

EIGENWERTAUFGABEN MIT TECHNISCHEN ANWENDUNGEN

von Dr. Dr. h. c. LOTHAR COLLATZ

MIT 137 ABBILDUNGEN UND 15 TAFELN
2. DURCHGESEHENE AUFLAGE

ИНВ № 33
НЕ БОЛЕЕ 1Й КНИГИ В
ОДНИ РУКИ И 2Х В ДВЕ

**БИБЛИОТЕКА
СЕЛЬСКАЯ
НОВЬ**

LEIPZIG 1963

AKADEMISCHE VERLAGSGESELLSCHAFT
GEEST & PORTIG K. — G.

Физико -
Математическая
Библиотека
Инженера

Л. КОЛЛАТЦ

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

С ТЕХНИЧЕСКИМИ ПРИЛОЖЕНИЯМИ

Перевод со второго
немецкого издания
под общей редакцией
В. В. НИКОЛЬСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

Задачи на собственные значения (с техническими приложениями). Коллатц Л.

Автор книги Лотар Коллатц является известным специалистом в области прикладной математики, относящейся главным образом к задачам технической механики. В данной книге рассматриваются задачи на собственные значения, связанные с проблемой потери устойчивости, упругими колебаниями и др. При этом акцент делается не на физическое, а на математическое содержание задач; особое внимание уделяется вычислительным методам.

Рассмотрение общей теории (функции Грина, интегральные уравнения, теорема разложения, вариационные принципы) проведено в простой форме и содержит ряд оригинальных черт.

Значительное внимание уделяется развитому автором методу последовательных приближений, численной реализации вариационных принципов, задачам для матриц. Излагаются конечно-разностные и другие методы, представляющие интерес для лиц, занимающихся задачами на собственные значения.

Таблиц 15, иллюстраций 137, библи. 72 названия.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Перечень таблиц	9
Предисловие редактора перевода	11
Из предисловий автора к первому и второму изданиям	13
Введение и краткий обзор	15

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИЗ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

§ 1. Проблема устойчивости 18

1.1. Продольный изгиб стержня, защемленного на одном конце (18). 1.2. Продольный изгиб стержня, защемленного на одном конце и шарнирно опертого на другом (20). 1.3. Продольный изгиб стержня с учетом собственного веса (21). 1.4. Сжатый стержень на упругом основании (22). 1.5. Опрокидывание консольной балки при изгибе (23). 1.6. Кручение и опрокидывание двутавровой балки (25). 1.7. Сжатие и кручение вала (26). 1.8. Выпучивание круговой арки (28).

§ 2. Задачи о колебаниях 30

2.1. Колебания свободно подвешенного каната (30). 2.2. Крутильные колебания стержней (33). 2.3. Изгибные колебания стержня (34). 2.4. Пример физической задачи с отрицательными собственными значениями (36). 2.5. Колебания стержня с учетом влияния собственного веса (38). 2.6. Критическое число оборотов вала с гироскопическим эффектом (39). 2.7. Крутильные колебания диска (41).

§ 3. Дополнения 43

3.1. Задачи на собственные значения и проблема ветвления (43). 3.2. Системы дифференциальных уравнений (44). 3.3. Другие краевые условия, соотношение между значениями на обоих концах (45). 3.4. Задачи на собственные значения для уравнений с частными производными (45). 3.5. Упражнения (47).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

§ 4. Основные сведения о задачах на собственные значения 54

4.1. Различные случаи распределения собственных значений (54). 4.2. Обозначения (59). 4.3. Самосопряженность (61). 4.4. Обобщенная ортогональность (64). 4.5. Вещественность

собственных значений (66). 4.6. Формула Дирихле (68). 4.7. Одночленный класс (69). 4.8. Пример самосопряженной задачи с не вещественными собственными значениями (70). 4.9. Определенность задачи на собственные значения (71).

§ 5. Функция Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений 75

5.1. Определение функции Грина (75). 5.2. Вывод формулы решения для краевой задачи (77). 5.3. Построение функции Грина из фундаментальной системы (78). 5.4. Симметрия функции Грина $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ для самосопряженной краевой задачи (82). 5.5. Простые примеры функции Грина (85). 5.6. Резольвента Грина для несобственных значений (86). 5.7. Условия существования собственных значений (87). 5.8. Поведение резольвенты Грина в точках собственных значений λ (90). 5.9. Кратные собственные значения (92). 5.10. Полуопределенные задачи на собственные значения (95).

§ 6. Функция Грина для уравнений с частными производными 95

6.1. Основные понятия (96). 6.2. Частный класс задач (97). 6.3. Функция Грина, предварительные замечания (100). 6.4. Решение краевой задачи при помощи функции Грина (102). 6.5. Другие типы уравнений с частными производными (104).

§ 7. Связь с интегральными уравнениями 105

7.1. Одночленный класс и интегральные уравнения (105). 7.2. Выводы из теории интегральных уравнений (108). 7.3. Применение к одночленному классу (111). 7.4. Интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с частными производными (113). 7.5. Одночленный класс и интегральное уравнение Вольтерра (116). 7.6. Пример (120). 7.7. Асимптотическое распределение собственных значений (121). 7.8. Упражнения (125).

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

КРАТКИЙ ОЧЕРК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

§ 8. Минимальные свойства собственных значений 131

8.1. Минимальное свойство наименьшего собственного значения (131). 8.2. Проведение доказательства (132). 8.3. Минимальные свойства высших собственных значений (135). 8.4. Минимаксимальный принцип Куранта (138). 8.5. Теорема сравнения (140).

§ 9. Теорема включения 142

9.1. Формулировка теоремы (142). 9.2. Пример к теореме включения (143). 9.3. Доказательство теоремы включения (145). 9.4. Сравнение с задачами, разрешимыми в замкнутом виде (146).

