось два решения $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ предложенной системы, то разность $\mathbf{r}' - \mathbf{r}''$ была бы решением системы

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\cdot\mathbf{a} &= 0 \\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\cdot\mathbf{b} &= 0 \\ (\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')\cdot\mathbf{c} &= 0 \end{aligned}$$

т. е. вектор $\mathbf{r}' - \mathbf{r}''$ был бы перпендикулярен сразу к трем некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, что невозможно.

Особенно просто определить систему взаимных векторов для системы ортогональных ортов $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$. В самом деле, вычислим:

$$\mathbf{i}^* = \frac{\mathbf{j}\times\mathbf{k}}{\mathbf{i}\cdot(\mathbf{j}\times\mathbf{k})} = \mathbf{j}\times\mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{j}^* = \mathbf{j}, \quad \mathbf{k}^* = \mathbf{k} \tag{21}$$

Таким образом, в этом случае взаимные векторы совпадают с исходными векторами.

4. Докажем теперь, что и обратно: векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ являются взаимными для системы векторов $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{c}^*$. Отметим, прежде всего, что векторы $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{c}^*$ некомпланарны. Если бы $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{c}^*$ были компланарны то один из них можно было бы выразить через два других по формуле вида

$$\mathbf{c}^* = m\mathbf{a}^* + n\mathbf{b}^*$$

Но тогда, по скалярном умножении на $\mathbf{c}$, мы получили бы противоречие

$$1 = \mathbf{c}^*\cdot\mathbf{c} = m\,(\mathbf{a}^*\cdot\mathbf{c}) + n\,(\mathbf{b}^*\cdot\mathbf{c}) = 0$$

Докажем некомпланарность векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ еще другим способом, а именно, непосредственным вычислением

$$\mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*) = \frac{1}{[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2}\{(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\}$$

Но в задаче 59 было найдено, что

$$(\mathbf{b}\times\mathbf{c})\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{a})\times(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2$$

Поэтому

$$\mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*) = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \tag{22}$$

Раз $\mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*) \neq 0$ векторы, $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ не могут быть компланарными. Попутно мы получили, что объем параллелепипеда, построенного на векторах $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, обратен объему параллелепипеда с ребрами $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ и что векторы $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ образуют систему координат того же вида (правую или левую), что и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Теперь доказательство взаимности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ с векторами $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ не представит никаких затруднений. Достаточно сгруппировать уравнения системы (19) в три системы, относя в каждую три уравнения, стоящие в одной и той же строке, чтобы сразу увидать, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ взаимны с векторами $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$ и $\mathbf{c}^*$.

5. Еще в самом начале курса мы видели, что всякий вектор $\mathbf{d}$ может быть разложен по трем некомпланарным векторам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$:

$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} \tag{23}$$

При помощи взаимных векторов очень легко найти коэффициенты этого разложения.

В самом деле, умножим обе части уравнения скалярно на $\mathbf{a}^*$, тогда, так как

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}^* = 1, \quad \mathbf{b}\cdot\mathbf{a}^* = 0, \quad \mathbf{c}\cdot\mathbf{a}^* = 0$$

мы сразу получим

$$m = \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}^* \tag{24}$$

Точно так же найдем

$$n = \mathbf{d}\cdot\mathbf{b}^*, \quad p = \mathbf{d}\cdot\mathbf{c}^* \tag{25}$$

Значит

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{a}^*)\,\mathbf{a} + (\mathbf{d}\cdot\mathbf{b}^*)\,\mathbf{b} + (\mathbf{d}\cdot\mathbf{c}^*)\,\mathbf{c} =$$

$$= \frac{[\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\,\mathbf{a} + [\mathbf{d}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a})]\,\mathbf{b} + [\mathbf{d}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})]\,\mathbf{c}}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} \tag{26}$$

Эта формула другим путем была нами получена в задаче 58. Получили пример определения трех скаляров из одного векторного уравнения. Прием решения состоит, как видим, в скалярном умножении на три некомпланарных вектора.

Разлагая $\mathbf{d}$ по векторам $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$, мы точно так же получили бы

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{a}^* + (\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{b}^* + (\mathbf{d}\cdot\mathbf{c})\,\mathbf{c}^* \tag{27}$$

Полученные формулы имеют тесную связь с решением системы трех уравнений с тремя неизвестными. В самом деле, уравнение (23) равносильно трем алгебраическим уравнениям:

$$\begin{aligned} d_x &= ma_x + nb_x + pc_x \\ d_y &= ma_y + nb_y + pc_y \\ d_z &= ma_z + nb_z + pc_z \end{aligned} \tag{28}$$

с тремя неизвестными m, n и p. Мы нашли решение в виде:

$$m = \mathbf{d}\cdot\mathbf{a}^* = \frac{\mathbf{d}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})} = \frac{\begin{vmatrix} d_x & d_y & d_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} \tag{29}$$

и две аналогичные формулы для n и p. Таким образом мы восстановили решение системы трех уравнений с тремя неизвестными при помощи определителей.

6. В § 6 мы ввели понятие о главном векторе $\mathbf{R}$ и о главном моменте $\mathbf{L}_0$ относительно точки O системы сил, приложенных к твердому телу:

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{F}_n$$

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{r}_1\times\mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_2\times\mathbf{F}_2 + \ldots + \mathbf{r}_n\times\mathbf{F}_n$$

и показатели, что главный момент относительно всякой точки C может быть вычислен по формуле

$$\mathbf{L}_c = \mathbf{L}_0 - \mathbf{r}_c \times \mathbf{R}$$

где $\mathbf{r}_c$ — радиус-вектор точки C.

Геометрическое место таких точек C, для которых главный момент параллелен главному вектору, называется *центральной осью системы*. Поставим задачу отыскать ее.

По условию, для точек центральной оси

$$\mathbf{L}_c \times \mathbf{R} = 0$$

т. е.

$$\mathbf{L}_0 \times \mathbf{R} - (\mathbf{r}_c \times \mathbf{R}) \times \mathbf{R} = 0$$

Отсюда

$$\mathbf{L}_0 \times \mathbf{R} - \mathbf{R}(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{R}) + \mathbf{r}_c(\mathbf{R} \cdot \mathbf{R}) = 0$$

Предположим, что $(\mathbf{r}_c \cdot \mathbf{R}) = \mu$, тогда можем решить уравнение относительно $\mathbf{r}_c$

$$\mathbf{r}_c = \frac{\mu \mathbf{R} - \mathbf{L}_0 \times \mathbf{R}}{R^2} \tag{30}$$

Величина μ остается неопределенной, поэтому конец радиуса-вектора $\mathbf{r}_c$ лежит на прямой линии, параллельной главному вектору. Значит, центральная ось есть прямая, параллельная главному вектору. Формула

$$\mathbf{r}_c = \frac{\mathbf{R} \times \mathbf{L}_0}{R^2}$$

дает возможность построить одну ее точку, зная $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}_0$. Нужно отложить по перпендикуляру к плоскости, содержащей $\mathbf{R}$ и $\mathbf{L}_0$, в ту сторону, откуда вращение от $\mathbf{R}$ к $\mathbf{L}_0$ кажется совершающимся по часовой стрелке (для левой системы координат), отрезок длины

$$\frac{L_0 \sin(\mathbf{L}_0, \mathbf{R})}{R}$$

Полученная точка будет одной из точек центральной оси.

Так как для точек центральной оси главный момент параллелен главному вектору, то для этих точек главный момент достигает своего минимума. В самом деле, в § 6 была доказана инвариантность

$$\mathbf{L}_0 \cdot \mathbf{R} = L_0 R \cos(\mathbf{L}_0, \mathbf{R})$$

а следовательно, неизменность проекции главного момента на главный вектор. Поэтому величина главного момента L_0 обратно пропорциональна $\cos(\mathbf{L}_0, \mathbf{R})$ и, следовательно, достигает своего минимума тогда, когда $\cos(\mathbf{L}_0, \mathbf{R})$ достигает своего максимума 1, т. е. когда $\mathbf{L}_0$ параллельно $\mathbf{R}$.

Разберем еще несколько задач.

Задача 66. Найти точку пересечения плоскости

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = m \tag{31}$$

и прямой

$$\mathbf{r}\times\mathbf{b}=\mathbf{B}\qquad(\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}=0) \tag{32}$$

не параллельной плоскости. Так как плоскость перпендикулярна вектору $\mathbf{a}$, а прямая параллельна вектору $\mathbf{b}$, то условие параллельности плоскости и прямой есть $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$, значит у нас $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}\neq 0$.

Составим двойное векторное произведение

$$\mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{b})=\mathbf{a}\times\mathbf{B}$$

Раскроем его

$$\mathbf{r}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})-\mathbf{b}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})=\mathbf{a}\times\mathbf{B}$$

Решаем относительно $\mathbf{r}$, воспользовавшись данным выражением для $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$:

$$\mathbf{r}=\frac{m\mathbf{b}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}+\frac{\mathbf{a}\times\mathbf{B}}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}} \tag{33}$$

Можно проверить, что это действительно есть решение и притом единственное, но геометрически это совершенно ясно.

Задача 67. Найти условие, при котором три плоскости

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=\alpha,\quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{b}=\beta,\quad \mathbf{r}\cdot\mathbf{c}=\gamma \tag{34}$$

параллельны одной прямой.

Чтобы плоскость $\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}=\alpha$ была параллельна вектору $\mathbf{d}$, необходимо и достаточно, чтобы $\mathbf{a}$ было перпендикулярно к $\mathbf{d}$. Если все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ перпендикулярны к $\mathbf{d}$, то они компланарны, ибо они все параллельны плоскости, перпендикулярной к $\mathbf{d}$. Обратно, если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ компланарны и если плоскость, которой все они параллельны, перпендикулярна вектору $\mathbf{d}$, то и $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ перпендикулярны к $\mathbf{d}$, следовательно, плоскости (34) параллельны $\mathbf{d}$. Поэтому искомое условие совпадает с условием компланарности векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, т. е.

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})=0 \tag{35}$$

Задача 68. Найти уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_1(\mathbf{r}_1)$, $M_2(\mathbf{r}_2)$, $M_3(\mathbf{r}_3)$, предполагая три вектора $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ некомпланарными.

Допустим, что искомое уравнение есть

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=m$$

Тогда, раз точки M_1, M_2, M_3 лежат в плоскости, мы имеем следующие три уравнения:

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_1=m,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_2=m,\quad \mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_3=m$$

Если векторы $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$ не компланарны, то эти уравнения можно решить по формуле (20):

$$\mathbf{a}=m\mathbf{r}_1^*+m\mathbf{r}_2^*+m\mathbf{r}_3^*=m\frac{\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}{\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3)}$$

так что искомое уравнение будет

$$(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_3\times\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{r}=\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_2\times\mathbf{r}_3) \tag{36}$$

Задача 69. Найти кратчайшее расстояние между двумя непараллельными прямыми

$$\begin{aligned}&\mathbf{r}\times\mathbf{a}=\mathbf{A} \qquad (\mathbf{A}\cdot\mathbf{a}=0)\\ &\mathbf{r}\times\mathbf{b}=\mathbf{B} \qquad (\mathbf{B}\cdot\mathbf{b}=0)\end{aligned} \tag{37}$$

Возьмем какую-нибудь точку M_1 на первой прямой, и пусть ее радиус-вектор есть $\mathbf{r}_1$, другую точку M_2 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_2$ возьмем на второй прямой. Тогда

$$\mathbf{r}_1\times\mathbf{a}=\mathbf{A},\quad \mathbf{r}_2\times\mathbf{b}=\mathbf{B}$$

Умножим первое уравнение скалярно на $\mathbf{b}$, второе уравнение скалярно на $\mathbf{a}$:

$$\begin{aligned}&(\mathbf{r}_1\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{b} \qquad \text{или } \mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}\\ &(\mathbf{r}_2\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a}=\mathbf{B}\cdot\mathbf{a} \qquad \text{или } \mathbf{r}_2\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{a})=\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}\end{aligned}$$

Сложим эти уравнения

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})=\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}$$

Обозначим на время $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=\mathbf{c}$, тогда

$$(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\cdot\mathbf{c}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}$$

т. е.

$$M_1M_2\cos(\overline{M_2M_1},\ \mathbf{c})=\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}}{c}$$

Следовательно, проекция $\overline{M_2M_1}$ на направление вектора $\mathbf{c}$ постоянна. А значит M_1M_2 будет иметь наименьшую длину тогда, когда $\overline{M_1M_2}$ будет совпадать по направлению с $\mathbf{c}=\mathbf{a}\times\mathbf{b}$, т. е. будет общим перпендикуляром к обеим прямым.

Величина же этого кратчайшего расстояния есть

$$d=\frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}|}{|\mathbf{a}\times\mathbf{b}|} \tag{38}$$

Отсюда сразу получается условие того, чтобы две прямые (37) пересекались:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{a}=0 \tag{39}$$

так как тогда кратчайшее расстояние должно равняться нулю.

Задача 70. Возьмем шесть векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ и докажем следующее тождество:

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})][\mathbf{d}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f})]=\begin{vmatrix}\mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{d}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{e}\\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{f} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{f} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{f}\end{vmatrix} \tag{40}$$

Предположим для простоты векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ некомпланарными, тогда можем разложить векторы $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ по $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$

$$\mathbf{d} = (\mathbf{d}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}^* + (\mathbf{d}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}^* + (\mathbf{d}\cdot\mathbf{c})\mathbf{c}^*$$

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}^* + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}^* + (\mathbf{e}\cdot\mathbf{c})\mathbf{c}^*$$

$$\mathbf{f} = (\mathbf{f}\cdot\mathbf{a})\mathbf{a}^* + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{b})\mathbf{b}^* + (\mathbf{f}\cdot\mathbf{c})\mathbf{c}^*$$

Составим $\mathbf{d}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f})$. При перемножении мы получим двадцать семь произведений, но только шесть из них не обратятся в нуль, так что мы получим:

$$\mathbf{d}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f}) = \begin{vmatrix} \mathbf{d}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{d}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{e}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{e}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{e}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{f}\cdot\mathbf{a} & \mathbf{f}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{f}\cdot\mathbf{c} \end{vmatrix} [\mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*)]$$

Но мы доказали [формула (22)], что

$$\mathbf{a}^*\cdot(\mathbf{b}^*\times\mathbf{c}^*) = \frac{1}{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})}$$

Следовательно,

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\,[\mathbf{d}\cdot(\mathbf{e}\times\mathbf{f})] = \begin{vmatrix} \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{d} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{e} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{e} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{f} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{f} & \mathbf{c}\cdot\mathbf{f} \end{vmatrix}$$

Если выразить это тождество через составляющие векторов, то получится теорема об умножении определителей 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d_x & d_y & d_z \\ e_x & e_y & e_z \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_xd_x + a_yd_y + a_zd_z & b_xd_x + b_yd_y + b_zd_z & c_xd_x + c_yd_y + c_zd_z \\ a_xe_x + a_ye_y + a_ze_z & b_xe_x + b_ye_y + b_ze_z & c_xe_x + c_ye_y + c_ze_z \\ a_xf_x + a_yf_y + a_zf_z & b_xf_x + b_yf_y + b_zf_z & c_xf_x + c_yf_y + c_zf_z \end{vmatrix} \tag{41}$$

Если в формуле (40) положить $\mathbf{d} = \mathbf{a}$, $\mathbf{e} = \mathbf{b}$, $\mathbf{f} = \mathbf{c}$, то получится формула, дающая квадрат объема параллелепипеда, построенного на ребрах $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$:

$$[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]^2 = \begin{vmatrix} \mathbf{a}^2 & \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} & \mathbf{b}^2 & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} \\ \mathbf{a}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} & \mathbf{c}^2 \end{vmatrix} = \tag{42}$$

$$= a^2b^2c^2 - a^2(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})^2 - b^2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})^2 - c^2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^2 + 2(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{c})(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) =$$

$$= a^2b^2c^2\{1 - \cos^2(\mathbf{b},\mathbf{c}) - \cos^2(\mathbf{c},\mathbf{a}) - \cos^2(\mathbf{a},\mathbf{b}) + 2\cos(\mathbf{a},\mathbf{b})\cos(\mathbf{b},\mathbf{c})\cos(\mathbf{c},\mathbf{a})\}$$

ГЛАВА II

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 9. Переменные векторы, зависящие от скалярного аргумента. Годограф вектора. Дифференцирование вектора по скалярному аргументу. Формулы дифференцирования. Интегрирование по скалярному аргументу

1. Посвятим настоящую главу изучению вопросов, связанных с переменными векторами. Начнем с рассмотрения того случая, когда независимой переменной является скалярный аргумент t. Например, в механике, чаще всего, таким скалярным аргументом является время. Итак, пусть нам задан вектор $\mathbf{a}(t)$, изменяющийся вместе с t и представляющий некоторую *функцию* t. Отметим, что задание функции $\mathbf{a}(t)$ эквивалентно заданию трех скалярных функций от t: $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, ибо

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j} + a_z(t)\,\mathbf{k} \qquad (1)$$

Мы будем всегда предполагать $\mathbf{a}(t)$ *непрерывной функцией* t, т. е. будем считать, что для двух соседних значений аргумента t и $t+\Delta t$ разность $\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)$ может быть сделана сколь угодно малой при достаточно малом Δt. В этом случае говорят также, что $\mathbf{a}(t)$ есть предел $\mathbf{a}(t+\Delta t)$ при Δt, стремящемся к нулю, и записывают это следующим образом:

$$\mathbf{a}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \mathbf{a}(t + \Delta t) \qquad (2)$$

Будем откладывать значения вектора $\mathbf{a}(t)$, при различных значениях t, от общего начала O; изменяя t на некотором интервале, мы заставим конец вектора $\mathbf{a}(t)$ описать некоторую непрерывную кривую, которая называется г о д о г р а ф о м в е к т о р а $\mathbf{a}(t)$.

Итак, *годограф вектора есть геометрическое место концов векторов* $\mathbf{a}(t)$, *откладываемых от общего начала* O.

2. Чтобы установить понятие о производной вектора $\mathbf{a}(t)$, будем поступать как обычно: возьмем два соседних значения аргумента t и $t + \Delta t$, найдем соответствующие им значения вектора $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{a}(t+\Delta t)$, составим приращение вектора, т. е. разность

$$\Delta\mathbf{a} = \mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)$$

(на фиг. 39 эта разность представляется вектором $\overrightarrow{AA'}$).

Составим далее отношение

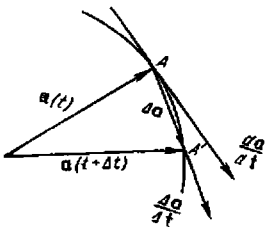
$$\frac{\Delta \mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t}$$

и перейдем к пределу при $\Delta t \to 0$.

Если этот предел существует, то его называют производной вектора $\mathbf{a}(t)$ и обозначают

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} \quad \text{или} \quad \mathbf{a}'(t)$$

Имея в виду, что в механике время постоянно употребляется в качестве независимого скалярного переменного, выгодно производные а по времени обозначать сокращенно символом $\mathbf{a}(t)$, ставя над вектором точку.



Фиг. 39

То же применимо конечно и к скалярам:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \dot{\varphi}$$

если t — время. Итак,

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} \tag{3}$$

Так например, если взять за а радиус-вектор r некоторой движущейся точки M (r), а за t — время то

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ будет вектором перемещения за время Δt,

$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ будет вектором средней скорости за этот промежуток времени и, наконец,

$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \dot{\mathbf{r}}$ будет вектором скорости $\mathbf{v}(t)$ к моменту t.

Таким образом скорость движущейся точки есть производная ее радиуса-вектора по времени:

$$\mathbf{v}(t) = \dot{\mathbf{r}}(t) \tag{4}$$

Если мы начертим годограф вектора а (фиг. 39) и отметим концы A и A' векторов $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{a}(t + \Delta t)$, то частное

$$\frac{\mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t)}{\Delta t} = \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t}$$

будет иметь то же направление, что и хорда годографа $\overrightarrow{AA'}$. При $\Delta t \to 0$ это направление будет стремиться совпасть с направлением касательной к годографу, поэтому

направление производной $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ совпадает с направлением касательной к годографу вектора $\mathbf{a}(t)$,

Очевидно, что производная вектора $\mathbf{a}(t)$ есть в свою очередь вектор, зависящий от t, поэтому от него можно взять производную; эта производная называется второй производной вектора $\mathbf{a}$ и обозначается

$$\frac{d^2\mathbf{a}}{dt^2} \qquad \text{и т. д.}$$

Так например, производная вектора скорости называется вектором ускорения $\mathbf{w}(t)$:

$$\mathbf{w}(t) = \dot{\mathbf{v}}(t) = \ddot{\mathbf{r}}(t) \tag{5}$$

значит, вектор ускорения есть вторая производная радиуса-вектора по времени.

Отметим раз навсегда, что мы будем предполагать все производные, о которых идет речь, существующими и непрерывными.

3. Докажем, что все основные свойства производных сохраняются и для производных векторов.

Производная суммы равна сумме производных. Пусть имеем два вектора $\mathbf{a}(t)$ и $\mathbf{b}(t)$, тогда

$$\frac{d[\mathbf{a}(t)+\mathbf{b}(t)]}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}+\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\mathbf{b}}{\Delta t} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{b}}{dt} \tag{6}$$

Постоянный множитель можно выносить из-под знака производной:

$$\frac{d[m\mathbf{a}(t)]}{dt} = m\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} \qquad (m = \text{const}) \tag{7}$$

Если m есть тоже функция от t, то справедлива формула дифференцирования произведения:

$$\frac{d(m\mathbf{a})}{dt} = m\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{dm}{dt}\mathbf{a} \tag{8}$$

Для доказательства составляем:

$$\frac{dm\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{(m+\Delta m)(\mathbf{a}+\Delta\mathbf{a}) - m\mathbf{a}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta m\mathbf{a} + m\Delta\mathbf{a} + \Delta m\Delta\mathbf{a}}{\Delta t} = \frac{dm}{dt}\mathbf{a} + m\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

Точно так же доказываются формулы дифференцирования скалярного и векторного произведений:

$$\frac{d(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{b}}{dt} \tag{9}$$

$$\frac{d(\mathbf{a}\times\mathbf{b})}{dt} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\frac{d\mathbf{b}}{dt} \tag{10}$$

Относительно последней формулы нужно заметить, что в ней порядок множителей в каждом члене имеет строго определенное значение и не может быть переставляем.

Правило дифференцирования сложных функций применяется и к векторам, так что если t будет в свою очередь функцией другого скалярного аргумента u, то

$$\frac{d\mathbf{a}}{du} = \frac{d\mathbf{a}}{dt}\frac{dt}{du} \tag{11}$$

Если вектор $\mathbf{a}(t)$ разложен по постоянным ортам $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$:

$$\mathbf{a}(t) = a_x(t)\,\mathbf{i} + a_y(t)\,\mathbf{j} + a_z(t)\,\mathbf{k}$$

то, по только что выведенным формулам, найдем:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{da_y}{dt}\mathbf{j} + \frac{da_z}{dt}\mathbf{k} \tag{12}$$

откуда выводим, что компоненты производной вектора равны производным от компонентов данного вектора.

4. Введем в рассмотрение длину вектора $a(t)$ и его орт $\mathbf{a}_1(t)$, так что

$$\mathbf{a}(t) = a(t)\,\mathbf{a}_1(t) \tag{13}$$

Тогда будем иметь:

$$\frac{d\mathbf{a}(t)}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}_1 + a\frac{d\mathbf{a}_1}{dt} \tag{14}$$

Различим три случая.

а) Пусть вектор $\mathbf{a}(t)$ меняется только по величине, не меняясь по направлению; в этом случае

$$\mathbf{a}_1 = \text{const}$$

а. следовательно,

$$\frac{d\mathbf{a}_1}{dt} = 0$$

а значит

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}_1 \tag{15}$$

Таким образом проиаводная имеет то же направление (или прямо противоположное), что и сам вектор. Это ясно геометрически, ибо в рассматриваемом случае годографом служит прямая, проходящая через начало координат.

б) Пусть вектор $\mathbf{a}(t)$ меняется только по направлению, не меняясь по длине. В этом случае годографом служит кривая, лежащая на сфере радиуса a, и геометрически ясно, что производная вектора, будучи касательна к этой кривой, а следовательно и к сфере, будет перпендикулярна к самому вектору. Докажем это векторно.

Имеем

$$a = \text{const}$$

Следовательно,

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} = a^2 = \text{const} \tag{16}$$

Поэтому

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 2\mathbf{a}\cdot\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0 \tag{17}$$

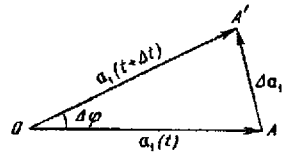
а значит $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$ перпендикулярен к а, что и требовалось доказать. В рассматриваемом случае

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = a\frac{d\mathbf{a}_1}{dt} \tag{18}$$

Найдем величину вектора $\frac{d\mathbf{a}}{dt}$. Отложим (фиг. 40) значения $\mathbf{a}_1(t)$ для двух соседних значений t и $t + \Delta t$ и обозначим угол между ними через $\Delta\varphi$.

Величина приращения $\Delta\mathbf{a}_1$, представляющего основание равнобедренного треугольника, равна $2\sin\frac{1}{2}\Delta\varphi$, поэтому

$$\left|\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right| = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{|\Delta\mathbf{a}_1|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} \tag{19}$$



Фиг. 40

Обозначая предел отношения угла поворота вектора к приращению аргумента через

$$\omega = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$$

будем поэтому иметь

$$\left|\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right| = \omega, \quad \left|\frac{d\mathbf{a}}{dt}\right| = a\omega \tag{20}$$

Из фиг. 40 видно также непосредственно, что $\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}$ перпендикулярно к $\mathbf{a}_1$, ибо в силу равнобедренности треугольника OAA' углы при его основании оба стремятся к прямому, когда $\Delta t \to 0$.

в) Пусть, наконец, $\mathbf{a}(t)$ меняется как по длине, так и по направлению. В этом случае формула

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da}{dt}\mathbf{a}_1 + a\frac{d\mathbf{a}_1}{dt} \tag{21}$$

дает разложение производной вектора а на две составляющие, из которых первая направлена по вектору а и имеет значение $\frac{da}{dt}$, а вторая направлена по перпендикуляру к а и имеет величину

$$a\left|\frac{d\mathbf{a}_1}{dt}\right| = a\omega$$

5. Формула Тейлора, дающая разложение скалярной функции в ряд по возрастающим степеням приращения аргумента:

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}f''(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}[f^{(n)}(t_0) + \varepsilon] \tag{22}$$

остается верной и для векторов:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{a}(t_0) + (t - t_0)\mathbf{a}'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2}\mathbf{a}''(t_0) + \ldots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}[\mathbf{a}^{(n)}(t_0) + \varepsilon] \tag{23}$$

Вывод формулы (23) совершенно аналогичен выводу формулы (22), почему мы на нем не останавливаемся.

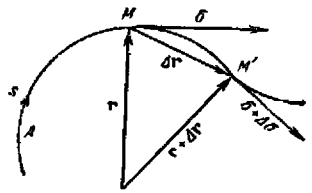
Можно доказать (23) еще иначе: написать ряды Тейлора для функций $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, умножить их на i, j, k и сложить.

Дадим теперь понятие об интеграле от вектора по скалярному аргументу. Если

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \mathbf{b}$$

то $\mathbf{a}(t)$ называется неопределенным интегралом от $\mathbf{b}$ и обозначается

$$\mathbf{a}(t) = \int \mathbf{b}(t)\,dt + \text{const} \tag{24}$$



Фиг. 41

Определенный интеграл

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{b}\,dt = \mathbf{a}(t) - \mathbf{a}(t_0) \tag{25}$$

равный разности значений вектора $\mathbf{a}$ для границ интегрирования, можно еще рассматривать, как предел некоторой суммы векторов

$$\int_{t_0}^{t} \mathbf{b}\,dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \mathbf{b}(t_i)\,(t_{i+1} - t_i) \tag{26}$$

где t_i — ряд значений аргумента t, вставленных между t_0 и $t = t_{n+1}$, притом таким образом, что при стремлении n к бесконечности все разности $t_{i+1} - t_i$ стремятся к нулю.

Доказательство формулы (26) совершенно такое же, как для скалярных функций, почему мы на нем не останавливаемся. Впрочем, можно сразу доказать формулу (26), написав ее для b_x, b_y, b_z, умножив на i, j, k и сложив.

6. Дадим теперь несколько приложений дифференциального исчисления векторов.

Пусть точка M с радиусом-вектором $\mathbf{r}$ описывает некоторую кривую в пространстве (фиг. 41).

Будем определять положение на кривой всякой точки M длиной дуги s, отсчитываемой от некоторой определенной точки A до точки M и считаемой положительной в одну сторону от точки A и отрицательной в другую. Таким образом $\mathbf{r}$ рассматривается нами как функция скалярного аргумента s.

Выясним геометрическое значение $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ и $\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}$.

Рассматриваемая кривая является, очевидно, годографом радиуса-вектора $\mathbf{r}$, поэтому направление $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ совпадает с направлением касательной к кривой в сторону возрастания дуги s. Величина же $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ равна еди-

нице, потому что $\frac{dr}{ds}$ есть предел отношения $\frac{\Delta r}{\Delta s}$, величина же $\left|\frac{\Delta r}{\Delta s}\right|$, равная отношению малой хорды к соответствующей дуге, приближается к единице при стремлении Δs к нулю. Итак, $\frac{dr}{ds}$ есть единичный вектор, направленный по касательной к кривой в точке M в сторону возрастающего аргумента s.

Мы будем обозначать единичный касательный вектор через σ:

$$\sigma = \frac{dr}{ds}, \qquad \sigma = 1 \tag{27}$$

Компонентами единичного вектора σ, очевидно являются косинусы углов, образуемых им с осями координат:

$$\sigma_x = \cos(\sigma, x) = \frac{dx}{ds}, \quad \sigma_y = \cos(\sigma, y) = \frac{dy}{ds}, \quad \sigma_z = \cos(\sigma, z) = \frac{dz}{ds}$$

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dz}{ds}\right)^2 = 1 \tag{28}$$

Вычислим

$$\frac{d^2r}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds}$$

Так как σ есть единичный вектор, то к нему полностью применимо рассуждение пункта 4-б, в котором мы должны положить $l = 1$, $a_1 = \sigma$. Поэтому, $\frac{d\sigma}{ds}$ есть вектор, перпендикулярный к σ и по величине равный $\lim\limits_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s}$, где $\Delta\varphi$ означает угол между двумя соседними единичными касательными векторами σ и $\sigma + \Delta\sigma$, называемый углом смежности.

Предел отношения угла смежности к элементу дуги Δs называется **кривизной кривой** в данной точке и обозначается так:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} = \frac{1}{R} \tag{29}$$

Для прямой линии, очевидно, кривизна равна нулю, так что кривизна есть некоторая мера отклонения кривой от прямой. Для окружности радиуса R, очевидно $\Delta s = R\Delta\varphi$ и кривизна постоянна и равна $\frac{1}{R}$.

Величина R, обратная кривизне кривой, называется **радиусом кривизны кривой** в рассматриваемой точке.

Разберемся в вопросе о направлении вектора $\frac{d\sigma}{ds}$. Предельное положение плоскости, проходящей через касательную и параллельной соседней касательной, называется **соприкасающейся плоскостью**. Так как вектор $\Delta\sigma$, равный разности векторов $\sigma + \Delta\sigma$ и σ лежит как раз в плоскости, проходящей через касательную и параллельной соседней касательной, то

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\sigma}{\Delta s} = \frac{d\sigma}{ds}$$

будет лежать в соприкасающейся плоскости.

С другой стороны, мы видели, что вектор $\frac{d\sigma}{ds}$ перпендикулярен к касательной в точке M. Прямые, проходящие через точку M и перпендикулярные к касательной в этой точке, называются **нормалями к кривой**, а плоскость, их содержащая и, очевидно, перпендикулярная к касательной, называется **нормальной плоскостью** к кривой в точке M. Та нормаль к кривой, которая лежит в соприкасающейся плоскости, называется **главной нормалью**. Из сказанного выше следует, что вектор $\frac{d^2\tau}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds}$ имеет величину $\frac{1}{R}$ и направлен по главной нормали, очевидно, в сторону вогнутости кривой.

Введем, аналогично единичному касательному вектору σ, единичный вектор $\mathbf{n}$, направленный по главной нормали в ту же сторону, как и $\frac{d\sigma}{ds}$, тогда

$$\frac{d^2\tau}{ds^2} = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}, \qquad n = 1, \qquad \frac{1}{R^2} = \frac{d^2\tau}{ds^2} \cdot \frac{d^2\tau}{ds^2} \tag{30}$$

Последняя формула, дающая R, получается скалярным умножением обоих членов формулы (30) самих на себя.

В компонентах мы будем иметь:

$$n_x = R\frac{d^2x}{ds^2}, \qquad n_y = R\frac{d^2y}{ds^2}, \qquad n_z = R\frac{d^2z}{ds^2}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}} \tag{31}$$

Та нормаль к кривой, которая перпендикулярна к соприкасающейся плоскости, называется **бинормалью**. Введем третий единичный вектор $\mathbf{b}$, направленный по бинормали в такую сторону, чтобы σ, $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ образовали систему того же рода, какая образована осями x, y, z.

Тогда

$$\mathbf{b} = \sigma \times \mathbf{n}, \qquad b = 1 \tag{32}$$

Найдем компоненты единичного бинормального вектора:

$$\begin{aligned} b_x &= R\left(\frac{dy}{ds}\frac{d^2z}{ds^2} - \frac{dz}{ds}\frac{d^2y}{ds^2}\right) \\ b_y &= R\left(\frac{dz}{ds}\frac{d^2x}{ds^2} - \frac{dx}{ds}\frac{d^2z}{ds^2}\right) \\ b_z &= R\left(\frac{dx}{ds}\frac{d^2y}{ds^2} - \frac{dy}{ds}\frac{d^2x}{ds^2}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

Изучение изменения направления единичного касательного вектора привело нас к понятию кривизны кривой. Рассмотрение изменения направления соприкасающейся плоскости или, что то же, бинормали приводит к понятию **кручения** кривой. Итак, аналогично $\frac{d\sigma}{ds}$ составим $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$. Так как $\mathbf{b}$ — единичный вектор, т. е. $\mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = 1$, то $\mathbf{b} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$, так

что $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендикулярно к $\mathbf{b}$; с другой стороны, непосредственное вычисление дает:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \frac{d(\boldsymbol{\sigma}\times\mathbf{n})}{ds} = \frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\times\mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds}$$

Но первая скобка пропадает, так как $\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = \frac{\mathbf{n}}{R}$ и векторное произведение двух коллинеарных векторов равно нулю, поэтому:

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = \boldsymbol{\sigma}\times\frac{d\mathbf{n}}{ds} \tag{34}$$

Отсюда следует, что $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ перпендикулярно также и к $\boldsymbol{\sigma}$. Поэтому $\frac{d\mathbf{b}}{ds}$ коллинеарно с $\mathbf{n}$, так что мы можем написать

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{T} \tag{35}$$

Величина T называется *радиусом кручения* кривой в точке M. $\frac{1}{T}$ — *кручением кривой*. Так как $\mathbf{b}$ — единичный вектор, то по пункту 4-б

$$\left|\frac{d\mathbf{b}}{ds}\right| = \left|\frac{1}{T}\right| = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s},$$

где $\Delta\varphi$ есть угол между двумя соседними бинормалями. Если кривая плоская, то биормаль не меняет своего направления, так что для плоской кривой кручение равно нулю; значит, кручение является мерой отклонения кривой от плоской кривой.

Выведем, наконец, в дополнение к формулам (30) и (35), характеризующим изменение $\boldsymbol{\sigma}$ и $\mathbf{b}$, еще аналогичную формулу для $\mathbf{n}$, для чего вычислим

$$\frac{d\mathbf{n}}{ds} = \frac{d(\mathbf{b}\times\boldsymbol{\sigma})}{ds} = \frac{d\mathbf{b}}{ds}\times\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}\times\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} = -\frac{\mathbf{n}}{T}\times\boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b}\times\frac{\mathbf{n}}{R} = \frac{\mathbf{b}}{T} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{R} \tag{36}$$

при преобразовании пришлось воспользоваться формулами

$$\mathbf{n} = \mathbf{b}\times\boldsymbol{\sigma}, \quad \mathbf{n}\times\boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{b}, \quad \mathbf{b}\times\mathbf{n} = -\boldsymbol{\sigma}$$

вытекающими из того, что $\boldsymbol{\sigma}$ $\mathbf{n}$ и $\mathbf{b}$ представляют систему трех единичных, взаимно перпендикулярных векторов, идущих в том же порядке, как оси x, y, z.

Соберем вместе формулы (30), (35) и (36):

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds} &= \frac{\mathbf{n}}{R}\\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -\frac{\boldsymbol{\sigma}}{R} + \frac{\mathbf{b}}{T}\\ \frac{d\mathbf{b}}{ds} &= -\frac{\mathbf{n}}{T}\end{aligned} \tag{37}$$

Эти формулы называются *формулами Френе*.

Выясним еще вопрос о вычислении T и его знаке. Сравнивая формулы (34) и (35), найдем

$$\frac{\mathfrak{n}}{T} = \frac{d\mathfrak{n}}{ds} \times \sigma$$

Умножим скалярно на $\mathfrak{n}$ и переставим в получившемся векторно-скалярном произведении порядок произведений

$$\frac{1}{T} = \mathfrak{n} \cdot \left(\frac{d\mathfrak{n}}{ds} \times \sigma\right) = \sigma \cdot \left(\mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{n}}{ds}\right)$$

Но $\sigma = \frac{d\mathfrak{r}}{ds}$, далее по формуле (30) $\mathfrak{n} = R\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}$, следовательно

$$\frac{d\mathfrak{n}}{ds} = R\frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}$$

$$\mathfrak{n} \times \frac{d\mathfrak{n}}{ds} = R\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} \times \left(R\frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3} + \frac{dR}{ds}\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}\right) = R^2\left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3}\right)$$

Значит, получаем окончательную формулу

$$\frac{1}{T} = R^2\left[\frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3}\right)\right] = \frac{\frac{d\mathfrak{r}}{ds} \cdot \left(\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} \times \frac{d^3\mathfrak{r}}{ds^3}\right)}{\frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2} \cdot \frac{d^2\mathfrak{r}}{ds^2}} \tag{38}$$

Эта формула показывает, что T является псевдоскаляром, т. е. меняет свой знак при переходе от левой системы к правой. Это получается потому, что в выражение для T входит векторное произведение двух полярных векторов, т. е. аксиальный вектор, который после скалярного умножения на полярный вектор дает псевдоскаляр.

Ниже, в задаче 74, будет показано, что левый винт имеет в левой системе положительное кручение, а правый — отрицательное. Это оправдывает выбор знака в формуле (35).

7. Рассмотрим теперь движение материальной точки, заданное указанием ее радиуса-вектора для всякого момента времени t:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \tag{39}$$

Годограф радиуса-вектора $\mathbf{r}$ представляет, очевидно, траекторию точки.

Мы уже определили выше скорость $\mathbf{v}$ и ускорение $\mathbf{w}$ точки:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}, \quad \mathbf{w} = \ddot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{v}} \tag{40}$$

Мы можем определять движение точки, задавая пройденную точкой дугу s в функции времени t.

Тогда $\mathbf{r}$ будет сложной функцией t через посредство s, поэтому

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}\dot{s} = \dot{s}\sigma = v\sigma \tag{41}$$

Таким образом, вектор скорости направлен по касательной к траектории, а величина скорости

$$v = \frac{ds}{dt} = \dot{s} \tag{42}$$

равна производной пути по времени.

Точно так же вычисляем w:

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{v}} = \frac{d(v\boldsymbol{\sigma})}{dt} = v\dot{\boldsymbol{\sigma}} + \dot{v}\boldsymbol{\sigma} = \dot{v}\boldsymbol{\sigma} + v\frac{d\boldsymbol{\sigma}}{ds}\dot{s} = \dot{v}\boldsymbol{\sigma} + v\frac{\mathbf{n}}{R}v = \dot{v}\boldsymbol{\sigma} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n}$$

Полученная формула

$$\mathbf{w} = \dot{v}\boldsymbol{\sigma} + \frac{v^2}{R}\mathbf{n} \tag{43}$$

представляет разложение ускорения на два слагаемых: касательное ускорение, направленное по касательной к траектории и численно равное $\dot{v}$, и нормальное ускорение величины $\frac{v^2}{R}$, направленное по главной нормали. Поэтому величина полного ускорения есть

$$|\mathbf{w}| = w = \sqrt{\dot{v}^2 + \frac{v^4}{R^2}} \tag{44}$$

Если $\mathbf{r}(t)$ задано своими координатами $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, то мы будем иметь:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \\ \mathbf{v} &= \dot{\mathbf{r}} = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \\ \mathbf{w} &= \ddot{\mathbf{r}} = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \end{aligned} \tag{45}$$

8. В § 6 мы рассмотрели вращение твердого тела около оси и показали, что скорость любой точки твердого тела может быть представлена формулой

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{46}$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

Докажем теперь, что если тело имеет неподвижную точку, около которой оно вращается, то *в каждый данный момент* скорость любой точки тела может быть вычислена по формуле (46).

Свяжем с твердым телом некоторую прямоугольную систему координат $Oxyz$, имеющую начало в неподвижной точке. Тогда радиус-вектор точки с координатами x, y, z будет

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{47}$$

Задать движение твердого тела значит задать движение координатного триэдра $Oxyz$. Это можно сделать различными способами, например, можно задать векторы i, j и k, как функции времени t. Каждый вектор нужно задавать тремя числами; таким образом всего надо задать девять функций времени t, но из них только три можно задать по произ-

волу, потому что между векторами $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ существует шесть зависимостей:

$$\begin{aligned} &\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}=1, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{j}=1, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{k}=1 \\ &\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0, \quad \mathbf{j}\cdot\mathbf{k}=0, \quad \mathbf{k}\cdot\mathbf{i}=0 \end{aligned} \tag{48}$$

Так как движение твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, определяется тремя независимыми функциями времени, то говорят, что имеющее неподвижную точку твердое тело обладает тремя степенями свободы.

Отметим, что между первой формулой (45) и (47), несмотря на их внешнее сходство, существует огромное различие. В формуле (45) x, y, z являются функциями времени, в то время как $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — постоянные орты, значит, в формуле (45) рассматривается движение точки, перемещающейся относительно неподвижной системы координат. В формуле же (47) x, y, z постоянны, а $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ являются функциями времени, поэтому здесь рассматривается движение точки, неизменно связанной с осями, перемещающимися в пространстве, т. е. рассматривается движение точки твердого тела, вращающегося около начала координат. В следующем параграфе при изучении относительного движения мы рассмотрим общий случай, когда меняться будут и координаты x, y, z и орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

После этого отступления перейдем к нахождению скорости точки тела M с радиусом-вектором (47):

$$\dot{\mathbf{r}} = x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

Проекция на ось x будет

$$v_x = \dot{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{i} = x\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right) + y\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right) + z\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)$$

Но в силу (48)

$$\frac{d(\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})}{dt} = 2\left(\mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{i}}{dt}\right) = 0, \quad \frac{d(\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})}{dt} = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} + \mathbf{i}\cdot\frac{d\mathbf{j}}{dt} = 0$$

Поэтому

$$v_x = -\left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)y + \left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)z$$

Циклической перестановкой (заменой x на y, y на z, z на x, $\mathbf{i}$ на $\mathbf{j}$, $\mathbf{j}$ на $\mathbf{k}$, $\mathbf{k}$ на $\mathbf{i}$) получим:

$$\begin{aligned} v_y &= -\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)z + \left(\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j}\right)x \\ v_z &= -\left(\frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}\right)x + \left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}\right)y \end{aligned}$$

Поэтому, если обозначить

$$\omega_x = \frac{d\mathbf{j}}{dt}\cdot\mathbf{k}, \quad \omega_y = \frac{d\mathbf{k}}{dt}\cdot\mathbf{i}, \quad \omega_z = \frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\mathbf{j} \tag{49}$$

и если ввести вектор

$$\boldsymbol{\omega}(t) = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k} \tag{50}$$

то будет

$$v_x = \omega_y z - \omega_z y, \quad v_y = \omega_z x - \omega_x z, \quad v_z = \omega_x y - \omega_y x \tag{51}$$

или в векторной форме

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{46}$$

Формулы (49) позволяют вычислять проекции вектора угловой скорости на оси x, y, z, связанные с твердым телом. Выберем *неподвижную систему* координат $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$ и зададим векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ их проекциями на оси $O\bar{x}\bar{y}\bar{z}$, т. е. девятью косинусами таблицы § 4. Так например, проекции $\mathbf{j}$ и $\mathbf{k}$ суть

$$j_{\bar{x}} = \cos(y, \bar{x}) = \beta_1, \qquad j_{\bar{y}} = \cos(y, \bar{y}) = \beta_2, \quad j_{\bar{z}} = \cos(y, \bar{z}) = \beta_3$$

$$k_{\bar{x}} = \gamma_1, \quad k_{\bar{y}} = \gamma_2, \quad k_{\bar{z}} = \gamma_3$$

$$\frac{dj_{\bar{x}}}{dt} = \frac{d\beta_1}{dt}, \quad \frac{dj_{\bar{y}}}{dt} = \frac{d\beta_2}{dt}, \quad \frac{dj_{\bar{z}}}{dt} = \frac{d\beta_3}{dt}$$

Поэтому

$$\omega_x = \frac{d\beta_1}{dt}\gamma_1 + \frac{d\beta_2}{dt}\gamma_2 + \frac{d\beta_3}{dt}\gamma_3 \tag{52}$$

Циклическая перестановка α, β, γ дает ω_y и ω_z.

Общий случай движения твердого тела приводится к только что рассмотренному; если обозначить радиус-вектор начала O подвижной системы координат относительно начала $\bar{O}$ неподвижной системы координат через $\bar{\mathbf{r}}_0$, а радиус-вектор точки тела через $\bar{\mathbf{r}}$ и сохранить обозначение $\mathbf{r}$ для радиуса-вектора точки тела относительно O, то

$$\bar{\mathbf{r}} = \bar{\mathbf{r}}_0 + x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

При дифференцировании прибавится лишний член, представляющий скорость $\mathbf{v}_0$ точки O:

$$\mathbf{v} = \dot{\bar{\mathbf{r}}} = \frac{d\bar{\mathbf{r}}_0}{dt} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

Поэтому формула, дающая распределение скоростей различных точек твердого тела, будет

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{53}$$

или в координатах

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \tag{54}$$

Для вычисления ускорения различных точек твердого тела дифференцируем (53):

$$\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_0}{dt} + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \tag{55}$$

Таким образом, ускорение точек твердого тела состоит из трех частей: ускорения точки O, вращательного ускорения $\dot{\omega}\times\mathbf{r}$ и осестремительного ускорения $\omega\times(\omega\times\mathbf{r})$.

Вектор последнего, с одной стороны, перпендикулярен к ω, с другой стороны, лежит в плоскости векторов ω и $\mathbf{r}$, откуда и можно заключить о его осестремительности.

9. Рассмотрим простейшие вопросы динамики материальной точки.

Вектор $m\mathbf{v}$, где m — масса материальной точки, называется *количеством движения* точки.

Закон *Ньютона* говорит, что производная по времени количества движения точки равна действующей на эту точку силе $\mathbf{F}$:

$$\frac{dm\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$$

или

$$m\mathbf{w} = m\dot{\mathbf{v}} = m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F} \tag{56}$$

Умножим обе части уравнения (56) векторно на $\mathbf{r}$:

$$\mathbf{r}\times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\times\mathbf{F}$$

Преобразуем левую часть этого уравнения, воспользовавшись тождеством

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}}) = \dot{\mathbf{r}}\times m\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{r}\times m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{r}\times m\ddot{\mathbf{r}}$$

первый член пропадает в силу коллинеарности $\dot{\mathbf{r}}$ и $m\dot{\mathbf{r}}$.

Поэтому

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}\times m\dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{r}\times\mathbf{F} \tag{57}$$

Справа стоит момент силы относительно начала координат, слева же производная от момента количества движения $\mathbf{r}\times m\mathbf{v}$. Получили закон моментов количеств движения: производная по времени момента количества движения точки относительно точки O равна моменту действующей на точку силы относительно той же точки O.

Если сила центральная, т. е. проходит через постоянную точку, которую мы возьмем за начало координат, то $\mathbf{F}$ будет направлена по $\mathbf{r}$ в ту или другую сторону, так что $\mathbf{F} = k\mathbf{r}$, поэтому $\mathbf{r}\times\mathbf{F}$ для центральной силы равно 0 и из (57) мы выводим

$$\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}} = \text{const} = \mathbf{c} \tag{58}$$

Найдем геометрическое значение этого равенства. Прежде всего, умножая (58) скалярно на $\mathbf{r}$, найдем, что

$$\mathbf{c}\cdot\mathbf{r} = 0$$

Следовательно, движение происходит в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{c}$ и проходящей через центр силы. Величина $\mathbf{r}\times d\mathbf{r}$ представ-

ляет площадь параллелограмма, построенного на $\mathbf{r}$ и $d\mathbf{r}$, т. е. удвоенную площадь треугольного сектора, описанного радиусом-вектором $\mathbf{r}$ за время dt. Поэтому $\frac{1}{2}|\mathbf{r}\times\mathbf{r}|$ представляет величину *секториальной скорости*, и уравнение (58) говорит, что точка движется в постоянной плоскости с постоянной секториальной скоростью, так что радиус-вектор точки описывает в равные времена равные площади, почему интеграл (58) называют еще интегралом сохранения площадей.

Умножим, с другой стороны, основное уравнение (56) скалярно на $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{r}$:

$$m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}\,dt = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

но $\mathbf{v}\,dt = d\mathbf{v}$, следовательно

$$m(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}) = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

замечая далее, что

$$d\mathbf{v}^2 = d(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}) = 2(\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}), \quad (\mathbf{v}\cdot d\mathbf{v}) = d\frac{v^2}{2}$$

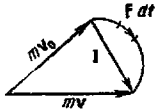
получим

$$d\frac{mv^2}{2} = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{59}$$

Выражение $\frac{1}{2}mv^2$ называется *живой силой* точки, скалярное же произведение $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ представляет *элементарную работу силы* $\mathbf{F}$ на перемещении $d\mathbf{r}$.

Формула (59) выражает так называемый закон живой силы в дифференциальной форме:

Приращение живой силы материальной точки за промежуток времени dt равно элементарной работе силы, действовавшей на точку, на перемещении точки $d\mathbf{r}$ за тот же промежуток времени.



Фиг. 42

Перепишем, наконец, закон Ньютона в следующей форме:

$$d m\mathbf{v} = \mathbf{F}\,dt$$

проинтегрируем теперь обе части этого равенства в пределах от момента t_0 до момента t, тогда получим:

$$m\mathbf{v} - m\mathbf{v}_0 = \int_{t_0}^{t}\mathbf{F}\,dt \tag{60}$$

Интеграл от силы $\mathbf{F}$ по времени, т. е.

$$\mathbf{I} = \int_{t_0}^{t}\mathbf{F}\,dt$$

называется импульсом силы $\mathbf{F}$ за промежуток времени $t - t_0$.

Формула (60) выражает закон количества движения: геометрическое приращение количества движения точки за некоторый промежуток времени равно импульсу силы, действовавшей на точку, за тот же промежуток времени. Фиг. 42 дает геометрическое выражение формулы (60).

Задача 71. Доказать, что если кривизна равна нулю, то кривая есть прямая.

По условию $\frac{1}{R} = 0$. Из формулы (37) выводим

$$\frac{d\sigma}{ds} = 0$$

Следовательно, интегрируя, имеем

$$\sigma = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{a} = \text{const}, \quad a = 1$$

Интегрируя еще раз, получим

$$\mathbf{r} = \mathbf{a}s + \mathbf{c}, \qquad \mathbf{c} = \text{const}$$

А это есть уравнение прямых линий.

Задача 72. Доказать, что если кручение равно нулю, то кривая есть плоская.

По условию $\frac{1}{T} = 0$. Из формулы (37) выводим

$$\frac{d\mathbf{b}}{ds} = 0$$

Следовательно,

$$\mathbf{b} = \mathbf{a} = \text{const}, \quad a = 1$$

Но так как $\mathbf{b}$ перпендикулярно к σ, т. е. $\mathbf{b} \cdot \sigma = 0$, то

$$\mathbf{a} \cdot \sigma = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{ds} = 0$$

Отсюда, интегрируя

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{r} = m$$

А это есть уравнение плоскости, в которой и должна лежать кривая.

Задача 73. Написать уравнение соприкасающейся плоскости в точке $M(\mathbf{r}_0)$.

Обозначим переменный радиус-вектор точки плоскости через $\mathbf{r}$; так как соприкасающаяся плоскость перпендикулярна к бинормали, то ее уравнение есть

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{b} = 0$$

или, так как $\mathbf{b} = \sigma \times \mathbf{n}$,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot (\sigma \times \mathbf{n}) = 0$$

Это можно записать в координатах в форме определителя

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \end{vmatrix} = 0$$

З а д а ч а 74. Определить кривизну и кручение винтовой линии.

Найдем сначала уравнение винтовой линии. Пусть винтовая линия нанесена на цилиндр радиуса a с осью z и пусть высота каждого витка винта равна $2\pi h$, тогда можно взять за уравнение винтовой линии

$$\mathbf{r} = a\cos t\,\mathbf{i} + a\sin t\,\mathbf{j} + ht\,\mathbf{k}$$

В самом деле, $a(\mathbf{i}\cos t + \mathbf{j}\sin t)$ представляет вектор длины a, лежащий в плоскости xy и составляющий с осью x угол t; вектор же $ht\,\mathbf{k}$ параллелен оси z и тоже пропорционален t, поэтому при развертывании боковой поверхности цилиндра в плоскость каждой абсциссе at будет отвечать ордината ht, так что мы получим прямую линию с углом наклона $\operatorname{arc\,tg}\frac{h}{a}$. Это есть угол подъема винта.

Прежде всего мы должны ввести в качестве независимой переменной длину дуги s. Если мы будем рассматривать параметр t, как время, то скорость точки будет

$$\dot{\mathbf{r}} = -a\sin t\,\mathbf{i} + a\cos t\,\mathbf{j} + h\mathbf{k}$$

величина же ее

$$v = \dot{s} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + h^2} = m$$

где

$$m = \sqrt{a^2 + h^2}$$

Отсюда

$$s = mt + \text{const}$$

Мы выберем постоянную равной нулю:

$$s = mt, \quad t = \frac{s}{m}$$

Теперь вводим вместо t параметр s:

$$\mathbf{r} = a\cos\frac{s}{m}\,\mathbf{i} + a\sin\frac{s}{m}\,\mathbf{j} + \frac{hs}{m}\,\mathbf{k}$$

Вычисляем

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = -\frac{a}{m}\sin\frac{s}{m}\,\mathbf{i} + \frac{a}{m}\cos\frac{s}{m}\,\mathbf{j} + \frac{h}{m}\,\mathbf{k}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = -\frac{a}{m^2}\cos\frac{s}{m}\,\mathbf{i} - \frac{a}{m^2}\sin\frac{s}{m}\,\mathbf{j}$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{a}{m^3}\sin\frac{s}{m}\,\mathbf{i} - \frac{a}{m^3}\cos\frac{s}{m}\,\mathbf{j}$$

Наконец, определяем R и T:

$$\frac{1}{R^2} = \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{a^2}{m^4}\left(\cos^2\frac{s}{m} + \sin^2\frac{s}{m}\right) = \frac{a^2}{m^4}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{a}{m^2} = \frac{a}{a^2+h^2}$$

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{a^2}{m^5}\left(\cos^2\frac{s}{m} + \sin^2\frac{s}{m}\right)\mathbf{k} = \frac{a^2}{m^5}\,\mathbf{k}$$

$$\frac{1}{T} = \frac{\frac{d\mathbf{r}}{ds}\cdot\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\times\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)}{\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\cdot\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}} = \frac{a^2 h}{m^6}\,\frac{m^4}{a^2} = \frac{h}{m^2} = \frac{h}{a^2+h^2}$$

Таким образом, кривизна и кручение винтовой линии постоянны. Кроме того, при положительном h у нас получилось положительное кручение. Но при положительном h и левой системе координат мы имеем левую винтовую линию. Таким образом, при левой системе координат левая винтовая линия имеет положительное кручение, в правой же системе координат положительным кручением будет обладать правая винтовая линия.

Задача 75. Доказать, что если взять близкую к точке M_0 точку кривой M, отстоящую от M_0 на бесконечно малом расстоянии δs, то расстояния точки M от нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей к кривой в точке M_0 будут соответственно порядка δs, δs^2, δs^3. При этом спрямляющей плоскостью называется плоскость, перпендикулярная к главной нормали, т. е. проходящая через σ и $\mathfrak{b}$.

Для доказательства разложим радиус-вектор точки в ряд Тейлора:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \left(\frac{d\mathbf{r}}{ds}\right)_0 \delta s + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2}\right)_0 \delta s^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3}\right)_0 \delta s^3 + \ldots$$

Но

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sigma, \qquad \frac{d^2\mathbf{r}}{ds^2} = \frac{\mathfrak{n}}{R}$$

$$\frac{d^3\mathbf{r}}{ds^3} = \frac{1}{R}\frac{d\mathfrak{n}}{ds} - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\mathfrak{n} = \frac{1}{R}\left\{-\frac{\sigma}{R} + \frac{\mathfrak{b}}{T}\right\} - \frac{1}{R^2}\frac{dR}{ds}\mathfrak{n}$$

$\left(\text{по формуле (37) для } \frac{d\mathfrak{n}}{ds}\right)$; следовательно,

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}_0 = \sigma_0 \delta s + \frac{1}{2R_0}\mathfrak{n}_0 \delta s^2 + \frac{1}{6}\left\{-\frac{\sigma_0}{R_0^2} + \frac{\mathfrak{b}_0}{R_0 T_0} - \frac{1}{R_0^2}\frac{dR_0}{ds}\mathfrak{n}_0\right\}\delta s^3 + \ldots$$

Заметим теперь, что расстояние точки M до нормальной плоскости равно проекции $\overline{M_0M} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ на касательную, т. е. равно

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\sigma_0 = (\sigma_0\cdot\sigma_0)\delta s + \ldots = \delta s + \ldots$$

расстояние до спрямляющей плоскости равно проекции $\overline{M_0M}$ на главную нормаль:

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathfrak{n}_0 = \frac{1}{2R_0}(\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{n}_0)\,\delta s^2 + \ldots = \frac{1}{2R_0}\delta s^2 + \ldots$$

[так как член $(\sigma_0\cdot\mathfrak{n}_0)\,\delta s = 0$ пропадает]. Наконец, расстояние до соприкасающейся плоскости равно проекции $\overline{M_0M}$ на бинормаль

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\cdot\mathfrak{b}_0 = \frac{1}{6R_0T_0}\delta s^3 + \ldots$$

так как остальные члены разложения, в силу равенств $\sigma_0\cdot\mathfrak{b}_0 = 0$ и $\mathfrak{n}_0\cdot\mathfrak{b}_0 = 0$, пропадают.

Задача 76. Найти выражения для $\frac{d}{dt}[\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$.

Ответ:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\cdot\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\times\mathbf{c}\right) + \mathbf{a}\cdot\left(\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)$$

Задача 77. Найти выражение для $\frac{d}{dt}[\mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]$.

Ответ:

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{c})+\mathbf{a}\times\left(\frac{d\mathbf{b}}{dt}\times\mathbf{c}\right)+\mathbf{a}\times\left(\mathbf{b}\times\frac{d\mathbf{c}}{dt}\right)$$

Задача 78. Точка движется по винтовой линии с постоянной скоростью v, найти ее ускорение.

Так как $v=\text{const}$, то касательное ускорение равно нулю; остается одно нормальное ускорение $\frac{v^2}{R}$, и так как по задаче 74

$$\frac{1}{R}=\frac{\alpha}{\alpha^2+h^2}$$

то

$$w=\frac{v^2\alpha}{\alpha^2+h^2}$$

Задача 79. Точка массы m движется под действием притягивающей силы $-\alpha\mathbf{r}$. Найти движение.

Составляем уравнение движения

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-\alpha\mathbf{r},\quad\text{или}\quad m\ddot{\mathbf{r}}+\alpha\mathbf{r}=0$$

Это линейное однородное уравнение можно решать тем же приемом, как и скалярное. А именно, чтобы избежать мнимостей, ищем решение в тригонометрической форме:

$$\mathbf{r}=\mathbf{A}\sin kt,\quad\frac{d\mathbf{r}}{dt}=k\mathbf{A}\cos kt,\quad\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}=-k^2\mathbf{A}\sin kt$$

Получаем для определения k уравнение:

$$(-mk^2+\alpha)\,\mathbf{A}\sin kt=0,\quad -mk^2+\alpha=0$$

Отсюда

$$k=\sqrt{\frac{\alpha}{m}}$$

Таким образом

$$\mathbf{A}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)$$

есть решение уравнения. Так же найдем, что и

$$\mathbf{B}\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)$$

является решением уравнения, где $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — произвольные постоянные векторы. Поэтому общее решение уравнения будет

$$\mathbf{r}=\mathbf{A}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)+\mathbf{B}\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)$$

Векторы A и B нужно определить из начальных условий, для чего вычислим сначала v:

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{A}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) - \mathbf{B}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)$$

Положим теперь $t = 0$:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{B}$$

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{A}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}, \quad \mathbf{A} = \sqrt{\frac{m}{\alpha}}\,\mathbf{v}_0$$

Следовательно,

$$\mathbf{r} = \sqrt{\frac{m}{\alpha}}\,\mathbf{v}_0\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) + \mathbf{r}_0\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) \tag{61}$$

В общем случае, когда $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{v}_0$ не коллинеарны, это есть уравнение эллипса, потому что, если ввести косоугольные координаты, ось x которых направлена по направлению $\mathbf{r}_0$, а ось y по направлению $\mathbf{v}_0$, то уравнение траектории в декартовых координатах найдется исключением t из уравнений:

$$x = r_0\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right), \quad y = \sqrt{\frac{m}{\alpha}}\,v_0\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)$$

в виде

$$\frac{x^2}{r_0^2} + \frac{y^2}{\frac{m}{\alpha}v_0^2} = 1$$

Векторы r и v дают во всякий момент времени направления сопряженных диаметров эллипса (61), ибо вектор v параллелен касательной к эллипсу в конце радиуса-вектора r, а диаметр, сопряженный с r, как раз параллелен этой касательной.

Чтобы найти величину сопряженного с r диаметра, заметим, что моменту

$$t + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}$$

отвечает радиус-вектор

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}\left(t + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\right) = \mathbf{A}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) + \mathbf{B}\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$= \mathbf{A}\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) - \mathbf{B}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) \tag{62}$$

Поэтому

$$\mathbf{v}(t) = \sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,\mathbf{r}\left(t + \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\right)$$

так что радиус-вектор (62) имеет как раз направление v, а значит, это и есть сопряженный с r полудиаметр как по величине, так и по направлению. Докажем два свойства сопряженных диаметров.

1. Сумма квадратов двух сопряженных полудиаметров есть величина постоянная, т. е. не зависит от того, какую именно пару сопряженных полудиаметров мы взяли.

В самом деле,

$$r^2 = \mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\sin^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) +$$

$$+ 2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\cos^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)$$

$$r_1^2 = \mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_1 = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{A})\cos^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) -$$

$$- 2(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) + (\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\sin^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)$$

Складывая, получим

$$r^2 + r_1^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B} = \text{const}$$

2. Площадь параллелограмма, построенного на двух сопряженных диаметрах, есть величина постоянная. Эта теорема является следствием постоянства $\mathbf{r}\times\mathbf{r}_1$:

$$\mathbf{r}\times\mathbf{r}_1 =$$

$$= \left[\mathbf{A}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) + \mathbf{B}\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)\right]\times\left[\mathbf{A}\cos\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) - \mathbf{B}\sin\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)\right] =$$

$$= (\mathbf{B}\times\mathbf{A})\left\{\cos^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right) + \sin^2\left(\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\,t\right)\right\} = \mathbf{B}\times\mathbf{A} = \text{const}$$

Задача 80. Показать, что если $\mathbf{a}(t)\times\frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0$, то $\mathbf{a}_1 = \text{const}$.

Задача 81. Дано, что радиус-вектор точки есть $\mathbf{r}(t) = r(\cos\varphi\mathbf{i} + \sin\varphi\mathbf{j})$, где r и φ суть функции времени t; найти проекции v_r и v_φ скорости $\mathbf{v}$ на направление радиуса и направление, перпендикулярное к нему. Найти проекции w_r и w_φ ускорения $\mathbf{w}$ на те же направления.

Ответ:

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}, \quad w_r = \ddot{r} - r\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}$$

Задача 82. Точка движется равномерно со скоростью v по кругу радиуса r с центром в начале координат; показать, что ускорение точки есть

$$\mathbf{w} = -\frac{v^2\mathbf{r}}{r^2}$$

Задача 83. Показать, что формулы Френе (37) могут быть получены из общей формулы

$$\frac{d\mathbf{a}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{a}$$

если в последней последовательно заменить $\mathbf{a}$ на $\boldsymbol{\sigma}$, $\mathbf{n}$, $\mathbf{b}$. Найти вектор $\boldsymbol{\omega}$.

Ответ:

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{T} + \frac{\mathbf{b}}{R}$$

Задача 84. Пусть твердое тело вращается около неподвижной точки O, так что единичные векторы $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, направленные по осям координатного триэдра $Oxyz$, связанного неизменно с твердым телом, являются функциями времени t. Доказать равенство

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt}\cdot\left(\frac{d\mathbf{j}}{dt}\times\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right)=0$$

§ 10. Дифференцирование вектора, отнесенного к подвижной системе координат

1. В механике, особенно в динамике твердого тела, часто приходится встречаться с дифференцированием вектора, заданного по отношению к подвижной системе координат, чаще всего связанной неизменно с движущимся твердым телом. Правила такого дифференцирования мы сейчас и рассмотрим.

В предыдущем параграфе мы рассмотрели движение точки, неизменно связанной с подвижной системой, и нашли, что ее скорость и ускорение выражаются формулами

$$\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r},\quad \mathbf{w}=\mathbf{w}_0+\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}+\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) \tag{1}$$

Теперь мы предположим, что точка M движется относительно подвижной координатной системы так, что, если единичные орты подвижной системы координат обозначить через $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, ее начало — через O, то вектор $\overrightarrow{OM}=\mathbf{r}$ будет иметь в подвижной системе координаты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, являющиеся функциями времени:

$$\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \tag{2}$$

Но так как система подвижная, то единичные орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ сами будут функциями времени, как было выяснено в § 9.

Введем еще неподвижную точку $\bar{O}$ и обозначим через $\bar{\mathbf{r}}_0$ — радиус-вектор точки O относительно $\bar{O}$ и через $\bar{\mathbf{r}}$ — радиус-вектор точки M относительно точки $\bar{O}$.

Тогда, очевидно, будет

$$\bar{\mathbf{r}}=\bar{\mathbf{r}}_0+\mathbf{r}=\bar{\mathbf{r}}_0+x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k} \tag{3}$$

ибо в треугольнике $\bar{O}OM$ сторона $\bar{O}M$ есть вектор $\bar{\mathbf{r}}$, стороны $\bar{O}O$ и OM — векторы $\bar{\mathbf{r}}_0$ и $\mathbf{r}$.

Абсолютная скорость точки M, которую мы будем обозначать через $\mathbf{v}_a$, получается, как обычно, дифференцированием радиуса-вектора $\bar{\mathbf{r}}$ относительно неподвижной точки $\bar{O}$ по времени:

$$\mathbf{v}_a=\frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt}=\frac{d\bar{\mathbf{r}}_0}{dt}+x\frac{d\mathbf{i}}{dt}+y\frac{d\mathbf{j}}{dt}+z\frac{d\mathbf{k}}{dt}+\frac{dx}{dt}\mathbf{i}+\frac{dy}{dt}\mathbf{j}+\frac{dz}{dt}\mathbf{k} \tag{4}$$

Если бы x, y, z были постоянными, мы получили бы скорость

$$\mathbf{v}_e = \frac{d\bar{r}_0}{dt} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} \tag{5}$$

точки, неизменно связанной с подвижной системой координат, почему эта часть абсолютной скорости называется переносной скоростью движения точки и обозначается через $\mathbf{v}_e$. В предыдущем параграфе мы нашли для нее следующее выражение:

$$\mathbf{v}_e = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{6}$$

где $\mathbf{v}_0$ — абсолютная скорость начала O подвижной системы, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор мгновенной угловой скорости подвижной системы координат.

Выясним теперь значение трех последних членов формулы (4).

Рассмотрим положение подвижной системы в момент t. Отметим, кроме точки M, еще ту точку M', связанную с подвижной системой, в которой будет находиться точка M в момент $t + \Delta t$, тогда вектор $\overrightarrow{MM'}$ представит, очевидно, вектор относительного перемещения точки M, а

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

будет вектором относительной скорости точки M. Мы будем его обозначать через $\mathbf{v}_r$. Так как

$$\overrightarrow{MM'} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k}$$

то

$$\mathbf{v}_r = \dot{x}\mathbf{i} + \dot{y}\mathbf{j} + \dot{z}\mathbf{k} \tag{7}$$

Поэтому формула (4) приводит к теореме: *вектор абсолютной скорости точки равен сумме векторов переносной и относительной скорости*

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_e + \mathbf{v}_r \tag{8}$$

Если начало подвижной системы координат O совпадает с $\bar{O}$, то

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}, \quad \mathbf{v}_0 = 0, \quad \mathbf{v}_e = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

и мы получаем формулу

$$\mathbf{v}_a = \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v}_r + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{9}$$

Отсюда

$$\mathbf{v}_r = \dot{\mathbf{r}} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{10}$$

2. Возьмем теперь любой вектор $\mathbf{a}(t)$. Отложим его от начала O подвижной системы координат, которое мы предположим совпадающим с $\bar{O}$, и будем рассматривать конец вектора $\mathbf{a}$ как движущуюся точку. Тогда относительную скорость конца вектора $\mathbf{a}$ можно назвать относительной производной вектора $\mathbf{a}$; обозначая ее в отличие от абсолютной

производной $\frac{da}{dt}$ через $\frac{d'a}{dt}$ найдем имеющую очень важное значение формулу

$$\frac{d'a}{dt} = \frac{da}{dt} - \omega \times a \quad \text{или} \quad \frac{da}{dt} = \frac{d'a}{dt} + \omega \times a \tag{11}$$

Если проекции вектора a на подвижные орты i, j, k обозначить через a_x, a_y, a_z, то относительная производная будет иметь компоненты $\dot{a}_x$, $\dot{a}_y$, $\dot{a}_z$, поэтому мы получаем следующую систему трех скалярных уравнений:

$$\begin{aligned} \left(\frac{da}{dt}\right)_x &= \dot{a}_x + \omega_y a_z - \omega_z a_y \\ \left(\frac{da}{dt}\right)_y &= \dot{a}_y + \omega_z a_x - \omega_x a_z \\ \left(\frac{da}{dt}\right)_z &= \dot{a}_z + \omega_x a_y - \omega_y a_x \end{aligned} \tag{12}$$

Выведем, наконец, формулу, дающую связь между абсолютным и относительным ускорением. Продифференцируем формулу (4)

$$\mathbf{w}_a = \frac{d\mathbf{v}_a}{dt} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2}\right) +$$

$$+ 2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right) + \left(\frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k}\right) \tag{13}$$

Если x, y, z постоянны, то их первые и вторые производные равны нулю. Поэтому первые четыре члена правой части дают ускорение точки, неизменно связанной с подвижной системой координат, поэтому эта часть абсолютного ускорения называется переносным ускорением и обозначается через $\mathbf{w}_e$:

$$\mathbf{w}_e = \frac{d^2\mathbf{r}_0}{dt^2} + x\frac{d^2\mathbf{i}}{dt^2} + y\frac{d^2\mathbf{j}}{dt^2} + z\frac{d^2\mathbf{k}}{dt^2} \tag{14}$$

Выражение для $\mathbf{w}_e$ дается формулой (1):

$$\mathbf{w}_e = \mathbf{w}_0 + \dot{\omega} \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}) \tag{15}$$

Последние три члена формулы (13) представляют, очевидно, относительное ускорение точки M, которое обычно обозначается через $\mathbf{w}_r$:

$$\mathbf{w}_r = \ddot{x}\mathbf{i} + \ddot{y}\mathbf{j} + \ddot{z}\mathbf{k} \tag{16}$$

Наконец, чтобы истолковать три средних члена формулы (13), вспомним, что имеем формулу

$$x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y\frac{d\mathbf{j}}{dt} + z\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \omega \times \mathbf{r}$$

значит, заменяя r на $\mathbf{v}_r$, вектор с компонентами $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, получаем:

$$2\left(\frac{dx}{dt}\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy}{dt}\frac{d\mathbf{j}}{dt} + \frac{dz}{dt}\frac{d\mathbf{k}}{dt}\right) = 2\omega \times \mathbf{v}_r \tag{17}$$

это выражение называется ускорением Кориолиса и обозначается через $\mathbf{w}_c$.

Таким образом получаем теорему: *вектор абсолютного ускорения точки является суммой трех векторов: вектора переносного ускорения, вектора относительного ускорения и вектора ускорения Кориолиса:*

$$\mathbf{w}_a = \mathbf{w}_e + \mathbf{w}_r + \mathbf{w}_c \tag{18}$$

§ 11. Функции от векторного аргумента. Скалярное и векторное поле. Поверхности уровня. Векторные линии

1. До сих пор мы рассматривали векторы или постоянные или изменяющиеся в зависимости от скалярного аргумента (времени). Теперь мы рассмотрим более сложный случай, когда с каждой точкой пространства (или части пространства) связывается значение некоторого скаляра или вектора. Рассматриваемая часть пространства называется тогда полем, скалярным или векторным, смотря по тому, какая функция, скалярная или векторная, изучается. Так, например, мы имеем в атмосфере скалярное поле давления, ибо каждой точке атмосферы отвечает некоторое значение давления. В реке мы имеем векторное поле скорости частиц воды и т. д.

Так как каждую точку поля можно определять ее радиусом-вектором, то задать скалярное или векторное поле значит привести в соответствие каждому радиусу-вектору $\mathbf{r}$ значение некоторой скалярной функции $\varphi(\mathbf{r})$ или некоторой векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$. Таким образом, в рассматриваемом случае независимой переменной является радиус-вектор $\mathbf{r}$.

Аналитически задание скалярной функции $\varphi(\mathbf{r})$ сводится к заданию функции $\varphi(x, y, z)$, от трех координат точки, задание векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ равносильно заданию трех скалярных функций $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$, $a_z(x, y, z)$, дающих компоненты вектора $\mathbf{a}$.

Очень часто приходится рассматривать скалярные или векторные функции, изменяющиеся с течением времени: $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$. Соответствующие поля называются тогда переменными или нестационарными; поля же, не меняющиеся с течением времени, называются постоянными или стационарными.

Мы всегда будем предполагать, если только не сделано особой оговорки, функции векторного аргумента непрерывными, т. е. будем считать, что разности $\varphi(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \varphi(\mathbf{r})$ или $\mathbf{a}(\mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}) - \mathbf{a}(\mathbf{r})$ могут быть сделаны по модулю сколь угодно малыми при достаточно малом $\Delta\mathbf{r}$.

2. Для наглядности представления имеет большое значение графическое изображение полей. Пусть мы имеем дело со скалярным полем, так что нам задана функция $\varphi(\mathbf{r})$ или что то же, функция $\varphi(x, y, z)$. Если нам задано нестационарное поле, то мы рассматриваем его в определенный момент времени. Пусть в некоторой точке $M_0(\mathbf{r}_0)$ функция $\varphi(\mathbf{r})$ принимает значение $\varphi_0 = \varphi(\mathbf{r}_0)$. Отметим все точки, в которых значение

функции равно φ_0. Эти точки, вообще говоря, заполнят некоторую поверхность или несколько раздельных поверхностей, которые называются поверхностями уровня или изоповерхностями (фиг. 43). Их уравнение в декартовых координатах, очевидно, имеет вид:

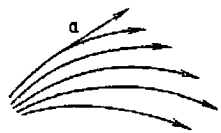
$$\varphi(x, y, z) = \text{const}$$

Например, на синоптических картах таким образом наносятся изобары, т. е. линии уровня для скалярного поля давления (линии, потому что здесь рассматривается двумерное пространство — поверхность земли). При этом изобары наносятся обычно через каждые 5 миллибаров (единицы давления), так что ряд последовательно идущих изобар отвечает значениям 1000, 1005, 1010, 1015 и т. д. миллибаров.

Фиг. 43

Если аналогичным образом провести поверхности уровня функции $\varphi(\mathbf{r})$, отвечающие равноотстоящим значениям функции, то получится картина, указывающая уже ряд свойств изучаемой функции. Так, например, места сближения двух последовательных изоповерхностей указывают на быстрое изменение здесь функции, причем очевидно, что это изменение происходит в направлении, перпендикулярном к изоповерхности, в то время как при перемещении вдоль самой поверхности значение функции совсем не меняется.

3. Рассмотрим теперь векторное поле. Введем для наглядного изображения его векторные линии, т. е. такие линии, во всякой точке которых вектор имеет направление касательной к линии. Приближенно мы можем построить эти линии следующим образом. Выберем какую-нибудь точку поля и отложим вдоль отвечающего этой точке вектора отрезок весьма малой длины ε; с концом этого отрезка поступим совершенно таким же способом и будем продолжать таким образом дальше; в результате получится ломаная линия, которая тем ближе будет представлять нашу векторную линию, чем меньше взято ε, и при бесконечно малом ε, т. е. в пределе, перейдет в саму векторную линию (фиг. 44).



Фиг. 44

Возьмем на векторной линии какую-нибудь точку $M(\mathbf{r})$, единичный вектор касательной к векторной линии есть $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$, но по условию вектор $\mathbf{a}$ в точке M тоже должен касаться векторной линии, следовательно, два вектора $\mathbf{a}$ и $\frac{d\mathbf{r}}{ds}$ коллинеарны, а значит

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{a} = 0 \qquad (1)$$

или, умножая на ds,

$$d\mathbf{r} \times \mathbf{a} = 0 \qquad (2)$$

Это есть дифференциальное уравнение векторных линий в векторной форме.

Если составляющие вектора $\mathbf{a}$ (r) суть $a_x(x, y, z)$, $a_y(x, y, z)$ и $a_z(x, y, z)$, то условие (2) параллельности касательной к векторной линии и самого вектора приводит к дифференциальным уравнениям векторных линий:

$$\frac{dx}{a_x} = \frac{dy}{a_y} = \frac{dz}{a_z} \tag{3}$$

Интегрирование этих уравнений введет две произвольные постоянные, так что мы получим двупараметренную совокупность векторных линий.

Однако задание векторных линий и ориентировка их дает нам только направление вектора во всякой точке поля, величину же вектора мы должны графически изобразить каким-либо другим способом. Можно, имея в виду, что величина вектора есть скаляр, рассматривать наше векторное поле еще как скалярное поле модуля вектора и построить соответствующие изоповерхности $\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} = \text{const}$. Но можно поступить иным способом, а именно, характеризовать величину вектора густотой проводимых линий. При этом густоту линий мы должны измерять, проводя через каждую точку маленькую ортогональную к линии площадку, отсчитывая на ней число пересечений ее векторными линиями и относя это число к единице площади. Нужно отметить, что, вообще говоря, придется часть линий заканчивать внутри поля, а часть начинать внутри его. Мы впоследствии укажем то условие, при котором этого явления не будет.

Задача 85. Найти векторные линии для векторного поля $\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{r^3}$.

Ответ. Прямые линии, проходящие через начало координат.

Задача 86. Найти векторные линии для случая векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{c} \times \mathbf{r}$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

Ответ. Окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных к прямой, проходящей через начало координат и имеющей направление вектора $\mathbf{c}$; центры этих окружностей лежат на этой прямой.

§ 12. Градиент. Его свойства. Линейный интеграл. Потенциал

1. Мы рассмотрели выше вопрос о дифференцировании вектора по скалярному аргументу. Вопрос о дифференцировании по векторному аргументу гораздо более сложен, особенно в случае векторного поля.

Рассмотрим скалярное поле функции $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$. Выберем некоторую точку поля M (r); проведем через нее какую-либо прямую и обозначим через $\mathbf{s}$ единичный вектор, направленный по этой прямой. Возьмем на этой прямой соседнюю с M точку M' ($\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}$), где $\varepsilon = MM'$ — бесконечно малая величина; при переходе от M к M' функция φ приобретает приращение $\Delta\varphi = \varphi(M') - \varphi(M) = \varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r})$. Составим,

как это естественно сделать, отношение $\frac{\Delta\varphi}{\varepsilon}$ и перейдем к пределу, устремив ε к 0, полученный предел назовем *производной* φ *по направлению* s *в точке* M и обозначим через $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \lim_{MM'\to 0} \frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{MM'} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r})}{\varepsilon} \tag{1}$$

Знание производной $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ для любого направления s позволяет вычислить во всех точках, соседних с точкой M, значение функции φ с точностью до членов второго порядка малости.

Для вычисления $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ введем систему координат x, y, z и заметим, что единичный вектор s имеет составляющими

$$s_x = \cos(\mathbf{s}, x), \quad s_y = \cos(\mathbf{s}, y), \quad s_z = \cos(\mathbf{s}, z) \tag{2}$$

Поэтому

$$\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x + \varepsilon\cos(\mathbf{s}, x),\ y + \varepsilon\cos(\mathbf{s}, y),\ z + \varepsilon\cos(\mathbf{s}, z)) - \varphi(x, y, z)$$

Эту разность можно рассматривать, как сложную функцию ε. Разложим ее в ряд Тейлора по возрастающим степеням ε, причем ограничимся членом, содержащим первую степень ε:

$$\varphi(\mathbf{r} + \varepsilon\mathbf{s}) - \varphi(\mathbf{r}) = \varepsilon\left[\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\mathbf{s}, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\mathbf{s}, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\mathbf{s}, z) + \eta\right]$$

где η — бесконечно малая величина (как мы условились уже раньше, мы будем всегда считать все вводимые производные существующими и непрерывными).

По разделении на ε и переходе к пределу, мы получим требуемую формулу

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\cos(\mathbf{s}, x) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\cos(\mathbf{s}, y) + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\cos(\mathbf{s}, z) \tag{3}$$

Заметим, что эту же самую формулу мы получили бы, если бы при определении производной $\frac{\partial\varphi}{\partial s}$ мы брали соседнюю с M точку M' не на луче, проходящим через точку M в направлении s, а на какой-либо кривой ML, касательная к которой в точке M имеет направление s. Обозначая через s длину дуги, отсчитываемой по этой кривой от точки M, мы будем иметь, что функция $\varphi(x, y, z)$ будет сложной функцией от s через посредство x, y, z; по правилу дифференцирования сложных функций мы получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

и так как

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\mathbf{s}, x), \qquad \frac{dy}{ds} = \cos(\mathbf{s}, y), \qquad \frac{dz}{ds} = \cos(\mathbf{s}, z)$$

то опять получается соотношение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\cos(s, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\cos(s, y) + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\cos(s, z)$$

Но вспомним правило преобразования составляющих вектора a (формула (1) § 4):

$$a_s = a_x \cos(s, x) + a_y \cos(s, y) + a_z \cos(s, z) \tag{4}$$

Отсюда видно, что если мы определим вектор, составляющие которого по основным ортам суть $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, то его составляющая по любому направлению s будет $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$.

Назовем этот вектор г р а д и е н т о м φ в точке M и обозначим символом grad φ. Его составляющие

$$\operatorname{grad}_x \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \operatorname{grad}_y \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \operatorname{grad}_z \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \quad \operatorname{grad}_s \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} \tag{5}$$

Таким образом

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{6}$$

Этот вектор, конечно, не зависит от выбора системы координат x, y, z, так как его составляющие по любому направлению были нами определены непосредственно.

Величина grad φ, очевидно, равна

$$|\operatorname{grad} \varphi| = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2} \tag{7}$$

Производная по любому направлению s равна проекции grad φ на это направление, следовательно

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \operatorname{grad} \varphi = |\operatorname{grad} \varphi| \cos(\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{s}) \tag{8}$$

Из этой формулы видно, что $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$ достигает наибольшего значения для направления s, совпадающего как раз с направлением grad φ, причем это наибольшее значение равно величине grad φ. Поэтому мы можем дать другое определение градиента:

Градиентом φ называется вектор, имеющий направление быстрейшего увеличения φ и по величине равный производной по этому направлению. Из других обозначений градиента φ укажем, как наиболее употребляемое, $\nabla \varphi$, где знак ∇ читается «набла».

При этом обозначении мы будем иметь

$$\nabla \varphi = \mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{9}$$

Из этой формулы видно, что ∇ можно рассматривать, как *дифференциальный оператор*

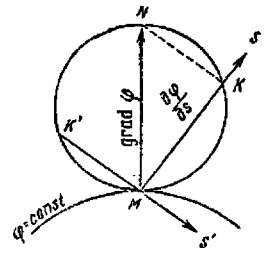
$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{10}$$

который, будучи применен к скаляру φ, дает grad φ. Этот оператор, который можно рассматривать также как символический вектор, будет нами в дальнейшем рассмотрен более подробно. Его называют иногда *оператором Гамильтона*.

Проведем через точку M поверхность уровня функции φ и докажем, что вектор градиента φ направлен по нормали к этой поверхности уровня в точке M. В самом деле, так как на поверхности уровня $\varphi = \text{const}$, то производная по всякому направлению s, лежащему в касательной плоскости к поверхности уровня в точке M, равна нулю, следовательно, для всякого такого направления по (8)

$$\cos(\operatorname{grad}\varphi, s) = 0$$

что может быть только, если grad φ *перпендикулярен к поверхности уровня в точке* M.



Фиг 45

Далее очевидно, что grad φ *направлен в ту сторону нормали, куда* φ *возрастает*.

Связь между градиентом функции φ и производной от φ по различным направлениям имеет очень простое геометрическое истолкование.

Проведем через точку M (фиг. 45) поверхность уровня $\varphi = \text{const}$, к этой поверхности уровня восставим в точке M нормаль MN и отложим по этой нормали вектор $\overline{MN} = \operatorname{grad}\varphi$. Построим далее на MN, как на диаметре, сферу и рассмотрим какой-нибудь луч Ms, проходящий через точку M и имеющий направление s. Пусть этот луч пересечет сферу в точке K. Так как угол при K в $\triangle MNK$ есть прямой (по известному свойству окружности), то MK является проекцией MN на направление Ms; но проекция grad φ на какое-либо направление есть производная φ по этому направлению, следовательно, мы получаем, что

$$MK = \frac{\partial\varphi}{\partial s}$$

Если бы луч Ms' не пересекал сферу, то, продолжив его в другую сторону, мы нашли бы точку K' и получили бы, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s'} = -MK'$$

Отметим еще, что если единичный вектор нормали к поверхности уровня обозначить через n, а производную от функции φ по направлению этой нормали через $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, то, очевидно, будет

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial n}\mathbf{n}$$

Из формулы

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathrm{s} \cdot \mathrm{grad} \varphi$$

вытекает, если через $d\mathbf{r} = \mathrm{s}\, ds$ обозначить бесконечно малый вектор, идущий из точки M в направлении s, следующее соотношение:

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial s} ds = \mathrm{s}\, ds \cdot \mathrm{grad}\, \varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi$$

Иначе это соотношение можно получить следующим образом. Напишем выражение полного дифференциала функции φ

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz$$

Но, с другой стороны, мы имеем

$$\mathrm{grad}\, \varphi = \mathbf{i} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\, dx + \mathbf{j}\, dy + \mathbf{k}\, dz$$

Составляя по известному правилу скалярное произведение этих двух векторов, мы легко получим

$$d\varphi = d\mathbf{r}\ \mathrm{grad}\, \varphi \tag{11}$$

Это соотношение характерно для grad φ. Если мы найдем такой вектор a, что для произвольного $d\mathbf{r}$ будет

$$d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} \tag{12}$$

то можем утверждать, что $\mathbf{a} = \mathrm{grad}\, \varphi$, ибо $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a} = d\mathbf{r} \cdot \mathrm{grad}\, \varphi$ приводит к соотношению $d\mathbf{r} \cdot (\mathbf{a} - \mathrm{grad}\, \varphi) = 0$; откуда видно, что $\mathbf{a} - \mathrm{grad}\, \varphi$ перпендикулярно к любому направлению, что может быть только, если $\mathbf{a} = \mathrm{grad}\, \varphi$.

2. Разберем несколько примеров вычисления градиента.

Самым важным случаем является тот, когда φ зависит только от расстояния точки до некоторой определенной точки, которую мы выберем за начало координат.

Итак, пусть

$$\varphi = \varphi(r) \tag{13}$$

Поверхностями уровня служат концентрические сферы с центром в начале координат. Нормаль к поверхности уровня совпадает с радиусом-вектором, поэтому по величине grad φ равен

$$\left| \frac{d\varphi}{dr} \right| = |\varphi'(r)|$$

а направлен grad φ в ту сторону, куда φ возрастает, т. е. при положительном $\varphi'(r)$ ортом grad φ служит $\frac{\mathbf{r}}{r}$, а при отрицательном $\varphi'(r)$ ортом grad φ является $-\frac{\mathbf{r}}{r}$.

Таким образом, всегда будет

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r} \tag{14}$$

Этот же результат можно вывести и непосредственным вычислением, рассматривая φ, как сложную функцию x, y, z, заданную через посредство r:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\partial r}{\partial x}$$

Но

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{r}$$

Поэтому

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{x}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{y}{r}\frac{d\varphi}{dr}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{z}{r}\frac{d\varphi}{dr}$$

и значит,

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{r}\frac{d\varphi}{dr} = \frac{d\varphi}{dr}\frac{\mathbf{r}}{r}$$

Наконец, мы можем вычислить $\operatorname{grad}\varphi(r)$ и третьим способом, опираясь на формулу (12). Для этого составляем

$$d\varphi(r) = \varphi'(r)\,dr$$

Но, с другой стороны, заметим, что, так как

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{r} = r^2$$

то

$$d(\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}) = 2(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}) = 2r\,dr$$

Следовательно,

$$dr = \frac{1}{r}(\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r})$$

Поэтому

$$d\varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$$

Отсюда, в силу сказанного о формуле (12), сразу можем написать

$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \frac{\varphi'(r)}{r}\mathbf{r}$$

Принимая, например

$$\varphi(r) = r, \quad \frac{1}{r}, \quad r^n$$

легко докажем, что

$$\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r} \tag{15}$$

$$\operatorname{grad}\frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \tag{16}$$

$$\operatorname{grad} r^n = nr^{n-2}\mathbf{r} \tag{17}$$

Прежде чем переходить к другим примерам, докажем основные в теории градиента формулы

$$\operatorname{grad}(\varphi + \psi) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{grad}\psi \tag{18}$$

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi \operatorname{grad}\psi + \psi \operatorname{grad}\varphi \tag{19}$$

$$\operatorname{grad} F(\varphi) = F'(\varphi) \operatorname{grad}\varphi \tag{20}$$

Эти формулы являются почти очевидными, ибо, проектируя, например, обе части равенства (18) на какое-либо направление s, мы получаем

$$\frac{\partial(\varphi + \psi)}{\partial s} = \frac{\partial\varphi}{\partial s} + \frac{\partial\psi}{\partial s}$$

что, очевидно, представляет собой тождество — производная суммы равна сумме производных.

Однако, несмотря на свой простой характер, формула (18) является очень важной, потому что на ней основано *сложение векторных полей*.

Если мы имеем два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, являющихся градиентами двух функций

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi, \quad \mathbf{b} = \operatorname{grad}\psi$$

то вектор

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

будет градиентом функции

$$\chi = \varphi + \psi$$

Пусть теперь мы имеем поверхности уровня функции φ, построенные для равноотстоящих значений φ:

$$\varphi = \ldots, \varphi_0 - 3\alpha, \varphi_0 - 2\alpha, \varphi_0 - \alpha, \varphi_0, \varphi_0 + \alpha, \varphi_0 + 2\alpha, \varphi_0 + 3\alpha, \ldots$$

и поверхности уровня функции ψ, построенные для равноотстоящих значений ψ, с той же разностью α между двумя смежными значениями

$$\psi = \ldots, \psi_0 - 3\alpha, \psi_0 - 2\alpha, \psi_0 - \alpha, \psi_0, \psi_0 + \alpha, \psi_0 + 2\alpha, \psi_0 + 3\alpha, \ldots$$

Тогда на поверхности уровня $\varphi + \psi = \varphi_0 + \psi_0$ будут лежать линии пересечения поверхностей

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_0 && \text{и} \quad \psi = \psi_0 \\ &\varphi = \varphi_0 + \alpha && \text{и} \quad \psi = \psi_0 - \alpha \\ &\varphi = \varphi_0 - \alpha && \text{и} \quad \psi = \psi_0 + \alpha \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Точно так же поверхности уровня $\varphi + \psi = \varphi_0 + \psi_0 + \alpha$ будут принадлежать линии пересечения поверхностей

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi_0 + \alpha && \text{и} \quad \psi = \psi_0 \\ &\varphi = \varphi_0 && \text{и} \quad \psi = \psi_0 + \alpha \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

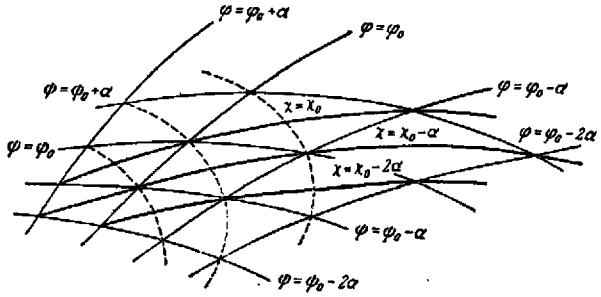
Отсюда вытекает приближенный способ построения поверхностей уровня функции χ, который мы поясним фиг. 46. На этом чертеже нанесены линии уровня двух семейств

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const}$$

Линии уровня

$$\chi = \text{const}$$

получаются, если провести диагональные кривые для получившейся серии криволинейных четырехугольников: легко сообразить, что диагональные кривые другой системы (пунктирные) являются линиями уровня функции $\varphi - \psi$.



Фиг. 46

В качестве примера возьмем в плоскости два фокуса A и B; расстояние переменной точки P до фокуса A обозначим через r_1, а расстояние той же точки до фокуса B обозначим через r_2.

Если теперь взять $\varphi = r_1$, то линиями уровня функции φ будут служить концентрические окружности с центром в точке A; точно так же для $\psi = r_2$ линиями уровня будут концентрические окружности с центром в точке B.

Если теперь, по предыдущему правилу, построить линии уровня функции $\chi = \varphi + \psi = r_1 + r_2$, то мы, очевидно, получим эллипсы с фокусами A и B; в качестве же линий уровня функции $\chi = \varphi - \psi = r_1 - r_2$ получатся, очевидно, гиперболы с теми же фокусами.

В качестве второго примера рассмотрим векторное поле $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$, где

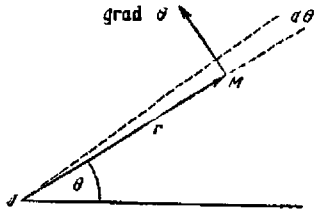
$$\varphi = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}$$

причем r_1 и r_2 опять расстояния переменной точки P до двух фокусов A и B. В электростатике такое поле получается в том случае, если в точках A и B находятся отрицательные электрические заряды одинаковой величины. Чтобы построить графически поле потенциала φ, мы строим в плоскости чертежа, которой принадлежат точки A и B, семейство окружностей с центрами в точках A и B и с радиусами R, $\frac{R}{2}$, $\frac{R}{3}$, $\frac{R}{4}$, ...

(так как поле симметрично относительно прямой AB, достаточно рассмотреть поле только в этой плоскости). Проводя опять диагональные кривые, мы получим линии уровня $\varphi = \text{const}$.

В каждой точке $\operatorname{grad}\varphi$ направлен по нормали к линии уровня. При построении нужно брать R большим, например, равным $R = 10AB$, чтобы сетка кривых получилась достаточно густая.

Но представляет большой интерес отыскать векторные линии вектора $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$. В только что рассмотренном случае это будут силовые линии, происходящие от двух одинаковых зарядов, находящихся в точках A и B. Укажем способ построения этих силовых линий, который может быть применен и к целому ряду других случаев.



Фиг 47

Для этого нам предварительно надо найти градиент еще одной функции, а именно, рассматривая в плоскости полярные координаты θ и r точки M (фиг. 47), мы можем рассматривать θ как функцию точки M. Линиями уровня этой функции θ являются, очевидно, полупрямые, выходящие из полюса O полярной системы.

Поэтому $\operatorname{grad}\theta$ направлен по перпендикуляру к OM. Чтобы найти его величину, достаточно заметить, что бесконечно малому приращению угла $d\theta$ соответствует расстояние между двумя бесконечно близкими линиями уровня, равное $dn = r\,d\theta$, поэтому мы имеем:

$$|\operatorname{grad}\theta| = \frac{d\theta}{dn} = \frac{1}{r}$$

Итак, вектор $\operatorname{grad}\theta$ направлен по перпендикуляру к OM (конечно в сторону возрастания θ) и по численной величине равен $\frac{1}{r}$. Сравним его с вектором $\operatorname{grad} r = \frac{\mathbf{r}}{r}$; последний направлен по OM и по численной величине равен 1. Отсюда мы можем вывести заключение, что если мы повернем вектор $\operatorname{grad} r$ на 90° в направлении возрастающих углов θ, то получим вектор $r\operatorname{grad}\theta$.

Применим этот результат к нашей задаче. Мы имеем

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi = -\frac{1}{r_1^2}\operatorname{grad} r_1 - \frac{1}{r_2^2}\operatorname{grad} r_2$$

Повернем теперь в каждой точке этот вектор на 90° против часовой стрелки. Вводя углы θ_1 и θ_2 (фиг. 48), мы получим новый вектор $\mathbf{b}$, для которого, согласно предыдущему, будем иметь выражение

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{r_1}\operatorname{grad}\theta_1 - \frac{1}{r_2}\operatorname{grad}\theta_2$$

Но если расстояние точки P до прямой AB обозначить через h, то, очевидно,

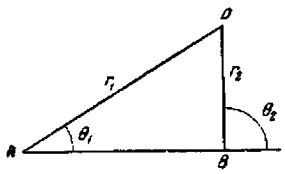
$$r_1 \sin \theta_1 = h, \quad r_2 \sin \theta_2 = h$$

и, следовательно, предыдущее выражение можно переписать, пользуясь формулами (20) и (18), так:

$$\mathbf{b} = -\frac{1}{h}(\sin \theta_1 \operatorname{grad} \theta_1 + \sin \theta_2 \operatorname{grad} \theta_2) = \frac{1}{h}\operatorname{grad}(\cos \theta_1 + \cos \theta_2)$$

Ясно теперь, что если мы рассмотрим функцию точки

$$\psi = \cos \theta_1 + \cos \theta_2$$



Фиг. 48

то вектор $\mathbf{b}$ будет всюду направлен по нормалям к линиям уровня функции ψ, а следовательно, вектор $\mathbf{a}$, перпендикулярный к вектору $\mathbf{b}$, будет направлен всюду по касательной к линии уровня функции ψ. А это по самому определению векторных линий означает, что линии уровня функции ψ являются векторными линиями вектора $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$, т. е. искомыми силовыми линиями. Для их графического построения нужно, согласно предыдущему, начертить хотя бы систему прямых

$$\cos \theta_1 = 0, \quad \pm 0{,}1, \quad \pm 0{,}2, \ldots, \pm 1$$

затем систему прямых

$$\cos \theta_2 = 0, \quad \pm 0{,}1, \quad \pm 0{,}2, \ldots, \pm 1$$

и затем произвести графическое сложение.

Совершенно аналогично можно рассмотреть случай электростатического поля, происходящего от двух произвольных зарядов одинакового или равного знака, чему соответствует функция

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2}$$

и целый ряд других примеров.

Задача 87. Вычислить $\operatorname{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r})$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор. Так как

$$\varphi = \mathbf{c} \cdot \mathbf{r} = c_x x + c_y y + c_z z$$

то

$$\operatorname{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z} = c_x \mathbf{i} + c_y \mathbf{j} + c_z \mathbf{k} = \mathbf{c}.$$

Другой способ вычисления, более короткий, основывается на том, что если $d\varphi = d\mathbf{r} \cdot \mathbf{a}$, то $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$.

В нашем случае $d\varphi = d(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c} \cdot d\mathbf{r}$, следовательно,

$$\operatorname{grad}(\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}) = \mathbf{c}$$

З а д а ч а 88. Вычислить $\operatorname{grad} |\mathbf{c}\times\mathbf{r}|^2$, где $\mathbf{c}$ — постоянный вектор.

Вычисляем $d(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{r}) = 2(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{c}\times d\mathbf{r})$. Положим на время $\mathbf{c}\times\mathbf{r} = \mathbf{b}$, тогда в векторно-скалярном произведении $\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times d\mathbf{r})$ можно произвести циклическую перестановку векторов

$$\mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times d\mathbf{r}) = d\mathbf{r}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = d\mathbf{r}\cdot[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot\mathbf{c}]$$

значит

$$d[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{r})] = d\mathbf{r}\cdot 2[(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{c}]$$

Это показывает, что

$$\operatorname{grad}|\mathbf{c}\times\mathbf{r}|^2 = 2(\mathbf{c}\times\mathbf{r})\times\mathbf{c} = 2\mathbf{r}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{c}) - 2\mathbf{c}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{c})$$

З а д а ч а 89. Если $\varphi(u, v)$ есть сложная функция от $\mathbf{r}$ через посредство двух вспомогательных функций u и v, то доказать формулу

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial u}\operatorname{grad} u + \frac{\partial\varphi}{\partial v}\operatorname{grad} v$$

З а д а ч а 90. Воспользовавшись тем, что эллипс $r_1 + r_2 = 2a$ есть линия уровня для функции $\varphi = r_1 + r_2$, где r_1 и r_2 суть расстояния переменной точки до двух фокусов (длины радиус-векторов), доказать, что нормаль к эллипсу делит пополам угол между радиусами-векторами.

З а д а ч а 91. Решить задачу, аналогичную предыдущей, для гиперболы $r_1 - r_2 = 2a$, а также для параболы $r - x = p$ с фокусом в начале координат.

З а д а ч а 92. Найти геометрический способ построения касательной к овалам Кассини

$$r_1 r_2 = a^2$$

где r_1 и r_2 суть расстояния переменной точки до двух фокусов A и B, воспользовавшись тем, что эти кривые суть линии уровня для функции $r_1 r_2$.

О т в е т. Соединив точку M кривой с фокусами A и B, отложим на продолжении AM от точки M отрезок $MK = BM$ а на продолжении BM отрезок $ML = AM$. Диагональ параллелограма, построенного на MK и ML, и будет нормалью к овалу Кассини в точке M.

З а д а ч а 93. Ра смотреть линии уровня и векторные линии для поля $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$, где φ $\lg r_1 - \lg r_2$, причем r_1 и r_2 — расстояния переменной точки P до двух фокусов A и B.

О т в е т. Линии уровня — окружности $r_1/r_2 = \text{const}$, векторные линии — окружности $\theta_1 - \theta_2 = \text{const}$, проходящие через точки A и B.

З а д а ч а 94. Имеется скалярное поле φ в плоскости. Зная производные по двум направлениям $\partial\varphi/\partial s_1$ и $\partial\varphi/\partial s_2$ в некоторой точке M, найти геометрическим построением $\operatorname{grad}\varphi$ в этой точке.

О т в е т. Отложим от точки M в направлении s_1 отрезок $MK = \partial\varphi/\partial s_1$ если $\partial\varphi/\partial s_1$ отрицательно, то откладываем отрезок $MK = |\partial\varphi/\partial s_1|$ в

направлении, противоположном направлению s_1) и восставляем в точке K перпендикуляр KP к MK; аналогичио поступаем с направлением s_2; если точка пересечения этих двух перпендикуляров есть P, то вектор MP будет по величине и направлению представлять grad φ.

Задача 95. Имеются три заданные точки: M_1, M_2, M_3. Требуется найти такую точку P, чтобы сумма расстояний $M_1P + M_2P + M_3P$ была минимальной.

Прежде всего ясно, что точка P должна лежать в плоскости $M_1M_2M_3$. Введем обозначения $M_1P = r_1$, $M_2P = r_2$, $M_3P = r_3$.

Если рассмотреть функцию

$$\varphi = r_1 + r_2 + r_3$$

то ясно, что в окрестности той точки P, где эта функция принимает минимальное значение, линии уровня должны быть замкнутыми кривыми, охватывающими точку P, так что в самой точке P необходимо должно быть

$$\operatorname{grad} \varphi = 0$$

Это приводит к условию

$$\operatorname{grad} r_1 + \operatorname{grad} r_2 + \operatorname{grad} r_3 = 0$$

или

$$\frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + \frac{\mathbf{r}_2}{r_2} + \frac{\mathbf{r}_3}{r_3} = 0$$

Но если сумма трех векторов равна нулю, то из этих векторов может быть составлен замкнутый треугольник. Но в даином случае все три вектора являются единичными, следовательно, треугольник будет равносторонний, а потому все углы его равняются 60°. Поэтому мы приходим к заключению, что искомая точка P обладает тем свойством, что все три угла M_1PM_2, M_2PM_3, M_3PM_1 равны 120°, т. е. все эти отрезки M_1M_2, M_2M_3, M_3M_1 видны из точки P под углом 120°, что дает возможность простого геометрического построения точки P.

Задача 96. Имеются n заданных точек M_i ($\mathbf{r}_i$) в пространстве. Требуется найти такую точку P ($\mathbf{r}$), чтобы сумма квадратов расстояний

$$\sum_{i=1}^{n} M_iP^2$$

была минимальной.

Ответ:

$$\mathbf{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{r}_i$$

Задача 97. Вывести закон преломления света на границе KK раздела двух однородных сред, зная, что коэффициент преломления второй среды относительно первой равен n, и что поэтому свет распространяется в первой среде со скоростью, в n раз большей, чем во второй. Кроме

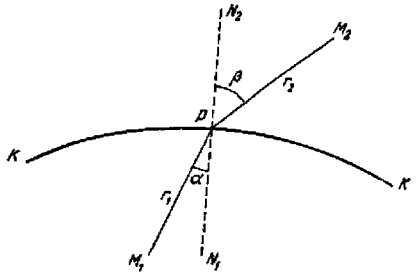
того известно, что луч M_1PM_2 должен иметь такую форму, чтобы время прохождения светом расстояния между точками M_1 и M_2 было минимальным (фиг. 49).

