В. Ф. КОЛЧИН
Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ
В. П. ЧИСТЯКОВ

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

В. Ф. КОЛЧИН, Б. А. СЕВАСТЬЯНОВ,
В. П. ЧИСТЯКОВ

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1976

517.8
К 61
УДК 519.21

Случайные размещения. В. Ф. Колчин, Б. А. Севастьянов, В. П. Чистяков. Главная редакция физико-математической литературы, изд-во «Наука», 1976.

Дается систематическое изложение интенсивно развивающегося в течение последних десяти лет направления в теории вероятностей, связанного со случайными размещениями. Исследуются асимптотические свойства законов распределения числа ячеек с заданным числом частиц в различных схемах размещения частиц по ячейкам. Для растущего числа частиц и ячеек дан весь спектр предельных теорем. Рассматриваемые задачи имеют многочисленные применения в математической статистике, теории автоматов, статистической физике, вычислительной технике, астрономии, биологии и т. п. Книга рассчитана на студентов, аспирантов и научных работников, занимающихся теорией вероятностей и ее приложениями.

Библ.— 99 назв.

К $\frac{20203-031}{053(02)-76}$ 64-76

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Комбинаторные задачи и методы занимают значительное место в исследованиях по теории вероятностей. Среди многочисленных работ в этой области можно выделить несколько направлений: комбинаторные задачи в теории случайных процессов, задачи, связанные со случайными отображениями и случайными графами, задачи размещения частиц по ячейкам.

В последнее десятилетие заметные усилия были направлены на изучение задач о случайном размещении частиц по ячейкам. Среди этих задач наиболее известной является «классическая задача о дробинках». Пусть n дробинок независимо друг от друга бросают в N ящиков. Как распределена случайная величина $\mu_0(n, N)$, равная числу пустых ящиков?

Этой «классической задаче о дробинках» можно дать несколько наглядных интерпретаций.

Например, при случайном отображении множества из n точек в себя каждая из этих n точек случайно и независимо переходит в одну из точек множества. Этому отображению соответствует случайный граф с n вершинами, каждая из которых случайным образом соединяется дугой с одной из вершин.

Величина $\mu_0(n, n)$ в этом случае является числом вершин нулевой кратности (т. е. не имеющих ни одного прообраза). Известны и другие формулировки этой и близких к ней задач. Например, в задаче о днях рождения $\mu_0(n, 365)$ есть число дней в году, на которые не приходятся дни рождения n случайно взятых человек; в задаче о коллекционере речь идет о количестве марок или открыток, которые надо приобрести, чтобы получить полный комплект, состоящий из N штук, если приобретение очередного экземпляра происходит каждый раз независимо и случайно и т. д.

Внимание к схемам размещения описанного выше вида является отражением общего повышения интереса к комбинаторным задачам, который вызван, с одной стороны, возросшими перечислительными возможностями вычислительных машин, а с другой стороны — развитием методов асимптотического анализа. Различные схемы случайных размещений находят многочисленные применения в математической статистике, теории автоматов, статистической физике, вычислительной технике, астрономии, биологии и т. п. В задачах размещения находят применение многие асимптотические методы теории вероятностей: метод моментов, метод перевала, метод «сопровождающих» схем (когда сложная схема заменяется близкой к ней более простой схемой), метод сведения к суммам независимых и зависимых случайных величин, метод сведения к условным распределениям независимых случайных величин и др.

Разнообразие и сложность используемых методов вместе с простотой и наглядностью формулировок делают задачи о размещении хорошими объектами для демонстрации асимптотических методов теории вероятностей в педагогической практике.

Излагаемые нами результаты получены в основном в последние десять лет.

Книга состоит из восьми глав. В первых двух главах изучаются равновероятные размещения. Получен весь спектр предельных теорем для числа пустых ящиков μ_0 и чисел ящиков μ_r с фиксированным заполнением r. В главе III даны обобщения результатов первых двух глав на полиномиальное размещение. В главе IV доказывается сходимость $\mu_0(n, N)$ к пуассоновским или гауссовским процессам, когда заполнение ящиков n шарами происходит последовательно. В главе V предельные теоремы глав II и III используются для расчетов статистического критерия «пустых ящиков» и его обобщений. Остальные главы посвящены некоторым обобщенным схемам размещения. В частности, в главе VI изучаются размещения со случайным числом частиц, а в главе VII — размещения частиц комплектами. В главе VIII одна обобщенная схема размещения используется для изучения циклов случайных подстановок.

Книга доступна читателям, знакомым с обычными курсами математического анализа и теории вероятностей. Все литературные ссылки даются в последнем параграфе каждой главы. Обзор литературы по случайным размещениям до 1973 г. содержится в статье В. Ф. Колчина и В. П. Чистякова [34], изданной ВИНИТИ в серии «Итоги науки».

В книге принята следующая нумерация параграфов, формул, теорем, лемм, следствий, замечаний. В каждой главе имеется своя нумерация параграфов, в каждом параграфе имеется своя нумерация формул, теорем и т. п. При ссылке внутри одного параграфа называется только этот номер, при ссылке внутри одной главы на формулу, теорему и т. п. другого параграфа добавляется номер параграфа. При ссылке на параграф, теорему, формулу и т. д. другой главы добавляется еще номер главы. Например, § 2.3 означает § 3 гл. II; формула (3.5) означает формулу (5) из § 3 той же главы, где дается ссылка; формула (8.3.5) означает формулу (5) в § 3 главы VIII. Аналогично на теорему 2 из § 3 главы

IV мы будем ссылаться как на теорему 2 в том же параграфе, как на теорему 3.2 — в другом параграфе той же главы и как на теорему 4.3.2 — в другой главе.

При написании книги работа авторов распределялась следующим образом: В. Ф. Колчин (гл. II, VIII), Б. А. Севастьянов (гл. I, II, III, IV, VI, VII), В. П. Чистяков (гл. I, II, III, V).

Мы пользуемся здесь случаем, чтобы поблагодарить редактора книги Андрея Михайловича Зубкова, чьи замечания и критика способствовали улучшению изложения и исправлению неточностей.

1974 г.

В. Ф. Колчин
Б. А. Севастьянов
В. П. Чистяков

ГЛАВА I
КЛАССИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА О ДРОБИНКАХ

§ 1. Число пустых ящиков

Для проверки статистической гипотезы H_0 о том, что выборка, состоящая из независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взята из непрерывного распределения $F(x)$, применяется иногда так называемый критерий «пустых ящиков». Он состоит в следующем. Точки $z_0 = -\infty < z_1 < \ldots < z_{N-1} < z_N = \infty$ выбираются так, что $F(z_k) - F(z_{k-1}) = 1/N$, $k = 1, 2, \ldots, N$. Критерий строится на основе статистики μ_0, равной числу полуинтервалов $(z_{k-1}, z_k]$, в которые не попало ни одного наблюдения x_i. Этот критерий имеет следующий вид: если $\mu_0 \leqslant C$, то гипотеза H_0 принимается, если $\mu_0 > C$, то гипотеза H_0 отвергается. Константа C выбирается из условия, что ошибка первого рода, т. е. вероятность отвергнуть гипотезу H_0, если она верна, равна заданному фиксированному значению.

Критерий «пустых ящиков» привлекателен своей простотой. Он проще других (например, критерия Колмогорова или χ^2-критерия) по вычислениям, а это важно при массовом его применении. Вопрос о расчете критерия «пустых ящиков» связан со следующей классической задачей о дробинках.

Пусть имеется N ящиков. В эти ящики независимо друг от друга случайно бросаются n дробинок. Предполагается, что вероятность попадания любой фиксированной дробинки в j-й ящик равна $1/N$ для всех $j = 1, 2, \ldots, N$. Обозначим $\mu_0 = \mu_0(n, N)$ число пустых ящиков. Нетрудно видеть, что эта случайная величина имеет то же самое распределение, что и статистика, на основе которой строится критерий «пустых ящиков».

Задача о числе пустых ящиков в описанной выше схеме служит моделью многих реальных явлений из самых разных разделов естествознания, техники и других областей приложения теории вероятностей и математической статистики. Критерий «пустых ящиков» может быть полезен при проверке гипотезы о равномерности распределения каких-либо объектов в ограниченной части пространства (например, звезд в части космического пространства, особей какой-либо биологической популяции в ее ареале и т. п.). При расчете процесса функционирования сложных систем иногда приходится делать упрощающие предположения, приводящие к схеме размещения дробинок по ящикам или, что то же самое, частиц по ячейкам. Далее мы будем иногда говорить о размещении дробинок по ящикам, а иногда — частиц по ячейкам.

Закон распределения числа пустых ящиков $\mu_0(n, N)$ задается формулами

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} = C_N^k\left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \mathbf{P}\{\mu_0(n, N-k) = 0\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = 0\} = \sum_{l=0}^{N} C_N^l (-1)^l \left(1 - \frac{l}{N}\right)^n. \quad (2)$$

Докажем (1) и (2). Пусть A_i — событие, состоящее в том, что i-я ячейка осталась пустой, $\overline{A}_i$ — событие, дополнительное к A_i. Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant N} \mathbf{P}\left\{A_{i_1} \ldots A_{i_k} \overline{A}_{j_1} \ldots \overline{A}_{j_{N-k}}\right\}, \quad (3)$$

где $\{j_1, \ldots, j_{N-k}\} = \{1, 2, \ldots, N\} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}$. В сумме (3) все слагаемые равны друг другу, а их число равно C_N^k. По теореме умножения вероятностей

$$\mathbf{P}\left\{A_{i_1} \ldots A_{i_k} \overline{A}_{j_1} \ldots \overline{A}_{j_{N-k}}\right\} = \\ = \mathbf{P}\{A_{i_1} \ldots A_{i_k}\} \mathbf{P}\left\{\overline{A}_{j_1} \ldots \overline{A}_{j_{N-k}} \middle| A_{i_1} \ldots A_{i_k}\right\},$$

где

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} \ldots A_{i_k}\} = \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \quad (4)$$

и $\mathbf{P}\left\{\overline{A}_{j_1}\ldots\overline{A}_{j_{N-k}}\ \middle|\ A_{i_1}\ldots A_{i_k}\right\} = \mathbf{P}\{\mu_0(n, N-k)=0\}$.
Отсюда следует (1). Для доказательства (2) надо воспользоваться формулой вероятности суммы событий

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n,N)>0\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right\} =$$
$$= \sum_i \mathbf{P}(A_i) - \sum_{i<j}\mathbf{P}(A_i A_j) + \sum_{i<j<k}\mathbf{P}(A_i A_j A_k) - \ldots$$

Формула (2) вытекает отсюда с помощью (4). Для вычислений иногда вместо (1) и (2) удобнее пользоваться рекуррентной формулой

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n+1,N)=k\} =$$
$$= \left(1-\frac{k}{N}\right)\mathbf{P}\{\mu_0(n,N)=k\} + \frac{k+1}{N}\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)=k+1\}, \tag{5}$$

которая доказывается с помощью формулы полной вероятности.

Точные формулы (1), (2) и рекуррентная формула (5) при больших n и N неудобны для анализа распределения $\mu_0(n, N)$. Поэтому представляют интерес другие методы изучения характеристик $\mu_0(n, N)$. Моменты $\mu_0(n, N)$ можно получить из равенства

$$\mu_0(n, N) = \theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_N, \tag{6}$$

где $\theta_i=1$, если i-й ящик остался пустым, и $\theta_i=0$ в противном случае. Тогда

$$\mathbf{M}\mu_0(n,N) = \sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}\theta_i,$$

а так как $\mathbf{M}\theta_i = \mathbf{P}\{\theta_i=1\} = \left(1-\frac{1}{N}\right)^n$, то

$$\mathbf{M}\mu_0(n,N) = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n. \tag{7}$$

Введем обозначение для «обобщенной степени»

$$x^{[k]} = x(x-1)\ldots(x-k+1), \qquad x^{[0]}=1. \tag{8}$$

Так как $\mu_0^{[2]} = \mu_0^2-\mu_0$ и $\theta_i^2=\theta_i$, то имеем $\mu_0^{[2]} = \sum_{i\neq j}\theta_i\theta_j$, откуда следует, что

$$\mathbf{M}\mu_0^{[2]} = \sum_{i\neq j} \mathbf{M}\theta_i\theta_j = \sum_{i\neq j} \mathbf{P}\{\theta_i = \theta_j = 1\}$$

и

$$\mathbf{M}\mu_0^{[2]} = N(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n. \tag{9}$$

В общем случае при любом натуральном k

$$\mathbf{M}\mu_0^{[k]} = \sum_{i_1\ldots i_k}^{*} \mathbf{P}\left\{\theta_{i_1} = \ldots = \theta_{i_k} = 1\right\}, \tag{10}$$

где суммирование $\sum^*$ производится по всем $N^{[k]}$ упорядоченным наборам $(i_1, \ldots, i_k)$ с попарно неравными индексами. Из (10) имеем

$$\mathbf{M}\mu_0^{[k]} = N^{[k]}\left(1-\frac{k}{N}\right)^n. \tag{11}$$

Из равенств (7) и (9) находим дисперсию

$$\mathbf{D}\mu_0 = N(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^n + N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n - N^2\left(1-\frac{1}{N}\right)^{2n}. \tag{12}$$

Теорема 1. *При всех n, N имеет место неравенство*

$$\mathbf{M}\mu_0(n, N) \leqslant Ne^{-\alpha}, \tag{13}$$

где $\alpha = n/N$. Если $n, N \to \infty$ и $\alpha = o(N)$, то

$$\mathbf{M}\mu_0 = Ne^{-\alpha} - \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha} + O\left(\frac{\alpha(1+\alpha)e^{-\alpha}}{N}\right) \tag{14}$$

и

$$\mathbf{D}\mu_0 = Ne^{-\alpha}(1-(1+\alpha)e^{-\alpha}) + O\left(\alpha(1+\alpha)e^{-\alpha}\left(e^{-\alpha}+\frac{1}{N}\right)\right). \tag{15}$$

Доказательство. Неравенство (13) следует из (7) и неравенства $1-\frac{1}{N} < e^{-1/N}$. Утверждение (14) следует из (7), если воспользоваться формулой Тейлора

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} + O(x^3):$$

$$\mathbf{M}\mu_0 = N\left(1-\frac{1}{N}\right)^n = N\exp\left(-\frac{n}{N} - \frac{n}{2N^2} + O\left(\frac{n}{N^3}\right)\right) =$$
$$= Ne^{-\alpha}\left(1 - \frac{\alpha}{2N} + O\left(\frac{\alpha+\alpha^2}{N^2}\right)\right) =$$
$$= Ne^{-\alpha} - \frac{\alpha}{2}e^{-\alpha} + O\left(\frac{\alpha(1+\alpha)}{N}e^{-\alpha}\right). \qquad (16)$$

Аналогично выводится (15) из (9), (12) и (16). Подставляя асимптотические разложения

$$\mathbf{M}\mu_0^{[2]} = (N^2-N)\exp\left\{-n\left(\frac{2}{N}+\frac{2}{N^2}+O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right\} =$$
$$= (N^2-N)e^{-2\alpha}\left(1-\frac{2\alpha}{N}+O\left(\frac{\alpha+\alpha^2}{N^2}\right)\right) =$$
$$= N^2e^{-2\alpha} - Ne^{-2\alpha}(1+2\alpha) + O(\alpha(1+\alpha)e^{-2\alpha}),$$
$$(\mathbf{M}\mu_0)^2 = N^2e^{-2\alpha} - N\alpha e^{-\alpha} + O(\alpha(1+\alpha)e^{-2\alpha})$$

в (12), получаем (15).

Пользуясь асимптотическими формулами (14) и (15), выделим пять областей изменения n, $N\to\infty$, в которых закон распределения $\mu_0(n, N)$ ведет себя асимптотически по-разному. Область изменения n, $N\to\infty$, для которой $0<c_1\leqslant\alpha\leqslant c_2<\infty$, где c_1, c_2 — константы, назовем *центральной областью.* В центральной области $\mathbf{M}\mu_0$ и $\mathbf{D}\mu_0$ растут асимптотически пропорционально N и

$$\lim_{\frac{n}{N}\to\alpha}\frac{\mathbf{D}\mu_0}{\mathbf{M}\mu_0} = 1-(1+\alpha)e^{-\alpha} < 1.$$

Если

$$\alpha\to\infty \text{ и } \mathbf{M}\mu_0\to\lambda<\infty, \qquad (17)$$

то мы будем говорить, что n, N или α изменяются в *правой области.* В этом случае в силу (15) имеем $\mathbf{D}\mu_0\to\lambda$. Из (17) следует

$$\alpha = \ln N - \ln\lambda + o(1). \qquad (18)$$

Левой областью будем называть те n, $N\to\infty$, для которых

$$\frac{n^2}{2N} \to \lambda < \infty. \tag{19}$$

В левой области $\alpha \longrightarrow 0$ и из (15) и (14) вытекает

$$\mathbf{D}\mu_0 \sim N\frac{\alpha^2}{2} \to \lambda, \tag{20}$$

$$\mathbf{M}\mu_0 = N - n + \frac{N\alpha^2}{2} + o(1) = N - n + \lambda + o(1). \tag{21}$$

В левой области число частиц мало по сравнению с числом ячеек. Поэтому почти все они располагаются в ячейках по одной. Если бы все непустые ячейки содержали по одной частице, то число пустых ячеек равнялось бы $N-n$. Превышение числом пустых ячеек уровня $N-n$, равное $\mu_0-(N-n)$, в левой области имеет, согласно (20) и (21), одинаковые предельные дисперсию и математическое ожидание.

Левую промежуточную область определим соотношениями

$$\alpha \to 0, \quad \frac{N\alpha^2}{2} \to \infty, \tag{22}$$

при которых $\mathbf{M}(\mu_0-N+n) \longrightarrow \infty$, $\mathbf{D}\mu_0 \longrightarrow \infty$ и $\frac{\mathbf{D}\mu_0}{\mathbf{M}\mu_0} \to 0$. *Правую промежуточную область* определим соотношениями

$$\alpha \longrightarrow \infty, \quad \mathbf{M}\mu_0 \longrightarrow \infty; \tag{23}$$

в этой области $\alpha - \ln N \longrightarrow -\infty$, $\mathbf{D}\mu_0 \longrightarrow \infty$ и $\frac{\mathbf{D}\mu_0}{\mathbf{M}\mu_0} \to 1$.

Как мы увидим ниже, выделенные области соответствуют разным предельным теоремам для μ_0. Наиболее просто методом моментов доказывается

Теорема 2. *В правой области*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{24}$$

где $\lambda = \lim \mathbf{M}\mu_0$.

Доказательство. Подставляя (17) в (11), имеем

$$\mathbf{M}\mu_0^{[k]} = N^{[k]}\left(1 - \frac{k}{N}\right)^n \sim N^k e^{-kn/N} = N^k e^{-\alpha k} \to \lambda^k.$$

Предельные значения факториальных моментов $\mathbf{M}\mu_0^{[k]}$ совпадают с факториальными моментами распределения Пуассона, а так как распределение Пуассона однозначно определяется моментами, то отсюда следует (24).

Теорема доказана.

Метод моментов удобен, когда рассматривается последовательность нецентрированных и ненормированных случайных величин. При исследовании сходимости распределений последовательности целочисленных случайных величин к нормальному распределению приходится и центрировать, и нормировать. В этом случае метод моментов оказывается менее удобным. При доказательстве нормальности довольно часто используются характеристические функции, которые легко получаются из производящих функций

$$F_{n,N}(x) = \mathbf{M}x^{\mu_0(n,N)}, \qquad |x| \leqslant 1. \tag{25}$$

Положим

$$\Phi^{(N)}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n N^n}{n!} F_{n,N}(x). \tag{26}$$

Теорема 3. *Функция* $\Phi^{(N)}(x, z)$ *имеет следующий вид*:

$$\Phi^{(N)}(x, z) = (e^z + x - 1)^N. \tag{27}$$

Доказательство. Разобьем множество ящиков на две группы по N_1 и $N_2 = N - N_1$ ящиков соответственно. Вероятность события $\{\mu_0(n, N) = k\}$ запишем по формуле полной вероятности, фиксируя числа дробинок n_1 и n_2, попавших в выбранные группы:

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} = \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{k_1+k_2=k} C_n^{n_1} \left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_1} \left(\frac{N_2}{N}\right)^{n_2} \times$$
$$\times \mathbf{P}\{\mu_0(n_1, N_1) = k_1\} \mathbf{P}\{\mu_0(n_2, N_2) = k_2\}.$$

Умножим обе части этого равенства на $\frac{z^n N^n}{n!} x^k$ и $\frac{z^{n_1} z^{n_2} N^{n_1} N^{n_2}}{n!} x^{k_1} x^{k_2}$ соответственно и просуммируем по всем n, k. Тогда будем иметь

$$\Phi^{(N)}(x, z) = \sum_{n_1, n_2=0}^{\infty} \sum_{k_1, k_2=0}^{\infty} \frac{N_1^{n_1} N_2^{n_2}}{n_1! n_2!} z^{n_1} z^{n_2} x^{k_1} x^{k_2} \times$$
$$\times \mathbf{P}\{\mu_0(n_1, N_1) = k_1\} \mathbf{P}\{\mu_0(n_2, N_2) = k_2\}.$$

Слагаемые в правой части этого равенства представляются в виде произведения двух множителей

$$\frac{N_l^{n_l}}{n_l!} z^{n_l} x^{k_l} \mathbf{P}\{\mu_0(n_l, N_l) = k_l\}, \qquad l = 1, 2,$$

и следовательно, правая часть может быть представлена в виде произведения двух рядов, равных $\Phi^{(N_1)}(x, z)$ и $\Phi^{(N_2)}(x, z)$ соответственно. Таким образом,

$$\Phi^{(N)}(x, z) = \Phi^{(N_1)}(x, z) \Phi^{(N_2)}(x, z).$$

Отсюда

$$\Phi^{(N)}(x, z) = [\Phi^{(1)}(x, z)]^N. \tag{28}$$

Так как

$$F_{n,1}(x) = \mathbf{M} x^{\mu_0(n, 1)} = \begin{cases} 1, & n > 0, \\ x, & n = 0, \end{cases}$$

то

$$\Phi^{(1)}(x, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} F_{n,1}(x) = e^z + x - 1.$$

Отсюда и из (28) следует утверждение теоремы.

Воспользовавшись формулой Коши, из (26) и (27) получим для $F_{n,N}(x)$ выражение в виде контурного интеграла

$$F_{n,N}(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{N^n} \oint (e^z + x - 1)^N \frac{dz}{z^{n+1}}, \tag{29}$$

где интеграл берется по любому замкнутому контуру, охватывающему точку $z=0$. Если в (29) положить $x=0$, то получим

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = 0\} = \frac{1}{2\pi i} \frac{n!}{N^n} \oint (e^z - 1)^N \frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{30}$$

Все факториальные моменты μ_0 можно вычислить с помощью формулы

$$\mathbf{M}\mu_0^{[k]} = \left.\frac{d^k F_{n,N}(x)}{dx^k}\right|_{x=1}.$$

Положим $\mathbf{M}\mu_0^{[k]} = m_k(n, N)$. Дифференцируя k раз равенство (26) в точке $x=1$ и учитывая (27), получим

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n N^n}{n!} m_k(n, N) = N^{[k]} e^{z(N-k)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N^{[k]} (N-k)^n.$$

Отсюда

$$m_k(n, N) = N^{[k]} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^n.$$

Этот же результат (см. (11)) был получен выше с помощью представления $\mu_0(n, N)$ в виде суммы (6).

Отметим еще один полезный факт. Введем случайные величины $\delta_1 = 1$, δ_l, $l=2, \ldots, N-1, N$, где δ_l — число дробинок, брошенных с момента заполнения $l-1$ ящиков до заполнения l ящиков. Величины δ_l независимы и имеют геометрические распределения:

$$\mathbf{P}\{\delta_l = m\} = \left(\frac{l-1}{N}\right)^{m-1} \left(1 - \frac{l-1}{N}\right), \quad l = 2, \ldots, N. \tag{31}$$

Случайная величина

$$\nu_k = \delta_1 + \delta_2 + \ldots + \delta_k \tag{32}$$

является наименьшим номером испытания, при котором впервые заполнится точно k ящиков. Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{P}\{\nu_k \leqslant n\} = \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) \leqslant N-k\}. \tag{33}$$

Равенство (33) позволяет сводить изучение одной случайной величины к изучению другой.

§ 2. Число испытаний до заполнения k ящиков

Будем рассматривать при $N \to \infty$ асимптотическое поведение величины ν_k, равной наименьшему числу дробинок, при котором будет занято k ящиков. Величина ν_k представляется в виде суммы (1.32) независимых случайных величин δ_l, имеющих распределения (1.31). Производящая функция величины δ_l равна

$$\mathbf{M}x^{\delta_l}=\left(1-\frac{l-1}{N}\right)\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{l-1}{N}\right)^{m-1}x^m=\left(1-\frac{l-1}{N}\right)\frac{x}{1-\frac{l-1}{N}x}. \tag{1}$$

Дифференцируя (1) k раз по x и полагая $x=1$, получим

$$\mathbf{M}\delta_l^{[k]}=k!\,\frac{N}{l-1}\left(\frac{l-1}{N-l+1}\right)^k,\qquad l\geqslant 2, \tag{2}$$

и, в частности,

$$\begin{gathered}\mathbf{M}\delta_l=\frac{N}{N-l+1},\qquad \mathbf{M}\delta_l^{[2]}=\frac{2N(l-1)}{(N-l+1)^2},\\ \mathbf{D}\delta_l=\frac{N^2}{(N-l+1)^2}-\frac{N}{N-l+1},\qquad 1\leqslant l\leqslant N.\end{gathered} \tag{3}$$

Отсюда для $\nu_k=\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k$ получим

$$\mathbf{M}\nu_k=N\sum_{l=N-k+1}^{N}\frac{1}{l},\qquad \mathbf{D}\nu_k=N^2\sum_{l=N-k+1}^{N}\frac{1}{l^2}-\mathbf{M}\nu_k. \tag{4}$$

Найдем для $\mathbf{M}\nu_k$ и $\mathbf{D}\nu_k$ асимптотические формулы при $k,\ N\longrightarrow\infty$.

Теорема 1. *Если $N\longrightarrow\infty$ и $k=N-c$, где $c\geqslant 0$ — фиксированное целое число, то*

$$\mathbf{M}\nu_k=N\ln N+O(N),\qquad \mathbf{D}\nu_k=d_cN^2-N\ln N+O(N), \tag{5}$$

где

$$d_0=\frac{\pi^2}{6},\qquad d_c=\frac{\pi^2}{6}-\sum_{n=1}^{c}\frac{1}{n^2},\qquad c\geqslant 1.$$

Доказательство. Обозначим $[x]$ целую часть x. Интегрируя неравенства $x^{-1}\leqslant[x]^{-1}\leqslant(x-1)^{-1}$ в пределах от $N-k+2$ до $N+1$, получим

$$\ln(N+1)-\ln(N-k+2)\leqslant\sum_{l=N-k+2}^{N}\frac{1}{l}\leqslant \leqslant\ln N-\ln(N-k+1). \tag{6}$$

Отсюда и из (4) следует первая формула в (5). Вторая формула в (5) следует из (4) и равенств

$$\sum_{l=c+1}^{N} \frac{1}{l^2} = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} - \sum_{l=1}^{c} \frac{1}{l^2} - \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{l^2},$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{l=N+1}^{\infty} \frac{1}{l^2} = O\left(\frac{1}{N}\right), \qquad \sum_{l=1}^{0} \frac{1}{l^2} = 0.$$

Теорема 2. *Если* $N \longrightarrow \infty$,

$$\frac{k}{N} = \gamma_N \leqslant 1 - \varepsilon \quad (\varepsilon > 0), \qquad \frac{k^2}{N} \to \infty, \tag{7}$$

то

$$\begin{aligned} \mathbf{M}\nu_k &= N \ln \frac{1}{1-\gamma_N} + O(1), \\ \mathbf{D}\nu_k &= N \left(\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N} - \ln \frac{1}{1-\gamma_N}\right) + O(1), \end{aligned} \tag{8}$$

$$m_3(l) = \mathbf{M}|\delta_l - \mathbf{M}\delta_l|^3 = O\left(\frac{l}{N}\right) \tag{9}$$

равномерно по $l = 1, 2, \ldots, k$.

Доказательство. Первая формула в (8) сразу следует из (4) и (6). Интегрируя неравенства

$$\frac{1}{x^2} \leqslant \frac{1}{[x]^2} \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}$$

в пределах от $N-k+2$ до $N+1$, получим

$$\frac{k-1}{(N+1)(N-k+2)} \leqslant \sum_{l=N-k+2}^{N} \frac{1}{l^2} \leqslant \frac{k-1}{N(N-k+1)} \tag{10}$$

и, следовательно,

$$\sum_{l=N-k+1}^{N} \frac{1}{l^2} = \frac{1}{N} \frac{\gamma_N}{1-\gamma_N} + O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Отсюда и из (4) получим вторую формулу (8). Докажем оценку (9).

Положим $p_N = (l-1)/N$. Так как

$$1 < \mathbf{M}\delta_l = \frac{1}{1-p_N} \leqslant \frac{1}{\varepsilon}, \qquad l = 1, \ldots, k,$$

то

$$m_3(l)=\sum_{m=1}^{[\mathbf{M}\delta_l]}\left(\frac{1}{1-p_N}-m\right)^3 p_N^{m-1}(1-p_N)+$$
$$+\sum_{m=[\mathbf{M}\delta_l]+1}^{\infty}\left(m-\frac{1}{1-p_N}\right)^3 p_N^{m-1}(1-p_N)\leqslant$$
$$\leqslant \mathbf{M}\delta_l\frac{p_N^3}{(1-p_N)^2}+\sum_{m=2}^{\infty}m^3p_N^{m-1}\leqslant p_N\left(\frac{1}{\varepsilon^3}+\sum_{m=2}^{\infty}m^3\varepsilon^{m-2}\right).$$

Отсюда следует (9). Теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $N\to\infty$ *и* $\frac{k^2}{2N}\to\lambda$ $(0<\lambda<\infty)$, *то*

$$\mathbf{M}\nu_k=k+\lambda+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),\qquad \mathbf{D}\nu_k=\lambda+O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Доказательство. Представим разность ν_k-k в виде

$$\nu_k-k=(\delta_2-1)+\ldots+(\delta_k-1). \tag{11}$$

Из формул (3) получим, что равномерно по $l=2, \ldots, k$

$$\mathbf{M}(\delta_l-1)=\frac{\frac{l-1}{N}}{1-\frac{l-1}{N}}=\frac{l-1}{N}+O\left(\frac{k^2}{N^2}\right),$$

$$\mathbf{D}(\delta_l-1)=\left(\frac{1}{1-\frac{l-1}{N}}\right)^2-\frac{1}{1-\frac{l-1}{N}}=\frac{l-1}{N}+O\left(\frac{k^2}{N^2}\right).$$

Сумма правых частей каждой из этих формул по l от 2 до k равна $\lambda+O(1/\sqrt{N})$, так как $O(k^3/N^2)=O(1/\sqrt{N})$. Отсюда и из (11) следует утверждение теоремы.

Найдем теперь предельные распределения ν_k.

Теорема 4. *Если* $N\to\infty$, $k=N-c$, *где* $c\geqslant 0$ — *фиксированное целое число, то*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k}{N}-\ln N<x\right\}=\sum_{l=0}^{c}\frac{1}{l!}(e^{-x})^l\exp\{-e^{-x}\}.$$

Доказательство. В равенстве (1.33)

$$\mathbf{P}\{\nu_k\leqslant n\}=\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)\leqslant c\} \tag{12}$$

положим $n=[N(x+\ln N)]$. Тогда $\alpha=\frac{n}{N}=\ln N+x_N$, $x_N\longrightarrow x$. Следовательно, $n,\ N\longrightarrow\infty$ в правой области и по теореме 1.2 распределение $\mu_0(n,\ N)$ сходится к распределению Пуассона с параметром $\lambda=e^{-x}$. Таким образом, для правой части (12) при $N\longrightarrow\infty$ получим

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n,N)\leqslant c\}\to\sum_{l=0}^{c}\frac{\lambda^l}{l!}e^{-\lambda}.$$

Отсюда и из (12) следует утверждение теоремы.

Здесь мы воспользовались установленной выше предельной теоремой для μ_0. Следующую теорему для ν_k докажем непосредственно.

Теорема 5. *Если* $N\longrightarrow\infty,\ \frac{k}{N}=\gamma_N\to\gamma\ (0\leqslant\gamma<1)$, $\frac{k^2}{N}\longrightarrow\infty$, *то*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k-N\ln\frac{1}{1-\gamma_N}}{\sqrt{N\left(\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}-\ln\frac{1}{1-\gamma_N}\right)}}\leqslant x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

Доказательство. Покажем, что для суммы $\nu_k=\delta_1+\ldots+\delta_k$ выполняются условия теоремы Ляпунова. Воспользовавшись формулой (9), получим

$$\sum_{l=1}^{k}\mathbf{M}\,|\delta_l-\mathbf{M}\delta_l|^3=O(k\gamma_N)$$

и, следовательно,

$$\frac{\left(\sum\limits_{l=1}^{k}m_3(l)\right)^{1/3}}{\sqrt{\mathbf{D}\nu_k}}=\frac{O\left(k^{1/3}\gamma_N^{1/3}\right)}{N^{1/2}\left(\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}-\ln\frac{1}{1-\gamma_N}\right)^{1/2}}. \tag{13}$$

При $\gamma_N\longrightarrow\gamma$, $0<\gamma<1$, правая часть (13) равна $O(N^{-1/6})$. Если $\gamma_N\longrightarrow 0$, то

$$\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}-\ln\frac{1}{1-\gamma_N}\sim\frac{\gamma_N^2}{2}=\frac{1}{2}\left(\frac{k}{N}\right)^2$$

и, следовательно, правая часть (13) равна $O((k^2/N)^{-1/6})$. Таким образом, условия теоремы Ляпунова выполнены и асимптотическая нормальность ν_k доказана.

Теорема 6. *Если* $N \longrightarrow \infty$ *и* $\frac{k^2}{N} \to \lambda$, $0<\lambda<\infty$, *то*

$$\mathbf{P}\{\nu_k - k = m\} \to \frac{\lambda^m}{m!} e^{-\lambda}.$$

Доказательство. Из формул (1) и (1.32) следует, что

$$\mathbf{M}x^{\nu_k} = \prod_{l=1}^{k}\left(1-\frac{l-1}{N}\right)\frac{x}{1-\frac{l-1}{N}x}.$$

Умножая обе части этого равенства на x^{-k}, получим

$$\varphi_N(x) = \mathbf{M}x^{\nu_k - k} = \prod_{l=1}^{k}\left(1-\frac{l-1}{N}\right)\frac{1}{1-\frac{l-1}{N}x}.$$

Отсюда при $N \longrightarrow \infty$ находим

$$\ln \varphi_N(x) = \sum_{l=1}^{k}\left[\ln\left(1-\frac{l-1}{N}\right) - \ln\left(1-\frac{l-1}{N}x\right)\right] = \frac{k^2}{2N}(x-1) + O\left(\frac{k^3}{N^2}\right) \to \lambda(x-1)$$

и

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_N(x) = e^{\lambda(x-1)}.$$

Теорема доказана.

§ 3. Асимптотическая нормальность числа пустых ящиков

В этом параграфе приведены три доказательства асимптотической нормальности μ_0 в трех перекрывающихся областях:

1) в центральной области,
2) в центральной и левой промежуточной областях,
3) в центральной и правой промежуточной областях.

Теорема 1. *При* $N \longrightarrow \infty$ *в центральной области имеем*

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_0(n, N) - \mathbf{M}\mu_0}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_0}} \leqslant x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

Доказательство. В силу асимптотических формул (1.14), (1.15) для $\mathbf{M}\mu_0$, $\mathbf{D}\mu_0$ мы можем доказывать асимптотическую нормальность величины

$$\eta_N = \frac{\mu_0 - Ne^{-\alpha}}{\sigma\sqrt{N}}, \tag{1}$$

где $\sigma^2 = e^{-\alpha}(1-(1+\alpha)e^{-\alpha})$, $\alpha = n/N$. Если положить в (1.29) $x = x(t) = \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{N}}\right)$, то характеристическую функцию

$$\Psi_N(t) = \mathbf{M}e^{it\eta_N} = \exp\left(-\frac{ite^{-\alpha}\sqrt{N}}{\sigma}\right)\mathbf{M}\exp\left(\frac{it\mu_0}{\sigma\sqrt{N}}\right)$$

можно представить в виде

$$\Psi_N(t) = \exp\left(-\frac{ite^{-\alpha}\sqrt{N}}{\sigma}\right)\frac{1}{2\pi i}\frac{n!}{N^n}\oint(e^z + x(t) - 1)^N\frac{dz}{z^{n+1}}. \tag{2}$$

Преобразуем (2) следующим образом. Заменим $n!$ по формуле Стирлинга, положив $n = \alpha N$: $n! = \sqrt{2\pi\alpha N}(\alpha N)^{\alpha N}e^{-\alpha N}(1+o(1))$; в качестве контура интегрирования выберем окружность $z = \alpha e^{iu}$, $-\pi \leqslant u \leqslant \pi$. После этих преобразований и замены переменных $v = u\sqrt{\alpha N}$ при $N \to \infty$ получим

$$\Psi_N(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-i\frac{t\sqrt{N}}{\sigma}e^{-\alpha}\right)\int_{-\pi\sqrt{\alpha N}}^{\pi\sqrt{\alpha N}} A^N(v)\,e^{-iv\sqrt{\alpha N}}\,dv, \tag{3}$$

где

$$A(v) = A_1(v)\cdot A_2(v),$$

$$A_1(v) = \exp\left[\alpha\left(e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}} - 1\right)\right],$$

$$A_2(v) = 1 + \left(e^{\frac{it}{\sigma\sqrt{N}}} - 1\right)\exp\left(-\alpha e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}}\right).$$

Величину t будем считать фиксированной. Область интегрирования в (3) разобьем на три части:

$$S_1 = \{v\colon \delta\sqrt{\alpha N} \leqslant |v| \leqslant \pi\sqrt{\alpha N}\}, \quad 0 < \delta < 1,$$

$$S_2 = \left\{v\colon \sqrt[7]{N} \leqslant |v| \leqslant \delta\sqrt{\alpha N}\right\}, \quad S_3 = \left\{v : |v| \leqslant \sqrt[7]{N}\right\}.$$

В области S_1 при $N \longrightarrow \infty$

$$|A_1(v)| = \exp\left(-2\alpha \sin^2 \frac{v}{2\sqrt{\alpha N}}\right) \leqslant \exp\left(-2\alpha \sin^2 \frac{\delta}{2}\right) = q < 1, \tag{4}$$

так как в условиях теоремы $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$. Кроме того,

$$|A_2(v)| \leqslant 1 + \frac{C}{\sqrt{N}}, \tag{5}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная. Используя оценки (4) и (5), получим при $N \longrightarrow \infty$

$$\left|\int_{S_1} A^N(v)\, e^{-iv\sqrt{\alpha N}}\, dv\right| \leqslant 2\pi \sqrt{\alpha N}\, q^N \left(1 + \frac{C}{\sqrt{N}}\right)^N \to 0. \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что в области $S_2 \cup S_3$

$$\ln A_1(v) = -\frac{v^2}{2N} + iv\sqrt{\frac{\alpha}{N}} + O\left(\frac{|v|^3}{N^{3/2}}\right), \tag{7}$$

$$\ln A_2(v) = \frac{it}{\sigma\sqrt{N}} e^{-\alpha} + \frac{vt\sqrt{\alpha}}{\sigma N} e^{-\alpha} - \frac{t^2 e^{-\alpha}}{2N\sigma^2}(1 - e^{-\alpha}) + O\left(\frac{1 + |v|^3}{N^{3/2}}\right).$$

Эти разложения позволяют оценить $|A(v)|^N$ в области S_2:

$$|A(v)|^N < \exp\left\{-\frac{v^2}{2} + K_1\left(\frac{|v|^3}{\sqrt{N}} + |v| + 1\right)\right\}, \tag{8}$$

где $K_1 > 0$ — некоторая постоянная. Так как в S_2

$$\frac{|v|^3}{\sqrt{N}} = \frac{|v|}{\sqrt{\alpha N}} \sqrt{\alpha}\, v^2 < \delta \sqrt{\alpha}\, v^2, \qquad |v| = \frac{v^2}{|v|} \leqslant \frac{v^2}{\sqrt[7]{N}},$$

то, выбрав δ достаточно малым, из (8) получим

$$|A(v)|^N < e^{-c_\delta v^2}, \qquad c_\delta > 0.$$

Отсюда при $N \longrightarrow \infty$ находим

$$\left|\int_{S_2} A^N(v)\, e^{-iv\sqrt{\alpha N}} dv\right| \leqslant 2 \int_{\sqrt[7]{N}}^{\delta\sqrt{\alpha N}} e^{-c_\delta v^2} dv \to 0, \tag{9}$$

Оценки (7) и (9) позволяют заменить область интегрирования в (3) на S_3. Таким образом, при $N \longrightarrow \infty$

$$\Psi_N(t) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-i\frac{t\sqrt{N}}{\sigma}e^{-\alpha}\right) \int\limits_{-\sqrt[7]{N}}^{\sqrt[7]{N}} A^N(v)\, e^{-iv\sqrt{\alpha N}}\,dv. \tag{10}$$

Из формул (7) в области $|v| \leqslant \sqrt[7]{N}$ находим

$$\ln\left[e^{-iv\sqrt{\alpha N}} \cdot A^N(v) \cdot \exp\left(-i\frac{t\sqrt{N}}{\sigma}e^{-\alpha}\right)\right] =$$

$$= -\frac{v^2}{2} + \frac{vt\sqrt{\alpha}}{\sigma}e^{-\alpha} - \frac{t^2}{2\sigma^2}(e^{-\alpha} - e^{-2\alpha}) + O\left(\frac{1+|v|^3}{\sqrt{N}}\right) =$$

$$= -\frac{t^2}{2\sigma^2}(1-(1+\alpha)e^{-\alpha})\,e^{-\alpha} - \frac{1}{2}\left(v - \frac{t\sqrt{\alpha}}{\sigma}e^{-\alpha}\right)^2 + O\left(N^{-1/14}\right).$$

Подставляя эту оценку в (10), получим

$$\Psi_N(t) \sim e^{-t^2/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\sqrt[7]{N}}^{\sqrt[7]{N}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(v - \frac{t\sqrt{\alpha}}{\sigma}e^{-\alpha}\right)^2\right] \times$$

$$\times \left(1 + O\left(N^{-1/14}\right)\right) dv \to e^{-t^2/2}.$$

Отсюда следует утверждение теоремы.

Приведем теперь второе доказательство асимптотической нормальности, которое проходит в центральной и правой промежуточной областях.

Положим

$$\varphi_{n,m}(t) = F_{m,N}(x)\, x^{-(N+n-m)e^{-n/N}}, \qquad x = \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{N}}\right),$$

$$F_{m,N}(x) = \mathbf{M}x^{\mu_0(m,N)}, \quad \sigma^2 = e^{-n/N}\left[1 - \left(1 + \frac{n}{N}\right)e^{-n/N}\right]. \tag{11}$$

Отметим, что функция $\varphi_{n,n}(t)$ совпадает с характеристической функцией $\Psi_N(t)$ случайной величины (1).

Лемма 1. *Если при $n, N \longrightarrow \infty$*

$$Ne^{-n/N} \to \infty, \quad n/N \geqslant \alpha_0 > 0,$$

то

$$|\varphi_{n,m}(t)-\varphi_{n,n}(t)|=o\left(\frac{\ln^3 N}{\sqrt{N}}\right)$$

равномерно по всем m, *удовлетворяющим неравенству*

$$|m-n|\leqslant\sqrt{n}\ln n.$$

Доказательство. Умножим равенство (1.5)

$$\mathbf{P}\{\mu_0(m+1,N)=k\}=\left(1-\frac{k}{N}\right)\mathbf{P}\{\mu_0(m,N)=k\}+\\+\frac{k+1}{N}\mathbf{P}\{\mu_0(m,N)=k+1\}$$

на x^k и просуммируем по $k\geqslant 0$. После несложных преобразований получим

$$F_{m+1,N}(x)-F_{m,N}(x)=\frac{1}{N}\left(\frac{1}{x}-1\right)\sum_{k=0}^{\infty}kx^k\mathbf{P}\{\mu_0(m,N)=k\}. \tag{12}$$

Заменим k в равенстве (12) на $(k-\mathbf{M}\mu_0)+\mathbf{M}\mu_0$. Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}|k-\mathbf{M}\mu_0|\,\mathbf{P}\{\mu_0=k\}\leqslant\sqrt{\mathbf{D}\mu_0},$$

то из (12) получим

$$F_{m+1,N}(x)-F_{m,N}(x)=\\=F_{m,N}(x)\left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{\mathbf{M}\mu_0}{N}+O\left(\frac{|x-1|\sqrt{\mathbf{D}\mu_0}}{N}\right).$$

Заменяя здесь $F_{m+1,N}$ и $F_{m,N}$ на $\varphi_{n,m+1}$ и $\varphi_{n,m}$ по формулам (11), найдем

$$\varphi_{n,m+1}(t)-\varphi_{n,m}(t)=\\=\varphi_{n,m}(t)\left[x^{e^{-n/N}}-1+\left(\frac{1}{x}-1\right)\frac{\mathbf{M}\mu_0}{N}x^{e^{-n/N}}\right]+\\+O\left(\frac{|x-1|\sqrt{\mathbf{D}\mu_0}}{N}\right). \tag{13}$$

В условиях леммы при $N\to\infty$

$$\frac{n}{N}=o(\ln N),\qquad \frac{m}{N}=\frac{n}{N}+o\left(\frac{\ln^{3/2}N}{\sqrt{N}}\right).$$

Воспользовавшись формулами (1.14), (1.15), получим

$$\frac{\mathbf{M}\mu_0(m, N)}{N} = e^{-n/N}\left(1 + o\left(\frac{\ln^{3/2} N}{\sqrt{N}}\right)\right), \quad \frac{\mathbf{D}\mu_0(m, N)}{N} = O(\sigma^2).$$

Кроме того,

$$\frac{1}{x} - 1 = -\frac{it}{\sigma\sqrt{N}} + O\left(\frac{1}{\sigma^2 N}\right), \qquad |x-1| = O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\right),$$

$$x^{e^{-n/N}} - 1 = \frac{it}{\sigma\sqrt{N}} e^{-n/N} + O\left(\frac{e^{-2n/N}}{\sigma^2 N}\right).$$

Отсюда и из (13) следует

$$\varphi_{n,m+1}(t) - \varphi_{n,m}(t) = o\left(\frac{\ln^{3/2} N}{N}\right).$$

Так как

$$|\varphi_{n,m}(t) - \varphi_{n,n}(t)| \leqslant \sum_{l \in D_n} |\varphi_{n,l+1}(t) - \varphi_{n,l}(t)|, \tag{14}$$

где $D_n = \{l: |l-n| < \sqrt{n}\ln n\}$, то левая часть (14) не превосходит $o\left(\frac{\ln^3 N}{\sqrt{N}}\right)$. Лемма доказана.

Положим

$$K_{n,N}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{n^m}{m!} e^{-n} \varphi_{n,m}(t), \tag{15}$$

где $\varphi_{n,m}(t)$ определено формулами (11).

Лемма 2. *Если при n, $N \to \infty$*

$$Ne^{-n/N} \to \infty, \qquad \frac{n}{N} \geqslant \alpha_0 > 0,$$

то

$$\lim_{N\to\infty} K_{n,N}(t) = e^{-t^2/2}.$$

Доказательство. В равенстве

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{N^m}{m!} z^m \mathbf{M} x^{\mu_0(m,N)} = (e^z + x - 1)^N$$

заменим функции $F_{m,N}(x) = \mathbf{M}x^{\mu_0(m,N)}$, выразив их при помощи (11) через $\varphi_{n,m}(t)$. Полагая в полученном равенстве

$$z = \frac{n}{N} x^{e^{-n/N}},$$

после некоторых преобразований найдем

$$K_{n,N}(t) = y^{-(N+n)} e^{n(y-1)} \left[1 + (x-1)\, e^{-ny/N}\right]^N, \tag{16}$$

где

$$x = \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{N}}\right), \qquad y = \exp\left(\frac{it}{\sigma\sqrt{N}} e^{-n/N}\right). \tag{17}$$

Нетрудно проверить, что при $N \to \infty$

$$\begin{aligned} x - 1 &= \frac{it}{\sigma\sqrt{N}} - \frac{t^2}{2\sigma^2 N} + O\left(\frac{1}{(\sigma\sqrt{N})^3}\right), \\ y - 1 &= \frac{it}{\sigma\sqrt{N}} e^{-n/N} - \frac{t^2}{2\sigma^2 N} e^{-2n/N} + O\left(\frac{e^{-3n/N}}{(\sigma\sqrt{N})^3}\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Используя формулы (16)—(18), (11), для $\ln K_{n,N}(t)$ при $N \to \infty$ получим

$$\ln K_{n,N}(t) = -\frac{t^2}{2} + O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\right).$$

В условиях леммы $\sigma\sqrt{N} \to \infty$ при $N \to \infty$. Таким образом, из последнего равенства следует утверждение леммы.

Теорема 2. *В центральной и правой промежуточной областях случайная величина $\mu_0(n, N)$ асимптотически нормальна с параметрами* $(\mathbf{M}\mu_0, \sqrt{\mathbf{D}\mu_0})$.

Доказательство. Представим $K_{n,N}(t)$ в виде суммы

$$K_{n,N}(t) = K_{n,N}^{(1)}(t) + K_{n,N}^{(2)}(t),$$

где $K_{n,N}^{(1)}(t)$ — сумма тех слагаемых правой части (15), номер m которых удовлетворяет неравенству

$$\left|\frac{m-n}{\sqrt{n}}\right| \leqslant \ln n.$$

При $n, N \to \infty$

$$\left|K_{n,N}^{(2)}(t)\right| \leqslant \sum_{|m-n| > \sqrt{n}\ln n} \frac{n^m}{m!} e^{-n} = \mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_n - \mathbf{M}\xi_n}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_n}}\right| > \ln n\right\} \to 0,$$

где ξ_n — случайная величина, распределенная по закону Пуассона с параметром n.

По лемме 1

$$\varphi_{n,m}(t) = \varphi_{n,n}(t) + o\left(\frac{\ln^3 N}{\sqrt{N}}\right), \qquad \frac{|m-n|}{\sqrt{n}} < \ln n.$$

Подставив это выражение в $K_{n,N}^{(1)}(t)$, получим

$$K_{n,N}(t) = \varphi_{n,n}(t)\,\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_n - \mathbf{M}\xi_n}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_n}}\right| < \ln n\right\} + o(1). \tag{19}$$

Так как при $n, N \longrightarrow \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\left|\frac{\xi_n - \mathbf{M}\xi_n}{\sqrt{\mathbf{D}\xi_n}}\right| < \ln n\right\} \to 1$$

и по лемме 2

$$K_{n,N}(t) \to e^{-t^2/2},$$

то из (19) получим

$$\lim_{N\to\infty} \varphi_{n,n}(t) = e^{-t^2/2}.$$

Теорема доказана.

Осталось установить асимптотическую нормальность $\mu_0(n, N)$ в левой промежуточной области. Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 3. *Уравнение*

$$\frac{A(\varepsilon)}{1-x} = \exp\left(-\varepsilon\sqrt{\frac{x}{1-x} - \ln\frac{1}{1-x}}\right), \tag{20}$$

где $0 < c \leqslant A(\varepsilon) < 1$, $\varepsilon > 0$, *имеем на полуинтервале* $[0, 1)$ *единственный корень* $x(\varepsilon)$. *Кроме того, при* $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$x(\varepsilon) = 1 - A(\varepsilon) - \varepsilon A(\varepsilon)\sqrt{\frac{1-A(\varepsilon)}{A(\varepsilon)} + \ln A(\varepsilon)} + O(\varepsilon^2). \tag{21}$$

Доказательство. Функция $\sqrt{x(1-x)^{-1} + \ln(1-x)}$ на полуинтервале $[0, 1)$ монотонно возрастает от 0 до ∞ и, следовательно, правая часть (20) монотонно убывает от 1 до 0; левая часть (20) при возрастании x от 0 до 1 возрастает от $A(\varepsilon) < 1$ до ∞. Таким образом, существует единственное решение $x(\varepsilon)$, $0 < x(\varepsilon) < 1 - c$. При $\varepsilon \longrightarrow 0$ и $0 < x(\varepsilon) < 1 - c$ правая часть (20) равна

$1+O(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\frac{A(\varepsilon)}{1-x(\varepsilon)}=1+O(\varepsilon)$$

и

$$x(\varepsilon)=1-A(\varepsilon)+O(\varepsilon).$$

Подставив это выражение в (20), найдем следующее приближение (21). Лемма доказана.

Теорема 3. *В центральной и левой промежуточной областях случайная величина* $\mu_0(n, N)$ *асимптотически нормальна с параметрами* $(\mathbf{M}\mu_0, \sqrt{\mathbf{D}\mu_0})$.

Доказательство. В условиях теоремы верны формулы (1.14), (1.15); при $N\longrightarrow\infty$

$$\mathbf{D}\mu_0\sim N\sigma^2=Ne^{-\alpha}[1-(1+\alpha)e^{-\alpha}]\to\infty.$$

В равенстве

$$\mathbf{P}\{\nu_k\leqslant n\}=\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)\leqslant N-k\} \tag{22}$$

положим

$$n=N\ln\frac{1}{1-\gamma_N}+x\sqrt{N\left(\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}-\ln\frac{1}{1-\gamma_N}\right)}+O(1), \tag{23}$$

где $\gamma_N=k/N$. Тогда при $N\longrightarrow\infty$ левая часть (22)

$$\mathbf{P}\{\nu_k\leqslant n\}=\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_k-N\ln\dfrac{1}{1-\gamma_N}}{\sqrt{N\left(\dfrac{\gamma_N}{1-\gamma_N}-\ln\dfrac{1}{1-\gamma_N}\right)}}\leqslant x\right\}\to$$

$$\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du \tag{24}$$

согласно теореме 2.5, если выполнены условия этой теоремы:

$$N\to\infty,\quad \frac{k}{N}=\gamma_N\to\gamma\quad (0\leqslant\gamma<1),\quad \frac{k^2}{N}\to\infty. \tag{25}$$

Перепишем (23) в следующем виде:

$$\frac{e^{-\alpha}}{1-\gamma_N}=\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{N}}\sqrt{\frac{\gamma_N}{1-\gamma_N}-\ln\frac{1}{1-\gamma_N}}+O\left(\frac{1}{N}\right)\right).$$

Воспользовавшись леммой 3, получим

$$\gamma_N=1-e^{-\alpha}-\frac{x}{\sqrt{N}}\sqrt{e^{-\alpha}\left[1-(1+\alpha)e^{-\alpha}\right]}+O\left(\frac{1}{N}\right),$$

или

$$k=N(1-e^{-\alpha})-x\sqrt{N\sigma^2}+O(1). \tag{26}$$

Отсюда в условиях доказываемой теоремы следуют соотношения (25). Таким образом, (24) доказано. Заменим $N-k$ в (22) по формуле (26):

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n,N)\leqslant N-k\}=\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_0-Ne^{-\alpha}}{\sigma\sqrt{N}}\leqslant x+O\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{N}}\right)\right\}.$$

Отсюда, из (22) и (24) получаем утверждение теоремы.

§ 4. Пуассоновские предельные распределения числа пустых ящиков

В § 1 методом моментов была доказана сходимость распределения $\mu_0(n, N)$ к пуассоновскому распределению в правой области. Этот результат использовался для доказательства теоремы 2.4 о предельном поведении величины ν_k, когда $N\longrightarrow\infty$ и $N-k=c=\mathrm{const}$. Теперь мы воспользуемся теоремой 2.6, описывающей поведение ν_k при $N\longrightarrow\infty$, $\frac{k^2}{2N}\to\lambda$, для исследования поведения $\mu_0(n, N)$ в левой области.

Теорема 1. *В левой области*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\{\mu_0(n,N)-(N-n)=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}.$$

Доказательство. В правой части равенства (1.33)

$$\mathbf{P}\{\nu_k\leqslant n\}=\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)\leqslant N-k\}$$

положим $k=n-m$, а в левой части этого равенства положим $n=k+m$. Получим

$$\mathbf{P}\{\nu_k \leqslant k+m\} = \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) - (N-n) \leqslant m\}. \qquad (1)$$

В левой области $\frac{n^2}{2N} = \lambda_N \to \lambda$ при $N \longrightarrow \infty$. Отсюда и из равенства $k=n-m$, где $m=\text{const}$, получим

$$\frac{k^2}{2N} \to \lambda.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 2.6, из которой следует, что левая часть (1) стремится к

$$\sum_{l=0}^{m} \frac{\lambda^l}{l!} e^{-\lambda}.$$

Отсюда и из (1) получаем утверждение теоремы 1.

§ 5. Сводка результатов о предельных распределениях числа пустых ящиков

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, дают полное описание всех невырожденных предельных распределений для $\mu_0(n, N)$. При $n, N \longrightarrow \infty$ доказаны следующие утверждения:

1) в левой области

$$\mathbf{M}\mu_0(n, N) \to \infty, \quad \mathbf{D}\mu_0(n, N) \to \lambda \ (\lambda > 0),$$

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) - (N-n) = k\} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda};$$

2) в левой и правой промежуточной областях, а также в центральной области

$$\mathbf{M}\mu_0(n, N) \to \infty, \quad \mathbf{D}\mu_0(n, N) \to \infty,$$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_0(n, N) - \mathbf{M}\mu_0(n, N)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_0(n, N)}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du;$$

3) в правой области

$$\mathbf{M}\mu_0(n, N) \to \lambda, \quad \mathbf{D}\mu_0(n, N) \to \lambda,$$

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n, N) = k\} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$$

Если в левой области $\mathbf{D}\mu_0(n, N)\to\lambda=0$, то $\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)=N-n\}\to 1$. В этом случае дробинок мало и они распределяются по одной.

Если в правой области $\mathbf{D}\mu_0(n, N)\to\lambda=0$, то дробинок много и $\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)=0\}\to 1$.

§ 6. Дальнейшие результаты. Литература

Рассматриваемая в этой главе схема размещения частиц встречается в литературе довольно часто. Теорема 1.2 о сходимости распределения $\mu_0(n, N)$ к пуассоновскому в правой области доказана Мизесом [86]. Эта теорема часто приводится в учебной литературе (см. С. Н. Бернштейн [4], Феллер [54], Реньи [92]). Закон Пуассона для левой области был установлен Бекеши [60]; в § 4 приводится другое доказательство. Асимптотическая нормальность $\mu_0(n, N)$ в центральной области была доказана методом моментов в работе Вейса [98], а в промежуточных областях асимптотическая нормальность установлена в работе Реньи [91], методы которой использованы в § 3. Формулы для производящих функций (1.27) следуют из более общих формул, приведенных в работе Б. А. Севастьянова, В. П. Чистякова [47].

Обозначим $\nu_m(N, k)$ число испытаний, после которых впервые k ящиков будут содержать не менее m дробинок каждый. Теоремы о предельном поведении величины $\nu_1(N, k)=\nu_k$ изложены в § 2; при этом частично была использована работа Реньи [91]. Асимптотическое поведение $\nu_m(N, k)$ в случае $N, k\longrightarrow\infty$, $N-k\leqslant c<\infty$, $m=\text{const}$ исследовалось в работах Эрдеша и Реньи [73] и Бекеши [61]. Асимптотические формулы для $\mathbf{M}\nu_m(N, N)$, $\mathbf{D}\nu_m(N, N)$ с различными уточнениями получены в работах Брайтона [65], Эрдеша, Реньи [73], Ньюмена, Шеппа [88]. Асимптотическая нормальность $\nu_m(N, k)$ при $N, k\longrightarrow\infty$, $m=\text{const}$, $\frac{k}{N}\to\lambda$ $(0<\lambda<1)$ доказана в работе Бекеши [61]. Исследование асимптотического поведения $\nu_m(N, k)$ в областях $\frac{k}{N}\to 0$ и $\frac{k}{N}\to 1$, $N-k\longrightarrow\infty$, а также когда $N\longrightarrow\infty$ и $m\longrightarrow\infty$, было проведено в работе Г. И. Ивченко [20]. Полное исследование всех предельных распределений $\nu_1(N, k)$

провели Баум, Биллингслей [59]. Исследования, связанные с последовательным заполнением, в неравновероятном случае (см. гл. III) провели Бартон и Дейвид [58] и Холст [82], а в схеме размещения частиц комплектами (см. гл. VII) аналогичные исследования провели Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведев [25].

Рассмотрим более детально задачи последовательного заполнения в следующей схеме. Пусть

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \xi_{n+1}, \ldots, \xi_{n+s-1}, \ldots \qquad (1)$$

— независимые случайные величины с распределениями вероятностей

$$\mathbf{P}\{\xi_i = k\} = a_k, \ k=1, \ldots, m, \ i=1, 2, \ldots, n+s-1, \ldots$$

Назовем s-цепочками векторы

$$\boldsymbol{\xi}_i = (\xi_i, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_{i+s-1}).$$

Очевидно, каждая s-цепочка может принимать $N = m^s$ различных значений. Первые $n+s-1$ членов последовательности (1) содержат n векторов $\boldsymbol{\xi}_i$. Придерживаясь обычной терминологии, мы можем говорить о размещении «дробинок»-векторов по $N = m^s$ ящикам. Однако испытания, связанные с размещениями, являются в этой схеме зависимыми. Изучение данной схемы представляет некоторый интерес для исследования псевдослучайных последовательностей, используемых при расчетах по методу Монте-Карло. Псевдослучайные последовательности часто получают на основе рекуррентных соотношений

$$X_{i+s} = g(X_{i+s-1}, \ldots, X_i) \bmod P, \qquad (2)$$

где $i = 1, 2, \ldots$, число s фиксировано, число P целое, g — целочисленная функция (см. С. М. Ермаков [17], гл. II, § 1). Если функция g сложная, то изучать свойства последовательности (2) довольно трудно. В этом случае может оказаться полезным вероятностный подход. Можно считать, что последовательность $\{X_i\}$ является случайной до первого повторения аргумента функции g. С этого момента члены последовательности будут, очевидно, повторяться. Таким образом, время до первого повторения в (2) можно оценить, изучив время до первого повторения s-цепочки в (1). В книге И. М. Соболя [48] (гл. I, § 2) приводится теорема о предельном распределении времени до первого повторения s-цепочки в (1) в случае, когда $s=1$. Там же отмечается, что нет аналогичных теорем даже для случая $s=2$. В 1973 г. значительно более общая теорема была доказана в работе А. М. Зубкова, В. Г. Михайлова [18]. Сформулируем их результаты.