§ 10. Теорема о разложении 147

10.1. Предварительные замечания (147). 10.2. Коэффициенты Фурье (148). 10.3. Формула Парсеваля (149). 10.4. Вспомогательная теорема о некоторых рядах по собственным функциям (152). 10.5. Сходимость ряда Фурье (10.5) (155). 10.6. Теорема о разложении. Доказательство в случае $n=0$ (156). 10.7. Замечание (157). 10.8. Теорема о разложении. Завершение доказательства для $n \geq 0$ (159).

§ 11. Дополнения 160

11.1. Элементарное обоснование минимальных свойств в случае уравнений второго порядка (160). 11.2. Минимальные свойства собственных значений в случае уравнений с частными производными (166). 11.3. Двухпараметрические задачи на собственные значения, краевые собственные значения (170). 11.4. Упражнения (171).

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

- § 12. Постоянные Шварца 176**
 12.1. Метод последовательных приближений в общем случае (176). 12.2. Введение постоянных Шварца a_k и отношений μ_k (177). 12.3. μ_k образуют монотонную невозрастающую последовательность (180). 12.4. Нижняя граница для первого собственного значения (181). 12.5. Практическое проведение метода (185). 12.6. Примеры применения метода последовательных приближений (187).
- § 13. Графическое интегрирование 189**
 13.1. Графическое однократное интегрирование (189). 13.2. Переменное полюсное расстояние (192). 13.3. Графическое двукратное интегрирование (194). 13.4. Особый случай обыкновенного веревочного многоугольника (197). 13.5. Учет краевых условий (197). 13.6. Графическое проведение метода последовательных приближений (199). 13.7. Графическое определение μ_1 (201).
- § 14. Дополнения 204**
 14.1. Метод последовательных приближений для дифференциальных уравнений с частными производными (204). 14.2. Теорема включения Крылова—Боголюбова для одночленного класса (206). 14.3. Доказательство основной формулы (12.19) при помощи теоремы о разложении (209). 14.4. Сходимость итерационного процесса для краевых задач (212). 14.5. Метод Коха для высших собственных значений (214). 14.6. Упражнения (215).

ГЛАВА ПЯТАЯ

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

- § 15. Основы метода Ритца 221**
 15.1. Три минимальных принципа (221). 15.2. Общий метод Ритца (224). 15.3. Уравнения Галеркина (225). 15.4. Сведение к вековому уравнению (227). 15.5. Линейное представление в случае минимального принципа Камке (231). 15.6. Уравнения Граммеля (232). 15.7. Численные примеры (234). 15.8. Приближения Ритца для высших собственных значений (238).
- § 16. Дальнейшее развитие метода Ритца 240**
 16.1. Вариационные уравнения Эйлера (240). 16.2. Пример. Задача на собственные значения (244). 16.3. Обратная постановка задачи и метод Ритца (245). 16.4. Энергетический метод для задач о колебаниях (246). 16.5. Изгибные колебания (248). 16.6. Пример. Крутильные колебания (250). 16.7. Энергетический метод для дифференциальных уравнений с частными производными (253). 16.8. Проблема потери устойчивости (255). 16.9. Графическое проведение метода Ритца (255). 16.10. Графическое получение уравнений Граммеля (256). 16.11. Упражнения (260).

ГЛАВА ШЕСТАЯ

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦ

- § 17. Основные сведения о задачах на собственные значения для матриц 267**
 17.1. Обозначения (267). 17.2. Матрицы с особыми свойствами (268). 17.3. Квадратичные и эрмитовы формы (269). 17.4. Вещественность характеристических чисел (275). 17.5. Обобщенная унитарность собственных векторов (277). 17.6. Примеры промежуточных

задач на собственные значения из механики (278). 17.7. Примеры общих задач на собственные значения из механики (284). 17.8. Эрмитова самосопряженность в случае интегро-дифференциальных уравнений (291).

§ 18. Экстремальные свойства характеристических чисел 295

18.1. Определение характеристических чисел при помощи задач на максимум (296). 18.2. Приведение к главным осям (298). 18.3. Выводы и оценки (301). 18.4. Одновременное приведение к главным осям двух эрмитовых форм (304). 18.5. Пример. Геометрическая интерпретация собственных векторов двух квадратичных форм (308). 18.6. Минимаксимальный принцип Куранта (309). 18.7. Теорема включения (311). 18.8. Численное применение теоремы включения (313).

§ 19. Итерационный метод и главные векторы 315

19.1. Итерационный метод в общем случае (315). 19.2. Нижняя и верхняя границы для характеристических чисел (321). 19.3. Понижение порядка (323). 19.4. Численный пример (325). 19.5. Введение главных векторов (328). 19.6. Доказательство теоремы о разложении (330). 19.7. Сходимость итерационного метода для частных задач на собственные значения (332). 19.8. О степенях матрицы (333). 19.9. Системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (334). 19.10. Постоянные коэффициенты и главные векторы (337).

§ 20. Дополнения 339

20.1. Матричные полиномы и уравнение Кэли (339). 20.2. Функции матриц и степенные ряды матриц (342). 20.3. Приближенные решения систем линейных уравнений (345). 20.4. Оценки характеристических чисел матриц (348). 20.5. Особые методы получения характеристического уравнения (352). 20.6. Упражнения (354).

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

§ 21. Метод конечных разностей первого приближения для обыкновенных дифференциальных уравнений 359

21.1. Описание метода конечных разностей (359). 21.2. Пример для дифференциального уравнения второго порядка (361). 21.3. Пример для дифференциального уравнения четвертого порядка (363). 21.4. Прямые методы для разностных уравнений (365). 21.5. Минимальное свойство наименьшего собственного значения в методе конечных разностей (367).

§ 22. Улучшение метода конечных разностей 368

22.1. Конечные выражения (369). 22.2. Метод конечных разностей повышенной точности (371). 22.3. Пример для разностного метода повышенной точности (372). 22.4. Вспомогательные формулы для многоточечного метода (372). 22.5. Пример (375). 22.6. Метод в общем случае (376).