Если обозначить $M_1P = r_1$, $M_2P = r_2$, то задача сводится к нахождению минимума функции

$$\varphi = r_1 + nr_2$$

если точка P перемещается по кривой KK; но известно, что в точке минимума P должно быть

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = 0$$



Фиг. 49

если s есть направление касательной к KK в точке P. Поэтому в точке P вектор grad φ должен иметь направление нормали к KK; но

$$\operatorname{grad} \varphi = \operatorname{grad} r_1 + n \operatorname{grad} r_2 = \frac{\mathbf{r}_1}{r_1} + n\frac{\mathbf{r}_2}{r_2}$$

Легко отсюда вывести, что если α — угол падения луча, а β — угол преломления, то

$$\sin \alpha = n \sin \beta$$

Задача 98. Вычислить grad $(x^m y^n)$.

Ответ:

$$x^{m-1}y^{n-1}(my \operatorname{grad} x + nx \operatorname{grad} y)$$

Задача 99. Дано семейство поверхностей уровня

$$\varphi(\mathbf{r}) = \text{const}$$

Написать векторное уравнение нормали к поверхности уровня, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, и уравнение касательной плоскости в этой точке.

Ответ. Уравнение нормали

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \times \operatorname{grad} \varphi = 0$$

уравнение касательной плоскости

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \operatorname{grad} \varphi = 0$$

где значение grad φ берется в точке M_0.

Задача 100. Показать, что grad φ есть полярный вектор.

3. Вектор, являющийся градиентом некоторого скаляра φ, называется **потенциальным вектором**, а поле такого вектора называется **потенциальным**. Величина же φ называется **потенциалом**.

Потенциальные векторы обладают особыми, характеризующими их свойствами, связанными с понятием линейного интеграла вектора вдоль некоторой кривой.

Пусть нам задано векторное поле вектора $\mathbf{a}$; возьмем какую-нибудь кривую L, соединяющую две точки M_0 $(\mathbf{r}_0)$ и M_1 $(\mathbf{r}_1)$, разобьем ее на бесконечно малые элементы, которые заменим хордами $d\mathbf{r}$, составим далее скалярные произведения $\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$, где $\mathbf{a}$ есть вектор поля, отвечающий началу вектора $d\mathbf{r}$. Составим далее сумму всех таких скалярных произведений и перейдем к пределу, устремляя все элементы $d\mathbf{r}$ к нулю. Полученный предел называется *линейным интегралом вектора* $\mathbf{a}$ *вдоль кривой* L и обозначается через

$$\int_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$$

Этот интеграл часто пишут в двух других формах. Вспоминая прежде всего, что $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = ba_b$, замечая, что $|d\mathbf{r}| = ds$, где ds — элемент длины кривой, и обозначая через a_s — касательную составляющую вектора $\mathbf{a}$, мы будем иметь, что

$$\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = a_s ds$$

и, следовательно, мы можем написать

$$\int_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_L a_s ds$$

Воспользовавшись же выражением $\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$ в проекциях на оси координат

$$\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = a_x dx + a_y dy + a_z dz$$

мы будем иметь

$$\int_L \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_L (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

Для вычисления этого последнего интеграла обычно выражают координаты точки кривой L функциями какого-либо параметра и сводят дело к вычислению простого интеграла. Например, вычислим интеграл

$$\int_L (x\,dy - y\,dx)$$

взятый по контуру круга

$$x^2 + y^2 = R^2$$

Координаты точек этой окружности можно выразить функциями одного параметра θ

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta$$

причем, когда θ меняется от 0 до 2π, то точка описывает всю окружность. Мы имеем далее

$$dx = -R\sin\theta\,d\theta, \qquad dy = R\cos\theta\,d\theta$$

и, следовательно,

$$x\,dy - y\,dx = R\cos\theta\, R\cos\theta\, d\theta + R\sin\theta\, R\sin\theta\, d\theta = R^2\, d\theta$$

$$\int_L (x\,dy - y\,dx) = \int_0^{2\pi} R^2\, d\theta = 2\pi R^2$$

Линейный интеграл вектора по замкнутой кривой называется еще циркуляцией вектора по этой кривой.

Если взять за вектор а вектор силы F, действующей на материальную точку, а за L — траекторию точки, то

$$\int_L \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

дает работу силы при перемещении точки из M_0 в M_1, так как

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = F\,|d\mathbf{r}|\cos|(\mathbf{F},\, d\mathbf{r})|$$

означает элементарную работу силы на перемещении $d\mathbf{r}$.

Вообще говоря, линейный интеграл вектора зависит от того пути L, который соединяет крайние точки M_0 и M_1. Иначе обстоит дело с потенциальными векторами.

Докажем следующую теорему: *линейный интеграл вектора* grad φ *вдоль какой-либо кривой* L, *соединяющей точки* $M_0(\mathbf{r}_0)$ *и* $M_1(\mathbf{r}_1)$, *равен разности значений функции* φ *в точках* M_1 *и* M_0.

В самом деле

$$\int_L \operatorname{grad}\varphi\cdot d\mathbf{r} = \int_L d\varphi = \varphi(\mathbf{r}_1) - \varphi(\mathbf{r}_0) = \varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_0, y_0, z_0) \qquad (21)$$

Отсюда, как непосредственное следствие, вытекает, что если φ — однозначная функция (дальше мы дадим пример многозначной функции), то значение линейного интеграла grad φ не зависит от пути интегрирования, а только от конечных точек пути. В частности, интеграл по замкнутой кривой будет равен нулю, ибо конечная и начальная точки пути здесь совпадают. Последнее свойство характерно для потенциального вектора, ибо справедлива и обратная теорема:

Если линейный интеграл вектора a *вдоль всякой замкнутой кривой равен нулю, вектор* a *есть градиент некоторого скаляра* φ.

Сначала докажем, что линейный интеграл вектора a, взятый по некоторому пути от неподвижной точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ до какой-нибудь точки $M(\mathbf{r})$, не зависит от выбора пути. В самом деле, пусть L и L' — два пути, соединяющие M_0 с M. Образуем замкнутый контур, состоящий из кривой L и кривой L', пробегаемой от точки M к точке M_0; в силу условия имеем

$$\int_{\mathbf{r}_0,(L)}^{\mathbf{r}} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r},(L')}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

Но очевидно, что

$$\int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0}{}_{(L')} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = -\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}{}_{(L')} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$$

ибо при перемене направления на кривой L' все элементы $d\mathbf{r}$ меняют свой знак. Поэтому

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}{}_{(L)} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}}{}_{(L')} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} \tag{22}$$

Раз интеграл не зависит от кривой, его значение есть функция $\mathbf{r}$ (ведь $\mathbf{r}_0$ мы считаем постоянным); обозначим ее через $\varphi(\mathbf{r})$:

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \varphi(\mathbf{r}) \tag{23}$$

Возьмем соседнюю с M точку M' $(\mathbf{r}+\Delta\mathbf{r})$ и пусть Δs — длина MM', $\mathbf{s}$ — единичный вектор, идущий в направлении MM'. Рассмотрим путь M_0MM', проходящий через точку M. Тогда мы будем иметь

$$\varphi(M') - \varphi(M) = \int_{M_0MM'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} - \int_{M_0M} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_{MM'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$$

Но если путь MM' взять прямолинейным, переменную точку этого пути обозначить через P, а расстояние этой точки до точки M обозначить через u, то мы будем иметь на MM'

$$d\mathbf{r} = \mathbf{s}\,du, \qquad \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = a_s(P)\,du$$

Следовательно,

$$\int_{MM'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\Delta s} a_s(P)\,du$$

По теореме о среднем это выражение будет равно

$$\int_{MM'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = a_s(P')\,\Delta s$$

где P' — некоторая точка отрезка MM'. Итак,

$$\frac{\varphi(M') - \varphi(M)}{\Delta s} = a_s(P')$$

Переходя к пределу при $\Delta s \to 0$, получим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = a_s(M)$$

(вектор $\mathbf{a}$, как всегда, предполагаем непрерывной функцией точки).

Полученное условие, по самому определению $\operatorname{grad}\varphi$, выражает, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$$

что и требовалось доказать.

Более просто то же самое можно получить, беря элементарное приращение обеих частей равенства (23) на бесконечно малом перемещении $d\mathbf{r}$:

$$\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = d\varphi$$

Отсюда, согласно (12), следует, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$$

4. Примером потенциального вектора является **консервативная сила**, которая характеризуется тем, что работа, совершаемая ею при переходе материальной частицы, на которую она действует, из одного положения в другое, зависит только от начальной и конечной точек пути перехода. Поэтому консервативная сила $\mathbf{F}$ является градиентом некоторой функции U:

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$$

U называется **силовой функцией**, — U — **потенциальной энергией**, или **потенциалом**. Совершенная на некотором пути, соединяющем точки $M_0(\mathbf{r}_0)$ и $M_1(\mathbf{r}_1)$, работа A определяется формулой

$$A = \int_L \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = U(\mathbf{r}_1) - U(\mathbf{r}_0) \tag{24}$$

т. е. работа, совершенная консервативной силой, равна увеличению силовой функции или, что то же, уменьшению потенциала. В частности работа консервативной силы на замкнутом пути всегда равна нулю

Пусть материальная точка движется под действием консервативной силы.

Из закона живых сил [формула (59) § 9] имеем

$$d\frac{mv^2}{2} = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

В этом случае найдем

$$d\frac{mv^2}{2} = dU$$

Следовательно,

$$\frac{mv^2}{2} - U = \text{const}$$

Таким образом, сумма кинетической энергии $\frac{1}{2}mv^2$ и потенциальной энергии — U во все время движения сохраняет свое значение.

Задача 101. Показать, что если сила $\mathbf{F}$ — центральная, т. е. направлена к неподвижной точке O и зависит только от расстояния r до этой точки, то она имеет потенциал.

По условию

$$\mathbf{F} = \frac{\varphi(r)}{r}\mathbf{r}$$

Составим работу этой силы вдоль кривой L, соединяющей точки $M_0(r_0)$ и $M(r)$.

$$\int_{M_0}^{M} \frac{\varphi(r)}{r}\,\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}$$

Но, как уже упоминалось ранее,

$$\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r} = r\,dr$$

Поэтому для работы силы F получаем выражение

$$\int_{M_0}^{M} \varphi(r)\,dr = \Phi(r) - \Phi(r_0)$$

если $\Phi'(r) = \varphi(r)$; так как это выражение не зависит от пути интегрирования, а только от конечных точек пути интегрирования, то сила F имеет потенциал, и притом равный $-\Phi(r)$. Например, если взять центральную силу F, обратно пропорциональную квадрату расстояния до точки O, то будем иметь

$$\mathbf{F} = \frac{k}{r^3}\,\mathbf{r}$$

Следовательно, здесь

$$\varphi(r) = -\frac{k}{r^3}, \quad \Phi(r) = \frac{k}{r}, \quad \mathbf{F} = \operatorname{grad}\frac{k}{r}$$

Задача 102. Показать, что если сила F в каждой точке направлена по перпендикуляру к некоторой прямой (например оси z) и зависит только от расстояния ρ до этой прямой, то она имеет потенциал; найти последний.

Ответ. Если

$$\mathbf{F} = \frac{\varphi(\rho)}{\rho}\,\boldsymbol{\rho}, \quad \text{где} \quad \boldsymbol{\rho} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$$

то

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad}\Phi, \quad \text{где} \quad \Phi = -\int \varphi(\rho)\,d\rho$$

Полезным применением полученных результатов является также отыскание функции φ по ее полному дифференциалу. Допустим, что мы знаем, что выражение

$$d\varphi = a_x(x, y, z)\,dx + a_y(x, y, z)\,dy + a_z(x, y, z)\,dz$$

является полным дифференциалом. Тогда для отыскания функции φ мы можем воспользоваться тем, что путь интегрирования можно брать по произволу. Чаще всего удобным оказывается такой путь интегрирования. Сначала идем из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно оси x до точки $M_1(x, y_0, z_0)$, на этом пути $dy = dz = 0$ и поэтому

$$\int_{M_0}^{M_1} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_{x_0}^{x} a_x(x, y_0, z_0)\,dx$$

Затем идем из точки $M_1(x, y_0, z_0)$ параллельно оси y до точки $M_2(x, y, z_0)$, на этом пути $dx = dz = 0$, и поэтому

$$\int_{M_1}^{M_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{y_0}^{y} a_y(x, y, z_0)\, dy$$

Наконец, из точки $M_2(x, y, z_0)$ идем параллельно оси z до точки $M(x, y, z)$; на этом пути $dx = dy = 0$, и поэтому

$$\int_{M_2}^{M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{z_0}^{z} a_z(x, y, z)\, dz$$

В результате, идя по пути $M_0M_1M_2M$, мы приходим к следующему выражению для функции φ:

$$\varphi(x, y, z) = \varphi(x_0, y_0, z_0) + \int_{x_0}^{x} a_x(x, y_0, z_0)\, dx + \int_{y_0}^{y} a_y(x, y, z_0)\, dy + \int_{z_0}^{z} a_z(x, y, z)\, dz \qquad (25)$$

В качестве примера найдем φ по полному дифференциалу

$$d\varphi = (2xy + z^2)\, dx + (2yz + x^2)\, dy + (2zx + y^2)\, dz$$

Полагая $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, сразу найдем

$$\varphi(x, y, z) = \int_0^y x^2\, dy + \int_0^z (2zx + y^2)\, dz + C = x^2y + z^2x + y^2z + C$$

5. Теорема о том, что линейный интеграл градиента φ по замкнутому контуру равен нулю, была нами выведена в предположении, что скаляр φ задан однозначным образом. Если φ будет многозначной функцией, эта теорема перестает быть верной. Разъясним на примере, в чем тут дело. Зададим φ следующим образом: во всякой полуплоскости, проходящей через ось z, наш скаляр имеет постоянное значение, равное углу, составленному рассматриваемой полуплоскостью с полуплоскостью xOz.

Определяя φ, как функцию x, y, z, получим:

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0$$

Заставим точку обойти ось z, двигаясь все время в положительном направлении, и вернуться в исходное положение; угол φ будет непрерывно увеличиваться и при полном обходе увеличится на 2π; таким образом, линейный интеграл вектора $\operatorname{grad} \varphi$ по всякой замкнутой кривой, обходящей ось z один раз в положительном направлении, равен 2π, а не нулю. Причина этого заключается в многозначности функции φ, причем ось z является особенной линией для функции φ, так как при прибли-

жении точки к оси z значение функции φ остается неопределенным. Чтобы сделать поле функции φ непрерывным, мы должны выделить ось z, окружив ее цилиндром малого радиуса. Но получающееся таким образом пространство уже не будет о д н о с в я з н ы м; оно будет д в у с в я з н ы м.

Односвязным называется такое пространство, в котором любая замкнутая линия может быть стянута в точку непрерывным образом, не задевая границ области. В нашем случае этого сделать нельзя, ибо контур, окружающий ось z, таким образом стянуть в точку нельзя. Чтобы превратить наше пространство в односвязное, мы можем воспользоваться следующим приемом: проведем полуплоскость zOx и будем считать обе ее стороны также границами области. Этим контуры, окружающие ось z, запрещаются, все же остальные контуры могут быть стянуты в точку. Поэтому область делается односвязной; так как нам понадобилось присоединить одну границу, то первоначальное пространство называется двусвязным. Если бы нам надо было провести две границы, чтобы сделать область односвязной, то мы назвали бы область трехсвязной и т. д.

Укажем еще ряд односвязных и многосвязных пространств: пространство внутри или вне сферы очевидно односвязно; пространство между двумя концентрическими сферами тоже односвязно; напротив, внутренность кольца дает, очевидно, двусвязное пространство, ибо после того как мы проведем меридиональное сечение, оно делается односвязным.

Если в доске сделать два отверстия, то получится трехсвязное пространство, ибо надо сделать два сечения, чтобы сделать его односвязным и т. д. Итак, на примере мы убедились в том, что в случае многосвязного пространства потенциал может быть многозначным и потому линейный интеграл вектора градиента может зависеть от пути интегрирования, в частности интеграл по замкнутому контуру может не равняться нулю. Многозначность потенциала сказывается на графическом представлении поля градиента векторными линиями. Если потенциал однозначен, векторные линии его градиента не могут быть замкнутыми, потому что линейный интеграл вдоль такой линии

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

состоял бы из элементов одного знака (ведь на таком контуре $\mathbf{a}$ имеет то же направление, что $d\mathbf{r}$ или как раз противоположное) и не мог бы равняться нулю. В случае же многозначного потенциала такие замкнутые векторные линии становятся возможными. Покажем это на только что рассмотренном примере. Составим уравнение векторных линий $\operatorname{grad}\varphi$:

$$\frac{dx}{\frac{\partial\varphi}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial\varphi}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial\varphi}{\partial z}}$$

т. е. в нашем случае

$$\frac{dx}{-y} = \frac{dy}{x} = \frac{dz}{0}$$

или

$$dz = 0, \quad x\,dx + y\,dy = 0$$

Отсюда

$$z = \text{const}, \quad x^2 + y^2 = \text{const}$$

Таким образом, векторными линиями grad arc tg $\frac{y}{x}$ являются круги, лежащие в плоскостях, параллельных плоскости xOy, и имеющие свой центр на оси z; таким образом, как и следовало ожидать, все замкнутые линии окружают ось z.

6. Понятие потенциального вектора находит себе многочисленнейшие применения в самых разнообразных отделах физики.

Так, например, рассматривая явление теплопроводности, рассматривают поле температуры T. Если в теле, движение тепла в котором изучается, провести малую площадку dS, направление нормали к которой есть n, то принимают, что через эту площадку проходит каждую единицу времени количество теплоты, равное

$$k \frac{\partial T}{\partial n}\, dS$$

где k — коэффициент теплопроводности, который в различных точках тела может иметь разное значение, т. е. является функцией точки, но не зависит (в случае изотропного тела) от ориентации площадки dS. Отсюда видно, что поток тепла внутри тела характеризуется вектором grad T.

Точно так же в гидромеханике большую роль играют так называемые потенциальные течения, в которых вектор скорости является вектором потенциальным

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi \tag{26}$$

Функция φ называется при этом часто потенциалом скорости.

Наконец, в электростатике напряжение электрического поля, т. е. сила, действующая на единичный заряд положительного электричества, тоже является, как установлено из опытных данных, вектором потенциальным

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{27}$$

где φ называется потенциалом электростатического поля. Если в рассматриваемой точке находится заряд e_1, то действующая на него сила F будет пропорциональна этому заряду, как найдено из опытных данных:

$$\mathbf{F} = e_1 \mathbf{E} \tag{28}$$

В простейшем случае поля, происходящего от находящегося в начале координат заряда e положительного электричества, по закону Кулона мы будем иметь

$$\mathbf{E} = \frac{e}{r^3}\,\mathbf{r} \tag{29}$$

Отсюда следует, что

$$\varphi = \frac{e}{r} \tag{30}$$

Заметим, что во всех применениях векторного анализа к теории электричества и магнетизма, которые мы будем делать, мы будем предполагать, что электрические и магнитные явления происходят в пустом пространстве, т. е. что так называемая диэлектрическая постоянная ε и магнитная проницаемость μ равны единице.

Если мы имеем в точках $M_1, M_2, \ldots, M_n$ заряды $e_1, e_2, \ldots, e_n$ и если расстояния точки P до точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ обозначить через $r_1, r_2, \ldots, r_n$, то мы получим для потенциала поля, происходящего от этих зарядов, выражение

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \cdots + \frac{e_n}{r_n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{r_i} \tag{31}$$

§ 13. Производная вектора по направлению. Градиент одного вектора по другому

1. Будем теперь изучать векторное поле некоторого вектора

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x, y, z)$$

Иными словами, будем предполагать, что в каждой точке рассматриваемой нами области пространства задан вектор $\mathbf{a}$.

Нашей задачей является рассмотрение различного рода дифференциальных операций с полем вектора $\mathbf{a}$.

Мы видели, рассматривая скалярное поле функции φ, что изменение функции φ в окрестности некоторой точки M характеризуется вектором $\operatorname{grad}\varphi$. Этот вектор $\operatorname{grad}\varphi$ играет по отношению к функции $\varphi(\mathbf{r})$ ту же роль, как обыкновенная производная $f'(x)$ некоторой функции $f(x)$ играет по отношению к этой самой функции. С этой точки зрения и по отношению к вектору $\mathbf{a}$ казалось бы естественным ввести такую величину, которая играла бы роль производной, однако такой подход вывел бы нас за рамки векторного анализа. Дело в том, что в то время, как φ является скаляром, $\operatorname{grad}\varphi$ является уже вектором; подобно этому величина, которая могла бы играть роль производной для вектора $\mathbf{a}$, оказывается уже тензором. Не желая уже сейчас вводить в рассмотрение тензоры, мы должны поэтому несколько ограничить себя. Так, мы подошли к понятию $\operatorname{grad}\varphi$, рассматривая сначала производную φ по направлению. Сейчас нам придется ограничиться исключительно только рассмотрением производных от вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ по какому-либо направлению $\mathbf{s}$.

Как и в предыдущем параграфе, возьмем какую-либо точку M и проведем через нее прямую, имеющую направление единичного вектора $\mathbf{s}$, или кривую, касательная к которой в точке M имеет направление $\mathbf{s}$. На этой прямой или кривой возьмем соседнюю с M точку M', причем пусть длина дуги MM' равна Δs. Составим теперь отношение разности значений вектора $\mathbf{a}$ в точках M' и M к Δs:

$$\frac{\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)}{\Delta s}$$

предел этого отношения при $\Delta s \to 0$ (если таковой существует) называется производной вектора a по направлению s в рассматриваемой точке M и обозначается через

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\mathbf{a}(M') - \mathbf{a}(M)}{\Delta s} \tag{1}$$

Если на нашей дуге, начинающейся в точке M, мы будем отсчитывать длину дуги от точки M и обозначим ее через s, то a (x, y, z) будет сложной функцией от s через посредство x, y, z и потому по обычному правилу дифференцирования сложных функций мы будем иметь

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\frac{dz}{ds}$$

Но

$$\frac{dx}{ds} = \cos(\mathbf{s}, x), \qquad \frac{dy}{ds} = \cos(\mathbf{s}, y), \qquad \frac{dz}{ds} = \cos(\mathbf{s}, z)$$

Поэтому мы получаем соотношение

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = \cos(\mathbf{s}, x)\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos(\mathbf{s}, y)\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos(\mathbf{s}, z)\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \tag{2}$$

совершенно аналогичное формуле (3) предыдущего параграфа для $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$.

В предыдущем параграфе мы имели формулу (8)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s} = \mathbf{s} \cdot \nabla \varphi$$

По аналогии с этим мы введем обозначение

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} = (\mathbf{s} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} \tag{3}$$

Рациональность такого обозначения может быть обоснована следующим образом. Составим скалярное произведение вектора

$$\mathbf{s} = \mathbf{i}\cos(\mathbf{s}, x) + \mathbf{j}\cos(\mathbf{s}, y) + \mathbf{k}\cos(\mathbf{s}, z)$$

и символического вектора

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

В результате мы получим новый дифференциальный оператор

$$\mathbf{s} \cdot \nabla = \cos(\mathbf{s}, x)\frac{\partial}{\partial x} + \cos(\mathbf{s}, y)\frac{\partial}{\partial y} + \cos(\mathbf{s}, z)\frac{\partial}{\partial z} \tag{4}$$

применение которого к вектору a дает по формуле (3) как раз $\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s}$, поэтому обозначение (3) является совершенно естественным.

Рассмотрим теперь несколько более общую операцию, а именно, введем понятие *градиента вектора* a *по вектору* v, который обозначается символом $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a}$. Чтобы определить этот вектор, мы можем поступить, например, таким образом: составим формально скалярное произведение

вектора

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}v_x + \mathbf{j}v_y + \mathbf{k}v_z$$

и символического вектора ∇; в результате получим дифференциальный оператор

$$\mathbf{v}\cdot\nabla = v_x\frac{\partial}{\partial x} + v_y\frac{\partial}{\partial y} + v_z\frac{\partial}{\partial z} \tag{5}$$

Поэтому под вектором $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}$ мы будем понимать вектор

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} = v_x\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + v_y\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + v_z\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \tag{6}$$

Если вектор $\mathbf{v}$ имеет то же направление, что единичный вектор $\mathbf{s}$, так что

$$\mathbf{v} = v\mathbf{s}$$

где $v = |\mathbf{v}|$ есть модуль вектора $\mathbf{v}$, то мы будем иметь

$$v_x = v\cos(\mathbf{s}, x), \quad v_y = v\cos(\mathbf{s}, y), \quad v_z = v\cos(\mathbf{s}, z)$$

Поэтому

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} = v\left\{\cos(\mathbf{s}, x)\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + \cos(\mathbf{s}, y)\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + \cos(\mathbf{s}, z)\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\right\}$$

или, что то же,

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} = v\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} \tag{7}$$

Итак $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}$ *есть производная вектора* $\mathbf{a}$ *по направлению вектора* $\mathbf{v}$, *умноженная на величину вектора* v.

Беря в формуле (6) за вектор $\mathbf{v}$ бесконечно малый вектор

$$d\mathbf{r} = \mathbf{i}\,dx + \mathbf{j}\,dy + \mathbf{k}\,dz$$

мы получим

$$(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} = dx\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + dy\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + dz\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z} \tag{8}$$

и так как справа стоит $d\mathbf{a}$, то получаем весьма важную формулу

$$(d\mathbf{r}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} = d\mathbf{a} \tag{9}$$

очевидно, аналогичную формуле

$$d\varphi = d\mathbf{r}\cdot\nabla\varphi$$

Проектируя обе части формулы (6) на оси координат, получим составляющие градиента одного вектора по другому:

$$\begin{aligned}
\{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}\}_x &= v_x\frac{\partial a_x}{\partial x} + v_y\frac{\partial a_x}{\partial y} + v_z\frac{\partial a_x}{\partial z}\\
\{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}\}_y &= v_x\frac{\partial a_y}{\partial x} + v_y\frac{\partial a_y}{\partial y} + v_z\frac{\partial a_y}{\partial z}\\
\{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}\}_z &= v_x\frac{\partial a_z}{\partial x} + v_y\frac{\partial a_z}{\partial y} + v_z\frac{\partial a_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{10}$$

Между прочим из этих формул следует, что

$$\{(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}\}_x = \mathbf{v}\cdot\nabla a_x \tag{11}$$

и аналогичные формулы для осей y и z.

Рассмотрим следующий пример. Пусть в пространстве задана система линий так, что через каждую точку пространства проходит одна и только одна линия системы. Пусть σ есть единичный вектор касательной к линии, проходящей через рассматриваемую точку. Выясним геометрическое значение $(\sigma\cdot\nabla)\sigma$.

По самому определению

$$(\sigma\cdot\nabla)\,\sigma = \frac{\partial\sigma}{\partial s}$$

где производная берется по направлению касательной к линии; но в п. 6 § 9 было выяснено [формула (37)], что

$$\frac{\partial\sigma}{\partial s} = \frac{\mathbf{n}}{R}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор главной нормали, а R — радиус кривизны дли линии, проходящей через рассматриваемую точку. Итак,

$$(\sigma\cdot\nabla)\,\sigma = \frac{\mathbf{n}}{R}$$

Задача 103. Найти, чему равно $(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{r}$, где $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор. Ответ: $\mathbf{c}$.

2. Градиент одного вектора по другому часто встречается в вычислениях. Мы здесь остановимся на одном важном применении этого понятия.

Допустим, что мы имеем движение некоторой сплошной среды, например жидкости, и пусть поле скоростей в этом движении дается функцией $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$, так что $\mathbf{v}$ есть вектор скорости частицы жидкости, проходящей в момент времени t через точку $M(\mathbf{r})$. Рассмотрим некоторую скалярную функцию поля $\varphi(\mathbf{r}, t)$, например, температуру различных частиц жидкости, причем мы предполагаем, что эта функция зависит и от времени t.

Если мы желаем изучать изменение функции φ за некоторый промежуток времени, то мы можем поступать двояким способом, а именно, мы можем рассматривать изменение φ *в данном месте*, или же мы можем рассматривать его *для данной частицы*. Разницу между этими двумя изменениями можно уяснить на следующем примере. Если мы измеряем изменение температуры на поверхности земли, то мы получаем, очевидно, изменение температуры в данном месте. Если же мы находимся на воздушном шаре, который уравновесился в воздухе и движется вместе с воздушным потоком, то изменение температуры, измеряемое на этом шаре, может, очевидно, быть рассматриваемо как изменение температуры для частиц воздушного потока.

Изменение φ в данном месте характеризуется частной или местной или локальной производной φ по t:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M,\ t+\Delta t) - \varphi(M,\ t)}{\Delta t} \tag{12}$$

при вычислении которой радиус-вектор точки M рассматривается как постоянный.

Чтобы охарактеризовать изменение φ для данной частицы за промежуток времени Δt, мы должны за приращение φ взять разность между значением функции φ в момент $t+\Delta t$ в том положении частицы M', в котором она находится в этот момент, и значением функции в момент t в начальном положении ее M. Предел отношения этого приращения к Δt при $\Delta t \to 0$ называется полной или индивидуальной или субстанциональной производной φ по t и обозначается

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M',\ t+\Delta t) - \varphi(M,\ t)}{\Delta t} \tag{13}$$

Чтобы установить связь между частной и полной производными, проще всего заметить, что когда мы составляем полную производную от функции $\varphi(x, y, z, t)$, то мы должны считать x, y, z функциями от t, ибо частица, имеющая координаты x, y, z, перемещается со скоростью v, причем

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \tag{14}$$

Но рассматривая $\varphi(x, y, z, t)$ как сложную функцию от t, мы получим

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial x}v_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y}v_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z}v_z$$

или

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi \tag{15}$$

Это же соотношение можно получить и более непосредственно. Прежде всего

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M',\ t+\Delta t) - \varphi(M',\ t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\varphi(M',\ t) - \varphi(M,\ t)}{MM'} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t}$$

переходя к пределу, получим, в силу того, что при $\Delta t \to 0$ точка M' стремится к M и что

$$\lim_{MM' \to 0} \frac{\varphi(M',\ t) - \varphi(M,\ t)}{MM'} = \frac{\partial \varphi}{\partial s}, \qquad \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t} = v$$

следующую формулу:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial \varphi}{\partial s}v = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + v(\mathrm{s}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathrm{v}\cdot\mathrm{grad}\,\varphi$$

Если мы рассматриваем векторную функцию поля $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$, зависящую от времени t, то определение частной и полной производной будет совершенно аналогично таковым для скаляра

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(M, t + \Delta t) - \mathbf{a}(M, t)}{\Delta t} \tag{16}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(M', t + \Delta t) - \mathbf{a}(M, t)}{\Delta t} \tag{17}$$

Связь между частной и полной производной по t вектора $\mathbf{a}$ устанавливается так же, как для скаляра. Рассматривая $\mathbf{a}(x, y, z, t)$ как сложную функцию от t через посредство x, y, z, легко найдем

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + v_x \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x} + v_y \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y} + v_z \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

Отсюда

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} \tag{18}$$

То же самое получается и непосредственно, ибо прежде всего из формулы (17) следует, что

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(M', t + \Delta t) - \mathbf{a}(M', t)}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\mathbf{a}(M', t) - \mathbf{a}(M, t)}{MM'} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{MM'}{\Delta t}$$

и, замечая, что

$$\lim_{MM' \to 0} \frac{\mathbf{a}(M', t) - \mathbf{a}(M, t)}{MM'} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s}$$

получим

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + v \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s}$$

или

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a}$$

Члены $\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi$ в формуле (15) и $(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a}$ в формуле (18) называются **конвективными членами**, так как они появляются только при движении сплошной среды и связаны с переносом (конвекцией) частиц.

В качестве примера рассмотрим ускорение частицы жидкости. Чтобы его вычислить, мы должны сравнить скорости **одной и той же частицы** в два соседние момента времени t и $t + \Delta t$, поэтому вектор ускорения частицы жидкости выражается полной производной вектора скорости $\mathbf{v}$, для которой по формуле (18) имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} \tag{19}$$

В составляющих будем иметь

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \text{ и т. д.} \tag{20}$$

§ 14. Поток вектора через поверхность. Расхождение вектора. Его аналитическое выражение. Теорема Гаусса. Источники

1. Рассмотрим поле какого-нибудь вектора

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x, y, z)$$

т. е. предположим, что для каждой точки пространства или некоторой его части задано значение этого вектора. Рассматривая значения этого вектора в окрестности некоторой фиксированной точки M, мы видели в предыдущем параграфе, что изменения этого вектора вблизи точки M характеризуются с точностью до бесконечно малых второго порядка величинами производных вектора по всевозможным направлениям s:

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s}$$

так как, зная эти производные и рассматривая вблизи точки M соседнюю точку M', лежащую на луче, имеющем направление единичного вектора s, мы будем иметь приближенное равенство

$$\mathbf{a}(M') = \mathbf{a}(M) + \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial s} MM'$$

Мы видели, кроме того, что вся совокупность бесчисленного количества производных $\partial \mathbf{a} / \partial s$ по всевозможным направлениям s определяется простой формулой (2), если известны производные по трем взаимно перпендикулярным направлениям

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}$$

Теперь мы приступим к изучению еще некоторых величин, до некоторой степени характеризующих изменения векторной функции a (r) в окрестности рассматриваемой точки.

Этими величинами, играющими необычайно важную роль в векторном анализе, являются, с одной стороны, скалярная величина, называемая расхождением вектора a, и, с другой стороны, — векторная величина, называемая вихрем вектора a.

Отметим сразу же, что значение этих величин для векторного анализа и для многочисленных приложений последнего тесно связано с тем обстоятельством, что эти величины естественно появляются при рассмотрении поверхностных и криволинейных интегралов от вектора a. На многочисленных примерах мы увидим, что при изучении задач механики и физики является совершенно необходимым рассмотрение объемных, поверхностных и криволинейных интегралов. Значение последних было уже до некоторой степени выяснено в § 12, где мы видели, например, что криволинейный интеграл от вектора силы дает значение работы, совершаемой этой силой, и что обращение в нуль криволинейного интеграла от вектора a по любому замкнутому пути указывает на то, что вектор a есть вектор потенциальный, т. е. является градиентом некоторой скалярной функции φ. Откладывая дальнейшее изучение свойств криволиней-

ных интегралов и связанных с этим свойств вихря вектора, мы рассмотрим в настоящем параграфе вопрос о поверхностных интегралах, о расхождении вектора и о его свойствах.

2. Возьмем в пространстве некоторую поверхность S, замкнутую или незамкнутую. Определим теперь *поверхностный интеграл вектора* $\mathbf{a}$ *по поверхности* S, или, как его чаще называют, *поток вектора* $\mathbf{a}$ *через поверхность* S, следующим образом. В каждой точке поверхности проведем единичный вектор нормали $\mathbf{n}$; мы условимся при этом в том случае, когда поверхность S — замкнутая, брать всегда направление внешней нормали; в том же случае когда поверхность S незамкнутая, мы будем брать по произволу одно из двух направлений нормали (оговаривая, конечно, какое из этих двух направлений мы выбираем), однако, так, чтобы направление нормали изменялось непрерывно, когда мы переходим от какой-либо точки поверхности в соседним.

Если $\mathbf{a}$ — значение вектора в некоторой точке M поверхности S, а $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к поверхности в той же точке, то, как всегда, через

$$a_n = \mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z)$$

мы обозначаем проекцию вектора $\mathbf{a}$ на направление нормали, т. е. нормальную составляющую вектора $\mathbf{a}$.

Разделим теперь поверхность S на большое число малых элементов, каждый из последних изображается, как это было выяснено в § 6, вектором $\Delta\mathbf{S}$. Например, если мы впишем в поверхность S многогранную поверхность, каждая грань ее будет изображаться вектором, направленным по нормали к этой грани и равным по величине площади этой грани. Составим для каждого элемента скалярное произведение $\mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{S}$ в образуем сумму $\sum \mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{S}$, распространенную по всем элементам поверхности. Эта сумма стремится к пределу, когда все элементы поверхности стремятся к нулю, если только сделать предположение (которое мы всегда будем считать выполненным), что поверхность может быть разделена на конечное число кусков, каждый из которых обладает непрерывной кривизной и на каждом из которых вектор $\mathbf{a}$ меняется непрерывным образом. Получаемый предел обозначается через

$$\int \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \lim \sum \mathbf{a}\cdot\Delta\mathbf{S} \qquad (1)$$

и называется *поверхностным интегралом вектора* $\mathbf{a}$ *по поверхности* S *или потоком вектора* $\mathbf{a}$ *через поверхность* S.

Если численную величину элемента поверхности $d\mathbf{S}$ мы обозначим через dS, то мы, очевидно, будем иметь

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n}\,dS$$

и поэтому

$$\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS = a_n dS$$

Поток вектора a через поверхность S может быть поэтому записан также в одной из следующих форм:

$$\int_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \int_S a_n dS = \int_S \mathbf{a}\cdot\mathbf{n}\, dS =$$

$$= \int_S [a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z)]\, dS \qquad (2)$$

Наконец, вводят следующие обозначения:

$$\cos(\mathbf{n}, x)\, dS = dy\, dz$$
$$\cos(\mathbf{n}, y)\, dS = dz\, dx$$
$$\cos(\mathbf{n}, z)\, dS = dx\, dy$$

понимая, например, под $dy\, dz$ проекцию элемента $d\mathbf{S}$ на плоскость yz, взятую с надлежащим знаком (положительным, если нормаль к поверхности в той точке, в которой рассматривается элемент, образует с осью x острый угол, и отрицательным, если угол нормали с осью — тупой).

Тогда поверхностный интеграл принимает следующий вид:

$$\int_S \mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \int_S (a_x\, dy\, dz + a_y\, dz\, dx + a_z\, dx\, dy) \qquad (3)$$

Вычисление поверхностных интегралов производится по обычным правилам вычисления двойных интегралов.

3. Рассмотрим сейчас в качестве примеров несколько поверхностных интегралов, которые понадобятся нам в дальнейшем.

1) Пусть вектор a есть постоянный вектор $\mathbf{a}_0$. Тогда, если S замкнутая поверхность, то

$$\oint_S \mathbf{a}_0\cdot d\mathbf{S} = 0 \qquad (4)$$

В самом деле, в силу постоянства вектора $\mathbf{a}_0$, его можно вынести из-под знака интеграла, так что можно написать

$$\oint_S \mathbf{a}_0\cdot d\mathbf{S} = \mathbf{a}_0\cdot\oint_S d\mathbf{S}$$

Но, как было установлено в § 6, п. 4, вектор замкнутой поверхности равен нулю, т. е.

$$\oint_S d\mathbf{S} = 0 \qquad (5)$$

Иными словами

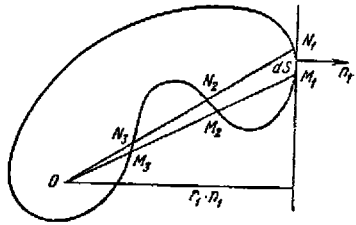
$$\oint_S \cos(\mathbf{n}, x)\, dS = 0, \quad \oint_S \cos(\mathbf{n}, y)\, dS = 0, \quad \oint_S \cos(\mathbf{n}, z)\, dS = 0 \qquad (6)$$

Поэтому, действительно, получаем формулу (4).

2) Пусть теперь $\mathbf{a} = \mathbf{r}$ — радиусу-вектору точки. Докажем, что в этом случае

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3V \tag{7}$$

где V — объем, ограниченный замкнутой поверхностью S. В самом деле, рассмотрим какой-либо бесконечно малый телесный угол, выходящий из начала координат, и пусть он вырезает из поверхности несколько элементов. Рассмотрим для определенности случай, изображенный на фиг. 50, когда такой телесный угол вырезает из поверхности три элемента.



Фиг. 50

Если радиусы-векторы из точки O, ведущие к этим элементам, обозначить через $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, а единичные векторы нормалей к этим элементам через $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, то очевидно, что $\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1$ есть высота пирамиды с вершиной O и основанием $M_1N_1 = dS_1$, поэтому

$$\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \, dS_1 = 3 \text{ об. } OM_1N_1$$

Точно так же $\mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}_2$ есть взятая со знаком минус высота пирамиды с вершиной O и основанием $M_2N_2 = dS_2$, поэтому

$$\mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 = \mathbf{r}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \, dS_2 = -3 \text{ об. } OM_2N_2$$

Точно так же

$$\mathbf{r}_3 \cdot d\mathbf{S}_3 = 3 \text{ об. } OM_3N_3$$

В результате получаем

$$\mathbf{r}_1 \cdot d\mathbf{S}_1 + \mathbf{r}_2 \cdot d\mathbf{S}_2 + \mathbf{r}_3 \cdot d\mathbf{S}_3 = 3\{\text{об. } OM_1N_1 - \text{об. } OM_2N_2 + \text{об. } OM_3N_3\} =$$
$$= 3 \, (\text{об. } M_1M_2N_2N_1 + \text{об. } OM_3N_3)$$

т. е. как раз утроенный объем, вырезаемый из объема, ограниченного поверхностью S, нашим телесным углом. Повторяя это рассуждение по отношению ко всем телесным углам с вершиной в O, мы и получим в результате суммирования формулу

$$\oint_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = 3V$$

3) Вычислим следующий поверхностный интеграл по замкнутой поверхности

$$\oint_S z \cos(\mathbf{n}, z) \, dS = \oint_S z \, dx \, dy$$

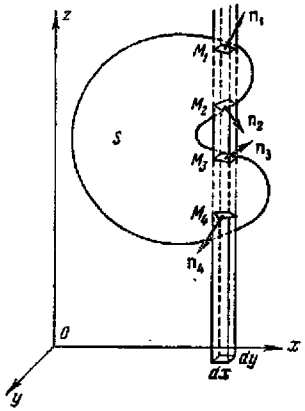
и докажем, что он равен объему V, ограниченному поверхностью S:

$$\oint_S z \cos(\mathbf{n}, z) \, dS = V \tag{8}$$

Рассуждение будет совершенно аналогично предыдущему, только рассечение надо производить при помощи цилиндров с образующими, параллельными оси z. При этом про поверхность S мы предполагаем, что прямые, параллельные осям координат, пересекают ее в конечном числе точек.

Рассмотрим теперь какой-нибудь цилиндр, построенный на прямоугольном бесконечно малом основании $d\Sigma$, лежащем в плоскости xy, и имеющий ребра, параллельные оси z (фиг. 51). Пусть этот цилиндр пересекает поверхность S в четырех точках M_1, M_2, M_3, M_4.

Те элементы $\cos(\mathbf{n}, z)\, dS$, которые вырезаются цилиндром у точек M_1 и M_3, равны $d\Sigma$, ибо нормаль $\mathbf{n}$ к поверхности S образует с осью z в точках M_1 и M_3 острые углы; напротив, элементы $\cos(\mathbf{n}, z)\, dS$, вырезаемые цилиндром у точек M_2 и M_4, надо считать равными $-d\Sigma$, так как нормаль $\mathbf{n}$ в этих точках образует с осью z тупые углы.



Фиг 51

Обозначим z-вые координаты точек M_1 M_2, M_3, M_4 соответственно через z_1, z_2, z_3, z_4; легко видеть, что сумма элементов $z\cos(\mathbf{n}, z)\, dS$ рассматриваемого поверхностного интеграла, соответствующих элементам поверхности, вырезаемым цилиндром, построенным на основании $d\Sigma$, равна

$$(z_1 - z_2 + z_3 - z_4)\, d\Sigma$$

т. е. равна как раз той части объема V, которая вырезается цилиндром, построенным на $d\Sigma$. Повторяя это рассуждение по отношению ко всем таким цилиндрам и производя суммирование по всем элементам $d\Sigma$, мы докажем формулу (8).

4) Докажем, наконец, что для замкнутой поверхности S интегралы

$$\oint_S x\cos(\mathbf{n}, z)\, dS = 0, \qquad \oint_S y\cos(\mathbf{n}, z)\, dS = 0 \tag{9}$$

обращаются в нуль.

Точно такое же рассуждение, как только что проделанное, приводит к выводу, что сумма элементов $x\cos(\mathbf{n}, z)\, dS$ первого поверхностного интеграла, соответствующих элементам поверхности, вырезаемым цилиндром, построенным на основании $d\Sigma$, равна

$$(x - x + x - x)\, d\Sigma = 0$$

а значит и весь поверхностный интеграл равен нулю.

4. Рассматривая поле какого-либо вектора $\mathbf{a}$, очень часто для большей наглядности удобно говорить об этом поле, как о поле скоростей некоторой фиктивной жидкости. С этой точки зрения легко уяснить себе смысл

названия поверхностного интеграла потоком вектора a; в самом деле, пусть через некоторую площадку, представляемую вектором $d\mathbf{S}$, фиктивная жидкость, полем скоростей которой служит наше поле, вытекает так, что a направлено во вне; за малый промежуток времени Δt через площадку $d\mathbf{S}$, очевидно, вытечет объем жидкости в виде цилиндра, основание которого представляется вектором $d\mathbf{S}$, а ребра векторами $\mathbf{a}\Delta t$; величина этого объема есть как раз $\mathbf{a}\Delta t \cdot d\mathbf{S} = a_n \Delta t dS$, ибо это скалярное произведение равно величине вектора $d\mathbf{S}$, т. е. площади основания dS цилиндра, помноженной на $a_n \Delta t$, т. е. на проекцию ребра $\mathbf{a}\Delta t$ на нормаль к этой площади, каковая проекция является высотой цилиндра. Отнесенный к единице времени поток через элемент $d\mathbf{S}$ будет $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$, а через всю поверхность

$$\oint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S}$$

Если S есть замкнутая поверхность, ограничивающая некоторый объем, то вытекающая жидкость дает положительную часть потока, втекающая — отрицательную. Иначе говоря, если мы проведем линии вектора a, то элементарные площадки поверхности, где эти линии входят в объем, дают отрицательные элементы интеграла, а где выходят — положительные. Таким образом, поток вектора a указывает количество жидкости, вытекающее из данного объема в единицу времени (если в данный объем жидкость втекает, будет получаться отрицательный поток).

5. Возьмем теперь какую-либо точку поля P, окружим ее малым объемом V и вычислим поток вектора a через поверхность S, ограничивающую объем V; разделим его на V, чтобы отнести к единице объема, и перейдем к пределу, устремляя к нулю все размеры V, что мы будем обозначать символом $V \to 0$, стягивая при этом объем V к точке P. В результате получится некоторое число, зависящее от поведения a вблизи точки P и характеризующее степень истечения из области точки P. Это число называется расхождением вектора a в точке P и обозначается чаще всего символом $\operatorname{div} \mathbf{a}$ (от слова divergere — расходиться). Таким образом

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S a_n dS}{V} \tag{10}$$

т. е. *расхождение вектора* a *есть отнесенный к единице объема поток вектора* a *через поверхность бесконечно малого объема, окружающего рассматриваемую точку.*

Это определение нужно оправдать в том смысле, что нужно показать, что тот предел, которым определяется расхождение вектора a, действительно существует и не зависит от вида объема, который стягивается к точке P. Мы покажем это, установив аналитическое выражение $\operatorname{div} \mathbf{a}$ через составляющие вектора a. При этом мы будем предполагать, что частные производные по x, y, z от составляющих вектора a_x, a_y, a_z

существуют и непрерывны, и что поверхность S стягивается к точке P равномерно в том смысле, что наибольшее и наименьшее расстояния точек поверхности S до точки P являются бесконечно малыми величинами одного порядка, который мы примем за первый, что величина всей поверхности S есть бесконечно малая величиина второго порядка, а величина объема V, ограниченного поверхностью S,— бесконечно малая величина третьего порядка.

Переходя к вычислению div a в точке P, примем последнюю на время за начало системы координат O; нам надо вычислить

$$\oint_S a_n dS = \oint_S [a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y \cos(\mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z)]\, dS$$

Вычислим

$$\oint_S a_z(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

Так как поверхность S стягивается к началу координат, то на этой поверхности x, y, z — бесконечно малые величины. По формуле Тейлора, ограничиваясь первыми членами разложения, мы имеем

$$a_z(x, y, z) = a_z(0, 0, 0) +$$
$$+ x\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_O + \varepsilon_1\right] + y\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_O + \varepsilon_2\right] + z\left[\left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_O + \varepsilon_0\right]$$

где индекс O указывает, что нужно брать значения производных в начале координат и ε_1, ε_2, ε_3 означают бесконечно малые величины.

Умножая обе части предыдущего равенства на $\cos(\mathbf{n}, z)\, dS$ и интегрируя по замкнутой поверхности S, получим, вынося еще постоянные множители за знак интегралов,

$$\oint_S a_z(x, y, z) \cos(\mathbf{n}, z)\, dS =$$
$$= (a_z)_O \oint_S \cos(\mathbf{n}, z)\, dS + \left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_O \oint_S x \cos(\mathbf{n}, z)\, dS + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_O \oint_S y \cos(\mathbf{n}, z)\, dS +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_O \oint_S z \cos(\mathbf{n}, z)\, dS + \oint_S (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

Но мы имели, что

$$\oint_S \cos(\mathbf{n}, z)\, dS = \oint_S x \cos(\mathbf{n}, z)\, dS = \oint_S y \cos(\mathbf{n}, z)\, dS = 0$$
$$\oint_S z \cos(\mathbf{n}, z)\, dS = V$$

Наконец

$$\oint_S (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3) \cos(\mathbf{n}, z)\, dS = \varepsilon V$$

где ε — бесконечно малая величина, ибо x, y, z — бесконечно малые первого порядка, полная поверхность S — бесконечно малая второго порядка и V — бесконечно малая третьего порядка. Итак,

$$\oint_S a_z(x, y, z)\cos(\mathbf{n}, z)\,dS = \left(\frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_O V + \varepsilon V$$

Точно так же найдем

$$\oint_S a_x(x, y, z)\cos(\mathbf{n}, x)\,dS = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_O V + \varepsilon' V$$

$$\oint_S a_y(x, y, z)\cos(\mathbf{n}, y)\,dS = \left(\frac{\partial a_y}{\partial y}\right)_O V + \varepsilon'' V$$

где ε' и ε'' — бесконечно малые величины. Следовательно,

$$\oint_S a_n dS = V\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_O + \varepsilon + \varepsilon' + \varepsilon''\right]$$

Деля это равенство на V и переходя к пределу при $V \to 0$, сразу увидим, что в точке P

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{11}$$

Эта имеющая основное значение формула доказывает существование предела (10), независимого от вида объема V, и дает величину этого предела (от наложенных на объем V ограничений мы можем, как показано ниже, освободиться).

Так как основное определение div a совершенно не зависит от выбора системы координат, то выражение (11) для div a инвариантно по отношению ко всем переходам от одной прямолинейной прямоугольной координатной системы к другой, в чем можно убедиться, впрочем, и непосредственным вычислением.

6. Важнейшая теорема, связанная с понятием расхождения вектора, есть теорема Гаусса — Остроградского о преобразовании поверхностного интеграла в объемный:

Поток вектора через замкнутую поверхность равен объемному интегралу от расхождения вектора:

$$\oint_S a_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV \tag{12}$$

Чтобы показать справедливость этой формулы, мы поступим, как часто это делается в математике, следующим образом: мы докажем, что формула (12) верна сколь угодно приближенно. В самом деле, выберем малое число ε; разобьем V на столь малые элементы V_k, в сумме составляющие V, что для каждого из них имеет место неравенство

$$\left|\frac{1}{V_k}\oint_{S_k} a_n dS - \operatorname{div} \mathbf{a}\right| < \varepsilon$$

где S_k — поверхность V_k и значение div a берется в некоторой точке V_k. Сложим все эти неравенства, умножив их предварительно на V_k, тогда получим:

$$\left| \oint_S a_n \, dS - \sum_k \operatorname{div} \mathbf{a} \, V_k \right| < \varepsilon \sum_k V_k = \varepsilon V$$

ибо те части поверхностных интегралов, которые относятся к элементам поверхностей S_k, не входящим в S, попарно сократятся. Всякий такой элемент должен являться границей двух смежных V_k, причем, как граница одного или другого из этих объемов, он имеет внешние нормали $\mathbf{n}'$ и $\mathbf{n}'' = -\mathbf{n}'$ прямо противоположного направления, а потому

$$a_n'' = -a_n', \quad a_n' dS + a_n'' dS = 0$$

Увеличивая k до бесконечности, а V_k уменьшая до нуля, получим:

$$\left| \oint_S a_n \, dS - \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV \right| < \varepsilon V$$

и так как ε мы можем выбирать сколь угодно малым, то непременно

$$\oint_S a_n \, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dV$$

В аналитической форме теорема Гаусса — Остроградского имеет вид

$$\oint_S [a_x \cos(\mathbf{n}, x) + a_y (\cos \mathbf{n}, y) + a_z \cos(\mathbf{n}, z)] \, dS = \int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) dV \tag{13}$$

Ввиду фундаментального значения формулы Гаусса — Остроградского, мы дадим еще непосредственный вывод этой формулы.

Пусть имеем замкнутую поверхность S, которая прямыми, параллельными координатным осям, пересекается в конечном числе точек, и пусть $\varphi(x, y, z)$ — функция, имеющая непрерывные производные

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Тогда имеют место формулы

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial x} dV &= \oint_S \varphi \cos(\mathbf{n}, x) \, dS \\ \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial y} dV &= \oint_S \varphi \cos(\mathbf{n}, y) \, dS \\ \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} dV &= \oint_S \varphi \cos(\mathbf{n}, z) \, dS \end{aligned} \tag{14}$$

Докажем последнюю из них. Метод доказательства будет тот же, которым мы пользовались при вычислении интегралов в п. 3. Если мы спроектируем объем V (фиг. 51) на плоскость Oxy, то в проекции получим некоторую площадь Σ. Возьмем элемент $d\Sigma$ этой площади с ребрами, параллельными осям x и y, и построим на этом элементе цилиндр с образующими, параллельными оси z. Этот цилиндр вырежет из нашего объема V некоторую часть; пусть, например, это будет, как изображено на фиг. 51, часть объема V, заключенная между элементами поверхности S, находящимися в точках M_1 и M_2, и часть объема V, заключенная между элементами поверхности S, находящимися в точках M_3 и M_4.

Та часть объемного интеграла

$$\int\limits_V \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dV$$

которая происходит от части объема, вырезаемой цилиндром, равна, очевидно,

$$\left(\int\limits_{z_2}^{z_1} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz + \int\limits_{z_4}^{z_3} \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dz\right) d\Sigma = [\varphi(M_1) - \varphi(M_2) + \varphi(M_3) - \varphi(M_4)]\, d\Sigma$$

Но, как было объяснено выше, в точках M_1 и M_3

$$d\Sigma = \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

в точках же M_2 и M_4

$$-d\Sigma = \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

Поэтому та часть объемного интеграла, которая происходит от части объема, вырезаемой цилиндром с основанием $d\Sigma$, равна той части поверхностного интеграла

$$\oint\limits_S \varphi \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

которая происходит от элементов поверхности, вырезаемых этим цилиндром из поверхности S и находящихся у точек M_1, M_2, M_3, M_4. Производя суммирование по всем элементам площади S, мы получим, что

$$\int\limits_V \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dV = \oint\limits_S \varphi \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

Применяя формулы (14) к функциям a_x, a_y, a_z, мы получим

$$\int\limits_V \frac{\partial a_x}{\partial x}\, dV = \oint\limits_S a_x \cos(\mathbf{n}, x)\, dS$$

$$\int\limits_V \frac{\partial a_y}{\partial y}\, dV = \oint\limits_S a_y \cos(\mathbf{n}, y)\, dS$$

$$\int\limits_V \frac{\partial a_z}{\partial z}\, dV = \oint\limits_S a_z \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

Сложение этих трех формул вновь приводит к формуле Гаусса — Остроградского (13). Получив тем или другим способом формулу Гаусса — Остроградского (13), мы сможем теперь доказать существование предела (10) для объема V любой формы, стягивающегося к точке P.

В самом деле, по теореме о среднем

$$\int_V \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right) dV = V\left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_Q$$

где значение суммы в правой части берется в некоторой средней точке Q объема V.

На основании формулы Гаусса — Остроградского мы имеем поэтому, что

$$\frac{1}{V}\oint_S a_n dS = \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}\right)_Q$$

Будем теперь стягивать объем V к точке P, тогда и Q непременно в пределе перейдет в точку P и так как производные

$$\frac{\partial a_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial a_y}{\partial y}, \quad \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

по предположению непрерывны, то мы получим, что

$$\lim_{V\to 0}\left(\frac{1}{V}\oint_S a_n dS\right) = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z}$$

Таким образом формулы (11) и (13) могут быть получены одна из другой.

7. Чтобы уяснить себе, как на графическом представлении поля сказывается то или другое распределение div a, проведем линии вектора a и рассмотрим трубку этих линий, пересекающих какую-нибудь площадку dS, проходящую через некоторую точку P и перпендикулярную к линии вектора, проходящей через точку P. Эта трубка состоит, очевидно, из $a\,dS$ линий, если мы условимся проводить векторные линии так густо, чтобы число векторных линий, нормально пересекающих площадку единичной площади, было бы пропорционально величине вектора. На небольшом расстоянии dl, считая по векторной линии, проведем другое сечение трубки dS', тоже перпендикулярное к векторным линиям. Через него проходит уже $a'\,dS'$ линий.

Вычислим поток через всю поверхность трубки. Через боковую поверхность трубки, состоящую из линий вектора, поток, очевидно, отсутствует, ибо на ней $a_n = 0$. Потоки же через основания трубки равны — $a\,dS$ и $a'\,dS'$.

Поэтому полный поток будет $a'\,dS' - a\,dS$, а так как рассматриваемый объем имеет величину $dS\,dl$, то расхождение будет

$$\frac{a'\,dS' - a\,dS}{dS\,dl} \tag{15}$$

Если $a'\,dS' > a\,dS$, то расхождение положительное; через сечение dS' выходит больше векторных линий, чем вошло через сечение dS, значит, в рассматриваемом объеме $dS\,dl$ возникло $a'\,dS' - a\,dS$ векторных линий, в единице же объема возникает div a векторных линий; таким образом div a служит мерой возникновения или уничтожения (при отрицательном div a) линий.

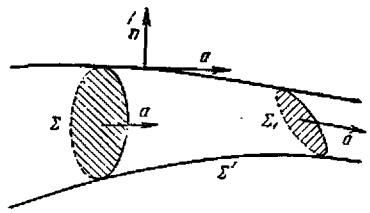
Если мы обратимся к интерпретации поля при помощи фиктивной жидкости, то мы должны будем сказать, что div a служит мерой возникновения или уничтожения жидкости, так как, например, при $a'\,dS' > a\,dS$ больше вытекает жидкости, чем втекает. Таким образом в каждой точке пространства мы имеем как бы источник (положительный или отрицательный возникновения жидкости, а div a служит мерой обильности этого источника.

Рассмотрим поле скоростей действительной несжимаемой жидкости. В этом случае объем жидкости, выходящей через какую-нибудь поверхность, всегда равняется объему входящей, полный поток равен нулю и потому

$$\operatorname{div} a = 0 \tag{16}$$

Это уравнение называется в гидродинамике *уравнением неразрывности несжимаемой жидкости.*

Векторные поля, у которых div a = 0, имеют важное значение и называются свободными от источников или соленоидальными, т. е. трубчатыми. Последнее название связано с тем обстоятельством, что в соленоидальном поле векторные линии не могут нигде ни начинаться, ни кончаться; они могут уходить в бесконечность или быть замкнутыми.



Фиг 52

Чтобы показать это, докажем следующее основное свойство соленоидальных векторов: *для соленоидального вектора поток вектора через любое поперечное сечение векторной трубки имеет одну и ту же величину.*

Для доказательства рассмотрим векторную трубку, ограниченную боковой поверхностью Σ' (фиг. 52). Пересечем эту трубку двумя поперечными сечениями Σ и Σ_1 и рассмотрим замкнутую поверхность S, образованную сечениями Σ, Σ_1 и частью боковой поверхности трубки Σ', заключенной между Σ и Σ_1.

Обозначая через V объем, лежащий внутри поверхности S, и применяя к этому объему теорему Гаусса — Остроградского, найдем, что

$$\oint_S a_n\,dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\,dV$$

Но по условию

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$$

Следовательно, объемный интеграл обращается в 0, а значит и

$$\oint_S a_n\,dS = 0$$

или, что то же самое

$$\int_\Sigma a_n\,dS + \int_{\Sigma'} a_n\,dS + \int_{\Sigma_1} a_n\,dS = 0$$

Но на поверхности Σ' мы имеем $a_n = 0$, ибо вектор а в точке поверхности Σ' направлен по касательной к векторной линии, лежащей на этой поверхности и, следовательно, составляет с нормалью n к этой поверхности Σ' угол в 90°.

На поверхностях Σ и Σ_1 направления внешней нормали различны; изменим поэтому направление нормали у поверхности Σ на прямо противоположное, тогда и значение потока вектора

$$\int_\Sigma a_n\,dS$$

изменит свой знак, поэтому окончательно получаем

$$\int_\Sigma a_n\,dS = \int_{\Sigma_1} a_n\,dS$$

что и доказывает высказанное выше свойство соленоидального вектора.

Так как поток

$$\int_\Sigma a_n dS$$

дает число векторных линий, проходящих через сечение Σ, и так как мы получили, что это число вдоль векторной трубки не меняется, то отсюда и вытекает, что в соленоидальном поле векторные линии нигде не могут ни начинаться, ни кончаться.

Очень близко к только что доказанному свойству соленоидального вектора еще другое его свойство. А именно, возьмем какой-нибудь контур L, и пусть две поверхности S и S_1 опираются на этот контур.

Докажем, что потоки *соленоидального вектора* а *через эти две поверхности равны между собой, если поверхность* S_1 *может быть непрерывной деформацией переведена в поверхность* S *и если после этой деформации направления нормалей к поверхностям* S *и* S_1 *совпадут.* Доказательство опять основывается на применении формулы Гаусса — Остроградского к объе-

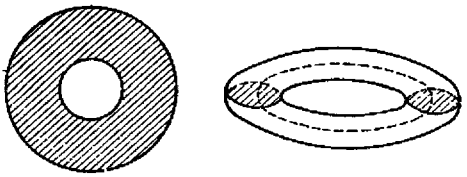
му V, ограниченному поверхностями S и S_1; если, например, нормаль к поверхности S_1 является для объема внешней, а нормаль к S — внутренней, то мы будем иметь

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \int_{S_1} a_n\, dS - \int_S a_n\, dS$$

и так как в нашем случае левая часть равна нулю, то и правая часть равна нулю, что и требовалось доказать.

Доказанная теорема аналогична теореме о независимости криволинейного интеграла потенциального вектора от пути интегрирования, потому что она может быть высказана еще в такой форме:

Если вектор **a** *соленоидальный, то поток этого вектора через любую поверхность S, натянутую на заданный контур L, не зависит от вида этой поверхности, а только от контура L.*



Фиг. 53

Однако теорема о том, что криволинейный интеграл от потенциального вектора по замкнутому контуру равен нулю, справедлива только для случая односвязного пространства. Аналогично этому доказанная только что теорема справедлива только для случая *таких областей, в которых всякая поверхность типа сферической поверхности может быть стянута в точку, не выходя из пределов области.*

Рассмотрим два примера. Пространство, заключенное между двумя сферами S_1 и S_2, не принадлежит к этому классу областей, ибо, если взять сферическую поверхность, расположенную между S_1 и S_2, то ее нельзя стянуть непрерывной деформацией в нашей области в точку. Однако, это пространство будет односвязным, ибо всякая замкнутая кривая в этой области может быть стянута в точку. Другим примером является кольцо (фиг. 53); мы уже знаем, что эта область двусвязна, однако, легко сообразить, что эта область будет принадлежать к вышеуказанному классу областей.

8. До сих пор мы предполагали расхождение вектора непрерывной конечной функцией поля. Во многих случаях приходится, однако, иметь дело с таким распределением вектора **a**, что объем V, в котором происходит интенсивное образование (или уничтожение) жидкости (при интерпретации поля жидкостью), имеет очень малую толщину, так что математически мы можем заменить его поверхностью. В других случаях он сводится даже к линиям и точкам. Такие точки называются и с т о ч н и к а м и или с т о к а м и, смотря по тому, образуется в них жидкость или уничтожается.

Разберем в качестве типичного примера, каково будет поле потенциального вектора, расхождение которого всюду, кроме начала

координат, равно нулю; в начале же координат пусть находится источник с обильностью e, так что в каждую единицу времени из этого источника вытекает e единиц жидкости. Таким образом поток вектора a через бесконечно малую замкнутую поверхность s_0, окружающую начало координат, равен e. Покажем, что поток через любую поверхность S, окружающую начало координат, равен e. В самом деле, применим теорему Гаусса—Остроградского (12) к объему, заключенному между поверхностями s_0 и S. Так как div a = 0, то объемный интеграл пропадает. Поверхностный же интеграл через поверхность s_0 равен, очевидно, — e, потому что теперь за направление внешней нормали к поверхности s_0 надо принимать то, которое смотрит внутрь объема, ограниченного поверхностью s_0 и содержащего начало координат.

Поэтому

$$\int_S a_n dS = e \tag{17}$$

По условию вектор a потенциальный

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$$

и естественно по симметрии считать φ функцией только расстояния r.

Но тогда

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi = \varphi'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Возьмем в формуле (17) за поверхность S поверхность сферы радиуса r с центром в начале координат, тогда

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad a_n = \varphi'(r)$$

и поток вектора будет $4\pi r^2 \varphi'(r)$; значит

$$4\pi r^2 \varphi'(r) = e$$

Отсюда

$$\varphi'(r) = \frac{e}{4\pi r^2}, \quad \varphi(r) = -\frac{e}{4\pi r}$$

Итак,

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(-\frac{e}{4\pi r}\right) = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi r^3}, \quad a = \frac{e}{4\pi r^2}$$

Изучим поле полученного вектора a несколько подробнее. Проверим, прежде всего, что этот вектор является соленоидальным. В самом деле для проекции его мы имеем, очевидно, выражения

$$a_x = \frac{ex}{4\pi r^3}, \quad a_y = \frac{ey}{4\pi r^3}, \quad a_z = \frac{ez}{4\pi r^3}$$

Поэтому

$$\frac{\partial a_x}{\partial x} = \frac{e}{4\pi r^3} - \frac{3ex}{4\pi r^4} \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{e}{4\pi r^3} - \frac{3ex}{4\pi r^4} \frac{x}{r} = \frac{e(r^2 - 3x^2)}{4\pi r^5}$$

$$\frac{\partial a_y}{\partial y} = \frac{e(r^2 - 3y^2)}{4\pi r^5}$$

$$\frac{\partial a_z}{\partial z} = \frac{e(r^2 - 3z^2)}{4\pi r^5}$$

Отсюда

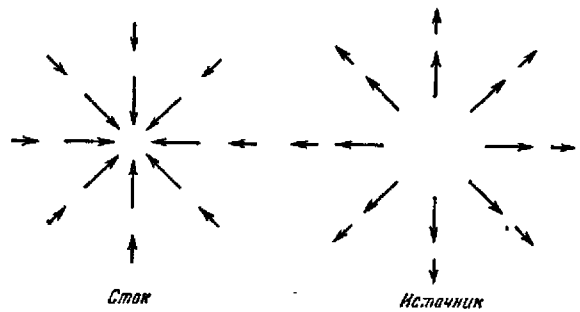
$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{e\,(3r^2 - 3x^2 - 3y^2 - 3z^2)}{4\pi r^5} = 0$$

Полученный вектор имеет особенность в начале координат, поэтому областью его задания мы должны считать все пространство с выключенным началом координат. Но такое пространство не принадлежит к указанному в конце предыдущего пункта классу областей. Этим объясняется, что в то время как поток вектора a через замкнутую поверхность, не заключающую внутри себя начала координат, будет по теореме Гаусса обращаться в нуль:

$$\oint_S a_n\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = 0$$

поток через поверхность, содержащую внутри себя начало координат, будет отличен от нуля и будет равен e.

Общий характер поля, доставляемого источником и стоком, ясен из фиг. 54.



Фиг 54

Векторными линиями служат прямые, проходящие через источник или сток, причем величина вектора изменяется обратно пропорционально квадрату расстояния точки до источника или стока. Значение потока вектора через бесконечно малую поверхность, охватывающую источник или сток, будем называть *обильностью, мощностью или интенсивностью* источника.

Если мы имеем систему n точек M_1, M_2, . . . , M_n с обильностями e_1, e_2, . . . , e_n и если расстояния точки M (r) от этих точек обозначить через r_1, r_2, . . . , r_n, то потенциальное поле

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{r}) = \operatorname{grad}\left(-\frac{e_1}{4\pi r_1} - \frac{e_2}{4\pi r_2} - \ldots - \frac{e_n}{4\pi r_n}\right) \tag{18}$$

имеет расхождение, всюду равное нулю, за исключением указанных n источников.

Рассмотрим замкнутую поверхность S и пусть часть точек M_1, M_2, . . . , M_n лежит внутри ее; тогда поток вектора a через S равен сумме обильностей тех источников, которые лежат внутри S:

$$\oint_S a_n\, dS = \sum{}' e_i \tag{19}$$

где сумма распространяется по тем источникам, которые лежат внутри S. В самом деле, окружим эти источники малыми сферами s_i и применим теорему Гаусса (12) к объему, получающемуся выделением из пространства внутри S малых шариков, ограниченных сферами s_i.

Так как внутри этого объема $\operatorname{div} \mathbf{a} = 0$, то полный поток через S и через все поверхности s_i равен нулю, но, как было выяснено выше, поток вектора $\mathbf{a}$ через s_i равен $-e_i$; поэтому

$$\int_S a_n\,dS - \sum{}' e_i = 0 \tag{20}$$

а это и есть формула (19).

Сравнивая эту формулу с формулой Гаусса

$$\oint_S a_n\,dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\,dV$$

мы можем сказать, что в элементе объема dV находится источник интенсивности $\operatorname{div} \mathbf{a}\,dV$. Таким образом, мы приходим к выводу, что $\operatorname{div} \mathbf{a}$ дает меру интенсивности источников, непрерывно распределенных по пространству и отнесенных к единице объема.

Задача 104. Доказать, что

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{div} \mathbf{a}_1 + \operatorname{div} \mathbf{a}_2$$

Задача 105. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{r}$.

$$\operatorname{div} \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

Задача 106. Вычислить $\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a})$, где φ — скалярная, $\mathbf{a}$ — векторная функция поля.

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \frac{\partial \varphi a_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi a_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi a_z}{\partial z} =$$

$$= \varphi \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \varphi \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \varphi \frac{\partial a_z}{\partial z} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z =$$

$$= \varphi \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \right) + \frac{\partial \varphi}{\partial x} a_x + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_y + \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_z = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a}$$

Задача 107. Вычислить $\operatorname{div}(r\mathbf{c})$ и $\operatorname{div}(r^2\mathbf{c})$, где $\mathbf{c}$ постоянный вектор.

Ответ. $\operatorname{div}(r\mathbf{c}) = \frac{\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}}{r}$, $\operatorname{div}(r^2\mathbf{c}) = 2\mathbf{c} \cdot \mathbf{r}$.

Задача 108. Вычислить $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{r})$, где α — постоянный скаляр.

Ответ. $\operatorname{div}(\alpha \mathbf{r}) = 3\alpha$.

Задача 109. Вычислить $\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r}$.

Ответ.

$$\operatorname{div} \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{1}{r} \operatorname{div} \mathbf{r} + \mathbf{r} \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r} = \frac{3}{r} - \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{3}{r} - \frac{1}{r} = \frac{2}{r}$$

Задача 110. Вычислить $\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})$, $\operatorname{div} \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

Ответ. $\operatorname{div} \mathbf{b}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$, $\operatorname{div} \mathbf{r}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}) = 4\mathbf{r}\cdot\mathbf{a}$.

Задача 111. Вычислить расхождение в поле скоростей и ускорений в движении твердого тела.

Ответ. По формулам (53) и (55) § 9:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = \mathbf{w}_0 + \dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}) - \mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})$$

Вычислим $\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{r})$, где $\mathbf{a}$ — постоянный вектор,

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{r})_x = a_y z - a_z y, \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{r})_y = a_z x - a_x z, \quad (\mathbf{a}\times\mathbf{r})_z = a_x y - a_y x$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) = \frac{\partial}{\partial x}(a_y z - a_z y) + \frac{\partial}{\partial y}(a_z x - a_x z) + \frac{\partial}{\partial z}(a_x y - a_y x) = 0$$

Поэтому

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \operatorname{div}\mathbf{v}_0 + \operatorname{div}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = \operatorname{div}\mathbf{w}_0 + \operatorname{div}(\dot{\boldsymbol{\omega}}\times\mathbf{r}) + \operatorname{div}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}) - \operatorname{div}\mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega})$$

Но по задачам 110 и 108

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\omega}\cdot\mathbf{r}) = \boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = \omega^2, \qquad \operatorname{div}\mathbf{r}(\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega}) = 3\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{\omega} = 3\omega^2$$

Поэтому

$$\operatorname{div}\mathbf{w} = \omega^2 - 3\omega^2 = -2\omega^2$$

Задача 112. При какой функции $\psi(r)$ будет $\operatorname{div}\psi(r)\,\mathbf{r} = 0$?

Ответ. По задаче 106

$$\operatorname{div}\psi(r)\,\mathbf{r} = \psi(r)\operatorname{div}\mathbf{r} + \operatorname{grad}\psi(r)\cdot\mathbf{r} = 3\psi(r) + \psi'(r)\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\mathbf{r} = 3\psi + r\psi'$$

Поэтому надо решить уравнение

$$3\psi + r\psi' = 0$$

или

$$\frac{3}{r} + \frac{\psi'}{\psi} = 0, \quad 3\log r + \log\psi = \log C, \quad \psi r^3 = C$$

и окончательно

$$\psi = \frac{C}{r^3}$$

где C — произвольная постоянная.

Задача 113. Найти $\operatorname{div}(r^4\mathbf{r})$.

Ответ. $7r^4$.

Задача 114. Найти $\operatorname{div}[r(\mathbf{w}\times\mathbf{r})]$, где $\mathbf{w}$ — постоянный вектор.

Ответ. 0.

Задача 115. Найти $\operatorname{div}[\mathbf{a}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{b})]$, где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — постоянные векторы.

Ответ. $2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}$.

§ 15. Оператор Гамильтона. Некоторые применения

1. Рассматривая вектор $\operatorname{grad}\varphi$

$$\operatorname{grad}\varphi = \nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{1}$$

мы указали, что этот вектор можно получить формальным применением оператора Гамильтона «набла»

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \tag{2}$$

к скалярной функции φ. Мы видели далее, что при помощи этого оператора выражается также и градиент одного вектора по другому

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a} = v_x\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z} \tag{3}$$

Применение оператора ∇ оказывается чрезвычайно удобным во многих вопросах векторного анализа. Поэтому мы подробно остановимся на его свойствах.

Покажем прежде всего, что *расхождение вектора* $\mathbf{a}$ *можно формально рассматривать как скалярное произведение символического вектора* ∇ *на вектор* $\mathbf{a}$

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z$$

В самом деле, производя это перемножение по формуле скалярного умножения двух векторов

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} = b_xa_x + b_ya_y + b_za_z$$

и полагая

$$b_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad b_y = \frac{\partial}{\partial y}, \quad b_z = \frac{\partial}{\partial z}$$

получим

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = \operatorname{div}\mathbf{a} \tag{4}$$

Покажем далее, что вектору ∇ можно дать другое толкование. С этой целью запишем наше первоначальное определение $\operatorname{div}\mathbf{a}$ следующим образом

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}\,dS}{V}$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, получаем

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{a}\,dS}{V} \tag{5}$$

Рассматривая это равенство, мы видим, что под знаком поверхностного интеграла стоит скалярное произведение из единичного вектора нормали и вектора **a** в соответствии с тем обстоятельством, что слева стоит скалярное произведение из ∇ и вектора **a**. Покажем еще на двух примерах, что это обстоятельство неслучайное.

Примем во внимание три формулы (14) § 14; умножим первую из этих формул на **i**, вторую на **j**, третью на **k** и сложим трв полученных равенства. Так как

$$\mathbf{i}\cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{j}\cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{k}\cos(\mathbf{n}, z) = \mathbf{n}$$

$$\mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} = \nabla\varphi$$

то мы получаем формулу, аналогичную формуле Гаусса — Остроградского

$$\oint_S \varphi\,\mathbf{n}\,dS = \int_V \operatorname{grad}\varphi\,dV \tag{6}$$

Пусть теперь V обозначает бесконечно малый объем, стягивающийся к точке M; тогда мы имеем по теореме о среднем, что

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dV = V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_1}$$

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dV = V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{M_2}$$

$$\int_V \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dV = V\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{M_3}$$

Следовательно,

$$\int_V \operatorname{grad}\varphi\,dV = V\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_{M_1}\mathbf{i} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_{M_2}\mathbf{j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_{M_3}\mathbf{k}\right]$$

где M_1, M_2 и M_3 — какие-то средние точки объема V. Разделив предыдущее равенство на V, перейдя к пределу при $V \to 0$ и заметив, что при этом точки M_1, M_2 и M_3 переходят в точку M, получим в предположении непрерывности производных $d\varphi/dx$, $d\varphi/dy$, $d\varphi/dz$, что

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \mathbf{n}\varphi\,dS}{V} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_M\mathbf{i} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)_M\mathbf{j} + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)_M\mathbf{k}$$

или

$$\nabla\varphi = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \mathbf{n}\varphi\,dS}{V} \tag{7}$$

Эта формула для $\operatorname{grad}\varphi$ совершенно аналогична формуле (5) для $\operatorname{div}\mathbf{a}$. При этом опять под знаком интеграла стоит выражение $\mathbf{n}\varphi$, построенное из $\nabla\varphi$ путем замены ∇ на единичный вектор нормали $\mathbf{n}$.

Обращаясь теперь к операции $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a}$, мы должны ожидать, что для этой операции справедлива формула

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint\limits_S (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{a}\,dS}{V} \tag{8}$$

Покажем, что это действительно так, однако лишь с *той весьма существенной оговоркой, что вектор* $\mathbf{v}$ *считается постоянным*. В самом деле, постараемся при этом условии вычислить интеграл

$$\oint\limits_S (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{a}\,dS = \oint\limits_S [v_x\mathbf{a}\cos(\mathbf{n},x) + v_y\mathbf{a}\cos(\mathbf{n},y) + v_z\mathbf{a}\cos(\mathbf{n},z)]\,dS \tag{9}$$

Мы имели ранее формулу

$$\oint\limits_S \varphi\cos(\mathbf{n},x)\,dS = \int\limits_V \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dV$$

Очевидно, что эта формула справедлива и для вектора

$$\oint\limits_S \mathbf{a}\cos(\mathbf{n},x)\,dS = \int\limits_V \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x}\,dV \tag{10}$$

(ибо она справедлива для каждой составляющей этого вектора); точно так же мы имеем

$$\oint\limits_S \mathbf{a}\cos(\mathbf{n},y)\,dS = \int\limits_V \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y}\,dV \tag{11}$$

$$\oint\limits_S \mathbf{a}\cos(\mathbf{n},z)\,dS = \int\limits_V \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\,dV \tag{12}$$

Помножая эти три формулы по порядку на постоянные числа v_x, v_y, v_z и складывая, мы найдем

$$\oint\limits_S [v_x\mathbf{a}\cos(\mathbf{n},x) + v_y\mathbf{a}\cos(\mathbf{n},y) + v_z\mathbf{a}\cos(\mathbf{n},z)]\,dS =$$

$$= \int\limits_V \left(v_x\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z}\right)dV$$

или

$$\oint\limits_S (\mathbf{v}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{a}\,dS = \int\limits_V (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}\,dV \tag{13}$$

откуда, повторяя то же рассуждение, что и для $\operatorname{grad}\varphi$, выведем формулу (8). Разъясним теперь, почему нам нужно в этой формуле считать $\mathbf{v}$ постоянным. Дело в том, что символический вектор ∇ является *дифференциальным оператором*, так как он содержит в себе производные по координатам. Между тем, в выражении $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a}$ вектор $\mathbf{v}$ стоит перед оператором ∇, и поэтому этот оператор ∇ *не может действовать* на $\mathbf{v}$, почему нам и приходится считать вектор $\mathbf{v}$ постоянным.

2. Три рассмотренных примера позволяют нам дать общее правило для определения значения выражения $L(\nabla)$, где $L(\mathbf{a})$ есть линейное однородное выражение относительно вектора $\mathbf{a}$, т. е. выражение, удовлетворяющее двум условиям:

$$L(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = L(\mathbf{a}) + L(\mathbf{b}), \quad L(\lambda\mathbf{a}) = \lambda L(\mathbf{a})$$

где $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — какие-нибудь векторы, λ — какое-нибудь число.

Если в этом выражении мы рассматриваем ∇ как оператор

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

то мы должны в выражении $L(\nabla)$ произвести с этим оператором все требуемые действия, причем *мы условимся, что оператор ∇ действует на все векторы, которые стоят позади него, и не действует на те векторы, которые стоят перед ним.*

Примеры:

$$\nabla\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{14}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{15}$$

$$\nabla\times\mathbf{a} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) \tag{16}$$

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} = v_x\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial x} + v_y\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial y} + v_z\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial z} \tag{17}$$

$$(\nabla\cdot\mathbf{v})\,\mathbf{a} = \frac{\partial(v_x\mathbf{a})}{\partial x} + \frac{\partial(v_y\mathbf{a})}{\partial y} + \frac{\partial(v_z\mathbf{a})}{\partial z} \tag{18}$$

Чтобы дать другое представление $L(\nabla)$, докажем следующую общую формулу Гаусса — Остроградского:

$$\int_V L(\nabla)\,dV = \oint_S L(\mathbf{n})\,dS \tag{19}$$

В самом деле, в силу линейности $L(\nabla)$ мы имеем прежде всего, что

$$\int_V L(\nabla)dV = \int_V L\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right)dV + \int_V L\left(\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right)dV + \int_V L\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)dV$$

Рассмотрим последний из этих интегралов; так как векторы, стоящие перед ∇, мы условились считать постоянными, то мы имеем право написать в силу линейности $L(\mathbf{a})$

$$L\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial}{\partial z}L(\mathbf{k})$$

и, следовательно,

$$\int_V L\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)dV = \int_V \frac{\partial}{\partial z}L(\mathbf{k})\,dV$$

Выражение $L(\mathbf{k})$ является либо скаляром φ, либо вектором $\mathbf{a}$; в первом случае мы можем применить формулу

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial z}\, dV = \oint_S \varphi \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

Во втором случае формулу

$$\int_V \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial z}\, dV = \oint_S \mathbf{a} \cos(\mathbf{n}, z)\, dS$$

В обоих случаях мы будем иметь

$$\int_V \frac{\partial}{\partial z} L(\mathbf{k})\, dV = \oint_S \cos(\mathbf{n}, z)\, L(\mathbf{k})\, dS$$

и, следовательно, еще раз, пользуясь свойством линейности,

$$\int_V L\left(\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) dV = \oint_S L(\cos(\mathbf{n}, z)\, \mathbf{k})\, dS$$

Точно так же получим

$$\int_V L\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}\right) dV = \oint_S L(\cos(\mathbf{n}, x)\, \mathbf{i})\, dS$$

$$\int_V L\left(\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}\right) dV = \oint_S L(\cos(\mathbf{n}, y)\, \mathbf{j})\, dS$$

В результате сложения этих трех формул, найдем требуемое равенство

$$\int_V L(\nabla)\, dV = \oint_S L(\mathbf{n})\, dS$$

Допустим теперь, что V есть бесконечно малый объем, стягивающийся к точке M, и что $L(\nabla)$ есть непрерывная функция точки M.

Тогда в точках объема V значения $L(\nabla)$ мало отличаются от значения этой величины в точке M:

$$L(\nabla) = \{L(\nabla)\}_M + \varepsilon$$

где ε — бесконечно малая величина. Поэтому

$$\int_V L(\nabla)\, dV = \int_V \{\{L(\nabla)\}_M + \varepsilon\}\, dV = \{L(\nabla)\}_M V + \eta V$$

где η тоже бесконечно малая величина. Итак, мы получаем, что

$$\frac{\oint_S L(\mathbf{n})\, dS}{V} = \frac{\int_V L(\nabla)\, dV}{V} = \{L(\nabla)\}_M + \eta$$

Переходя к пределу, когда объем V стягивается в точку M, получим

$$L(\nabla) \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S L(\mathbf{n})\, dS}{V} \tag{20}$$

Это второе определение $L(\nabla)$ совершенно эквивалентно с первоначальным определением $L(\nabla)$, однако оно гораздо удобнее первоначального определения, так как не содержит ни малейшего намека на прямоугольную систему координат; в частности, только что полученное нами равенство с удобством может быть применено для вычисления $L(\nabla)$ в любой системе криволинейных координат.

3. В дальнейшем мы будем весьма широко пользоваться символическим методом вычислений, связанным с применением оператора Гамильтона ∇, сейчас же на двух простых примерах покажем сущность этого символического метода.

Пусть мы имеем скалярную функцию точки $\varphi(\mathbf{r}) = \varphi(x, y, z)$ и векторную функцию точки $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x, y, z)$, и требуется вычислить $\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a})$. В задаче 106 уже было проделано это вычисление обычным способом. Покажем теперь применение символического метода. Мы имеем

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \nabla \cdot (\varphi\mathbf{a})$$

Мы видим, что дифференциальный оператор

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

состоящий в существенном из трех производных по координатам, применяется к произведению двух функций φ и $\mathbf{a}$. Но по правилу дифференцирования произведения производная от произведения нескольких функций составляется следующим образом: дифференцируем первый множитель, считая все остальные постоянными, затем дифференцируем только второй множитель, считая все остальные постоянными и т. д., все полученные выражения складываем.

В дальнейшем мы будем в тех случаях, когда это может вызвать сомнение, отмечать все векторы, которые мы на время считаем постоянными, индексом c (const). Поэтому, согласно только что высказанному правилу, мы должны написать

$$\nabla \cdot (\varphi\mathbf{a}) = \nabla \cdot \varphi_c\mathbf{a} + \nabla \cdot \varphi\mathbf{a}_c$$

Рассматривая выражение $\nabla \cdot \varphi_c\mathbf{a}$, мы можем постоянный множитель φ_c вынести за знак ∇, в результате получим

$$\nabla \cdot \varphi_c\mathbf{a} = \varphi_c \nabla \cdot \mathbf{a} = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a}$$

где мы уже можем заменить φ_c на φ, так как φ стоит перед ∇ и, следовательно, не подвергается действию ∇.

В выражении $\nabla \cdot \varphi \mathbf{a}_c$ оператор ∇ действует только на скаляр φ, поэтому мы можем написать, что

$$\nabla \cdot \varphi \mathbf{a}_c = \nabla\varphi \cdot \mathbf{a}_c = \mathbf{a}_c \cdot \nabla\varphi = \mathbf{a} \cdot \nabla\varphi$$

В результате получаем формулу

$$\nabla \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \nabla \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \nabla\varphi \tag{21}$$

или при обычных обозначениях

$$\operatorname{div} \cdot (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \operatorname{grad} \varphi \tag{22}$$

В качестве второго примера возьмем операцию $(\nabla \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}$. Так как здесь $\mathbf{v}$ и $\mathbf{a}$ стоят после ∇, то действие дифференциального оператора ∇ мы должны считать распространяющимся и на $\mathbf{v}$ и на $\mathbf{a}$. Согласно вышеприведенному правилу дифференцирования мы должны написать

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a} = (\nabla \cdot \mathbf{v}_c)\,\mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}_c$$

В выражении $(\nabla \cdot \mathbf{v}_c)$ мы должны, имея в виду постоянство вектора $\mathbf{v}_c$, переставить ∇ с $\mathbf{v}_c$; итак

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}_c)\,\mathbf{a} = (\mathbf{v}_c \cdot \nabla)\,\mathbf{a} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a}$$

(раз $\mathbf{v}$ стоит перед ∇, оператор ∇ на $\mathbf{v}$ не действует, и незачем писать значок c). Далее

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}_c = \mathbf{a}_c\,(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \mathbf{a}\,(\nabla \cdot \mathbf{v})$$

и значит

$$(\nabla \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a} = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\,(\nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v} \tag{23}$$

Если мы применим обобщенную формулу Гаусса — Остроградского (19) к $(\nabla \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}$, мы получим

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}\,dV = \oint_S (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})\,\mathbf{a}\,dS = \oint_S \mathbf{a}\,v_n\,dS$$

В силу предыдущей формулы, получаем важное соотношение

$$\int_V [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} + \mathbf{a} \operatorname{div} \mathbf{v}]\,dV = \oint_S \mathbf{a}\,v_n\,dS \tag{24}$$

В частности при $\mathbf{a} = \mathbf{v}$, получаем формулу

$$\int_V [(\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{v} \operatorname{div} \mathbf{v}]\,dV = \oint_S v_n \mathbf{v}\,dS \tag{25}$$

4. Остановимся еще на одной дифференциальной операции второго порядка, а именно, составим расхождение потенциального вектора $\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$.

Так как

$$\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

то

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

или

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \tag{26}$$

Выражение

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta \tag{27}$$

называют оператором Лапласа, а уравнение

$$\Delta\varphi=0 \tag{28}$$

уравнением Лапласа.

В символической форме мы имеем

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi=\nabla\cdot\nabla\varphi=(\nabla\cdot\nabla)\varphi \tag{29}$$

Но скалярное произведение $\nabla\cdot\nabla$, которое чаще обозначают через ∇^2, очевидно, равно как раз Δ:

$$\nabla\cdot\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\Delta \tag{30}$$

Заметим еще, что так как

$$\operatorname{div}\mathbf{a}=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\limits_S a_n\,dS}{V}$$

то, полагая $\mathbf{a}=\operatorname{grad}\varphi$, $a_n=\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, получим

$$\Delta\varphi=\nabla^2\varphi=\lim_{V\to 0}\frac{\oint\limits_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS}{V} \tag{31}$$

и в соответствии с этим

$$\int\limits_V\Delta\varphi\,dV=\oint\limits_S\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS \tag{32}$$

5. Откладывая пока дальнейшее изучение символического способа, обратимся к некоторым физическим применениям понятия расхождения.

Начнем с вывода уравнения теплопроводности. Допустим, что мы рассматриваем некоторое тело и изучаем тепловое состояние его. Последнее будет известно, если для каждой точки тела мы будем знать температуру T в любой момент; иными словами, тепловое состояние тела характеризуется скалярной функцией $T(\mathbf{r}, t)=T(x, y, z, t)$.

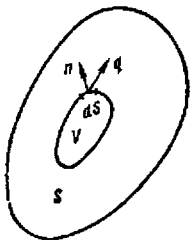
Если функция T не зависит от времени, мы говорим о стационарной задаче теплопроводности, в противном случае о нестационарной.

Рассмотрим внутри тела некоторый объем V, ограниченный поверхностью S, и подсчитаем двумя способами изменение количества тепла, заключенного в объеме V (фиг. 55).

Плотность тела обозначим через ρ (если тело неоднородное, то ρ будет функцией точки $\rho(\mathbf{r}) = \rho(x, y, z)$), а теплоемкость через c (в случае неоднородности тела c тоже есть функция точки).

Рассмотрим элемент dV объема; масса этого элемента равна $\rho\, dV$; за время dt этот элемент нагревается на

$$\frac{\partial T}{\partial t}\, dt$$



Фиг. 55

градусов; на это требуется, по самому определению теплоемкости, количество тепла, равное

$$dQ = c\rho\, dV \frac{\partial T}{\partial t}\, dt$$

интегрируя по всему объему, увидим, что за время dt всему объему V необходимо было сообщить количество тепла, равное

$$Q = \int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV\, dt$$

Это же самое количество тепла можно подсчитать иным способом. Мы принимаем, что тепло передается только процессом теплопроводности. тогда в каждой точке тела будет существовать такой вектор потока тепла $\mathbf{q}(\mathbf{r}, t)$, поток которого через некоторую поверхность S дает количество тепла, протекающего через эту поверхность в единицу времени. Таким образом за врем dt через поверхность S вытечет количество тепла, равное

$$\oint_S q_n\, dS\, dt$$

я, следовательно,

$$Q = -\oint_S q_n\, dS\, dt$$

Приравнивая два полученных выражения для Q, находим равенство

$$\int_V c\rho \frac{\partial T}{\partial t}\, dV = -\oint_S q_n\, dS \tag{33}$$

Но по теореме Гаусса — Остроградского

$$\oint q_n\, dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{q}\, dV$$

и, следовательно,

$$\int_V \left(c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}\right) dV = 0 \tag{34}$$

Так как это равенство справедливо *для любого объема* V, то подынтегральная функция должна тождественно равняться нулю. В самом деле, возьмем какую-либо точку M и примем за объем V бесконечно малый объем, стягивающийся к точке M, тогда мы будем по теореме о среднем иметь

$$\left(c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q}\right)_{M_1} V = 0$$

где M_1 — некоторая средняя точка объема V. При стягивании объема V к точке M, точка M_1 тоже будет стремиться к точке M и в силу непрерывности подынтегрального выражения в формуле (34) мы получим, переходя в последнем равенстве, поделенном на V, к пределу, что

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \tag{35}$$

в любой точке M внутри тела.

Рассмотрим теперь, как зависит $\mathbf{q}$ от T. Так как поток тепла направлен, очевидно, от более нагретых частей тела к более холодным, а вектор $\operatorname{grad} T$ направлен, наоборот, от более холодных частей к более теплым, то можно принять, по крайней мере для изотропных тел, что

$$\mathbf{q} = -k \operatorname{grad} T \tag{36}$$

где k — коэффициент теплопроводности, который в случае неоднородности тела будет иметь в различных точках различные значения. Подставляя значение (36) для $\mathbf{q}$ в уравнение (35), получим уравнение теплопроводности в следующем виде

$$c\rho \frac{\partial T}{\partial t} - \operatorname{div} (k \operatorname{grad} T) = 0 \tag{37}$$

Остановимся еще на том частном случае, когда k и $c\rho$ являются постоянными величинами; обозначая в этом случае $k/c\rho$ через a и вспоминая, что $\operatorname{div} \operatorname{grad} T = \triangle T$, получим, что

$$\frac{\partial T}{\partial t} = a \triangle T \tag{38}$$

Наконец для случая стационарной задачи теплопроводности $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$, и уравнение теплопроводности принимает вид

$$\triangle T = 0 \tag{39}$$

так что в этом случае температура удовлетворяет уравнению Лапласа.

Для того, чтобы можно было полностью решить какую-либо задачу о теплопроводности, нужно задать еще граничные и, в случае нестационарной задачи, еще начальные условия, но на этих вопросах мы будем останавливаться только при наличии в том надобности.

6. Рассмотрим теперь основные уравнения гидромеханики.

Выведем прежде всего так называемое уравнение неразрывности.

Мы будем рассматривать движение газа или, как иначе принято называть, движение сжимаемой жидкости. Обозначая плотность последней через ρ, будем иметь, что ρ есть функция точки и времени $\rho(\mathbf{r}, t)$. Движение жидкости может быть охарактеризовано заданием поля скорости $\mathbf{v}$, т. е. заданием скорости $\mathbf{v}$ как функции точки и времени $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Во всяком движении жидкости функции $\mathbf{v}$ и ρ связаны уравнением, которое называется *уравнением неразрывности*. Мы выведем это уравнение аналогично уравнению теплопроводности, подсчитывая двумя различными способами изменение массы жидкости, находящейся внутри неподвижной поверхности S, произвольно взятой.

Если V — объем, ограниченный этой поверхностью, то масса элемента объема dV будет равна $\rho\,dV$, а масса жидкости, находящейся внутри поверхности S, равна

$$M = \int_V \rho\,dV$$

За время dt плотность ρ получит приращение $\frac{\partial \rho}{\partial t}\,dt$ и соответственно с этим изменение массы M, находящейся внутри неподвижной поверхности S, будет равно

$$dM = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV\,dt$$

Но изменение массы могло произойти только за счет того, что какая-то масса жидкости прошла через поверхность S, ограничивающую наш объем. Если рассмотреть элемент поверхности dS, внешняя нормаль к которому есть $\mathbf{n}$, то через этот элемент за время dt вытечет наружу объем жидкости, равный $v_n\,dS\,dt$, масса же этого объема равна $\rho v_n\,dS\,dt$, через всю же поверхность вытечет масса

$$\oint_S \rho v_n\,dS\,dt$$

и, следовательно,

$$dM = -\oint_S \rho v_n\,dS\,dt$$

Приравнивая два полученных выражения для dM, мы находим равенство

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t}\,dV + \oint_S \rho v_n\,dS = 0 \tag{40}$$

По теореме Гаусса — Остроградского

$$\oint_S \rho v_n\,dS = \int_V \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\,dV$$

Следовательно, предыдущее уравнение принимает вид

$$\int_V \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v})\right] dV = 0$$

Так как это уравнение имеет место для любого объема V, то должно быть тождественно

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0 \tag{41}$$

Это и есть искомое *уравнение неразрывности*. Его можно написать еще в другой форме. В самом деле, мы имели [формула (22)]

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = \rho \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$$

Поэтому предыдущее уравнение примет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{42}$$

Но в § 13, п. 2 мы установили следующую связь между полной и частной производной

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \rho$$

Принимая это во внимание, мы можем переписать уравнение неразрывности в следующей, часто употребляемой форме

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{43}$$

Рассмотрим частный случай несжимаемой, но может быть неоднородной жидкости. В этом случае плотность каждой частицы жидкости остается неизменной и, следовательно, по самому определению индивидуальной производной

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 \tag{44}$$

поэтому уравнение неразрывности принимает вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{45}$$

так что в случае несжимаемой жидкости вектор скорости является вектором соленоидальным. Мы знаем, что для соленоидального вектора поток вектора через любое поперечное сечение векторной трубки является постоянным. Векторные линии вектора скорости $\mathbf{v}$ называются *линиями тока*, а соответствующие трубки — *трубками тока*. Если взять трубку тока с бесконечно малым поперечным сечением, то произведение из величины скорости на площадь поперечного сечения, нормального к оси трубки, будет вдоль трубки одинаково и, следовательно, скорость увеличивается там, где трубка тока сжимается, и уменьшается, где трубка тока расширяется.

Если движение несжимаемой жидкости обладает *потенциалом скорости* φ, т. е. если

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi \tag{46}$$

то уравнение неразрывности дает нам в силу

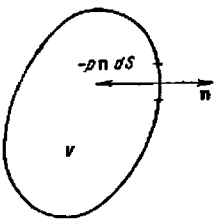
$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \Delta\varphi$$

уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{47}$$

Итак, *потенциал скорости в движении несжимаемой жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа.*

Выведем теперь основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости. В гидромеханике различают жидкости идеальные и вязкие; в основе этого различия лежит характер внутренних сил. Если мы внутри жидкости вырежем объем V, ограниченный поверхностью S, то со стороны находящихся вне объема частиц жидкости будут оказываться воздействия на частицы, лежащие внутри объема V (фиг. 56). Эти силы называются *внутренними*, так как они происходят от взаимодействия частиц жидкости. Когда же мы рассматриваем объем V, то по отношению к нему упомянутые только что силы становятся *внешними*. Их действие учитывают, принимая, что на каждый элемент dS поверхности S действует поверхностная сила $\mathbf{q}\,dS$, пропорциональная площади элемента поверхности. Если эта сила действует всегда *нормально* к элементу поверхности, то жидкость называется *идеальной*. В этом случае вектор $\mathbf{q}$ имеет направление, прямо противоположное направлению единичного вектора внешней нормали $\mathbf{n}$, и мы имеем



Фиг. 56

$$\mathbf{q} = -p\mathbf{n} \tag{48}$$

где p — называется *давлением* жидкости.

Если вектор $\mathbf{q}$ может иметь не только нормальную, но и касательную составляющую к элементу поверхности dS, то жидкость называется *вязкой*.

В идеальной жидкости величина давления, как можно показать, не зависит от направления элемента. Таким образом гидродинамическое давление есть функция от точки и времени:

$$p(\mathbf{r}, t) = p(x, y, z, t)$$

Для вывода основного уравнения гидродинамики мы примем начало Даламбера, по которому, если ко всем внешним силам, действующим на точки системы, присоединить еще силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и, следовательно, ее главный вектор, т. е. геометрическая сумма сил системы, будет равняться нулю.

Обозначим через $\mathbf{F}$ внешнюю силу (как например силу тяжести), отнесенную к единице массы, и применим начало Даламбера к системе

жидких частиц, заполняющих объем V; рассмотрим элемент dV этого объема; масса этого элемента объема равна ρdV; внешняя сила, действующая на этот элемент объема, будет равна $\rho \mathbf{F} dV$, а сила инерции будет равна

$$-\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

(ибо сила инерции равна взятому со знаком минус произведению из массы частицы ρdV на ее ускорение $d\mathbf{v}/dt$). Поэтому главный вектор массовых сил и сил инерции будет равен

$$\int_V \rho \mathbf{F}\, dV - \int_V \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} dV$$

Но на частицы объема V действуют, как было выяснено выше, еще поверхностные силы, которые по отношению к частицам объема V должны тоже рассматриваться, как внешние силы. Так как на элемент поверхности dS действует по вышесказанному сила давления $-p\,\mathbf{n}\,dS$, то главный вектор поверхностных сил будет равен

$$-\oint_S p\ \mathbf{n}\, dS$$

Согласно началу Даламбера, получаем равенство

$$\int_V \left(\rho \mathbf{F} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) dV - \oint_S p\,\mathbf{n}\, dS = 0 \tag{49}$$

Применяем теперь формулу (6) п. 1 § 15, аналогичную формуле Гаусса — Остроградского

$$\oint_S p\mathbf{n}\, dS = \int_V \operatorname{grad} p\, dV$$

в результате получаем

$$\int_V \left(\rho \mathbf{F} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{grad} p\right) dV = 0$$

и так как это равенство справедливо для любого объема V, то необходимо должно быть

$$\rho \mathbf{F} - \rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} - \operatorname{grad} p = 0, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{50}$$

Это и есть основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости. Часто его пишут еще в форме

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{51}$$

используя известное нам соотношение между полной и частной производными вектора (§ 13, п. 2).

В качестве последнего примера рассмотрим электростатическое поле. Мы уже знаем (§ 12, п. 6), что электрическое напряжение E, т. е. сила, действующая на единичный заряд положительного электричества, помещенный в данной точке, имеет потенциал:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{52}$$

Вычислим поток этого вектора через некоторую замкнутую поверхность S; по теореме Гаусса — Остроградского этот поток равен

$$\oint_S E_n dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{E} dV \tag{53}$$

Но мы видели ранее (§ 12, п. 6), что в случае электростатического поля, создаваемого n зарядами $e_1, e_2, \ldots, e_n$, находящимися в точках M_1, $M_2, \ldots, M_n$, потенциал имеет выражение

$$\varphi = \frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \cdots + \frac{e_n}{r_n} \tag{54}$$

где $r_1, r_2, \ldots, r_n$ — расстояния от точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$ до переменной точки M, в которой вычисляется значение потенциала.

Следовательно, в этом случае

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\left(\frac{e_1}{r_1} + \frac{e_2}{r_2} + \cdots + \frac{e_n}{r_n}\right) \tag{55}$$

Сравнивая это выражение с выражением (18) § 14 и принимая во внимание формулу (20) того же параграфа, мы легко увидим, что

$$\oint_S E_n dS = 4\pi \sum{}' e_i \tag{56}$$

где сумма правой части распространена на те заряды, которые находятся внутри поверхности.

Представим себе теперь заряды, непрерывно распределенные в пространстве, и пусть ρ означает плотность этих зарядов, тогда в элементе dV будет находиться $\rho\, dV$ зарядов, а внутри поверхности S будет иметься

$$\int_V \rho dV$$

зарядов. В этом случае формула (56) должна быть заменена следующей

$$\oint_S E_n dS = 4\pi \int_V \rho dV \tag{57}$$

Сравнивая ее с формулой (53), мы видим, что можно принять

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{58}$$

т. е. *расхождение вектора электрической силы можно трактовать как умноженную на 4π плотность зарядов, непрерывно распределенных в пространстве.* Так как

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = -\Delta\varphi$$

то

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{59}$$

Уравнение такого типа называется *уравнением Пуассона.* Там, где зарядов нет, т. е. где $\rho = 0$, оно превращается в уравнение Лапласа

$$\Delta\varphi = 0 \tag{60}$$

Все тела делятся на проводники и непроводники. Проводники обладают тем свойством, что внутри них электрическая сила обращается в нуль: $\mathbf{E} = 0$; следовательно, внутри проводников

$$\operatorname{grad} \varphi = 0$$

и, следовательно, потенциал φ есть постоянная величина

$$\varphi = \text{const} \tag{61}$$

кроме того, так как внутри проводника $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$. то $\rho = 0$, и следовательно, внутри проводника не может быть электрических зарядов, последние должны сосредоточиваться на поверхности проводника.

З а д а ч а 116. Чему равняется интеграл по замкнутой поверхности S. ограничивающей объем V

$$\oint_S \mathbf{r}\,(\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,dS$$

где $\mathbf{r}$ — радиус-вектор. $\mathbf{a}$ — постоянный вектор. $\mathbf{n}$ — вектор внешней нормали к S.

Р е ш е н и е. По формуле (13)

$$\oint_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{r}\,dS = \int_V (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{r}\,dV$$

но по задаче 103 мы имеем $(\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{r} = \mathbf{a}$, следовательно

$$\oint_S (\mathbf{a}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{r}\,dS = \int_V \mathbf{a}\,dV = \mathbf{a}V$$

З а д а ч а 117. Найти значение интеграла

$$\oint_S (\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\,\mathbf{n}\,dS$$

О т в е т. $V\mathbf{a}$, где V есть величина объема, ограниченного поверхностью S

§ 16. Циркуляция вектора вдоль контура. Вихрь вектора. Его составляющие. Теорема Стокса

1. При изучении градиента (§ 12) мы ввели понятие линейного интеграла вектора a вдоль кривой L:

$$\int_L \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

и показали, что обращение в нуль этого интеграла, взятого по любому замкнутому контуру, есть необходимое и достаточное условие того, чтобы вектор a был градиентом некоторой однозначной функции

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi, \quad a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \tag{1}$$

Рассмотрим теперь поле любого вектора a (r). Более подробное изучение линейного интеграла по замкнутому контуру приводит к понятию некоторой дифференциальной операции, которая, будучи применена к вектору a, дает новый вектор, называемый вихрем вектора a.