Положим

$$\eta_{ij}=\begin{cases} 1, \text{ если } \xi_i=\xi_j, \\ 0, \text{ если } \xi_i\neq\xi_j, \end{cases} \qquad \varepsilon_{ij}=\begin{cases} 0, \text{ если } \xi_i=\xi_j, \\ 1, \text{ если } \xi_i\neq\xi_j. \end{cases}$$

Если векторы ξ_i и ξ_j совпали, то векторы ξ_{i+1} и ξ_{j+1} совпадут, если совпадут величины ξ_{i+s} и ξ_{j+s}. Поэтому при $|i-j|>s$

$$\mathbf{P}\{\xi_{i+1}=\xi_{j+1}|\xi_i=\xi_j\}=\mathbf{P}\{\xi_{i+s}=\xi_{j+s}\}=\sum_{k=1}^{m}a_k^2=A$$

(если $|i-j|\leqslant s$, то равенство, вообще говоря, не имеет места). Иными словами, совпадение приводит к целой серии совпадений, длина которой имеет асимптотически геометрическое распределение с производящей функцией

$$\frac{z(1-A)}{1-Az}. \tag{3}$$

Положим

$$\nu(s,n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\eta_{ij}\varepsilon_{i-1,j-1}, \qquad \zeta(s,n)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\eta_{ij},$$

$$\tau_s=\min\{n\colon \zeta(s,n)>0\}.$$

Таким образом, величина $\nu(s,n)$ равна числу серий повторений; $\zeta(s,n)$ — общее число повторений в $n+s-1$ испытаниях; τ_s — число испытаний до первого повторения. Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Если $n\to\infty$ и s, m, $a_1,\ldots,a_m$ меняются так, что*

$$\frac{n(n-1)}{2}A^s(1-A)\to\lambda>0, \qquad s^t n\left(\max_{1\leqslant i\leqslant m}a_i\right)^s\to 0$$

при любом t, *то*

1) $\mathbf{M}z^{\nu(s,n)} \to e^{\lambda(z-1)}, \qquad \mathbf{P}\{\nu(s, n) = k\} \to \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.$

2) *если* $A \longrightarrow \rho \in [0, 1)$, *то*

$$\mathbf{M}z^{\zeta(s,n)} \to \exp\left\{\lambda \frac{(1-\rho) z}{1-\rho z} - 1\right\}. \tag{4}$$

Теорема 2. *Если* $n \longrightarrow \infty$ *и* s, m, $a_1, \ldots, a_m$ *меняются так, что*

$$A^s \to 0, \qquad s^t \left(\frac{\max a_i}{\sqrt{A}}\right)^s \to 0$$

при любом t, *то*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\tau_s}{\sqrt{A^s(1-A)}} \leqslant x\right\} \to 1 - e^{-x^2/2}.$$

Предельное распределение (4) является распределением величины

$$\zeta(s, n) = \theta_1 + \theta_2 + \ldots + \theta_{\nu(s, n)},$$

где θ_i независимы и имеют распределение с производящей функцией (3), а число слагаемых $\nu(s, n)$ распределено по закону Пуассона. Теоремы 1 и 2 доказаны в работе А. М. Зубкова, В. Г. Михайлова [18]. Кроме того, в [18] получено предельное распределение величины $\max\{s\colon \zeta(s, n) > 0\}$. В доказательстве была использована теорема 3.2.1, приведенная Б. А. Севастьяновым в [46]. Различные обобщения результатов работы [18] получены В. Г. Михайловым ([37], [38], [39]).

Свойства последовательности (1) с $a_k = 1/m$ исследовал П. Ф. Беляев [3]; в работах [2], [1] П. Ф. Беляев изучал вероятности непоявления заданного числа s-цепочек в случае, когда последовательность (1) является цепью Маркова (простой или сложной). Некоторые результаты о числе непоявившихся состояний в цепях Маркова специального вида получены В. Ф. Колчиным, В. П. Чистяковым [33].

ГЛАВА II

РАВНОВЕРОЯТНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

§ 1. Производящие функции и моменты

В этой главе мы опять будем рассматривать схему равновероятных размещений, в которой n частиц независимо друг от друга размещаются в N ячейках, причем вероятность попадания каждой из частиц в фиксированную ячейку равна $1/N$. Обозначим $\mu_r(n, N)$ случайную величину, равную числу ячеек, в которых содержится ровно по r частиц, $r=0, 1, 2, \ldots$ Иногда вместо $\mu_r(n, N)$ мы будем писать короче $\mu_r(n)$ или μ_r. В главе I мы изучали асимптотические свойства закона распределения числа пустых ячеек μ_0. В этой главе мы исследуем свойства законов распределения μ_r при $n, N \longrightarrow \infty$.

Значения m_r случайных величин μ_r связаны двумя соотношениями

$$\sum_{r=0}^{n} m_r = N, \qquad \sum_{r=0}^{n} r m_r = n, \tag{1}$$

первое из которых дает общее число ячеек, а второе — общее число частиц. Если m_r удовлетворяют равенствам (1), то совместный закон распределения μ_r, $r=0, 1, \ldots$ $\ldots, n$, задается вероятностями

$$\mathbf{P}\{\mu_r = m_r,\ r = 0, 1, \ldots, n\} = \frac{N!n!}{N^n \prod\limits_{r=0}^{n} [(r!)^{m_r} \cdot m_r!]}; \tag{2}$$

при всех остальных значениях величин m_r вероятности $\mathbf{P}\{\mu_r=m_r, r=0, \ldots, n\}$ равны нулю.

Формула (2) получается следующим образом. Положим $\xi_{ij}=1$, если i-я частица попадает в j-ю ячейку (при некоторой их нумерации), и $\xi_{ij}=0$ в остальных случаях. Тогда каждой реализации размещения соответствует (0, 1)-матрица $\mathrm{H}=\|\xi_{ij}\|$ порядка $n\times N$, удовлетворяющая условиям $\sum_{j=1}^{N}\xi_{ij}=1$, $1\leqslant i\leqslant n$. Всего таких матриц N^n, и все они равновероятны. Обозначим $\eta_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_{ij}$ число частиц в j-й ячейке. Подсчитаем количество матриц H, у которых среди чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_N$ имеется ровно m_r таких, что $\eta_i=r$, $r=0, 1, \ldots, n$. Из любой матрицы H с заданными $\{m_r\}$ можно получить все остальные с теми же $\{m_r\}$, совершая всевозможные перестановки столбцов и строк. Всего таких перестановок $N!n!$ Однако среди всех перестановок столбцов имеется $m_0!m_1!\ldots m_n!$ перестановок, оставляющих матрицу H неизменной. Аналогично $2!)^{m_2}(3!)^{m_3}\ldots(n!)^{m_n}$ перестановок строк не изменяют матрицы H. Отсюда по классическому определению вероятности следует формула (2).

Для изучения законов распределения отдельных μ_r или многомерных законов распределения $\mu_{r_1}, \ldots, \mu_{r_s}$ формула (2) малопригодна. Поэтому представляют интерес другие способы изучения законов распределения μ_r и их характеристик.

Найдем сначала первые и вторые моменты μ_r. Введем индикаторы θ_{ri}, полагая $\theta_{ri}=1$, если в i-й ячейке содержится ровно r частиц, и $\theta_{ri}=0$ в остальных случаях. Тогда $\mu_r=\sum_{i=1}^{N}\theta_{ri}$ и $\mathbf{M}\mu_r=N\mathbf{P}\{\theta_{ri}=1\}$. Так как $\mathbf{P}\{\theta_{ri}=1\}=C_n^r\frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}$, то

$$\mathbf{M}\mu_r=NC_n^r\frac{1}{N^r}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n-r}. \tag{3}$$

Аналогично вычисляются вторые моменты. Если $r\neq t$, то

$$\mathbf{M}\mu_r\mu_t=\mathbf{M}\sum_{i,j=1}^{N}\theta_{ri}\theta_{tj}=\sum_{i,j=1}^{N}\mathbf{M}\theta_{ri}\theta_{tj}=$$
$$=\sum_{i\neq j}\mathbf{P}\{\theta_{ri}=\theta_{tj}=1\}=N(N-1)\frac{n^{[r+t]}}{r!t!N^{r+t}}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-r-t}, \tag{4}$$

так как $\theta_{ri}\theta_{ti}=0$. Учитывая, что $\theta_{ri}^2=\theta_{ri}$, имеем

$$\mathbf{M}\mu_r^2=\mathbf{M}\sum_{i,j=1}^{N}\theta_{ri}\theta_{rj}=\sum_{i=1}^{N}\mathbf{M}\theta_{ri}+\sum_{i\neq j}\mathbf{M}\theta_{ri}\theta_{rj}=$$
$$=\mathbf{M}\mu_r+N(N-1)\frac{n^{[2r]}}{(r!)^2N^{2r}}\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n-2r}. \qquad (5)$$

Из точных формул (3)—(5) можно получить асимптотику $\mathbf{M}\mu_r$ и $\mathbf{Cov}(\mu_r,\ \mu_t)$. Ниже мы будем обозначать $\alpha=n/N$, $p_r(\alpha)=\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}$. Мы иногда будем писать p_r вместо $p_r(\alpha)$.

Теорема 1. *При любых n, N и r имеет место неравенство*

$$\mathbf{M}\mu_r\leqslant Np_r(\alpha)e^{r/N}. \qquad (6)$$

Если n, $N\to\infty$ и $\alpha=o(N)$, то при фиксированных r и t

$$\mathbf{M}\mu_r=Np_r(\alpha)+p_r(\alpha)\left(r-\frac{\alpha}{2}-\frac{C_r^2}{\alpha}\right)+O\left(\frac{1}{N}\right), \qquad (7)$$

$$\mathbf{Cov}(\mu_r,\ \mu_t)\sim N\sigma_{rt}(\alpha), \qquad (8)$$

где

$$\sigma_{rr}(\alpha)=p_r(\alpha)\left(1-p_r(\alpha)-p_r(\alpha)\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}\right),$$
$$\sigma_{rt}(\alpha)=-p_r(\alpha)p_t(\alpha)\left(1+\frac{(\alpha-r)(\alpha-t)}{\alpha}\right). \qquad (9)$$

Доказательство. Неравенство (6) следует из формулы (3) и оценок $C_n^r\leqslant\frac{n^r}{r!}$, $1-\frac{1}{N}\leqslant e^{-1/N}$. Асимптотическая формула (7) при $r\geqslant2$ получается, если в (3) положить $C_n^r=\frac{1}{r!}\left(n^r-C_r^2n^{r-1}+O(n^{r-2})\right)$:

$$\mathbf{M}\mu_r=N\frac{n^r-C_r^2n^{r-1}+O(n^{r-2})}{r!N^r}\exp\left\{(n-r)\ln\left(1-\frac{1}{N}\right)\right\}=$$
$$=\frac{N}{r!}\left(\alpha^r-C_r^2\frac{\alpha^r}{N\alpha}+O\left(\frac{\alpha^{r-2}}{N^2}\right)\right)\times$$
$$\times\exp\left\{-(n-r)\left(\frac{1}{N}+\frac{1}{2N^2}+O\left(\frac{1}{N^3}\right)\right)\right\}=$$

$$= \frac{N}{r!}\alpha^r\left(1-\frac{C_r^2}{N\alpha}+O\left(\frac{1}{N^2\alpha^2}\right)\right)\exp\left(-\alpha-\frac{\alpha}{2N}+\frac{r}{N}\right)\times$$
$$\times\left(1+O\left(\frac{1+\alpha}{N^2}\right)\right)=\frac{N}{r!}\alpha^r e^{-\alpha}\left(1-\frac{C_r^2}{N\alpha}+O\left(\frac{1}{N^2\alpha^2}\right)\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{\alpha}{2N}+\frac{r}{N}\right)\left(1+O\left(\frac{1+\alpha^2}{N^2}\right)\right).$$

Отсюда следует (7). При $r<2$ остаточный член $O(1/N^2\alpha^2)$ равен 0. Асимптотика вторых моментов (8) получается аналогичным образом из формул (4), (5), (7) и $\mathbf{Cov}(\mu_r, \mu_t)=\mathbf{M}\mu_r\mu_t-\mathbf{M}\mu_r\mathbf{M}\mu_t$.

Далее мы будем придерживаться следующей терминологии. Если n, $N\to\infty$ так, что

$$0<c_1\leqslant\alpha=\frac{n}{N}\leqslant c_2<\infty, \tag{10}$$

где c_1 и c_2 — некоторые константы, то мы будем говорить, что n, $N\to\infty$ в *центральной области*. Из теоремы 1 вытекает, что в этом случае все $\mathbf{M}\mu_r$ и $\mathbf{D}\mu_r$ растут асимптотически пропорционально N и при $\alpha\to\alpha_0$

$$\lim_{n,N\to\infty}\frac{\mathbf{D}\mu_r}{\mathbf{M}\mu_r}=1-p_r(\alpha_0)-p_r(\alpha_0)\frac{(\alpha_0-r)^2}{\alpha_0}<1.$$

Рассмотрим сначала μ_r с $r\geqslant 2$. Область изменения n, $N\to\infty$, в которой

$$\alpha\to 0,\quad 0<\lim\mathbf{M}\mu_r=\lambda<\infty, \tag{11}$$

назовем *левой r-областью*. Нетрудно видеть, что в этой области $\lim\mathbf{D}\mu_r=\lambda$. Из (7) следует, что в этом случае

$$\lambda=\lim\mathbf{M}\mu_r=\lim N\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}=\lim\frac{n^r}{r!N^{r-1}}, \tag{12}$$

т. е. $n\sim(r!\lambda/N)^{1/r}N$. Обозначим $\bar{\mu}_r=\sum_{k>r}\mu_k$. Оценим в левой r-области $\mathbf{M}\bar{\mu}_r$ с помощью (6):

$$\mathbf{M}\bar{\mu}_r=\sum_{k=r+1}^{n}\mathbf{M}\mu_k\leqslant N\sum_{k=r+1}^{n}\frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha+\frac{k}{N}}\leqslant$$
$$\leqslant N\frac{\alpha^r}{r!}\sum_{k=1}^{\infty}\alpha^k=O(\alpha)\to 0.$$

Отсюда по неравенству Чебышева имеем в левой r-области

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r > 0\} \leqslant \mathbf{M}\mu_r \to 0. \tag{13}$$

В частности, отсюда следует, что в левой 2-области с вероятностью, стремящейся к 1, все μ_r с $r>2$ равны 0. Тогда из равенств (1)

$$\mu_0+\mu_1+\mu_2=N, \qquad \mu_1+2\mu_2=n$$

имеем

$$\mu_0=N-n+\mu_2, \qquad \mu_1=n-2\mu_2, \tag{14}$$

т. е. при

$$0<\frac{n^2}{2N}\to\lambda<\infty \tag{15}$$

асимптотические свойства случайных величин

$$\mu_2, \quad \mu_0-N+n, \qquad \frac{n-\mu_1}{2} \tag{16}$$

совпадают. Поэтому в дальнейшем будем считать, что условие (15) определяет левую r-область при $r=0, 1, 2$.

Назовем *левой промежуточной r-областью* при $r\geqslant 2$ те n, $N\longrightarrow\infty$, для которых

$$\alpha\to 0, \quad \lim \mathbf{M}\mu_r = \lim Np_r(\alpha) = \lim \frac{n^r}{r!N^{r-1}} = \infty. \tag{17}$$

В этом случае

$$\lim_{n,N\to\infty} \frac{\mathbf{D}\mu_r}{\mathbf{M}\mu_r} = 1. \tag{18}$$

Левая промежуточная r-область при $r=0, 1, 2$ будет определяться соотношениями

$$\frac{n}{N}\to 0, \qquad \frac{n^2}{2N}\to\infty. \tag{19}$$

Пусть теперь r — любое неотрицательное целое число. Область n, $N\longrightarrow\infty$, в которой

$$\alpha\to\infty, \quad \mathbf{M}\mu_r\to\lambda, \quad 0<\lambda<\infty, \tag{20}$$

назовем *правой r-областью*. В этой области также

$\mathbf{D}\mu_r \to \lambda$. Из условия (20) следует, что $N\dfrac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha} \to \lambda$, или

$$\alpha = r\ln\alpha + \ln N - \ln(r!\,\lambda) + o(1). \tag{21}$$

Отсюда имеем $\alpha = (1+o(1))\ln N$. Подставляя это выражение в (21), получаем, что в правой r-области

$$\alpha = \ln N + r\ln\ln N - \ln(r!\lambda) + o(1). \tag{22}$$

Область, в которой

$$\alpha \to \infty, \quad \mathbf{M}\mu_r \to \infty, \tag{23}$$

будем называть *правой промежуточной r-областью*. Из (23) следует, что в этой области

$$\alpha \longrightarrow \infty, \qquad \alpha - \ln N - r\ln\ln N \longrightarrow -\infty \tag{24}$$

и $\mathbf{D}\mu_r/\mathbf{M}\mu_r \to 1$. Обозначим $\underline{\mu}_r = \sum_{k=0}^{r-1}\mu_k$. Как видно из (22), в правой r-области

$$\mathbf{M}\underline{\mu}_r \to 0. \tag{25}$$

Отсюда следует по неравенству Чебышева, что $\mathbf{P}\{\underline{\mu}_r = 0\} \to 1$.

Итак, мы можем нарисовать следующую картину асимптотического поведения μ_r при $n, N \to \infty$ и при изменении α от 0 до ∞. При очень маленьких α, т. е. при $N\alpha^2 \longrightarrow 0$, с вероятностью, стремящейся к 1, $\mu_0 = N - n$, $\mu_1 = n$, а все остальные $\mu_r = 0$. Далее, в левой 2-области с ненулевой вероятностью $\mu_2 > 0$ и $\mathbf{M}\mu_2 \to \mathrm{const}$, а все остальные $\mu_r = 0$, $r = 3, 4, \ldots$ Если мы попадем в левую r-область, то μ_r будет положительна с ненулевой вероятностью, $\mathbf{M}\mu_r \to \mathrm{const}$, $\mu_s \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ для всех $s < r$, и $\mathbf{P}\{\mu_t = 0\} \longrightarrow 1$ для всех $t > r$. В центральной области при любом фиксированном r имеем $\mu_r \longrightarrow \infty$ по вероятности. В правой 0-области конечной и ненулевой становится сначала лишь μ_0. В правой r-области $\mathbf{P}\{\mu_0 = \ldots = \mu_{r-1} = 0\} \to 1$, $\mathbf{M}\mu_r \to \mathrm{const}$ и $\mu_r > 0$ с ненулевой вероятностью, а все остальные $\mu_t \xrightarrow{\mathbf{P}} \infty$ при любом фиксированном $t > r$.

Для изучения предельных законов распределения μ_r воспользуемся производящими функциями. Пусть $r_1<r_2<\ldots<r_s$ фиксированы. Обозначим

$$F_{n,r_1\ldots r_s}(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{k_1,\ldots,k_s} \mathbf{P}\{\mu_{r_1}=k_1, \ldots, \mu_{r_s}=k_s\}\, x_1^{k_1}\ldots x_s^{k_s} \tag{26}$$

и

$$\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_s}(z;\ x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{N^n z^n}{n!} F_{n,r_1\ldots r_s}(x_1, \ldots, x_s). \tag{27}$$

Теорема 2. *Производящая функция* (27) *имеет следующий вид*:

$$\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_N}(z;\ x_1, \ldots, x_s) = \left[e^z + \frac{z^{r_1}}{r_1!}(x_1-1) + \ldots + \frac{z^{r_s}}{r_s!}(x_s-1)\right]^N. \tag{28}$$

Доказательство. Разделим N ячеек на две группы по N_1 и $N-N_1=N_2$ ячеек. Так как с вероятностью $C_n^{n_1}\frac{N_1^{n_1}N_2^{n_2}}{N^n}$ из n частиц n_1 попадет в первую группу и $n_2=n-n_1$ — во вторую, то по формуле полной вероятности

$$F_{n,r_1\ldots r_s}(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{n_1+n_2=n} \frac{n!\,N_1^{n_1}N_2^{n_2}}{n_1!\,n_2!\,N^n} F_{n_1,r_1\ldots r_s}F_{n_2,r_1\ldots r_s},$$

откуда в силу определения (27) имеем

$$\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_s} = \Phi^{(N_1)}_{r_1\ldots r_s}\cdot\Phi^{(N_2)}_{r_1\ldots r_s}. \tag{29}$$

Из (29) следует, что $\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_s}=\left[\Phi^{(1)}_{r_1\ldots r_s}\right]^N$, и теперь для доказательства (28) достаточно установить равенство

$$\Phi^{(1)}_{r_1\ldots r_s}(z; x_1, \ldots, x_s) = e^z + \frac{z^{r_1}}{r_1!}(x_1-1) + \ldots + \frac{z^{r_s}}{r_s!}(x_s-1).$$

Последняя формула следует из того, что $\mathbf{P}\{\mu_r(n,\ 1)=0\}=1$ при $n\neq r$ и $\mathbf{P}\{\mu_r(r,\ 1)=1\}=1$.

Введем еще производящую функцию

$$\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_s}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^nN^n}{n!}\mathbf{P}\{\mu_{r_1}(n, N)=\ldots=\mu_{r_s}(n, N)=0\}.$$

Так как $\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_s}(z)=\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_s}(z;\ 0,\ \ldots,\ 0)$, то из теоремы 2 вытекает

Следствие 1.

$$\Phi^{(N)}_{r_1\ldots r_s}(z)=\left(e^z-\frac{z^{r_s}}{r_1!}-\ldots-\frac{z^{r_s}}{r_s!}\right)^N. \tag{30}$$

Полагая в (28) и (30) $s=1$, получаем

Следствие 2.

$$\Phi^{(N)}_r(z;\ x)=\left[e^z+\frac{z^r}{r!}(x-1)\right]^N, \tag{31}$$

$$\Phi^{(N)}_r(z)=\left(e^z-\frac{z^r}{r!}\right)^N. \tag{32}$$

С помощью (31) и (32) мы можем выразить вероятности $\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}$ через вероятности $\mathbf{P}\{\mu_r=0\}$.

Следствие 3. *Имеет место равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=$$
$$=C_N^k\frac{n^{[rk]}}{(r!)^kN^{rk}}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-rk}\mathbf{P}\{\mu_r(n-rk, N-k)=0\}. \tag{33}$$

Доказательство. Дифференцируя (31) k раз по x и полагая $x=0$, получаем

$$N^{[k]}\left(\frac{z^r}{r!}\right)^k\left(e^z-\frac{z^r}{r!}\right)^{N-k}. \tag{34}$$

Коэффициент при x^k в (31) равен функции (34), деленной на $k!$ Чтобы получить вероятность $\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}$, надо коэффициент при z^n в разложении функции (34) умножить на $\frac{n!}{N^nk!}$. Коэффициент при z^{n-kr} в разложении функции $\left(e^z-\frac{z^r}{r!}\right)^{N-k}$ равен

$$\frac{(N-k)^{n-kr}}{(n-kr)!}\mathbf{P}\{\mu_r(n-kr, N-k)=0\}.$$

Отсюда получаем (33).

Аналогично получаем многомерное обобщение (33):

Следствие 4. *Имеет место равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_i} = k_i,\ i = 1, \ldots, s\} =$$

$$= \frac{N^{[k]} \cdot n^{[(k,r)]}}{\prod\limits_{i=1}^{s} \left(k_i! \, (r_i!)^{k_i}\right)} \; \frac{1}{N^{(k,r)}} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-(k,r)} \times$$

$$\times \mathbf{P}\{\mu_{r_i}(n - (k, r), N - k) = 0,\ i = 1, \ldots, s\}, \qquad (35)$$

где $k = k_1 + \ldots + k_s$, $(k, r) = k_1 r_1 + \ldots + k_s r_s$.

И наконец, с помощью производящей функции (28) можно получить выражение для любых факториальных моментов:

Теорема 3. *При любых целых неотрицательных* k_i *имеет место формула*

$$\mathbf{M}\mu_{r_1}^{[k_1]} \ldots \mu_{r_s}^{[k_s]} = N^{[k]} \frac{n^{[(k,r)]}}{N^{(k,r)} (r_1!)^{k_1} \ldots (r_s!)^{k_s}} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-(r,k)}, \qquad (36)$$

где $k = k_1 + \ldots + k_s$, $(k, r) = \sum\limits_{i=1}^{s} k_i r_i$.

Доказательство. Вычислим производную функции (28):

$$\left.\frac{\partial^k \Phi}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_s^{k_s}}\right|_{x_1 = \ldots = x_s = 1} = N^{[k]} \left(\frac{z^{r_1}}{r_1!}\right)^{k_1} \ldots \left(\frac{z^{r_s}}{r_s!}\right)^{k_s} e^{z(N-k)}. \qquad (37)$$

Коэффициент при z^n в разложении левой и правой частей (37), умноженный на $n!/N^n$, дает равенство (36). Теорема доказана.

В частности, при $s = 1$ отсюда получаем

Следствие 5. *Факториальные моменты* μ_r *вычисляются по формуле*

$$\mathbf{M}\mu_r^{[k]} = N^{[k]} \frac{n^{[rk]}}{(r!)^k} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-rk}. \qquad (38)$$

§ 2. Асимптотическая нормальность в центральной области

Согласно теореме 1.1 в центральной области при любых r, t ковариация $\mathbf{Cov}(\mu_r, \mu_t)$ растет пропорционально N. Значит, в этом случае при фиксированных

$0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_s$ случайный вектор

$$\frac{\mu_{r_1} - \mathbf{M}\mu_{r_1}}{\sqrt{N}}, \quad \frac{\mu_{r_2} - \mathbf{M}\mu_{r_2}}{\sqrt{N}}, \; \ldots, \frac{\mu_{r_s} - \mathbf{M}\mu_{r_s}}{\sqrt{N}} \tag{1}$$

имеет предельную ковариационную матрицу

$$\mathbf{B} = \|\sigma_{r_i r_j}(\alpha)\|, \quad i,\ j = 1, \ldots, s, \tag{2}$$

где $\sigma_{rt}(\alpha)$ определяются формулами (1.9). Обозначим B^2 определитель ковариационной матрицы $\mathbf{B}$. Будем писать для краткости $\Delta_r = \alpha - r$. Тогда

$$B^2 = \left| x_i \delta_{ij} - p_{r_i r_j}\left(1 + \frac{\Delta_{r_i}\Delta_{r_j}}{\alpha}\right)\right|,$$

где $x_i = p_{r_i}$, $i = 1, \ldots, s$. Для вычисления B^2 разложим его в сумму по «переменным» $x_1, x_2, \ldots, x_s$ и их произведениям. Коэффициентами этого разложения будут диагональные миноры вида

$$\left| -p_{r_i} p_{r_j}\left(1 + \frac{\Delta_{r_i}\Delta_{r_j}}{\alpha}\right)\right| \tag{3}$$

разных порядков. Определитель (3) первого порядка равен $-p_{r_i}^2\left(1 + \frac{\Delta_{r_i}^2}{\alpha}\right)$, определитель (3) второго порядка равен $p_{r_i}^2 p_{r_j}^2 \frac{(\Delta_{r_i} - \Delta_{r_j})^2}{\alpha}$, а все определители высших порядков, как нетрудно проверить, равны нулю. Поэтому

$$B^2 = p_{r_1} \ldots p_{r_s}\left[1 - \sum_{k=1}^{s} p_{r_k}\left(1 + \frac{\Delta_{r_k}^2}{\alpha}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{s} \frac{p_{r_k} p_{r_l}}{\alpha}\left(\Delta_{r_k} - \Delta_{r_l}\right)^2\right]. \tag{4}$$

Если ввести обозначение $q = 1 - p_{r_1} - p_{r_2} - \cdots - p_{r_s}$, то (4) можно привести к другому виду:

$$B^2 = \frac{p_{r_1} \ldots p_{r_s} q}{\alpha}\left[\alpha - \sum_{k=1}^{s} p_{r_k}\Delta_{r_k}^2 - \frac{1}{q}\left(\sum_{k=1}^{s} p_{r_k}\Delta_{r_k}\right)^2\right]. \tag{5}$$

Лемма 1. *При любом $0 < \alpha < \infty$ справедливо неравенство $B^2 > 0$.*

Доказательство. В силу (5) неравенство $B^2>0$ равносильно неравенству

$$q\left(\alpha-\sum_{k=1}^{s} p_{r_k}\Delta_{r_k}^2\right)>\left(\sum_{k=1}^{s} p_{r_k}\Delta_{r_k}\right)^2. \qquad (6)$$

Так как $\sum\limits_{r=0}^{\infty} p_r=1$, $\sum\limits_{r=0}^{\infty} rp_r=\alpha$, $\sum\limits_{r=0}^{\infty} p_r\Delta_r=0$, $\sum\limits_{r=0}^{\infty} p_r\Delta_r^2=\alpha$, то неравенство (6) можно записать в виде

$$\sum_{r\notin S}^{\infty} p_r \sum_{r\notin S} p_r\Delta_r^2>\left(\sum_{r\notin S} p_r\Delta_r\right)^2, \qquad (7)$$

где $S=(r_1, \ldots, r_s)$. Неравенство (7) представляет собой неравенство Коши — Буняковского. Случай равенства здесь невозможен, поскольку для совпадения левой и правой частей (7) необходимо и достаточно, чтобы Δ_r, $r\notin S$, не зависело от r, но в нашем случае $\Delta_r=\alpha-r$. Лемма доказана.

Так как B^2 есть непрерывная функция от α, то из леммы 1 вытекает

Следствие 1. *Если* $0<\alpha_0\leqslant\alpha_1<\infty$, *то*

$$\min_{\alpha_0\leqslant\alpha<\alpha_1} B^2>0.$$

Далее нам еще понадобятся алгебраические допол-
следующими выражениями:
нения элементов $\sigma_{r_k r_l}$ матрицы (2), которые даются

$$B_{kk}=\frac{p_{r_1}\ldots p_{r_s}(q+p_{r_k})}{\alpha p_{r_k}}\left[\alpha-\sum_{i\neq k} p_{r_i}\Delta_{r_i}^2-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{q+p_{r_k}}\left(\sum_{i\neq k} p_{r_i}\Delta_{r_i}\right)^2\right], \qquad (8)$$

$$B_{kl}=p_{r_1}\ldots p_{r_s}\left[1+\frac{\Delta_{r_k}\Delta_{r_l}}{\alpha}-\right.$$
$$\left.-\sum_{i=1}^{s} p_{r_i}\frac{(\Delta_{r_i}-\Delta_{r_k})(\Delta_{r_i}-\Delta_{r_l})}{\alpha}\right], \quad k\neq l. \qquad (9)$$

Алгебраическое дополнение B_{kk} вычисляется так же, как и B^2. Для вычисления B_{kl}, $k\neq l$, поступаем следующим образом. Пусть $k<l$. Алгебраическое дополнение B_{kl} равно умноженному на $(-1)^{k+l}$ определителю матрицы (2), у которой вычеркнуты k-я строка и l-й столбец. Для вычисления этого определителя k-й столбец перенесем на $l-k-1$ мест вправо. Эта операция дает множитель $(-1)^{l-k-1}$. Полученный определитель будет иметь ту же структуру, что и определитель B^2, только $(l-1)$-я строка будет состоять из элементов вида $-p_{r_i}p_{r_l}\left(1+\frac{\Delta_{r_i}\Delta_{r_l}}{\alpha}\right)$, а $(l-1)$-й столбец — из элементов вида $-p_{r_i}p_{r_k}\left(1+\frac{\Delta_{r_i}\Delta_{r_k}}{\alpha}\right)$. Применяя использованный при вычислении B^2 метод, мы получаем (9).

Формулы (8) и (9) можно преобразовать и записать в следующем виде:

$$B_{kk}=\frac{B^2}{p_{r_k}}+\frac{B^2}{q}+\frac{p_{r_1}\ldots p_{r_s}}{\alpha q}\left(\Delta_{r_k}q+\sum_{i=1}^{s}p_{r_i}\Delta_{r_i}\right)^2, \tag{10}$$

$$B_{kl}=\frac{B^2}{q}+\frac{p_{r_1}\ldots p_{r_s}}{\alpha q}\left(\Delta_{r_k}q+\sum_{i=1}^{s}p_{r_i}\Delta_{r_i}\right)\times$$
$$\times\left(\Delta_{r_l}q+\sum_{i=1}^{s}p_{r_i}\Delta_{r_i}\right). \tag{11}$$

При $n, N\to\infty$ в центральной области мы получим локальную нормальную теорему для $\mu_{r_1}, \mu_{r_2}, \ldots, \mu_{r_s}$. Формулу (1.35) запишем в виде произведения

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_i}=k_i, \quad i=1, 2, \ldots, s\}=X_1\cdot X_2\cdot X_3, \tag{12}$$

где

$$X_1=\frac{N!}{(N-k)!k_1!\ldots k_s!}, \qquad X_2=\frac{n!}{(r_1!)^{k_1}\ldots(r_s!)^{k_s}N^n}, \tag{13}$$

$$X_3=\frac{(N')^{n'}}{n'!}\mathbf{P}\{\mu_{r_i}(n', N')=0, \quad i=1, 2, \ldots, s\},$$

$$N'=N-k,\ n'=n-(k, r), \qquad k=\sum_{i=1}^{s}k_i,\ (k, r)=\sum_{i=1}^{s}k_ir_i.$$

Асимптотические формулы для X_1 и X_2 при $N\to\infty$ легко получаются с помощью формулы Стирлинга. Множитель X_3 является коэффициентом при $z^{n'}$ в

(1.30), и поэтому

$$X_3 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z|=\mathrm{const}} \frac{1}{z}\left[\frac{A(z)}{z^{\gamma}}\right]^{\lambda} dz, \tag{14}$$

где $\lambda = N'$, $\gamma = n'/N'$,

$$A(z) = e^z - \frac{z^{r_1}}{r_1!} - \ldots - \frac{z^{r_s}}{r_s!}. \tag{15}$$

Асимптотическая формула для интеграла (14) будет получена методом перевала. Определим в правой полуплоскости функцию $f(z) = \ln A(z) - \gamma \ln z$ так, чтобы на действительной оси она была действительна. В качестве контура интегрирования возьмем окружность $|z| = x_\gamma$, где x_γ — действительный корень уравнения $f'(x) = 0$. Установим сначала существование корня x_γ. Запишем (15) в виде $A(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k$. Здесь $a_k \geqslant 0$ и $a_k > 0$ при $k > r_s$.

Лемма 2. *Если $a_0 = a_1 = \ldots = a_{n_1-1} = 0$, $a_{n_1} > 0$, то для любого $\gamma > n_1$ уравнение $f'(x) = 0$ имеет единственный действительный положительный корень x_γ.*

Доказательство. Уравнение $f'(x) = 0$ при $x > 0$ равносильно уравнению

$$xA'(x) - \gamma A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k-\gamma) a_k x^k =$$

$$= -\sum_{k=0}^{[\gamma]} (\gamma - k) a_k x^k + \sum_{k=[\gamma]+1}^{\infty} (k-\gamma) a_k x^k = 0,$$

или уравнению

$$G_\gamma(x) = -\sum_{k=n_1}^{[\gamma]} (\gamma - k) a_k x^{k-[\gamma]} +$$

$$+ \sum_{k=[\gamma]+1}^{\infty} (k-\gamma) a_k x^{k-[\gamma]} = 0.$$

Нетрудно видеть, что при $0 < x < x'$ имеет место неравенство $G_\gamma(x) < G_\gamma(x')$. Кроме того, $G_\gamma(x) \longrightarrow \infty$ при $x \longrightarrow \infty$, а если $\gamma > n_1$, то $G_\gamma(x) < 0$ при малых x. Отсюда следует утверждение леммы.

В следующей лемме устанавливается асимптотика интеграла (14).

Лемма 3. *Если при любом $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$, где $0 < \gamma_0 \leqslant \gamma_1 < \infty$ — некоторые постоянные, единственным корнем уравнения $f(x) = 0$ является x_γ и существует такое $\delta > 0$, что*

$$f''(x_\gamma) \geqslant \delta, \quad x_\gamma \geqslant \delta \quad (\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]),$$

то при $\lambda \to \infty$ равномерно по $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$

$$I_\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z| = x_\gamma} \frac{1}{z} \left[\frac{A(z)}{z^\gamma}\right]^\lambda dz =$$

$$= \frac{1}{x_\gamma \sqrt{2\pi f''(x_\gamma) \lambda}} e^{\lambda f(x_\gamma)} \left[1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\right)\right]. \quad (16)$$

Доказательство. Представим I_λ в виде суммы $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{\lambda f(z)} d\theta,$$

$$I_2 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi} \left[\frac{A(z)}{z^\gamma}\right]^\lambda d\theta, \quad z = x_\gamma e^{i\theta}, \quad \varepsilon > 0. \quad (17)$$

На окружности $|z| = x_\gamma$ при $z \neq x_\gamma$ ввиду того, что $a_k \geqslant 0$,

$$\left|\frac{A(z)}{z^\gamma}\right| < \frac{A(x_\gamma)}{x_\gamma^\gamma}.$$

Модуль I_2 оценим следующим образом:

$$|I_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \left[\frac{A(x_\gamma)}{x_\gamma^\gamma}\right]^\lambda \int\limits_{\varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi} |\Psi_\gamma(\theta)|^\lambda d\theta, \quad (18)$$

где $\Psi_\gamma(\theta) = A(x_\gamma e^{i\theta}) / A(x_\gamma)$ при любом $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$ представляет собой характеристическую функцию дискретного распределения с максимальным шагом, равным единице. Функция $\Psi_\gamma(\theta)$ непрерывно зависит от (γ, θ) при $\gamma_0 \leqslant \gamma \leqslant \gamma_1$, $0 \leqslant |\theta| \leqslant \pi$. Покажем, что

$$q = \sup_{\substack{\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1] \\ \varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi}} |\Psi_\gamma(\theta)| < 1. \quad (19)$$

Выберем последовательность $(\gamma_k, \theta_k) \to (\tilde{\gamma}, \tilde{\theta})$ при $k \to \infty$ так, чтобы $\lim\limits_{k\to\infty} |\Psi_{\gamma_k}(\theta_k)| = q$. Выберем из последовательности γ_k подпоследовательность $\gamma_{\tilde{k}}$ так, чтобы последовательность $\Psi_{\gamma_{\tilde{k}}}(\theta)$ имела предел $\Psi_{\tilde{\gamma}}(\theta)$. Тогда $q = |\Psi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\theta})|$. Так как коэффициенты в разложении $\Psi_{\gamma_k}(\theta)$ по степеням $e^{i\theta}$ не приближаются к 0 при $k \to \infty$, то максимальный шаг распределения, соответствующего $\Psi_{\tilde{\gamma}}(\theta)$, равен единице.

Следовательно,

$$q = |\Psi_{\tilde{\gamma}}(\tilde{\theta})| < 1, \quad \text{если } 0 < \varepsilon \leqslant |\theta| \leqslant \pi.$$

Из оценок (18) и (19) получаем

$$I_2 = O\left(\left[q \frac{A(x_\gamma)}{x_\gamma^\gamma}\right]^\lambda\right). \tag{20}$$

Так как $f(x_\gamma e^{i\theta}) = u(\theta) + iv(\theta)$, где $u(-\theta) = u(\theta)$ и $v(-\theta) = -v(\theta)$, то интеграл I_1 можно записать в виде

$$I_1 = \frac{1}{\pi} e^{\lambda u(0)} \int_0^\varepsilon \cos \lambda v(\theta)\, e^{-\lambda[u(0) - u(\theta)]} d\theta. \tag{21}$$

Функция $f(z)$ является аналитической в окрестности точки $z = x_\gamma$. Так как $f'(x_\gamma) = 0$, то

$$f(z) = f(x_\gamma) + \frac{f''(x_\gamma)}{2}(z - x_\gamma)^2 + \ldots$$

Поэтому при $z = x_\gamma e^{i\theta}$

$$f(x_\gamma e^{i\theta}) = f(x_\gamma) - \frac{f''(x_\gamma)}{2} x_\gamma^2 \theta^2 + \ldots$$

Нетрудно получить следующие разложения и оценки, равномерные по $|\theta| < \varepsilon$, $\gamma \in [\gamma_0, \gamma_1]$:

$$u(\theta) = u(0) - \frac{x_\gamma^2}{2} f''(x_\gamma)\, \theta^2 + O(\theta^3), \qquad v(\theta) = O(\theta^3). \tag{22}$$

Из последнего равенства следует, что

$$\cos \lambda v(\theta) = 1 + O(\lambda\theta^3). \tag{23}$$

Используя формулы (22) и (23) и полагая в (21) $\theta = \frac{1}{x_\gamma}\sqrt{\frac{2y}{\lambda f''(x_\gamma)}}$, получим $I_1 = I_{11} + I_{12}$, где

$$I_{11} = K(\lambda)\int_0^{\sqrt[4]{\lambda}} y^{-1/2}\left(1 + O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\exp\left(-y + O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)dy,$$

$$I_{12} = K(\lambda)\int_{\sqrt[4]{\lambda}}^{\varepsilon_1\lambda} y^{-1/2}\left(1 + O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)\exp\left(-y + O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right)dy,$$

$$K(\lambda) = \frac{e^{\lambda u(0)}}{x_\gamma \pi \sqrt{2\lambda f''(x_\gamma)}}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{1}{2}\varepsilon^2 f''(x_\gamma)\, x_\gamma^2.$$

Так как $\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}} = y\sqrt{\frac{y}{\lambda}} < y\sqrt{\varepsilon_1}$, то при достаточно малом ε_1 будем иметь для $0 < y < \varepsilon_1\lambda$

$$\exp\left(-y + O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) = O(e^{-y/2}), \quad y^{-1/2} O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right) = O(\sqrt{y})$$

и, следовательно,

$$I_{12} = O\left[K(\lambda)\int_{\sqrt[4]{\lambda}}^{\infty} \sqrt{y}\, e^{-y/2} dy\right] = O\left(\frac{K(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right). \tag{24}$$

В интеграле I_{11} имеем $O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right) \to 0$ равномерно по y. Таким образом,

$$I_{11} = K(\lambda)\int_0^{\sqrt[4]{\lambda}} y^{-1/2}\left(1 + O\left(\frac{y^{3/2}}{\sqrt{\lambda}}\right)\right) e^{-y} dy =$$

$$= K(\lambda)\int_0^{\infty} y^{-1/2} e^{-y} dy + O\left(\frac{K(\lambda)}{\sqrt{\lambda}}\right).$$

Отсюда, из формулы $\int_0^\infty y^{-1/2} e^{-y} dy = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ и из формул (20), (24) следует утверждение леммы.

Сформулируем теперь основную теорему.

Теорема 1. *В центральной области при* $n, N \longrightarrow \infty$ *равномерно по* $\alpha = \frac{n}{N} \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty$, *и* $k_{r_i} = Np_{r_i} + u_i \sqrt{N}$, $|u_i| \leqslant C < \infty$, *имеем*

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_i} = k_i,\ i = 1, \ldots, s\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi N)^{s/2} B} \exp\left(-\frac{1}{2B^2} \sum_{i,j=1}^{s} B_{ij} u_i u_j\right)\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \qquad (25)$$

где $p_r = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha}$, B^2 *и* B_{ij} *определяются формулами* (5), (8), (9).

Доказательство. Положим в формулах (13) $n = \alpha N$, $k_i = Np_{r_i} + u_i \sqrt{N}$. Тогда

$$n' = N[\alpha - (r, p)] - (r, u)\sqrt{N}, \qquad N' = Nq - u\sqrt{N},$$

где

$$u = \sum_{i=1}^{s} u_i, \ (r, p) = \sum_{i=1}^{s} r_i p_{r_i}, \ (r, u) = \sum_{i=1}^{s} r_i u_i, \ q = 1 - \sum_{i=1}^{s} p_{r_i}.$$

При $N \longrightarrow \infty$ с помощью формулы Стирлинга получим $\left(\text{заменяя } r_i! \text{ на } \alpha^{r_i} e^{-\alpha} p_{r_i}^{-1}\right)$

$$\ln X_1 = -\ln(2\pi N)^{s/2} - \ln\sqrt{p_{r_1} \ldots p_{r_s} q} -$$

$$-N\left(\sum_{i=1}^{s} p_{r_i} \ln p_{r_i} + q \ln q\right) + \sqrt{N}\left(u \ln q - \sum_{i=1}^{s} u_i \ln p_{r_i}\right) -$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{s} \frac{u_i^2}{p_{r_i}} + \frac{u^2}{q}\right) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right), \qquad (26)$$

$$\ln X_2 = \ln\sqrt{2\pi\alpha N} +$$

$$+ N\left[\alpha \ln \alpha - (p, r) \ln \alpha - \alpha q + \sum_{i=1}^{s} p_{r_i} \ln p_{r_i}\right] -$$

$$-\sqrt{N}\left[(r, u) \ln \alpha - \alpha u - \sum_{i=1}^{s} u_i \ln p_{r_i}\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \qquad (27)$$

Оценим X_3. Согласно лемме 2 уравнение $\frac{\partial f(x,\gamma)}{\partial x}=0$, где

$$f(x,\gamma)=\ln A(x)-\gamma\ln x, \tag{28}$$

имеет положительный корень x_γ. Точка $z=x_\gamma$ — это точка перевала в (14). Величины x_γ и γ связаны уравнением

$$\gamma=\frac{1}{\bar q}\left(x_\gamma-(r,\bar p)\right), \tag{29}$$

где

$$(r,\bar p)=\sum_{i=1}^{s} r_i\bar p_{r_i},\quad \bar q=1-\sum_{i=1}^{s}\bar p_{r_i},\quad \bar p_r=p_r(x_\gamma)=\frac{x_\gamma^r}{r!}e^{-x_\gamma}.$$

В частности, при $x_\gamma=\alpha$ будем писать $\gamma=\beta$, где

$$\beta=\frac{\alpha-(r,p)}{q}. \tag{30}$$

Покажем, что

$$\left.\frac{\partial^2 f(x,\gamma)}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=\alpha\\ \gamma=\beta}}=\frac{B^2}{\alpha q^2 p_{r_1}\cdots p_{r_s}}. \tag{31}$$

Для этого продифференцируем (28) два раза по x и положим $x=\alpha$, $\gamma=\beta$:

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=\alpha\\ \gamma=\beta}}=\frac{1}{q^2}\left\{\left[1-\sum_{i=1}^{s}\frac{r_i(r_i-1)}{\alpha^2}p_{r_i}\right]q-\right.$$
$$\left.-\left(1-\sum_{i=1}^{s}\frac{r_i}{\alpha}p_{r_i}\right)^2\right\}+\frac{\beta}{\alpha^2}.$$

Подставляя $\beta=(\alpha-(r,p))/q$ и $r_i=\alpha-\Delta_i$, получаем

$$\alpha q^2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=\alpha\\ \gamma=\beta}}=$$
$$=q\left[1-\sum_{i=1}^{s}p_{r_i}\frac{\Delta_i^2}{\alpha}-\frac{1}{\alpha q}\left(\sum_{i=1}^{s}p_{r_i}\Delta_i\right)^2\right]=\frac{B^2}{p_{r_1}\cdots p_{r_s}}.$$

Отсюда вытекает (31).

При больших N мы можем разложить

$$\gamma = \frac{n'}{N'} = \frac{n-(k,\,r)}{N-k} = \frac{N\,[\alpha-(r,\,p)]-(r,\,u)\sqrt{N}}{Nq-u\sqrt{N}}$$

по степеням $t=N^{-1/2}$ и воспользоваться обозначением (30):

$$\gamma = \beta + \frac{t}{q}\,[\beta u-(r,\,u)] + t^2\frac{u}{q^2}\,[\beta u-(r,\,u)] + O(t^3). \tag{32}$$

Уравнение (29) с левой частью (32) при $t=0$ имеет в силу (30) корень $x_\gamma=\alpha$. При любом фиксированном α уравнение (29) по теореме о неявной функции определяет x_γ как функцию переменного t в окрестности точки $t=0$. Нетрудно получить разложение

$$x_\gamma = \alpha + t\,\frac{p_{r_1}p_{r_2}\cdots p_{r_s}q}{B}\,[\beta u-(r,\,u)] + O(t^2), \tag{33}$$

где оценка $O(t^2)$ равномерна по $\alpha\in[\alpha_0,\,\alpha_1]$, $0<\alpha_0\leqslant\leqslant\alpha_1<\infty$.

Для оценки интеграла X_3, заданного формулой (14), воспользуемся леммой 3. Покажем, что выполняются условия этой леммы. Из (33) видно, что $x_\gamma\sim\alpha$ при $t\longrightarrow 0$, а так как $0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1<\infty$, то найдутся такие $\bar{\alpha}_0$ и $\bar{\alpha}_1$, что $0<\bar{\alpha}_0\leqslant x_\gamma\leqslant\bar{\alpha}_1<\infty$ при больших N. В силу (32), (33) и следствия 1

$$\min_{\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1} \left.\frac{\partial^2 f(x,\,\gamma)}{\partial x^2}\right|_{x=x_\gamma} \geqslant \delta > 0$$

при больших N. Таким образом, выполнены все условия леммы 3 с $\lambda=N'$ и

$$\ln X_3 = -\ln x_\gamma \sqrt{2\pi N' \left.\frac{\partial^2 f(x,\,\gamma)}{\partial^2 x}\right|_{x=x_\gamma}} + N' f(x_\gamma,\,\gamma) + O\left(\frac{1}{\sqrt{N'}}\right). \tag{34}$$

Разложим $f(x_\gamma,\,\gamma)$ по степеням $t=N^{-1/2}$:

$$f(x_\gamma,\,\gamma) = f(\alpha,\,\beta) + \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0}\frac{1}{\sqrt{N}} + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{t=0}\frac{1}{2N} + O\left(\frac{1}{N^{3/2}}\right), \tag{35}$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_\gamma}\cdot\frac{\partial x_\gamma}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial \gamma}\cdot\frac{\partial \gamma}{\partial t} = -\frac{\partial \gamma}{\partial t}\ln x_\gamma$$

(так как $\partial f/\partial x_\gamma = 0$ тождественно по t в силу (29)) и

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\frac{1}{x_\gamma}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\frac{\partial x_\gamma}{\partial t} - \frac{\partial^2\gamma}{\partial t^2}\ln x_\gamma.$$

Используя (32) и (33), получаем отсюда

$$\left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{t=0} = -\frac{1}{q}\,[\beta u - (r, u)]\ln\alpha, \tag{36}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}\right|_{t=0} = -\frac{p_{r_1}\cdots p_{r_s}}{\alpha B^2}\,[\beta u - (r, u)]^2 - \frac{2u\,[\beta u - (r, u)]}{q^2}\ln\alpha. \tag{37}$$

Из (35), (36), (37) и равенств

$$f(\alpha, \beta) = \alpha + \ln q - \beta\ln\alpha,\quad N' = Nq - u\sqrt{N},$$

получаем

$$\ln X_3 = N(\alpha q + q\ln q - \beta q\ln\alpha) - \\ - \sqrt{N}[\alpha u - (r, u)\ln\alpha + u\ln q] - \\ - \frac{p_{r_1}\cdots p_{r_s}q}{2\alpha B^2}\,[\beta u - (r, u)^2] - \ln\sqrt{2\pi N\frac{B^2\alpha}{qp_{r_1}\cdots p_{r_s}}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \tag{38}$$

Из (26), (27), (30), (38), (12), (13), (5), (10), (11) вытекает (25). Теорема доказана.

При $r_1 = r$ и $s = 1$ из теоремы 1 получим одномерную локальную теорему.

Теорема 2. *В центральной области при* $n, N \to \infty$ *равномерно по* $\alpha = \frac{n}{N} \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty$, *и* $k = Np_r(\alpha) + u\sqrt{N}$, $|u| \leqslant C < \infty$, *имеем*

$$\mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N\sigma_{rr}(\alpha)}}\,e^{-\frac{u^2}{2\sigma_{rr}(\alpha)}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right)\right), \tag{39}$$

где $\sigma_{rr}(\alpha)$ *определено формулой* (1.9).

Интегральная теорема для величин $\mu_{r_1}, \ldots, \mu_{r_s}$ может быть получена из локальной теоремы обычным методом. Приведем формулировки многомерной и одномерной интегральных теорем.

Теорема 3. *В центральной области при $n, N \to \infty$ равномерно по $\alpha = \frac{n}{N} \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty$,*

$$\mathbf{P}\left\{\left(\frac{\mu_{r_i} - Np_{r_i}}{\sqrt{N}},\ i = 1, \ldots, s\right) \in G\right\} =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{s/2} B} \int \ldots \int_G \exp\left\{-\frac{1}{2B^2} \sum_{i,j=1}^{s} B_{ij} u_i u_j\right\} du_1 \ldots du_s + o(1), \tag{40}$$

где G — квадрируемая область.

Теорема 4. *В центральной области при $n, N \to \infty$ равномерно по $\alpha = \frac{n}{N} \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty$,*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_r - Np_r}{\sqrt{N}} < x\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_{rr}(\alpha)}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2\sigma_{rr}(\alpha)}} du + o(1). \tag{41}$$

§ 3. Предельные распределения μ_r, $r \geqslant 2$

Для случайных величин μ_r в предыдущем параграфе доказана асимптотическая нормальность в центральной области, где $n, N \to \infty$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_1 < \infty$.

В этом параграфе показано, что одномерные распределения μ_r, $r \geqslant 2$, при $n, N \to \infty$ сближаются с нормальным распределением в более широкой области, где $Np_r \to \infty$, и с распределением Пуассона при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$.

Пусть η_i — число частиц в ячейке с номером i, $i = 1, 2, \ldots, N$, при равновероятном размещении n частиц в N ячейках. Случайные величины $\eta_1, \ldots, \eta_N$ имеют полиномиальное распределение. Для изучения различных случайных величин, связанных с полиномиальным распределением, можно использовать следующую связь этого распределения с распределением Пуассона: если $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметром α, то

$$\mathbf{P}\{\eta_i = k_i,\ i = 1, \ldots, N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_i = k_i,\ i = 1, \ldots, N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}, \tag{1}$$

где $k_1, \ldots, k_N$ — любые целые неотрицательные числа и $k_1+\ldots+k_N=n$. Это легко проверяемое представление оказывается удобным для изучения предельных распределений случайных величин $\mu_r(n, N)$ и вариационного ряда $\eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(N)}$, полученного расположением случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ в неубывающем порядке.

Обозначим $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ независимые одинаково распределенные случайные величины, распределения которых связаны с распределением $\xi_1, \ldots, \xi_N$ следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(r)}=k\}=\mathbf{P}\{\xi_i=k \mid \xi_i \neq r\}.$$

Введем также обозначения:

$$p_r=\frac{\alpha^r e^{-\alpha}}{r!}, \quad \zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N, \qquad \zeta_N^{(r)}=\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_N^{(r)}.$$

Следующая лемма сводит изучение асимптотического поведения случайных величин $\mu_r(n, N)$ к доказательству локальных теорем для независимых слагаемых.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k} \frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть $A_{k,r}$ — событие, состоящее в том, что ровно k случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ приняли значение r. В силу равенства (1)

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=\mathbf{P}\{A_{k,r} \mid \zeta_N=n\}=\frac{\mathbf{P}\{A_{k,r}, \zeta_N=n\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}.$$

Равенство (2) получается с помощью очевидных преобразований числителя. Событие $A_{k,r}$ может произойти при C_N^k различных выборах случайных величин, принимающих значение r, поэтому

$$\begin{aligned}\mathbf{P}\{A_{k,r}, \zeta_N=n\} &= C_N^k\, p_r^k (1-p_r)^{N-k} \times \\ &\times \mathbf{P}\{\zeta_N=n \mid \xi_1 \neq r, \ldots, \xi_{N-k} \neq r, \xi_{N-k+1}=r, \ldots, \xi_N=r\}= \\ &= C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k}\, \mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}.\end{aligned}$$

В выражении (2) дополнительного исследования требует лишь $\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}$, поскольку биномиальная вероятность и $\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}$ исследуются просто. Если при $n, N\to\infty$ значения α находятся в интервале $[\alpha_0, \alpha_1]$, $0<\alpha_0\leqslant\alpha_1<\infty$, то к последовательности $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ применима локальная теорема о сходимости к нормальному распределению, и в этом случае соотношение (2) позволяет получить для $\mu_r(n, N)$ предельную теорему о сходимости к нормальному закону. По-видимому, это одно из простейших доказательств асимптотической нормальности $\mu_r(n, N)$ при этих условиях. Если область изменения α охватывает левую и правую промежуточные r-области, то локальная теорема для последовательности серий $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ также справедлива. Однако это требует специального доказательства, так как для схемы серий общая теория не позволяет установить справедливость локальной теоремы даже в этом простом случае.

Далее мы докажем локальную теорему о сходимости к нормальному закону распределений сумм $\zeta_N^{(r)}$, $r\geqslant 2$, и, используя ее в соотношении (2), найдем предельные распределения для $\mu_r(n, N)$. Положим

$$\alpha_r=\frac{\alpha-rp_r}{1-p_r},\quad \sigma_r^2=\frac{\alpha}{(1-p_r)^2}\left(1-p_r-\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r\right).$$

Нетрудно подсчитать, что

$$\mathbf{M}\xi_1^{(r)}=\alpha_r,\qquad \mathbf{D}\xi_1^{(r)}=\sigma_r^2.$$

Теорема 1. *Если $m\to\infty$ и $\alpha m\to\infty$, то при $r\geqslant 2$*

$$\mathbf{P}\{\zeta_m^{(r)}=l\}=\frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{(l-m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2}}\left(1+o(1)\right)$$

равномерно относительно $\frac{l-m\alpha_r}{\sigma_r\sqrt{m}}$ в любом конечном интервале.

Доказательство. Характеристическая функция $\xi_1^{(r)}$ равна

$$f_r(t)=\frac{e^{\alpha(e^{it}-1)}-p_r e^{itr}}{1-p_r}.$$

Обозначим $f_r^*(t) = e^{-i\alpha_r t} f_r(t)$. Дисперсия σ_r^2 как функция α непрерывна, положительна и $\sigma_r^2 = \alpha\left(1+O\left(\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)p_r\right)\right)$ при $r \geqslant 2$ и любом изменении параметра α, поэтому в условиях теоремы $m\sigma_r^2 \to \infty$ и для последовательности $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_m^{(r)}$ справедлива интегральная теорема о сходимости к нормальному закону, так что

$$\left(f_r^*\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right)^m \to e^{-t^2/2} \tag{3}$$

равномерно относительно t в любом конечном интервале.

Прямым подсчетом нетрудно проверить, что для $\varphi_r(t) = \ln f_r^*(t)$

$$\varphi_r(0) = 0, \quad \varphi_r'(0) = 0, \quad \varphi_r''(0) = -\sigma_r^2$$

и величина $|\sigma_r^{-2}\varphi_r'''(t)|$ ограничена в окрестности нуля при любом характере изменения α. Поэтому, применяя разложение в ряд Тейлора, находим, что

$$\varphi_r(t) = -\frac{\sigma_r^2 t^2}{2}(1+O(t)).$$

Отсюда следует, что

$$f_r^*(t) = \exp\left\{-\frac{\sigma_r^2 t^2}{2}(1+O(t))\right\},$$

и значит, найдутся такие положительные постоянные ε и c, что для $0 \leqslant |t| \leqslant \varepsilon$

$$|f_r^*(t)| \leqslant e^{-c\sigma_r^2 t^2}. \tag{4}$$

Оценим теперь $|f_r(t)|$ в области $\varepsilon \leqslant |t| \leqslant \pi$ при различном характере изменения параметра α. Заметим, что

$$|f_r(t)| \leqslant \frac{e^{-\alpha(1-\cos t)}+p_r}{1-p_r} =$$

$$= e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}} \frac{e^{-\frac{2}{3}\alpha(1-\cos t)} + \frac{\alpha^r}{r!}e^{-\frac{2}{3}\alpha\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right)}}{1-p_r}.$$

При $\alpha\to\infty$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$ второй множитель стремится к нулю, поэтому можно выбрать α_1 так, что при $\alpha>\alpha_1$ и $0<\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|f_r(t)|\leqslant e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}}\leqslant e^{-\frac{\alpha\delta}{3}}=q^\alpha,$$

где $0<\delta\leqslant 1-\cos\varepsilon$, $q=e^{-\delta/3}<1$.

При $\alpha\to 0$

$$|f_r(t)|=e^{-\alpha(1-\cos t)}(1+O(\alpha^2)),$$

и можно выбрать α_0 так, что при $\alpha<\alpha_0$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|f_r(t)|\leqslant e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}}\leqslant q^\alpha.$$

При $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ оценка $|f_r(t)|\leqslant q^\alpha$ следует из того, что при любом α максимальный шаг распределения $\xi_1^{(r)}$ равен единице, характеристическая функция $f_r(t)$ непрерывно зависит от α и множество значений параметра компактно. Итак, при $0<\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$ существует такая постоянная q, $0<q<1$, что при любом характере изменения α

$$|f_r(t)|\leqslant q^\alpha. \tag{5}$$

Следуя классическому доказательству локальной теоремы, представим вероятность $P_m(k)=\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)}+\ldots+\xi_m^{(r)}=k\}$ в виде интеграла

$$P_m(k)=\frac{1}{2\pi\sigma_r\sqrt{m}}\int\limits_{-\pi\sigma_r\sqrt{m}}^{\pi\sigma_r\sqrt{m}}e^{-izt}\left(f_r^*\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right)^m dt,$$

где $z=\dfrac{k-m\alpha_r}{\sigma_r\sqrt{m}}$. Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-izt-\frac{t^2}{2}}dt,$$

разность $R_m=2\pi\left[\sigma_r\sqrt{m}P_m(k)-\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2}\right]$ можно представить в виде суммы четырех интегралов:

$$R_m=I_1+I_2+I_3+I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izt}\left[\left(f_r^*\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right)^m - e^{-t^2/2}\right]dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon\sigma_r\sqrt{m}} e^{-izt}\left(f_r^*\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right)^m dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\sigma_r\sqrt{m}<|t|\leqslant\pi\sigma_r\sqrt{m}} e^{-izt}\left(f_r^*\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right)^m dt,$$

$$I_4 = -\int\limits_{A\leqslant|t|} e^{-izt-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

Для $|I_4|$ справедлива оценка

$$|I_4| \leqslant \int\limits_{A\leqslant|t|} e^{-t^2/2}dt.$$

Используя для оценки интеграла I_2 неравенство (4), находим, что

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon\sigma_r\sqrt{m}} \left|f_r^m\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right| dt \leqslant \int\limits_{A\leqslant|t|} e^{-ct^2}\,dt.$$

Таким образом, выбором достаточно большого A величины $|I_2|$ и $|I_4|$ можно сделать сколь угодно малыми. При фиксированном A, согласно (3), интеграл $I_1 \to 0$ при $m \to \infty$. Наконец, при $m \to \infty$

$$|I_3| \leqslant \sigma_r\sqrt{m} \int\limits_{\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi} |f_r^m(t)|\,dt \leqslant \sigma_r\sqrt{m}\, q^{\alpha m} \to 0,$$

поскольку, как уже отмечалось, $\sigma_r^2 = O(\alpha)$ при любом характере изменения α и $\alpha m \to \infty$. Теорема доказана.