§ 23. Метод конечных разностей для уравнений с частными производными 378

23.1. Обыкновенный метод конечных разностей и метод первого приближения (378). 23.2. Пример. Собственные колебания эллиптической мембраны (380). 23.3. Метод конечных разностей повышенной точности (381). 23.4. Многоточечный метод (383). 23.5. Примеры. Колебания мембраны (386). 23.6. Упражнения (393).

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

РАЗЛИЧНЫЕ ДРУГИЕ МЕТОДЫ

§ 24. Метод возмущений	401
24.1. Описание метода (401). 24.2. Кратные собственные значения (405). 24.3. Связь с принципом Рэлея (407). 24.4. Пример к методу возмущений. Продольный изгиб тяжелых стержней (409).	
§ 25. Другие методы	411
25.1. Формула Данкерлея для сложных систем (411). 25.2. Формула Саусвелла (412). 25.3. Минимум среднеквадратичной ошибки (413). 25.4. Метод коллокаций (414). 25.5. Разложение в непрерывную дробь. Дифференциальное уравнение Матье (417). 25.6. Представление в виде ряда (420). 25.7. Упражнения (421).	
Рекомендации по выбору методов приближенного вычисления собственных значений	427
<i>Приложение.</i> Перечень рассмотренных примеров. Таблицы	429
Дополнительная литература	501

ПЕРЕЧЕНЬ ТАБЛИЦ

Т а б л и ц а I. Простые примеры технических задач на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений	436
Т а б л и ц а II. Простые примеры технических задач на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными . .	455
Т а б л и ц а III. Краевые выражения Дирихле	457
Т а б л и ц а IV. Простые примеры функций Грина	458
Т а б л и ц а V. Некоторые разрешимые в замкнутой форме задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка	460
Т а б л и ц а VI. Трансцендентные уравнения для собственных значений простейших задач	464
Т а б л и ц а VII. Примеры графического проведения метода последовательных приближений	472
Т а б л и ц а VIII. Примеры матриц со специальными свойствами	474
Т а б л и ц а IX. Примеры матриц с различными (грубыми) границами для характеристических чисел	480
Т а б л и ц а X. Сравнительный обзор задач на собственные значения для матриц дифференциальных и интегральных уравнений	484
Т а б л и ц а XI. Выражения конечноразностного метода для производных	493
Т а б л и ц а XII. Выражения конечноразностного метода для операторов Δ и $\Delta\Delta$	495
Т а б л и ц а XIII. Результаты конечноразностного метода для ромбической мембраны из п. 23.5	496
Т а б л и ц а XIV. Результаты конечноразностного метода для треугольной мембраны из п. 23.5	498
Т а б л и ц а XV. Спектры сеточных областей (до шести внутренних точек включительно)	499

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Лотар Коллатц широко известен как специалист в области прикладной математики. Еще в 1953 г. в русском переводе появилась его книга «Численные методы решения дифференциальных уравнений».

Теперь предлагается перевод книги Л. Коллатца, посвященной проблеме собственных значений. Он выполнен со второго издания этой книги, вышедшего в 1963 г. в Лейпциге.

Лейтмотивом книги является мысль автора о важности проблемы собственных значений в физике и технике, это определяет и ее математическое содержание. Располагая огромным опытом, Л. Коллатц почти не прибегает к компиляции, что делает его книгу в высокой степени оригинальным произведением, но ограничивает область рассматриваемых приложений почти исключительно задачами механики. Книга и начинается обзором некоторых задач технической механики, приводящих к проблеме собственных значений (устойчивость и колебания). Этот материал иллюстрирует математические особенности задач на «технически осязаемых» примерах. Он интересен и поучителен для лиц, занимающихся задачами на собственные значения не только механического, но и, например, электродинамического происхождения. Причины лежат здесь как в принципиальной общности, так и в историческом происхождении различных задач.

Вводные математические сведения относятся в основном к теории линейных дифференциальных операторов в элементарном изложении, хотя функционально-аналитическое понятие оператора прямо и не используется: автор говорит о «дифференциальном выражении» и крайних условиях задачи. Точно так же прямо не используется понятие функционала, несмотря на то, что экстремальные свойства функционалов играют в изложении значительную роль. Вводимая система понятий вообще несколько отличается от общепринятой, однако при переводе она не подверглась изменениям, поскольку это потребовало бы недопустимых отступлений от оригинала в ущерб манере, а возможно, и замыслу автора. Но иногда во избежание недоразумений делались примечания.

Основное содержание книги посвящено вычислительным методам. Излагаются вариационные принципы и связанные с ними оценки

собственных значений, а также метод Ритца, конечноразностные методы. Специально рассмотрены задачи на собственные значения для матриц. При этом автор отдает предпочтение тем направлениям, в разработку которых им самим внесен существенный вклад.

По своему характеру книга близка к запросам инженеров, занимающихся вычислениями и осваивающих вычислительную математику, а также аспирантов и научных работников в области техники. Но надо отметить, что и лица, хорошо знакомые с распространенными руководствами по вопросам вычислительной математики, смогут извлечь для себя пользу из книги Л. Коллатца, поскольку многие из сообщаемых автором сведений относятся к малоизвестным. Это касается, например, вопроса о существовании собственных значений, применения минимаксимального принципа и двусторонних оценок собственных значений на основе итерационного процесса. Не все в книге равноценно. Подробно рассматриваемые графоаналитические приемы, по-видимому, уже не имеют прежнего значения. В то же время нигде прямо не говорится о применении ЭЦВМ, хотя, разумеется, книга нужна в первую очередь именно тем, кто пользуется современными вычислительными средствами.

Работа по переводу была распределена следующим образом: предисловие, введение и гл. I — III — Д. И. Корниенко, гл. IV, VII, VIII и приложение (таблицы) — В. Г. Феоктистов, гл. V, VI — В. П. Орлов.

Примечания переводчиков и редактора даны в виде подстрочных сносок, отмеченных звездочками (сноски автора снабжены номерами). Оригинальная библиография сохранена; при наличии русского перевода последний указывался в квадратных скобках. Если русский перевод отсутствовал, то по возможности указывался отечественный эквивалент (также в квадратных скобках, снабженный вводными словами: «см., например»). Кроме того, библиография дополнена отдельным перечнем в конце книги. Были исправлены замеченные опечатки.