Итак, рассмотрим замкнутую кривую линию C и взятый по этой кривой криволинейный интеграл

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_C (a_x dx + a_y dy + a_z dz) \tag{2}$$

Если кривая C плоская, то она ограничивает некоторую плоскую площадь S, которая, согласно сказанному в § 6, может быть представлена вектором, равным по величине S и имеющим направление положительной нормали к площадке S, т. е. нормали, направленной в ту сторону, откуда направление обхода контура C кажется совершающимся в ту же сторону, как направление поворота от оси x к оси y вокруг положительной оси z (при левой системе координат — по часовой стрелке). Если n есть единичный вектор положительной нормали, то мы имеем

$$\mathbf{S} = S\mathbf{n} \tag{3}$$

в проекциях же на оси координат мы будем иметь

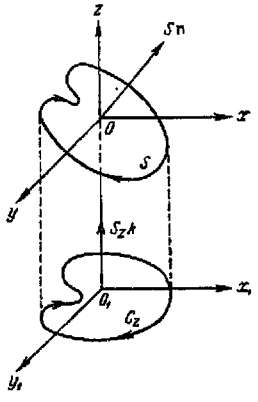
$$\mathbf{S} = S_x\mathbf{i} + S_y\mathbf{j} + S_z\mathbf{k} \tag{4}$$

Если мы площадку S спроектируем на плоскость xy, то получим площадку, ограниченную контуром C_z, являющимся проекцией контура C. Покажем, что эта площадка представляется как раз вектором $S_z\mathbf{k}$, направленным по оси z в ту или другую сторону. В самом деле, в § 6 было доказано, что величина проекции площади равна проектируемой площади S, умноженной на косинус угла между плоскостью S и плоскостью проекции, в настоящем случае $|\cos(\mathbf{n}, z)|$ и следовательно величина проекции площади равна

$$S\,|\cos(\mathbf{n}, z)| = |(S_z)|$$

С другой стороны, если n составляет с осью z острый угол и выбрана, например (как показано на фиг. 57), левая система координат, то C_z направлена по часовой стрелке (если смотреть с положительной стороны оси z), так что вектор, представляющий ограниченную контуром C_z площадь, надо направлять по положительной оси z, т. е. надо брать равным $|S_z|\mathbf{k} = S_z\mathbf{k}$ (ибо в этом случае $|S_z| = S_z$). Если же угол n с осью z тупой, то C_z обходится против часовой стрелки, и площадь проекции надо представлять вектором $-|S_z|\mathbf{k}$, опять равным $S_z\mathbf{k}$, ибо в этом случае

$$|S_z| = S\,|\cos(\mathrm{n}, z)| = -S\cos(\mathrm{n}, z) = -S_z$$



Фиг. 57

Если C кривая, не лежащая в одной плоскости, т. е. кривая двоякой кривизны, то она не ограничивает плоской площадки; в этом случае можно рассмотреть кривые поверхности, ограниченные контуром C, эти кривые поверхности могут быть представлены вектором S, который получается следующим образом. Проектируем контур C на три плоскости координат Oyz, Ozx, Oxy; полученные проекции C_x, C_y, C_z ограничивают три площадки, которые могут быть представлены векторами $S_x\mathbf{i}$, $S_y\mathbf{j}$, $S_z\mathbf{k}$; тогда

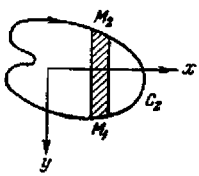
$$\mathbf{S} = \mathbf{i}S_x + \mathbf{j}S_y + \mathbf{k}S_z$$

Вычислим теперь несколько криволинейных интегралов, которые нам понадобятся при вычислении общего криволинейного интеграла (2).

Прежде всего очевидно, что

$$\oint_C dx = 0, \quad \oint_C x\,dx = \oint_C d\left(\frac{x^2}{2}\right) = 0 \tag{5}$$

Вычислим далее $\oint_C y\,dx$. Прежде всего ясно, что



Фиг. 58

$$\oint_{C_z} y\,dx = \oint_C y\,dx \tag{6}$$

ибо в соответствующих точках контуров C и C_z координаты x и y одни и те же, и только координаты z —разные. Но легко видеть, что

$$\oint_{C_z} y\,dx = -S_z \tag{7}$$

В самом деле, пусть ордината, отвечающая элементу dx, пересекает C_z в двух точках: M_1 и M_2 (фиг. 58), тогда при обходе контура по часовой стрелке элемент, отвечающий точке M_1, надо брать с отрицательным знаком [на этом элементе x убывает (фиг. 58)], а элемент, отвечающий точке

M_3, с положительным, поэтому элемент dx дает интегралу член

$$(-y_1 + y_2)\,dx = -(y_1 - y_2)\,dx$$

где y_1 и y_2 означают ординаты точек M_1 и M_2. Но $(y_1 - y_2)\,dx$ есть как раз часть площади, отвечающая элементу dx; суммируя по всем элементам, найдем:

$$\oint_{C_x} y\,dx = -S_x$$

и, следовательно,

$$\oint_{C} y\,dx = -S_x \tag{8}$$

что и требовалось доказать. Точно так же доказывается, что

$$\oint_{C} z\,dx = \oint_{C_y} z\,dx = S_y \tag{9}$$

2. Возьмем теперь фиксированную точку пространства M, которую, удобства ради, перенесем на время в начало координат. Рассмотрим далее расположенный вблизи точки M бесконечно малый контур C, на котором задано определенное направление обхода. Предположим, наконец, что соответствующий всем поверхностям, натянутым на этот контур C, вектор $\mathrm{S} = S\mathfrak{n}$ стремится по величине к 0, а по направлению — к фиксированному направлению, орт которого обозначим через $\mathfrak{n}_0$.

Поставим теперь задачу вычислить значение линейного интеграла вектора $\mathbf{a}$ вдоль C или, как его называют иначе, циркуляцию $\mathbf{a}$ вдоль C:

$$\oint_{C} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \oint_{C} (a_x dx + a_y dy + a_z dz)$$

Точнее говоря, вычислим значение следующего предела:

$$\lim_{S\to 0} \frac{\oint_{C} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}}{S} = \lim_{S\to 0} \frac{\oint_{C} (a_x dx + a_y dy + a_z dz)}{S} \tag{10}$$

когда контур C стягивается к точке M.

Достаточно найти, чему равняется

$$\lim_{S\to 0} \frac{\oint_{C} a_x(x, y, z)\,dx}{S}$$

Разлагая $a_x(x, y, z)$ в ряд Тейлора по степеням x, y, z и ограничиваясь только членами первой степени, будем иметь

$$a_x(x, y, z) =$$

$$= a_x(0, 0, 0) + x\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_0 + \varepsilon_1\right] + y\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_0 + \varepsilon_2\right] + z\left[\left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_0 + \varepsilon_3\right]$$

где индекс O указывает, что нужно брать значение указанных производных в точке M (как всегда, производные $\partial a_x / \partial x$, $\partial a_x / \partial y$, $\partial a_x / \partial z$ и т. д. предполагаем непрерывными) и где ε_1, ε_2, ε_3 означают бесконечно малые величины.

Проинтегрируем вдоль кривой C, причем постоянные множители вынесем за знаки интегралов

$$\oint_C a_x(x, y, z)\,dx = a_x(0, 0, 0)\oint_C dx + \left(\frac{\partial a_x}{\partial x}\right)_O \oint_C x\,dx +$$
$$+ \left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_O \oint_C y\,dx + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_O \oint_C z\,dx + \oint_C (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3)\,dx$$

Применим выведенные выше формулы

$$\oint_C dx = \oint_C x\,dx = 0, \qquad \oint_C y\,dx = -S_z = -S\cos(\mathbf{n}, z)$$

$$\oint_C z\,dx = S_y = S\cos(\mathbf{n}, y)$$

предположим далее, что контур C обладает таким свойством, что если наибольшее расстояние точек контура от M обозначить через ρ, то длина контура будет порядка ρ, а величина S порядка ρ^2, тогда легко видеть, что

$$\oint_C (x\varepsilon_1 + y\varepsilon_2 + z\varepsilon_3)\,dx = S\varepsilon$$

где ε — бесконечно малая величина. Итак

$$\frac{1}{S}\oint_C a_x(x, y, z)\,dx = -\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_O \cos(\mathbf{n}, z) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_O \cos(\mathbf{n}, y) + \varepsilon$$

Отсюда в пределе $S \to 0$ получим

$$\lim_{S\to 0} \frac{\oint_C a_x dx}{S} = -\left(\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)_O \cos(\mathbf{n}_0, z) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}\right)_O \cos(\mathbf{n}_0, y)$$

Аналогично получаем еще две формулы (циклической перестановкой букв x, y, z)

$$\lim_{S\to 0} \frac{\oint_C a_y dy}{S} = -\left(\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)_O \cos(\mathbf{n}_0, x) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}\right)_O \cos(\mathbf{n}_0, z)$$

$$\lim_{S\to 0} \frac{\oint_C a_z dz}{S} = -\left(\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)_O \cos(\mathbf{n}_0, y) + \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}\right)_O \cos(\mathbf{n}_0, x)$$

Складывая все три выражения и отбрасывая значок O, получим следующую формулу:

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}}{S} = \tag{11}$$

$$= \left(\frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z}\right)\cos(\mathbf{n}, x) + \left(\frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x}\right)\cos(\mathbf{n}, y) + \left(\frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y}\right)\cos(\mathbf{n}, z)$$

Таким образом, подобно тому, как значение $\partial\varphi/\partial s$ позволяет вычислить φ в соседних с M точках, лежащих на определенной прямой, значение только что найденного выражения позволяет вычислить приближенно циркуляцию по любому достаточно малому контуру, окружающему точку M и лежащему в плоскости, перпендикулярной к вектору $\mathbf{n}$.

3. Принимая во внимание, что если мы имеем вектор $\mathbf{A}$, проекции которого на оси координат суть A_x, A_y, A_z, то проекция его на любое направление $\mathbf{n}$ будет равна

$$A_n = A_x\cos(\mathbf{n}, x) + A_y\cos(\mathbf{n}, y) + A_z\cos(\mathbf{n}, z)$$

Мы можем заключить в силу формулы (11), что если ввести вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ с проекциями

$$\operatorname{rot}_x\mathbf{a} = \frac{\partial a_z}{\partial y}-\frac{\partial a_y}{\partial z},\quad \operatorname{rot}_y\mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial x},\quad \operatorname{rot}_z\mathbf{a} = \frac{\partial a_y}{\partial x}-\frac{\partial a_x}{\partial y} \tag{12}$$

то проекция этого вектора на любое направление $\mathbf{n}$ (в том числе и на направления x, y, z) будет определяться формулой

$$\lim_{S\to 0}\frac{\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}}{S} = \operatorname{rot}_n\mathbf{a} \tag{13}$$

Эта последняя формула дает определение любой проекции вектора $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ *и притом, как видно, совершенно независимое от выбора координатной системы.*

Полученный нами вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ называется *вихрем вектора* $\mathbf{a}$; обозначение его $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ происходит от латинского слова rotor (вращатель). Часто вихрь вектора $\mathbf{a}$ обозначают через curl (читается кёрль, что значит по-английски локон, завиток). Наконец очень часто вихрь вектора $\mathbf{a}$ записывают как векторное произведение оператора Гамильтона ∇ и вектора $\mathbf{a}$:

$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\times\mathbf{a}$$

В самом деле, составляя векторное произведение по формуле

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{i}(A_yB_z - A_zB_y) + \mathbf{j}(A_zB_x - A_xB_z) + \mathbf{k}(A_xB_y - A_yB_x),$$

где

$$A_x = \frac{\partial}{\partial x},\quad A_y = \frac{\partial}{\partial y},\quad A_z = \frac{\partial}{\partial z},\quad B_x = a_x,\quad B_y = a_y,\ B_z = a_z$$

легко найдем

$$\nabla \times \mathbf{a} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \operatorname{rot} \mathbf{a} \qquad (14)$$

Отсюда, в силу § 15, следует сразу еще новое представление rot a

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{a}\, dS}{V} \qquad (15)$$

где V — бесконечно малый объем, стягивающийся в точку M, S — ограничивающая этот объем поверхность, наконец $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к этой поверхности. Эта формула аналогична формуле (5) § 15 для div a и формуле (7) § 15 для grad φ.

Но вернемся к первоначальному определению (13) rot a. Эту формулу можно переписать еще так:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} = |\operatorname{rot} \mathbf{a}| \cos(\operatorname{rot} \mathbf{a}, \mathbf{n}) = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S} \qquad (16)$$

причем площадка S перпендикулярна единичному вектору $\mathbf{n}$.

Отсюда сразу выводим, что *если для различных направлений* $\mathbf{n}$ *мы определим значение предела*

$$C_n = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S} \qquad (17)$$

и найдем максимум C_n, *то* rot a *равен по величине этому максимуму и имеет то направление* $\mathbf{n}$, *при котором этот максимум достигается* (ибо проекция всякого вектора будет максимальной тогда, когда за ось проекций берется направление этого вектора).

Чтобы разъяснить на простом примере, что характеризует собою вихрь вектора, рассмотрим поле скоростей твердого тела в некоторый момент времени

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_{0x} + \omega_y z - \omega_z y \\ v_y &= v_{0y} + \omega_z x - \omega_x z \\ v_z &= v_{0z} + \omega_x y - \omega_y x \end{aligned} \qquad (18)$$

Составляем

$$\operatorname{rot}_x \mathbf{v} = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} = \omega_x + \omega_x = 2\omega_x, \quad \operatorname{rot}_y \mathbf{v} = 2\omega_y, \quad \operatorname{rot}_z \mathbf{v} = 2\omega_z$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2(\omega_x \mathbf{i} + \omega_y \mathbf{j} + \omega_z \mathbf{k}) = 2\boldsymbol{\omega} \qquad (19)$$

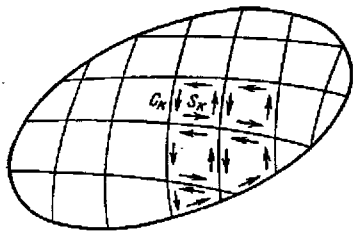
Таким образом rot v в этом случае представляет удвоенную угловую скорость вращения твердого тела

Если мы имеем дело с полем скоростей жидкости, то, как можно доказать, $\frac{1}{2}$ rot v будет угловой скоростью вращения бесконечно малого объема, окружающего точку M, в предположении, что в рассматриваемый момент времени этот объем жидкости внезапно отвердел. Это объясняет и наименование «вихрь» вектора, так как в обычном представлении вихри связаны с интенсивным вращательным движением частиц жидкости.

Вычислив rot a во всякой точке поля вектора a, мы получаем новое поле вектора вихря a. Графическое представление этого нового поля дается векторными линиями вектора вихря a или, как их называют еще иначе, *вихревыми линиями вектора* a.

4. Важнейшая теорема, связанная с понятием вихря, есть теорема Стокса, дающая преобразование линейного интеграла в поверхностный:

Циркуляция вектора по замкнутому контуру равна потоку вихря вектора через поверхность, ограниченную данным контуром



Фиг. 59

$$\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot d\mathbf{S} = \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS \qquad (20)$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы Гаусса — Остроградского. А именно, разделим поверхность S на малые элементы S_kn, которые будем стремить к нулю (фиг. 59).

Для каждого элемента, выбрав по произволу положительное число ε, можем написать неравенство

$$\left|\oint_{C_k} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} - \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\cdot S_k\right| < \varepsilon S_k$$

если сделать S_k достаточно малым.

Сложим все эти неравенства и заметим, что линейный интеграл будет взят только по C, так как интегралы по всем остальным элементам кривых C_k попарно уничтожатся:

$$\left|\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} - \sum \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\cdot S_k\right| < \varepsilon S$$

В пределе при $S_k \to 0$ получим

$$\left|\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} - \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS\right| < \varepsilon S$$

и так как ε можно выбрать по произволу,

$$\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что обратно, из формулы Стокса можно вывести формулу (13) и притом уже без тех ограничений, которые мы накладывали на вид контура C при первоначальном выводе формулы (13).

5. Укажем несколько следствий из теоремы Стокса.

Если $\mathbf{a}$ — потенциальный вектор, т. е. $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$, то линейный интеграл по всякому достаточно малому контуру, окружающему точку P, обращается в нуль, т. е.

$$\oint_C \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

Следовательно,

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = 0$$

и, так как это справедливо для всякого направления, то тождественно

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0 \tag{21}$$

Это видно и непосредственно из выражений для градиента и вихря, ибо

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) = 0$$

$$\operatorname{rot}_y \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} = 0$$

$$\operatorname{rot}_z \operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x} = 0$$

Обратно, если rot $\mathbf{a}$ равен 0, то по формуле (20) линейный интеграл по всякому контуру, могущему быть стянутым в точку, равен нулю, так как между таким контуром можно провести поверхность S. А значит $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Итак, если

$$\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y} = 0 \tag{22}$$

то

$$a_x = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \quad a_y = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \quad a_z = \frac{\partial\varphi}{\partial z} \tag{23}$$

или, что то же,

$$a_x dx + a_y dy + a_z dz = d\varphi \tag{24}$$

т. е. $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ является полным дифференциалом. Итак, *необходимое и достаточное условие того, чтобы* $\mathbf{a}$ *был потенциальным вектором и чтобы* $a_x dx + a_y dy + a_z dz$ *было полным дифференциалом, состоит в выполнении условий* (22), *т. е. в равенстве вихря вектора* $\mathbf{a}$ *нулю.* Потенциальные поля называют поэтому также *безвихревыми.*

Очевидно далее, что если S означает замкнутую поверхность, то

$$\oint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS = 0 \tag{25}$$

ибо в этом случае контур C стягивается в точку.

Но вспоминая определение расхождения, из формулы (25) сразу заключаем, что

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \tag{26}$$

т. е. *векторное поле вихрей любого вектора* **a** *свободно от источников.* Соотношение (26) можно проверить и непосредственным вычислением.

В силу отсутствия источников в поле вихря, вихревые линии не могут внутри жидкости ни начинаться, ни кончаться; они могут быть замкнутыми или могут иметь свои концы на границе поля.

Рассмотрим вихревую трубку, полученную следующим образом: берем площадку и проводим через контур ее вихревые линии, тогда поток вектора rot **a** через всякое сечение этой трубки будет постоянной величиной, в силу общей теоремы, доказанной нами в п. 7 § 14. Величина этого потока называется *напряжением вихревой трубки.*

Докажем теперь обратную теорему: *всякий соленоидальный вектор* **a** *может быть представлен как вихрь некоторого другого вектора* **b**. Иными словами, если

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0 \tag{27}$$

то можно найти такой вектор **b**, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{b} \tag{28}$$

Для доказательства выберем какую-либо прямоугольную систему координат и положим $b_z = 0$, тогда равенство (28) приведется к трем уравнениям с двумя неизвестными функциями $b_x(x, y, z)$ и $b_y(x, y, z)$

$$-\frac{\partial b_y}{\partial z} = a_x, \quad \frac{\partial b_x}{\partial z} = a_y, \quad \frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y} = a_z \tag{29}$$

Общим решением первых двух из этих уравнений являются

$$b_y(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} a_x(x, y, z)\, dz + f(x, y)$$

$$b_x(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} a_y(x, y, z)\, dz + g(x, y)$$

где $f(x, y)$ и $g(x, y)$ — пока произвольные функции своих аргументов.

Подставляя эти выражения в последнее уравнение системы (29), получим

$$-\int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_x}{\partial x}\, dz + \frac{\partial f}{\partial x} - \int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_y}{\partial y}\, dz - \frac{\partial g}{\partial y} = a_z(x, y, z) \tag{30}$$

Но так как

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} = 0$$

то

$$-\int_{z_0}^{z} \left(\frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y}\right) dz = \int_{z_0}^{z} \frac{\partial a_z}{\partial z}\, dz = a_z(x, y, z) - a_z(x, y, z_0)$$

и, следовательно, уравнение (30) приводится к виду

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial g}{\partial y} = a_z(x, y, z_0)$$

Мы удовлетворим этому уравнению, полагая

$$f = \int_{x_0}^{x} a_z(x, y, z_0)dx, \qquad g = 0$$

Итак, если взять:

$$b_x(x, y, z) = \int_{z_0}^{z} a_y(x, y, z)\, dz$$

$$b_y(x, y, z) = -\int_{z_0}^{z} a_x(x, y, z)\, dz + \int_{x_0}^{x} a_z(x, y, z_0)\, dx \tag{31}$$

$$b_z(x, y, z) = 0$$

то равенство (28) будет иметь место, что и требовалось доказать.

Наконец, заметим, что, применяя обобщенную формулу Гаусса — Остроградского [§ 15 (19)] к выражению

$$\nabla \times \mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{a}$$

мы получаем преобразование поверхностного интеграла в объемный:

$$\oint_S \mathbf{n} \times \mathbf{a}\, dS = \int_V \operatorname{rot} \mathbf{a}\, dV \tag{32}$$

З а д а ч а 118. Доказать, что

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \operatorname{rot} \mathbf{a}_1 + \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 \tag{33}$$

З а д а ч а 119. Вычислить rot $(\varphi \mathbf{a})$.

$$\operatorname{rot}_x(\varphi \mathbf{a}) = \frac{\partial(\varphi a_z)}{\partial y} - \frac{\partial(\varphi a_y)}{\partial z} = \varphi\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + \frac{\partial \varphi}{\partial y} a_z - \frac{\partial \varphi}{\partial z} a_y =$$

$$= \varphi \operatorname{rot}_x \mathbf{a} + (\operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a})_x$$

Отсюда

$$\operatorname{rot}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a} \tag{34}$$

З а д а ч а 120. Вычислить rot $\{f(r)\mathbf{r}\}$.

Так как

$$\int_C (f(r)\, \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}) = \int_C f(r)\, r\, dr = 0$$

по всякому замкнутому контуру, то

$$\operatorname{rot} f(r)\mathbf{r} = 0$$

Это можно легко показать и вычислением.

Задача 121. Вычислить rot {b (r·a)}, где a и b — постоянные векторы.

$$\operatorname{rot}\{\mathbf{b}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\} = \operatorname{grad}(\mathbf{r}\cdot\mathbf{a})\times\mathbf{b} = \mathbf{a}\times\mathbf{b} \tag{35}$$

Задача 122. Вычислить rot ra, где a — постоянный вектор

$$\operatorname{rot}(r\mathbf{a}) = \operatorname{grad} r\times\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}}{r}\times\mathbf{a} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{a}}{r}$$

Задача 123. Вычислить div {a (r) × b (r)}. Имеем

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \frac{\partial(b_y b_z - a_z b_y)}{\partial x} + \frac{\partial(a_z b_x - a_x b_z)}{\partial y} + \frac{\partial(a_x b_y - a_y b_x)}{\partial z} =$$

$$= \frac{\partial a_y}{\partial x} b_z + a_y \frac{\partial b_z}{\partial x} - \frac{\partial a_z}{\partial x} b_y - a_z \frac{\partial b_y}{\partial x} + \frac{\partial a_z}{\partial y} b_x + a_z \frac{\partial b_x}{\partial y} -$$

$$- \frac{\partial a_x}{\partial y} b_z - a_x \frac{\partial b_z}{\partial y} + \frac{\partial a_x}{\partial z} b_y + a_x \frac{\partial b_y}{\partial z} - \frac{\partial a_y}{\partial z} b_x - a_y \frac{\partial b_x}{\partial z} =$$

$$= b_x\left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z}\right) + b_y\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) + b_z\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) -$$

$$- a_x\left(\frac{\partial b_z}{\partial y} - \frac{\partial b_y}{\partial z}\right) - a_y\left(\frac{\partial b_x}{\partial z} - \frac{\partial b_z}{\partial x}\right) - a_z\left(\frac{\partial b_y}{\partial x} - \frac{\partial b_x}{\partial y}\right) =$$

$$= \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}$$

Таким образом

$$\operatorname{div}(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b} \tag{36}$$

Задача 124. Представить a × grad φ, где a — постоянный вектор, в виде вихря некоторого вектора.

Ответ. $\mathbf{a}\times\operatorname{grad}\varphi = -\operatorname{rot}(\varphi\mathbf{a})$.

Задача 125. Вектор $r(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r})$, где ω есть постоянный вектор, есть вектор соленоидальный (см. задачу 114). Представить его в виде вихря некоторого вектора.

Ответ: $r(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}) = -\operatorname{rot}\left(\frac{1}{3}r^3\boldsymbol{\omega}\right)$.

§ 17. Некоторые формулы с дифференциальными операциями. Дифференциальные операции второго порядка. Применения

1. Выведем ряд основных формул векторного анализа, причем будем широко пользоваться символическим методом. В § 12 [формула (19)] и § 15 [формула (22)] нами были выведены следующие формулы (φ и ψ — скалярные функции, a — векторная):

$$\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi \tag{1}$$

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{a}) = \varphi\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi \tag{2}$$

В задачах 119 и 123 мы непосредственным вычислением определили rot (φa) и div (a × b).

Покажем теперь, как получить эти величины применением символического метода. Мы имеем

$$\mathrm{rot}\,(\varphi, \mathbf{a}) = \nabla \times (\varphi\,\mathbf{a})$$

Согласно данному в § 15 правилу, мы должны написать

$$\nabla \times (\varphi\,\mathbf{a}) = \nabla \times \varphi_c\,\mathbf{a} + \nabla \times \varphi\mathbf{a}_c$$

где значок c указывает, что соответствующую величину надо считать постоянной. Но ясно, что

$$\nabla \times \varphi_c\,\mathbf{a} = \varphi_c \nabla \times \mathbf{a} = \varphi\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a}$$

$$\nabla \times \varphi\,\mathbf{a}_c = \nabla\varphi \times \mathbf{a}_c = -\,\mathbf{a}_c \times \nabla\varphi = -\,\mathbf{a} \times \mathrm{grad}\ \varphi$$

Следовательно,

$$\mathrm{rot}\,(\varphi\,\mathbf{a}) = \varphi\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a} - \mathbf{a} \times \mathrm{grad}\ \varphi = \varphi\ \mathrm{rot}\ \mathbf{a} + \mathrm{grad}\ \varphi \times \mathbf{a} \qquad (3)$$

Точно так же пусть два переменных вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ — функции точки; тогда, пользуясь свойством циклической перестановки векторно-скалярного произведения [§ 7 (2)], легко получим

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla\cdot(\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) + \nabla\cdot(\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) =$$

$$= (\nabla \times \mathbf{a})\cdot\mathbf{b}_c - \nabla\cdot(\mathbf{b} \times \mathbf{a}_c) = (\nabla \times \mathbf{a})\cdot\mathbf{b}_c - (\nabla \times \mathbf{b})\cdot\mathbf{a}_c =$$

$$= \mathbf{b}_c\cdot(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}_c\cdot(\nabla \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot(\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a}\cdot(\nabla \times \mathbf{b})$$

т. е.

$$\mathrm{div}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b}\cdot\mathrm{rot}\ \mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\mathrm{rot}\ \mathbf{b} \qquad (4)$$

Как видно, метод вычисления состоит в том, что когда все векторы, кроме одного, положены постоянными, нужно так преобразовать выражение, чтобы все постоянные векторы оказались перед оператором ∇, а переменный — позади него.

В качестве следующего примера вычислим

$$\mathrm{rot}\,(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

По общему правилу имеем

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) + \nabla \times (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b})$$

Преобразуем первый член суммы правой части; по формуле для двойного векторного произведения имеем

$$\mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{A}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) - \mathbf{B}\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{A}) \qquad (5)$$

причем правую часть этой формулы можно написать в шестнадцати различных видах, так как, например, выражение $\mathbf{A}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})$ равно также и $\mathbf{A}\,(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})$ и $(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\,\mathbf{A}$ и $(\mathbf{C}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{A}$.

Полагая в предыдущей формуле $C = \nabla$, $\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}_c$, мы должны дать такую форму правой части, в которой $\mathbf{b}_c$ стоит перед ∇, а $\mathbf{a}$ после ∇, т. е. мы должны написать

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}_c) = (\mathbf{b}_c \cdot \nabla)\,\mathbf{a} - \mathbf{b}_c\,(\nabla \cdot \mathbf{a})$$

Точно такие же рассуждения приводят к формуле

$$\nabla \times (\mathbf{a}_c \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}_c\,(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\,\mathbf{b}$$

Складывая оба эти выражения и откидывая ненужные теперь значки c, мы придем к формуле

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} - \mathbf{b}\,(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a}\,(\nabla \cdot \mathbf{b}) - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\,\mathbf{b}$$

или, что то же,

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} - \mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} \tag{6}$$

В качестве следующего примера вычислим $\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Прежде всего имеем

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) + \nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b})$$

Но из (5) ясно, что мы имеем формулу

$$\mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) - \mathbf{C} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B})$$

или, произведя циклическую перестановку A, B, C

$$\mathbf{C}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \tag{7}$$

Переставим в этой формуле A с B:

$$\mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{B}) - \mathbf{B} \times (\mathbf{A} \times \mathbf{C}) \tag{8}$$

Положим в формуле (7) $\mathbf{C} = \nabla$, $\mathbf{A} = \mathbf{a}$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}_c$, тогда получим

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}_c) = \mathbf{b}_c\,(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\mathbf{b}_c \times \nabla) \times \mathbf{a}$$

Эта формула верна, но непригодна для нас, так как в правой части стоит сложная операция $(\mathbf{b} \times \nabla) \times \mathbf{a}$, а мы хотим все выразить через более простые операции. Поэтому применим формулу (8), положив $\mathbf{C} = \nabla$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}_c$, $\mathbf{A} = \mathbf{a}$ и взяв ее в форме

$$\mathbf{C}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) = (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C})\,\mathbf{A} + \mathbf{B} \times (\mathbf{C} \times \mathbf{A})$$

В результате получим

$$\nabla(\mathbf{b}_c \cdot \mathbf{a}) = (\mathbf{b}_c \cdot \nabla)\,\mathbf{a} + \mathbf{b}_c \times (\nabla \times \mathbf{a})$$

Точно так же мы выведем, применяя формулу (7) и полагая $\mathbf{C} = \nabla$, $\mathbf{A} = \mathbf{a}_c$, $\mathbf{B} = \mathbf{b}$

$$\nabla(\mathbf{a}_c \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{a}_c \cdot \nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}_c \times (\nabla \times \mathbf{b})$$

Складывая оба выражения и отбрасывая ненужные теперь значки c, получим

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} + \mathbf{b}\times(\nabla\times\mathbf{a}) + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\times(\nabla\times\mathbf{b})$$

или, что то же,

$$\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = (\mathbf{b}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} + (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} + \mathbf{a}\operatorname{rot}\mathbf{b} \tag{9}$$

Положим, в частности, в этой формуле $\mathbf{b} = \mathbf{a}$. В результате получим

$$\operatorname{grad}\frac{a^2}{2} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} + \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{a} \tag{10}$$

2. Операции grad, div, rot, $\mathbf{v}\cdot\nabla$ могут быть названы *дифференциальными операциями первого порядка.*

Рассмотрим теперь основные дифференциальные операции второго порядка. Так как $\operatorname{grad}\varphi$ и $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ суть векторы, к ним можно применить операции div и rot, в результате получаем четыре операции $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$, $\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a}$; к расхождению же $\operatorname{div}\mathbf{a}$ можно применить только операцию grad, в результате получится $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a}$. Мы уже видели (§ 14), что

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\cdot\nabla\varphi = (\nabla\cdot\nabla)\varphi = \nabla^2\varphi = \triangle\varphi \tag{11}$$

Далее, по формулам (21) и (26) предыдущего параграфа, вихрь градиента и расхождение вихря разны нулю:

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = 0 \tag{12}$$

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0 \tag{13}$$

Символическим способом эти формулы получаются моментально, ибо

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \nabla\times\nabla\varphi = (\nabla\times\nabla)\,\varphi = 0$$

так как векторное произведение двух одинаковых векторов равно нулю.

Точно так же

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{a}) = 0$$

так как векторно-скалярное произведение трех векторов, из которых два одинаковы, обращается в нуль. Однако такой вывод формул (12) и (13) нужно признать скорее мнемоническим правилом, чем строгим доказательством, так как обращение с символическим вектором ∇ требует известной осторожности.

Рассмотрим еще несколько важных для дальнейшего формул. Пусть φ и ψ — две скалярные функции точки. Составим вектор

$$\mathbf{a} = \varphi\operatorname{grad}\psi \tag{14}$$

Тогда по формуле (2) будем иметь

$$\operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\psi) = \varphi\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi = \varphi\triangle\psi + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi \tag{15}$$

Применим теперь формулу Гаусса — Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \oint_S a_n\, dS$$

Заметим, что в рассматриваемом случае

$$a_n = \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} \tag{16}$$

В результате получим так называемую формулу Грина

$$\int_V \{\varphi \triangle \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi\}\, dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS \tag{17}$$

которая при $\psi = \varphi$ превращается в формулу

$$\int_V \{\varphi \triangle \varphi + (\operatorname{grad} \varphi)^2\}\, dV = \oint_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \tag{18}$$

а при $\varphi = 1$ — в формулу

$$\int_V \triangle \psi dV = \oint_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS \tag{19}$$

Поменяем теперь в формуле (17) φ и ψ местами и вычтем получившуюся в результате формулу

$$\int_V \{\psi \triangle \varphi + \operatorname{grad} \psi \cdot \operatorname{grad} \varphi\}\, dV = \oint_S \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

из формулы (17). Мы найдем тогда вторую формулу Грина

$$\int_V \{\varphi \triangle \psi - \psi \triangle \varphi\}\, dV = \oint_S \left\{\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right\} dS \tag{20}$$

Конечно, при всех этих выводах предполагается, что те функции, с которыми приходится иметь дело, так же, как их производные, которые встречаются в формулах, являются непрерывными функциями в рассматриваемой области. Но легко видеть, что эти формулы будут верны, например, и тогда, когда вторые производные функции φ и ψ терпят на некоторой поверхности разрыв.

Из формулы (19) вытекает следующее представление оператора $\triangle\varphi$:

$$\triangle \varphi = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS}{V} \tag{21}$$

Если теперь мы имеем поле некоторого вектора $\mathbf{a}$, то мы можем определить вектор $\nabla^2 \mathbf{a} = \triangle \mathbf{a}$ аналогичным соотношением

$$\nabla^2 \mathbf{a} = \triangle \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} dS}{V} = \lim_{V \to 0} \frac{\oint_S (\mathbf{n} \cdot \nabla)\, \mathbf{a}\, dS}{V} \tag{22}$$

Если вектор $\mathbf{a}$ имеет составляющие a_x, a_y, a_z:

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z \tag{23}$$

то очевидно, что

$$\triangle \mathbf{a} = \lim_{V \to 0} \frac{\mathbf{i} \oint\limits_S \frac{\partial a_x}{\partial n} dS + \mathbf{j} \oint\limits_S \frac{\partial a_y}{\partial n} dS + \mathbf{k} \oint\limits_S \frac{\partial a_z}{\partial n} dS}{V} = \mathbf{i}\triangle a_x + \mathbf{j}\triangle a_y + \mathbf{k}\triangle a_z \tag{24}$$

так что проекциями вектора $\triangle \mathbf{a}$ являются $\triangle a_x$, $\triangle a_y$, $\triangle a_z$.

Аналогичной формуле (19) является формула

$$\oint\limits_V \triangle \mathbf{a}\, dV = \oint\limits_S \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial n} dS = \oint\limits_S (\mathbf{n} \cdot \nabla)\, \mathbf{a}\, dS \tag{25}$$

Применим символический метод к вычислению вектора rot rot a:

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - (\nabla \cdot \nabla)\, \mathbf{a} = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a}$$

или

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \triangle \mathbf{a} \tag{26}$$

Дадим более строгий вывод этой формулы. Вычислим для этого составляющую вектора rot rot a по оси x. Имеем

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \mathbf{a} = \frac{\partial}{\partial y} \operatorname{rot}_z \mathbf{a} - \frac{\partial}{\partial z} \operatorname{rot}_y \mathbf{a} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x}\right) = \left(\frac{\partial^2 a_y}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\, \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right)$$

Прибавляя и вычитая по $\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2}$, получим:

$$\operatorname{rot}_x \operatorname{rot} \mathbf{a} = \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_y}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 a_z}{\partial x\, \partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 a_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 a_x}{\partial z^2}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \mathbf{a} - \triangle a_x$$

так как такие же равенства имеем для осей y и z, то, умножая соответственно на i, j, k и складывая, сразу получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{a} - \triangle \mathbf{a}$$

3. Рассмотрим теперь некоторые применения выведенных в этом параграфе формул.

Мы вывели в § 15 п. 6 основное уравнение гидродинамики идеальной жидкости

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{27}$$

Воспользовавшись формулой (10), можем переписать это уравнение в другой форме

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \operatorname{grad} \frac{v^2}{2} = \mathbf{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{28}$$

Сделаем теперь еще добавочные предположения, а именно:

1) Будем считать, что вектор внешней силы F, действующей на единицу массы жидкости, обладает потенциалом U (такие силы называются *консервативными*):

$$\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U \tag{29}$$

Например, если действует сила тяжести и ось z направлена вертикально вверх, то

$$U = gz \tag{30}$$

2) Будем кроме того считать, что плотность жидкости ρ является функцией давления:

$$\rho = f(p) \tag{31}$$

в этом случае жидкость называется *баротропной*.

Это имеет место, например, для несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$); далее это имеет место для тех движений газа, которые происходят *изотермически*, т. е. при постоянной температуре, так как в этом случае, как известно из физики, по закону Бойля-Маркотта, имеет место равенство $p = RT\rho$, т. е. $p/\rho = \text{const}$; наконец равенство (31) имеет место и для тех движений газа, которые происходят *изэнтропически*, т. е. так, что выполняется равенство

$$\frac{p}{\rho^{\varkappa}} = \text{const} \qquad \left(\varkappa = \frac{c_p}{c_v}\right) \tag{32}$$

где $\varkappa$ есть отношение теплоемкостей при постоянном давлении и при постоянном объеме; из термодинамики известно, что при выполнении равенства (32) движение каждой частицы жидкости происходит без какого-либо притока или отдачи тепла.

Введем теперь в рассмотренке функцию

$$P = \int \frac{dp}{\rho} = \int \frac{dp}{f(p)} = F(p) \tag{33}$$

и заметим, что

$$\operatorname{grad} P = F'(p) \operatorname{grad} p = \frac{1}{f(p)} \operatorname{grad} p = \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p \tag{34}$$

Поэтому уравнение (28), при выполнении упомянутых выше двух условий, может быть переписано так:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} = -\operatorname{grad}\left(U + P + \frac{v^2}{2}\right) = -\operatorname{grad} \Pi \tag{35}$$

где

$$\Pi = U + P + \frac{v^2}{2} \tag{36}$$

Возьмем теперь какую-нибудь точку жидкости M_0 и проведем через нее линию тока M_0M. Составляя криволинейный интеграл по этой линии тока от обеих частей предыдущего равенства, получим

$$\int_{M_0}^{M} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} - \int_{M_0}^{M} (\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = -\int_{M_0}^{M} \operatorname{grad} \Pi \cdot d\mathbf{r} \tag{37}$$

Но в каждой точке линии тока касательная к ней имеет то же направление, что и вектор скорости v, т. е.

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} \times \mathbf{v} = 0, \quad \text{или} \quad d\mathbf{r} \times \mathbf{v} = 0$$

Поэтому на линии тока M_0M

$$(\mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = \operatorname{rot} \mathbf{v} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$$

В результате равенство (37) принимает вид

$$\int_{M_0}^{M} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} = -\int_{M_0}^{M} d\Pi = \Pi(M_0) - \Pi(M) \tag{38}$$

В частности, в случае стационарного движения, т. е. движения, в котором v, ρ и p не зависят от времени t, а могут зависеть только от координат x, y, z, мы будем иметь, что

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = 0$$

и, следовательно:

$$\Pi(M) = \Pi(M_0) = \text{const} \tag{39}$$

т. е. в случае стационарного движения идеальной баротропной жидкости, находящейся под действием консервативных сил, вдоль каждой линии тока сумма

$$U + P + \frac{v^2}{2} = \text{const} \tag{40}$$

сохраняет постоянное значение. Это равенство называется *уравнением Бернулли*; при этом U называется *потенциальной энергией*, P — *внутренней энергией* и $\frac{1}{2}v^2$ — *кинетической энергией* (отнесенной к единице массы). Таким образом, при указанных условиях сумма кинетической, потенциальной и внутренней энергий сохраняет постоянное значение вдоль линии тока. Например, для случая несжимаемой жидкости, находящейся под действием силы тяжести, будем иметь

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = \text{const} \tag{41}$$

Возвращаясь к уравнению (35), т. е. считая условия 1) и 2) выполненными, сделаем теперь другое предположение, а именно, что рассматриваемое нами движение жидкости является безвихревым, т. е. что

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \varphi \tag{42}$$

Мы знаем, что в этом случае

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0 \tag{43}$$

Далее мы имеем очевидное равенство

$$\frac{\partial \operatorname{grad} \varphi}{\partial t} = \operatorname{grad} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \tag{44}$$

и, следовательно, равенство (35) принимает вид

$$\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = -\operatorname{grad}\Pi$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \Pi$$

не зависит от положения точки и может зависеть только от времени, так что

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U + P + \frac{v^2}{2} = g(t) \tag{45}$$

во всей области, занятой жидкостью. Это равенство называется *интегралом Коши; оно имеет место для безвихревых движений идеальной баротропной жидкости, находящейся под действием консервативных сил.*

Если жидкость несжимаема, то получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U + \frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2} = g(t) \tag{46}$$

и можем отсюда найти p. Мы знаем, что в этом случае уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{47}$$

или, если воспользоваться (42),

$$\triangle\varphi = 0 \tag{48}$$

Рассмотрим теперь случай сжимаемой жидкости. В этом случае уравнение неразрывности имеет вид (§ 15, формула 42)

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\rho + \rho\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$$

или

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\rho + \rho\triangle\varphi = 0 \tag{49}$$

Уравнение же (45) принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + U + P + \frac{1}{2}(\operatorname{grad}\varphi)^2 = g(t) \tag{50}$$

и так как P есть определенная функция от ρ, то получилось два уравнения с двумя неизвестными функциями ρ и φ.

Остановимся в частности на случае малых колебаний сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил. Таким образом надо положить $U = 0$ и кроме того надо пренебречь всюду квадратами производных в сравнении с их первыми степенями. В результате получим

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\triangle\varphi = 0 \tag{51}$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + P = g(t) \tag{52}$$

Сделаем теперь замену функции φ, положив

$$\varphi = \Phi + \int_{t_0}^{t} g(t)\,dt$$

Тогда, очевидно, будет

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial t} + g(t), \qquad \Delta\varphi = \Delta\Phi$$

Поэтому предыдущая система примет вид:

$$\frac{\partial \lg \rho}{\partial t} + \Delta\Phi = 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + P = 0 \tag{54}$$

Продифференцировав последнее уравнение по t, получим

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} + \frac{\partial P}{\partial t} = 0 \tag{55}$$

где

$$\frac{\partial P}{\partial t} = F'(p)\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{f(p)}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{\rho}\frac{dp}{d\rho}\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{dp}{d\rho}\frac{\partial \lg \rho}{\partial t}$$

Так как колебания газа предполагаются малыми, то p и ρ мало отличаются от значений p_0 и ρ_0, соответствующих состоянию покоя.

Обозначим через c^2 значение

$$c^2 = \frac{dp}{d\rho} \tag{56}$$

вычисленное для значений p_0 и ρ_0 величин p и ρ; тогда можем считать, что

$$\frac{\partial P}{\partial t} = c^2 \frac{\partial \lg \rho}{\partial t} \tag{57}$$

и в силу уравнения (53) будем иметь

$$\frac{\partial P}{\partial t} = -c^2 \Delta\Phi \tag{58}$$

Поэтому уравнение (55) приводит нас к уравнению для функции Φ

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} - c^2 \Delta\Phi = 0 \tag{59}$$

которое носит название *волнового уравнения*.

Вернемся еще раз к уравнению (35), т. е. опять будем считать условия 1) и 2) выполненными, но не будем теперь предполагать движение безвихревым, иными словами будем считать, что

$$\operatorname{rot} \mathbf{v} = \Omega \tag{60}$$

отличен от нуля.

В этом случае можно составить дифференциальное уравнение, определяющее изменение вихря Ω с течением времени. К выводу этого уравнения мы сейчас и обратимся. Для этого применим к обеим частям уравнения (35) операцию rot, в результате получим

$$\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}) = -\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Pi \tag{61}$$

Но мы имеем следующие формулы: прежде всего ясно, что

$$\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \operatorname{rot}\mathbf{v}}{\partial t} = \frac{\partial \Omega}{\partial t} \tag{62}$$

далее, по формуле (6)

$$\operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v}) = \operatorname{rot}(\mathbf{v}\times\Omega) = (\Omega\cdot\nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\Omega + \mathbf{v}\operatorname{div}\Omega - \Omega\operatorname{div}\mathbf{v} \tag{63}$$

Наконец по формулам (12) и (13) мы имеем

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\Pi = 0, \qquad \operatorname{div}\Omega = \operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{v} = 0$$

Поэтому уравнение (61) принимает следующий вид

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\Omega - (\Omega\cdot\nabla)\mathbf{v} + \Omega\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{64}$$

или, вспоминая связь между полной и частной производными вектора [§ 13, формула (18)]

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega\cdot\nabla)\mathbf{v} + \Omega\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{65}$$

Это уравнение и определяет изменение вихрей с течением времени. Мы выясним характер этого изменения более подробно в дальнейшем.

В качестве следующего примера рассмотрим вопрос о вычислении кинетической энергии в гидродинамике.

Допустим, что мы рассматриваем движение несжимаемой жидкости. Рассмотрим некоторый произвольно вырезанный объем жидкости V, ограниченный поверхностью S, тогда элемент объема dV, имеющий массу ρdV, будет обладать кинетической энергией

$$\rho\frac{v^2}{2}dV$$

а полная кинетическая энергия всего объема жидкости V будет равна

$$T = \int_V \rho\frac{v^2}{2}dV \tag{66}$$

Если мы рассматриваем безвихревое движение несжимаемой жидкости, так что

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad}\varphi \tag{67}$$

то мы будем иметь

$$T = \frac{1}{2}\rho\int_V (\operatorname{grad}\varphi)^2 dV \tag{68}$$

По формуле (18) мы можем преобразовать это выражение в случае, если φ есть однозначная функция, к виду

$$T = \frac{1}{2}\rho \oint\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \frac{1}{2}\rho \int\limits_V \varphi \triangle \varphi dV \tag{69}$$

Но для безвихревого движения несжимаемой жидкости, как мы знаем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \triangle \varphi = 0 \tag{70}$$

и, следовательно,

$$T = \frac{1}{2}\rho \oint\limits_S \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS \tag{71}$$

Заметим, что если жидкость ограничена неподвижной твердой стенкой, то вдоль нее жидкость может только скользить, так что на такой стенке непременно должно быть

$$v_n = 0 \tag{72}$$

и следовательно, в нашем случае

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0 \tag{73}$$

В частности, если жидкость заполняет односвязную область, ограниченную исключительно только неподвижными твердыми стенками, то она не может совершать никакого безвихревого движения. В самом деле, в этом случае потенциал скорости φ — непременно однозначная функция, и, следовательно, применима формула (71); но так как на всей поверхности S выполняется условие (73), то $T = 0$, т. е. кинетическая энергия жидкости равна нулю, следовательно, все ее частицы покоятся.

4. Рассмотрим аналогичный предыдущему вопрос об энергии электростатического поля. Мы уже знаем, что электрическое поле определяется потенциальным вектором

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi \tag{74}$$

Если поле происходит от одного заряда e, находящегося в начале координат, то

$$\varphi = \frac{e}{r} \tag{75}$$

Сила, действующая на заряд e_1, будет равна

$$\mathbf{F} = e_1 \mathbf{E} = -e_1 \operatorname{grad} \frac{e}{r} \tag{76}$$

Подсчитаем ту работу, которую надо затратить, чтобы перенести заряд e_1 из бесконечности в данное положение M (r); эта работа, очевидно, равна той работе, которую совершает сила $\mathbf{F}$ на перемещение заряда из точки M в бесконечность:

$$W = \int\limits_M^\infty \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -e_1 \int\limits_M^\infty \operatorname{grad} \frac{e}{r} \cdot d\mathbf{r} = -e_1 \int\limits_M^\infty d\left(\frac{e}{r}\right) = \frac{e_1 e}{r} \tag{77}$$

Полученную величину можно назвать *потенциальной энергией системы двух зарядов.*

Пусть теперь имеем систему n зарядов $e_1, e_2, \ldots, e_n$, находящихся в точках $M_1, M_2, \ldots, M_n$, и пусть r_{ik} означает расстояние между точками M_i и M_k. Тогда мы получим потенциальную энергию системы этих зарядов, образовав всевозможные произведения

$$\frac{e_i e_k}{r_{ik}}$$

и взяв их сумму:

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i,\ k=1}^{n} \frac{e_i e_k}{r_{ik}} \tag{78}$$

причем коэффициент $\frac{1}{2}$ нужно взять потому, что каждая комбинация значков i и k встречается дважды.

В рассматриваемом случае мы имеем для потенциала выражение

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} \frac{e_k}{r_k} \tag{79}$$

где r_k — расстояние переменной точки M_k до точки M.

В частности мы имеем, что

$$\varphi_i = \varphi(M_i) = \sum_{k=1}^{n}{}' \frac{e_k}{r_{ik}} \tag{80}$$

есть значение в точке M_i потенциала, происходящего от всех остальных зарядов (штрих у суммы показывает, что при суммировании надо пропустить значение $k = i$). Так как

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \left(\sum_{k=1}^{n}{}' \frac{e_k}{r_{ik}} \right)$$

то получаем, что

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} e_i \varphi_i \tag{81}$$

Допустим теперь, что мы имеем непрерывное распределение зарядов по некоторому объему V; если объемная плотность зарядов есть ρ, то в элементе объема dV будет находиться заряд ρdV; обозначая соответствующее значение потенциала через φ, получим вместо (81) формулу

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho \varphi \, dV \tag{82}$$

определяющую потенциальную энергию заданного поля зарядов.

Так как вне объема V плотность электрических зарядов $\rho = 0$, то можно также написать

$$W = \frac{1}{2} \int_{V_1} \rho \varphi \, dV \tag{83}$$

где V_1 — любой объем, охватывающий V.

Но мы видели (§ 15, п. 7), что плотность электрических зарядов определяется равенством

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{84}$$

или, что то же, равенством

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho \tag{85}$$

Поэтому, выражая потенциальную энергию W через значение φ, будем иметь в силу формулы (83)

$$W = -\frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_1} \varphi\Delta\varphi\, dV \tag{86}$$

Воспользуемся теперь формулой (18), в результате получим

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{V_1} (\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV - \frac{1}{8\pi}\oint\limits_{S_1} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS \tag{87}$$

где S_1 — поверхность, ограничивающая V_1. Возьмем за S_1 сферу весьма большого радиуса R, который мы будем затем стремить к бесконечности, и заметим, что если все заряды находятся на конечном расстоянии, то для φ и $\partial\varphi/\partial n$ мы будем иметь, как можно доказать на основании результатов одного из дальнейших параграфов, оценки

$$|\varphi| < \frac{A}{R}, \quad \left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right| < \frac{B}{R^2}$$

где A и B — постоянные числа. Поэтому, так как величина сферы S_1 равна $4\pi R^2$, мы будем иметь

$$\left|\oint\limits_{S_1} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS\right| < \frac{A}{R}\,\frac{B}{R^2}\,4\pi R^2 = \frac{4\pi AB}{R}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\oint\limits_{S_1} \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS = 0$$

А тогда из формулы (87) вытекает, что

$$W = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\infty} (\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV = \frac{1}{8\pi}\int\limits_{\infty} E^2\, dV \tag{88}$$

где интегралы берутся по всему бесконечному пространству.

Полученный результат мы можем иначе истолковать следующим образом: в электростатическом поле энергия распределена по всему пространству, причем на каждую единицу объема приходится количество энергии, равное

$$\frac{1}{8\pi}E^2 = \frac{1}{8\pi}(\operatorname{grad}\varphi)^2 \tag{89}$$

5. Рассмотрим в заключение этого параграфа несколько задач.

Задача 126. Доказать формулы

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\varphi\mathbf{a} = \mathbf{a}\,(\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varphi) + \varphi\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} \tag{90}$$

$$\mathbf{c}\cdot\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} \tag{91}$$

$$(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathbf{a}\times(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} - \mathbf{b}\times(\mathbf{c}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} \tag{92}$$

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\operatorname{rot}\mathbf{c} = \mathbf{b}\cdot(\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{c} - \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\cdot\nabla)\,\mathbf{c} \tag{93}$$

(по поводу последней формулы см. зад. 57).

Задача 127. Доказать следующие формулы

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{b} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} + \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} - \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} \tag{94}$$

$$(\mathbf{a}\times\nabla)\times\mathbf{r} = -2\mathbf{a} \tag{95}$$

$$(\nabla\times\mathbf{a})\times\mathbf{b} = -(\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{b} - \mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b} + \operatorname{rot}\mathbf{a}\times\mathbf{b} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b} \tag{96}$$

Задача 128. Доказать следующие формулы, являющиеся аналогичными формуле Гаусса — Остроградского:

$$\oint_S \varphi a_n\,dS = \int_V \{\varphi\operatorname{div}\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\operatorname{grad}\varphi\}\,dV \tag{97}$$

$$\oint_S (\mathbf{a}\times\mathbf{b})_n\,dS = \int_V \{\mathbf{b}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a} - \mathbf{a}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{b}\}\,dV \tag{98}$$

Задача 129. Доказать следующие формулы

$$\oint_S \varphi\psi\frac{\partial\chi}{\partial n}\,dS = \int_V \{\varphi\operatorname{div}(\psi\operatorname{grad}\chi) + \psi\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\chi\}\,dV \tag{99}$$

$$\oint_S \Delta\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS = \int_V \{(\Delta\varphi)^2 + (\operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{grad}\Delta\varphi)\}\,dV \tag{100}$$

$$\oint_S (\mathbf{a}\times\operatorname{grad}\varphi)_n\,dS = \int_V \operatorname{grad}\varphi\cdot\operatorname{rot}\mathbf{a}\,dV \tag{101}$$

Задача 130. Доказать, что если $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, то

$$\int_S \mathbf{n}\cdot(\operatorname{rot}\mathbf{a}\times\Delta\mathbf{a})\,dS = -\int_V \{(\Delta\mathbf{a})^2 + \operatorname{rot}\mathbf{a}\cdot\Delta\operatorname{rot}\mathbf{a}\}\,dV \tag{102}$$

Задача 131. Доказать следующие формулы, являющиеся аналогичными формуле Стокса

$$\oint_C \varphi\,d\mathbf{r} = \int_S \left(\mathbf{n}\times\operatorname{grad}\varphi\right)\cdot\frac{\mathbf{r}}{r}\,dS \tag{103}$$

$$\oint_C \varphi\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \{\varphi\operatorname{rot}_n\mathbf{a} + (\operatorname{grad}\varphi\times\mathbf{a})_n\}\,dS \tag{104}$$

где $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали в точках поверхности S, опирающейся на контур C.

Задача 132. Доказать формулу

$$\oint_C u\,dv = \int_S (\operatorname{grad} u \times \operatorname{grad} v)\cdot \mathbf{n}\,dS \tag{105}$$

где S — поверхность, опирающаяся на контур C, $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали к этой поверхности, u и v — две переменных функции точки.

Задача 133. Доказать справедливость следующего интегрального представления оператора Лапласа $\triangle\varphi$:

$$\triangle\varphi = 6 \lim_{R\to 0} \frac{\varphi_R - \varphi_0}{R^2} \tag{106}$$

где φ_0 — значение функции φ в той точке 0, в которой вычисляется значение $\triangle\varphi$, а φ_R есть среднее значение функции φ на сфере S_R радиуса R с центром в только что указанной точке:

$$\varphi_R = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{S_R} \varphi\,dS$$

Для доказательства можно поступить, например, следующим образом. Обозначим через $d\Omega$ телесный угол, под которым виден из точки O элемент dS сферы S_R. Подобно тому, как центральный угол, опирающийся на дугу длины l окружности радиуса r, измеряется в радианах величиной

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

получающейся от деления длины дуги на радиус окружности, телесный угол $d\Omega$, опирающийся на площадку dS сферы S_R, измеряется величиной

$$d\Omega = \frac{dS}{R^2}$$

получающейся от деления величины площади dS на квадрат радиуса сферы, иными словами, измеряется величиной площади той части сферы единичного радиуса с центром в вершине телесного угла, которая вырезается этим телесным углом.

Ясно теперь, что

$$\varphi_R = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_R} \varphi\,d\Omega$$

С другой стороны очевидно, что

$$\varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_R} \varphi_0\,d\Omega$$

Поэтому

$$\varphi_R - \varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \oint_{S_R} (\varphi - \varphi_0)\,d\Omega$$

Но мы можем написать, что если значение φ берется в точке сферы S_R, то

$$\varphi - \varphi_0 = \int_0^R \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dr$$

где интегрирование производится по радиусу, идущему из центра сферы.

Поэтому

$$\varphi_R - \varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_\Omega \int_0^R \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dr\, d\Omega = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \left(\int_\Omega \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, d\Omega \right) dr$$

Но из формулы (21) следует, что

$$\oint_{S_r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, dS = V\, [(\triangle \varphi)_0 + \varepsilon] = \frac{4}{3} \pi r^3\, [(\triangle \varphi)_0 + \varepsilon]$$

где ε — бесконечно малая вместе с r величина. Поэтому

$$\oint_{S_r} \frac{\partial \varphi}{\partial r}\, d\Omega = \frac{4}{3} \pi r\, [(\triangle \varphi)_0 + \varepsilon]$$

Следовательно,

$$\varphi_R - \varphi_0 = \frac{1}{4\pi} \int_0^R \frac{4}{3} \pi r\, [(\triangle \varphi)_0 + \varepsilon]\, dr = \frac{1}{3} (\triangle \varphi)_0 \int_0^R r\, dr + \frac{1}{3} \int_0^R r \varepsilon\, dr =$$

$$= \frac{1}{6} R^2 (\triangle \varphi)_0 + R^2 \varepsilon_1$$

где ε_1 — бесконечно малая вместе с R величина.

Формула (106) вытекает из полученной формулы, как непосредственное следствие.

Задача 134. Доказать, что если $\mathbf{n}$ — переменный вектор, численная величина которого всюду одинакова, т. е. $|\mathbf{n}| = \text{const}$, то

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla)\, \mathbf{n} = \operatorname{rot} \mathbf{n} \times \mathbf{n} \tag{107}$$

Задача 135. Вычислить, чему равно

$$\mathbf{n} \cdot [\operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{n}) - \operatorname{rot} (\mathbf{a} \times \mathbf{n})]$$

где $\mathbf{a}$ — переменный вектор, а $\mathbf{n}$ — единичный постоянный вектор.

Ответ: $\operatorname{div} \mathbf{a}$.

Задача 136. Доказать, что необходимое и достаточное условие того, чтобы переменный вектор $\mathbf{a}$ мог быть представлен в форме

$$\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi \tag{108}$$

где φ и ψ — переменные скалярные функции, состоит в выполнении равенства

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \tag{109}$$

Заметим, что если мы имеем поле вектора a, и если мы проведем поверхности

$$\psi = \text{const}$$

то в каждой точке поля вектор a направлен по нормали к той поверхности этого семейства, которая проходит через рассматриваемую точку.

Для доказательства необходимости условия (109) составим rot a:

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{rot}(\varphi \operatorname{grad} \psi) = \varphi \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi =$$

$$= \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi \qquad (110)$$

Ясно, что полученный вектор перпендикулярен вектору a.

Докажем теперь достаточность условия (109).

Пусть имеем поле вектора a, удовлетворяющего уравнению (109). Возьмем какую-нибудь плоскость, тогда на ней, вообще говоря, можно провести семейство Г линий, в каждой точке которой касательная перпендикулярна вектору a.

Так, например, если мы возьмем плоскость Oxy и в ней какую-либо точку M и какую-либо кривую, проходящую через точку M, то условие того, чтобы единичный вектор касательной к этой кривой в точке M

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{dx}{ds}\mathbf{i} + \frac{dy}{ds}\mathbf{j}$$

был перпендикулярен к вектору a, состоит в том, чтобы

$$a_x\,dx + a_y\,dy = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dx}{a_y} = -\frac{dy}{a_x}$$

а такое уравнение всегда может быть проинтегрировано, за исключением случая, когда в некоторой области рассматриваемой плоскости окажется $a_x = a_y = 0$, т. е. вектор a окажется как раз перпендикулярным к рассматриваемой плоскости. Но в этом случае можем исходить из другой плоскости.

Проведя теперь через все точки каждой линии полученного семейства вихревые линии вектора a, мы получим семейство поверхностей.

Пусть уравнение этого семейства поверхностей есть

$$\psi(x, y, z) = \text{const}$$

Докажем, что вектор a в каждой точке любой из этих поверхностей направлен по нормали к этой поверхности. В самом деле, рассмотрим определенную поверхность S и на ней произвольную дугу кривой AB. Покажем, что взятый по этой дуге криволинейный интеграл от вектора a равен нулю:

$$\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$$

Действительно, проведем через точки A и B вихревые линии вектора a до пересечения в точках A' и B' с той линией вышеупомянутого семей-

ства Г, исходя из которой была построена поверхность S. Составим теперь криволинейный интеграл от а по пути $AA'B'BA$; он равен

$$\oint \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS$$

причем поверхностный интеграл взят по куску поверхности S, ограниченному контуром $AA'B'BA$. Но ведь на всей поверхности S

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = 0$$

ибо эта поверхность состоит из вихревых линий, так что в каждой точке S вектор rot а лежит в касательной плоскости к S. Итак

$$\int_{AA'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} + \int_{A'B'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} + \int_{B'B} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} + \int_{BA} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (111)$$

Но по выбору линии $A'B'$ мы имеем

$$\int_{A'B'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (112)$$

Далее, на линиях AA' и BB' по самому определению вихревых линий вектор $d\mathbf{r}$ параллелев вектору rot а, последний же по условию перпендикулярен к вектору а, откуда вытекает, что на AA' и BB' вектор $d\mathbf{r}$ перпендикуляреи к а, и, значит,

$$\int_{AA'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0, \qquad \int_{BB'} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0 \qquad (113)$$

Из сравнения (111), (112) и (113) следует, что

$$\int_{AB} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = 0$$

для любого пути AB на поверхности S, что может быть только, если в каждой точке S вектор а направлен по нормали. Но тогда векторы а и grad ψ коллинеарны и, следовательно,

$$\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi$$

что и требовалось доказать.

Задача 137. Доказать, что всякий вектор а может быть представлен в форме

$$\mathbf{a} = \varphi \operatorname{grad} \psi + \operatorname{grad} \chi \qquad (114)$$

где φ, ψ, χ — переменные скалярные функции.

Для доказательства рассмотрим вихреные линии вектора а. Мы знаем, что поле вектора rot а соленоидально. Поэтому можно провести два семейства вихревых поверхностей (вихревой поверхностью называется поверхность, образованная вихревыми линиями)

$$\varphi = \text{const}, \quad \psi = \text{const} \qquad (115)$$

таким образом, чтобы интенсивность вихревой трубки, лежащей между двумя соседними поверхностями

$$\varphi = \text{const}, \quad \varphi + d\varphi = \text{const} \tag{116}$$

и двумя соседними поверхностями

$$\psi = \text{const}, \ \psi + d\psi = \text{const} \tag{117}$$

была равна как раз $d\varphi\, d\psi$. Так как каждая вихревая линия лежит на одной из поверхностей $\varphi = \text{const}$, то непременно

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \perp \operatorname{grad} \varphi$$

и точно так же

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} \perp \operatorname{grad} \psi$$

Отсюда вытекает, что по направлению rot a совпадает с вектором

$$\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi \tag{118}$$

Но рассмотрим поперечное сечение вышеупомянутой бесконечно малой трубки, перпендикулярное к оси трубки, и составим поток вектора rot a через это сечение. Если расстояние между поверхностями (116) в рассматриваемом месте обозначить через dn_1, а расстояние между поверхностями (117)—через dn_2, то по определению градиента

$$|\operatorname{grad} \varphi| = \frac{d\varphi}{dn_1}, \quad |\operatorname{grad} \varphi| = \frac{d\psi}{dn_2}$$

Если далее угол между поверхностями (115) в рассматриваемой точке обозначить через α, то поперечное сечение вышеупомянутой трубки будет представлять собою параллелограмм, стороны которого равны

$$\frac{dn_1}{\sin \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{dn_2}{\sin \alpha}$$

а площадь равна

$$dS = \frac{dn_1 dn_2}{\sin \alpha}$$

с другой стороны

$$|\operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi| = |\operatorname{grad} \varphi|\,|\operatorname{grad} \psi| \sin \alpha = \frac{d\varphi\, d\psi \sin \alpha}{dn_1 dn_2} = \frac{d\varphi\, d\psi}{dS}$$

Отсюда следует, что поток вектора (118) через рассматриваемое сечение равен $d\varphi\, d\psi$, так же как и поток вектора rot a. Поэтому, меняя, еще, в случае нужды, знак у φ, мы будем иметь

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi \tag{119}$$

Заметим теперь, что

$$\operatorname{rot} (\varphi \operatorname{grad} \psi) = \operatorname{grad} \varphi \times \operatorname{grad} \psi \tag{120}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{rot} (\mathbf{a} - \varphi \operatorname{grad} \psi) = 0$$

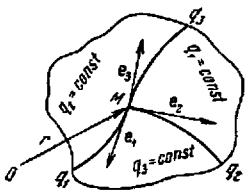
Отсюда сразу следует формула (114).

§ 18. Криволинейные координаты

1. Как мы знаем, положение точки M в пространстве может быть определено ее радиусом-вектором $\mathbf{r}$ относительно некоторой неподвижной точки O. В прямоугольных декартовых координатах мы имеем для радиуса-вектора $\mathbf{r}$ выражение

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

Однако во многих задачах выгодно определять положение точки M не тремя декартовыми координатами x, y, z, а тремя другими числами q_1, q_2, q_3, более отвечающими рассматриваемой частной задаче. Мы предположим, кроме того, что, обратно, каждой такой тройке чисел q_1, q_2, q_3 отвечает свой радиус-вектор $\mathbf{r}$ и, следовательно, некоторая точка M (иногда приходится, как мы увидим на примерах, несколько ограничивать область изменения переменных q_1, q_2, q_3).



Фиг. 60

Величины q_1, q_2, q_3 называются криволинейными координатами точки M.

Так как всякой точке M отвечают три координаты q_1, q_2, q_3, то каждая из этих координат, например q_1, является функцией от радиуса-вектора $\mathbf{r}$

$$q_1(\mathbf{r}) = q_1(x, y, z), \quad q_2(\mathbf{r}) = q_2(x, y, z), \quad q_3(\mathbf{r}) = q_3(x, y, z) \tag{1}$$

Обратно, радиус-вектор $\mathbf{r}$ любой точки пространства, вполне определяясь заданием трех чисел q_1, q_2, q_3, является функцией от этих переменных: $\mathbf{r}(q_1, q_2, q_3)$, а, следовательно, и компоненты этого вектора x, y, z будут функциями от q_1, q_2, q_3:

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \tag{2}$$

Поверхности уровня функции $q_1(\mathbf{r})$, т. е. поверхности

$$q_1(\mathbf{r}) = \text{const}$$

образуют некоторое семейство поверхностей. Рассмотрим еще два семейства поверхностей

$$q_2(\mathbf{r}) = \text{const}, \quad q_3(\mathbf{r}) = \text{const}$$

Через каждую точку M пространства проходит по одной поверхности каждого семейства (фиг. 60). Назовем эти поверхности координатными поверхностями. Линии пересечения двух координатных поверхностей назовем координатными линиями. На координатной линии q_1, очевидно, меняется только координата q_1, координаты же q_2 и q_3 сохраняют неизменное значение.

В качестве примера рассмотрим цилиндрические и сферические координаты. В цилиндрических координатах (фиг. 61) положение точки

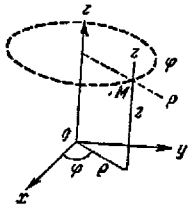
определяется тремя координатами $q_1 = \rho$, $q_2 = \varphi$ и $q_3 = z$. Формулы (2) имеют вид

$$x = \rho \cos \varphi, \qquad y = \rho \sin \varphi, \qquad z = z \tag{3}$$

Изменяя координату ρ от 0 до ∞, координату φ от 0 до 2π, координату z от $-\infty$ до $+\infty$, мы получим все точки пространства. Координатными поверхностями являются

$\rho = \text{const}$ — цилиндры с осью Oz
$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, ограниченные осью Oz
$z = \text{const}$ — плоскости, перпендикулярные оси Oz

Координатными линиями являются: лучи, перпендикулярные оси Oz и начинающиеся на этой оси (линия ρ), окружности с центром на оси Oz, лежащие в плоскостях, перпендикулярных этой оси (линии φ), и прямые, параллельные оси Oz (линии z).

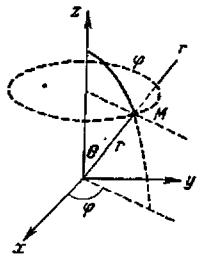


Фиг. 61

В сферических координатах (фиг. 62) положение точки определяется координатами $q_1 = r$, $q_2 = \theta$ и $q_3 = \varphi$. Формулы (2) имеют вид

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \; y = r \sin \theta \sin \varphi, \; z = r \cos \theta \tag{4}$$

Изменяя r от 0 до ∞, θ от 0 до π и φ от 0 до 2π, мы получим все точки пространства. Координатными поверхностями являются



Фиг. 62

$r = \text{const}$ — сферы с центром O

$\theta = \text{const}$ — полуконусы с осью Oz

$\varphi = \text{const}$ — полуплоскости, ограниченные осью Oz

Координатными линиями являются: радиусы (линии r), меридианы (линии θ) и параллели (линии φ).

2. Возвращаясь к общим криволинейным координатам q_1, q_2, q_3, введем в рассмотрение единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, направленные по касательным к координатным линиям в точке M в сторону возрастания, соответственно, переменных q_1, q_2 и q_3 (фиг. 60).

Рассмотрим теперь радиус-вектор $\mathbf{r}$ (q_1, q_2, q_3) и составим производную $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$. Поскольку при дифференцировании q_2 и q_3 считаются постоянными, годографом вектора $\mathbf{r}$ является координатная линия q_1, а потому вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$ имеет направление касательной к координатной линии q_1, т. е.

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1 \mathbf{e}_1$$

где H_1 — длина вектора $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$.

Из предыдущего равенства легко выведем, в силу того, что $\mathbf{e}_1$ есть единичный вектор:

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right)^2$$

или, так как

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = \frac{\partial x}{\partial q_1}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\mathbf{k} \tag{5}$$

то

$$H_1^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2$$

Аналогичные рассуждения приводят к трем формулам:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1\mathbf{e}_1, \qquad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = H_2\mathbf{e}_2, \qquad \frac{\partial r}{\partial q_3} = H_3\mathbf{e}_3 \tag{6}$$

где

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i}\right)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{7}$$

Величины H_1, H_2 и H_3 называются коэффициентами Ламэ.

Рассмотрим, с другой стороны, три вектора $\operatorname{grad} q_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Вектор $\operatorname{grad} q_i$ направлен по нормали к координатной поверхности $q_i = \text{const}$; поэтому, если мы обозначим через $\mathbf{e}_i^*$ единичный вектор нормали к этой поверхности, направленный в сторону возрастающих значений q_i, то мы будем иметь

$$\operatorname{grad} q_i = h_i\mathbf{e}_i^* \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{8}$$

где h_i — длина вектора $\operatorname{grad} q_i$. Очевидно, что

$$h_i^2 = (\operatorname{grad} q_i)^2 = \left(\frac{\partial q_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial q_i}{\partial z}\right)^2 \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{9}$$

Величины h_1, h_2 и h_3 называются дифференциальными параметрами первого порядка.

Покажем, что векторы $\operatorname{grad} q_1$, $\operatorname{grad} q_2$ и $\operatorname{grad} q_3$ образуют систему векторов, взаимных с $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}$ и $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}$. Для этого, согласно (19) § 8, надо показать, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = 1 \\ &\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = 0 \qquad (i \neq k) \end{aligned} \tag{10}$$

Но, умножая обе части равенства

$$d\mathbf{r}\,(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}dq_3$$

скалярно на $\operatorname{grad} q_i$, мы получим

$$dq_i = \operatorname{grad} q_i \cdot d\mathbf{r} = \left(\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\right)dq_1 + \left(\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\right)dq_2 + \left(\operatorname{grad} q_i \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}\right)dq_3$$

откуда, в силу произвольности dq_1, dq_2, dq_3, сразу следуют формулы (10).

Коренное отличие криволинейных координат от обычных прямоугольных заключается в том, что в криволинейных координатах направления векторов $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (а равно и $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$) зависят от того, для какой точки M эти векторы определяются.

Допустим, что мы рассматриваем в точке M вектор $\mathbf{a}$; разложим его по трем некомпланарным векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$:

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{11}$$

Совершенно аналогично мы могли бы разложить вектор $\mathbf{a}$ по трем некомпланарным векторам $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$:

$$\mathbf{a} = a_1^*\mathbf{e}_1^* + a_2^*\mathbf{e}_2^* + a_3^*\mathbf{e}_3^* \tag{12}$$

Наиболее часто употребляют *криволинейные ортогональные координаты*. Так называются такие криволикейные координаты, координатные линии которых в каждой точке взаимно перпендикулярны. Очевидно, что цилиндрические и сферические координаты являются ортогональными.

Ясно, что для ортогональных криволинейных координат мы имеем равенства

$$\mathbf{e}_i^* = \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 0, \qquad \mathbf{e}_i^* \cdot \mathbf{e}_k^* = 0 \qquad (i \neq k) \tag{13}$$

Поэтому, в силу (6) и (8), необходимые и достаточные условия для ортогональности криволинейных координат можно записать в одной из следующих двух эквивалентных форм

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_k} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_k} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_k} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_k} = 0 \quad (i \neq k) \tag{14}$$

или же

$$\operatorname{grad} q_i \cdot \operatorname{grad} q_k = \frac{\partial q_i}{\partial x}\frac{\partial q_k}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y}\frac{\partial q_k}{\partial y} + \frac{\partial q_i}{\partial z}\frac{\partial q_k}{\partial z} = 0 \quad (i \neq k) \tag{15}$$

Для ортогональных криволинейных координат между H_i и h_i существует весьма простая связь. В самом деле, в силу (13) мы имеем

$$\operatorname{grad} q_i = h_i\mathbf{e}_i, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_i} = H_i\mathbf{e}_i$$

а потому первая из формул (10) дает

$$h_i = \frac{1}{H_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{16}$$

так что, в частности, имеем формулы

$$\operatorname{grad} q_i = \frac{\mathbf{e}_i}{H_i} \quad (i = 1, 2, 3) \tag{17}$$

3. В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно ортогональные криволинейные координаты. Для таких координат разложения (11) и (12) совпадают

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3 \tag{18}$$

Мы будем называть a_1, a_2 и a_3 криволинейными составляющими вектора $\mathbf{a}$ или же проекциями вектора $\mathbf{a}$ на оси криволинейных координат. Беря в частности за $\mathbf{a}$ вектор $d\mathbf{r}$, мы получим

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_3}dq_3 = H_1 dq_1\,\mathbf{e}_1 + H_2 dq_2\,\mathbf{e}_2 + H_3 dq_3\,\mathbf{e}_3 \tag{19}$$

так что составляющими вектора $d\mathbf{r}$ являются

$$ds_i = H_i\,dq_i \qquad (i = 1,\ 2,\ 3) \tag{20}$$

Возвышая обе части равенства (19) в квадрат и замечая, что $(d\mathbf{r})^2 = ds^2$, $\mathbf{e}_i^2 = 1$, $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_k = 0$ $(i \neq k)$, получим для квадрата длины элемента $d\mathbf{r}$ формулу

$$ds^2 = H_1^2 dq_1^2 + H_2^2 dq_2^2 + H_3^2 dq_3^2 \tag{21}$$

Пусть $d\mathbf{r} = \overline{MN}$, где N — бесконечно близкая к M точка; проведем через N три координатных поверхности, которые вместе с тремя координатными поверхностями, проходящими через точку M, образуют криволинейный бесконечно малый параллелепипед. Очевидно, ребрами этого параллелепипеда будут служить

$$ds_1 = H_1 dq_1, \qquad ds_2 = H_2 dq_2, \qquad ds_3 = H_3 dq_3 \tag{22}$$

но тогда грани его будут иметь величины

$$d\sigma_1 = H_2 H_3\,dq_2 dq_3, \qquad d\sigma_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1, \qquad d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2 \tag{23}$$

а объем его будет равен

$$dV = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3 \tag{24}$$

Приведенными в этом пункте формулами очень удобно пользоваться для нахождения коэффициентов Ламэ.

Так, например, легко видеть, что в цилиндрических координатах ребрами бесконечно малого криволинейного параллелепипеда являются

$$ds_1 = d\rho, \qquad ds_2 = \rho d\varphi, \qquad ds_3 = dz$$

Сравнение с формулами (22) показывает, что для цилиндрических координат

$$H_\rho = 1, \qquad H_\varphi = \rho, \qquad H_z = 1 \tag{25}$$

Точно так же для сферических координат имеем

$$ds_1 = dr, \qquad ds_2 = r\,d\theta, \qquad ds_3 = r\sin\theta\,d\varphi$$

и поэтому

$$H_r = 1, \quad H_\theta = r, \quad H_\varphi = r\sin\theta \tag{26}$$

Задача 138. Найти коэффициенты Ламэ для цилиндрических и сферических координат по формулам (7).

4. Для того чтобы пользоваться криволинейными координатами, нужно уметь выражать в этих координатах все основные векторные операции.

а) Начнем с рассмотрения grad φ. Мы, очевидно, имеем (§ 12, задача 89)

$$\operatorname{grad}\varphi(q_1, q_2, q_3) = \frac{\partial\varphi}{\partial q_1}\operatorname{grad} q_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_2}\operatorname{grad} q_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial q_3}\operatorname{grad} q_3$$

и, воспользовавшись формулами (17), сразу получим

$$\operatorname{grad}\varphi = \frac{\mathbf{e}_1}{H_1}\frac{\partial\varphi}{\partial q_1} + \frac{\mathbf{e}_2}{H_2}\frac{\partial\varphi}{\partial q_2} + \frac{\mathbf{e}_3}{H_3}\frac{\partial\varphi}{\partial q_3} \tag{27}$$

Этот же результат можно получить иначе; в самом деле, проекцией grad φ на ось q_i криволинейных координат по самому определению является $\frac{\partial\varphi}{\partial s_i}$, но в силу $ds_i = H_i dq_i$ мы имеем

$$\frac{\partial\varphi}{\partial s_i} = \frac{1}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

т. е. те же самые выражения для проекций grad φ, что и в формуле (27).

Задача 139. Доказать формулу (27), показав, что

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\mathbf{e}_i}{H_i}\frac{\partial\varphi}{\partial q_i}\cdot d\mathbf{r} = d\varphi$$

Задача 140. Вычислить grad ϕ в цилиндрических координатах.

Ответ:

$$\operatorname{grad}\phi = \mathbf{e}_\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\varphi} + \mathbf{e}_z\frac{\partial\psi}{\partial z} \tag{28}$$

Задача 141. Вычислить grad ϕ в сферических координатах.

Ответ:

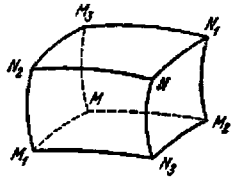
$$\operatorname{grad}\phi = \mathbf{e}_r\frac{\partial\psi}{\partial r} + \frac{\mathbf{e}_\theta}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} + \frac{\mathbf{e}_\varphi}{r\sin\theta}\frac{\partial\psi}{\partial\varphi} \tag{29}$$

б) Рассмотрим div $\mathbf{a}$. Очень удобно для вычисления div $\mathbf{a}$ в криволинейных координатах применить формулу § 14:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \lim_{V\to 0}\frac{\oint_S a_n dS}{V}$$

взяв за V объем бесконечно малого криволинейного параллелепипеда (фиг. 63), одной из вершин которого является та точка M, в которой ищется значение div $\mathbf{a}$.

Грань $MM_2N_1M_3$ этого параллелепипеда имеет величину $d\sigma_1 = H_2H_3dq_2dq_3$; нормальная к этой грани составляющая вектора a равна $-a_1$ (мы считаем, что MM_1 направлено в сторону возрастающих значений q_1, внешняя же нормаль к рассматриваемой грани направлена в противоположную сторону), поэтому поток через грань $MM_2N_1M_3$ будет равен $-a_1H_2H_3dq_2dq_3$. Противоположная грань $M_1N_2NN_3$ отличается от грани $MM_2N_1M_3$ только тем, что ей отвечает значение $q_1 + dq_1$ координаты q_1, значения же других координат на этих двух гранях одни и те же. Поэтому поток через грань $M_1N_3NN_2$ будет равен



Фиг. 63

$$\left\{a_1H_2H_3 + \frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}\,dq_1\right\}dq_2dq_3$$

Складывая его с предыдущим выражением, получим для потока через две грани $MM_2N_1M_3$ и $M_1N_2NN_3$ выражение

$$\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}\,dq_1dq_2dq_3$$

и аналогично для потока через грани $MM_1N_2M_3$ и $M_2N_3NN_1$

$$\frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2}\,dq_1dq_2dq_3$$

и через грани $MM_1N_3M_2$ и $M_3N_2NN_1$

$$\frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\,dq_1dq_2dq_3$$

Складывая все три выражения, получим полный поток

$$\oint_S a_n\,dS$$

Деля его на объем параллелепипеда $V = H_1H_2H_3dq_1dq_2dq_3$, получим окончательно

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(a_2H_3H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial(a_3H_1H_2)}{\partial q_3}\right\} \tag{30}$$

В частности мы получаем формулы

$$\operatorname{div}\mathbf{e}_1 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_2H_3)}{\partial q_1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{e}_2 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_3H_1)}{\partial q_2}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{e}_3 = \frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial(H_1H_2)}{\partial q_3} \tag{31}$$

Задача 142. Вычислить div a в цилиндрических координатах. Ответ:

$$\operatorname{div}\mathbf{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \tag{32}$$

З а д а ч а 143. Вычислить div a в сферических координатах.

О т в е т:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 a_r)}{\partial r} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial (\sin \theta\, a_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta}\frac{\partial a_\varphi}{\partial \varphi} \tag{33}$$

в) Рассмотрим rot a. Применим формулу § 16

$$\operatorname{rot}_n \mathbf{a} = \lim_{S \to 0} \frac{\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}}{S}$$

Чтобы получить проекцию rot a на координатную линию q_1, нужно взять за C контур $MM_2N_1M_3$; площадь бесконечно малого криволинейного прямоугольника, ограниченного этим контуром, равна, как мы знаем,

$$d\sigma_1 = H_2 H_3\, dq_2 dq_3$$

Нетрудно далее вычислить $\oint \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$, взятый по замкнутому контуру $MM_2N_1M_3$. Прежде всего

$$\int_{MM_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = a_2 ds_2 = a_2 H_2 dq_2$$

Далее,

$$\int_{M_3N_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

отличается от предыдущего интеграла только тем, что в нем координата q_3 имеет другое значение $q_3 + dq_3$, значения же других координат те же, что и в интеграле

$$\int_{MM_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Поэтому

$$\int_{M_3N_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \left\{a_2 H_2 + \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3} dq_3\right\} dq_2$$

Точно так же можно вычислить

$$\int_{MM_3} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = a_3 H_3 dq_3, \quad \int_{M_2N_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \left\{a_3 H_3 + \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2\right\} dq_3$$

Поэтому

$$\oint_{MM_2N_1M_3M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{MM_2} + \int_{M_2N_1} - \int_{M_3N_1} - \int_{MM_3} = \left\{\frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3}\right\} dq_2 dq_3$$

Деля это выражение на $d\sigma_1$, мы и получим требуемое выражение

$$\begin{aligned}
(\operatorname{rot} \mathbf{a})_1 &= \frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_3}\right\} \\
(\operatorname{rot} \mathbf{a})_2 &= \frac{1}{H_3 H_1}\left\{\frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (a_3 H_3)}{\partial q_1}\right\} \\
(\operatorname{rot} \mathbf{a})_3 &= \frac{1}{H_1 H_2}\left\{\frac{\partial (a_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (a_1 H_1)}{\partial q_2}\right\}
\end{aligned} \tag{34}$$

Если принять $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1$, то получится формула

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}_1=\mathbf{e}_2\frac{1}{H_3H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}-\mathbf{e}_3\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}=\frac{1}{H_1}\operatorname{grad}H_1\times\mathbf{e}_1 \tag{35}$$

Задача 144. Исходя из тождества $\operatorname{rot}\operatorname{grad}q_i=0$, доказать формулы

$$\operatorname{rot}\mathbf{e}_i=\frac{1}{H_i}\operatorname{grad}H_i\times\mathbf{e}_i \qquad (i=1,\ 2,\ 3) \tag{36}$$

и, исходя из них, восстановить формулы (34).

Задача 145. Исходя из тождества

$$\operatorname{div}(\mathbf{e}_2\times\mathbf{e}_3)=\mathbf{e}_3\cdot\operatorname{rot}\mathbf{e}_2-\mathbf{e}_2\cdot\operatorname{rot}\mathbf{e}_3$$

и формул (36), получить формулы (31) и затем (30).

Задача 146. Вычислить $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в цилиндрических координатах.

Ответ:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_\rho\mathbf{a}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\\ \operatorname{rot}_\varphi\mathbf{a}&=\frac{\partial a_\rho}{\partial z}-\frac{\partial a_z}{\partial\rho}\\ \operatorname{rot}_z\mathbf{a}&=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\end{aligned} \tag{37}$$

Задача 147. Вычислить $\operatorname{rot}\mathbf{a}$ в сферических координатах.

Ответ:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}_\varphi\mathbf{a}&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(a_\varphi\sin\theta)}{\partial\theta}-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_\theta}{\partial\varphi}\\ \operatorname{rot}_\theta\mathbf{a}&=\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial a_r}{\partial\varphi}-\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\varphi)}{\partial r}\\ \operatorname{rot}_\varphi\mathbf{a}&=\frac{1}{r}\frac{\partial(ra_\theta)}{\partial r}-\frac{1}{r}\frac{\partial a_r}{\partial\theta}\end{aligned} \tag{38}$$

Задача 148. Вектор $\frac{\mathbf{r}}{r^3}$, где $\mathbf{r}$ есть радиус-вектор, является соленоидальным вектором (§ 14) и, следовательно, может быть представлен в виде вихря некоторого вектора $\mathbf{a}$ (§ 16). Найти вектор $\mathbf{a}$.

Указание. Воспользовавшись сферическими координатами, попробовать сделать предположение, что у вектора $\mathbf{a}$ отлична от нуля только составляющая a_φ.

Ответ:

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3}=\operatorname{rot}\mathbf{a},\ \text{где}\ a_r=0,\ a_\theta=0,\ a_\varphi=\frac{1}{r}\frac{f(\varphi)-\cos\theta}{\sin\theta}$$

Здесь $f(\varphi)$ — произвольная функция.

г) Рассмотрим оператор Лапласа. Так как $\Delta\psi=\operatorname{div}\operatorname{grad}\psi$, то, воспользовавшись формулами (27) и (30), мы сразу получим выражение оператора Лапласа

$$\Delta\psi=\frac{1}{H_1H_2H_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial\psi}{\partial q_1}\right)+\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_3H_1}{H_2}\frac{\partial\psi}{\partial q_2}\right)+\frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial\psi}{\partial q_3}\right)\right\} \tag{39}$$

Так, например, в цилиндрических координатах будем иметь

$$\Delta\psi = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} \tag{40}$$

а в сферических

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \tag{41}$$

Задача 149. Вычислить Δr^m. Найти частное решение уравнения

$$\Delta\varphi = \frac{1}{r}$$

Ответ:

$$\Delta r^m = m(m+1)\,r^{m-2}, \qquad \Delta\left(\frac{1}{2}r\right) = \frac{1}{r}$$

5. Разберем несколько задач на криволинейные координаты.

Задача 150. Вектор $\mathbf{a}$ задан своими проекциями на оси сферических координат r, θ, φ:

$$a_r = \frac{2k\cos\theta}{r^3}, \quad a_\theta = \frac{k\sin\theta}{r^3}, \quad a_\varphi = 0 \tag{42}$$

где k — постоянное число. Выяснить, является ли вектор $\mathbf{a}$ потенциальным и если $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\psi$, то найти ψ. Найти векторные линии вектора $\mathbf{a}$.

Решение. Векторные линии вектора $\mathbf{a}$ нужно определять в криволинейных координатах из уравнения

$$d\mathbf{r}\times\mathbf{a} = 0$$

которое в силу формул (19) и (11)

$$d\mathbf{r} = H_1\,dq_1\,\mathbf{e}_1 + H_2\,dq_2\,\mathbf{e}_2 + H_3\,dq_3\,\mathbf{e}_3, \qquad \mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3$$

приводит нас к равенствам

$$\frac{H_1\,dq_1}{a_1} = \frac{H_2\,dq_2}{a_2} = \frac{H_3\,dq_3}{a_3}$$

В данном случае находим

$$\frac{d\mathbf{r}}{a_r} = \frac{r\,d\theta}{a_\theta} = \frac{r\sin\theta\,d\varphi}{a_\varphi}$$

или

$$\frac{dr}{2\cos\theta} = \frac{r\,d\theta}{\sin\theta} = \frac{d\varphi}{0}$$

После интегрирования получаем следующие уравнения векторных линий:

$$\varphi = C_1, \qquad r = C_2\sin^2\theta \tag{43}$$

Составляя по формулам (38) rot $\mathbf{a}$, убеждаемся, что rot $\mathbf{a} = 0$, следовательно вектор $\mathbf{a}$ — потенциальный. Чтобы найти ψ, составляем

$$\mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = a_r dr + a_\theta r\,d\theta + a_\varphi r\sin\theta\,d\varphi = \frac{2k\cos\theta\,dr}{r^3} + \frac{k\sin\theta\,d\theta}{r^2} = -d\left(\frac{k\cos\theta}{r^2}\right)$$

Отсюда следует, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\left(-\frac{k\cos\theta}{r^2}\right) \tag{44}$$

Составляя по формуле (33) div a, легко обнаружить, что div a = 0, т. е. вектор a является также и соленоидальным вектором. Мы можем поэтому представить вектор a в форме

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{45}$$

Чтобы найти вектор A, воспользуемся формулами (38), причем примем $A_r = 0$. Тогда получим систему уравнений

$$\frac{2k\cos\theta}{r^3} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(A_\varphi \sin\theta)}{\partial\theta} - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}$$

$$\frac{k\sin\theta}{r^3} = -\frac{1}{r}\frac{\partial(A_\varphi r)}{\partial r}, \qquad 0 = \frac{1}{r}\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r}$$

Второе и третье уравнения этой системы дают

$$rA_\varphi = \frac{k\sin\theta}{r} + f(\theta, \varphi), \quad rA_\theta = g(\theta, \varphi)$$

где f и g — произвольные функции θ и φ. Теперь первое уравнение дает

$$\frac{\partial[\sin\theta f(\theta, \varphi)]}{\partial\theta} - \frac{\partial g}{\partial\varphi} = 0$$

и может быть удовлетворено, если взять $f(\theta, \varphi) = g(\theta, \varphi) = 0$. Итак

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$$

где A есть вектор с составляющими

$$A_r = 0, \quad A_\theta = 0, \quad A_\varphi = \frac{k\sin\theta}{r^2} \tag{46}$$

Задача 151. Вычислить поток вектора a предыдущей задачи через поверхность полусферы $r = R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}\pi$.

Ответ: $\frac{2\pi k}{R}$.

Задача 152. Пусть шар радиуса R движется в однородной несжимаемой жидкости с постоянной скоростью c вдоль оси Oz. Найти движение жидкости, предполагая его безвихревым и считая, что на бесконечности жидкость покоится.

Решение. Мы знаем из § 15, что если движение несжимаемой жидкости происходит с потенциалом скорости, то

$$\mathbf{v} = \operatorname{grad} \Phi \tag{47}$$

причем

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{48}$$

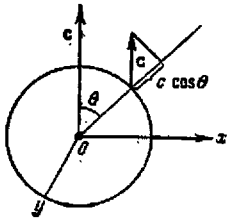
Заметим далее, что частицы, прилегающие к поверхности шара, будут скользить вдоль этой поверхности. Следовательно, скорость какой-либо

из таких частиц относительно поверхности шара, т. е. $\mathbf{v} - c\mathbf{k}$ должна лежать в касательной плоскости к поверхности шара, т. е. должна быть перпендикулярна к нормали $\mathbf{n}$ поверхности шара:

$$(\mathbf{v} - c\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} = 0$$

Если теперь заметить, что нормаль к поверхности шара совпадает с радиусом шара, то легко получим, что (фиг. 63а)

$$v_r = c \cos\theta \qquad (49)$$



Фиг. 63а

Предполагая, что в рассматриваемый момент центр шара находится в начале координат, мы приходим к выводу, что нам нужно найти в области вне шара такую функцию Φ, чтобы выполнялись равенства (47) и (48) и чтобы при $r = R$ выполнялось равенство (49). Но вектор $\mathbf{a}$ задачи 150 как раз обладает такими свойствами, ибо, как мы видели, $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\psi$ и $\operatorname{div}\mathbf{a} = 0$, а при $r = R$ мы имеем

$$a_r = \frac{2k}{R^3}\cos\theta$$

Следовательно, принимая

$$\frac{2k}{R^3} = c, \qquad \text{или} \qquad k = \frac{cR^3}{2}$$

мы получаем решение предложенной задачи в виде

$$v_r = c\left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos\theta, \quad v_\theta = \frac{1}{2}c\left(\frac{R}{r}\right)^3 \sin\theta, \quad v_\varphi = 0 \qquad (50)$$

При этом при $r = \infty$ получается, как должно и быть, $\mathbf{v} = 0$.

Задача 153. Найти решения уравнения Лапласа

$$\Delta\psi = 0$$

зависящие только от r или только от θ или только от φ, где r, θ и φ — сферические координаты.

Ответ:

$$\psi = A + \frac{B}{r}, \quad \psi = A + B \lg \operatorname{tg}\frac{\theta}{2}, \quad \psi = A + B\varphi$$

Задача 154. Имеется однородное тело, ограниченное двумя концентрическими сферами с центром в 0 и с радиусами a и b, где $a < b$. Найти установившееся распределение температуры в этом теле, если известно, что на внутренней поверхности тела $r = a$ температура T поддерживается равной постоянной температуре T_1, а на внешней поверхности $r = b$ равной постоянной температуре T_2, и что уравнение теплопроводности для стационарного состояния есть $\Delta T = 0$.

Ответ:

$$T = \frac{T_1 a(b - r) + T_2 b(r - a)}{r(b - a)}$$

6. Наибольшие осложнения, связанные с применением криволинейных координат, коренятся в том обстоятельстве, что единичные векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ имеют в криволинейных координатах различные направления в разных точках.

Если мы рассмотрим две бесконечно близкие точки

$$M\,(q_1,\ q_2,\ q_3) \text{ и } M'\,(q_1 + dq_1,\ q_2 + dq_2,\ q_3 + dq_3)$$

то единичные векторы в этих точках будут соответственно

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3$$

и

$$\mathbf{e}_1 + d\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2 + d\mathbf{e}_2,\ \mathbf{e}_3 + d\mathbf{e}_3$$

При этом конечно

$$d\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} dq_2 + \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_3} dq_3 \tag{51}$$

и т. д. Поставим себе задачей вычислить производные

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1},\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2},\ \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_3}$$

Так как $\mathbf{e}_1$ есть единичный вектор, т. е.

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1$$

то из формулы (10) § 17 следует, что

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)\,\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \times \operatorname{rot} \mathbf{e}_1 = 0 \tag{52}$$

Так как единичный вектор $\mathbf{e}_1$ направлен по касательной к координатной линии q_1, то

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)\,\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} \tag{53}$$

Вспоминая формулу (35), легко найдем, что

$$(\mathbf{e}_1 \cdot \nabla)\,\mathbf{e}_1 = \operatorname{rot} \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_1 = \left(\frac{1}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_3\right) \times \mathbf{e}_1 =$$

$$= -\frac{1}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{H_1 H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \tag{54}$$

и, комбинируя эту формулу с предыдущей, получим

$$\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_1} = -\frac{1}{H_2} \frac{\partial H_1}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 - \frac{1}{H_3} \frac{\partial H_1}{\partial q_3} \mathbf{e}_3 \tag{55}$$

Для вычисления $\frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2}$ заметим, что аналогично формуле (53) мы имеем

$$(\mathbf{e}_2 \cdot \nabla)\,\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial s_2} = \frac{1}{H_2} \frac{\partial \mathbf{e}_1}{\partial q_2} \tag{56}$$

Но из формул (6) и (9) § 17 легко вывести следующую формулу:

$$2(\mathbf{b}\cdot\nabla)\mathbf{a}=\operatorname{grad}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})+\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{b})-\mathbf{a}\times\operatorname{rot}\mathbf{b}-$$
$$-\mathbf{b}\times\operatorname{rot}\mathbf{a}-\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}+\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a} \tag{57}$$

Подставляя сюда $\mathbf{a}=\mathbf{e}_1$, $\mathbf{b}=\mathbf{e}_2$, после ряда вычислений найдем

$$(\mathbf{e}_2\cdot\nabla)\mathbf{e}_1=\frac{1}{H_1H_2}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}\mathbf{e}_2 \tag{58}$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial q_2}=\frac{\mathbf{e}_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1} \tag{59}$$

Аналогично этому находится формула

$$\frac{\partial\mathbf{e}_1}{\partial q_3}=\frac{\mathbf{e}_3}{H_1}\frac{\partial H_3}{\partial q_1} \tag{60}$$

7. Рассмотрим в заключение этого параграфа основные понятия дифференциальной геометрии поверхностей.

Пусть мы имеем поверхность S. Тогда положение каждой точки M этой поверхности может быть определено двумя криволинейными координатами q_1 и q_2, так что радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки M является функцией от q_1 и q_2, иными словами координаты точки M будут функциями от q_1 и q_2:

$$x=x(q_1,\ q_2),\quad y=y(q_1,\ q_2),\quad z=z(q_1,\ q_2) \tag{61}$$

Линии поверхности S, на которых одна из координат q_1 и q_2 сохраняет постоянное значение, а меняется только другая координата, называются координатными линиями. Единичные векторы, направленные по касательным к координатным линиям q_1 и q_2, обозначим опять через $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$.

Составив вектор $\partial\mathbf{r}/\partial q_1$, мы легко убедимся в том, что он имеет направление $\mathbf{e}_1$, а вектор $\partial\mathbf{r}/\partial q_2$ имеет направление $\mathbf{e}_2$:

$$\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}=H_1\mathbf{e}_1,\quad \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}=H_2\mathbf{e}_2 \tag{62}$$

Однако, мы не будем теперь предполагать криволинейные координаты q_1 и q_2 ортогональными. Перемещению точки из положения $M(q_1,\ q_2)$ в бесконечно близкое положение $M'(q_1+dq_1,\ q_2+dq_2)$ соответствует приращение радиуса-вектора

$$d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1+\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}dq_2 \tag{63}$$

квадрат абсолютной величины которого равен

$$ds^2=(d\mathbf{r})^2=d\mathbf{r}\cdot d\mathbf{r}=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}dq_1^2+2\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}dq_1dq_2+\left(\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial q_2}\right)^2dq_2^2$$

Введем обозначения

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} = H_1^2 = g_{11}(q_1, q_2)$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = g_{12}(q_1, q_2) \tag{64}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = H_2^2 = g_{22}(q_1, q_2)$$

тогда для квадрата дифференциала длины дуги кривой, находящейся на поверхности, получим выражение

$$ds^2 = g_{11}\,dq_1^2 + 2g_{12}\,dq_1\,dq_2 + g_{21}\,dq_2^2 \tag{65}$$

которое называется первой основной формой Гаусса.

Если единичный вектор нормали к поверхности в точке M обозначить через $\mathbf{n}$, то вектор $\mathbf{n}$ должен быть перпендикулярен как к вектору $\partial\mathbf{r}/\partial q_1$, лежащему в касательной плоскости к поверхности, так и к вектору $\partial\mathbf{r}/\partial q_2$, следовательно вектор $\mathbf{n}$ имеет то же направление, что и вектор

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}$$

Но так как, по условию, $\mathbf{n}$ — единичный вектор, то должно быть

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}}{\left|\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\right|} \tag{66}$$

Заметим теперь, что по формуле (22) § 7

$$\left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\right)^2 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} & \dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\cdot\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{vmatrix} = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$$

и, следовательно, если ввести обозначение

$$g = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} \tag{67}$$

то

$$\left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\times\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\right| = g \tag{68}$$

и

$$\mathbf{n} = \frac{\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\times\dfrac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}}{g} \tag{69}$$

Легко далее вычислить угол α между координатной линией q_1 и координатной линией q_2, проходящими через рассматриваемую точку M.

В самом деле, мы, очевидно, имеем, что

$$g_{12} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1}\cdot\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2} = H_1H_2(\mathbf{e}_1\cdot\mathbf{e}_2) = H_1H_2\cos\alpha = \sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}\cos\alpha$$

и, следовательно,

$$\cos\alpha = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}\sqrt{g_{22}}} \tag{70}$$

Отсюда, в частности, следует, что q_1 и q_2 образуют ортогональную систему криволинейных координат тогда и только тогда, когда

$$g_{12} = 0 \tag{71}$$

Если мы рассмотрим две бесконечно близкие координатные линии q_1 и $q_1 + dq_1$ и две бесконечно близкие координатные линии q_2 и $q_2 + dq_2$, то эти четыре линии ограничивают бесконечно малый параллелограмм, который, очевидно, может быть по величине и направлению представлен вектором

$$dS = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_1 \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} dq_2 = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\right) dq_1 dq_2 =$$

$$= \left|\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial q_2}\right| \mathbf{n}\, dq_1\, dq_2 = g dq_1\, dq_2\, \mathbf{n} \tag{72}$$

так что численное значение величины площадки дается формулой

$$dS = g\, dq_1 dq_2 = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}\, dq_1\, dq_2 \tag{73}$$

§ 19. Определение вектора по его вихрю и расхождению

1. Нашей главной задачей до сих пор было всестороннее изучение заданного поля скалярной величины φ или векторной величины $\mathbf{a}$. Мы рассмотрели целый ряд различных дифференциальных операций, которые в том или ином отношении характеризуют данное поле. Так, например, рассматривая скалярное поле функции φ, мы ввели новый вектор $\operatorname{grad}\varphi$, который наглядно показывает характер изменения φ. Точно так же, рассматривая поле вектора $\mathbf{a}$, мы ввели новый скаляр $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и новый вектор $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, а также ввели понятие производной вектора по направлению и понятие градиента одного вектора по другому $(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a}$. Все только что указанные дифференциальные операции наряду с другими, которые мы рассматривали выше, являются в той или другой степени аналогом понятию производной в обыкновенном дифференциальном исчислении. Можно поэтому сказать, что до сих пор мы изучали дифференциальное исчисление в области векторных величин.

В настоящем параграфе мы будем решать задачу, аналогичную задаче интегрального исчисления. Иными словами, мы поставим себе задачу отыскания поля некоторого скаляра φ или вектора $\mathbf{a}$, когда известно поле некоторых дифференциальных операций от этих неизвестных величин.

Отметим, что в § 12 нами уже решена одна из задач такого рода: найти в некоторой области скалярную функцию φ, если для каждой точки этой области задан градиент этой функции, т. е. если нам известно, что

$$\operatorname{grad}\varphi = \mathbf{a} \tag{1}$$

где $\mathbf{a}$ — заданный вектор. Мы знаем, что для решения этой задачи необходимо, выбрав фиксированную точку M_0 и соединив произвольную переменную точку M с точкой M_0 кривой L, лежащей в нашей области, составить криволинейный интеграл

$$\varphi(M) = \int_{M_0}^{M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \tag{2}$$

Тогда, как было показано в § 12, функция (2) будет удовлетворять уравнению (1). По поводу этой задачи сделаем несколько замечаний.

Прежде всего заданный вектор $\mathbf{a}$ не может быть произвольным вектором. В самом деле, в силу того, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0$$

непременно должно быть

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \tag{3}$$

т. е. вектор $\mathbf{a}$ должен быть безвихревым.

Далее, криволинейный интеграл (2) может оказаться многозначным, а именно, зависящим от пути интегрирования M_0M. Однако это может случиться только в том случае, если та область, в которой мы рассматриваем вектор $\mathbf{a}$ (и в которой мы предполагаем как вектор $\mathbf{a}$, так и его первые частные производные непрерывными), является многосвязной. Действительно, если область задания вектора $\mathbf{a}$ односвязна и если M_0KM и M_0LM — два пути, расположенные в этой области и ведущие из точки M_0 в точку M, то мы, очевидно, имеем

$$\int_{M_0KM} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \int_{M_0LM} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0KM} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + \int_{ML M_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{M_0KMLM_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

ибо при пробегании пути M_0LM в противоположном направлении MLM_0 криволинейный интеграл меняет свой знак. Путь M_0KM можно непрерывным образом перевести в M_0LM, не выходя при этом из пределов нашей области. Пусть S — поверхность, образованная последовательными положениями M_0KM при только что указанном перемещении этого пути. Тогда по теореме Стокса и в силу (3) мы имеем

$$\oint_{M_0KMLM_0} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{a}\, dS = 0$$

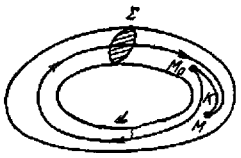
Отсюда и вытекает, что

$$\int_{M_0KM} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{M_0LM} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

Таким образом в случае односвязной области интеграл (2) не может зависеть от пути интегрирования.