Используем теперь лемму 1 и теорему 1 для изучения предельных распределений $\mu_r(n, N)$, $r \geqslant 2$.

Теорема 2. *Если $r \geqslant 2$ фиксировано и n, $N \to \infty$ так, что $Np_r \to \infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{(k-Np_r)^2}{2N\sigma_{rr}^2}}(1 + o(1))$$

равномерно относительно $\dfrac{k-Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}$ *в любом конечном интервале* (σ_{rr} *задается формулами* (1.9)).

Доказательство. Используя нормальное приближение для биномиального распределения при $Np_r(1-p_r)\to\infty$, находим, что

$$C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}} e^{-\frac{(k-Np_r)^2}{2Np_r(1-p_r)}} (1+o(1)) \tag{6}$$

равномерно относительно $\dfrac{k-Np_r}{\sqrt{Np_r(1-p_r)}}$ в любом конечном интервале, а следовательно, равномерно относительно $\dfrac{k-Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}$, поскольку $\sigma_{rr}^2 = p_r\left(1-p_r-\dfrac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r\right) \leqslant$ $\geqslant p_r(1-p_r)$.

Сумма ζ_N распределена по закону Пуассона с параметром n, поэтому при $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{n^n e^{-n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}(1+o(1)). \tag{7}$$

Для оценки вероятности $\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n-kr\}$ используем теорему 1. Обозначим $u = \dfrac{k-Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}$. Заметим, что при ограниченном $|u|$

$$N-k = N(1-p_r)\left(1-\frac{u\sigma_{rr}}{(1-p_r)\sqrt{N}}\right) = N(1-p_r)(1+o(1)).$$

Полагая в теореме 1 $m=N-k$ и $l=n-rk$ и подставляя явные выражения

$$\alpha_r = \frac{\alpha-rp_r}{1-p_r}, \qquad \sigma_r^2 = \frac{\alpha\sigma_{rr}^2}{p_r(1-p_r)^2},$$

находим, что

$$\frac{(l-m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2} = \frac{(\alpha-r)^2 p_r u^2}{2\alpha(1-p_r)}(1+o(1))$$

равномерно относительно u в любом конечном интервале.

Поскольку величина $\dfrac{(\alpha-r)^2 p_r}{\alpha(1-p_r)}$ ограничена, из теоремы 1 следует, что равномерно относительно u в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}=\frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi N(1-p_r)}}\,e^{-\frac{(\alpha-r)^2p_ru^2}{2\alpha(1-p_r)}}(1+o(1)). \tag{8}$$

Для завершения доказательства остается подставить оценки (6), (7) и (8) в равенство (2).

Теорема 3. *Если n, $N\to\infty$ так, что $\alpha\to 0$ или $\alpha\to\infty$, то при любом фиксированном $r\geqslant 2$*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n,N)=k\}=\frac{1}{k!}(Np_r)^k e^{-Np_r}(1+o(1))$$

равномерно относительно $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом конечном интервале.

Доказательство. Так как при выполнении условий теоремы $p_r\to 0$, то

$$C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}=\frac{1}{k!}(Np_r)^k e^{-Np_r}(1+o(1)) \tag{9}$$

равномерно относительно $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом конечном интервале.

Покажем, что при выполнении условий теоремы отношение вероятностей $\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}/\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}$ стремится к единице. Для $\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}$ справедлива оценка (7). Если $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r}$ ограничено, то $N-k=N(1+o(1))$ и при $m=N-k$ и $l=n-kr$

$$\frac{(l-m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2}\to 0.$$

Поэтому, согласно теореме 1,

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)}=n-kr\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha N}}(1+o(1)). \tag{10}$$

Подставляя в равенство (2) оценки (9), (7) и (10), получаем утверждение теоремы.

Из локальной теоремы 2 обычным образом получается интегральная теорема о сходимости распределения

$\dfrac{\mu_r(n, N)-Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}$ к нормальному с параметрами (0, 1). Как следует из теоремы 1.1, для любого $r\geqslant 2$ при $n, N, Np_r\to\infty$

$$\mathbf{M}\mu_r(n, N)=Np_r+O(1),\quad \mathbf{D}\mu_r(n, N)=N\sigma_{rr}^2(1+(o(1));$$

значит, этому утверждению можно придать следующий вид:

Теорема 4. *Если $r\geqslant 2$ фиксировано, n, $N\to\infty$ так, что $Np_r\to\infty$, то равномерно по x, $-\infty<x<\infty$,*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_r(n, N)-\mathbf{M}\mu_r(n, N)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_r(n, N)}}\leqslant x\right\}\to\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-u^2/2}du.$$

Поскольку в левой и правой r-областях $Np_r\to\lambda$, из теоремы 3 следует

Теорема 5. *В левой и правой r-областях при n, $N\to\infty$ для любого фиксированного $k=0, 1, 2, \ldots$*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}\to\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

В теоремах 2 и 3 рассмотрено асимптотическое поведение случайных величин $\mu_r(n, N)$ при произвольном фиксированном $r\geqslant 2$. Если при $n, N\to\infty$ параметр $r\to\infty$, то распределение $\mu_r(n, N)$ сближается с распределением Пуассона с параметром Np_r:

Теорема 6. *Если n, N, $r\to\infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N)=k\}=\frac{1}{k!}(Np_r)^k e^{-Np_r}(1+o(1))$$

равномерно относительно $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r}$ в любом конечном интервале.

Доказательство. Поскольку оценки (7) и (9) остаются в силе, для доказательства достаточно проверить справедливость оценки (10) при $r\to\infty$. Если $(k-Np_r)/\sqrt{Np_r}$ ограничено, то в условиях теоремы $N-k=N(1+o(1))$, и при $m=N-k$ и $l=n-kr$

$$\frac{(l-m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2}\to 0, \tag{11}$$

так как при любом характере изменения α величина

$\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r \to 0$, если $r\to\infty$. Действительно, функция $f(\alpha)=\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r$ достигает максимума по α при $\alpha^* = r+\sqrt{r}$, но $f(\alpha^*)\to 0$ при $\alpha^*\to\infty$. Из (11), согласно теореме 1, следует оценка (10). Теорема доказана.

§ 4. Предельные распределения μ_1

В этом параграфе изучаются предельные распределения числа $\mu_1(n, N)$ ячеек, содержащих ровно одну частицу. Выделение результатов, относящихся к $\mu_1(n, N)$, связано с тем, что поведение этой случайной величины при $\alpha\to 0$ обладает рядом интересных особенностей.

Для изучения предельных распределений $\mu_1(n, N)$ используем лемму 3.1. Равенство (3.2) в этом случае принимает вид

$$\mathbf{P}\{\mu_1(n,N)=k\} = C_N^k p_1^k (1-p_1)^{N-k}\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(1)}=n-k\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}, \quad (1)$$

где $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$, $\zeta_N^{(1)}=\xi_1^{(1)}+\ldots+\xi_N^{(1)}$, случайные величины $\xi_1,\ldots,\xi_N$ и $\xi_1^{(1)},\ldots,\xi_N^{(1)}$ независимы, одинаково распределены и

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=p_k=\frac{\alpha^k e^{-\alpha}}{k!}, \qquad k=0, 1, \ldots,$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1^{(1)}=k\}=\mathbf{P}\{\xi_1=k \mid \xi_1\neq 1\}.$$

Как и при изучении $\mu_r(n, N)$, $r\geqslant 2$, покажем, что для суммы $\zeta_{N-k}^{(1)}$ справедлива локальная предельная теорема. Обозначим

$$\alpha_1=\frac{\alpha-p_1}{1-p_1}, \qquad \sigma_1^2=\frac{\alpha}{(1-p_1)^2}\left(1-p_1-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}p_1\right);$$

нетрудно заметить, что $\alpha_1=\mathbf{M}\xi_1^{(1)}$, $\sigma_1^2=\mathbf{D}\xi_1^{(1)}$.

Теорема 1. *Если $m\to\infty$ и $\alpha^3 m\to\infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\zeta_m^{(1)}=l\}=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi m}}e^{-\frac{(l-m\alpha_1)^2}{2m\sigma_1^2}}(1+o(1))$$

равномерно относительно $\frac{l-m\alpha_1}{\sigma_1\sqrt{m}}$ в любом конечном интервале.

Доказательство. Характеристическая функция $\xi_1^{(1)}$ равна

$$f_1(t) = \frac{e^{\alpha(e^{it}-1)} - p_1 e^{it}}{1-p_1}.$$

Обозначим $f_1^*(t) = e^{-it\alpha_1} f_1(t)$. Особенность поведения суммы $\zeta_m^{(1)}$ состоит в том, что при оценке

$$R_m = 2\pi \left[\sigma_1 \sqrt{m}\, \mathbf{P}\{\zeta_m^{(1)} = l\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\right],$$

где $z = \dfrac{l - m\alpha_1}{\sigma_1 \sqrt{m}}$, в случае, когда $\alpha \to 0$, становится существенным влияние локального максимума $|f_1(t)|$ в точке π. Поэтому по сравнению со случаем $r \geqslant 2$ выделим дополнительно область, включающую окрестности точек π и $-\pi$, и представим R_m в виде суммы пяти интегралов:

$$R_m = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5,$$

где

$$I_1 = \int\limits_{-A}^{A} e^{-izt}\left[\left(f_1^*\left(\frac{t}{\sigma_1\sqrt{m}}\right)\right)^m - e^{-t^2/2}\right] dt,$$

$$I_2 = \int\limits_{A \leqslant |t| \leqslant \varepsilon\sigma_1\sqrt{m}} e^{-izt}\left(f_1^*\left(\frac{t}{\sigma_1\sqrt{m}}\right)\right)^m dt,$$

$$I_3 = \int\limits_{\varepsilon\sigma_1\sqrt{m} \leqslant |t| \leqslant (\pi-\varepsilon)\sigma_1\sqrt{m}} e^{-izt}\left(f_1^*\left(\frac{t}{\sigma_1\sqrt{m}}\right)\right)^m dt,$$

$$I_4 = -\int\limits_{A \leqslant |t|} e^{-izt - t^2/2}\, dt,$$

$$I_5 = \int\limits_{(\pi-\varepsilon)\sigma_1\sqrt{m} \leqslant |t| \leqslant \pi\sigma_1\sqrt{m}} e^{-izt}\left(f_1^*\left(\frac{t}{\sigma_1\sqrt{m}}\right)\right)^m dt.$$

Дисперсия σ_1^2 как функция α непрерывна, положительна и при любом изменении параметра α

$$\sigma_1^2 = \alpha(1 - e^{-2\alpha})(1 + O((1+\alpha)p_1)), \tag{2}$$

поэтому в условиях теоремы $m\sigma_1^2 \to \infty$ и для последовательности $\xi_1^{(1)}, \ldots, \xi_m^{(1)}$ справедлива интегральная теорема о сходимости к нормальному закону, так что

$$\left(f_1^*\left(\frac{t}{\sigma_1\sqrt{m}}\right)\right)^m \to e^{-t^2/2} \tag{3}$$

равномерно относительно t в любом конечном интервале.

Поскольку

$$|f_1(t)| \leqslant \frac{e^{-\alpha(1-\cos t)}+p_1}{1-p_1} =$$

$$= e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}} \frac{e^{-\frac{2}{3}\alpha(1-\cos t)}+\alpha e^{-\frac{2}{3}\alpha\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right)}}{1-p_1}$$

и при $\alpha\to\infty$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$ второй множитель стремится к нулю, можно выбрать α_1 так, что при $\alpha>\alpha_1$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi$

$$|f_1(t)| \leqslant e^{-\frac{\alpha(1-\cos t)}{3}} \leqslant q^{\frac{\alpha^2}{1+\alpha}}, \quad q<1. \tag{4}$$

При $\alpha\to 0$

$$|f_1(t)| = \frac{\left|e^{\alpha e^{it}}-\alpha e^{it}\right|}{e^{\alpha}-\alpha} = 1-\frac{\alpha^2}{2}(1-\cos 2t)+O(\alpha^3),$$

поэтому существуют такие α_0 и q, $0<q<1$, что при $\alpha<\alpha_0$ и $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi-\varepsilon$

$$|f_1(t)| \leqslant q^{\alpha^2/(1+\alpha)}.$$

Наконец, при $\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1$ оценка характеристической функции

$$|f_1(t)| \leqslant q^{\alpha^2/(1+\alpha)}, \quad 0<q<1,$$

следует из того, что максимальный шаг распределений равен единице и $f_1(t)$ непрерывно зависит от параметра α. Значит, при $\varepsilon\leqslant|t|\leqslant\pi-\varepsilon$ найдется такая постоянная q, $0<q<1$, что

$$|f_1(t)| \leqslant q^{\alpha^2/(1+\alpha)}. \tag{5}$$

Как и в доказательстве теоремы 3.1, находим, что выбором достаточно большого A интеграл I_4 может быть сделан сколь угодно малым и при $m\to\infty$ в силу оценок (3) и (5) интегралы I_1 и I_3 стремятся к нулю.

Остается оценить интегралы I_2 и I_5. Как и при $r\geqslant 2$, прямым подсчетом нетрудно проверить, что для функции $\varphi_1(t) = \ln f_1^*(r)$

$$\varphi_1(0) = 0, \quad \varphi_1'(0) = 0, \quad \varphi_1''(0) = -\sigma_1^2,$$

и величина $\left|\sigma_1^{-2}\varphi_1'''(t)\right|$ ограничена в окрестности нуля и в окрестности π; кроме того, при достаточно малом α

$$\varphi_1(\pi) < -2c_1\alpha^3, \quad \varphi_1'(\pi) = ic(\alpha), \quad \varphi_1''(\pi) < -2c_2\sigma_1^2,$$

где c_1 и c_2 — положительные постоянные, а $c(\alpha)$ — действительная функция.

Отсюда следует, что существуют такие положительные c и ε, что при $0 \leqslant |t| \leqslant \varepsilon$

$$|f_1(t)| \leqslant e^{-c\sigma_1^2 t^2} \tag{6}$$

и при $|\pi - t| \leqslant \varepsilon$

$$|f_1(t)| \leqslant e^{-c_1\alpha^3 - \frac{1}{2}c_2\sigma_1^2(\pi - t)^2}. \tag{7}$$

Используя для оценки интеграла I_2 неравенство (6), находим, что

$$|I_2| \leqslant \int\limits_{A \leqslant |t|} e^{-ct^2}\,dt,$$

и выбором достаточно большого A этот интеграл может быть сделан сколь угодно малым.

Если $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$, то для оценки интеграла I_5 можно воспользоваться неравенством (4). Применяя (4), находим, что

$$|I_5| \leqslant 2\sigma_1\sqrt{m}\int\limits_{\pi-\varepsilon}^{\pi}\left|f_1^m(t)\right|dt \leqslant 2\varepsilon\sigma_1\sqrt{m}\,q^{m\alpha^2/(1+\alpha)}$$

и в силу (2) при $m \to \infty$ и $\alpha \geqslant \alpha_0 > 0$ правая часть стремится к нулю.

Если $\alpha \to 0$, то для оценки интеграла I_5 используем неравенство (7). В силу периодичности характеристической функции $f_1(t)$

$$|I_5| \leqslant \int\limits_{(\pi-\varepsilon)\sigma_1\sqrt{m} \leqslant |x| \leqslant \pi\sigma_1\sqrt{m}} \left|f_1^m\left(\frac{x}{\sigma_1\sqrt{N}}\right)\right| dx =$$

$$= \int\limits_{(\pi-\varepsilon)\sigma_1\sqrt{m}}^{(\pi+\varepsilon)\sigma_1\sqrt{m}} \left|f_1^m\left(\frac{x}{\sigma_1\sqrt{m}}\right)\right| dx = \sigma_1\sqrt{m}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\left|f_1^m(\pi + t)\right| dt.$$

Применяя для оценки последнего интеграла неравенство (7), находим, что

$$|I_5| \leqslant \sigma_1 \sqrt{m} e^{-\alpha^3 m} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-\frac{1}{2} c_2 \sigma_1^2 t^2 m} dt \leqslant e^{-\alpha^3 m} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} c_2 u^2} du.$$

Отсюда следует, что при $\alpha^3 m \to \infty$ интеграл $I_5 \to 0$. Теорема 1 доказана.

В соответствии с обозначениями, введенными в § 1, положим $\sigma_{11}^2 = p_1\left(1 - p_1 - \frac{(\alpha-1)^2}{\alpha} p_1\right)$.

С помощью равенства (1) и теоремы 1 так же, как при исследовании предельных распределений $\mu_r(n, N)$, $r \geqslant 2$, получаем следующие утверждения.

Теорема 2. *Если $n, N \to \infty$ так, что $\alpha^3 N \to \infty$ и $Np_1 \to \infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_1(n, N) = k\} = \frac{1}{\sigma_{11}\sqrt{2\pi N}} e^{-\frac{(k-Np_1)^2}{2N\sigma_{11}^2}} (1 + o(1))$$

равномерно относительно $\frac{k - Np_1}{\sigma_{11}\sqrt{N}}$ *в любом конечном интервале.*

Теорема 3. *Если $n, N, \alpha \to \infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_1(n, N) = k\} = \frac{1}{k!}(Np_1)^k e^{-Np_1}(1 + o(1))$$

равномерно относительно $(k - Np_1)/\sqrt{Np_1}$ в любом конечном интервале.

Доказательства этих теорем дословно повторяют доказательства теорем 3.2 и 3.3, если в них положить $r = 1$.

Рассмотрим теперь поведение $\mu_1(n, N)$ при $\alpha \to 0$. Если $\alpha \to 0$ и $\alpha^3 N \to \infty$, то, согласно теореме 2, происходит локальное сближение распределения $\mu_1(n, N)$ с нормальным распределением. Для $\mu_r(n, N)$ при $r \geqslant 2$ параметры нормального закона, с которым происходит сближение в левой промежуточной r-области, асимптотически одинаковы и равны Np_r, так что в области, где $\alpha \to 0$ и $Np_r \to \infty$, распределение $\mu_r(n, N)$ сближается и с распределением Пуассона. Для $\mu_1(n, N)$ эта картина нарушается. С помощью теоремы 2 можно получить следующий результат. Обозначим

$$\lambda=\frac{1}{2}\alpha(1-e^{-\alpha})N.$$

Теорема 4. *Если n, $N\to\infty$, $\alpha\to 0$ и $\alpha^3N\to\infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_1=n-2k\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(1+o(1)), \tag{8}$$

$$\mathbf{P}\{\mu_1=n-2k-1\}=\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}(1+o(1)) \tag{9}$$

равномерно относительно $(k-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ в любом конечном интервале.

Доказательство. Поскольку распределение Пуассона с параметром λ при $\lambda\to\infty$ сближается с нормальным распределением и $\lambda=\frac{1}{2}\alpha(1-e^{-\alpha})N\to\infty$, то равномерно относительно $(k-\lambda)/\sqrt{\lambda}$

$$\frac{1}{2}\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}}(1+o(1)). \tag{10}$$

С другой стороны, согласно теореме 2

$$\mathbf{P}\{\mu_1=n-2k\}=\frac{1}{\sigma_{11}\sqrt{2\pi N}}e^{-\frac{(n-2k-Np_1)^2}{2N\sigma_{11}^2}}(1+o(1)) \tag{11}$$

равномерно относительно $\dfrac{n-2k-Np_1}{\sigma_{11}\sqrt{N}}$ в любом конечном интервале. Учитывая, что

$$N\sigma_{11}^2=4\lambda(1+O(\alpha)),$$

из (11) получаем, что равномерно относительно $(k-\lambda)/\sqrt{\lambda}$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\mu_1=n-2k\}=\frac{1}{2\sqrt{2\pi\lambda}}e^{-\frac{(k-\lambda)^2}{2\lambda}}(1+o(1)). \tag{12}$$

Из (10) и (12) следует (8). Соотношение (9) доказывается аналогично.

Если $\alpha\to 0$ и α^3N ограничено, то асимптотическое поведение случайной величины $\mu_1(n, N)$ просто связано с поведением $\mu_2(n, N)$. Из неравенства (1.6) следует, что

$$\mathbf{M}\mu_r(n, N) \leqslant N\frac{\alpha^r}{r!}.$$

Используя эту оценку, получаем

$$\mathbf{M}\sum_{r\geqslant 3} r\mu_r(n, N) \leqslant \alpha^3 N \sum_{r\geqslant 3} \frac{\alpha^{r-3}}{(r-1)!} \leqslant \alpha^3 N e^{\alpha}. \tag{13}$$

Из равенства $\mu_1+2\mu_2+\ldots+n\mu_n=n$ следует, что

$$\frac{n-\mu_1(n, N)}{2} = \mu_2(n, N) + \frac{1}{2}\sum_{r\geqslant 3} r\mu_r(n, N). \tag{14}$$

С помощью (13) и (14) легко получаем следующие утверждения.

Теорема 5. *Если n, $N\to\infty$ так, что $\alpha^2 N\to\infty$, то равномерно относительно x*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_1(n, N)-Np_1}{\sigma_{11}\sqrt{N}} \leqslant x\right\} \to \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du.$$

Доказательство. Если $\alpha^3 N\to\infty$, то утверждение теоремы обычным образом получается из локальной теоремы 2. Поэтому рассмотрим случай, когда $\alpha^2 N\to\infty$ и $\alpha^3 N$ ограничено. Воспользовавшись соотношением (14), находим, что

$$\frac{Np_2-\frac{1}{2}(n-\mu_1)}{\sqrt{Np_2}} = \frac{Np_2-\mu_2}{\sqrt{Np_2}} - \frac{1}{\sqrt{Np_2}}\sum_{r\geqslant 3} r\mu_r. \tag{15}$$

Поскольку при ограниченном $\alpha^3 N$ случайная величина $(Np_2)^{-1/2}\sum_{r\geqslant 3} r\mu_r$ стремится по вероятности к нулю, а $(Np_2)^{-1/2}(Np_2-\mu_2)$ асимптотически нормальна, из (15) следует, что

$$\mathbf{P}\left\{\frac{Np_2-\frac{1}{2}(n-\mu_1)}{\sqrt{Np_2}} \leqslant x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}du. \tag{16}$$

Учитывая, что при n, $N\to\infty$, $\alpha\to 0$

$$Np_1 = \alpha N - \alpha^2 N + O(\alpha^3 N), \qquad \sigma_{11}^2 = 2\alpha^2(1+O(\alpha)),$$

получаем, что при ограниченном $\alpha^3 N$ и $\alpha^2 N\to\infty$ случайная величина $(Np^2 - {}^1/_2(n-\mu_1))/\sqrt{Np_2}$ стремится по вероятности к $\frac{\mu_1 - Np_1}{\sigma_{11}\sqrt{N}}$, и из (16) следует утверждение теоремы в области, где $\alpha^2 N \to \infty$ и $\alpha^3 N$ ограничено.

Теорема 6. *Если $n, N \to \infty$ так, что $\alpha \to 0$ и $Np_2 \to \lambda$, где λ — положительная постоянная, то для любого фиксированного* $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{n - \mu_1(n, N)}{2} = k\right\} \to \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}.$$

Доказательство. Согласно теореме 3.5 при выполнении условий теоремы 6 случайная величина $\mu_2(n, N)$ имеет в пределе распределение Пуассона с параметром λ. В силу (13) случайная величина $\sum\limits_{r \geq 3} r\mu_r$ при $\alpha^3 N \to 0$ сходится по вероятности к нулю. Поэтому из (14) следует, что $(n-\mu_1)/2$ и μ_2 имеют одинаковые предельные распределения.

Таким образом, при $Np_2 \to \lambda$ распределение случайной величины $n - \mu_1$ асимптотически сосредоточено на решетке четных неотрицательных чисел. Из (13) и (14) следует, что свойство асимптотической сосредоточенности распределения случайной величины $n - \mu_1$ на решетке четных неотрицательных чисел сохраняется при $\alpha^3 N \to 0$. Это объясняет, почему локальная теорема 2 о сходимости к нормальному распределению на решетке всех целых чисел неверна в этой области, в то время как интегральная теорема справедлива в более широкой области, где $\alpha^2 N \to \infty$. При $\alpha^3 N \to \infty$ распределение $\mu_1(n, N)$, согласно теореме 2, сосредоточено на всех целых точках. При ограниченных значениях параметра $\alpha^3 N$ происходит переход распределения случайной величины $n - \mu_1$ с решетки всех целых неотрицательных чисел на решетку четных неотрицательных чисел. Мы не будем останавливаться на деталях этого перехода.

§ 5. Скорость приближения к предельным распределениям

В § 3 установлено, что в левой и правой промежуточных r-областях распределения случайных величин $\mu_r(n, N)$, $r \geq 2$, сближаются с нормальным и пуассоновским распределениями. Имеет смысл оценить близость распределения $\mu_r(n, N)$ к предельным распределениям в этих областях с тем, чтобы при заданном характере изменения параметра α указать, какое из предельных распределений осуществляет более точную аппроксимацию. В этом параграфе приведены уточнения локальных предельных теорем 3.1 и 3.2 и с их помощью вычислены расстояния по вариации между распределениями $\mu_r(n, N)$ и предельными распределениями. Это позволяет указать ближайшее к распределению $\mu_r(n, N)$ в смысле этого расстояния предельное распределение, а также вычислить верхнюю грань по α минимального расстояния.

Поведение распределений $\mu_r(n, N)$ при $r \geqslant 2$ аналогично поведению биномиального распределения: при $n \to \infty$ и различном характере изменения параметра p биномиальное распределение также сближается с нормальным и пуассоновским распределениями. Мы начнем с изложения результатов, относящихся к приближению биномиального распределения, поскольку исследования скорости сходимости распределений $\mu_r(n, N)$ к предельным распределениям проводятся по аналогии с этим классическим случаем. Прямым подсчетом с использованием формулы Стирлинга легко устанавливаются следующие теоремы.

Теорема 1. *Если* $n \to \infty$ *и* $\frac{1+u^6}{npq} \to 0$, *где* $q = 1 - p$ *и* $u = (k - np)/\sqrt{npq}$, *то*

$$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} e^{-u^2/2}\left(1 + \frac{q-p}{6\sqrt{npq}}(3u - u^3) + O\left(\frac{1+u^6}{npq}\right)\right).$$

Теорема 2. *Если* $n \to \infty$, $np \to \infty$, $(1+u^2)p \to 0$, *где* $u = (k - np)/\sqrt{np}$, *и* $q = 1 - p$, *то*

$$C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{1}{k!}(np)^k e^{-np}\left(1 + \frac{1}{2}p(1-u^2) + O\left(p^2(1+u^4) + \frac{(1+|u|)p}{\sqrt{np}}\right)\right).$$

Теорема 3. *Если* $(1+u^6)/\lambda \to 0$, *где* $u = (k-\lambda)/\sqrt{\lambda}$, *то*

$$\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\lambda}} e^{-u^2/2}\left(1 + \frac{u^3 - 3u}{6\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1+u^6}{\lambda}\right)\right).$$

Здесь и в дальнейшем выражение типа $f(u_1, \ldots, u_n) = O(\varphi(u_1, \ldots, u_n))$, означает, что при указываемом поведении параметров $|f| \leqslant C|\varphi|$, где C — некоторая абсолютная постоянная. Обозначим

$$\begin{gathered}\Pi(k, \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \\ N(x, a, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-a)^2/2\sigma^2}.\end{gathered} \tag{1}$$

Введем расстояния между биномиальным распределением и предельными распределениями, положив

$$\rho_1(n, p) = \sum_{k=0}^{n} \left|C_n^k p^k q^{n-k} - \Pi(k, np)\right|,$$

$$\rho_2(n, p) = \sum_{k=0}^{n} \left|C_n^k p^k q^{n-k} - N(k, np, npq)\right|,$$

$$\rho_3(n, p) = \rho_1(n, q).$$

Для нахождения асимптотических выражений этих расстояний нам потребуются три леммы, которые будут использоваться при замене суммирования интегрированием.

Лемма 1. *Пусть ограниченная непрерывная функция* $\varphi(x)$ *интегрируема на* $(-\infty, \infty)$ *и имеет конечное число* s *максимумов и минимумов. Пусть* $x_k = x_0 + k\Delta$, *где* k *принимает целые значения и* $\Delta > 0$. *Тогда при любых* c *и* d

$$\left|\int_c^d \varphi(x)\,dx - \sum_{x_k \in [c, d)} \varphi(x_k)\,\Delta\right| \leqslant 2(s+1) \sup_{c \leqslant x < d} |\varphi(x)|\,\Delta.$$

Доказательство. На каждом интервале $[l, h) \subset [c, d)$, на котором $\varphi(x)$ монотонна, разность

$$\left|\int_l^h \varphi(x)\,dx - \sum_{x_k \in [l, h)} \varphi(x_k)\,\Delta\right|$$

не превышает $2 \sup\limits_{l \leqslant x < h} |\varphi(x)|\,\Delta$, и следовательно, разность

$$\left|\int_c^d \varphi(x)\,dx - \sum_{x_k \in [c, d)} \varphi(x_k)\,\Delta\right|$$

не превышает $2(s+1) \sup\limits_{c \leqslant x < d} |\varphi(x)|\,\Delta$.

Лемма 2. *Пусть $\varphi(x)$ интегрируема на $(-\infty, \infty)$, четна, не возрастает на $[0, \infty)$ и имеет равномерно ограниченные первую и вторую производные. Пусть T — целое положительное число, $x_k = x_0 + k\Delta$, где k принимает целые значения и $\Delta > 0$. Тогда для $c < 0 < d$*

$$\sum_{x_k \in [c, d)} \varphi(x_k)\Delta = \int_c^d \varphi(x)\,dx + O(\Delta^3 T + \varphi(T\Delta)\Delta)$$

равномерно относительно T и Δ, удовлетворяющих условию $T\Delta \leqslant \min(-c, d)$.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай, когда $x_0 = -m\Delta$, где m — целое число. Применяя лемму 1, находим, что

$$\sum_{x_k \in [c,d)} \varphi(x_k)\Delta = \sum_{x_k \in [-T\Delta, T\Delta)} \varphi(x_k)\Delta + \sum_{x_k \in [c, -T\Delta)} \varphi(x_k)\Delta + \sum_{x_k \in [T\Delta, d)} \varphi(x_k)\Delta = \sum_{x_k \in [-T\Delta, T\Delta)} \varphi(x_k)\Delta + \int_c^{-T\Delta} \varphi(x)\,dx + \int_{T\Delta}^{d} \varphi(x)\,dx + O(\varphi(T\Delta)\Delta). \qquad (2)$$

Рассматривая интегралы

$$a_t = \int_{x_{m-t-1}}^{x_{m-t}} \varphi(x)\,dx + \int_{x_{m+t}}^{x_{m+t+1}} \varphi(x)\,dx$$

как функции верхних пределов и разлагая их в ряды Тейлора до членов порядка Δ^3, для любого целого t находим, что

$$a_t = (\varphi(x_{m-t-1}) + \varphi(x_{m+t}))\Delta + \frac{\Delta^2}{2}(\varphi'(x_{m-t-1}) + \varphi'(x_{m+t})) + O(\Delta^3).$$

Заметим, что $x_{m-t-1} = -\Delta(t+1)$, $x_{m+t} = t\Delta$ и $\varphi'(-\Delta(t+1)) = -\varphi'(t\Delta + \Delta) = -\varphi'(t\Delta) + O(\Delta)$. Поэтому

$$a_t = (\varphi(x_{m-t-1}) + \varphi(x_{m+t}))\Delta + O(\Delta^3).$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{x_k \in [-T\Delta, T\Delta)} \varphi(x_k)\,\Delta = \int_{-T\Delta}^{T\Delta} \varphi(x)\,dx + O(\Delta^3 T), \qquad (3)$$

и утверждение леммы доказано.

Пусть теперь x_0 не кратно Δ. Применяя лемму 1, как и в предыдущем случае, получаем равенство (2). Рассмотрим новую схему, в которой $\bar{x}_k = \bar{x}_0 + k\Delta$ и $\bar{x}_0 = [x_0/\Delta]\Delta = -m\Delta$. Нетрудно проверить, что для любого целого t в силу четности $\varphi(x)$ и ограниченности ее второй производной

$$\varphi(x_{m-t-1}) + \varphi(x_{m+t}) = \varphi(\bar{x}_{m-t-1}) + \varphi(\bar{x}_{m+t}) + O(\Delta^2).$$

Поэтому

$$\sum_{x_k \in [-T\Delta, T\Delta)} \varphi(x_k)\,\Delta = \sum_{\bar{x}_k \in [-T\Delta, T\Delta)} \varphi(\bar{x}_k)\,\Delta + O(\Delta^3 T),$$

и, применяя к сумме $\sum_{\bar{x}_k \in [-T\Delta, T\Delta)} \varphi(\bar{x}_k)\,\Delta$ формулу (3), мы и в этом случае приходим к утверждению леммы.

Лемма 3. *Если $\sigma \to \infty$, то*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N(k, a, \sigma^2) = 1 + O\left(\frac{\sqrt{\ln \sigma}}{\sigma^2}\right).$$

Доказательство. Полагая в лемме 2 $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$, $\Delta = 1/\sigma$, $x_k = (k-a)/\sigma$ и $T = [\sigma\sqrt{2\ln\sigma}]$, получаем утверждение леммы.

Перейдем к оценке расстояний $\rho_i(n, p)$, $i = 1, 2$. Обозначим

$$c_1 = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - u^2|\, e^{-u^2/2} du = \sqrt{\frac{2}{\pi e}},$$

$$c_2 = \frac{1}{6\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |u^3 - 3u|\, e^{-u^2/2} du = \frac{1 + 4e^{-3/2}}{3\sqrt{2\pi}}.$$

Теорема 4. *Если $npq \to \infty$, $p \to 0$, то*

$$\rho_2(n, p) = \frac{c_2}{\sqrt{npq}}(1 + o(1)).$$

Теорема 5. *Если $np \to \infty$, $p \to 0$, то*

$$\rho_1(n, p) = c_1 p(1 + o(1)).$$

Доказательство теоремы 4. Обозначим $v = (npq)^{1/7}$. Представим $\rho_2(n, p)$ в виде суммы $\rho_2(n, p) = A_1 + A_2$, где

$$A_1 = \sum_{|u| \leqslant v} \left| C_n^k p^k q^{n-k} - N(k, np, npq) \right|,$$

$$A_2 = \sum_{|u| > v} \left| C_n^k p^k q^{n-k} - N(k, np, npq) \right|,$$

$$u = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}.$$

Заметим, что при $v \to \infty$ для любого фиксированного m

$$\int_v^\infty |u|^m e^{-u^2/2} du = O(v^{m-1} e^{-v^2/2}). \tag{4}$$

В области $|u| \leqslant v$ справедлива теорема 1, поэтому, применяя при замене суммирования интегрированием лемму 1 и учитывая (4), для A_1 получаем оценку

$$A_1 = \frac{q - p}{6\sqrt{2\pi npq}} \int_{-\infty}^{\infty} |u^3 - 3u| e^{-u^2/2} du + O\left(\frac{1}{npq}\right). \tag{5}$$

Заметим, что для любого фиксированного m

$$\sum_{k=0}^{n} |u|^m C_n^k p^k q^{n-k} = O(1). \tag{6}$$

Применяя неравенство Чебышева, находим, что

$$\sum_{|u| > v} C_n^k p^k q^{n-k} \leqslant \frac{1}{v^7} \sum_{k=0}^{n} |u|^7 C_n^k p^k q^{n-k} = O\left(\frac{1}{npq}\right); \tag{7}$$

применяя лемму 1, получаем оценку

$$\sum_{|u| > v} N(k, np, npq) = O\left(\frac{1}{npq}\right). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует, что $A_2 = O\left(\frac{1}{npq}\right)$; эта оценка вместе с оценкой (5) приводит к утверждению теоремы 4.

Доказательство теоремы 5. Обозначим $v=p^{-1/3}$. Представим $\rho_1(n, p)$ в виде суммы $\rho_1(n, p)=$ $=A_1+A_2$, где

$$A_1=\sum_{|u|\leqslant v}\left|C_n^k p^k q^{n-k}-\Pi(k, np)\right|,$$

$$A_2=\sum_{|u|>v}\left|C_n^k p^k q^{n-k}-\Pi(k, np)\right|,$$

$$u=\frac{k-np}{\sqrt{np}}.$$

Заметим, что для любого фиксированного m

$$\sum_{k=0}^{\infty}|u|^m \Pi(k, np)=O(1). \tag{9}$$

Применяя теорему 2, находим, что

$$A_1=\frac{1}{2} p \sum_{|u|\leqslant v}|1-u^2| \Pi(k, np)+O\left(p^2+\frac{p}{\sqrt{np}}\right). \tag{10}$$

Используя теорему 3 при $|u|\leqslant v^*=\min(p^{-1/3}, (np)^{1/7})$ и лемму 1 при замене суммирования интегрированием, получаем, что

$$\sum_{|u|\leqslant v}|1-u^2| \Pi(k, np)=\sum_{|u|\leqslant v^*}|1-u^2| N(k, np, np)+o(1)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty}|1-u^2| e^{-u^2/2} du+o(1).$$

Отсюда следует, что

$$A_1=c_1 p(1+o(1)). \tag{11}$$

Учитывая (6) и (9), с помощью неравенства Чебышева находим, что

$$\sum_{|u|>v} C_n^k p^k q^{n-k} \leqslant \frac{1}{v^4} \sum_{k=0}^{n} u^4 C_n^k p^k q^{n-k}=O(p^{4/3}),$$

$$\sum_{|u|>v} \Pi(k, np) \leqslant \frac{1}{v^4} \sum_{k=0}^{\infty} u^4 \Pi(k, np)=O(p^{4/3}).$$

Отсюда следует, что $A_2=O(p^{4/3})$, и эта оценка вместе с оценкой (11) приводит к утверждению теоремы.

Из теорем 4 и 5 видно, что расстояние $\rho_1(n, p)$ до распределения Пуассона с убыванием p убывает, а расстояние $\rho_2(n, p)$ до нормального распределения с убыванием p от $1/2$ до 0 возрастает. Точка p^*, где нормальное и пуассоновское приближения в смысле расстояния по вариации имеют одинаковую точность, является корнем уравнения $\rho_1(n, p)=\rho_2(n, p)$. Согласно теоремам 4 и 5 это уравнение имеет вид

$$\frac{c_2}{\sqrt{npq}}=c_1 p(1+o(1)),$$

и p^* асимптотически равна

$$p^*=\left(\frac{c_2^2}{c_1^2 n}\right)^{1/3}(1+o(1)).$$

Из двух предельных распределений при $p<p^*$ лучшее приближение дает распределение Пуассона, а при $p>p^*$ — нормальное распределение. В силу симметричности биномиального распределения функция $\min\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}\rho_i(n, p)$ на интервале $0\leqslant p\leqslant 1$ симметрична относительно точки $p=1/2$ и имеет два равных максимума при $p=p^*$ и $p=1-p^*$. Наихудшее приближение осуществляется в точке p^*:

$$\sup_{0\leqslant p\leqslant 1}\min_i \rho_i(n, p)=\rho_1(n, p^*)=$$
$$=\rho_2(n, p^*)=\left(\frac{c_1 c_2^2}{n}\right)^{1/3}(1+o(1)).$$

Проведем теперь аналогичные исследования скорости сходимости распределения $\mu_r(n, N)$ к предельным распределениям. Для получения уточнений предельных теорем 3.2 и 3.3 нам потребуется оценка остаточного члена в теореме 3.1. Будем использовать обозначения § 3.

Теорема 6. *Если m, $\alpha m\to\infty$ и $\frac{1}{\sqrt{\alpha m}}e^{z^2/2}\to 0$, где $z=\frac{l-m\alpha_r}{\sigma_r\sqrt{m}}$, то при любом фиксированном $r\geqslant 2$*

$$\mathbf{P}\{\zeta_m^{(r)}=l\}=\frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi m}}e^{-z^2/2}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha m}}e^{z^2/2}\right)\right).$$

Доказательство. Как и в доказательстве теоремы 3.1, представим разность

$$R_m = 2\pi\left[\sigma_r \sqrt{m}\,\mathbf{P}\{\zeta_m^{(r)} = l\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\right] \tag{12}$$

в виде суммы тех же четырех интегралов: $R_m = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$. Как было отмечено, для $\varphi_r(t) = \ln f_r^*(t)$ при $t \to 0$ справедливо представление

$$\varphi_r(t) = -\frac{\sigma_r^2 t^2}{2}(1 + O(t)), \tag{13}$$

поскольку в окрестности точки $t=0$ при любом характере изменения α величина $|\sigma_r^{-2}\varphi'''(t)|$ ограничена.

В интегралах I_1, I_2 и I_4 выберем $A = (\sigma_r\sqrt{m})^{1/4}$. Тогда из (13) следует, что при $|t| \leqslant A$

$$\left(f^*\left(\frac{t}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right)^m = e^{-t^2/2}\left(1 + O\left(\frac{|t|^3}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)\right),$$

и для I_1 справедлива оценка

$$|I_1| \leqslant \frac{c_1}{\sigma_r\sqrt{m}} \int_{-A}^{A} |t|^3 e^{-t^2/2} dt \leqslant \frac{C_1}{\sigma_r\sqrt{m}},$$

где c_1 и C_1 — положительные постоянные. Интегралы I_2, I_3 и I_4 оцениваются так же, как в доказательстве теоремы 3.1. Учитывая, что $A = (\sigma_r\sqrt{m})^{1/4}$, из полученных в этом доказательстве оценок находим, что интегралы I_2, I_3 и I_4 при $m \to \infty$ представляют собой величины порядка $O\left(\frac{1}{\sigma_r\sqrt{m}}\right)$. Таким образом, при m, $\alpha m \to \infty$

$$R_m = O\left(\frac{1}{\sigma_r\sqrt{m}}\right). \tag{14}$$

Утверждение теоремы 6 является прямым следствием оценки (14), представления (12) и соотношения $\sigma_r^2 = \alpha(1 + o(1))$, справедливого при $\alpha \to 0$ и $\alpha \to \infty$.

Приведем теперь уточнения предельных теорем 3.2 и 3.3 в левой и правой промежуточных r-областях.

Теорема 7. *Если $r\geqslant 2$ фиксировано, $n\to\infty$, $p_r\to 0$, $\frac{1+u_r^6}{Np_r}\to 0$, $\beta u_r^2\leqslant c<\infty$, где $u_r=\frac{k-Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}$, $\beta=\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n,N)=k\}=$$
$$=\frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{2\pi N}}e^{-u_r^2/2}\left(1+\frac{3u_r-u_r^3}{6\sqrt{Np_r}}+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{(1+|u_r|^3)\sqrt{\beta}}{\sqrt{Np_r}}+\frac{1+u_r^6}{Np_r}\right)\right).\quad(15)$$

Доказательство. Согласно теореме 1

$$C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}e^{-u^2/2}\left(1+\frac{(1-2p_r)(3u-u^3)}{6\sqrt{Np_r(1-p_r)}}+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{1+u^6}{Np_r(1-p_r)}\right)\right),\quad(16)$$

где $u=\frac{k-Np_r}{\sqrt{Np_r(1-p_r)}}$. Поскольку $\sigma_{rr}^2=p_r(1-p_r-\beta)$ и

$$u=u_r\sqrt{\frac{1-p_r-\beta}{1-p_r}}=u_r(1+O(\beta)),$$

из (16) следует, что

$$C_N^k p_r^k(1-p_r)^{N-k}=\frac{1}{\sqrt{2\pi Np_r(1-p_r)}}e^{-u^2/2}\left(1+\frac{3u_r-u_r^3}{6\sqrt{Np_r}}+\right.$$
$$\left.+O\left(\frac{|u_r|+|u_r|^3}{\sqrt{Np_r}}\beta+\frac{1+u_r^6}{Np_r}\right)\right).\quad(17)$$

Полагая в теореме 6 $m=N-k$ и $l=n-kr$ и подставляя явные выражения для α_r и σ_r^2, находим, что

$$\frac{(l-m\alpha_r)^2}{2m\sigma_r^2}=\frac{\beta u_r^2}{2(1-p_r)\left(1-\frac{u_r\sigma_{rr}}{(1-p_r)\sqrt{N}}\right)}=$$
$$=\frac{\beta u_r^2}{2(1-p_r)}+O\left(\frac{|u_r|^3\beta p_r}{\sqrt{Np_r}}\right);\quad(18)$$

учитывая условие $u_r^2\beta \leqslant c < \infty$, получаем

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - rk\} =$$
$$= \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi N(1-p_r)}} e^{-\frac{\beta u_r^2}{2(1-p_r)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha N}} + \frac{|u_r| + |u_r|^3}{\sqrt{Np_r}}\beta\right)\right). \tag{19}$$

Наконец,

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = n\} = \frac{n^n e^{-n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right)\right). \tag{20}$$

Подставляя (17), (19) и (20) в равенство (3.2) и учитывая, что $\frac{1}{\sqrt{\alpha N}} = O\left(\sqrt{\frac{\beta}{Np_r}}\right)$, получаем утверждение теоремы.

Т е о р е м а 8. *Если $r \geqslant 2$ фиксировано, $n \to \infty$, $p_r \to 0$, $Np_r \to \infty$ и $\beta u^2 \to 0$, где $u = \frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r}}$ и $\beta = \frac{(\alpha - r)^2}{\alpha} p_r$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \Pi(k, Np_r)\left(1 + \frac{1}{2}(1 - u^2)\beta + \right.$$
$$\left. + O\left((1 + u^2)p_r + (1 + u^4)\beta^2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right)\right). \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Согласно теореме 2

$$C_N^k p_r^k (1 - p_r)^{N-k} = \Pi(k, Np_r)(1 + O((1 + u^2)p_r)). \tag{22}$$

Из (18), (19) и того, что $\sigma_r^2 = \alpha(1 - p_r - \beta)(1 - p_r)^{-2}$, находим:

$$\mathbf{P}\{\zeta_{N-k}^{(r)} = n - kr\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha N}}\left(1 + \frac{1}{2}(1 - u^2)\beta + \right.$$
$$\left. + O\left((1 + u^4)\beta^2 + \frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right)\right). \tag{23}$$

Подставляя (20), (22) и (23) в равенство (3.2), получаем утверждение теоремы.

Заметим, что теорема 8 дает правильный главный член асимптотического разложения в случае, если β стремится к нулю медленнее $1/\sqrt{\alpha N}$.

Используя обозначения (1), введем расстояния между распределением $\mu_r(n, N)$ и предельными распределениями:

$$\rho_{1r} = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} - \Pi(k, Np_r)|,$$

$$\rho_{2r} = \sum_{k=0}^{\infty} |\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} - N(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2)|.$$

Оценим расстояния ρ_{1r} и ρ_{2r} в областях, где

$$n,\ Np_r \to \infty \text{ и } p_r \to 0.$$

Теорема 9. *Если $r \geqslant 2$ фиксировано, n, $Np_r \to \infty$, $p_r \to 0$, то*

$$\rho_{1r} = c_1 \frac{(\alpha - r)^2}{\alpha} p_r (1 + o(1)) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right).$$

Доказательство. Обозначим $\beta = \frac{(\alpha - r)^2}{\alpha} p_r$, $v = \beta^{-1/3}$ и представим ρ_{1r} в виде суммы $\rho_{1r} = A_1 + A_2$, где

$$A_1 = \sum_{|u| \leqslant v} |\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} - \Pi(k, Np_r)|,$$

$$A_2 = \sum_{|u| > v} |\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} - \Pi(k, Np_r)|, \qquad u = \frac{k - Np_r}{\sqrt{Np_r}}.$$

С помощью теоремы 8 находим, что

$$A_1 = \frac{1}{2} \beta \sum_{|u| \leqslant v} |1 - u^2| \Pi(k, Np_r) + O\left(\beta^2 + p_r + \frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right).$$

Так же, как при доказательстве теоремы 5, получаем равенство

$$\sum_{|u| \leqslant v} |1 - u^2| \Pi(k, Np_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |1 - u^2| e^{-u^2/2} du + o(1).$$

Отсюда следует, что

$$A_1 = c_1 \beta (1 + o(1)) + O\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right). \tag{24}$$

Прямым подсчетом находим

$$\mathbf{M}\left(\frac{\mu_r - Np_r}{\sqrt{Np_r}}\right)^4 = O(1),$$

поэтому, применяя неравенство Чебышева, получаем

$$\sum_{|u|>v} \mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} \leqslant \frac{1}{v^4} \mathbf{M}\left(\frac{\mu_r - Np_r}{\sqrt{Np_r}}\right)^4 = O(\beta^{4/3}), \quad (25)$$

кроме того,

$$\sum_{|u|>v} \Pi(k, Np_r) \leqslant \frac{1}{v^4} \sum_{k=0}^{\infty} u^4 \Pi(k, Np_r) = O(\beta^{4/3}).$$

Отсюда следует, что $A_2 = O(\beta^{4/3})$, и эта оценка вместе с оценкой (24) приводит к утверждению теоремы.

Теорема 10. *Если $r \geqslant 2$ фиксировано, $n \to \infty, p_r \to 0$ и $Np_r \to \infty$, то*

$$\rho_{2r} = \frac{c_2}{\sqrt{Np_r}}(1 + o(1)).$$

Доказательство. Положим $v_r = \sqrt{\ln Np_r - \ln \beta}$ и представим ρ_{2r} в виде суммы $\rho_{2r} = A_1 + A_2$, где

$$A_1 = \sum_{|u_r| \leqslant v_r} \left|\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} - N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right)\right|,$$

$$A_2 = \sum_{|u_r| > v_r} \left|\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} - N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right)\right|,$$

$$u_r = \frac{k - Np_r}{\sigma_{rr}\sqrt{N}}.$$

В области $|u_r| \leqslant v_r$ справедлива теорема 7, поэтому, применяя при замене суммирования интегрированием лемму 1, для A_1 получаем оценку

$$A_1 = \frac{c_2}{\sqrt{Np_r}}(1 + o(1)). \quad (26)$$

Используя лемму 3, получаем

$$\sum_{|u_r|>v_r} \mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = 1 - \sum_{|u_r| \leqslant v_r} N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right) +$$
$$+ \sum_{|u_r| \leqslant v_r} \left(N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right) - \mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\}\right) =$$
$$= \sum_{|u_r| \leqslant v_r} \left(N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right) - \mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\}\right) +$$
$$+ \sum_{|u_r| > v_r} N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right) + O\left(\frac{\sqrt{\ln Np_r}}{Np_r}\right). \quad (27)$$

Применяя лемму 1, находим

$$\sum_{|u_r|>v_r} N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{v_r}^{\infty} e^{-u^2/2} du + $$

$$+ O\left(\frac{1}{\sigma_{rr}\sqrt{N}} e^{-v_r^2/2}\right) = O\left(\sqrt{\frac{\beta}{Np_r}}\right). \tag{28}$$

Используя теорему 7 и равенство

$$\int_{-\infty}^{\infty} (u^3 - 3u)\, e^{-u^2/2} du = 0,$$

получаем

$$\sum_{|u_r|\leqslant v_r} \left(N\left(k, Np_r, N\sigma_{rr}^2\right) - \mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\}\right) =$$

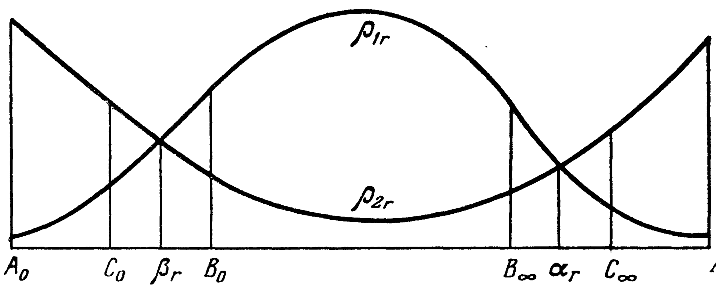
$$= O\left(\frac{1}{\sqrt{Np_r}} e^{-v_r^2/2} + \sqrt{\frac{\beta}{Np_r}} + \frac{1}{Np_r}\right) = O\left(\sqrt{\frac{\beta}{Np_r}}\right). \tag{29}$$

Из (27), (28) и (29) следует, что справедлива оценка

$$A_2 = O\left(\sqrt{\frac{\beta}{Np_r}} + \sqrt{\frac{\ln Np_r}{Np_r}}\right),$$

и это вместе с оценкой (26) приводит к утверждению теоремы.

С помощью теорем 9 и 10 в левой и правой промежуточных областях можно начертить графики зависимости расстояний ρ_{1r} и ρ_{2r} от поведения параметра α.



На рисунке левой промежуточной области соответствует отрезок (A_0, B_0), правой промежуточной области — отрезок (B_∞, A_∞). Отрезки (A_0, C_0) и (C_∞, A_∞) соответствуют областям, где теорема 9 не дает правильного значения главного члена расстояния ρ_{1r}. Указанная в теореме 9 оценка расстояния $\rho_{1r}=O(1/\sqrt{\alpha N})$ в этих областях позволяет сделать вывод, что $\rho_{1r}<\rho_{2r}$, поскольку в этих областях $\rho_{2r}=\frac{c_2}{\sqrt{Np_r}}(1+o(1))$. В областях (C_0, B_0) и (B_∞, C_∞) главные члены расстояний ρ_{1r} и ρ_{2r} являются монотонными функциями параметра α. Точки α_r и β_r, в которых расстояния до обоих предельных распределений совпадают, являются корнями уравнения $\rho_{1r}=\rho_{2r}$ и асимптотически равны

$$\alpha_r = \frac{1}{3}\ln n + \left(r+\frac{1}{3}\right)\ln\ln n - \left(r+\frac{1}{3}\right)\ln 3 - \\ - \ln r! + \frac{2}{3}\ln\frac{c_1}{c_2} + o(1), \qquad (30)$$

$$\beta_r = ((r-1)!)^{\frac{1}{r-1}}\left(\frac{c_2^2}{rnc_1^2}\right)^{\frac{1}{3(r-1)}}(1+o(1)).$$

Наихудшее приближение осуществляется в точке α_r; расстояние в этой точке до обоих предельных распределений асимптотически равно

$$\sup_\alpha \min_i \rho_{ir} = \left(\frac{c_1c_2^2}{9n}\right)^{1/3}(\ln n + (3r+1)\ln\ln n)^{2/3}(1+o(1)),$$

где верхняя грань берется по левой и правой промежуточным областям. Для доказательства этого утверждения, а также формул (30) достаточно подставить значения α_r и β_r в выражения для ρ_{1r} и ρ_{2r}, указанные теоремами 9 и 10.

Таким образом, поведение распределений $\mu_r(n, N)$ во многом сходно с поведением биномиального распределения; особенностью является отсутствие симметрии, вызванное тем, что главный член расстояния ρ_{1r} равен $c_1\frac{(\alpha-r)^2}{\alpha}p_r$, а не c_1p_r, как это имеет место в соответствующем расстоянии для биномиального распределения.

§ 6. Предельные распределения максимального и минимального заполнений ячеек

Рассмотрим равновероятную схему размещения n частиц в N ячейках. Обозначим η_i число частиц в ячейке с номером i, $i=1, \ldots, N$. Располагая $\eta_1, \ldots, \eta_N$ в неубывающем порядке, построим вариационный ряд $\eta_{(1)}, \ldots$ $\ldots, \eta_{(N)}$. В этом параграфе изучается асимптотическое поведение при $n, N \to \infty$ крайних членов вариационного ряда. Вид предельных распределений членов вариационного ряда при $n, N \to \infty$ зависит от поведения параметра $\frac{n}{N \ln N}$. Если $\frac{n}{N \ln N} \to 0$ при $n, N \to \infty$, то распределение каждого члена ряда асимптотически сосредоточено в одной или двух точках. С ростом параметра $n/N \ln N$ предельные распределения все больше «расплываются». Если $n/N \ln N \to x$, $x>0$, то предельным для $\eta_{(N-m+1)}$ при любом фиксированном m служит распределение, сосредоточенное в счетном числе точек, и разброс этого распределения растет с ростом x. Аналогично ведут себя члены вариационного ряда $\eta_{(m)}$ при любом фиксированном m. Критическим для них является значение $x=1$. Если $n/N \ln N \to x$, то при $x \leqslant 1$ предельные распределения сосредоточены в одной или двух точках, а при $x>1$ — в счетном числе точек. Если $n/N \ln N \to \infty$, то при соответствующей центрировке и нормировке крайние члены вариационного ряда имеют в пределе распределения, обладающие плотностью дважды экспоненциального типа.

Распределения членов вариационного ряда просто связаны с распределениями случайных величин $\mu_r(n, N)$; например,

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant k\} = \mathbf{P}\{\mu_k + \mu_{k+1} + \ldots + \mu_n = 0\}.$$

Поэтому для изучения вариационного ряда можно использовать асимптотические свойства случайных величин вида $\mu_k + \ldots + \mu_n$. В этом параграфе для изучения вариационного ряда мы применим другой подход, основанный на представлении (3.1) совместного распределения случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ с помощью независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, распределенных по закону Пуассона. При таком подходе исследование минимального и максимального членов вариационного ряда проводится во многом одинаково. Поэтому вначале подробно исследуется поведение максимального члена $\eta_{(N)}$, а затем кратко излагаются результаты, относящиеся к $\eta_{(1)}$.

Обозначим, как обычно,

$$\alpha = \frac{n}{N}, \; p_k = \frac{\alpha^k}{k!} e^{-\alpha}, \; k = 0, \; 1, \ldots$$

Предельное поведение $\eta_{(N)}$ описывается следующими тремя теоремами.

Теорема 1. *Если n, $N \to \infty$, $\alpha/\ln N \to 0$ и $r = r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r > \alpha$ и $Np_r \to \lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r - 1\} \to e^{-\lambda}, \qquad \mathbf{P}\{\eta_{(N)} = r\} \to 1 - e^{-\lambda}.$$

Теорема 2. *Если n, $N \to \infty$, $\alpha/\ln N \to x$ и $r = r(\alpha, N)$ выбрано так, что $Np_r \to \lambda$, где x и λ — положительные постоянные, то*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r + k\} \to \exp\left\{-\frac{\lambda\gamma^{k+1}}{1-\gamma}\right\},$$

где γ — корень уравнения

$$\gamma + x(\ln\gamma - \gamma + 1) = 0 \qquad (1)$$

в интервале $0 < \gamma < 1$.

Теорема 3. *Если n, N, $\alpha/\ln N \to \infty$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_{(N)} - \alpha - \alpha u\left(\frac{1}{\alpha}\left(\ln N - \frac{\ln\ln n}{2}\right)\right)}{\sqrt{\alpha/2\ln N}} + \frac{\ln 4\pi}{2} \leqslant z\right\} \to e^{-e^{-z}},$$

где $u(w)$ — положительная функция, заданная в интервале $0 < w < \infty$ уравнением

$$-u + (1+u)\ln(1+u) = w. \qquad (2)$$

Для доказательства этих теорем нам потребуются некоторые вспомогательные результаты. Центральное место занимают лемма 1 о связи распределения $\eta_{(N)}$ с распределением Пуассона и лемма 7. Из этих лемм и леммы 8 следует, что предельное распределение максимума в равновероятной схеме совпадает с предельным распределением максимума N независимых случайных величин, имеющих распределение Пуассона с параметром α. Поэтому для нахождения предельного распределения $\eta_{(N)}$ достаточно изучить квантили распределения Пуассона; этому посвящены леммы 2, 3 и 6. В лемме 5 для решения уравнения (2) приводится выражение в виде ряда.

Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие распределение Пуассона с параметром α. Введем независимые случайные величины $\xi_1^{(A)}, \ldots, \xi_N^{(A)}$, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(A)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_i \notin A\}, \quad i = 1, \ldots, N, \quad k \in \overline{A},$$

где A — некоторое множество неотрицательных целых чисел, $\overline{A}$ — его дополнение в множестве всех неотрицательных целых чисел.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = (1 - \mathbf{P}\{\xi_1 > r\})^N \frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1^{(A_r)} + \ldots + \xi_N^{(A_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}},$$

где A_r — множество целых чисел, больших r.

Доказательство. В силу (3.1)

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N)} \leqslant r\} = \mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r, \ldots, \xi_N \leqslant r \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} =$$
$$= (\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\})^N \frac{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n \mid \xi_1 \leqslant r, \ldots, \xi_N \leqslant r\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}} =$$
$$= (1 - \mathbf{P}\{\xi_1 > r\})^N \frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1^{(A_r)} + \ldots + \xi_N^{(A_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}}.$$

Рассмотрим поведение хвостов распределения Пуассона $P_r = P_r(\alpha) = \mathbf{P}\{\xi_1 > r\}$ при различном характере изменения α и r.

Лемма 2. *Если $N \to \infty$, $\alpha/\ln N \to 0$ и $r = r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r > \alpha$ и $Np_r \to \lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\frac{\alpha}{r} \to 0, \; NP_r \to 0, \; NP_{r-1} \to \lambda, \; NP_{r-2} \to \infty.$$

Доказательство. Логарифмируя соотношение $Np_r \to \lambda$ и умножая обе части полученного соотношения на $\alpha/r \ln N$, находим, что

$$\frac{\alpha}{r}+\frac{\alpha\ln\alpha}{\ln N}-\frac{\alpha^2}{r\ln N}-\frac{\alpha\ln r!}{r\ln N}=o(1). \tag{3}$$

Если r ограничено, то, учитывая соотношения $\alpha/\ln N \to 0$ и $\alpha/r<1$, из (3) получаем

$$\frac{\alpha}{r}+\frac{\alpha\ln\alpha}{\ln N}=o(1). \tag{4}$$

Отсюда следует, что $\alpha\to 0$. Действительно, выполнение неравенства $\alpha>1$ для бесконечной последовательности значений α невозможно, так как в этом случае оба слагаемых в левой части (4) неотрицательны и, значит, должны стремиться к нулю; с другой стороны, при $0<\alpha\leqslant 1$ функция $\alpha\ln\alpha$ ограничена и, следовательно, из (4) вытекает, что $\alpha/r=o(1)$.