В. В. Никольский

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЙ АВТОРА К ПЕРВОМУ И ВТОРОМУ ИЗДАНИЯМ

Предлагаемая книга может служить лишь введением в обширную область задач на собственные значения и их численного решения. При этом не было стремления к полноте, так как объем литературы как по математической теории, так и по прикладным вопросам в последние десятилетия сильно возрос. В частности, практические приложения ограничиваются главным образом областью механики; некоторые интересные классы задач, например задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными, для интегральных уравнений, при бесконечной основной области и т. д., могли быть затронуты либо только в виде отдельных примеров, либо в кратких вводных параграфах.

Наряду с задачами на собственные значения для дифференциальных уравнений в особой главе рассматриваются также подобные задачи для матриц; глава эта, однако, изложена более сжато, чем другие и должна способствовать выявлению аналогий в методах и результатах задач на собственные значения для матриц и дифференциальных уравнений; это, возможно, наиболее отчетливо сказывается в теории, основанной на экстремальных свойствах. Одновременно мной руководила идея путем введения многочисленных примеров из механики побудить читателя к более интенсивному использованию матричных методов.

Книга возникла на основе лекций, прочитанных мной в летнем семестре 1942 г. для дипломированных инженеров и интересующихся студентов; эти лекции были изданы под названием «Задачи на собственные значения и их численное решение».

После того как предыдущее издание быстро разошлось, увеличилось число запросов на книгу. Между тем был достигнут прогресс во многих направлениях, прежде всего в теоретическом отношении, в то время как основы численного решения регулярных задач на собственные значения не изменились столь значительно. В ближайшее время вследствие сильной загруженности я не смог бы, пожалуй, в теоретической части отдать должное большему изяществу современной математической теории, которого можно было бы достигнуть

главным образом путем большего привлечения методов функционального анализа. Поэтому во втором издании сохранен (вплоть до п. 10.7) текст предыдущего издания; это позволяет использовать книгу в качестве инструмента всем тем, кто имеет дело с вычислением собственных значений в механике и в других областях физики и техники. Однако для облегчения любителям математической теории ознакомления с новейшим развитием предмета составлен библиографический перечень некоторых новых работ, естественно, не претендующий на полноту и предназначенный лишь служить указанием для дальнейшего изучения; во многих из приведенных работ можно найти дальнейшие ссылки.

Ганновер, июнь 1949

Гамбург, апрель 1962

Лотар Коллатц

ВВЕДЕНИЕ И КРАТКИЙ ОБЗОР

Одной из наиболее ранних, досконально исследованных задач на собственные значения является рассмотренная Леонардом Эйлером в 1744 г. проблема определения критической нагрузки (так называемая «эйлерова сила при продольном изгибе») для гибкого стержня, работающего на сжатие и подверженного опасности потери устойчивости. В XIX веке при построении классической математической физики возникли многочисленные задачи на собственные значения для колебаний. За последние десятилетия в самых различных отраслях физики и техники появились задачи на собственные значения в таком изобилии, что в этой книге невозможно предусмотреть все применения. В главе первой поэтому выделяется узкая область — механика; уже здесь возникают разнообразные задачи на собственные значения, что дает возможность хорошо проследить их характерные свойства. В частности, оказывается, что если несколько десятилетий назад ограничивались главным образом так называемыми «частными задачами на собственные значения» для дифференциальных уравнений в форме

$$M[z] = \lambda p \cdot z,$$

то ныне необходимо рассматривать «общие задачи на собственные значения»

$$M[z] = \lambda N[z].$$

Здесь z — неизвестная собственная функция, λ — собственное значение, p — заданная функция, независимая от координат, M и N — заданные линейные дифференциальные выражения*). К ним добавляются еще некоторые краевые условия. Особую роль играют задачи на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений; они исследованы значительно полнее, чем для уравнений с частными производными. Отказываясь от систематического обсуждения задач для уравнений с частными производными, будем говорить о них лишь в той мере, как это необходимо для их численного решения.

*) Автор не пользуется понятием «дифференциальный оператор» и не вводит в определение M и N краевые условия.

Существуют различные методы развития теории задач на собственные значения; три важнейшие из них используют:

- 1) дифференциальные уравнения,
- 2) интегральные уравнения,
- 3) вариационное исчисление.

Каждый из этих методов имеет свои особые преимущества. Классическая теория интегральных уравнений Фредгольма, Гильберта, Е. Шмидта и др. предлагает очень изящный подход к теории собственных значений. При достаточной компактности она дает много фактического материала (например, теорема о разложении произвольной функции) и с одинаковым успехом приводит к цели как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, так и в случае уравнений с частными производными. Трудности при этом переносятся на предварительную стадию, а именно на составление уравнений. В теории предполагается существование функции Грина, а следовательно, и ядра интегрального уравнения, но на вопрос о существовании решения эта теория в общем виде ответа не дает. В рамках теории интегральных уравнений решаются задачи одночленного класса (§ 7); общие задачи на собственные значения приводят к интегро-дифференциальным уравнениям, которые математикой освоены недостаточно.

Вариационное исчисление использует минимальные свойства собственных значений. В этом случае дифференциальные уравнения и краевые условия выступают в качестве необходимых условий Эйлера для минимума. Эти минимальные свойства дают для численного решения задач на собственные значения весьма плодотворную основу, понятую в ее полном значении Ритцем. Зато в классическом вариационном исчислении остаются открытыми вопросы о существовании минимума, о виде экстремума в случае высших собственных значений и т. д.

Метод дифференциальных уравнений, согласно теории Камке, является наиболее эффективным для обыкновенных дифференциальных уравнений. В этой книге он описан более подробно, чем другие методы. В случае самосопряженной (п. 4.3) и полностью определенной (п. 4.9) общей задачи на собственные значения на этом пути можно непосредственно обосновать минимальные свойства собственных значений; метод доказательства при этом для некоторых читателей, возможно, непривычен, но он прост. Можно было бы также дать ответ на вопросы о существовании минимума отношения Рэля, о существовании бесконечного множества собственных значений и о минимальных свойствах высших собственных значений.