Рассмотрим теперь двусвязную область, например, внутренность тора (фиг. 64). По самому определению двусвязной области, в ней можно провести такое сечение Σ, после которого область делается односвязной. В этой односвязной области интеграл (2) будет уже однозначным, обозначим его через

$$\varphi_0(M) = \int\limits_{M_0KM} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r}$$



Фиг. 64

где M_0KM есть какой-либо путь, соединяющий точки M_0 и M и лежащий в полученной односвязной области. Пусть теперь M_0LM — любой путь в нашей двусвязной области, например изображенный на фиг. 64. Тогда он может быть заменен следующим путем

$$M_0LMKM_0 + M_0KM$$

Обозначим циркуляцию вектора a по контуру M_0LMKM_0 через μ:

$$\oint\limits_{M_0LMKM_0} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \mu$$

Тогда мы, очевидно, получим, что

$$\int\limits_{M_0LM} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \mu + \int\limits_{M_0KM} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \varphi_0(M) + \mu$$

Заметим теперь, что циркуляция μ будет одна и та же для всех замкнутых контуров, лежащих в нашей двусвязной области, один и только один раз пересекающих сечение Σ в направлении, указанном на фиг. 64 стрелкой, ибо все такие контуры могут быть непрерывной деформацией переведены друг в друга, не выходя из пределов области. Контур M_0LM пересекает сечение Σ два раза в направлении, указанном стрелкой, и не пересекает этого сечения в обратном направлении, то, как легко убедиться, окажется, что

$$\int\limits_{M_0LM} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \varphi_0(M) + 2\mu$$

Наиболее общим выражением для криволинейного интеграла по пути M_0LM будет

$$\int\limits_{M_0}^{M} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \varphi_0(M) + n\mu \tag{4}$$

где n — целое число, положительное, отрицательное или нуль. Величина μ называется при этом циклической постоянной.

Если бы область была трехсвязной, то мы получили бы, что

$$\int\limits_{M_0}^{M} \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = \varphi_0(M) + n_1\mu_1 + n_2\mu_2 \tag{5}$$

где μ_1 и μ_2 — циклические постоянные, а n_1 и n_2 — целые числа. Конечно, в некоторых случаях циклические постоянные могут обращаться и в нуль.

Наконец, последнее замечание, которое мы сделаем относительно решения уравнения (1), таково. Общим решением уравнения (1) является

$$\varphi(M) = \int_{M_0}^{M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + C \tag{6}$$

где C — произвольная постоянная. В самом деле, составим разность

$$\psi(M) = \varphi(M) - \int_{M_0}^{M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$$

где φ — общее решение уравнения (1), тогда будем иметь

$$\operatorname{grad} \psi = \operatorname{grad} \varphi - \operatorname{grad} \int_{M_0}^{M} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{a} - \mathbf{a} = 0$$

Отсюда и вытекает, что

$$\psi = \text{const}$$

Задача 155. Пусть задано поле вектора a:

$$a_x = \frac{-4xy}{(x^2-y^2)^2 - 2(x^2-y^2)+1}, \qquad a_y = \frac{2(x^2-y^2-1)}{(x^2+y^2)^2 - 2(x^2-y^2)+1}, \qquad a_z = 0$$

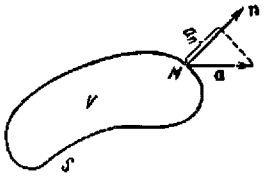
Выяснить, имеет ли уравнение $\operatorname{grad} \varphi = \mathbf{a}$ решение и, если имеет, то найти φ.

Ответ.

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{2y}{x^2+y^2-1}$$

Две циклические постоянные, обе равные 2π.

2. Основным содержанием этого параграфа будет решение задачи об определении вектора a, если известны его расхождение div a и его вихрь rot a.



Фиг. 65

Постараемся прежде всего выяснить, что именно нужно задать для того, чтобы можно было полностью определить вектор a.

Пусть мы имеем область V, ограниченную поверхностью S (фиг. 65).

Пусть во всех точках внутри этой области заданы расхождение и вихрь вектора a:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho(x, y, z) \tag{7}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(x, y, z) \tag{8}$$

Пусть, кроме того, во всех точках поверхности S известны значения нормальной составляющей вектора a:

$$a_n = f(M) \text{ на поверхности } S \tag{9}$$

Докажем, что условиями (7), (8) и (9) вектор a определяется единственным образом, т. е. что не может быть двух различных векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, которые удовлетворяли бы всем условиям (7), (8), (9).

В самом деле, допустим существование двух векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, для которых

$$\operatorname{div}\mathbf{a}_1 = \rho, \quad \operatorname{div}\mathbf{a}_2 = \rho \quad \text{внутри} \quad V$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{a}_1 = \boldsymbol{\omega}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\omega} \quad \text{внутри} \quad V$$

$$a_{1n} = f(M), \quad a_{2n} = f(M) \quad \text{на поверхности} \quad S$$

Составим разность векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$:

$$\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$$

Тогда вектор b будет очевидно удовлетворять следующим условиям:

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \operatorname{div}\mathbf{a}_1 - \operatorname{div}\mathbf{a}_2 = \rho - \rho = 0 \quad \text{внутри} \quad V$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{b} = \operatorname{rot}\mathbf{a}_1 - \operatorname{rot}\mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \text{внутри} \quad V$$

$$b_n = a_{1n} - a_{2n} = f(M) - f(M) = 0 \quad \text{на} \quad S$$

Так как $\operatorname{rot}\mathbf{b} = 0$, то b есть вектор потенциальный:

$$\mathbf{b} = \operatorname{grad}\varphi \tag{10}$$

Но тогда условие $\operatorname{div}\mathbf{b} = 0$ дает нам, что

$$\triangle\varphi = 0 \quad \text{внутри} \quad V \tag{11}$$

условие $b_n = 0$ на S приводит нас к равенству

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0 \quad \text{на} \quad S \tag{12}$$

Применим теперь формулу (18) § 17:

$$\int_V [\varphi\triangle\varphi + (\operatorname{grad}\varphi)^2]\, dV = \oint_S \varphi \frac{\partial\varphi}{\partial n}\, dS \tag{13}$$

Ввиду условий (11) и (12) это равенство дает нам, что

$$\int_V (\operatorname{grad}\varphi)^2\, dV = 0 \tag{14}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{grad}\varphi = 0 \tag{15}$$

т. е. по (10)

$$\mathbf{b} = 0 \tag{16}$$

Следовательно, векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, удовлетворяющие условиям (7), (8) и (9), не могут быть различными между собой:

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$$

При этом мы предполагаем как здесь, так и в дальнейшем, что область V может быть разложена на конечное число частей, в каждой из которых функции ρ и ω равномерно непрерывны, так же как и их частные производные. Точно так же и об искомом векторе $\mathbf{a}$ мы будем предполагать, что сам он всюду непрерывен, а его производные могут терпеть разрыв только на конечном числе поверхностей. При этих условиях мы, очевидно, имеем полное право применять формулу (13).

3. Итак, мы должны решить следующую задачу: найти вектор $\mathbf{a}$, удовлетворяющий системе уравнений

$$\begin{aligned} &\operatorname{div}\mathbf{a} = \rho(x, y, z) \text{ внутри } V \\ &\operatorname{rot}\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(x, y, z) \text{ внутри } V \\ &a_n = f(M) \text{ на поверхности } S \end{aligned} \tag{17}$$

Заметим, что эта система не всегда имеет решение. Для возможности решения функции $\rho(x, y, z)$, $\boldsymbol{\omega}(x, y, z)$ и $f(M)$ должны удовлетворять некоторым условиям. В самом деле, мы имеем следующие тождества

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\mathbf{a} = 0, \qquad \int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, dV = \oint_S a_n dS$$

Подставляя сюда вместо $\operatorname{rot}\mathbf{a}$, $\operatorname{div}\mathbf{a}$ и a_n их значения, даваемые формулами (17), мы приходим к условиям

$$\operatorname{div}\boldsymbol{\omega} = 0, \qquad \int_V \rho\, dV = \oint_S f(M)\, dS \tag{18}$$

которым необходимо должны удовлетворять функции ρ, $\boldsymbol{\omega}$ и f, для того чтобы система (17) могла иметь решение.

Мы будем решать нашу задачу в три приема. Сначала мы постараемся отыскать такой вектор $\mathbf{a}_1$, который удовлетворяет системе уравнений

$$\operatorname{div}\mathbf{a}_1 = \rho, \quad \operatorname{rot}\mathbf{a}_1 = 0 \tag{19}$$

Из последнего уравнения следует, что

$$\mathbf{a}_1 = \operatorname{grad}\varphi \tag{20}$$

а тогда из первого уравнения получаем, что

$$\Delta\varphi = \rho \tag{21}$$

Уравнение (21) носит название уравнения Пуассона. В случае ограниченной области нам достаточно удовлетворить этому уравнению только в точках области V. Однако, решив уравнение (21) для случая всего бесконечного пространства, мы получим одновременно и решение для любой ограниченной области. В самом деле, если нам известны значения ρ только в точках области V, то мы можем произвольно их задать

вне области V (например положить равными нулю). Решив уравнение (21) для всего бесконечного пространства, мы получим функцию φ, которая всюду, а в частности и в точках области V, удовлетворяет уравнению (21).

Итак, нам нужно будет решить уравнение Пуассона (21) для случая бесконечного пространства.

На втором этапе решения нашей задачи мы будем отыскивать такой вектор $\mathbf{a}_2$, который удовлетворяет скстеме уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{a}_2 = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a}_2 = \boldsymbol{\omega} \tag{22}$$

Из первого из этих уравнений следует, что

$$\mathbf{a}_2 = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{23}$$

Тогда из второго уравнения (22) получается, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$$

Применяя формулу (26) в § 17, найдем, что

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \triangle \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega} \tag{24}$$

Мы увидим, что, не нарушая общности, можно будет принять

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

Тогда уравнение (24) приводится к виду

$$\triangle \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} \tag{25}$$

Это векторное уравнение разбивается на три скалярных уравнения

$$\triangle A_x = -\omega_x, \quad \triangle A_y = -\omega_y, \quad \triangle A_z = -\omega_z \tag{26}$$

где ω_x, ω_y, ω_z — известные, а A_x, A_y, A_z — искомые функции. Уравнения (26) являются уравнениями Пуассона, так что мы сможем перенести те результаты, которые будут нами получены при решении уравнения (21), и на случай векторного уравнения Пуассона (25). Для случая бесконечного пространства вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$$

будет, очевидно, в силу (19) и (22) удовлетворять обоим уравнениям

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$$

В случае конечной области V мы вычислим значения нормальных составляющих векторов $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ на поверхности S:

$$a_{1n} = f_1(M) \qquad a_{2n} = f_2(M)$$

и составим затем функцию точки поверхности S:

$$f_3(M) = f(M) - f_1(M) - f_2(M)$$

Третьею частью решения нашей задачи будет тогда отыскание такого вектора $\mathbf{a}_3$, который удовлетворяет системе

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{a}_3 = 0 \quad \text{внутри } V \\ &\operatorname{rot} \mathbf{a}_3 = 0 \quad \text{внутри } V \\ &a_{3n} = f_3(M) \quad \text{на } S \end{aligned} \tag{27}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что

$$\mathbf{a}_3 = \operatorname{grad} \psi \tag{28}$$

а тогда из первого уравнения мы получим, что

$$\Delta\psi = 0 \tag{29}$$

так что ψ удовлетворяет уравнению Лапласа. Последнее из условий (27) в силу (28) приводит нас к равенству

$$\frac{\partial\psi}{\partial n} = f_3(M) \quad \text{на поверхности } S$$

Определение функции ψ, удовлетворяющей уравнению Лапласа, и у которой производная по нормали на заданной поверхности S принимает заданные значения, называется задачей Неймана. Эта задача имеет чрезвычайно важное значение в гидродинамике. В задаче 152 мы имели как раз гидродинамический пример, приводящий, как легко убедиться, к задаче Неймана.

Итак, на третьем этапе решения нашей задачи нам нужно будет решить задачу Неймана. Отметим попутно, что аналогичной задаче Неймана является так называемая задача Дирихле, состоящая в определении функции ψ, удовлетворяющей уравнению Лапласа (29) и принимающей заданные значения на поверхности S:

$$\psi = f(M) \quad \text{на поверхности } S$$

Мы имели пример решения задачи Дирихле в задаче 154, относящейся к области теории теплопроводности.

Легко теперь видеть, что в случае конечной области вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$$

будет удовлетворять всем уравнениям системы (17) и, в силу теоремы единственности, будет единственным решением этой системы.

4. Переходя к решению первой из трех стоящих перед нами задач, мы дадим сначала простое, имеющее физический характер, но в некоторой степени нестрогое решение этой задачи.

Итак, нам нужно найти поле потенциального вектора

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi \tag{30}$$

зная во всякой точке пространства его расхождение

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho(x, y, z) \tag{31}$$

где $\rho(x, y, z)$ — заданная непрерывная вместе со своими первыми производными (кроме, быть может, конечного числа поверхностей) функция. Как мы видели, эта задача эквивалентна решению уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi = \rho(x, y, z) \tag{32}$$

Заметим, что мы всегда в случае бесконечной области будем предполагать, что функция $\rho(x, y, z)$ очень быстро делается очень малой, когда расстояние $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ точки M от начала координат делается очень большим. А именно, мы будем предполагать, что при $R \to \infty$ величина $R^{2+\lambda}\rho$, где λ есть положительное число, лежащее между 0 и 1, остается ограниченной

$$|R^{2+\lambda}\rho| < A \quad \text{при } R \to \infty \tag{33}$$

где A — конечная величина $0 < \lambda < 1$.

В § 14 мы нашли решение рассматриваемой задачи в том частном случае, когда расхождение всюду равно нулю, за исключением n точек $M_1, M_2, \ldots, M_n$, в которых находятся источники с обильностями $e_1, e_2, \ldots, e_n$, причем для функции φ мы нашли выражение

$$\varphi_1(x, y, z) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{e_i}{4\pi r_i}$$

где r_i — расстояние от точки $M(x, y, z)$ до точки $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$, т. е.

$$r_i = \sqrt{(x - \xi_i)^2 + (y - \eta_i)^2 + (z - \zeta_i)^2}$$

Мы показали далее, что в этом случае поток вектора $\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi_1$ через всякую замкнутую поверхность S равен сумме обильностей тех источников, которые лежат внутри поверхности

$$\oint_S a_n\, dS = \sum{}' e_i$$

Чтобы подойти к решению нашей задачи, разобьем все пространство на малые объемы V_i, возьмем в каждом по точке $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ и поместим в M_i источник с обильностью $e_i = V_i\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$.

Тогда функция

$$\varphi_1(x, y, z) = -\sum \frac{\rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)}{4\pi r_i} V_i$$

даст приближенное решение задачи. Перейдем к пределу, устремив все объемы V_i к нулю; для φ получится выражение

$$\varphi(x, y, z) = -\int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{4\pi r} \tag{34}$$

В этом интеграле

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

и интегрировать надо по ξ, η и ζ. Покажем, что функция (34) дает решение задачи.

В самом деле, если $\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$, то поток вектора через некоторую поверхность будет

$$\oint_S a_n\,dS = \lim \sum{}' e_i = \lim \sum{}' \rho(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) V_i = \int_V \rho\,dV$$

Но по теореме Гаусса — Остроградского

$$\oint_S a_n\,dS = \int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\,dV$$

Следовательно,

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\,dV = \int_V \rho\,dV$$

Беря за V бесконечно малый объем, найдем

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho$$

что и требовалось доказать.

Заметим, что при сделанных предположениях относительно функции $\rho(x, y, z)$ интеграл (34) сходится. На выяснении этого обстоятельства мы остановимся подробнее потом.

Итак, при сделанных предположениях относительно ρ, решением уравнения Пуассона

$$\nabla^2\varphi = \rho(x, y, z)$$

а вместе с тем и поставленной выше задачи является:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,dV}{r}$$

Полученное выражение

$$\int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,dV}{r}$$

носит название объемного или Ньютонова потенциала и имеет следующее физическое значение.

Если в начале координат находится масса равная m, и если в точке $M(\underline{r})$ находится другая масса, равная m', то, при надлежащем выборе единиц массы, длины и времени, сила притяжения второй массы к первой будет, согласно закону Ньютона представляться по величине и направлению выражением

$$\mathbf{F} = -\frac{mm'\mathbf{r}}{r^3}$$

Эту силу можно, как легко убедиться, представить в виде

$$\mathbf{F} = \operatorname{grad}\frac{mm'}{r}$$

Итак, сила притяжения по закону Ньютона имеет потенциал, равный

$$\Psi = \frac{mm'}{r}$$

Если притягиваемая масса равна единице, то для потенциала получается выражение

$$\Psi = \frac{m}{r}$$

Пусть теперь массы распределены непрерывно с плотностью ρ, тогда в элементе объема $dV = d\xi\, d\eta\, d\zeta$ будет находиться масса $\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV$, и происходящий от этой элементарной массы потенциал в точке $M(x, y, z)$ будет равен

$$\Psi(x, y, z) = \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r}$$

где

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

Производя интегрирование по всем массам, мы и получаем для потенциала притягивающих масс выражение

$$\Psi(x, y, z) = \int \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{35}$$

Итак grad Ψ представляет силу, с которой массы, распределенные по всему пространству с плотностью ρ, притягивают единичную массу находящуюся в точке (x, y, z).

5. Теперь мы дадим более строгое решение задачи, поставленной в предыдущем пункте, для чего нам потребуется, однако, развить ряд формул, имеющих чрезвычайно большую важность.

В предыдущем пункте была выяснена важная роль, которую играет функция $\frac{1}{r}$, где r есть расстояние между двумя точками $P(x, y, z)$ и $Q(\xi, \eta; \zeta)$:

$$r = PQ = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \tag{36}$$

Заметим, прежде всего, что эта функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \frac{1}{r} = 0 \tag{37}$$

Для доказательства достаточно применить формулу (41) § 18, выбрав точку $Q(\xi, \eta, \zeta)$ за начало сферических координат. Точнее было бы писать

$$\Delta_P \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

чтобы отметить, что при дифференцировании считается переменной точка P, точка же Q остается постоянной. Конечно, справедлива и другая формула

$$\Delta_Q \frac{1}{r} = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}\left(\frac{1}{r}\right) + \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2}\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

в которой дифференцирование производится по ξ, η, ζ, а точка P считается неизменной.

Возьмем теперь формулу Грина (20) § 17:

$$\int_V (\varphi \triangle \psi - \psi \triangle \varphi)\, dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS \tag{38}$$

и применим ее к функции $\varphi(\xi, \eta, \zeta)$, про которую мы, как всегда, будем предполагать, что она непрерывна вместе с первыми производными и что ее вторые производные могут терпеть разрыв только на конечном числе поверхностей. За функцию же ψ мы примем

$$\psi = \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}}$$

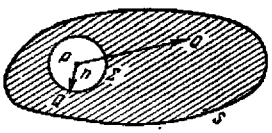
причем x, y, z мы рассматриваем, как параметры, переменными же считаем ξ, η, ζ, так что в формуле (38) элемент объема есть

$$dV = d\xi\, d\eta\, d\zeta.$$

Теперь нам необходимо различить два случая. Первым из них будет тот, когда точка $P(x, y, z)$ лежит *вне* объема V. В этом случае функция $\frac{1}{r}$, рассматриваемая как функция точки $Q(\xi, \eta, \zeta)$, будет непрерывной и будет удовлетворять уравнению (37). Поэтому формула (38) дает нам

$$-\int_V \frac{\triangle \varphi}{r}\, dV = \oint_S \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right) dS \tag{39}$$

Рассмотрим теперь второй случай, когда точка P лежит *внутри* объема V. В этом случае мы не имеем права применять формулу (38), так как функция $\frac{1}{r}$, рассматриваемая как функция переменной точки Q, обращается в бесконечность при совпадении Q с P.



Фиг. 66

Чтобы избежать этого неприятного обстоятельства, мы выделим точку P малой сферой Σ с центром в точке P и с радиусом ε, который мы затем устремим к 0 (фиг. 66). Применим теперь формулу (38) не к области V, а к области V_ε, получающейся из V путем выкидывания сферы радиуса ε с центром в точке P.

Так как объем V_ε ограничен не только поверхностью S, но и поверхностью Σ, то поверхностный интеграл в формуле (38) будет теперь состоять из двух частей.

К объему V формулу (38) применять можно, так как для него точка P является уже внешней (точка P лежит внутри поверхности S, но вне объема V_ε, так как она вместе со своей окрестностью не принадлежит этому объему).

Пользуясь опять формулой (37), получим

$$-\int\limits_{V_\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}dV=\oint\limits_{S}\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS+\oint\limits_{\Sigma}\left(\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\Sigma \qquad (40)$$

Теперь устремим ε к нулю и посмотрим, во что перейдет в пределе полученная формула. Отыщем прежде всего

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma$$

так как на сфере Σ мы имеем $r=\varepsilon$, а площадь всей сферы равна $4\pi\varepsilon^2$, то

$$\left|\oint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma\right|<\frac{1}{\varepsilon}4\pi\varepsilon^2\max_{\Sigma}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|=4\pi\varepsilon\max_{\Sigma}\left|\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right|$$

и значит

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{\Sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\Sigma=0 \qquad (41)$$

Чтобы найти предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}d\Sigma$$

заметим, что когда точка Q находится на сфере Σ, то внешняя к объему V_ε нормаль к Σ будет направлена противоположно направлению радиуса вектора r (отложенного от точки P к точке Q: $\mathbf{r}=\overline{PQ}$).

Поэтому

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}=-\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}=\frac{1}{r^2}$$

и так как на поверхности Σ мы имеем $r=\varepsilon$, то мы находим, что

$$\oint\limits_{\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}d\Sigma=\oint\limits_{\Sigma}\frac{1}{\varepsilon^2}\varphi d\Sigma$$

По теореме о среднем это выражение равно

$$\oint\limits_{\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}d\Sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}(\varphi)_{Q_1}4\pi\varepsilon^2=4\pi(\varphi)_{Q_1}$$

где Q_1 есть некоторая точка сферы Σ, и φ_{Q_1} означает значение функции φ в точке Q_1. Когда $\varepsilon\to 0$, то точка $Q_1\to P$, и поэтому получаем, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\oint\limits_{\Sigma}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}d\Sigma=4\pi\varphi_P \qquad (42)$$

Наконец, интеграл в левой части формулы (40) в пределе переходит в

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_{V_\varepsilon}\frac{\Delta\varphi}{r}dV=\int\limits_{V}\frac{\Delta\varphi}{r}dV$$

поэтому из формулы (40) путем предельного перехода $\varepsilon \to 0$ и простых алгебраических преобразований мы выводим формулу

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{\Delta\varphi}{r}dV + \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\varphi dS \tag{43}$$

Первый член правой части называется, как мы знаем, о б ъ е м н ы м п о т е н ц и а л о м; интеграл типа

$$\int_S \frac{\sigma(\xi, \eta, \zeta)}{r}dS$$

носит название п о т е н ц и а л а п р о с т о г о с л о я, наконец, интеграл типа

$$\int_S \mu(\xi, \eta, \zeta)\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS$$

носит название п о т е н ц и а л а д в о й н о г о с л о я. Таким образом формула (43) дает представление любой функции φ (непрерывной вместе со своими первыми и вторыми производными) в виде суммы трех потенциалов: объемного, простого слоя и двойного слоя.

Если при $r \to \infty$, т. е. при беспредельном удалении точки на бесконечность, функция φ стремится к нулю и притом так, что на сфере S_R радиуса R с центром в начале координат выполняются неравенства

$$|\operatorname{grad}\varphi| < \frac{K}{R^{1+\lambda}}, \qquad |\varphi| < \frac{K}{R^{\lambda}} \tag{44}$$

где λ — есть некоторое положительное число, то формула (43) принимает более простой вид

$$\varphi_P = -\frac{1}{4\pi}\int_\infty \frac{\Delta\varphi}{r}dV \tag{45}$$

В самом деле, примем в этом случае за S сферу S_R радиуса R с центром в начале координат и устремим затем R к бесконечности. Тогда, так как при неподвижной точке P мы, очевидно, имеем, что

$$\lim_{R\to\infty}\frac{r}{R} = 1$$

то, как легко убедиться,

$$\left|\oint_{S_R}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS\right| < \frac{4\pi R^2 K}{rR^{1+\lambda}}, \qquad \left|\oint_{S_R}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS\right| < \frac{4\pi R^2 K}{r^2 R^{\lambda}}$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{S_R}\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS = \lim_{R\to\infty}\oint_{S_R}\varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS = 0$$

Замечая еще, что

$$\lim_{R\to\infty}\int_V \frac{\Delta\varphi}{r}dV = \int_\infty \frac{\Delta\varphi}{r}dV$$

легко выведем из (43) формулу (45).

Возвратимся опять к формуле (43) и предположим теперь, что функция φ есть функция, удовлетворяющая в области V уравнению Лапласа:

$$\triangle\varphi = 0, \tag{46}$$

Такие функции называются гармоническими (при этом предполагается, конечно, что функция φ непрерывна вместе с ее первыми и вторыми производными). В этом случае в формуле (43) пропадает объемный потенциал, и мы получаем представление гармонической функции

$$\varphi_P = \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\oint\limits_S \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\,dS \tag{47}$$

в виде суммы потенциалов простого и двойного слоя.

Эта формула полностью определяет значение функции φ внутри области V, если на границе этой области известны значения функции φ и ее нормальной производной.

Однако, обычно бывают известны или значения только самой функции на поверхности S (задача Дирихле) или же только значения ее нормальной производной (задача Неймана).

Таким образом знание только формулы (47) не позволяет нам решить ни задачи Дирихле, ни задачи Неймана.

Отметим здесь, что задание функции φ на граничной поверхности S, области V полностью определяет гармоническую функцию φ внутри этой области. Доказательство совершенно аналогично доказательству теоремы единственности в п. 2.

В самом деле, если φ_1 и φ_2 — две гармонические в области V функции (так что $\triangle\varphi_1 = 0$, $\triangle\varphi_2 = 0$), принимающие на поверхности S одинаковые граничные значения (так что $\varphi_1 = \varphi_2$ на S), то функция $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ будет гармоническая функция (ибо $\triangle\varphi = 0$ внутри V), для которой на поверхности S окажется $\varphi = 0$. Но тогда из уравнения (13) вытечет равенство (14), откуда, в свою очередь, будет следовать, что $\operatorname{grad}\varphi = 0$ и значит $\varphi = \text{const}$. Но так как на поверхности S функция φ обращается в 0, то ясно, что $\varphi = 0$ всюду внутри V. Итак, внутри V будет $\varphi_1 = \varphi_2$.

Точно так же задание нормальной производной $\partial\varphi/\partial n$ на поверхности S определяет гармоническую функцию φ с точностью до постоянной. В самом деле, если φ_1 и φ_2 — две гармонические функции, имеющие на поверхности S одинаковые нормальные производные, то функция $\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$ есть гармоническая функция, для которой $\partial\varphi/\partial n = 0$ на поверхности S. Но тогда из формулы (13) следует (14), а из последней вытекает, что $\operatorname{grad}\varphi = 0$ и значит $\varphi = \text{const}$. Итак, $\varphi_1 - \varphi_2 = \text{const}$.

Заметим, наконец, что *для случая всего бесконечного пространства, гармоническая функция φ, удовлетворяющая на бесконечности условиям (44), тождественно обращается в нуль.*

В самом деле, при выполнении условий (44) справедливо равенство (45), из которого следует, что $\varphi_P = 0$, ибо гармоническая функция φ удовлетворяет уравнению $\triangle\varphi = 0$.

6. Возвращаемся теперь к нашей основной задаче. Нам нужно найти потенциальный вектор

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$$

расхождение которого всюду известно и удовлетворяет указанным в начале п. 4 условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho$$

Иными словами, нам нужно решить уравнение Пуассона

$$\Delta\varphi = \rho(x, y, z) \tag{48}$$

Если это уравнение имеет решение и притом удовлетворяющее условиям (44), то согласно формуле (45), этим решением может быть только Ньютонов потенциал

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,dV}{r} = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,d\xi\,d\eta\,d\zeta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}} \tag{49}$$

Но так как мы не знаем наперед, имеет ли уравнение (48) решение, то нужно проверить, что функция (49) действительно удовлетворяет уравнению (48).

Заметим прежде всего, что если мы имеем Ньютонов потенциал, распространенный по некоторой области V, конечной или бесконечной

$$\Psi(x, y, z) = \int_{V}\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,dV}{r} \tag{50}$$

то в точках вне объема V выполняется уравнение Лапласа

$$\Delta\Psi = 0 \tag{51}$$

В самом деле, если точка P лежит вне объема V, то r в интеграле (50) не обращается в нуль, и, следовательно, можно производить дифференцирование под знаком интеграла по x, y, z; в результате получим

$$\Delta_P\Psi = \int_{V}\rho(\xi, \eta, \zeta)\,\Delta_P\frac{1}{r}\,dV$$

откуда, в силу (37), вытекает (51).

Рассмотрим теперь тот случай, когда точка P лежит внутри объема V, причем предположим, что функция $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ непрерывна вместе со своими первыми частными производными в этом объеме V.

Вычислим, чему равно $\Delta_P\Psi = \operatorname{div}\operatorname{grad}\Psi$. Составляем прежде всего

$$\operatorname{grad}_P\Psi = \int_{V}\rho\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}\,dV \tag{52}$$

причем заметим, что поскольку переменной считается точка P, функция ρ при указанном дифференцировании принимается за постоянную.

Если мы будем считать радиус-вектор $\mathbf{r}$ направленным от точки $Q(\xi, \eta, \zeta)$ к точке $P(x, y, z)$:

$$\mathbf{r} = \overline{QP}$$

то мы будем иметь

$$\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\overline{QP}}{r^3} \tag{53}$$

Заметим теперь, что существует простая формула

$$\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \tag{54}$$

в самом деле, в правой части этой формулы мы считаем в r переменной уже точку Q, а не точку P, и, следовательно, точки P и Q должны у нас поменяться местами, т. е. мы должны иметь

$$\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} = -\frac{\overline{PQ}}{r^3}$$

и так как $\overline{PQ} = -\overline{QP}$, то и получается формула (54).

По поводу формулы (52), которую можно, в силу (53), написать в виде

$$\operatorname{grad}_P \Psi = -\int_V \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} dV \tag{55}$$

необходимо сделать следующее замечание.

Подынтегральная функция в интеграле правой части обращается при $r = 0$ в бесконечность, так что этот интеграл принадлежит к числу несобственных интегралов; однако, этот интеграл сходится, так как подынтегральная функция будет при $r \to 0$ бесконечно большой второго порядка, а известно, что объемные интегралы сходятся, если подынтегральная функция обращается в бесконечность порядка ниже третьего (считая r бесконечно малой первого порядка).

Однако дальнейших дифференцирований по точке P под знаком интеграла мы уже не имеем права производить, так как при этом подынтегральная функция сделается бесконечно большой третьего порядка, и интегралы перестанут сходиться.

Мы поступим иначе. В силу (54) перепишем формулу (52) следующим образом

$$\operatorname{grad}_P \Psi = -\int_V \rho \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} dV$$

Применим теперь формулу

$$\varphi \operatorname{grad}_Q \psi = \operatorname{grad}_Q \varphi\psi - \psi \operatorname{grad}_Q \varphi$$

положив в ней $\varphi = \rho$, $\psi = \frac{1}{r}$; в результате получим

$$\operatorname{grad}_P \Psi = -\int_V \operatorname{grad}_Q \frac{\rho}{r} dV + \int_V \frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho \, dV$$

Заметим затем, что по обобщенной формуле Гаусса-Остроградского

$$\int\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{grad}_Q \frac{\rho}{r}\, dV = \oint\limits_S \frac{\rho \mathbf{n}}{r}\, dS + \oint\limits_\Sigma \frac{\rho \mathbf{n}}{r}\, d\Sigma$$

и в пределе при $\varepsilon \to 0$

$$\int\limits_V \operatorname{grad}_Q \frac{\rho}{r}\, dV = \oint\limits_S \frac{\rho \mathbf{n}}{r}\, dS$$

Поэтому мы получаем представление grad Ψ:

$$\operatorname{grad}_P \Psi = -\oint\limits_S \frac{\rho \mathbf{n}}{r}\, dS + \int\limits_V \frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho\, dV$$

в виде суммы потенциала простого слоя и объемного потенциала. Теперь мы можем составить $\triangle \Psi$:

$$\triangle_P \Psi = \operatorname{div}_P \operatorname{grad}_P \Psi = -\oint\limits_S \operatorname{div}_P \frac{\rho(Q)\, \mathbf{n}(Q)}{r}\, dS + \int\limits_V \operatorname{div}_P \left(\frac{1}{2} \operatorname{grad}_Q \rho\right) dV$$

Применим затем формулу

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \cdot \mathbf{a} \tag{56}$$

При этом мы должны векторы $\rho(Q)\, \mathbf{n}(Q)$ и $\operatorname{grad}_Q \rho$ считать постоянными (так как они не зависят от точки P); поэтому

$$\operatorname{div}_P \frac{\rho \mathbf{n}}{r} = \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \cdot \rho \mathbf{n} = -\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \cdot \rho \mathbf{n} = -\rho \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}$$

$$\operatorname{div}_P \left(\frac{1}{r} \operatorname{grad}_Q \rho\right) = \operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \cdot \operatorname{grad}_Q \rho = -\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \cdot \operatorname{grad}_Q \rho$$

В результате мы получаем

$$\triangle_P \Psi = \oint\limits_S \rho \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, dS - \int\limits_V \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \cdot \operatorname{grad}_Q \rho\, dV \tag{57}$$

Чтобы найти значение правой части этой формулы, мы должны провести рассуждение, совершенно аналогичное тому, которое было проделано при выводе формулы (43), но только должны исходить не из второй формулы Грина (38), а из первой формулы Грина

$$\int\limits_V (\varphi \triangle \psi + \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \psi)\, dV = \oint\limits_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS$$

Полагая в этой формуле $\psi = \frac{1}{r}$ и применяя ее к объему V_ε (фиг. 66), мы найдем формулу (при этом точка P считается неподвижной, так что все дифференцирования происходят по точке Q):

$$\int\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{grad} \varphi \cdot \operatorname{grad} \frac{1}{r}\, dV = \oint\limits_S \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, dS + \oint\limits_\Sigma \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\, dS$$

Производя переход к пределу при $\varepsilon \to 0$ и пользуясь формулой (42), найдем, что

$$4\pi\varphi_P = \int_V \operatorname{grad}_Q \varphi \cdot \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\, dV - \oint_S \varphi \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\, dS \tag{58}$$

Полагая в этой формуле $\varphi = \rho$, мы и получим из (57) формулу

$$\triangle_P \Psi = -4\pi\rho_P \tag{59}$$

определяющую значение $\triangle\Psi$ в точке P, лежащей внутри объема V.

В случае функции (49) областью V является все бесконечное пространство. Возьмем любую точку P, в окрестности которой функция ρ непрерывна вместе со своими первыми частными производными; тогда пусть V_1 — объем, принадлежащий этой окрестности и заключающий точку P, а V_2 — вся остальная часть пространства. Вводя обозначения

$$\Psi_1(x, y, z) = \int_{V_1} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r}, \qquad \Psi_2(x, y, z) = \int_{V_2} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r}$$

будем иметь $\triangle_P \Psi_1 = -4\pi\rho_P$ в силу (59) и $\triangle_P \Psi_2 = 0$ в силу (51). Складывая два полученных равенства, найдем формулу

$$\triangle\varphi = \rho$$

что и требовалось доказать.

Итак вектор

$$\mathbf{a}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\operatorname{grad}_P \int_\infty \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{60}$$

является решением системы уравнений

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{a} = \rho \tag{61}$$

7. Переходим теперь к нашей второй задаче: решению системы

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \tag{62}$$

причем, конечно, предполагается, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет условию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$$

Кроме того, мы наложим на вектор $\boldsymbol{\omega}$ следующие ограничения: вектор $\boldsymbol{\omega}(x, y, z)$ есть непрерывная вместе со своими первыми частными производными функция всюду, за исключением, быть может, конечного числа поверхностей. *На этих поверхностях разрыва нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{\omega}$ должна оставаться непрерывной, и только касательная составляющая вектора $\boldsymbol{\omega}$ может терпеть разрыв.* На бесконечности мы потребуем от вектора $\boldsymbol{\omega}$ выполнения условия, аналогичного условию (33) для функции ρ, а именно

$$|R^{2+\lambda}\boldsymbol{\omega}| < A \quad \text{при} \quad R \to \infty \tag{63}$$

где $0 < \lambda < 1$, $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ есть расстояние точки M, в которой берется значение $\boldsymbol{\omega}$, до начала координат и A — конечная величина.

Из первого из уравнений (62) следует, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{64}$$

где вектор A, носящий название *векторного потенциала*, подлежит определению. Заметим теперь, что, не нарушая общности, можно считать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{65}$$

В самом деле, пусть мы нашли вектор $\mathbf{A}_1$, такой, что $\mathbf{a} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1$, но что $\operatorname{div} \mathbf{A}_1 \neq 0$. Положим тогда, что

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 + \operatorname{grad} \psi$$

Ясно тогда, что опять будет

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} \mathbf{A}_1 = \mathbf{a}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{A}_1 + \operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{div} \mathbf{A}_1 + \Delta\psi$$

и можно подобрать ψ так, чтобы

$$\Delta\psi = -\operatorname{div} \mathbf{A}_1$$

тогда, очевидно, будут удовлетворены как уравнение (64), так и уравнение (65). Второе уравнение системы (62) дает теперь

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$$

или в силу формулы (26) § 17

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A} = \boldsymbol{\omega}$$

а в силу формулы (65)

$$\Delta \mathbf{A} = -\boldsymbol{\omega} \tag{66}$$

Таким образом, для определения A получилось векторное уравнение Пуассона, равносильное трем скалярным

$$\Delta A_x = -\omega_x, \quad \Delta A_y = -\omega_y, \quad \Delta A_z = -\omega_z$$

решения которых даются в силу (49) формулами:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \frac{\omega_x(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r}, \quad A_y = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \frac{\omega_y(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r}, \quad A_z = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \frac{\omega_z(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r}$$

или, в векторной форме,

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \frac{\boldsymbol{\omega}(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{67}$$

Проверим теперь, что найденный нами вектор A удовлетворяет условию (65). Вычисляем для этого

$$\operatorname{div}_P \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{div}_P \int_\infty \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)\, dV}{r} = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \operatorname{div}_P \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r} dV \tag{68}$$

Применим теперь формулу (56), положив в ней $\varphi = \frac{1}{r}$, $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(Q)$.

Так как переменной точкой считается P, то вектор $\mathbf{a}$ должен считаться постоянным и значит $\operatorname{div}_P \mathbf{a} = 0$; поэтому получим

$$\operatorname{div}_P \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r} = \boldsymbol{\omega}(Q) \cdot \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}$$

В силу формулы (54) эта формула принимает вид

$$\operatorname{div}_P \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r} = -\boldsymbol{\omega}(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \tag{69}$$

Применим теперь формулу (56), но в обратную сторону, а именно

$$\mathbf{a} \cdot \operatorname{grad}_Q \varphi = \operatorname{div}_Q (\varphi \mathbf{a}) - \varphi \operatorname{div}_Q \mathbf{a}$$

положив в ней $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}(Q)$, $\varphi = \frac{1}{r}$ и считая уже переменной точку Q.

Тогда получим, замечая, что по условию $\operatorname{div}_Q \boldsymbol{\omega}(Q) = 0$,

$$\boldsymbol{\omega}(Q) \cdot \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} = \operatorname{div}_Q \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r}$$

Сравнение с формулой (69) приводит нас к равенству

$$\operatorname{div}_P \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r} = -\operatorname{div}_Q \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r}$$

а тогда из (68) получается, что

$$\operatorname{div}_P \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int_\infty \operatorname{div}_Q \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r}\, dV \tag{70}$$

Нам нужно вычислить этот интеграл по всему бесконечному пространству. Но вычислим его сначала по объему V_R, заключенному внутри сферы S_R очень большого радиуса R; по формуле Гаусса-Остроградского имеем

$$\int_{V_R} \operatorname{div}_Q \frac{\boldsymbol{\omega}}{r}\, dV = \oint_{S_R} \frac{\omega_n}{r}\, dS \tag{71}$$

(при этом, как всегда, нужно предварительно выделить точку P сферой Σ радиуса ε и затем устремить ε к нулю). По поводу этой формулы сделаем следующее замечание. Формулу Гаусса-Остроградского

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \oint_S a_n dS \tag{72}$$

мы вывели только для того случая, когда вектор $\mathbf{a}$ и его производные непрерывны внутрв объема V. Но если объем V можно разбить на конечное число областей $V_1, V_2, \ldots, V_k$, ограниченных поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_k$, в каждой из которых вектор $\mathbf{a}$ и его производные непрерывны, то мы, очевидно, будем иметь

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \int_{V_1} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV + \ldots + \int_{V_k} \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \oint_{S_1} a_n dS + \ldots + \oint_{S_k} a_n dS \tag{73}$$

Если Σ — поверхность разрыва, лежащая внутри V, то в сумму поверхностных интегралов (73) каждая часть такой поверхности разрыва войдет дважды: один раз как граница области V_i, другой раз как граница смежной области V_j, причем направления нормалей для этих двух областей будут взаимно противоположны; в случае непрерывности нормальной к поверхности разрыва составляющей вектора a поверхностные интегралы по всем поверхностям разрыва, лежащим внутри V, сократятся, и формула (73) перейдет в (72).

Возвращаясь к формуле (71), заметим, что, по условию, на поверхности сферы $S_R\omega_n$ есть малая величина порядка $\frac{1}{R^{2+\lambda}}$, $\frac{1}{r}$ есть величина порядка $\frac{1}{R}$, поверхность сферы равна $4\pi R^2$, следовательно, весь интеграл есть малая величина порядка $\frac{1}{R^{1+\lambda}}$ и стремится к 0, когда R стремится к бесконечности, поэтому распространенный по всему пространству интеграл будет равен нулю:

$$\int_{\infty} \operatorname{div}_Q \frac{\omega}{r}\, dV = 0$$

и значит

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$$

Итак, решением системы уравнений (62) является

$$\mathbf{a} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_P \int_{\infty} \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{74}$$

8. Если нам задано во всем бесконечном пространстве расхождение вектора a и его вихрь

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega} \tag{75}$$

то вектор a будет, очевидно, определяться формулой

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A} \tag{76}$$

где

$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r}, \qquad \mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_{\infty} \frac{\boldsymbol{\omega}(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{77}$$

При этом мы предполагаем функции ρ и $\boldsymbol{\omega}$ непрерывными и ограниченными вместе с их первыми производными во всем пространстве, за исключением разве лишь конечного числа поверхностей.

На этих поверхностях вектор $\boldsymbol{\omega}$ может терпеть разрыв только в касательной своей составляющей, нормальная же его составляющая должна оставаться непрерывной. Функция $\boldsymbol{\omega}$ должна удовлетворять еще условию $\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0$. Мы предполагаем далее, что функции ρ и $\boldsymbol{\omega}$ во всех точках пространства удовлетворяют неравенствам

$$|\rho R^{2+\lambda}| < K, \qquad |\boldsymbol{\omega} R^{2+\lambda}| < K \tag{78}$$

где $0 < \lambda < 1$, K — конечное число, а $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}$ есть расстояние точки, в которой берутся значения ρ и $\boldsymbol{\omega}$ до начала координат.

Докажем теперь, что найденное нами решение (76) системы (75) есть **единственное** решение этой системы, удовлетворяющее следующему условию на бесконечности

$$|aR^{1+\lambda}| < L \qquad \text{при } R \to \infty \tag{79}$$

где L есть конечное число.

Сначала докажем, что не может быть двух решений системы (75), удовлетворяющих условию (79). В самом деле пусть $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ — два решения системы (75) и пусть оба эти решения удовлетворяют условию (79). Составим разность $\mathbf{b} = \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$. Тогда из (75) ясно, что во всем бесконечном пространстве

$$\operatorname{div} \mathbf{b} = 0, \qquad \operatorname{rot} \mathbf{b} = 0$$

Из последнего уравнения видно, что

$$\mathbf{b} = \operatorname{grad} \psi$$

а из первого, что

$$\Delta\psi = 0$$

Далее из (79) находим, что

$$|\operatorname{grad} \psi| < \frac{2L}{R^{1+\lambda}} \tag{80}$$

при всех достаточно больших R. Возьмем теперь любые две точки M и M', лежащие на радиусе из начала координат; тогда мы будем иметь

$$\psi(M') - \psi(M) = \int_M^{M'} \operatorname{grad} \psi \cdot d\mathbf{r} = \int_M^{M'} \frac{\partial \psi}{\partial r}\, dr \tag{81}$$

причем в силу того, что при больших R,

$$\left|\frac{\partial \psi}{\partial r}\right| < \frac{2L}{r^{1+\lambda}}$$

интеграл в правой части предыдущей формулы будет сходиться, если $M' \to \infty$. Итак, функция ψ имеет на бесконечности определенное значение. Но ведь вектор $\mathbf{b} = \operatorname{grad} \psi$ не изменится, если мы значения функции ψ всюду изменим на одно и то же число. Введем поэтому вместо ψ другую функцию

$$\bar{\psi}(M) = \psi(M) - \psi(\infty)$$

Тогда опять будет

$$\mathbf{b} = \operatorname{grad} \bar{\psi}, \qquad \Delta\bar{\psi} = 0, \qquad |\operatorname{grad} \bar{\psi}| < \frac{2L}{R^{1+\lambda}} \tag{82}$$

Наконец, из формулы (81) при $M' = \infty$ вытекает, что

$$|\bar{\psi}(M)| \leqslant \int_R^{\infty} \frac{2L\,dr}{r^{1+\lambda}} = \frac{2L\lambda}{R^{\lambda}} \tag{83}$$

Но в силу сказанного в конце п. 5, из условий (82) и (83) вытекает, что $\bar{\psi} \equiv 0$ и следовательно $\mathbf{b} = 0$, т. е. $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$, что и доказывает единственность решения (76).

Докажем теперь, что вектор a, определенный формулами (76) и (77), удовлетворяет условию (79). Прежде всего, мы имеем

$$\operatorname{grad}_P \varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\, r}{r^3}\, dV$$

как это следует из формулы (55). Вычислим далее

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot}_P \int_\infty \frac{\boldsymbol{\omega}(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \operatorname{rot}_P \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r}\, dV$$

Применим теперь формулу

$$\operatorname{rot}(\psi \mathbf{u}) = \psi \operatorname{rot} \mathbf{u} + \operatorname{grad} \psi \times \mathbf{u}$$

положив в ней $\psi = \frac{1}{r}$, $\mathbf{u} = \boldsymbol{\omega}(Q)$, причем заметим, что, поскольку дифференцирование производится по точке P, а вектор $\boldsymbol{\omega}(\xi, \eta, \zeta)$ от точки P не зависит, этот вектор должен считаться постоянным. Итак,

$$\operatorname{rot}_P \frac{\boldsymbol{\omega}(Q)}{r} = \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times \boldsymbol{\omega}(Q) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \times \boldsymbol{\omega}(Q)$$

В результате мы получаем, что

$$\mathbf{a}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_\infty \frac{\rho(Q)\, \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega}(Q) \times \mathbf{r}}{r^3}\, dV \tag{84}$$

Принимая теперь во внимание условия (78), легко выведем, что

$$|\mathbf{a}(x, y, z)| < \frac{K}{2\pi} \int_\infty \frac{1}{R^{2+\lambda} r^2}\, dV \tag{85}$$

где

$$R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}, \quad r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2, \quad dV = d\xi\, d\eta\, d\zeta$$

Обозначим расстояние точки $P(x, y, z)$ до начала координат, т. е. $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, через u и заметим, что интеграл в правой части (85), очевидно, может зависеть только от u:

$$\int_\infty \frac{1}{R^{2+\lambda} r^2}\, dV = f(u) \tag{86}$$

Возьмем на радиусе OP точку P', отстоящую от начала координат O на расстоянии, равном единице. Для точки P' мы имеем

$$\int_\infty \frac{1}{R^{2+\lambda} r'^2}\, dV' = f(1) \tag{87}$$

Сопоставим теперь всякому элементу объема dV интеграла (86) элемент объема dV', получающийся из dV преобразованием подобия, переводящим точку P в P'. Ясно, что тогда окажется

$$OP = u \cdot OP', \quad dV = u^3 dV', \quad R = uR', \quad r = ur'$$

и, следовательно,

$$f(u) = \int_{\infty} \frac{1}{R^{2+\lambda} r^{2}} dV = \frac{u^3}{u^{2+\lambda} u^2} \int_{\infty} \frac{1}{R'^{2+\lambda} r'^{2}} dV' = \frac{f(1)}{u^{1+\lambda}}$$

Итак,

$$|\mathbf{a}(x, y, z)| < \frac{Kf(1)}{2\pi u^{1+\lambda}}$$

а это и есть то неравенство (79), которое мы хотели доказать.

Итак, найденное нами решение есть единственное, удовлетворяющее условию (79).

Если этого условия не поставить, то решений системы (75) получится бесконечно много. Например система

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$$

имеет такие решения:

$$\mathbf{a} = \text{const}, \quad \mathbf{a} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}, \quad \mathbf{a} = x\mathbf{j} + y\mathbf{i} \text{ и т. д.}$$

Но, конечно, все эти решения не удовлетворяют условию (79).

Заметим, что в формуле (76) первый вектор справа есть потенциальный, а второй — соленоидальный. Таким образом, как следствие полученных результатов, мы нашли возможность *разложения вектора* **a** *на сумму двух векторов, из которых один будет потенциальным, а другой — соленоидальным.*

9. Переходим к решению третьей задачи, поставленной нами выше в п. 3. Эта задача состоит в отыскании вектора **a**, удовлетворяющего внутри области V условиям

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = 0 \tag{88}$$

а на границе S этой области — условию

$$a_n = f(M) \text{ на } S \tag{89}$$

Из системы (88) следует, что

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi, \quad \Delta\varphi = 0 \tag{90}$$

а из уравнения (89), что

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = f(M) \text{ на } S \tag{91}$$

Таким образом, необходимо определить гармоническую функцию φ, нормальная производная которой принимает заданные значения на поверхности S (задача Неймана).

Наряду с этим мы рассмотрим и задачу Дирихле, в которой условие (91) заменено условием

$$\varphi = f(M) \text{ на } S \tag{92}$$

так что заданы значения самой функции φ на поверхности S. Если бы нам были известны одновременно значения на поверхности S как самой

гармонической функции φ, так и ее нормальной производной, то значение функции φ в любой точке внутри области V определилось бы моментально на основании формулы (47):

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\oint_S \varphi\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}dS \tag{93}$$

Пусть нам известны только значения функции φ на поверхности S. Тогда, очевидно, нужно постараться исключить из формулы (93) $\partial\varphi/\partial n$. Для этого попытаемся отыскать такую функцию $g(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = g(P, Q)$, которая, будучи рассматриваема как функция от ξ, η, ζ, удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\triangle_Q g = 0 \tag{94}$$

и которая на поверхности S принимает значения

$$g = -\frac{1}{r} \text{ на поверхности } S \tag{95}$$

Функция

$$G(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{r} + g(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) \tag{96}$$

называется при этих условиях функцией Грина. Как видим, для ее определения опять надо решить задачу Дирихле, но только при совершенно определенных граничных значениях функции.

Применим теперь к гармоническим функциям φ и g формулу Грина (38). Так как $\triangle\varphi = \triangle g = 0$, то эта формула дает нам равенство

$$\frac{1}{4\pi}\oint_S g\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial g}{\partial n}\varphi\, dS = 0$$

Комбинируя эту формулу с формулой (93), можем переписать последнюю в виде

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\oint_S G\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS - \frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial G}{\partial n}\varphi\, dS$$

Но так как по самому определению функции Грина

$$G(P, Q) = 0, \text{ если } Q \text{ лежит на } S$$

то получаем окончательное представление гармонической функции φ через ее граничные значения:

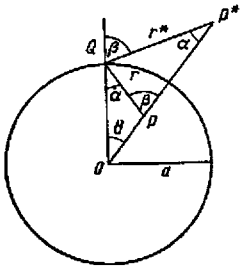
$$\varphi(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\oint_S \frac{\partial G}{\partial n}\varphi(Q)\, dS \tag{97}$$

В этой формуле $\partial G/\partial n$ есть значение нормальной производной от функции Грина, рассматриваемой как функция точки Q в точке $Q(\xi, \eta, \zeta)$ поверхности S.

Дадим пример решения задачи Дирихле при помощи функции Грина. Допустим, что поверхность S есть сфера радиуса a с центром в начале

координат. Пусть мы хотим определить значение функции φ в точке $P(x, y, z)$, лежащей внутри этой сферы и отстоящей от центра этой сферы на расстоянии $OP = R$. Обозначим через P^* точку, симметричную с точкой P относительно сферы S, т. е. точку, лежащую на продолжении радиуса OP и отстоящую от точки O на расстоянии OP^*, таком, что

$$OP^* \cdot OP = a^2$$



Фиг. 67

Координатами точки P^*, очевидно, будут

$$x^* = \frac{a^2 x}{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad y^* = \frac{a^2 y}{x^2 + y^2 + z^2},$$

$$z^* = \frac{a^2 z}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Обозначим еще через $r^* = P^*Q$ расстоинние переменной точки Q пространства от точки P^*. Заметим теперь, что если точка Q лежит на поверхности сферы S, то, согласно задаче 40 § 5, мы имеем соотношение

$$\frac{r^*}{r} = \frac{a}{R} \quad \text{или} \quad \frac{1}{r} = \frac{a}{Rr^*} \quad \text{на } S \tag{98}$$

Но функция $\frac{1}{r^*}$, а, следовательно, и $\frac{a}{Rr^*}$, очевидно, являются гармоническими функциями от точки Q внутри сферы S. Сравнивая соотношение (98) с формулой (95), мы видим, что можно принять

$$g(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = g(P, Q) = -\frac{a}{Rr^*} = -\frac{a}{OP \cdot P^*Q} =$$

$$= -\frac{a}{\sqrt{a^4 - 2a^2(x\xi + y\eta + z\zeta) + (x^2 + y^2 + z^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}} \tag{99}$$

и следовательно,

$$G(P, Q) = \frac{1}{r} - \frac{a}{Rr^*} \tag{100}$$

Вычисляем теперь

$$\operatorname{grad}_Q G = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{a}{R}\frac{\mathbf{r}^*}{r^{*3}}$$

где $\mathbf{r} = \overrightarrow{PQ}$, $\mathbf{r}^* = \overrightarrow{P^*Q}$; поэтому при обозначениях фиг. 67

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \mathbf{n} \cdot \operatorname{grad}_Q G = -\frac{\cos\alpha}{r^2} - \frac{a}{R}\frac{\cos\beta}{r^{*2}}$$

принимая теперь во внимание, согласно фиг. 67, что

$$r\cos\alpha = a - R\cos\theta, \quad r\cos\beta = a\cos\theta - R$$

$$r^* = \frac{ar}{R}$$

легко найдем, что

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{a^2 - R^2}{ar^3}$$

Поэтому для сферы решение задачи Дирихле дается так называемым интегралом Пуассона

$$\varphi(P) = \frac{(a^2 - R^2)}{4\pi a} \oint_S \frac{\varphi(Q)\, ds}{r^3} \tag{101}$$

где $R = OP$, $r = PQ$.

Рассмотрим теперь вопрос о решении поставленной в самом начале этого пункта задачи Неймана. В этом случае на поверхности S заданы значения нормальной производной искомой гармонической функции φ, и потому нужно попытаться исключить из формулы (93) входящие в нее значения функции φ на поверхности. Для этого попытаемся найти такую функцию $H(x, y, z; \xi, \eta, \zeta) = H(P, Q)$, которая удовлетворяет следующим условиям: функция

$$h(P, Q) = H(P, Q) - \frac{1}{r} \tag{102}$$

рассматриваемая как функция точки Q, есть гармоническая внутри S функция, далее на поверхности S производная функции H по нормали имеет постоянное значение и именно равное

$$\frac{\partial H}{\partial n} = \frac{4\pi}{S} \tag{103}$$

где S есть величина площади всей поверхности S. Как видим, для определения функции h нужно опять решить задачу Неймана, но при совершенно определенных граничных условиях. Мы знаем уже, что этими условиями функция h определяется с точностью до произвольной постоянной. Можно полностью определить H, если поставить еще требование, чтобы

$$\oint_S H(P, Q)\, dS = 0 \tag{104}$$

Комбинируя теперь равенство (93) с равенством

$$\frac{1}{4\pi} \oint_S h \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial h}{\partial n} \varphi\, dS = 0$$

вытекающим из формулы Грина (38) (ибо $\Delta h = \Delta \varphi = 0$), мы получим, что

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S H(P, Q) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS - \frac{1}{4\pi} \oint_S \frac{\partial H}{\partial n} \varphi\, dS$$

В силу условия (103) последний интеграл правой части будет произвольной постоянной величиной

$$-\frac{1}{S} \oint_S \varphi(Q)\, dS = \text{const}$$

Следовательно, мы получаем *окончательное представление гармонической функции* φ *через граничные значения ее нормальной производной*:

$$\varphi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S H(P, Q) \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS + C \tag{105}$$

Сделаем по поводу задачи Неймана одно замечание, а именно: значения нормальной производной $\partial\varphi/\partial n$ гармонической функции не могут задаваться на поверхности S произвольно, так как они всегда связаны условием

$$\oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS = 0 \tag{106}$$

вытекающим из формулы (19) § 17.

10. Теперь мы можем полностью решить задачу об определении вектора по его вихрю и расхождению для случая конечной области. Пусть нам нужно найти вектор a для точек области V, ограниченной поверхностью S, если известно, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{div} \mathbf{a} = \rho\,(x, y, z) \quad \text{внутри } V \\ &\operatorname{rot} \mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}\,(x, y, z) \quad \text{внутри } V \\ &a_n = f\,(M) \text{ на поверхности } S \end{aligned} \tag{107}$$

где ρ, $\boldsymbol{\omega}$ и f — известные функции, причем функция $f(M)$ удовлетворяет условию

$$\oint_S f(M)\, dS = \int_V \rho\,(\xi, \eta, \zeta)\, dV \tag{108}$$

а фуикция $\boldsymbol{\omega}$ — условию

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\omega} = 0 \tag{109}$$

Далее мы считаем, как всегда, что функции ρ и $\boldsymbol{\omega}$ непрерывны вместе с частными производными всюду кроме, быть может, конечного числа поверхностей.

В случае, если $\boldsymbol{\omega}$ внутри объема V терпит на некоторой поверхности разрыв, мы потребуем, чтобы нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{\omega}$ оставалась непрерывной.

Мы найдем решение системы (107) в виде суммы трех векторов

$$\mathbf{a}\,(P) = \operatorname{grad} \varphi + \operatorname{rot} \mathbf{A} + \operatorname{grad} \psi \tag{110}$$

Прежде всего, полагая $\rho = 0$ вне объема V, составляем функцию

$$\varphi\,(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho\,(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{111}$$

С векторным потенциалом A поступить столь же просто, т. е. положить $\boldsymbol{\omega} = 0$ вне объема V и затем применить формулы п. 7, мы не можем, так как, вообще говоря, на поверхности S нормальная составляющая вектора вихря $\omega_n \neq 0$, и если мы положим $\boldsymbol{\omega} = 0$ вне объема V, то на поверхности S нормальная составляющая вектора $\boldsymbol{\omega}$ будет терпеть разрыв, и рассуждения п. 7 перестанут быть верными. Поэтому мы должны поступить следующим образом: мы построим вектор $\boldsymbol{\omega}$ вне объема V таким

образом, чтобы на поверхности S величина ω_n не терпела разрыва, и чтобы на бесконечности удовлетворялись условия (63); и возьмем затем

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_{\infty} \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{112}$$

Такой вектор ω можно получить, например, следующим образом: примем, что $\omega = \operatorname{grad}\chi$ вне объема V, тогда на поверхности S должно быть

$$\frac{\partial\chi}{\partial n} = \omega_n \tag{113}$$

где справа стоит нормальная составляющая заданного внутри V вектора ω. Так как $\operatorname{div}\omega = 0$, то функция χ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\chi = 0 \tag{114}$$

Итак, нужно определить функцию χ, гармоническую вне объема V и удовлетворяющую условию (113), т. е. нужно решить задачу Неймана.

Заметим, что в силу условия (109) и в силу теоремы Гаусса мы имеем равенство

$$\oint_S \omega_n dS = 0 \tag{115}$$

В теории потенциала показывается, что гармоническая вне объема V функция χ, удовлетворяющая на поверхности S, ограничивающей этот объем, условию (113), в котором функция ω_n обладает свойством (115), будет удовлетворять следующему условию на бесконечности

$$|R^3 \operatorname{grad}\chi(\xi, \eta, \zeta)| < M \tag{116}$$

где M — конечная величина. Мы видим, что вектор $\omega = \operatorname{grad}\chi$ удовлетворяет вне объема V всем поставленным требованиям.

Вектор

$$\mathbf{b}(P) = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\mathbf{A}$$

обладает, очевидно, следующими свойствами

$$\operatorname{div}\mathbf{b} = \rho \text{ внутри } V, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{b} = \omega \text{ внутри } V \tag{117}$$

Остается выполнить последнее условие (107). Составим для этого

$$b_n(M) = \frac{\partial\varphi}{\partial n} + \operatorname{rot}_n\mathbf{A} \text{ на поверхности } S$$

и положим затем

$$F(M) = f(M) - b_n(M) \text{ на поверхности } S \tag{118}$$

Определим теперь гармоническую внутри объема V функцию ψ

$$\Delta\psi = 0$$

для которой

$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = F(M) \text{ на поверхности } S$$

Заметим при этом, что условие (106) выполняется, ибо

$$\oint_S F(M)\, dS = \oint_S f(M)\, dS - \oint_S b_n(M)\, dS =$$
$$= \oint_S f(M) dS - \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS - \oint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{A} d S = 0$$

так как в силу (108)

$$\oint_S f(M)\, dS = \int_V \rho(\xi, \eta, \zeta)\, dV = \int_V \Delta \varphi\, dV = \oint_S \frac{\partial \varphi}{\partial n} dS$$

и кроме того тождественно

$$\oint_S \operatorname{rot}_n \mathbf{A}\, dS = 0$$

Поэтому по формуле (105) определим гармоническую функцию ψ

$$\psi(P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S H(P, M)\, F(M)\, dS \tag{119}$$

Так как

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \psi = 0 \text{ внутри } V$$
$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = 0 \text{ внутри } V \tag{120}$$
$$\frac{\partial \psi}{\partial n} = F(M) \text{ на поверхности } S$$

то из (117), (118) и (120) ясно, что функция (110) дает решение системы (107). В силу теоремы единственности, другого решения поставленной задачи, отличного от найденного решения (110), не существует.

Теорию, развитую в этом параграфе, можно рассмотреть и для случая плоского поля, т. е. поля векторов a, параллельных плоскости xy и зависящих только от координат x, y. При этом получаются совершенно аналогичные вышеприведенным результаты; мы предлагаем в качестве упражнения доказать некоторые из них.

З а д а ч а 156. Какая функция расстояния r между двумя точками $P(x, y)$ и $Q(\xi, \eta)$ является решением уравнения Лапласа в плоскости?

О т в е т. $\lg r$.

З а д а ч а 157. Найти аналог формуле (43) для случая плоского поля.

О т в е т.

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi} \int_S \Delta \varphi \lg r dS - \frac{1}{2\pi} \oint_C \lg r \frac{\partial \varphi}{\partial n} ds + \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r} \varphi\, ds \tag{121}$$

где S — область, ограниченная контуром C, внутри которой лежит точка P; $\mathbf{r} = \overline{PQ}$.

Задача 158. Какой вид имеет решение уравнения Пуассона на плоскости

$$\triangle\varphi = \rho(x, y) \tag{122}$$

Ответ.

$$\varphi(P) = \frac{1}{2\pi}\int_S \rho(\xi, \eta) \lg r \, d\xi \, d\eta \tag{123}$$

Задача 159. Пусть во всей бесконечной плоскости заданы вихрь и расхождение вектора a:

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} = \rho(x, y), \quad \operatorname{rot} \mathbf{a} = k\left(\frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right) = \omega(x, y) \tag{124}$$

Определить вектор a.

Ответ.

$$a_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad a_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

где

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_S \rho(\xi, \eta) \lg r \, d\xi \, d\eta, \quad \psi(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_S \omega(\xi, \eta) \lg r \, d\xi \, d\eta \tag{125}$$

Задача 160. Вывести для задачи Дирихле на плоскости формулу, аналогичную (97), и показать, что для круга решение задачи Дирихле дается интегралом Пуассона

$$\varphi(R, \theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\varphi(\theta')(a^2 - R^2)\, d\theta'}{a^2 - 2aR\cos(\theta - \theta') + R^2} \tag{126}$$

§ 20. Различные векторные поля. Поверхностные расхождение и вихрь

1. До сих пор мы рассматривали преимущественно непрерывные скалярные и векторные поля. Теперь мы рассмотрим несколько случаев, когда изучаемые скалярные или векторные функции терпят разрыв непрерывности в некоторых точках, на некоторых линиях или на некоторых поверхностях.

Один пример такого рода мы имели в § 14 при рассмотрении вопроса об источниках. Мы видели там, что если в некоторой точке, например, в начале координат, находится источник обильности e, и если в других точках пространства нет ни вихрей, ни источников, то векторное поле будет потенциальным и будет определяться формулой

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi \tag{1}$$

где

$$\varphi = -\frac{e}{4\pi r} \tag{2}$$

так что

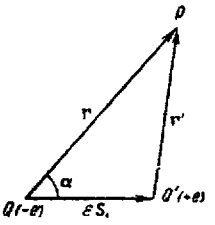
$$\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi r^3} = \frac{e\mathbf{r}_1}{4\pi r^2} \tag{3}$$

Если бы источник обильности e находился не в начале координат, а в точке Q, то поле определялось бы той же формулой (3); при этом,

если вектор $\mathbf{a}$ определяется в точке P, то следует положить $\mathbf{r} = \overrightarrow{QP}$. Если координаты точки P суть x, y, z, а координаты точки Q суть ξ, η, ζ, то

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2} \tag{4}$$

2. Рассмотрим еще один пример аналогичного рода. Допустим, что в точке Q (фиг. 68) находится источник обильности $-e$, в бесконечно же близкой точке Q', координаты которой суть $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$, находится источник обильности $+e$; длину бесконечно малого вектора $\overrightarrow{QQ'}$ обозначим через ε, орт этого вектора через $\mathbf{s}_1$, так что $\overrightarrow{QQ'} = \varepsilon \mathbf{s}_1$. Допустим далее, что обильность источников e бесконечно велика, причем произведение $e \cdot \overrightarrow{QQ'} = \mathbf{m}$ остается конечным.



Фиг. 68

Совокупность источников e и $-e$ в точках Q и Q' называют в этом случае *дублетом*, а вектор $\mathbf{m}$ называют *моментом дублета*. Такую примерно картину мы имеем в случае магнита, когда рассматривается магнитное поле на расстояниях, больших по сравнению с длиной магнита.

Предполагая, что кроме дублета никаких других источников нет, и что нет также и вихрей, найдем векторное поле, производимое дублетом момента $\mathbf{m}$, находящимся в точке Q.

Из формулы (2) очевидно, что в настоящем случае

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi$$

причем

$$\varphi = -\frac{e}{4\pi r'} + \frac{e}{4\pi r} = -\frac{e}{4\pi}\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) \tag{5}$$

Но разность $\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}$ представляет собою приращение функции $\frac{1}{r}$, когда точка Q перемещается в положение Q'; значит, рассматривая r как функцию точки Q, будем иметь по формуле (11) § 12:

$$\frac{1}{r'} - \frac{1}{r} = d\frac{1}{r} = \overrightarrow{QQ'} \cdot \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} \tag{6}$$

причем мы у знака grad поставили значок Q, чтобы указать, что r рассматривается как функция точки Q, точка же P остается неизменной.

Вставляя (6) в формулу (5), получим:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left(e\overrightarrow{QQ'} \cdot \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right)$$

или, так как $e\overrightarrow{QQ'} = \mathbf{m}$ есть момент дублета:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{m} \cdot \operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right) \tag{7}$$

Вспомним теперь формулу (54) § 19:

$$\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r} = -\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} \tag{8}$$

Поэтому функция φ, характеризующая поле дублета, может быть написана в таком виде:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi}\left(\mathfrak{m}\cdot \operatorname{grad}_P \frac{1}{r}\right) \tag{9}$$

Обозначим далее величину момента дублета через m, а угол, составляемый направлением момента дублета с r, через α; так как

$$\operatorname{grad}_P \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

то из формулы (9) получим еще такое выражение для φ:

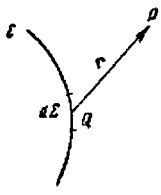
$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\frac{m\cos\alpha}{r^2} \tag{10}$$

3. Рассмотрим теперь тот случай, когда источники распределены по некоторой поверхности (пример — распределение электрических зарядов на поверхности проводника).

Если плотность источников в точке Q поверхности Σ обозначить через σ, то это обозначает, что на элементе поверхности $d\Sigma$, окружающем точку Q (фиг. 69), находится источник обильности $e = \sigma\, d\Sigma$. Векторное поле, происходящее от всех таких источников, будет очевидно даваться той же формулой

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad}\varphi$$

причем теперь



Фиг. 69

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)}\frac{\sigma\, d\Sigma}{r} \tag{11}$$

ибо функции φ, происходящие от отдельных источников, очевидно нужно сложить. Выражение (11) было названо в предыдущем параграфе потенциалом простого слоя.

В § 14 мы видели, что расхождение вектора a есть обильность находящихся в поле источников, отнесенная к единице объема. В настоящем случае основную роль играет плотность источников, распределенных по поверхности Σ. Эту плотность естественно поэтому называть поверхностным расхождением вектора a.

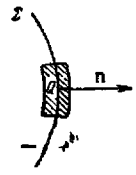
В § 14 нами была установлена формула Гаусса-Остроградского

$$\oint_S a_n\, dS = \int_V \operatorname{div}\mathbf{a}\, dV \tag{12}$$

устанавливающая равенство между потоком вектора a через замкнутую поверхность S, ограничивающую объем V, и распространенным по этому объему интегралом от расхождения вектора a, представляющим сумму обильностей всех источников, находящихся внутри S.

Применим эту формулу к нашему случаю, когда φ определяется формулой (11), и возьмем поверхность S следующего вида.

Проведем в точке Q нормаль n к поверхности Σ и сместим элемент поверхности $d\Sigma$ параллельно самому себе в направлении нормали n в обе стороны от поверхности Σ на бесконечно малое расстояние. При этом смещении элемент $d\Sigma$ опишет заштрихованный на фиг. 70 объем, который мы и примем за V, а поверхность, его ограничивающую, примем за S. Обильность источников, находящихся внутри S, равна, очевидно, $\sigma d\Sigma$.



Фиг. 70

Различим теперь две стороны поверхности Σ: положительную, прилегающую к области, в которую направлена нормаль n, и отрицательную.

Поток через положительное основание объема V равен, очевидно, $a_n^+ d\Sigma$, поток через отрицательное основание равен $-a_n^- d\Sigma$; потоком через боковую поверхность объема V мы можем пренебречь, если высоту цилиндрического объема V возьмем очень малой в сравнении с другими его размерами; поэтому полный поток через поверхность S будет равен $d\Sigma\,(a_n^+ - a_n^-)$ и из формулы Гаусса-Остроградского мы получаем равенство:

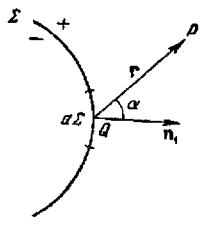
$$d\Sigma\,(a_n^+ - a_n^-) = \sigma d\Sigma$$

Отсюда

$$\sigma = a_n^+ - a_n^- = \mathrm{n}\cdot(\mathrm{a}^+ - \mathrm{a}^-) \tag{13}$$

Таким образом поверхностное расхождение равно разности нормальных составляющих вектора a с двух сторон поверхности, по которой распределены источники. Отсюда мы заключаем, что если вектор a на некоторой поверхности Σ терпит разрыв в нормальной к этой поверхности составляющей, то мы можем приписать этот разрыв вектора a наличию источников, распределенных по поверхности Σ.

4. Рассмотрим теперь тот случай, когда по поверхности Σ распределены дублеты с плотностью η, причем в каждой точке Q поверхности Σ момент дублета m направлен по нормали n_1 к поверхности (фиг. 71), так что $\mathrm{m} = m\mathrm{n}_1$. В этом случае, так как момент дублета, отвечающего элементу поверхности $d\Sigma$, равен очевидно $m = \eta d\Sigma$, получим, воспользовавшись формулой (7) и тем, что



Фиг. 71

$$\mathrm{n}_1\cdot\mathrm{grad}_Q\frac{1}{r} = \frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}$$

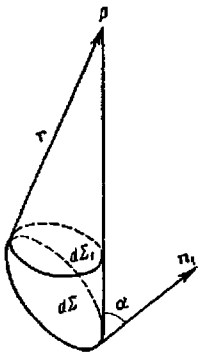
следующее выражение для потенциала φ

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\eta\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}d\Sigma$$

Это выражение было нами названо в предыдущем параграфе потенциалом двойного слоя. Если же исходить из формулы (10), то найдем следующее выражение для φ:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)}\frac{\eta\cos\alpha}{r^2}d\Sigma \tag{14}$$

Выражение $\frac{\cos\alpha\, d\Sigma}{r^2}$ имеет простой геометрический смысл: это есть телесный угол $d\Omega$, под которым площадка $d\Sigma$ видна из точки P (фиг. 72). В самом деле, соединяя точку P с кривой, ограничивающей элемент поверхности $d\Sigma$, мы получим телесный угол $d\Omega$. Проведем из точки P, как из центра, сферу радиуса r. Подобно тому, как угол измеряется в радианах отношением длины дуги к радиусу, телесный угол $d\Omega$ измеряется отношением площади элемента сферы $d\Sigma_1$ к квадрату радиуса r^2, т. е.



Фиг. 72

$$d\Omega = \frac{d\Sigma_1}{r^2}$$

но очевидно, что $d\Sigma_1 = d\Sigma \cdot \cos\alpha$, поэтому и получается

$$d\Omega = \frac{d\Sigma \cdot \cos\alpha}{r^2} \tag{15}$$

Отметим, что если угол α тупой, то $d\Omega$ получается отрицательным, но ясно, что угол α будет острым и, следовательно, $d\Omega$ положительным в том случае, когда из точки P видна положительная сторона элемента $d\Sigma$; в том же случае, когда из точки P видна отрицательная сторона этого элемента, угол α будет тупым, а элемент $d\Omega$ отрицательным. Следовательно, знак $d\Omega$ показывает, видна ли из точки P положительная или отрицательная сторона элемента $d\Sigma$.

Формула (14) теперь может быть переписана в виде

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\int_{(\Sigma)} \eta\, d\Omega \tag{16}$$

Остановимся теперь на том частном случае, когда плотность η на поверхности Σ всюду одинакова. Тогда η можно вынести за знак интеграла, а интеграл

$$\int_{(\Sigma)} d\Omega$$

даст просто угол Ω, под которым вся поверхность видна из точки P и окончательно получится следующая простая формула:

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\eta\Omega \tag{17}$$

Итак, в случае равномерного распределения дублетов по поверхности Σ векторное поле определяется формулой

$$\mathbf{a} = -\frac{\eta}{4\pi}\operatorname{grad}\Omega \tag{18}$$

где Ω есть угол, под которым видна поверхность Σ из той точки P, в которой определяется значение вектора $\mathbf{a}$.

Из (16) следует, что функция φ терпит на поверхности Σ разрыв непрерывности. В самом деле, если точка P стремится к Q, оставаясь с по-

ложительной стороны поверхности разрыва, и если мы выделим очень малую часть поверхности Σ_1, окружающую точку Q, то Σ_1 будет видна из точки P под телесным углом, очень мало отличающимся от 2π, и потому $\varphi(P)$ будет очень мало отличаться от

$$-\frac{1}{2}\eta(Q) - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma-\Sigma_1)} \eta\, d\Omega$$

В пределе, если устремить сначала P к Q, а затем Σ_1 к нулю, получим

$$\varphi_+ = -\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)} \eta\, d\Omega$$

Если же точка P стремится к Q, оставаясь с отрицательной стороны поверхности Σ, то из P будет видна отрицательная сторона Σ_1, и потому

$$\varphi_- = +\frac{1}{2}\eta - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(\Sigma)} \eta d\Omega$$

Поэтому получаем

$$\varphi_+ - \varphi_- = -\eta \tag{19}$$

Вектор, равный произведению $\varphi_+ - \varphi_-$ на единичный вектор нормали $\mathfrak{n}_1$, можно назвать *поверхностным градиентом*, так как он характеризует изменение функции φ при переходе через поверхность Σ, подобно тому как $\operatorname{grad}\psi$ характеризует изменение функции ψ при переходе точки в соседние положения.

5. До сих пор мы рассматривали безвихревые поля, происходящие от некоторого распределения источников. Рассмотрим теперь случай, когда задано некоторое распределение вихрей, а источники отсутствуют.

В § 19 мы видели, что если вихри вектора $\mathbf{a}$ заданы формулой

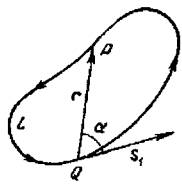
$$\operatorname{rot}\mathbf{a} = \omega(x, y, z) \tag{20}$$

а источники отсутствуют, то сам вектор $\mathbf{a}$ определяется формулой

$$\mathbf{a} = \operatorname{rot}\mathbf{A} \tag{21}$$

где

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi}\int \frac{\omega(\xi, \eta, \zeta)\, dV}{r} \tag{22}$$



Фиг. 73

Как простейший случай рассмотрим тот, когда имеется только одна вихревая нить в виде замкнутой линии L; напряжение вихревой нити обозначим через Γ.

Обозначим через dS (фиг. 73) поперечное сечение вихревой трубки, через $d\mathbf{s}$ направленный элемент кривой L; если орт касательной к кривой L в точке Q обозначить через $\mathbf{s}_1$, то будет $d\mathbf{s} = \mathbf{s}_1 ds$; вихрь в точке Q имеет то же направление касательной к вихревой нити, значит $\omega = \omega\mathbf{s}_1$, наконец напряжение вихревой нити есть произведение из площади поперечного сечения трубки dS на величину вихря ω, значит $\Gamma = \omega S d$.

Наконец, очевидно, что объем элемента вихревой трубки равен $dV = dSds$ (произведение из площади основания элементарного цилиндрика dS на его высоту ds).

В формуле (22) надо проинтегрировать только по элементам объема, составляющим вихревую трубку L, так как никаких других вихрей нет.

Но для элемента вихревой трубки имеем

$$\omega\, dV = \omega \mathbf{s}_1 \cdot dS \cdot ds = \omega\, dS \cdot ds \cdot \mathbf{s}_1 = \Gamma\, d\mathbf{s}$$

Поэтому выражение для A принимает вид

$$\mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \int_L \frac{\Gamma\, d\mathbf{s}}{r} \tag{23}$$

Заметим теперь, что напряжение вихревой трубки Γ есть величина постоянная вдоль всей трубки (§ 16), поэтому Γ можно вынести за знак интеграла, и мы получим

$$\mathbf{A} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{s}}{r} \tag{24}$$

и следовательно

$$\mathbf{a} = \frac{\Gamma}{4\pi} \operatorname{rot} \int_L \frac{d\mathbf{s}}{r} \tag{25}$$

Формулой (25) и определяется поле вектора a, создаваемое вихревой трубкой L напряжения Γ. Формуле (25) можно дать другой вид. Для этого заметим, что

$$\operatorname{rot} \int_L \frac{d\mathbf{s}}{r} = \int_L \operatorname{rot} \frac{d\mathbf{s}}{r} \tag{26}$$

Воспользуемся теперь формулой (3) § 17:

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{a}) = \varphi \operatorname{rot} \mathbf{a} + \operatorname{grad} \varphi \times \mathbf{a}$$

положив в ней $\varphi = \frac{1}{r}$, $\mathbf{a} = d\mathbf{s}$; заметим при этом, что переменной точкой, очевидно, считается точка P, так что вектор a должен рассматриваться как постоянный, и следовательно надо положить $\operatorname{rot} \mathbf{a} = 0$. Итак

$$\operatorname{rot} \left(\frac{d\mathbf{s}}{r}\right) = \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times d\mathbf{s} \tag{27}$$

и значит

$$\mathbf{a} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \operatorname{grad} \frac{1}{r} \times ds \tag{28}$$

Вспоминая еще выражение

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{\mathbf{r}_1}{r^2}$$

можем переписать формулу (28) в следующем виде:

$$\mathbf{a} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_L \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}_1}{r^2} \tag{29}$$

Обозначим через α угол между векторами s_1 и r, тогда та часть вектора a, которая происходит от элемента вихревой нити ds, будет определяться формулой

$$da = \frac{\Gamma}{4\pi} \frac{ds \times r_1}{r^3} \tag{30}$$

показывающей, что указанная часть вектора a перпендикулярна как к элементу вихревой нити ds, так и к прямой PQ, соединяющей точку, где определяется значение вектора a с элементом вихревой нити; численное же значение вектора da будет

$$|da| = \frac{\Gamma\, ds \sin\alpha}{4\pi r^2} \tag{31}$$

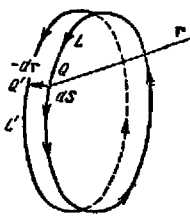
Формулы (29), (30) и (31) играют большую роль в электромагнетизме, а именно, там показывается, что если L есть проводник, по которому течет электрический ток силою $\frac{\Gamma}{4\pi}$, а в точке P находится единичный положительный магнитный полюс, то на последний будет действовать сила, равная как раз a, если пользоваться правою системой координат — в этом состоит закон Био-Савара. Таким образом электрические токи являются вихревыми нитями для магнитного поля.

6. Проведем теперь какую-нибудь поверхность Σ, контуром которой служит наша вихревая нить, и покажем, что векторное поле, создаваемое вихревою нитью напряжения Γ, и поле, создаваемое равномерно распределенными по поверхности Σ дублетами плотности Γ, совершенно тождественны вне поверхности Σ. В электромагнетизме этому обстоятельству соответствует теорема Ампера, утверждающая, что магнитное поле, создаваемое электрическим током силою J, совершенно такое же, как магнитное поле, создаваемое магнитным листком, контуром которого является проводник, по которому течет ток, и который равномерно намагничен, причем поверхностная плотность магнетизма равна J.

Для доказательства возьмем выражение (18) для векторного поля, создаваемого равномерно распределенными дублетами

$$a = -\frac{\eta}{4\pi} \operatorname{grad} \Omega \tag{18}$$

и постараемся привести это выражение к виду (29). Вычислим для этого приращение телесного угла $d\Omega$, получающееся, когда точка P смещается в соседнее положение P', причем $\overline{PP'} = dr$.



Фиг. 74

Очевидно то же самое приращение $d\Omega$ получится, если мы точку P оставим в покое, но зато весь контур L (фиг. 74) сместим в новое положение L' параллельно самому себе на отрезок $-dr$, так что, например, точка Q перейдет в положение Q', причем $\overline{QQ'} = -dr$. Между L и L' образуется поверхность, которая и будет видна под углом $d\Omega$. Элемент этой поверхности, образованный при смещении элемента ds кривой L,

представляется очевидно вектором — $d\mathbf{r}\times d\mathbf{s} = d\mathbf{s}\times d\mathbf{r}$; проекция последнего вектора на направление $\overline{QP}$ равна очевидно $(d\mathbf{s}\times d\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}_1$; деля это выражение на квадрат расстояния PQ, мы и получим телесный угол, под которым видна из точки P площадка, построенная на векторах $d\mathbf{s}$ и $\overline{QQ'}$:

$$\frac{(d\mathbf{s}\times d\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}_1}{r^3}$$

Все же изменение телесного угла Ω будет

$$d\Omega = \int_L \frac{(d\mathbf{s}\times d\mathbf{r})\cdot\mathbf{r}_1}{r^3} = \int_L \frac{d\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}_1\times d\mathbf{s})}{r^3}$$

или окончательно

$$d\Omega = d\mathbf{r}\cdot\int_L \frac{\mathbf{r}_1\times d\mathbf{s}}{r^3} \tag{32}$$

Отсюда можно заключить, что

$$\operatorname{grad}\Omega = \int_L \frac{\mathbf{r}_1\times d\mathbf{s}}{r^3} \tag{33}$$

и значит

$$\mathbf{a} = \frac{\eta}{4\pi}\int_L \frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{r}_1}{r^3} \tag{34}$$

Если взять $\eta = \Gamma$, то это выражение полностью совпадает с формулой (29), что и доказывает высказанное выше утверждение

Отметим, что поля, создаваемые вихревой линией и дублетами, совершенно одинаковы только вне поверхности Σ; поэтому в области вне поверхности Σ можно пользоваться в обоих случаях любой из формул

$$\mathbf{a} = \frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{rot}\int_L \frac{d\mathbf{s}}{r} \tag{25}$$

$$\mathbf{a} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\operatorname{grad}\Omega \tag{35}$$

Фиг. 75

однако на самой поверхности Σ дело обстоит несколько иначе функция Ω для случая дублетов терпит разрыв, как мы видели выше, в случае же вихревой нити никакого разрыва быть не может, ибо самой поверхности Σ в этом случае не существует, она была введена нами искусственно. Зато в случае вихревой нити функция Ω получается многозначной; если заставить точку обойти контур K, охватывающий один раз контур L, как показано на фкг. 75, то при правой системе координат функция Ω получит приращение -4π; это видно непосредственно, но может быть также легко доказанс на основании теоремы Стокса; в самом деле, вычислим циркуляцию вектора $\mathbf{a}$ по контуру K:

$$\int_K \mathbf{a}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_K \operatorname{grad}\Omega\cdot d\mathbf{r} = -\frac{\Gamma}{4\pi}\int_K d\Omega$$

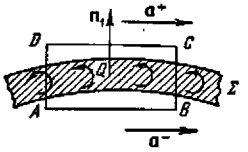
Как видно, приращение этой циркуляции равно произведению из $-\frac{\Gamma}{4\pi}$ на приращение телесного угла Ω. С другой стороны, по теореме Стокса циркуляция по контуру K равна потоку вихря вектора a через поверхность, опирающуюся на этот контур. Но контур K охватывает единственный вихрь напряжения Γ, значит

$$-\frac{\Gamma}{4\pi}\int d\Omega = \Gamma$$

Отсюда и получается

$$\int d\Omega = -4\pi \tag{36}$$

7. В п. 3 был рассмотрен случай распределения источников по поверхности и было показано, что в этом случае вектор терпит на этой поверхности разрыв в своей нормальной составляющей.



Фиг. 76

Сейчас мы предположим, что вихри заполняют некоторую поверхность Σ, и покажем, что вызываемое такими вихрями векторное поле терпит на поверхности Σ разрыв непрерывности. Итак, предположим, что поверхность Σ покрыта вихрями и пусть плоскость фиг. 76 сечет нормально вихревую линию, проходящую через точку Q, и пусть вихревая линия смотрит на нас (мы пользуемся на фиг. 76 правой системой координат). Обозначим еще через n_1 единичный вектор нормали к поверхности Σ и назовем ту сторону поверхности Σ, куда смотрит вектор n_1, положительной, а противоположную сторону отрицательной. Проведем, как указано на чертеже, контур $ABCD$ в виде прямоугольника, стороны которого $AB = CD = dl$ бесконечно малы и параллельны как между собой, так и поверхности Σ, другие же стороны этого прямоугольника, перпендикулярные к поверхности Σ, обозначим через $AD = BC = dh$ и тоже предположим бесконечно малыми. Мы предположим, что общая интенсивность вихрей, лежащих на поверхности и расположенных между AD и BC, равна $w\,dl$, т. е. мы будем считать плотность вихрей равной w.

Обозначим через a^+ и a^- значения вектора a в двух точках, бесконечно близких к точке Q и лежащих соответственно с положительной и отрицательной стороны поверхности Σ, и установим связь между этими значениями и вихрями, расположенными на поверхности Σ. Применим для этого формулу § 16:

$$\int_V \operatorname{rot} a\, dV = \int_S dS \times a \tag{37}$$

Возьмем объем V следующего вида: сместим прямоугольник $ABCD$ вдоль вихревой нити, проходящей через Q, т. е. перпендикулярно к плоскости чертежа, на отрезок ds. При этом смещении прямоугольник $ABCD$ опишет параллелепипед с ребрами dl, ds, dh, который мы и возьмем за

объем V. Если за высоту этого параллелепипеда взять dh, то одно основание его будет лежать с положительной стороны поверхности Σ, а другое с отрицательной, площадь обоих оснований будет равна

$$dS = dl\,ds$$

а объем всего параллелепипеда будет

$$V = dl\,ds\,dh$$

Если высоту параллелепипеда dh считать очень малой в сравнении с размерами dl и ds, то в формуле (37) интегралом по боковой поверхности параллелепипеда можно будет пренебречь, далее, основание, лежащее с положительной стороны поверхности Σ, представляется вектором $dl\,ds\,\mathbf{n}_1$, другое же основание представляется вектором $-dl\,ds\,\mathbf{n}_1$, поэтому для правой части формулы (37) получаем выражение

$$dl\,ds\,\mathbf{n}_1\times\mathbf{a}^+ - dl\,ds\,\mathbf{n}_1\times\mathbf{a}^- \tag{38}$$

Левая же часть формулы (37), очевидно, равна $\mathbf{w}\,dl\,ds$. Поэтому и получаем равенство

$$\mathbf{w} = \mathbf{n}_1\times\mathbf{a}^+ - \mathbf{n}_1\times\mathbf{a}^-$$

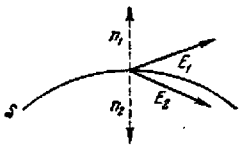
или

$$\mathbf{w} = \mathbf{n}_1\times(\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}^-) \tag{39}$$

которое связывает вихри, распределенные по поверхности Σ с разрывом вектора $\mathbf{a}$. Из этой формулы видно, что поверхностная плотность вихрей численно равна касательной составляющей разрыва вектора $\mathbf{a}$, причем самые вихри перпендикулярны к этой составляющей.

8. В качестве примера на применение полученных в этом параграфе результатов рассмотрим некоторые вопросы электростатики.

Мы видели ранее, что если обозначить электрический потенциал через φ, то для напряжения электрического поля будем иметь выражение



Фиг. 77

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\varphi \tag{40}$$

причем

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{41}$$

определяет нам плотность ρ объемных зарядов.

Допустим теперь, что на некоторой поверхности S электрическая сила $\mathbf{E}$ терпит разрыв в своей нормальной составляющей; вычислим этот разрыв и обозначим его через $4\pi\sigma$:

$$E_{1n} + E_{2n} = 4\pi\sigma \tag{42}$$

(мы берем в данном случае сумму нормальных составляющих, а не разность, так как направления нормалей на обеих сторонах поверхности S взяты нами, как показывает фиг. 77, различными). Ясно, что σ можно принять за меру плотности электрических зарядов, расположенных на поверхности S.

Допустим, что кроме разрыва нормальной составляющей E на поверхности S у нас никаких особенностей нет. Тогда, образуя сумму потенциала

$$\varphi_1 = \int_V \frac{\rho\, dV}{r}$$

распространенного по всем объемным зарядам, и потенциала

$$\varphi = \int_S \frac{\sigma\, dS}{r}$$

соответствующего поверхностным зарядам и дающего согласно формуле (13) как раз тот разрыв E_n, который определен формулой (42), мы получим полный электрический потенциал

$$\varphi = \int_V \frac{\rho\, dV}{r} + \int_S \frac{\sigma\, dS}{r} \tag{43}$$

Если мы рассматриваем проводник, ограниченный поверхностью S, то внутри проводника электрическое поле отсутствует, т. е. $\mathbf{E} = 0$, а следовательно и проекция E на внутреннюю нормаль к S равна нулю. Обозначим через E_n проекцию E на внешнюю нормаль, а через σ — поверхностную плотность зарядов (так как $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$, внутри проводника зарядов быть не может, все заряды сосредоточены на поверхности проводника). Тогда из (42) будем иметь

$$4\pi\sigma = E_n = -\frac{\partial \varphi}{\partial n} \tag{44}$$

Рассмотрим, например, такую задачу: в пространстве находятся k проводников, ограниченных соответственно поверхностями $S_1, S_2, \ldots, S_k$. Этим проводникам сообщены заряды $e_1, e_2, \ldots, e_k$. Никаких других зарядов в пространстве нет. Требуется определить электрическую силу в каждой точке пространства и распределение зарядов на проводниках.

Так как объемные заряды отсутствуют, то согласно уравнениям (40) и (41) электрический потенциал удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta \varphi = 0 \tag{45}$$

Далее, так как внутри проводников $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi = 0$, следовательно, $\varphi = \text{const}$, то на поверхности каждого проводника потенциал должен принимать постоянное значение:

$$\varphi = \text{const} = \varphi_i \quad \text{на поверхности } S_i \tag{46}$$

Мы видим, что задача привелась к решению задачи Дирихле. Однако нужно иметь в виду, что числа φ_i не даны нам, так как нам заданы только заряды e_i, которые определяются следующим образом

$$e_i = \oint_{S_i} \sigma\, dS = -\frac{1}{4\pi} \oint_{S_i} \frac{\partial \varphi}{\partial n}\, dS \tag{47}$$

Решив при этих условиях задачу Дирихле, по формуле (44) определим распределение электричества на каждом проводнике.

9. В п. 1 мы указали, что потенциалом поля одного источника является

$$\varphi = -\frac{e}{4\pi r} \tag{48}$$

далее в п. 2, формула (7), мы нашли для потенциала поля дублета выражение

$$\varphi = -\frac{1}{4\pi}\left(\mathbf{m}\cdot\operatorname{grad}_Q \frac{1}{r}\right) = -\frac{m}{4\pi}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r} \tag{49}$$

где $\mathbf{s}_1$ есть направление момента дублета.

Представим себе теперь, что мы имеем в двух бесконечно близких точках Q_2 и Q_2' два дублета с прямо противоположными моментами $-\mathbf{m}$ и $+\mathbf{m}$ и пусть $\overline{Q_2Q_2'} = \varepsilon\mathbf{s}_2$; где $\mathbf{s}_2$ — единичный вектор, определяющий направление от Q_2 к Q_2', а ε — расстояние между точками Q_2 и Q_2'. Будем теперь сближать точки Q_2 и Q_2' и одновременно так увеличивать момент дублетов $\mathbf{m}$, чтобы произведение $m\varepsilon$ стремилось бы к конечной величине k. Рассуждением, совершенно аналогичным тому, которое привело нас к формуле (7), мы докажем, что в пределе получится функция

$$\varphi = -\frac{k}{4\pi}\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r} \tag{50}$$

характеризующая поле *квадруплета*. Очевидно, по тому же пути можно идти и дальше, строя различного рода *мультиплеты*.

Так как функция $\frac{1}{r}$ удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\triangle\frac{1}{r} = 0 \tag{51}$$

то и функции

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r},\ \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r},\ \ldots, \tag{52}$$

будут удовлетворять этому уравнению. Заметим при этом, что, полагая

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}$$

мы должны при образовании $\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r}$ и т. д. считать переменными координаты ξ, η, ζ точки Q, а при вычислении $\triangle\varphi$ считать переменными координаты x, y, z точки P.

Однако, так как

$$\mathbf{s}_1\cdot\operatorname{grad}_Q\frac{1}{r} = -\mathbf{s}_1\cdot\operatorname{grad}_P\frac{1}{r}$$

то функции

$$\varphi = \frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r},\ \frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r},\ \ldots \tag{53}$$

в которых переменными считаются всюду координаты точки $P(x, y, z)$, будут при четном числе дифференцирования совпадать, а при нечетном

числе дифференцирований будут только знаком отличаться от функций (52). Положим для простоты $\xi = \eta = \zeta = 0$ и введем сферические координаты r, θ, ψ с центром в точке O.

Функции (53) имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial s_k}\frac{\partial}{\partial s_{k-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial s_2}\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r} = \frac{Y_k(\theta, \psi)}{r^{k+1}} \tag{54}$$

Для доказательства заметим, что в силу решения задачи (141), мы имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} = \cos(\mathbf{s}, r)\frac{\partial \Phi}{\partial r} + \cos(\mathbf{s}, \theta)\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \cos(\mathbf{s}, \psi)\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \psi}$$

легко поэтому из формулы

$$\frac{\partial}{\partial s_{k-1}}\cdots\frac{\partial}{\partial s_1}\frac{1}{r} = \frac{Y_{k-1}(\theta, \psi)}{r^k}$$

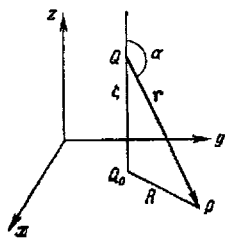
вывести формулу (54) и, следовательно, по индукции заключить о справедливости этой формулы (54). Полученные нами функции $Y_k(\theta, \psi)$ носят название *сферических функций*. Можно показать, что каждой сферической функции соответствует свой мультиплет и обратно.

10. В случае плоского поля, т. е. поля вектора а, параллельного плоскости xy и не зависящего от координаты z, все понятия, рассмотренные в этом параграфе, сохраняют свою силу, конечно, соответственным образом видоизменяясь.

Сделаем по этому поводу несколько замечаний.

В п. 1 мы видели, что происходящий от источника обильности e вектор а определяется формулой

$$\mathbf{a} = \frac{e\mathbf{r}}{4\pi r^3} \tag{55}$$



Фиг. 78

Возьмем теперь точку $Q_0(\xi, \eta)$ плоскости xy и проведем через эту точку прямую, параллельную оси OZ (фиг. 78). Распределим на этой прямой источники равномерно и притом так, чтобы на единицу длины приходилась обильность источников, равная e, и подсчитаем происходящее от этих источников поле. Совершенно очевидно, что это поле будет плоским. Взяв теперь точку $P(x, y)$ и обозначив вектор $\overrightarrow{Q_0P}$ через $\mathbf{R}$, будем иметь, что $r = \sqrt{\zeta^2 + R^2}$, $\mathbf{r} = \mathbf{R} - \zeta\mathbf{k}$ и, следовательно,

$$\mathbf{a} = \frac{e}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(\mathbf{R} - \zeta\mathbf{k})\,d\zeta}{\sqrt{(R^2 + \zeta^2)^3}} = \frac{e\mathbf{R}}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d\zeta}{(R^2 + \zeta^2)^{3/2}} =$$

$$= \frac{e\mathbf{R}}{4\pi R^2}\left[\frac{\zeta}{\sqrt{R^2 + \zeta^2}}\right]_{\zeta=-\infty}^{\zeta=+\infty} = \frac{e\mathbf{R}}{2\pi R^2} \tag{56}$$

Вектор a является потенциальным вектором

$$\mathbf{a} = \operatorname{grad} \varphi \tag{57}$$

причем

$$\varphi = -\frac{e}{2\pi} \lg \frac{1}{R} \tag{58}$$

Формулы (57) и (58) определяют, как легко видеть, источник обильности e в точке Q_0 плоскости xy. В самом деле, вне источника поле всюду соленоидальное, ибо в плоскости

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \lg \frac{1}{R} = \triangle \lg \frac{1}{R} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \lg \frac{1}{R} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \lg \frac{1}{R} = 0$$

Если же составить поток вектора a через окружность радиуса R с центром в точке Q_0, то он окажется равным, в силу формулы (56):

$$\frac{e}{2\pi R} 2\pi R = e$$

Мы могли бы, конечно, сразу получить выражение (58) для источника обильности e, но мы хотели показать, как к этому выражению можно прийти, исходя из источников в пространстве.

Поступая теперь аналогично тому, как мы это делали в п. 2, можно прийти к потенциалу дублета в плоскости:

$$\varphi = -\frac{m}{2\pi} \frac{\partial}{\partial s} \lg \frac{1}{r} = -\frac{1}{2\pi} \frac{m \cos \alpha}{r} \tag{59}$$

Точно так же, рассматривая вихревую нить, параллельную оси Oz, проходящую через точку Q_0, напряжение которой равно Γ, нетрудно убедиться, исходя из формул (29) и (31), что получится плоское поле вектора a, направленного перпендикулярно вектору R и по величине равного

$$a = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha \, d\zeta}{r^2} = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \alpha \, d\alpha}{R} = \frac{\Gamma}{2\pi R} \tag{60}$$

Полученное поле можно представить также в виде

$$\mathbf{a} = \frac{\Gamma}{2\pi} \operatorname{grad} \theta \tag{61}$$

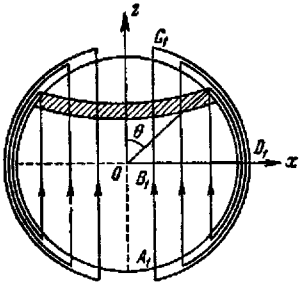
где θ есть угол, составляемый вектором R с осью Ox. Полученные формулы определяют, как легко видеть, вихрь интенсивности Γ в точке Q_0 плоскости xy. В самом деле, из формулы (61) ясно, что вне этой точки поле всюду безвихревое. Если же составить циркуляцию вектора a по окружности радиуса R с центром в точке Q_0, то она окажется равной, в силу формулы (60),

$$\frac{\Gamma}{2\pi R} \cdot 2\pi R = \Gamma$$

Опять-таки, мы сразу могли бы написать выражение (60) для поля вихря интенсивности Γ на плоскости, но мы хотели показать, что к этому

выражению можно также прийти, исходя из общих формул для поля, вызываемого вихревою нитью.

11. Рассмотрим следующий пример, хорошо выясняющий понятие поверхностного вихря. Допустим, что мы имеем движение жидкости такого сорта: внутренность сферы радиуса R с центром в начале координат вращается с угловой скоростью ω около оси Oz, жидкость же вне этой сферы находится в покое. Направляя вектор угловой скорости ω по оси Oz, мы будем иметь для скорости жидкости внутри сферы выражение $\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, для скорости жидкости вне сферы $\mathbf{v} = 0$. В соответствии с этим для вихря жидкости получим внутри сферы значение $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\omega}$, а вне сферы значение $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 0$. Поэтому вихревые линии внутри сферы будут прямые линии, параллельные оси Oz, вне же сферы движение будет безвихревым. На первый взгляд кажется, что получилось противоречие с доказанной в § 16 теоремой о том, что вихревые линии не могут внутри жидкости ни начинаться, ни кончаться. Однако, это противоречие сразу падает, если только мы привлечем к рассмотрению поверхностные вихри.



Фиг. 79

Вводя сферические координаты r, θ, ψ с центром в O и осью Oz, мы видим, что скорость жидкости терпит разрыв на сфере $r = R$, притом равный по величине $\omega R \sin\theta$ и направленный по параллели. Как было выяснено в п. 7, это означает, что поверхностный вихрь в точках сферы направлен по меридиану и равен как раз $\omega R \sin\theta$, т. е. увеличивается от полюса к экватору. Рассмотрим пояс сферы, показанный на фиг. 79 и расположенный между параллелями, для которых θ принимает значения θ и $\theta + d\theta$. Легко видеть, что величина поверхности этого пояса равна $2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta$, проекция же его на экваториальную плоскость xy равна $2\pi R^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta$.

Поэтому через этот пояс изнутри сферы выходят $4\pi\omega R^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta$ вихревых линий. Выйдя из сферы, они сейчас же загибаются вдоль меридиана, как показано на чертеже.

В самом деле, через верхнюю параллель пояса, соответствующую значению дополнения широты, равному θ, проходит по вышеуказанному

$$\omega R \sin\theta \; 2\pi R \sin\theta = 2\pi\omega R^2 \sin^2\theta$$

вихревых линий, а через нижнюю параллель будет уже проходить

$$2\pi\omega R^2 \sin^2\theta + \frac{\partial (2\pi\omega R^2 \sin^2\theta)}{\partial\theta} d\theta = 2\pi\omega R^2 \sin^2\theta + 4\pi\omega R^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta$$

т. е. на $4\pi\omega R^2 \sin\theta \cos\theta\, d\theta$ вихревых линий больше. Схематически вид вихревых линий и их относительная густота показаны на фиг. 79.

§ 21. Переменные поля в сплошной среде

1. В этом параграфе мы рассмотрим ряд вопросов, относящихся к теории переменных полей, т. е. полей скалярных или векторных функций, зависящих от времени t.

Допустим, что мы рассматриваем некоторую сплошную среду, например жидкость или газ, находящуюся в движении. Для того чтобы знать движение этой среды, необходимо знать скорость $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ каждой частицы этой среды к каждому моменту времени.

В § 13 мы уже рассмотрели вопрос об изменении скалярных и векторных функций в том случае, когда приходится рассматривать движение некоторой сплошной среды. Мы установили следующие формулы для полных производных от скалярных и векторных функций:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi \tag{1}$$

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\,\mathbf{a} \tag{2}$$

В этих формулах левая часть представляет производную по времени от рассматриваемой функции, высчитанную в предположении, что значения функции вычисляются в различные моменты времени для одной и той же частицы, перемещающейся в пространстве вместе со всей сплошной средой. Как видно из формул (1) и (2), полная производная какой-либо функции состоит из двух частей: местной производной (первый член формулы), характеризующей изменение функции в данном месте пространства, и конвективного члена (второй член формулы), характеризующего изменение функции благодаря тому, что рассматриваемая частица переносится в пространстве.

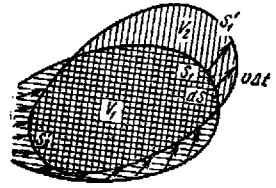
В первой половине настоящего параграфа мы рассмотрим вопрос о вычислении полных производных от интегралов от скалярных и векторных функций по *жидким объемам, поверхностям и линиям*. Мы называем при этом объем V жидким, если он во все время движения сплошной среды состоит *из одних и тех же частиц этой среды*. Ясно, что, вообще говоря, жидкий объем с течением времени будет деформироваться, так как частицы, его составляющие, двигаются, вообще говоря, с различными скоростями $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$. Поэтому, когда мы рассматриваем интеграл по жидкому объему, например,

$$I_3 = \int_V \varphi \, dV \tag{3}$$

где $\varphi(\mathbf{r}, t)$ — скалярная функция координат и времени, то при вычислении его производной необходимо учитывать не только изменение функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$, но и изменение самого объема V.