Если $r\to\infty$, то из (3) находим, применяя формулу Стирлинга для разложения $\ln r!$, что

$$\frac{\alpha}{r}+\frac{\alpha}{\ln N}\ln\frac{\alpha}{r}=o(1). \tag{5}$$

Предполагая, что $\alpha/r\geqslant\delta>0$ для бесконечной последовательности значений, приходим к противоречию, так как тогда $\frac{\alpha}{\ln N}\ln\frac{\alpha}{r}\to 0$ и из (5) следует, что $\alpha/r=o(1)$.

Итак, $\alpha/r\to 0$ при условиях леммы 2. Поэтому

$$NP_r=N\sum_{k=r+1}^{\infty}p_k=Np_r\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-r}r!}{k!},$$

$$NP_{r-1}=N\sum_{k=r}^{\infty}p_k=Np_r\left(1+\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-r}r!}{k!}\right).$$

Отсюда следует, что $NP_r\to 0$ и $NP_{r-1}\to\lambda$, так как $Np_r\to\lambda$ и

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-r}r!}{k!}\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{r}\right)^k=\frac{\alpha}{r}\left(1-\frac{\alpha}{r}\right)^{-1}\to 0.$$

Далее, $NP_{r-2}\geqslant Np_{r-1}=Np_r\frac{r}{\alpha}\to\infty$.

Лемма 3. *Если $N\to\infty$, $\alpha/\ln N\to x$ и $r=r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r>\alpha$ и $Np_r\to\lambda$, где x и λ —*

положительные постоянные, то

$$\frac{\alpha}{r}\to\gamma \quad \text{и} \quad NP_{r+k}\to\frac{\lambda\gamma^{k+1}}{1-\gamma},$$

где k — любое фиксированное целое число и γ — корень уравнения (1) *в интервале* $0<\gamma<1$.

Доказательство. Логарифмируя соотношение $Np_r\to\lambda$ и умножая обе части полученного соотношения на $\alpha/r\ln N$, находим, что

$$\frac{\alpha}{r}+\frac{\alpha}{\ln N}\ln\frac{\alpha}{r}-\frac{\alpha^2}{r\ln N}+\frac{\alpha}{\ln N}=o(1). \tag{6}$$

Поскольку $\alpha/r<1$ и решение уравнения (1) в интервале $0<\gamma<1$ единственно и непрерывно зависит от x, из (6) следует, что предел α/r существует и удовлетворяет уравнению (1). Далее, для любого фиксированного целого k

$$NP_{r+k}=Np_r\sum_{l=r+k+1}^{\infty}\frac{p_l}{p_r}. \tag{7}$$

Как только что установлено, $\alpha/r\to\gamma$, поэтому $p_{r+s}/p_r\to\gamma^s$ при фиксированном s. Переходя в равенстве (7) к пределу под знаком суммы, получаем

$$NP_{r+k}\to\lambda\sum_{l=r+k+1}^{\infty}\gamma^{l-r}=\frac{\lambda\gamma^{k+1}}{1-\gamma}.$$

Лемма 4. *Если $\alpha\to\infty$ и $r\to\infty$ так, что $x_\alpha=\frac{r-\alpha}{\sqrt{\alpha}}=o(\sqrt{\alpha})$ и $x_\alpha\geqslant 0$, то*

$$P_r=(1-G(x_\alpha))\exp\left\{\frac{x_\alpha^3}{\sqrt{\alpha}}\lambda\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\}\left(1+O\left(\frac{1+x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

$$p_r=\frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha}}\exp\left\{-\frac{x_\alpha^2}{2}+\frac{x_\alpha^3}{\sqrt{\alpha}}\lambda\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right\}\left(1+O\left(\frac{1+x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

где $\lambda(z)=\frac{1}{z^3}\left(z+\frac{z^2}{2}-(1+z)\ln(1+z)\right)$ *и* $G(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}e^{-x^2/2}\,dx.$

Доказательство. Если $\alpha \to \infty$ по целым точкам, то ξ_1 можно представить в виде суммы независимых одинаково распределенных случайных величин $X_1, \ldots, X_\alpha$, имеющих распределение Пуассона с параметром 1. Утверждение леммы 4 в этом случае получается путем прямого применения интегральной и локальной теорем о больших уклонениях для суммы $X_1+\ldots+X_\alpha$. Входящий в эти теоремы ряд Крамера $\lambda(\tau)$ определяется равенством

$$\lambda(\tau) = \frac{1}{\tau^3}\left(\frac{\tau^2}{2} + K(z_0) - \tau z_0\right),$$

где $K(z)$ — главная ветвь функции $\ln M(z)$, $M(z) = \mathbf{M}e^{z(X_1-1)} = e^{e^z-z-1}$, z_0 — корень уравнения $K'(z)=\tau$. Как нетрудно проверить, в данном случае $\lambda(\tau)$ имеет указанный в лемме вид.

Переход к произвольному стремлению α к бесконечности не вызывает трудностей, поскольку $p_r=p_r(\alpha)$ и $P_r=P_r(\alpha)$ при $r\geqslant\alpha$ монотонны по α и

$$p_r(\alpha+1) = p_r(\alpha)\left(1+O\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

$$P_r(\alpha+1) = P_r(\alpha)\left(1+O\left(\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

так как при $x_\alpha>0$ и $x_\alpha=o(\sqrt{\alpha})$ справедлива оценка

$$p_r(\alpha+1) - p_r(\alpha) = p_r(\alpha)\left(\frac{1}{e}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^r - 1\right) \leqslant$$

$$\leqslant p_r(\alpha)\left(e^{x_\alpha/\sqrt{\alpha}} - 1\right) = O\left(p_r(\alpha)\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Рассмотрим теперь решения уравнения (2). Функция $w=-u+(1+u)\ln(1+u)$ на отрезке $[-1, 0]$ строго убывает, а в интервале $[0, \infty)$ строго возрастает. Поэтому уравнение (2) имеет положительное решение $u(w)$ и отрицательное решение $v(w)$.

Поскольку при $|u|<1$

$$-u+(1+u)\ln(1+u) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-u)^k}{k(k-1)},$$

то, применяя стандартные методы обращения рядов, получаем следующий результат.

Лемма 5. *Уравнение*

$$-u+(1+u)\ln(1+u)=w$$

имеет положительное решение $u(w)$ *в интервале* $0\leqslant w<<\infty$ *и отрицательное решение* $v(w)$ *в интервале* $0\leqslant w\leqslant 1$, *задаваемые сходящимися в некоторой окрестности нуля рядами*

$$u(w)=\sqrt{2w}+\sum_{l=2}^{\infty}(-1)^{l-1}d_l\left(\sqrt{2w}\right)^l, \tag{8}$$

$$v(w)=-\sqrt{2w}-\sum_{l=2}^{\infty}d_l\left(\sqrt{2w}\right)^l, \tag{9}$$

в которых

$$d_{l+1}=\frac{1}{l+1}\sum\frac{(-1)^k(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{k_1!\ldots k_l!\,(2\cdot 3)^{k_1}\ldots((l+1)(l+2))^{k_l}},\ l=1,2,\ldots,$$

где $k=k_1+\ldots+k_l$ *и суммирование проводится по всем таким целым неотрицательным* $k_1,\ldots,k_l$, *что* $k_1+2k_2+\ldots$ $\ldots+lk_l=l$.

Нетрудно проверить, что

$$u(w)=\sqrt{2w}+\frac{1}{3}w-\frac{\sqrt{2}}{36}w^{3/2}+\ldots,$$

$$v(w)=-\sqrt{2w}+\frac{1}{3}w+\frac{\sqrt{2}}{36}w^{3/2}+\ldots$$

Лемма 6. *Если* n, N, $\alpha/\ln N\to\infty$ *и*

$$r=\alpha+\alpha u\left(\frac{\ln N-\frac{1}{2}\ln\ln N}{\alpha}\right)+\\ +\sqrt{\frac{\alpha}{2\ln N}}\left(z-\frac{1}{2}\ln 4\pi+o(1)\right),$$

то

$$NP_r=e^{-z}+o(1),\qquad p_r=O\left(\frac{1}{N}\sqrt{\frac{\ln N}{\alpha}}\right).$$

Доказательство. Как следует из (8),

$$u\left(\frac{\ln N-\frac{1}{2}\ln\ln N}{\alpha}\right)=\sqrt{\frac{2\ln N}{\alpha}}(1+o(1)),$$

поэтому при указанном в лемме выборе r

$$x_\alpha = \frac{r-\alpha}{\sqrt{\alpha}} = \sqrt{2\ln N}\,(1+o(1)) = o\left(\sqrt{\alpha}\right) \tag{10}$$

и для оценки P_r можно привлечь лемму 4. Применяя лемму 4 и соотношение

$$1 - G(x_\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x_\alpha} e^{-x_\alpha^2/2}(1+o(1)), \tag{11}$$

справедливое при $x_\alpha \to \infty$, получаем

$$NP_r = \frac{N}{\sqrt{2\pi}x_\alpha} \exp\left\{\alpha\left[\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}} - \left(1+\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\ln\left(1+\frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right]\right\} \times (1+o(1)). \tag{12}$$

Обозначим для кратности

$$u = u\left(\frac{\ln N - \frac{1}{2}\ln\ln N}{\alpha}\right),$$

$$\Delta = \frac{r-\alpha}{\alpha} - u = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{2\ln N}}\left(z - \frac{1}{2}\ln 4\pi + o(1)\right).$$

В этих обозначениях $x_\alpha/\sqrt{\alpha} = u + \Delta$. Логарифмируя (12) и учитывая, что в силу (10)

$$\ln x_\alpha = \frac{1}{2}\ln\ln N + \frac{1}{2}\ln 2 + o(1),$$

получаем

$$\ln NP_r = \ln N - \frac{1}{2}\ln\ln N - \frac{1}{2}\ln 4\pi + \alpha[u-(1+u)\ln(1+u)] + \alpha\Big[\Delta - \Delta\ln(1+u) - (1+u)\ln\left(1+\frac{\Delta}{1+u}\right) - \Delta\ln\left(1+\frac{\Delta}{1+u}\right)\Big] + o(1). \tag{13}$$

Величина u выбрана так, что

$$\alpha[u-(1+u)\ln(1+u)] = -\ln N + \frac{1}{2}\ln\ln N;$$

кроме того, поскольку $\alpha\Delta^2 \to 0$ и $\alpha\Delta u^2 \to 0$,

$$\alpha\left[\Delta - \Delta\ln(1+u) - (1+u)\ln\left(1+\frac{\Delta}{1+u}\right) - \right.$$
$$\left. - \Delta\ln\left(1+\frac{\Delta}{1+u}\right)\right] = -\alpha\Delta u + o(1) = \frac{1}{2}\ln 4\pi - z + o(1).$$

Поэтому из (13) следует, что $\ln NP_r = -z + o(1)$.

Второе утверждение леммы следует из равенства

$$p_r = \frac{x_\alpha}{\sqrt{\alpha}} P_r(1+o(1)),$$

вытекающего из леммы 4, и равенства (10).

Перейдем к оценке отношения вероятностей в лемме 1. Обозначим

$$\zeta_N^{(A_r)} = \xi_1^{(A_r)} + \ldots + \xi_N^{(A_r)}, \qquad m_r = \mathbf{M}\xi_1^{(A_r)}, \qquad \sigma_r^2 = \mathbf{D}\xi_1^{(A_r)}.$$

Как нетрудно подсчитать,

$$m_r = \alpha\left(1 - \frac{p_r}{1-P_r}\right), \qquad \sigma_r^2 = \alpha\left(1 - \frac{p_r}{1-P_r} - \frac{(\alpha-r)p_r}{1-P_r} - \frac{\alpha p_r^2}{(1-P_r)^2}\right).$$

Докажем, что для $\zeta_N^{(A_r)}$ справедлива локальная теорема о сходимости к нормальному распределению.

Л е м м а 7. *Если $n, N \to \infty$ и $r = r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r > \alpha$ и $NP_r \to \lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(A_r)} = k\right\} = \frac{1}{\sigma_r\sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(k-Nm_r)^2}{2N\sigma_r^2}\right\}(1+o(1))$$

равномерно относительно $(k - Nm_r)/\sigma_r\sqrt{N}$ в любом конечном интервале.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Следуя классическому доказательству локальной предельной теоремы, представим вероятность $\mathbf{P}\{\zeta_N^{(A_r)} = k\}$ в виде интеграла

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(A_r)} = k\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_r\sqrt{N}} \int_{-\pi\sigma_r\sqrt{N}}^{\pi\sigma_r\sqrt{N}} e^{-ixz}\left[f_r^*\left(\frac{x}{\sigma_r\sqrt{N}}\right)\right]^N dx,$$

где

$$z = \frac{k - Nm_r}{\sigma_r \sqrt{N}}, \qquad f_r^*(t) = e^{-itm_r} f_r(t),$$

$$f_r(t) = \mathbf{M} \exp\left(it\xi_1^{(A_r)}\right) = \frac{1}{1 - P_r} \sum_{k=0}^{r} p_k e^{itk}.$$

Поскольку

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-ixz - \frac{x^2}{2}\right) dx,$$

разность

$$R_N = 2\pi \left(\sigma_r \sqrt{N}\, \mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(A_r)} = k\right\} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}\right)$$

можно представить в виде суммы трех интегралов: $R_N = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-izx} \left(\left(f_r^*\left(\frac{x}{\sigma_r \sqrt{N}}\right)\right)^N - e^{-x^2/2}\right) dx,$$

$$I_2 = \int\limits_{A < |x| \leqslant \pi\sigma_r \sqrt{N}} e^{-izx} \left(f_r^*\left(\frac{x}{\sigma_r \sqrt{N}}\right)\right)^N dx,$$

$$I_3 = -\int\limits_{A < |x|} e^{-izx - \frac{x^2}{2}} dx,$$

постоянная A будет выбрана позднее.

Основную трудность представляет оценка интеграла I_2. Разобьем его область интегрирования на четыре части:

$$S_1 = \{x\colon A < |x| \leqslant B\sqrt{N},\ |x| \leqslant \varepsilon\sigma_r\sqrt{N}\},$$

$$S_2 = \{x\colon B\sqrt{N} < |x| \leqslant CN,\ |x| \leqslant \varepsilon\sigma_r\sqrt{N}\},$$

$$S_3 = \{x\colon CN < |x|,\ |x| \leqslant \varepsilon\sigma_r\sqrt{N}\},$$

$$S_4 = \{x\colon \varepsilon\sigma_r\sqrt{N} < |x| \leqslant \pi\sigma_r\sqrt{N}\},$$

где ε, B, C — постоянные. Заметим, что области S_2 и S_3 могут оказаться пустыми.

Поскольку при достаточно малом ε в области $|t| \leqslant \varepsilon$

$$\left|e^{\alpha(e^{it}-1)}\right| \leqslant e^{-\alpha t^2/4}$$

и в силу выбора r

$$\left|\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}\right| \leqslant P_r \leqslant \frac{a}{N},$$

где a — некоторая постоянная, для характеристической функции $f_r(t)$ при $|t| \leqslant \varepsilon$ справедлива оценка

$$|f_r(t)| = \frac{1}{1-P_r}\left|e^{\alpha(e^{it}-1)} - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}\right| \leqslant \leqslant \frac{1}{1-P_r}\left(e^{-\alpha t^2/4} + \frac{a}{N}\right).$$

Поэтому, учитывая, что $\sigma_r^2 = \alpha(1+o(1))$, получаем цепочку неравенств

$$\left|\int_{S_1} e^{-izx}\left(f_r^*\left(\frac{x}{\sigma_r\sqrt{N}}\right)\right)^N dx\right| \leqslant c_1 \int_A^{B\sqrt{N}} \left(e^{-x^2/4N} + \frac{a}{N}\right)^N dx \leqslant \leqslant c_1\left(1 + \frac{ae^{B^2/4}}{N}\right)^N \int_A^{B\sqrt{N}} e^{-x^2/4}\,dx \leqslant C_1 \int_A^{\infty} e^{-x^2/4} dx,$$

где c_1 и C_1 — некоторые постоянные. Выбором достаточно большого A эта часть интеграла I_2 может быть сделана сколь угодно малой.

Применим для оценки $\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}$ преобразование Абеля. Пусть

$$A_m = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \beta_k,$$

обозначим $B_k = \beta_1 + \ldots + \beta_k$, тогда A_m можно представить в виде

$$A_m = \alpha_m B_m - \sum_{k=1}^{m-1} (\alpha_{k+1} - \alpha_k) B_k. \tag{14}$$

Если α_i не возрастают и положительны, а для B_k равномерно по k справедлива оценка $|B_k|\leqslant L$, то, как нетрудно видеть, из (14) следует, что

$$|A_m|\leqslant L\alpha_1. \tag{15}$$

Полагая $\alpha_k=p_{r+k}$, $\beta_k=e^{itk}$, находим, что

$$A_m=\sum_{k=r+1}^{m+r} p_k e^{itk} \quad \text{и} \quad |B_k|\leqslant \frac{2}{|1-e^{it}|}.$$

Величины p_{r+k} положительны и не возрастают, поэтому, согласно (15), для любого m

$$|A_m|\leqslant \frac{2p_{r+1}}{|1-e^{it}|},$$

и для бесконечной суммы справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}\right|\leqslant \frac{2p_{r+1}}{|1-e^{it}|}.$$

Отсюда следует, что найдется такая постоянная c, что при $|t|\leqslant\varepsilon$

$$\left|\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}\right|\leqslant \frac{cp_{r+1}}{|t|},$$

а при $|t|>\varepsilon$

$$\left|\sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}\right|\leqslant cp_{r+1}. \tag{16}$$

Поэтому при $|t|\leqslant\varepsilon$

$$|f_r(t)|\leqslant \frac{1}{1-P_r}\left(e^{-\alpha t^2/4}+\frac{cp_{r+1}}{|t|}\right)$$

и для интеграла по области S_2 справедлива оценка

$$\left|\int_{S_2} e^{-izx}\left(f_r^*\left(\frac{x}{\sigma_r\sqrt{N}}\right)\right)^N dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant \int_{B\sqrt{N}}^{CN} \frac{1}{(1-P_r)^N}\left(e^{-x^2/4N}+\frac{cp_{r+1}\sigma_r\sqrt{N}}{|x|}\right)^N dx\leqslant$$

$$\leqslant c_2 N\left(e^{-B^2/4}+\frac{cp_{r+1}\sigma_r}{B}\right)^N.$$

При $N\to\infty$ правая часть неравенства стремится к нулю,

4*

так как, согласно леммам 2, 3 и 6, при указанном в лемме выборе r справедлива оценка

$$p_{r+1}\sigma_r = O\left(\frac{\sqrt{\ln N}}{N}\right). \tag{17}$$

Поскольку в области S_3 имеем $e^{-x^2/4N} \leqslant \frac{1}{2|x|}$ и в силу оценки (17) $\frac{cp_{r+1}\sigma_r\sqrt{N}}{|x|} \leqslant \frac{1}{2|x|}$, то в этой области $\left|f_r\left(\frac{x}{\sigma_r\sqrt{N}}\right)\right| \leqslant \frac{1}{(1-P_r)|x|}$ и

$$\left|\int\limits_{S_3} e^{-izx}\left(f_r^*\left(\frac{x}{\sigma_r\sqrt{N}}\right)\right)^N dx\right| \leqslant c_3 \int\limits_{CN}^{\infty} \frac{dx}{x^N} \to 0.$$

Наконец, при $|t|>\varepsilon$ в силу (16) с учетом леммы 6 получаем оценку

$$|f_r(t)| = \frac{1}{1-P_r}\left|e^{\alpha(e^{it}-1)} - \sum_{k=r+1}^{\infty} p_k e^{itk}\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{1-P_r}\left(e^{-\delta\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right),$$

где $\delta>0$. Поэтому при $n, N\to\infty$

$$\left|\int\limits_{S_4} e^{-izx}\left(f_r^*\left(\frac{x}{\sigma_r\sqrt{N}}\right)\right)^N dx\right| \leqslant c_4\sigma_r\sqrt{N}\left(e^{-\delta\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right)^N \leqslant$$
$$\leqslant C_4\sqrt{\alpha N}\left(e^{-\delta\alpha} + \frac{1}{\sqrt{\alpha N}}\right)^N \to 0.$$

Интеграл I_1 при любом фиксированном A стремится к нулю, так как для $\zeta_N^{(A_r)}$ справедлива интегральная предельная теорема о сходимости к нормальному распределению. Наконец, интеграл I_3 выбором A может быть сделан сколь угодно малым.

Лемма 8. *Если n, $N\to\infty$ и $r=r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r>\alpha$ и $NP_r\to\lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(A_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\left\{\xi_1+\ldots+\xi_N = n\right\}} = 1 + o(1).$$

Доказательство. Согласно предыдущей лемме

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(A_r)} = n\right\} = \frac{1}{\sigma_r \sqrt{2\pi N}} \exp\left\{-\frac{(n - Nm_r)^2}{2N\sigma_r^2}\right\}(1 + o(1)). \qquad (18)$$

Используя явные выражения для m_r и σ_r^2, а также леммы 2, 3 и 6, находим, что

$$\sigma_r^2 = \alpha(1 + o(1)),$$

$$\frac{(n - Nm_r)^2}{2N\sigma_r^2} = \frac{1}{2N\sigma_r^2}\left(\frac{\alpha N p_r}{1 - P_r}\right)^2 = O\left(\alpha N p_r^2\right) = O\left(\frac{\ln N}{N}\right).$$

Подставляя эти выражения в (18), получаем равенство

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(A_r)} = n\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha N}}(1 + o(1)).$$

Отсюда следует утверждение леммы, так как для выражения, стоящего в знаменателе, справедливо приближение

$$\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\} = \frac{n^n e^{-n}}{n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\alpha N}}(1 + o(1)).$$

Перейдем к доказательству теорем 1, 2 и 3. При выполнении условий теоремы 1 согласно лемме 2

$$(1 - P_{r-2})^N = o(1), \quad (1 - P_{r-1})^N = e^{-\lambda} + o(1),$$

$$(1 - P_r)^N = 1 + o(1), \qquad (19)$$

при выполнении условий теоремы 2 согласно лемме 3

$$(1 - P_{r+k})^N = \exp\{-\lambda\gamma^{k+1}(1 - \gamma)^{-1}\} + o(1), \qquad (20)$$

и при выполнении условий теоремы 3 согласно лемме 6

$$(1 - P_r)^N = e^{-e^{-z}} + o(1). \qquad (21)$$

Используя представление функции распределения максимума, приведенное в лемме 1, и учитывая, что в этом представлении, согласно лемме 8, отношение вероятностей есть $1+o(1)$, из (19), (20) и (21) получаем утверждения теорем.

Заметим, что если α стремится к бесконечности достаточно быстро, то формулировку теоремы 3 можно упростить за счет отбрасывания лишних членов в представлении (8) функции $u(w)$. Например, если $\alpha^m(\ln N)^{-m-2}\to\infty$, то вместо $u(w)$ достаточно оставить m первых членов разложения (8), так как в этом случае

$$\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha/2\ln N}}\sum_{l=m+1}^{\infty} d_l\left(\frac{\ln N-\frac{1}{2}\ln\ln N}{\alpha}\right)^{l/2}=o(1).$$

Рассмотрим теперь асимптотическое поведение минимального члена вариационного ряда $\eta_{(1)}$. Справедливы следующие утверждения:

Теорема 4. *Если $n, N\to\infty$, $Ne^{-\alpha}\to\infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(1)}=0\}\to 1.$$

Теорема 5. *Если $n, N\to\infty$, $\alpha/\ln N\to 1$ и $r=r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r<\alpha$ и $Np_r\to\lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(1)}=r\}\to 1-e^{-\lambda},$$
$$\mathbf{P}\{\eta_{(1)}=r+1\}\to e^{-\lambda}.$$

Теорема 6. *Если $n, N\to\infty$, $\frac{\alpha}{\ln N}\to x>1$ и $r=r(\alpha, N)$ выбрано так, что $r<\alpha$ и $Np_r\to\lambda$, где λ — положительная постоянная, то*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(1)}\leqslant r+k\}\to 1-\exp\left\{-\frac{\lambda\beta^{k+1}}{\beta-1}\right\},$$

где β — корень уравнения (1) в интервале $1<\beta<\infty$.

Теорема 7. *Если $n, N, \alpha/\ln N\to\infty$, то*

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\eta_{(1)}-\alpha-\alpha v\left(\left(\ln N-\frac{1}{2}\ln\ln N\right)/\alpha\right)}{\sqrt{\alpha/2\ln N}}-\frac{1}{2}\ln 4\pi\leqslant -z\right\}=$$
$$=1-e^{-e^{-z}}+o(1),$$

где $v(w)$ — отрицательная функция, на отрезке $0\leqslant w\leqslant 1$ задаваемая уравнением (2).

Для доказательства теоремы 4 воспользуемся соотношением

$$\mathbf{P}\{\eta_{(1)}=0\}=\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)>0\},$$

где $\mu_0(n, N)$ — число пустых ячеек при равновероятном размещении n частиц в N ячейках. Согласно теоремам

1.3.2 и 1.3.3 случайная величина $\mu_0(n, N)$ при $Ne^{-\alpha}\to\infty$ асимптотически нормальна, поэтому $\mathbf{P}\{\mu_0(n, N)=0\}\to 0$ и теорема 4 доказана.

Доказательства теорем 5, 6 и 7 проводятся аналогично доказательствам соответствующих утверждений для максимального члена $\eta_{(N)}$. Место леммы 1 занимает

Лемма 9. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(1)}=r\}=1-(1-\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\})^N\frac{\mathbf{P}\left\{\xi_1^{(\bar{A}_r)}+\ldots+\xi_N^{(\bar{A}_r)}=n\right\}}{\mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}}$$

Так же, как это делалось при рассмотрении $\eta_{(N)}$, можно показать, что если n, $N\to\infty$ и $r<\alpha$ таково, что $N\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}\to\lambda$, $0<\lambda<\infty$, то для $\xi_1^{(\bar{A}_r)}+\ldots+\xi_N^{(\bar{A}_r)}$ справедлива локальная предельная теорема о сходимости к нормальному распределению и отношение вероятностей в лемме 9 стремится к единице. Поэтому для выяснения асимптотического поведения $\mathbf{P}\{\eta_{(1)}\leqslant r\}$ достаточно оценить левые хвосты распределения Пуассона $\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}$. Справедливы следующие утверждения.

Лемма 10. *Если* n, $N\to\infty$, $\dfrac{\alpha}{\ln N}\to 1$ *и* $r=r(\alpha, N)$ *выбрано так, что* $r<\alpha$ *и* $Np_r\to\lambda$, *где* λ — *положительная постоянная, то*

$$N\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}\to\lambda,\quad N\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r-1\}\to 0,\quad N\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r+1\}\to\infty.$$

Лемма 11. *Если* n, $N\to\infty$, $\dfrac{\alpha}{\ln N}\to x>1$ *и* $r=r(\alpha, N)$ *выбрано так, что* $r<\alpha$ *и* $Np_r\to\lambda$, *где* λ — *положительная постоянная, то*

$$\frac{\alpha}{r}\to\beta \quad \text{и} \quad N\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r+k\}\to\frac{\lambda\beta^{k+1}}{\beta-1},$$

где β — *корень уравнения* (1) *в интервале* $1<\beta<\infty$

Лемма 12. *Если* n, N, $\dfrac{\alpha}{\ln N}\to\infty$ *и*

$$r=\alpha+\alpha v\left(\frac{\ln N-\frac{1}{2}\ln\ln N}{\alpha}\right)-\sqrt{\frac{\alpha}{2\ln N}}\left(z-\frac{1}{2}\ln 4\pi+o(1)\right),$$

то

$$N\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=e^{-z}+o(1).$$

Доказательства лемм 10, 11 и 12 аналогичны доказательствам лемм 2, 3 и 6 соответственно. Заметим, что (как следует из лемм 3, 6, 11 и 12) даже при $\alpha \to \infty$ левая и правая квантили распределения Пуассона асимптотически расположены несимметрично относительно точки α.

Приведем краткое доказательство леммы 12. Используя теорему о больших уклонениях, находим, что при

$$y_\alpha = -\frac{r-\alpha}{\sqrt{\alpha}} \geqslant 0, \quad y_\alpha = o(\sqrt{\alpha})$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\} = $$
$$= G(-y_\alpha)\exp\left(-\frac{y_\alpha^3}{\sqrt{\alpha}}\lambda\left(-\frac{y_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right)\left(1+O\left(\frac{1+y_\alpha}{\sqrt{\alpha}}\right)\right),$$

где $\lambda(z)$ и $G(z)$ определены в лемме 4. Как следует из (9),

$$v\left(\frac{\ln N - \frac{1}{2}\ln\ln N}{\alpha}\right) = -\sqrt{\frac{2\ln N}{\alpha}}(1+o(1)),$$

поэтому при указанном в лемме выборе r

$$y_\alpha = \sqrt{2\ln N}(1+o(1)) = o(\sqrt{\alpha}).$$

Обозначая для краткости

$$v = v\left(\frac{\ln N - \frac{1}{2}\ln\ln N}{\alpha}\right), \quad \Delta = \frac{1}{\alpha}\sqrt{\frac{\alpha}{2\ln N}}\left(z - \frac{1}{2}\ln 4\pi\right),$$

находим, что

$$\ln N\,\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\} = \ln N - \frac{1}{2}\ln\ln N - \frac{1}{2}\ln 4\pi +$$
$$+\alpha[v-(1+v)\ln(1+v)] + \alpha\left[-\Delta + \Delta\ln(1+v) + \right.$$
$$\left. +\Delta\ln\left(1-\frac{\Delta}{1+v}\right) - (1+v)\ln\left(1-\frac{\Delta}{1+v}\right)\right] + o(1),$$

откуда следует, что

$$\ln N\,\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\} = -z + o(1).$$

Так же, как при исследовании $\eta_{(N)}$, леммы 10, 11 и 12 позволяют доказать теоремы 5, 6 и 7 о предельном поведении минимального члена вариационного ряда.

§ 7. Дальнейшие результаты. Литература

Теорема 2.1, составляющая основной результат § 2, доказана в статье Б. А. Севастьянова и В. П. Чистякова [47]; в этой же статье получены производящие функции (1.27) и асимптотические выражения для моментов. Теорема о сходимости распределения $\mu_r(n, N)$ к распределению Пуассона в правой r-области доказана Эрдешем и Реньи [73], доказательство сходимости к распределению Пуассона в левой r-области содержится в статье В. Ф. Колчина [27]. Асимптотическая нормальность $\mu_r(n, N)$ в центральной области и в левой и правой r-областях доказана Бекеши [60]. Метод моментов для доказательства асимптотической нормальности $\mu_r(n, N)$ реализован в статье Харриса и Парка [80]. Локальные теоремы 3.2, 3.3, 3.6 получены В. Ф. Колчиным методом перевала в статьях [27, 28]. Особенности поведения распределения $\mu_1(n, N)$ при $\alpha \to 0$ рассмотрены в статье [28] с помощью метода перевала. В дополнение к результатам, изложенным в § 4, отметим, что при $n, N \to \infty$, $\alpha \to 0$, как показано в [28],

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu_1 = n - 2k\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{3}\alpha^3 N} + o(1),$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\mu_1 = n - 2k - 1\} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{3}\alpha^3 N} + o(1).$$

Таким образом, как отмечалось в § 4, при $\alpha^3 N \to \infty$ распределение $n - \mu_1$ сосредоточено на решетке всех целых неотрицательных чисел, при $\alpha^3 N \to 0$ распределение $n - \mu_1$ асимптотически сосредоточено на решетке четных неотрицательных чисел и при промежуточных значениях $\alpha^3 N$ происходит переход распределения с одной решетки на другую, при этом условные распределения случайной величины $n - \mu_1$ при условии, что она принимает четные или нечетные значения, сближаются с распределениями Пуассона. Более детальное исследование этого перехода содержится в [28].

Скорость приближения распределений $\mu_r(n, N)$ к предельным распределениям при любом фиксированном $r = 0, 1, \ldots$ изучалась В. Ф. Колчиным в статьях [27, 28].

Эти исследования аналогичны исследованиям скорости сходимости биномиального распределения, проведенным Ю. В. Прохоровым в статье [41]. Результаты этой статьи изложены в начале § 5.

Подход, использованный в §§ 3, 4 для доказательства локальных предельных теорем и в § 5 для получения их уточнений, предложен в статье В. Ф. Колчина [29].

Изучение вариационного ряда $\eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(N)}$ в равновероятной схеме размещения частиц начато И. И. Викторовой и Б. А. Севастьяновым в статье [11], где получены теоремы 6.1 и 6.2; теорема 6.3 доказана И. И. Викторовой [9]. Подробное исследование всех членов вариационного ряда в случае, когда $\alpha/\ln N$ стремится к постоянной величине, проведено Г. И. Ивченко [19]. Исследование вариационного ряда в статьях [9, 11, 19] сводится к изучению асимптотического поведения случайных величин $\mu_0(n, N)+\ldots+\mu_r(n, N)$. Изложение § 6 основано на статье В. Ф. Колчина [30] и использует представление (3.3) полиномиального распределения в виде условного распределения независимых пуассоновских случайных величин с фиксированной суммой. Отметим, что такое представление использовалось Двоссом в [72] для изучения обратных задач размещения, Стеком в [97] — для изучения статистики χ^2, В. Ф. Колчиным в [32] — для получения локальной предельной теоремы для статистики $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\eta_i(\eta_i-1)$, где $\eta_1, \ldots, \eta_N$ — заполнения ячеек в неравновероятной схеме размещения.

Как показано в § 6, распределение максимального заполнения в равновероятной схеме размещения частиц асимптотически совпадает с распределением максимума N независимых случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$, имеющих распределение Пуассона с параметром α. В связи с этим В. Ф. Колчиным в [30] было изучено поведение вариационного ряда в схеме серий для пуассоновских случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ при различном характере изменения параметра α. При этом существенно использовалось свойство безграничной делимости распределения Пуассона.

Для нахождения квантилей распределения Пуассона случайная величина представлялась при целых α в виде суммы независимых пуассоновских случайных величин с единичным параметром и к этой сумме применялись теоремы о больших уклонениях.

Обобщение такого подхода на исследование вариационного ряда в схеме серий содержится в статье Г. И. Ивченко [21], в которой рассмотрено поведение вариационного ряда, построенного для независимых одинаково распределенных случайных величин $\xi_1, \ldots, \xi_N$ в случае, когда $\xi_1 = X_1 + \ldots + X_n$, где $X_1, \ldots, X_n$ независимы и одинаково распределены с функцией распределения $F(x)$, не зависящей от параметров n и N. Частные случаи этой схемы, когда ξ_1 имеет распределение Пуассона и гамма-распределение с параметрами, зависящими от N, рассмотрены Г. И. Ивченко в статье [22]. В статье [23] Г. И. Ивченко изучил (в равновероятной схеме размещения частиц) поведение вариационного ряда, составленного из заполнений ячеек в некоторый случайный момент времени.

ГЛАВА III

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

§ 1. Производящие функции и моменты

В этой главе мы будем предполагать, что каждая из n частиц независимо от остальных попадает в i-ю ячейку с вероятностью a_i, $i=1, 2, \ldots, N$. Обозначим $\mu_r(n, a_1, a_2, \ldots, a_N)$ (или просто $\mu_r(n)$, μ_r) число ячеек, содержащих ровно r частиц. Введем производящие функции

$$\Phi_{r_1 \ldots r_s}(z, x, a_1, \ldots, a_N) = \\ = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(zN)^n}{n!} \sum_{k_1, \ldots, k_s=0}^{\infty} x^k \mathbf{P}\{\mu_{r_i}(n, a_1, \ldots, a_N) = k_i, i = 1, \ldots, s\}, \tag{1}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_s)$, $x^k = x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_s^{k_s}$.

Теорема 1. *Производящая функция, определенная формулой* (1), *имеет следующий вид*:

$$\Phi_{r_1 \ldots r_s}(z, x, a_1, \ldots, a_N) = \\ = \prod_{k=1}^{N} \left[e^{zNa_k} + \sum_{i=1}^{s} \frac{(zNa_k)^{r_i}}{r_i!} (x_i - 1) \right]. \tag{2}$$

Доказательство. Разделим всю совокупность N ячеек на две группы, выделив первую группу ячеек с номерами $1, 2, \ldots, N_1$ и включив оставшиеся ячейки во вторую группу. Вероятность того, что при бросании n частиц в группу с N_1 ячейками попадет n_1 частиц, равна $C_n^{n_1} p^{n_1} q^{n_2}$, где

$$p = a_1 + \ldots + a_{N_1}, \quad q = 1 - p, \quad n_2 = n - n_1.$$

Если фиксированы числа частиц, попавших в первую и вторую группы, то при этом условии внутри групп частицы распределяются независимо друг от друга с вероятностями $a_1/p, \ldots, a_{N_1}/p$ для первой группы и $a_{N_1+1}/q, \ldots, a_N/q$ для второй. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_i}(n, a_1, \ldots, a_N) = k_i,\ i = 1, \ldots, s\} =$$
$$= \sum_{n_1+n_2=n} \sum_{\substack{k_{i1}+k_{i2}=k_i \\ i=1,\ldots,s}} C_n^{n_1} p^{n_1} q^{n_2} \times$$
$$\times \mathbf{P}\left\{\mu_{r_i}\left(n_1, \frac{a_1}{p}, \ldots, \frac{a_{N_1}}{p}\right) = k_{i1},\ i = 1, \ldots, s\right\} \times$$
$$\times \mathbf{P}\left\{\mu_{r_i}\left(n_2, \frac{a_{N_1+1}}{q}, \ldots, \frac{a_N}{q}\right) = k_{i2},\ i = 1, \ldots, s\right\}.$$

Умножая обе части этого равенства на $N^n z^n x^k/n!$ и суммируя по $n, k_1, \ldots, k_s$, получим

$$\Phi_{r_1\ldots r_s}(z, x, a_1, \ldots, a_N) =$$
$$= \Phi_{r_1\ldots r_s}\left(p\frac{N}{N_1} z, x, \frac{a_1}{p}, \ldots, \frac{a_{N_1}}{p}\right) \Phi_{r_1\ldots r_s}\left(q\frac{N}{N_2} z, x, \frac{a_{N_1+1}}{q}, \ldots, \frac{a_N}{q}\right). \tag{3}$$

При $N_1 = 1$ равенство (3) запишется в виде

$$\Phi_{r_1\ldots r_s}(z, x, a_1, \ldots, a_N) =$$
$$= \Phi_{r_1\ldots r_s}(a_1 zN, x, 1)\, \Phi_{r_1\ldots r_s}\left((1 - a_1)\frac{N}{N-1} z, x, \frac{a_2}{1-a_1}, \ldots, \frac{a_N}{1-a_1}\right). \tag{4}$$

Применяя (4) $\left(\text{с заменой } N \text{ на } N-1 \text{ и } z \text{ на } \frac{(1-a_1)Nz}{N-1}\right)$ ко второму множителю равенства (4), получим

$$\Phi_{r_1\ldots r_s}\left((1 - a_1)\frac{N}{N-1} z, x, \frac{a_2}{1-a_1}, \ldots, \frac{a_N}{1-a_1}\right) =$$
$$= \Phi_{r_1\ldots r_s}(a_2 zN, x, 1) \times$$
$$\times \Phi_{r_1\ldots r_s}\left(\frac{(1 - a_1 - a_2) zN}{N-2}, x, \frac{a_3}{1-a_1-a_2}, \ldots, \frac{a_N}{1-a_1-a_2}\right).$$

Продолжая этот процесс выделения множителей, соответствующих одной ячейке, из полученной цепочки равенств найдем

$$\Phi_{r_1\ldots r_s}(z,\ x,\ a_1,\ \ldots\ a_N)=\prod_{k=1}^{N}\Phi_{r_1\ldots r_s}(a_kNz,\ x,\ 1). \qquad (5)$$

Так как

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_i}(n,\ 1)=0,\ i=1,\ldots,s\}=1,\quad n\neq r_i,\ i=1,\ \ldots,s,$$

и

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_i}(n,\ 1)=1,\ \mu_{r_j}(n,\ 1)=0,\ j\neq i\}=1,\quad n=r_i,$$

то

$$\Phi_{r_1\ldots r_s}(a_kNz,\ x,\ 1)=e^{a_kNz}+\sum_{i=1}^{s}\frac{(a_kNz)^{r_i}}{r_i!}(x_i-1).$$

Отсюда и из (5) следует утверждение теоремы.

Нам потребуются также формулы для вероятностных производящих функций величин $\mu_{r_1},\ \ldots,\mu_{r_s}$.

Теорема 2. *Производящая функция*

$$F_{n,r_1\ldots r_s}(x,\ a_1,\ \ldots,a_N)=\mathbf{M}\prod_{j=1}^{s}x_j^{\mu_{r_j}(n,a_1,\ldots,a_N)}$$

вычисляется по формуле

$$F_{n,r_1\ldots r_s}(x,\ a_1,\ \ldots,\ a_N)=$$

$$=\frac{n!}{N^n2\pi i}\oint\prod_{k=1}^{N}\left(e^{a_kNz}+\sum_{l=1}^{s}\frac{(a_kNz)^{r_l}}{r_l!}(x_l-1)\right)\frac{dz}{z^{n+1}}, \qquad (6)$$

где интеграл берется по любому замкнутому контуру, охватывающему точку $z=0$.

Доказательство. Равенство (1) можно записать в виде

$$\Phi_{r_1\ldots r_s}(z,\ x,\ a_1,\ \ldots,\ a_N)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{N^nz^n}{n!}F_{n,r_1\ldots r_s}(x,\ a_1,\ \ldots,\ a_N).$$

Отсюда и из (2) следует утверждение теоремы.

Частным случаем формулы (6) является формула

$$\mathbf{M}x^{\mu_0(n)}=\frac{n!}{N^n2\pi i}\oint\prod_{k=1}^{N}(e^{a_kNz}+x-1)\frac{dz}{z^{n+1}}. \qquad (7)$$

Используя формулу (2), можно так же, как в § 1 гл. II, получить формулы, аналогичные (2.1.3)—(2.1.5):

$$\mathbf{M}\mu_r = \sum_{k=1}^{N} C_n^r a_k^r (1-a_k)^{n-r}, \tag{8}$$

$$\mathbf{M}\mu_r^{[2]} = \sum_{k\neq l} \frac{n!}{(r!)^2 (n-2r)!} a_k^r a_l^r (1-a_k-a_l)^{n-2r}, \tag{9}$$

$$\mathbf{M}\mu_r\mu_t = \sum_{k\neq l} \frac{n!}{r!t!(n-r-t)!} a_k^r a_l^t (1-a_k-a_l)^{n-r-t}, \; r\neq t. \tag{10}$$

Аналогично можно получить любой факториальный момент μ_r:

$$\mathbf{M}\mu_r^{[k]} = \frac{n^{[kr]}}{(r!)^k} \sum_{l_1\ldots l_k}^{*} a_{l_1}^r \ldots a_{l_k}^r \left(1-a_{l_1}-\ldots-a_{l_k}\right)^{n-kr}. \tag{11}$$

Здесь и ниже знаком $\sum^*$ будем обозначать сумму по всем $N^{[k]}$ наборам $(l_1, l_2, \ldots, l_k)$, в которых все l_i различны.

В этой главе мы будем рассматривать асимптотическое поведение различных характеристик величин μ_r, когда n, $N\to\infty$. Если вероятности $a_1, a_2, \ldots, a_N$ меняются с ростом N достаточно произвольно, то получается трудно обозримое множество типов асимптотического поведения законов распределения μ_r. Налагая же на a_i некоторые ограничения, мы сохраняем существенные черты центральной, а также левой и правой r-областей.

Мы будем говорить, что параметры n, $N\to\infty$ и a_k меняются в *центральной области*, если существуют такие положительные константы C, $\alpha_0<\alpha_1$, что

$$Na_k\leqslant C, \qquad \alpha_0\leqslant\alpha=\frac{n}{N}\leqslant\alpha_1, \qquad n, N\to\infty. \tag{12}$$

Обозначим

$$\underline{a}=\min_{1\leqslant k\leqslant N} a_k, \qquad \overline{a}=\max_{1\leqslant k\leqslant N} a_k.$$

Мы будем говорить, что n, $N\to\infty$ и a_k меняются в *левой r-области* при $r\geqslant 2$, если

$$n\overline{a}\to 0 \qquad \text{и } \mathbf{M}\mu_r\to\lambda<\infty. \tag{13}$$

Как и в равновероятной схеме, мы будем считать левые r-области с $r=0$ и $r=1$ совпадающими с левой

2-областью. *Правая r-область* будет определяться при любых $r=0, 1, 2, \ldots$ соотношениями

$$n\underline{a} \to \infty, \quad \mathbf{M}\mu_r \to \lambda < \infty. \tag{14}$$

Исследуем сначала поведение $\mathbf{M}\mu_0$, $\mathbf{D}\mu_0$ в центральной области. Из формул (8) и (9) при $r=0$ находим

$$\mathbf{M}\mu_0 = \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^n,$$

$$\mathbf{D}\mu_0 = \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^n - \\ - \sum_{i,j=1}^{N} (1-a_i)^n (1-a_j)^n + \sum_{i\neq j} (1-a_i-a_j)^n, \tag{15}$$

или

$$\mathbf{D}\mu_0 = \sum_{i=1}^{N} (1-a_i)^n - \sum_{i=1}^{N} (1-2a_i)^n - \\ - \sum_{i,j=1}^{N} [(1-a_i-a_j+a_ia_j)^n - (1-a_i-a_j)^n]. \tag{16}$$

Теорема 3. *В центральной области* (12) *имеют место асимптотические формулы*

$$\mathbf{M}\mu_0 = Nm_N + O(1), \qquad \mathbf{D}\mu_0 = N\sigma_N^2 + O(1),$$

где

$$m_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha N a_k}, \tag{17}$$

$$\sigma_N^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha N a_k} - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{-2\alpha N a} - \\ - \alpha \left(\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} N a_k e^{-\alpha N a_k} \right)^2. \tag{18}$$

Доказательство. В условиях (12) имеем

$$(1-a_i)^n = e^{\alpha N \ln(1-a_i)} = e^{-\alpha N a_i} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$(1-2a_i)^n = e^{-2\alpha N a_i} + O\left(\frac{1}{N}\right),$$

$$(1-a_i-a_j+a_ia_j)^n =$$
$$= e^{-\alpha Na_i}\cdot e^{-\alpha Na_j}\left[1+\alpha Na_ia_j-\frac{\alpha N}{2}(a_i+a_j)^2\right]+O\left(\frac{1}{N^2}\right),$$

$$(1-a_i-a_j)^n =$$
$$= e^{-\alpha Na_i}e^{-\alpha Na_j}\left[1-\frac{\alpha N}{2}(a_i+a_j)^2\right]+O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Отсюда и из формул (15) и (16) следует утверждение теоремы.

Теорема 4. *В центральной области* (12) *величина* σ_N^2, *определенная соотношением* (18), *удовлетворяет неравенству*

$$\sigma_N^2 \geqslant \varepsilon > 0,$$

где ε *— некоторая постоянная.*

Доказательство. Применяя в (18) неравенство Коши — Буняковского

$$\left(\sum_{k=1}^{N} e^{-\alpha Na_k}a_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{N} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{N} e^{-2\alpha Na_k}a_k\right),$$

получаем

$$\sigma_N^2 \geqslant \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sigma(\alpha Na_k), \tag{19}$$

где $\sigma(\gamma)=e^{-\gamma}[1-(1+\gamma)e^{-\gamma}]$.

Пусть N_δ — число номеров k, при которых

$$a_k \geqslant \frac{\delta}{N}, \qquad 0<\delta<1, \tag{20}$$

и

$$\sigma_0 = \min_{0<\alpha\delta\leqslant\gamma\leqslant\alpha C}\sigma(\gamma),$$

где C — постоянная, входящая в условия (12). Очевидно, что $\sigma_0>0$. Так как

$$1=\sum_{k=1}^{N} a_k \leqslant \frac{\delta}{N}(N-N_\delta)+\frac{C}{N}N_\delta,$$

то

$$\frac{N\delta}{N} \geqslant \frac{1-\delta}{C-\delta}. \tag{21}$$

Суммируя в (19) только по k, удовлетворяющим (20), и заменяя $\sigma(\alpha N a_k)$ на σ_0, получим

$$\sigma_N^2 \geqslant \frac{N_\delta}{N}\sigma_0 \geqslant \frac{1-\delta}{C-\delta}\sigma_0 > 0.$$

Теорема доказана.

Теорема 5. *В центральной области* (12) *имеют место асимптотические формулы*

$$\mathbf{M}\mu_r = N\widetilde{m}_r + O(1), \quad \mathbf{Cov}(\mu_r, \mu_t) = N\widetilde{\sigma}_{rt} + O(1),$$

где

$$\widetilde{m}_r = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{r,k},$$

$$\widetilde{\sigma}_{rr} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{r,k} - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{r,k}^2 - \frac{1}{\alpha}\left[\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{r,k}(\alpha N a_k - r)\right]^2,$$

$$\widetilde{\sigma}_{rt} = -\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{r,k}p_{t,k} - \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{r,k}(\alpha N a_k - r)\right)\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} p_{t,k}(\alpha N a_k - t)\right),$$

$$p_{r,k} = \frac{(\alpha N a_k)^r}{r!}e^{-\alpha N a_k}. \tag{22}$$

Доказательство этой теоремы проводится при помощи формул (8), (9), (10) так же, как доказательство теоремы 3.

Иногда мы будем налагать на a_k более сильные условия, чем (12), а именно: при $n, N \to \infty$

$$\alpha_0 \leqslant \frac{n}{N} = \alpha \leqslant \alpha_1,$$

$$a_k = \frac{1}{N}\left(1 + \frac{b_k^{(N)}}{\sqrt[4]{N}}\right), \qquad k = 1, \ldots, N,$$

$$|b_k^{(N)}| \leqslant K < \infty, \qquad b_N^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\left(b_k^{(N)}\right)^2 \to b^2 > 0. \tag{23}$$

Теорема 6. *Если выполнены условия* (23), *то при* $n, N \to \infty$

$$\widetilde{m_r} = p_r\left(1 + \frac{b_N^2}{2\sqrt{N}}\,[(\alpha - r)^2 - r]\right) + O\left(\frac{1}{N^{3/4}}\right), \qquad (24)$$

$$\widetilde{\sigma_{rt}} = \sigma_{rt} + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right),$$

где $p_r = \frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}$, *а величины* σ_{rt}, b_N^2 *определены формулами* (2.1.9), (23).

Доказательство. Подставляя в (22) a_k из (23), получим

$$p_{r,k} = \frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}\left(1 + \frac{b_k^{(N)}}{\sqrt[4]{N}}\right)^r \exp\left(-\frac{\alpha b_k^{(N)}}{\sqrt[4]{N}}\right) =$$

$$= p_r\left[1 - \frac{(\alpha - r)}{\sqrt[4]{N}}\,b_k^{(N)} + \frac{\left(b_k^{(N)}\right)^2}{2\sqrt{N}}\,[(\alpha - r)^2 - r]\right] + O\left(\frac{1}{N^{3/4}}\right). \qquad (25)$$

Так как $\sum_{k=1}^{N} a_k = 1$, то из (23) следует, что

$$\sum_{k=1}^{N} b_k^{(N)} = 0. \qquad (26)$$

Утверждение теоремы следует из теоремы 4 и формул (25), (26).

Рассмотрим теперь левую r-область, $r \geqslant 2$. Так как $\bar{a} \geqslant 1/N$, то из (13) следует, что $\alpha = n/N \leqslant n\bar{a} \to 0$. Далее, из неравенств $(1-\bar{a})^{n-r} \leqslant (1-a_i)^{n-r} \leqslant 1$ и из соотношения $\lim_{n\to\infty}(1-\bar{a})^{n-r} = 1$ имеем

$$\mathbf{M}\mu_r \sim \frac{n^r}{r!}\sum_{i=1}^{N} a_i^r \to \lambda. \qquad (27)$$

Обозначим $\bar{\mu}_r = \sum_{k>r}\mu_r$. Из очевидных неравенств

$$\mathbf{M}\bar{\mu}_r = \sum_{k=r+1}^{n}\mathbf{M}\mu_k = \sum_{k=r+1}^{n}\sum_{i=1}^{N} C_n^k a_i^k (1 - a_i)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=r+1}^{\infty}(n\bar{a})^{k-r}\frac{n^r}{r!}\sum_{i=1}^{N} a_i^r = \frac{n\bar{a}}{1 - n\bar{a}}(\lambda + o(1))$$

следует $\mathbf{M}\bar{\mu}_r \to 0$. Отсюда по неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\{\bar{\mu}_r > 0\} \leqslant \mathbf{M}\bar{\mu}_r \to 0, \tag{28}$$

т. е. в левой r-области с вероятностью, стремящейся к 1, все ячейки заполнены не более чем r частицами. Поэтому, в частности, в левой 2-области с вероятностью, стремящейся к 1, выполнены равенства $\mu_0+\mu_1+\mu_2=N$, $\mu_1+2\mu_2=n$, которые можно записать в равносильном виде

$$\mu_0=N-n+\mu_2, \tag{29}$$

$$\mu_1=n-2\mu_2. \tag{30}$$

В правой r-области, в силу (14) и $\underline{a}\leqslant 1/N$, имеем $\alpha=n/N\geqslant n\underline{a}\to\infty$. Обозначим $\underline{\mu}_r=\sum\limits_{k<r}\mu_k$. Из неравенств

$$\mathbf{M}\underline{\mu}_r=\sum_{k=0}^{r-1}\mathbf{M}\mu_k=\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{N}C_n^k a_i^k(1-a_i)^{n-k}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{i=1}^{N}\frac{C_n^k}{C_n^r}\,\frac{C_n^r a_i^r(1-a_i)^{n-r}}{\underline{a}^{r-k}}=O\left(\frac{1}{n\underline{a}}\right)\to 0$$

следует $\mathbf{M}\underline{\mu}_r\to 0$, откуда по неравенству Чебышева имеем

$$\mathbf{P}\{\underline{\mu}_r>0\}\leqslant\mathbf{M}\underline{\mu}_r\to 0, \tag{31}$$

т. е. в правой r-области с вероятностью, стремящейся к 1, все ячейки содержат не менее чем по r частиц.

§ 2. Предельная пуассоновская теорема для сумм индикаторов

Этот параграф носит вспомогательный характер. Для доказательства предельных теорем нам будет удобно иногда представлять какую-либо случайную величину ξ в виде суммы индикаторов, т. е. в виде

$$\xi=\eta_1+\eta_2+\ldots+\eta_n, \tag{1}$$

где η_i принимают лишь значения 1 и 0 и, вообще говоря, зависимы между собой. Здесь мы сформулируем некоторые общие условия, из которых будет следовать, что предельным при $n\to\infty$ законом распределения ξ будет закон Пуассона.

В схеме серий (1) будем обозначать

$$b_{i_1 i_2 \ldots i_r}=\mathbf{P}\{\eta_{i_1}=\eta_{i_2}=\ldots=\eta_{i_r}=1\},$$

где индексы $1\leqslant i_k\leqslant n$ попарно не равны друг другу и $r=1, 2, \ldots, n$. Далее, для любых $r=2, 3, \ldots$ и $n=2, 3, \ldots$ мы будем вводить множества $I_r(n)$, которые будем называть *исключительными*. Эти множества будут состоять из упорядоченных наборов $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$ попарно не равных друг другу индексов $1\leqslant i_k\leqslant n$.

Теорема 1. *Пусть в схеме серий случайная величина ξ представима в виде* (1). *Если вероятности $b_{i_1\ldots i_r}$ при $n\to\infty$ удовлетворяют условиям*

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n} b_i\to 0, \qquad \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} b_i=\lambda, \tag{2}$$

для любых $r=2, 3, \ldots$ и $n=2, 3, \ldots$ существуют такие исключительные множества $I_r(n)$, что

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{(i_1\ldots i_r)\in I_r(n)} b_{i_1\ldots i_r}=\lim_{n\to\infty}\sum_{(i_1\ldots i_r)\in I_r(n)} b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_r}=0 \tag{3}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}\max_{(i_1,\ldots,i_r)\notin I_r(n)}\left|\frac{b_{i_1 i_2\ldots i_r}}{b_{i_1}b_{i_2}\ldots b_{i_r}}-1\right|=0, \tag{4}$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}\{\xi=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k=0, 1, 2, \ldots \tag{5}$$

Доказательство. Применим метод моментов. Утверждение (5) будет доказано, если мы установим, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathbf{M}\xi^{[r]}=\lambda^r, \quad r=1, 2, \ldots \tag{6}$$

Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{M}\xi^{[r]}=\sum_{i_1\ldots i_r}^{*} b_{i_1\ldots i_r}, \tag{7}$$

где суммирование $\sum^*$ производится по всем $n^{[r]}$ упорядоченным наборам попарно различных индексов

$i_1, i_2, \ldots, i_r$. Разобьем сумму (7) на две:

$$\sum_{i_1\ldots i_r}^{*} b_{i_1\ldots i_r} = \sum_{(i_1\ldots i_r)\notin I_r(n)} b_{i_1\ldots i_r} + \sum_{(i_1\ldots i_r)\in I_r(n)} b_{i_1\ldots i_r}. \tag{8}$$

Из (4) следует, что для любого $\varepsilon>0$ найдется такое n_0, что при всех $n>n_0$ и всех $(i_1\ldots i_r)\notin I_r(n)$

$$b_{i_1}\ldots b_{i_r}(1-\varepsilon)\leqslant b_{i_1\ldots i_r}\leqslant b_{i_1}\ldots b_{i_r}(1+\varepsilon). \tag{9}$$

Используя оценки (9), получаем

$$(1-\varepsilon)\sum_{(i_1\ldots i_r)\notin I_r(n)} b_{i_1}\ldots b_{i_r}\leqslant \sum_{(i_1\ldots i_r)\notin I_r(n)} b_{i_1\ldots i_r}\leqslant$$

$$\leqslant(1+\varepsilon)\sum_{(i_1\ldots i_r)\notin I_r(n)} b_{i_1}\ldots b_{i_r}. \tag{10}$$

Вторая сумма в (8) стремится к нулю при $n\to\infty$ в силу условия (3). Далее имеем

$$\sum_{(i_1\ldots i_r)\notin I_r(n)} b_{i_1}\ldots b_{i_r} =$$

$$=\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right)^r - \sum_{(i_1\ldots i_r)\in I_r(n)} b_{i_1}\ldots b_{i_r} - \sum_{i_1\ldots i_r}' b_{i_1}\ldots b_{i_r}, \tag{11}$$

где последняя сумма $\sum'$ берется по всем таким наборам индексов $(i_1, i_2, \ldots, i_r)$, среди которых имеется хотя бы одна пара равных. Нетрудно видеть, что

$$\left|\sum_{i_1\ldots i_r}' b_{i_1}\ldots b_{i_r}\right|\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant r} b_i\left[\sum_{i=1}^{n} b_i\right]^{r-1}\to 0. \tag{12}$$

Из (2), (8), (10), (11) и (12) вытекает (6), т. е. сходимость факториальных моментов ξ к факториальным моментам λ^r закона Пуассона. Отсюда следует утверждение теоремы. Мы применим ее в следующем параграфе.

§ 3. Предельные распределения в левой и правой областях

Докажем пуассоновские предельные теоремы для μ_r.

Теорема 1. *В левой r-области, т. е. в условиях* (1.13), *при любом* $r\geqslant 2$

$$\lim \mathbf{P}\{\mu_r=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\qquad k=0, 1, \ldots, \tag{1}$$

где, согласно (1.27),

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^r}{r!}\sum_{i=1}^{N}a_i^r=\lambda. \tag{2}$$

Доказательство. Применим метод моментов. Из (1.13) и (1.27) следует $\mathbf{M}\mu_r\to\lambda$. Оценивая момент $\mathbf{M}\mu_r^{[k]}$ (см. (1.11)) сверху, получаем

$$\mathbf{M}\mu_r^{[k]}\leqslant\frac{n^{kr}}{(r!)^k}\left(\sum_{i=1}^{N}a_i^r\right)^k\to\lambda^k. \tag{3}$$

Применяя в той же формуле (1.11) оценку снизу

$$(1-k\bar a)^n\leqslant(1-a_{l_1}-\ldots-a_{l_k})^{n-kr},$$

получаем

$$(1-k\bar a)^n\frac{n^{[kr]}}{(r!)^k}\left[\left(\sum_{l=1}^{N}a_l^r\right)^k-\sum_{l_1\ldots l_k}{}'\,a_{l_1}^r\cdots a_{l_k}^r\right]\leqslant\mathbf{M}\mu_r^{[k]}, \tag{4}$$

где Σ' означает суммирование по всем наборам индексов $l_1, l_2, \ldots, l_k$, среди которых имеется хотя бы одна пара равных. Так как

$$\lim_{n\to\infty}(1-k\bar a)^n=1 \quad\text{и}\quad \sum_{l_1\ldots l_k}{}'\,a_{l_1}\ldots a_{l_k}\leqslant\bar a^r\left(\sum_{l=1}^{N}a_i^r\right)^{k-1},$$

то из (4) вытекает

$$\lambda^k\leqslant\lim\mathbf{M}\mu_r^{[k]}. \tag{5}$$

Из неравенств (3) и (5) следует $\lim\mathbf{M}\mu_r^{[k]}=\lambda^k$. Теорема доказана.

Теорема 2. *В левой r-области для* $r\leqslant 2$, *когда выполнены условия* (1.13), *случайные величины*

$$\mu_0-(N-n),\quad \frac{n-\mu_1}{2},\quad \mu_2$$

имеют в пределе один и тот же пуассоновский закон распределения с параметром

$$\lambda=\lim\frac{n^2}{2}\sum_{i=1}^{N}a_i^2.$$

Доказательство для $r=2$ дано в теореме 1. Остальные утверждения следуют из того, что в левой 2-области с вероятностью, стремящейся к 1, выполнены равенства (1.29), (1.30).

Для доказательства предельной теоремы в правой области воспользуемся теоремой 2.1.