К минимальным свойствам естественно примыкает метод последовательных приближений (глава четвертая). Здесь приводится фундаментальная формула (12.19), применение которой, правда, связано с некоторыми дополнительными предпосылками (см. теорему в п. 12.4). Однако если эти предпосылки выполнены, что во многих прикладных случаях имеет место, то из формулы (12.19) ценой относительно не-

сложных вычислений получают достаточно точные для прикладных целей верхнюю и нижнюю границы первого собственного значения.

Глава шестая должна выявить аналогию в методах и результатах задач на собственные значения для дифференциальных и интегральных уравнений, с одной стороны, и для матриц, — с другой. В главах седьмой и восьмой приводятся некоторые методы приближенного нахождения собственных значений, которые применимы довольно универсально (при слабых предпосылках), но относительно которых нельзя с уверенностью сказать (в большинстве же случаев вообще неизвестно), являются ли получаемые приближенные значения слишком большими или слишком малыми. Эти методы, как, например, разностный, применяются в случаях, когда при малой вычислительной работе хотят получить представление о порядке величины собственного значения, либо когда описанные в предыдущих главах методы неприменимы из-за невыполнения предпосылок. Техника применения различных методов будет поясняться по мере надобности на примерах (последние приводятся в конце книги). Численные примеры имеются также в моем сообщении (*Z. angew. Math. Mech.* **19** (1939), 224). Рекомендации по применению разных методов в конкретных случаях будут даны в обзоре (тоже в конце книги).

ПРИМЕРЫ ЗАДАЧ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ИЗ ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Рассмотрим прежде всего некоторые примеры из техники, приводящие к проблеме собственных значений. При этом оказывается, что даже в случае совсем простых механических ситуаций возникают сложные математические вопросы. Механическая сущность будет затрагиваться, по мере надобности, лишь кратко, подробное изложение можно найти в учебниках по технической механике.

§ 1. Проблема устойчивости

1.1. Продольный изгиб стержня, защемленного на одном конце.

Рассмотрим в качестве простейшей задачи на собственные значения защемленный на одном конце гибкий стержень длины l , на другой — свободный — конец которого в центре тяжести концевой площади действует сжимающая сила P , направленная вдоль оси стержня. Поперечные сечения стержня не обязательно одинаковы, но главные оси инерции всех сечений должны лежать в двух фиксированных направлениях. Для каждого значения P возможен такой случай положения равновесия, когда ось стержня остается прямолинейной. Известно, однако, что имеется критическое значение P , выше которого прямолинейное положение нестабильно, равновесие является неустойчивым; при устойчивом же положении равновесия стержень имеет изогнутую форму. Нас будет интересовать начало потери устойчивости при продольном изгибе, т. е. мы рассмотрим положение равновесия стержня, незначительно отличающееся от прямолинейной формы. Для этого положения (см. рис. 1.1, где дана также ориентация координатных осей x и y ; начало координат расположено в точке приложения силы P) уравнение упругой линии при малых отклонениях $y(x)$ имеет вид

$$M = Py = -EJy'' = -\alpha y''. \quad (1.1)$$

Здесь применены обычные обозначения: M — изгибающий момент, E — модуль упругости, J — осевой момент инерции сечения, $\alpha = EJ$ — жесткость на изгиб; штрихи означают производные по x .

Итак, в качестве дифференциального уравнения задачи имеем

$$y'' = -\frac{P}{\alpha(x)} y. \quad (1.2)$$

Здесь не учитываются явление укорочения стержня в результате сжатия и возможное неупругое поведение материала стержня. Кроме дифференциального уравнения к математической формулировке задачи относятся еще *краевые условия*, которые в данном случае зависят от способа закрепления стержня. Из рис. 1.1 непосредственно вытекают геометрические условия $y(0) = 0$, $y'(l) = 0$.

Далее ищется решение дифференциального уравнения с учетом краевых условий. Возьмем в качестве примера стержень постоянного поперечного сечения ($\alpha = \text{const}$) и положим $P/\alpha = \lambda = k^2$. Тогда решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y = A \cos kx + B \sin kx.$$

Произвольные постоянные интегрирования A и B определяются из граничных условий. Из условия $y(0) = 0$ следует, что $A = 0$.

Второе краевое условие дает

$$y'(l) = kB \cos kl = 0.$$

Это означает либо

1) $k = 0$, т. е. отсутствие нагрузки, этот случай не представляет интереса; либо

2) $B = 0$, что дает

$$y(x) \equiv 0;$$

это решение соответствует прямолинейному положению равновесия, оно, конечно, возможно, однако сейчас также не представляет интереса; либо

3) $\cos kl = 0$,

$$kl = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$$

Данным значениям k соответствуют критические нагрузки

$$P_m = \alpha k^2 = \alpha \left[\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right]^2 \quad (m = 1, 2, \dots),$$

и каждому из этих особых значений соответствует вполне определенная (с точностью до постоянного множителя B) функция прогиба $y(x) = B \sin kx$ (рис. 1.2).

Еще раз определим математическое содержание проблемы: рассматривается линейное однородное дифференциальное уравнение

$$y'' = -\lambda y$$

с однородными краевыми условиями $y(0) = y'(l) = 0$.

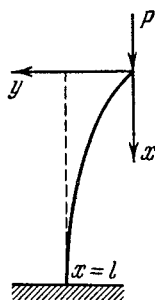
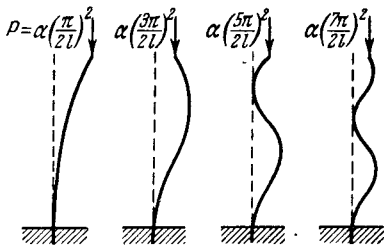


Рис. 1.1. Продольный изгиб стержня, заземленного на одном конце и свободного на другом.