2. Вычислим теперь производную по времени от интеграла (3). По общему правилу, даем времени t приращение Δt; за промежуток времени Δt частицы, занимавшие к моменту времени t объем V, ограниченный

поверхностью S и заштрихованный на фиг. 80 горизонтальными черточками, заполнят в момент времени $t + \Delta t$ объем V', ограниченный поверхностью S' и заштрихованный на фиг. 80 вертикальными черточками. Обозначим теперь общую часть объемов V и V' через V_1, объем, заключенный между поверхностями S_1 и S_1' и образованный теми частицами, которые за время Δt вышли из поверхности S, через V_2, и, наконец, объем, заключенный между поверхностями S_2 и S_2' и образованный теми частицами, которые за время Δt вошли внутрь поверхности S, через V_3. Очевидно, что $V = V_1 + V_3$, $V' = V_1 + V_2$ и поэтому для приращения интеграла (3) за время Δt получаем выражение



Фиг. 80

$$\Delta I_3 = I_3(t + \Delta t) - I_3(t) = \int\limits_{V_1+V_2} \varphi(\mathbf{r}, t + \Delta t)\, dV - \int\limits_{V_1+V_3} \varphi(\mathbf{r}, t)\, dV =$$

$$= \int\limits_{V_1} [\varphi(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \varphi(\mathbf{r}, t)]\, dV + \int\limits_{V_2} \varphi(\mathbf{r}, t + \Delta t)\, dV - \int\limits_{V_3} \varphi(\mathbf{r}, t)\, dV \quad (4)$$

По теореме о среднем

$$\varphi(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \varphi(\mathbf{r}, t) = \Delta t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_{t+\theta\Delta t}$$

где $0 < \theta < 1$; кроме того, при $\Delta t \to 0$ объем V_1 обращается, очевидно, в V, поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{V_1} [\varphi(\mathbf{r}, t + \Delta t) - \varphi(\mathbf{r}, t)]\, dV = \int\limits_{V} \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dV$$

Если элемент поверхности S_1 обозначить через dS, то, как видно из фиг. 80, частицы, проходящие за время Δt через этот элемент, заполнят элемент объема V_2 в виде цилиндра с основанием dS и ребрами, величина и направление которых определяются вектором $\mathbf{v}\,\Delta t$. Объем этого элемента равен $v_n\,\Delta t\,dS$ и поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{V_2} \varphi(\mathbf{r}, t + \Delta t)\, dV = \int\limits_{S_1} \varphi v_n\, dS$$

На части поверхности S_2 нормальная составляющая скорости v_n отрицательна, поэтому элемент объема V_3 будет равен $-v_n \Delta t\, dS$ и поэтому

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t} \int\limits_{V_3} \varphi(\mathbf{r}, t)\, dV = -\int\limits_{S_2} \varphi v_n\, dS$$

Принимая все полученные формулы во внимание и составляя

$$\frac{dI_3}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta I_3}{\Delta t}$$

мы и получим, замечая, что $S = S_1 + S_2$, полную производную от интеграла I_3:

$$\frac{d}{dt}\int_V \varphi\, dV = \int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dV + \oint_S \varphi v_n\, dS \tag{5}$$

Мы нарочно подробно провели все рассуждение; на самом деле все это рассуждение коротко можно передать следующими словами. Изменение интеграла I_3 происходит от двух причин: от изменения функции φ и от изменения объема V. Если бы изменения объема V не происходило, то за время dt функция φ получила бы приращение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dt$$

а интеграл I_3 приращение

$$\int_V \frac{\partial \varphi}{\partial t}\, dV\, dt$$

что и дает первый член формулы (5). Пусть теперь функция φ не меняется, а изменяется только объем V; это может происходить только потому, что некоторые частицы выходят или входят через поверхность S.

Через элемент dS этой поверхности за время dt выходит объем сплошной среды $v_n\, dt\, dS$; это увеличение объема V доставит интегралу I_3 приращение $\varphi v_n\, dt\, dS$, а все приращение интеграла I_3, происшедшее от изменения объема V, будет, очевидно, равно

$$\oint_S \varphi v_n\, dS\, dt$$

откуда получается второй член формулы (5).

По теореме Гаусса-Остроградского, поверхностный интеграл можно преобразовать в объемный

$$\oint_S \varphi v_n\, dS = \int_V \operatorname{div}(\varphi\ \mathbf{v})\, dV$$

Следовательно, выражение для полной производной от объемного интеграла можно написать и в таком виде:

$$\frac{d}{dt}\int_V \varphi\, dV = \int_V \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi\, \mathbf{v})\right] dV \tag{6}$$

Наконец, воспользовавшись формулой

$$\operatorname{div}(\varphi, \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varphi$$

и формулой (1), можно переписать (6) также в следующем виде

$$\frac{d}{dt}\int_V \varphi dV = \int_V \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v}\right) dV \tag{7}$$

Совершенно аналогичная формула получается для векторной функции $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$:

$$\frac{d}{dt}\int_V \mathbf{a}\,dV = \int_V \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)dV \tag{8}$$

3. В качестве применения полученной формулы дадим новый вывод гидродинамического уравнения неразрывности (один вывод мы уже имели в § 14).

Рассматривая движение газа, обозначим через $\rho(\mathbf{r}, t)$ его плотность. Тогда ясно, что масса M газа, заключенного в объеме V, будет

$$M = \int_V \rho\,dV$$

Если объем V — жидкий, то масса газа M должна сохранять постоянное значение и, следовательно,

$$\frac{dM}{dt} = 0$$

Применяя формулу (7), получим

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)dV = 0$$

Так как объем V можно брать совершенно произвольным, то получается, что

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\,\mathrm{div}\,\mathbf{v} = 0 \tag{9}$$

А это и есть уравнение неразрывности.

В качестве второго примера примем в формуле (7) $\varphi = 1$, тогда для величины жидкого объема V получим формулу

$$\frac{dV}{dt} = \int_V \mathrm{div}\,\mathbf{v}\,dV \tag{10}$$

В частности, если принять жидкий объем бесконечно малым и равным δV, то получим формулу

$$\frac{1}{\delta V}\frac{d\delta V}{dt} = \mathrm{div}\,\mathbf{v} \tag{11}$$

4. Перейдем теперь к вычислению полной производной от поверхностного интеграла по какой-либо жидкой незамкнутой поверхности S:

$$I_2 = \int_S a_n dS \tag{12}$$

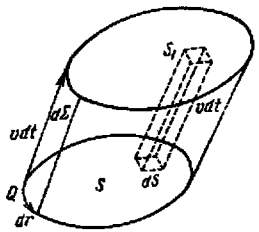
Изменение потока вектора $\mathbf{a}$ через жидкую поверхность S может происходить от двух причин: 1) от изменения самого вектора $\mathbf{a}$ и 2) от изменения жидкой поверхности S. От изменения вектора $\mathbf{a}$ в зависимости от времени t получается приращение интеграла

$$d_1 I_2 = \int_S \frac{\partial a_n}{\partial t} dS\,dt \tag{13}$$

Пусть теперь вектор a не меняется, а изменяется только жидкая поверхность S; новое положение ее через промежуток времени dt обозначим через S_1; тогда, очевидно,

$$d_2 I_2 = \int_{S_1} a_n dS - \int_S a_n dS \tag{14}$$

Обозначим контур поверхности S через L (фиг. 81), за время dt этот контур при своем смещении опишет поверхность Σ, которая вместе с поверхностями S и S_1 образует замкнутую поверхность. Если выбранное нами направление нормали является внешней нормалью для S_1, то оно будет внутренней нормалью для S. Применим теперь к объему, ограниченному поверхностями S, S_1 и Σ, формулу Гаусса-Остроградского:



Фиг. 81

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a}\, dV = \int_{S_1} a_n dS - \int_S a_n dS + \int_\Sigma \mathbf{a} \cdot d\Sigma \tag{15}$$

Ясно, что элементом поверхности $d\Sigma$ является площадка с ребрами $d\mathbf{r}$ (элемент кривой L) и $\mathbf{v}\,dt$, следовательно

$$d\Sigma = d\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dt$$

Далее для элемента объема dV, очевидно, имеем (фиг. 81)

$$dV = dS\, v_n\, dt \tag{16}$$

Поэтому из (15) получаем:

$$\int_{S_1} a_n\, dS - \int_S a_n\, dS = \int_S \operatorname{div} \mathbf{a} v_n\, dS\, dt - \int_L \mathbf{a} \times (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dt) \tag{17}$$

Наконец, мы имеем согласно формуле для векторно-скалярного произведения

$$\int_L \mathbf{a} \cdot (d\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dt) = -dt \int_L (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \tag{18}$$

и на основании формулы Стокса

$$\int_L (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}_n (\mathbf{a} \times \mathbf{v})\, dS \tag{19}$$

На основании (14), (17), (18) и (19) получим:

$$d_2 I_2 = \int_S [v_n \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{rot}_n (\mathbf{a} \times \mathbf{v})]\, dS\, dt \tag{20}$$

и, вспоминая еще (13), получим окончательный результат

$$\frac{d}{dt} \int_S a_n\, dS = \int_S \left(\frac{\partial a_n}{\partial t} + v_n \operatorname{div} \mathbf{a} + \operatorname{rot}_n (\mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right) dS \tag{21}$$

В случае замкнутости поверхности S, контур L стягивается в точку, следовательно, интегралы (19) обращаются в нуль, и формула (21) упрощается

$$\frac{d}{dt}\oint_S a_n dS = \oint_S \left(\frac{\partial a_n}{\partial t} + v_n \operatorname{div} \mathbf{a}\right) dS \tag{22}$$

Формулу (21) можно преобразовать еще дальше, если воспользоваться формулой (6) § 17:

$$\operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{v}) = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{v} - \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{a}$$

В самом деле, мы имеем в силу этой формулы, что

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{v}\operatorname{div}\mathbf{a} + \operatorname{rot}(\mathbf{a}\times\mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{v} =$$

$$= \frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{v}$$

Поэтому формула (21) может быть переписана в следующей форме

$$\frac{d}{dt}\int_S a_n dS = \int_S \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS \tag{23}$$

5. Переходим к применениям полученных в предыдущем пункте формул. Выведем прежде всего условие того, чтобы поток вектора $\mathbf{a}$ через любую жидкую площадку S не менялся бы с течением времени. В этом случае

$$\frac{d}{dt}\int_S a_n dS = 0 \tag{24}$$

и, следовательно, формула (23) приводит нас к условию:

$$\int_S \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS = 0 \tag{25}$$

причем это равенство должно иметь место для любой поверхности S.

Отсюда следует, что во всех точках рассматриваемой области должно быть

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{26}$$

Чтобы выяснить значение полученного нами условия (26), введем новое понятие сохраняемости векторных линий.

Пусть имеем нестационарное поле вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$. Проведем векторные линии этого вектора, отвечающие моменту t, т. е. линии, в каждой точке которых вектор $\mathbf{a}$ имеет направление касательной к этой линии.

Мы уже знаем (§ 11), что уравнением векторных линий является

$$d\mathbf{r}\times\mathbf{a} = 0 \tag{27}$$

или в декартовых координатах

$$\frac{dx}{a_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{a_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{a_z(x, y, z, t)}$$

При этом время t, при интегрировании этих уравнений, мы рассматриваем как параметр, имеющий фиксированное значение.

Проведем теперь векторные линии вектора a, соответствующие другому моменту времени t'. Тогда могут иметь место два случая.

Вообще говоря, рассматривая какую-нибудь векторную линию, соответствующую моменту t', мы обнаружим, что она состоит из частиц среды, которые в момент t принадлежали различным векторным линиям. Но, в частном случае, может оказаться, что частицы, составляющие к моменту t' векторную линию, в момент t тоже образовывали векторную линию. Если это последнее обстоятельство имеет место для любых моментов времени t и t' и для любых векторных линий данного вектора a, то мы говорим, что векторные линии вектора a обладают свойством сохраняемости.

В случае, если векторные линии вектора a обладают свойством сохраняемости, каждая векторная трубка будет во все время движения сплошной среды оставаться векторной трубкой, так как она ограничена совокупностью векторных линий, каждая из которых остается все время векторной линией. Но в этом случае опять-таки можно различить два подслучая: первым подслучаем будет тот, когда интенсивность векторной трубки меняется с течением времени; вторым же подслучаем будет тот, когда интенсивность любой векторной трубки во все время движения сохраняет свою величину. В этом последнем подслучае мы будем говорить, что интенсивности векторных трубок обладают свойством сохраняемости.

Докажем теперь две следующие теоремы.

Покажем прежде всего, что *условие, необходимое и достаточное для того, чтобы сохранялись как векторные линии вектора* a, *так и интенсивности векторных трубок, состоит в выполнении равенства*

$$\frac{da}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{a}\,\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{28}$$

во всей рассматриваемой области для всех рассматриваемых моментов времени t.

Покажем сначала необходимость условия (28). Итак, предположим, что векторные линии обладают свойством сохраняемости, так же как и интенсивности векторных трубок.

Возьмем теперь в какой-нибудь момент t_0 совершенно произвольную поверхность S_0, ограниченную контуром C_0.

Будем рассматривать эту поверхность S_0, как жидкую. Проведя через точки контура C_0 векторные линии, образуем векторную трубку K_0, которая с течением времени будет деформироваться, но все время, по условию, будет оставаться векторной трубкой K_t (фиг. 82). При этом поверхность S_0, являющаяся сечением первоначальной векторной трубки, тоже будет деформироваться, но тоже будет все время оставаться сечением S новой векторной трубки. Так как интенсивность векторной труб-

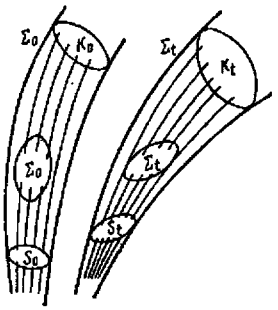
ки есть не что иное, как поток вектора a через сечение S_t этой трубки:

$$\Gamma = \int_{S_t} a_n(t)\, dS$$

и так как интенсивность векторной трубки по условию сохраняется, то должно выполняться условие (24), а следовательно и условие (25) для произвольной поверхности S_0. Выбирая любую точку и в ней любое направление n, возьмем малую площадку S, перпендикулярную к этому направлению, и применим к ней формулу (25): мы получим тогда, что

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{n} = 0 \quad (29)$$

для произвольного направления n. Отсюда непосредственно следует условие (28).



Фиг. 82

Докажем теперь достаточность условия (28). Предположим, что условие (28) выполнено, и рассмотрим в момент t_0 некоторую векторную поверхность Σ_0, т. е. такую поверхность, в каждой точке которой вектор a лежит в касательной плоскости к этой поверхности. Докажем что жидкая поверхность Σ_0, деформируясь, все время остается векторной поверхностью Σ_t. В самом деле, ограничим на поверхности Σ_0 кусок этой поверхности $\bar{\Sigma}_0$ произвольной кривой Γ_0 и рассмотрим поток вектора a через $\bar{\Sigma}_0$; очевидно, что

$$\int_{\bar{\Sigma}_0} a_n\, d\Sigma = 0 \quad (30)$$

ибо в каждой точке Σ_0 будет $a_n = 0$, так как вектор a лежит в касательной плоскости к поверхности Σ_0.

Применяя теперь формулу (23) и замечая, что правая часть этой формулы равна, по условию (28), нулю, получим, что

$$\frac{d}{dt}\int_{\bar{\Sigma}_t} a_n\, d\Sigma = 0 \quad (31)$$

следовательно интеграл

$$\int_{\bar{\Sigma}_t} a_n\, d\Sigma$$

во все время движения сохраняет постоянное значение, а так как в момент t_0 этот интеграл равнялся по (30) нулю, то во все время движения должно выполняться равенство

$$\int_{\bar{\Sigma}_t} a_n\, d\Sigma = 0 \quad (32)$$

Но это может быть, в силу произвола выбора куска $\bar{\Sigma}_t$ поверхности Σ_t, только тогда, когда в каждой точке поверхности Σ_t выполняется равенство $a_n = 0$, т. е. когда в каждой точке поверхности Σ_t вектор a лежит в касательной плоскости к этой поверхности.

Но это, по определению, и означает, что поверхность Σ_t есть векторная поверхность.

Нетрудно теперь видеть, что при соблюдении условия (28) каждая жидкая линия L будет все время векторной линией, если она является векторной линией в какой-нибудь момент t_0.

В самом деле, через положение L_0 жидкой линии к моменту t_0 можно провести две векторных поверхности Σ_0' и Σ_0'', пересекающихся по линии L_0. К моменту t жидкие поверхности Σ_0' и Σ_0'' перейдут в положения Σ_t' и Σ_t'', которые по вышесказанному тоже являются векторными поверхностями.

Жидкая линия L_0, являющаяся пересечением жидких поверхностей Σ_0' и Σ_0'', перейдет к моменту t в линию L_t пересечения жидких поверхностей Σ_t' и Σ_t''.

Линия L_t является векторной; в самом деле в каждой точке этой линии вектор a должен лежать как в касательной плоскости к поверхности Σ_t', так и в касательной плоскости к поверхности Σ_t'', а следовательно он должен быть направлен по касательной к линии L_t. А это последнее обстоятельство и является определяющим свойством векторной линии.

Итак, при выполнении условия (28) векторные линии обладают свойством сохраняемости.

Образуем теперь какую-нибудь векторную трубку K_0, соответствующую моменту времени t_0, и вычислим ее интенсивность

$$\Gamma_0 = \int_{S_0} a_n \, dS$$

где S_0 — сечение трубки K_0. К моменту t трубка K_0 перейдет в векторную трубку K_t с интенсивностью

$$\Gamma = \int_{S_t} a_n \, dS$$

где S_t — то сечение трубки K_t, в которое перешла жидкая поверхность S_0. Применим опять (23) а воспользуемся (28), в результате получим, что

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0$$

и следовательно $\Gamma = \text{const} = \Gamma_0$, т. е. интенсивность векторной трубки сохраняется во все время движения.

Таким образом при соблюдении условия (28) интенсивности векторных трубок обладают свойством сохраняемости. Высказанная нами теорема доказана полностью.

Докажем теперь вторую теорему, а именно, что *условие, необходимое для сохраняемости векторных линий вектора* **a**, *состоит в выполнении равенства*

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{a} = 0 \tag{33}$$

во всей рассматриваемой области для всех рассматриваемых моментов времени t.

Заметим прежде всего, что если сохраняются векторные линии, то, очевидно, сохраняются и векторные поверхности, и обратно.

Итак, предположим, что векторные поверхности обладают свойством сохраняемости; вообразим в момент t_0 какую-нибудь векторную поверхность Σ_0 и выделим на ней произвольный кусок $\bar{\Sigma}_0$, тогда по самому определению векторной поверхности

$$\int\limits_{\bar{\Sigma}_0} a_n d\Sigma = 0$$

К моменту t жидкая поверхность Σ_0 перейдет в поверхность Σ_t, по условию векторную, а $\bar{\Sigma}_0$ перейдет в $\bar{\Sigma}_t$. Ясно, что

$$\int\limits_{\bar{\Sigma}_t} a_n d\Sigma = 0$$

а тогда из формулы (23) следует, что

$$\int\limits_{\bar{\Sigma}_t} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{n}\,dS = 0$$

для любой *векторной* поверхности $\bar{\Sigma}_t$. Отсюда сразу выводим, что

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)\cdot\mathbf{n} = 0$$

для любого вектора **n**, *перпендикулярного к* **a**, так как всегда можно провести малую векторную поверхность $\bar{\Sigma}_t$, перпендикулярную в данной точке к такому вектору **n**.

Итак, все составляющие вектора

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}$$

по направлениям, перпендикулярным к **a**, равны нулю, а следовательно этот вектор должен иметь то же направление, что и вектор **a**. Следовательно

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{a}\,\mathrm{div}\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{a} = 0 \tag{34}$$

каковое условие совершенно эквивалентно условию (33).

Впоследствии мы докажем и достаточность условия (33) для сохраняемости векторных линий вектора **a**.

6. В качестве простого примера выведем условия сохраняемости линий тока. Линиями тока называются векторные линии вектора скорости v, так что их дифференциальными уравнениями являются

$$\frac{dx}{v_x(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v_y(x, y, z, t)} = \frac{dz}{v_z(x, y, z, t)} \tag{35}$$

Полагая в формуле (33) a = v и замечая, что по уравнению (2)

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}$$

можем переписать условие сохраняемости линий тока в виде

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} \times \mathbf{v} = 0 \tag{36}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \lambda \mathbf{v} \tag{37}$$

где $\lambda(\mathbf{r}, t)$ — скалярная функция координат и времени. Введем вместо λ другую функцию $\mu(\mathbf{r}, t)$ равенством

$$\lambda = \frac{\partial \lg \mu}{\partial t} = \frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t}, \qquad \mu = e^{\int \lambda dt}$$

и положим

$$\mathbf{v} = \mu \mathbf{w}$$

Тогда для определения w получим уравнение

$$\frac{\partial \mu}{\partial t}\mathbf{w} + \mu \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = \lambda \mu \mathbf{w}$$

или

$$\frac{\partial \mathbf{w}}{\partial t} = 0$$

Отсюда видно, что w не зависит от t и является, следовательно, функцией только от x, y, z. Итак, общим решением уравнения (36) является

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}, t) = \mu(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{w}(\mathbf{r}) \tag{38}$$

где μ — произвольная скалярная функция от r и t, а w (r) — произвольная векторная функция от r. При этом уравнения линий тока (35) принимают вид

$$\frac{dx}{w_x(x, y, z)} = \frac{dy}{w_y(x, y, z)} = \frac{dz}{w_z(x, y, z)}$$

Отсюда видно, что линии тока не зависят от времени и следовательно являются неподвижными.

Итак, мы нашли все движения, в которых сохраняются линии тока, и показали, что в этих движениях линии тока являются неподвижными линиями в пространстве.

В качестве второго примера рассмотрим вихревые линии, т. е. векторные линии вектора $\Omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ — вихря скорости жидкости.

В § 17 мы доказали, что если идеальная жидкость находится под действием консервативных сил и обладает тем свойством, что плотность жидкости является функцией от давления, то вектор Ω удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\Omega}{dt} - (\Omega \cdot \nabla)\mathbf{v} + \Omega \operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{39}$$

Сравнивая это уравнение с (28), мы можем теперь выяснить, что, собственно, означает уравнение (39). Оно выражает, что вихревые линии обладают свойством сохраняемости, причем интенсивности вихревых трубок также остаются с течением времени неизменными.

Итак, мы доказали *теорему Гельмгольца: в баротропной идеальной жидкости, находящейся под действием консервативных сил, как вихревые линии, так и интенсивности вихревых трубок обладают свойством сохраняемости.*

7. Проведем теперь вычисление полной производной от линейного интеграла вектора a по какой-либо незамкнутой кривой K (фиг. 83):

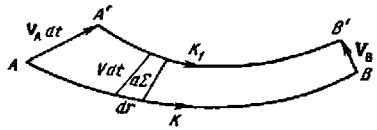
$$I_1 = \int_K \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \tag{40}$$

Полное изменение этого интеграла за промежуток времени dt слагается из двух частей; одна часть, происходящая от изменения вектора a за время dt на величину

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} dt$$

очевидно, равна

$$d_1 I_1 = \int_K \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} \cdot d\mathbf{r} \tag{41}$$



Фиг. 83

вторая же часть, происходящая от изменения жидкого контура за промежуток времени dt, равна, очевидно,

$$d_2 I_1 = \int_{K_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \int_K \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} \tag{42}$$

где K_1 — положение жидкого контура к моменту $t + dt$. Если конечные точки контура K суть A и B, а конечные точки контура K_1 — A' и B', то, принимая еще направление контура K_1 от A' к B' за положительное, мы увидим, что контуры K_1, $\overline{B'B} = -\mathbf{v}_B\, dt$, — K и $\overline{AA'} = \mathbf{v}_A\, dt$ образуют замкнутый контур, ограничивающий некоторую поверхность Σ.

Применим к этому контуру формулу Стокса:

$$\int_\Sigma \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\Sigma = \int_{K_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \int_K \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} - \mathbf{a}_B \cdot \mathbf{v}_B dt + \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{v}_A dt \tag{43}$$

Заметим теперь, что, как видно из фиг. 83, элемент поверхности $d\Sigma$ представляется по величине и направлению вектором

$$d\Sigma = \mathbf{v}\, dt \times d\mathbf{r}$$

и поэтому

$$\int_{\Sigma} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\Sigma = \int_{K} \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{v}\, dt \times d\mathbf{r}) = dt \int_{K} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r}$$

В силу этой формулы и в силу (43) равенство (42) принимает вид

$$d_2 I_1 = dt \left[\int_{K} (\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{a}_B \cdot \mathbf{v}_B - \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{v}_A \right] \tag{44}$$

и следовательно, мы получаем следующее выражение для полной производной от линейного интеграла

$$\frac{d}{dt} \int_{K} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right) \cdot d\mathbf{r} + \mathbf{a}_B \cdot \mathbf{v}_B - \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{v}_A \tag{45}$$

Если контур K замкнутый, то точки B и A совпадают, и поэтому предыдущая формула сильно упрощается

$$\frac{d}{dt} \oint_{K} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{K} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{v}) \right) \cdot d\mathbf{r} \tag{46}$$

В случае незамкнутого контура K формуле (45) можно дать другой вид. Для этого воспользуемся очевидным равенством

$$\mathbf{a}_B \cdot \mathbf{v}_B - \mathbf{a}_A \cdot \mathbf{v}_A = \int_{K} \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{r} \tag{47}$$

тогда вместо (45) получим

$$\frac{d}{dt} \int_{K} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K} \left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{v} + \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \right) \cdot d\mathbf{r} \tag{48}$$

Подынтегральному выражению можно придать другой вид, если воспользоваться формулой из § 17:

$$\operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{a}$$

В самом деле, мы получаем

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{v} + \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\, \mathbf{a} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

На основании формулы (2) первые два члена справа можно соединить вместе, так что получится

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \operatorname{rot} \mathbf{a} \times \mathbf{v} + \operatorname{grad} (\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{v}$$

и значит

$$\frac{d}{dt} \int_{K} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \int_{K} \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\, \mathbf{v} + \mathbf{a} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} \right) \cdot d\mathbf{r} \tag{49}$$

8. В качестве применения последней формулы рассмотрим вопрос об изменении циркуляции скорости в жидкости. С этой целью положим в (49) $\mathbf{a} = \mathbf{v}$ и заметим, что по § 17 (10) мы имеем формулу

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \mathbf{v}\times\operatorname{rot}\mathbf{v} = \operatorname{grad}\frac{v^2}{2}$$

Поэтому из (19) получаем

$$\frac{d}{dt}\int_K \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_K \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r} + \int_K \operatorname{grad}\frac{v^2}{2}\cdot d\mathbf{r} \tag{50}$$

Если контур K замкнутый, то последний интеграл пропадает, и мы получаем простую и вместе с тем важную формулу:

$$\frac{d}{dt}\oint_K \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \oint_K \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r} \tag{51}$$

составляющую содержание следующей теоремы: *производная по времени от циркуляции скорости по замкнутому жидкому контуру K равна циркуляции от ускорения по тому же контуру.*

Ввиду важности формулы (51) дадим другое доказательство ее.

Для ясности, будем направленный элемент кривой K обозначать через $\delta\mathbf{r}$, а не через $d\mathbf{r}$, как до сих пор, и введем обозначение

$$\Gamma = \oint_K \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r}$$

Составляем теперь полную производную по времени от Γ, для чего берем полную производную по времени от каждого элемента этого интеграла (нужно брать *полную* производную, ибо мы считаем линию K жидкой):

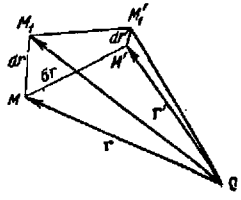
$$\frac{d(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{v}\cdot\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt}$$

Докажем теперь, что

$$\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \delta\mathbf{v}$$

В самом деле, если (фиг. 84)

$$\delta\mathbf{r} = \overline{MM'} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$$



Фиг. 84

где $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}$ радиусы-векторы точек M и M' относительно какого-нибудь произвольно выбранного начала координат O, то

$$\frac{d\delta\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}'}{dt} - \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}' - \mathbf{v} = \delta\mathbf{v}$$

ибо производная по времени от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ есть как раз вектор скорости $\mathbf{v}$, разность же $\mathbf{v}' - \mathbf{v}$ представляет изменение скорости при переходе от точки M к M'. Итак

$$\frac{d(v\cdot\delta\mathbf{r})}{dt} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} + \mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} + \frac{1}{2}\delta(\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})$$

и, следовательно,

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \oint_K \frac{d(\mathbf{v}\cdot\delta\mathbf{r})}{dt} = \oint_K \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot\delta\mathbf{r} + \frac{1}{2}\oint_K \delta v^2 = \oint_K \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r}$$

что и доказывает вновь формулу (51).

Из формулы (51) очень легко вывести *теорему Томсона*:

Если движение идеальной жидкости происходит под действием сил, имеющих однозначный потенциал, и если плотность есть функция давления (в частности, если жидкость несжимаема), то циркуляция скорости по любому жидкому контуру во все время движения остается постоянной.

В самом деле, при указанных в теореме условиях основные уравнения гидродинамики могут быть написаны, как показано в § 17, в виде

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \operatorname{grad}(U - P) \tag{52}$$

Поэтому правая часть формулы (51) принимает вид

$$\oint_K \frac{d\mathbf{v}}{dt}\cdot d\mathbf{r} = \oint_K \operatorname{grad}(U - P)\cdot d\mathbf{r}$$

и по известному свойству градиента обращается в нуль. Итак

$$\frac{d}{dt}\oint_K \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = 0 \tag{53}$$

Отсюда вытекает, что

$$\oint_K \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \text{const} \tag{54}$$

т. е. циркуляция скорости по любому жидкому контуру остается постоянной.

Этот же самый результат можно получить и непосредственно из формулы (46), полагая в последней $\mathbf{a} = \mathbf{v}$:

$$\frac{d}{dt}\oint_K \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \oint_K \left(\frac{d\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v}\right)\cdot d\mathbf{r} \tag{55}$$

Но в § 17 мы видели, что при соблюдении условий теоремы Томсона

$$\frac{\partial\mathbf{v}}{\partial t} + \operatorname{rot}\mathbf{v}\times\mathbf{v} = \operatorname{grad}\Pi = \operatorname{grad}\left(U - P - \frac{1}{2}v^2\right)$$

следовательно, правая часть формулы (55) обращается в нуль, и мы опять восстанавливаем формулы (53) и (54).

Так как

$$\oint_K \mathbf{v}\cdot d\mathbf{r} = \int_S \operatorname{rot}_n \mathbf{v}\, dS$$

где S есть поверхность, опирающаяся на контур K, то, путем применения рассуждений, совершенно аналогичных тем, которые были приведены

в пункте 5, можно доказать, что при соблюдении условий теоремы Томсона, вихревые линии обладают свойством сохраняемости, также как и интенсивности вихревых трубок, т. е. можно вновь доказать теоремы Гельмгольца, полученные нами в п. 6.

9. В этом пункте мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с изучением уравнения (c — постоянное число, $\rho(x, y, z, t)$ — заданная функция):

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\rho(x, y, z, t) \tag{56}$$

левую часть которого мы будем иногда обозначать знаком $\square\varphi$:

$$\square\varphi=\Delta\varphi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} \tag{57}$$

В § 17 мы видели, что изучение малых колебаний сжимаемой жидкости при отсутствии внешних сил сводится к изучению уравнения

$$\square\varphi=0 \tag{58}$$

которое называется **волновым уравнением**, так как в движении жидкости, определяемом этим уравнением, возмущения распространяются во все стороны со скоростью, равной c. При $c=\infty$ уравнение (58) превращается в уравнение Лапласа, а уравнение (56) в уравнение Пуассона. Имея это в виду, мы постараемся применить к исследованию уравнений (56) и (58) те же методы, которые мы использовали при решении уравнений Пуассона и Лапласа.

Мы видели, что решением уравнения Пуассона

$$\Delta\varphi=\rho(x, y, z) \tag{59}$$

является Ньютонов потенциал

$$\varphi(x, y, z)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta)\,dV}{r} \tag{60}$$

где r — расстояние между точкой $P(x, y, z)$ и переменной точкой $Q(\xi, \eta, \zeta)$, принадлежащей тому объему, по которому производится интегрирование. При этом функция $\frac{1}{r}$ обладает тем замечательным свойством, что рассматриваемая, как функция точки P, она удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta\frac{1}{r}=0 \tag{61}$$

всюду, кроме точки Q.

Попробуем обобщить эти результаты на случай неоднородного волнового уравнения (56). Роль функции $\frac{1}{r}$ должна здесь играть такая функция $\Phi(r, t)$, которая всюду, кроме точки Q, удовлетворяет уравнению

$$\Delta\Phi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{62}$$

Возьмем точку Q за начало сферических координат, так что положение точки P относительно точки Q определяется координатами r, θ, ψ. Переписав уравнение (62) в сферических координатах и замечая, что Φ, по условию, не зависит от θ и ψ, найдем уравнение

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{63}$$

Отметим теперь одно простое, но важное преобразование

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2} \tag{64}$$

доказательство которого не представляет ни малейших затруднений.

Помножая уравнение (63) на r, можем переписать его в виде

$$\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial r^2}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2(r\Phi)}{\partial t^2}=0 \tag{65}$$

Легко теперь видеть, что функция

$$r\Phi\,(r,\,t)=f\left(t-\frac{r}{c}\right) \tag{66}$$

где f есть произвольная функция своего аргумента, есть решение уравнения (65). Итак, мы приходим к заключению, что роль функции $\frac{1}{r}$ для обобщенного волнового уравнения (56) должна играть функция

$$\Phi\,(r,\,t)=\frac{f(t-r/c)}{r} \tag{67}$$

Чтобы выяснить механическое значение этой функции, вспомним, что в той задаче о малых колебаниях сжимаемой жидкости, решение которой приводится к исследованию уравнения (58), вектор скорости определяется формулой

$$\mathbf{v}=\operatorname{grad}\varphi \tag{68}$$

Но

$$\operatorname{grad}\frac{f(t-r/c)}{r}=-\left\{\frac{1}{r^2}f\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{rc}f'\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\}\operatorname{grad}r=$$

$$=-\frac{\mathbf{r}}{r^3}\left\{f\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}f'\left(t-\frac{r}{c}\right)\right\} \tag{69}$$

При малых r вторым членом в скобках можно пренебречь в сравнении с первым. Поэтому вблизи полюса Q мы имеем приближенное равенство

$$V=-\frac{f(t)\,\mathbf{r}}{r^3} \tag{70}$$

Но это равенство соответствует, как мы знаем, источнику обильности $-4\pi f(t)$. Следовательно движение жидкости, имеющее потенциал скорости (67), можно себе представлять происходящим в силу того, что в полюсе Q находится точечный источник интенсивности $-4\pi f(t)$, *меняющейся с течением времени*. Однако, в силу сжимаемости жидкости,

эти изменения интенсивности источника не сразу передаются на всю бесконечную жидкость; в самом деле, из формулы (67) видно, что в точке P, отстоящей от точки Q на расстоянии r, сказывается та интенсивность источника, которая имела место в момент $t - r/c$; а так как r/c есть как раз время, необходимое для пробега расстояния r со скоростью c, то можно сказать, что первоначальное возмущение в точке Q достигает какой-либо точки P с запаздыванием, равным как раз времени пробега от Q до P со скоростью c. Поэтому выражение (67) можно назвать *запаздывающим потенциалом*. Заметим, что так как значения функции (67) одинаковы для фиксированного значения r, то движение, определяемое формулой (67), представляет *сферическую волну*.

Принимая теперь во внимание, что решение уравнения Пуассона (59) дается Ньютоновым потенциалом (60), мы можем ожидать, что решение уравнения (56) может быть представлено в виде *запаздывающего Ньютонова потенциала*:

$$\varphi(x, y, z, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\infty}\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t - r/c)\,dV}{r} \tag{71}$$

В § 19 мы проверили непосредственным вычислением, что функция (49) удовлетворяет уравнению (48). Повторим теперь это вычисление для функции (71). При этом мы будем предполагать, что функция ρ, ее первые частные производные и вторая частная производная, взятая два раза по t, непрерывны и ограничены всюду, за исключением конечного числа поверхностей, на которых они могут терпеть разрывы, и что на бесконечности ρ является бесконечно малой величиной порядка не ниже третьего.

Для большей ясности, мы условимся в следующем обозначении: символом $[f]$ мы будем обозначать функцию от ξ, η, ζ, t, в которой вместо t подставлено значение $t - r/c$ (таким образом $[f]$ есть запаздывающее значение f).

Выбрав теперь точку P_0, разобьем в (71) область интегрирования на две части: на сферу V_1 радиуса ε с центром в точке P_0 и на всю остающуюся часть пространства и введем обозначения

$$\varphi_1(P, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_1}\frac{[\rho]\,dV}{r}$$

$$\varphi_2(P, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_2}\frac{[\rho]\,dV}{r} \tag{72}$$

Когда точка P меняется внутри сферы V_1, то подынтегральная функция второго интеграла не обращается в бесконечность, и можно производить дифференцирование функции φ_2 по x, y, z, t под знаком интеграла. Поэтому

$$\Box\varphi_2(P, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_2}\Box_P\frac{[\rho]}{r}dV$$

и так как при этом дифференцировании точка Q считается постоянной, а функция (67) удовлетворяет волновому уравнению, то

$$\Box\varphi_2(P, t) = 0 \tag{73}$$

Переходим теперь к вычислению $\Box\varphi_1(P, t)$. Будем при этом предполагать, что точка (P_0, t), а следовательно, при достаточно малом ε и весь объем V_1 лежит внутри той области, где функция ρ, ее первые производные и вторая производная, взятая два раза по t, непрерывны. Вычисление проще всего произвести таким способом. Разобьем $\varphi_1(P, t)$ на две части

$$\varphi_1(P, t) = \varphi_{11}(P, t) + \varphi_{12}(P, t) \tag{74}$$

где

$$\varphi_{11}(P, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\rho(Q, t)\,dV}{r} \tag{75}$$

есть обыкновенный Ньютонов потенциал, а

$$\varphi_{12}(P, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\rho(Q, t - r/c) - \rho(Q, t)}{r}dV \tag{76}$$

причем числитель подынтегральной функции вместе с r обращается в нуль, а сама подынтегральная функция остается конечной.

Мы уже знаем, что

$$\triangle\varphi_{11}(P, t) = \rho(P, t) \tag{77}$$

Так как в интеграле для $\varphi_{12}(P, t)$ подынтегральная функция не обращается в бесконечность, то вычисление $\triangle\varphi_{12}(P, t)$ можно произвести очень просто. Прежде всего

$$\operatorname{grad}\varphi_{12}(P, t) =$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{V_1}\left\{\frac{1}{cr}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(Q, t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r^2}\left[\rho\left(Q, t - \frac{r}{c}\right) - \rho(Q, t)\right]\right\}\operatorname{grad} r\,dV \tag{78}$$

причем легко видеть, что подынтегральная функция остается ограниченной при $r \to 0$; в самом деле, разложим ее в ряд Тейлора, ограничившись первыми двумя членами

$$\frac{1}{cr}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(Q, t - \frac{r}{c}\right) = \frac{1}{cr}\frac{\partial\rho(Q, t)}{\partial t} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho\left(Q, t - \frac{\vartheta r}{c}\right)$$

$$\frac{1}{r^2}\left\{\rho\left(Q, t - \frac{r}{c}\right) - \rho(Q, t)\right\} =$$

$$= \frac{1}{r^2}\left\{-\frac{r}{c}\frac{\partial\rho(Q, t)}{dt} + \frac{1}{2}\frac{r^2}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho\left(Q, t - \frac{\vartheta_1 r}{c}\right)\right\}$$

где ϑ и ϑ_1 положительные числа, меньшие 1. Сложение этих равенств показывает, что подынтегральная функция в (78) остается ограничен-

ной. Можно поэтому отыскивать $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi_{12}(P, t)$, дифференцируя под знаком интеграла. Пользуясь формулой задачи 143 и замечая, что проекция $\operatorname{grad} r$ на направление r равна 1, сразу найдем, что

$$\Delta\varphi_{12}(P, t) = \frac{1}{4\pi}\int_{V_1}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial t}\rho\left(Q, t-\frac{r}{c}\right)+\right.$$

$$\left.+\rho\left(Q, t-\frac{r}{c}\right)-\rho(Q, t)\right\}dV = -\frac{1}{4\pi c^2}\int_{V_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho\left(Q, t-\frac{r}{c}\right)\frac{dV}{r} \qquad (79)$$

Сложение (77) и (79) дает нам, что

$$\Delta\varphi_1(P, t) = \rho(P, t) - \frac{1}{4\pi c^2}\int_{V_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho\left(Q, t-\frac{r}{c}\right)\frac{dV}{r} \qquad (80)$$

и так как очевидно, что

$$\frac{\partial^2\varphi_1(P, t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{4\pi}\int_{V_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\rho\left(Q, t-\frac{r}{c}\right)\frac{dV}{r} \qquad (81)$$

то сразу находим, что

$$\Box\varphi_1(P, t) = \rho(P, t) \qquad (82)$$

Принимая еще во внимание (73), приходим к окончательному выводу

$$\Box\varphi(P, t) = \rho(P, t) \qquad (83)$$

т. е. *решением неоднородного волнового уравнения (83) является запаздывающий Ньютонов потенциал (71).*

10. Наряду с запаздывающим объемным потенциалом (71) мы можем рассматривать также и запаздывающие потенциалы простого слоя

$$\int_S\frac{1}{r}\sigma\left(\xi, \eta, \zeta, t-\frac{r}{c}\right)dS = \int_S\frac{[\sigma]\,dS}{r} \qquad (84)$$

или запаздывающие потенциалы двойного слоя, получающиеся от распределения запаздывающих дублетов вдоль некоторой поверхности S.

При этом запаздывающий потенциал дублета определяется следующим образом.

Допустим, что запаздывающий потенциал, происходящий от источника, находящегося в точке Q (фиг. 68), есть

$$\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t-r/c)}{r}$$

сдвинем *этот же самый источник*, с его распределением интенсивности во времени, в бесконечно близкое положение Q' и образуем разность

$$\frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t-r'/c)}{r'} - \frac{\rho(\xi, \eta, \zeta, t-r/c)}{r} \qquad (85)$$

т. е. у источника в Q' будем брать то запаздывание, которое соответствует именно положению Q'. Обозначим опять $\overrightarrow{QQ'} = \mathbf{r}'-\mathbf{r} = d\mathbf{r} = \varepsilon' s$

и положим, что при бесконечном сближении источников ρ растет таким образом, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon \rho (\xi, \eta, \zeta, t) = m (\xi, \eta, \zeta, t)$$

Разность (85) будет, очевидно, в пределе равна

$$m\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} - \frac{1}{cr} \frac{\partial}{\partial t} m\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) \frac{\partial r}{\partial s}$$

Это выражение мы условимся обозначать через

$$\frac{\delta}{\delta s} \frac{[m]}{r} = [m] \frac{\partial}{\partial s} \frac{1}{r} - \frac{1}{cr} \left[\frac{\partial m}{\partial t}\right] \frac{\partial r}{\partial s} \tag{86}$$

В соответствии с формулой (86) под запаздывающим потенциалом двойного слоя мы должны понимать выражение

$$\varphi (P, t) = \int_S \frac{\delta}{\delta n} \frac{[\eta]}{r} dS = \int_S \left\{[\eta] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} - \frac{1}{cr} \left[\frac{\partial \eta}{\partial t}\right] \frac{\partial r}{\partial n}\right\} dS \tag{87}$$

В § 19 мы вывели формулу, выражающую значение гармонической функции φ внутри некоторой области V через значения функции φ и ее нормальной производной на границе S этой области:

$$\varphi (P) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial n} - \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r}\right) dS$$

Мы выведем теперь для случая, когда функция φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\Delta \varphi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0 \tag{88}$$

аналогичную формулу

$$\varphi (P, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{\frac{1}{r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right] - \frac{\delta}{\delta n} \frac{[\varphi]}{r}\right\} dS \tag{89}$$

или, несколько подробнее,

$$\varphi (P, t) = \frac{1}{4\pi} \oint_S \left\{\frac{1}{r} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right] - [\varphi] \frac{\partial}{\partial n} \frac{1}{r} + \frac{1}{cr} \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right] \frac{\partial r}{\partial n}\right\} dS \tag{90}$$

Эта формула имеет место, если точка P лежит внутри поверхности S; если же P лежит вне поверхности S, то интеграл в правой части формулы (90) обращается в нуль.

Прежде чем доказывать формулу (89), выясним ее смысл. Мы предположили, что внутри поверхности S выполняется уравнение (88); это значит, иными словами, что внутри поверхности S источники отсутствуют; следовательно все имеющиеся источники находятся вне поверхности S. Но правая часть формулы (89) представляет сумму потенциалов простого и двойного слоя; иными словами формула (89) дает выражение значений функции φ внутри поверхности S через фиктивные источники, распределенные по поверхности S.

С такой точки зрения формула (89) является математическим выражением принципа Гюйгенса в форме, приданной последнему Кирхгоффом, которому принадлежит формула (89).

Перейдем теперь к доказательству формулы (89). Для этого применим формулу (43) § 19 к функции

$$[\varphi] = \varphi\left(\xi, \eta, \zeta, t - \frac{r}{c}\right) = \varphi\left(Q, t - \frac{r}{c}\right)$$

где $r = PQ$ — расстояние между неподвижной точкой P и переменной точкой Q:

$$\varphi(P, t) = \varphi(x, y, z, t) =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_V \frac{1}{r}\,\triangle[\varphi]\,dV + \frac{1}{4\pi}\oint_S \left(\frac{1}{r}\frac{\partial[\varphi]}{\partial n} - [\varphi]\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r}\right)dS \qquad (91)$$

Под знаком интеграла $[\varphi]$ рассматривается, как функция точки $Q(\xi, \eta, \zeta)$, входящей как явно, так и через посредство r, поэтому, вычисляя по правилу дифференцирования сложных функций, находим

$$\operatorname{grad}[\varphi] = \operatorname{grad}\varphi\left(Q, t - \frac{r}{c}\right) = [\operatorname{grad}\varphi] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\operatorname{grad} r \qquad (92)$$

Отсюда следует, что на поверхности S

$$\frac{\partial[\varphi]}{\partial n} = \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] - \frac{1}{c}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n} \qquad (93)$$

Введем теперь для большей ясности сферические координаты r, θ, ψ с центром в точке P и введем сверх того обозначение

$$\tau = t - \frac{r}{c} \qquad (94)$$

Тогда легко будет вычислить значение функции $\triangle[\varphi]$, где

$$[\varphi] = \varphi\left(Q, t - \frac{r}{c}\right) = \varphi(r, \theta, \psi, \tau)$$

В самом деле, по формуле (41) § 18 мы имеем, считая τ не зависящим от r

$$\triangle\varphi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\psi^2} \qquad (95)$$

Но если нам надо вычислить $\triangle[\varphi]$, то τ является функцией (94) от r, поэтому в этом случае

$$\frac{\partial[\varphi]}{\partial r} = \frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\left(-\frac{1}{c}\right) = \frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial[\varphi]}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\right] - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial\tau}\left[r^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial r} - \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}\right)\right] =$$

$$= \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) - 2\frac{r^2}{c}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r\,\partial\tau} - \frac{2r}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + \frac{r^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\tau^2}$$

Сравнивая это выражение с (95), получим, что

$$\triangle [\varphi] = \triangle \varphi - \frac{2}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial \tau} - \frac{2}{cr}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2} \tag{96}$$

Но, по условию, функция φ удовлетворяет волновому уравнению

$$\triangle \varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}$$

поэтому мы находим, что

$$\frac{\triangle [\varphi]}{r} = -\frac{2}{cr^2}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau} - \frac{2}{cr}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial \tau} + \frac{2}{c^2 r}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}$$

Заметим теперь легко устанавливаемые формулы

$$\frac{1}{r^2} = \operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^2}, \quad \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right] = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r\, \partial \tau} - \frac{1}{c}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial \tau^2}$$

Тогда предыдущее равенство можно записать, воспользовавшись еще формулой (2) § 17 в виде

$$\frac{\triangle [\varphi]}{r} = -\frac{2}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{2}{cr}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right] =$$

$$= -\frac{2}{c}\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\operatorname{div}\frac{\mathbf{r}}{r^2} - \frac{2}{c}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\cdot \operatorname{grad}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right]\right) = -\frac{2}{c}\operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right]\right)$$

Применим теперь формулу Гаусса-Остроградского к объему V_ε, получаемому из объема V путем выкидывания шара малого радиуса ε с центром в точке P и ограниченного сферой Σ. Тогда получим

$$\int\limits_{V_\varepsilon} \frac{\triangle [\varphi]}{r}\, dV = -\frac{2}{c}\int\limits_{V_\varepsilon} \operatorname{div}\left(\frac{\mathbf{r}}{r^2}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right]\right) dV =$$

$$= -\frac{2}{c}\oint\limits_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right]\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r}\, dS - \frac{2}{c}\oint\limits_\Sigma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right]\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r}\, dS$$

На сфере Σ будет $r = \varepsilon$, поэтому при $\varepsilon \to 0$ подынтегральная функция последнего интеграла будет порядка $\frac{1}{\varepsilon}$, вся же площадь сферы Σ равна $4\pi\varepsilon^2$; нетрудно отсюда заключить, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \oint\limits_\Sigma \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right]\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r}\, dS = 0$$

Поэтому

$$\int\limits_V \frac{\triangle [\varphi]}{r}\, dV = -\frac{2}{c}\oint\limits_S \left[\frac{\partial \varphi}{\partial \tau}\right]\frac{\cos(\mathbf{r}, \mathbf{n})}{r}\, dS = -\frac{2}{c}\oint\limits_S \frac{1}{r}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}\, dS \tag{97}$$

Собирая формулы (91), (93) и (97), мы и докажем формулу (90).

В качестве примера применения этой формулы примем за S сферу радиуса $R = ct$ с центром в точке P. Тогда значения запаздывающих потенциалов придется брать в момент $t - R/c = t - t = 0$, т. е. в на-

чальный момент времени, и мы находим выражение $\varphi(P, t)$ через значения φ и $\partial\varphi/\partial t$ в начальный момент времени.

Вводя сферические координаты r, θ, ψ, с центром в точке P и замечая еще, что направление нормали n совпадает с направлением r, найдем, что в формуле (90)

$$dS = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\psi = R^2\, d\omega, \quad \left[\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right] = \frac{\partial\varphi(R, \theta, \psi, 0)}{\partial R}$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r} = -\frac{1}{R^2}, \quad \frac{1}{cr}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{1}{cR}\left(\frac{\partial\varphi(R, \theta, \psi, t)}{\partial t}\right)_{t=0}$$

и, следовательно,

$$\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi}\iint\left[R\,\frac{\partial\varphi(R, \theta, \psi, 0)}{\partial R} + \varphi(R, \theta, \psi, 0) + \frac{R}{c}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0}\right] d\omega$$

Отсюда получаем искомое выражение

$$\varphi(P, t) = \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial R}\left[R\iint\varphi(R, \theta, \psi, 0)\, d\omega\right] + t\iint\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)_{t=0} d\omega\right\} \tag{98}$$

11. В заключение этого параграфа рассмотрим вкратце основные уравнения теории электромагнитного поля.

При рассмотрении электростатического поля уже введен вектор электрической силы E и была указана его связь с плотностью ρ электрических зарядов

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{99}$$

При рассмотрении электромагнитных явлений наряду с вектором E вводится вектор магнитной силы H, дающий по величине и направлению ту силу, которая подействовала бы на единицу магнитной массы, если ее поместить в рассматриваемую точку пространства. При этом, однако, принимают, что

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0 \tag{100}$$

ибо, как учит опыт, нельзя отделить положительные магнитные заряды от отрицательных и в каждом куске какого-либо тела полное количество магнетизма равно нулю.

При рассмотрении переменных электрических и магнитных полей обнаруживается тот основной факт, что изменение магнитного поля вызывает электрическое поле и обратно, изменение электрического поля вызывает магнитное поле. Количественные выражения этих фактов даются уравнениями Максвелла. Последние представляют собою обобщение двух основных экспериментальных законов электромагнетизма: закона Био-Савара и закона индукции.

Мы уже упоминали о законе Био-Савара, когда рассматривали поле вихревой нити в § 20, п. 5. Мы видели, что если интенсивность вихревой нити L равна Γ, то вызываемое этой вихревой нитью поле будет

$$\mathbf{a} = \frac{\Gamma}{4\pi}\oint_L \frac{d\mathbf{s}\times\mathbf{r}_1}{r^2} \tag{101}$$

причем циркуляция вектора a по контуру K, охватывающему один раз в надлежащем направлении кривую L, равна как раз Γ

$$\oint_K \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \Gamma \tag{102}$$

Но по закону Био-Савара, если мы имеем ток силою J, текущий по проводнику L, то он производит в окружающем пространстве магнитное поле, определяемое (в правой системе координат) по формуле

$$\mathbf{H} = \frac{J}{c} \oint_L \frac{d\mathbf{s} \times \mathbf{r}_1}{r^2} \tag{103}$$

где c — универсальная постоянная, появляющаяся в силу того, что J и H измеряются в разных единицах.

Но тогда из формул (101) и (102) ясно, что если мы заставим единицу магнитной массы обойти контур K, охватывающий один раз в положительном направлении проводник L, то работа силы H будет равна

$$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{4\pi J}{c} \tag{104}$$

Формула (104) представляет просто другую формулировку закона Био-Савара. Ее можно обобщить еще больше, если представить себе, что электрические токи имеются во всем пространстве.

Если рассматривать только покоящиеся тела, то, по Максвеллу, электрический ток надо составлять из двух частей. Первая часть получается в результате обобщения закона Ома, по которому плотность тока, т. е. количество электричества, протекающее через единицу поперечного сечения проводника, пропорционально падению потенциала на единицу длины, т. е. пропорционально электрической силе E. Итак

$$\mathbf{i} = \sigma \mathbf{E} \tag{105}$$

где i — вектор плотности тока, а σ — коэффициент пропорциональности, называемый удельной электропроводностью. Если поверхность, опирающуюся на контур K, обозначить через S, то количество электричества, протекающее через S, будет, очевидно, равно

$$\int_S i_n dS = \int_S \sigma E_n dS \tag{106}$$

Но, по Максвеллу, чтобы получить J, нужно прибавить к предыдущему выражению еще так называемый ток смещения, который образуется во всех тех случаях, когда меняется электрическое поле, и представляется по величине и направлению вектором

$$\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$$

Поэтому

$$J = \int_S \sigma E_n dS + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\partial E_n}{\partial t} dS \tag{107}$$

и уравнение (104) принимает вид

$$\oint_K \mathbf{H} \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{c} \int_S \left(4\pi\sigma E_n + \frac{\partial E_n}{\partial t}\right) dS \tag{108}$$

Применяя формулу Стокса, можем написать

$$\int_S \mathrm{rot}_n \mathbf{H}\, dS = \frac{1}{c} \int_S \left(4\pi\sigma E_n + \frac{\partial E_n}{\partial t}\right) dS$$

Отсюда, в силу полной произвольности выбора поверхности S, следует *первое уравнение Максвелла*:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{109}$$

Второе уравнение Максвелла получается из обобщенного закона индукции Фарадея, по которому при изменении магнитного поля в каждом проводнике возникает электродвижущая сила, пропорциональная скорости изменения магнитного потока через поверхность, охватываемую этим проводником. Математически закон индукции выражается уравнением

$$\oint_K \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S H_n dS \tag{110}$$

Применяя его к любому контуру K и опять пользуясь формулой Стокса, получим

$$\int_S \mathrm{rot}_n \mathbf{E}\, dS = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int_S H_n dS$$

откуда вытекает *второе уравнение Максвелла*:

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{111}$$

Перепишем еще раз все полученные уравнения, причем предположим еще, для простоты, что плотность электрических зарядов ρ равна нулю

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{H} = \frac{4\pi\sigma}{c} \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{112}$$

$$\mathrm{rot}\, \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{113}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{E} = 0 \tag{114}$$

$$\mathrm{div}\, \mathbf{H} = 0 \tag{115}$$

Покажем прежде всего, что для векторов $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ можно получить независимые и притом совершенно одинаковые уравнения.

В самом деле, дифференцируя (112) по времени и беря от (113) операцию rot, найдем, считая σ и c постоянными числами,

$$\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=\frac{4\pi\sigma}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\operatorname{rot}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}=-\frac{1}{c}\frac{\partial \operatorname{rot}\mathbf{H}}{\partial t}$$

воспользовавшись еще тем, что

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{E}=\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}-\triangle\mathbf{E}=-\triangle\mathbf{E}$$

получим окончательно для $\mathbf{E}$ следующее уравнение:

$$\triangle\mathbf{E}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{116}$$

Такое же самое уравнение получается и для $\mathbf{H}$. Уравнение типа (116) называется телеграфным уравнением.

Если токи отсутствуют ($\sigma = 0$), то оно вырождается в волновое уравнение

$$\triangle\mathbf{E}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \tag{117}$$

со скоростью распространения c; по электромагнитной теории света c есть скорость распространения света.

Если в (116) можно пренебречь вторым членом, т. е. токами смещения, то получится уравнение типа уравнения теплопроводности

$$\triangle\mathbf{E}=\frac{4\pi\sigma}{c^2}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \tag{118}$$

Наконец, в случае стационарных процессов, получается уравнение Лапласа

$$\triangle\mathbf{E}=0 \tag{119}$$

Рассмотрение вопроса об энергии электромагнитного поля приводит к введению важного вектора

$$\mathfrak{s}=\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H} \tag{120}$$

который называется *вектором Пойнтинга* и дает по величине и направлению поток энергии. Чтобы это показать, вспомним, прежде всего, что энергия электрического поля определяется интегралом

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\infty} E^2 dV$$

Точно так же энергия магнитного поля определяется выражением

$$\frac{1}{8\pi}\int_{\infty} H^2 dV$$

Вычислим теперь изменение полной энергии электромагнитного поля, заключенной в объеме V, ограниченном поверхностью S. Мы имеем

$$W = \frac{1}{8\pi}\int_V (E^2 + H^2)\, dV$$

$$\frac{dW}{dt} = \frac{1}{4\pi}\int_V \left\{\mathbf{E}\cdot\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{H}\cdot\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}\right\} dV \tag{121}$$

Применим теперь уравнения (112) и (113):

$$\frac{dW}{dt} = \frac{c}{4\pi}\int_V \{\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}\}\, dV - \int_V \sigma E^2\, dV \tag{122}$$

Так как

$$\operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H}) = \mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E} - \mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H}$$

то

$$\frac{c}{4\pi}\int_V \{\mathbf{E}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{H} - \mathbf{H}\cdot\operatorname{rot}\mathbf{E}\}\, dV = -\frac{c}{4\pi}\int_V \operatorname{div}(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\, dV =$$

$$= -\int_V \operatorname{div}\mathfrak{s}\, dV = -\oint_S \mathfrak{s}_n\, dS \tag{123}$$

Уравнение (122) принимает поэтому вид

$$\frac{dW}{dt} = -\oint_S \mathfrak{s}_n\, dS - \int_V \sigma E^2\, dV \tag{124}$$

Но интеграл

$$\int_V \sigma E^2\, dV$$

представляет собою джоулево тепло, т. е. то количество электрической энергии, которое в объеме V переходит в тепловую энергию.

Ясно, что

$$\oint_S \mathfrak{s}_n\, dS$$

дает то количество энергии, которое уходит через поверхность S. Правда, это рассуждение относится только к замкнутой поверхности S, но, обобщая его и на случай незамкнутой поверхности S, можно сказать, что распространение электромагнитной энергии определяется вектором (120), т. е. что электромагнитная энергия распространяется в направлении, перпендикулярном как к электрической, так и к магнитной силе, причем через каждую площадку проходит количество энергии, которое, будучи отнесено к единице времени, равно потоку вектора Пойнтинга через эту площадку.

ГЛАВА III

АФИННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ

§ 22. Понятие афинного ортогонального тензора. Примеры тензоров

1. Многие задачи геометрии, механики и физики приводят к понятию тензора, которое имеет более сложный характер, нежели понятие вектора, и является некоторым его обобщением.

Однако в то время как для каждого вектора мы имеем простую геометрическую интерпретацию в виде направленного отрезка, для тензоров подобного простого наглядного представления мы не имеем. Представляется поэтому необходимым дать новое определение вектора, путем естественного обобщения которого можно охватить и более сложный случай тензора.

Допустим, что мы имеем прямолинейную прямоугольную систему координат $Oxyz$ (в общей теории тензоров рассматривают любые криволинейные координаты, но мы раз навсегда условимся, что будем употреблять в этой главе только прямолинейные прямоугольные системы координат). Проекции некоторого вектора $\mathbf{a}$ на оси этой системы координат обозначим, как обычно, через a_x, a_y, a_z, так что

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}a_x + \mathbf{j}a_y + \mathbf{k}a_z \tag{1}$$

Возьмем теперь другую систему координат $Ox'y'z'$, тогда проекции того же самого вектора $\mathbf{a}$ на новые оси координат будут, согласно § 4, выражаться формулами

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos(x, x') + a_y \cos(y, x') + a_z \cos(z, x') \\ a_{y'} &= a_x \cos(x, y') + a_y \cos(y, y') + a_z \cos(z, y') \\ a_{z'} &= a_x \cos(x, z') + a_y \cos(y, z') + a_z \cos(z, z') \end{aligned} \tag{2}$$

При этом совершенно очевидно, что, если, наоборот, рассмотреть два вектора, из которых один определен в системе координат $Oxyz$ и имеет проекции a_x, a_y, a_z, а другой определен в системе координат $Ox'y'z'$ и имеет проекции $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, связанные с a_x, a_y, a_z линейными соотношениями (2), то эти два вектора являются совершенно тождественными. Поэтому мы можем дать следующее новое определение вектора, совершенно эквивалентное прежнему определению.

Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Oxyz$ мы имеем совокупность трех величин a_x, a_y, a_z, преобразующихся по

формулам (2) в величины $a_{x'}$, $a_{y'}$, $a_{z'}$, отвечающие другой системе координат $Ox'y'z'$, то совокупность этих трех величин определяет новую величину **a**, *называемую афинным ортогональным вектором.*

Величины a_x, a_y, a_z называются составляющими этого вектора **a** по осям Ox, Oy, Oz.

В § 4, п. 1 мы уже упоминали о необходимости введения такого нового определения вектора и мы фактически его использовали при установлении понятий grad φ (§ 12, п. 1) и rot **a** (§ 16).

2. Обобщая данное выше определение вектора, введем понятие тензора.

Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $Oxyz$ мы имеем совокупность трех векторов $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$, преобразующихся в векторы $\mathbf{p}_{x'}$, $\mathbf{p}_{y'}$, $\mathbf{p}_{z'}$, отвечающие другой системе координат $Ox'y'z'$ по формулам

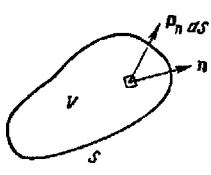
$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{x'} &= \mathbf{p}_x \cos(x, x') + \mathbf{p}_y \cos(y, x') + \mathbf{p}_z \cos(z, x')\\ \mathbf{p}_{y'} &= \mathbf{p}_x \cos(x, y') + \mathbf{p}_y \cos(y, y') + \mathbf{p}_z \cos(z, y')\\ \mathbf{p}_{z'} &= \mathbf{p}_x \cos(x, z') + \mathbf{p}_y \cos(y, z') + \mathbf{p}_z \cos(z, z')\end{aligned} \tag{3}$$

то совокупность этих трех векторов определяет новую величину Π, *называемую афинным ортогональным тензором второго ранга.* Векторы $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$ могут быть названы составляющими тензора Π по осям Ox, Oy, Oz. Часто афинные ортогональные тензоры второго ранга называют еще аффинорами. Мы будем называть их в этой главе просто тензорами. По аналогии с обозначением вектора (1) можно условиться ввести для тензоров обозначение

$$\Pi = \mathbf{i}\mathbf{p}_x + \mathbf{j}\mathbf{p}_y + \mathbf{k}\mathbf{p}_z \tag{4}$$

но только нужно помнить, что при таком обозначении порядок, в котором мы пишем векторы, играет существенную роль (можно было бы условиться обозначать тензор Π через $\mathbf{p}_x\mathbf{i} + \mathbf{p}_y\mathbf{j} + \mathbf{p}_z\mathbf{k}$, но наше обозначение больше отвечает общепринятому).

3. В качестве примера приведем тензор упругих напряжений. Рассмотрим упругое тело, внутри которого вырежем мысленно объем V, ограниченный поверхностью S (фиг. 85). На каждый элемент dS этой поверхности будет действовать со стороны частиц тела, лежащих вне объема V, сила, происходящая от деформации тела. Эта сила пропорциональна величине площадки dS и зависит от направления нормали **n** к рассматриваемому элементу; обозначим ее через $\mathbf{p}_n\, dS$. Вектор $\mathbf{p}_n$, представляющий, очевидно, силу, отнесенную к единице площади, и зависящей от направления нормали **n**, называется напряжением на площадку dS с нормалью **n**. Отметим, что, вообще говоря, напряжение $\mathbf{p}_n$ на площадку с нормалью



Фиг. 85

$\mathbf{n}$ не будет перпендикулярно к площадке, т. е. не будет иметь того же направления, что $\mathbf{n}$. В каждой точке упругого тела каждому направлению $\mathbf{n}$ отвечает свой вектор напряжения $\mathbf{p}_n$. Следовательно, для каждой системы координат мы можем определить векторы $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$. Докажем, что полученные таким образом векторы определяют тензор П, который и называется тензором упругих напряжений; для этого, по определению тензора, достаточно доказать справедливость равенств (3).

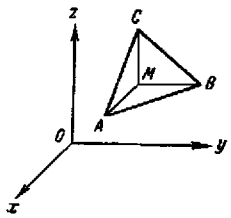
Обозначим через $\mathbf{F}$ внешнюю силу, действующую на единицу массы тела, через $\mathbf{w}$ — ускорение точки тела, через ρ — плотность.

Тогда масса элемента объема dV будет $\rho\, dV$, внешняя сила, действующая на этот элемент, будет равна $\rho\, \mathbf{F}\, dV$, и, наконец, сила инерции будет равна $-\rho\, \mathbf{w}\, dV$.

По началу Даламбера главный вектор внешних сил и сил инерции, приложенных к элементам объема V, и поверхностных сил, приложенных к элементам поверхности S, должен равняться нулю:

$$\int_V \rho\,(\mathbf{F} - \mathbf{w})\, dV + \int_S \mathbf{p}_n dS = 0 \tag{5}$$

Применим это уравнение к бесконечно малому тетраэдру $MABC$, построенному при рассматриваемой точке M таким образом, что его три грани параллельны координатным плоскостям, а четвертая грань, величины S, перпендикулярна к вектору $\mathbf{n}$ (фиг. 86).



Фиг. 86

На грань ABC будет действовать поверхностная сила $\mathbf{p}_n S$ (причем значение вектора $\mathbf{p}_n$ нужно брать в некоторой средней точке площадки ABC).

На грань MBC будет действовать поверхностная сила $-\mathbf{p}_x S \cos(n, x)$. В самом деле, предположим сначала, что нормаль $\mathbf{n}$ составляет с осью x острый угол; грань MBC является проекцией S на плоскость yz и потому имеет величину $S \cos(\mathbf{n}, x)$. Внешняя нормаль к этой грани направлена в рассматриваемом случае по отрицательной оси Ox, напряжение на нее будет $-\mathbf{p}_x$, а значит поверхностная сила на грань MBC будет $-\mathbf{p}_x S \cos(\mathbf{n}, x)$. При этом нужно брать значение $\mathbf{p}_x$ в некоторой средней точке площадки MBC. Тот же результат получается и в том случае, когда нормаль n составляет с осью Ox тупой угол.

Совершенно аналогичное вычисление показывает, что поверхностные силы, действующие на грани MAC и MAB, соответственно равны $-\mathbf{p}_y S \cos(\mathbf{n}, y)$ и $-\mathbf{p}_z S \cos(\mathbf{n}, z)$.

Величина первого члена в равенстве (5) пропорциональна объему тетраэдра $MABC$ и может быть записана в виде $V\mathbf{q}$, где $\mathbf{q}$ — некоторый конечный вектор. Поэтому из уравнения (5) получаем

$$S\,(\mathbf{p}_n - \mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n}, x) - \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n}, y) - \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n}, z)) + V\mathbf{q} = 0$$

Разделим это равенство на S и после этого устремим все ребра тетраэдра к нулю; в силу очевидного равенства $\lim \frac{V}{S} = 0$, получим

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_x \cos(\mathbf{n}, x) + \mathbf{p}_y \cos(\mathbf{n}, y) + \mathbf{p}_z \cos(\mathbf{n}, z) \tag{6}$$

Так как направление вектора n можно выбрать по произволу, то равенство (6) влечет за собой выполнение равенств (3), что мы и хотели показать.

В каждой точке упругого тела будет свой тензор упругих напряжений; мы имеем таким образом поле тензоров упругих напряжений.

Укажем еще раз на значение величин, входящих в уравнение (6): $\mathbf{p}_x$ есть вектор напряжения на площадку, перпендикулярную к оси Ox; составляющие этого вектора обозначим через p_{xx}, p_{xy}, p_{xz}; так как, вообще говоря, p_{xy} и p_{xz} не равны нулю, вектор напряжения $\mathbf{p}_x$ будет наклонен к плоскости yz; его составляющая p_{xx} дает так называемое нормальное напряжение, составляющие же p_{xy} и p_{xz} определяют касательное напряжение на площадку, перпендикулярную к оси Ox.

4. Вернемся к общему определению тензора. Пусть тензор П определен тремя векторами $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$ и $\mathbf{p}_z$ и пусть разложения этих векторов по ортам суть

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_x &= \mathbf{i}p_{xx} + \mathbf{j}p_{xy} + \mathbf{k}p_{xz} \\ \mathbf{p}_y &= \mathbf{i}p_{yx} + \mathbf{j}p_{yy} + \mathbf{k}p_{yz} \\ \mathbf{p}_z &= \mathbf{i}p_{zx} + \mathbf{j}p_{zy} + \mathbf{k}p_{zz} \end{aligned} \tag{7}$$

Очевидно, что тензор П может быть также определен 9 числами, которые называются компонентами тензора и записываются таблицей:

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{xx} & p_{xy} & p_{xz} \\ p_{yx} & p_{yy} & p_{yz} \\ p_{zx} & p_{zy} & p_{zz} \end{Vmatrix} \tag{8}$$

Такие таблицы называются еще иногда матрицами.

Условимся, для сокращения письма, переименовать координаты x, y, z в x_1, x_2, x_3, орты $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$, в $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$; тогда для вектора a мы будем иметь разложение по ортам

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1 a_1 + \mathbf{i}_2 a_2 + \mathbf{i}_3 a_3 \tag{9}$$

Вместо $\mathbf{p}_x$, $\mathbf{p}_y$, $\mathbf{p}_z$ теперь надо писать $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$; тогда будем иметь

$$\Pi = \mathbf{i}_1 \mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2 \mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3 \mathbf{p}_3 \tag{10}$$

Наконец компоненты тензора надо обозначать через p_{kl} ($k = 1, 2, 3$; $l = 1, 2, 3$) так что будем иметь

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix} \tag{11}$$

Так например, p_{23} есть третий компонент вектора $\mathbf{p}_2$. В старых обозначениях это будет p_{yz}, т. е. z-я составляющая вектора $\mathbf{p}_y$.

Иногда удобно тензор П, заданный таблицей девяти чисел (11), обозначать через $\{p_{kl}\}$. Аналогично вектор $\mathbf{a}$ можно обозначать через $\{a_k\}$.

5. В § 4 мы рассмотрели вопрос о преобразовании компонентов вектора при переходе от одной координатной системы к другой; поставим тот же вопрос для компонентов тензора.

	x_1	x_2	x_3
x'_1	α_{11}	α_{12}	α_{13}
x'_2	α_{21}	α_{22}	α_{23}
x'_3	α_{31}	α_{32}	α_{33}

Напомним таблицу § 4, дающую косинусы углов, составляемых осями двух координатных систем $Ox_1x_2x_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$.

Мы напишем эту таблицу в несколько другом виде (приведенном здесь слева), более удобном для сокращенного писания формул, так что $\alpha_{ik} = \cos(x_i', x_k)$.

Проекции вектора $\mathbf{a}$ на оси координат x_1', x_2', x_3' обозначим для краткости через a_1', a_2', a_3'. Точно так же обозначим через $\mathbf{p}_1'$, $\mathbf{p}_2'$, $\mathbf{p}_3'$ составляющие тензора П по осям x_1', x_2', x_3' и через p_{kl}' компоненты тензора П для системы координат $Ox_1'x_2'x_3'$, т. е. величины $p_{x_k'x_l'}$.

В новых обозначениях формулы (2) можно записать в следующем компактном виде:

$$a_k' = \sum_{l=1}^{3} \alpha_{kl} a_l \quad (k = 1, 2, 3) \tag{12}$$

Точно так же формулы (3) запишутся в аналогичном виде

$$\mathbf{p}_k' = \sum_{l=1}^{3} \alpha_{kl} \mathbf{p}_l \quad (k = 1, 2, 3) \tag{13}$$

Выясним теперь, как преобразуются компоненты тензора p_{kl}, т. е. найдем выражение величины p_{kl}' через девять величин p_{rs} $(r, s = 1, 2, 3)$. Во время вывода, для ясности, будем пользоваться полными обозначениями компонентов тензора. По самому определению $p_{kl}' = p_{x_k'x_l'}$ есть проекция на ось $x_{l'}$ вектора $\mathbf{p}_{x_k'}$. Но по формуле (13)

$$\mathbf{p}_{x_k'} = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} \mathbf{p}_{x_r}$$

Беря проекции от обеих частей этого равенства на ось x_l', получим в силу того, что проекция вектора $\mathbf{p}_{x_r}$ на ось x_l', по общей формуле (12), равна

$$\sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls} p_{x_r x_s}$$

следующее равенство:

$$p_{x_k'x_l'} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{x_r x_s}$$

Возвращаясь к кратким обозначениям, получаем следующие основные формулы преобразования компонентов тензора при переходе от одной координатной системы к другой

$$p_{kl'} = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}p_{rs} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{14}$$

Таким образом, новые компоненты тензора являются линейными комбинациями старых. Полученные формулы можно рассматривать как обобщение формул (2) для векторов. В соответствии с этим мы можем дать следующее второе определение понятия тензора.

Если для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат $x_1\, x_2\, x_3$ мы имеем совокупность девяти величин p_{kl}, расположенных в виде матрицы (11) и преобразующихся в величины p_{kl}', отвечающие другой системе координат $Ox_1'x_2'x_3'$ по формулам (14), то совокупность этих девяти величин определяет новую величину П, *называемую аффинным ортогональным тензором второго ранга в пространстве трех измерений.*

Величины p_{kl} называются компонентами тензора П. Эквивалентность нового определения тензора со старым совершенно ясна.

Мы только что получили формулы (14), являющиеся основными для нового определения тензора из формул (13), являющихся основными для старого определения.

Производя вычисления в обратном порядке, мы, очевидно, из формул (14) можем получить формулы (13), что и доказывает наше утверждение об эквивалентности обоих определений тензора.

Совершенно аналогично можно было бы определить тензоры третьего, четвертого и т. д. рангов и притом в пространстве любого числа измерений.

Если мы в формулу (10) внесем выражения (7) для векторов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, то мы получим так называемую девятичленную форму тензора:

$$\Pi = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} \mathbf{i}_k\mathbf{i}_l p_{kl} \tag{15}$$

Конечно, пока для нас формулы (10), (11) и (15) являются только тремя различными формами записи одного и того же тензора.

6. Рассмотрим еще несколько примеров тензоров.

Покажем, что если для любой системы координат принять

$$p_{11} = p_{22} = p_{33} = 1, \quad p_{kl} = 0 \qquad (k \neq l)$$

то получится тензор

$$\mathrm{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{16}$$

который называется единичным тензором.

В самом деле, применяя формулы (14), мы находим для p_{kl}' величины

$$p_{kk}' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}^2, \qquad p_{kl}' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{lr} \qquad (k \neq l)$$

равные соответственно 1 и 0, в силу формул (5) § 4. Таким образом, во всякой системе координат будет

$$p_{kk}' = 1, \qquad p_{kl}' = 0, \qquad (k \neq l)$$

что и доказывает наше утверждение. Очевидно, что для единичного тензора

$$\mathbf{p}_1 = \mathbf{i}_1, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{i}_2, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{i}_3$$

Следовательно, другой формой записи единичного тензора будет

$$\mathbf{I} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 \tag{17}$$

В качестве второго примера возьмем два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ и составим матрицу

$$\mathbf{ab} = \begin{Vmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{Vmatrix} \tag{18}$$

В силу формул

$$a_k' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr}a_r, \qquad b_l' = \sum_{s=1}^{3} \alpha_{ls}b_s$$

мы будем иметь

$$a_k'b_l' = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr}\alpha_{ls}a_rb_s$$

Мы видим, что элементы матрицы (18) преобразуются по формулам (14), следовательно матрица (18) определяет тензор, который называется диадой и обозначается через $\mathbf{ab}$. Составляющими этого тензора по осям x_1, x_2, x_3 являются, очевидно,

$$\mathbf{p}_1 = a_1\mathbf{b}, \qquad \mathbf{p}_2 = a_2\mathbf{b}, \qquad \mathbf{p}_3 = a_3\mathbf{b}$$

Обратим внимание, что диада

$$\mathbf{ba} = \begin{Vmatrix} b_1a_1 & b_1a_2 & b_1a_3 \\ b_2a_1 & b_2a_2 & b_2a_3 \\ b_3a_1 & b_3a_2 & b_3a_3 \end{Vmatrix} \tag{19}$$

отлична от диады $\mathbf{ab}$.

Допустим, что мы имеем тензор Π с компонентами p_{kl} и рассмотрим таблицу с элементами $q_{kl} = p_{lk}$. Покажем, что матрица с элементами q_{kl} тоже определяет тензор. В самом деле, проверим формулы (14):

$$q_{kl}' = p_{lk}' = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{lr}\alpha_{ks}p_{rs} = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{lr}\alpha_{ks}q_{sr} = \sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3} \alpha_{ks}\alpha_{lr}q_{sr}$$

Так как по значкам r и s происходит суммирование, то мы можем r обозначить через s и s через r; но тогда ясно, что формула (14) для величин q_{kl} имеет место, и следовательно мы действительно получили тензор, который обозначается через

$$\Pi_c = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{Vmatrix}$$

и называется тензором, сопряженным с тензором П.

Так например, диада (19) является сопряженной с диадой (18). Очевидно, что тензором, сопряженным с тензором Π_c, является тензор П:

$$(\Pi_c)_c = \Pi \tag{21}$$

§ 23. Сложение и разложение тензоров

1. Определим сумму двух тензоров: Π' с элементами p_{kl}' и Π'' с элементами p_{kl}'', как тензор П с элементами

$$p_{kl} = p_{kl}' + p_{kl}'' \tag{1}$$

Что П действительно является тензором, следует из линейности соотношения (1) и линейности формул преобразования компонентов тензора (14) § 22. Так как

$$\mathbf{p}_k = \sum_{r=1}^{3} p_{kr}\,\mathbf{i}_r, \qquad \mathbf{p}_k' = \sum_{r=1}^{3} p_{kr}'\,\mathbf{i}_r, \qquad \mathbf{p}_k'' = \sum_{r=1}^{3} p_{kr}''\,\mathbf{i}_r$$

то очевидно, что составляющие тензора П по осям x_1, x_2, x_3 определяются путем сложения составляющих тензоров Π' и Π'':

$$\mathbf{p}_k = \mathbf{p}_k' + \mathbf{p}_k'' \tag{2}$$

Точно так же очевидно, что если мы умножим все элементы p_{kl} некоторого тензора П на один и тот же скаляр λ, то в результате мы получим новый тензор, которого компонентами будут λp_{kl}.

Этот тензор естественно обозначить через $\lambda\Pi$. Составляющими этого тензора по осям x_1, x_2, x_3, очевидно, будут являться $\lambda\mathbf{p}_1$, $\lambda\mathbf{p}_2$, $\lambda\mathbf{p}_3$.

2. Тензор П, обладающий тем свойством, что

$$p_{kl} = p_{lk} \qquad (k, l = 1, 2, 3) \tag{3}$$

т. е. значение любого компонента которого не меняется от перестановки значков этого компонента, называется симметричным тензором. Таким образом, компоненты симметричного тензора, симметричны относительно главной диагонали таблицы тензора, равны между собой. Поэтому симметричный тензор определяется шестью величинами, а не девятью, как общий тензор. Заметим, что из формул (14) § 22 легко можно

вывести, что если формулы (3) имеют место для одной какой-нибудь координатной системы, то эти формулы будут справедливы и в любой координатной системе. Очевидно, далее, что симметричный тензор является сопряженным самому себе:

$$\Pi_c = \Pi \tag{4}$$

Тензор П, обладающий тем свойством, что для любых значков k и l

$$p_{kl} = -p_{lk} \qquad (k,\ l = 1, 2, 3) \tag{5}$$

т. е. значение любого компонента которого от перестановки значков этого компонента меняется на прямо противоположное, называется **антисимметричным тензором.**

Очевидно, что элементы антисимметричного тензора, стоящие на главной диагонали, равны нулю: $p_{kk} = 0$, ибо $p_{kk} = -p_{kk}$.

Элементы же, симметричные относительно главной диагонали, равны по величине, но противоположны по знаку.

Если ввести обозначения

$$\omega_1 = p_{32} = -p_{23}, \quad \omega_2 = p_{13} = -p_{31}, \quad \omega_3 = p_{21} = -p_{12}$$

то таблица антисимметричного тензора примет вид

$$\begin{Bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Bmatrix} \tag{6}$$

Таким образом, антисимметричный тензор определяется только тремя величинами ω_1, ω_2, ω_3.

Заметим, что из формул (14) § 22 легко вывести, что если формулы (5) имеют место для одной какой-нибудь координатной системы, то эти формулы будут справедливы и в любой координатной системе, ибо

$$p_{lk}' = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{lr}\alpha_{ks}p_{rs} = -\sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{lr}\alpha_{ks}p_{sr} = -\sum_{s=1}^{3}\sum_{r=1}^{3} \alpha_{ks}\alpha_{lr}p_{sr} = -p_{kl}'$$

Покажем, что величины ω_1, ω_2 и ω_3 можно рассматривать как компоненты некоторого аксиального вектора ω.

В самом деле, вычислим например

$$\omega_1' = p_{32}' = \sum_{r=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} \alpha_{3r}\,\alpha_{2s}\,p_{rs} =$$

$$= \omega_1(\alpha_{33}\alpha_{22} - \alpha_{32}\alpha_{23}) + \omega_2(\alpha_{31}\alpha_{22} - \alpha_{33}\alpha_{21}) + \omega_3(\alpha_{32}\alpha_{21} - \alpha_{31}\alpha_{22})$$

Если воспользоваться теперь формулами (20) § 6, то мы получим

$$\omega_1' = \pm(\omega_1\alpha_{11} + \omega_2\alpha_{12} + \omega_3\alpha_{13})$$

где верхний знак берется при одноименных системах $Ox_1'x_2'x_3'$ и $Ox_1x_2x_3$, нижний при разноименных.

Аналогично получаются две другие формулы, так что получаем формулы преобразования

$$\omega_k' = \pm \sum_{l=1}^{3} \alpha_{kl}\omega_l \tag{7}$$

как раз совпадающие с формулами преобразования аксиального вектора.

Таким образом, каждому антисимметричному тензору отвечает некоторый аксиальный вектор, и обратно. Отметим еще, что составляющими антисимметричного тензора по осям являются векторы

$$\mathbf{p}_1 = -\omega_3\mathbf{i}_2 + \omega_2\mathbf{i}_3 = \mathbf{i}_1\times\omega, \quad \mathbf{p}_2 = \mathbf{i}_2\times\omega, \quad \mathbf{p}_3 = \mathbf{i}_3\times\omega \tag{8}$$

Заметим, наконец, что тензор, сопряженный с антисимметричным тензором, отличается от последнего только знаком

$$\Pi_c = -\Pi \tag{9}$$

3. Докажем теперь теорему: *всякий тензор можно разложить, и притом единственным образом, на сумму двух тензоров, из коих один будет симметричным, а другой антисимметричным.*

Пусть дан тензор Π и мы хотим разложить его на сумму двух тензоров: симметричного Σ и антисимметричного A:

$$\Pi = \Sigma + A \tag{10}$$

Взяв от обеих частей этого равенства сопряженные тензоры

$$\Pi_c = \Sigma_c + A_c$$

в силу формул (4) и (9) получим

$$\Pi_c = \Sigma - A$$

Отсюда, в соединении с (10), найдем, что необходимо взять

$$\Sigma = \frac{\Pi + \Pi_c}{2}, \quad A = \frac{\Pi - \Pi_c}{2} \tag{11}$$

В силу равенства (21) § 22 тензор Σ действительно будет симметричным, тензор A антисимметричным; впрочем это очевидно и из того, что элементами тензоров Σ и A являются

$$s_{kl} = \frac{p_{kl} + p_{lk}}{2}, \qquad a_{kl} = \frac{p_{kl} - p_{lk}}{2} \tag{12}$$

Сумма тензоров Σ и A дает, очевидно, исходный тензор Π, следовательно, теорема доказана.

4. В § 22 мы условились символически записывать тензор

$$\Pi = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix} \tag{13}$$

в виде

$$\Pi = \mathbf{i}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3 \tag{14}$$

а также в виде

$$\Pi = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} p_{kl}\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l \tag{15}$$

В том же параграфе мы ввели в рассмотрение особого рода тензоры, названные нами диадами; в настоящем же параграфе мы определили, что мы понимаем под сложением тензоров.

Покажем теперь, что формулы (14) и (15) справедливы и в том случае, когда правые части этих формул мы понимаем как сумму соответственно трех и девяти диад. Например, для доказательства формулы (14) достаточно заметить, что по самому определению диады

$$\mathbf{i}_1\mathbf{p}_1 = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}$$

Складывая эти три диады, очевидно, получим Π. Аналогично доказывается и формула (15).

Так как всякий тензор можно представить в форме (14), то мы видим, что *всякий тензор можно представить в виде суммы трех диад.*

Заметим далее, что мы имеем право сгруппировать в (15) слагаемые следующим образом:

$$\Pi = \sum_{l=1}^{3}\left(\sum_{k=1}^{3} p_{kl}\mathbf{i}_k\right)\mathbf{i}_l$$

Если теперь ввести обозначения

$$\sum_{k=1}^{3} p_{kl}\mathbf{i}_k = \bar{\mathbf{p}}_l \qquad (l = 1, 2, 3)$$

то тензор Π представляется опять в виде суммы трех диад

$$\Pi = \bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{i}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{i}_2 + \bar{\mathbf{p}}_3\mathbf{i}_3$$

но только теперь три взаимно перпендикулярных орта $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ будут стоять в каждой диаде на последнем месте.

Если мы имеем тензор Π, представленный в виде суммы трех диад

$$\Pi = \mathbf{a}_1\mathbf{b}_1 + \mathbf{a}_2\mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_3\mathbf{b}_3$$

то сопряженный тензор будет, очевидно, равен сумме трех сопряженных диад

$$\Pi_c = \mathbf{b}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{b}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{b}_3\mathbf{a}_3$$

Задача 161. Разложить на симметричную и антисимметричную части диаду $\mathbf{ab}$. В частности выяснить значение аксиального вектора, соответствующего антисимметричной части.

Ответ. $$\mathbf{ab} = S + A,$$

где

$$S = \tfrac{1}{2}(\mathbf{ab} + \mathbf{ba}) = \begin{Vmatrix} a_1b_1 & \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1) & \frac{1}{2}(a_1b_3 + a_3b_1) \\ \frac{1}{2}(a_1b_2 + a_2b_1) & a_2b_2 & \frac{1}{2}(a_2b_3 + a_3b_2) \\ \frac{1}{2}(a_1b_3 + a_3b_1) & \frac{1}{2}(a_2b_3 + a_3b_2) & a_3b_3 \end{Vmatrix}$$

$$A = \frac{1}{2}(\mathbf{ab} - \mathbf{ba}) = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \omega = \frac{1}{2}\,\mathbf{b}\times\mathbf{a}$$

§ 24. Умножение тензора на вектор

1. Пусть нам дан тензор

$$\Pi = \mathbf{i}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3 = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

и вектор

$$\mathbf{a} = \mathbf{i}_1a_1 + \mathbf{i}_2a_2 + \mathbf{i}_3a_3 \tag{2}$$

Под скалярным произведением тензора Π на вектор $\mathbf{a}$ справа мы будем понимать новый вектор $\mathbf{a}'$, который мы будем обозначать символом $\Pi\cdot\mathbf{a}$ или, более коротко в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, $\Pi\mathbf{a}$ и который мы определим формулой

$$\mathbf{a}' = \Pi\cdot\mathbf{a} = \Pi\mathbf{a} = \mathbf{i}_1(\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{i}_2(\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{i}_3(\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{a}) = \tag{3}$$

$$= \mathbf{i}_1(p_{11}a_1+p_{12}a_2+p_{13}a_3) + \mathbf{i}_2(p_{21}a_1+p_{22}a_2+p_{23}a_3) + \mathbf{i}_3(p_{31}a_1 + p_{32}a_2 + p_{33}a_3)$$

так что проекциями этого вектора $\mathbf{a}'$ являются

$$\begin{aligned} a_1' &= p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3 \\ a_2' &= p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3 \\ a_3' &= p_{31}a_1 + p_{32}a_3 + p_{33}a_3 \end{aligned} \tag{4}$$

Таким образом, *скалярное произведение тензора* Π *на вектор* $\mathbf{a}$ *есть вектор, составляющие которого линейным однородным образом выражаются через составляющие вектора* $\mathbf{a}$, *причем коэффициентами являются компоненты тензора* Π. Вектор $\mathbf{a}' = \Pi\cdot\mathbf{a}$ называется поэтому еще линейной векторной функцией вектора $\mathbf{a}$.

Из самого вида формул (4) ясна дистрибутивность и ассоциативность скалярного произведения тензора на вектор, выражающаяся формулами

$$\begin{gathered} (\Pi_1 + \Pi_2)\cdot\mathbf{a} = \Pi_1\cdot\mathbf{a} + \Pi_2\cdot\mathbf{a} \\ \Pi\cdot(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \Pi\cdot\mathbf{a}_1 + \Pi\cdot\mathbf{a}_2 \\ \Pi\cdot m\mathbf{a} = m(\Pi\cdot\mathbf{a}) \end{gathered} \tag{5}$$

Рассмотрим частный случай, когда тензор Π есть диада

$$\Pi = \mathbf{bc} = \begin{Vmatrix} b_1c_1 & b_1c_2 & b_1c_3 \\ b_2c_1 & b_2c_2 & b_2c_3 \\ b_3c_1 & b_3c_2 & b_3c_3 \end{Vmatrix}$$

В этом случае формулы (4) приводятся к

$$a_1' = b_1(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}), \quad a_2' = b_2(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}), \quad a_3' = b_3(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a})$$

и, следовательно, мы получаем, что

$$(\mathbf{bc})\cdot\mathbf{a} = \mathbf{b}(\mathbf{c}\cdot\mathbf{a}) \tag{6}$$

Мы видим отсюда, что для того чтобы скалярно помножить диаду на вектор, достаточно формально помножить на этот вектор ближайший к нему вектор диады.

Если тензор Π есть сумма нескольких диад, например

$$\Pi = \mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_3\mathbf{q}_3$$

то в силу дистрибутивности произведения мы получим аналогичный результат

$$(\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_3\mathbf{q}_3)\cdot\mathbf{a} = \mathbf{p}_1(\mathbf{q}_1\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{p}_2(\mathbf{q}_2\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{p}_3(\mathbf{q}_3\cdot\mathbf{a}) \tag{7}$$

При перемножении тензора на вектор важно указывать порядок умножения. Условимся понимать под скалярным произведением заданного формулой (1) тензора Π на вектор $\mathbf{a}$ слева новый вектор $\mathbf{a}''$, который мы будем обозначать символом $\mathbf{a}\cdot\Pi$, или короче $\mathbf{a}\Pi$, и который мы определим формулой

$$\mathbf{a}'' = \mathbf{a}\cdot\Pi = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_1)\mathbf{p}_1 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_2)\mathbf{p}_2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{i}_3)\mathbf{p}_3 = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3 \tag{8}$$

и в проекциях

$$\begin{aligned} a_1'' &= a_1p_{11} + a_2p_{21} + a_3p_{31} \\ a_2'' &= a_1p_{12} + a_2p_{22} + a_3p_{32} \\ a_3'' &= a_1p_{13} + a_2p_{23} + a_3p_{33} \end{aligned} \tag{9}$$

Для произведения вектора на диаду получим аналогично (6)

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{bc}) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\,\mathbf{c}$$

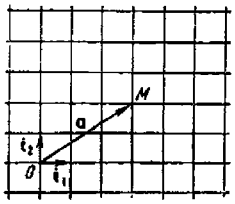
и далее, аналогично (7),

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_3\mathbf{q}_3) = (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}_1)\,\mathbf{q}_1 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}_2)\,\mathbf{q}_2 + (\mathbf{a}\cdot\mathbf{p}_3)\,\mathbf{q}_3 \tag{10}$$

Формулы (7) и (10) приводят к очень простому практическому правилу: для скалярного умножения суммы нескольких диад на вектор достаточно помножить последний скалярно на ближайший к нему вектор каждой диады.

Сравнение формул (4) и (9) приводит к одному важному выводу, выражающемуся формулой

$$\mathbf{a}\cdot\Pi = \Pi_c\cdot\mathbf{a} \qquad (11)$$



Фиг. 87

Формула (8) допускает интересное геометрическое толкование. В самом деле, сопоставим формулы

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2 + a_3\mathbf{i}_3 \qquad (12)$$

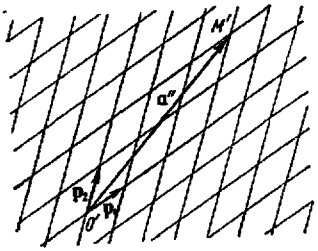
$$\mathbf{a}'' = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2 + a_3\mathbf{p}_3$$

Мы видим, что произведение $\mathbf{a}\cdot\Pi$ так составлено из векторов $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, как вектор $\mathbf{a}$ составлен из основных ортов $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

Ограничимся, для ясности, случаем двумерного пространства, так что

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{i}_1 + a_2\mathbf{i}_2$$

$$\mathbf{a}'' = a_1\mathbf{p}_1 + a_2\mathbf{p}_2$$



Фиг. 88

Построим на взаимно перпендикулярных ортах $\mathbf{i}_1$ и $\mathbf{i}_2$ квадратную решетку из растяжимых прутьев, соединенных шарнирами, как показано на фиг. 87.

Теперь так сдвинем и растянем стержни, чтобы образовалась параллелограмматическая решетка (фиг. 88), стороны каждого параллелограмма которой дают векторы $\mathbf{p}_1$ и $\mathbf{p}_2$. Тогда радиус-вектор $\mathbf{a} = \overline{OM}$ любой точки M решетки относительно точки O перейдет при такой деформации решетки в новый радиус-вектор $\mathbf{a}'' = \overline{O'M'}$ (O' и M' — новые положения точек O и M). На чертежах даны $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}''$ для $a_1 = 3$, $a_2 = 2$.

2. В результате скалярного умножения тензора Π на вектор $\mathbf{a}$ мы получаем новый вектор $\mathbf{a}' = \Pi\cdot\mathbf{a}$. Поэтому на тензор Π можно еще смотреть как на оператор, совершающий преобразование одного вектора $\mathbf{a}$ в другой вектор $\mathbf{a}'$, проекции которого определяются формулами (4). Покажем, что эту точку зрения можно положить в основу еще одного определения тензора.

Для того чтобы лучше уяснить себе сущность дела, докажем одну теорему, относящуюся к векторам.

Если для всякой прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1x_2x_3$ мы имеем совокупность трех величин b_1, b_2, b_3 и если при переходе к любой другой (конечно, тоже прямолинейной прямоугольной) системе координат и для любого вектора $\mathbf{a}$ *выполняется условие*

$$a_1'b_1' + a_2'b_2' + a_3'b_3' = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \qquad (13)$$

то величины b_1, b_2, b_3 определяют вектор $\mathbf{b}$.

Для доказательства положим $a_1' = 1$, $a_2' = 0$, $a_3' = 0$ и заметим, что тогда из (13) получится

$$b_1' = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Но в силу того, что **a** есть вектор и в силу формул (2) § 22 будем иметь

$$a_1 = \cos(x_1, x_1'), \quad a_2 = \cos(x_2, x_1'), \quad a_3 = \cos(x_3, x_1')$$

Следовательно

$$b_1' = b_1 \cos(x_1, x_1') + b_2 \cos(x_2, x_1') + b_3 \cos(x_3, x_1')$$

Аналогично устанавливаются формулы для b_2' и b_3. Совокупность же полученных трех формул выражает по § 22, п. 1 как раз тот факт, что величины b_1, b_2 и b_3 определяют вектор **b**.

Докажем теперь аналогичную теорему для тензоров.

Пусть для каждой прямолинейной прямоугольной системы координат мы имеем совокупность девяти величин p_{kl} $(k, l = 1, 2, 3)$, *и пусть линейные соотношения*

$$\begin{aligned} b_1 &= p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3 \\ b_2 &= p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3 \\ b_3 &= p_{31}a_1 + p_{32}a_2 + p_{33}a_3 \end{aligned} \tag{14}$$

определяют в любой координатной системе совокупность трех величин b_1, b_2, b_3. *Если эти величины оказываются проекциями некоторого вектора всегда, как только за* a_1, a_2, a_3 *взяты проекции какого-нибудь вектора, то девять величин* p_{kl}, *являющихся коэффициентами линейных соотношений* (14), *определяют некоторый тензор* П.

Для доказательства возьмем какую-либо систему координат $Ox_1'x_2'x_3'$ и постараемся выразить величину p_{kl}' через девять величин p_{rs}. Удобно взять за **a** вектор, который в новой системе координат имеет составляющие $a_l' = 1$, $a_s' = 0$ $(s \neq l)$; тогда из формулы (14) получим:

$$b_k' = p_{kl}'$$

Так как **b** и **a** по условию являются векторами, то

$$b_k' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} b_r, \quad a_s = \alpha_{ls}$$

Поэтому, на основании формул (14),

$$p_{kl}' = b_k' = \sum_{r=1}^{3} \alpha_{kr} b_r = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} p_{rs} a_s = \sum_{r=1}^{3} \sum_{s=1}^{3} \alpha_{kr} \alpha_{ls} p_{rs} \quad (k, l = 1, 2, 3)$$

Эти соотношения и являются выражением того факта, что величины p_{kl} образуют тензор.

3. В качестве применения предыдущей теоремы рассмотрим еще несколько примеров тензоров.

Допустим, что твердое тело вращается около неподвижной точки O (фиг. 89). Найдем выражение главного момента количества движения этого тела относительно точки O через вектор его угловой скорости ω.

Пусть положение точки M тела относительно точки O определяется радиус-вектором $\mathbf{r}$, тогда скорость точки M будет равна (§ 9, п. 8)

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r} \tag{15}$$

Фиг. 89

Если взять бесконечно малый элемент массы dm, окружающий точку M, то количеством движения этого элемента массы будет

$$\mathbf{v}\, dm = \omega \times \mathbf{r}\, dm$$

Моментом количества движения этого элемента массы относительно точки O будет по определению

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v}\, dm = \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dm$$

Сумма всех этих моментов количеств движений и называется моментом количества движения твердого тела; обозначая его буквой $\mathbf{l}$, имеем

$$\mathbf{l} = \int \mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r})\, dm \tag{16}$$

где интеграл распространен по всем элементам массы твердого тела.

В силу формулы

$$\mathbf{r} \times (\omega \times \mathbf{r}) = \omega r^2 - \mathbf{r}\,(\mathbf{r} \cdot \omega) = \omega\,(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) - \mathbf{r}\,(x_1\omega_1 + x_2\omega_2 + x_3\omega_3)$$

легко получим, что

$$\begin{aligned} l_1 &= \omega_1 \int (x_2^2 + x_3^2)\, dm - \omega_2 \int x_1 x_2 dm - \omega_3 \int x_1 x_3 dm \\ l_2 &= -\omega_1 \int x_2 x_1\, dm + \omega_2 \int (x_3^2 + x_1^2)\, dm - \omega_2 \int x_2 x_3\, dm \\ l_3 &= -\omega_1 \int x_3 x_1\, dm - \omega_2 \int x_3 x_2\, dm + \omega_3 \int (x_1^2 + x_2^2)\, dm \end{aligned} \tag{17}$$

Мы видим, что вектор момента количества движения является линейной векторной функцией вектора угловой скорости. Но тогда по предыдущей теореме коэффициенты в (17) образуют тензор, который называется тензором моментов инерции; мы его обозначим через

$$\mathbf{J} = \begin{Bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{Bmatrix} \tag{18}$$

где

$$J_{11} = \int (x_2^2 + x_3^2)\, dm$$

есть момент инерции тела относительно оси Ox_1, а

$$J_{12} = -\int x_1 x_2\, dm$$

есть взятый с обратным знаком центробежный момент инерции или момент девиации относительно осей x_1 и x_2. Остальные компоненты тензора моментов инерции имеют аналогичное значение.

Формулы (17) могут быть теперь записаны в весьма простом виде

$$\mathbf{l} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega}$$

или в составляющих

$$l_1 = J_{11}\omega_1 + J_{12}\omega_2 + J_{13}\omega_3 \tag{19}$$

$$l_2 = J_{21}\omega_1 + J_{22}\omega_2 + J_{23}\omega_3 \tag{20}$$

$$l_3 = J_{31}\omega_1 + J_{32}\omega_2 + J_{33}\omega_3$$

Отметим, что тензор моментов инерции, очевидно, симметричен.

В качестве второго примера рассмотрим поле вектора $\mathbf{a}(\mathbf{r}) = \mathbf{a}(x_1, x_2, x_3)$. Дадим радиусу-вектору $\mathbf{r}$ бесконечно малое приращение $d\mathbf{r}$ и рассмотрим соответствующее приращение $d\mathbf{a}$ вектора $\mathbf{a}$. Для проекций этого вектора $d\mathbf{a}$ мы будем иметь формулы

$$\begin{aligned} da_1 &= \frac{\partial a_1}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}dx_3 \\ da_2 &= \frac{\partial a_2}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_2}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}dx_3 \\ da_3 &= \frac{\partial a_3}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial a_3}{\partial x_3}dx_3 \end{aligned} \tag{21}$$

На основании теоремы предыдущего пункта мы можем заключить, что коэффициенты линейных соотношений (21) образуют тензор, который естественно назвать тензором, производным от вектора $\mathbf{a}$ по вектору $\mathbf{r}$, и обозначить через

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial a_3}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Vmatrix} \tag{22}$$

Этот тензор имеет очень важное значение, потому что из него можно получить все основные дифференциальные операции, рассмотренные в в главе II. Формулы (21) можно теперь записать в очень простом виде:

$$d\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} \tag{23}$$

вполне оправдывающем обозначение производного тензора.

Введем еще в рассмотрение тензор, сопряженный с (22). По причинам, которые сейчас выяснятся, его очень удобно обозначить через

$$\operatorname{grad}\mathbf{a} = \nabla\mathbf{a} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{\partial a_2}{\partial x_1} & \frac{\partial a_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{\partial a_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_3} & \frac{\partial a_2}{\partial x_3} & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Vmatrix} \tag{24}$$

Так как $\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = (\nabla\mathbf{a})_c$, то в силу формулы (11) будем иметь на основании (23)

$$d\mathbf{a} = d\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\mathbf{a} = d\mathbf{r}\cdot\nabla\mathbf{a} \tag{25}$$

Полученная формула вполне аналогична формуле

$$d\varphi = d\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad}\varphi = d\mathbf{r}\cdot\nabla\varphi$$

Более того, если $\nabla\mathbf{a}$ рассматривать как символическую диаду, в которой первым вектором служит символический вектор ∇, а вторым вектором служит $\mathbf{a}$, и если применить формальное правило скалярного умножения вектора на диаду, то мы получим из (25)

$$d\mathbf{a} = (d\mathbf{r}\cdot\nabla)\mathbf{a} = (d\mathbf{r}\cdot\operatorname{grad})\,\mathbf{a} \tag{26}$$

Но эта формула есть как раз формула (9) § 13. Заменяя в формулах (25) и (26) $d\mathbf{r}$ на какой-либо вектор $\mathbf{v}$, мы придем к формуле

$$\mathbf{v}\cdot\nabla\mathbf{a} = (\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{a} \tag{27}$$

так что градиент вектора $\mathbf{a}$ по вектору $\mathbf{v}$ есть скалярное произведение вектора $\mathbf{v}$ на тензор $\nabla\mathbf{a}$, сопряженный с тензором, производным от вектора $\mathbf{a}$ по вектору $\mathbf{r}$.

Конечно, формулу (27) можно еще переписать в силу формулы (11) и того, что

$$\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} = (\nabla\mathbf{a})_c$$

в виде

$$(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v} \tag{28}$$

Отметим совершенно очевидную формулу

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}} = \mathrm{I} \tag{29}$$

Наконец, разложим производный тензор $d\mathbf{a}/d\mathbf{r}$ на симметричную и антисимметричную части. Симметричный тензор есть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} + \triangle\mathbf{a}\right) = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x_3} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_2}\right) & \frac{\partial a_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x_3} + \frac{\partial a_3}{\partial x_2}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_1} + \frac{\partial a_1}{\partial x_3}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_3}\right) & \frac{\partial a_3}{\partial x_3} \end{Vmatrix} \tag{30}$$

и в том случае, когда вектор $\mathbf{a}(\mathbf{r})$ представляет вектор смещения частиц упругого тела, называется деформационным тензором.

Антисимметричная же часть производного тензора есть

$$\frac{1}{2}\left(\frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{r}} - \nabla\mathbf{a}\right) = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{31}$$

где, как легко вычислить, вектор ω равен

$$\omega = \frac{1}{2} \operatorname{rot} a \tag{32}$$

Отсюда легко заключить, что тензор $\frac{da}{dr}$ симметричен только в том случае, когда a есть потенциальный вектор $a = \operatorname{grad} \varphi$. В этом случае очевидно:

$$\frac{d \operatorname{grad} \varphi}{dr} = \nabla\nabla\varphi = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_3^2} \end{Vmatrix} \tag{33}$$

4. Скалярное произведение симметричного или антисимметричного тензора на вектор обладает некоторыми особенностями, которые полезно отметить.

От умножения симметричного тензора Π на вектор a как справа, так и слева получается один и тот же результат.