Теорема 3. *В правой r-области, т. е. в условиях* (1.14), *при любом* r

$$\lim \mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{6}$$

где

$$\lambda = \lim \mathbf{M}\mu_r. \tag{7}$$

Доказательство. Представим μ_r в виде суммы индикаторов

$$\mu_r = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_N, \tag{8}$$

где $\eta_i = 1$, если в i-м ящике содержится ровно r частиц, и $\eta_i = 0$ в остальных случаях. Вероятности $b_{i_1 \ldots i_k} = \mathbf{P}\{\eta_{i_1} = \ldots = \eta_{i_k} = 1\}$ определяются формулами

$$b_{i_1 \ldots i_k} = \frac{n^{[kr]}}{(r!)^k} a_{i_1}^r \ldots a_{i_k}^r \left(1 - a_{i_1} - \ldots - a_{i_k}\right)^{n-kr}. \tag{9}$$

Как мы установили в § 1, в правой r-области $\alpha = n/N \to \infty$, т. е. $N = o(n)$. Пусть $I_1(n)$ — такое подмножество $\{1, 2, \ldots, N\}$, что $i \in I_1(n)$ тогда и только тогда, когда $a_i > n^{-3/4}$. В исключительное множество $I_k(n)$ включим те и только те наборы $(i_1, \ldots, i_k)$, для которых хотя бы одно $i_k \in I_1(n)$. Покажем теперь, что вероятности (9) удовлетворяют условиям теоремы 2.1. Заметим прежде всего, что так как функция $x^r(1-x)^{n-r}$ при $x > r/n$ убывает, то при $r < \sqrt[4]{n}$ из неравенств $r/n < n^{-3/4} < a_i$ вытекает оценка

$$\sum_{\in I_1(n)} b_i \leqslant \frac{n^r}{r!} \sum_{i \in I_1(n)} n^{-3r/4}\left(1 - n^{-3/4}\right)^{n-r} \leqslant$$

$$\leqslant N \frac{n^{r/4}}{r!} e^{-n^{1/4} + rn^{-3/4}} = o\left(n^{1+\frac{r}{4}} e^{-n^{1/4}}\right) \to 0.$$

Отсюда при любом $r = 2, 3, \ldots$ имеем при $n, N \to \infty$

$$\sum_{i_1 \ldots i_k \in I_k(r)} b_{i_1} \ldots b_{i_k} \leqslant k\left(\sum_{i=1}^{N} b_i\right)^{k-1} \sum_{i \in I_1(n)} b_i \to 0. \tag{10}$$

Так как

$$b_{i_1\ldots i_k} \leqslant n^{kr}\left(1 - a_{i_1} - \ldots - a_{i_k}\right)^{n-r}$$

и $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} > n^{-3/4}$ при $(i_1, \ldots, i_k) \in I_k(n)$, то

$$\sum_{(i_1\ldots i_k)\in I_k(n)} b_{i_1\ldots i_k} \leqslant n^{kr}(1 - n^{-3/4})^{n-r} \leqslant$$
$$\leqslant n^{kr} e^{-n^{1/4}+rn^{-3/4}} \to 0$$

при $n \to \infty$. Это соотношение вместе с (10) показывает, что выполнено условие (2.3) теоремы 2.1. Далее мы будем пользоваться тем, что при $0 \leqslant x \leqslant 1/2$

$$-x - x^2 \leqslant \ln(1-x) \leqslant -x. \tag{11}$$

Так как $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} \leqslant kn^{-3/4}$ при $(i_1, \ldots, i_k) \notin I_k(n)$, то при $n \geqslant (2k)^{4/3}$ имеем $a_{i_1} + \ldots + a_{i_k} \leqslant 1/2$, и мы можем применять (11). Поэтому для $(i_1 \ldots i_k) \in I_k(n)$ и $n \geqslant (2k)^{4/3}$

$$\frac{n^{[kr]}}{(r!)^k} a_{i_1}^r \ldots a_{i_k}^r e^{-(n-kr)[(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k})+(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k})^2]} \leqslant b_{i_1\ldots i_k} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n^{[kr]}}{(r!)^k} a_{i_1}^r \ldots a_{i_k}^r e^{-(n-kr)(a_{i_1}+\ldots+a_{i_k})}. \tag{12}$$

Так как $a_{i_l} \leqslant n^{-3/4}$, то левое неравенство можно записать иначе:

$$\frac{n^{[kr]}}{(r!)^k} a_{i_1}^r \ldots a_{i_k}^r e^{-n(a_{i_1}+\ldots+a_{i_r})} e^{-n^{-1/2}k^2} \leqslant b_{i_1\ldots i_k}. \tag{13}$$

При $k=1$ (12) и (13) дают неравенства

$$\frac{n^{[r]}}{r!} a_i^r e^{-na_i-n^{-1/2}} \leqslant b_i \leqslant \frac{n^{[r]}}{r!} a_i^r e^{-(n-r)a_i}. \tag{14}$$

Из (12), (13) и (14) получаем

$$\frac{n^{[kr]}}{(n^{[r]})^k} e^{-krn^{-3/4}-k^2n^{-1/2}} \leqslant \frac{b_{i_1\ldots i_r}}{b_{i_1}\ldots b_{i_r}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{n^{[kr]}}{(n^{[r]})^k} e^{kn^{-1/2}+k^2rn^{-3/4}},$$

откуда следует условие (2.4) теоремы 2.1. Первое из условий (2.2) вытекает из (7) и неравенства

$$b_i = C_n^r a_i^r (1-a_i)^{n-r} \leqslant \frac{(na_i)^r}{r!} e^{-a_i(n-r)} \leqslant e^r \frac{(n\underline{a})^r}{r!} e^{-n\underline{a}} \to 0.$$

Мы показали, что все условия теоремы 2.1 выполнены, поэтому справедливо и заключение теоремы (6). Теорема доказана.

§ 4. Нормальное предельное распределение числа пустых ячеек

Докажем асимптотическую нормальность μ_0 в центральной области (1.12). Будут получены интегральная и локальная теоремы. Сначала докажем теорему о сходимости к $e^{-t^2/2}$ при n, $N \to \infty$ характеристических функций

$$\Psi_N(t) = \mathbf{M} \exp\left\{it \frac{\mu_0 - Nm_N}{\sigma_N \sqrt{N}}\right\}, \tag{1}$$

где m_N, σ_N определены формулами (1.17), (1.18).

Теорема 1. *В центральной области* (1.12) *при* n, $N \to \infty$ *характеристическая функция* $\Psi_N(t)$, *определяемая формулой* (1), *равномерно по* $|t| \leqslant \sqrt[8]{N}$ *сходится к* $e^{-t^2/2}$.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (1.7), получим

$$\Psi_N(t) = e^{-\frac{itm_N\sqrt{N}}{\sigma_N}} \frac{n!}{N^n 2\pi i} \oint \prod_{k=1}^{N} \left(e^{zNa_k} + e^{\frac{it}{\sigma_N\sqrt{N}}} - 1\right) \frac{dz}{z^{n+1}}.$$

Интегрировать будем по контуру $|z| = \alpha$. Полагая $z = \alpha \exp\left(\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}\right)$ и заменяя $n!$ по формуле Стирлинга, при n, $N \to \infty$ находим

$$\Psi_N(t) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{itm_N\sqrt{N}}{\sigma_N}} \int_{-\pi\sqrt{\alpha N}}^{\pi\sqrt{\alpha N}} e^{-iv\sqrt{\alpha N}} \prod_{k=1}^{N} A_k(v)\, dv, \tag{2}$$

где

$$A_k(v) = \left(e^{\frac{it}{\sigma_N\sqrt{N}}} - 1\right) e^{-\alpha} + e^{-\alpha} \exp\left(\alpha N a_k e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}}\right). \tag{3}$$

Произведение, входящее в (2), можно представить в виде

$$\prod_{k=1}^{N} A_k(v) = \left(\prod_{k=1}^{N} A_{1k}(v)\right)\cdot\left(\prod_{k=1}^{N} A_{2k}(v)\right), \tag{4}$$

где

$$A_{1k}(v) = \exp\left\{\alpha N a_k\left(e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}} - 1\right)\right\}, \tag{5}$$

$$A_{2k}(v) = 1 + \left(e^{\frac{it}{\sigma_N\sqrt{N}}} - 1\right)\exp\left(-\alpha N a_k e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}}\right). \tag{6}$$

Чтобы проверить (4), нужно в (3) вынести за скобки второе слагаемое и заметить, что

$$\prod_{k=1}^{N}\exp\left\{\alpha\left(N a_k e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}} - 1\right)\right\} = \prod_{k=1}^{N}\exp\left\{\alpha N a_k\left(e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}} - 1\right)\right\}.$$

Область интегрирования в (2) разобьем на три области:

$$S_1 = \{v : \delta\sqrt{\alpha N} \leqslant |v| \leqslant \pi\sqrt{\alpha N}\},$$

$$S_2 = \{v : \sqrt[7]{N} \leqslant |v| \leqslant \delta\sqrt{\alpha N}\},$$

$$S_3 = \{v : |v| \leqslant \sqrt[7]{N}\}.$$

В области S_1 при $|t| \leqslant \sqrt[8]{N}$ имеем

$$\left|\prod_{k=1}^{N} A_{1k}(v)\right| = \left|\exp\left\{-\alpha N\left(1 - \cos\frac{v}{\sqrt{\alpha N}}\right) + i\alpha N \sin\frac{v}{\sqrt{\alpha N}}\right\}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \exp\left\{-2\alpha N \sin^2\frac{\delta}{2}\right\},$$

$$\left|\prod_{k=1}^{N} A_{2k}(v)\right| = \prod_{k=1}^{N}\left(1 + O\left(\frac{\sqrt[8]{N}}{\sqrt{N}}\right)\right) = e^{O(N^{5/8})}.$$

Отсюда при $|t| \leqslant \sqrt[8]{N}$

$$\int_{S_1}\left|\prod_{k=1}^{N} A_{1k}(v)\, A_{2k}(v)\right| dv \leqslant$$

$$\leqslant 2\pi\sqrt{\alpha N}\exp\left\{-2\alpha N\sin^2\frac{\delta}{2} + O\left(N^{5/8}\right)\right\} = o\left(e^{-t^2/2}\right). \tag{7}$$

Введем обозначение

$$\rho=\sqrt{v^2+t^2}. \tag{8}$$

Нетрудно проверить справедливость следующих равенств:

$$\begin{gathered}\ln\prod_{k=1}^{N}A_{1k}(v)=-\frac{v^2}{2}+iv\sqrt{\alpha N}+O\left(\frac{|v|^3}{\sqrt{N}}\right),\\ \ln\prod_{k=1}^{N}A_{2k}(v)=\frac{itm_N\sqrt{N}}{\sigma_N}+\frac{\sqrt{\alpha}\,vt}{\sigma_N}\left(\sum_{k=1}^{N}e^{-\alpha Na_k}a_k\right)-\\ -\frac{t^2}{2\sigma_N^2}\left[m_N-\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}e^{-2\alpha Na_k}\right)\right]+O\left(\frac{\rho^3}{\sqrt{N}}\right).\end{gathered} \tag{9}$$

Очевидно, что в области $S_2\cup S_3$ при $|t|<\sqrt[8]{N}$ эти равенства выполняются. Используя (9) и неравенства

$$\frac{|v|^3}{\sqrt{N}}=\frac{|v|}{\sqrt{\alpha N}}\sqrt{\alpha}\,v^2<\delta\sqrt{\alpha}\,v^2,\quad |v|>\sqrt[7]{N},\quad |t|<\sqrt[8]{N},$$

$$\rho^3=|v^3|\sqrt{\left(1+\frac{t^2}{v^2}\right)^3}<3\,|v|^3,$$

получим в области S_2 оценку

$$\left|\prod_{k=1}^{N}A_{1k}(v)\,A_{2k}(v)\right|<\exp\left\{-\frac{v^2}{2}+K\left(\delta v^2+|v|\cdot|t|+t^2\right)\right\}.$$

Выберем теперь δ так, чтобы $K\delta<1/4$. Тогда, учитывая, что $|v|>\sqrt[7]{N}$, $|t|<\sqrt[8]{N}$, последнее неравенство при достаточно больших N можно записать в виде

$$\left|\prod_{k=1}^{N}A_{1k}(v)\,A_{2k}(v)\right|<e^{-c_\delta v^2},$$

где $c_\delta>0$ — некоторая постоянная. Отсюда при $n,\ N\to\infty$ получаем

$$\int\limits_{S_2}\left|\prod_{k=1}^{N}A_{1k}(v)\,A_{2k}(v)\right|dv=o\left(e^{-t^2/2}\right). \tag{10}$$

Используя (7) и (10), из (2) получим

$$\Psi_N(t) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{itm_N\sqrt{N}}{\sigma_N}} \boxtimes \int\limits_{S_3} e^{-iv\sqrt{\alpha N}} \prod_{k=1}^{N} A_k(v)dv + o(e^{-t^2/2}) \tag{11}$$

Складывая правые части равенств (9), найдем

$$\ln \prod_{k=1}^{N} A_k(v) = \frac{itm_N\sqrt{N}}{\sigma_N} + iv\sqrt{\alpha N} -$$
$$- \frac{t^2}{2\sigma_N^2}\left[m_N - \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} e^{-2\alpha N a_k} - \alpha\left(\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\alpha N a_k}\right)^2\right] -$$
$$- \frac{1}{2}\left[v - \frac{t\sqrt{\alpha}}{\sigma_N}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\alpha N a_k}\right)\right]^2 + O\left(\frac{\rho^3}{\sqrt{N}}\right). \tag{12}$$

Подставляя это выражение в (11) и учитывая (1.18), получим, что при $n, N \to \infty$

$$\Psi_N(t) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} \int\limits_{-\sqrt[7]{N}}^{\sqrt[7]{N}} \left[1 + O\left(\frac{\rho^3}{\sqrt{N}}\right)\right] \times$$
$$\exp \times \left\{-\frac{1}{2}\left[v - \frac{t\sqrt{\alpha}}{\sigma_N}\left(\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\alpha N a_k}\right)\right]^2\right\} dv \to e^{-t^2/2}$$

равномерно по $|t| < \sqrt[8]{N}$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы сразу следует интегральная предельная теорема:

Теорема 2. *В центральной области* (1.12) *при* $n, N \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_0 - Nm_N}{\sigma_N\sqrt{N}} < x\right\} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du,$$

где m_N, σ_N *определены формулами* (1.17) *и* (1.18).

Прежде чем переходить к локальной теореме, докажем две леммы. Из (12) следует, что

$$\left|\prod_{k=1}^{N} A_k(v)\right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2}Q(t, v) + K\frac{\rho^3}{\sqrt{N}}\right), \tag{13}$$

где $K>0$ — некоторая постоянная,

$$Q(u_1, u_2) = \sum_{i,j=1}^{2} q_{ij}u_iu_j,$$

$$q_{11} = \sigma_N^2 + \alpha\left(\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\alpha N a_k}\right)^2, \quad q_{22} = 1, \tag{14}$$

$$q_{12} = q_{21} = -\sqrt{\alpha}\sum_{k=1}^{N} a_k e^{-\alpha N a_k}.$$

Лемма 1. *Существует такая постоянная $\delta>0$, что в области $\rho=\sqrt{v^2+t^2}<\delta\sqrt{N}$ имеет место неравенство*

$$\left|\prod_{k=1}^{N} A_k(v)\right| < e^{-c_\delta \rho^2},$$

где $c_\delta>0$ — некоторая постоянная, зависящая от δ.

Доказательство. Согласно теореме 1.3 имеем $q_{11} \geqslant \sigma_N^2 \geqslant \varepsilon > 0$ и

$$\begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_N^2 + q_{12}^2 & q_{12} \\ q_{12} & 1 \end{vmatrix} = \sigma_N^2 \geqslant \varepsilon > 0.$$

Таким образом, квадратичная форма $Q(u_1, u_2)$ положительно определена. Следовательно,

$$\min_{\rho=1} Q(t, v) = c(\alpha, a_1, \ldots, a_N) > 0$$

при любых $\alpha, a_1, \ldots, a_N$, изменяющихся в центральной области (1.12). Так как $c(\alpha, a_1, \ldots, a_N)$ непрерывно зависит от $\alpha, a_1, \ldots, a_N$, то существует такая постоянная $\tilde{c}$, что в условиях (1.12) имеем $c(\alpha, a_1, \ldots, a_N) \geqslant \tilde{c} > 0$. Отсюда следует неравенство $Q(t, v) \geqslant \tilde{c}\rho^2$. Так как в условиях леммы $\rho^3/\sqrt{N} \leqslant \delta\rho^2$, то при $K\delta < \tilde{c}$ из (13) получим утверждение леммы с $c_\delta = \tilde{c} - K\delta$.

Оценим теперь произведение, входящее в (2), при любых допустимых значениях t, v ($|t| \leqslant \pi\sigma_N\sqrt{N}$, $|v| \leqslant \leqslant \pi\sqrt{\alpha N}$). Пользуясь (3), можно проверить, что

$$\prod_{k=1}^{N} A_k(v) = \prod_{k=1}^{N} I\left(\frac{t}{\sigma_N\sqrt{N}}, \frac{v}{\sqrt{\alpha N}}, \alpha N a_k\right), \tag{15}$$

где

$$I(x, y, \beta) = e^{\beta(e^{iy}-1)} + (e^{ix} - 1)e^{-\beta}. \tag{16}$$

Лемма 2. *Для любого* $\delta > 0$ *существует такая постоянная* q $(0<q<1)$, *что*

$$\left|\prod_{k=1}^{N} A_k(v)\right| \leqslant q^N,$$

если либо $|v| \geqslant \delta\sqrt{\alpha N}$, *либо* $|t| \geqslant \delta\sigma_N\sqrt{N}$.

Доказательство. Положим

$$x = \frac{t}{\sigma_N\sqrt{N}}, \quad y = \frac{v}{\sqrt{\alpha N}} \quad (|x| \leqslant \pi, \ |y| \leqslant \pi).$$

Покажем сначала, что

$$|I(x, y, \beta)| \leqslant 1, \tag{17}$$

или

$$e^\beta - \left|e^{\beta e^{iy}} + e^{ix} - 1\right| \geqslant 0.$$

Для левой части этого неравенства имеем

$$e^\beta - \left|e^{\beta e^{iy}} + e^{ix} - 1\right| \geqslant e^\beta - \left|e^{\beta e^{iy}} - 1\right| - \left|e^{ix}\right| = \\ = e^\beta - 1 - \left|e^{\beta e^{iy}} - 1\right| \geqslant 0.$$

Первое неравенство в этой цепочке превращается при $\beta > 0$ в равенство, когда

$$x = \arg\left[e^{\beta e^{iy}} - 1\right],$$

а второе — только при $y=0$. Таким образом, (17) превращается в равенство при $\beta > 0$ только в случае $x=y=0$. Отсюда и из непрерывности $I(x, y, \beta)$ следует: для любого $\delta > 0$ существует такое $\varepsilon > 0$, что

$$|I(x, y, \beta)| < 1 - \varepsilon \tag{18}$$

при любом $\beta > \delta$, если либо $|x| > \delta$, либо $|y| > \delta$. Для числа вероятностей a_k, удовлетворяющих неравенству (1.20), имеем оценку (1.21). Следовательно, число N_δ значений k, при которых выполнено неравенство $\alpha N a_k \geqslant \delta > 0$, не меньше $c_0 N$, где $c_0 > 0$ — некоторая постоянная. Отсюда, используя (15), (17) и (18), получим

$$\left|\prod_{k=1}^{N} A_k(v)\right| \leqslant (1-\varepsilon)^{c_0 N}.$$

Лемма доказана.

Теорема 3. *В центральной области* (1.12) *равномерно по* α, $a_1, \ldots, a_N$ *и равномерно по* $k = Nm_N + u\sigma_N\sqrt{N}$, *где* $|u| \leqslant C < \infty$, *имеем при* n, $N \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\mu_0 = k\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma_N} e^{-u^2/2}(1 + o(1)).$$

Величины m_N, σ_N *определены формулами* (1.17) *и* (1.18).

Доказательство. Вероятность $\mathbf{P}\{\mu_0 = k\}$ связана с характеристической функцией $\Psi_N(t)$, определенной формулой (1), следующим образом:

$$\mathbf{P}\{\mu_0 = k\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-it(k - Nm_N)}\,\Psi_N\left(t\sigma_N\sqrt{N}\right) td. \tag{19}$$

Положим $\tau = t\sigma_N\sqrt{N}$ и представим (19) в виде $\mathbf{P}\{\mu_0 = k\} = I_1 + I_2$, где

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{2\pi\sigma_N\sqrt{N}}\int_{-\sqrt[8]{N}}^{\sqrt[8]{N}} e^{-iu\tau}\,\Psi_N(\tau)\,d\tau, \\ I_2 &= \frac{1}{2\pi\sigma_N\sqrt{N}}\int\limits_{\sqrt[8]{N}\leqslant|\tau|\leqslant\pi\sigma_N\sqrt{N}} e^{-iu\tau}\Psi_N(\tau)\,d\tau. \end{aligned} \tag{20}$$

Воспользовавшись теоремой 1, для I_1 при n, $N \to \infty$ получим

$$I_1 = \frac{1 + o(1)}{2\pi\sqrt{N}\sigma_N}\int_{-\sqrt[8]{N}}^{\sqrt[8]{N}} e^{-iu\tau - \frac{\tau^2}{2}}\,d\tau =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma_N} e^{-u^2/2}(1 + o(1)). \tag{21}$$

Во втором интеграле (20) заменим $\Psi_N(\tau)$ по формуле (2):

$$I_2 = \frac{1 + o(1)}{(2\pi)^{3/2}\,\sigma_N\sqrt{N}} \times$$

$$\times \iint\limits_S \exp\left(-iut - it\frac{m_N\sqrt{N}}{\sigma_N} - iv\sqrt{\alpha N}\right)\prod_{k=1}^{N} A_k(v)\,dv\,dt, \tag{22}$$

где $A_k(v)$ определены формулой (3) и

$$S=\{(t, v)\colon \sqrt[8]{N}\leqslant |t|\leqslant \pi\sigma_N\sqrt{N},\ |v|\leqslant \pi\sqrt{\alpha N}\}.$$

Положим

$$S_1=\{(t, v)\colon \rho=\sqrt{t^2+v^2}\leqslant \delta\sqrt{N}\}\cap S,\qquad S_2=S\setminus S_1.$$

Область интегрирования в (22) разобьем на две: S_1 и S_2. В соответствии с этим $I_2=I_{S_1}+I_{S_2}$, где I_{S_i} задается формулой (22), в которой S заменена на S_i. Для оценки I_{S_1} воспользуемся леммой 1:

$$|I_{S_1}|\leqslant \frac{K}{\sqrt{N}}\iint\limits_{S_1} e^{-c_\delta\rho^2}dt\,dv\leqslant \frac{K}{\sqrt{N}}\iint\limits_{\rho\geqslant\sqrt[8]{N}} e^{-c_\delta\rho^2}dt\,dv,$$

где $K>0$ — некоторая постоянная. Правая часть последнего неравенства стремится к нулю при $N\to\infty$. Следовательно, при $n, N\to\infty$

$$I_{S_1}=o\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \tag{23}$$

Для оценки I_{S_2} воспользуемся леммой 2 и формулой (22):

$$|I_{S_2}|\leqslant \frac{K}{\sqrt{N}}\iint\limits_{S_2} q^N dv\,dt=O\left(N^{3/2}q^N\right). \tag{24}$$

Утверждение теоремы следует из формул (19)—(24).

§ 5. Многомерные нормальные теоремы

Рассмотрим случайный вектор $\mu_{r_1}, \mu_{r_2}, \ldots, \mu_{r_s}$. Обозначим (x, y) скалярное произведение векторов $(x_1, \ldots, x_s)$, $(y_1, \ldots, y_s)$. Положим

$$\Psi_N(t)=\mathbf{M}e^{i(t,\,\xi)}, \tag{1}$$

где векторы $t=(t_1, t_2, \ldots, t_s)$, $\xi=(\xi_1, \ldots, \xi_s)$, $\xi_k=\left(\mu_{r_k}-N\tilde{m}_{r_k}\right)N^{-1/2}$, а $\tilde{m}_{r_k}$ определены в теореме 1.5.

Теорема 1. *В центральной области* (1.12) *при* $n, N\to\infty$ *равномерно по* $|t_k|\leqslant\sqrt[8]{N}$, $k=1, 2, \ldots, s$,

$$\Psi_N(t)=\exp\{-(\|\tilde{\sigma}_{r_i r_l}\|t, t)\}(1+o(1)),$$

где $\Psi_N(t)$ — *характеристическая функция* (1), $\tilde{\sigma}_{r_i r_j}$ *определены в теореме* 1.5.

Доказательство. Воспользовавшись формулой (1.6) так же, как в доказательстве теоремы 4.1, получим

$$\Psi_N(t)=\frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi}}e^{-i(t,\tilde{m})\sqrt{N}}\int\limits_{-\pi\sqrt{\alpha N}}^{\pi\sqrt{\alpha N}}e^{-iv\sqrt{\alpha N}}\prod_{k=1}^{N}A_{1k}(v)A_{2k}(v)dv, \tag{2}$$

где $\tilde{m}=(m_{r_1},\ldots,m_{r_s})$,

$$A_{1k}(v)=\exp\left\{\alpha N a_k\left(e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}}-1\right)\right\}, \tag{3}$$

$$A_{2k}(v)=1+\sum_{l=1}^{s}p_{r_l,k}e^{\frac{ir_l v}{\sqrt{\alpha N}}}\left(e^{\frac{it_l}{\sqrt{N}}}-1\right)\exp\left\{-\alpha N a_k\left(e^{\frac{iv}{\sqrt{\alpha N}}}-1\right)\right\}, \tag{4}$$

где $p_{r,k}$ определены формулой (1.22). Дальше доказательство теоремы проводится так же, как доказательство теоремы 1, если вместо формул (4.9), (4.12) воспользоваться формулами

$$\ln\prod_{k=1}^{N}A_{1k}(v)=-\frac{v^2}{2}+iv\sqrt{\alpha N}+O\left(\frac{|v|^3}{\sqrt{N}}\right),$$

$$\ln\prod_{k=1}^{N}A_{2k}(v)=i\sqrt{N}(t,\tilde{m})-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s}m_{r_l}t_l^2+$$
$$+\frac{v}{\sqrt{\alpha}}\sum_{l=1}^{s}t_l\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}p_{r_l,k}(\alpha N a_k-r_l)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{l_1,l_2=1}^{s}t_{l_1}t_{l_2}\left(\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}p_{r_{l_1},k}p_{r_{l_2},k}\right)+O\left(\frac{\rho^3}{\sqrt{N}}\right),$$

$$\ln\prod_{k=1}^{N}A_{1k}(v)A_{2k}(v)=iv\sqrt{\alpha N}+i\sqrt{N}(t,\tilde{m})-\frac{1}{2}\left(\|\tilde{\sigma}_{r_i r_j}\|t,t\right)-$$
$$-\frac{1}{2}\left[v-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\sum_{l=1}^{s}\frac{t_l}{N}\sum_{k=1}^{N}p_{r_l,k}(\alpha N a_k-r_l)\right]^2+O\left(\frac{\rho^3}{\sqrt{N}}\right), \tag{5}$$

где $\rho=\sqrt{t_1^2+t_2^2+\ldots+t_s^2+v^2}$.

Следствием теоремы 1 является

Теорема 2. *В центральной области* (1.12) *равномерно по* $x_1, x_2, \ldots, x_s$ *имеем при* $n, N \to \infty$

$$\left| \mathbf{P}\left\{ \frac{\mu_{r_l} - N\widetilde{m}_{r_l}}{\sqrt{N}} < x_l, l = 1, \ldots, s \right\} - \Phi\left(x_1, \ldots, x_s; \left\|\widetilde{\sigma}_{r_i r_j}\right\|\right) \right| \to 0,$$

где $\Phi(x_1, \ldots, x_s; \|\widetilde{\sigma}_{r_i r_j}\|)$ — *функция распределения* s-*мерного нормального закона с нулевым математическим ожиданием и ковариационной матрицей* $\|\widetilde{\sigma}_{r_i r_j}\|$, *величины* $\widetilde{m}_r$, $\widetilde{\sigma}_{r_i r_j}$ *определены формулами теоремы* 1.5.

Локальную нормальную теорему мы будем использовать в главе V при построении оптимальных критериев. Нам удобнее сформулировать и доказать ее в случае, когда выполняются предположения (1.23). Докажем сначала обобщения лемм 4.1 и 4.2.

Лемма 1. *Если выполнены условия* (1.23), *то существует такая постоянная* $\delta > 0$, *что в области* $\rho = \sqrt{t_1^2 + \ldots + t_s^2 + v^2} < \delta\sqrt{N}$ *имеет место неравенство*

$$\left| \prod_{k=1}^{n} A_{1k}(v) A_{2k}(v) \right| < e^{-c_\delta \rho^2},$$

где $c_\delta > 0$ — *некоторая постоянная, зависящая от* δ, $A_{1k}(v)$, $A_{2k}(v)$ *определены формулами* (3) *и* (4).

Доказательство. Из (5) следует, что

$$\left| \prod_{k=1}^{N} A_{1k}(v) A_{2k}(v) \right| \leqslant \exp\left(-\frac{1}{2} Q(t, v) + K \frac{\rho^3}{N} \right),$$

где K — некоторая постоянная,

$$Q(t, v) = \left(\|q_{ij}\| t, t\right) + 2 \sum_{i=1}^{s} t_i v q_i + v^2, \tag{6}$$

$\|q_{ij}\|$ — $(s \times s)$-матрица, $q_{ij} = \widetilde{\sigma}_{r_i r_j} + q_i q_j$,

$$q_i = -\frac{1}{N\sqrt{\alpha}} \sum_{k=1}^{N} p_{r_i, k}(\alpha N \bar{a}_k - r_i), \qquad i = 1, 2, \ldots, s.$$

Квадратичная форма (6) положительно определена, если положительны ее главные миноры. Все эти миноры имеют такой же вид, как определитель всей матрицы.

Для доказательства равенства

$$\begin{vmatrix} 1 & q_1 & q_2 & \dots & q_s \\ q_1 & \tilde{\sigma}_{r_1r_1}+q_1^2 & \tilde{\sigma}_{r_1r_2}+q_1q_2 & \dots & \tilde{\sigma}_{r_1r_s}+q_1q_s \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_s & \tilde{\sigma}_{r_sr_1}+q_sq_1 & \tilde{\sigma}_{r_sr_2}+q_sq_2 & \dots & \tilde{\sigma}_{r_sr_s}+q_s^2 \end{vmatrix} = \left|\|\tilde{\sigma}_{r_ir_j}\|\right| \tag{7}$$

нужно умножить первую строку на q_i $(i=1, 2, \dots, s)$ и вычесть из $(i+1)$-й строки. По теореме 1.6 при $N\to\infty$ имеем $\tilde{\sigma}_{r_ir_j}\to\sigma_{r_ir_j}$. Следовательно, правая часть (7) стремится к определителю B^2, который вычисляется по формуле (2.2.5). Согласно следствию из леммы 2.2.1

$$B^2\geqslant\varepsilon>0 \text{ при } \alpha\in[\alpha_0, \alpha_1].$$

Отсюда так же, как в доказательстве леммы 4.1, следует утверждение леммы.

Лемма 2. *Для любого* $\delta>0$ *существует такая постоянная* q $(0<q<1)$, *что*

$$\left|\prod_{k=1}^{N} A_{1k}(v)\,A_{2k}(v)\right|\leqslant q^N, \tag{8}$$

если либо $|v|>\delta\sqrt{\alpha N}$, *либо* $|t_1|>\delta\sqrt{N}, \dots,$ *либо* $|t_s|>\delta\sqrt{N}$.

Доказательство. Нетрудно проверить, что произведение под знаком модуля в левой части (8) равно

$$\prod_{k=1}^{N} I\left(\frac{t}{\sqrt{N}}, \frac{v}{\sqrt{\alpha N}}, \alpha N a_k\right),$$

где

$$I(x, y, \beta)=e^{\beta(e^{iy}-1)}+\sum_{l=1}^{s}\frac{\beta^{r_l}}{r_l!}e^{-\beta}(e^{ix_l}-1)\,e^{iyr_l}.$$

Так же, как в доказательстве леммы 4.2, достаточно показать, что имеет место неравенство

$$|I(x, y, \beta)|\leqslant 1 \tag{9}$$

и что в области $\{\beta>0, |y|\leqslant\pi, |x_l|\leqslant\pi, l=1, \dots, s\}$ знак равенства достигается только при $x_1=\dots=x_s=$ $=y=0$.

Для доказательства (9) заметим, что

$$e^\beta - |e^\beta I(x, y, \beta)| =$$

$$= e^\beta - \left| e^{\beta e^{iy}} - \sum_{l=1}^{s} \frac{\beta^{r_l}}{r_l!} e^{iyr_l} + \sum_{l=1}^{s} \frac{\beta^{r_l}}{r_l!} e^{i(yr_l + x_l)} \right| \geqslant$$

$$\geqslant e^\beta - \left| e^{\beta e^{iy}} - \sum_{l=1}^{s} \frac{\beta^{r_l}}{r_l!} e^{iyr_l} \right| - \sum_{l=1}^{s} \left| \frac{\beta^{r_l}}{r_l!} e^{i(yr_l + x_l)} \right| =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} - \left| \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\beta^k}{k!} e^{iyk} - \sum_{l=1}^{s} \frac{\beta^{r_l}}{r_l!} e^{iyr_l} \right| - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\beta^{r_l}}{r_l!} =$$

$$= \sum_{\substack{k \neq r_l \\ l=1,\ldots,s}} \frac{\beta^k}{k!} - \left| \sum_{\substack{k \neq r_l \\ l=1,\ldots,s}} \frac{\beta^k}{k!} e^{iyk} \right| \geqslant 0. \quad (10)$$

Так как неравенство $\left|\sum_{l=1}^{s} z_l\right| \leqslant \sum_{l=1}^{s} |z_l|$ превращается в равенство только при $\arg z_1 = \ldots = \arg z_s$, то при $\beta > 0$ первое неравенство в (10) превращается в равенство лишь при одном наборе $x_1, x_2, \ldots, x_s$, зависящем от y. Второе неравенство в (10) превращается в равенство только при $y = 0$. Проводя далее те же рассуждения, что в лемме 4.2, завершаем доказательство леммы.

Теорема 3. *Если выполнены условия* (1.23), *то при* n, $N \to \infty$ *равномерно по* $|u_i| \leqslant C < \infty$, $u_i = (k_i - N\widetilde{m}_{r_i})/\sqrt{N}$, *и* $\alpha = n/N \in [\alpha_0, \alpha_1]$, $0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty$,

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_1} = k_1, \ldots, \mu_{r_s} = k_s\} = \frac{1 + o(1)}{(2\pi N)^{s/2} B} \exp\left(-\frac{1}{2B^2} \sum_{i,j=1}^{s} B_{ij} u_i u_j\right),$$

где $p_{r_i} = \frac{\alpha^{r_i}}{r_i!} e^{-\alpha}$, B^2, B_{ij} *определены формулами* (2.2.5), (2.2.8), (2.2.9) *и* $\widetilde{m}_r$ — *формулой* (1.24).

Доказательство этой теоремы проводится при помощи лемм 1, 2 и теоремы 1 аналогично доказательству теоремы 4.3. Заметим только, что при разбиении s-мерного интеграла, заменяющего (4.19), на сумму $I_1 + I_2$ нужно в интеграле I_1 интегрировать по области $T = \{t : |t_1| < \sqrt[8]{N}, \ldots, |t_s| < \sqrt[8]{N}\}$, а в I_2 — по области $\{t : \max|t_i| < \pi\sqrt{N}\} \setminus T$. В определении областей S, S_1, S_2 нужно положить $\rho = \sqrt{t_1^2 + \ldots + t_s^2 + v^2}$.

§ 6. Дальнейшие результаты. Литература

Производящие функции (1.1), (1.2) получены в работе Б. А. Севастьянова, В. П. Чистякова [47]. Предельную пуассоновскую теорему для сумм индикаторов доказал Б. А. Севастьянов [46]; изложение § 2 следует этой работе. Предельная пуассоновская теорема была использована Б. А. Севастьяновым для доказательства теорем § 3.

Некоторые предельные распределения для μ_0, отличные от пуассоновских, были получены В. П. Чистяковым. В его работе [56] доказано следующее утверждение.

Если n, $N \to \infty$, $\frac{n}{N^2} \to 0$, $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_N$ *и*

$$\mathbf{M}\mu_0 = \sum_{k=1}^{N} (1 - a_k)^n \to m, \qquad (1 - a_k)^n \to \gamma_k, \qquad 0 \leqslant \gamma_k \leqslant 1,$$

где m, γ_k — *некоторые постоянные, то*

$$\mathbf{M}x^{\mu_0} \to e^{\lambda(x-1)} \prod_{k=1}^{\infty} (1 - \gamma_k + \gamma_k x), \quad \lambda = m - \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \geqslant 0. \quad (1)$$

Методом моментов (1) можно доказать без предположения $\frac{n}{N^2} \to 0$. Доказательство проводится так же, как доказательство теорем 2.1 и 3.3. Нужно показать, что асимптотическое поведение факториальных моментов μ_0 определяется только вероятностями a_k, для которых выполняется неравенство $a_k \leqslant n^{-3/4}$. Обобщение (1) на случай, когда μ_0 является числом не появившихся s-цепочек в полиномиальной схеме, получено В. Ф. Колчиным, В. П. Чистяковым [35].

Теорема 4.2 об асимптотической нормальности μ_0 была доказана в работе В. П. Чистякова [55]. При более сильных ограничениях на a_k, чем (1.12), аналогичная теорема была сформулирована Китабатакэ [84]. Холст [82] распространил теорему 4.2 на левую промежуточную область; в его работе показано, что нормальность μ_0 сохранится, если в (1.12) условие $0 < \alpha_0 \leqslant \leqslant \frac{n}{N} \leqslant \alpha_1 < \infty$ заменить на

$$\frac{n}{N} \to 0, \qquad \frac{n^2}{N} \to \infty.$$

Многомерная нормальная интегральная теорема была доказана в работе И. И. Викторовой, В. П. Чистякова [12], там же была сформулирована соответствующая локальная теорема. Полное доказательство локальной теоремы для $\mu_{r_1}, \mu_{r_2}, \ldots, \mu_{r_s}$ было впервые приведено в диссертации И. И. Викторовой [10].

Т. Ю. Попова [40] изучала схему независимого размещения n_1 частиц 1-го типа и n_2 частиц 2-го типа. Частица k-го типа попадает в i-ю ячейку с вероятностью $a_i(k)$, $k=1, 2$, $i=1, 2, \ldots, N$. Для этой схемы доказаны пуассоновская и нормальная многомерные предельные теоремы для числа ячеек, не содержащих никаких частиц или не содержащих частиц того или иного типа.

Холст [81] рассматривал следующую задачу. Пусть в схеме с N ячейками и n частицами ячейке с номером k приписано число c_k, $k=1, 2, \ldots, N$. Обозначим η_n сумму c_k, соответствующих ячейкам, в которых содержится не больше r частиц. При $c_1=\ldots=c_N=1$, $r=0$ имеем $\eta_n=\mu_0$. Холст [81] доказал асимптотическую нормальность вектора

$$\eta_{n_1}, \ \eta_{n_1+n_2}, \ \ldots, \ \eta_{n_1+\ldots+n_d},$$

когда $N, n_1, \ldots, n_d \to \infty$. В частном случае $r=0$ эту задачу рассматривал Розен [94]. В этой работе он использовал свои результаты о суммах зависимых величин [93]. В работе Розена [95] содержатся результаты, относящиеся к «последовательному заполнению» в задачах с суммами η_n.

Схемы заполнения пространственных решеток с учетом расположения частиц изучал Хафнер [76], [77], [78]. Частным случаем его схемы является схема заполнения с бесконечным числом ячеек. Ряд известных результатов Хафнер переносит на рассматриваемый им более общий случай. Схемы с бесконечным числом ячеек рассматривались также в работах Дарлинга [69] и Карлина [83].

ГЛАВА IV

СХОДИМОСТЬ К СЛУЧАЙНЫМ ПРОЦЕССАМ

§ 1. Постановка задачи

В этой главе мы будем рассматривать число пустых ящиков $\mu_0(n, N)$ как функцию от числа n брошенных дробинок, т. е. как процесс, зависящий от «времени» n. Мы будем предполагать, что в N ящиков последовательно независимо бросаются дробинки. Вероятность попадания в фиксированный ящик каждой из дробинок равна $1/N$. Таким образом, случайные величины $\mu_0(1, N)$, $\mu_0(2, N), \ldots, \mu_0(n, N), \ldots$ определяются описанной выше схемой на одном и том же вероятностном пространстве, и мы можем говорить о совместном распределении этих случайных величин.

В предыдущих главах мы доказывали предельные теоремы для $\mu_0(n, N)$ при $n, N \to \infty$. При малых и больших отношениях n/N в пределе мы имели пуассоновские распределения, а при средних значениях n/N — нормальное. В соответствии с этим мы получаем три типа сходимости процесса $\mu_0(n, N)$ к предельным процессам.

Если $n, N \to \infty$ в левой 0-области, т. е. значения $\theta = \frac{n^2}{2N}$ ограничены, то $\mu_0(n, N) - (N - n)$ сходится в пределе к пуассоновскому процессу $\eta(\theta)$ с $\mathbf{M}\eta(\theta) = \theta$ (см. § 3).

Если $n, N \to \infty$ в правой 0-области, т. е. $\theta = Ne^{-n/N}$ ограничено, то $\mu_0(n, N)$ сходится к пуассоновскому процессу $\eta(\theta)$ с $\mathbf{M}\{\eta(\theta_2) - \eta(\theta_1)\} = \theta_2 - \theta_1$, $\theta_2 > \theta_1$ (см. § 5).

И, наконец, если $n, N \to \infty$ в центральной области, т. е. $\theta = \frac{n}{N}$ ограничено, то $\xi(\theta) = \frac{\mu_0(n, N) - \mathbf{M}\mu_0(n, N)}{\sqrt{N}}$ сходится к гауссовскому процессу $\eta(\theta)$ с корреляционной функцией $e^{-\theta'}(1 - (1 + \theta)e^{-\theta})$, $\theta' \geqslant \theta$ (см. § 4).

Таким образом, в каждой из областей изменения n и N вводится свое время θ. В левой области $\theta=\frac{n^2}{2N}$, в центральной области $\theta=n/N$ и в правой области $\theta=Ne^{-n/N}$.

В промежуточных областях предельное поведение процесса $\mu_0(n, N)$ более сложно. В каждой промежуточной области вместо единого нового времени приходится вводить «локальные времена», привязанные к некоторым «нулевым значениям» $\alpha_0=\frac{n_0}{N}\to 0$ или $\alpha_0\to\infty$ (см. § 6).

Аналогичные результаты получаются для $\mu_r(n, N)$, а также в неравновероятной полиномиальной схеме. Об этом см. § 7.

§ 2. Производящие функции многомерных распределений

Рассмотрим равновероятную схему. Число пустых ящиков $\mu_0(n, N)$ будем обозначать кратко $\mu_0(n)$, подчеркивая зависимость от числа дробинок n. Основным аналитическим аппаратом в этой главе будут многомерные производящие функции для $\mu_0(n_1)$, $\mu_0(n_1+n_2)$, ..., $\mu_0(n_1+n_2+\ldots+n_t)$, где n_i — целые неотрицательные числа.

Обозначим

$$F_{n_1n_2\ldots n_t}(x_1,\ldots,x_t)=\mathbf{M}x_1^{\mu_0(n_1)}x_2^{\mu_0(n_1+n_2)}\ldots x_t^{\mu_0(n_1+\ldots+n_t)} \quad (1)$$

производящую функцию совместного распределения случайных величин $\mu_0(n_1)$, $\mu_0(n_1+n_2)$,..., $\mu_0(n_1+\ldots+n_t)$. Введем также производящую функцию

$$\Phi_N(z,x)=\Phi_N(z_1,\ldots,z_t;x_1,\ldots,x_t)=$$
$$=\sum_{n_1,\ldots,n_t}^{\infty}F_{n_1\ldots n_t}(x_1,\ldots,x_t)\prod_{l=1}^{t}\frac{(Nz_l)^{n_l}}{n_l!}. \quad (2)$$

Теорема 1. *Производящая функция $\Phi_N(z;x)$ имеет следующий вид:*

$$\Phi_N(z;x)=[(e^{z_1}-1)e^{z_2+\ldots+z_t}+(e^{z_2}-1)e^{z_3+\ldots+z_t}x_1+\ldots$$
$$\ldots+(e^{z_{t-1}}-1)e^{z_t}x_1x_2\ldots x_{t-2}+(e^{z_t}-1)x_1x_2\ldots x_{t-1}+$$
$$+x_1x_2\ldots x_t]^N. \quad (3)$$

Доказательство. Разделим N ящиков на две группы. Пусть в первой группе имеется N_1 ящиков, а во второй группе N_2 ящиков, $N_1+N_2=N$. Пусть из n_l дробинок в первую группу ящиков попало n_{1l} штук, а во вторую — n_{2l} штук, $n_l=n_{1l}+n_{2l}$. Через $\mu_{10}(n_{11}+n_{12}+\ldots+n_{1l})$ и $\mu_{20}(n_{21}+n_{22}+\ldots+n_{2l})$ обозначим количества пустых ящиков в первой и второй группах после бросания $n_1+n_2+\ldots+n_l$ дробинок. По формуле полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n_1+\ldots+n_l)=k_l,\ l=1,\ldots,t\}=$$

$$=\sum_{D_{n_1\ldots n_t}}\sum_{E_{k_1\ldots k_t}}\prod_{l=1}^{t}\frac{n_l!}{n_{1l}!\,n_{2l}!}\cdot\frac{N_1^{n_{1l}}N_2^{n_{2l}}}{N^{n_l}}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{\mu_{10}(n_{11}+\ldots+n_{1l})=k_{1l},\ l=1,\ldots,t\}\times$$

$$\times\mathbf{P}\{\mu_{20}(n_{21}+\ldots+n_{2l})=k_{2l},\ l=1,\ldots,t\},\qquad(4)$$

где области суммирования определяются так:

$$D_{n_1\ldots n_t}=\{n_{1l},n_{2l},\ l=1,\ldots,t\colon\ n_{1l}+n_{2l}=n_l,\ l=1,\ldots,t\},$$

$$E_{k_1\ldots k_t}=\{k_{1l},k_{2l},\ l=1,\ldots,t\colon\ k_{1l}+k_{2l}=k_l,\ l=1,\ldots,t\}.$$

При выводе формулы (4) мы предполагаем сначала, что при бросании очередной порции n_l дробинок они распределяются по группам на n_{1l} и n_{2l} штук (при каждом l эти количества распределяются по биномиальному закону

$$C_{n_l}^{n_{1l}}\left(\frac{N_1}{N}\right)^{n_{1l}}\left(1-\frac{N_1}{N}\right)^{n_{2l}},$$

а при разных l случайные величины n_{il} независимы), и затем используем тот факт, что условное совместное распределение $\mu_0(n_1+n_2+\ldots+n_l)$ при фиксированных n_{il} определяется как композиция распределений $\mu_{10}(n_{11}+\ldots+n_{1l})$ и $\mu_{20}(n_{21}+\ldots+n_{2l})$, так как μ_{10} и μ_{20} независимы и $\mu_0=\mu_{10}+\mu_{20}$. Умножим обе части (4) на $\prod_{l=1}^{t}\left(\frac{z_l^{n_l}x_l^{k_l}}{n_l!}\right)$ и просуммируем по всем n_l, k_l. Получаем

$$\Phi_N(z;\ x)=\Phi_{N_1}(z;\ x)\,\Phi_{N_2}(z;\ x),$$

откуда вытекает

$$\Phi_N(z;\ x) = [\Phi(z;\ x)]^N,$$

где $\Phi(z;\ x) = \Phi_1(z;\ x)$. Найдем $\Phi(z;\ x)$. При $N=1$ нетрудно вычислить определенную формулой (1) производящую функцию $F_{n_1 \ldots n_t}(x_1, \ldots, x_t)$. Разобьем все векторы $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_t)$, $n_i \geqslant 0$, на множества $K_0, K_1, \ldots, K_t$. Если $1 \leqslant r < t$, то полагаем $\mathbf{n} \in K_r$, если $n_1 = \ldots = n_r = 0$ и $n_{r+1} > 0$. Далее положим $\mathbf{n} \in K_0$, если $n_1 > 0$, и $\mathbf{n} \in K_t$, если $n_1 = n_2 = \ldots = n_t = 0$. Если $\mathbf{n} \in K_0$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n_1) = \ldots = \mu_0(n_1 + \ldots + n_t) = 0\} = 1;$$

если $\mathbf{n} \in K_r$, $1 \leqslant r < t$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n_1) = \ldots = \mu_0(n_1 + \ldots + n_r) = 1,$$
$$\mu_0(n_1 + \ldots + n_{r+1}) = \ldots = \mu_0(n_1 + \ldots + n_t) = 0\} = 1;$$

если $\mathbf{n} \in K_t$, то

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n_1) = \ldots = \mu_0(n_1 + \ldots + n_t) = 1\} = 1.$$

Отсюда получаем

$$F_{\mathbf{n}}(x) = 1, \quad \mathbf{n} \in K_0,$$
$$F_{\mathbf{n}}(x) = x_1 \ldots x_r, \quad \mathbf{n} \in K_r, \quad 1 \leqslant r \leqslant t. \tag{5}$$

Подставляя (5) в формулу (2), имеем

$$\Phi(z;\ x) = \sum_{\mathbf{n} \in K_0} \frac{z_1^{n_1}}{n_1!} \cdot \frac{z_2^{n_2}}{n_2!} \cdots \frac{z_t^{n_t}}{n_t!} + \sum_{r=1}^{t-1} x_1 \ldots x_r \sum_{\mathbf{n} \in K_r} \frac{z_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{z_t^{n_t}}{n_t!} +$$

$$+ x_1 \ldots x_t \sum_{\mathbf{n} \in K_t} \frac{z_1^{n_1}}{n_1!} \cdots \frac{z_t^{n_t}}{n_t!} = (e^{z_1} - 1)\, e^{z_2 + \ldots + z_t} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{t-2} \left(e^{z_{k+1}} - 1\right) e^{z_{k+2} + \ldots + z_t} x_1 x_2 \ldots x_k +$$

$$+ \left(e^{z_t} - 1\right) x_1 \ldots x_{t-1} + x_1 x_2 \ldots x_t.$$

Это равенство завершает доказательство

§ 3. Сходимость к пуассоновскому процессу в левой области

В этом параграфе мы будем полагать, что n, $N\to\infty$ так, что величины $\frac{n^2}{2N}=\theta$ ограничены. Величину θ примем за новый временной параметр. Мы докажем, что в этих условиях процесс $\mu_0(n)-(N-n)$ сходится к пуассоновскому процессу $\eta(\theta)$ с $\mathbf{M}\eta(\theta)=\theta$.

Теорема 1. *Пусть* n_l, $N\longrightarrow\infty$ *так, что* $(n_1+\ldots+n_l)^2/2N\to\theta_l$, *где* $0=\theta_0<\theta_1<\ldots<\theta_t<\infty$. *Тогда при любых* t, $k_1, \ldots, k_t$

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n_1)-N+n_1=k_1,\quad \mu_0(n_1+\ldots+n_l)-\\ -\mu_0(n_1+\ldots+n_{l-1})+n_l=k_l,\ l=2,\ldots,t\}\to\\ \to\prod_{l=1}^{t}\frac{(\theta_l-\theta_{l-1})^{k_l}}{k_l!}e^{-(\theta_l-\theta_{l-1})}. \qquad (1)$$

Доказательство. Обозначим

$$\xi_1=\mu_0(n_1)-N+n_1,\\ \xi_l=\mu_0(n_1+\ldots+n_l)-\mu_0(n_1+\ldots+n_{l-1})+n_l,\quad l=2,\ldots,t. \qquad (2)$$

Введем производящую функцию

$$\sum_{k_1,\ldots,k_t}\mathbf{P}\{\xi_1=k_1,\ldots,\xi_t=k_t\}x_1^{k_1}\ldots x_t^{k_t}=A_{n,N}(x). \qquad (3)$$

Исходя из определения $A_{n,N}(x)$ и (2), имеем

$$A_{n,N}(x)=\mathbf{M}x_1^{\xi_1}\ldots x_t^{\xi_t}=\\ =\mathbf{M}x_1^{\mu_0(n_1)-N+n_1}\prod_{l=2}^{t}x_l^{\mu_0(n_1+\ldots+n_l)-\mu_0(n_1+\ldots+n_{l-1})+n_l}=\\ =x_1^{-N}x_1^{n_1}x_2^{n_2}\ldots x_t^{n_t}F_{n_1\ldots n_t}\left(\frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},\ldots,\frac{x_{t-1}}{x_t},x_t\right),$$

откуда следует

$$\sum_{n_1,\ldots,n_t}A_{n,N}(x)\prod_{l=1}^{t}\frac{(Nz_l)^{n_l}}{n_l!}=\\ =x_1^{-N}\Phi^N\left(x_1z_1,\ldots,x_tz_t;\ \frac{x_1}{x_2},\frac{x_2}{x_3},\ldots,\frac{x_{t-1}}{x_t},x_t\right). \qquad (4)$$

Обозначая правую часть (4) $A^N(z;\ x)$, имеем отсюда в силу (2.3)

$$A(z;\ x) = 1 + \sum_{l=1}^{t} \frac{e^{z_l x_l} - 1}{x_l} \prod_{i=l+1}^{t} e^{z_i x_i}. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует, что $A_{n,N}(x)$ можно записать в виде интеграла

$$A_{n,N}(x) = \frac{n_1! \ldots n_t!}{(2\pi i)^t N^{n_1+\ldots+n_t}} \oint_{C_t} \ldots \oint \frac{[A(z;\ x)]^N}{z^{n_1+1} \ldots z_t^{n_t+1}} dz_1 \ldots dz_t, \tag{6}$$

в котором интегрирование производится по окружностям C_t: $|z_l| = r_l$, $l = 1, \ldots, t$. Для доказательства (1) нам достаточно установить сходимость многомерных производящих функций, т. е. показать, что при $0 \leqslant x_l \leqslant 1$, $l = 1, \ldots, t$,

$$A_{n,N}(x) \to \prod_{l=1}^{t} e^{(\theta_l - \theta_{l-1})(x_l - 1)}. \tag{7}$$

При изучении асимптотического поведения интеграла (6) будем действовать так же, как в методе перевала. Обозначим $\frac{n_l^2}{2N} = \omega_l^2$, $\varepsilon = 1/\sqrt{N}$ и

$$f(z;\ x) = \ln A(z;\ x) - \sqrt{2}\,\varepsilon \sum_{l=1}^{t} \omega_l \ln z_l. \tag{8}$$

Тогда интеграл (6) можно записать в виде

$$A_{n,N}(x) = \frac{n_1! \ldots n_t!}{(2\pi i)^t N^{n_1+\ldots+n_t}} \oint_{C_t} \ldots \oint \frac{e^{Nf(z;\ x)}}{z_1 \ldots z_t} dz_1 \ldots dz_t. \tag{9}$$

Пусть положительные числа $\overset{*}{z_l}$, $l = 1, \ldots, t$, являются решением системы уравнений

$$\frac{\partial f}{\partial z_l} = \frac{1}{A} \cdot \frac{\partial A}{\partial z_l} - \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l}{z_l} = 0, \quad l = 1, \ldots, t. \tag{10}$$

(Такое решение всегда существует: если рассматривать $f(z;\ x)$ как функцию действительных положительных переменных $z_1, \ldots, z_t$, то в точке $z_l = \overset{*}{z_l}$, $l=1, \ldots, t$, эта функция имеет минимум.) При $\varepsilon \to 0$ решения (10) также стремятся к нулю, причем имеют место разложения по степеням ε

$$\begin{gathered} \overset{*}{z_l} = z_{l1}\varepsilon + z_{l2}\varepsilon^2 + \ldots, \\ A^* = A(z^*; x) = A_0 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \ldots, \\ \frac{\partial A^*}{\partial z_l} = A_{l0} + A_{l1}\varepsilon + \ldots \end{gathered} \tag{11}$$

Здесь и далее выражения типа $\dfrac{\partial A^*}{\partial z_l}$ понимаются как $\left.\dfrac{\partial A(z; x)}{\partial z_l}\right|_{z=z^*}$. Подставим ряды $\overset{*}{z_l}$ в функцию (5) и выразим первые члены разложений $A(z^*; x)$ и $\partial A^*/\partial z_l$ по степеням ε через z_{lk}:

$$\begin{gathered} A_0 = 1, \quad A_1 = \sum_{l=1}^{t} z_{l1}, \\ A_2 = \sum_{l=1}^{t} z_{l2} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{t} x_l z_{l1}^2 + \sum_{l=1}^{t-1} z_{l1} \sum_{s=l+1}^{t} x_s z_{s1}, \\ A_{l0} = 1, \quad A_{l1} = \sum_{s=l}^{t} z_{s1} x_s + x_l \sum_{s=1}^{t-1} z_{s1}. \end{gathered} \tag{12}$$

Подставляя (11) и (12) в (10), находим

$$\begin{gathered} z_{l1} = \sqrt{2}\,\omega_l, \\ z_{l2} = 2\omega_l[\omega_1 + \ldots + \omega_t - (\omega_l x_l + \ldots + \omega_t x_t) - \\ - x_l(\omega_1 + \ldots + \omega_{l-1})]. \end{gathered} \tag{13}$$

Интегрируя в (9) по контурам $|z_l| = \overset{*}{z_l}$ и производя замену $z_l = \overset{*}{z_l} e^{i\varphi_l}$, мы можем записать (9) в виде

$$A_{n,N}(x) = \frac{n_1! \ldots n_t!}{(2\pi)^t N^{n_1+\ldots+n_t}} \times \\ \times \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left[Nf\left(\overset{*}{z_1}e^{i\varphi_1}, \ldots, \overset{*}{z_t}e^{i\varphi_t}; x\right)\right] d\varphi_1 \ldots d\varphi_t. \tag{14}$$

Обозначим коэффициент перед интегралом через K. По формуле Стирлинга получаем

$$\ln K = -t\ln\sqrt{2\pi} + \ln\left(2^{t/4}\varepsilon^{t/2}N^{t/2}\sqrt{\omega_1\ldots\omega_t}\right) + \\ + \sum_{l=1}^{t}\sqrt{2}\,\omega_l\varepsilon N\ln\left(\sqrt{2}\,\omega_l\varepsilon\right) - \sqrt{2}\,\varepsilon N\sum_{l=1}^{t}\omega_l + O(\varepsilon). \quad (15)$$

Положим $S=\{|\varphi_l|\leqslant\delta,\ l=1,\ldots,t\}$, где $\delta>0$ — константа, значение которой будет выбрано позже, и $\overline{S}=\{|\varphi_l|\leqslant\pi,\ l=1,\ldots,t\}\diagdown S$. Представим интеграл (14) в виде суммы

$$K\int_S\ldots\int e^{Nf}d\varphi_1\ldots d\varphi_t + K\int_{\overline{S}}\ldots\int e^{Nf}d\varphi_1\ldots d\varphi_t = I_1+I_2.$$

В области $\overline{S}$ имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} f\left(z_1^* e^{i\varphi_1},\ldots,z_t^* e^{i\varphi_t};x\right)\leqslant f\left(z_1^*,\ldots,z_t^*;x\right)-\Delta\varepsilon, \quad (16)$$

где $\Delta>0$. В самом деле, в силу формулы (5) отношение

$$A\left(z_1^* e^{i\varphi_1},\ldots,z_t^* e^{i\varphi_t};x\right)/A\left(z_1^*,\ldots,z_t^*;x\right),$$

рассматриваемое как функция от $\varphi_1,\ldots,\varphi_t$, является характеристической функцией t-мерного решетчатого распределения, сосредоточенного на решетке точек t-мерного пространства с целочисленными координатами. Как нетрудно видеть из формулы (5), в эту характеристическую функцию входят слагаемые

$$p_0+p_1e^{i\varphi_1}+\ldots+p_te^{i\varphi_t}$$

с положительными p_k, причем p_0 ограничено снизу положительной константой, а $p_k\geqslant C\varepsilon>0$, $k=1,\ldots,t$, при N достаточно большом. При $0<\delta|\varphi_k|\leqslant\pi$ имеем неравенство

$$|p_0+p_ke^{i\varphi_k}| = |p_0+p_k|\cdot\sqrt{1-\frac{2p_0p_k(1-\cos\varphi_k)}{(p_0+p_k)^2}}\leqslant \\ \leqslant(p_0+p_k)(1-\Delta_1\varepsilon), \qquad \Delta_1>0,$$

откуда и следует (16), так как функции f и A связаны соотношением (8). Из (16) при $N\to\infty$ вытекает

$$I_2 = K\exp\left[Nf\left(z_1^*,\ldots,z_t^*;x\right)\right]\cdot O\left(e^{-\sqrt{N}\Delta}\right).$$

Разложим функцию f в показателе подынтегральной функции I_1 в точке $z^* = (z_1^*, \ldots, z_t^*)$ по формуле Тейлора

$$f(z; x) = f_0 + \sum_{l=1}^{t} f_l'(z_l - z_l^*) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{l,m=1}^{t} f_{lm}''(z_l - z_l^*)(z_m - z_m^*) + R, \quad (17)$$

где

$$\begin{aligned} f_0 &= f(z_1^*, \ldots, z_t^*; x) = \ln A^* - \sqrt{2}\,\varepsilon \sum_{l=1}^{t} \omega_l \ln z_l^*, \\ f_l' &= \frac{1}{A^*} \cdot \frac{\partial A^*}{\partial z_l} - \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l}{z_l^*}, \\ f_{ll}'' &= \frac{1}{A^*} \cdot \frac{\partial^2 A^*}{\partial z_l^2} - \left(\frac{1}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial z_l}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l}{(z_l^*)^2}, \\ f_{lm}'' &= \frac{1}{A^*} \frac{\partial^2 A^*}{\partial z_l \partial z_m} - \frac{1}{A^*} \cdot \frac{\partial A^*}{\partial z_l} \cdot \frac{\partial A^*}{\partial z_m}, \quad l \neq m. \end{aligned} \quad (18)$$

Значения z_l^* удовлетворяют уравнениям (10), поэтому $f_l' = 0$. Так как при $l \geqslant m$ имеют место равенства

$$\frac{\partial^2 A}{\partial z_l \partial z_m} = x_l \frac{\partial A}{\partial z_m} \quad \text{и} \quad \frac{1}{A^*} \frac{\partial A^*}{\partial z_l} = \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l}{z_l^*},$$

то

$$\begin{aligned} f_{ll}'' &= x_l \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l}{z_l^*} - \left(\frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l}{z_l^*}\right)^2 + \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l}{(z_l^*)^2}, \\ f_{lm}'' &= x_l \frac{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_m}{z_m^*} - 2\varepsilon^2 \frac{\omega_l}{z_l^*} \cdot \frac{\omega_m}{z_m^*}, \quad l > m. \end{aligned} \quad (19)$$

Остаточный член R в (17) можно представить в виде

$$R = O(\varepsilon^3) + O\left(\varepsilon \sum_{l=1}^{t} |\varphi_l|^3\right). \quad (20)$$

В самом деле, согласно формуле (8) f представляется в виде суммы нескольких слагаемых. Первое слагаемое $\ln A$ является аналитической функцией от $z_1, \ldots, z_t$ в окрестности начала координат, поэтому, доводя разложение этого слагаемого до квадратных членов, мы получаем в остатке $O(\varepsilon^3)$. Остальная часть остаточного члена (20) получается следующим образом. Пусть $z=re^{i\varphi}$. Тогда в разложении

$$\ln z = \ln r + \frac{z-r}{r} - \frac{1}{2}\frac{(z-r)^2}{r^2} + R_1$$

остаточный член R_1 равен

$$R_1 = 1 + i\varphi - e^{i\varphi} + (e^{i\varphi} - 1)^2/2,$$

откуда $R_1 = O(|\varphi|^3)$.