Для любого значения λ эта краевая задача имеет «тривиальное» решение $y \equiv 0$. Кроме того, имеются еще определенные значения λ , а именно бесконечное счетное множество значений



$$\left[\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right]^2,$$

где $m = 1, 2, \dots$, для которых задача имеет не равные тождественно нулю («нетривиальные») решения $y(x)$. Эти значения λ называются *собственными значениями* задачи, и для каждого собственного значения имеется определенная с точностью до постоянного множителя разрешающая функция $y(x)$, называемая *собственной функцией*. Определение собственных значений и собственных функций и есть подлежащая реше-

Рис. 1.2. Первые четыре собственные функции (возможные положения равновесия) призматического стержня при продольном изгибе с соответствующими критическими нагрузками.

нию задача, которая представляет интерес с физико-технической точки зрения. Решение этой задачи может натолкнуться на большие трудности, так как решение в замкнутой форме, с которым мы сейчас познакомимся, особенно в случае дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, часто невозможно. В данной главе мы будем довольствоваться сведением рассматриваемых проблем к задачам на собственные значения и к математической формулировке последних, отложив численное решение до следующих глав.

1.2. Продольный изгиб стержня, заземленного на одном конце и шарнирно опертого на другом. Пусть теперь примерно так, как показано на рис. 1.3, верхняя точка стержня находится на одной вертикали с его нижней точкой. При этом на верхнюю, шарнирно укрепленную точку, кроме силы P , действует еще неизвестная горизонтальная сила H . Поэтому изгибающий момент теперь равен

$$M = Py - Hx = -EJy'' = -\alpha y''.$$

Исключим из полученного соотношения неизвестную силу H посредством двукратного дифференцирования; в результате получим дифференциальное уравнение

$$(\alpha y'')'' = -Py''. \quad (1.3)$$

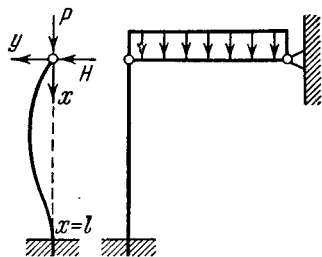


Рис. 1.3. Продольный изгиб стержня, заземленного на одном конце и шарнирно опертого на другом.

Так как это уравнение четвертого порядка, то нам необходимы также четыре крайних условия (внизу защемление, вверху нулевой изгибающий момент):

$$\begin{aligned} y(0) &= 0, & y(l) &= 0, \\ y''(0) &= 0, & y'(l) &= 0. \end{aligned}$$

Искомая критическая нагрузка P появляется как собственное значение λ задачи четвертого порядка. Заметим, что собственное значение λ входит уже умноженным не на y , как в (1.2), а на его вторую производную y'' .

1.3. Продольный изгиб стержня с учетом собственного веса.

При рассмотрении случая потери устойчивости прямолинейного стержня (см. п. 1.1) можно учесть еще собственный вес стержня¹⁾. Тогда действующая внизу сила давления P равна сумме приложенной сверху силы P_0 и полного веса G_0 стержня (см. рис. 1.4). В основу рассмотрения, как и в п. 1.1, будет положено отличное от прямолинейного, слабо изогнутое положение равновесия стержня. Изгибающий момент $M(x)$ в сечении стержня x определяется теперь как силой P_0 , так и распределенным собственным весом верхней части стержня; на элемент стержня длиной $\Delta\xi$ на расстоянии ξ от верхнего конца (рис. 1.4) действует сила тяжести $\gamma F \Delta\xi$, где F обозначает площадь поперечного сечения стержня и γ — удельный вес. Теперь можно определить изгибающий момент в произвольном сечении стержня и получить вместе с тем уравнение упругой линии.

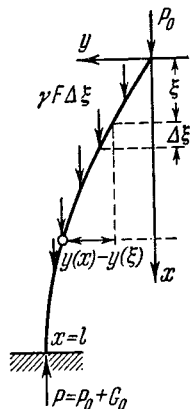


Рис. 1.4. Продольный изгиб защемленного одним концом стержня при учете собственного веса.

$$M = P_0 y + \int_0^x \gamma F(\xi) [y(x) - y(\xi)] d\xi = -\alpha y''.$$

Интеграл устраняется с помощью дифференцирования. Согласно общему правилу дифференцирования интеграла по параметру²⁾

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} G(x, \xi) d\xi &= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x} d\xi + \\ &+ G(x, \psi(x)) \psi'(x) - G(x, \varphi(x)) \varphi'(x) \end{aligned}$$

¹⁾ Fr. A. Willers, Das Knicken schwerer Gestänge, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), 43; R. Gran Olsson, Ing.-Archiv 13 (1942), 162.

²⁾ К. Кнорр, Einführung in die höhere Mathematik, т. III, Leipzig, 1933, 319; Hütte, des Ingenieurs, изд. 27, т. I, Berlin, 1942, 118 [см., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М. — Л., Гостехиздат, 1952].

получаем

$$P_0 y' + \int_0^x \gamma F(\xi) y'(x) d\xi = -(\alpha y'')'$$

или

$$(P - G_0) y' + y'(x) \int_0^x \gamma F(\xi) d\xi = -(\alpha y'')'.$$

Если обозначить через $G(x)$ вес стержня от нижнего конца до точки x

$$G(x) = \int_x^l \gamma F(\xi) d\xi = G_0 - \int_0^x \gamma F(\xi) d\xi,$$

то последнее выражение можно записать так:

$$(\alpha y'')' + P y' - G(x) \cdot y' = 0. \quad (1.4)$$

Повторное дифференцирование приводит к так называемой *самосопряженной* форме (объяснение см. в п. 4.3) дифференциального уравнения

$$(\alpha y'')'' - (G y')' = P y''. \quad (1.5)$$

При этом P является снова собственным значением λ . Этому дифференциальному уравнению четвертого порядка сопутствуют четыре крайевых условия (последнее условие следует из (1.4) для $x=l$):

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y'(l) = 0, \quad (\alpha y'')'_{x=l} = 0.$$

1.4. Сжатый стержень на упругом основании. Пусть стержень длины l , подвергающийся действию осевой сжимающей силы величины P , лежит на упругом основании (железнодорожный рельс).