В самом деле, мы имеем в силу формулы (11) и в силу симметричности тензора Π

$$a \cdot \Pi = \Pi_c \cdot a = \Pi \cdot a \tag{34}$$

Если образовать квадратичную форму

$$F = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + p_{33}x_3^2 + 2p_{12}x_1x_2 + 2p_{13}x_1x_3 + 2p_{23}x_2x_3$$

где p_{kl} — компоненты симметричного тензора Π, то мы будем иметь очевидные равенства:

$$\begin{aligned} (\Pi \cdot r)_1 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_1} = p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 \\ (\Pi \cdot r)_2 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_2} = p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 \\ (\Pi \cdot r)_3 &= \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial x_3} = p_{13}x_1 + p_{23}x_2 + p_{32}x_3 \end{aligned} \tag{35}$$

эквивалентные одиому векторному равенству

$$\Pi \cdot r = \tfrac{1}{2} \operatorname{grad} F \tag{36}$$

Возьмем теперь антисимметричный тензор

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{37}$$

Умножая его на вектор a справа, мы получим вектор $b = A \cdot a$ с составляющими

$$\begin{aligned} b_1 &= A_{11}a_1 + A_{12}a_2 + A_{13}a_3 = -\omega_3a_2 + \omega_2a_3 \\ b_2 &= -\omega_1a_3 + \omega_3a_1 \\ b_3 &= -\omega_2a_1 + \omega_1a_2 \end{aligned}$$

Отсюда видно, что

$$A \cdot a = \omega \times a \tag{38}$$

Совершенно аналогичное вычисление показывает, что

$$a \cdot A = a \times \omega = -A \cdot a \tag{39}$$

Таким образом, результаты скалярного умножения антисимметричного тензора A на вектор a справа и слева отличаются только знаком. Это впрочем является непосредственным следствием формулы (11) и формулы (9) § 23.

Пусть вектор a (r) есть вектор смещения частицы упругого тела; тогда, как мы знаем

$$\frac{da}{dr} = \Phi + A$$

где

$$\Phi = \frac{1}{2}\left(\frac{da}{dr} + \nabla a\right)$$

есть симметричный тензор деформаций, а

$$A = \frac{1}{2}\left(\frac{da}{gr} - \nabla a\right)$$

антисимметричный тензор. Поэтому

$$da = \frac{da}{dr} \cdot dr = \Phi \cdot dr + A \cdot dr \tag{40}$$

Но в силу формул (31), (32) и (38) мы имеем

$$A \cdot dr = \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} a \times dr$$

поэтому получаем разложение dr на две части

$$dr = \Phi \cdot dr + \tfrac{1}{2} \operatorname{rot} a \times dr \tag{41}$$

Эта формула определяет относительные перемещения различных точек бесконечно малого объема, окружающего рассматриваемую точку, в виде суммы двух членов, последний из которых дает поворот объема как целого, а первый определяет истинную деформацию объема (см. § 29, п. 4).

5. Совершенно аналогично скалярному произведению можно определить векторное произведение тензора

$$\Pi = i_1 p_1 + i_2 p_2 + i_3 p_3$$

на вектор a справа как новый тензор Π', который мы обозначим символом $\Pi \times a$ и определим формулой

$$\Pi \times a = i_1 (p_1 \times a) + i_2 (p_2 \times a) + i_3 (p_3 \times a) \tag{42}$$

Из самого вида этой формулы видна дистрибутивность векторного произведения тензора на вектор. Если взять за тензор Π диаду bc, то, как легко проверить, получится

$$bc \times a = b (c \times a)$$

т. е. опять надо формально помножить на вектор a тот вектор диады bc, который стоит ближе к a.

Это правило остается в силе и в случае векторного перемножения суммы нескольких диад на вектор a справа или слева. Обравуем в качестве примера векторное произведение

$$\Phi = \omega \times I$$

где ω — некоторый вектор, I — единичный тензор. Так как

$$I = i_1 i_1 + i_2 i_2 + i_3 i_3$$

то

$$\Phi = (\omega \times i_1)\, i_1 + (\omega \times i_2)\, i_2 + (\omega \times i_3)\, i_3$$

Помножая тензор Φ на произвольный вектор a справа, получим

$$\Phi \cdot a = (\omega \times i_1)(i_1 \cdot a) + (\omega \times i_2)(i_2 \cdot a) + (\omega \times i_3)(i_3 \cdot a) =$$
$$= (\omega \times i_1)a_1 + (\omega \times i_2)a_2 + (\omega \times i_3)a_3 = (\omega \times a)$$

Сравнение полученной формулы с формулами (37) и (38) показывает, что тензор Φ совпадает с тензором A, определенным соотношением (37).

Дадим ряд задач, в которых выясним еще некоторые вопросы.

Задача 162. Показать, что если тензор Π обладает тем свойством, что векторы

$$a' = \Pi \cdot a, \qquad b' = \Pi \cdot b, \qquad c' = \Pi \cdot c$$

где a, b, c три фиксированных некомпланарных вектора, оказываются компланарными между собой, то все векторы $\Pi \cdot u$, где u — любой вектор, компланарны и найдется такой отличный от нуля вектор v, что $\Pi \cdot v = 0$. Обратно из наличия такого вектора v следует компланарность всех $\Pi \cdot u$.

Задача 163. Показать, что если тензор Π обладает тем свойством, что векторы

$$a' = \Pi \cdot a, \qquad b' = \Pi \cdot b, \qquad c' = \Pi \cdot c$$

где a, b, c — трн фиксированиых некомпланарных вектора — оказываются коллинеарными между собой, то все векторы $\Pi \cdot u$, где u — любой вектор, коллинеарны и найдутся два таких неколлинеарных вектора v и w, что $\Pi \cdot v = 0$ и $\Pi \cdot w = 0$. Обратно, из наличия двух таких векторов v и w следует коллинеарность всех $\Pi \cdot u$.

Задача 164. Если для трех некомпланарных векторов a, b, c мы имеем

$$\Pi \cdot a = 0, \qquad \Pi \cdot b = 0, \qquad \Pi \cdot c = 0$$

то $\Pi \cdot u = 0$ для любого вектора u.

На основании предыдущих задач все тензоры можно разделить на 4 класса; а именно, возьмем три каких-либо некомпланарных вектора a, b, c и составим векторы

$$a' = \Pi \cdot a, \qquad b' = \Pi \cdot b, \qquad c' = \Pi \cdot c$$

тогда могут оказаться четыре следующих случая:

1) $\mathbf{a}' = \mathbf{b}' = \mathbf{c}' = 0$, в этом случае назовем тензор Π *нулевым тензором*. Все составляющие нулевого тензора равны нулю, так как из формул (4) ясно, что в противном случае нашелся бы вектор $\mathbf{a}$ такой, что $\mathbf{a}' \neq 0$.

2) $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ коллинеарны, но не все сразу равны нулю — в этом случае тензор Π называется л и н е й н ы м.

3) $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ компланарны, но не коллинеарны — в этом случае тензор Π называется п л а н а р н ы м.

4) $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}'$ некомпланарны — в этом случае тензор Π называется п о л н ы м.

З а д а ч а 165. Показать, что если $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ и $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2$, $\mathbf{q}_3$ — две тройки некомпланарных векторов, то диада $\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1$ есть линейный тензор, сумма двух диад $\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2$ есть планарный тензор, а сумма трех диад $\mathbf{p}_1\mathbf{q}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{q}_2 + \mathbf{p}_3\mathbf{q}_3$ есть полный тензор.

З а д а ч а 166. Показать, что, обратно, полный тензор всегда может быть представлен в виде суммы трех диад, но не может быть представлен суммой двух диад.

З а д а ч а 167. Показать, что планарный тензор можно представить в виде суммы двух диад, но нельзя представить одной диадой.

З а д а ч а 168. Показать, что линейный тензор может быть представлен одной диадой.

З а д а ч а 169. Если Π — тензор, $\mathbf{r}$ и $\mathbf{r}'$ — радиусы-векторы, то преобразование $\mathbf{r}' = \Pi\cdot\mathbf{r}$ можно рассматривать, как преобразование пространства. Выяснить, в чем состоит это преобразование для следующих тензоров Π:

1) $\Pi = \alpha\mathrm{I}$ (α — положительное число),

2) $\Pi = \mathrm{I} + \mathbf{aa}$,

3) $\Pi = 2\mathbf{nn} - \mathrm{I}$, где $\mathbf{n}$ — единичный вектор,

4) $\Pi = \mathrm{I} + \mathbf{ab}$, где вектор $\mathbf{b}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{a}$,

5) $\Pi = \mathbf{i}_1'\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2'\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3'\mathbf{i}_3$, где $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ и $\mathbf{i}_1'$, $\mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_3'$ — две тройки взаимно перпендикулярных единичных векторов.

О т в е т. 1) Преобразование подобия; 2) растяжение в направлении вектора $\mathbf{a}$; 3) поворот около оси $\mathbf{n}$ на 180°; 4) сдвиг плоскостей $\mathbf{b}\cdot\mathbf{r} = \mathrm{const}$ параллельно направлению вектора $\mathbf{a}$; 5) поворот пространства, при котором оси $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ переходят в оси $\mathbf{i}_1'$, $\mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_3'$, сопровождаемый зеркальным отражением пространства, если ориентация осей $\mathbf{i}_1'$, $\mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_3'$ отлична от ориентации осей $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$.

З а д а ч а 170. Дана линейная векторная функция

$$\mathbf{r}' = \mathbf{a}\times(\mathbf{b}\times\mathbf{r}) = \Pi\cdot\mathbf{r}$$

При каких условиях тензор Π будет симметричным?

О т в е т. При условии, что $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ коллинеарны.

Задача 171. Для того чтобы тензор Π был антисимметричным, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $\mathbf{a}$ выполнялось равенство

$$\mathbf{a}\cdot(\Pi\cdot\mathbf{a}) = 0$$

Доказать это.

Задача 172. Показать, что кинетическую энергию T твердого тела, вращающегося около неподвижной точки, можно выразить формулой

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega}\cdot(J\cdot\boldsymbol{\omega})$$

где J — тензор моментов инерции, $\boldsymbol{\omega}$ — вектор угловой скорости.

Задача 173. Дан тензор Π. Разложим его на симметричную и антисимметричную части и обозначим через $\boldsymbol{\omega}$ вектор — соответствующий антисимметричной части. Доказать формулу

$$\mathbf{u}\cdot(\Pi\cdot\mathbf{v}) - \mathbf{v}\cdot(\Pi\cdot\mathbf{u}) = -2\boldsymbol{\omega}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$$

где $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ — любые векторы.

Задача 174. Доказать, что

$$(\mathbf{a}\times\Pi)_c = -(\Pi_c\times\mathbf{a})$$

Задача 175. Найти представление в виде суммы трех диад тензора Π, преобразующего три некомпланарных вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ в три данных вектора $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, т. е. тензора Π такого, что $\Pi\mathbf{a} = \mathbf{p}$, $\Pi\mathbf{b} = \mathbf{q}$, $\Pi\mathbf{c} = \mathbf{r}$.

Решение. Обозначим через $\mathbf{a}^*$, $\mathbf{b}^*$, $\mathbf{c}^*$ тройку векторов, взаимных с системой векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ (см. § 8). Тогда, очевидно, будет

$$\Pi = \mathbf{p}\mathbf{a}^* + \mathbf{q}\mathbf{b}^* + \mathbf{r}\mathbf{c}^*$$

В самом деле, принимая во внимание формулы (19) § 8, легко убедиться, что этот тензор удовлетворяет всем поставленным условиям. С другой стороны, ясно, что может быть только один тензор, удовлетворяющий требованиям задачи, так как если бы существовало два различных тензора Π_1 и Π_2, дающих решение задачи, то тензор $\Phi = \Pi_1 - \Pi_2$ удовлетворял бы условиям

$$\Phi\mathbf{a} = \Phi\mathbf{b} = \Phi\mathbf{c} = 0$$

и, следовательно, не мог бы быть отличным от нуля.

Задача 176. Доказать, что $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три некомпланарных вектора, то имеет место тождество

$$\mathbf{a}\mathbf{a}^* + \mathbf{b}\mathbf{b}^{**} + \mathbf{c}\mathbf{c}^* = \mathrm{I}$$

или, что то же,

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\,\mathrm{I}$$

Задача 177. Тождество предыдущей задачи, в силу непрерывности, должно остаться тождеством и для компланарных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$. Исходя отсюда и предполагая, что векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ обладают тем свойством, что из них может быть образован замкнутый треугольник, доказать теорему синусов плоской тригонометрии.

§ 25. Произведение тензоров

1. В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о перемножении тензоров. Пусть мы имеем тензор A с элементами a_{kl} и тензор B с элементами b_{kl}. Мы сейчас постараемся дать определение произведения тензора A на тензор B.

К этому определению естественнее всего подойти, исходя из данного нами в предыдущем параграфе определения тензора, как оператора. В самом деле, рассмотрим какой-нибудь вектор c и преобразуем его при помощи тензора B, т. е. образуем скалярное произведение тензора B на вектор c, в результате мы получим новый вектор c′:

$$\mathbf{c}' = \mathrm{B}\cdot\mathbf{c} = \mathrm{Bc} \tag{1}$$

Преобразуем теперь полученный вектор c′ при помощи тензора A, т. е. образуем скалярное произведение тензора A на вектор c′; в результате мы получим вектор c″:

$$\mathbf{c}'' = \mathrm{A}\cdot\mathbf{c}' = \mathrm{A}\cdot\mathrm{Bc} = \mathrm{ABc} \tag{2}$$

В окончательном результате мы получаем преобразование вектора c в вектор c″. Это преобразование осуществляется при помощи некоторого тензора П:

$$\mathbf{c}'' = \Pi\cdot\mathbf{c} = \Pi\mathbf{c} \tag{3}$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, мы, естественно, приходим к мысли назвать тензор П *скалярным произведением тензоров* A *и* B *и к тому*, чтобы обозначить его через

$$\Pi = \mathrm{A}\cdot\mathrm{B} = \mathrm{AB} \tag{4}$$

Найдем теперь выражение компонентов p_{kl} тензора П через компоненты a_{kl} и b_{kl} тензоров A и B.

Если составляющие векторов c, c′, c″ обозначим, как обычно, через c_k, c_k', c_k'', то из формулы (1) будем иметь

$$c_r' = \sum_{l=1}^{3} b_{rl}c_l \qquad (r = 1, 2, 3)$$

Далее из формулы (2) находим

$$c_k'' = \sum_{r=1}^{3} a_{kr}c_r' \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Следовательно

$$c_k'' = \sum_{r=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{kr}b_{rl}c_l \qquad (k = 1, 2, 3)$$

С другой стороны, из (3) видим, что

$$c_k'' = \sum_{l=1}^{3} p_{kl}c_l \qquad (k = 1, 2, 3)$$

Сравнивая эти выражения с предыдущими, находим, что надо принять

$$p_{kl} = \sum_{r=1}^{3} a_{kr} b_{rl} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{5}$$

Итак, скалярным произведением AB (для краткости мы будем говорить просто о произведении) двух тензоров A и B с компонентами a_{kl} и b_{kl} называется тензор П, составляющие которого определяются формулами (5).

Полученные выражения для элементов тензора AB совпадают с теми выражениями, которые приходится рассматривать при перемножении определителей. Рассматривая тензор A, мы можем составить определитель из элементов этого тензора, который мы будем обозначать символом D (A):

$$D\,(\mathrm{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Точно так же образуем определитель тензора B:

$$D\,(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

Если мы будем умножать определитель D (A) на определитель D (B) по обычному правилу, но только непременно умножая строки определителя D (A) на столбцы определителя D(B), то, как легко убедиться, для элементов определителя D (A) D (B) получим как раз выражение (5), т. е. мы получим, что

$$D\,(\mathrm{A})\,D\,(\mathrm{B}) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} \cdot p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{22} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix} = D\,(\Pi) \tag{6}$$

Итак, определитель произведения двух тензоров равен произведению определителей этих тензоров.

Рассмотрим теперь некоторые следствия, вытекающие из данного нами определения произведения двух тензоров

Прежде всего из формул (5) очевидна дистрибутивность произведения, выражающаяся формулами

$$\begin{aligned} (\mathrm{A}_1 + \mathrm{A}_2)\cdot\mathrm{B} &= \mathrm{A}_1\cdot\mathrm{B} + \mathrm{A}_2\cdot\mathrm{B} \\ \mathrm{A}\cdot(\mathrm{B}_1 + \mathrm{B}_2) &= \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_1 + \mathrm{A}\cdot\mathrm{B}_2 \end{aligned} \tag{7}$$

Далее, возьмем за тензоры A и B две диады

$$\mathrm{A} = \mathbf{pq}, \quad \mathrm{B} = \mathbf{rs} \tag{8}$$

и составим их произведение; в результате, как легко вычислить, получится

$$(\mathbf{pq})\cdot(\mathbf{rs}) = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{ps} \tag{9}$$

На самом деле, впрочем, нет нужды производить какое-либо вычисление. В самом деле, применим к тензорам (8) рассуждение начала этого параграфа. Выберем какой-либо вектор $\mathbf{c}$, тогда

$$\mathbf{c}' = \mathrm{B}\cdot\mathbf{c} = (\mathbf{rs})\cdot\mathbf{c} = \mathbf{r}\,(\mathbf{s}\cdot\mathbf{c})$$

Преобразуем теперь этот вектор при помощи тензора A:

$$\mathbf{c}'' = \mathrm{A}\cdot\mathbf{c}' = (\mathbf{pq})\cdot\mathbf{c}' = \mathbf{p}\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{c}') = \mathbf{p}\,(\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\,(\mathbf{s}\cdot\mathbf{c})$$

Ясно, что если мы положим

$$\Pi = (\mathbf{q}\cdot\mathbf{r})\,\mathbf{ps}$$

то окажется по правилу умножения диады на вектор

$$(\Pi\cdot\mathbf{c}) = \mathbf{c}''$$

Отсюда следует, что $\Pi = \mathrm{AB}$, т. е. следует равенство (9). Итак: *чтобы перемножить две диады, нужно скалярно помножить второй вектор первой диады на первый вектор второй диады и полученное число взять коэффициентом при диаде, первым вектором которой служит первый вектор первой диады, а вторым вектором второй вектор второй диады.*

В силу формул дистрибутивности (7) и в более общем случае произведения суммы нескольких диад на другую сумму нескольких диад будет иметь место формальное правило: *последние векторы диад первого множителя нужно скалярно умножить на первые векторы диад второго множителя, например,*

$$\sum_{k=1}^{3}\mathbf{p}_k\mathbf{q}_k\cdot\sum_{l=1}^{3}\mathbf{r}_l\mathbf{s}_l = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(\mathbf{q}_k\cdot\mathbf{r}_l)\,\mathbf{p}_k\mathbf{s}_l \tag{10}$$

Если A есть тензор с компонентами a_{kl}, то, вводя векторы

$$\begin{aligned}\mathbf{a}_1 &= a_{11}\mathbf{i}_1 + a_{12}\mathbf{i}_2 + a_{13}\mathbf{i}_3\\ \mathbf{a}_2 &= a_{21}\mathbf{i}_1 + a_{22}\mathbf{i}_2 + a_{23}\mathbf{i}_3\\ \mathbf{a}_3 &= a_{31}\mathbf{i}_1 + a_{32}\mathbf{i}_2 + a_{33}\mathbf{i}_3\end{aligned}$$

мы можем, согласно § 23, написать

$$\mathrm{A} = \mathbf{i}_1\mathbf{a}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{a}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{a}_3$$

Точно так же, если B есть тензор с компонентами b_{kl} и

$$\begin{aligned}\overline{\mathbf{b}}_1 &= b_{11}\mathbf{i}_1 + b_{21}\mathbf{i}_2 + b_{31}\mathbf{i}_3\\ \overline{\mathbf{b}}_2 &= b_{12}\mathbf{i}_1 + b_{22}\mathbf{i}_2 + b_{32}\mathbf{i}_3\\ \overline{\mathbf{b}}_3 &= b_{13}\mathbf{i}_1 + b_{23}\mathbf{i}_2 + b_{33}\mathbf{i}_3\end{aligned}$$

то можно написать

$$\mathrm{B} = \overline{\mathbf{b}}_1\mathbf{i}_1 + \overline{\mathbf{b}}_2\mathbf{i}_2 + \overline{\mathbf{b}}_3\mathbf{i}_3$$

Производя теперь перемножение тензоров A и B по правилу (10), мы получим, очевидно, что

$$\Pi = \mathrm{AB} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3}(\mathbf{a}_k\cdot\overline{\mathbf{b}}_l)\,\mathbf{i}_k\mathbf{i}_l$$

Отсюда видно, что компонентами тензора П являются

$$p_{kl} = \mathbf{a}_k \cdot \bar{\mathbf{b}} = a_{k1}b_{1l} + a_{k2}b_{2l} + a_{k3}b_{3l} \quad (k, l = 1, 2, 3)$$

Эти выражения совпадают, как и должно быть, с выражениями (5).

2. Тот факт, что произведение двух тензоров, которое мы только что определили, опять оказывается тензором, является очень важным.

В самом деле мы можем складывать и перемножать тензоры, и в результате этих действий опять получаются тензоры. Это дает нам возможность еще одной точки зрения на тензоры; именно, мы можем рассматривать последние, как особого рода гиперкомплексные числа, образующие замкнутый класс чисел, из которого мы не выходим, если производим над ними действия сложения и умножения.

Однако алгебра тензоров обладает, рассматриваемая с этой точки зрения, некоторыми особенностями, которые мы сейчас и отметим.

Мы уже отметили в предыдущем пункте свойство дистрибутивности произведения двух тензоров, выражающееся формулами (7).

Далее совершенно очевидным представляется свойство ассоциативности по отношению к скалярному множителю m:

$$(m\mathrm{A})\cdot\mathrm{B} = m\,(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B}) \qquad (11)$$
$$\mathrm{A}\cdot(m\mathrm{B}) = m\,(\mathrm{A}\cdot\mathrm{B})$$

а также и свойство ассоциативности произведения трех тензоров:

$$(\mathrm{AB})\cdot\mathrm{C} = \mathrm{A}\,(\mathrm{BC}) = \mathrm{ABC} \qquad (12)$$

доказательство которого предоставляется читателю.

Остановимся теперь на других свойствах, которые отличают алгебру тензоров от обычной алгебры.

Прежде всего необходимо резко подчеркнуть некоммутативность произведения двух тензоров. Вообще говоря, произведение двух тензоров AB отличается от произведения BA. Например, если взять за A диаду $\mathbf{i}_1\mathbf{i}_2$, а за B диаду $\mathbf{i}_2\mathbf{i}_1$, то окажется, что $\mathrm{AB} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1$, а $\mathrm{BA} = \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2$. Следовательно, в произведении нескольких тензоров важно отмечать порядок сомножителей, которые нельзя переставлять между собою.

Второе важное отличие алгебры тензоров от обычной алгебры заключается в том, что *произведение двух тензоров может обратиться в нуль, хотя оба тензора отличны от нуля.* Так например, если взять за A тензор

$$\mathrm{A} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_2 = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

то $\mathrm{AA} = \mathbf{i}_1\,(\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{i}_1)\,\mathbf{i}_2 = 0$. Отсюда видно, что если мы имеем равенство

$$\mathrm{AB} = 0$$

то мы не можем отсюда заключить, что или $\mathrm{A} = 0$ или $\mathrm{B} = 0$.

Разберемся в этом вопросе несколько подробнее.

Если мы смотрим на тензор A как на оператор, то, применяя его к радиусу-вектору r, мы получаем новый вектор r′:

$$\mathbf{r}' = A\mathbf{r}$$

Если мы рассматриваем совокупность всевозможных векторов r, то совокупность соответствующих им векторов r′ может оказаться одной из следующих четырех видов (см. задачи 162—168):

1°. Все векторы $\mathbf{r}' = 0$, в этом случае $A = 0$.

2°. Все векторы r′ коллинеарны, в этом случае A называется *линейным тензором*.

3°. Все векторы r′ компланарны, в этом случае A называется *планарным тензором*.

4°. Совокупность векторов r содержит в себе всевозможные векторы, в этом случае A называется *полным тензором*.

Допустим теперь, что мы имеем равенство

$$AB = 0 \tag{13}$$

и посмотрим, какие следствия мы можем отсюда вывести. Предыдущее равенство эквивалентно тому что для любого вектора r

$$(AB)\cdot\mathbf{r} = 0 \tag{14}$$

Но обозначим

$$B\mathbf{r} = \mathbf{r}' \tag{15}$$

Тогда предыдущее равенство принимает вид

$$A\mathbf{r}' = 0 \tag{16}$$

Если тензор B полный, то в формуле (15) вектор r′ может, при надлежащем выборе r, принять любое значение, а тогда из (16) легко заключим, что $A = 0$.

Если тензор B планарный, то в формуле (15) все значения вектора r′ будут компланарны, а тогда, согласно задаче 163, из формулы (16) следует, что все значения Ar будут коллинеарны. Следовательно, A есть линейный тензор (или нуль).

Если тензор B линейный, то в формуле (15) все значения вектора r′ будут коллинеарны, а тогда, согласно задаче 162, из формулы (16) следует, что все значения Ar будут компланарны. Следовательно, A есть планарный тензор (или линейный или нуль).

Наконец, если B есть нулевой тензор, то (13) выполняется для любого тензора A. Таким образом, если в равенстве (13) один из тензоров A или B полный, то другой должен равняться нулю.

Покажем теперь, что *необходимое и достаточное условие для того, чтобы тензор* Π *был полным, состоит в неравенстве нулю определителя тензора* Π:

$$D(\Pi) \neq 0 \tag{17}$$

В самом деле, приведем тензор П по § 23 к сумме трех диад

$$\Pi = \bar{p}_1 i_1 + \bar{p}_2 i_2 + \bar{p}_3 i_3$$

где i_1, i_2, i_3 — три взаимно перпендикулярных единичных орта, и составим произведения

$$\Pi i_1 = \bar{p}_1, \quad \Pi i_2 = \bar{p}_2, \quad \Pi i_3 = \bar{p}_3$$

Для того, чтобы тензор П был полным, необходимо и достаточно чтобы векторы $\bar{p}_1$, $\bar{p}_2$, $\bar{p}_3$ были некомпланарны, т. е. чтобы

$$\bar{p}_1 (\bar{p}_2 \times \bar{p}_3) \neq 0$$

это неравенство, записанное в форме определителя, имеет вид

$$\begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

т. е. совпадает с неравенством (17), что и требовалось доказать.

3. Рассмотрим произведения тензора П на самого себя. Вместо ПП пишут, как в обычной алгебре, Π^2, вместо $\Pi^2\Pi$ пишут Π^3 и т. д.

Принимают далее условно, что нулевая степень тензора П равна единичному тензору $\Pi^0 = I$.

Дадим теперь определение обратного тензора.

Если существует такой тензор А, что имеет место равенство

$$A\Pi = I \tag{18}$$

то тензор А *называется обратным для тензора* П *и обозначается через* Π^{-1}.

Не для всякого тензора П существует обратный тензор. В самом деле, применим формулу (6) к произведению (18) тензоров А и П; мы получим

$$D(A)\,D(\Pi) = D(I) = 1$$

следовательно, $D(\Pi)$ должен быть отличным от нуля, т. е. тензор П должен быть полным. *Полнота тензора* П *есть необходимое и достаточное условие существования обратного тензора* Π^{-1}. В самом деле, допустим, что тензор П — полный и докажем, что существует обратный тензор. Действительно, преобразование

$$\mathbf{r}' = \Pi\mathbf{r}$$

переводит в этом случае совокупность всевозможных векторов r опять-таки в совокупность всевозможных векторов r′, следовательно, по каждому вектору r′ можно определить соответствующий ему вектор r.

Следовательно

$$\mathbf{r} = A\mathbf{r}'$$

где А есть некоторый тензор.

Комбинируя это равенство с предыдущим, мы увидим, что $A\Pi\mathbf{r} = \mathbf{r}$, откуда в силу произвольности r следует, что $A\Pi = I$, т. е. $A = \Pi^{-1}$

Итак, *для всякого полного тензора* Π *существует обратный тензор* Π^{-1}, *причем, если*

$$\mathbf{r}' = \Pi\mathbf{r} \tag{19}$$

то

$$\mathbf{r} = \Pi^{-1}\mathbf{r}' \tag{20}$$

Согласно основному определению (18)

$$\Pi^{-1}\Pi = \mathrm{I} \tag{21}$$

Но если мы подставим в (19) выражение (20), то легко увидим, что

$$\Pi\Pi^{-1} = \mathrm{I} \tag{22}$$

Отметим еще одно простое правило действия с обратными тензорами

$$(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1} \tag{23}$$

в самом деле

$$(\mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1})\cdot(\mathrm{AB}) = \mathrm{B}^{-1}(\mathrm{A}^{-1}\cdot\mathrm{A})\,\mathrm{B} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{B} = \mathrm{I}$$

Вычислим теперь элементы тензора Π^{-1} через элементы тензора Π. Если полный тензор Π задан в диадной форме

$$\Pi = \mathbf{i}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3 \tag{24}$$

то, в силу полноты тензора Π, векторы $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$ не могут быть компланарными, так как

$$D\,(\Pi) = \mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3)$$

и по условию полноты $D\,(\Pi) \neq 0$. Обозначим через $\mathbf{p}_1^*$, $\mathbf{p}_2^*$, $\mathbf{p}_3^*$ систему векторов, взаимных с $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$:

$$\mathbf{p}_1^* = \frac{\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3}{\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3)}, \quad \mathbf{p}_2^* = \frac{\mathbf{p}_3\times\mathbf{p}_1}{\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3)}, \quad \mathbf{p}_3^* = \frac{\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2}{\mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3)} \tag{25}$$

Составим тензор

$$\mathrm{A} = \mathbf{p}_1^*\mathbf{i}_1 + \mathbf{p}_2^*\mathbf{i}_2 + \mathbf{p}_3^*\mathbf{i}_3$$

Образуем теперь по формуле (10) произведение $\Pi\mathrm{A}$; пользуясь формулами (19) § 8, увидим, что

$$\Pi\mathrm{A} = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 = \mathrm{I}$$

Это равенство в силу (22) показывает, что $\mathrm{A} = \Pi^{-1}$. Итак

$$\Pi^{-1} = \mathbf{p}_1^*\mathbf{i}_1 + \mathbf{p}_2^*\mathbf{i}_2 + \mathbf{p}_3^*\mathbf{i}_3 \tag{26}$$

На основании этой формулы легко выразить составляющие тензора Π^{-1} через составляющие тензора Π. Но мы поступим иначе.

Формула (19), написанная в составляющих, имеет вид

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}x_1 + p_{12}x_2 + p_{13}x_3 \\ x_2' &= p_{21}x_1 + p_{22}x_2 + p_{23}x_3 \\ x_3' &= p_{31}x_1 + p_{32}x_2 + p_{33}x_3 \end{aligned} \tag{27}$$

Решая эту систему уравнений относительно x_1, x_2, x_3 по обычному правилу Крамера, легко найдем, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{P_{11}x_1' + P_{21}x_2' + P_{31}x_3'}{D(\Pi)} \\ x_2 &= \frac{P_{12}x_1' + P_{22}x_2' + P_{32}x_3'}{D(\Pi)} \\ x_3 &= \frac{P_{13}x_1' + P_{23}x_2' + P_{33}x_3'}{D(\Pi)} \end{aligned} \tag{28}$$

где P_{kl} суть алгебраические дополнения элементов p_{kl} в определителе

$$D(\Pi) = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}$$

т. е. миноры элементов p_{kl}, умноженные на $(-1)^{k+l}$. Например

$$P_{11} = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}, \quad P_{21} = -\begin{vmatrix} p_{12} & p_{13} \\ p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}$$

Формулы (28) суть не что иное, как формула (20), написанная в составляющих; поэтому мы получаем следующие формулы для элементов тензора Π^{-1}:

$$(\Pi^{-1})_{kl} = \frac{P_{lk}}{D(\Pi)} \tag{29}$$

4. Выше было указано, что тензоры можно рассматривать как особого рода числа. Покажем сейчас, что обыкновенные комплексные числа можно трактовать как тензоры частного вида в пространстве двух измерений. Рассмотрим следующее преобразование пространства

$$x_1' = \rho(x_1 \cos\varphi + x_2 \sin\varphi), \qquad x_2' = \rho(-x_1 \sin\varphi + x_2 \cos\varphi) \tag{30}$$

где $\rho > 0$ и φ — два вещественных числа. Это преобразование состоит, очевидно, в повороте на угол φ около начала координат и последующем равномерном расширении или сжатии во все стороны. Преобразование (30) можно записать в виде

$$\mathbf{r}' = \Pi\mathbf{r}$$

где

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \rho\cos\varphi & \rho\sin\varphi \\ -\rho\sin\varphi & \rho\cos\varphi \end{Vmatrix} \tag{31}$$

По правилу сложения тензоров мы можем написать

$$\Pi = \rho\cos\varphi \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Vmatrix} + \rho\sin\varphi \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} = \rho\cos\varphi\, I + \rho\sin\varphi\, J \tag{32}$$

где через J обозначен тензор

$$J = \begin{Vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{33}$$

соответствующий, очевидно, повороту плоскости на угол 90° в направлении от оси x_2 к x_1. Составим теперь J^2; простое вычисление по формулам (5) дает, что

$$J^2 = \begin{Vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{Vmatrix} = -I$$

что впрочем ясно и так, ибо J^2 соответствует, очевидно, повороту плоскости на 180° около начала координат.

Мы видим, что тензор J подчиняется тем же правилам перемножения, что и комплексная единица i. Можно поэтому отождествить J с комплексной единицей i и вместо (32) написать

$$\Pi = \rho \cos\varphi + i\,\rho \sin\varphi \tag{34}$$

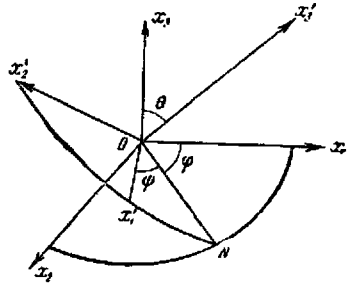
Таким образом, тензоры вида (31) можно рассматривать, как обычные комплексные числа.

В качестве весьма простого применения, положим в формулах (31) и (34) $\rho = 1$; тогда получим тензор поворота около начала координат на угол φ. Ясно, что тензор Π^n означает в этом случае операцию поворота на угол $n\varphi$. Поэтому мы приходим к известной формуле Моавра

$$(\cos\varphi + i \sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$$

5. В предыдущем пункте был рассмотрен вопрос о тензоре поворота в плоскости. Теперь мы рассмотрим вопрос о повороте твердого тела в пространстве около неподвижной точки O.

Проведем в твердом теле оси координат x_1, x_2, x_3 и пусть после поворота эти оси совпали с осями координат x_1', x_2', x_2'.



Фиг. 90

Положение осей x_1', x_2', x_3' относительно осей x_1, x_2, x_3 характеризуется таблицей косинусов α_{kl} § 22. Однако весьма часто для определения этого положения пользуются другими величинами. В механике обычно употребляют так называемые углы Эйлера φ, ψ, θ (фиг. 90). Здесь θ есть угол между осями x_3 и x_3', φ — угол между осью x_1 и линией узлов ON (так называется линия пересечения плоскостей Ox_1x_2 и $Ox_1'x_2'$), отсчитываемый от оси x_1 в направлении к оси x_2, и ψ — угол между линией узлов ON и осью x_1', отсчитываемый от линии узлов ON в положительном направлении вокруг оси x_3'.

Все девять косинусов α_{kl} могут быть выражены через три угла Эйлера. В самом деле, мы можем осуществить поворот осей $Ox_1x_2x_3$ в новое положение $Ox_1'x_2'x_3'$ путем трех последовательных поворотов:

1) на угол φ около оси x_3, при этом ось x_1 перейдет в линию узлов ON;
2) на угол θ около линии узлов ON, при этом ось x_3 перейдет в x_3';
3) на угол ψ около оси x_3', при этом ось ON перейдет в ось x_1'.

В результате этих трех поворотов ось x_1 перейдет в x_1', ось x_3 в x_3', и следовательно ось x_2 в x_2', т. е. тело из старого положения перейдет в новое.

Но каждому из трех указанных поворотов отвечает свой тензор поворота, а именно повороту на угол φ соответствует преобразование

$$\begin{aligned}\xi_1 &= x_1\cos\varphi + x_2\sin\varphi\\ \xi_2 &= -x_1\sin\varphi + x_2\cos\varphi\\ \xi_3 &= x_3\end{aligned}$$

где ось $O\xi_1$ совпадает с линией узлов ON, а ось $O\xi_3$ с осью Ox_3.

В тензорной форме мы будем иметь

$$\xi = \Phi r$$

где ξ вектор с составляющими ξ_1, ξ_2, ξ_3, а Φ тензор

$$\Phi = \begin{Vmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

Точно так же поворотам на углы θ и ψ соответствуют преобразования

$$\eta = \vartheta\xi, \quad r' = \Psi\eta$$

где η — вектор с составляющими η_1, η_2, η_3, причем ось $O\eta_1$ совпадает с ON, а ось $O\eta_3$ с осью Ox_3', а ϑ и Ψ — тензоры

$$\vartheta = \begin{Vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & \cos\theta & \sin\theta\\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta\end{Vmatrix}, \qquad \Psi = \begin{Vmatrix}\cos\psi & \sin\psi & 0\\ -\sin\psi & \cos\psi & 0\\ 0 & 0 & 1\end{Vmatrix}$$

В результате мы получаем окончательное преобразование

$$r' = \Psi\vartheta\Phi r$$

и так как оно должно совпадать с преобразованием

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3\\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3\\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3\end{aligned}$$

то мы получаем возможность, составив произведение трех тензоров $\Psi\vartheta\Phi$ по формулам (5), вычислить все девять косинусов α_{kl}:

$$\begin{aligned}\alpha_{11} &= \cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta & \alpha_{12} &= \sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\psi\cos\theta & \alpha_{13} &= \sin\psi\sin\theta\\ \alpha_{21} &= -\cos\varphi\sin\psi - \sin\varphi\cos\psi\cos\theta & \alpha_{22} &= -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta & \alpha_{23} &= \cos\psi\sin\theta\\ \alpha_{31} &= \sin\varphi\sin\theta & \alpha_{32} &= -\cos\varphi\sin\theta & \alpha_{33} &= \cos\theta\end{aligned}$$

Задача 178. Доказать симметричность тензора $\Pi\Pi_c$.

Задача 179. Доказать, что $(\Pi_c)^{-1} = (\Pi^{-1})_c$.

Задача 180. Показать, что всякому тензору Π можно сопоставить тензор Π^*, обладающий тем свойством, что для любых двух векторов $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ имеет место равенство

$$\Pi^* \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = (\Pi \mathbf{u}) \times (\Pi \mathbf{v})$$

Найти выражение тензора Π^* в диадной форме, если

$$\Pi = \mathbf{i}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3 = \bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{i}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{i}_2 + \bar{\mathbf{p}}_3\mathbf{i}_3$$

Ответ. $\Pi^* = (\bar{\mathbf{p}}_2 \times \bar{\mathbf{p}}_3)\mathbf{i}_1 + (\bar{\mathbf{p}}_3 \times \bar{\mathbf{p}}_1)\mathbf{i}_2 + (\bar{\mathbf{p}}_1 \times \bar{\mathbf{p}}_2)\mathbf{i}_3$

Задача 181. Показать, что

$$\Pi_c \Pi^* = D(\Pi)\, \mathrm{I}$$

и, исходя отсюда, найти выражения для составляющих $\{\Pi^*\}_{kl}$ тензора Π^*.

Ответ. $\{\Pi^*\}_{kl} = P_{kl}$, где P_{kl} — величины, определенные в п. 3.

Задача 182. Показать, что $D(\Pi^*) = [D(\Pi)]^2$.

Задача 183. Показать, что если $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ — орты, направленные по осям x_1, x_2, x_3, а $\mathbf{i}_1'$, $\mathbf{i}_2'$, $\mathbf{i}_3'$ — орты, направленные по взаимно перпендикулярным осям x_1', x_2', x_3' (фиг. 90), имеющим ту же ориентацию, что и оси x_1, x_2, x_3, то тензор поворота Π может быть представлен в форме $\Pi = \mathbf{i}_1\mathbf{i}_1' + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2' + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3'$.

Задача 184. Показать, что если $\Pi\Pi_c = \mathrm{I}$ и $D(\Pi) > 0$, то Π есть тензор поворота.

§ 26. Симметричные тензоры. Тензорный эллипсоид

1. Рассмотрим симметричный тензор Π, так что его элементы удовлетворяют соотношениям

$$p_{kl} = p_{lk} \qquad (k, l = 1, 2, 3) \tag{1}$$

Докажем следующее важное свойство симметричных тензоров:

$$\mathbf{b} \cdot (\Pi \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot (\Pi \cdot \mathbf{b}) \tag{2}$$

т. е. скалярное произведение из $\mathbf{b}$ и скалярного произведения симметричного тензора Π на вектор $\mathbf{a}$ не меняется при перестановке векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

В самом деле

$$\mathbf{b} \cdot (\Pi \cdot \mathbf{a}) = \sum_{k=1}^{3} b_k \sum_{l=k}^{3} p_{kl} a_l = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} p_{kl} b_k a_l$$

$$\mathbf{a} \cdot (\Pi \cdot \mathbf{b}) = \sum_{l=1}^{3} a_l \sum_{k=1}^{3} p_{lk} b_k = \sum_{k=1}^{3} \sum_{l=1}^{3} p_{lk} b_k a_l$$

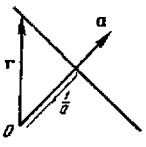
и в силу (1) оба выражения равны.

2. Симметричные тензоры допускают интересную геометрическую интерпретацию, к изложению которой мы и перейдем.

Заметим, что вектор a можно графически представить не только направленным отрезком (как обычно), но и плоскостью

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = 1 \tag{3}$$

где r — радиус-вектор переменной точки (фиг. 91). В самом деле, так как $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r} = ar_a = 1$, то $r_a = \frac{1}{a}$, т. е. геометрическое место концов радиусов-векторов, исходящих из начала координат и удовлетворяющих уравнению (3), есть плоскость, перпендикулярная вектору a и отстоящая от начала координат на расстоянии $\frac{1}{a}$. Поэтому вектор a перпендикулярен к плоскости (3) и имеет длину, обратную расстоянию начала координат до этой плоскости. На прямой, проходящей через начало координат и имеющей направление n, плоскость (3) отсекает отрезок длины $\rho = \frac{1}{a_n}$.



Фиг. 91

Будем аналогично поступать с симметричным тензором П. Рассмотрим поверхность

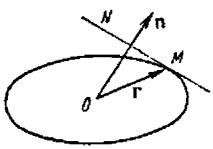
$$\mathbf{r}\cdot(\Pi\cdot\mathbf{r}) = 1 \tag{4}$$

где r — радиус-вектор переменной точки. Производя перемножение, для левой части уравнения (4) найдем выражение

$$F = p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + p_{33}x_3^2 + 2p_{12}x_1x_2 + 2p_{23}x_2x_3 + 2p_{31}x_3x_1 = 1 \tag{5}$$

Таким образом, мы имеем дело с поверхностью второго порядка, имеющей центр (фиг. 92). По самому способу получения поверхность эта не зависит от выбора системы координат. Найдем точки пересечения этой поверхности с координатными осями. На оси Ox_1 имеем $x_2 = x_3 = 0$, поэтому

$$x_1 = \pm\frac{1}{\sqrt{p_{11}}}$$



Фиг. 92

Но так как всякий радиус, исходящий из начала координат и имеющий направление n, может быть взят за ось x_1, то, значит, этот радиус пересекает поверхность (4) в точке, отстоящей от начала координат на расстоянии

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{p_{nn}}} \tag{6}$$

Таким образом, если на каждой прямой, проходящей через начало координат, отложить отрезок, обратный корню квадратному из p_{nn}, то геометрическое место концов этих отрезков даст поверхность второго порядка (5). Если для всякого направления n величина p_{nn} положитель-

на — случай, наиболее важный в приложениях,— поверхность (5) будет, очевидно, эллипсоидом, ибо все ρ будут ограничены. Поэтому уравнение (5) называется уравнением тензорного эллипсоида (хотя оно может представлять и другие поверхности второго порядка). Если тензор есть тензор моментов инерции, то $p_{nn} = J_{nn}$, т. е. p_{nn} есть в этом случае момент инерции относительно оси $\mathbf{n}$, величина всегда положительная, поэтому, строя по указанному выше правилу поверхность, мы получаем эллипсоид инерции.

Если для некоторых направлений p_{nn} принимает отрицательные значения, то в правых частях формул (4) и (5) можно вместо 1 брать ± 1, а в правой части формулы (6) вместо p_{nn} брать $|p_{nn}|$.

Скалярное произведение $\Pi \cdot \mathbf{r}$ имеет простое геометрическое значение. А именно докажем, что если вектор $\mathbf{r}$ оканчивается в точке M поверхности (4), то вектор

$$\mathbf{r}_1 = \Pi \cdot \mathbf{r} \tag{7}$$

имеет направление нормали к плоскости, касательной к поверхности в точке M.

В самом деле, если точка M, оставаясь на поверхности, испытает бесконечно малое смещение, то радиус-вектор r получит бесконечно малое приращение $d\mathbf{r}$, лежащее в касательной плоскости к поверхности в точке M. При этом мы будем иметь

$$d[\mathbf{r} \cdot (\Pi \cdot \mathbf{r})] = 0$$

(ибо на поверхности $\mathbf{r} \cdot (\Pi\ \mathbf{r}) = 1$), или

$$d\mathbf{r}\ (\Pi \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot (\Pi \cdot d\mathbf{r}) = 0$$

Но по основному свойству симметричных тензоров оба слагаемых равны, следовательно

$$d\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1 = 0$$

т. е. вектор $\mathbf{r}_1$ перпендикулярен к любому направлению, лежащему в касательной плоскости к поверхности в точке M, что и требовалось доказать. Впрочем это обстоятельство непосредственно вытекает из формулы (36) § 24.

Так как $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}_1 = 1$, то $r_1 \cdot ON = 1$; откуда для величины вектора $\Pi \cdot r$ получаем выражение

$$r_1 = \frac{1}{ON} \tag{8}$$

Задача 185. Показать, что для антисимметричного тензора A имеет место равенство

$$\mathbf{b} \cdot (\mathrm{A} \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\mathrm{A} \cdot \mathbf{b}) = 0$$

для любых векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Задача 186. Во что переходит поверхность $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r} = 1$ при преобразовании $\mathbf{r}' = \Pi \cdot \mathbf{r}$, где Π полный тензор?

Ответ. В эллипсоид $\mathbf{r}' \cdot \mathrm{T}\mathbf{r}' = 1$, где $\mathrm{T} = \Pi_c^{-1}\Pi^{-1}$.

§ 27. Главные оси тензора. Главные значения тензора. Инварианты тензора

1. Рассмотрим какой-либо тензор Π и пусть

$$\Pi \cdot \mathbf{a} = \mathbf{b}$$

Если вектор $\mathbf{b}$ коллинеарен вектору $\mathbf{a}$, т. е. если вектор $\mathbf{a}$ после преобразования изменяет только свою величину, не изменяя своего направления, то направление вектора $\mathbf{a}$ называется *главным направлением тензора*. Если при этом $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{a}$, то величина λ называется *главным значением тензора*. Оно показывает, во сколько раз тензор увеличивает векторы, направленные по главным осям тензора; направление таких векторов тензор не меняет. Мы воспользуемся этой коллинеарностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b} = \Pi \cdot \mathbf{a}$ для отыскания главных значений и главных осей тензора.

Итак, пусть тензор задан в некоторой системе координат своими компонентами p_{kl} и пусть $\mathbf{a}$ имеет главное направление, которому отвечает главное значение λ, тогда по самому определению

$$\Pi \cdot \mathbf{a} = \lambda\mathbf{a} \tag{1}$$

что равносильно трем уравнениям

$$\begin{aligned} p_{11}a_1 + p_{12}a_2 + p_{13}a_3 &= \lambda a_1 \\ p_{21}a_1 + p_{22}a_2 + p_{23}a_3 &= \lambda a_2 \\ p_{31}a_1 + p_{32}a_2 + p_{33}a_3 &= \lambda a_3 \end{aligned} \tag{2}$$

Получились три линейных однородных уравнения относительно a_1, a_2, a_3. Эта система уравнений может иметь решение, отличное от нуля, только если ее определитель равен нулю

$$\begin{vmatrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{21} - \lambda & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{3}$$

Из полученного кубического уравнения нужно определить λ, а тогда из системы (2) можно определить отношения $a_1 : a_2 : a_3$, т. е. главное направление тензора, отвечающее взятому корню λ уравнения (3).

2. В случае симметричного тензора Π мы сопоставляли ему поверхность

$$p_{11}x_1^2 + p_{22}x_2^2 + p_{33}x_3^2 + 2p_{12}x_1x_2 + 2p_{23}x_2x_3 + 2p_{31}x_3x_1 = 1 \tag{4}$$

причем указывали, что поверхность эта не зависит от выбора координат.

Но известно, что уравнение (4) надлежащим выбором осей $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, $\bar{x}_3$ можно привести к виду

$$\lambda_1\bar{x}_1^2 + \lambda_2\bar{x}_2^2 + \lambda_3\bar{x}_3^2 = 1 \tag{5}$$

Таким образом, в этой системе координат все элементы тензора, кроме диагональных, обращаются в нуль и сам тензор принимает простейший вид

$$\Pi = \begin{Vmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{Vmatrix} \tag{6}$$

В соответствии с этим и преобразование вектора $\mathbf{b} = \Pi \cdot \mathbf{a}$ будет иметь весьма простой вид

$$b_1 = \lambda_1 a_1, \quad b_2 = \lambda_2 a_2, \quad b_3 = \lambda_3 a_3 \tag{7}$$

Очевидно, что для симметричного тензора направления осей x_1, x_2 и x_3 являются главными направлениями, а величины λ_1, λ_2 и λ_3 — соответствующими главными значениями.

В случае симметричного тензора существуют, таким образом, три главных направления и три главных значения, так что уравнение (3) имеет при $p_{kl} = p_{lk}$ три вещественных корня.

В качестве примера рассмотрим преобразование

$$\mathbf{l} = \mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\omega} \tag{8}$$

определяющее главный момент количеств движения твердого тела, вращающегося около O, взятый относительно начала координат, через угловую скорость ω. Беря за оси координат главные оси эллипсоида инерции и обозначая через J_1, J_2, J_3 главные моменты инерции, будем иметь

$$l_1 = J_1\omega_1, \quad l_2 = J_2\omega_2, \quad l_3 = J_3\omega_3 \tag{9}$$

Применим уравнения (9) для вывода уравнений Эйлера для вращения твердого тела около начала координат из закона моментов количеств движения

$$\frac{d\mathbf{l}}{dt} = \mathbf{L} \tag{10}$$

где $\mathbf{L}$ есть главный момент внешних сил относительно начала координат. Так как мы хотим относить движение к главным осям эллипсоида инерции, неподвижно связанным с твердым телом, то для вычисления $d\mathbf{l}/dt$ мы должны воспользоваться формулой (12) § 10:

$$\left(\frac{d\mathbf{l}}{dt}\right)_1 = \frac{dl_1}{dt} + \omega_2 l_3 - \omega_3 l_2 \text{ и т. д.} \tag{11}$$

Составляем уравнения (10), подставляя в них вместо $d\mathbf{l}/dt$ выражения (11), в которые, в свою очередь, вставлены значения (9) для $\mathbf{l}$:

$$\begin{aligned} J_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (J_3 - J_2)\,\omega_2\omega_3 &= L_1 \\ J_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (J_1 - J_3)\,\omega_3\omega_1 &= L_2 \\ J_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (J_2 - J_1)\,\omega_1\omega_2 &= L_3 \end{aligned} \tag{12}$$

Уравнения (12) и называются уравнениями Эйлера вращения твердого тела около неподвижной точкн.

3. Возвращаясь к общему тензору П, развернем кубическое уравнение (3) по убывающим степеням λ:

$$\lambda^3 - \lambda^2(p_{11}+p_{22}+p_{33}) + \tag{13}$$
$$+\lambda\left(\begin{vmatrix} p_{23} & p_{32} \\ p_{23} & p_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22}\end{vmatrix}\right)-\begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22} & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33}\end{vmatrix}=0$$

Мы знаем, что корни этого уравненин λ_1, λ_2 и λ_3 не должны зависеть от выбора координатной системы. С другой стороны, известны соотношения между корнями и коэффициентами уравнения:

$$I_1 = p_{11}+p_{22}+p_{33} = \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3$$
$$I_2 = \begin{vmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{31} \\ p_{13} & p_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} p_{11} & p_{21} \\ p_{12} & p_{22}\end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2+\lambda_1\lambda_3+\lambda_2\lambda_3 \tag{14}$$
$$I_3 = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33}\end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$$

Поэтому велнчины I_1, I_2 и I_3 не наменяются при преобразовании координат. Эти величины называются **инвариантами тензора**. При помощи этнх инвариантов мы можем составить бесчисленное множество других инварнантов. Так, например, нивариантом является величина

$$I_1^2-2I_2=p_{11}^2+p_{22}^2+p_{33}^2+2p_{12}p_{21}+2p_{23}p_{32}+2p_{31}p_{13}=$$
$$=\lambda_1^2+\lambda_2^2+\lambda_3^2 \tag{15}$$

Составляя нивариант I_1 для производного тензора $\frac{da}{dr}$, мы получим по формуле (22) § 24

$$\frac{\partial a_1}{\partial x_1}+\frac{\partial a_2}{\partial x_2}+\frac{\partial a_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} a \tag{16}$$

Таким образом, рассмотрение тензора da/dr привело нас к $(v\cdot\nabla)a$ rot a и div a, т. е. ко всем основным днфференциальным операциям векторного анализа.

Те тензоры, у которых нивариант I_1 обращается в нуль, называются **девиаторами**. Покажем, как можно нз любого тензора П получить девиатор. Для этого достаточно, введя обозначение

$$\alpha = I_1 = p_{11}+p_{22}+p_{33}$$

рассмотреть новый тензор

$$\Pi' = \Pi - \frac{1}{3}\alpha I \tag{17}$$

У этого тензора диагональными элементами будут величины

$$p_{11}-\frac{1}{3}\alpha,\quad p_{22}-\frac{1}{3}\alpha,\quad p_{33}-\frac{1}{3}\alpha$$

сумма которых равна нулю.

Образуем еще инвариант I_1 для тензора $\Pi = AB$, являющегося произведением двух тензоров A и B. Для определения этого тензора мы имели формулы (5) § 25:

$$p_{kl} = \sum_{r=1}^{3} a_{kr} b_{rl} \quad (k, l = 1, 2, 3) \tag{18}$$

поэтому инвариантом I_1 для тензора Π будет выражение

$$\sum_{k=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} a_{kr} b_{rk}$$

которое целесообразно назвать бискалярным произведением тензоров A и B. Мы будем обозначать его через

$$A \cdot\cdot B = \sum_{k=1}^{3} \sum_{r=1}^{3} a_{kr} b_{rk} \tag{19}$$

При $B = A$ выражение (19) делается аналогичным (15).

Задача 187. Вычислить инварианты для диады $\mathbf{ab}$.

Ответ. $I_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$, $I_2 = 0$, $I_3 = 0$.

Задача 188. Вычислить инварианты для антисимметричного тензора, которому соответствует вектор $\boldsymbol{\omega}$.

Ответ. $I_1 = 0$, $I_2 = \omega^2$, $I_3 = 0$.

Задача 189. Показать, что если $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ — три некомпланарных вектора и

$$\Pi\mathbf{a} = \mathbf{a}', \quad \Pi\mathbf{b} = \mathbf{b}', \quad \Pi\mathbf{c} = \mathbf{c}',$$

то

$$I_3(\Pi) = \frac{\mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}')}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}$$

$$I_2(\Pi) = \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b}' \times \mathbf{c}') + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c}' \times \mathbf{a}') + \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a}' \times \mathbf{b}')}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})} \tag{20}$$

$$I_1(\Pi) = \frac{\mathbf{a}' \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b}' \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c}' \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})}{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}$$

Решение. Пусть вектор $\mathbf{r} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}$ имеет главное направление, тогда $\Pi\mathbf{r} = \lambda\mathbf{r}$, где λ — главное значение, т. е.

$$\Pi(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) = \lambda(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c})$$

или

$$\alpha\mathbf{a}' + \beta\mathbf{b}' + \gamma\mathbf{c}' = \lambda(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c})$$

или

$$\alpha(\mathbf{a}' - \lambda\mathbf{a}) + \beta(\mathbf{b}' - \lambda\mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{c}' - \lambda\mathbf{c}) = 0$$

Таким образом, три вектора

$$\mathbf{a}' - \lambda\mathbf{a}, \quad \mathbf{b}' - \lambda\mathbf{b}, \quad \mathbf{c}' - \lambda\mathbf{c}$$

компланарны, что может быть только, если

$$(\mathbf{a}' - \lambda\mathbf{a}) \cdot [(\mathbf{b}' - \lambda\mathbf{b}) \times (\mathbf{c}' - \lambda\mathbf{c})] = 0$$

Раскрывая это векторно-скалярное произведение, получим уравнение третьей степени от λ:

$$\mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') - \lambda\{\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}') + \mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}') + \mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c})\} +$$
$$+ \lambda^2\{\mathbf{a}'\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}'\times\mathbf{c}) + \mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}')\} - \lambda^3\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = 0$$

сравнивая последнее с уравнениями (13) и (14), получим требуемые в задаче выражения.

Задача 190. Показать, что если $\Pi = \mathbf{i}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3$, то

$$\begin{aligned} I_1 &= \mathbf{i}_1\cdot\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\cdot\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\cdot\mathbf{p}_3 \\ I_2 &= \mathbf{i}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3) + \mathbf{i}_2\cdot(\mathbf{p}_3\times\mathbf{p}_1) + \mathbf{i}_3\cdot(\mathbf{p}_1\times\mathbf{p}_2) \\ I_3 &= \mathbf{p}_1\cdot(\mathbf{p}_2\times\mathbf{p}_3) \end{aligned} \tag{21}$$

Задача 191. Показать, что если инварианты тензора Π суть I_1, I_2, I_3, то тензор Π удовлетворяет уравнению

$$\Pi^3 - I_1\Pi^2 + I_2\Pi - I_3\mathrm{I} = 0 \tag{22}$$

Решение. Пусть $\Pi = \mathbf{i}_1\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3 = \bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{i}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{i}_2 + \bar{\mathbf{p}}_3\mathbf{i}_3$. Будем исходить из тождества задачи 176

$$\mathbf{a}\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{b}\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{c}\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\,\mathrm{I} \tag{23}$$

верного, как указано в задаче 177, для любых трех векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$.

Заметим, что это тождество можно представить в следующей форме

$$(\mathbf{a}\mathbf{i}_1 + \mathbf{b}\mathbf{i}_2 + \mathbf{c}\mathbf{i}_3)\cdot[\mathbf{i}_1\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{i}_2\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{i}_3\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b})] = [\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c})]\mathrm{I} \tag{24}$$

ибо по формуле (10) § 25 левые части формул (23) и (24) тождественны между собою. Обозначая теперь через λ произвольный параметр, положим

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{p}}_1 - \lambda\mathbf{i}_1, \quad \mathbf{b} = \bar{\mathbf{p}}_2 - \lambda\mathbf{i}_2, \quad \mathbf{c} = \bar{\mathbf{p}}_3 - \lambda\mathbf{i}_3$$

и заметим, что при этих обозначениях

$$\mathbf{a}\mathbf{i}_1 + \mathbf{b}\mathbf{i}_2 + \mathbf{c}\mathbf{i}_3 = \bar{\mathbf{p}}_1\mathbf{i}_1 + \bar{\mathbf{p}}_2\mathbf{i}_2 + \bar{\mathbf{p}}_3\mathbf{i}_3 - \lambda\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 - \lambda\mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 - \lambda\mathbf{i}_3\mathbf{i}_3 = \Pi - \lambda\mathrm{I}$$
$$\mathbf{i}_1\,(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) + \mathbf{i}_2\,(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) + \mathbf{i}_3\,(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = \mathrm{K}_0 + \lambda\mathrm{K}_1 + \lambda^2\mathrm{K}_2$$

где K_0, K_1, K_2 — некоторые тензоры; наконец

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) = \begin{vmatrix} p_{11}-\lambda & p_{21} & p_{31} \\ p_{12} & p_{22}-\lambda & p_{32} \\ p_{13} & p_{23} & p_{33}-\lambda \end{vmatrix} =$$
$$= D\,(\Pi - \lambda\mathrm{I}) = I_3 - \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3$$

Мы видим, что формула (24) приводит нас к следующему тождеству

$$(\Pi - \lambda\mathrm{I})\cdot(\mathrm{K}_0 + \lambda\mathrm{K}_1 + \lambda^2\mathrm{K}_2) = (I_3 - \lambda I_2 + \lambda^2 I_1 - \lambda^3)\,\mathrm{I}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ в обеих частях этого тождества, находим равенства,

$$\Pi\mathrm{K}_0 = I_3\mathrm{I}, \quad \Pi\mathrm{K}_1 - \mathrm{K}_0 = -I_2\mathrm{I}, \quad \Pi\mathrm{K}_2 - \mathrm{K}_1 = I_1\mathrm{I}, \quad -\mathrm{K}_2 = -\mathrm{I}$$

Умножая обе части этих равенств слева соответственно на I, П, $П^2$, $П^3$, получим

$$П K_0 = I_3 I, \qquad П^2 K_1 - П K_0 = - I_2 П$$
$$П^3 K_2 - П^2 K_1 = I_1 П^2, \qquad - П^3 K_2 = - П^3$$

При сложении этих равенств, все члены, стоящие слева, сократятся и мы получим

$$I_3 I - I_2 П + I_1 П^2 - П^3 = 0$$

что и составляет требуемое тождество.

Задача 192. Разлагая тензор

$$П = i_1 p_1 + i_2 p_2 + i_3 p_3 = \begin{Vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{Vmatrix}$$

на симметричную и антисимметричную части, мы можем сопоставить последней, как указано в § 23, аксиальный вектор ω. Показать, что

$$-2\omega = (p_{23} - p_{32})\, i_1 + (p_{31} - p_{13})\, i_2 + (p_{12} - p_{21})\, i_3 = i_1 \times p_1 + i_2 \times p_2 + i_3 \times p_3$$

Показать далее, что для любого представления тензора П в виде суммы трех диад: $П = q_1 r_1 + q_2 r_2 + q_3 r_3$ имеет место равенство

$$-2\omega = q_1 \times r_1 + q_2 \times r_2 + q_3 \times r_3$$

и что обращение вектора ω в нуль есть необходимое и достаточное условие симметричности тензора. Отметим попутно, что квадрат величины вектора ω является, очевидно, тоже инвариантом тензора П.

§ 28. Дифференцирование тензора по скалярному аргументу

1. Переходя к изучению переменных тензоров, мы, как и в векторном анализе, начнем с рассмотрения того случая, когда независимой переменной является скалярный аргумент t, например, время. Итак, пусть нам задан тензор $П(t)$, изменяющийся вместе с t и представляющий некоторую функцию t. Как всегда, задание тензора $П(t)$ может быть существлено или при помощи задания его девяти составляющих:

$$П(t) = \begin{Vmatrix} p_{11}(t) & p_{12}(t) & p_{13}(t) \\ p_{21}(t) & p_{22}(t) & p_{23}(t) \\ p_{31}(t) & p_{32}(t) & p_{33}(t) \end{Vmatrix} \tag{1}$$

в функции времени или же при помощи задания в диадной форме

$$П(t) = i_1 p_1(t) + i_2 p_2(t) + i_3 p_3(t) \tag{2}$$

или в более общей диадной форме

$$П(t) = q_1(t) r_1(t) + q_2(t) r_2(t) + q_3(t) r_2(t) \tag{3}$$

Не останавливаясь на понятии непрерывности функции, понятии предела и т. п. понятиях, которые могут быть введены совершенно так же, как в обычном анализе, мы сразу дадим определение производной от переменного тензора $\Pi(t)$ по скалярному аргументу t.

Производной тензора Π *по скалярному аргументу* t *называется предел отношения изменения тензора к приращению независимой переменной, когда это последнее стремится к нулю*:

$$\frac{d\Pi}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Pi(t + \Delta t) - \Pi(t)}{\Delta t} \tag{4}$$

Конечно, мы всегда будем предполагать, что те производные, с которыми нам надо будет иметь дело, существуют и непрерывны.

Ясно, что если тензор Π задан в форме (1), то в силу правил вычитания тензоров и деления на скалярный множитель мы легко получим следующее представление производной от тензора (точка обозначает для краткости дифференцирование по t):

$$\frac{d\Pi}{dt} = \begin{Vmatrix} \dot{p}_{11}(t) & \dot{p}_{12}(t) & \dot{p}_{13}(t) \\ \dot{p}_{21}(t) & \dot{p}_{22}(t) & \dot{p}_{23}(t) \\ \dot{p}_{31}(t) & \dot{p}_{32}(t) & \dot{p}_{33}(t) \end{Vmatrix} \tag{5}$$

Таким образом, составляющие производной от тензора по скалярному аргументу равны производным от соответствующих составляющих этого тензора. Если же тензор Π представлен в форме (2) или (3), то в результате дифференцирования его соответственно получим

$$\frac{d\Pi}{dt} = \mathbf{i}_1\dot{p}_1(t) + \mathbf{i}_2\dot{p}_2(t) + \mathbf{i}_3\dot{p}_3(t) \tag{6}$$

$$\frac{d\Pi}{dt} = \dot{q}_1(t)\,\mathbf{r}_1(t) + q_1(t)\,\dot{\mathbf{r}}_1(t) + \dot{q}_2(t)\,\mathbf{r}_2(t) + q_2(t)\,\dot{\mathbf{r}}_2(t) + \dot{q}_3(t)\,\mathbf{r}_3(t) + q_3(t)\,\dot{\mathbf{r}}_3(t) \tag{7}$$

Доказательство этих формул, основанное на элементарных правилах действий с диадами, не представляет ни малейших затруднений.

Легко далее видеть, что все основные свойства производных сохраняются и для производных от тензоров.

Мы выпишем в качестве примера несколько формул. Так, например, ясно, что

$$\frac{d(\Pi_1 + \Pi_2)}{dt} = \frac{d\Pi_1}{dt} + \frac{d\Pi_2}{dt} \tag{8}$$

$$\frac{d(m\Pi)}{dt} = \frac{dm}{dt}\Pi + m\frac{d\Pi}{dt} \tag{9}$$

где m — скалярная функция от t.

Если Π — тензор, а $\mathbf{a}$ — вектор, зависящие от t, то, как нетрудно вывести,

$$\frac{d(\Pi \cdot \mathbf{a})}{dt} = \frac{d\Pi}{dt} \cdot \mathbf{a} + \Pi \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} \tag{10}$$

Аналогичная формула имеет место и для производной от $\Pi \times a$. Если Π_1 и Π_2 два переменных тензора, то

$$\frac{d(\Pi_1\Pi_2)}{dt} = \frac{d\Pi_1}{dt}\Pi_2 + \Pi_1\frac{d\Pi_2}{dt} \tag{11}$$

Выведем еще формулу для дифференцирования обратного тензора. Пусть $\Pi(t)$ есть полный переменный тензор, так что определитель этого тензора $D(\Pi)$ отличен от нуля и пусть Π^{-1} есть обратный ему тензор, так что

$$\Pi\Pi^{-1} = I \tag{12}$$

Продифференцируем предыдущее равенство по t. Имеем

$$\frac{d\Pi}{dt}\Pi^{-1} + \Pi\frac{d\Pi^{-1}}{dt} = 0$$

так как I — постоянный тензор. Отсюда

$$\Pi\frac{d\Pi^{-1}}{dt} = -\frac{d\Pi}{dt}\Pi^{-1}$$

Умножим теперь обе части этого равенства *слева* на Π^{-1}; замечая еще, что $\Pi^{-1}\Pi = I$, получим требуемую формулу

$$\frac{d\Pi^{-1}}{dt} = -\Pi^{-1}\frac{d\Pi}{dt}\Pi^{-1} \tag{13}$$

2. Некоторые задачи приводят к необходимости решать дифференциальные уравнения, в которых неизвестными являются тензоры. Мы рассмотрим простейший пример таких уравнений, а именно уравнение

$$\frac{dX}{dt} = UX \tag{14}$$

где $X(t)$ есть искомый тензор, зависящий от t, а U — заданный постоянный тензор.

Если бы нам было дано обыкновенное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax$$

где a — постоянное число, то решением его была бы функция

$$x = e^{at} = 1 + at + \frac{a^2t^2}{2!} + \frac{a^3t^3}{3!} + \ldots \tag{15}$$

Попробуем поэтому проверить, не будет ли сумма ряда тензоров

$$X_1(t) = I + Ut + \frac{U^2t^2}{2!} + \frac{U^3t^3}{3!} \ldots \tag{16}$$

которую, по аналогии с суммой ряда (15), обозначают просто через

$$X_1(t) = e^{Ut} \tag{17}$$

решением уравнения (14).

Дифференцируя ряд (16) по t, мы получим, что

$$\frac{dX_1(t)}{dt} = U + \frac{U^2 t}{1!} + \frac{U^3 t^2}{2!} + \ldots = U\left(I + \frac{Ut}{1!} + \frac{U^2 t^2}{2!} + \ldots\right) = UX_1(t)$$

откуда видно, что действительно функция (17) удовлетворяет уравнению (14). При этом рассуждении мы молчаливо предполагали, что ряд (16) сходится и что его можно дифференцировать по t; все это без труда можно доказать, но мы не хотим на этом останавливаться.

Нетрудно теперь найти общее решение уравнения (14). В самом деле, положим, что

$$X(t) = X_1(t)\,Y(t)$$

где $Y(t)$ — новая неизвестная функция. По формуле (11) имеем

$$\frac{dX}{dt} = \frac{dX_1}{dt}Y + X_1\frac{dY}{dt}$$

Но

$$\frac{dX_1}{dt} = UX_1, \qquad \frac{dX}{dt} = UX = UX_1Y$$

Следовательно, получаем

$$UX_1Y = UX_1Y + X_1\frac{dY}{dt}, \quad \text{или} \quad X_1\frac{dY}{dt} = 0$$

Вообще из равенства нулю произведения двух тензоров нельзя заключать, что один из них должен равняться нулю; но если один из тензоров полный, то другой непременно должен равняться нулю. Но для тензора $X_1(t) = e^{Ut}$ существует обратный тензор e^{-Ut}, следовательно, по теореме § 25 X_1 является полным тензором, а следовательно

$$\frac{dY}{dt} = 0$$

откуда следует, что Y есть постоянный тензор C.

Итак, общим решением уравнения (14) является

$$X(t) = e^{Ut}C \tag{18}$$

где C — постоянный тензор, а e^{Ut} определено рядом (16).

Полагая в формуле (18) $t = 0$ и замечая, что в силу (16) $e^{U\cdot 0} = I$, найдем, что

$$X(0) = C \tag{19}$$

так что тензор C представляет начальное значение тензора X.

3. Дадим несколько примеров для того, чтобы иллюстрировать сказанное в предыдущем пункте. В качестве первого примера установим выражение для тензора поворота.

Рассмотрим вращение твердого тела около неподвижной точки, которую мы примем за начало координат O. Пусть это вращение происходит около неподвижной в пространстве оси с угловой скоростью ω, так что вектор угловой скорости есть ω. Тогда скорость какой-либо точки M,

радиус-вектор которой есть r, выразится по формуле

$$\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}, \quad \text{или} \quad \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \omega \times \mathbf{r} \tag{20}$$

Проведем в теле три взаимно перпендикулярные оси, которые в начальный момент $t = 0$ совпадают с неподвижными осями координат и имеют орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, а затем вращаются вместе с телом и к моменту t имеют орты $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_2(t)$, $\mathbf{p}_3(t)$. Тогда тензором поворота мы должны назвать тензор

$$\Pi = \mathbf{p}_1(t)\,\mathbf{i}_1 + \mathbf{p}_2(t)\,\mathbf{i}_2 + \mathbf{p}_3(t)\,\mathbf{i}_3 \tag{21}$$

В самом деле, если мы рассмотрим в теле радиус-вектор r какой-либо точки M, вращающейся вместе с телом, и если в начальный момент $t = 0$ мы имели

$$\mathbf{r}_0 = x_1\mathbf{i}_1 + x_2\mathbf{i}_2 + x_3\mathbf{i}_3$$

то в момент t, когда орты $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ перешли в $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, мы должны иметь

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{p}_1 + x_2\mathbf{p}_2 + x_3\mathbf{p}_3$$

так как координаты x_1, x_2, x_3 точки M относительно подвижных осей должны оставаться неизменными. Но из (21) очевидно, что

$$\Pi\mathbf{i}_1 = \mathbf{p}_1(t), \quad \Pi\mathbf{i}_2 = \mathbf{p}_2(t), \quad \Pi\mathbf{i}_3 = \mathbf{p}_3(t) \tag{22}$$

и, следовательно, как легко уяснить себе,

$$\Pi\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} \tag{23}$$

Итак, всякий радиус-вектор $\mathbf{r}_0$ после поворота, осуществляемого тензором П, переходит в радиус-вектор r.

Запишем теперь уравнение (20) в следующем виде

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{r} \tag{24}$$

где, согласно формулам (37) и (38) § 24, A обозначает антисимметричный тензор

$$\mathbf{A} = \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix} \tag{25}$$

Уравнение (24) применимо к любому вращающемуся вместе с телом вектору, в частности применимо к векторам $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_2(t)$, $\mathbf{p}_3(t)$:

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{p}_1, \quad \frac{d\mathbf{p}_2}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{p}_2, \quad \frac{d\mathbf{p}_3}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{p}_3$$

Из этих равенств легко вывести следующее

$$\frac{d\mathbf{p}_1}{dt}\mathbf{i}_1 + \frac{d\mathbf{p}_2}{dt}\mathbf{i}_2 + \frac{d\mathbf{p}_3}{dt}\mathbf{i}_3 = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}_1)\,\mathbf{i}_1 + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}_2)\,\mathbf{i}_2 + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}_3)\,\mathbf{i}_3 =$$
$$= \mathbf{A}\cdot(\mathbf{p}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{p}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{p}_3\mathbf{i}_3) = \mathbf{A}\Pi$$

или, в силу формулы, аналогичной формуле (6)

$$\frac{d\Pi}{dt} = A\Pi \tag{26}$$

Итак, тензор поворота Π удовлетворяет дифференциальному уравнению (26), где A есть постоянный антисимметричный тензор (25). Применяя к решению уравнения (26) теорию предыдущего пункта, получим, что

$$\Pi(t) = e^{At}C \tag{27}$$

где C есть начальное значение тензора поворота, т. е. $C = I$ (так как в начальный момент векторы $\mathbf{p}_1(t)$, $\mathbf{p}_2(t)$ и $\mathbf{p}_3(t)$ совпадают с векторами $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, а $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$).

Итак, для тензора поворота мы получаем выражение

$$\Pi(t) = e^{At} \tag{28}$$

Представим его в другой форме. Прежде всего по формуле (16) будем иметь

$$e^{At} = I + \frac{At}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3t^3}{3!} + \frac{A^4t^4}{4!} + \dots \tag{29}$$

Заметим далее, что, как нетрудно вычислить, инвариантами тензора A являются

$$I_1 = 0, \qquad I_2 = \omega^2, \qquad I_3 = 0$$

и поэтому, согласно задаче 191

$$A^3 + \omega^2 A = 0$$

Впрочем это последнее равенство нетрудно проверить и непосредственно. Из него легко вывести, что

$$A^3 = -\omega^2 A, \quad A^4 = -\omega^2 A^2, \quad A^5 = \omega^4 A, \quad A^6 = \omega^4 A^2, \quad A^7 = -\omega^6 A, \dots$$

Поэтому ряд (29) получает следующую форму

$$\Pi = I + A\left(\frac{t}{1} - \frac{\omega^2 t^3}{3!} + \frac{\omega^4 t^5}{5!} - \frac{\omega^6 t^7}{7!} + \dots\right) + A^2\left(\frac{t^2}{2!} - \frac{\omega^2 t^4}{4!} + \frac{\omega^4 t^6}{6!} - \dots\right)$$

Принимая теперь во внимание известные из анализа ряды

$$\sin(\omega t) = \frac{\omega t}{1} - \frac{\omega^3 t^3}{3!} + \frac{\omega^5 t^5}{5!} - \frac{\omega^7 t^7}{7!} + \dots$$

$$\cos(\omega t) = 1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} - \frac{\omega^6 t^6}{6!} + \dots$$

легко преобразовать предыдущее равенство к следующему виду:

$$\Pi = I + A\frac{\sin \omega t}{\omega} + A^2\frac{1 - \cos \omega t}{\omega^2} \tag{30}$$

В целях дальнейших преобразований обозначим угол поворота ωt через φ, а единичный вектор, имеющий направление оси вращения через $\mathbf{n}$, так что $\boldsymbol{\omega} = \omega\mathbf{n}$.

Если мы согласно правилу пункта 5 § 24 будем составлять $\mathrm{I}\times\omega$, то получим

$$\mathrm{I}\times\omega = (\mathbf{i}_1\mathbf{i}_1 + \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2 + \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3)\times\omega = \mathbf{i}_1(\mathbf{i}_1\times\omega) + \mathbf{i}_2(\mathbf{i}_2\times\omega) + \mathbf{i}_3(\mathbf{i}_3\times\omega) =$$

$$= \begin{Vmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{Vmatrix} = \mathrm{A} \tag{31}$$

Чтобы вычислить A^2, заметим, что

$$\mathrm{A}\mathbf{r} = \omega\times\mathbf{r} \tag{32}$$

Поэтому

$$\mathrm{A}^2\mathbf{r} = \mathrm{A}\cdot\mathrm{A}\mathbf{r} = \mathrm{A}\cdot(\omega\times\mathbf{r}) = \omega\times(\omega\times\mathbf{r}) = \omega(\omega\cdot\mathbf{r}) - \omega^2\mathbf{r}$$

Отсюда следует, что

$$\mathrm{A}^2 = \omega\omega - \omega^2\mathrm{I} = \omega^2(\mathbf{n}\mathbf{n} - \mathrm{I}) \tag{33}$$

Принимая все это во внимание, получим

$$\Pi = \mathbf{n}\mathbf{n} + \sin\varphi(\mathrm{I}\times\mathbf{n}) + \cos\varphi(\mathrm{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}) \tag{34}$$

Формула (34) и дает окончательное выражение тензора поворота Π через угол поворота φ и через единичный вектор $\mathbf{n}$, дающий направление оси поворота. Какой-либо вектор $\mathbf{r}_0$ после поворота принимает положение $\mathbf{r}$, определяющееся формулой

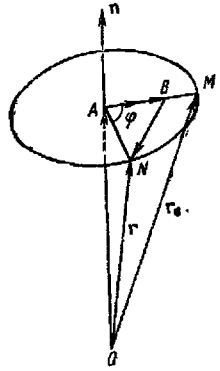
$$\mathbf{r} = \Pi\mathbf{r}_0 = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) + \sin\varphi\{(\mathrm{I}\times\mathbf{n})\cdot\mathbf{r}_0\} + \cos\varphi\{\mathbf{r}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)\} =$$
$$= \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) + \sin\varphi\{\mathrm{I}\cdot(\mathbf{n}\times\mathbf{r}_0)\} + \cos\varphi\{\mathbf{r}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)\}$$

или

$$\mathbf{r} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0) + \sin\varphi\{\mathbf{n}\times\mathbf{r}_0\} + \cos\varphi\{\mathbf{r}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)\} \tag{35}$$

Эту последнюю формулу можно было бы, конечно, получить и непосредственно из простых геометрических соображений. В самом деле, пусть OA — ось поворота и пусть $\mathbf{r}_0 = \overline{OM}$ (фиг. 93).

Опустим из точки M перпендикуляр MA на направление оси OA и пусть A — основание этого перпендикуляра. После поворота на угол φ вектор $\mathbf{r}_0$ займет положение $\mathbf{r} = \overline{ON}$, а $\overline{AM}$ повернется в плоскости, перпендикулярной оси, и займет положение AN, причем $\angle MAN = \varphi$.



Фиг. 93

Опустим из точки N перпендикуляр NB на направление AM и пусть B — основание этого перпендикуляра.

Мы имеем тогда, что

$$\mathbf{r} = \overline{ON} = \overline{OA} + \overline{AB} + \overline{BN}$$

Вектор $\overline{OA}$ имеет направление $\mathbf{n}$ и по величине равен проекции вектора $\mathbf{r}_0$ на направление оси, т. е. равен $\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0$, поэтому

$$\overline{OA} = \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)$$

Вектор $\mathbf{n}\times\mathbf{r}_0$ равен по величине $r_0 \sin(MOA) = AM$ и имеет то же направление, что вектор $\overline{BN}$, величина которого равна $AN\sin\varphi = AM\sin\varphi$. Поэтому

$$\overline{BN} = \sin\varphi\,\{\mathbf{n}\times\mathbf{r}_0\}$$

Наконец, вектор $\overline{AM} = \overline{OM} - \overline{OA} = \mathbf{r}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)$, а поэтому

$$\overline{AB} = \cos\varphi\,\overline{AM} = \cos\varphi\,\{\mathbf{r}_0 - \mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}_0)\}$$

Складывая найденные выражения для векторов $\overline{OA}$, $\overline{AB}$ и $\overline{BN}$, мы и докажем формулу (35).

4. В качестве следующего примера рассмотрим вопрос о сохраняемости векторных линий вектора a.

В § 21 свойство сохраняемости векторных линий определялось следующим образом: если мы имеем нестационарное поле вектора a и если частицы сплошной среды, образующие векторную линию в какой-нибудь определенный момент t_0, в любой момент времени образуют векторную линию, и если это верно для любой векторной линии, то мы говорим, что векторные линии вектора a сохраняются. В том же параграфе было выведено необходимое условие сохраняемости векторых линий вектора a:

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{a} = 0 \tag{36}$$

где v — вектор скорости сплошной среды.

Докажем теперь достаточность условия (36) для сохраняемости векторных линий. Для этого нам будет удобно перейти к переменным Лагранжа. До сих пор мы рассматривали различные поля векторов, т. е. рассматривали значения векторов, отнесенных к фиксированным точкам пространства. Но в некоторых вопросах целесообразно рассматривать значения векторов, отнесенных к фиксированным частицам сплошной среды. В этих случаях каждой частице сплошной среды сопоставляются три параметра a, b, c, которые называются лагранжевыми переменными. Движение всей среды будет известно, если будут известны координаты каждой частицы к любому моменту t:

$$x = x(a, b, c, t), \qquad y = y(a, b, c, t), \qquad z = z(a, b, c, t) \tag{37}$$

Чаще всего за a, b, c принимают декартовы координаты частицы в начальный момент времени t_0. В этом случае мы будем иметь, что

$$a = x(a, b, c, t_0) \quad b = y(a, b, c, t_0), \; c = z(a, b, c, t_0) \tag{38}$$

Если r есть радиус-вектор в пространстве x, y, z, а $\mathbf{r}_0$ есть радиус-вектор в пространстве a, b, c, то формулы (37) запишутся в векторной форме следующим образом:

$$\mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t) \tag{39}$$

Чтобы определить скорость какой-либо частицы, мы должны, по общему правилу, составить производную от радиуса-вектора $\mathbf{r}$ по времени t (ведь для каждой данной частицы a, b, c остаются постоянными).

В результате получим

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

или в проекциях

$$v_x = \frac{dx(a, b, c, t)}{dt}, \quad v_y = \frac{dy(a, b, c, t)}{dt}, \quad v_z = \frac{dz(a, b, c, t)}{dt} \tag{40}$$

Мы предположим, что функции (37), их первые и вторые производные по a, b, c, t существуют и непрерывны и что уравнения (37) можно решить относительно a, b, c:

$$a = a(x, y, z, t), \quad b = b(x, y, z, t), \quad c = c(x, y, z, t) \tag{41}$$

необходимым условием чего является отличие от нуля определителя

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{vmatrix} \tag{42}$$

Вставляя выражения (41) в формулу (40), мы получим обычное представление вектора скорости $\mathbf{v}$ через координаты x, y, z, t, т. е. получим поле скорости. Примем за a, b, c, декартовы координаты частицы в момент t_0. Рассмотрим теперь к моменту t_0 бесконечно малый вектор $\delta\mathbf{r}_0$, декартовы составляющие которого равны δa, δb, δc; жидкие частицы, образующие этот элемент, расположатся к моменту t вдоль вектора $\delta\mathbf{r}$ с составляющими

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial a}\delta a + \frac{\partial x}{\partial b}\delta b + \frac{\partial x}{\partial c}\delta c \\ \delta y &= \frac{\partial y}{\partial a}\delta a + \frac{\partial y}{\partial b}\delta b + \frac{\partial y}{\partial c}\delta c \\ \delta z &= \frac{\partial z}{\partial a}\delta a + \frac{\partial z}{\partial b}\delta b + \frac{\partial z}{\partial c}\delta c \end{aligned} \tag{43}$$

Вводя поэтому в рассмотрение тензор (см. § 24)

$$\mathrm{T} = \frac{d\mathbf{r}}{d\mathbf{r}_0} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial x}{\partial a} & \frac{\partial x}{\partial b} & \frac{\partial x}{\partial c} \\ \frac{\partial y}{\partial a} & \frac{\partial y}{\partial b} & \frac{\partial y}{\partial c} \\ \frac{\partial z}{\partial a} & \frac{\partial z}{\partial b} & \frac{\partial z}{\partial c} \end{Vmatrix} \tag{44}$$

мы можем записать, что

$$\delta\mathbf{r} = \mathrm{T}\,\delta\mathbf{r}_0 \tag{45}$$

Из самого понятия о сохраняемости векторных линий вектора $\mathbf{a}$ следует, что для того, чтобы сохраняемость векторных линий вектора $\mathbf{a}$

имела место, необходимо и достаточно, чтобы из коллинеарности векторов $\mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t_0)$ и $\delta\mathbf{r}_0$ следовала коллинеарность векторов $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ и $\delta\mathbf{r}$.

Таким образом, если

$$\delta\mathbf{r}_0 \times \mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t_0) = 0 \tag{46}$$

то должно быть

$$\delta\mathbf{r} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}, t) = 0 \tag{47}$$

Но в силу отличия определителя (42) от нуля, тензор T является полным. Поэтому условие (46) совершенно эквивалентно такому условию (ибо коллинеарные векторы после преобразования тензором опять переходят в коллинеарные векторы):

$$T\delta\mathbf{r}_0 \times T\mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t_0) = 0$$

а в силу (45) такому

$$\delta\mathbf{r} \times T\mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t_0) = 0 \tag{48}$$

Итак, из (48) должно следовать (47), иными словами, векторы $T\mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t_0)$ и $\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$ должны быть коллинеарны.

Мы приходим поэтому к следующему выводу: *необходимым и достаточным условием сохраняемости векторных линий вектора* $\mathbf{a}$ *является выполнение равенства*

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \times T\mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t_0) = 0 \tag{49}$$

Умножая оба вектора на тензор T^{-1} слева, мы можем переписать равенство (49) в эквивалентной форме

$$T^{-1}\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{a}(\mathbf{r}_0, t_0) = 0 \tag{50}$$

Смысл равенства (50) заключается, очевидно, в том, что вектор

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}, t) = T^{-1}\mathbf{a}(\mathbf{r}, t)$$

сохраняет постоянное направление в пространстве. Но необходимым и достаточным условием для этого является выполнение равенства

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} \times \mathbf{b} = 0 \tag{51}$$

как это следует из § 9, формулы (15) и из задачи 80.

Заметим теперь, что

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = \frac{dT^{-1}}{dt}\mathbf{a}(\mathbf{r}, t) + T^{-1}\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

и в силу формулы (13)

$$\frac{d\mathbf{b}}{dt} = -T^{-1}\frac{dT}{dt}T^{-1}\mathbf{a} + T^{-1}\frac{d\mathbf{a}}{dt}$$

Поэтому формула (51) может быть переписана в виде

$$\left(T^{-1}\frac{d\mathbf{a}}{dt} - T^{-1}\frac{dT}{dt}T^{-1}\mathbf{a}\right) \times (T^{-1}\mathbf{a}) = 0$$

или, умножая оба вектора слева на T, в виде

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - \frac{d\mathrm{T}}{dt}\mathrm{T}^{-1}\mathbf{a}\right) \times \mathbf{a} = 0 \tag{52}$$

Выясним значение тензора

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}\mathrm{T}^{-1}$$

Из формулы (44) имеем, по правилу дифференцирования тензора и принимая во внимание формулы (40):

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial a\,\partial t} & \frac{\partial^2 x}{\partial b\,\partial t} & \frac{\partial^2 x}{\partial c\,\partial t} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial a\,\partial t} & \frac{\partial^2 y}{\partial b\,\partial t} & \frac{\partial^2 y}{\partial c\,\partial t} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial a\,\partial t} & \frac{\partial^2 z}{\partial b\,\partial t} & \frac{\partial^2 z}{\partial c\,\partial t} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial a} & \frac{\partial v_x}{\partial b} & \frac{\partial v_x}{\partial c} \\ \frac{\partial v_y}{\partial a} & \frac{\partial v_y}{\partial b} & \frac{\partial v_y}{\partial c} \\ \frac{\partial v_z}{\partial a} & \frac{\partial v_z}{\partial b} & \frac{\partial v_z}{\partial c} \end{Vmatrix} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}_0} \tag{53}$$

Заметим далее, что тензор T^{-1}, обратный для тензора T, имеет, очевидно, значение

$$\mathrm{T}^{-1} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\mathbf{r}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial a}{\partial x} & \frac{\partial a}{\partial y} & \frac{\partial a}{\partial z} \\ \frac{\partial b}{\partial x} & \frac{\partial b}{\partial y} & \frac{\partial b}{\partial z} \\ \frac{\partial c}{\partial x} & \frac{\partial c}{\partial y} & \frac{\partial c}{\partial z} \end{Vmatrix} \tag{54}$$

Нетрудно поэтому составить произведение $(d\mathrm{T}/dt)\,\mathrm{T}^{-1}$. В самом деле, возьмем произвольный бесконечно малый вектор $d\mathbf{r}$, тогда в силу (54) имеем

$$\mathrm{T}^{-1}d\mathbf{r} = \frac{d\mathbf{r}_0}{d\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{r}_0$$

Далее в силу (53) имеем

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt} \cdot (\mathrm{T}^{-1}d\mathbf{r}) = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}_0} \cdot d\mathbf{r}_0 = d\mathbf{v}$$

Но это означает, что

$$\left(\frac{d\mathrm{T}}{dt}\mathrm{T}^{-1}\right) \cdot d\mathbf{r} = d\mathbf{v}$$

Отсюда следует, что

$$\frac{d\mathrm{T}}{dt}\mathrm{T}^{-1} = \frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{Vmatrix} \tag{55}$$

Теперь нетрудно вычислить, чему равняется вектор $\frac{d\mathrm{T}}{dt}\,\mathrm{T}^{-1}\mathbf{a}$.

А именно по формуле 28 § 24 мы имеем

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\mathbf{r}}\cdot\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}$$

и, следовательно,

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt}\mathbf{T}^{-1}\mathbf{a} = (\mathbf{a}\cdot\nabla)\mathbf{v} \tag{56}$$

Условие (52) переписывается теперь в окончательном виде

$$\left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - (\mathbf{a}\cdot\nabla)\,\mathbf{v}\right)\times\mathbf{a} = 0 \tag{57}$$

Так как это условие совершенно эквивалентно условию (49), то мы можем высказать следующую теорему: *необходимым и достаточным условием охраняемости векторных линий вектора* **a** *является выполнение равенства* (57).

Итак, мы получили условие сохраняемости векторных линий в двух формах: в форме (57), годной для случая обычных независимых переменных x, y, z, t, и в форме (49), пригодной для случая лагранжевых переменных. Это последнее уравнение, будучи выписано в проекциях на оси координат, имеет, очевидно, следующий вид

$$\frac{a_x}{a_{x_0}\dfrac{\partial x}{\partial a} + a_{y_0}\dfrac{\partial x}{\partial b} + a_{z_0}\dfrac{\partial x}{\partial c}} = \frac{a_y}{a_{x_0}\dfrac{\partial y}{\partial a} + a_{y_0}\dfrac{\partial y}{\partial b} + a_{z_0}\dfrac{\partial y}{\partial c}} = \frac{a_z}{a_{x_0}\dfrac{\partial z}{\partial a} + a_{y_0}\dfrac{\partial z}{\partial b} + a_{z_0}\dfrac{\partial z}{\partial c}} \tag{58}$$

где a_x, a_y, a_z и a_{x_0}, a_{y_0}, a_{z_0} — проекции вектора **a** в два различных момента времени t и t_0, но для одной и той же частицы.

§ 29. Расхождение тензора. Применение к теории упругости

1. Из дифференциальных операций мы рассмотрим только вопрос о расхождении тензора, которое мы определим по аналогии с расхождением вектора. Итак, допустим, что мы имеем поле тензоров

$$\Pi(\mathbf{r}) = \mathbf{i}_1\mathbf{p}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{i}_2\mathbf{p}_2(\mathbf{r}) + \mathbf{i}_3\mathbf{p}_3(\mathbf{r})$$

Определим в каждой точке поля для каждого направления **n** вектор

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{n}\cdot\Pi = \mathbf{p}_1\cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{p}_2\cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{p}_3\cos(\mathbf{n}, x_3) \tag{1}$$

Рассмотрим теперь интеграл по замкнутой поверхности S:

$$\oint_S \mathbf{p}_n dS$$

и применим к нему формулу Гаусса—Остроградского:

$$\oint_S \mathbf{p}_n dS = \oint_S \{\mathbf{p}_1\cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{p}_2\cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{p}_3\cos(\mathbf{n}, x_3)\}\,dS =$$

$$= \int_V \left(\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3}\right) dV \tag{2}$$

Отсюда вытекает, если взять объем V бесконечно малым и считать

$$\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1},\quad \frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2},\quad \frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3}$$

непрерывными, существование

$$\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \mathbf{p}_n dS}{V}$$

и равенство его вектору, который называется расхождением тензора Π и обозначается через

$$\operatorname{div}\Pi=\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \mathbf{p}_n dS}{V}=\frac{\partial \mathbf{p}_1}{\partial x_1}+\frac{\partial \mathbf{p}_2}{\partial x_2}+\frac{\partial \mathbf{p}_3}{\partial x_3} \tag{3}$$

Проекциями этого вектора являются

$$\begin{aligned}(\operatorname{div}\Pi)_1&=\frac{\partial p_{11}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{21}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}\\ (\operatorname{div}\Pi)_2&=\frac{\partial p_{12}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{22}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{32}}{\partial x_3}\\ (\operatorname{div}\Pi)_3&=\frac{\partial p_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial p_{23}}{\partial x_2}+\frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}\end{aligned} \tag{4}$$

Формула (2) может теперь быть переписана в виде

$$\oint_S \mathbf{p}_n dS=\int_V \operatorname{div}\Pi\, dV \tag{5}$$

В качестве примера рассмотрим $\operatorname{div}(\varphi \mathrm{I})$, где I — единичный тензор:

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\varphi \mathrm{I})&=\lim_{V\to 0}\frac{\oint_S \varphi \mathbf{n}\, dS}{V}=\frac{\partial(\varphi \mathbf{i}_1)}{\partial x_1}+\frac{\partial(\varphi \mathbf{i}_2)}{\partial x_2}+\frac{\partial(\varphi \mathbf{i}_3)}{\partial x_3}=\\ &=\mathbf{i}_1\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}+\mathbf{i}_2\frac{\partial \varphi}{\partial x_2}+\mathbf{i}_3\frac{\partial \varphi}{\partial x_3}=\operatorname{grad}\varphi\end{aligned} \tag{6}$$

Задача 193. Доказать формулу

$$\operatorname{div}(\varphi\Pi)=\varphi\operatorname{div}\Pi+\operatorname{grad}\varphi\cdot\Pi \tag{7}$$

2. Выведем основные уравнения равновесия и движения сплошной среды. Мысленно вырежем в последней объем V (фиг. 85) и, пользуясь обозначениями п. 3 § 22, применим к этому объему шесть необходимых условий равновесия и движения сплошной среды, — именно:

Главный вектор всех сил, приложенных к частицам объема, включая и силы инерции, должен равняться нулю.

Главный момент относительно какой-либо точки всех сил, приложенных к частицам объема, включая и силы инерции, должен равняться нулю.

Если ρ обозначает плотность, $\mathbf{F}$ — заданную внешнюю силу, приходящуюся на единицу массы, $d\mathbf{v}/dt$ — ускорение, $\mathbf{p}_n$ — напряжение на площадку с нормалью $\mathbf{n}$, то указанные условия приводят к следующим двум уравнениям:

$$\int_V \rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) dV + \oint_S \mathbf{p}_n dS = 0 \tag{8}$$

$$\int_V \rho\left[\mathbf{r}\times\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right)\right] dV + \oint_S \mathbf{r}\times\mathbf{p}_n dS = 0 \tag{9}$$

В § 22 мы уже использовали первое уравнение, чтобы показать, что

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_1 \cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{p}_2 \cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{p}_3 \cos(\mathbf{n}, x_3) \tag{10}$$

откуда следовало, что упругие напряжения образуют тензор Π. Но тогда на основании формулы (5) уравнение (8) можно записать в виде

$$\int_V \left\{\rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) + \operatorname{div}\Pi\right\} dV = 0$$

Отсюда в силу произвольности объема V следует основное уравнение механики сплошной среды

$$\rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) + \operatorname{div}\Pi = 0 \tag{11}$$

3. Покажем теперь, что тензор упругих напряжений есть симметричный тензор. Для этого преобразуем в формуле (9) поверхностный интеграл в объемный

$$\oint_S [\mathbf{r}\times\mathbf{p}_n]\, dS = \oint_S \{\mathbf{r}\times\mathbf{p}_1 \cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{r}\times\mathbf{p}_2 \cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{r}\times\mathbf{p}_3 \cos(\mathbf{n}, x_3)\}\, dS =$$

$$= \int_V \left\{\frac{\partial(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_3)}{\partial x_3}\right\} dV =$$

$$= \int_V \left\{\mathbf{r}\times\left(\frac{\partial\mathbf{p}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\mathbf{p}_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\mathbf{p}_3}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_1}\times\mathbf{p}_1 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_2}\times\mathbf{p}_2 + \frac{\partial\mathbf{r}}{\partial x_3}\times\mathbf{p}_3\right\} dV =$$

$$= \int_V \{\mathbf{r}\times\operatorname{div}\Pi + \mathbf{i}_1\times\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\times\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\times\mathbf{p}_3\}\, dV$$

Поэтому формула (9) дает

$$\int_V \left\{\mathbf{r}\times\left[\rho\left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt}\right) + \operatorname{div}\Pi\right]\right\} dV + \int_V \{\mathbf{i}_1\times\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\times\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\times\mathbf{p}_3\}\, dV = 0$$

Но в силу равенства (11) первый интеграл пропадает, а второй в силу произвольности объема V, дает

$$\mathbf{i}_1\times\mathbf{p}_1 + \mathbf{i}_2\times\mathbf{p}_2 + \mathbf{i}_3\times\mathbf{p}_3 = 0 \tag{12}$$

Но легко видеть, что условие (12) есть как раз условие симметричности тензора П. В самом деле, если помножить (12) векторно на любой вектор a, то после раскрытия двойных произведений вида

$$(\mathbf{i}_1 \times \mathbf{p}_1)\times\mathbf{a} = \mathbf{p}_1 (\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{i}_1 (\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{a})$$

получится

$$\mathbf{p}_1 (\mathbf{i}_1\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{p}_2 (\mathbf{i}_2\cdot\mathbf{a}) + \mathbf{p}_3 (\mathbf{i}_3\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{i}_1 (\mathbf{p}_1\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{i}_2 (\mathbf{p}_2\cdot\mathbf{a}) - \mathbf{i}_3 (\mathbf{p}_3\cdot\mathbf{a}) = 0$$

или

$$(\Pi_c\cdot\mathbf{a}) - (\Pi\cdot\mathbf{a}) = 0$$

Отсюда

$$(\Pi_c - \Pi)\cdot\mathbf{a} = 0$$

и в силу произвольности вектора a

$$\Pi_c = \Pi \tag{13}$$

Таким образом, тензор напряжений П действительно является симметричным.

4. Рассматривая упругое тело, обозначим через $\mathbf{u} = \overline{M_0M}$ вектор смещения некоторой точки M тела, где M_0 — положение точки до деформации тела, M — положение после деформации.

Очевидно, что вектор скорости точки M есть

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

Поэтому уравнения (11) принимают вид

$$\rho\left(\mathbf{F} - \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2}\right) + \operatorname{div}\Pi = 0 \tag{14}$$

Чтобы получить основные уравнения теории упругости, надо установить связь между П и u, т. е. между упругими напряжениями и деформациями тела. Эта связь устанавливается на основании обобщения элементарного закона Гука. Нам надо, однако, предварительно несколько более осветить вопрос о деформациях.

Если мы возьмем две соседние точки упругого тела M_0 и M_1, положение которых до деформации характеризовалось радиусами-векторами r и $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$, то после деформации положение этих точек будет характеризоваться радиусами-векторами

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r})$$

$$\mathbf{r}' + d\mathbf{r}' = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{r} + d\mathbf{r} + \mathbf{u} + d\mathbf{u}$$

и, следовательно, смещение второй точки после деформации будет

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{u} + d\mathbf{u} = \mathbf{u} + \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}\cdot d\mathbf{r}$$

и, применяя формулу (41) § 24,

$$\mathbf{u}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) = \mathbf{u} + \Phi\cdot d\mathbf{r} + \tfrac{1}{2}\operatorname{rot}\mathbf{u}\times d\mathbf{r} \tag{15}$$

Под Φ здесь подразумевается симметричная часть тензора $\frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}}$, т. е. тензор с компонентами

$$\begin{aligned} \Phi_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \Phi_{12} = \Phi_{21} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ \Phi_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \Phi_{23} = \Phi_{32} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ \Phi_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x_3}, & \Phi_{13} = \Phi_{31} &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \end{aligned} \tag{16}$$

Мы будем предполагать деформацию бесконечно малой. Но тогда вспоминая из кинематики, что бесконечно малое перемещение точки твердого тела, вращающегося около неподвижной точки с угловой скоростью ω, есть

$$\mathbf{V}dt = \boldsymbol{\omega} dt \times \mathbf{r}$$

где вектор $\boldsymbol{\omega}\, dt$ равен по величине углу поворота тела и направлен по мгновенной оси вращения, мы заключаем, что последний член в формуле (15) представляет ту часть перемещения точки M_1 относительно точки M_0, которая происходит от поворота элемента тела, окружающего точку M_0, как одного целого на угол $\frac{1}{2}|\operatorname{rot}\mathbf{u}|$ вокруг оси, имеющей направление rot u. Первый член u формулы (15) характеризует смещение точки M_0, второй $\Phi \cdot d\mathbf{r}$ характеризует деформацию элемента. Мы можем поэтому высказать следующий результат.

Бесконечно малое перемещение элемента сплошной среды, определяющееся формулой (15), можно представлять себе состоящим из трех частей:

1) из поступательного перемещения элемента, как одного целого,
2) из вращательного перемещения элемента, как одного целого,
3) из деформации элемента.

Диагональные элементы симметричного тензора Φ имеют простое значение. А именно, если взять точку M_1 так, что вектор $d\mathbf{r} = \overline{M_0M_1}$ будет параллелен оси x_1, так что $dx_2 = dx_3 = 0$, то после деформации вектор $\overline{M_0M_1}$ превратится в вектор $d\mathbf{r} + d\mathbf{u}$ с проекциями

$$dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1, \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1$$

и, следовательно, расстояние между точками M_0 и M_1 после деформации будет

$$dx_1 \sqrt{\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)^2} \approx dx_1\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)$$

где мы отбрасываем малые величины второго порядка. Относительное удлинение рассматриваемого отрезка после деформации будет, очевидно, равно

$$\frac{dx_1\left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) - dx_1}{dx_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \Phi_{11}. \tag{17}$$

Итак, диагональные элементы тензора Φ определяют относительные удлинения после деформации линейных элементов, параллельных осям координат.

Исходя из этого, легко выяснить значение первого инварианта тензора Φ:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = \operatorname{div} \mathbf{u}$$

Если взять параллелепипед с ребрами dx_1, dx_2, dx_3, параллельными осям координат, то после деформации его ребра удлинятся и сделаются равными (с точностью до бесконечно малых второго порядка)

$$dx_1 (1 + \Phi_1), \quad dx_2 (1 + \Phi_{22}), \quad dx_3 (1 + \Phi_{33})$$

Грани параллелепипеда несколько скосятся, но все-таки с точностью до бесконечно малых второго порядка его можно опять считать прямоугольным параллелепипедом. Поэтому объем его будет равен

$$dV_1 = dx_1 dx_2 dx_3 (1 + \Phi_{11})(1 + \Phi_{22})(1 + \Phi_{33}) = \\ = dx_1 dx_2 dx_3 (1 + \Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33})$$

Сравнивая это выражение с первоначальным объемом параллелепипеда

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

мы заключаем, что

$$\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33} = \frac{dV_1 - dV}{dV} \tag{18}$$

дает относительное объемное расширение элемента.

К симметричному тензору Φ применимы все результаты §§ 26 и 27. Мы отметим только, что этот тензор во всяком случае имеет три главных взаимно перпендикулярных направления. Соответствующие главные значения тензора Φ обозначим через ε_1, ε_2, ε_3.

5. Тензор упругих напряжений П, как мы видели, тоже является симметричным, его главные значения обозначим через σ_1, σ_2 и σ_3.

Вспомним теперь закон Гука в элементарной форме: при растяжении стержня продольными силами, величина которых, рассчитанная на единицу площади поперечного сечения, равна P, происходит относительное удлинение стержня, определяющееся по формуле

$$\lambda = \frac{P}{E} \tag{19}$$

и относительное сжатие поперечных размеров стержня, определяющееся по формуле

$$\lambda_0 = \frac{P}{mE} \tag{20}$$

Постоянные E и m для разных материалов имеют разное значение: E называется модулем Юнга, m — коэффициентом Пуассона.