Подставляя в (18) и (19) выражения (11), (12) и разлагая в ряд по ε, получаем

$$f_0 = \ln(1 + A_1\varepsilon + A_2\varepsilon^2 + \ldots) - \sqrt{2}\,\varepsilon \sum_{l=1}^{t} \omega_l \ln\left(\sqrt{2}\,\omega_l\varepsilon\right) - \\ - \sqrt{2}\,\varepsilon \sum_{l=1}^{t} \omega_l \ln\left(1 + \frac{z_{l2}\varepsilon}{z_{l1}} + \ldots\right) = A_1\varepsilon + \varepsilon^2\left(A_2 - \frac{A_1^2}{2}\right) - \\ - \sqrt{2}\,\varepsilon \sum_{l=1}^{t} \omega_l \ln\left(\sqrt{2}\,\omega_l\varepsilon\right) - \varepsilon^2 \sum_{l=1}^{t} z_{l2} + O(\varepsilon^3), \quad (21)$$

$$f''_{ll} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon\omega_l} + O(1), \qquad f''_{lm} = O(1), \qquad l \neq m.$$

Из формул (15) и (21) получаем

$$\ln K + Nf_0 = \left(A_2 - \frac{A_1^2}{2} - \sum_{l=1}^{t} z_{l2}\right) + \\ + \ln\left(N^{t/4} 2^{t/4} \sqrt{\omega_1 \ldots \omega_t}\right) - t\ln\sqrt{2\pi} + O(\varepsilon) = \\ = \sum_{l=1}^{t} (\theta_l - \theta_{l-1})(x_l - 1) + \ln\left(N^{t/4} 2^{t/4} \sqrt{\omega_1 \ldots \omega_t}\right) - \\ - t\ln\sqrt{2\pi} + O(\varepsilon) + o(1), \quad (22)$$

откуда, в частности, следует, что

$$I_2 = O\left(N^{t/4} e^{-\Delta\sqrt{N}}\right).$$

Представим интеграл I_1 в виде произведения:

$$I_1 = I \cdot \exp\left[\sum_{l=1}^{t} (\theta_l - \theta_{l-1})(x_l - 1)\right],$$

где

$$I = \frac{N^{t/4}\cdot 2^{t/4}\sqrt{\omega_1\ldots\omega_t}}{(2\pi)^{t/2}}\times$$

$$\times\int\limits_{|\varphi_l|\leqslant\delta}\ldots\int\exp\left\{-\frac{N}{2}\left[\sum_{l,m=1}^{t} f''_{lm}\left(z_l-z_l^*\right)\left(z_m-z_m^*\right)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+O(\varepsilon^3)+O\left(\varepsilon\sum_{l=1}^{t}|\varphi_l|^3\right)\right]\right\}d\varphi_1\ldots d\varphi_t. \qquad (23)$$

Производя в (23) замену переменных $y_l=(2N)^{1/4}\sqrt{\omega_l}\cdot\varphi_l$, получаем при $N\to\infty$

$$I=\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^t\int\limits_{|y|\leqslant\delta(2N)^{1/4}\sqrt{\omega_l}}\ldots\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{t}y_l^2+\right.$$

$$\left.+O\left(\sum_l\frac{|y_l|^3}{\sqrt[4]{N}}\right)+O(\varepsilon)\right]dy_1\ldots dy_t. \qquad (24)$$

Разобьем область интегрирования $S=\left\{|y_l|\leqslant\delta(2N)^{1/4}\sqrt{\omega_l},\ l=1,\ldots,t\right\}$ на две части: $S_0=\{|y_l|\leqslant\delta N^{1/16},\ l=1,\ \ldots,t\}$ и $S\setminus S_0$. Нетрудно видеть, что при интегрировании по S_0 мы получаем в пределе при $N\to\infty$ единицу, а при интегрировании по $S\setminus S_0$ получаем в пределе выражение, которое может быть сделано как угодно малым за счет выбора соответствующего малого δ. Теорема доказана.

§ 4. Сходимость к гауссовскому процессу в центральной области

Теперь рассмотрим такие n, $N\to\infty$, которые находятся в центральной области. Введем новое время $\theta=n/N$. При $t=2$ производящая функция (2.3) имеет вид

$$\Phi_N(z;x)=\left[(e^{z_1}-1)e^{z_2}+(e^{z_2}-1)x_1+x_1x_2\right]^N. \qquad (1)$$

Ее смешанная вторая производная по x_1 и x_2 в точке $x_1=x_2=1$ равна

$$Ne^{(z_1+z_2)(N-1)}+N(N-1)e^{z_1(N-2)}\cdot e^{z_2(N-1)}. \qquad (2)$$

Разложим (2) по степеням z_1 и z_2; коэффициент при $z_1^{n_1}z_2^{n_2}$, умноженный на $n_1!\,n_2!/N^{n_1+n_2}$, дает

$$\mathbf{M}\mu_0(n_1)\mu_0(n_1+n_2)=N\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n_1+n_2}+$$
$$+N(N-1)\left(1-\frac{2}{N}\right)^{n_1}\left(1-\frac{1}{N}\right)^{n_2}. \quad (3)$$

Пусть n_1, n_2, $N\to\infty$, $\frac{n_1}{N}\to\theta$, $\frac{n_1+n_2}{N}\to\theta'$, $\theta<\theta'$. Тогда из (3) и из асимптотики для $\mathbf{M}\mu_0$ в (1.1.14) можно получить асимптотическую формулу для ковариации (ниже полагаем $n=n_1$, $n'=n_1+n_2$):

$$\mathbf{Cov}(\mu_0(n),\mu_0(n'))\sim Ne^{-\theta'}(1-(1+\theta)e^{-\theta}),\quad \theta'>\theta, \quad (4)$$

и предельный коэффициент корреляции

$$\rho(\mu_0(n),\mu_0(n'))\sim\rho(\theta,\theta')=\frac{e^{-(\theta'-\theta)}\sqrt{e^{-\theta}(1-(1+\theta)e^{-\theta})}}{\sqrt{e^{-\theta'}(1-(1+\theta')e^{-\theta'})}},$$
$$\theta'\geqslant\theta,$$

который можно записать в виде

$$\rho(\theta,\theta')=\frac{V(\theta)}{V(\theta')},\qquad \theta'\geqslant\theta,$$

где функция

$$V(\theta)=\sqrt{e^{\theta}-1-\theta}\sim\sqrt{N}\,\frac{\sqrt{\mathbf{D}\mu_0(n)}}{\mathbf{M}\mu_0(n)},\qquad \frac{n}{N}=\theta,$$

характеризует предельное поведение коэффициента изменчивости $\mu_0(n)$.

Введем нормированный случайный процесс

$$\xi(\theta)=\frac{\mu_0(n)-\mathbf{M}\mu_0(n)}{\sqrt{N}},\qquad \frac{n}{N}\leqslant\theta<\frac{n+1}{N}. \quad (5)$$

Теорема 1. *Конечномерные распределения процесса $\xi(\theta)$ сходятся при n, $N\to\infty$ в центральной области к конечномерным распределениям гауссовского процесса с корреляционной функцией*

$$e^{-\theta'}(1-(1+\theta)e^{-\theta}),\qquad \theta'>\theta. \quad (6)$$

Доказательство. Пусть $\theta_1^*<\ldots<\theta_t^*$, $n_1+\cdots$ $\ldots+n_l=[N\theta_l^*]=N\theta_l$. В определении $\xi(\theta)$ в (5) вместо

$\mathbf{M}\mu_0(n)$ поставим его асимптотическое выражение $Ne^{-\theta}$; так как $\mathbf{M}\mu_0(n)-Ne^{-\theta}=O(1)$, то предельное распределение в этом случае будет тем же самым. Положим далее $\varepsilon=1/\sqrt{N}$. Характеристическая функция этих модифицированных случайных величин $\xi(\theta_1)$, $\xi(\theta_2)$, ..., $\xi(\theta_t)$ (мы не будем вводить для них новое обозначение) записывается с помощью (2.3) в виде

$$A_{n,N}(\tau_1, \ldots, \tau_t) = \mathbf{M}\exp\left[i\sum_{k=1}^{t}\tau_k\xi(\theta_k^*)\right] = \\ = \frac{\prod\limits_{l=1}^{t} n_l!\exp\left\{-\frac{i}{\varepsilon}\sum\limits_{l=1}^{t}\tau_l e^{-\theta_l^*}\right\}}{(2\pi i)^t N^{n_1+\ldots+n_t}} \times \\ \times \oint\ldots\oint_{C_t}\Phi^N\left(z; e^{i\tau_1\varepsilon}, \ldots, e^{i\tau_t\varepsilon}\right)\frac{dz_1\ldots dz_t}{z_1^{n_1+1}\ldots z_t^{n_t+1}}. \tag{7}$$

Выберем контуры интегрирования C_t следующим образом: $z_l=\omega_l e^{i\varphi_l}$, $\omega_l=\theta_l-\theta_{l-1}$, $l=1, \ldots, t$, $\theta_0=0$. Обозначим

$$f = \ln\Phi\left(\omega_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, \omega_t e^{i\varphi_t}; e^{i\tau_1\varepsilon}, \ldots, e^{i\tau_t\varepsilon}\right) - \\ - \sum_{l=1}^{t}\omega_l\ln\omega_l e^{i\varphi_l} - i\varepsilon\sum_{l=1}^{t}\tau_l e^{-\theta_l^*}. \tag{8}$$

Разобьем интеграл, получаемый из (7) после замены $z_l=\omega_l e^{i\varphi_l}$, на две части:

$$A_{n,N}(\tau_1, \ldots, \tau_t) = \frac{\prod\limits_{l=1}^{t} n_l!}{(2\pi)^t N^{n_1+\ldots+n_t}} \times \\ \times\left[\int\ldots\int_{S} e^{Nf}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_t + \int\ldots\int_{\bar S} e^{Nf}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_t\right], \tag{9}$$

где $S=\{\varphi_l: |\varphi_l|\leqslant\delta,\ l=1, \ldots, t\}$, $\bar S=\{|\varphi_l|\leqslant\pi,\ l=1, \ldots, t\}\setminus S$. Аналогично тому, как мы это делали в доказательстве теоремы 3.1, можно показать, что

$$\int_{\overline{S}}\!\!\ldots\!\int e^{Nf} d\varphi_1 \ldots d\varphi_t = \exp\left[Nf(\omega_1, \ldots, \omega_t; 1, \ldots, 1)\right]\cdot O(q^N), \tag{10}$$

где $0<q<1$. Множитель $K = \frac{1}{(2\pi)^t N^{n_1+\ldots+n_t}} \prod_{l=1}^{t} n_l!$ перед интегралом в (9) оценивается по формуле Стирлинга

$$\ln K = N\sum_{l=1}^{t} \omega_l(\ln\omega_l - 1) + \frac{1}{2}\ln\left(N^t \prod_{l=1}^{t}\omega_l\right) - t\ln\sqrt{2\pi} + o(1). \tag{11}$$

В области S разложим функцию f по степеням φ_l и ε, полагая

$$z_l = \omega_l e^{i\varphi_l} = \omega_l\left(1 + i\varphi_l - \frac{\varphi_l^2}{2} + \ldots\right)$$

и

$$e^{i\tau_l\varepsilon} = 1 + i\tau_l\varepsilon - \frac{\tau_l^2\varepsilon^2}{2} + \ldots:$$

$$f = \theta_t - \sum_{l=1}^{t}\omega_l\ln\omega_l - \sum_{l=1}^{t}\omega_l\frac{\varphi_l^2}{2} + \varepsilon\sum_{l=1}^{t}\tau_l\sum_{k=1}^{l}\omega_k\varphi_k e^{-\theta_k} - \frac{\varepsilon^2}{2}\left[\sum_{l=1}^{t}\left(e^{-\theta_l} - e^{-\theta_{l+1}}\right)(\tau_1 + \ldots + \tau_l)^2 - \left(\sum_{l=1}^{t}\tau_l e^{-\theta_l}\right)^2\right] + O(\varepsilon^3) + O\left(\sum_{l=1}^{t}|\varphi_l|^3\right), \quad \theta_{t+1} = \infty. \tag{12}$$

Делая в первом интеграле (9) замену $\sqrt{N}\varphi_l = u_l$, $l=1, \ldots, t$, и подставляя (11) и (12), получим

$$K\int_S\!\!\ldots\!\int e^{Nf} d\varphi_1\ldots d\varphi_t = \frac{e^{-Q/2}\sqrt{\omega_1\ldots\omega_t}}{(2\pi)^{t/2}} \times \int_{|y_l|\leqslant\delta\sqrt{N}}\!\!\ldots\!\int \exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{t}\omega_l\left(y_l + \sum_{k=l}^{t}\tau_k e^{-\theta_k}\right)^2 + O\left(\sum_{l=1}^{t}|y_l|^3\varepsilon\right) + O(\varepsilon) + o(1)\right] dy_1\ldots dy_t, \tag{13}$$

где

$$Q=\sum_{l=1}^{t}\left(e^{-\theta_l}-e^{-\theta_{l+1}}\right)(\tau_1+\ldots+\tau_l)^2-\left(\sum_{l=1}^{t}\tau_l e^{-\theta_l}\right)^2-$$
$$-\sum_{l=1}^{t}\omega_l\left(\sum_{k=l}^{t}\tau_k e^{-\theta_k}\right)^2,\qquad \theta_{t+1}=\infty. \quad (14)$$

Разделяя область интегрирования в (13) на $\{|y_l|\leqslant\delta N^{1/8}, l=1, \ldots, t\}$ и дополнительную область, мы получаем, так же как и при оценке (3.24), что при достаточно малом δ и $N\longrightarrow\infty$ выражение (13) сходится к функции $e^{-Q/2}$. Из (10), (11) и (12) вытекает, что при любом $\delta>0$

$$K\int_{\overline{S}}\ldots\int e^{Nf}\,d\varphi_1\ldots d\varphi_t=O\left(N^{t/2}q^t\right).$$

Поэтому характеристическая функция (9) сходится к $e^{-Q/2}$ — характеристической функции предельного многомерного нормального распределения с корреляционной функцией (6). Теорема доказана.

Далее будем считать, что случайный процесс $\xi(\theta)$ определен формулой (5) только в точках вида $\theta=n/N$, и доопределим его в промежутках линейно. Обозначим $\eta(\theta)$ гауссовский процесс с корреляционной функцией (6).

Теорема 2. *Если $T_2>T_1>0$ и g — непрерывный функционал на пространстве непрерывных функций $C[T_1, T_2]$, то распределение $g(\xi(\cdot))$ в условиях теоремы 1 сходится к распределению $g(\eta(\cdot))$, где $\eta(\theta)$ — определенный выше гауссовский процесс.*

Доказательство. Согласно общей теории сходимости случайных процессов нам достаточно доказать, что

$$\mathbf{M}(\xi(\theta_1)-\xi(\theta_2))^4\leqslant C(\theta_1-\theta_2)^2, \quad (15)$$

где C — некоторая константа (см., например, И. И. Гихман и А. В. Скороход [14], гл. IX, § 2, теорема 2). Полагая в формуле (1) $x_1=x$, $x_2=1/x$, получаем производящую функцию для $\zeta=\mu_0(n_1)-\mu_0(n_1+n_2)$:

$$\sum_{n_1,n_2}\frac{N^{n_1+n_2}z_1^{n_1}z_2^{n_2}}{n_1!n_2!}\sum_k\mathbf{P}\{\zeta=k\}x^k=$$
$$=[(e^{z_1}-1)e^{z_2}+(e^{z_2}-1)x+1]^N. \quad (16)$$

Дифференцируя эту производящую функцию s раз по x и полагая $x=1$, получаем

$$N^{[s]}e^{(z_1+z_2)(N-s)}\left(e^{z_2}-1\right)^s.$$

Разлагая это выражение по степеням z_1 и z_2, находим, в силу определения (16), факториальные моменты

$$\mathbf{M}\zeta^{[s]}=N^{[s]}\left(\frac{N-s}{N}\right)^{n_1}\sum_{l=0}^{s}(-1)^l C_s^l\left(1-\frac{l}{N}\right)^{n_2}. \tag{17}$$

Так как при $n_1/N=\theta_1$, $(n_1+n_2)/N=\theta_2$

$$\xi(\theta_1)-\xi(\theta_2)=\frac{\zeta-\mathbf{M}\zeta}{\sqrt{N}},$$

то

$$\mathbf{M}(\xi(\theta_2)-\xi(\theta_1))^4=\frac{\mathbf{M}(\zeta-\mathbf{M}\zeta)^4}{N^2}.$$

С помощью (17) отсюда можно путем громоздких и довольно рутинных выкладок получить оценку

$$\mathbf{M}(\xi(\theta_1)-\xi(\theta_2))^4=O((\theta_1-\theta_2)^2)+O\left(\frac{\theta_2-\theta_1}{N}\right). \tag{18}$$

Так как при $n_2\geqslant 1$ мы имеем $n_2/N=\theta_2-\theta_1\geqslant 1/N$, то из (18) вытекает (15). В случае, когда θ_1 и θ_2 взяты из одного или из соседних интервалов интерполяции, оценка (15) тривиальна.

З а м е ч а н и е. Если вместо нормировки (5) взять нормировку

$$\xi_1(\theta)=\frac{\mu_0(n)-\mathbf{M}\mu_0(n)}{\sqrt{\mathbf{D}\mu_0(n)}}$$

и произвести замену времени $t=\ln V(\theta)$, где $\theta=n/N$, $V(\theta)=\sqrt{e^\theta-1-\theta}$, то предельным процессом для $\xi_1(\theta(t))$ будет стационарный гауссовский процесс $\eta_1(t)$ с корреляционной функцией $\mathbf{M}\eta(t_1)\eta(t_2)=e^{-|t_1-t_2|}$.

§ 5. Сходимость к пуассоновскому процессу в правой области

В этом параграфе мы будем рассматривать такие n, $N\to\infty$, для которых разность $\frac{n}{N}-\ln N$ ограничена. Введем новое время $\theta=Ne^{-n/N}$. Это время «обращено», т. е. чем больше n, тем меньше θ. Обозначим

$$\frac{n_1+\ldots+n_l}{N}-\ln N=-\ln\theta_l, \qquad l=1,\ldots,t. \qquad (1)$$

Теорема 1. *Если n_l, $N\to\infty$, $l=1, \ldots, t$, так, что величины θ_l, определенные формулами* (1), *ограничены, то случайные величины*

$$\mu_0(n_1+\ldots+n_t),\ \mu_0(n_1+\ldots+n_l)-\mu_0(n_1+\ldots+n_{l+1}),$$
$$l=1, \ldots, t-1,$$

асимптотически независимы и их распределения сходятся к пуассоновским распределениям с параметрами θ_t, $\theta_l-\theta_{l+1}$, $l=1, \ldots, t-1$, соответственно.

Доказательство. Обозначим $\xi_t=\mu_0(n_1+\ldots+n_t)$, $\xi_l=\mu_0(n_1+\ldots+n_l)-\mu_0(n_1+\ldots+n_{l+1})$, $l=1, \ldots, t-1$. Заменяя в формуле (2.3) x_l на x_l/x_{l-1} для всех $l=2,\ldots$ $\ldots, t$, нетрудно получить производящую функцию

$$\sum_{n_1,\ldots,n_t}\sum_{k_1,\ldots,k_t}\prod_{l=1}^{t}\left[\frac{(z_lN)^{n_l}}{n_l!}x_l^{k_l}\right]\mathbf{P}\{\xi_i=k_i,\ i=1,\ldots,t\}=$$
$$=\left[x_t+\sum_{l=1}^{t}\left(e^{z_l}-1\right)e^{z_{l+1}+\ldots+z_t}x_{l-1}\right]^N, \qquad x_0=1. \qquad (2)$$

Доказательство теоремы будем вести методом моментов. Дифференцируя (2) s_l раз по x_l, $l=1, \ldots, t$, получаем в точке $x_1=\ldots=x_t=1$

$$N^{[s]}e^{z_1(N-s)}\prod_{l=1}^{t-1}e^{z_{l+1}(N-s+s_1+\ldots+s_{l-1})}\left(e^{z_{l+1}}-1\right)^{s_l}, \qquad (3)$$

где $s_0=0$, $s=s_1+\ldots+s_t$. Из (2) и (3) выводим выражение для факториальных моментов

$$\mathbf{M}\xi_1^{[s_1]}\ldots\xi_t^{[s_t]}=$$
$$=N^{[s]}\left(1-\frac{s}{N}\right)^{n_1}\prod_{l=1}^{t-1}\left[\sum_{r_l=0}^{s_l}C_{s_l}^{r_l}(-1)^{s_l-r_l}\times\right.$$
$$\left.\times\left(1-\frac{s-s_1-\ldots-s_{l-1}-r_l}{N}\right)^{n_{l+1}}\right]. \qquad (4)$$

Из определения (1) следует, что $n_l/N = \ln N - \ln \theta_l$, $n_{l+1}/N = \ln(\theta_l/\theta_{l+1})$, поэтому при $n, N \to \infty$ имеем $N^{[s]}\left(1 - \frac{s}{N}\right)^{n_1} \to \theta_1^s$ и

$$\sum_{r=0}^{s_l} C_{s_l}^r (-1)^{s_l - r}\left(1 - \frac{s - s_1 - \ldots - s_{l-1} - r}{N}\right)^{n_{l+1}} \to$$

$$\to \sum_{r=0}^{s_l} C_{s_l}^r (-1)^{s_l - r} \exp\left[-(s - s_1 - \ldots - s_{l-1} - r)\ln\frac{\theta_l}{\theta_{l+1}}\right] =$$

$$= \left(\frac{\theta_{l+1}}{\theta_l}\right)^{s - s_1 - \ldots - s_{l-1}}\left(\frac{\theta_l}{\theta_{l+1}} - 1\right)^{s_l} = \frac{\theta_{l+1}^{s - s_1 - \ldots - s_l}(\theta_l - \theta_{l+1})^{s_l}}{\theta_l^{s - s_1 - \ldots - s_{l-1}}}.$$

Таким образом, предел (4) равен

$$\lim \mathbf{M}\xi_1^{[s_1]} \ldots \xi_t^{[s_t]} = \theta_t^{s_t} \prod_{l=1}^{t-1} (\theta_l - \theta_{l+1})^{s_l}. \tag{5}$$

Поскольку правая часть (5) равна произведению факториальных моментов пуассоновских независимых случайных величин, теорема доказана.

§ 6. Сходимость к гауссовским процессам в промежуточных областях

Рассмотрим сначала правую промежуточную область, т. е. такие $n, N \to \infty$, что $\frac{n}{N} \to \infty, \frac{n}{N} - \ln N \to -\infty$.

Мы не можем ввести единое новое время для всей правой промежуточной области и будем вводить «локальные времена». Пусть параметр $\alpha_0 = n_0/N$ изменяется так, что $\alpha_0 \to \infty$ и $\alpha_0 - \ln N \to -\infty$. Будем рассматривать такие $n \to \infty$, что $\theta = \frac{n}{N} - \alpha_0$ ограничено. Из теоремы 1.1.1 имеем асимптотику

$$\mathbf{M}\mu_0(n) \sim Ne^{-(\alpha_0 + \theta)}. \tag{1}$$

Нетрудно видеть, что асимптотическая формула (4.4) для ковариаций справедлива и в правой промежуточной области, т. е. в только что введенных обозначениях

$$\mathrm{Cov}(\mu_0(n), \mu_0(n')) \sim Ne^{-\alpha_0 - \theta'}, \tag{2}$$

если $\theta' = \frac{n'}{N} - \alpha_0 \geqslant \theta = \frac{n}{N} - \alpha_0$. Отсюда получаем предельный коэффициент корреляции

$$\rho(\mu_0(n), \mu_0(n')) \sim e^{-\frac{1}{2}|\theta'-\theta|}.$$

Введем нормированный случайный процесс

$$\xi(\theta) = \frac{\mu_0(n) - \mathbf{M}\mu_0(n)}{\sqrt{Ne^{-\alpha_0}}}, \qquad \frac{n}{N} \leqslant \theta < \frac{n+1}{N}. \tag{3}$$

Теорема 1. *Если $\alpha_0 \to \infty$, $\alpha_0 - \ln N \to -\infty$ и $\frac{n}{N} - \alpha_0 = \theta$ ограничено, то конечномерные распределения процесса $\xi(\theta)$ сходятся к конечномерным распределениям гауссовского процесса $\eta(\theta)$ с корреляционной функцией $\mathbf{M}\eta(\theta)\eta(\theta') = e^{-\theta'}$, $\theta' \geqslant \theta$.*

Доказательство. Пусть $\theta_1^* < \ldots < \theta_t^*$, $n_1 + \cdots + n_k = [N(\theta_k^* + \alpha_0)] = N(\theta_k + \alpha_0)$. Характеристическая функция

$$A_{n,N}(\tau_1, \ldots, \tau_t) = \mathbf{M} \exp\left\{ i \sum_{k=1}^{t} \tau_k \xi(\theta_k^*) \right\} \tag{4}$$

представима в виде интеграла (4.7), если положить там $\varepsilon = (Ne^{-\alpha_0})^{-1/2}$. Далее находим предел интеграла (4.7) с помощью метода, аналогичного тому, который применен в § 4. Здесь мы кратко отметим лишь моменты доказательства, отличные от § 4. Производим замену переменных $z_k = \omega_k e^{i\varphi_k}$, где $\omega_1 = \alpha_0 + \theta_1$, $\omega_k = \theta_k - \theta_{k-1}$, $k = 2, 3, \ldots, t$. Тогда

$$A_{n,N}(\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_t) = K \int_{-\pi}^{\pi} \ldots \int_{-\pi}^{\pi} e^{Nf} d\varphi_1 \ldots d\varphi_t, \tag{5}$$

где

$$f = \ln \Phi(\omega_1 e^{i\varphi_1}, \ldots, \omega_t e^{i\varphi_t}; e^{i\tau_1\varepsilon}, \ldots, e^{i\tau_t\varepsilon}) - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{t} i\tau_k \varepsilon^{-1} e^{-\theta_k^*} - \sum_{k=1}^{t} \omega_k \ln(\omega_k e^{i\varphi_k})$$

константа K — та же, что и в § 4. Асимптотика $\ln K$ также задается формулой (4.11). Так же, как в (4.9), представим интеграл в виде суммы, разбивая область интегрирования на те же области S и $\bar{S}$. В области S

разложим функцию f по степеням ε и φ_k:

$$f=\sum_{k=1}^{t}\left\{\omega_k(1-\ln\omega_k)-\frac{1}{2}\omega_k\varphi_k^2+\omega_k\varphi_k\varepsilon e^{-\alpha_0}\sum_{m=k}^{t}\tau_m e^{-\theta_m}-\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}\varepsilon^2 e^{-\alpha_0-\theta_k}[(\tau_1+\ldots+\tau_k)^2-(\tau_1+\ldots+\tau_{k-1})^2]\right\}+$$
$$+O\left(\sum_{k=1}^{t}\omega_k|\varphi_k|^3\right)+o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Далее производим замену переменных $\varphi_k\sqrt{N\omega_k}=y_k$, $k=1, 2, \ldots, t$, и представляем интеграл по S в виде

$$K\int\limits_{S}\ldots\int e^{Nf}d\varphi_1\ldots d\varphi_t=e^{-Q/2}I, \qquad (6)$$

где

$$Q=\sum_{k=1}^{t}e^{-\theta_k}[(\tau_1+\ldots+\tau_k)^2-(\tau_1+\ldots+\tau_{k-1})^2]=$$
$$=\sum_{k=1}^{t}\tau_k^2e^{-\theta_k}+2\sum_{k<m}\tau_k\tau_m e^{-\theta_m}, \qquad (7)$$

$$I=\frac{1}{(2\pi)^t}\int\limits_{\substack{|y_k|\leqslant\delta\sqrt{N\omega_k}\\ k=1,\ldots,t}}\ldots\int\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{t}\left(y_k-\sqrt{\omega_k e^{-\alpha_0}}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times\sum_{m=k}^{t}\tau_m e^{-\theta_m}\right)^2+O\left(\sum_{k=1}^{t}\frac{|y_k|^3}{\sqrt{N\omega_k}}\right)+o(1)\right\}dy_1\ldots dy_t. \qquad (8)$$

Разбивая область интегрирования в (8) на

$$S_0=\{y_k:|y_k|\leqslant\delta\sqrt[8]{N\omega_k}, \quad k=1, 2, \ldots, t\}$$

и дополнительную к ней область, при $n, N\longrightarrow\infty$ получим, что $I\to 1$, если δ достаточно мало. Так же, как в § 4, показывается, что

$$K\int\limits_{\overline{S}}\ldots\int e^{Nf}d\varphi_1\ldots d\varphi_t\to 0.$$

Поэтому характеристическая функция $A_{n,N}(\tau_1, \ldots, \tau_t)$ сходится к $e^{Q/2}$, т. е. к характеристической функции предельного многомерного нормального распределения. Теорема доказана.

Заметим, что предельный гауссовский процесс $\eta(\theta)$ с корреляционной функцией

$$\mathbf{M}\eta(\theta)\eta(\theta') = e^{-\max(\theta,\,\theta')}$$

есть процесс с независимыми приращениями, если его рассматривать в «обращенном» времени. В самом деле, при $\theta' > \theta$

и $$\mathbf{M}\eta(\theta')(\eta(\theta)-\eta(\theta')) = 0,$$

т. е. $\eta(\theta')$ и $\eta(\theta)-\eta(\theta')$ независимы, $\mathbf{D}\eta(\theta) = e^{-\theta}$ и $\mathbf{D}\{\eta(\theta)-\eta(\theta')\} = e^{-\theta} - e^{-\theta'}$, $\theta' \geqslant \theta$.

Процесс $\xi(\theta)$, определенный формулой (3), зависит не только от параметра θ, но и от характера изменения α_0. Если α_0 и α_0' изменяются так, что $\alpha_0, \alpha_0' \to \infty$ и $|\alpha_0 - \alpha_0'| \to \infty$, то аналогичными рассуждениями доказывается, что конечномерные распределения соответствующих процессов $\xi_{\alpha_0}(\theta)$ и $\xi_{\alpha_0'}(\theta)$ сходятся к конечномерным распределениям независимых гауссовских процессов. Таким образом, с каждым $\alpha_0 \to \infty$ связывается свое локальное время θ и соответствующий предельный гауссовский процесс $\eta(\theta)$.

Аналогичная картина имеет место и в левой промежуточной области. Пусть при n_0, $N \to \infty$ параметр $\alpha_0 = n_0/N$ изменяется так, что $\alpha_0 \to 0$, $N\alpha_0^2 \to \infty$. Будем рассматривать такие $n \to \infty$, что $n/N = \alpha_0\theta$ и величина $\ln\theta$ ограничена. В новом времени θ рассмотрим нормированный процесс

$$\xi(\theta) = \frac{\mu_0(n) - \mathbf{M}\mu_0(n)}{\alpha_0\sqrt{N/2}}, \quad \frac{n}{N} \leqslant \theta < \frac{n+1}{N}. \tag{9}$$

Теорема 2. *Если n_0, n, $N \to \infty$ так, что $\alpha_0 = \frac{n_0}{N} \to 0$, $N\alpha_0^2 \to \infty$, $n/N = \alpha_0\theta$, $\ln\theta$ ограничен, то конечномерные распределения процесса $\xi(\theta)$, определенного формулой (9), сходятся к конечномерным распределениям гауссовского процесса $\eta(\theta)$ с корреляционной функцией* $\mathbf{M}\eta(\theta)\eta(\theta') = \theta^2$, $\theta' > \theta$.

Заметим, что предельный гауссовский процесс $\eta(\theta)$ — это процесс с независимыми приращениями и с $\mathbf{D}\eta(\theta) = \theta^2$.

Доказательство теоремы основывается на следующей простой лемме.

Лемма 1. *Если случайные величины* $\eta_k(N)$, $k=1, \ldots, t$, *независимы и при* $N \to \infty$ *асимптотически нормальны с параметрами* $(0, \sigma_k)$, *то совместное распределение случайных величин*

$$\xi_k(N)=\eta_1(N)+\eta_2(N)+\ldots+\eta_k(N),\quad k=1, \ldots, t,$$

при $N \to \infty$ *асимптотически нормально с ковариационной матрицей* $\|b_{km}\|$, *где* $b_{km}=\sigma_k^2$, $m \geqslant k$.

Доказательство теоремы 2. Пусть, как и в § 1.2, величина ν_k равна числу бросаний, в результате которых впервые оказалось занято частицами ровно k ячеек (и остались пустыми $N-k$ ячеек). Представим ν_k в виде суммы независимых случайных величин $\nu_k=\delta_1+\delta_2+\ldots+\delta_k$, где $\delta_1=\nu_1=1$, $\delta_m=\nu_m-\nu_{m-1}$, $m=2, 3, \ldots, k$. В теореме 1.2.2 мы показали, что при $k/N \to \gamma$, $0 \leqslant \gamma < 1$ и $k^2/N \to \infty$ имеют место асимптотические равенства

$$\mathbf{M}\nu_k = N \ln \frac{N}{N-k} + O(1), \qquad \mathbf{D}\nu_k = \frac{Nk}{N-k} - N \ln \frac{N}{N-k} + O(1),$$

$$\mathbf{M}\,|\delta_l - \mathbf{M}\delta_l|^3 = O\left(\frac{l}{N}\right),\ l=1,\ldots,k.$$

Пусть n_k, $N \to \infty$, $k=1, 2, \ldots, t$, так, что

$$\frac{n_1+n_2+\ldots+n_k}{N} = \alpha_0\theta_k, \qquad k=1, 2, \ldots, t, \tag{10}$$

где $\alpha_0 \to 0, N\alpha_0^2 \to \infty$, а величины $\ln\theta_k$ ограничены. В этом случае

$$\mathbf{M}\mu_0(n_1+\ldots+n_k) \sim Ne^{-\alpha_0\theta_k},$$

$$\mathbf{Cov}\,(\mu_0(n_1+\ldots+n_k), \mu_0(n_1+\ldots+n_m)) \sim \frac{N}{2}\alpha_0^2\theta_k^2,$$

$$m \geqslant k$$

(см. теорему 1.1.1 и асимптотическую формулу (4.4)). Из определения величин μ_0 и ν_k следует равенство

$$\mathbf{P}\{\mu_0(n_1) \leqslant N-k_1,\ \mu_0(n_1+n_2) \leqslant N-k_2, \ldots$$
$$\ldots, \mu_0(n_1+\ldots+n_t) \leqslant N-k_t\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\nu_{k_1} \leqslant n_1,\ \nu_{k_2} \leqslant n_1+n_2, \ldots, \nu_{k_t} \leqslant n_1+n_2+\ldots+n_t\}. \tag{11}$$

Положим

$$n_1+n_2+\ldots+n_m = \\ = N\ln\frac{N}{N-k_m}+x_m\sqrt{\frac{Nk_m}{N-k_m}-N\ln\frac{N}{N-k_m}}+O(1), \\ m=1,\ldots,t. \quad (12)$$

Решая уравнения (12) относительно k_m, получим

$$k_m = N(1-e^{-\alpha_0\theta_m})-x_m\alpha_0\theta_m\sqrt{\frac{N}{2}}(1+o(1))+O(1)\sim \\ \sim N\alpha_0\theta_m, \quad (13)$$

$$\mathbf{D}\nu_{k_m}\sim\frac{1}{2}N\alpha_0^2\theta_m^2. \quad (14)$$

Подставляя (12)—(14) в (11), имеем

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\mu_0(n_1+\ldots+n_m)-Ne^{-\alpha_0\theta_m}}{\alpha_0\sqrt{N/2}}\leqslant x_m\theta_m,\ m=1,\ldots,t\right\}\sim \\ \sim\mathbf{P}\left\{\frac{\nu_{k_m}-\mathbf{M}\nu_{k_m}}{\alpha_0\sqrt{N/2}}\leqslant x_m\theta_m,\ m=1,\ldots,t\right\}.$$

Из (13) видно, что при $N\longrightarrow\infty$ в условиях теоремы 2

$$\frac{k_1}{\sqrt{N}}\sim\alpha_0\theta_1\sqrt{N}\to\infty, \qquad \frac{k_m-k_{m-1}}{\sqrt{N}}\sim\alpha_0(\theta_m-\theta_{m-1})\sqrt{N}\to\infty,$$

следовательно, величины ν_{k_1}, $\nu_{k_m}-\nu_{k_{m-1}}$, $m=2,\ldots,t$, асимптотически нормальны. Применяя лемму 1 к случайным величинам

$$\eta_1=\frac{\nu_{k_1}-\mathbf{M}\nu_{k_1}}{\alpha_0\sqrt{N/2}}, \qquad \eta_m=\frac{\nu_{k_m}-\nu_{k_{m-1}}-\mathbf{M}(\nu_{k_m}-\nu_{k_{m-1}})}{\alpha_0\sqrt{N/2}}$$

$$\left(\mathbf{D}\eta_1\sim\theta_1^2,\ \mathbf{D}\eta_m\sim\theta_m^2-\theta_{m-1}^2,\ m=2,\ldots,t\right),$$

завершаем доказательство теоремы 2.

Так же, как и в правой промежуточной области, случайные величины (9) зависят от поведения $\alpha_0\longrightarrow 0$. Если $\alpha_0\longrightarrow 0$ и $\alpha_0'\to 0$ таковы, что $|\ln\alpha_0-\ln\alpha_0'|\to\infty$, $N\alpha_2^0\to\infty$, $N(\alpha_0')^2\to\infty$, то конечномерные распределения $\xi_{\alpha_0}(\theta)$ и $\xi'_{\alpha_0}(\theta)$ сходятся к конечномерным распределениям независимых гауссовских процессов.

§ 7. Дальнейшие результаты. Литература

Изложение в §§ 1—5 основано на статье Б. А. Севастьянова [44]. Результаты § 6 получены Ю. В. Болотниковым [6].

В работе Ю. В. Болотникова [5] доказана сходимость $\mu_r(n)=\mu_r(n, N)$ к пуассоновскому и гауссовскому процессам в центральной, левой и правой r-областях. Сформулируем здесь без доказательства основные результаты [5].

Введем производящие функции

$$F_{r,n_1,\ldots,n_t}(x_1,\ldots,x_t)=$$
$$=\sum_{k_1,\ldots,k_t}\mathbf{P}\{\mu_r(n_1)=k_1,\ \mu_r(n_1+n_2)=k_2,\ldots$$
$$\ldots,\mu_r(n_1+n_2+\ldots+n_t)=k_t\}\,x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_t^{k_t} \tag{1}$$

и

$$\Phi_{N,r}(z;\ x)=\Phi_{N,r}(z_1,\ldots,z_t;\ x_1,\ldots,x_t)=$$
$$\sum_{n_1,\ldots,n_t=0}^{\infty}F_{r,n_1,\ldots,n_t}(x_1,\ldots,x_t)\prod_{m=1}^{t}\frac{(Nz_m)^{n_m}}{n_m!}. \tag{2}$$

Теорема 1. *Производящая функция* $\Phi_{N,r}(z;\ x)$ *равна* $[\Phi_r(z;\ x)]^N$, *где*

$$\Phi_r(z,\ x)=b_1-\sum_{k=1}^{t}a_k(b_{k+1}-b_{k+2})+$$
$$+\sum_{k=1}^{t}\sum_{s=k+1}^{t+1}x_kx_{k+1}\ldots x_{s-1}(a_k-a_{k-1})(b_s-b_{s-1})$$

и

$$a_k=\frac{(z_1+z_2+\ldots+z_k)^r}{r!},\qquad k=1,2,\ldots,t,\qquad a_0=0,$$
$$b_m=e^{z_m+z_{m+1}+\ldots+z_t},\quad m=1,2,\ldots,t;\ b_{t+1}=1,\ b_{t+2}=0.$$

В правой r-области время θ вводится равенством

$$\frac{n}{N}-\ln N-r\ln\ln N+\ln r!=-\ln\theta. \tag{3}$$

Это время «обращено», т. е. чем больше n, тем меньше θ. Обозначим

$$\frac{n_1+n_2+\ldots+n_m}{N}-\ln N-r\ln\ln N+\ln r! = \\ =-\ln\theta_m+o(1), \quad (4)$$

$$m=1,\ 2,\ \ldots,\ t.$$

Теорема 2. *Если n_m, $N\longrightarrow\infty$ так, что в равенствах (4) $\theta_1, \ldots, \theta_m$ — константы, то случайные величины*

$$\mu_r(n_1+\ldots+n_t),\ \mu_r(n_1+\ldots+n_m)-\mu_r(n_1+\ldots+n_{m+1}),$$
$$m=1,\ 2,\ \ldots,\ t-1,$$

асимптотически независимы и их распределения сходятся к пуассоновским законам с параметрами θ_t и $\theta_m-\theta_{m+1}$, $m=1, \ldots, t-1$, соответственно.

В центральной области вводится время $\theta=n/N$. Из теоремы 1.1.1 и из производящей функции (1) имеем при n, $N\longrightarrow\infty$

$$\mathbf{M}\mu_r(n)\sim N\frac{\theta^r}{r!}e^{-\theta}, \qquad \theta=\frac{n}{N},$$

$$\mathbf{Cov}(\mu_r(n),\mu_r(n'))\sim$$
$$\sim N\left[\frac{\theta^r}{r!}e^{-\theta'}-\frac{\theta^r\theta'^r}{(r!)^2}e^{-\theta-\theta'}\left(1+\frac{(r-\theta)(r-\theta')}{\theta'}\right)\right],$$
$$\frac{n'}{N}=\theta'\geqslant\frac{n}{N}=\theta.$$

Вводится процесс

$$\xi_r(\theta)=\frac{\mu_r(n)-\mathbf{M}\mu_r(n)}{\sqrt{N}}, \qquad \frac{n}{N}\leqslant\theta<\frac{n+1}{N}.$$

Теорема 3. *Конечномерные распределения процесса $\xi_r(\theta)$ сходятся при n, $N\to\infty$, $n/N=\theta+o(1)$ к конечномерным распределениям гауссовского процесса $\eta_r(\theta)$ с корреляционной функцией*

$$\frac{\theta^r}{r!}e^{-\theta'}-\frac{\theta^r\theta'^r}{(r!)^2}e^{-\theta-\theta'}\left[1+\frac{(r-\theta)(r-\theta')}{\theta'}\right], \quad \theta'\geqslant\theta.$$

В левой r-области n, $N\longrightarrow\infty$ так, что n^r/N^{r-1} ограничено. Введем новое время $\theta=\dfrac{n^r}{r!N^{r-1}}$.

Теорема 4. *Если $r \geqslant 2$ фиксировано и n_k, $N \to \infty$ так, что*

$$\frac{(n_1 + \ldots + n_k)^r}{r! N^{r-1}} = \theta_k + o(1), \quad k = 1, 2, \ldots, r, \quad \theta_0 = 0,$$

то случайные величины

$$\mu_r(n_1), \ \mu_r(n_1 + \ldots + n_{k+1}) - \mu_r(n_1 + \ldots + n_k), \qquad k = 1, \ldots, t-1, \tag{5}$$

асимптотически независимы и их распределения сходятся к пуассоновским законам с параметрами θ_1 и $\theta_{k+1} - \theta_k$, $k = 1, \ldots, t-1$, соответственно.

В случае $r = 1$ в левой 1-области действует следующая предельная

Теорема 5. *Если n_k, $N \to \infty$ так, что*

$$\frac{(n_1 + \ldots + n_k)^2}{2N} = \theta_k + o(1), \quad k = 1, \ldots, t, \quad \theta_0 = 0,$$

то случайные величины

$$\frac{n_1 - \mu_1(n_1)}{2}, \quad \frac{n_k + \mu_1(n_1 + \ldots + n_{k-1}) - \mu_1(n_1 + \ldots + n_k)}{2}, \qquad k = 2, \ldots, t$$

асимптотически независимы и их распределения сходятся к пуассоновским законам с параметрами θ_1 и $\theta_k - \theta_{k-1}$, $k = 2, \ldots, t$, соответственно.

В другой работе Ю. В. Болотникова [7] результаты §§ 3—5 переносятся на случайную величину $\mu_0(n)$ в полиномиальной схеме размещения.

В работах Хафнера [76, 77, 78] доказывается сходимость к пуассоновскому и гауссовскому процессам числа различных конфигураций, которые образуют частицы, заполняющие узлы бесконечной решетки в многомерном пространстве.

ГЛАВА V

КРИТЕРИЙ ПУСТЫХ ЯЩИКОВ И ЕГО ОБОБЩЕНИЯ

§ 1. Критерий пустых ящиков

Для проверки статистической гипотезы H_0 о том, что выборка, состоящая из независимых наблюдений $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взята из непрерывного распределения $F(x)$, в § 1 гл. I был введен критерий пустых ящиков. Этот критерий строится на основе статистики μ_0, определяемой следующим образом. Выберем точки $z_0 = -\infty < z_1 < < z_2 < \ldots < z_{N-1} < z_N = \infty$ так, чтобы

$$a_k = F(z_k) - F(z_{k-1}) = \frac{1}{N}, \quad k = 1, 2, \ldots, N. \tag{1}$$

Статистика μ_0 равна числу полуинтервалов $(z_{k-1}, z_k]$, в которые не попало ни одного наблюдения. Критерий имеет следующий вид: если $\mu_0 \leqslant C$, то гипотеза H_0 принимается, если $\mu_0 > C$, то гипотеза H_0 отвергается. Ошибка первого рода, т. е. вероятность отвергнуть гипотезу H_0, если она верна, равна

$$\gamma(N) = \mathbf{P}\{\mu_0(n, N) > C\}, \tag{2}$$

где $\mu_0(n, N)$ — число пустых ящиков в полиномиальной схеме с вероятностями a_k, определяемыми (1). При больших значениях n, N для расчета $\gamma(N)$ естественно воспользоваться предельными теоремами. Согласно теореме 1.3.2 и формулам (1.1.14), (1.1.15) в центральной области величина $\mu_0(n, N)$ асимптотически нормальна с параметрами $(NA_0, \sigma_0\sqrt{N})$, где

$$A_0 = e^{-\alpha}, \qquad \sigma_0^2 = e^{-\alpha}[1 - (1+\alpha)e^{-\alpha}], \qquad \alpha = \frac{n}{N}. \tag{3}$$

Определим величины u_t, $0<t<1$, равенствами

$$t = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{u_t}^{\infty} e^{-x^2/2} dx.$$

Положим

$$C = NA_0 + u_\gamma \sigma_0 \sqrt{N}, \qquad 0<\gamma<1. \tag{4}$$

Если гипотеза H_0 верна, то согласно теореме 1.3.2 для величины $\gamma(N)$, определенной формулой (2) с постоянной C вида (4), при $N \longrightarrow \infty$ имеем: $\gamma(N) \longrightarrow \gamma$.

Если верна простая конкурирующая гипотеза H_1 (выборка взята из непрерывного распределения $G(x) \not\equiv F(x)$), то вероятности $a_k = G(z_k) - G(z_{k-1})$, $k=1, 2, \ldots, N$, попадания в полуинтервалы $(z_{k-1}, z_k]$ уже не обязательно равны $1/N$ и величина μ_0 будет, согласно теореме 3.4.2, асимптотически нормальна с параметрами $(NA_1, \sigma_1\sqrt{N})$, где A_1, σ_1^2 определены формулами (3.1.17), (3.1.18). Таким образом, мы приходим к задаче о различении двух простых гипотез

$$\begin{aligned} &H_0 : a_k = \frac{1}{N}, \; k = 1, 2, \ldots, N, \\ &H_1 : a_k = a_k^* \quad \left(a_k^* \neq \frac{1}{N}\right), \; k = 1, 2, \ldots, N, \end{aligned} \tag{5}$$

о вероятностях исходов в полиномиальной схеме по числу пустых ячеек μ_0.

Если функция $F(x)$ непрерывна, то, преобразовав наблюдения x_k в $y_k = F(x_k)$, получим выборку из равномерного распределения. Таким образом, можно считать, что $F(x) \equiv x, 0 \leqslant x \leqslant 1$. Если плотность $g(x)$ распределения $G(x)$ несколько раз дифференцируема, то для вероятностей a_k^* при H_1 будем иметь

$$\begin{gathered} a_k^* = \frac{1}{N} g\left(\frac{k}{N}\right) - \frac{1}{2N^2} g'\left(\frac{k}{N}\right) + O\left(\frac{1}{N^3}\right), \qquad k = 2, \ldots, N-1, \\ a_1^* = G\left(\frac{1}{N}\right), \qquad a_N^* = 1 - G\left(1 - \frac{1}{N}\right). \end{gathered} \tag{6}$$

В случае вероятностей вида (6) из формул (3.1.17), (3.1.18) легко следует, что

$$\lim_{N\to\infty} A_1 = \int_0^1 e^{-\alpha g(x)}dx,$$

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_1^2 = \int_0^1 e^{-\alpha g(x)}dx - \int_0^1 e^{-2\alpha g(x)}dx - \\ - \alpha\left(\int_0^1 g(x)\, e^{-\alpha g(x)}dx\right)^2, \qquad (7)$$

если $n/N \longrightarrow \alpha = \mathrm{const}$. Обозначим $\delta(N)$ ошибку второго рода (вероятность принять H_0, когда верна H_1). Если верна гипотеза H_1, то

$$\delta(N) = \mathbf{P}\{\mu_0 \leqslant C\} = \mathbf{P}\left\{\frac{\mu_0 - NA_1}{\sigma_1\sqrt{N}} < \frac{A_0 - A_1}{\sigma_1}\sqrt{N} + u_\gamma\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right\}. \quad (8)$$

Если $A_0 \neq A_1$, то нетрудно проверить, что $A_0 < A_1$. Тогда, согласно теореме 3.4.2, при $N \longrightarrow \infty$ имеем $\delta(N) \longrightarrow 0$, так как

$$\frac{\sqrt{N}(A_0 - A_1)}{\sigma_1} + u_\gamma\frac{\sigma_0}{\sigma_1} \to -\infty. \qquad (9)$$

Представляет интерес рассмотрение случая, когда $\delta(N) \longrightarrow \delta > 0$. Из (8) и (9) следует, что это возможно, если $A_1 - A_0 \approx c/\sqrt{N}$ ($c > 0$ — некоторая постоянная).

Теорема 1. *Если* $\overset{*}{a}_k$ *в* (5) *определяются формулами* (3.1.23), *то ошибки* $\gamma(N)$, $\delta(N)$ *первого и второго рода критерия пустых ящиков с постоянной* (4) *при* $N \longrightarrow \infty$, $\alpha = \frac{n}{N} \to \alpha_0$ $(0 < c_0 \leqslant \alpha \leqslant c_1 < \infty)$ *имеют пределы* $\gamma > 0$, $\delta > 0$ *соответственно и*

$$u_\gamma + u_\delta = \frac{\alpha_0^2 b^2}{2\sigma_0} e^{-\alpha_0},$$

где σ_0, b^2 *определены формулами* (3) *и* (3.1.23).

Доказательство. Сходимость $\gamma(N)$ к γ следует из определения C в (4) и асимптотической нормальности $\mu_0(n, N)$ с параметрами $(NA_0, \sigma_0\sqrt{N})$. В условиях доказываемой теоремы, согласно (3.1.24),

$$A_1 = A_0\left(1 + \frac{b_N^2}{2\sqrt{N}}\alpha^2\right) + O\left(\frac{1}{N^{3/4}}\right), \quad \sigma_1 = \sigma_0 + O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Таким образом, вместо (9) имеем

$$\lim_{N\to\infty}\left[\frac{\sqrt{N}(A_0 - A_1)}{\sigma_1} + u_\gamma \frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right] = -\frac{\alpha_0^2 b^2}{2\sigma_0} e^{-\alpha_0} + u_\gamma. \tag{10}$$

Согласно (8) правая часть (10) есть — u_δ. Теорема доказана.

Рассмотрим δ как функцию от α при фиксированных γ и b. Тогда

$$u_{\delta(\alpha)} = \Psi(\alpha)\frac{b^2}{2} - u_\gamma, \tag{11}$$

где

$$\Psi(\alpha) = \frac{\alpha^2}{\sqrt{e^\alpha - 1 - \alpha}}. \tag{12}$$

При увеличении α от $\alpha=0$ до $\alpha=1$ функция $\Psi(\alpha)$ увеличивается. Следовательно, увеличивается $u_{\delta(\alpha)}$ и мощность критерия $1-\delta(\alpha)$ тоже возрастает. Рост $\alpha=n/N$ соответствует увеличению числа наблюдений. Однако при слишком большом числе наблюдений ($\alpha>1$) пустых ячеек становится мало при любой гипотезе. Это приводит к уменьшению мощности.

§ 2. Линейные критерии

В предыдущем параграфе мы рассмотрели критерий, который различает гипотезы (1.5). Этот критерий был основан на статистике μ_0. Естественное обобщение этого критерия получится, если наряду со статистикой μ_0 использовать набор статистик μ_r при различных r.

Рассмотрим сначала линейный критерий, основанный на статистике

$$\xi_r = c_{0r}\mu_0 + c_{1r}\mu_1 + \ldots + c_{rr}\mu_r. \tag{1}$$

Будем различать гипотезы H_0 и H_1 (см. (1.5)), когда $\overset{*}{a}_k$ определены формулами (3.1.23). Мы будем обозначать $\mathbf{M}_i$ и $\mathbf{D}_i$ математическое ожидание и дисперсию, вычисленные по распределению гипотезы H_i, $i=0, 1$.

Используя формулы (3.1.24), при $N \to \infty$ легко получим

$$\mathbf{M}_1\xi_r = N\sum_{k=0}^{r} c_{kr}p_k\left(1+\frac{b_N^2}{2\sqrt{N}}[(\alpha-k)^2-k]\right)+O\left(\sqrt[4]{N}\right),$$

$$\mathbf{D}_1\xi_r = N\sum_{k,l=1}^{r} c_{kr}c_{lr}\sigma_{kl}+O\left(\sqrt{N}\right), \tag{2}$$

где $p_k = \frac{\alpha^k}{k!}e^{-\alpha}$, σ_{kl}, b_N^2 определены формулами (2.1.9), (3.1.23). Полагая $b_N^2=0$ в (2), при $N\to\infty$ будем иметь

$$\mathbf{M}_0\xi_r = N\sum_{k=0}^{r} c_{kr}p_k+O\left(\sqrt[4]{N}\right),$$

$$\mathbf{D}_0\xi_r = N\sum_{k,l=0}^{r} c_{kr}c_{lr}\sigma_{kl}+O\left(\sqrt{N}\right). \tag{3}$$

Обозначим

$$C = N\sum_{k=0}^{r} c_{kr}p_r + u_\gamma\sqrt{N\sum_{k,l=0}^{r} c_{kr}c_{kl}\sigma_{kl}}. \tag{4}$$

Мы будем принимать гипотезу H_0, если

$$\xi_r \leqslant C, \tag{5}$$

и гипотезу H_1, если

$$\xi_r > C. \tag{6}$$

Ошибки 1-го и 2-го рода этого критерия обозначим $\gamma(N)$, $\delta(N)$ соответственно. Воспользовавшись теоремами 2.2.3, 3.5.2 и формулами (2), (3) так же, как в доказательстве теоремы 1.1, получим, что при $N\to\infty$

$$\gamma(N)\to\gamma,\qquad \delta(N)\to\delta$$

и

$$u_\gamma+u_\delta=\frac{b^2\sum\limits_{k=0}^{r} c_{kr}p_k\,[(\alpha-k)^2-k]}{2\sqrt{\sum\limits_{k,l=0}^{r} c_{kr}c_{lr}\sigma_{kl}}}. \tag{7}$$

Отметим, что при вычислении ошибок 1-го и 2-го рода выражение, стоящее в знаменателе, удобнее представить в виде

$$\sum_{k,l=0}^{r} c_{kr}c_{lr}\sigma_{kl} = \sum_{k=0}^{r} c_{kr}^2 p_k - \left(\sum_{k=0}^{r} c_{kr}p_k\right)^2 - \\ - \alpha\left[\left(\sum_{k=0}^{r} c_{kr}p_k\right) - \left(\sum_{k=0}^{r-1} c_{k+1,r}p_k\right)\right]^2.$$

Теорема 1. *Среди критериев, определенных формулами* (5) *и* (6) *со статистикой* (1), *при* $n,\ N\to\infty$, $\frac{n}{N}\to\alpha_0$, $0<\alpha_0<\infty$, *асимптотически наиболее мощным является критерий, основанный на статистике*

$$\xi_r = \sum_{k=0}^{r} \overset{*}{c}_{kr}\mu_k, \tag{8}$$

где

$$\overset{*}{c}_{kr} = 1 - \frac{2k}{\alpha_0} + \frac{k(k-1)}{\alpha_0^2} + \frac{\alpha_0 - r}{\alpha_0}\theta_r + \\ + \frac{\theta_r[\alpha_0(1+\theta_r)-k][\theta_r(\alpha_0-r)+((\alpha_0-r)^2+r)/\alpha_0]}{\alpha_0[1-\theta_r(\alpha_0-r-1+\alpha_0\theta_r)]}, \tag{9}$$

$$\theta_r = \frac{\alpha_0^r}{r!}\left(\sum_{k=r+1}^{\infty}\frac{\alpha_0^k}{k!}\right)^{-1}.$$

Доказательство. Нужно показать, что мощность $1-\delta$, определенная равенством (7), будет наибольшей, когда $c_{kr} = \overset{*}{c}_{kr}$. Наибольшее значение мощности соответствует наибольшему значению u_δ. Так как умножение всех c_{kr} на одну и ту же постоянную не меняет величины (7), то мы можем заменить нашу задачу следующей: на $(r+1)$-мерном эллипсоиде

$$\sum_{k,l=0}^{r} \sigma_{kl}x_kx_l = 1 \tag{10}$$

найти точку $(x_0, x_1, \ldots, x_r)$, в которой функция

$$y(x_0, \ldots, x_r) = \sum_{k=1}^{r} x_kA_k, \qquad A_k = p_k[(\alpha_0 - k)^2 - k],$$

достигает максимума. Используя метод множителей

Лагранжа для нахождения условного экстремума, мы получим для экстремальных точек $(x_0, \ldots, x_r)$ систему уравнений

$$\sum_{l=0}^{r} \sigma_{kl} x_l = -\frac{A_k}{2\lambda}, \qquad k = 0, 1, \ldots, r.$$

Отсюда

$$x_l = -\frac{1}{2\lambda B^2} \sum_{k=0}^{r} B_{kl} A_k, \qquad l = 0, 1, \ldots, r, \tag{11}$$

где B^2 — определитель матрицы $\|\sigma_{kl}\|$, B_{kl} — алгебраическое дополнение элемента σ_{kl}. Подставляя (11) в (10), получим для λ квадратное уравнение, из которого найдем два корня λ_1 и λ_2, причем $\lambda_1 = -\lambda_2$. Таким образом, мы имеем две экстремальные точки, координаты которых противоположны по знаку. В одной из них достигается максимальное значение $y(x_0, \ldots, x_r)$, а в другой — минимальное. Используя явные формулы для B^2, B_{kl} ((2.2.5), (2.2.8), (2.2.9)), можно доказать коллинеарность векторов $(x_0, \ldots, x_r)$ и $\left(c^{0r}, \ldots, \overset{*}{c}_{rr}\right)$, компоненты которых определяются формулами (11) и (9). Таким образом, чтобы завершить доказательство теоремы, нужно показать, что при $x_k = \overset{*}{c}_{kr}$, $k = 0, \ldots, r$, значение функции $y(x_0, \ldots, x_r)$ максимально. Для этого достаточно проверить, что $y\left(\overset{*}{c}_{0r}, \ldots, \overset{*}{c}_{rr}\right) > 0$, так как в нашей задаче минимум и максимум противоположны по знаку. Заметим, что при $x_k = \overset{*}{c}_{kr}$, $k = 0, 1, \ldots, r$, функция $y(x_0, \ldots, x_r)$ ни при каких значениях α_0 не обращается в нуль. Действительно, если бы такое α_0 нашлось, то это означало бы, что максимум и минимум функции $y(x_0, \ldots, x_r)$ при данном α_0 равны нулю, что невозможно, так как наша линейная функция не равна тождественно нулю. При достаточно больших α_0 мы имеем $y\left(\overset{*}{c}_{0r}, \ldots, \overset{*}{c}_{rr}\right) > 0$; отсюда по сделанному выше замечанию следует положительность $y\left(\overset{*}{c}_{0r}, \ldots, \overset{*}{c}_{rr}\right)$ при всех α_0, так как эта функция непрерывна по α_0. Таким образом, в точке $x_k = \overset{*}{c}_{kr}$, $k = 0, 1, \ldots, r$, достигается максимум. Теорема доказана.

Анализируя формулы (9) при α_0 малых и α_0 больших, получаем, что наилучший критерий среди линейных при малых α_0 определяется формулой

$$\xi_r = C_{r+2}^2\mu_0 + C_{r+1}^2\mu_1 + \ldots + 3\mu_{r-1} + \mu_r,$$

а при больших α_0 — формулой

$$\xi_r = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_r.$$

§ 3. Оптимальный критерий

Покажем, что найденный в предыдущем параграфе критерий является оптимальным среди всех критериев, основанных на величинах $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r$.