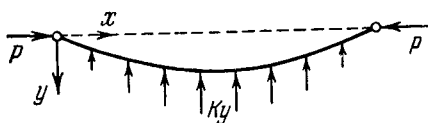


Рис. 1.5. Сжатый стержень на упругом основании.

Примем гипотезу Винклера о том, что сила $p(x)$, действующая на единицу длины стержня при прогибе на величину y , пропорциональна величине прогиба y , т. е.

$$p(x) = Ky.$$

K называется *коэффициентом постели*. Тогда при малом продольном изгибе (рис. 1.5) уравнение упругой линии имеет вид

$$M = Py + \int_0^x Ky(\xi)(x - \xi) d\xi = -\alpha y''.$$

Дифференцирование дает

$$P y' + \int_0^x Ky(\xi) d\xi = -(\alpha y'')'.$$

и в результате повторного дифференцирования получаем дифференциальное уравнение

$$(\alpha y'')'' + Ky = -Py'' \quad (1.6)$$

Краевые условия при шарнирном закреплении имеют вид

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0.$$

1.5. Опрокидывание*) консольной балки при изгибе¹⁾. На рис. 1.6 показана становленная на ребро балка, защемленная на одном конце и несущая на другом груз P ; таким образом, предполагается, что J_y велик по сравнению с J_z ($J_y \gg J_z$). Система координат ориентирована относительно балки так, что ось x совпадает с осью балки до деформации, ось z совпадает с направлением приложенной силы P , а ось y направлена в сторону отклонения.

Если груз P мал, то возникает только изгиб. Когда же сила P превышает определенную критическую величину («опрокидывающая нагрузка»), то на этот изгиб накладывается боковое опрокидывание: изгиб относительно осей y и z и кручение (это можно наблюдать при аналогичном изгибе рейшины). Для определения критической величины груза рассмотрим слабое опрокидывание, когда боковое отклонение u незначительно и угол закручивания ϑ мал.

При этом необходимо обратить особое внимание на обозначения.

Напомним кратко некоторые правила обозначений, употребляемых в дальнейшем: момент \mathcal{M} силы \mathcal{R} вводится как вектор:

$$\mathcal{M} = r \times \mathcal{R}.$$

На рисунках вектор-момент, в отличие от вектора-силы, будет всегда обозначаться двумя стрелками. Вращающее действие момента такое же,

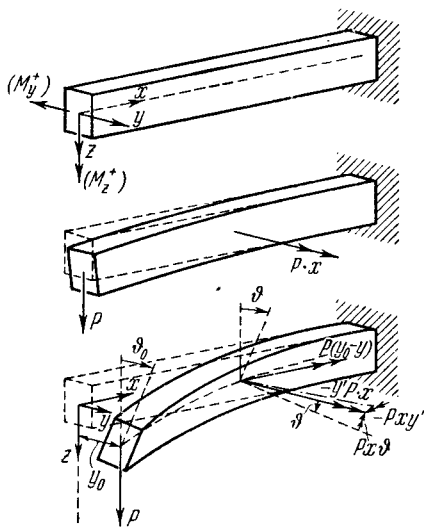


Рис. 1.6. Боковое опрокидывание балки, установленной на ребро, под действием изгибающей сосредоточенной нагрузки P .

*) Применяется еще термин «потеря плоской устойчивости».

¹⁾ L. Prandtl, Dissertation, München, 1899. A. und L. Förppl, Drang und Zwang, т. II, изд. 2, München und Berlin, 1928, 323—352 [А. Фепплъ и Л. Фепплъ, Сила и деформация, т. II, ОНТИ, 1936]; K. Federhofer, Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), 43; Handbuch der Physik, т. VI, Berlin, 1928, 284.

что и эквивалентной пары сил. При изгибе (в правой системе координат) изгибающий момент, направленный параллельно оси z , считается положительным, а поперечная сила считается положительной, если она направлена в отрицательном направлении оси y (рис. 1.7). Вследствие этого вектор изгибающего момента M_z (изгиб в плоскости (x, y)) будет считаться положительным в положительном направлении оси z , в то время как вектор-момент M_y (изгиб в плоскости (x, z)) положителен в отрицательном направлении оси y , как это показано на рис. 1.6. (Система осей x, y, z является правой, как и система $x, z, -y$.)

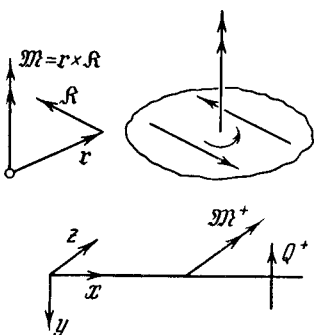


Рис. 1.7. Ориентация изгибающего момента и поперечной силы.

Уравнения упругой линии (с учетом указанного правила знаков) имеют вид

$$M_y = -\alpha_y z'', \quad M_z = -\alpha_z y'' \quad (1.7)$$

При этом $\alpha_y = EJ_y$, $\alpha_z = EJ_z$, где J_y, J_z обозначают моменты инерции поперечного сечения относительно осей y и z . Учитывая оговоренное выше условие о том, что $J_y \gg J_z$, приведем следующие упрощающие соображения.

Компоненты момента силы P по осям y и x имеют вид Px и $P(y_0 - y)$ соответственно (рис. 1.6). Компоненту $P(y_0 - y)$

из-за ее малости можно считать направленной вдоль оси стержня. В противоположность этому составляющая изгибающего момента Px вследствие своей относительно большой величины должна быть разложена на составляющие в направлении новой (деформированной) оси стержня и в перпендикулярном к нему. Компонента Px вдоль нового направления стержня равна $-Px\vartheta'$ (рис. 1.6), а компонента вдоль новой вертикальной оси равна $Px\vartheta$. Итак, в качестве уравнения изгиба имеем

$$-\alpha_z y'' = -Px\vartheta.$$

Из-за наличия компоненты момента в направлении стержня имеем еще уравнение кручения, которое в общем виде формулируется так:

Крутящий момент равен жесткости при кручении, умноженной на относительный угол закручивания¹⁾.