Рассматривая однородную изотропную среду, обобщим закон Гука следующим образом. Допустим, что главные значения тензора деформации и упругих напряжений связаны элементарным законом Гука. А именно,

рассмотрим главное линейное удлинение ε_1. Это удлинение происходит от σ_1, σ_2 и σ_3. При этом напряжение σ_1 даст удлинение, определяющееся по формуле (19), и σ_2 и σ_3 дадут укорочение, определяющееся по формуле (20). Мы примем еще, что все эти деформации независимы друг от друга и могут быть поэтому складываемы по принципу линейной суперпозиции. В результате получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\sigma_1}{E} - \frac{\sigma_2}{mE} - \frac{\sigma_3}{mE} \\ \varepsilon_2 &= \frac{\sigma_2}{E} - \frac{\sigma_1}{mE} - \frac{\sigma_3}{mE} \\ \varepsilon_3 &= \frac{\sigma_3}{E} - \frac{\sigma_1}{mE} - \frac{\sigma_2}{mE} \end{aligned} \tag{21}$$

Введем первые инварианты тензоров Π и Φ

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = s, \qquad \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \theta = \operatorname{div} \mathbf{u} \tag{22}$$

Тогда формулы (21) можно записать в виде

$$\varepsilon_k = \frac{\sigma_k}{E}\frac{m+1}{m} - \frac{s}{mE}, \qquad (k = 1, 2, 3) \tag{23}$$

Но отнесенные к главным осям тензоры Φ, Π и I имеют вид

$$\Phi = \begin{Vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{Vmatrix}, \qquad \Pi = \begin{Vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{Vmatrix}, \qquad \mathrm{I} = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Поэтому формулы (23) приводят к соотношению между тензорами Φ и Π:

$$\Phi = \frac{(1+m)\,\Pi}{mE} - \frac{s}{mE}\mathrm{I} \tag{24}$$

которое и представляет обобщенный закон Гука.

Решим уравнение (24) относительно Π. Беря предварительно от обеих частей равенства (24) первые инварианты, найдем соотношение

$$\theta = \frac{(1+m)\,s}{mE} - \frac{3s}{mE}$$

Отсюда

$$\theta = \frac{(m-2)\,s}{mE}, \qquad s = \frac{mE}{m-2}\theta \tag{25}$$

Воспользовавшись этим соотношением, мы без труда решим (24) относительно Π:

$$\Pi = \frac{mE}{1+m}\Phi + \frac{mE}{(m+1)(m-2)}\theta\mathrm{I} \tag{26}$$

Введем вместо m и E постоянные Ламэ μ и λ положив

$$\frac{mE}{1+m} = 2\mu, \qquad \frac{mE}{(m+1)(m-2)} = \lambda \tag{27}$$

Тогда получим

$$\Pi = 2\mu\Phi + \lambda\theta\mathrm{I} \tag{28}$$

Получив соотношение (28) между тензорами П и Ф, мы можем теперь найти компоненты тензора напряжений в любой системе координат:

$$\begin{aligned} p_{11} &= 2\mu\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \lambda\theta, & p_{12} &= p_{21} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right) \\ p_{22} &= 2\mu\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \lambda\theta, & p_{23} &= p_{32} = \mu\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right) \\ p_{33} &= 2\mu\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \lambda\theta, & p_{13} &= p_{31} = \mu\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right) \end{aligned} \tag{29}$$

$$\theta = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$$

6. Теперь нам нетрудно будет составить основные уравнения теории упругости; из (14) видно, что достаточно для этого вычислить div П. Но из (28) ясно, что

$$\operatorname{div} \Pi = 2\mu \operatorname{div} \Phi + \lambda \operatorname{div} (\theta \mathrm{I})$$

и по формуле (6)

$$\operatorname{div} (\theta \mathrm{I}) = \operatorname{grad} \theta \tag{30}$$

Далее по формуле (40) § 24

$$2 \operatorname{div} \Phi = \operatorname{div} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} + \operatorname{div} (\nabla \mathbf{u})$$

но из формул (22) и (24) того же параграфа ясно, что

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} &= \mathbf{i}_1 \operatorname{grad} u_1 + \mathbf{i}_2 \operatorname{grad} u_2 + \mathbf{i}_3 \operatorname{grad} u_3 \\ \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{i}_1 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_3} \end{aligned} \tag{31}$$

Поэтому по формуле (3) будем иметь

$$\operatorname{div} \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{r}} = \frac{\partial \operatorname{grad} u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \operatorname{grad} u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial \operatorname{grad} u_3}{\partial x_3} = \operatorname{grad}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right) = \operatorname{grad} \theta$$

$$\operatorname{div} \nabla \mathbf{u} = \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x_3^2} = \triangle \mathbf{u} \tag{32}$$

Собирая все полученные результаты, приходим к выводу, что

$$\operatorname{div} \Pi = \mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \theta \tag{33}$$

Поэтому уравнение (14) может быть записано в виде

$$\rho \frac{d^2\mathbf{u}}{dt^2} = \rho \mathbf{F} + \mu \triangle \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u} \tag{34}$$

7. Разберем еще вопрос об энергии деформации упругого тела. Возьмем в какой-либо точке тела малый объем в форме параллелепипеда с ребрами a, b, c, параллельными главным направлениям тензоров деформаций и напряжений в рассматриваемой точке. Мы предполагаем, что энергия A деформации, приходящаяся на единицу объема, зависит только от элементов тензора деформации, в данном случае от ε_1, ε_2 и ε_3. Если

мы хотим увеличить удлинение ε_1 на величину $\delta\varepsilon_1$, оставляя без изменения ε_2 и ε_3, то действующие на грани параллелепипеда силы произведут некоторую работу. и так как перемещение происходит только в направлении оси x_1, то работу произведет только сила $\sigma_1 bc$ на перемещении $a\,\delta\varepsilon_1$; величина этой работы будет $abc\sigma_1\delta\varepsilon_1$.

Относя эту работу к единице объема и произведя аналогичное вычисление для удлинений ε_2 и ε_3, мы приходим к выводу, что функция $A(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ обладает тем свойством, что

$$\delta A = \sigma_1\delta\varepsilon_1 + \sigma_2\delta\varepsilon_2 + \sigma_3\delta\varepsilon_3 \tag{35}$$

Но из уравнений (28) ясно, что

$$\sigma_k = 2\mu\varepsilon_k + \lambda(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) \quad (k = 1,2,3) \tag{36}$$

Подставляя это в предыдущее выражение и интегрируя, мы получим искомое выражение для работы деформации, приходящейся на единицу объема:

$$A = \mu(\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2) + \frac{\lambda}{2}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)^2 \tag{37}$$

Выражение, стоящее справа, должно являться инвариантом тензора Φ; и действительно, сравнивая его с формулами (14) и (15) § 27, мы легко найдем, что

$$A = \frac{\lambda + 2\mu}{2} I_1^2(\Phi) - 2\mu I_2(\Phi) \tag{38}$$

Из формулы же (38) по тем же формулам (14) § 27 мы в состоянии вычислить энергию деформации в любой системе координат:

$$A = \frac{\lambda + 2\mu}{2}(\Phi_{11} + \Phi_{22} + \Phi_{33})^2 - \\ - 2\mu\{\Phi_{11}\Phi_{22} + \Phi_{22}\Phi_{33} + \Phi_{33}\Phi_{11} - \Phi_{12}\Phi_{21} - \Phi_{13}\Phi_{31} - \Phi_{23}\Phi_{32}\} \tag{39}$$

Укажем, что энергия деформации очень просто выражается, если ее выражать частью через тензор напряжений, частью через тензор деформаций; а именно, легко проверить на основании формул (36) и (37), что

$$A = \frac{1}{2}(\sigma_1\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2 + \sigma_3\varepsilon_3) \tag{40}$$

Сравнивая это выражение с (19) § 27, видим что

$$A = \frac{1}{2}\Phi\cdot\cdot\Pi \tag{41}$$

и так как последнее выражение есть инвариант, то мы можем им воспользоваться для вычисления энергии деформации в любой координатной системе; по той же формуле (19) § 27

$$A = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{3}\sum_{r=1}^{3}\Phi_{kr}p_{rk} \tag{42}$$

ГЛАВА IV

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТЕНЗОРОВ

§ 30. Общее определение вектора и тензора

1. В настоящей главе мы займемся изложением основ общей теории тензорного исчисления. Тензорное исчисление, являясь необходимым орудием исследования в таких дисциплинах, как дифференциальная геометрия и теория относительности, крайне полезно и само по себе, так как оно дает возможность более глубоко проникнуть в сущность тех понятий и связей, с которыми мы ознакомились в предыдущих главах при изучении афинных ортогональных векторов и тензоров.

Основную идею тензорного исчисления можно охарактеризовать следующим образом.

В аналитической геометрии в основание рассуждений всегда кладется определенная координатная система. При построении векторного исчисления стараются координатную систему уничтожить совсем, сопоставляя каждому вектору направленный отрезок в пространстве, что дает возможность определить различные операции с векторами чисто геометрическим образом; точно так же симметричному тензору можно сопоставить центральную поверхность второго порядка; однако, при изучении более сложных объектов мы уже теряем возможность простого наглядного представления их; так, например, у нас нет простого наглядного представления для несимметричного афинного ортогонального тензора. Поэтому мы опять вводим в рассмотрение координатные системы; так, например, в § 22 нами было дано определение афинного ортогонального тензора второго ранга как таблицы девяти величин, преобразующихся по определенным формулам преобразования при переходе от одной прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1\,x_2\,x_3$ к другой $Ox_1'\,x_2'\,x_3'$. При этом новые координаты x_1', x_2', x_3' связаны со старыми x_1, x_2, x_3 формулами

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}\,x_1 + \alpha_{12}\,x_2 + \alpha_{13}\,x_3 \\ x_2' &= \alpha_{21}\,x_1 + \alpha_{22}\,x_2 + \alpha_{23}\,x_3 \\ x_3' &= \alpha_{31}\,x_1 + \alpha_{32}\,x_2 + \alpha_{33}\,x_3 \end{aligned} \qquad (1)$$

Преобразование координат, выражаемое формулами (1), является линейным — такие преобразования называются еще афинными; более того, так как это преобразование соответствует переходу от одной

прямолинейной системы координат к другой такой же системе координат, оно называется ортогональным преобразованием. В соответствии с тем, что нами рассматривались до сих пор только афинные ортогональные преобразования координат, мы и называли векторы и тензоры афинными ортогональными векторами и тензорами. Однако между только что указанным подходом к определению тензора и методом аналитической геометрии имеется коренная разница, состоящая в том, что при определении тензора ни одной из координатных систем не оказывается ни малейшего предпочтения; составляющие тензора определяются сразу для всех систем координат, причем эти составляющие при переходе от одной системы координат к другой преобразуются по определенным формулам преобразования. Эта же самая идея является основной идеей общего тензорного исчисления с тем лишь весьма существенным дополнением, что в последнем не ограничиваются линейными преобразованиями координат вида (1), а рассматривают самые общие преобразования координат вида

$$x_1' = f_1(x_1, x_2, x_3), \quad x_2' = f_2(x_1, x_2, x_3), \quad x_3' = f_3(x_1, x_2, x_3) \qquad (1')$$

Мы остановимся на этом вопросе несколько подробнее.

2. В § 18 мы видели, что положение точки в пространстве можно определять вместо декартовых координат тремя криволинейными координатами q_1, q_2, q_3. При этом в случае, если эти криволинейные координаты являются ортогональными, расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками определяется формулой

$$ds^2 = H_1^2(q_1, q_2, q_3)\,dq_1^2 + H_2^2(q_1, q_2, q_3)\,dq_2^2 + H_3^2(q_1, q_2, q_3)\,dq_3^2 \qquad (2)$$

При различном выборе криволинейных координат q_1, q_2, q_3, функции $H_1(q_1, q_2, q_3)$, $H_2(q_1, q_2, q_3)$ и $H_3(q_1, q_2, q_3)$ будут иметь различное значение, но правая часть формулы (2) будет сохранять постоянное значение, так как оно равно квадрату расстояния между двумя бесконечно близкими точками.

В том же § 18 мы видели, что положение точки на поверхности, расположенной в пространстве, можно определять двумя координатами q_1 и q_2 и что в этом случае расстояние ds между двумя бесконечно близкими точками, у одной из которых координатами являются q_1 и q_2, а другой $q_1 + dq_1$ и $q_2 + dq_2$, определяется формулой

$$ds^2 = g_{11}(q_1, q_2)\,dq_1^2 + 2g_{12}(q_1, q_2)\,dq_1\,dq_2 + g_{22}(q_1, q_2)\,dq_2^2 \qquad (3)$$

Так как положение точки в пространстве определяется тремя координатами q_1, q_2, q_3, то говорят, что пространство есть многообразие трех измерений; поверхность же есть многообразие двух измерений, так как положение точки на ней определяется двумя координатами q_1 и q_2. Если мы рассмотрим какую-нибудь линию в пространстве, то она будет многообразием первого измерения, так как положение точки на заданной линии может быть определено одним параметром. Однако во многих случаях оказывается невозможным ограничиваться рассмотрением многообразий

трех измерений; так, например, в теории относительности приходится рассматривать пространство четырех измерений. В связи с этим необходимо обобщить введенные нами понятия.

В нашем трехмерном пространстве, вводя прямолинейную прямоугольную систему координат $Ox_1\,x_2\,x_3$, мы можем определить положение каждой точки M ее декартовыми координатами x_1, x_2, x_3. Если другая точка N имеет декартовы координаты y_1, y_2, y_3, то расстояние между этими двумя точками M и N определяется по теореме Пифагора:

$$MN^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + (y_3 - x_3)^2$$

Совершенно аналогично этому можно определить m-мерное эвклидовое пространство E_m, в котором положение каждой точки M задается ее декартовыми координатами x_1, x_2, . . . , x_m относительно прямолинейной прямоугольной системы координат $Ox_1\,x_2 \ldots x_m$, причем, если другая точка N имеет декартовы координаты y_1, y_2, . . . , y_m, то расстояние между точками M и N определяется по формуле

$$MN^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_m - x_m)^2$$

Если N есть точка, бесконечно близкая к M, и ее координаты суть

$$x_1 + dx_1,\ x_2 + dx_2,\ \ldots,\ x_m + dx_m$$

о расстояние ds между точками M и N дается формулой

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_m^2 \tag{4}$$

Но положение точки M может быть определено в m-мерном эвклидовом пространстве E_m и криволинейными координатами q_1, q_2, . . . , q_m: тогда, аналогично формуле (2), для расстояния между двумя бесконечно близкими точками получим формулу вида

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{m} g_{ik}\,(q_1, q_2, \ldots, q_m)\,dq_i\,dq_k \tag{5}$$

в которой можно считать, что $g_{ik} = g_{ki}$.

3. Подобно тому как в пространстве трех измерений мы рассматриваем поверхности и линии, так в пространстве m измерений мы можем рассматривать подпространства меньшего числа измерений. Допустим, что мы рассматриваем подпространство R_n, имеющее n измерений. Для определения точек этого подпространства можно воспользоваться какими-то криволинейными координатами, которые мы опять обозначим через q_1, q_2, . . . , q_n, аналогично тому, как в формуле (3) параметры, определяющие точку на поверхности, были обозначены через q_1 и q_2. Ясно, что декартовы координаты точек подпространства R_n будут определенными функциями от q_1, q_2, . . . , q_n:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1\,(q_1, q_2, \ldots, q_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_m &= x_m(q_1, q_2, \ldots, q_n) \end{aligned} \tag{6}$$

Расстояние между двумя бесконечно близкими точками подпространства R_n будет определяться по формуле (4), в которой вместо x_α нужно подставить их выражения через криволинейные координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$. Но очевидно, мы имеем

$$dx_\alpha = \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_1} dq_1 + \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_2} dq_2 + \ldots + \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_n} dq_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} dq_i \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

$$dx_\alpha{}^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} dq_i \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} dq_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} dq_i\, dq_k$$

Поэтому

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} dx_\alpha{}^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} dq_i dq_k = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} \right) dq_i\, dq_k$$

Введем теперь обозначение

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_i} \frac{\partial x_\alpha}{\partial q_k} = g_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n) \quad (i, k = 1, 2, \ldots, n) \tag{7}$$

Причем, очевидно,

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{8}$$

Тогда окажется, что

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n)\, dq_i\, dq_k \tag{9}$$

При $n = m$ отсюда, как частный случай, получается формула (5), в этом частном случае пространство R_m совпадает с E_m, и только положение точки в этом пространстве определяется не декартовыми координатами $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а криволинейными координатами $q_1, q_2, \ldots, q_m$.

Итак, если в эвклидовом m-мерном пространстве рассматривается подпространство n измерений R_n, определенное формулами (6), в которых $x_1, \ldots, x_m$ суть непрерывные вместе со своими первыми частными производными функции, обладающие тем свойством, что в рассматриваемой области изменения координат $q_1, q_2, \ldots, q_n$ различным системам значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$ отвечают различные точки пространства E_m, то квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками подпространства R_n определяется формулой (9), как квадратичная форма от дифференциалов координат. Говорят, что формула (9) устанавливает *метрику* подпространства R_n. Полезно сразу же отметить, что в некоторых случаях метрика двух различных подпространств может оказаться совершенно одинаковой; так, например, в нашем трехмерном пространстве метрика какой-либо цилиндрической поверхности не отличается от метрики плоскости.

Отсюда видно, что метрика подпространства R_n не вполне характеризует это подпространство; оказывается, однако, что метрика характеризует одни из самых глубоких свойств подпространств R_n.

4. Риман поставил задачу обратно; он исходил из многообразия n измерений, т. е. совокупности точек, каждая из которых определяется n координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$, меняющимися в некоторой области, причем точки, соответствующие различным системам значений $q_1, q_2, \ldots, q_n$, считаются различными.

Затем Риман по произволу задавал функции $g_{ik}(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ с тем лишь условием, чтобы квадратичная форма в правой части формулы (9) была определенной положительной формой, т. е. принимала лишь положительные значения при любых $dq_1, dq_2, \ldots, dq_n$, не равных нулю одновременно.

Наконец, Риман *определял* расстояние между двумя бесконечно близкими точками исходного многообразия, имеющими координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$, и $q_1 + dq_1, q_2 + dq_2, \ldots, q_n + dq_n$, формулой (9), в которой g_{ik} удовлетворяют условию (8)[1].

Многообразие n измерений, в котором формулой (9) установлена метрика, т. е. задано расстояние между двумя любыми бесконечно-близкими точками, называется пространством Римана и обозначается обыкновенно через R_n.

Совершенно естественно возникает вопрос о том, нельзя ли всякое риманово пространство R_n рассматривать как подпространство в эвклидовом m-мерном пространстве E_m, где $m \geqslant n$. Из предыдущего изложения ясно, что этот вопрос эквивалентен следующему: нельзя ли найти число m и такие функции $x_1(q_1, \ldots, q_n), \ldots, x_m(q_1, \ldots, q_n)$, чтобы выполнились равенства (7), где g_{ik} суть заданные функции от $q_1, q_2, \ldots, q_n$ удовлетворяющие условиям (8).

Но легко подсчитать, что (7) есть система $\frac{1}{2}n(n+1)$ уравнений (n уравнений получается при $i = k$ и $\frac{1}{2}n(n-1)$ уравнений при $i < k$, уравнения при $i > k$ в силу условия (8) рассматривать не надо); число же неизвестных функций равно m.

Можно поэтому ожидать, что уравнения (7) можно решить при $m = \frac{1}{2}n(n+1)$, а в частных случаях и при $m < \frac{1}{2}n(n+1)$. Как говорят, риманово пространство n измерений может быть вложено в эвклидово пространство $\frac{1}{2}n(n+1)$ измерений; так, например, риманово пространство двух измерений всегда может быть вложено в наше эвклидово трехмерное пространство, иными словами, всегда можно подыскать такую поверхность, для которой ds^2 представляется наперед заданной определенной положительной квадратичной формой (3); точно так же риманово пространство трех измерений может быть вложено в эвклидово пространство $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$ измерений и т. д.

[1] См. обзор проф. В. Ф. Кагана, Геометрические идеи Римана и их современное развитие. ГТТИ, 1933 Там же подробная литература.

Иногда, как, например, в теории относительности, приходится рассматривать и те случаи, когда правая часть формулы (9) является неопределенной квадратичной формой, т. е. может принимать как положительные, так и отрицательные значения. Во всяком случае стоящая в правой части формулы (9) квадратичная форма будет в дальнейшем играть колоссальную роль; поэтому эта форма называется основной, или фундаментальной, формой.

Но на первых порах изложения тензорного исчисления квадратичная форма (9) нам не понадобится. Точнее говоря, можно дать определение тензора и построить тензорную алгебру, совершенно вне зависимости от того, определена ли метрика пространства или нет, и только при построении тензорного анализа метрика начинает себя проявлять.

Поэтому в основу наших первоначальных рассуждений мы положим самое общее многообразие n измерений, координаты точек которого обозначим в соответствии с установившимся обычаем через $x^1, x^2, \ldots, x^n$ (вместо $q_1, q_2, \ldots, q_n$, так что значки $1, 2, \ldots, n$ являются не показателями, а индексами; мы скоро увидим, почему удобнее эти индексы ставить наверху, а не внизу).

5. Итак, рассмотрим многообразие n измерений V_n, понимая под ним совокупность всех его точек, под точкой же многообразия мы понимаем совокупность значений n независимых переменных $x^1, x^2, \ldots, x^n$, сами же числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$ будем называть координатами точки.

Вместо координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ можно ввести новые координаты $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$, связанные со старыми некоторыми соотношениями

$$x^\alpha = \varphi^\alpha(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{10}$$

В этом случае мы будем говорить, что формулы (10) определяют преобразование координат. Про функции, стоящие в правой части формул (10), мы будем предполагать, что в рассматриваемой области изменения координат $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ эти функции однозначны, непрерывны и имеют непрерывные производные всех тех порядков, какие нам в дальнейшем понадобятся. Вообще все функции, с которыми мы будем иметь дело, будем считать удовлетворяющими этим условиям. В рассматриваемом же случае мы потребуем, сверх того, чтобы якобиан

$$\frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^n)}{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^n} \end{vmatrix} \tag{11}$$

был отличным от нуля. Как известно, в этом случае можно решить уравнения (10) относительно $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$:

$$\bar{x}^\alpha = \bar{x}^\alpha(x^1, x^2, \ldots, x^n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, n) \tag{12}$$

Полученное преобразование координат называется обратным по отношению к преобразованию координат (10).

В общей теории тензоров рассматриваются, как было упомянуто в п. 1, всевозможные координатные системы, связанные одна с другой формулами преобразования (10), в то время как при изучении афинных ортогональных тензоров нам достаточно было ограничиться рассмотрением линейных ортогональных преобразований координат (1) (аналогичные (1) формулы могут быть написаны и для пространства n измерений).

6. Дадим теперь общие определения скаляра, вектора и тензора.

Если для каждой системы координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ определена функция $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$, так что для системы координат $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$ мы имеем свою функцию $\bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n)$, и если при преобразовании координат (10) значения этих функций в соответствующих точках совпадают, т. е. если

$$f(x^1, x^2, \ldots, x^n) = \bar{f}(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n) \tag{13}$$

то говорят, что функция точек $f(x^1, x^2, \ldots, x^n)$ есть *инвариант* или *скаляр*. Примером скаляра является какое-либо постоянное число. Другим примером является основная квадратичная форма риманова пространства R_n:

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} g_{ik}(x^1, x^2, \ldots, x^n)\, dx^i\, dx^k \tag{14}$$

так как в любой системе координат величина ds^2 должна сохранять одно и то же значение. Наконец, в качестве третьего примера укажем, что если ограничиться афинными ортогональными преобразованиями (1), то выражение

$$f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \tag{15}$$

будет скаляром, так как по самому определению ортогональных преобразований должно иметь место равенство

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Поэтому функцию (15) можно назвать афинным ортогональным инвариантом, но эта функция не будет инвариантом в данном нами выше смысле (13), ибо для случая любых преобразований (1′) окажется, вообще говоря, что

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \neq x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

7. Переходим теперь к определению вектора. Согласно определению афинного ортогонального вектора, данного в § 22, составляющие этого вектора преобразуются при ортогональном преобразовании координат (1)

$$\begin{aligned} x_1' &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 \\ x_2' &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3 \\ x_3' &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3 \end{aligned} \tag{16}$$

по формулам

$$\begin{aligned} a_1' &= \alpha_{11}a_1 + \alpha_{12}a_2 + \alpha_{13}a_3 \\ a_2' &= \alpha_{21}a_1 + \alpha_{22}a_2 + \alpha_{23}a_3 \\ a_3' &= \alpha_{31}a_1 + \alpha_{32}a_2 + \alpha_{33}a_3 \end{aligned} \tag{17}$$

где a_1, a_2, a_3 — составляющие вектора по осям $Ox_1x_2x_3$, а a_1', a_2', a_3' — составляющие того же вектора по осям $Ox_1'x_2'x_3'$.

Чтобы обобщить это определение, заметим, что коэффициенты α_{ik} преобразования (16) можно представить следующим образом:

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial x'_i}{\partial x_k} \qquad (i, k = 1, 2, 3) \tag{18}$$

и поэтому формулы (17) можно записать в следующей форме

$$a_i' = \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial x_i'}{\partial x_k} a_k \qquad (i = 1, 2, 3) \tag{19}$$

Обобщая эти равенства, можно дать следующее определение:

Если для каждой системы координат x^1, x^2, . . . , x^n определена совокупность n функций A^1, A^2, . . . , A^n, так что для системы координат $\overline{x}^1$, $\overline{x}^2$, . . . , $\overline{x}^n$ мы имеем свою совокупность функций $\overline{A}^1$, $\overline{A}^2$, . . . , $\overline{A}^n$, и если при преобразовании координат (10) эти функции преобразуются по следующим формулам преобразования

$$\overline{A}^i = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \qquad (i = 1, \ldots, n) \tag{20}$$

то мы будем говорить, что совокупность величин A^1, . . . , A^n определяет контравариантный вектор, и будем называть величины A^i составляющими или компонентами контравариантного вектора A^i.

Так как в дальнейшем постоянно придется употреблять суммы, подобные тем, которые стоят в правой части равенства (20), то условимся, как это принято в литературе, опускать в этих случаях знак суммы, мысленно его подразумевая.

Таким образом, *мы условимся всякий раз, как нам встретится одночлен, в выражении которого фигурирует два раза один и тот же индекс, производить по этому индексу суммирование по всем значениям этого индекса от 1 до n (если только не сделано специальной оговорки).*

При этом условии формула (20) может быть записана в следующей форме:

$$\overline{A}^i = \frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\alpha} A^\alpha \tag{21}$$

причем здесь, как и в дальнейшем, мы уже не указываем, что мы имеем в сущности n формул, соответствующих значениям индекса $i = 1, 2, \ldots, n$.

Наиболее важным примером контравариантного вектора является вектор dx^i, составляющими которого являются дифференциалы координат.

В самом деле, из формул (12) по правилу составления дифференциала сложной функции сразу следует, что

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^1} dx^1 + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^2} dx^2 + \ldots + \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^n} dx^n = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha} dx^\alpha \tag{22}$$

так что dx^i подчиняются формулам преобразования (21), а следовательно, являются составляющими контравариантного вектора.

Может быть, полезно отметить, что в силу чрезвычайной общности приведенного выше определения контравариантного вектора несколько ускользает физическая сущность этого понятия. Так, например, рассматривая движение точки в нашем трехмерном эвклидовом пространстве, возьмем за x^1, x^2, x^3 прямолинейные прямоугольные координаты, а за $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ — хотя бы сферические координаты r, θ, ψ. Тогда

$$\frac{dx^1}{dt}, \quad \frac{dx^2}{dt}, \quad \frac{dx^3}{dt}$$

будут, очевидно, составляющими по декартовым осям координат вектора скорости; согласно вышесказанному составляющими этого вектора в координатах r, θ, ψ будут

$$\frac{dr}{dt}, \quad \frac{d\theta}{dt}, \quad \frac{d\psi}{dt}$$

Но эти три величины носят существенно различный характер, хотя бы по одному тому, что dr/dt есть линейная скорость, в то время как $d\theta/dt$ и $d\psi/dt$ являются угловыми скоростями. Таким образом, составляющие контравариантного вектора $d\theta/dt$, $d\psi/dt$ не могут быть проекциями, в обычном смысле этого слова, вектора скорости.

Определенные нами выше векторы были названы контравариантными; дело в том, что в общей теории тензоров оказывается необходимым различать два вида векторов, одному из которых присвоено наименование *контравариантных*, а другому — *ковариантных*.

Прежде чем давать определение ковариантного вектора, рассмотрим один пример. В векторном анализе нами был введен вектор grad φ, составляющими которого служат

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

Определим теперь для каждой системы координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ совокупность n величин

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^1}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial x^2}, \ldots, \frac{\partial \varphi}{\partial x^n}$$

где φ есть скалярная функция, и посмотрим, как преобразуются эти величины при преобразовании координат (10).

По правилам дифференцирования сложных функций мы имеем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^i} + \frac{\partial \varphi}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^i} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x^n} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \tag{23}$$

Если мы положим

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} = A_\alpha, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^\alpha} = \bar{A}_\alpha$$

то получим, что

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x_\alpha}{\partial \bar{x}^i} \tag{24}$$

Этот закон преобразования отличен от закона преобразования (21); его мы и положим в основу определения ковариантного вектора.

Если для каждой системы координат x^α определена совокупность n функций A_α и если при преобразовании координат (10) эти функции преобразуются по формулам (24), то величины A_α определяют ковариантный вектор, составляющими или компонентами которого они являются.

Из вышесказанного ясно, что примером ковариантного вектора является

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}$$

Является интересным выяснить, почему в обычной теории тензоров нам не пришлось различать ковариантные и контравариантные векторы. Составим формулы преобразования (24) для случая афинных ортогональных векторов. Для этого постараемся из формул (16) выразить старые координаты x_1, x_2, x_3 через новые x_1', x_2', x_3'. Но, вспоминая таблицу косинусов из п. 5 § 22, мы сразу можем написать, что

$$\begin{aligned} x_1 &= \alpha_{11}x_1' + \alpha_{21}x_2' + \alpha_{31}x_3' \\ x_2 &= \alpha_{12}x_1' + \alpha_{22}x_2' + \alpha_{32}x_3' \\ x_3 &= \alpha_{13}x_1' + \alpha_{23}x_2' + \alpha_{33}x_3' \end{aligned} \tag{25}$$

Отсюда следует, что

$$\alpha_{ik} = \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \tag{26}$$

Поэтому формулы (17) могут быть записаны в форме

$$\alpha_i' = \sum_{k=1}^{3} a_k \frac{\partial x_k}{\partial x_i'} \tag{27}$$

не отличающейся от формул (24).

Это показывает, что в случае афинных ортогональных векторов формулы преобразования (21) и (24) являются тождественными и, следовательно, понятия контравариантного и ковариантного вектора являются совпадающими.

Скажем еще несколько слов относительно обозначений. Мы будем отличать контравариантные векторы от ковариантных тем, что будем ставить индексы у контравариантного вектора наверху, а у ковариантного внизу. Так как dx^i есть контравариантный вектор, то принято у координат x^i ставить индексы наверху.

8. Переходим к определению тензора второго ранга. Принимая во внимание формулы преобразования компонентов афинного ортогонального тензора [§ 22, формулы (14)] и формулы (18) и (26) и обобщая эти формулы надлежащим образом, мы приходим к следующим определениям:

Если для каждой системы координат x^α определена совокупность n^2 функций $A^{\alpha\beta}$, которые при преобразовании координат (10) испытывают преобразование

$$\overline{A}^{ik} = A^{\alpha\beta}\frac{\partial \overline{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial \overline{x}^\beta} \tag{28}$$

то эти функции определяют контравариантный тензор второго ранга, составляющими которого они являются.

Точно так же n^2 составляющих $A_{\alpha\beta}$ *ковариантного тензора второго ранга* преобразуются по формулам

$$\overline{A}_{ik} = A_{\alpha\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^k} \tag{29}$$

Наконец, составляющие A_α^β *смешанного* тензора второго ранга преобразуются по формулам

$$\overline{A}_i^k = A_\alpha^\beta\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^\beta} \tag{30}$$

Очевидно, мы можем дать совершенно аналогичные определения тензоров третьего ранга, четвертого и т. д. Так, например, составляющие тензора $A_{\alpha\beta}^\gamma$, два раза ковариантного и один раз контравариантного, преобразуются по формулам

$$\overline{A}_{ik}^l = A_{\alpha\beta}^\gamma\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \overline{x}^k}\frac{\partial \overline{x}^l}{\partial x^\gamma} \tag{31}$$

Приведем в качестве примера один очень важный смешанный тензор второго ранга. Составляющими этого тензора в любой системе координат являются числа

$$\delta_\alpha^\beta = \begin{cases} 1, & \text{если } \alpha = \beta \\ 0, & \text{если } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{32}$$

Чтобы доказать, что δ_α^β действительно являются составляющими смешанного тензора, необходимо проверить, что выполняются формулы (30), т. е. нужно показать, что

$$\overline{\delta}_i^k = \delta_\alpha^\beta\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}\frac{\partial \overline{x}^k}{\partial x^\beta} \tag{33}$$

Возвратимся на минуту к обычаю писать знак суммы. Тогда мы будем иметь

$$\delta_\alpha^\beta\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i} = \sum_{\alpha=1}^{n}\delta_\alpha^\beta\frac{\partial x^\alpha}{\partial \overline{x}^i}$$

но в этой сумме все члены, которые отвечают значениям $\alpha \neq \beta$, пропа-

дают в силу (32), а при $\alpha = \beta$ мы получаем $\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i}$. Итак

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \delta_\alpha^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \delta_\alpha^\beta \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta} = \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} \tag{34}$$

Но согласно формулам (12) и (10) $\bar{x}^k$ есть функция от $x^1, x^2, \ldots, x^n$, которые в свою очередь зависят от $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$; следовательно, $\bar{x}^k$ можно рассматривать как сложную функцию от $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \ldots, \bar{x}^n$, заданную через посредство вспомогательных функций $x^1, x^2, \ldots, x^n$, причем, конечно,

$$\bar{x}^k (x^1 (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n), \ldots, x^n (\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n)) = \bar{x}^k$$

Дифференцируя обе части этого равенства по $\bar{x}^i$, мы получим, очевидно, что

$$\sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial \bar{x}^i} = \bar{\delta}_i^k \tag{35}$$

что в связи с (34) и доказывает справедливость формул (32).

Отметим попутно формулу, аналогичную формуле (35):

$$\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\alpha} \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i} = \bar{\delta}_i^k \tag{36}$$

Полученный тензор обладает тем замечательным свойством, что любая его составляющая имеет то же самое значение во всех системах координат. Заметим еще, что с точки зрения общего определения можно векторы называть тензорами первого ранга, а скаляры — тензорами нулевого ранга.

§ 31. Тензорная алгебра

1. Перейдем теперь к установлению основных операций с тензорами. Основное, на что нужно обратить внимание, заключается в том, что определения действий с тензорами должны быть таковы, чтобы в результате производства этих действий вновь получился тензор.

Так, например, умножая все составляющие какого-либо тензора, например $A^\gamma_{\alpha\beta}$, на скаляр λ, мы получаем, очевидно, составляющие $\lambda A^\gamma_{\alpha\beta}$ нового тензора. В этом состоит операция умножения тензора на скаляр.

Операция сложения двух тензоров одного и того же вида (т. е. имеющих одинаковое количество нижних индексов и одинаковое количество верхних индексов) естественно определяется следующим образом: нужно сложить соответствующие составляющие данных тензоров

в результате получатся, как нетрудно показать, составляющие нового тензора, который и называется суммой двух данных тензоров. Так, например,

$$C^{\gamma}_{\alpha\beta} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} + B^{\gamma}_{\alpha\beta} \tag{1}$$

есть сумма тензоров $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ и $B^{\gamma}_{\alpha\beta}$.

Нетрудно видеть, что сложение тензоров обладает обычными свойствами, как например, коммутативным и ассоциативным.

Рассмотрим контравариантный тензор второго ранга $A^{\alpha\beta}$. Если при изменении порядка индексов его составляющие не изменяют своих значений, т. е. если

$$A^{\beta\alpha} = A^{\alpha\beta}$$

то тензор $A^{\alpha\beta}$ называется симметричным; если же при изменении порядка индексов составляющие тензора $A^{\alpha\beta}$ меняют свой знак на обратный, так что

$$A^{\beta\alpha} = -A^{\alpha\beta}$$

то тензор называется антисимметричным. Такие же определения можно дать и в случае ковариантного тензора второго ранга.

Так же как в § 23 можно доказать, что любой контравариантный или ковариантный тензор второго ранга можно представить в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров.

2. Переходим к определению произведения двух тензоров. Пусть даны два совершенно произвольных тензора, например A^{β}_{α} и $B^{\varepsilon}_{\gamma\delta}$.

Первый тензор имеет n^2 составляющих, второй тензор имеет n^3 составляющих. Перемножим каждую из n^2 составляющих первого тензора на каждую из n^3 составляющих второго тензора; в результате мы получим n^5 составляющих

$$C^{\beta\varepsilon}_{\alpha\gamma\delta} = A^{\beta}_{\alpha} B^{\varepsilon}_{\gamma\delta} \tag{2}$$

Докажем, что эти n^5 составляющих образуют тензор; в самом деле, так как A^{β}_{α} есть тензор, то мы имеем следующие формулы преобразования

$$\overline{A}^{k}_{i} = A^{\beta}_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}}$$

по той же причине

$$\overline{B}^{n}_{lm} = B^{\varepsilon}_{\gamma\delta} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{l}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \overline{x}^{m}} \frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

В результате перемножения этих равенств мы получим

$$\overline{A}^{k}_{i} \overline{B}^{n}_{lm} = A^{\beta}_{\alpha} B^{\varepsilon}_{\gamma\delta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{l}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \overline{x}^{m}} \frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

или

$$\overline{C}^{kn}_{ilm} = C^{\beta\varepsilon}_{\alpha\gamma\delta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \overline{x}^{i}} \frac{\partial x^{\gamma}}{\partial \overline{x}^{l}} \frac{\partial x^{\delta}}{\partial \overline{x}^{m}} \frac{\partial \overline{x}^{k}}{\partial x^{\beta}} \frac{\partial \overline{x}^{n}}{\partial x^{\varepsilon}}$$

а это последнее равенство, по определению, выражает, что $C^{\beta\varepsilon}_{\alpha\gamma\delta}$ есть тензор три раза ковариантный, два раза контравариантный. Полученный тензор и называется *произведением* двух данных тензоров.

В случае афинных ортогональных тензоров, из формул (18) и (19) § 22 следует, что диады $\mathbf{ab}$ и $\mathbf{ba}$, составляющие которых получаются перемножением составляющих двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, могут быть рассматриваемы как произведения векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ в только что указанном смысле.

3. Рассмотрим теперь так называемую операцию **сокращения индексов**. Пусть мы имеем какой-либо тензор, в состав которого входит, по крайней мере, один ковариантный индекс и, по крайней мере, один контравариантный. Для определенности предположим, что речь идет о тензоре $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$. Этот тензор имеет n^3 составляющих. Обратим в этом тензоре внимание на один из ковариантных значков, например, β и на контравариантный γ. Составим теперь выражение $A^{\beta}_{\alpha\beta}$ (т. е. примем $\gamma = \beta$ и произведем затем суммирование по β в пределах от $\beta = 1$ до $\beta = n$). В результате мы получим n чисел

$$B_\alpha = A^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{3}$$

Докажем, что эти n чисел образуют тензор первого ранга.

В самом деле, так как $A^{\gamma}_{\alpha\beta}$ есть тензор, то формулы преобразования имеют вид

$$A^{l}_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\gamma}$$

Положим в этой формуле $l = k$ и просуммируем по значку k в пределах от $k = 1$ до $k = n$, тогда получим

$$\bar{A}^{k}_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma}$$

Но по формуле (36) предыдущего параграфа

$$\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\gamma} = \delta^{\beta}_{\gamma}$$

Следовательно,

$$\bar{A}^{k}_{ik} = A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \delta^{\beta}_{\gamma} \tag{4}$$

Заметим теперь, что по формуле (3)

$$\bar{B}_i = \bar{A}^{k}_{ik} \tag{5}$$

С другой стороны, пользуясь для ясности знаком суммы, будем иметь

$$A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \delta^{\beta}_{\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \sum_{\gamma=1}^{n} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} A^{\gamma}_{\alpha\beta} \delta^{\beta}_{\gamma}$$

Произведем сначала суммирование по γ; так как $\delta^{\beta}_{\gamma} = 0$, если $\gamma \neq \beta$, то ясно, что при суммировании по γ останется только тот член,

который соответствует значению $\gamma = \beta$, и так как при $\gamma = \beta$ мы имеем $\delta^{\beta}_{\gamma} = 1$, то

$$A^{\gamma}_{\alpha\beta} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{i}} \delta^{\beta}_{\gamma} = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{i}} A^{\beta}_{\alpha\beta} \tag{6}$$

Но по определению (3)

$$\sum_{\beta=1}^{n} A^{\beta}_{\alpha\beta} = B_{\alpha}$$

Поэтому из (4), (5) и (6) легко получим, что

$$\bar{B}_{i} = B_{\alpha} \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial \bar{x}^{i}} \tag{7}$$

Но (7) есть как раз формула преобразования составляющих ковариантного вектора, следовательно, B_{α} есть ковариантный вектор, что и требовалось доказать.

Итак, из всякого смешанного тензора можно путем сокращения одного ковариантного индекса и одного контравариантного индекса получить новый тензор, ранг которого на две единицы ниже ранга исходного тензора. Этот новый тензор мы будем называть *тензором, сокращенным из данного по таким-то индексам*.

Так, например, имея тензор четвертого ранга $A^{\gamma\delta}_{\alpha\beta}$, мы можем образовать из него четыре сокращенных тензора второго ранга, а именно

$$B^{\delta}_{\beta} = A^{\alpha\delta}_{\alpha\beta}, \qquad C^{\gamma}_{\beta} = A^{\gamma\alpha}_{\alpha\beta}, \qquad D^{\delta}_{\alpha} = A^{\beta\delta}_{\alpha\beta}, \qquad E^{\gamma}_{\alpha} = A^{\gamma\beta}_{\alpha\beta}$$

Так как в результате получились опять смешанные тензоры, то операцию сокращения индексов можно повторить; в результате получим два тензора нулевого ранга, т. е. два инварианта

$$F = A^{\alpha\beta}_{\alpha\beta}, \qquad G = A^{\beta\alpha}_{\alpha\beta}$$

Приведем пример на сокращение индексов из теории афинных ортогональных тензоров. Заметим только предварительно, что в случае афинных ортогональных тензоров нет никакой разницы между контравариантными и ковариантными значками, поэтому в случае афинных ортогональных тензоров мы можем сокращать по любым двум индексам. Рассмотрим теперь афинный ортогональный тензор p_{kl} в пространстве трех измерений. Сокращая его по индексам k и l, мы должны получить инвариант

$$p_{11} + p_{22} + p_{33}$$

и действительно, в § 27 мы видели, что эта сумма является одним из инвариантов тензора.

4. Комбинируя операцию произведения двух тензоров с операцией сокращения индексов, мы получаем новую весьма важную операцию, которая содержит в себе, как частный случай, всю теорию скалярного умножения тензора на вектор и тензора на тензор, изложенную нами в § 24 и § 25. Мы рассмотрим эту операцию на ряде частных примеров.

1°. Возьмем контравариантный вектор A^α и ковариантный B_β. Перемножая их, мы получим тензор $A^\alpha B_\beta$, а сокращая этот тензор по индексам α и β, получим инвариант $A^\alpha B_\alpha$, который можно, очевидно, назвать скалярным произведением векторов A^α и B_β. В случае афинных ортогональных векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ мы получаем, очевидно, операцию скалярного произведения этих векторов $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

2°. Возьмем ковариантный тензор $A_{\alpha\beta}$ и контравариантный вектор B^γ. Перемножая их, мы получим тензор $A_{\alpha\beta}B^\gamma$; а сокращая тензор по индексам α и γ, получим вектор $C_\beta = A_{\alpha\beta}B^\alpha$, сокращая же предыдущий тензор по индексам β и γ, получим вектор $D_\alpha = A_{\alpha\beta}B^\beta$. В случае афинных ортогональных тензоров, согласно формулам (4) и (9) § 24, вектор $p_{\alpha\beta}a_\alpha$ является скалярным произведением тензора $p_{\alpha\beta}$ на вектор a_α слева, вектор же $p_{\alpha\beta}a_\beta$ является скалярным произведением тензора $p_{\alpha\beta}$ на вектор a_α справа.

3°. Возьмем ковариантный тензор $A_{\alpha\beta}$ и контравариантный тензор $B^{\gamma\delta}$. Перемножая их, получим тензор $A_{\alpha\beta}B^{\gamma\delta}$; сокращая его по индексам β и γ, получим тензор второго ранга $C_\alpha^\delta = A_{\alpha\beta}B^{\beta\delta}$. Сокращая полученный тензор еще раз по индексам α и δ, получим инвариант $A_{\alpha\beta}B^{\beta\alpha}$.

Обе эти операции мы уже имели в случае афинных ортогональных тензоров. В самом деле, согласно формулам (5) § 25 тензор $p_{kl} = a_{ki}b_{ri}$ является скалярным произведением тензоров a_{ki} и b_{kl}. В формуле же (19) § 27 нами было определено бискалярное произведение двух тензоров a_{kl} и b_{kl}; при новых обозначениях выражение для этого произведения следовало бы записать так: $a_{kl}b_{lk}$, или, что то же, $a_{\alpha\beta}b_{\beta\alpha}$.

Мы видим, таким образом, как развитая в этом параграфе общая теория тензоров объединяет в одно целое различные понятия теории афинных ортогональных тензоров.

5. Рассмотрим какой-либо тензор, например $A^\gamma_{\alpha\beta}$. В соответствие каждому ковариантному значку этого тензора, приведем произвольный контравариантный вектор, в данном случае u^λ, в соответствие значку α, и v^μ, в соответствии значку β; в соответствие же каждому контравариантному значку этого тензора приведем произвольный ковариантный вектор, в данном случае вектор w_ν. Составим теперь произведение $A^\gamma_{\alpha\beta}u^\lambda v^\mu w_\nu$, получим тензор шестого порядка, сократим теперь его по индексам α и λ, β и μ, γ и ν, тогда мы получим инвариант

$$I = A^\gamma_{\alpha\beta}u^\alpha v^\beta w_\gamma \tag{8}$$

Эта теорема может быть обращена. Другими словами, справедлива следующая теорема:

Если мы для каждой системы координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$ имеем совокупность n^3 величин $A^\gamma_{\alpha\beta}$ и если при любом выборе трех векторов u^α, v^β, w_γ выражение (8) *является инвариантом, то величины $A^\gamma_{\alpha\beta}$ являются составляющими тензора два раза ковариантного, раз контравариантного.*

Доказательство весьма просто. Нам нужно проверить, выполняются ли формулы преобразования (31) § 30.

Но в силу произвольности векторов u^α, v^β, w_γ мы можем взять их так, чтобы в новой системе координат $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ они имели значения

$$\bar{u}^\alpha = \delta_i^\alpha, \quad \bar{v}^\beta = \delta_k^\beta, \quad \bar{w}_\gamma = \delta_\gamma^l$$

Тогда в новой системе координат значение формы f будет равно

$$\bar{f} = \bar{A}_{ik}^l$$

В старой же системе координат значения векторов могут быть определены по формулам (21) и (24) предыдущего параграфа, в которых только нужно поменять роли новых и старых координат.

$$u^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\,\bar{u}^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^r}\,\delta_i^r = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}$$

$$v^\beta = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^r}\,\bar{v}^r = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^r}\,\delta_k^r = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}$$

$$w_\gamma = \bar{w}_r\,\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^\gamma} = \delta_r^l\,\frac{\partial \bar{x}^r}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\gamma}$$

Следовательно,

$$f = A_{\alpha\beta}^\gamma\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\gamma}$$

и так как по условию выражение (8) является инвариантом, т. е. $\bar{f} = f$, то

$$\bar{A}_{ik}^l = A_{\alpha\beta}^\gamma\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\gamma}$$

Полученная формула преобразования доказывает, что $A_{\alpha\beta}^\gamma$ есть тензор.

Доказанная теорема высказана нами не в самой общей форме. Но совершенно ясно, как нужно формулировать и применять теоремы, аналогичные только что доказанной. Ввиду важности этой теоремы, мы присвоим ей особое наименование «теоремы деления тензоров».

Более того, высказанную теорему можно еще обобщить. Так, например, если для каждой системы координат мы имеем совокупность n^3 величин $A_{\alpha\beta}^\gamma$ и если для любого тензора $B^{\alpha\beta}$ выражение $A_{\alpha\beta}^\gamma B^{\alpha\beta}$ является контравариантным вектором, что величины $A_{\alpha\beta}^\gamma$ являются составляющими тензора два раза ковариантного, раз контравариантного.

Всю совокупность теорем такого типа условимся называть обобщенной теоремой деления тензоров.

Частным случаем этой последней теоремы является такая: *если для любого вектора a^β величины $p_{\alpha\beta}a^\beta$ суть составляющие ковариантного вектора, то $p_{\alpha\beta}$ суть составляющие ковариантного тензора.* Для случая афинных ортогональных тензоров эта теорема была доказана нами в п. 2, § 24 [формулы (14)]. Мы видели там, что эта теорема является весьма важным орудием для распознавания тензорного характера ряда величин. Подобно этому теорема деления тензоров служит в целях установления тензорного характера различных величин. В заключение настоящего пункта докажем еще одну теорему аналогичного содержания.

Если для каждой системы координат x^α мы имеем совокупность n^2 величин $A_{\alpha\beta}$ и если при любом выборе вектора u^α выражение

$$f = A_{\alpha\beta}u^\alpha u^\beta \tag{9}$$

является инвариантом, то величина

$$B_{\alpha\beta} = \tfrac{1}{2}(A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha}) \tag{10}$$

являются составляющими ковариантного тензора.

Для доказательства заменим в выражении (9) вектор u^α суммой двух произвольных векторов v^α и w^α, т. е. положим

$$u^\alpha = v^\alpha + w^\alpha$$

тогда, очевидно, получим

$$f = A_{\alpha\beta}(v^\alpha + w^\alpha)(v^\beta + w^\beta) =$$
$$= A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta + A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta + A_{\alpha\beta}v^\alpha w^\beta + A_{\alpha\beta}w^\alpha v^\beta$$

Заметим теперь, что выражения

$$A_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta, \quad A_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta$$

инвариантны по условию теоремы и что

$$A_{\alpha\beta}w^\alpha v^\beta = A_{\beta\alpha}w^\beta v^\alpha$$

так как α и β являются здесь значками суммирования и поэтому могут быть обозначены произвольными буквами. Поэтому выражение

$$g = (A_{\alpha\beta} + A_{\beta\alpha})\, v^\alpha w^\beta$$

является инвариантом и так как v^α и w^β уже произвольные векторы, то можно применить теорему начала этого пункта и утверждать, что величины (10) образуют ковариантный тензор.

Если величины $A_{\alpha\beta}$ обладают свойством симметричности, т. е. $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, *то из инвариантности выражения (9) для любого вектора вытекает, что $A_{\alpha\beta}$ являются составляющими ковариантного тензора.*

В самом деле, в этом случае $A_{\alpha\beta}$ совпадают с $B_{\alpha\beta}$.

§ 32. Фундаментальный тензор

1. Введем теперь в рассмотрение фундаментальную квадратичную форму

$$ds^2 = g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)\, dx^i dx^k \tag{1}$$

определяющую квадрат расстояния между двумя бесконечно близкими точками многообразия. Формулой (1) устанавливается метрика этого многообразия и само многообразие превращается уже в риманово пространство R_n.

По самому определению, значение квадратичной формы (1) должно оставаться тем же самым, независимо от того, в каких координатах про-

изводится вычисление; иными словами, квадратичная форма (1) является инвариантом.

Кроме этого условия, функции g_{ik} считаются удовлетворяющими условию симметрии

$$g_{ik} = g_{ki} \tag{2}$$

и, кроме того, мы потребуем еще, чтобы определитель

$$g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \cdots g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} \cdots g_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ g_{n1} & g_{n2} \cdots g_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

был отличен от нуля в рассматриваемой области изменения переменных x.

Так как дифференциалы координат могут быть взяты совершенно произвольными и так как dx^i есть контравариантный вектор, то из последней теоремы предыдущего параграфа вытекает, что g_{ik} являются составляющими ковариантного тензора. Мы будем называть этот тензор ковариантным фуидаментальным тензором. Определитель g назовем фундаментальным определителем.

Возьмем теперь любой контравариантный вектор A^α, составим произведение $g_{ik}A^\alpha$ и сократим его по значкам k и α; в результате мы получим ковариантный вектор, составляющие которого мы обозначим через A_i

$$A_i = g_{ik}A^k \tag{4}$$

Попробуем теперь обратно выразить составляющие векторы A^k через A_i. Равенства (4) можно рассматривать как систему n линейных уравнений относительно n неизвестных $A^1, A^2, \ldots, A^n$:

$$\begin{gathered} g_{11}A^1 + g_{12}A^2 + \ldots + g_{1n}A^n = A_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}A^1 + g_{n2}A^2 + \ldots + g_{nn}A^n = A_n \end{gathered}$$

Решая эту систему по обычному правилу Крамера, мы получим, что

$$A^i = \frac{G_{1i}A_1 + G_{2i}A_2 + \ldots + G_{ni}A_n}{g}$$

где G_{ik} есть алгебраическое дополнение элемента g_{ik} в фундаментальном определителе, т. е. минор, соответствующий этому элементу, умноженный на $(-1)^{i+k}$. Вводя обозначения

$$g^{ik} = \frac{G_{ki}}{g} \tag{5}$$

можем написать полученные формулы коротко в виде

$$A^i = g^{ik}A_k \tag{6}$$

Заметим теперь, что уравнения (4) при $g \neq 0$ могут быть решены при любом выборе A_i. Иными словами, в формулах (6) за A_k можно взять произвольный ковариантный вектор. А тогда, применяя одну из теорем последнего пункта предыдущего параграфа, можно утверждать, что величины g^{ik} являются составляющими некоторого контравариантного тензора, который мы назовем контравариантным фундаментальным тензором. Легко видеть, что в силу условия (2) окажется $G_i = G_{ki}$ и, следовательно, $g^{ik} = g^{ki}$. Таким образом, контравариантный фундаментальный тензор, подобно ковариантному фундаментальному тензору, обладает свойством симметрии.

Наконец, производя перемножение обоих фундаментальных тензоров и последующее сокращение индексов, мы получим смешанный фундаментальный тензор

$$g_i^k = g_{i\alpha} g^{\alpha k} \tag{7}$$

Чтобы найти значение составляющих этого тензора, подставим в формуле (4) выражения (6). Мы тогда получим

$$A_i = g_{i\alpha} A^\alpha = g_{i\alpha} g^{\alpha k} A_k = g_i^k A_k$$

Так как это равенство должно иметь место при всех значениях A_k, то необходимо должно быть, чтобы

$$g_i^k = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k \\ 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \tag{8}$$

Таким образом, смешанный фундаментальный тензор совпадает с хорошо известным нам тензором, составляющими которого в любой системе координат являются величины δ_α^β.

Если в тензоре (7) произвести сокращение индексов i и k, то получится инвариант

$$g_i^i = g_{i\alpha} g^{\alpha i} = n \tag{9}$$

дающий, очевидно, число измерений рассматриваемого риманова пространства.

2. В предыдущем пункте мы видели, что при помощи фундаментальных тензоров g_{ik} и g^{ik} можно из контравариантного вектора A^k получить ковариантный вектор A_i и обратно на основании формул

$$A_i = g_{ik} A^k; \quad A^i = g^{ik} A_k \tag{10}$$

Так как мы знаем составляющие фундаментальных тензоров в любой системе координат, то мы легко можем вычислить составляющие одного из векторов A_i, A^i по составляющим другого. Ввиду этого представляется весьма удобным рассматривать A_i и A^i не как составляющие двух различных векторов, а как различные (соответственно ковариантные и контравариантные) составляющие одного и того же вектора. Совершенно то же самое можно сказать и про тензоры любого ранга

Возьмем теперь контравариантный тензор второго ранга $A^{\alpha\beta}$. Тогда можно аналогично тому, как от вектора A^i мы пришли к вектору A_i, произвести операцию понижения одного из значков этого тензора; в самом деле, умножая этот тензор на g_{ik} и производя сокращение по индексам α и k, мы получим тензор

$$A^{\alpha\beta}g_{i\alpha} = A_i^{\cdot\beta} \tag{11}$$

производя же умножение тензора $A^{\alpha\beta}$ на g_{ik} и производя сокращение по индексам β и i, мы получим другой тензор

$$A^{\alpha\beta}g_{\beta k} = A_{\cdot k}^{\alpha\cdot} \tag{12}$$

Принятый в формулах (11) и (12) способ обозначения смешанных тензоров отчетливо указывает на то, какой именно из индексов подвергся понижению (над этим индексом наверху или под ним внизу стоит точка), и мы впредь будем часто пользоваться этим способом.

Нетрудно аналогичным приемом опустить и второй индекс тензора $A^{\alpha\beta}$, для этого достаточно составить выражение

$$A^{\alpha\beta}g_{i\alpha}\,g_{\beta k} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta}\,g_{\beta k} = A_{ik} \tag{13}$$

Обратно, от A_{ik} можно вернуться к $A_i^{\cdot\beta}$ и $A^{\alpha\beta}$. В самом деле, составим

$$A_{ik}\,g^{k\beta} = A_{i\cdot}^{\cdot\gamma}g_{\gamma k}\,g^{k\beta} = A_{i\cdot}^{\cdot\gamma}g_{\gamma}^{\beta}$$

пользуясь теперь формулами (8), легко установим, что

$$A_{ik}\,g^{k\beta} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta} \tag{14}$$

Аналогично этому можно доказать, что

$$A_{ik}g^{k\beta}\,g^{i\alpha} = A_{i\cdot}^{\cdot\beta}\,g^{i\alpha} = A^{\alpha\beta} \tag{15}$$

Совокупность всех полученных нами формул и позволяет рассматривать $A^{\alpha\beta}$, $A_{i\cdot}^{\cdot\beta}$, $A_{\cdot k}^{\alpha\cdot}$, A_{ik} как контравариантные, смешанные и ковариантные составляющие одного и того же тензора. Не останавливаясь на дальнейших примерах применения процесса понижения и повышения индексов, укажем только одно простое правило, касающееся того случая, когда в некотором одночлене какой-либо значок встречается два раза и, следовательно, по этому значку происходит суммирование. Мы знаем, что в этом случае непременно один значок стоит наверху, а другой внизу (иначе рассматриваемая величина не имела бы тензорного характера). Так вот в этом случае мы можем верхний значок суммирования опустить вниз с тем, чтобы нижний значок суммирования поднять наверх. Например

$$A^{\alpha\beta}B_{\alpha\beta} = A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta}B_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot} = A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot}B_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = A_{\alpha\beta}B^{\alpha\beta} \tag{16}$$

Доказательство этой теоремы предоставляется в качестве упражнения читателю.

Заметим в заключение этого пункта, что мы можем рассматривать g_{ik}, g^{ik} и g_i^k как ковариантные, контравариантные и смешанные компоненты фундаментального тензора, ибо процесс повышения и понижения индексов применим и к этому тензору, например

$$g_{ik}\,g^{i\alpha} = g_k^{\alpha}, \qquad g_{ik}g^{i\alpha}\,g^{k\beta} = g^{\alpha\beta} \tag{17}$$

При этом, как мы видели выше, процесс повышения значка производится при помощи тензора g^{ik}, процесс понижения при помощи тензора g_{ik}. Применение же тензора g_i^k производит, как легко видеть, только замену одного значка другим, например

$$A_{\alpha\beta}\,g_i^{\beta} = A_{\alpha i} \tag{18}$$

поэтому g_i^k называют еще **тензором подстановки**.

3. Перейдем теперь к приложениям.

В основу наших рассуждений мы положим фундаментальную форму

$$ds^2 = g_{ik}\,(x^1, \ldots, x^n)\,dx^i\,dx^k \tag{19}$$

определяющую расстояние между двумя бесконечно близкими точками риманова пространства R_n. Про квадратичную форму (19) мы будем предполагать, что она принимает только положительные значения и что она произошла указанным в § 30 образом. А именно мы будем считать, что мы имеем m-мерное энклидово пространство E_m, в котором положение какой-либо точки определяется прямолинейными прямоугольными координатами $y_1, y_2, \ldots, y_m$, и что в этом пространстве мы рассматриваем подпространство R_n, определенное формулами

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1\,(x^1, \ldots, x^n) \\ &\ldots\ldots\quad\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= y_m\,(x^1, \ldots, x^n) \end{aligned} \tag{20}$$

Подставляя в формулу

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} dy_\alpha{}^2 \tag{21}$$

определяющую расстояние между двумя бесконечно близкими точками в энклидовом пространстве, выражения (20) для функций y_α, мы и получим формулу (19), в которой, как было показано в § 30, коэффициенты g_{ik} имеют следующие значения:

$$g_{ik}(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} \tag{22}$$

При этом мы всюду будем писать знак суммирования, если оно происходит в пределах от 1 до m.

Нашей первой задачей будет изучение метрики пространства R_n, т. е. рассмотрение того какое значение имеет длина какого-либо вектора в пространстве R_n и какое значение имеет угол между двумя векторами

в этом пространстве. При этом мы будем исходить из известной нам метрики нашего трехмерного эвклидова пространства, которая весьма легко обобщается на случай эвклидова пространства m измерений.

Итак, возьмем какой-либо контравариантный вектор A^i. Легко найти такой бесконечно малый вектор dx^i, который имеет то же направление, что и вектор A^i, точнее говоря, вектор dx^i, составляющие которого пропорциональны составляющим вектора A^i:

$$dx^i = \lambda A^i \tag{23}$$

Так как при переходе от одной координатной системы к другой составляющие векторов dx^i и A^i преобразуются по одним и тем же формулам, то величина λ при этом изменении координат остается инвариантной.

Вектору dx^i отвечает в пространстве E_m бесконечно малый вектор dy с составляющими dy_α, длина которого равна ds.

Естественно поэтому за длину вектора dx^i принять выражение для ds, определяемое формулой (19).

Так как составляющие вектора A^i в λ раз меньше составляющих вектора dx^i, то и длину вектора A^i следует принять в λ раз меньше, чем ds.

Но при выполнении условий (23) мы имеем, что

$$ds^2 = \lambda^2 g_{ik} A^i A^k$$

Отсюда вытекает, что за длину вектора A^i следует принять выражение

$$l(A^i) = \sqrt{g_{ik} A^i A^k} \tag{24}$$

Заменяя контравариантные составляющие вектора A^i его ковариантными составляющими по формулам

$$g_{ik} A^k = A_i, \quad A^i = g^{il} A_l \tag{25}$$

получим еще два выражения для длины вектора A^i:

$$l(A^i) = \sqrt{A_i A^i} \qquad l(A^i) = \sqrt{g^{il} A_i A_l} \tag{26}$$

Заметим, что так как вектору dx^i отвечает в пространстве E_m вектор с составляющими

$$dy_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} dx^i \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{27}$$

то вектору

$$A^i = \frac{1}{\lambda} dx^i$$

будет соответствовать афинный ортогональный вектор а в пространстве E_m с составляющими

$$a_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{28}$$

Чтобы определить значение угла между двумя векторами A^i и B^i в пространстве R_n, рассмотрим предварительно вопрос о скалярном произведении этих двух векторов.

Вектору A^i будет соответствовать в пространстве E_m вектор a с составляющими (28), точно так же вектору B^i будет соответствовать вектор b с составляющими

$$b_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k \quad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{29}$$

Составляя по обычному правилу скалярное произведение двух векторов a и b, получим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{\alpha=1}^{m} a_\alpha b_\alpha = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \cdot \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} B^k = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} A^i B^k = g_{ik} A^i B^k \tag{30}$$

Таким образом, *под скалярным произведением векторов* A^i и B^k *следует понимать следующие выражения, равные между собой в силу формул* (25):

$$g_{ik} A^i B^k = A_k B^k = A^i B_i = g^{il} A_l B_i \tag{31}$$

Теперь не составит никакого труда найти угол между двумя векторами A^i и B^k, понимая под этим угол ϑ между соответствующими этим векторам векторами a и b в пространстве E_m. В самом деле, мы, очевидно, имеем

$$\cos\vartheta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{ab} =$$

$$= \frac{g_{ik} A^i B^k}{\sqrt{g_{ik} A^i A^k} \sqrt{g_{ik} B^i B^k}} = \frac{A^i B_i}{\sqrt{A^i A_i} \sqrt{B^i B_i}} = \frac{g^{ik} A_i B_k}{\sqrt{g^{ik} A_i A_k} \sqrt{g^{ik} B_i B_k}} \tag{32}$$

Отметим в частности условие ортогональности двух векторов A^i и B^i:

$$g_{ik} A^i B^k = A^i B_i = g^{ik} A_i B_k = 0 \tag{33}$$

4. Переходя к дальнейшим приложениям тензорной алгебры, мы в целях простоты изложения допустим, что мы имеем дело с эвклидовым трехмерным пространством, в котором введены произвольные криволинейные координаты x^1, x^2, x^3.

Рассуждения предыдущего пункта остаются в этом частном случае в полной силе; однако в данном случае их можно еще сильно упростить.

Основным признаком эвклидова пространства является то обстоятельство, что хотя в общих криволинейных координатах выражение для ds^2 имеет форму (19), существуют такие прямолинейные прямоугольные системы координат y_1, y_2, y_3, что ds^2 принимает форму

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 \tag{34}$$

и что, следовательно, составляющие фундаментального тензора в этой системе будут иметь вид

$$g_{ik} = \delta_i^k \tag{35}$$

В общем же римановом трехмерном пространстве привести ds^2 к форме (34) нельзя, и только, если включить это пространство в эвклидово пространство более высокого числа измерений, можно привести ds^2

к форме (21). Но в координатах y_1, y_2, y_3 мы превосходно знаем, чему равна длина вектора, угол между двумя векторами и т. п. Это дает возможность, как мы сейчас увидим на ряде примеров, сразу написать аналогичные выражения в общих криволинейных координатах.

Рассмотрим какой-либо вектор, и пусть A^i его контравариантные компоненты, а A_i — ковариантные. Тогда из общей теории тензоров мы знаем, что выражение A^iA_i является инвариантом. Но в системе координат y_1, y_2, y_3 различие между контравариантными и ковариантными компонентами пропадает; для ясности будем обозначать в координатах y_1, y_2, y_3 составляющие вектора A через a_1, a_2, a_3, вектора B через b_1, b_2, b_3 и т. д. Тогда инвариант A^iA_i будет иметь в координатах y_1, y_2, y_3, значение $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$, а это, как известно, есть квадрат длины вектора. Итак, длиной вектора A^i в любых криволинейных координатах является

$$l(A^i) = \sqrt{A^iA_i} = \sqrt{g_{ik}A^iA^k} = \sqrt{g^{ik}A_iA_k} \tag{36}$$

Совершенно аналогично можно составить скалярное произведение двух векторов A^i и B^i. Из общей теории тензоров мы знаем, что A^iB_i есть инвариант; в координатах y_1, y_2, y_3 это выражение приводится к $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$, т. е. к скалярному произведению векторов A^i и B^i. Следовательно, скалярным произведением векторов A^i и B^i в любых криволинейных координатах является

$$A^iB_i = g_{ik}A^iB^k = g^{ik}A_iB_k \tag{37}$$

Совершенно естественно, что для косинуса угла между двумя векторами мы вновь получаем формулу (32).

Поставим теперь себе задачу выяснить значение контравариантных и ковариантных составляющих некоторого вектора.

Пусть мы рассматриваем вектор a в точке M. Проведем через эту точку, как мы это делали в § 18, три координатных поверхности

$$x^1 = \text{const}, \quad x^2 = \text{const}, \quad x^3 = \text{const} \tag{38}$$

которые пересекутся по трем координатным линиям. Направления касательных к этим линиям в сторону возрастания координат x^1, x^2, x^3 обозначим через s_1, s_2, s_3; направления же нормалей к поверхностям (38) в сторону возрастания координат x^1, x^2, x^3 обозначим через n_1, n_2, n_3.

Найдем углы, образуемые этими шестью направлениями с осями прямолинейных прямоугольных координат y_1, y_2, y_3. Возьмем, например, направление s_i; вдоль соответствующей координатной линии меняется только координата x^i, остальные же две координаты остаются без изменения; бесконечно малый вектор $d\mathbf{r}$, идущий по касательной к этой линии, имеет своими проекциями на оси координат y_1, y_2, y_3 величины (заметим, что в нижеследующих формулах не нужно суммировать по значку i)

$$dy_1 = \frac{\partial y_1}{\partial x^i}\,dx^i, \quad dy_2 = \frac{\partial y_2}{\partial x^i}\,dx^i, \quad dy_3 = \frac{\partial y_3}{\partial x^i}\,dx^i$$

величина же самого вектора $d\mathbf{r}$ равна [см. еще (22)]

$$ds_i = \sqrt{dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2} = \sqrt{\left(\frac{\partial y_1}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial x^i}\right)^2}\, dx^i = \sqrt{g_{ii}}\, dx^i$$

Отсюда сразу следуют такие выражения для косинусов углов между направлениями $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ и осями y_1, y_2, y_3

$$\cos(\mathbf{s}_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y_j}{\partial x^i} \tag{39}$$

(заметим, что хотя в эту формулу значок i входит три раза, но по нему суммировать не надо, что ясно из вывода). Точно так же вычисляются косинусы углов между направлениями $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ и осями y_1, y_2, y_3.

Рассмотрим, например, вектор $\operatorname{grad} x^i$, где x^i рассматривается как функция от y_1, y_2, y_3. Проекциями этого вектора на оси y_1, y_2, y_3 являются

$$\frac{\partial x^i}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial x^i}{\partial y_3} \tag{40}$$

Покажем теперь, что квадрат длины этого вектора равен

$$\left(\frac{\partial x^i}{\partial y_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial x^i}{\partial y_3}\right)^2 = g^{ii} \tag{41}$$

В самом деле, g^{ik} есть контравариантный тензор, составляющие которого в системе координат y_1, y_2, y_3 равны

$$g^{ik} = g^k_i$$

(ибо в прямолинейной прямоугольной системе координат значения контравариантных и смешанных составляющих тензоров совпадают). Поэтому в любой системе координат x^1, x^2, x^3 согласно общему правилу преобразования контравариантных тензоров будем иметь

$$g^{ik} = \delta^\beta_\alpha \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial y_\beta}, \quad \text{или} \quad g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha} \frac{\partial x^k}{\partial y_\alpha} \tag{42}$$

Отсюда, как частный случай, следуют и формулы (41). Выпишем еще для аналогии и формулы (22)

$$g_{ik} = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} \tag{43}$$

Возвращаясь к определению косинусов углов между направлениями $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$ и осями координат y_1, y_2, y_3, можем теперь в силу формул (40) и (41) сразу написать, что

$$\cos(\mathbf{n}_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial x^i}{\partial y_j} \tag{44}$$

Рассматривая теперь какой-либо вектор, введем для отчетливости изложения следующие обозначения. Пусть A^i и A_i контравариантные и ковариантные составляющие этого вектора в любых криволинейных координатах; пусть a_1 a_2, a_3 составляющие этого вектора по осям пря-

молинейных прямоугольных координат y_1, y_2, y_3; обозначим далее через a_{s_i} и a_{n_i} ортогональные проекции вектора $\mathbf{a}$ соответственно на касательные к координатным линиям и на нормали к координатным поверхностям (38); наконец, вводя, как в § 18, три единичных вектора $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, направленных по касательным к координатным линиям (см. фиг. 60) и, через $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$ — три единичных вектора, направленных по нормалям к координатным поверхностям (38) (в § 18 эти векторы были обозначены через $\mathbf{e}_1^*$, $\mathbf{e}_2^*$, $\mathbf{e}_3^*$), обозначим через A_{s_i} и A_{n_i} косоугольные составляющие вектора $\mathbf{a}$ соответственно по направлениям $\mathbf{s}_1$, $\mathbf{s}_2$, $\mathbf{s}_3$ и $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$, $\mathbf{n}_3$, иными словами, коэффициенты разложения вектора $\mathbf{a}$ по векторам $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}^1$, $\mathbf{e}^2$, $\mathbf{e}^3$:

$$\mathbf{a} = A_{s_1}\mathbf{e}_1 + A_{s_2}\mathbf{e}_2 + A_{s_3}\mathbf{e}_3 \tag{45}$$

$$\mathbf{a} = A_{n_1}\mathbf{e}^1 + A_{n_2}\mathbf{e}^2 + A_{n_3}\mathbf{e}^3 \tag{46}$$

Переходим к вычислению введенных нами величин. Прежде всего, согласно основной формуле об ортогональной проекции какого-либо вектора на любое направление, мы имеем

$$a_{s_i} = a_j \cos(\mathbf{s}_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} a_j \frac{\partial y_j}{\partial x^i}$$

Но в силу основных формул преобразования ковариантных векторов мы имеем

$$A_i = a_i \frac{\partial y_j}{\partial x^i}$$

и, следовательно, получаем окончательную формулу

$$a_{s_i} = \frac{A_i}{\sqrt{g_{ii}}} \tag{47}$$

Таким образом, ковариантные составляющие вектора A_i только множителем $\sqrt{g_{ii}}$ отличаются от ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на направления касательных к координатным линиям.

Совершенно аналогично вычисляется

$$a_{n_i} = a_j \cos(\mathbf{n}_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} a_j \frac{\partial x^i}{\partial y_j} \tag{48}$$

Но в силу основных формул преобразования контравариантных векторов мы имеем

$$A^i = a_j \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

и, следовательно,

$$a_{n_i} = \frac{A^i}{\sqrt{g^{ii}}} \tag{49}$$

Таким образом, контравариантные составляющие вектора A^i только множителем $\sqrt{g^{ii}}$ отличаются от ортогональных проекций вектора $\mathbf{a}$ на направления нормалей к координатным поверхностям.

Переходим теперь к вычислению A_{s_i} и A_{n_i}. Просматривая внимательно предыдущие выводы, мы легко заметим, что составляющими вектора e_i по осям координат y_1, y_2, y_3 являются величины

$$\cos(s_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y_j}{\partial x^i}$$

составляющими же вектора e^i являются

$$\cos(n_i, y_j) = \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

Поэтому, проектируя равенства (45) и (46) на оси координат y_1, y_2, y_3, получим

$$a_j = \sum_{i=1}^{3} A_{s_i} \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}} \frac{\partial y_j}{\partial x^i}, \qquad a_j = \sum_{i=1}^{3} A_{n_i} \frac{1}{\sqrt{g^{ii}}} \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

Но в силу формул преобразования контравариантных и ковариантных векторов мы имеем, что должно быть

$$a_j = \sum_{i=1}^{3} A^i \frac{\partial y_j}{\partial x^i}, \qquad a_j = \sum_{i=1}^{3} A_i \frac{\partial x^i}{\partial y_j}$$

Сравнивая эти формулы с предыдущими, мы видим, что

$$A_{s_i} = \sqrt{g_{ii}}\, A^i \tag{50}$$

$$A_{n_i} = \sqrt{g^{ii}}\, A_i \tag{51}$$

Эти формулы дают нам еще одно истолкование контравариантных и ковариантных составляющих вектора.

Отметим еще раз, что во всех формулах (47), (49), (50) и (51) по значку i, хотя он и встречается три раза, никакого суммирования производить не нужно.

В случае ортогональных криволинейных координат x^1, x^2, x^3 направления s_i и n_i совпадают друг с другом, и поэтому

$$a_{s_i} = a_{n_i} = A_{s_i} = A_{n_i}$$

общую величину этих составляющих обозначим через a_{x_i} и будем называть эти величины *физическими составляющими* вектора a. Так как в случае ортогональных координат мы имеем, очевидно, соотношения

$$g_{ii} = H_i^2, \qquad g^{ii} = \frac{1}{H_i^2} \tag{52}$$

где H_i — коэффициенты Ламэ (см. § 18), то связь между контравариантными, ковариантными и физическими составляющими некоторого вектора принимает вид

$$A^i = \frac{1}{H_i} a_{x_i}, \qquad A_i = H_i a_{x_i}. \tag{53}$$

5. Покажем теперь, как следует определять в римановом пространстве векторное произведение. При этом мы рассмотрим для простоты только случай пространства трех измерений.

Возьмем три произвольных вектора A^i, B^i, C^i и образуем из их контравариантных и ковариантных составляющих два определителя

$$V = \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{vmatrix}, \qquad V' = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix} \tag{54}$$

Так как контравариантные и ковариантные составляющие какого-либо вектора связаны соотношениями

$$A_i = g_{ik}A^k$$

то легко видеть в силу правила перемножения определителей, что

$$V' = \begin{vmatrix} g_{1k}A^k & g_{2k}A^k & g_{3k}A^k \\ g_{1k}B^k & g_{2k}B^k & g_{3k}B^k \\ g_{1k}C^k & g_{2k}C^k & g_{3k}C^k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A^1 & A^2 & A^3 \\ B^1 & B^2 & B^3 \\ C^1 & C^2 & C^3 \end{vmatrix} = gV \tag{55}$$

Перейдем теперь к другой системе координат $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ и обозначим через D определитель преобразования, т. е.

$$D = \frac{D(x^1, x^2, x^3)}{D(\bar{x}^1, \bar{x}^2, \bar{x}^3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^1} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^2} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial x^1}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^2}{\partial \bar{x}^3} & \frac{\partial x^3}{\partial \bar{x}^3} \end{vmatrix} \tag{56}$$

Составляющие вектора A_i преобразуются при этом по формулам

$$\overline{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}$$

Поэтому преобразованное значение определителя V', по той же формуле перемножения определителей, окажется равным

$$\overline{V}' = \begin{vmatrix} A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^1} & A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^2} & A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^3} \\ B_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^1} & B_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^2} & B_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^3} \\ C_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^1} & C_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^2} & C_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^3} \end{vmatrix} = V'D \tag{57}$$

Наконец, применяя то же правило перемножения определителей к определителям V и V', из (54), получим

$$VV' = \begin{vmatrix} A^iA_i & A^iB_i & A^iC_i \\ B^iA_i & B^iB_i & B^iC_i \\ C^iA_i & C^iB_i & C^iC_i \end{vmatrix}$$

Отсюда видно, что выражение VV' является инвариантом, так что

$$\overline{VV'} = VV' \tag{58}$$

Сравнивая это выражение с (57), видим, что должно быть тождественно

$$\overline{V}D = V \tag{59}$$

что, впрочем, может быть доказано и непосредственно.

Наконец, из формулы (55) следует, что

$$\overline{V}' = \bar{g}\overline{V}$$

принимая еще раз во внимание (55), заключаем, что

$$\frac{\overline{V}'}{\overline{V}'} = \frac{\bar{g}}{g}\frac{\overline{V}}{V}$$

Теперь, в силу (57) и (59) выводим

$$D = \frac{\bar{g}}{g}\frac{1}{D}$$

Отсюда вытекает важная формула преобразования фундаментального определителя

$$\bar{g} = gD^2 \tag{60}$$

Так как определитель преобразования D всегда считается отличным от нуля, то из предыдущей формулы вытекает, между прочим, что значение фундаментального определителя будет отличным от нуля во всех системах координат, если это имеет место для какой-нибудь одной системы координат.

Мы будем считать $\bar{g}$ и $\sqrt{\bar{g}}$ в некоторой фиксированной системе координат $\bar{x}^1$, $\bar{x}^2$, $\bar{x}^3$ положительными, тогда из (60) получим

$$\sqrt{\bar{g}} = D\sqrt{g}, \tag{61}$$

причем мы условимся $\sqrt{g}$ приписывать тот знак, который имеет определитель преобразования D.

Из формул (57) и (59) следует теперь, что

$$\frac{\overline{V}'}{\sqrt{\bar{g}}} = \frac{V'}{\sqrt{g}}, \quad \overline{V}\sqrt{\bar{g}} = V\sqrt{g} \tag{62}$$

т. е. величины

$$\sqrt{g}V, \quad \frac{V'}{\sqrt{g}}$$

являются инвариантами. Эти величины равны друг другу в силу (55).

Придадим этим инвариантам другую форму, для чего введем в рассмотрение систему чисел δ_{ikl}, зависящих от трех значков i, k, l и заданных следующим образом:

$$\begin{aligned} &\delta_{123} = \delta_{231} = \delta_{312} = 1 \\ &\delta_{132} = \delta_{213} = \delta_{321} = -1 \\ &\delta_{ikl} = 0 \qquad \text{во всех прочих случаях} \end{aligned} \tag{63}$$

Легко видеть, что при таких обозначениях определитель V может быть записан следующим образом:

$$V = A^1B^2C^3 + A^2B^3C^1 + A^3B^1C^2 - A^1B^3C^2 - A^2B^1C^3 - A^3B^2C^1 = \\ = \delta_{\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma$$

и точно так же

$$V' = \delta_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta C_\gamma$$

Итак, выражения

$$\sqrt{g}V = \sqrt{g}\delta_{\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma \tag{64}$$

$$\frac{1}{\sqrt{g}}V' = \frac{1}{\sqrt{g}}\delta_{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta C_\gamma \tag{65}$$

при любом выборе векторов A^α, B_α, C^α являются инвариантами. Но тогда из теоремы деления тензоров п. 5 § 31 вытекает, что величины

$$\sqrt{g}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}$$

являются составляющими ковариантного тензора третьего ранга, который мы обозначим через $e_{\alpha\beta\gamma}$, а величины

$$\frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}$$

являются составляющими контравариантного тензора третьего ранга, который мы обозначим через $e^{\alpha\beta\gamma}$.

Итак

$$e_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{g}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}, \qquad e^{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta_{\alpha\beta\gamma} \tag{66}$$

Оба тензора обозначены одной буквой, ибо из равенства выражений (64) и (65) очевидно, что они являются сопряженными друг другу (один может быть получен из другого понижением или повышением индексов). Можно дать и непосредственное доказательство этому факту:

$$e^{\alpha\beta\gamma}g_{\alpha i}g_{\beta k}g_{\gamma l} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\delta_{\alpha\beta\gamma}g_{\alpha i}g_{\beta k}g_{\gamma l} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} g_{1i} & g_{2i} & g_{3i} \\ g_{1k} & g_{2k} & g_{3k} \\ g_{1l} & g_{2l} & g_{3l} \end{vmatrix} = \\ = \frac{1}{\sqrt{g}}\,g\delta_{ikl} = \sqrt{g}\,\delta_{ikl} = e_{ikl}$$

Теперь формулы (64) и (65) могут быть записаны следующим образом:

$$\sqrt{g}V = \frac{1}{\sqrt{g}}V' = e_{\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta C^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta C_\gamma \tag{67}$$

Пусть теперь нам даны два вектора A^α и B^α. Из предыдущей формулы ясно, что мы можем определить формулами

$$u_\gamma = e_{\alpha\beta\gamma}A^\alpha B^\beta, \qquad u^\gamma = e^{\alpha\beta\gamma}A_\alpha B_\beta \tag{68}$$

ковариантные и контравариантные компоненты некоторого вектора, который естественно назвать **векторным произведением**

данных векторов, так как в случае эвклидова пространства он просто совпадает с этим векторным произведением. В самом деле, в случае эвклидова пространства мы можем взять прямолинейные прямоугольные оси координат, при этом окажется $g = 1$, и формулы (68) примут обычный вид

$$u_1 = A_2B_3 - A_3B_2 \text{ и т. д.}$$

Конечно, формулы (68) можно писать в различных формах, так, например, можно написать, что

$$u_i = c_{\cdot\cdot i}^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta = g_{i\gamma} e^{\alpha\beta\gamma} A_\alpha B_\beta = \tag{69}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \{g_{i1}(A_2B_3 - A_3B_2) + g_{i2}(A_3B_1 - A_1B_3) + g_{i3}(A_1B_2 - A_2B_1)\}$$

§ 33. Дифференциальные уравнения геодезических линий. Символы Кристоффеля и их свойства

1. Теперь мы переходим в область тензорного анализа. Нашей основной задачей будет являться установление понятия производной тензора. При этом мы должны, согласно общей идее тензорного исчисления, дать такое определение производной тензора, которое имело бы тензорный характер.

В этом параграфе мы не будем еще заниматься этим вопросом, так как нам необходимо предварительно провести ряд вспомогательных для нашей главной цели рассуждений; но мы хотим уже сейчас выяснить, в чем состоит встречающееся затруднение, которое нам предстоит преодолеть.

Когда мы имеем дело со скалярной функцией точки φ и рассматриваем дифференциал этой функции $d\varphi$, соответствующий переходу из точки M в бесконечно близкую точку M', то ясно, что $d\varphi$ является инвариантом по отношению к преобразованиям координат.

Допустим теперь, что мы рассматриваем поле ковариантного вектора A_i, так что A_i являются функциями точки. На первый взгляд, казалось бы, что за дифференциал вектора следует взять вектор, имеющий ковариантными составляющими dA_i. Но вся трудность заключается в том, что величины dA_i не могут являться ковариантными составляющими, так как они не преобразуются по формулам для ковариантных векторов. В самом деле, мы имеем по правилу составления полного дифференциала

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \tag{1}$$

Но величины A_i являются составляющими ковариантного вектора и следовательно, при переходе к новой системе координат $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$ мы будем иметь

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \tag{2}$$

Составим теперь дифференциал

$$d\bar{A}_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} dA_\alpha + A_\alpha d\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} dA_\alpha + A_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} d\bar{x}^k \tag{3}$$

Если бы величины dA_α были составляющими ковариантного вектора, то формулы преобразования имели бы вид

$$d\bar{A}_i = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} dA_\alpha$$

Это будет в том случае, если

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} = 0$$

при всех значках α, i, k, т. е. если x^α являются линейными функциями от $\bar{x}^i$. В случае афинных ортогональных тензоров мы имеем как раз такой случай, вот почему мы не встретили там того затруднения, которое получается теперь.

Итак, в общем тензорном исчислении, в силу отличия от нуля

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}$$

величины dA_α не носят тензорного характера. Совершенно естественно возникает вопрос, как подправить эти величины с тем, чтобы вновь вернуть им тензорный характер. Решение этого вопроса, правда не в самой общей форме, будет дано в следующем параграфе.

Для решения указанного вопроса нам понадобятся, в качестве вспомогательного орудия, дифференциальные уравнения геодезических линий в рассматриваемом нами римановом пространстве R_n.

2. Дадим сначала определение геодезической линии в пространстве R_n.

Рассмотрим какую-нибудь линию L в этом пространстве, уравнениями которой в параметрическом виде пусть служат

$$x^1 = x^1(t),\ x^2 = x^2(t),\ \ldots,\ x^n = x^n(t) \tag{4}$$

Возьмем на этой линии две точки M_0 и M_1 и пусть значения параметра t, соответствующие этим точкам, будут t_0 и t_1. Вычислим длину l отрезка кривой L между точками M_0 и M_1. Принимая во внимание, что ds^2 определяется основной формой

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \tag{5}$$

и обозначая производные по параметру t для краткости точкой, будем иметь, что

$$ds = \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt \tag{6}$$

и, следовательно,

$$l = \int_{t_0}^{t_1} ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{ik}\dot{x}^i \dot{x}^k}\, dt \tag{7}$$

Линия, длина отрезка которой, расположенного между двумя произвольными достаточно близкими ее точками, меньше длины любой другой соседней кривой, соединяющей те же точки, называется геодезической. Установим уравнение, которому должны удовлетворять геодезические линии. Пусть L_0 есть геодезическая линия; удобнее всего за параметр t взять дугу s линии L_0, отсчитанную от точки M_0, и пусть значение s для точки M_1 будет равно l_0. Координаты точек кривой L_0 будут функциями от s:

$$x^\alpha = x_0^{\ \alpha}(s) \qquad (\alpha = 1, \ \ldots, \ n) \tag{8}$$

Возьмем теперь произвольные n функций от s, которые мы обозначим через $\xi^\alpha(s)$, и подчиним лишь тому условию, чтобы при $s = 0$ и $s = l_0$ все эти функции обращались в нуль:

$$\xi^\alpha(0) = \xi^\alpha(l_0) = 0 \qquad (\alpha = 1, \ \ldots, \ n) \tag{9}$$

Рассмотрим теперь семейство кривых L_ε, координаты которых являются следующими функциями от s:

$$x^\alpha = x_0^{\ \alpha}(s) + \varepsilon\xi^\alpha(s) \qquad (\alpha = 1, \ \ldots, \ n) \tag{10}$$

где ε есть малый параметр, могущий принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Обозначим, наконец, через $\Phi\left(x, \frac{dx}{ds}\right)$ функцию

$$\Phi\left(x, \frac{dx}{ds}\right) = g_{ik}\frac{\partial x^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} \tag{11}$$

причем заметим, что из равенства (5) следует соотношение

$$\Phi\left(x_0, \frac{dx_0}{ds}\right) = g_{ik}\frac{dx_0^{\ i}}{ds}\frac{dx_0^{\ k}}{ds} = 1 \tag{12}$$

Принимая в (7) за параметр t дугу s кривой L_0, будем иметь для длины отрезка кривой L_ε, лежащего между точками M_0 и M_1, выражение

$$l(\varepsilon) = \int_0^{l_0} \sqrt{\Phi\left(x_0 + \varepsilon\xi, \frac{dx_0}{ds} + \varepsilon\frac{d\xi}{ds}\right)}\, ds \tag{13}$$

Так как при $\varepsilon = 0$ мы получаем длину l_0 дуги кривой L_0, меньшую по условию, чем длина $l(\varepsilon)$ дуг соседних кривых L_ε, то $l(\varepsilon)$, рассматриваемая как функция от ε, должна при $\varepsilon = 0$ иметь минимум. Но известно, что необходимым условием минимума функции является обращение в нуль производной этой функции в той точке, где достигается минимум. Итак, должно быть

$$\left[\frac{dl(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = 0 \tag{14}$$

Функцию (13) можно дифференцировать под знаком интеграла, причем подынтегральную функцию надо дифференцировать, как сложную функ-

цию от ε. В результате дифференцирования и подстановки после этого значения $\varepsilon = 0$ получаем

$$\left[\frac{dl(\varepsilon)}{d\varepsilon}\right]_{\varepsilon=0} = \int_0^{l_0} \frac{1}{2\sqrt{\Phi\left(x_0, \frac{dx_0}{ds}\right)}} \left\{\frac{\partial \Phi}{\partial x_0^i}\xi^i(s) + \frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\frac{d\xi^i}{ds}\right\} ds$$

В силу (12) и (14) приходим к такому условию (конечно, по i надо суммировать в пределах от 1 до n):

$$\int_0^{l_0} \frac{\partial \Phi}{\partial x_0^i}\xi^i(s)\, ds + \int_0^{l_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\frac{d\xi^i}{ds}\, ds = 0 \tag{15}$$

Второй интеграл левой части можно проинтегрировать по частям:

$$\int_0^{l_0} \frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}} d\xi^i = \left[\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\xi^i\right]_{s=0}^{s=l_0} - \int_0^{l_0} \xi^i \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\right) ds =$$

$$= -\int_0^{l_0} \xi^i \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\right) ds$$

так как проинтегрированная часть обращается в нуль в силу условий (9). Уравнение (15) принимает теперь такой вид:

$$\int_0^{l_0} \xi^i \left[\frac{\partial \Phi}{\partial x_0^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx_0^i}{ds}}\right)\right] ds = 0 \tag{16}$$

Но функции ξ^i могут быть выбраны совершенно произвольно при соблюдении лишь условий (9), поэтому необходимо, чтобы на кривой L выполнялось n равенств

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} - \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx^i}{ds}}\right) = 0 \tag{17}$$

(мы отбрасываем излишний теперь значок 0); в самом деле, если бы эти равенства не имели места, то мы взяли бы за функции ξ^i функции, имеющие тот же знак, что и их сомножители: тогда получилось бы из (16), что интеграл от положительной функции равен нулю, чего не может быть.

3. Изменяя данное выше определение геодезической линии, мы назовем теперь геодезическими линиями все те линии, которые удовлетворяют уравнениям (17).

Воспользовавшись теперь выражением (11) для функции Φ, раскроем левую часть уравнения (17). Прежде всего мы имеем

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx^i}{ds}} = 2g_{ik}\frac{dx^k}{ds}$$

(двойка появляется потому, что в равенстве (11) наряду с $g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$ мы имеем еще член $g_{ki}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds}$) и, следовательно,

$$\frac{d}{ds}\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx^i}{ds}} = 2g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2} + 2\frac{dg_{ik}}{ds}\frac{dx^k}{ds} \tag{18}$$

производную по s от функции $g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)$ надо брать, как производную от сложной функции. При этом нам удобно вести вычисление следующим образом:

$$\frac{dg_{ik}}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{dg_{i\alpha}}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta}\frac{dx^\beta}{ds}\frac{dx^\alpha}{ds}$$

и точно так же

$$\frac{dg_{ik}}{ds}\frac{dx^k}{ds} = \frac{dg_{i\beta}}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

Складывая оба выражения и подставляя в (18), найдем, что

$$\frac{\partial}{ds}\frac{\partial \Phi}{\partial \frac{dx^i}{ds}} = 2g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2} + \left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha}\right)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} \tag{19}$$

Наконец, написав формулу (11) в виде

$$\Phi = g_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}$$

легко получим, что

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} \tag{20}$$

В силу (19) и (20) уравнения (17) принимают вид

$$g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right]\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{21}$$

Полученные дифференциальные уравнения геодезических линий мы запишем в другом виде, введя особые символы — так называемые прямые скобки Кристоффеля или символы Кристоффеля первого рода:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right) = \Gamma_{i,\,\alpha\beta} = \Gamma_{\alpha\beta,\,i} = \left[\begin{matrix}\alpha\beta\\ i\end{matrix}\right] = [\alpha\beta,\, i] \tag{22}$$

мы уже указали несколько обозначений этих символов, которыми пользуются разные авторы.

При новых обозначениях уравнения (21) запишутся так:

$$g_{ik}\frac{d^2x^k}{ds^2} + \Gamma_{i,\,\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \tag{23}$$

Умножая их на $g^{i\lambda}$ и вспоминая, что

$$g_{ik}g^{i\lambda} = g^\lambda_k, \qquad g^\lambda_k\frac{d^2x^k}{ds^2} = \frac{d^2x^\lambda}{ds^2}$$

мы можем придать уравнениям (23) еще такую форму:

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + g^{i\lambda}\Gamma_{i,\,\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0$$

Введем поэтому еще **волнистые скобки Кристоффеля** или **символы Кристоффеля второго рода**, определив их формулами

$$g^{i\lambda}\Gamma_{i,\,\alpha\beta} = \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \left\{\begin{matrix}\alpha\beta\\ \lambda\end{matrix}\right\} = \{\alpha\beta,\,\lambda\} \tag{24}$$

тогда окончательно уравнения геодезических линий напишутся так:

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0 \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n) \tag{25}$$

В этих уравнениях $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ представляют собой совокупность n^3 функций от координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, определенных формулами (22) и (24).

4. Рассмотрим теперь свойства символов Кристоффеля.

Отметим прежде всего, что **символы Кристоффеля не являются тензорами**. Это видно хотя бы из того, что в случае эвклидова пространства, если мы возьмем прямолинейные координаты, то геодезические линии — в данном случае прямые линии — выразятся линейными уравнениями вида

$$x^\lambda = a_\lambda s + b_\lambda \tag{26}$$

где a_λ и b_λ — постоянные; поэтому окажется

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = 0$$

и из уравнений (23) видно, что в этом случае $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = 0$. Если же взять, скажем, сферические координаты, то прямые линии уже не могут быть выражены уравнениями вида (26) и, следовательно, $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ не могут все сразу обратиться в нуль. Между тем составляющие любого тензора, в силу линейности формул преобразования, должны обладать тем свойством, что если они все сразу равны нулю в одной системе координат, то они должны равняться нулю в любой другой системе координат. Так как $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ не удовлетворяют этому условию, то они не являются составляющими тензора.

Заметим далее, что наряду с формулами (24)

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = g^{i\lambda}\Gamma_{i,\,\alpha\beta} \tag{27}$$

мы имеем взаимные им формулы

$$\Gamma_{k,\,\alpha\beta} = g_{k\lambda}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \tag{28}$$

доказательство которых почти очевидно:

$$g_{k\lambda}\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = g_{k\lambda}g^{i\lambda}\Gamma_{i,\,\alpha\beta} = g^{i}_{k}\Gamma_{i,\,\alpha\beta} = \Gamma_{k,\,\alpha\beta}$$

Далее необходимо отметить свойство симметрии, выражающееся формулами

$$\Gamma_{i,\,\alpha\beta} = \Gamma_{i,\,\beta\alpha}, \qquad \Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\lambda}_{\beta\alpha} \tag{29}$$

непосредственно вытекающими из (22) и (27).

Нетрудно далее выразить производные от составляющих фундаментального тензора через символы Кристоффеля первого рода; а именно легко простым вычислением проверить справедливость следующих формул:

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{\gamma}} = \Gamma_{\alpha,\,\beta\gamma} + \Gamma_{\beta,\,\alpha\gamma} \tag{30}$$

Наконец, легко выразить через символы Кристоффеля $\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}}$, где g — фундаментальный определитель.

В самом деле, дифференцируя определитель (3) § 32 по x^{α} по правилам дифференцирования определителей (сперва необходимо продифференцировать первую строку, оставляя остальные неизменными, затем только вторую строку и т. д., все полученные определители нужно затем сложить), мы получим

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{\alpha}}G_{ik}$$

где G_{ik} — алгебраическое дополнение элемента g_{ik}, равное по формуле (5) § 32 величине gg^{ki}. Итак

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = gg^{ki}\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^{\alpha}}$$

Применим теперь формулу (30):

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\alpha}} = gg^{ki}\left(\Gamma_{i,\,k\alpha} + \Gamma_{k,\,i\alpha}\right) = g\Gamma^{k}_{k\alpha} + g\Gamma^{i}_{i\alpha} = 2g\Gamma^{i}_{i\alpha}$$

Полученную формулу запишем следующим образом:

$$\Gamma^{i}_{i\alpha} = \frac{1}{2}\frac{\partial \lg g}{\partial x^{\alpha}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}} \tag{31}$$

5. Выше было отмечено, что символы Кристоффеля не являются тензорами; интересно в связи с этим выяснить, по каким формулам совершается преобразование символов Кристоффеля при переходе от одной системы координат к другой.

Эти формулы преобразований очень легко получить, если исходить из уравнений (25) геодезических линий. В самом деле, геодезические линии, по самому их определению — быть кратчайшими среди прочих линий, соединяющих две достаточно близкие точки геодезической линии и мало отличающихся от этой линии,— не могут зависеть от системы

координат. Поэтому, преобразовывая уравнения (25) к новой системе координат $\bar{x}^1, \ldots, \bar{x}^n$, мы должны получить те же уравнения (25), но только написанные в новых координатах.

Прежде всего, находим

$$\frac{dx^\lambda}{ds} = \frac{dx^\lambda}{d\bar{x}^i}\frac{d\bar{x}^i}{ds}, \qquad \frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^i}\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} + \frac{d\bar{x}^i}{ds}\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^i}\right)$$

Далее по правилу вычисления производной от сложной функции

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^i}\right) = \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\frac{d\bar{x}^k}{ds}$$

Итак

$$\frac{dx^\alpha}{ds} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{d\bar{x}^i}{ds}, \qquad \frac{dx^\beta}{ds} = \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\frac{d\bar{x}^k}{ds}$$

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^i}\frac{d^2\bar{x}^i}{ds^2} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\frac{d\bar{x}^i}{ds}\frac{d\bar{x}^k}{ds}$$

Подставляя все эти выражения в уравнение (25), найдем

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^r}\frac{d^2\bar{x}^r}{ds^2} + \left(\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)\frac{d\bar{x}^i}{ds}\frac{d\bar{x}^k}{ds} = 0$$

С другой стороны, уравнения геодезических линий в новых координатах имеют вид

$$\frac{d^2\bar{x}^r}{ds^2} + \bar{\Gamma}^r_{ik}\frac{d\bar{x}^i}{ds}\frac{d\bar{x}^k}{ds} = 0$$

Умножая их на $\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^r}$ и сравнивая полученные уравнения с предыдущими, придем к важной формуле

$$\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^r}\bar{\Gamma}^r_{ik} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} + \frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \tag{32}$$

из которой, путем умножения на $\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\lambda}$ и принимая еще во внимание

$$\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\lambda}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^r} = \delta^l_r$$

легко получим формулы

$$\bar{\Gamma}^l_{ik} = \Gamma^\nu_{\alpha\beta}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\nu}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} + \frac{\partial^2 x^\nu}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}\frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^\nu} \tag{33}$$

показывающие, как преобразуются символы Кристоффеля второго рода при переходе от одних координат к другим. Конечно, при переходе от координат $\bar{x}^i$ к координатам x^α получаются совершенно аналогичные формулы преобразования

$$\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} = \bar{\Gamma}^l_{ik}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^l}\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^\alpha}\frac{\partial \bar{x}^k}{\partial x^\beta} + \frac{\partial^2 \bar{x}^l}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^l} \tag{34}$$

Мы видим, что символы Кристоффеля не являются тензорами, потому, что вообще говоря,

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}$$

отличны от нуля; но в начале этого параграфа мы видели, что по той же самой причине величина dA_i не является вектором.

В следующем параграфе мы покажем, как можно использовать нетензорный характер величин $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ с тем, чтобы при их помощи скомпенсировать нетензорный характер величин dA_i. В результате мы получим возможность установить имеющее тензорный характер понятие тензорной производной вектора или тензора.

§ 34. Тензорная производная вектора и тензора

1. Задачей этого параграфа будет установление понятия производной от вектора и тензора, причем мы должны дать такое определение производной, которое имело бы тензорный характер. Допустим прежде всего, что мы имеем в римановом пространстве R_n поле скалярной функции φ, так что φ есть функция от n координат $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Тогда n величин $\partial\varphi/\partial x^i$ будут составляющими ковариантного вектора, ибо при преобразовании координат эти величины преобразуются по формулам

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \tag{1}$$

характерным для ковариантных векторов. Этот вектор является, очевидно, обобщением хорошо нам известного вектора grad φ обычного векторного анализа.

2. Теперь положим, что мы имеем поле ковариантного вектора A_i, так что в каждой точке риманова пространства нам задан вектор его ковариантными составляющими. Возьмем две бесконечно близкие точки пространства: точку M с координатами x^i и точку M' с координатами $x^i + dx^i$ и попробуем сравнить между собой векторы A_i, соответствующие этим двум точкам. В обычном векторном анализе мы поступали очень просто, а именно, мы откладывали оба сравниваемых вектора от одной точки. В римановом пространстве сразу же встречается в этом пункте затруднение. В самом деле, какой вектор в точке M' мы должны считать равным вектору, которого составляющие в точке M равны A_i? Сказать, что это есть вектор, которого составляющие в точке M' равны тоже A_i, мы не можем, потому что тогда для разных систем координат мы получили бы в точке M' разные векторы. В самом деле, по определению ковариантного вектора, его компоненты меняются при преобразовании координат следующим образом:

$$\bar{A}_i = A_\alpha \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} \tag{2}$$

причем если вектор рассматривается в точке M, то и значение производных $\partial x^\alpha/\partial \bar{x}^i$ нужно брать в этой точке; если же вектор рассматривается в точке M', то значения производных, вообще говоря, изменятся. А отсюда видно, что при переносе в точку M' значений величин A_i в точке M мы не получим вектора A_i ибо формулы (2) будут справедливы для точки M и перестанут быть справедливыми для точки M'.

Указанное затруднение имеет место даже в случае эвклидова пространства, если только мы пользуемся криволинейными координатами. Возьмем самый простой случай полярных координат r, θ на эвклидовой плоскости. Пусть точка движется по окружности радиуса R с центром в начале координат с постоянной угловой скоростью ω. Вектор скорости будет иметь в этом случае контравариантные составляющие

$$\frac{dr}{dt} = 0, \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

которые сохраняют постоянную величину, между тем как мы хорошо знаем, что вектор скорости в этом случае все время изменяется по своему направлению. Если же взять вектор, сохраняющий постоянными как свою величину, так и направление, другими словами, если совершать *параллельный перенос вектора*, то его составляющие в полярных координатах будут изменяться, причем не трудно составить формулы для вычисления этих составляющих в любом положении вектора.

В римановом пространстве дело обстоит гораздо сложнее и притом в силу двух обстоятельств. Во-первых, в этом случае мы прежде всего должны обобщить самое понятие параллельного переноса вектора, причем мы проделаем это обобщение сначала аналитически, при помощи формул, и лишь в следующем параграфе укажем на геометрическое истолкование понятия параллельного переноса вектора. Во-вторых, в то время как в эвклидовом пространстве можно совершать параллельный перенос вектора из какой-либо точки пространства в любую другую точку пространства, оказывается, что в римановом пространстве можно говорить только о параллельном переносе вектора из точки M в другую точку N вдоль какой-либо кривой L, подобно тому, как в случае сил, не имеющих потенциала, работа их на перемещении из точки M в точку N должна вычисляться для определенного пути, соединяющего эти точки M и N. Подобно тому, как в этом последнем случае работа силы зависит от пути, так и в случае риманова пространства при параллельном переносе какого-либо вектора из точки M в точку N по различным путям получатся различные значения вектора в точке N. В связи с этим мы ограничимся изучением параллельного переноса из точки M в соседнюю точку M', подобно тому как в механике рассматривают элементарную работу, т. е. работу силы на бесконечно малом перемещении.

3. Рассмотрим ковариантный вектор A_i в римановом пространстве R_n. Составляющие этого вектора получат при переходе из точки M с коор-

динатами x^i в соседнюю точку M' с координатами $x^i + dx^i$ приращения

$$dA_i = \frac{dA_i}{dx^k}\,dx^k$$

характеризующиеся n^2 величинами $\partial A_i/\partial x^k$. Однако эти величины не образуют, как мы сейчас покажем, тензора.

В самом деле, величины A_i при преобразовании координат изменяются по формулам (2). Дифференцируя эти равенства по $\bar{x}^k$, мы получим

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} + A_\alpha \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} \tag{3}$$

причем мы при дифференцировании A_α по $\bar{x}^k$ рассматривали ее, как сложную функцию от $\bar{x}^k$ через посредство $x^1, x^2, \ldots, x^n$. Мы видим, что величины $\partial A_i/\partial x^k$ не имеют тензорного характера потому, что в правую часть формулы (3) вошли вторые производные $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k}$, вообще говоря, отличные от нуля. В случае аффинных ортогональных тензоров x^α являются линейными функциями от $\bar{x}^i$, вторые производные $\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i \partial x^k}$ все обращаются в нуль и никаких затруднений при построении производных от векторов и тензоров не получается.