Теорема 1. *Среди всех критериев, различающих гипотезы* (1.5), *где* $\overset{*}{a}_k$ *определены формулами* (3.1.23), *по статистикам* $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r$, *при* $n, N \to \infty$, $\alpha = \frac{n}{N} \to \alpha_0$, $0 < \alpha_0 < \infty$, *асимптотически наиболее мощным является критерий с линейной статистикой* (2.8).

Доказательство. При гипотезе H_i ($i=0, 1$) согласно теоремам 2.2.1, 3.5.3 для вероятностей

$$P_N^{(i)}(k_0, k_1, \ldots, k_r) = \mathbf{P}\{\mu_0 = k_0, \ldots, \mu_r = k_r\}$$

при $n, N \longrightarrow \infty$ верна асимптотическая формула

$$P_N^{(i)}(k_0, \ldots, k_r) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{(2\pi N)^{r+1}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{r} B_{kl} u_k^{(i)} u_l^{(i)}\right), \quad (1)$$

где

$$\left.\begin{aligned} u_l^{(i)} &= \frac{k_l - NA_{il}}{B\sqrt{N}}, \qquad |u_l^i| \leqslant C < \infty, \\ A_{1l} &= p_l\left(1 + \frac{b_N^2}{2\sqrt{N}}[(\alpha - l)^2 - l]\right), \quad A_{0l} = p_l, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

$p_l = \frac{\alpha^l}{l!} e^{-\alpha}$, а B, B_{kl}, b_N^2 определены формулами (2.2.5), (2.2.8), (2.2.9), (3.1.23). Заметим, что из (2) следует равенство

$$\lim_{N\to\infty} \sqrt{N}(A_{1l} - A_{0l}) = \frac{b^2}{2}[(\alpha_0 - l)^2 - l]. \quad (3)$$

Статистикой наиболее мощного критерия, различающего две простые гипотезы H_0 и H_1, по теореме Неймана—

Пирсона является случайная величина

$$\eta_n = \ln \frac{P_N^{(1)}(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r)}{P_N^{(0)}(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r)}. \tag{4}$$

Из (4) при помощи (1) и формул

$$v_k^{(0)} = \frac{\mu_k - NA_{0k}}{B\sqrt{N}}, \qquad v_k^{(1)} = \frac{\mu_k - NA_{1k}}{B\sqrt{N}} = v_k^{(0)} + \frac{\sqrt{N}}{B}(A_{0k} - A_{1k})$$

получаем, что

$$\eta_N = \frac{1}{2}\sum_{k,l=0}^{r} B_{kl}\Big[v_k^{(0)}\sqrt{N}(A_{1l} - A_{0l}) +$$
$$+ v_l^{(0)}\sqrt{N}(A_{1k} - A_{0k}) - \frac{N}{B^2}(A_{1k} - A_{0k})(A_{1l} - A_{0l})\Big] + \nu_N. \tag{5}$$

Если $|v_k^{(i)}| \leqslant C < \infty$ $(i = 0, 1)$, то ν_N стремится к нулю. Покажем, что величина ν_N сходится по вероятности к нулю при гипотезе H_i $(i=0,\ 1)$. Разделим множество R значений вектора $(\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r)$ на две части: R_ε и $R_{1-\varepsilon} = R \diagdown R_\varepsilon$; $R_{1-\varepsilon}$ выберем так, чтобы при $(\mu_0, \ldots, \mu_r) \in R_{1-\varepsilon}$ выполнялось неравенство $|v_k^{(i)}| < C_i$, где C_i выбирается из условия

$$\mathbf{P}\{(\mu_0, \ldots, \mu_r) \in R_{1-\varepsilon}\} \geqslant 1 - \varepsilon. \tag{6}$$

Это возможно в силу (1). Так как выполняется (6) и в $R_{1-\varepsilon}$ величина $\nu_N \to 0$ при $N \to \infty$, то для любых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$ найдется такое N_0, что при всех $N > N_0$

$$\mathbf{P}\{|\nu_N| < \delta\} > 1 - \varepsilon.$$

Отсюда следует сходимость ν_N по вероятности к нулю. Учитывая (3), преобразуем (5) к следующему виду:

$$\eta_N = \sum_{l=0}^{r} c_l v_l^{(0)} + D + \tilde{\nu}_N,$$

где

$$\begin{aligned} c_l &= \sum_{k=0}^{r} B_{kl}\frac{b^2}{2}[(\alpha_0 - k)^2 - k], \\ D &= -\frac{b^4}{4B^2}\sum_{k,l=0}^{r}[(\alpha_0 - l)^2 - l][(\alpha_0 - k)^2 - k], \end{aligned} \tag{7}$$

а $\tilde{\nu}_N$ сходится по вероятности к нулю при любой гипотезе H_i ($i=0, 1$). Отсюда следует, что предельные распределения величин η_N и $\eta_N-\tilde{\nu}_N$ при любой гипотезе H_i ($i=0, 1$) совпадают, т. е. линейная статистика $\eta_N-\tilde{\nu}_N$ имеет распределение, асимптотически совпадающее с распределением статистики наиболее мощного критерия η_N. Поскольку величина $\eta_N-\tilde{\nu}_N$ линейно зависит от $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_r$, мощность критерия, основанного на этой статистике, должна совпадать с мощностью критерия, оптимального среди линейных. Теорема доказана.

Сравнивания (7) и (2.11), мы видим, что c_l и x_l пропорциональны. Таким образом, мы непосредственно убеждаемся, что статистика $\eta_N-\tilde{\nu}_N$ является линейной функцией от статистики критерия, оптимального среди линейных.

§ 4. Дальнейшие результаты. Литература

Критерий пустых ящиков достаточно широко известен (см., например, Дейвид [70], Окамото [89], Китабатаке [84], Б. А. Севастьянов [45], В. П. Чистяков [55]) и вошел в учебную литературу ([53], гл. 14). Для вычисления ошибок 1-го рода этого критерия используются теоремы об асимптотической нормальности μ_0 в равновероятной схеме, полученные в различных предположениях (см. Окамото [89], Вейс [98], Реньи [91]; § 1.6). Мощность критерия вычисляется при помощи теоремы 3.4.2, доказанной В. П. Чистяковым [55]. Этими результатами можно пользоваться при больших значениях n, N. Для значений n, N, лежащих в пределах

$$2 \leqslant N \leqslant 10, \qquad 5 \leqslant n \leqslant 50,$$

Ксорго и Гутман [68] составили таблицу значений C для ошибок 1-го рода 0,01 и 0,05. В работах Ксорго, Гутмана [67], [68] и Уилкса [99] изучается двухвыборочный критерий пустых ящиков, заключающийся в следующем. Наблюдения первой выборки образуют разбиение числовой прямой на ячейки. Далее находится число ячеек, не содержащих наблюдений второй выборки. По числу пустых ячеек решается, считать обе выборки распределенными по одному и тому же закону или нет.

Теоремы 2.1 и 3.1 получены в работе И. И. Викторовой, В. П. Чистякова [13]. Исследование статистических критериев естественно связано с изучением линейных функций от μ_r. Г. И. Ивченко [19] изучал суммы $\xi_m = \mu_0 + \mu_1 + \ldots + \mu_m$ в равновероятной схеме. Харрис и Парк [79] изучали величину $W = \sum_{r=0}^{n} w_r \mu_r(n, N)$. Получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $n, N \longrightarrow \infty, \frac{n}{N} \to \alpha > 0$. Если при некотором $\beta > \alpha$*

$$\sum_{i > N^{1/5}} \frac{w_i^2 \beta^i}{i!} = o\left(\frac{1}{N}\right),$$

то

$$m = \mathbf{M}W \sim Ne^{-\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{w_i \alpha^i}{i!},$$

$$\sigma^2 = \mathbf{D}W \sim$$

$$\sim Ne^{-2\alpha} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha^{i+j}}{i!j!} \left[w_i w_j \left(i + j - \frac{ij}{\alpha} - \alpha - 1 \right) + w_i^2 \right].$$

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1 и $\frac{\sigma^2}{N} \to d^2 > 0$, то W асимптотически нормальна с параметрами (m, σ).*

Выбирая коэффициенты w_r специальным образом, можно получить статистики критерия пустых ящиков μ_0, отношения наибольшего правдоподобия

$$\lambda = \sum_{k=0}^{N} n_k \ln n_k - \ln \frac{n}{N} = \sum_{r=0}^{n} (r \ln r) \mu_r - n \ln \frac{n}{N}$$

и

$$\chi^2 = \sum_{k=1}^{N} \frac{\left(n_k - \frac{n}{N}\right)^2}{n/N} = \frac{n}{N} \sum_{r=0}^{n} r^2 \mu_r - n.$$

Здесь n_k — число дробинок в k-й ячейке. Предельные распределения статистики χ^2 в полиномиальной схеме при $N \to \infty$ исследовали С. Х. Туманян [51], [52], Ю. И. Медведев [36]. Локальная нормальная теорема для сумм квадратов частот при $N \longrightarrow \infty$ получена В. Ф. Колчиным [32].

ГЛАВА VI

РАЗМЕЩЕНИЯ СО СЛУЧАЙНЫМ ЧИСЛОМ ЧАСТИЦ

§ 1. Моменты и общая предельная теорема

Усложним равновероятную схему размещения, заменяя число частиц n случайной величиной ν. Мы будем предполагать, что сначала по некоторому заранее заданному вероятностному закону распределения $\mathbf{P}\{\nu=n\}$ определяется реализация значения $\nu=n$, а затем при условии $\nu=n$ рассматривается равновероятная схема размещения n частиц в N ячейках. Будем обозначать в этой схеме через μ_r число ячеек, содержащих ровно r частиц.

Обозначим производящую функцию числа частиц ν через

$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbf{P}\{\nu=n\}x^n. \tag{1}$$

С помощью производных $\varphi(x)$ просто выражаются факториальные моменты $\mathbf{M}\mu_r^{[k]}$.

Теорема 1. *Если ν имеет производящую функцию* (1), *то при любых целых $r\geqslant 0$ и $k\geqslant 0$*

$$\mathbf{M}\mu_r^{[k]}=\frac{N^{[k]}}{N^{rk}(r!)^k}\varphi^{(rk)}\left(1-\frac{k}{N}\right). \tag{2}$$

Доказательство. Как мы установили в теореме 2.1.3, в равновероятной схеме размещения при любых целых $r\geqslant 0$ и $k\geqslant 0$

$$\mathbf{M}\mu_r^{[k]}(n)=\frac{N^{[k]}n^{[rk]}}{N^{rk}(r!)^k}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{n-rk}. \tag{3}$$

Так как в нашей схеме

$$\mathbf{M}\{\mu_r^{[k]} \mid \nu = n\} = \mathbf{M}\mu_r^{[k]}(n), \tag{4}$$

то из (3) и (4) получаем

$$\mathbf{M}\mu_r^{[k]} = \mathbf{M}\left[\mathbf{M}\mu_r^{[k]} \mid \nu = n\right] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\nu = n\} \frac{N^{[k]} n^{[rk]}}{N^{rk}(r!)^k}\left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-rk} = \frac{N^{[k]}}{N^{rk}(r!)^k}\varphi^{(rk)}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

Далее мы будем предполагать, что распределение вероятностей случайной величины ν тем или иным способом зависит от N. Устремляя N к ∞, мы докажем ряд предельных теорем. В этом параграфе мы докажем общую предельную теорему, относящуюся к случаю, когда распределение ν/N имеет предел.

Теорема 2. *Если при $N \longrightarrow \infty$ функция распределения случайной величины ν/N слабо сходится к функции распределения $\Psi(x)$, то распределение вероятностей случайной величины μ_r/N при $N \longrightarrow \infty$ слабо сходится к распределению вероятностей случайной величины $p_r(\xi) = \frac{\xi^r}{r!}e^{-\xi}$, где $\mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} = \Psi(x)$.*

Доказательство. Обозначим $\psi_N(s) = \varphi(e^{-s/N})$ преобразование Лапласа случайной величины ν/N. По условию теоремы

$$\psi_N(s) \longrightarrow \psi(s), \tag{5}$$

где $\psi(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, d\Psi(x)$. Теорему будем доказывать методом моментов. Из (5) следует, что при $s > 0$ и $N \longrightarrow \infty$

$$(-1)^l \mathbf{M}\left(\frac{\nu}{N}\right)^l e^{-s\nu/N} = \psi_N^{(l)}(s) \to \psi^{(l)}(s) \tag{6}$$

для любого $l > 0$. В самом деле, из условия (5) вытекает, что для любой ограниченной непрерывной функции $f(x)$

$$\int f(x)\, d\Psi_N(x) \to \int f(x)\, d\Psi(x).$$

Полагая $f(x)$ равной $x^l e^{-sx}$, получаем (6).

Докажем, что при $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\left(\frac{\mu_r}{N}\right)^k = \frac{(-1)^{kr}\psi^{(kr)}(k)}{(r!)^k}. \tag{7}$$

Так как для целых неотрицательных x

$$x^k - C_k^2 x^{k-1} \leqslant x^{[k]} \leqslant x^k, \tag{8}$$

то

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\left(\frac{\mu_r}{N}\right)^k = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{M}\mu_r^{[k]}}{N^k},$$

поэтому (ввиду (2) и (7)) нам надо доказать, что при любом k

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{rk}(r!)^k} \varphi^{(rk)}\left(1-\frac{k}{N}\right) = \frac{(-1)^{kr}\psi^{(kr)}(k)}{(r!)^k}. \tag{9}$$

Обозначим $l=kr$. Имеем

$$\frac{1}{N^l}\varphi^{(l)}\left(1-\frac{k}{N}\right) = \mathbf{M}\frac{\nu^{[l]}}{N^l}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{\nu-l}.$$

Так как $1-x<e^{-x}$ при всех $x\geqslant 0$ и $e^{-x^2-x}\leqslant 1-x$ при $0\leqslant x\leqslant 1/2$, то, учитывая (8), можно написать

$$\left[\left(\frac{\nu}{N}\right)^l - \frac{C_l^2}{N}\left(\frac{\nu}{N}\right)^{l-1}\right] e^{-\left(k+\frac{k^2}{N}\right)\frac{\nu}{N}} \leqslant \frac{\nu^{[l]}}{N^l}\left(1-\frac{k}{N}\right)^{\nu-l} \leqslant$$
$$\leqslant \left(\frac{\nu}{N}\right)^l e^{-k\frac{\nu-l}{N}},$$

откуда следует неравенство

$$\mathbf{M}\left(\frac{\nu}{N}\right)^l e^{-\left(k+\frac{k^2}{N}\right)\frac{\nu}{N}} - \frac{C_l^2}{N}\mathbf{M}\left(\frac{\nu}{N}\right)^{l-1} e^{-\left(k+\frac{k^2}{N}\right)\frac{\nu}{N}} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{N^l}\varphi^{(l)}\left(1-\frac{k}{N}\right) \leqslant \mathbf{M}\left(\frac{\nu}{N}\right)^l e^{-k\frac{\nu-l}{N}}. \tag{10}$$

Так как $\frac{k^2}{N}\to 0$, $\frac{kl}{N}\to 0$ при $N\to\infty$, то, полагая в (10) $N\to\infty$, имеем при любом $\delta>0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\left(\frac{\nu}{N}\right)^l e^{-(k+\delta)\frac{\nu}{N}} \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N^l}\varphi^{(l)}\left(1-\frac{k}{N}\right) \leqslant \lim_{N\to\infty}\mathbf{M}\left(\frac{\nu}{N}\right)^l e^{-k\frac{\nu}{N}+\delta}.$$

Из соотношений

$$\mathbf{M}\left(\frac{\nu}{N}\right)^l e^{-k\frac{\nu}{N}} = (-1)^l \psi_N^{(l)}(k)$$

и (6) получаем (7). Докажем теперь, что предельные моменты (7) соответствуют предельному распределению теоремы 2. Построим по этим моментам преобразование Лапласа

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k (-1)^{kr}}{k!\,(r!)^k} \psi^{(kr)}(k) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k s^k}{k!\,(r!)^k} \int_0^{\infty} x^{kr} e^{-kx} d\Psi(x) = \int_0^{\infty} \exp\left\{-s\frac{x^r}{r!}e^{-x}\right\} d\Psi(x).$$

Итак, полученное предельное распределение совпадает с распределением, указанным в теореме.

Доказанную теорему нетрудно распространить на многомерный случай.

Теорема 3. *Если при $N\to\infty$ функция распределения ν/N слабо сходится к $\Psi(x)$, то совместное распределение случайных величин $\frac{\mu_{r_1}}{N}, \ldots, \frac{\mu_{r_t}}{N}$ при $N\to\infty$ слабо сходится к совместному распределению случайных величин $p_{r_1}(\xi), \ldots, p_{r_t}(\xi)$, где $p_r(x) = \frac{x^r}{r!}e^{-x}$ и $\mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} = \Psi(x)$.*

Доказательство. Исходя из формулы для многомерного факториального момента (2.1.36)

$$\mathbf{M}\mu_{r_1}^{[k_1]}(n, N) \ldots \mu_{r_t}^{[k_t]}(n, N) =$$

$$= \frac{N^{[k]} n^{[(r,k)]}}{(r_1!)^{k_1} \ldots (r_t!)^{k_t} N^{(r,k)}} \left(1 - \frac{k}{N}\right)^{n-(r,k)},$$

где $k = k_1 + \ldots + k_t$ и $(r, k) = r_1k_1 + \ldots + r_tk_t$, нетрудно получить формулу для многомерных моментов, аналогичную (2):

$$\mathbf{M}\mu_{r_1}^{[k_1]} \ldots \mu_{r_t}^{[k_t]} = \frac{N^{[k]}}{N^{(r,k)} (r_1!)^{k_1} \ldots (r_t!)^{k_t}} \varphi^{((r,k))}\left(1 - \frac{k}{N}\right).$$

Так же, как в теореме 2, доказываем, что для любых целых $k_i \geqslant 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{M}\left(\frac{\mu_{r_1}}{N}\right)^{k_1} \dots \left(\frac{\mu_{r_t}}{N}\right)^{k_t} = \lim_{N\to\infty} \frac{\mathbf{M}\mu_{r_1}^{[k_1]} \dots \mu_{r_t}^{[k_t]}}{N^k} =$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N^{(r,k)}(r_1!)^{k_1} \dots (r_t!)^{k_t}} \varphi^{(r,k)}\left(1 - \frac{k}{N}\right) =$$

$$= \frac{(-1)^{(k,r)}}{(r_1!)^{k_1} \dots (r_t!)^{k_t}} \psi^{((k,r))}(k).$$

Утверждение теоремы следует из того, что

$$\sum_{k_1,\dots,k_t} \frac{(-1)^k s_1^{k_1} \dots s_t^{k_t} (-1)^{(k,r)}}{k_1! \dots k_t!} \psi^{((k,r))}(k) =$$

$$= \int_0^\infty \exp\left\{\left(-s_1 \frac{x^{r_1}}{r_1!} - \dots - s_t \frac{x^{r_t}}{r_t!}\right) e^{-x}\right\} d\Psi(x).$$

Отметим интересное следствие теоремы 3. Если при $N \to \infty$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\left\{\frac{\nu}{N} \leqslant x\right\} = \Psi_r(x) = \frac{1}{r!}\int_0^x y^r e^{-y} dy, \tag{11}$$

то $(\mu_0+\mu_1+\dots+\mu_r)/N$ при $N\to\infty$ имеет в пределе равномерное на отрезке $(0, 1)$ распределение. В самом деле, в силу теоремы 3 $(\mu_0+\mu_1+\dots+\mu_r)/N$ в пределе будет иметь то же распределение, что и случайная величина $\eta_r = \sum_{k=0}^{r} p_r(\xi)$, где $\mathbf{P}\{\xi \leqslant x\} = \Psi_r(x)$. Интегрируя правую часть (11) по частям, имеем $1 - \Psi_r(x) = \sum_{k=0}^{r} p_k(x)$, поэтому $1-\eta_r = \Psi_r(\xi)$. Отсюда следует, что случайная величина $1-\eta_r$, а следовательно, и η_r распределены равномерно в $(0, 1)$.

§ 2. Нормальная предельная теорема

В этом параграфе мы будем предполагать, что при $N\to\infty$ случайная величина ν с вероятностью, приближающейся к единице, лежит в центральной области. Ограничимся случаем, когда ν асимптотически нормальна.

Теорема 1. *Если при $N\to\infty$ случайная величина ν асимптотически нормальна с параметрами $(aN, \sigma\sqrt{N})$, $a>0$, то μ_r при $N\to\infty$ будет также асимптотически нормальна с параметрами $\left(Np_r(a), \sqrt{(\sigma_r^2(a)+\sigma^2[p_r'(a)]^2)N}\right)$, где*

$$p_r(a)=\frac{a^r}{r!}e^{-a},\quad \sigma_r(a)=p_r(a)\left[1-p_r(a)-p_r(a)\frac{(a-r)^2}{a}\right]. \tag{1}$$

Доказательство. Обозначим $\alpha=\nu/N$ и представим α в виде

$$\alpha=a+\eta_\nu\frac{\sigma}{\sqrt{N}}. \tag{2}$$

По условию теоремы случайная величина η_ν асимптотически нормальна с параметрами (0, 1). Далее, представим μ_r в виде

$$\mu_r=Np_r(\alpha)+\theta_r\sigma_r(\alpha)\sqrt{N}. \tag{3}$$

Если рассматривать условное распределение μ_r при неслучайном α, то, как мы установили в § 2.2, распределение случайной величины θ_r асимптотически нормально с параметрами (0, 1), когда $N\to\infty$ и

$$0<\alpha_0\leqslant\alpha\leqslant\alpha_1<\infty \tag{4}$$

при любых $\alpha_0>0$ и $\alpha_1<\infty$. Таким образом, при условии (4) случайная величина θ_r асимптотически не зависит от α, а так как вероятность события (4) в силу асимптотической нормальности ν стремится к 1, то случайные величины η_ν и θ_r асимптотически независимы. Подставляя (2) в (3) и разлагая $p_r(\alpha)$ и $\sigma_r(\alpha)$ в точке $\alpha=a$, получаем

$$\mu_r=N\left[p_r(a)+p_r'(a)(\alpha-a)+O((\alpha-a)^2)\right]+$$
$$+\theta_r\sqrt{N}\left[\sigma_r(a)+O(\alpha-a)\right]=$$
$$=Np_r(a)+\left[p_r'(a)\sigma\eta_\nu+\sigma_r(a)\theta_r\right]\sqrt{N}+O\left(\eta_\nu^2\right)+O(\eta_\nu\theta_r),$$

или

$$\frac{\mu_r-Np_r(a)}{\sqrt{N\left[(p_r'(a))^2\sigma^2+\sigma_r^2(a)\right]}}=$$
$$=\frac{p_r'(a)\sigma\eta_\nu+\sigma_r(a)\theta_r}{\sqrt{(p_r'(a))^2\sigma^2+\sigma_r^2(a)}}+O\left(\frac{\eta_\nu^2}{\sqrt{N}}\right)+O\left(\frac{|\eta_\nu\theta_r|}{\sqrt{N}}\right). \tag{5}$$

Случайная величина $\eta=\dfrac{p_r'(a)\,\sigma\eta_\nu+\sigma_r(a)\,\theta_r}{\sqrt{\left(p_r'(a)\right)^2\sigma^2+\sigma_r^2(a)}}$ асимптотически нормальна с параметрами (0, 1), так как η_ν и θ_r асимптотически независимы и нормальны с параметрами (0, 1). В силу той же асимптотической нормальности η_ν и θ_r остаточные члены $O\left(\eta_\nu^2/\sqrt{N}\right)$ и $O\left(\eta_\nu\theta_r/\sqrt{N}\right)$ в (5) сходятся по вероятности к нулю. Теорема доказана.

§ 3. Предельные теоремы в левой и правой областях

В § 2.3 мы доказали, что в левой r-области, т. е. при $\dfrac{n^r}{N^{r-1}r!}\to\lambda$ случайная величина $\mu_r(n,\,N)$ в пределе распределена по закону Пуассона:

$$\lim \mathbf{P}\{\mu_r(n,\,N)=k\}=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}. \tag{1}$$

К этой теореме примыкает следующая теорема для случайных ν.

Теорема 1. *Если $r\geqslant 2$ фиксировано и при $N\to\infty$ функция распределения случайной величины $\nu^r/r!N^{r-1}$ слабо сходится к $\Psi(x)$, то*

$$\lim_{N\to\infty}\mathbf{P}\{\mu_r=k\}=\int_0^\infty\frac{x^k}{k!}e^{-x}\,d\Psi(x). \tag{2}$$

Доказательство. Обозначим через $\eta(x)$ случайную величину, имеющую распределение Пуассона с параметром x. Вероятность $\mathbf{P}\{\eta(x)\leqslant k\}$ при любом k убывает с ростом x. Пользуясь этим обстоятельством и предельным соотношением (1) для $\mu_r(n,\,N)$ при неслучайном числе частиц, получаем

$$\mathbf{P}\{\eta(x_{s+1})\leqslant k\}\leqslant\varliminf_{N\to\infty}\mathbf{P}\left\{\mu_r\leqslant k\,\middle|\,x_s<\frac{\nu^r}{r!\,N^{r-1}}\leqslant x_{s+1}\right\}\leqslant$$
$$\leqslant\varlimsup_{N\to\infty}\mathbf{P}\left\{\mu_r\leqslant k\,\middle|\,x_s<\frac{\nu^r}{r!\,N^{r-1}}\leqslant x_{s+1}\right\}\leqslant\mathbf{P}\{\eta(x_s)\leqslant k\}, \tag{3}$$

если $x_s < x_{s+1}$. Умножая неравенства (3) на $\Psi(x_{s+1}) - \Psi(x_s)$ и суммируя по некоторому разбиению $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \infty$, мы получаем слева и справа интегральные суммы, сходящиеся к одному и тому же интегралу $\int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\eta(x) \leqslant k\}\, d\Psi(x)$. Отсюда следует (2).

Как мы знаем (см. § 1.5 и § 2.4), при $\frac{n^2}{2N} \to \lambda$ случайные величины $\mu_0(n, N) - N + n$ и $(n - \mu_1(n, N))/2$ имеют то же самое предельное распределение, что и $\mu_2(n, N)$. Аналогичный результат имеет место и для случайных ν.

Теорема 2. *Если* $\mathbf{P}\left\{\frac{\nu^2}{2N} \leqslant x\right\}$ *слабо сходится к* $\Psi(x)$ *при* $N \to \infty$, *то случайные величины* $\mu_0 + N + \nu$ *и* $(\nu - \mu_1)/2$ *имеют то же предельное распределение, что и* μ_2.

В правой r-области, т. е. при таких n, $N \to \infty$, что

$$\frac{n}{N} - \ln N - r \ln\ln N = a + o(1),$$

для $\mu_r(n, N)$ с неслучайным числом частиц имеет место предельная теорема:

$$\lim \mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \tag{4}$$

где $\lambda = \frac{1}{r!} e^{-a}$ (см. §§ 1.1, 2.3, 2.4).

Для случайных ν это утверждение превращается в следующую теорему:

Теорема 3. *Если* $\mathbf{P}\left\{\frac{\nu - N\ln N - rN\ln\ln N}{N} \leqslant x\right\}$ *слабо сходится к* $\Psi(x)$ *при* $N \to \infty$, *то при любом* $r \geqslant 0$ *и любом* $k \geqslant 0$

$$\lim_{N\to\infty} \mathbf{P}\{\mu_r = k\} = \int\limits_0^\infty \frac{1}{k!}\left(\frac{1}{r!} e^{-x}\right)^k \exp\left\{-\frac{e^{-x}}{r!}\right\} d\Psi(x).$$

Эта теорема доказывается с помощью равенства (4) так же, как и теорема 1.

§ 4. Дальнейшие результаты. Литература

Основные результаты этой главы содержатся в работе Г. И. Ивченко, Ю. И. Медведева и Б. А. Севастьянова [26].

В работе В. Ф. Колчина и В. П. Чистякова [33] имеется следующее многомерное обобщение схемы со случайным числом частиц. Пусть имеется N ячеек, разбитых на m групп. Группа с номером i содержит N_i ячеек, и в них размещено случайное число ν_i частиц. Если $\nu_i=n_i$, то внутри i-й группы эти n_i частиц размещаются в N_i ячейках с равными вероятностями и независимо друг от друга и от размещений частиц в других группах ячеек. Обозначим μ_{0i} число пустых ячеек в i-й группе. В [33] доказаны следующие две предельные теоремы.

Теорема 1. *Если при* $N_1, \ldots, N_m \to \infty$ *функция распределения вектора* $(\nu_1/N_1, \ldots, \nu_m/N_m)$ *слабо сходится к* $\Psi(x_1, \ldots, x_m)$, *то распределение вероятностей вектора* $(\mu_{01}/N_1, \ldots, \mu_{0m}/N_m)$ *слабо сходится к распределению вероятностей вектора* $e^{-\xi_1}, \ldots, e^{-\xi_m}$ *где*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant x_1, \ldots, \xi_m \leqslant x_m\} = \Psi(x_1, \ldots, x_m).$$

Теорема 2. *Если при* $N \to \infty$ *случайный вектор* $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ *асимптотически нормален с вектором математических ожиданий* $(a_1N, \ldots, a_mN)$, $a_i>0$, $i=1, \ldots, m$, *и ковариационной матрицей* $\|b_{ij}N\|$, *а числа ячеек* $N_1, \ldots, N_m$ *в группах таковы, что* $\frac{N_i}{N} \to \gamma_i^2 > 0$, $i=1, \ldots, m$, *то вектор* $(\mu_{01}, \ldots, \mu_{0m})$ *асимптотически нормален с вектором математических ожиданий* $\left(N_1 e^{-a_1}, \ldots, N_m e^{-a_m}\right)$ *и матрицей ковариаций*

$$\left\| N\left(\delta_{ij}\gamma_i\gamma_j\sigma(a_i)\sigma(a_j) - b_{ij}\gamma_i^2\gamma_j^2 e^{-a_i-a_j}\right)\right\|,$$

где $\delta_{ii}=1$, $\delta_{ij}=0$ *при* $i\neq j$, $\sigma^2(\alpha)=e^{-\alpha}(1-e^{-\alpha}-\alpha e^{-\alpha})$.

ГЛАВА VII

РАЗМЕЩЕНИЕ ЧАСТИЦ КОМПЛЕКТАМИ

§ 1. Постановка задачи. Моменты

В этой главе мы рассмотрим следующую схему размещения частиц. Пусть имеется N ячеек, в которые бросают независимо n' комплектов, по m частиц в каждом комплекте. Частицы каждого комплекта размещаются в ячейках по одной, причем все C_N^m возможных размещений считаются равновероятными. Положим $n=n'm$, где n — общее число частиц в n' комплектах. Обозначим $\mu'_r(n, N)$ число ячеек, в которых оказалось после описанного выше испытания ровно r частиц. Иногда вместо $\mu'_r(n, N)$ мы будем писать кратко $\mu'_r(n)$ или μ'_r. В случае, когда $m=1$, мы имеем обычное равновероятное размещение, которому посвящены главы I и II. Описанную выше схему будем называть *схемой размещения комплектами.* Далее в этой главе мы будем иногда кратко называть равновероятную схему размещения — *схемой* I, а схему размещения комплектами — *схемой* II.

Для закона распределения случайной величины $\mu'_0(n, N)$ можно вывести формулы, аналогичные (1.1.1) и (1.1.2):

$$\mathbf{P}\{\mu'_0(n, N) = k\} = C_N^k \left[\frac{C_{N-k}^m}{C_N^m}\right]^{n'} \cdot \mathbf{P}\{\mu'_0(n, N-k)=0\}, \quad (1)$$

$$\mathbf{P}\{\mu'_0(n, N) = 0\} = \left(C_N^m\right)^{-n'} \sum_{l=0}^{N} C_N^l (-1)^l \left(C_{N-l}^m\right)^{n'}. \quad (2)$$

Для доказательства (1) и (2) обозначим через A_i событие, состоящее в том, что в схеме II i-я ячейка оказалась пустой, а через $\bar{A}_i$ — дополнительное событие. Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_0'(n, N) = k\} = \sum_{1 \leqslant i < \ldots < i_k \leqslant N} \mathbf{P}\{A_{i_1} \ldots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_{N-k}}\}, \quad (3)$$

где $\{j_1, \ldots, j_{N-k}\} = \{1, \ldots, N\} \diagdown \{i_1, \ldots, i_k\}$. В сумме (3) все слагаемые равны друг другу, а их число равно C_N^k. По теореме умножения вероятностей

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} \ldots A_{i_k} \bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_{N-k}}\} =$$
$$= \mathbf{P}\{A_{i_1} \ldots A_{i_k}\} \cdot \mathbf{P}\{\bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_{N-k}} | A_{i_1} \ldots A_{i_k}\},$$

где

$$\mathbf{P}\{A_{i_1} \ldots A_{i_k}\} = \left(\frac{C_{N-k}^m}{C_N^m}\right)^{n'}$$

и

$$\mathbf{P}\{\bar{A}_{j_1} \ldots \bar{A}_{j_N} | A_{i_1} \ldots A_{i_k}\} = \mathbf{P}\{\mu_0'(n, N-k) = 0\}.$$

Отсюда получаем (1). Для доказательства (2) надо воспользоваться формулой вероятности суммы событий в

$$\mathbf{P}\{\mu_0'(n, N) > 0\} = \mathbf{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right\}.$$

Рассуждая так же, как в § 2.1, найдем точную формулу для математического ожидания μ_r'. Представим μ_r' в виде суммы $\mu_r' = \sum_{i=1}^{N} \theta_i$, где $\theta_i = 1$, если в i-й ячейке имеется ровно r частиц, и $\theta_i = 0$ в остальных случаях. Так как $\mathbf{M}\mu_r' = N\mathbf{P}\{\theta_i = 1\}$, то

$$\mathbf{M}\mu_r' = NC_{n'}^r \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{n'-r} \left(\frac{m}{N}\right)^r.$$

Из этой формулы нетрудно получить результаты, аналогичные формулам (2.1.6) и (2.1.7) теоремы 2.1.1:

Теорема 1. *При любых n', N, r и m имеет место неравенство*

$$\mathbf{M}\mu_r' \leqslant Np_r(\alpha)\, e^{rm/N}, \quad (4)$$

где $n=mn'$, $\alpha=\frac{n}{N}$, $p_r(\alpha)=\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}$. *Если* n, $N\to\infty$, $\alpha=o(N)$, *то при фиксированных* r *и* m

$$\mathbf{M}\mu_r' \sim Np_r(\alpha). \tag{5}$$

При доказательстве предельных теорем для μ_0' можно использовать формулы (1) и (2). Однако для μ_0' и вообще для μ нет тех удобных производящих функций, которыми мы пользовались в схеме I. Поэтому при исследовании асимптотических свойств случайных величин μ_r' мы применим другой метод, сравнивая между собой соответствующие распределения μ_r' и μ_r, полученные в схеме II и в некоторой близкой к ней «сопровождающей» схеме I. Поскольку распределения μ_r и μ_r' оказываются близкими друг к другу, в схеме II действуют те же предельные теоремы, что и в схеме I.

§ 2. Предельные теоремы

Пусть m частиц независимо друг от друга бросают в N ячеек. Вероятность q того, что все частицы попадут в разные ячейки, равна

$$q=\frac{N(N-1)\dots(N-m+1)}{N^m}>\left(1-\frac{m}{N}\right)^m; \tag{1}$$

вероятность противоположного события обозначим $p=1-q$.

Предположим, что $n=n'm$ частиц размещаются в N ячейках по схеме I. Будем представлять себе, что частицы размещаются по очереди. Последовательные группы по m частиц назовем *комплектами*. Таким образом, если по схеме I брошено $n=n'm$ частиц, то мы можем также представлять себе, что независимо брошено m комплектов. Комплект, в котором частицы занимают m ячеек, назовем *простым*; в противном случае комплект будем называть *особым*. Согласно (1) вероятность того, что данный комплект будет простым, равна q, а вероятность того, что комплект особый, равна p. Обозначим через ρ случайную величину, равную числу особых комплектов.

Ясно, что ρ имеет биномиальное распределение:

$$\mathbf{P}\{\rho = k\} = C_{n'}^k p^k q^{n'-k}. \qquad (2)$$

Приведенную выше конструкцию используем в доказательстве теорем этого параграфа.

Теорема 1. *Если n, $N \to \infty$, $\alpha = n/N \to 0$ и $m = o(1/\alpha)$, то равномерно по k*

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} - \mathbf{P}\{\mu_r' \leqslant k\} \to 0.$$

Доказательство. Из (1) и (2) при $\alpha \to 0$ вытекает

$$\mathbf{P}\{\rho = 0\} = q^{n'} > \\ > \left(1 - \frac{m}{N}\right)^{mn'} = \left(1 - \frac{m}{N}\right)^n \geqslant 1 - \frac{mn}{N} = 1 + o(1). \qquad (3)$$

Запишем вероятность $\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\}$ в следующем виде:

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} = \mathbf{P}\{\rho = 0\} \cdot \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k \mid \rho = 0\} + \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k,\ \rho > 0\}. \qquad (4)$$

Условие $\rho = 0$ не нарушает независимости комплектов и означает, что все комплекты просты. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k \mid \rho = 0\} = \mathbf{P}\{\mu_r^{\bullet} \leqslant k\}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) вытекает

$$|\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} - \mathbf{P}\{\mu_r' \leqslant k\}| \leqslant \mathbf{P}\{\rho > 0\},$$

откуда в силу (3) следует утверждение теоремы.

Следствие 1. Из теоремы 1 вытекает, что при $\alpha \to 0$ все предельные пуассоновские теоремы и интегральные предельные нормальные теоремы для μ_r переносятся на μ_r'.

Теорема 2. *Если n, $N \to \infty$ в центральной области и $m = o(N^{1/4})$, то случайная величина μ_r' асимптотически нормальна с параметрами $(Np_r(\alpha), \sqrt{N\sigma_{rr}(\alpha)})$, где $\alpha = n/N$,*

$$p_r(\alpha) = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha},$$

$$\sigma_{rr}(\alpha) = p_r(\alpha)\left[1 - p_r(\alpha) - p_r(\alpha)\frac{(\alpha - r)^2}{\alpha}\right].$$

Доказательство. В схеме I рассмотрим случайную величину $\mu_r(n, N)$ и проведем опять конструкцию, описанную в начале параграфа. Обозначим $A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}$ событие, состоящее в том, что комплекты с номерами $i_1, \ldots, i_l$ — особые, а остальные комплекты — простые (в частности, $A^{(0)} = \{\rho = 0\}$). Из формулы полной вероятности имеем

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} = \\ = \sum_{l=0}^{L} \sum_{1 < i_1 < \ldots i_l \leqslant N} \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k \mid A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}\} \mathbf{P}\{A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}\} + \\ + \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k, \rho > L\}. \quad (6)$$

Условие $A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}$ сохраняет независимость комплектов. Проделаем при каждом $A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}$ следующее дополнительное испытание: заменим все комплекты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_l$ независимыми простыми комплектами, получаемыми по схеме II. В результате мы получим расположение n частиц в N ячейках по схеме II, связанное с первоначальным расположением по схеме I. В полученной схеме II рассмотрим случайную величину μ'_r. Так как при условии $A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}$ переход от μ_r к μ'_r связан с изменением l комплектов, то этот переход может привести к изменению содержания не более чем $2lm$ ячеек. Тогда при условии $A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}$ имеют место неравенства

$$\mu'_r - 2lm \leqslant \mu_r \leqslant \mu'_r + 2lm,$$

откуда следует, что при $l \leqslant L$

$$\mathbf{P}\{\mu'_r \leqslant k - 2Lm \mid A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}\} \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k \mid A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}\} \leqslant \mathbf{P}\{\mu'_r \leqslant k + 2Lm \mid A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}\}. \quad (7)$$

Из (6) и (7) вытекает

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} \leqslant \sum_{l=0}^{L} \sum_{i_1 < \ldots < i_l} \mathbf{P}\{\mu'_r \leqslant k + 2Lm \mid A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}\} \times \\ \times \mathbf{P}\{A^{(l)}_{i_1 \ldots i_l}\} + \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k, \rho > L\},$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} \geqslant \sum_{l=0}^{L} \sum_{i_1<\ldots<i_l} \mathbf{P}\{\mu_r' \leqslant k-2Lm \mid A_{i_1\ldots i_l}^{(l)}\} \times \\ \times \mathbf{P}\{A_{i_1\ldots i_l}^{(l)}\} + \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k,\ \rho > L\}.$$

Отсюда получаем для любого k

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} \leqslant \mathbf{P}\{\mu_r' \leqslant k+2Lm\} + \mathbf{P}\{\rho > L\}, \tag{8}$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} \geqslant \mathbf{P}\{\mu_r' \leqslant k-2Lm\} - 2\mathbf{P}\{\rho > L\}. \tag{9}$$

Выберем теперь $L \to \infty$ так, что $\mathbf{P}\{\rho > L\} \to 0$ и $Lm = o(\sqrt{N})$. Это сделать можно, так как в неравенстве Чебышева

$$\mathbf{P}\{\rho > L\} \leqslant \frac{\mathbf{M}\rho}{L} \tag{10}$$

математическое ожидание

$$\mathbf{M}\rho = n'p < \frac{n}{m}\left(1-\left(1-\frac{m}{N}\right)^m\right) \leqslant \frac{mn}{N} = \alpha m$$

и $m = o(N^{1/4})$. Пусть теперь $n,\ N \to \infty$ так, что равномерно по x

$$\mathbf{P}\{\mu_r \leqslant Np_r + x\sqrt{N\sigma_{rr}}\} - G(x) \to 0,$$

где $G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2}\,du$. Полагая в (9) $k-2Lm = Np_r + x\sqrt{N\sigma_{rr}}$, имеем

$$\mathbf{P}\{\mu_r' \leqslant Np_r + x\sqrt{N\sigma_{rr}}\} - G(x) \leqslant \\ \leqslant \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant Np_r + x\sqrt{N\sigma_{rr}} + 2Lm\} - G(x) + 2\mathbf{P}\{\rho > L\} = \\ = \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant Np_r + x'\sqrt{N\sigma_{rr}}\} - G(x') + \\ + G(x') - G(x) + 2\mathbf{P}\{\rho > L\}, \tag{11}$$

где $x' = x + 2Lm/\sqrt{N\sigma_{rr}}$. Из условий, наложенных на L, вытекает, что $x'-x \to 0$ и $\mathbf{P}\{\rho > L\} \to 0$. Следовательно, правая часть (11) стремится к нулю. С помощью неравенства (8) оцениваем разность $\mathbf{P}\{\mu_r' \leqslant Np_r + x\sqrt{N\sigma_{rr}}\} - G(x)$ снизу и доказываем, что эта оценка также стремится к нулю.

Аналогичным образом доказывается многомерная предельная теорема.

Теорема 3. *Если n, $N \to \infty$ в центральной области $\left(\frac{n}{N} \to \alpha\right)$ и $m = o(N^{1/4})$, то при любых $0 \leqslant r_1 < r_2 < \ldots < r_s$ распределение случайного вектора*

$$\frac{\mu'_{r_1} - Np_{r_1}}{\sqrt{N}}, \ldots, \frac{\mu'_{r_s} - Np_{r_s}}{\sqrt{N}}$$

слабо сходится к многомерному нормальному распределению с ковариационной матрицей $\|\sigma_{r_i r_j}\|$,

$$\sigma_{rt} = p_r\left(\delta_{rt} - p_t - \frac{1}{\alpha} p_t (\alpha - r)(\alpha - t)\right),$$

$$p_r = \frac{\alpha^r}{r!} e^{-\alpha}.$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha \to \infty$. Докажем сначала лемму.

Лемма 1. *Если n, $N \to \infty$ так, что $\alpha = \frac{n}{N} \to \infty$, то для случайной величины $\mu' = \mu'_0(n) + \mu'_1(n) + \ldots + \mu'_r(n)$ имеем*

$$\mathbf{P}\{\mu' < KNe^{-\alpha/2}\} \to 1 \tag{12}$$

при любом $K > 0$.

Доказательство. Для любого $0 \leqslant s \leqslant r$ имеем по неравенству Чебышева

$$\mathbf{P}\{\mu'_s \geqslant KNe^{-\alpha/2}\} \leqslant \frac{\mathbf{M}\mu'_s}{KNe^{-\alpha/2}}.$$

Согласно (1.4) $\mathbf{M}\mu'_s \leqslant N\frac{\alpha^s}{s!}e^{-\alpha}e^{sm/N}$, поэтому отсюда имеем

$$\mathbf{P}\{\mu'_s \geqslant KNe^{-\alpha/2}\} \leqslant \frac{\alpha^s e^{-\alpha/2}}{Ks!} e^{sm/N} \to 0. \tag{13}$$

Утверждение (12) следует из (13) и включения

$$\{\mu' \geqslant x\} \subseteq \bigcup_{s=0}^{r}\left\{\mu'_s \geqslant \frac{x}{r+1}\right\}.$$

Теорема 4. *Если n, $N \to \infty$ и $\alpha \to \infty$, то*

$$\mathbf{P}\{\mu'_r \leqslant k\} - \mathbf{P}\{\mu_r \leqslant k\} \to 0 \tag{14}$$

равномерно по k.

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $\alpha=o(\sqrt{N})$. Начало доказательства ведется так же, как в теореме 2, включая формулу (6) и введение случайной величины μ_r'. Далее ход рассуждений иной. При условии $A_{i_1\ldots i_l}^{(l)}$ введем случайную величину $\mu_r(n-lm)$ — число ячеек, в которых содержится ровно по r частиц, не входящих в комплекты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_l$. Далее, если недостающие комплекты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_l$ случайно размещаются в ячейках независимо друг от друга по схеме II, то мы получаем случайную величину $\mu_r'(n)$, связанную с величиной $\mu_r'(n-lm)$. Если же недостающие комплекты с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_l$ размещаются независимо так, что появление всех особых комплектов равновероятно, а простые комплекты появляться не могут, то мы придем к случайной величине $\mu_r(n)$, тоже связанной с $\mu_r'(n-lm)$. Закон распределения $\mu_r(n)$ получается такой же, как в схеме I. Докажем, что при $l\leqslant L=[\alpha^2]$

$$\mathbf{P}\{\mu_r'(n)=\mu_r'(n-lm)\,|A_{i_1\ldots i_l}^{(l)}\}\to 1, \qquad (15)$$

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n)=\mu_r'(n-lm)|A_{i_1\ldots i_l}^{(l)}\}\to 1. \qquad (16)$$

В самом деле, чтобы получить из $\mu_r'(n-lm)$ величину $\mu(n)$, надо разместить еще l комплектов по схеме II. Если ни одна из частиц не попадет в ячейки, в которых уже было не более r частиц, то $\mu_r'(n-lm)=\mu_r'(n)$. Обозначим $\mu'=\mu_0'(n-lm)+\ldots+\mu_r'(n-lm)$. В силу вышесказанного

$$\mathbf{P}\{\mu_r'(n)=\mu_r'\ (n-lm)|A_{i_1\ldots i_l}^{(l)};\ \mu'\}\geqslant$$

$$\geqslant\left[\frac{(N-\mu')(N-\mu'-1)\ldots(N-\mu'-m+1)}{N(N-1)\ldots(N-m+1)}\right]^l\geqslant$$

$$\geqslant\left(1-\frac{\mu'}{N-m+1}\right)^{Lm}. \qquad (17)$$

Из леммы 1 следует, что правая часть (17) с вероятностью, стремящейся к 1, не меньше выражения

$$\left(1-\frac{KNe^{-\alpha/2}}{N-m+1}\right)^{Lm},$$

которое при $L=[\alpha^2]\to\infty$ имеет пределом 1. Таким образом, (15) доказано. При доказательстве (16) пишем аналогичное неравенство

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n)=\mu_r'(n-lm)\,|A^l_{i_1,\ldots,i_l};\ \mu'\}\geqslant$$
$$\geqslant\left[\frac{(N-\mu')(N-\mu'-1)\ldots(N-\mu'-m+2)\,C_m^2}{N^m-N(N-1)\ldots(N-m+1)}\right]^l. \qquad (18)$$

Здесь справа выписана вероятность того, что вновь бросаемые частицы не попадут в ячейки, содержащие не более r частиц (знаменатель $N^m-N(N-1)\ldots(N-m+1)$ равен числу всех особых комплектов, в числителе число $(N-\mu')(N-\mu'-1)\ldots(N-\mu'-m+2)C_m^2$ равно числу способов размещения m частиц в $m-1$ ячейках, содержащих более r частиц). Правую часть (18) оцениваем снизу выражением

$$\left[\frac{(N-\mu'-m+2)^{m-1}C_m^2}{N^{m-1}C_m^2+O(N^{m-2})}\right]^L\geqslant$$
$$\geqslant\left(1-\frac{\mu'+m-2}{N}\right)^{mL}\left(1+O\left(\frac{1}{N}\right)\right)^L. \qquad (19)$$

Второй множитель в (19) стремится к 1, так как $L=[\alpha^2]=o(N)$, откуда $L/N\to 0$. Первый множитель оценивается с помощью леммы 1 так же, как в (17). Из неравенства (10) при $L=[\alpha^2]$ имеем $\mathbf{P}\{\rho>L\}\leqslant\leqslant\mathbf{M}\rho/L=O(1/\alpha)\to 0$. Возвращаясь к (6) и используя (15) и (16), получаем (14). Случай более быстрого, чем $o(\sqrt{N})$, стремления $\alpha\to\infty$ приводит к тому, что

$$Np_r(\alpha)=N\frac{\alpha^r}{r!}e^{-\alpha}\to 0 \text{ и}$$
$$\mathbf{M}\mu_r\leqslant Np_r(\alpha)e^{r/N}\to 0,\qquad \mathbf{M}\mu_r'\leqslant Np_r(\alpha)\,e^{rm/N}\to 0.$$

По неравенству Чебышева при любом $k\geqslant 1$ имеем

$$\mathbf{P}\{\mu_r>k\}\leqslant\frac{\mathbf{M}\mu_r}{k}\leqslant\mathbf{M}\mu_r\to 0,\qquad \mathbf{P}\{\mu_r'>k\}\leqslant\mathbf{M}\mu_r'\to 0;$$

отсюда следует (14). Теорема доказана.

Следствие 2. Из теоремы 4 вытекает, что при $\alpha\to\infty$ пуассоновская и интегральная нормальная предельные теоремы для μ_r переносятся на μ_r'.

§ 3. Дальнейшие результаты. Литература

Схема размещения комплектами упоминается в книге А. А. Маркова [85]. В частности, там приведена формула (1.2). Метод изучения асимптотических свойств законов распределения μ_r' с помощью «сопровождающих» схем размещения впервые применен в работе Б. А. Севастьянова [43].

В работах Г. Полиа [90], А. Бекеши [60, 61], Г. И. Ивченко и Ю. И. Медведева [25] изучается случайная величина ν_k', равная числу брошенных комплектов в схеме II, при котором впервые будет занято не менее k ячеек. Асимптотические свойства случайных величин $m\nu_k'$ и ν_k в схеме I (см. § 1.2) аналогичны. Например, при k, $N\to\infty$, $\frac{k}{N}\to\gamma$, $0<\gamma<1$,

$$\mathbf{M}\nu_k' \sim \frac{N}{m}\ln\frac{1}{1-\gamma}, \tag{1}$$

$$\mathbf{D}\nu_k' \sim \frac{N}{m^2}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\ln\frac{1}{1-\gamma}\right) \tag{2}$$

(ср. с теоремой 1.2.1). При тех же условиях ν_k' асимптотически нормальна с параметрами $\left(\mathbf{M}\nu_k', \sqrt{\mathbf{D}\nu_k'}\right)$. При N, $k\to\infty$ и $|N-k|\leqslant C<\infty$ случайная величина $m\nu_k'$ асимптотически имеет то же распределение, что и ν_k в теореме 1.2.4. Если $\frac{k^2}{2N}\to\lambda$, то $\nu_k'+\left[-\frac{k}{m}\right]$ имеет предельное дискретное распределение $\{p_a\}$, в котором вероятности определяются равенствами

$$p_0 = e^{-\lambda}\sum_{i=0}^{m-s}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad p_a = e^{-\lambda}\sum_{i=am-s+1}^{(a+1)m-s}\frac{\lambda^i}{i!}, \qquad a\geqslant 1,$$

при $k\equiv s \pmod m$, $1\leqslant s\leqslant m$.

ГЛАВА VIII

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАЗМЕЩЕНИИ И ЦИКЛЫ СЛУЧАЙНЫХ ПОДСТАНОВОК

§ 1. Обобщенная схема размещения частиц

В схемах размещения частиц по ячейкам, изучавшихся в предыдущих главах, заполнения ячеек могли быть получены путем последовательных размещений частиц по ячейкам с простыми вероятностными связями между последовательными размещениями. Если отказаться от такой возможности, то любой набор N таких целочисленных неотрицательных случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$, что $\eta_1+\ldots+\eta_N=n$, можно рассматривать как обобщенную схему размещения n частиц по N ячейкам и интерпретировать η_i как число частиц в ячейке с номером i, $i=1, \ldots, N$.

В некоторых вероятностных задачах комбинаторики нашел применения класс обобщенных схем размещения, в котором совместное распределение $\eta_1, \ldots, \eta_N$ представимо в следующем виде:

$$\mathbf{P}\{\eta_i=k_i,\ i=1, \ldots, N\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\xi_i=k_i,\ i=1, \ldots, N \mid \xi_1+\ldots+\xi_N=n\}, \quad (1)$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_N$ — независимые одинаково распределенные неотрицательные целочисленные случайные величины. Такая обобщенная схема размещения частиц по ячейкам задается распределением случайной величины ξ_1. Если в качестве распределения ξ_1 взять закон Пуассона, то (1) оказывается полиномиальным распределением и обобщенная схема совпадает в этом случае с равновероятной схемой размещения частиц.

Обозначим $\mu_r(n, N)$ число ячеек, содержащих ровно r частиц в обобщенной схеме размещения с распределением (1). Тогда

$$\mathbf{P}\{\mu_r(n, N) = k\} = C_N^k p_r^k (1-p_r)^{N-k} \times \\ \times \frac{\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} + \ldots + \xi_{N-k}^{(r)} = n - kr\}}{\mathbf{P}\{\xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}}, \quad (2)$$

где $p_r = \mathbf{P}\{\xi_1 = r\}$, $\mathbf{P}\{\xi_1^{(r)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_1 = k \mid \xi_1 \neq r\}$ и случайные величины $\xi_1^{(r)}, \ldots, \xi_N^{(r)}$ независимы и одинаково распределены. Доказательство представления (2) совпадает с доказательством леммы 2.3.1. Таким образом, доказательство предельных теорем для $\mu_r(n, N)$ в обобщенной схеме сводится к изучению предельного поведения сумм независимых слагаемых.

В обобщенных схемах размещения частиц возможен достаточно простой подход и к изучению членов вариационного ряда $\eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(N)}$, полученного перестановкой случайных величин $\eta_1, \ldots, \eta_N$ в неубывающем порядке.

Пусть $\xi_1^{(A)}, \ldots, \xi_N^{(A)}$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, для которых

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(A)} = k\} = \mathbf{P}\{\xi_i = k \mid \xi_i \notin A\}, \quad (3)$$

где A — подмножество натуральных чисел, $\mathbf{P}\{\xi_i \notin A\} > 0$. Обозначим $\zeta_N = \xi_1 + \ldots + \xi_N$, $\zeta_N^{(A)} = \xi_1^{(A)} + \ldots + \xi_N^{(A)}$.

Следующие две леммы сводят изучение случайных величин $\mu_r(n, N)$ и членов вариационного ряда $\eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(N)}$ к изучению предельного поведения сумм независимых слагаемых.

Лемма 1. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_1}(n, N) = k_1, \ldots, \mu_{r_s}(n, N) = k_s\} = \\ = \frac{N! p_{r_1}^{k_1} \ldots p_{r_s}^{k_s} \left(1 - p_{r_1} - \ldots - p_{r_s}\right)^{n - k_1 r_1 - \ldots - k_s r_s}}{k_1! \ldots k_s! (N - k_1 - \ldots - k_s)!} \times \\ \times \frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_{N-k_1-\ldots-k_s}^{(r_1, \ldots, r_s)} = n - k_1 r_1 - \ldots - k_s r_s\right\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (4)$$

где $s-1$, $k_1, \ldots, k_s$, $r_1, \ldots, r_s$ — целые неотрицательные числа и $r_1, \ldots, r_s$ различны.

Равенство (4) является простым обобщением (2), и их доказательства проводятся аналогично.

Лемма 2. *Справедливы равенства*

$$\mathbf{P}\{\eta_{(m)} \leqslant r\} = 1 - \sum_{l=0}^{m-1} C_N^l (\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\})^l \times$$
$$\times (\mathbf{P}\{\xi_1 > r\})^{N-l} \frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\bar{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{P}\{\eta_{(N-m+1)} \leqslant r\} = \sum_{l=0}^{m-1} C_N^l (\mathbf{P}\{\xi_1 > r\})^l \times$$
$$\times (\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\})^{N-l} \frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(A_r)} + \zeta_{N-l}^{(\bar{A}_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\{\xi_N = n\}}, \quad (6)$$

где A_r — множество целых неотрицательных чисел, не превосходящих r, а $\bar{A}_r$ — его дополнение в множестве целых неотрицательных чисел.

Доказательство леммы 2 аналогично доказательству леммы 2.6.1.

В дальнейшем нам потребуется обобщенная схема размещения частиц со случайным числом ячеек. Пусть ν_n — целочисленная неотрицательная случайная величина. Размещение n частиц по ν_n ячейкам описывается совместным распределением величин $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{\nu_n}$, где η_i интерпретируется как число частиц в ячейке с номером i, $i = 1, \ldots, \nu_n$. Совместное распределение $\eta_1, \ldots, \eta_{\nu_n}$ можно задать с помощью распределения случайной величины ν_n и условных распределений $\eta_1, \ldots, \eta_N$ при условии $\nu_n = N$. Мы будем предполагать, что для каждых n, N существуют такие независимые одинаково распределенные целочисленные случайные величины $\xi_1, \ldots, \xi_N$, что

$$\mathbf{P}\{\eta_i = k_i,\ i = 1, \ldots, N \mid \nu_n = N\} =$$
$$= \mathbf{P}\{\xi_i = k_i,\ i = 1, \ldots, N \mid \xi_1 + \ldots + \xi_N = n\}. \quad (7)$$

Таким образом, обобщенная схема размещения частиц со случайным числом ячеек задается распределениями случайных величин ν_n и ξ_1.

Обозначим $\mu_r(n, \nu_n)$ число ячеек, содержащих ровно r частиц в обобщенной схеме размещения со случайным числом ячеек ν_n, задаваемой распределением (7). Расположим заполнения ячеек $\eta_1, \ldots, \eta_{\nu_n}$ в неубывающем порядке и обозначим $\eta^*_{(1)}, \ldots, \eta^*_{(\nu_n)}$ получившийся вариационный ряд. Определим случайные величины s_m, полагая $s_m = \eta^*_{(m)}$, если $\nu_n \geqslant m$, и $s_m = 0$, если $\nu_n < m$. Нетрудно видеть, что условное распределение $\mu_r(n, \nu_n)$ при условии $\nu_n = N$ совпадает с распределением $\mu_r(n, N)$ в обобщенной схеме размещения частиц, задаваемой распределением (1), и условное распределение s_m при условии $\nu_n = N$, $N \geqslant m$, совпадает с распределением $\eta_{(m)}$ в обобщенной схеме размещения частиц, задаваемой распределением (1).

§ 2. Обобщенная схема размещения частиц и случайные подстановки

В этом параграфе изучается связь между случайными подстановками и обобщенной схемой размещения частиц со случайным числом ячеек.

Рассмотрим взаимно однозначное отображение T множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Это отображение можно записать в виде таблицы

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где i_k обозначает элемент, в который переходит k при отображении T. Отображение T или таблицу (1) называют подстановкой степени n. Число подстановок степени n равно $n!$ Отображение T можно представить в виде ориентированного графа G с n вершинами, занумерованными числами $1, 2, \ldots, n$, и с n ребрами. Вершины с номерами k и l соединены ребром, направленным от k к l, тогда и только тогда, когда при отображении T элемент k переходит в l, или $i_k = l$. Из каждой вершины графа G выходит ровно одно ребро и, поскольку отображение взаимно однозначно, в каждую вершину входит также ровно одно ребро. Поэтому граф G состоит из отдельных связных компонент, каждая из которых представляет собой цикл. В этом параграфе мы будем изучать характеристики, связанные с циклами подстановок.

Рассмотрим множество подстановок степени n. С каждой подстановкой этого множества свяжем вектор

$a=(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, где α_r — число циклов длины r в рассматриваемой подстановке. Обозначим $\varkappa_n$ общее число циклов в подстановке, равное $\alpha_1+\ldots+\alpha_n$. Расположим циклы в порядке неубывания их длин и обозначим S_m длину m-го цикла в полученном ряду (если $\varkappa_n<m$, то полагаем $S_m=0$).

На множестве всех подстановок степени n зададим распределение вероятностей, приписав каждой из подстановок вероятность $1/n!$ Тогда компоненты $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ вектора a, число циклов $\varkappa_n$ и упорядоченные длины циклов S_m будут случайными величинами.

Мы будем изучать предельное поведение распределений этих случайных величин при $n\to\infty$. Найдем вначале точные выражения для совместного распределения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и для распределения числа циклов $\varkappa_n$.