Но в конце предыдущего параграфа [формула (32)] мы выразили доставляющие нам затруднения вторые производные через символы Кристоффеля

$$\frac{\partial^2 x^\lambda}{\partial \bar{x}^i \partial \bar{x}^k} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^r}\bar{\Gamma}^r_{ik} - \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \tag{4}$$

Заменяя в последнем члене формулы (3) значок суммирования α на λ и внося в эти формулы выражение (4), получим

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^k} - A_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^r}\bar{\Gamma}^r_{ik} = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}$$

В силу формулы (2) имеем

$$A_\lambda \frac{\partial x^\lambda}{\partial \bar{x}^r} = \bar{A}_r$$

и, следовательно, предыдущее равенство принимает вид

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^k} - \bar{A}_r \bar{\Gamma}^r_{ik} = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \tag{5}$$

Но это равенство показывает, что величина

$$\nabla_\beta A_\alpha = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \tag{6}$$

является ковариантным тензором второго ранга.

Этот тензор, который мы будем обозначать символом $\nabla_\beta A_\alpha$, и называется ковариантной производной ковариантного вектора.

4. Определим теперь ковариантную производную контравариантного вектора A^α. Для этого мы введем в рассмотрение произвольный ковариантный вектор B_α и составим выражение

$$\varphi = A^\alpha B_\alpha$$

Будем теперь под $\nabla_\beta\varphi$ понимать ковариантный вектор $\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}$ и потребуем, кроме того, чтобы ковариантное дифференцирование подчинялось правилу дифференцирования произведения

$$\nabla_\beta (A^\alpha B_\alpha) = B_\alpha \nabla_\beta A^\alpha + A^\alpha \nabla_\beta B_\alpha \tag{7}$$

Так как при произвольном векторе B_α выражение

$$B_\alpha \nabla_\beta A^\alpha = \nabla_\beta (A^\alpha B_\alpha) - A^\alpha \nabla_\beta B_\alpha$$

является ковариантным вектором, то в силу теоремы деления тензоров п. 5. § 31 можем заключить, что $\nabla_\beta A^\alpha$ будет смешанным тензором. Для вычисления его используем формулу (6)

$$B_\alpha \nabla_\beta A^\alpha = \frac{\partial (A^\alpha B_\alpha)}{\partial x^\beta} - A^\alpha \left(\frac{\partial B_\alpha}{\partial x^\beta} - B_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} \right) = B_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\alpha B_\lambda \Gamma^\lambda_{\alpha\beta} =$$
$$= B_\alpha \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\lambda B_\alpha \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} = B_\alpha \left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \right)$$

Отсюда, в силу произвольности вектора B_α, легко заключим, что

$$\nabla_\beta A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\beta} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda\beta} \tag{8}$$

Полученная формула и дает выражение ковариантной производной контравариантного вектора.

Тем же самым приемом легко определим ковариантную производную любого тензора. Возьмем в качестве примера тензор третьего ранга $A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}$.

Возьмем три произвольных вектора u^α, v^β, w_γ и составим инвариант

$$\varphi = A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, u^\alpha v^\beta w_\gamma$$

Мы потребуем, как выше, выполнения правила дифференцирования произведения

$$\nabla_\lambda (A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, u^\alpha v^\beta w_\gamma) = \tag{9}$$
$$= u^\alpha v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda A^{\alpha\ \gamma}_{\beta} + A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda u^\alpha + A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, u^\alpha w_\gamma \nabla_\lambda v^\beta + A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, u^\alpha v^\beta \nabla_\lambda w_\gamma$$

Так как при произвольном выборе векторов u^α, v^β, w_γ выражение

$$u^\alpha v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda A^{\alpha\ \gamma}_{\beta} =$$
$$= \nabla_\lambda (A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, u^\alpha v^\beta w_\gamma) - A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda u^\alpha - A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, u^\alpha w_\gamma \nabla_\lambda v^\beta - A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}\, u^\alpha v^\beta \nabla_\lambda w_\gamma$$

является ковариантным вектором, то в силу теоремы деления тензоров § 31 можем заключить, что $\nabla_\lambda A^{\alpha\ \gamma}_{\beta}$ будет тензором четвертого ранга, три раза ковариантным, раз контравариантным. Для вычисления его используем формулу (9), в которую подставим вместо $\nabla_\lambda u^\alpha$, $\nabla_\lambda v^\beta$ и $\nabla_\lambda w_\gamma$

их выражения, получаемые по формулам (6) и (8). Принимая еще во внимание, что

$$\nabla_\lambda (A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} u^\alpha v^\beta w_\gamma) = \frac{\partial}{\partial x^\lambda}(A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} u^\alpha v^\beta w_\gamma) =$$

$$= \frac{\partial A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot}}{\partial x^\lambda} u^\alpha v^\beta w_\gamma + A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\lambda} v^\beta w_\gamma + A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} u^\alpha \frac{\partial v^\beta}{\partial x^\lambda} w_\gamma + A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} u^\alpha v^\beta \frac{\partial w_\gamma}{\partial x^\lambda}$$

после несложных алгебраических действий получим, что

$$u^\alpha v^\beta w_\gamma \nabla_\lambda A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} =$$

$$= \frac{\partial A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot}}{\partial x^\lambda} u^\alpha v^\beta w_\gamma - A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} v^\beta w_\gamma u^\mu \Gamma^\alpha_{\lambda\mu} - A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} u^\alpha w_\gamma v^\mu \Gamma^\beta_{\lambda\mu} + A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} u^\alpha v^\beta w_\mu \Gamma^\mu_{\gamma\lambda}$$

Переставляя в правой части этого равенства местами индексы μ и α во втором члене, μ и β в третьем, μ и γ в четвертом и сокращая после этого на $u^\alpha v^\beta w_\gamma$, что можно сделать в силу произвольности векторов u^α, v^β, w_γ, получим окончательную формулу

$$\nabla_\lambda A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} = \frac{\partial A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot}}{\partial x^\lambda} - A^{\cdot\cdot\gamma}_{\mu\beta\cdot} \Gamma^\mu_{\alpha\lambda} - A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\mu\cdot} \Gamma^\mu_{\beta\lambda} + A^{\cdot\cdot\mu}_{\alpha\beta\cdot} \Gamma^\gamma_{\mu\lambda} \qquad (10)$$

Таким образом, при составлении ковариантной производной тензора из обыкновенной производной нужно вычесть столько дополнительных членов, сколько тензор имеет нижних значков, и прибавить столько дополнительных членов, сколько тензор имеет верхних значков. Каждый дополнительный член представляет собою произведение рассматриваемого тензора, в котором один из значков заменен переменным значком суммирования μ на символ Кристоффеля второго рода, в котором значок дифференцирования стоит внизу.

5. Ввиду важности понятия тензорной производной мы приведем еще один вывод ковариантной производной ковариантного вектора A_i.

Мы знаем, что бесконечно малый вектор dx^i является контравариантным вектором, а величина ds является инвариантом. Поэтому величины dx^i/ds образуют контравариантный вектор. Произведение

$$\varphi = A_i \frac{dx^i}{ds}$$

будет поэтому инвариантом.

Проведем через рассматриваемую точку M геодезическую линию в произвольном направлении и пусть dx^i означают дифференциалы координат при смещении точки вдоль этой геодезической линии. Обозначая через $d\varphi$ дифференциал функции φ при смещении вдоль геодезической линии, мы можем, очевидно, утверждать, что выражение $d\varphi/ds$ тоже будет инвариантом, ибо геодезические линии имеют абсолютное значение, независимое от специального выбора координат. Но

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{dA_i}{ds}\frac{dx^i}{ds} + A_i \frac{d^2x^i}{ds^2} = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\frac{dx^k}{ds}\frac{dx^i}{ds} + A_\lambda \frac{d^2x^\lambda}{ds^2}$$

С другой стороны, на всякой геодезической линии по уравнению (25) предыдущего параграфа

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} = -\Gamma^\lambda_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds}$$

Поэтому

$$\frac{d\varphi}{ds} = \left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_\lambda\Gamma^\lambda_{ik}\right)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} \tag{11}$$

Левая часть этого равенства есть инвариант, следовательно, и правая часть является инвариантом. Но за dx^i можно взять произвольный вектор, ибо мы можем брать геодезическую линию, проходящую через точку M в любом направлении. А тогда из теоремы п. 5 § 31, формула (10) вытекает, что величины

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_\lambda\Gamma^\lambda_{ik}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - A_\lambda\Gamma^\lambda_{ki}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right) - A_\lambda\Gamma^\lambda_{ik} \tag{12}$$

образуют ковариантный тензор второго ранга.

С другой стороны, нетрудно показать, что величины

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - \frac{\partial A_k}{\partial x^i}\right) \tag{13}$$

тоже образуют ковариантный тензор второго ранга. В самом деле, меняя в формуле (3)

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} + A_\alpha\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^k}$$

индексы i и k местами, получим

$$\frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^i} + A_\alpha\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^k} = \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k}\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i} + A_\alpha\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial \bar{x}^i\,\partial \bar{x}^k}$$

Вычитая эту формулу из предыдущей, найдем

$$\frac{\partial \bar{A}_i}{\partial \bar{x}^k} - \frac{\partial \bar{A}_k}{\partial \bar{x}^i} = \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial A_\beta}{\partial x^\alpha}\right)\frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^k} \tag{14}$$

а это соотношение выражает как раз тензорный характер выражения (13).

Складывая тензоры (12) и (13), мы получим новый тензор

$$\nabla_k A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_\lambda\Gamma^\lambda_{ik} \tag{15}$$

главной частью которого являются величины $\partial A_i/\partial x^k$ и который можно назвать ковариантной производной ковариантного вектора. Таким образом, мы вновь пришли к выражениям (6), но только иным путем.

6. Рассмотрим теперь правила действий с ковариантными производными. При этом может быть полезно еще раз напомнить те действия, которыми мы пользовались до сих пор.

Прежде всего под $\nabla\varphi$, где φ есть скалярная функция, мы условились понимать ковариантный вектор:

$$\nabla_\alpha \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x^\alpha} \tag{16}$$

Далее мы имеем основное определение ковариантной производной от тензора, которое для случая тензоров третьего ранга выражается формулой (10):

$$\nabla_\lambda A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} = \frac{\partial A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot}}{\partial x^\lambda} - A^{\cdot\cdot\gamma}_{\mu\beta\cdot}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda} - A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\mu\cdot}\Gamma^\mu_{\beta\lambda} + A^{\cdot\cdot\mu}_{\alpha\beta\cdot}\Gamma^\gamma_{\mu\lambda} \tag{17}$$

Наконец, для случая, когда произведение тензора на несколько векторов дает скаляр, мы имели правило дифференцирования такого произведения, выражающееся формулами вида (9).

Теперь мы установим правило дифференцирования произведения тензоров в самом общем виде. А именно покажем, что *дифференцирование произведения тензоров совершается по тем же правилам, что и в обыкновенном анализе.*

Как всегда, доказательство будем проводить на тензорах частного вида.

Покажем, например, что ковариантная производная от произведения $A_\alpha B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}$ равна

$$\nabla_\lambda (A_\alpha B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}) = B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\nabla_\lambda A_\alpha + A_\alpha \nabla_\lambda B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot} \tag{18}$$

Применяем формулу (17)

$$\nabla_\lambda (A_\alpha B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}) = \frac{\partial (A_\alpha B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot})}{\partial x^\lambda} - A_\mu B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda} - A_\alpha B^{\cdot\gamma}_{\mu\cdot}\Gamma^\mu_{\beta\lambda} + A_\alpha B^{\cdot\mu}_{\beta\cdot}\Gamma^\gamma_{\mu\lambda} =$$

$$= \left(\frac{\partial A_\alpha}{\partial x^\lambda} - A_\mu \Gamma^\mu_{\alpha\lambda}\right) B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot} + A_\alpha \left(\frac{\partial B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}}{\partial x^\lambda} - B^{\cdot\gamma}_{\mu\cdot}\Gamma^\mu_{\beta\lambda} + B^{\cdot\mu}_{\beta\cdot}\Gamma^\gamma_{\mu\lambda}\right) =$$

$$= B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}\nabla_\lambda A_\alpha + A_\alpha \nabla_\lambda B^{\cdot\gamma}_{\beta\cdot}$$

Аналогичное доказательство применяется и в более сложных случаях. Докажем далее, что *производная тензора, сокращенного по нескольким значкам, может быть получена сокращением по этим значкам производной исходного тензора.* Доказательство проведем на следующем частном случае; пусть

$$B^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot\cdot\lambda} = \nabla_\lambda A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} \tag{19}$$

Тогда $B^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot\cdot\lambda}$ дается формулой (17); положим в этой формуле $\gamma = \beta$, тогда третий и четвертый члены в правой части этой формулы сократятся, ибо $A^{\cdot\cdot\beta}_{\alpha\mu\cdot}\Gamma^\mu_{\beta\lambda}$ и $A^{\cdot\cdot\mu}_{\alpha\beta\cdot}\Gamma^\beta_{\mu\lambda}$ отличаются только значками суммирования μ и β, которые можно поменять местами. Итак

$$B^{\cdot\cdot\beta}_{\alpha\beta\cdot\cdot\lambda} = \frac{\partial A^{\cdot\cdot\beta}_{\alpha\beta\cdot}}{\partial x^\lambda} - A^{\cdot\cdot\beta}_{\mu\beta\cdot}\Gamma^\mu_{\alpha\lambda} = \nabla_\lambda A^{\cdot\cdot\beta}_{\alpha\beta\cdot} \tag{20}$$

что и требовалось доказать.

Применяя только что доказанную теорему к произведению нескольких тензоров, сокращенному по некоторым индексам, получим правило дифференцирования, обобщающее известное уже нам правило, выражаемое формулой (9). Так, например, мы имеем формулу

$$\nabla_\lambda (A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} B^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma}) = B^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma} \nabla_\lambda A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} + A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} \nabla_\lambda B^{\beta\cdot}_{\cdot\gamma} \tag{21}$$

7. Последнее правило, которое мы рассмотрим, касается дифференцирования фундаментальных тензоров. А именно мы покажем, что *ковариантные производные всех трех фундаментальных тензоров равны нулю.*

Прежде всего рассмотрим тензор g_{ik}. Применение основной формулы (17) дает

$$\nabla_\lambda g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\lambda} - g_{\mu k}\Gamma^\mu_{i\lambda} - g_{i\mu}\Gamma^\mu_{k\lambda}$$

и в силу формул (28) и (30) предыдущего параграфа

$$\nabla_\lambda g_{ik} = \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^\lambda} - \Gamma_{k,\,i\lambda} - \Gamma_{i,\,k\lambda} = 0 \tag{22}$$

Точно так же, помня, что

$$g^k_i = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad i = k \\ 0 & \text{при} \quad i \neq k \end{cases}$$

найдем

$$\nabla_\lambda g^k_i = \frac{\partial g^k_i}{\partial x^\lambda} - g^k_\mu \Gamma^\mu_{i\lambda} + g^\mu_i \Gamma^k_{\mu\lambda} = -\Gamma^k_{i\lambda} + \Gamma^k_{i\lambda} = 0 \tag{23}$$

Наконец, применяя к тензору

$$g^l_i = g_{ik} g^{kl} \tag{24}$$

правило дифференцирования произведения, найдем

$$\nabla_\lambda g^l_i = g^{kl} \nabla_\lambda g_{ik} + g_{ik} \nabla_\lambda g^{kl}$$

Отсюда, в силу (22) и (23),

$$g_{ik} \nabla_\lambda g^{kl} = 0$$

Умножая это равенство на g^{ir} и принимая во внимание (24), получим

$$g^r_k \nabla_\lambda g^{kl} = \nabla_\lambda g^{rl} = 0$$

Итак, мы получили основные равенства

$$\nabla_\lambda g_{ik} = 0, \quad \nabla_\lambda g^k_i = 0, \quad \nabla_\lambda g^{ik} = 0 \tag{25}$$

выражающие, что *при тензорном дифференцировании фундаментальные тензоры ведут себя как постоянные величины.*

8. Введем теперь понятие контравариантной производной от вектора или тензора, определив ее формулами вида

$$\nabla^\mu A_i = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda A_i \tag{26}$$

$$\nabla^\mu A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} = g^{\mu\lambda} \nabla_\lambda A^{\cdot\cdot\gamma}_{\alpha\beta\cdot} \tag{27}$$

таким образом, для получения контравариантной производной тензора надо сначала образовать ковариантную производную этого тензора и затем поднять тот значок λ, который соответствует операции дифференцирования.

Принимая во внимание доказанное в предыдущем пункте свойство фундаментальных тензоров и только что данное определение контравариантной производной, мы можем без всякого труда написать составляющие различного рода производной от какого-либо тензора. Так, например, у $\nabla_\lambda A_\alpha^{\cdot\beta}$ мы имеем следующие 8 типов составляющих:

$$\nabla_\lambda A_{\alpha\beta},\quad \nabla_\lambda A_{\cdot\alpha}^{\beta\cdot},\quad \nabla_\lambda A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot},\quad \nabla_\lambda A^{\alpha\beta},\quad \nabla^\lambda A_{\alpha\beta},\quad \nabla^\lambda A_{\cdot\beta}^{\alpha\cdot},\quad \nabla^\lambda A_{\beta\cdot}^{\cdot\alpha},\quad \nabla^\lambda A^{\alpha\beta}$$

В самом деле, докажем, например, что

$$\nabla^\lambda A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = g^{\lambda\mu} g^{\beta\gamma} \nabla_\mu A_{\alpha\gamma}$$

Действительно, в силу формул (25),

$$\nabla_\mu A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = \nabla_\mu \left(A_{\alpha\gamma} g^{\beta\gamma}\right) = g^{\beta\gamma} \nabla_\mu A_{\alpha\gamma}$$

а в силу формулы (27)

$$\nabla^\lambda A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = g^{\lambda\mu} \nabla_\mu A_{\alpha\cdot}^{\cdot\beta} = g^{\lambda\mu} g^{\beta\gamma} \nabla_\mu A_{\alpha\gamma} \tag{28}$$

§ 35. Параллельный перенос вектора

1. Рассмотрим теперь затронутый в предыдущем параграфе вопрос о параллельном переносе вектора в римановом пространстве и о геометрическом истолковании тензорного дифференцирования.

С этой целью нам придется вернуться к изложенному в начале этой главы представлению о римановом пространстве n измерений, как о подпространстве в эвклидовом пространстве равного или большего числа измерений m. При этом предположим, что мы можем ввести в этом эвклидовом пространстве прямолинейные прямоугольные оси координат $y_1, y_2, \ldots, y_m$ таким образом, что элемент длины будет выражаться формулой

$$ds^2 = \sum_{k=1}^{m} dy_k^2 \tag{1}$$

Если в римановом пространстве координатами служат $x^1, x^2, \ldots, x^n$, то для точек этого пространства $y_1, \ldots, y_m$ будут определенными функциями от $x^1, \ldots, x^n$

$$y_\alpha = y_\alpha (x^1, \ldots, x^n) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

Подставляя эти функции в (1), мы получим фундаментальную форму для риманова пространства

$$ds^2 = g_{ik} (x^1, \ldots, x^n)\, dx^i\, dx^k \tag{3}$$

где

$$g_{ik} (x^1, \ldots, x^n) = \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} \tag{4}$$

Возьмем теперь в пространстве Римана контравариантный вектор A в некоторой точке M. Проведем через эту точку геодезическую линию в направлении вектора A^i, понимая под этим, что в точке M величины dx^i/ds, где dx^i суть бесконечно-малые приращения координат при перемещении вдоль геодезической линии, пропорциональны величинам A^i, так что

$$A^i = a\frac{dx^i}{ds} \tag{5}$$

Вектор dx^i/ds мы назовем единичным касательным вектором к геодезической линии. Для него мы имеем, согласно (3)

$$g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 1 \tag{6}$$

Величину же a мы назовем длиной вектора A^i; для нее мы, в силу предыдущего равенства, будем иметь выражение

$$a^2 = g_{ik}A^iA^k \tag{7}$$

Построим теперь в эвклидовом m-мерном пространстве в точке M вектора a, длина которого равна a и который имеет направление касательной к выше рассмотренной геодезической линии в точке M. Проекции этого вектора на оси координат будут, очевидно, равны числам

$$a_\alpha = a\frac{dy_\alpha}{ds} \qquad (\alpha = 1, \ldots, m) \tag{8}$$

где dy_α суть приращения координат y_α, соответствующие приращениям dx^i координат x^i. Следовательно,

$$dy_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}dx^i$$

и, значит,

$$a_\alpha = a\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{dx^i}{ds}$$

или окончательно

$$a_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}A^i \tag{9}$$

Итак, всякий контравариантный вектор A^i в пространстве Римана R_n может быть представлен геометрически в пространстве Эвклидова E_m, в которое вложено пространство Римана, вектором a, имеющим ту же самую длину, что и вектор A_i, и направленным по касательной геодезической линии, проходящей через точку M в направлении вектора A^i.

Весьма важно отметить, что при $m > n$ всякому вектору A^i соответствует свой вектор a, но обратное не всегда имеет место. Не для всякого вектора a найдется соответствующий вектор A^i. Это вполне понятно аналитически, ибо вектор a определяется m числами, в то время как вектор A задается n числами, и ясно, что систему (9) m уравнений с $n < m$ неизвестными $A^1, \ldots, A^n$ не всегда можно решить относительно этих неизвестных. Это так же ясно и геометрически в простейшем случае $n = 2$, $m = 3$. когда мы имеем дело с поверхностью в пространстве. В этом

случае очевидно, что те векторы a в пространстве E_3, которые соответствуют векторам A^i в пространстве Римана R_2, лежат в касательной плоскости к поверхности в точке M. Всякому же вектору a, выходящему из этой плоскости, очевидно, уже не может соответствовать никакой вектор A^i. По аналогии мы можем говорить и в общем случае об эвклидовом подпространстве T_n, касающемся пространства R_n в точке M, понимая под T_n геометрическое место всех прямых в пространстве E_m, проходящих через точку M и касающихся в этой точке какой-либо из кривых, целиком принадлежащих R_n.

2. Теперь мы дадим, следуя итальянскому ученому Т. Леви-Чивита, геометрическое определение параллельного переноса вектора, причем сначала для ясности рассмотрим случай пространства R_2, вложенного в E_3, иными словами, рассмотрим тот случай, когда в трехмерном пространстве рассматривается поверхность S.

Возьмем на этой поверхности S две бесконечно-близкие точки M и M' и рассмотрим в точке M контравариантный вектор A^i. Последний может быть представлен в пространстве вектором a, касательным к поверхности S в точке M. Перенесем теперь вектор a параллельно самому себе в точку M'. Ясно, что, вообще говоря, он не будет лежать в касательной плоскости к поверхности S в точке M' и, следовательно, ему не будет соответствовать никакой контравариантный вектор в пространстве R_2.

Основная идея Леви-Чивита заключается в том, что он, *перенеся вектор* a *в точку* M' *параллельно самому себе из точки* M, *проектирует его затем на касательную плоскость к поверхности* S *в точке* M'. В результате получается вектор a', лежащий уже в касательной плоскости к поверхности S в точке M', а поэтому можно отыскать такой контравариантный вектор A'^i в точке M', который геометрически представляется в пространстве вектором a'. По определению, *результатом параллельного перенесения вектора* A^i *из точки* M *в точку* M' *является вектор* A'^i. Таким образом, вектор A^i в точке M и вектор A'^i в бесконечно-близкой точке M' риманова пространства R_2 можно условиться считать равными векторами.

Совершенно аналогичное определение правила параллельного переноса вектора можно дать и для случая любого риманова пространства R_n. Пусть в точке M задан контравариантный вектор A^i. Рассмотрим бесконечно-близкую точку пространства M' и построим в этой точке вектор A'^i следующим образом. Пусть E_m — то m-мерное эвклидово пространство ($m \geqslant n$), в которое можно вложить R_n; построим в этом пространстве в точке M вектор a с составляющими a_α, определяющимися по формулам (9); этот вектор является геометрическим изображением вектора A^i; перенесем затем вектор a параллельно самому себе в точку M'. Иными словами, рассмотрим тот же самый вектор a, с теми же составляющими, но только приложенный к точке M'; затем спроектируем этот вектор на касательное эвклидово подпространство T_n, которое лежит в E_m и касается

R_n в точке M', полученный вектор обозначим через a′, а его составляющие через $a_\alpha{}'$. По формулам (9) мы можем по этим $a_\alpha{}'$ определить соответствующие им величины A'^i, причем необходимо, конечно, принимать в формулах (9) для $\partial y_\alpha/\partial x^i$ значения этих функций в точке M'.

Контравариантный вектор с составляющими A^i в точке M мы будем считать равным вектору с составляющими A'^i в бесконечно-близкой точке M' и будем говорить, что вектор с составляющими A'^i в точке M' получается из вектора A^i в точке M путем параллельного переноса в пространстве R_n.

3. Перейдем теперь к вычислению составляющих вентора A'^i через составляющие вектора A^i и через составляющие dx^i вентора бесконечно-малого перемещения из точки M в точку M'. В основу вычисления мы положим следующий, геометрически очевидный для случая R_2 (фиг. 94) факт: среди всех векторов $\mathrm{a}' = \overline{M'N'}$, касающихся пространства R_n, тот вектор является проекцией вектора $\mathrm{a} = \overline{M'N}$, для которого расстояние $N'N$ является наименьшим. Но вектор $\overline{NN'}$ имеет в пространстве E_m своими составляющими величины

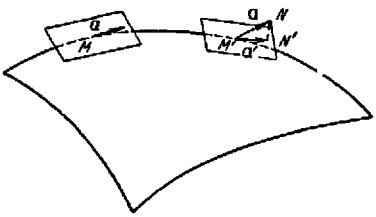
$$a_\alpha{}' - a_\alpha = \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\right)' A'^i - \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} A^i \qquad (10)$$

где штрих указывает на то, что значение рассматриваемой величины берется в точке M'. Введем теперь обозначение

$$\delta A^i = A'^i - A^i \qquad (11)$$

и заметим, что

$$\left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\right)' = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i} + \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial y^i \partial x^k}\, dx^k$$



Фиг. 94

Тогда, ограничиваясь бесконечно-малыми величинами первого порядка. будем из (10) иметь, что

$$a_\alpha{}' - a_\alpha = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\,\delta A^i + \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^i\, \partial x^k}\, A^i dx^k$$

и, следовательно,

$$(\mathrm{a}' - \mathrm{a})^2 = \sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\,\delta A^i + \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^i\, \partial x^k}\, A^i dx^k\right)^2 \qquad (12)$$

Рассматривая в этом равенстве δA^i как независимые переменные, определим их таким образом, чтобы сумма (12) была минимумом. Для этого, согласно правилам дифференциального исчисления, нужно приравнять нулю производные этой суммы по всем величинам δA^r $(r = 1, \ldots, n)$.

В результате получим n равенств

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \left(\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\,\delta A^i + \frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^i\, \partial x^k}\, A^i dx^k\right) \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r} = 0 \qquad (r = 1, 2, \ldots, n)$$

Итак, при параллельном переносе вектора A^i его составляющие получают приращения δA^i, определяющиеся из следующих равенств:

$$\delta A^i \sum_{\alpha=0}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r} + A^i dx^k \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r}\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^i \partial x^k} = 0 \tag{13}$$

Но согласно формулам (4) мы имеем, что

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r} = g_{ir} \tag{14}$$

Нетрудно далее показать, что

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r}\frac{\partial y^2_\alpha}{\partial x^i \partial x^k} = \Gamma_{r,\,ik} \tag{15}$$

в самом деле, мы имеем, согласно определению символов Кристоффеля [формула (22) § 33] и в силу формул (14):

$$\Gamma_{r,\,ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{ir}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^r}\right) = \frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{m}\left\{\left(\frac{\partial^2 y^\alpha}{\partial x^i \partial x^k}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r} + \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^r \partial x^k}\right) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^k \partial x^i}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r} + \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k}\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^r \partial x^i}\right) - \left(\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^i \partial x^r}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} + \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^k \partial x^r}\right)\right\} =$$

$$= \sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^r}\frac{\partial^2 y_\alpha}{\partial x^i \partial x^k}$$

В результате формулы (13) принимают вид

$$g_{ir}\delta A^i + \Gamma_{r,\,ik} A^i dx^k = 0$$

Умножая их на $g^{r\lambda}$ и пользуясь тем, что

$$g_{ir}\, g^{r\lambda} = g_i^\lambda, \qquad g^{r\lambda}\Gamma_{r,\,ik} = \Gamma^\lambda_{ik}$$

получим окончательные выражения для разности значений δA^i контравариантных составляющих двух одинаковых векторов, приложенных в двух бесконечно-близких точках

$$\delta A^\lambda + \Gamma^\lambda_{ik} A^i dx^k = 0 \tag{16}$$

4. Весьма замечательным является то обстоятельство, что согласно только что полученным формулам приращения δA^λ могут быть выражены исключительно через величины, относящиеся к нашему риманову пространству R_m. Геометрически это означает следующее: одно и то же риманово пространство может быть вложено в эвклидово пространство разными способами и можно было бояться, что данное нами выше определение параллельного переноса вектора может привести к различным результатам, смотря по тому, каким образом связано данное риманово про-

странство R_n с эвклидовым пространством E_m. Но как видно из (16), в результате параллельного переноса вектора в бесконечно близкую точку риманова пространства получается всегда один и тот же вектор, независимо от того, каким образом было вложено риманово пространство в эвклидово. Иными словами: процесс параллельного переноса вектора в бесконечно-близкую точку есть внутреннее свойство риманова пространства.

В связи с этим интересно отметить, что, вообще говоря, невозможно определить параллельный перенос вектора из одной точки M риманова пространства R_n в другую точку P, отстоящую от первой на конечном расстоянии, при помощи того же самого способа, которым мы пользовались выше, а именно при помощи вложения пространства R_n в эвклидово пространство E_m. В самом деле, легко показать, что в этом случае при различном выборе пространств E_m у нас будут получаться в результате описанной выше операции различные векторы в точке P и, следовательно, в этом случае описанная выше операция не дает нам внутреннего свойства риманова пространства и, следовательно, не может быть взята за определение параллельного переноса вектора из одной точки в другую. Проиллюстрируем на простом примере это явление. Возьмем круговой цилиндр радиуса 1 с осью, идущей по оси Oz в эвклидовом пространстве трех измерений. Будем определять положение точки в пространстве цилиндрическими координатами ρ, φ, z. Тогда квадрат элемента длины в пространстве имеет выражение

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2$$

Для кругового цилиндра радиуса 1 с осью Oz имеем $\rho = 1$ и для квадрата элемента длины на поверхности цилиндра мы получаем выражение

$$ds^2 = d\varphi^2 + dz^2$$

Рассмотрим с другой стороны в том же эвклидовом пространстве плоскость Oxy. Для нее квадрат элемента длины имеет выражение

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

Сравнивая это выражение с предыдущим, мы видим, что с точностью до обозначений поверхность кругового цилиндра и плоскость имеют совершенно одинаковые выражения для квадрата элемента длины, т. е. представляют собою совершенно одинаковые римановы пространства R_2. Между тем ясно, что, если мы возьмем вектор, касательный к поверхности цилиндра и перпендикулярный к оси Oz, и перенесем его в трехмерном пространстве параллельно самому себе, то в некоторых точках цилиндра он будет перпендикулярен к поверхности цилиндра и, следовательно, его проекция на касательную плоскость будет равна нулю. В плоскости же Oxy каждый вектор при параллельном переносе его сохраняет свою величину. Таким образом, данный выше метод параллель-

ного переноса вектора при помощи эвклидова пространства E_m, объемлющего данное пространство R_n, не годится для случая переноса из одной точки в другую, отстоящую от первой на конечном расстоянии.

Оказывается, что вообще нельзя даже и говорить о параллельном переносе вектора в римановом пространстве R_n из одной точки M в другую P. Можно говорить о параллельном переносе вектора из точки M в точку P вдоль какой-нибудь определенной линии L, соединяющей эти точки, подобно тому, как работу силы на перемещении точки из одного положения в другое можно вычислять, вообще говоря, только по какому-либо пути, соединяющему эти точки, так как для разных путей эта работа оказывается различной.

Вычисление результата параллельного переноса вектора по пути L из точки M в точку P мы должны производить следующим образом: мы должны путь переноса разбить на малые участки, к каждому из которых мы можем уже применить формулы (16); говоря точнее, мы должны проинтегрировать уравнения (16) вдоль пути L, исходя из данных значений вектора A^i в точке M; в результате мы получим какие-то значения составляющих этого вектора в точке P. Подчеркнем еще раз, что эти значения, вообще говоря, зависят от выбора пути L, соединяющего точки M и P.

5. Теперь мы можем дать геометрическое истолкование тензорного дифференцирования, связав его с изложенным в предыдущем пункте понятием параллельного переноса вектора.

Рассмотрим в римановом пространстве R_n контравариантный вектор A^i и пусть точка M с координатами x^i и точка M' с координатами $x^i + dx^i$ две бесконечно-близкие точки этого пространства. Значения составляющих вектора A^i в точке M' обозначим через $A^i + dA^i$, где, очевидно,

$$dA^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} dx^k \tag{17}$$

Поступим теперь для определения производной вектора A^i так же как поступали в векторном анализе, а именно, прежде всего совершим параллельный перенос вектора A^i из точки M в точку M'; в результате мы получим согласно формулам (16) вектор с составляющими

$$A^i + \delta A^i = A^i - \Gamma^i_{\lambda k} A^\lambda dx^k$$

Образуем теперь разность между значением вектора A^i в точке M' и вектором $A^i + \delta A^i$ в точке M' (последний вектор мы считаем равным вектору A^i в точке M); в результате получим вектор

$$(A^i + dA^i) - (A^i + \delta A^i) = dA^i - \delta A^i = \left(\frac{\partial A^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{\lambda k} A^\lambda\right) dx^k \tag{18}$$

который можно назвать геометрическим приращением вектора A^i.

Так как величины dx^k образуют произвольный бесконечно-малый вектор, то величины

$$\nabla_k A^i = \frac{\partial A^i}{\partial x^k} + A^\lambda \Gamma^i_{\lambda k} \tag{19}$$

являются составляющими смешанного тензора, который, очевидно, не отличается от ковариантной производной контравариантного вектора.

Итак, геометрическое значение ковариантной производной контравариантного вектора состоит в том, что через нее непосредственно выражается геометрическое приращение вектора A^i при переходе из точки $M(x^i)$ в бесконечно-близкую точку $M'(x^i + dx^i)$ по формулам

$$dA^i - \delta A^i = \nabla_k A^i \, dx^k \tag{20}$$

Нетрудно теперь дать формулы для параллельного переноса ковариантного вектора A_i. В самом деле, мы можем рассмотреть поле такого вектора A^i, для которого в точке M для любого направления окажется $dA^i = \delta A^i$; но тогда из (20) ясно, что для такого вектора в точке M

$$\nabla_k A^i = 0$$

а следовательно, в силу тензорного характера этого выражения и

$$\nabla_k A_i = 0$$

т. е. по формулам (6) предыдущего параграфа

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} - A_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} = 0$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k - A_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} \, dx^k = dA_i - A_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} \, dx^k = 0$$

заменяя в этом выражении dA_i на δA_i, мы получим требуемые выражения для изменения ковариантных составляющих вектора при его параллельном переносе

$$\delta A_i - A_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} dx^k = 0 \tag{21}$$

6. Укажем основные свойства параллельного переноса векторов.

Скалярное произведение двух векторов A^i и B^i не меняется при их параллельном переносе. В самом деле, мы видели в § 32, что скалярное произведение двух векторов A^i и B^i надо определять как

$$A^i B_i = A_i B^i = g_{ik} A^i B^k = g^{ik} A_i B_k$$

Но тогда, согласно формулам (16) и (21), мы будем иметь

$$\delta (A^i B_i) = B_i \delta A^i + A^i \delta B_i = - B_i A^\lambda \Gamma^i_{\lambda k} dx^k + A^i B_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} dx^k =$$
$$= - B_i A^\lambda \Gamma^i_{\lambda k} \, dx^k + A^\lambda B_i \Gamma^i_{\lambda k} \, dx^k = 0$$

что и доказывает наше утверждение.

Беря в частности вектор B^i равным вектору A^i и замечая, что

$$A_iA^i = g_{ik}A^iA^k = g^{ik}A_iA_k$$

определяет квадрат длины вектора A^i, мы приходим к выводу, что *длина каждого вектора при его параллельном переносе остается неизменной*. Наконец, вспоминая, что по формуле (32) § 32 угол ϑ между двумя векторами A^i и B^i определяется формулой

$$\cos\vartheta = \frac{A^iB_i}{\sqrt{A^iA_i}\sqrt{B^iB_i}}$$

нетрудно заключить, что *угол между двумя векторами при одновременном параллельном переносе этих векторов остается неизменным*.

Рассмотрим еще, что происходит при параллельном переносе вектора вдоль геодезической линии. Пусть через точку M проходит геодезическая линия L. Обозначим через $\xi^i = dx^i/ds$ вектор, касательный к этой линии; длина этого вектора равна, очевидно, единице, ибо

$$g_{ik}\xi^i\xi^k = g_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 1$$

Основное уравнение геодезических линий § 33 (25)

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2} + \Gamma^\lambda_{ik}\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

мы можем теперь переписать в виде

$$d\xi^\lambda + \Gamma^\lambda_{ik}\xi^i\,dx^k = 0$$

и, сравнивая его с уравнением (16), примененным к вектору ξ^i,

$$\delta\xi^\lambda + \Gamma^\lambda_{ik}\xi^i dx^k = 0$$

мы можем заключить, что при параллельном переносе вдоль геодезической линии $\delta\xi^\lambda = d\xi^\lambda$. Иными словами, при параллельном переносе *вдоль геодезической линии L из одной точки M в другую точку P единичный вектор, касающийся линии L в точке M, переходит в единичный вектор, касающийся той же самой геодезической линии в точке P*.

7. В заключение настоящего параграфа сделаем одно общее замечание. При построении тензорных производных основную роль играли символы Кристоффеля $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$. Можно поэтому было бы исходить, не вводя в рассмотрение основную форму $ds^2 = g_{ik}\,dx^i\,dx^k$, прямо из определения тензорных производных формулами (6) предыдущего параграфа, понимая в этих формулах под $\Gamma^\lambda_{\alpha\beta}$ величины, подчиненные некоторым требованиям весьма общего характера. В результате такого построения теории получаются пространства гораздо более общего типа, чем римановы. Мы ограничимся этим кратким указанием, причем попутно отметим, что римановым пространством называют обычно такое, в ко-

тором задана основная форма ds^2 и в котором операция тензорного дифференцирования определена так, как мы это проделали выше, т. е. с помощью формул (6) и (8) предыдущего параграфа, в которых $\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta}$ суть символы Кристоффеля второго рода, определяющиеся через фундаментальный тензор g_{ik} при помощи формул (22) и (24) § 33.

§ 36. Некоторые применения

1. Установленное нами в предыдущих параграфах понятие тензорной производной является могущественным средством для преобразования векторных выражений к любым криволинейным координатам.

Дело в том, что данное нами определение тензорной производной годится для любой системы координат, а с другой стороны, имеет тензорный характер.

Поэтому, взяв какую-либо векторную операцию и выразив ее через тензорные производные, мы получаем выражение, имеющее тензорный характер и потому пригодное для вычисления в любой системе координат. Мы применим эту богатую по своему содержанию идею к целому ряду частных случаев, причем для определенности рассмотрим наиболее важный с рассматриваемой точки зрения случай криволинейных координат в трехмерном эвклидовом пространстве; этот случай был нами с другой точки зрения рассмотрен в § 18.

2. Рассмотрим трехмерное эвклидово пространство и в нем прямолинейные прямоугольные оси координат $O\,y_1\,y_2\,y_3$. Введем далее, как в § 18, криволинейные координаты q_1, q_2, q_3, которые мы теперь будем обозначать, как обычно, через x^1, x^2, x^3. Тогда y_1, y_2, y_3 будут функциями от x^1, x^2, x^3 и обратно

$$y_\alpha = y_\alpha(x^1, x^2, x^3), \qquad x^i = x^i(y_1, y_2, y_3) \tag{1}$$

Расстояние между двумя бесконечно-близкими точками пространства будет выражаться в координатах y_1, y_2, y_3 формулой

$$ds^2 = dy_1^2 + dy_2^2 + dy_3^2 \tag{2}$$

в координатах же x^1, x^2, x^3 формулой

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k \tag{3}$$

где, как обычно, по каждой паре одинаковых значков производится суммирование в пределах от 1 до 3 и где, согласно общей теории,

$$g_{ik}(x^1, x^2, x^3) = \frac{\partial y_\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y_\alpha}{\partial x^k} \tag{4}$$

причем в последней формуле опять-таки подразумевается суммирование по α. Зная g_{ik}, по формуле (5) § 32 определим составляющие g^{ik} контравариантного фундаментального тензора.

В случае криволинейных ортогональных координат, обозначая, как в § 18, через H_i коэффициенты Ламэ

$$H_i^2 = \left(\frac{\partial y_1}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_2}{\partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y_3}{\partial x^i}\right)^2 \tag{5}$$

будем иметь

$$g_{ii} = H_i^2, \quad g = H_1^2 H_2^2 H_3^2, \quad g^{ii} = \frac{1}{H_i^2}, \quad g_{ik} = g^{ik} = 0 \quad \text{при } i \neq k \tag{6}$$

Мы уже выясняли в § 32, что если обозначить ортогональные проекции вектора a, приложенного к точке M, на оси криволинейных координат, через a_{x^1}, a_{x^2}, a_{x^3} и назвать их физическими составляющими вектора, то между контравариантными составляющими вектора a^i, его ковариантными составляющими a_i и физическими составляющими a_{x^i} имеют место соотношения

$$a_{x^i} = H_i a^i = \frac{1}{H_i} a_i \tag{7}$$

3. Перейдем теперь к рассмотрению различных векторных операций. Начнем с простейшей из них: градиента скалярной функции f. В декартовых координатах этот вектор имеет составляющие

$$\frac{\partial f}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial y_3}$$

Но мы знаем, что вектор с составляющими $\partial f/\partial x^i$ есть ковариантный вектор, причем ясно, что составляющие этого вектора в системе координат y_1, y_2, y_3 совпадают с составляющими вектора grad f. Отсюда мы сразу можем заключить, что *ковариантными составляющими вектора grad f в любой системе координат являются величины*

$$\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \tag{8}$$

Контравариантными составляющими этого вектора будут служить величины

$$\nabla^\alpha f = g^{\alpha\beta} \nabla_\beta f = g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\beta} \tag{9}$$

В случае криволинейных ортогональных координат, переходя от ковариантных составляющих к физическим по формулам (7), легко получим для проекций grad f на оси криволинейных координат выражения

$$(\text{grad } f)_{x^i} = \frac{1}{H_i} \frac{\partial f}{\partial x^i} \tag{10}$$

совпадающие с выражениями, получающимися из формул (27) § 18.

4. В качестве следующего примера возьмем расхождение вектора a. В координатах y_1, y_2, y_3 мы имеем

$$(\text{div a}) = \frac{\partial a_{y_i}}{\partial y_i} \tag{11}$$

Переходя к криволинейным координатам x^1, x^2, x^3 и заменяя обыкновенные производные на тензорные, мы приходим к выражению $\nabla_i a^i = \nabla^i a_i$, которое имеет инвариантный характер и в случае координат y_1, y_2, y_3 совпадает с выражением (11), ибо в декартовых координатах, очевидно, все символы Кристоффеля равны нулю и, следовательно, тензорное дифференцирование совпадает с обыкновенным. Итак, в любой системе координат мы имеем равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \nabla_i a^i = \nabla^i a_i = g^{ik}\nabla_k a_i = \nabla_i (g^{ik} a_k) \tag{12}$$

Это выражение можно представить в другой форме, если воспользоваться для ковариантной производной

$$\nabla_i a^k = \frac{\partial a^k}{\partial x^i} + a^\lambda \Gamma^k_{i\lambda} \tag{13}$$

полагая в этой формуле $k = i$, суммируя по i и пользуясь формулой (31) § 33

$$\Gamma^i_{i\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x} \tag{14}$$

получим

$$\nabla_i a^i = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{1}{\sqrt{g}} a^\lambda \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^\lambda} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (a^i \sqrt{g})}{\partial x^i}$$

и, следовательно,

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} a^i)}{\partial x^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g}\, g^{ik} a_k)}{\partial x^i} \tag{15}$$

В ортогональных координатах, пользуясь физическими составляющими, в силу формул (6) и (7) получим

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left(\frac{\partial H_2 H_3 a_{x^1}}{\partial x^1} + \frac{\partial H_3 H_1 a_{x^2}}{\partial x^2} + \frac{\partial H_1 H_2 a_{x^3}}{\partial x^3} \right) \tag{16}$$

выражение, которое не отличается от формулы (30) § 18.

Применяя формулы (15) и (16) к вектору $\mathbf{a} = \operatorname{grad} f$, т. е. полагая в этих формулах

$$a_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad a^i = g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

найдем выражение для оператора Лапласа в любых криволинейных координатах

$$\nabla f = \operatorname{div} \operatorname{grad} f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g}\, g^{ik} \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) \tag{17}$$

и в частности в ортогональных координатах

$$\nabla f = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial x^1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial f}{\partial x^1} \right) + \frac{\partial}{\partial x^2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial f}{\partial x^2} \right) + \frac{\partial}{\partial x^3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial f}{\partial x^3} \right) \right\} \tag{18}$$

5. Дадим теперь выражение для составляющих вихря вектора a. В декартовых координатах для этих составляющих мы имеем выражения вида

$$(\text{rot a})_{y_1} = \frac{\partial a_{y_3}}{\partial y_2} - \frac{\partial a_{y_2}}{\partial y_3} \tag{19}$$

Однако, если мы, заменяя обыкновенные производные тензорными, составим выражения вида

$$\nabla_i a_k - \nabla_k a_i$$

то мы получим, очевидно, ковариантный тензор второго ранга, причем легко вычислить, что его составляющими являются

$$\nabla_i a_k - \nabla_k a_i = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - a_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} + a_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} - \frac{\partial a_i}{\partial x^k} \tag{20}$$

Нетрудно, однако, из этого тензора образовать вектор; для этого нужно только воспользоваться контравариантным тензором $e^{\alpha\beta\gamma}$, введенным нами в п. 5 § 32.

Все составляющие этого тензора равны нулю, кроме

$$e^{123} = e^{231} = e^{312} = \frac{1}{\sqrt{g}}, \qquad e^{132} = e^{213} = e^{321} = -\frac{1}{\sqrt{g}} \tag{21}$$

В самом деле, образуем контравариантный вектор

$$r^\lambda = e^{ik\lambda} \nabla_i a_k \tag{22}$$

составляющими которого являются

$$r^1 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right), \quad r^2 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right), \quad r^3 = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right) \tag{23}$$

В декартовых координатах $g = 1$ и эти выражения совпадают с выражениями (19), поэтому ясно, что в любых криволинейных координатах эти формулы дают контравариантные составляющие вектора rot a. Ковариантные составляющие будут, по общему правилу, вычисляться по формуле

$$r_i = g_{i\alpha} r^\alpha \tag{24}$$

так что

$$r_i = \frac{1}{\sqrt{g}}\left\{g_{i1}\left(\frac{\partial a_3}{\partial x^2} - \frac{\partial a_2}{\partial x^3}\right) + g_{i2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial x^3} - \frac{\partial a_3}{\partial x^1}\right) + g_{i3}\left(\frac{\partial a_2}{\partial x^1} - \frac{\partial a_1}{\partial x^2}\right)\right\} \tag{25}$$

Наконец, в физических составляющих для случая ортогональных координат получим в силу формул (7) и (23):

$$(\text{rot a})_{x^1} = \frac{1}{H_2 H_3}\left\{\frac{\partial (H_3 a_{x^3})}{\partial x^2} - \frac{\partial (H_2 a_{x^2})}{\partial x^3}\right\} \tag{26}$$

и две аналогичные формулы для двух остальных осей. Эти формулы совпадают с формулами (34) § 18.

6. Рассмотрим теперь расхождение тензора второго ранга П. Обозначим составляющие этого тензора в декартовых координатах y_1, y_2, y_3 через $p_{y_iy_k}$, физические составляющие этого тензора в криволинейных ортогональных координатах x^1, x^2, x^3 через p_{ik} и, наконец, контравариантные составляющие его через P^{ik}.

Тогда аналогично формулам (7) мы будем иметь соотношения

$$p_{ik} = H_iH_kP^{ik} = \frac{1}{H_iH_k}P_{ik} \tag{27}$$

В самом деле, по общим формулам преобразования составляющих тензора мы имеем, что

$$P^{ik} = p_{y_\alpha y_\beta}\frac{\partial x^i}{\partial y_\alpha}\frac{\partial x^k}{\partial y_\beta}$$

в силу формул (44) § 32 мы можем написать для случая ортогональных координат

$$P^{ik} = \frac{1}{H_iH_k}p_{y_\alpha y_\beta}\cos(\mathbf{n}_i, y_\alpha)\cos(\mathbf{n}_k, y_\beta)$$

где $\mathbf{n}_i$ — направления нормалей к координатным поверхностям или, что то же, направления касательных к координатным линиям. Но в силу формул (14) § 22

$$p_{y_\alpha y_\beta}\cos(\mathbf{n}_i, y_\alpha)\cos(\mathbf{n}_k, y_\beta) = p_{ik}$$

а тогда из предыдущей формулы вытечет первая из формул (27). Вторая из этих формул получается простым переходом от контравариантных составляющих к ковариантным.

В случае прямолинейных прямоугольных осей координат расхождение тензора П было определено в § 29, формула (4), как вектор с составляющими

$$\frac{\partial p_{y_iy_k}}{\partial y_i}$$

В любых криволинейных координатах за расхождение тензора необходимо, следовательно, взять вектор

$$Q^k = \nabla_iP^{ik} \tag{28}$$

Общее выражение для ковариантной производной от тензора

$$\nabla_lP^{ik} = \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^l} + P^{\lambda k}\Gamma^i_{\lambda l} + P^{i\lambda}\Gamma^k_{\lambda l}$$

приводит к следующему значению для Q^k

$$Q^k = \nabla_iP^{ik} = \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^i} + P^{\lambda k}\Gamma^i_{\lambda i} + P^{i\lambda}\Gamma^k_{\lambda i}$$

и в силу формулы (14)

$$\nabla_iP^{ik} = \frac{\partial P^{ik}}{\partial x^i} + \frac{P^{\lambda k}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^\lambda} + P^{i\lambda}\Gamma^k_{\lambda i}$$

или окончательно

$$\nabla_i P^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} P^{ik})}{\partial x^i} + P^{i\lambda} \Gamma^k_{i\lambda} \tag{29}$$

Если тензор P^{ik} антисимметричный, то при суммировании по i и λ последний член, очевидно, пропадает и остается

$$\nabla_i P^{ik} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} P^{ik})}{\partial x^i} \tag{30}$$

Если тензор P^{ik} симметричный, то удобнее воспользоваться смешанными компонентами P^k_i (в этом случае $P^{ik}_{\cdot\cdot} = P^{k\cdot}_{\cdot i}$, так что точек можно не ставить). Так как

$$\nabla_i P^k_i = \frac{\partial P^k_i}{\partial x^i} - P^k_\lambda \Gamma^\lambda_{ii} + P^\lambda_i \Gamma^k_{\lambda i}$$

то в силу формулы (14)

$$\nabla_k P^k_i = \frac{\partial P^k_i}{\partial x^k} + P^\lambda_i \Gamma^k_{\lambda k} - P^k_\lambda \Gamma^\lambda_{ik} = \frac{\partial P^k_i}{\partial x^k} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g})}{\partial x^\lambda} P^\lambda_i - P^{kr} \Gamma_{r,\, ik} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} P^k_i)}{\partial x^k} - P^{kr} \Gamma_{r,\, ik}$$

Но в силу симметричности тензора P^{ik} и в силу формулы (30) § 33 мы имеем

$$P^{kr} \Gamma_{r,\, ik} = \frac{1}{2} (P^{kr} \Gamma_{r,\, ik} + P^{rk} \Gamma_{r,\, ik}) = \frac{1}{2} P^{kr} (\Gamma_{r,\, ik} + \Gamma_{k,\, ir}) = \frac{1}{2} P^{kr} \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i}$$

В результате получаем окончательную формулу для расхождения симметричного тензора

$$\nabla_k P^k_i = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial (\sqrt{g} P^k_i)}{\partial x^k} - \frac{1}{2} P^{kr} \frac{\partial g_{kr}}{\partial x^i} \tag{31}$$

Заметим, что в случае произвольного тензора P^{ik} необходимо различать между собою $\nabla_i P^{ik}$ и $\nabla_k P^{ik}$, представляющие собою различные векторы.

7. Рассмотрим еще два примера преобразования векторных выражений к любым криволинейным координатам.

В качестве первого примера произведем преобразование основных уравнений гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости плотности ρ, находящейся под действием силы $\mathbf{F}$ ($\mathbf{F}$ дает силу, действующую на единицу массы). Основное уравнение механики сплошной среды, выведенное в § 29, имеет вид

$$\rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) + \operatorname{div} \Pi = 0 \tag{32}$$

где $\mathbf{v}$ — вектор скорости частицы среды, а Π — тензор напряжений.

Последний имеет в декартовых координатах y_1, y_2, y_3 следующие составляющие:

$$p_{v_i v_i} = -p + 2\mu \frac{\partial v_{y_i}}{\partial y_i} + \lambda \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad p_{v_i v_k} = \mu \left(\frac{\partial v_{y_i}}{\partial y_k} + \frac{\partial v_{y_k}}{\partial y_i} \right) \tag{33}$$

где λ и μ — коэффициенты вязкости, причем обычно принимают, что $\lambda = -\frac{2}{3}\mu$. Не останавливаясь на выводе формул (33), заметим только что, полагая λ и μ равными нулю, мы получим, что $\Pi = -pI$ и в силу формулы (6) § 29 уравнение (32) приведется к уравнению движения идеальной жидкости

$$\rho \left(\mathbf{F} - \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) - \operatorname{grad} p = 0 \tag{34}$$

так что p есть гидродинамическое давление. Члены же тензора Π, содержащие λ и μ, построены совершенно так же, как составляющие тензора упругих напряжений [см. формулу (29) § 29], с той лишь разницей, что вместо составляющих вектора смещения в формулы (33) входят составляющие вектора скорости, ибо в вязкой жидкости напряжения определяются *скоростями деформаций*, в то время как в упругом теле они определяются самими *деформациями*.

Так как жидкость предполагается несжимаемой, то уравнение неразрывности имеет вид

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \tag{35}$$

Возьмем теперь любые криволинейные координаты x^1, x^2, x^3. Тогда контравариантными составляющими вектора скорости будут служить величины

$$v^i = \frac{dx^i}{dt} \tag{36}$$

Что касается вектора ускорения $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, имеющего в декартовых координатах проекции

$$w_{y_i} = \frac{\partial v_{y_i}}{\partial t} + v_{y_k} \frac{\partial v_{y_i}}{\partial y_k}$$

то очевидно, что его контравариантными составляющими являются

$$w^i = \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^k \nabla_k v^i \tag{37}$$

Далее, ковариантные составляющие вектора $\mathbf{F}$ обозначим через F_k.

Для тензора Π из (33), в силу (35), удобнее всего получить смешанные составляющие

$$P_k^i = -pg_k^i + \mu \left(\nabla_k v^i + \nabla^i v_k \right) \tag{38}$$

Для расхождения же этого тензора будем иметь в ковариантных составляющих

$$\nabla_i P_k^i = -\nabla_k p + \mu \nabla_i \left(\nabla_k v^i + \nabla^i v_k \right) \tag{39}$$

В результате, уравнения (32), написанные в ковариантных составляющих, будут иметь вид

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t}+v^s\nabla_s v^i\right)=\rho F_k-\frac{\partial p}{\partial x^k}+\mu\nabla_i(\nabla_k v^i+\nabla^i v_k) \tag{40}$$

В приложениях приходится иметь дело чаще всего с криволинейными ортогональными координатами и притом с физическими составляющими. Преобразуем уравнения (40) для этого частного случая.

Физические составляющие вектора скорости обозначим через v_{x^1}, v_{x^2}, v_{x^3}, вектора силы через F_{x^1}, F_{x^2}, F_{x^3}; физические составляющие тензора $\mu(\nabla_k v^i+\nabla^i v_k)$ обозначим через τ_{ik}. Если коэффициенты Ламэ обозначить через H_1, H_2, H_3, то

$$v_{x^i}=H_i v^i, \qquad \tau_{ik}=\mu\frac{H_i}{H_k}(\nabla_k v^i+\nabla^i v_k) \tag{41}$$

По формулам

$$\Gamma_{i,\,ik}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i}-\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l}\right), \qquad \Gamma^\lambda_{ik}=g^{l\lambda}\Gamma_{l,\,ik}$$

легко далее вычислить для случая криволинейных ортогональных координат символы Кристоффеля:

$$\Gamma^\lambda_{ik}=0, \text{ если } i\neq k\neq\lambda; \quad \Gamma^k_{ik}=\frac{\partial \ln H_k}{\partial x^i}, \quad \Gamma^i_{kk}=-\frac{H_k}{H_i^2}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}, \text{ если } i\neq k \tag{42}$$

Составим теперь тензорную производную

$$\nabla_k v^i=\frac{\partial v^i}{\partial x^k}+v^\lambda\Gamma^i_{\lambda k}$$

В силу формул (41) и (42) легко получим, что ее можно записать в следующей общей форме:

$$\nabla_k v^i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_{x^i}}{\partial x^k}-\frac{v_{x^k}}{H_i^2}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}+\delta^i_k\sum_{\lambda=1}^{3}\frac{v_{x^\lambda}}{H_\lambda}\frac{\partial \ln H_i}{\partial x^\lambda} \tag{43}$$

После простого вычисления находим

$$v^k\nabla_k v^i=\sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}}{H_iH_k}\frac{\partial v_{x^i}}{\partial x^k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}{}^2}{H_i{}^3H_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}v_{x^i}}{H_kH_i{}^2}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} \tag{44}$$

Прибавляя сюда

$$\frac{\partial v^i}{\partial t}=\frac{1}{H_i}\frac{\partial v_{x^i}}{\partial t}$$

и переходя путем умножения на H_i к физическим составляющим, найдем физические составляющие вектора ускорения

$$w_{x^i}=\frac{\partial v_{x^i}}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}}{H_k}\frac{\partial v_{x^i}}{\partial x^k}-\sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}{}^2}{H_iH_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}v_{x^i}}{H_kH_i}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} \tag{45}$$

Для вычисления τ_{ik} можно поступить следующим образом: перейдем в тензоре (43) к физическим составляющим путем умножения на H_i/H_k, прибавим к полученному тензору тензор, получающийся из него перестановкой индексов, и умножим на μ; в результате получим

$$\tau_{ik} = \mu\left\{\frac{1}{H_k}\frac{\partial v_{x^i}}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial v_{x^k}}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k}\left[v_{x^i}\frac{\partial H_i}{\partial x^k} + v_{x^k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i}\right] + \right.$$

$$\left. + 2\delta^i_k \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{v_{x^\lambda}}{H_\lambda}\frac{\partial \ln H_i}{\partial x^\lambda}\right\} \qquad (46)$$

Преобразовывая к физическим составляющим p_{ik} формулу (31), имеем

$$\frac{1}{H_i}\nabla_k P^k_i = \frac{1}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{H_1H_2H_3H_i}{H_k}p_{ik}\right) - p_{kk}\frac{\partial \ln H_k}{\partial x^i}\right] \qquad (47)$$

Замечая еще, что физическими составляющими $\operatorname{grad}\varphi$ являются

$$\frac{1}{H_k}\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}$$

найдем из (40) окончательный вид уравнений гидромеханики вязкой несжимаемой жидкости в любых криволинейных ортогональных координатах

$$\rho\left\{\frac{\partial v_{x^i}}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}}{H_k}\frac{\partial v_{x^i}}{\partial x^k} - \sum_{k=1}^{3}\frac{v^2_{x^k}}{H_iH_k}\frac{\partial H_k}{\partial x^i} + \sum_{k=1}^{3}\frac{v_{x^k}v_{x^i}}{H_kH_i}\frac{\partial H_i}{\partial x^k}\right\} =$$

$$= \rho F_{x^i} - \frac{1}{H_i}\frac{\partial p}{\partial x^i} + \frac{1}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{H_1H_2H_3H_i}{H_k}\tau_{ik}\right) - \tau_{kk}\frac{\partial \ln H_k}{\partial x^i}\right\} \qquad (48)$$

где τ_{ik} определены формулами (46).

Наконец, уравнение неразрывности (35) в силу формулы (16) можно записать в виде

$$\frac{\partial (H_2H_3v_{x^1})}{\partial x^1} + \frac{\partial (H_3H_1v_{x^2})}{\partial x^2} + \frac{\partial (H_1H_2v_{x^3})}{\partial x^3} = 0 \qquad (49)$$

В качестве простейшего примера рассмотрим цилиндрические координаты r, φ, z. В этом случае мы имеем

$$H_r = 1, \quad H_\varphi = r, \quad H_z = 1 \qquad (50)$$

и предыдущие формулы приводят к следующим выражениям для тензора τ_{ik}:

$$\tau_{rr} = 2\mu\frac{\partial v_r}{\partial r}, \qquad \tau_{r\varphi} = \mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{r}\right)$$

$$\tau_{\varphi\varphi} = 2\mu\left(\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{v_r}{r}\right), \qquad \tau_{\varphi z} = \mu\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}\right) \qquad (51)$$

$$\tau_{zz} = 2\mu\frac{\partial v_z}{\partial z}, \qquad \tau_{zr} = \mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial z}\right)$$

и к следующим уравнениям гидромеханики:

$$\rho\left(\frac{\partial v_r}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_r}{\partial z}-\frac{v_\varphi^2}{r}\right)-\rho F_r+\frac{\partial p}{\partial r}= \tag{52}$$

$$=\frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rr}-\tau_{\varphi\varphi}}{r}=$$

$$=\mu\left[\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial r}-\frac{v_r}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_r}{\partial \varphi^2}-\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_\varphi}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_\varphi}{\partial z}+\frac{v_r v_\varphi}{r}\right)-\rho F_\varphi+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi}=$$

$$=\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial z}+\frac{2}{r}\tau_{r\varphi}=$$

$$=\mu\left[\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial r}-\frac{v_\varphi}{r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial \varphi^2}+\frac{2}{r^2}\frac{\partial v_r}{\partial \varphi}+\frac{\partial^2 v_\varphi}{\partial z^2}\right]$$

$$\rho\left(\frac{\partial v_z}{\partial t}+v_r\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{v_\varphi}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \varphi}+v_z\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)-\rho F_z+\frac{\partial p}{\partial z}=$$

$$=\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi}+\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=\mu\left[\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v_z}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2}\right]$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+\frac{v_r}{r}=0$$

При преобразовании первых трех из этих уравнений мы пользовались четвертым.

8. Дадим теперь преобразование к ортогональным криволинейным координатам уравнений равновесия теории упругости. Эти уравнения, согласно (32), имеют вид

$$\rho\mathbf{F}+\operatorname{div}\Pi=0 \tag{53}$$

где Π есть тензор упругих напряжений, $\mathbf{F}$ — сила, действующая на единицу массы. Обозначая ортогональные проекции силы $\mathbf{F}$ на оси криволинейных ортогональных координат, иными словами, физические составляющие силы $\mathbf{F}$ через F_{x^1}, F_{x^2}, F_{x^3}, а физические составляющие тензора Π на те же оси через τ_{ik} и применяя формулы (47), сразу напишем уравнения равновесия теории упругости

$$\rho F_{x^i}+\frac{1}{H_i}\sum_{k=1}^{3}\left\{\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{H_1H_2H_3H_i}{H_k}\tau_{ik}\right)-\tau_{ik}\frac{\partial \ln H_k}{\partial x^i}\right\}=0 \tag{54}$$

Если вектор бесконечно-малого смещения частиц упругого тела обозначить через $\mathbf{u}$, а его расхождение через $\theta=\operatorname{div}\mathbf{u}$, то, согласно формуле (28) § 29, имеем

$$\Pi=2\mu\Phi+\lambda\theta\mathrm{I} \tag{55}$$

где Φ есть тензор деформации, для составляющих которого в декартовых координатах имеем выражение

$$\Phi_{v_iv_i}=\frac{\partial u_{v_i}}{\partial y_i},\qquad \Phi_{v_iv_k}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_{v_i}}{\partial y_k}+\frac{\partial u_{v_k}}{\partial y_i}\right) \tag{56}$$

Обозначая физические составляющие этого тензора на оси криволинейных ортогональных координат через ε_{ik}, получим для этих составляющих выражения, совершенно аналогичные выражениям (46) для τ_{ik}:

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{H_k}\frac{\partial u_x{}^i}{\partial x^k} + \frac{1}{H_i}\frac{\partial u_x{}^k}{\partial x^i} - \frac{1}{H_i H_k}\left[u_x{}^i\frac{\partial H_i}{\partial x^k} + u_x{}^k\frac{\partial H_k}{\partial x^i}\right] + \right.$$

$$\left. + 2\delta_k^i \sum_{\lambda=1}^{3} \frac{u_x{}^\lambda}{H_\lambda}\frac{\partial \ln H_i}{\partial x^\lambda}\right\} \tag{57}$$

Для θ из формулы (16) получим

$$\theta = \operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\frac{H_1 H_2 H_3}{H_k}u_x{}^k\right) \tag{58}$$

Наконец, в силу формул (55) имеем следующие соотношения между τ_{ik} и ε_{ik}:

$$\tau_{ik} = 2\mu\varepsilon_{ik} + \delta_i^k\lambda\theta \tag{59}$$

Уравнения (57), (58), (59) и (54) и представляют собою уравнения равновесия теории упругости в криволинейных ортогональных координатах.

В частном случае цилиндрических координат эти уравнения принимают следующую форму:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\tau_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rr}-\tau_{\varphi\varphi}}{r} + \rho F_r = 0\\
&\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\varphi}}{r} + \rho F_\varphi = 0\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial\tau_{\varphi z}}{\partial\varphi} + \frac{\partial\tau_{zz}}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} + \rho F_z = 0
\end{aligned} \tag{60}$$

причем для составляющих тензора деформации имеем выражения, совершенно аналогичные формулам (51), а именно:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, && \varepsilon_{r\varphi} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}\right)\\
&\varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{u_r}{r}, && \varepsilon_{\varphi z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial\varphi}\right)\\
&\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z}, && \varepsilon_{zr} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z}\right)
\end{aligned} \tag{61}$$

9. Рассмотренные нами обычные векторные операции в трехмерном пространстве мы можем по аналогии определить и для любого риманова пространства.

В частности, под градиентом скалярной функции f мы можем понимать вектор с ковариантными составляющими (8), под расхождением вектора можем понимать выражение (12), под оператором Лапласа, примененным к скалярной функции f, выражение (17), под расхождением тензора второго ранга выражения (29), (30), (31).

§ 37. Тензор Римана-Кристоффеля

1. Наиболее резкое отличие тензорного дифференцирования от обыкновенного состоит в том, что *при повторном дифференцировании результат тензорного дифференцирования зависит, вообще говоря, от порядка дифференцирования.*

В самом деле, рассмотрим поле какого-нибудь контравариантного вектора A^α, составим для него вторые ковариантные производные $\nabla_\varkappa\nabla_i A^\alpha$ и $\nabla_i\nabla_\varkappa A^\alpha$ и образуем их разность. Мы имеем прежде всего

$$\nabla_i A^\alpha = \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^i} + A^\lambda \Gamma^\alpha_{\lambda i}$$

и далее

$$\nabla_\varkappa\nabla_i A^\alpha = \frac{\partial \nabla_i A^\alpha}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\alpha_{\rho\varkappa}\nabla_i A^\rho - \Gamma^\rho_{i\varkappa}\nabla_\rho A^\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\varkappa}\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^i} + A^\lambda\Gamma^\alpha_{\lambda i}\right) +$$

$$+ \Gamma^\alpha_{\rho\varkappa}\left(\frac{\partial A^\rho}{\partial x^i} + A^\lambda\Gamma^\rho_{\lambda i}\right) - \Gamma^\rho_{i\varkappa}\left(\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\rho} + A^\lambda\Gamma^\alpha_{\lambda\rho}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 A^\alpha}{\partial x^\varkappa \partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\lambda i}\frac{\partial A^\lambda}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\alpha_{\rho\varkappa}\frac{\partial A^\rho}{\partial x^i} - \Gamma^\rho_{i\varkappa}\frac{\partial A^\alpha}{\partial x^\rho} - A^\lambda\Gamma^\rho_{i\varkappa}\Gamma^\alpha_{\lambda\rho} + A^\lambda\left[\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\lambda i}}{\partial x^\varkappa} + \Gamma^\alpha_{\rho\varkappa}\Gamma^\rho_{\lambda i}\right]$$

При перестановке индексов i и $\varkappa$ сумма первых пяти членов последнего остается, очевидно, неизменной; последние же два члена превратятся в

$$A^\lambda\left[\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\lambda\varkappa}}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\rho i}\Gamma^\rho_{\lambda\varkappa}\right]$$

Поэтому легко получаем следующее важное равенство:

$$\nabla_\varkappa\nabla_i A^\alpha - \nabla_i\nabla_\varkappa A^\alpha = A^\lambda\left[\frac{\partial\Gamma^\alpha_{\lambda i}}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial\Gamma^\alpha_{\lambda\varkappa}}{\partial x^i} + \Gamma^\alpha_{\rho\varkappa}\Gamma^\rho_{\lambda i} - \Gamma^\alpha_{\rho i}\Gamma^\rho_{\lambda\varkappa}\right] \qquad (1)$$

Так как это равенство имеет место для произвольного вектора A^λ и так как слева стоит тензор третьего ранга, два раза ковариантный и раз контравариантный, то выражение в квадратных скобках в формуле (1) является тензором четвертого ранга, три раза ковариантным, раз контравариантным. Этот тензор называется тензором Римана-Кристоффеля и обозначается следующим образом:

$$R^{\cdot\cdot\cdot\nu}_{i\varkappa\lambda\cdot} = \frac{\partial\Gamma^\nu_{\lambda i}}{\partial x^\varkappa} - \frac{\partial\Gamma^\nu_{\lambda\varkappa}}{\partial x^i} + \Gamma^\nu_{\rho\varkappa}\Gamma^\rho_{\lambda i} - \Gamma^\nu_{\rho i}\Gamma^\rho_{\lambda\varkappa} \qquad (2)$$

При этом обозначении равенство (1) перепишется следующим образом

$$\nabla_\varkappa\nabla_i A^\alpha - \nabla_i\nabla_\varkappa A^\alpha = A^\lambda R^{\cdot\cdot\cdot\alpha}_{i\varkappa\lambda\cdot} \qquad (3)$$

Из него следует, что при ковариантном дифференцировании вектора порядок дифференцирования можно изменять только в том случае, если тензор Римана-Кристоффеля обращается в нуль. Если в основной квадратичной форме пространства

$$ds^2 = g_{ik}dx^i\,dx^k \qquad (4)$$

коэффициенты g_{ik} не зависят от координат, то, как следует из формул (22) и (24) § 33, все символы Кристоффеля обращаются в нуль. Но тогда по формулам (2) и тензор Римана-Кристоффеля обращается в нуль.

Можно показать, что обратно, если тензор Римана-Кристоффеля во всех точках пространства обращается в нуль, то в этом пространстве можно выбрать такие координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$, чтобы основная квадратичная форма приняла вид (4) с постоянными коэффициентами g_{ik}. Но ясно, что в этом случае ковариантное дифференцирование совпадает с обыкновенным, и поэтому делается понятным, почему в этом случае порядок дифференцирования не влияет на его результат.

2. Рассмотрим теперь свойства тензора Римана-Кристоффеля. Отметим прежде всего, что, как явствует из самого определения этого тензора, он зависит только от составляющих фундаментального тензора g_{ik} и их первых и вторых производных, входящих через посредство символов Кристоффеля.

Из формулы (2) непосредственно следует, что при перестановке первых двух индексов составляющие тензора Римана-Кристоффеля меняют свой знак:

$$R_{i\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = -R_{\varkappa i\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \tag{5}$$

в частности,

$$R_{\varkappa i\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0 \tag{6}$$

Столь же непосредственно, простым вычислением по формуле (2), можно установить интересное свойство циклической симметрии относительно трех ковариантных значков, выражающееся формулой

$$R_{i\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R_{\varkappa\lambda i\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} + R_{\lambda i\varkappa\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = 0 \tag{7}$$

Понижая у тензора Римана-Кристоффеля значок ν, получим ковариантные составляющие этого тензора

$$R_{i\varkappa\lambda\mu} = -g_{\mu\nu}R_{\varkappa i\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} \tag{8}$$

из которых можем опять восстановить смешанные составляющие обычным способом

$$R_{i\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = g^{\mu\nu}R_{i\varkappa\lambda\mu} \tag{9}$$

Дадим аналогичные формулам (2) выражения для ковариантных составляющих тензора Римана-Кристоффеля. Так как

$$g_{\mu\nu}\left(\frac{\partial\Gamma^{\nu}_{\lambda i}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\lambda\varkappa}}{\partial x^{i}}\right) = \frac{\partial\left(g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda i}\right)}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\left(g_{\mu\nu}\Gamma^{\nu}_{\lambda\varkappa}\right)}{\partial x^{i}} - \Gamma^{\nu}_{\lambda i}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\varkappa}} +$$

$$+\Gamma^{\nu}_{\lambda\varkappa}\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{i}} = \frac{\partial\Gamma_{\mu,\,\lambda i}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu,\,\lambda\varkappa}}{\partial x^{i}} - \Gamma^{\nu}_{\lambda i}\left(\Gamma_{\mu,\,\nu\varkappa} + \Gamma_{\nu,\,\mu\varkappa}\right) + \Gamma^{\nu}_{\lambda\varkappa}\left(\Gamma_{\mu,\,\nu i} + \Gamma_{\nu,\,\mu i}\right)$$

то из формулы (2) следует, после простых сокращений, что

$$R_{i\varkappa\lambda\mu} = g_{\mu\varkappa}R_{i\varkappa\lambda\cdot}^{\cdot\cdot\cdot\nu} = \frac{\partial\Gamma_{\mu,\,\lambda i}}{\partial x^{\varkappa}} - \frac{\partial\Gamma_{\mu,\,\lambda\varkappa}}{\partial x^{i}} - \Gamma^{\rho}_{\lambda i}\Gamma_{\rho,\,\mu\varkappa} + \Gamma^{\rho}_{\lambda\varkappa}\Gamma_{\rho,\,\mu i} \tag{10}$$

Вспоминая выражения (22) § 33 для символов Кристоффеля первого рода, можем еще написать, что

$$R_{i\varkappa\lambda\mu} = \frac{1}{2}\left\{\frac{\partial^2 g_{i\mu}}{\partial x^\varkappa \partial x^\lambda} - \frac{\partial^2 g_{i\lambda}}{\partial x^\varkappa \partial x^\mu} - \frac{\partial^2 g_{\varkappa\mu}}{\partial x^i \partial x^\lambda} + \frac{\partial^2 g_{\varkappa\lambda}}{\partial x^i \partial x^\mu}\right\} -$$
$$- g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\,\lambda i}\,\Gamma_{\rho,\,\mu\varkappa} + g^{\rho\sigma}\Gamma_{\sigma,\,\lambda\varkappa}\Gamma_{\rho,\,\mu i} \qquad (11)$$

Отсюда видно, что составляющие тензора Римана-Кристоффеля зависят от вторых производных от составляющих фундаментального тензора линейным образом.

Из формул (10) и (11) можно вывести еще ряд свойств симметрии тензора Римана-Кристоффеля. А именно из формулы (11) видно, что как при перестановке первых двух индексов i и $\varkappa$, так и при перестановке последних индексов λ и μ, составляющие тензора (11) меняют свой знак:

$$R_{i\varkappa\lambda\mu} = -R_{\varkappa i\lambda\mu} \qquad (12)$$

$$R_{i\varkappa\lambda\mu} = -R_{i\varkappa\mu\lambda} \qquad (13)$$

Следующим свойством симметрии составляющих $R_{i\varkappa\lambda\mu}$ является их неизменность при перестановке первой пары индексов со второй; это свойство выражается формулой

$$R_{i\varkappa\lambda\mu} = R_{\lambda\mu i\varkappa} \qquad (14)$$

и непосредственно проверяется по формуле (11).

Наконец, понижая в равенстве (7) значок ν, мы приходим к свойству циклической симметрии относительно трех ковариантных значков, выражающемуся формулой

$$R_{i\varkappa\lambda\mu} + R_{\varkappa\lambda i\mu} + R_{\lambda i\varkappa\mu} = 0 \qquad (15)$$

Тензор четвертого ранга $R_{i\varkappa\lambda\mu}$ имеет n^4 составляющих, однако эти составляющие связаны соотношениями (12), (13), (14) и (15). В результате арифметического подсчета получается, что все n^4 составляющих тензора Римана-Кристоффеля могут быть выражены через $\frac{1}{12}n^2(n^2-1)$ составляющих. Для пространства двух измерений число независимых составляющих тензора Римана-Кристоффеля сводится к 1, для пространства трех измерений к 6, для пространства четырех измерений к 20.

3. Для случая контравариантного вектора мы имеем формулу

$$\nabla_\varkappa \nabla_i A^\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A^\alpha = A^\lambda R^{\cdot\cdot\alpha}_{i\varkappa\lambda\cdot} \qquad (16)$$

Нетрудно установить аналогичную формулу для случая ковариантного вектора. В самом деле, понижая в обеих частях предыдущего равенства значок α, получим

$$\nabla_\varkappa \nabla_i A_\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A_\alpha = A^\lambda R_{i\varkappa\lambda\alpha}$$

Далее в силу равенства (12)

$$\nabla_\varkappa \nabla_i A_\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A_\alpha = -A^\lambda R_{i\varkappa\alpha\lambda}$$

и, наконец, понижая значок у A^λ и одновременно повышая у $R_{i\varkappa\alpha\lambda}$, получаем окончательную формулу

$$\nabla_\varkappa \nabla_i A_\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A_\alpha = - A_\lambda R^{\cdots\lambda}_{i\varkappa\alpha\cdot} \tag{17}$$

При дифференцировании скалярной функции $f(x^1, \ldots, x^n)$ порядок дифференцирования никакой роли не играет. В самом деле, мы имеем

$$\nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

и

$$\nabla_\varkappa \nabla_i f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^\varkappa \partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^\lambda} \Gamma^\lambda_{i\varkappa} \tag{18}$$

то же самое выражение получается и для $\nabla_i \nabla_\varkappa f$, откуда и следует наше утверждение.

Можно дать формулы, аналогичные (16) и (17) для случая тензора любого порядка. Мы рассмотрим метод получения этих формул на простом примере смешанного тензора второго ранга A^β_α.

Введем еще в рассмотрение два произвольных вектора u^α и v_β и составим инвариант

$$I = A^\beta_\alpha u^\alpha v_\beta$$

По только что доказанному мы будем иметь

$$\nabla_\varkappa \nabla_i \cdot^\beta_\cdot u^\alpha v_\beta) = \nabla_i \nabla_\varkappa (A^\beta_\alpha u^\alpha v_\beta)$$

Но ясно, что

$$\begin{aligned}\nabla_\varkappa \nabla_i (A^\beta_\alpha u^\alpha v_\beta) = {} & u^\alpha v_\beta \nabla_\varkappa \nabla_i A^\beta_\alpha + A^\beta_\alpha v_\beta \nabla_\varkappa \nabla_i u^\alpha + A^\beta_\alpha u^\alpha \nabla_\varkappa \nabla_i v_\beta + \\ & + v_\beta \nabla_i A^\beta_\alpha \nabla_\varkappa u^\alpha + u^\alpha \nabla_i A^\beta_\alpha \nabla_\varkappa v_\beta + A^\beta_\alpha \nabla_i u^\alpha \nabla_\varkappa v_\beta + \\ & + v_\beta \nabla_\varkappa A^\beta_\alpha \nabla_i u^\alpha + u^\alpha \nabla_\varkappa A^\beta_\alpha \nabla_i v_\beta + A^\beta_\alpha \nabla_\varkappa u^\alpha \nabla_i v_\beta\end{aligned}$$

Последние шесть членов при перестановке индексов i и $\varkappa$ не меняются поэтому мы получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned}& u^\alpha v_\beta (\nabla_\varkappa \nabla_i A^\beta_\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A^\beta_\alpha) = \\ & = - A^\beta_\alpha v_\beta (\nabla_\varkappa \nabla_i u^\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa u^\alpha) - A^\beta_\alpha u^\alpha (\nabla_\varkappa \nabla_i v_\beta - \nabla_i \nabla_\varkappa v_\beta)\end{aligned}$$

Воспользовавшись теперь формулами (16) и (17), найдем

$$u^\alpha v_\beta (\nabla_\varkappa \nabla_i A^\beta_\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A^\beta_\alpha) = - A^\beta_\alpha v_\beta u^\lambda R^{\cdots\alpha}_{i\varkappa\lambda\cdot} + A^\beta_\alpha u^\alpha v_\lambda R^{\cdots\lambda}_{i\varkappa\beta\cdot}$$

или

$$u^\alpha v_\beta (\nabla_\varkappa \nabla_i A^\beta_\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A^\beta_\alpha) = u^\alpha v_\beta (- A^\beta_\lambda R^{\cdots\lambda}_{i\varkappa\alpha\cdot} + A^\lambda_\alpha R^{\cdots\beta}_{i\varkappa\lambda\cdot})$$

Отсюда, в силу произвольности векторов u^α и v_β, получаем

$$\nabla_\varkappa \nabla_i A^\beta_\alpha - \nabla_i \nabla_\varkappa A^\beta_\alpha = A^\lambda_\alpha R^{\cdots\beta}_{i\varkappa\lambda\cdot} - A^\beta_\lambda R^{\cdots\lambda}_{i\varkappa\alpha\cdot} \tag{19}$$

Закон образования правой части совершенно очевиден.

Из тензора Римана-Кристоффеля можно получить путем сокращения индексов тензор второго ранга и инвариант.

Прежде всего путем сокращения по крайним индексам получается тензор второго ранга, так называемый тензор Эйнштейна:

$$G_{\kappa\lambda} = g^{i\mu} R_{i\kappa\lambda\mu} = R^{\cdots i}_{i\kappa\lambda}. \tag{20}$$

Так как, в силу формул (14), (12) и (13),

$$R_{i\kappa\lambda\mu} = R_{\mu\lambda\kappa i}$$

то

$$G_{\kappa\lambda} = g^{i\mu} R_{i\kappa\lambda\mu} = g^{\mu i} R_{\mu\lambda\kappa i} = G_{\lambda\kappa} \tag{21}$$

т. е. тензор Эйнштейна есть тензор симметричный. Сокращая его, получим инвариант

$$G = G^{\kappa}_{\kappa} = g^{\kappa\lambda} G_{\kappa\lambda} \tag{22}$$

4. В § 35 нами было выяснено геометрическое значение ковариантного дифференцирования и было показано, что оно может быть тесно связано с понятием параллельного переноса вектора. Так как тензор Римана-Кристоффеля тоже выражает некоторое свойство тензорного дифференцирования, указывая на характер его зависимости от порядка дифференцирования, то естественно думать, что тензор Римана-Кристоффеля тоже имеет какое-то геометрическое значение. Более того, мы уже видели, что в случае эвклидова пространства, когда составляющие фундаментального тензора являются постоянными величинами, тензор Римана-Кристоффеля обращается в нуль, следовательно, этот тензор характеризует до некоторой степени отклонение рассматриваемого риманова пространства R_n от эвклидова. Можно поэтому думать, что тензор Римана-Кристоффеля как-то характеризует кривизну риманова пространства, подобно тому как отклонение кривой линии от касательной к ней в некоторой точке характеризуется в первом приближении кривизной кривой в этой точке. Так оно на самом деле и оказывается, поэтому тензор Римана-Кристоффеля носит еще название тензора кривизны.

Не рассматривая вопроса о кривизне риманова пространства детально, мы выясним только несколько основных понятий на частном примере риманова пространства двух измерений, которое всегда можно представлять себе как некоторую поверхность в пространстве трех измерений.

Прежде всего заметим, что, как было указано выше, в случае риманова пространства двух измерений, все 16 составляющих тензора Римана-Кристоффеля выражаются через одну из них, за которую можно взять R_{1212}.

Возьмем теперь в эвклидовом пространстве y_1, y_2, y_3 сферу радиуса a

$$y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 = a^2$$

и рассмотрим поверхность этой сферы в качестве риманова пространства. Вводя в рассмотрение сферические координаты r, θ, φ, можем характеризовать положение точки на сфере двумя координатами ϑ и φ, т. е. мы можем положить

$$x^1 = \theta, \quad x^2 = \varphi$$

Очевидно тогда, что для квадрата элемента длины мы получим выражение

$$ds^2 = a^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta \, d\varphi^2) = a^2 (dx^1)^2 + a^2 \sin^2 x^1 (dx^2)^2 \tag{23}$$

и, следовательно, составляющими фундаментального тензора будут

$$g_{11} = a^2, \; g_{12} = 0, \; g_{22} = a^2 \sin^2 (x^1) \tag{24}$$

Теперь легко вычислить, что

$$g = a^4 \sin^2 (x^1), \quad g^{11} = \frac{1}{a^2}, \quad g^{22} = \frac{1}{a^2 \sin^2 (x^1)} \tag{25}$$

$$\Gamma_{1,11} = \Gamma_{1,12} = \Gamma_{2,11} = \Gamma_{2,22} = 0, \quad \Gamma_{2,12} = -\Gamma_{1,22} = \frac{1}{2} a^2 \sin (2x^1)$$

Формула (11) приводит к следующему значению для R_{1212}

$$R_{1212} = a^2 \sin^2 (x^1) \tag{26}$$

В силу формул (12), (13) и (14) для любого пространства R_2 мы имеем соотношения

$$R_{1212} = -R_{2112} = -R_{1221} = R_{2121} \tag{27}$$

все же остальные составляющие тензора Римана-Кристоффеля равны нулю. Составляя по формулам (21) и (22) инвариант G, мы придем в случае R_2 к выражению

$$G = g^{i\mu} g^{\varkappa\lambda} R_{i\varkappa\lambda\mu} = 2R_{1212} \{(g^{12})^2 - g^{11} g^{22}\} = -\frac{2R_{1212}}{g} \tag{28}$$

ибо, как нетрудно убедиться,

$$g^{11} g^{22} - (g^{12})^2 = \frac{1}{g}$$

Итак, выражение

$$\frac{R_{1212}}{g}$$

для любого пространства Римана двух измерений является инвариантом.

Составляя это выражение для сферы, получим

$$\frac{R_{1212}}{g} = \frac{1}{a^2} \tag{29}$$

но для сферы радиуса a величина $\frac{1}{a^2}$ является как раз гауссовой кривизной.

5. Теперь мы приведем в связь понятие кривизны поверхности с понятием параллельного переноса вектора, опять-таки только для частного случая сферы.

А именно, рассмотрим на сфере радиуса a площадь S, ограниченную контуром L, и будем, исходя из точки M_0 кривой L, совершать параллельный перенос какого-либо вектора, касательного к поверхности сферы, вдоль кривой L способом, указанным в § 35. После обхода кривой L рас-

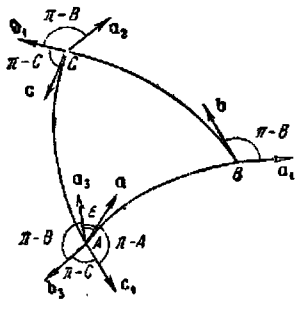
сматриваемый нами вектор не возвратится, вообще говоря, в свое первоначальное положение, а составит с ним некоторый угол ε. Мы хотим доказать, что

$$\frac{\varepsilon}{S} = \frac{1}{a^2} \tag{30}$$

Для доказательства возьмем сначала за S сферический треугольник ABC, углы которого тоже обозначим через A, B, C. Тогда из сферической тригонометрии известно, что площадь сферического треугольника ABC равна

$$S = a^2 (A + B + C - \pi) \tag{31}$$

За точку M_0 контура, ограничивающего треугольник, примем точку A, а за вектор, который мы будем параллельно переносить, примем единичный вектор $\mathbf{a}$, касательный в точке A к дуге большого круга AB.



Фиг. 95

Так как сферический треугольник образован дугами больших кругов, которые являются на сфере геодезическими линиями, то в силу сказанного в § 35 параллельный перенос вектора будет совершаться очень просто. А именно, при параллельном переносе по геодезической линии AB единичный касательный вектор $\mathbf{a}$ в точке A к этой линии перейдет в единичный касательный вектор $\mathbf{a}_1$ в точке B (фиг. 95); проведем теперь в точке B единичный касательный вектор $\mathbf{b}$ к геодезической линии BC; ясно, что угол между векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}$ равен $\pi - B$.

Будем теперь переносить вдоль геодезической линии векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}_1$; в силу сказанного в § 35 вектор $\mathbf{b}$ перейдет в вектор $\mathbf{b}_1$, касающийся линии BC в точке C, а вектор $\mathbf{a}_1$ перейдет в вектор $\mathbf{a}_2$, составляющий с $\mathbf{b}_1$ тот же самый угол $\pi - B$, который был образован векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{b}$. Проведем, наконец, в точке C единичный касательный вектор $\mathbf{c}$, который образует, очевидно, с вектором $\mathbf{b}_1$ угол $\pi - C$.

При параллельном переносе из точки C в точку A векторы $\mathbf{c}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{a}_2$ перейдут соответственно в $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{a}_3$, причем углы между векторами $\mathbf{a}_3$ и $\mathbf{b}_2$, $\mathbf{b}_2$ и $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_1$ и $\mathbf{a}$ будут равны соответственно $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - A$.

Из фиг. 95 ясно, что угол между вектором $\mathbf{a}$ и тем вектором $\mathbf{a}_3$, в который превращается этот вектор после его параллельного переноса вдоль контура сферического треугольника ABC, будет равен

$$\varepsilon = 2\pi - (\pi - B) - (\pi - C) - (\pi - A) = A + B + C - \pi \tag{32}$$

Сравнивая это равенство с (31), докажем формулу (30) для того частного случая, когда контур L есть контур сферического треугольника. Формула (30) остается, очевидно, справедливой и в том случае, когда L

есть контур сферического многоугольника, ибо последний можно разбить на ряд сферических треугольников. Но так как во всякую кривую L можно вписать сферический многоугольник, отличающийся от L сколь угодно мало, то легко заключить, путем предельного перехода, что формула (30) справедлива для любого контура на сфере.

Полученные результаты могут быть обобщены на случай любой поверхности. А именно, можно показать, что гауссова кривизна поверхности K может быть выражена как формулой

$$K = \frac{R_{1212}}{g} \tag{33}$$

так и формулой

$$K = \lim_{S \to 0} \frac{\varepsilon}{S} \tag{34}$$

причем ε есть угол отклонения от первоначального положения вектора, перенесенного параллельно себе вдоль контура бесконечно-малой площади S, стягивающейся к рассматриваемой точке поверхности.

Связь между параллельным переносом вектора и кривизной поверхности, выражаемая формулой (34), может быть положена и основу исследования свойств кривизны любого риманова пространства R_n.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Абсолютная скорость 98, 99
Аксиальный вектор 52
Антисимметричный тензор 292, 357
Афинное ортогональное преобразование 345, 351
Афинное преобразование 345
Афинный ортогональный вектор 285, 351, 354, 355
Афинный ортогональный инвариант 351
Афинный ортогональный тензор второго ранга 285, 289
Афинор 285

Баротропная жидкость 180, 181, 182
— идеальная жидкость 267
Безвихревое движение 182
Безвихревые поля 171
Бесконечно-малое перемещение 340
Бинормаль 84, 92
Бискалярное произведение тензоров 323

Вектор 5, 6, 7
— относительной скорости 99
— Пойнтинга 282
— угловой скорости 56, 57
— ускорения 79
Векторная поверхность 265
Векторно-скалярное произведение 59
Векторное поле 101
— произведение 44, 375
— уравнение 67
Векторные линии 102
Векторный потенциал 228
Величина вектора 6
Вихревая поверхность 192
Вихревые линии 170, 266
Вихрь вектора 130, 168, 169, 170, 171
— скорости жидкости 266
Внешнее произведение 44
Внешние силы 160
Внутреннее произведение 35
— свойство риманова пространства 397
Внутренние силы 160
Внутренняя энергия 181
Волнистые скобки Кристоффеля 381
Волновое уравнение 183, 271, 278
Вращательное перемещение 340
— ускорение 90
Второе уравнение Максвелла 281
Вязкая жидкость 160

Гармонические точки 43
— функции 223
Гауссова кривизна 417
Геодезическая линия 378, 379, 388, 393, 400
Геометрическая сумма 8
Геометрическое приращение вектора 399
Гиперкомплексные числа 310
Главная нормаль 84, 94
Главное значение тензора 320
— направление тензора 320
Годограф вектора 77, 78, 82
— радиуса-вектора 86
Градиент 105, 106, 107
— вектора 125
Давление жидкости 160
Движение сжимаемой жидкости 158
Двойное векторное произведение 59, 74
Двумерное пространство 297
Двусвязное пространство 122
Девиатор 322
Девятичленная форма тензора 289
Деформации 407
Деформационный тензор 301
Деформация объема 305
— элемента 341
Джоулево тепло 283
Диады 290, 294, 304, 308, 309
Дистрибутивность 36, 45, 60, 295, 304, 308, 309
Дистрибутивный закон умножения 11
Дифференциальные операции первого порядка 177
Дифференциальные параметры первого порядка 196

Дифференциальные уравнения геодезических линий 376
Дифференциальный оператор 106, 151
Длина вектора 6
Дублет 241, 244

Единичные векторы 12
Единичный касательный вектор 393

— тензор 289, 312

Живая сила точки 91
Жидкая линия 263, 264, 266
поверхность 256, 259, 262, 263, 264
Жидкий объем 259, 266

Задача Дирихле 216
— Неймана 216, 236
Закон Био-Савара 279, 280
— Гука 339, 341
— индукции 279, 281
— моментов количеств движения 90
— Ньютона 90, 91
— Ома 280
— преобразований 354
Запаздывающий дублет 275
— ньютонов потенциал 273, 275
— объемный потенциал 275
— потенциал 273
— — двойного слоя 275, 276
— — дублета 275
— — дублета 275
— — простого слоя 275

Идеальная жидкость 160, 267
Изоповерхности 102
Импульс силы 91
Инвариант 351, 363
— тензора 322
Инвариантность 31, 37, 73
Инверсия координатных осей 53
Индивидуальная производная 128
Интеграл Коши 182
— Пуассона 256
Интенсивность источника 145
Источник обильности 242, 270
Источники 143

Касательное напряжение 287
— ускорение 87
Квадруплет 252
Кинетическая энергия 181
Ковариантная производная ковариантного вектора 386
Ковариантная производная контравариантного вектора 387
Ковариантный вектор 353, 354
— тензор второго ранга 355, 357, 386
Ковариантный фундаментальный тензор 363
Коллинеарность 90, 304
Коллинеарные векторы 12
Количество движения точки 90
Коммутативность 9
Компланарный вектор 12
Компоненты вектора 25
— единичного вектора 83
— производной 80
— тензора 287, 289
Конвективный член 129
Конвекция 129
Консервативная сила 119, 180
Контравариантный вектор 352, 353, 354
— тензор второго ранга 355, 357
Контравариантный фундаментальный тензор 363
Координатная система 345, 346
Координатные линии 194, 195, 207
— поверхности 194, 195
Координаты точки 350
Косоугольные компоненты 26
Коэффициенты Ламэ 196, 198
— Пуассона 341
Кривизна кривой 83
Криволинейные координаты 194
— составляющие 197
Кручение винтовой линии 93, 94
— кривой 85

Лагранжевы переменные см. Переменные Лагранжа
Левая система 26
Линейная векторная функция 295
— скорость 353
Линейные функции 377
Линейный интеграл 116
— тензор 305, 311
Линии тока 159, 266
Локальная производная 128

Матрицы 287
Медиана 17, 18
Местная производная 128
Метрика 349, 350
— плоскости 349
— подпространства 348
Многообразие измерений 349
Модуль 6
— Юнга 341
Момент дублета 241

Мощность источника 145
Мультиплет 252, 253

Направление момента дублета 252
Напряжение вихревой трубки 172
Начало Даламбера 286
Независимая переменная 77
Некоммутативность 310
Некомпланарность 17
Некомпланарный вектор 69, 71
Неопределенный интеграл 82
Неподвижная система координат 89
Непрерывная функция 77
Нестационарное поле 101
Нормаль к кривой 84
Нормальная плоскость 84
Нормальное напряжение 287
— ускорение 87
Нулевой тензор 305
Ньютонов потенциал 219, 224, 273

Обильность источника 145, 242, 243
Обобщенный закон индукции Фарадея 281
Обратный тензор 312
Объемное расширение элемента 341
Объемный потенциал 218, 222
Односвязное пространство 122
Оператор Гамильтона 106, 148, 153, 168
— Лапласа 155, 202, 403, 411
Определенные векторы 7
Орт 12
Ортогональное преобразование 346, 351
Осевой вектор 52
Осестремительное ускорение 90
Основная форма 350
Относительная скорость 99

Параллелограмматическая решетка 977
Параллельный перенос вектора, 385, 392, 394, 397
Первая основная форма Гаусса 208
Первое уравнение Максвелла 281
Передвижение вектора 7
Переместимость 8
Переменное поле 101, 256
Переменные Лагранжа 332
— тензоры 325
Переменный вектор 77
Перенос 129
Переносная скорость 99
Переносное уравнение 100
Перпендикулярность 41
Планарный тензор 305
Плотность источников 242
Поверхность уровня 102
Поверхностное расхождение 242, 243
Поверхностный градиент 245
— заряд 251
— интеграл 131, 132
Полная производная 128, 269
Полное ускорение 87
Полнота тензора 312
Полный тензор 305, 311
Положительная нормаль 46
Положительное кручение 94
Полярный вектор 52, 67
Постоянное поле 101
Поступательное перемещение 340
Потенциал 115, 119
— двойного слоя 222, 243
— объемный 219, 224, 273
— простого слоя 222, 242
— скорости 123, 159
— электрического поля 123
Потенциальная энергия 119, 181
— — системы двух зарядов 186
Потенциальное поле 115, 171
Потенциальный вектор 115, 171
Поток вектора 131, 135
Правая система 26
Правило дифференцирования сложных функций 80
Правило Крамера 314
— правой и левой руки 26
Преобразование 53
Принцип Гюйгенса 277
Притягивающая сила 95
Проекция вектора 24, 198
— геометрической суммы векторов 24
— слагаемых векторов 24
Произведение двух тензоров 357
Производная вектора 79, 126
— суммы 79
Пространство Римана 349
Прямоугольные координаты 25
Прямые скобки Кристоффеля 380
Псевдовектор 52
Псевдоскаляр 59, 67, 86

Радиус-вектор 14, 19—22, 69, 73, 75, 96, 97
Радиус кривизны кривой 83
— кручения 85
Различные векторные линии 262
Разложение 12
Разрыв непрерывности 244
Распределение вихрей 245
— источников по поверхности 249
Распределительный закон умножения 11

Расхождение вектора 130, 135
— тензора 337
Результирующий вектор 8
Риманово пространство 362, 366, 373, 377, 384, 392—395, 397—398

Свободные векторы 7
— от источников векторные поля 141
Свойство сохраняемости 262, 265
— циклической симметрии 413
Секториальная скорость 91
Сила инерции 161
Силовая функция 119
Символы Кристоффеля второго рода 381
Символы Кристоффеля первого рода 380
Симметричный тензор 292, 317, 318, 320, 357
Скаляр 5, 6, 7, 53, 69, 351
— второго рода 53
— первого рода 53
Скалярная функция 353
Скалярное поле 101
— произведение 35, 36, 37, 317
— — тензоров 307
Скалярный аргумент 77
Скорости деформаций 407
Скорость распределения света 282
Слагаемые вектора 8
Слагающие вектора 24
Сложение векторных полей 109
— двух тензоров 356
Смешанный тензор второго ранга 355
— фундаментальный тензор 363
Сокращение индексов 358, 359
Сокращенный тензор 359
Соленоидальное поле 141, 254
Соленоидальный вектор 141, 142
Соприкасающаяся плоскость 84
Составляющие вектора 25
— ковариантного тензора 361, 362
Сохраняемость векторных линий 335
Сочетательность 9
Спрямляющая плоскость 94
Статический инвариант системы 55
Стационарное поле 101
Стоки 143
Субстанциальная производная 128
Сферическая волна 273
Сферические функции 253
Телеграфное уравнение 282
Тензор 7, 10, 284, 285
— кривизны 416
— моментов инерции 299, 319
Тензор подстановки 366
— производный от вектора по вектору 300
— Римана-Кристоффеля 412, 413
— упругих напряжений 336, 337, 385—387
— Эйнштейна 416
Тензорная алгебра 357
Тензорный эллипсоид 319
Теорема Гаусса 137, 138, 146
— деления тензоров 388
— Томпсока 270
Тепловая энергия 283
Ток смещения 280
Точка многообразия 350
Трехсвязное пространство 122
Трубки тока 159
Трубчатое векторное поле 141

Угловая скорость 56, 353
Умножение тензора на скаляр 356
Уравнение Беркулли 181
— винтовой линии 93
— Лапласа 155, 160, 216, 224, 271, 282
— неразрывности 157—159
— плоскости 93
— Пуассона 163, 214, 215, 217, 224, 271
— теплопроводности 155
Уравнения гидромеханики 157, 161
Ускорение Кориолиса 101
— переносное 100
— точки 89
Условие сохраняемости линии тока 265, 266

Физические составляющие вектора 372
Фиксированные точки пространства 332
— частицы сплошной среды 332
Формула Гаусса-Остроградского 138, 140, 142, 146, 226, 229
— Грина 220, 226, 234, 236
Формула Моавра 315
— Френе 85, 97
Фундаментальная форма 350
Фундаментальный определитель 363
— тензор 363, 368

Центральная ось системы 73
— сила 90
Циклическая перестановка 14, 88
— постоянная 211
Циркуляция вектора 117, 164, 166, 170
— от ускорения 269
— скорости 269, 270

Частная производная 128

Эвклидова плоскость 385
Эвклидово пространство 347, 353, 366, 368, 384, 385, 392, 393, 394
Экспериментальные законы электромагнетизма 279
Электрическая сила 251
Электрический заряд 250
— потенциал 251
Электрическое поле 251, 279
Электромагнитная энергия 383
Электромагнитное поле 279
Электромагнитные явления 279
Электростатика 250
Электростатическое поле 161, 195, 279
Элементарная работа силы 91
Энергия магнитного поля 283
Энергия электромагнитного поля 283

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к седьмому изданию 3
Из предисловия ко второму изданию 3
Предисловие к четвертому изданию 3
Предисловие к пятому и шестому изданиям 3

Глава I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определение скаляра и вектора. Равенство векторов 5
§ 2. Сложение, вычитание и разложение векторов. Умножение векторов на скаляр. Единичные векторы 8
§ 3. Проекция вектора на какое-либо направление. Координаты вектора. Правая и левая системы координат. Аналитическое выражение равенства, сложения и вычитания векторов 23
§ 4. Преобразование координат. Преобразование составляющих вектора при переходе от одной системы координат к другой 28
§ 5. Скалярное или внутреннее произведение двух векторов. Его свойства 35
§ 6. Векторное, или внешнее, произведение двух векторов. Изображение площадей векторами. Вектор замкнутой поверхности. Свойства векторного произведения. Полярные и аксиальные векторы. Приложения к статике и кинематике 44
§ 7. Произведения трех векторов. Их свойства 59
§ 8. Векторные уравнения 67

Глава II

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

§ 9. Переменные векторы, зависящие от скалярного аргумента. Годограф вектора. Дифференцирование вектора по скалярному аргументу. Формулы дифференцирования. Интегрирование по скалярному аргументу 77
§ 10. Дифференцирование вектора, отнесенного к подвижной системе координат 98
§ 11. Функции от векторного аргумента. Скалярное и векторное поле. Поверхности уровня. Векторные линии 101
§ 12. Градиент. Его свойства. Линейный интеграл. Потенциал 103
§ 13. Производная вектора по направлению. Градиент одного вектора по другому 124
§ 14. Поток вектора через поверхность. Расхождение вектора. Его аналитическое выражение. Теорема Гаусса. Источники 130
§ 15. Оператор Гамильтона. Некоторые применения 148

§ 16. Циркуляция вектора вдоль контура. Вихрь вектора. Его составляющие. Теорема Стокса 164
§ 17. Некоторые формулы с дифференциальными операциями. Дифференциальные операции второго порядка. Применения 174
§ 18. Криволинейные координаты 194
§ 19. Определение вектора по его вихрю и расхождению 209
§ 20. Различные векторные поля. Поверхностные расхождение и вихрь . . . 240
§ 21. Переменные поля в сплошной среде 256

Глава III

АФИННЫЕ ОРТОГОНАЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ

§ 22. Понятие афинного ортогонального тензора. Примеры тензоров 284
§ 23. Сложение и разложение тензоров 291
§ 24. Умножение тензора на вектор 295
§ 25. Произведение тензоров 307
§ 26. Симметричные тензоры. Тензорный эллипсоид 317
§ 27. Главные оси тензора. Главные значения тензора. Инварианты тензора 320
§ 28. Дифференцирование тензора по скалярному аргументу 325
§ 29. Расхождение тензора. Применение к теории упругости 336

Глава IV

ЭЛЕМЕНТЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ТЕНЗОРОВ

§ 30. Общее определение вектора и тензора 345
§ 31. Тензорная алгебра 356
§ 32. Фундаментальный тензор 362
§ 33. Дифференциальные уравнения геодезических линий. Символы Кристоффеля и их свойства 376
§ 34. Тензорная производная вектора и тензора 384
§ 35. Параллельный перенос вектора 392
§ 36. Некоторые применения 401
§ 37. Тензор Римана-Кристоффеля 412
Предметный указатель 420

ОПЕЧАТКИ И ИСПРАВЛЕНИЯ

Страница	Строка	Напечатано	Должно быть
31	3 сн.	$= \sin A$	$= c \sin A$
113	9 сн.	$\varphi \lg r_1$	$\varphi = \lg r_1$
154	8 сн.	$\int\limits_V ([\nabla \cdot \nabla)\, a +$	$\int\limits_V ((\nabla \cdot \nabla)\, a +$
199	10 сн.	$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi}$	$\frac{\partial \psi}{\partial \varphi}$
206	6 св.	$M\ (g_2,\ g_2,\ g_3)$	$M\ (g_1,\ g_2,\ g_3)$
255	19 сн.	сидим	видим
306	10 сн.	что a, b, c	что если a, b, c
311	13 св.	$\mathfrak{r}$	$\mathfrak{r}'$
341	10 св.	$d.x_1\,(1 + \Phi_1)$	$dx_1\,(1 + \Phi_{11})$

Н. Е. Кочин