Теорема 1. *Если $m_1, \ldots, m_n$ — целые неотрицательные числа, то*

$$\mathbf{P}\{\alpha_i=m_i,\ i=1, \ldots, n\}=\begin{cases}\prod\limits_{r=1}^{n}\dfrac{1}{r^{m_r}m_r!}, & \text{если } \sum\limits_{r=1}^{n} rm_r=n,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Доказательство. Поскольку каждая из подстановок имеет одну и ту же вероятность, для подсчета вероятности $\mathbf{P}\{\alpha_i=m_i,\ i=1, \ldots, n\}$ достаточно найти число $a(m_1, \ldots, m_n)$ различных подстановок, имеющих m_i циклов длины i, $i=1, \ldots, n$. Выберем одну подстановку с таким цикловым составом и будем расставлять n элементов в вершинах соответствующего ей графа G всеми возможными $n!$ способами. При этом появятся все подстановки с цикловым составом $(m_1, \ldots, m_n)$, и каждая подстановка встретится $b(m_1, \ldots, m_n)$ раз. Найдем это число. Подстановки, получающиеся в результате перестановки элементов, могут совпадать, во-первых, в силу того, что циклы, в которые входят одни и те же элементы в одном и том же циклическом порядке, не отличаются друг от друга, и, во-вторых, в силу того, что относительное расположение циклов в подстановке несущественно. Первая причина приводит к тому, что каждый цикл длины r порождает r одинаковых подстановок и, следовательно, каждая подстановка появляется

$1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}$ раз. Вторая причина приводит к тому, что m_r циклов длины r порождают $m_r!$ одинаковых подстановок и, следовательно, каждая подстановка появляется $m_1!\ m_2!\ \ldots\ m_n!$ раз. Таким образом, если целые неотрицательные $m_1, \ldots, m_n$ таковы, что $m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n$, то существует хотя бы одна подстановка с цикловым составом $(m_1, \ldots, m_n)$ и в этом случае

$$b(m_1, \ldots, m_n) = 1^{m_1}2^{m_2}\ldots n^{m_n}m_1!\ldots! m_n!,$$

$$a(m_1, \ldots, m_n) = \frac{n!}{b(m_1, \ldots, m_n)};$$

если же $m_1+2m_2+\ldots+nm_n\neq n$, то $a(m_1, \ldots, m_n)=0$. Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку по классическому определению вероятности

$$\mathbf{P}\{\alpha_i = m_i,\ i = 1, \ldots, n\} = \frac{a(m_1, \ldots, m_n)}{n!}.$$

Найдем распределение числа циклов $\varkappa_n$ в случайной подстановке.

Теорема 2. *Справедливы равенства*

$$\mathbf{P}\{\varkappa_n = N\} = \frac{1}{N!}\sum_K \frac{1}{k_1\ldots k_N}, \qquad N = 1, \ldots, n,$$

где суммирование проводится по множеству целых чисел

$$K=\{k_i\geqslant 1,\ i=1, \ldots, N,\ k_1+\ldots+k_N=n\}.$$

Доказательство. Введем производящую функцию

$$A_n(t_1, \ldots, t_n) =$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_n=0}^{\infty} \mathbf{P}\{\alpha_i = m_i,\ i = 1, \ldots, n\}\ t_1^{m_1}\ldots t_n^{m_n} =$$

$$= \sum_{M_n} \frac{1}{m_1!\ldots m_n!}\left(\frac{t_1}{1}\right)^{m_1}\left(\frac{t_2}{2}\right)^{m_2}\ldots\left(\frac{t_n}{n}\right)^{m_n},$$

где суммирование проводится по множеству целых чисел $M_n=\{m_i\geqslant 0,\ i=1, \ldots, n,\ m_1+2m_2+\ldots+nm_n=n\}$. Положим $A_0=1$. Нетрудно видеть, что $A_n(t_1, \ldots, t_n)$ является коэффициентом при u^n в разложении

$\exp\left(ut_1+\frac{u^2t_2}{2}+\ldots\right)$ по степеням u:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t_1, \ldots, t_n)\, u^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u^n t_n}{n}\right). \qquad (2)$$

Вероятность $\mathbf{P}\{\varkappa_n=N\}$ является коэффициентом при t^N в разложении $A_n(t, \ldots, t)$ по степеням t и, следовательно, коэффициентом при $u^n t^N$ в $\sum\limits_{n=0}^{\infty} A_n(t, \ldots, t)\, u^n$. С помощью (2) находим, что

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(t, \ldots, t)\, u^n = e^{t\left(u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots\right)},$$

и коэффициент при t^N равен $\frac{1}{N!}\left(u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots\right)^N$, а коэффициент при u^n в этом выражении равен $\frac{1}{N!}\sum\limits_{K}\frac{1}{k_1\ldots k_N}$. Теорема доказана.

Рассмотрим теперь обобщенную схему размещения частиц со случайным числом ячеек, задаваемую распределением (1.7), в котором

$$\mathbf{P}\{\nu_n = N\} = \mathbf{P}\{\varkappa_n = N\}, \qquad N = 1, \ldots, n, \qquad (3)$$

$$\mathbf{P}\{\xi_1 = k\} = -\frac{\theta^k}{k\ln(1-\theta)}, \quad 0<\theta<1, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (4)$$

Лемма 1. *Распределение числа циклов $\varkappa_n$ в случайной подстановке степени n можно представить в виде*

$$\mathbf{P}\{\varkappa_n = N\} = \frac{(-\ln(1-\theta))^N}{N!\,\theta^n}\,\mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N = n\},$$
$$N=1, 2, \ldots, n. \qquad (5)$$

Доказательство. Легко видеть, что для независимых одинаково распределенных случайных величин с распределением (4)

$$\mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N = n\} = \frac{\theta^n}{(-\ln(1-\theta))^N}\sum_{K}\frac{1}{k_1\ldots k_N},$$

где $K=\{k_i\geqslant 1,\ i=1, \ldots, N,\ k_1+\ldots+k_N=n\}$. Отсюда в силу теоремы 2 следует утверждение леммы.

Используя лемму 1, легко установить, что в обобщенной схеме размещения частиц, задаваемой распределениями (3) и (4),

$$\mathbf{P}\{\eta_i=k_i,\ i=1,\ldots,N\,|\,\nu_n=N\}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{\theta^n}{(-\ln(1-\theta))^N k_1\ldots k_N\mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}}, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{N} k_i=n,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{6}$$

Основную роль в дальнейшем изложении играет связь распределения вектора $a=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, описывающего цикловое строение случайной подстановки, с распределением случайных величин $\mu_1(n,\nu_n),\ \ldots,\ \mu_n(n,\nu_n)$ в обобщенной схеме размещения частиц со случайным числом ячеек, задаваемой распределениями (3) и (4).

Теорема 3. *Справедливо равенство*

$$\mathbf{P}\{\alpha_i=m_i,\ \ i=1,\ldots,\ n\}=\mathbf{P}\{\mu_i(n,\ \nu_n)=m_i,\ \ i=1,\ldots,\ n\}.$$

Доказательство. С помощью (6) легко получаем, что

$$\mathbf{P}\{\mu_i(n,N)=m_i,\ i=1,\ldots,n\}=$$
$$=\begin{cases}\dfrac{N!\theta^n\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i^{m_i}m_i!}}{(-\ln(1-\theta))^N\mathbf{P}\{\xi_1+\ldots+\xi_N=n\}}, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{n} m_i=N,\\ & \sum\limits_{i=1}^{n} im_i=n,\\ 0 & \text{в остальных случаях.}\end{cases} \tag{7}$$

По формуле полной вероятности

$$\mathbf{P}\{\mu_i(n,\nu_n)=m_i,\ i=1,\ldots,n\}=$$
$$=\sum_{N=1}^{\infty}\mathbf{P}\{\nu_n=N\}\mathbf{P}\{\mu_i(n,N)=m_i,\ i=1,\ldots,n\}=$$
$$=\mathbf{P}\{\nu_n=m\}\mathbf{P}\{\mu_i(n,m)=m_i,\ i=1,\ldots,n\},$$

где $m=m_1+\ldots+m_n$. Поэтому в силу (5), (3) и (7)

$$\mathbf{P}\{\mu_i(n, \nu_n)=m_i,\ i=1, \ldots, n\}=$$

$$=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{n}\dfrac{1}{i^{m_i}m_i!}, & \text{если}\quad \sum\limits_{i=1}^{n} im_i=n,\\ 0 & \text{в остальных случаях,}\end{cases}$$

и теорема доказана.

Поскольку определенные в § 1 случайные величины s_m можно выразить через $\mu_r(n, \nu_n)$, то в силу теоремы 3 распределения s_m совпадают с распределениями случайных величин S_m, равных длине m-го цикла в случайной подстановке степени m. Таким образом, с помощью теоремы 3 изучение $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ и связанных с ними величин S_m сводится к изучению обобщенной схемы размещения частиц со случайным числом ячеек, задаваемой распределениями (3) и (4). Эту схему мы будем изучать следующим образом. Вначале рассмотрим схему при условии, что ν_n принимает фиксированное значение N, а затем усредним результаты по распределению ν_n.

Изучение $\mu_r(n, N)$ и членов вариационного ряда $\eta_{(1)}, \ldots, \eta_{(N)}$ в обобщенной схеме размещения n частиц по N ячейкам с помощью лемм 1.1 и 1.2 сводится к задачам о суммах независимых одинаково распределенных слагаемых $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$ и $\zeta_N^{(A)}=\xi_1^{(A)}+\ldots+\xi_N^{(A)}$. Вспомогательные результаты, относящиеся к асимптотическому поведению этих сумм для случайных величин с распределением, заданным равенствами (4), приводятся в следующем параграфе.

§ 3. Некоторые свойства распределения логарифмического ряда

В этом параграфе приводятся локальные предельные теоремы для сумм $\zeta_N=\xi_1+\ldots+\xi_N$ и сумм вида $\zeta_N^{(A)}=$ $=\xi_1^{(A)}+\ldots+\xi_N^{(A)}$, составленных из независимых одинаково распределенных случайных величин, при этом ξ_1 имеет распределение логарифмического ряда с параметром θ:

$$\mathbf{P}\{\xi_1=k\}=-\frac{\theta^k}{k\ln(1-\theta)}, \qquad k=1,2,\ldots, \tag{1}$$

а распределение $\xi_1^{(A)}$ связано с (1) соотношением (1.3). Теоремы о ζ_N и $\zeta_N^{(A)}$ носят вспомогательный характер и используются в § 4 для доказательства предельных теорем о циклах случайных подстановок. Для суммы ζ_N приводится достаточно подробное доказательство предельной теоремы, доказательства теорем для сумм вида $\zeta_N^{(A)}$ отличаются несущественными деталями.

Всюду в дальнейшем параметр θ распределения (1) выбран равным $\theta=1-n^{-1}$. Такой выбор параметра связан с тем, что при $\theta=1-n^{-1}$ математическое ожидание

$$\mathbf{M}\xi_1 = -\frac{\theta}{(1-\theta)\ln(1-\theta)} = \frac{n-1}{\ln n}.$$

Из дальнейших результатов следует, что среднее значение числа циклов случайной подстановки эквивалентно $\ln n$, поэтому значение $\mathbf{M}\xi_1$ при $\theta=1-n^{-1}$ эквивалентно средней длине цикла случайной подстановки.

Получим некоторые оценки для характеристической функции распределения логарифмического ряда с параметром $\theta=1-n^{-1}$, равной

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{\ln n}\ln\left(1-e^{it}+\frac{1}{n}e^{it}\right).$$

Представим $\varphi_n(t)$ в виде

$$\varphi_n(t) = -\frac{1}{\ln n}\left[\ln\left(\frac{1}{n}-it\right)+\ln\left(1+\Psi_1(t)+\Psi_2(t)\right)\right], \qquad (2)$$

где

$$\Psi_1(t) = \frac{1+it-e^{it}}{\frac{1}{n}-it}, \qquad \Psi_2(t) = \frac{e^{it}-1}{n\left(\frac{1}{n}-it\right)}.$$

Для $\Psi_1(t)$ и $\Psi_2(t)$ справедливы оценки

$$|\Psi_1(t)| \leqslant \frac{|e^{it}-1-it|}{|t|} \leqslant \frac{|t|}{2}, \qquad (3)$$

$$|\Psi_2(t)| \leqslant \frac{|e^{it}-1|}{n|t|} \leqslant \frac{1}{n}. \qquad (4)$$

Используя явный вид $\varphi_n(t)$, представление (2) и оценки (3) и (4), нетрудно получить следующие свойства $\varphi_n(t)$.

Лемма 1. *Если $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$, то при любом фиксированном t*

$$\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right) = \frac{1}{1-it}+o(1).$$

Лемма 2. *Если* $n \to \infty$, $N = \ln n + o(\ln n)$, *то для любого* $\delta > 0$ *существуют такие положительные числа* ε *и* c, *что при* $|t/n| \leqslant \varepsilon$ *выполняется неравенство*

$$\left|\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)\right| < \frac{c}{(1+|t|)^{1-\delta}}.$$

Лемма 3. *Если* $n \to \infty$ *и* $N = \ln n + o(\ln n)$, *то при* $\pi \geqslant |t| \geqslant \varepsilon > 0$, *начиная с некоторого* n,

$$|\varphi_n(t)| < \frac{1}{3}.$$

Лемма 4. *Если* $n \to \infty$, *то существует такое* $\varepsilon > 0$, *что при* $|t/n| < \varepsilon$

$$\left|\frac{1}{n}\varphi_n'\left(\frac{t}{n}\right)\right| < \frac{c}{(1+|t|)\ln n},$$

где c — *некоторая постоянная.*

Как следует из леммы 1, при $n \to \infty$ и $N = \ln n + o(\ln n)$ распределения нормированных сумм ζ_N/n сходятся к показательному распределению. В действительности имеет место локальное сближение этих распределений.

Теорема 1. *Если* $n \to \infty$,

$$N = \ln n + o(\ln n), \quad z = k/n,$$

где k — *натуральные числа, то равномерно относительно* $z \geqslant z_0 > 0$

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} = e^{-z} + o(1).$$

Доказательство. По формуле обращения вероятность

$$\mathbf{P}\{\zeta_N = k\} = \mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\}$$

представима в виде

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} = \frac{1}{2\pi n}\int_{-\pi n}^{\pi n} e^{-itz}\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

кроме того,

$$e^{-z} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itz}}{1-it}\,dt.$$

Поэтому

$$2\pi n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_N = z\right\} - 2\pi e^{-z} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

где

$$I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-itz}\left[\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right) - \frac{1}{1-it}\right]dt,$$

$$I_2 = \int_{A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon n} e^{-itz}\,\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

$$I_3 = \int_{\varepsilon n<|t|\leqslant\pi n} e^{-itz}\,\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)dt,$$

$$I_4 = \int_{A\leqslant|t|} \frac{e^{-itz}}{1-it}\,dt,$$

постоянные A и ε будут выбраны позднее. Согласно лемме 1 интеграл I_1 стремится к нулю при любом фиксированном A. По лемме 3 имеем $|I_3| < \pi n\left(\frac{1}{3}\right)^{\ln n + o(\ln n)} \to 0$. Для оценки интегралов I_2 и I_4 проведем интегрирование по частям. Для I_4 это приводит к равенству

$$\int_A^\infty \frac{e^{-itz}}{1-it}\,dt = -\left.\frac{e^{-itz}}{iz(1-it)}\right|_A^\infty + \frac{1}{z}\int_A^\infty \frac{e^{-itz}}{(1-it)^2}\,dt.$$

Поэтому

$$|I_4| \leqslant \frac{2}{z\sqrt{1+A^2}} + \frac{2}{z}\int_A^\infty \frac{dt}{(1+t)^2},$$

и $|I_4|$ выбором A можно сделать сколь угодно малым.

Аналогично

$$\int_A^{\varepsilon n} e^{-itz}\,\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)dt =$$

$$= -\frac{e^{-itz}}{iz}\,\varphi_n^N\left(\frac{t}{n}\right)\Bigg|_A^{\varepsilon n} + \frac{N}{iz}\int_A^{\varepsilon n} e^{-itz}\varphi_n^{N-1}\left(\frac{t}{n}\right)\frac{1}{n}\,\varphi_n'\left(\frac{t}{n}\right)dt.$$

Используя оценки лемм 2 и 4, получаем, что

$$|I_2| \leqslant \frac{2}{z}\left|\varphi_n^N\left(\frac{A}{n}\right)\right| + \frac{2}{z}\left|\varphi_n^N(\varepsilon)\right| + \frac{c}{z}\int\limits_A^\infty \frac{dt}{t^{2-\delta}},$$

и выбором A величина $|I_2|$ может быть сделана сколь угодно малой, так как, согласно леммам 1 и 3,

$$\left|\varphi_n^N\left(\frac{A}{n}\right)\right| < \frac{c}{A}, \qquad \left|\varphi_n^N(\varepsilon)\right| \leqslant \frac{1}{3^N}$$

и, согласно лемме 1, в интеграле, входящем в правую часть неравенства, δ можно выбрать меньшим единицы. Теорема доказана.

Совершенно аналогично доказывается локальная предельная теорема для суммы $\zeta_N^{(r_1,\ldots,r_s)}$, где $r_1, \ldots, r_s$ — различные фиксированные натуральные числа.

Теорема 2. *Если $n \to \infty$, $N = \ln n + o(\ln n)$ и $z = k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно относительно $z \geqslant z_0 > 0$*

$$n\mathbf{P}\left\{\zeta_N^{(r_1,\ldots,r_s)} = z\right\} = e^{-z} + o(1).$$

Рассмотрим теперь входящие в лемму 1.1 суммы $\zeta_l^{(\bar{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)}$, где A_r — множество натуральных чисел, не превосходящих r, и $\bar{A}_r$ — его дополнение в множестве всех натуральных чисел, а случайная величина ξ_1 имеет распределение (1).

Обозначим через $\varphi_{(r)}(t)$ характеристическую функцию $\xi_1^{(A_r)}$, равную

$$\varphi_{(r)}(t) = \left(\varphi_n(t) - \sum_{k=1}^{r} p_k e^{itk}\right)\left(1 - \sum_{k=1}^{r} p_k\right)^{-1}.$$

Обратимся вначале к случаю, когда

$$r = \exp\{\alpha \ln n + t\sqrt{\ln n}\}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

Лемма 5. *Если $n \to \infty$, $r = \exp\{\alpha \ln n + t\sqrt{\ln n}\}$, $0 < \alpha < 1$, то при $t = o(\sqrt{\ln n})$*

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\} = \alpha + \frac{t}{\sqrt{\ln n}} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right).$$

Доказательство. Так как $\left(1-\frac{1}{n}\right)^k=1+O\left(\frac{k}{n}\right)$ при $k\leqslant r$, то

$$\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}=\sum_{k=1}^{r}p_k=\sum_{k=1}^{r}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k}{k\ln n}=\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+O\left(\frac{r}{n\ln n}\right).$$

Остается заметить, что $\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}=\ln r+O(1)$ при $r\to\infty$.

Лемма 6. *Если* $n\to\infty$, $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$, $l=(1-\alpha)\ln n+o(\ln n)$, $0<\alpha<1$, *то при любом фиксированном* t

$$\varphi_{(r)}^{l}\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{1}{1-it}+o(1).$$

Доказательство. Используя представление (2) и оценки (3) и (4), получаем

$$\varphi_n\left(\frac{t}{n}\right)=1-\frac{\ln(1-it)}{\ln n}+O\left(\frac{1+|t|}{n\ln n}\right). \tag{5}$$

Так же, как в лемме 5, находим, что

$$\sum_{k=1}^{r}p_k e^{itk/n}=\sum_{k=1}^{r}\frac{\left(1-\frac{1}{n}\right)^k e^{itk/n}}{k\ln n}=$$

$$=\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+O\left(\frac{r(1+|t|)}{n\ln n}\right)=\alpha+O\left(\frac{1+|t|}{\sqrt{\ln n}}\right). \tag{6}$$

Используя (5), оценку леммы 5 и (6), для любого фиксированного t получаем

$$\varphi_{(r)}^{l}\left(\frac{t}{n}\right)=\left(1-\frac{\ln(1-it)}{\ln n}-\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+O\left(\frac{r(1+|t|)}{n\ln n}\right)\right)^{l}\times$$

$$\times\left(1-\frac{1}{\ln n}\sum_{k=1}^{r}\frac{1}{k}+O\left(\frac{r}{n\ln n}\right)\right)^{-l}=$$

$$=\left(1-\frac{\ln(1-it)}{(1-\alpha)\ln n}+o\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right)^{(1-\alpha)\ln n+o(\ln n)}=\frac{1}{1-it}+o(1).$$

Как следует из леммы 6, распределение нормированных сумм $\zeta_l^{(A_r)}/n$ при $n\to\infty$, $l=(1-\alpha)\ln n+o(\ln n)$ и $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$ сходится к показательному распределению.

Следуя доказательству теоремы 1 и заменяя при этом в определении интегралов I_2 и I_3 области интегрирования $A\leqslant|t|\leqslant\varepsilon n$ и $\varepsilon n<|t|\leqslant\pi n$ на $A\leqslant|t|\leqslant n/r$ и $n/r<|t|\leqslant\pi n$ соответственно, нетрудно доказать локальную теорему для $\zeta_l^{(A_r)}/n$:

Теорема 3. *Если* $n\to\infty$, $l=(1-\alpha)\ln n+o(\ln n)$, $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$, $0<\alpha<1$, *и* $z=k/n$, *где* k — *натуральные числа, то равномерно относительно* $z\geqslant z_0>0$

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\zeta_l^{(A_r)}=z\right\}=e^{-z}+o(1).$$

Для $\zeta_l^{(A_r)}/n$ потребуется также более грубая оценка, справедливая для всех натуральных l.

Лемма 7. *Если* $n>l$ *и* $r=\exp\{\alpha\ln n+o(\ln n)\}$, *где* α — *фиксированное число,* $0<\alpha<1$, *то найдется такая постоянная* c, *что, начиная с некоторого* n,

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(A_r)}=n\right\}\leqslant\frac{cl^2}{n\ln n}.$$

Доказательство. Поскольку

$$\left\{\zeta_l^{(A_r)}=n\right\}=\bigcup_{i=1}^{l}\bigcup_{k\geqslant[n/l]}\left\{\xi_i^{(A_r)}=k,\ \zeta_l^{(A_r)}=n\right\},$$

то

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(A_r)}=n\right\}\leqslant l\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathbf{P}\left\{\xi_1^{(A_r)}=k,\ \zeta_l^{(A_r)}=n\right\}=$$

$$=l\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathbf{P}\left\{\xi_1^{(A_r)}=k\right\}\mathbf{P}\left\{\zeta_{l-1}^{(A_r)}=n-k\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{lp_{[n/l]}}{1-\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}}\sum_{k\geqslant[n/l]}\mathbf{P}\left\{\zeta_{l-1}^{(A_r)}=n-k\right\}\leqslant\frac{lp_{[n/l]}}{1-\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant r\}}.$$

Отсюда легко получаем утверждение леммы.

Обратимся теперь к суммам $\zeta_l^{(A_r)}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_r)}$ при $r=\gamma n$, $0<\gamma<1$. Введем функцию

$$E(z)=\int_z^\infty \frac{1}{u}e^{-u}\,du,$$

где $\operatorname{Re} z>0$ и интегрирование ведется, например, по пути, состоящему из отрезка $[z, \operatorname{Re} z]$ и луча $[\operatorname{Re} z, +\infty]$. Оценим вначале

$$S_{\gamma n}(t)=\sum_{k>\gamma n}\frac{1}{k}\left(1-\frac{1}{n}\right)^k e^{\frac{itk}{n}}.$$

Лемма 8. *Для любого фиксированного* γ, $0<\gamma<1$, *при* $n\to\infty$

$$S_{\gamma n}(t)=E(\gamma(1-it))+o(1).$$

Доказательство. Проводя тождественные преобразования, находим

$$S_{\gamma n}(t)=\sum_{k>\gamma n}\frac{1}{k}\left(\left(1-\frac{1}{n}\right)e^{it/n}\right)^k=$$

$$=\sum_{k>\gamma n}\int_0^{(1-n^{-1})e^{it/n}} x^{k-1}\,dx=\int_0^{(1-n^{-1})e^{it/n}}\frac{x^{[\gamma n]}}{1-x}\,dx.$$

После замены $y=n(1-x)$ получаем, что

$$S_{\gamma n}(t)=\int_{n-(n-1)e^{it/n}}^{n}\frac{1}{y}\left(1-\frac{y}{n}\right)^{[\gamma n]}dy.$$

Так как подынтегральная функция мажорируется интегрируемой функцией, то, переходя к пределу под знаком интеграла, находим, что

$$S_{\gamma n}(t)=\int_{1-it}^{\infty}\frac{e^{-\gamma y}}{y}\,dy+o(1)=\int_{\gamma(1-it)}^{\infty}\frac{1}{u}e^{-u}\,du+o(1).$$

В частности, для хвоста распределения логарифмического ряда получаем оценку

$$\mathbf{P}\{\xi_1>\gamma n\}=\frac{1}{\ln n}S_{\gamma n}(0)=\frac{E(\gamma)+o(1)}{\ln n}. \qquad (7)$$

Теорема 4. *Если $n\to\infty$, $N=\ln n+o(\ln n)$, l — фиксированное натуральное число, $z=k/n$, где k — натуральные числа, то равномерно относительно $z\geqslant z_0>0$*

$$n\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\left(\zeta_l^{(A\,\gamma n)}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}\gamma n)}\right)=z\right\}=$$

$$=\frac{e^{-z}}{E^l(\gamma)\,e^{-E(\gamma)}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\int\limits_{X(s+l,z,\gamma)}\frac{dx_1\ldots dx_{s+l}}{x_1\ldots x_{s+l}}+o(1),$$

где $X(s,\,z,\,\gamma)=\{x_i\geqslant\gamma,\ i=1,\,\ldots,\,s,\ x_1+\ldots+x_s\leqslant z\}$ (при $s+l=0$ интеграл следует принять равным единице).

Доказательство. Характеристическая функция одного слагаемого суммы $\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}\big/n$ равна

$$f_1(t)=\frac{\varphi_n\left(\dfrac{t}{n}\right)-\dfrac{1}{\ln n}S_{\gamma n}(t)}{1-\dfrac{1}{\ln n}S_{\gamma n}(0)}.$$

Используя оценки лемм 1 и 8, легко находим, что при $n\to\infty$

$$f_1(t)=\left(1-\frac{\ln(1-it)+E(\gamma(1-it))+o(1)}{\ln n}\right)\times$$
$$\times\left(1-\frac{E(\gamma)+o(1)}{\ln n}\right)^{-1},$$

откуда следует, что при любом фиксированном l при $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$

$$f_1^{N-l}(t)=\frac{e^{-E(\gamma(1-it))}}{(1-it)\,e^{-E(\gamma)}}+o(1).$$

Характеристическая функция одного слагаемого суммы $\zeta_l^{(A_{\gamma n})}\big/n$ равна $f_2(t)=\dfrac{S_{\gamma n}(t)}{S_{\gamma n}(0)}$, и при $n\to\infty$

$$f_2(t)=\frac{E(\gamma(1-it))}{E(\gamma)}+o(1).$$

Поэтому характеристическая функция $\varphi_{l,\gamma}(t)$ суммы $\left(\zeta_l^{(\overline{A}_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\overline{A}_{\gamma n})}\right)\Big|n$ для любого фиксированного l при

$n \to \infty$ удовлетворяет соотношению

$$\varphi_{l,\gamma}(t) = \frac{E^l(\gamma(1-it))\, e^{-E(\gamma(1-it))}}{E^l(\gamma)\, e^{-E(\gamma)}(1-it)} + o(1).$$

Поскольку $E(\gamma(1-it))$ является преобразованием Фурье функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} e^{-x} & \text{при } x \geqslant \gamma, \\ 0 & \text{при } x < \gamma, \end{cases}$$

то, разлагая $e^{-E(\gamma(1-it))}$ в ряд по степеням $E(\gamma(1-it))$, находим, что $\varphi_{l,\gamma}(t)$ сходится к характеристической функции распределения с плотностью

$$f_{l,\gamma}(z) = \frac{e^{-z}}{E^l(\gamma)\, e^{-E(\gamma)}} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!} \int\limits_{X(s+l,z,\gamma)} \frac{dx_1 \ldots dx_{s+l}}{x_1 \ldots x_{s+l}},$$

где при $s+l=0$ интеграл следует положить равным единице. Далее доказательство теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1, так как для $\varphi_{l,\gamma}(t)$ справедлива формула обращения и для характеристической функции слагаемого суммы $\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_{\gamma n})}/n$ справедливы утверждения лемм 3, 4 и 5.

§ 4. Циклы случайных подстановок

Применим результаты предыдущих параграфов к исследованию случайных величин, связанных с цикловым строением подстановок.

Теорема 1. *При* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\{\varkappa_n = N\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi \ln n}} \exp\left\{-\frac{(N-\ln n)^2}{2\ln n}\right\}(1+o(1))$$

равномерно относительно $(N-\ln n)/(\ln n)^{7/12}$ *в любом конечном интервале.*

Доказательство. По лемме 2.1 при $\theta = 1 - \frac{1}{n}$

$$\mathbf{P}\{\varkappa_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!\left(1-\frac{1}{n}\right)^n} \mathbf{P}\{\zeta_N = n\}.$$

Нетрудно видеть, что утверждение теоремы 3.1 справедливо равномерно относительно таких значений N, когда $(N-\ln n)/(\ln n)^{7/12}$ лежит в любом конечном интервале. Поэтому, применяя теорему 3.1, получаем, что равномерно относительно $(N-\ln n)/(\ln n)^{7/12}$ в любом конечном интервале

$$\mathbf{P}\{\varkappa_n = N\} = \frac{(\ln n)^N}{N!n}(1+o(1)),$$

откуда следует утверждение теоремы.

Рассмотрим совместное распределение случайных величин $\alpha_{r_1}, \alpha_{r_2}, \ldots, \alpha_{r_s}$, где $r_1, r_2, \ldots, r_s$ — различные натуральные числа.

Теорема 2. *Для любых натуральных* $k_1, \ldots, k_s$ *при* $n\to\infty$

$$\mathbf{P}\{\alpha_{r_1} = k_1, \ldots, \alpha_{r_s} = k_s\} = \\ = \frac{r_1^{-k_1}\ldots r_s^{-k_s}}{k_1!\ldots k_s!}\exp\left\{-\frac{1}{r_1} - \ldots - \frac{1}{r_s}\right\} + o(1).$$

Доказательство. Согласно теореме 2.3

$$\mathbf{P}\{\alpha_{r_1} = k_1, \ldots, \alpha_{r_s} = k_s\} = \\ = \sum_{N=1}^{n} \mathbf{P}\{\nu_n = N\}\,\mathbf{P}\{\mu_{r_1}(n, N) = k_1, \ldots, \mu_{r_s}(n, N) = k_s\}. \quad (1)$$

В силу теорем 3.1 и 3.2 при $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$

$$\frac{\mathbf{P}\{\zeta_{N-k_1-\ldots-k_s}^{(r_1,\ldots,r_s)} = n - k_1 r_1 - \ldots - k_s r_s\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} = 1 + o(1), \quad (2)$$

поэтому по лемме 1.1 при $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$

$$\mathbf{P}\{\mu_{r_1}(n, N) = k_1, \ldots, \mu_{r_s}(n, N) = k_s\} = \\ = \frac{1}{k_1!\ldots k_s!\,r_1^{k_1}\ldots r_s^{k_s}}\exp\left\{-\frac{1}{r_1} - \ldots - \frac{1}{r_s}\right\} + o(1).$$

Так как эти равенства выполняются равномерно относительно $(N-\ln n)/(\ln n)^{7/12}$ в любом конечном интервале, то, применяя теорему 3.1, из (1) получаем утверждение теоремы.

Следующее утверждение о распределении длин m-х минимальных циклов S_m является простым следствием этой теоремы и тождества

$$\mathbf{P}\{S_m \leqslant r\} = \mathbf{P}\{\alpha_1 + \ldots + \alpha_r \geqslant m\},$$

справедливого для любых натуральных m и r.

Следствие 1. *Для любого натурального* r

$$\mathbf{P}\{S_m \leqslant r\} = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{\lambda_r^k e^{-\lambda_r}}{k!} + o(1),$$

где $\lambda_r = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}$.

Из теоремы 2 и тождества

$$\mathbf{P}\{S_1 = r,\ \alpha_r = s\} = \mathbf{P}\{\alpha_1 + \ldots + \alpha_{r-1} = 0,\ \alpha_r = s\},$$

справедливого для натуральных r и s, вытекает следующее утверждение о числе циклов минимальной длины.

Следствие 2. *Для любых натуральных* r *и* s

$$\mathbf{P}\{S_1 = r, \alpha_r = s\} = \frac{1}{s!r^s} e^{-\lambda_r} + o(1),$$

где $\lambda_r = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{r}$.

Для случайных величин $S_{\varkappa_n - m+1}$, равных длине m-го максимального цикла, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *При* $n \to \infty$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n} S_{\varkappa_n - m+1} \leqslant \gamma\right\} =$$

$$= \begin{cases} 1 - \sum\limits_{m \leqslant s < 1/\gamma} \dfrac{(-1)^{s-m}}{s\,(m-1)!\,(s-m)!} \underset{\substack{x_1 + \ldots + x_s \leqslant 1 \\ \min x_i \geqslant \gamma}}{\int \cdots \int} \dfrac{dx_1 \ldots dx_s}{x_1 \ldots x_s} + \\ \qquad\qquad + o(1), \quad 0 < \gamma < \dfrac{1}{m}, \\ 1, \qquad\qquad \gamma \geqslant \dfrac{1}{m}. \end{cases}$$

Доказательство. Рассмотрим вначале распределение $\eta_{(N-m+1)}$.

Согласно лемме 1.2 при $0<\gamma<1$

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{(N-m+1)}\leqslant\gamma\right\}=\sum_{l=0}^{m-1}C_N^l\left(\mathbf{P}\{\xi_1>\gamma n\}\right)^l\times$$
$$\times\left(\mathbf{P}\{\xi_1\leqslant\gamma n\}\right)^{N-l}\frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_{\gamma n})}=n\right\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}. \quad (3)$$

При $n\to\infty$ и $N=\ln n+o(\ln n)$, согласно теореме 3.1, $n\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}=e^{-1}+o(1)$ и, согласно теореме 3.4,

$$n\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(A_{\gamma n})}+\zeta_{N-l}^{(\bar{A}_{\gamma n})}=n\right\}=$$
$$=\frac{e^{-1}}{E^l(\gamma)\,e^{-E(\gamma)}}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\int\limits_{X(s+l,1,\gamma)}\frac{dx_1\ldots dx_{s+l}}{x_1\ldots x_{s+l}}+o(1),$$

где область $X(s+l,\ 1,\ \gamma)$ — та же, что в теореме 3.4, и при $s+l=0$ интеграл следует положить равным единице; кроме того, в силу (3.7)

$$\mathbf{P}\{\xi_1>\gamma n\}=\frac{E(\gamma)+o(1)}{\ln n}$$

и, следовательно, $(1-\mathbf{P}\{\xi_1>\gamma n\})^{N-l}=e^{-E(\gamma)}+o(1)$. Подставляя эти выражения в (3), находим, что

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{(N-m+1)}\leqslant\gamma\right\}=$$
$$=\sum_{l=0}^{m-1}\frac{1}{l!}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!}\int\limits_{X(s+l,1,\gamma)}\frac{dx_1\ldots dx_{s+l}}{x_1\ldots x_{s+l}}+o(1),$$

откуда, используя тождество

$$\sum_{l=0}^{m-1}(-1)^lC_n^l=\begin{cases}(-1)^{m-1}C_{n-1}^{m-1}, & n\geqslant m,\\ 0, & n<m,\end{cases}$$

получаем

$$\mathbf{P}\left\{\frac{1}{n}\eta_{(N-m+1)}\leqslant\gamma\right\}=$$
$$=1-\sum_{m\leqslant s<1/\gamma}\frac{(-1)^{s-m}}{s\,(m-1)!\,(s-m)!}\int\limits_{X(s,1,\gamma)}\frac{dx_1\ldots dx_s}{x_1\ldots x_s}+o(1).$$

Это соотношение выполняется равномерно относительно $(N-\ln n)/(\ln n)^{7/12}$ в любом конечном интервале, поэтому, усредняя по распределению ν_n и используя при этом теорему 1, получаем утверждение теоремы.

Рассмотрим теперь распределение средних членов вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки. Так как среднее число циклов при $n\to\infty$ имеет порядок $\ln n$, то средние члены S_m имеют номера m порядка $\alpha\ln n$, $0<\alpha<1$. Для длин этих циклов справедлива

Теорема 4. *При* $n\to\infty$ *и* $m=\alpha\ln n+o(\sqrt{\ln n})$, $0<\alpha<1$,

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\ln S_m-m}{\sqrt{m}}\leqslant t\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}e^{-u^2/2}du+o(1).$$

Доказательство. Рассмотрим вероятность

$$\mathbf{P}\left\{\frac{\ln S_m-\alpha\ln n}{\sqrt{\alpha\ln n}}\leqslant t\right\}=\mathbf{P}\{S_m\leqslant r\},$$

где $r=\exp\{\alpha\ln n+t\sqrt{\alpha\ln n}\}$. Для того чтобы оценить $\mathbf{P}\{S_m\leqslant r\}$, найдем вначале асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{\eta_{(m)}\leqslant r\}$, а затем усредним полученный результат по распределению ν_n. Воспользуемся равенством (1.5) леммы 1.2. Положим $N=\ln n+s\sqrt{\ln n}$, где $|s|<(\ln n)^{1/12}$, $l=\alpha\ln n+u\sqrt{\alpha(1-\alpha)\ln n}$, и разобьем область суммирования на две части:

$$L_1=\{0\leqslant l<\alpha\ln n-2(\ln n)^{7/12}\},$$
$$L_2=\{\alpha\ln n-2(\ln n)^{7/12}\leqslant l\leqslant m-1\}.$$

Поскольку $\zeta_l^{(\overline{A}_r)}\leqslant lr$ и $|s|<(\ln n)^{1/12}$, то, по лемме 3.7,

$$\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\overline{A}_r)}+\zeta_{N-l}^{(A_r)}=n\right\}\leqslant\frac{c\ln n}{n}$$

и, согласно теореме 3.1,

$$n\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}=e^{-1}+o(1).$$

Поэтому в равенстве (1.5) леммы 1.2

$$\frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\overline{A}_r)}+\zeta_{N-l}^{(A_r)}=n\right\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N=n\}}=O(\ln n).$$

Используя нормальное приближение для хвоста биномиального распределения и учитывая, что, согласно лемме 3.5,

$$\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\} = \alpha + \frac{t\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\ln n}} + O\left(\frac{1}{\ln n}\right),$$

получаем при достаточно больших n оценку

$$\sum_{l \in L_1} C_N^l (\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\})^l (\mathbf{P}\{\xi_1 > r\})^{N-l} \frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\overline{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2c \ln n}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-2a(\ln n)^{1/12} - ab} e^{-u^2/2} du \to 0,$$

где $a = (\alpha(1-\alpha))^{-1/2}$, $b = \alpha s + t\sqrt{\alpha}$.

В области L_2 в силу теорем 3.1 и 3.3

$$\frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\overline{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} = 1 + o(1)$$

равномерно относительно $|s| < (\ln n)^{1/12}$ и таких u, что $l \in L_2$. Поэтому, воспользовавшись нормальным приближением для биномиального распределения, получаем

$$1 - \sum_{l \in L_2} C_N^l (\mathbf{P}\{\xi_1 \leqslant r\})^l (\mathbf{P}\{\xi_1 > r\})^{N-l} \frac{\mathbf{P}\left\{\zeta_l^{(\overline{A}_r)} + \zeta_{N-l}^{(A_r)} = n\right\}}{\mathbf{P}\{\zeta_N = n\}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-ab} e^{-u^2/2} du + o(1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{ab} e^{-u^2/2} du + o(1).$$

Усредняя по распределению ν_n, получаем

$$\mathbf{P}\{S_m \leqslant r\} = \sum_{N=1}^{n} \mathbf{P}\{\eta_{(m)} \leqslant r\} \mathbf{P}\{\nu_n = N\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-s^2/2} \int_{-\infty}^{ab} e^{-u^2/2} du\, ds + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-u^2/2} du + o(1).$$

Теорема доказана.

§ 5. Дальнейшие результаты. Литература

Вероятный подход к исследованию свойств класса S_n подстановок растущей степени n был впервые использован В. Л. Гончаровым [15, 16]. С помощью производящей функции (4.2) В. Л. Гончаровым получены основные результаты о предельном поведении случайных величин, связанных с цикловой структурой случайной подстановки. В статье [16] приведено доказательство интегральной теоремы о сходимости распределения числа циклов $\varkappa_n$ случайной подстановки к нормальному распределению с параметрами $(\ln n, \ln n)$; показано, что $\mathbf{M}\varkappa_n = \ln n + c + o(1)$, где c — постоянная Эйлера; для числа α_r циклов длины r доказана предельная теорема о сходимости к распределению Пуассона с параметром $1/r$. В этой же статье найдено предельное распределение максимального члена $S_{\varkappa_n}$ вариационного ряда, составленного из длин циклов.

Несмотря на то, что цикловая структура случайной подстановки была достаточно полно изучена В. Л. Гончаровым, эта тематика продолжала привлекать внимание исследователей. Красивый подход к изучению класса случайных подстановок реализован в статье Шеппа и Ллойда [96]. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — независимые случайные величины, распределенные по закону Пуассона, и $\mathbf{M}\xi_r = z^r/r!$, где z — некоторый параметр. Тогда, как показано в [96],

$$\mathbf{P}\{\alpha_r = k_r,\ r = 1, \ldots, n\} = \\ = \mathbf{P}\{\xi_r = k_r,\ r = 1, \ldots, n \mid \xi_1 + 2\xi_2 + \ldots + n\xi_n = n\}.$$

Используя эту связь случайных величин $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, описывающих цикловую структуру случайной подстановки, с независимыми случайными величинами $\xi_1, \ldots, \xi_n$, авторы изучают предельное поведение крайних членов вариационного ряда $S_1, \ldots, S_{\varkappa_n}$. Для распределений этих случайных величин, а также для их моментов любого порядка получены асимптотические выражения. В частности, для $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} \mathbf{M} S_{\varkappa_n}$ получено значение 0,6243... Идеи статьи [96] развиваются и обобщаются Балакришнаном, Санкаранарайананом и Суямбулингомом в статье [57].

Другой подход к изучению предельного поведения максимального члена вариационного ряда содержится в статье В. Е. Степанова [49]. В этой статье приведен обзор результатов о случайных отображениях конечных множеств, в том числе и о предельном поведении характеристик случайных подстановок.

Новый подход к изучению асимптотических свойств множества взаимно однозначных отображений с равномерным распределением предложен в статье А. М. Вершика и А. А. Шмидта [8]. Основное отличие этого подхода от всех предшествующих состоит в том, что удается указать пространство элементарных событий, на котором вероятностные меры, индуцируемые равномерным распределением на S_n, слабо сходятся к предельному распределению. Таким образом, предельные распределения различных характеристик случайной подстановки оказывается возможным вычислять с помощью этого предельного распределения. Опишем одно из приведенных в статье построений. Обозначим $x_i(T)$ относительную длину i-го по величине (в порядке убывания) цикла подстановки T. Отображение $\{x_1(T), \ldots, x_n(T), 0, 0, \ldots\}$ множества S_n с равномерным распределением в множество Γ всех последовательностей $\{x_i\}$ с неотрицательными невозрастающими элементами, сумма которых равна единице, порождает на Γ вероятностное распределение ν_n. Основной результат состоит в том, что на Γ существует распределение вероятностей ν, являющееся слабым пределом для ν_n. Это позволяет получить многие известные результаты о предельных распределениях характеристик случайных подстановок.

Использованный в главе VIII подход к изучению асимптотических свойств случайных подстановок изложен в статьях В. Ф. Колчина [29, 31]. С помощью этого подхода в [31] для распределения $\varkappa_n$ получена локальная теорема о сходимости к нормальному распределению и исследованы предельные распределения средних членов вариационного ряда, составленного из длин циклов случайной подстановки.

Большой интерес представляет изучение групповых свойств случайной подстановки T как элемента симметрической группы S_n. Исследования в этой области имеют менее законченный характер по сравнению с результатами, относящимися к поведению элементов множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ при случайном отображении. Наиболее характерным в этой области являются исследования порядка $O_n(T)$ случайной подстановки степени n. (Порядок подстановки T равен общему наименьшему кратному длин циклов этой подстановки.) В связи с изучением порядка Эрдеш и Туран в статье [74] рассмотрели предельное поведение числа $k(T)$ циклов различной длины в случайной подстановке. В статье [75] этими авторами показано, что случайная величина

$$\frac{\ln O_n(T) - \frac{1}{2}\ln^2 n}{\sqrt{\frac{1}{3}\ln^3 n}}$$

асимптотически нормальна с параметрами (0, 1). Другое доказательство асимптотической нормальности $\ln O_n(T)$ содержится в статье Беста [64]. Локальные теоремы о числе подстановок $T \in S_n$, имеющих простой порядок p, приведены в статьях Човлы, Герштейна и Мура [66] и Мозера и Вимана [87]. Отметим, что для максимального порядка $G(n) = \max\limits_{T \in S_n} O_n(T)$ справедливо соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln G(n)}{\sqrt{n \ln n}} = 1.$$

Представляет интерес вероятностный подход к задаче о порождении группы ее элементами. Обозначим P_n вероятность того, что группа, порожденная двумя случайными подстановками из S_n, совпадает с S_n. Диксон [71] доказал, что $P_n \to 0{,}75$ при $n \to \infty$.

Значительные трудности возникают при потытке рассмотреть класс подстановок S_n с распределением, отличным от равномерного. Отметим в этом направлении статьи В. Н. Сачкова [42] и В. Е. Тараканова и В. П. Чистякова [50], в которых изучаются линейные комбинации $\alpha_1 + 2\alpha_2 + \ldots + r\alpha_r$ при фиксированном r для некоторых подклассов S_n с равномерным распределением.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев П. Ф., О вероятности непоявления заданного числа исходов, Теория вероятн. и ее примен. **9**, № 9 (1964), 541—547.
2. Беляев П. Ф., О вероятности непоявления заданного числа s-цепочек в сложных цепях Маркова, Теория вероятн. и ее примен. **10**, № 3 (1965), 547—551.
3. Беляев П. Ф., О совместном распределении частот длинных s-цепочек в мультиномиальной схеме с равновероятными исходами. Теория вероятн. и ее примен. **14**, № 3 (1969), 540—546.
4. Бернштейн С. Н., Теория вероятностей, 4-е изд., М.—Л., 1946.
5. Болотников Ю. В., Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам величин $\mu_r(n, N)$ в классической задаче о дробинках, Теория вероятн. и ее примен. **13**, № 1 (1968), 39—50.
6. Болотников Ю. В., Сходимость к гауссовскому процессу числа пустых ячеек в классической задаче размещения частиц по ячейкам. Матем. заметки **4**, № 1 (1968), 97—103.
7. Болотников Ю. В., Предельные процессы в неравновероятной схеме размещения частиц по ячейкам, Теория вероятн. и ее примен. **13**, № 3 (1968), 534—542.
8. Вершик А. М., Шмидт А. А., Симметрические группы высокой степени, Докл. АН СССР **206**, № 2 (1972), 269—272.
9. Викторова И. И., Об асимптотическом поведении максимума в равновероятной полиномиальной схеме, Матем. заметки **5**, № 3 (1969), 305—316.
10. Викторова И. И., Критерий «пустых ящиков» и его обобщения, Канд. диссертация, 1971.
11. Викторова И. И., Севастьянов Б. А., О предельном поведении максимума в полиномиальной схеме, Матем. заметки **1**, № 3 (1967), 331—338.
12. Викторова И. И., Чистяков В. П., Асимптотическая нормальность в задаче о дробинках с произвольными вероятностями попадания в ящики, Теория вероятн. и ее примен. **10**, № 1 (1965), 162—167.
13. Викторова И. И., Чистяков В. П., Некоторые обобщения критерия пустых ящиков, Теория вероятн. и ее примен. **11**, № 2 (1966), 306—313.
14. Гихман И. И., Скороход А. В., Введение в теорию случайных процессов, «Наука», М., 1965.
15. Гончаров В. Л., О распределении циклов в перестановках, Докл. АН СССР **35**, № 9 (1942), 299—301.
16. Гончаров В. Л., Из области комбинаторики, Изв. АН СССР, сер. матем. **8**, № 1 (1944), 3—48.

17. Ермаков С. М., Метод Монте-Карло и смежные вопросы, «Наука», М., 1971.
18. Зубков А. М., Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с длинными повторениями в последовательности независимых испытаний, Теория вероятн. и ее примен. **19**, № 1 (1974), 173—181.
19. Ивченко Г. И., О предельных распределениях порядковых статистик полиномиальной схемы, Теория вероятн. и ее примен. **16**, № 1 (1971), 94—107.
20. Ивченко Г. И., Предельные теоремы в задаче о размещении, Теория вероятн. и ее примен. **16**, № 2 (1971), 292—305.
21. Ивченко Г. И., Вариационный ряд для схемы суммирования независимых величин, Теория вероятн. и ее примен. **18**, № 3 (1973), 557—570.
22. Ивченко Г. И., Об экстремальных значениях выборок, Труды Моск. ин-та электрон. машиностр. **32** (1973), 12—31.
23. Ивченко Г. И., Время ожидания и вариационный ряд частот в полиномиальной схеме, Труды Моск. ин-та электрон. машиностр. **32** (1973), 39—64.
24. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Некоторые многомерные теоремы в классической задаче о размещении, Теория вероятн. и ее примен. **10**, № 1 (1965), 156—162.
25. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Асимптотическое поведение числа комплектов частиц в классической задаче о размещении, Теория вероятн. и ее примен. **11**, № 4 (1966), 701—708.
26. Ивченко Г. И., Медведев Ю. И., Севастьянов Б. А., Размещение случайного числа частиц по ячейкам, Матем. заметки **1**, № 5 (1967), 549—554.
27. Колчин В. Ф., Скорость приближения к предельным распределениям в классической задаче о дробинках, Теория вероятн. и ее примен. **11**, № 1 (1966), 144—156.
28. Колчин В. Ф., Один случай равномерных локальных предельных теорем с переменной решеткой в классической задаче о дробинках, Теория вероятн. и ее примен. **12**, № 1 (1967), 62—72.
29. Колчин В. Ф., Один класс предельных теорем для условных распределений, Liet. mat. rinkinys, Лит. матем. сб. 8, № 1 (1968), 53—63.
30. Колчин В. Ф., О предельном поведении крайних членов вариационного ряда в полиномиальной схеме, Теория вероятн. и ее примен. **14**, № 3 (1969), 476—487.
31. Колчин В. Ф., Одна задача о размещении частиц по ячейкам и циклы случайных подстановок, Теория вероятн. и ее примен. **16**, № 1 (1971), 67—82.
32. Колчин В. Ф., О распределении одной статистики в полиномиальной схеме, Труды Моск. ин-та электрон. машиностр. **32** (1973), 73—91.
33. Колчин В. Ф., Чистяков В. П., Новые предельные распределения в задаче о размещении, Труды Моск. ин-та электрон. машиностр. **32** (1973), 65—72.
34. Колчин В. Ф., Чистяков В. П., Комбинаторные задачи теории вероятностей, ВИНИТИ, Итоги науки и техники, серия: Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика **11** (1974), 5—45.

35. Колчин В. Ф., Чистяков В. П., Предельные распределения числа непоявившихся s-цепочек в полиномиальной схеме, Теория вероятн. и ее примен. **19**, № 4 (1974), 855—864.
36. Медведев Ю. И., Некоторые теоремы об асимптотическом распределении статистики χ^2, Докл. АН СССР **192**, № 5 (1970), 987—989.
37. Михайлов В. Г., Предельные распределения случайных величин, связанных с многократными длинными повторениями в последовательности независимых испытаний, Теория вероятн. и ее примен. **19**, № 1 (1974), 182—187.
38. Михайлов В. Г., Сходимость к пуассоновскому процессу в схеме нарастающих сумм зависимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен. **19**, № 2 (1974), 422—426.
39. Михайлов В. Г., Сходимость к процессу с независимыми приращениями в схеме нарастающих сумм зависимых случайных величин, Матем. сборник **94** (**136**), № 2 (6) (1974), 283—299.
40. Попова Т. Ю., Предельные теоремы в одной модели размещения частиц двух типов, Теория вероятн. и ее примен. **13**, № 3 (1968), 542—548.
41. Прохоров Ю. В., Асимптотическое поведение биномиального распределения, Успехи матем. наук **8**, № 3 (1953), 135—142.
42. Сачков В. Н., Об экстремальных точках пространства симметричных стохастических матриц, Матем. сборник **96** (**138**), № 3 (1975), 447—457.
43. Севастьянов Б. А., Предельные теоремы в одной схеме размещения частиц по ячейкам, Теория вероятн. и ее примен. **11**, № 4 (1966), 696—700.
44. Севастьянов Б. А., Сходимость к гауссовскому и пуассоновскому процессам распределения числа пустых ящиков в классической задаче о дробинках, Теория вероятн. и ее примен. **12**, № 1 (1967), 144—154.
45. Севастьянов Б. А., Критерий «пустых ящиков» и его обобщения, Труды ин-та прикл. матем. Тбилисск. ун-та № 2, (1969), 733—738.
46. Севастьянов Б. А., Предельный закон Пуассона в схеме сумм зависимых случайных величин, Теория вероятн. и ее примен. **17**, № 4 (1972), 733—738.
47. Севастьянов Б. А., Чистяков В. П., Асимптотическая нормальность в классической задаче о дробинках, Теория вероятн. и ее примен. **9**, № 2 (1964), 223—237. Письмо в редакцию **9**, № 3 (1964), 568.
48. Соболь И. М., Численные методы Монте-Карло, «Наука», М., 1973.
49. Степанов В. Е., Предельные распределения некоторых характеристик случайных отображений, Теория вероятн. и ее примен. **14**, № 4 (1969), 639—653.
50. Тараканов В. Е., Чистяков В. П., О цикловой структуре случайных подстановок, Матем. сборник **96** (**138**), № 4 (1975), 594—600.
51. Туманян С. Х., Об асимптотическом распределении критерия χ^2, Докл. АН СССР **94**, № 6 (1954), 1011—1012.

52. Туманян С. Х., Асимптотическое распределение χ^2 при одновременном возрастании объема наблюдений и числа групп, Теория вероятн. и ее примен. 1, № 1 (1956), 131—145.
53. Уилкс С., Математическая статистика, «Наука» (перев. с англ.), М., 1967.
54. Феллер В., Введение в теорию вероятностей и ее приложения (перев. с англ.), т. 1, «Мир», М., 1964.
55. Чистяков В. П., К обоснованию вычисления мощности критерия пустых ящиков, Теория вероятн. и ее примен. 9, № 4 (1964), 718—724.
56. Чистяков В. П., Дискретные предельные распределения в задаче о дробинках с произвольными вероятностями попадания в ящики, Матем. заметки 1, № 1 (1967), 9—16.
57. Balakrishnan V., Sankaranarayanan G., Suyambulingom C., Ordered cycle lengths in a random permutation, Pacif. J. Math. 36, № 3 (1971), 603—613.
58. Barton D. E., David F. N., Combinatorial chance, London, Griffin, 1962.
59. Baum L. E., Billingsley P., Asymptotic distributions for the coupon collector's problem, Ann. Math. Stat. 36, № 6 (1965), 1835—1839.
60. Békéssy A., On classical occupancy problems. I. Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl. 8, № 1—2 (1963), 59—71.
61. Békéssy A., On classical occupancy problems. II. Sequential occupancy, Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl. 9, № 1—2 (1964), 133—141.
62. Békéssy A., A lottójátékkal kapcsolatos néhány cellabetöltési problémáról. I., Mat. lapok 15, № 4 (1964), 317—329.
63. Békéssy A., A lottójátékkal kapcsolatos néhány cellabetöltési problémáról. II., Mat. lapok 16, № 1—2 (1965), 57—66.
64. Best M. R., The distribution of some variables on a symmetric groups, Proc. Kon. ned. akad. wet. A73, № 5 (1970), 385—402.
65. Brayton R. K., On the asymptotic behavior of the number of trials necessary to complete a set with a random selection, J. Math. Anal. and Appl. 7, № 1 (1963), 31—61.
66. Chowla S., Herstein I. N., Moore K., On recursions with symmetric groups, Can. J. Math. 3 (1951), 328—334.
67. Csorgo M., Guttman I., On the consistency of the two-sample empty cell test, Can. Math. Bull. 7, № 1 (1964), 57—63.
68. Csorgo M., Guttman I., On the empty cell test, Technometrics 4, № 2 (1962), 235—247.
69. Darling D. A., Some limit theorems associated with multinomial trials, Proc. 5th Berkeley Sympos. Math. Statist. and Probabil., 1965—1966, vol. 2, Part 1, Berkeley — Los Angeles, 1967, 345—350.
70. David F. N., Two combinatorial tests whether a sample has come from a given population, Biometrika 37 (1950), 97—110.
71. Dixon D., The probability of generating the symmetric group, Math. Z. 110, № 3 (1969), 199—205.
72. Dwass M., More birthday surprises, J. Combin. Theory 7, № 3 (1969), 258—261.
73. Erdös P., Rényi A., On a classical problem of probability theory, Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl. 6, № 1—2 (1961), 215—220.

74. Erdös P., Turan P., On some problems of a statistical group-theory. I., Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und Geb. **4**, № 2 (1965). 175—186.
75. Erdös P., Turan P., On some problems of a statistical group-theory. III., Acta math. Acad. sci. hung. **18**, № 3—4 (1967), 309—320.
76. Hafner R., Verteilungskonvergenz gegen Poisson-Prozesse von Punktkomplexen im Z^m, Теория вероятн. и ее примен. **18**, № 1 (1973), 133—150.
77. Hafner R., Asymptotishe Normalität der Anzahl zufälliger Moleküle, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., Abt **2**, 181, № 4—7 (1973), 215—251.
78. Hafner R., Neuer Beweis eines klassischen Besetzungsproblems, Sitzungsber. Österr. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., Abt **2**, 181, № 8—10 (1973), 269—289.
79. Harris B., Park C. J., The distribution of linear combinations of the sample occupancy numbers, Proc. Kon. ned. akad. wet. **A74**, № 2 (1971), 121—134.
80. Harris B., Park C. J., The limiting distribution of the sample occupancy numbers from the multinomial distribution with equal cell probabilities, Ann. Inst. Statist. Math. **23**, № 1 (1971), 125—133.
81. Holst L., Asymptotic normality in an generalized occupancy problem, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. **21**, № 2 (1972), 109—120.
82. Holst L., Limit theorems for some occupancy and sequential occupancy problems, Ann. Math. Stat. **42**, № 5 (1971), 1671—1680.
83. Karlin S., Central limit theorems for certain infinite urn schemes, J. Math. and Mech. **17**, № 4 (1967), 373—401.
84. Kitabatake S., A remark on a non-parametric test, Math. Jap. **5**, № 1 (1958), 45—49.
85. Markoff A. A., Wahrscheinlichkeitsrechnung, Leipzig und Berlin, 1912.
86. Mises R., Über Anfteilungs und Besetzungs-Wahrscheinlichkeiten, Revu de la Faculté des Sciences de l'Universite d'Istandbul N. S. **4** (1939), 145—163.
87. Moser L., Wyman M., On the solutions of $x^d=1$ in symmetric groups, Can. J. Math. **7**, № 2 (1955), 159—168.
88. Newman D. J., Shepp L., The double dixie cup problem, Amer. Math. Mon., **67**, № 1 (1960), 58—61.
89. Okamoto M., On a non-parametric test, Osaka J. Math. **4** (1952), 77—85.
90. Polya G., Eine Wahrscheinlichkeitsaufgabe in der Kundenwerbung, Zeitschrift für Angewandte Math. und Mech. **10**, 1—3 (1930), 96—97.
91. Renyi A., Three new proofs and generalization of a theorem of Irving Weiss, Magy. tud. akad. Mat. kutató int. közl. **7**, № 1—2 (1962), 203—214.
92. Rényi A., Wahrscheinlichkeitsrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1962.
93. Rosen B., On the central limit theorem for sums of dependent random variables, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. **7**, № 1 (1967), 48—82.

94. Rosen B., Asymptotic normality in a coupon collector's problem, Z. Wahrscheinlichkeitstheor. und verw. Geb. **13**, № 3—4 (1969), 256—279.
95. Rosen B., On the coupon collector's waiting time, Ann. Math. Stat. **41**, № 6 (1970), 1952—1969.
96. Shepp L. A., Lloyd S. P., Ordered cycle lengths in a random permutation, Trans. Amer. Math. Soc. **121**, № 2 (1966), 340—357.
97. Steck G. P., Limit theorems for conditional distributions, Univ. Calif. Publ. Statist. **2**, № 12 (1957), 237—287.
98. Weiss I., Limiting distributions in some occupancy problems, Ann. Math. Stat. **29**, № 3 (1958), 878—884.
99. Wilks S. S., A combinatorial test for the problem of two samples from continuous distributions, Proc. 4th Berkeley Sympos. Math. Stat. and Probability, 1960, vol. 1, Berkeley — Los Angeles, 1961, 707—717.

Валентин Федорович Колчин
Борис Александрович Севастьянов
Владимир Павлович Чистяков

СЛУЧАЙНЫЕ РАЗМЕЩЕНИЯ

(Серия: «Теория вероятностей
и математическая статистика»)

М., 1976 г., 224 стр. с илл.

Редактор *А. М. Зубков*

Техн. редактор *Н. В. Кошелева*

Корректор *М. Л. Медведская*

Сдано в набор 11/IX 1975 г. Подписано к печати 17/II 1976 г. Бумага $84\times108^1/_{32}$. Физ. печ. л. 7. Условн. печ. л. 11,76. Уч.-изд. л. 11,47. Тираж 7000 экз. Т-01896. Цена книги 87 коп. Заказ № 664.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25.

ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать
47	7 и 8 сн.	Строки переставлены	
63	11 св.	$\geqslant p_r(1-p_r)$.	$\leqslant p_r(1-p_r)$
76	12 сн.	$\sum\limits_{x_r\in[-T\Delta} (x_k)\Delta$	$\sum\limits_{x_k\in[-T\Delta, T\Delta)} \varphi(x_k)\Delta$
110	9 сн.	$(a_k Nz)^{r^1}$	$(a_k Nz)^{r}l$
117	10 сн.	$\max\limits_{(i_1,\dots,i_r)\notin_r(n)}$	$\max\limits_{(i_1,\dots,i_r)\in I_r(n)}$
120	4 сн.	$\sum\limits_{\in I_1(n)}$	$\sum\limits_{i\in I_1(n)}$
125	11 сн.	$\exp\times$	$\times\exp$
128	9 св.	td.	dt.
149	5 сн.	u_t	y_t
158	3 сн.	α_2^0	α_0^2
168	16 св.	c^{0r}	$\overset{*}{c}_{0r}$
172	10 св.	e^-	e^{-x}
184	6 св.	μ	μ_r'
189	11 сн.	$\mu(n)$	$\mu_r'(n)$
208	1 сн.	$\|n$	$/n$

1*