(Относительным углом закручивания называется угол закручивания на единицу длины; этот угол определяется при произвольном изменении $\vartheta(x)$ как $\vartheta' = \frac{d\vartheta}{dx}$.) Здесь, следовательно, имеем

$$P(y_0 - y) + Px\vartheta' = -C\vartheta',$$

¹⁾ С. В. Биезено, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939, 116 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. I, Гостехиздат, 1950].

где C — жесткость при кручении. Дифференцирование этого уравнения дает

$$-Py' + Py' + Pxy'' = -(C\vartheta)'$$

Используя уравнение изгиба, можно исключить отсюда y'' ; тогда в качестве дифференциального уравнения задачи получаем

$$-(C\vartheta)' = \frac{(Px)^2 \vartheta}{\alpha_z} \quad (1.8)$$

с краевыми условиями:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(l) &= 0 & (\text{у защемления угол закручивания равен нулю}), \\ \vartheta'(0) &= 0 & (\text{на свободном конце момент равен нулю}). \end{aligned} \right\} (1.9)$$

Здесь C и α_z — заданные функции от x , а P^2 есть собственное значение λ .

Более строгое проведение выкладок приводит к дифференциальному уравнению для ϑ , в которое войдет также и другой момент инерции J_z :

$$-(C\vartheta)' = \frac{\alpha_y - \alpha_z}{\alpha_y \cdot \alpha_z} (Px)^2 \vartheta.$$

В рассмотренных до сих пор случаях задачи на собственные значения (по крайней мере для стержней постоянного поперечного сечения) легко допускали решение в замкнутом виде с помощью элементарных функций. Здесь же мы имеем дифференциальное уравнение, решение которого даже в случае стержня постоянного поперечного сечения не выражается через элементарные функции в замкнутом виде, а приводит к цилиндрическим функциям¹⁾.

В уравнении (1.8) Px есть изгибающий момент $M(x)$ от силы P ; при других видах нагрузок его место занимает изгибающий момент от соответствующих сил. При некоторой распределенной нагрузке имеем, следовательно, дифференциальное уравнение

$$-(C\vartheta)' = \frac{[M(x)]^2 \vartheta}{\alpha_z}. \quad (1.10)$$

1.6. Кручение и опрокидывание двутавровой балки. Если рассмотренный в п. 1.5 стержень является двутавровой балкой, то вместо дифференциального уравнения второго порядка (1.8) возникает уравнение четвертого порядка²⁾. В этом случае крутящий момент больше не равен $C\vartheta'$, к нему добавляется член третьего порядка. Кручение

¹⁾ L. Prandtl, Kipperscheinungen, ein Fall von instabilem elastischem Gleichgewicht, Dissertation München, 1899 (рассмотрены также другие типы закрепления и нагрузок)

²⁾ A. und L. Förppl, Drang und Zwang, т. II, изд. 2, München und Berlin, 1928, 339 [А. Феппл и Л. Феппл, Сила и деформация, т. II, ОНТИ, 1936].

отдельного элемента двутавровой балки (рис. 1.8) связано с изгибом полки; при повороте поперечного сечения на малый угол ϑ центры тяжести полки сдвигаются на отрезок $y = \frac{h}{2} \vartheta$, где h есть расстояние между обоими центрами тяжести. Если ϑ не постоянно, а является некоторой функцией x , то это равносильно изгибу полки вокруг стенки балки, т. е. «вокруг высокого ребра». В расчет входит также момент инерции $\frac{J}{E} \alpha_f$ полки относительно оси z , т. е. относительно ее малой оси. С изгибом полки связана поперечная сила $Q = -(\alpha_f y'')'$, которая создает момент, совпадающий по направлению с крутящим моментом. Подробные выкладки показывают, что при кручении двутавровой балки крутящий момент $C\vartheta'$ должен быть заменен выражением

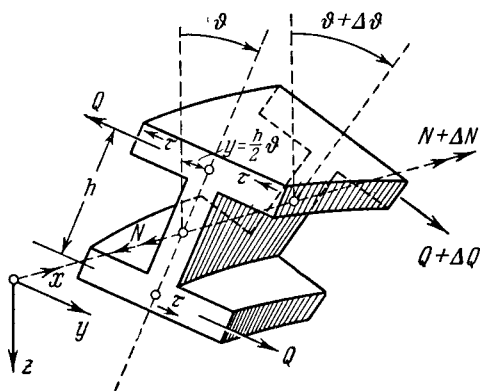


Рис. 1.8. Кручение элемента двутавровой балки.

— $\frac{h^2}{2} (\alpha_f \vartheta'')' + C\vartheta'$. (1.11)

При опрокидывании балки двутаврового сечения уравнение (1.10) должно быть заменено следующим:

$$-(C\vartheta')' + \frac{h^2}{2} (\alpha_f \vartheta'')'' = \frac{[M(x)]^2 \vartheta}{\alpha_z}. \quad (1.12)$$

Так как порядок этого уравнения вдвое выше, чем уравнения (1.10), то необходимо добавить еще два крайних условия. В случае сосредоточенной нагрузки на свободном конце $x=0$, как в п. 1.5, вместо (1.9) имеем крайние условия:

$$\left. \begin{aligned} \vartheta(l) &= 0, & \vartheta''(0) &= 0 \text{ (из-за } y'' = 0), \\ \vartheta'(l) &= 0 \text{ (защемленная полка, следовательно, } y' = 0), \\ \left[-C\vartheta' + \frac{h^2}{2} (\alpha_f \vartheta'')' \right]_{x=0} &= 0 \text{ (крутящий момент} = 0 \\ &\text{для } x = 0). \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

1.7. Сжатие и кручение вала¹⁾. При действии достаточно большого вращающего момента провод или вал длины l может потерять

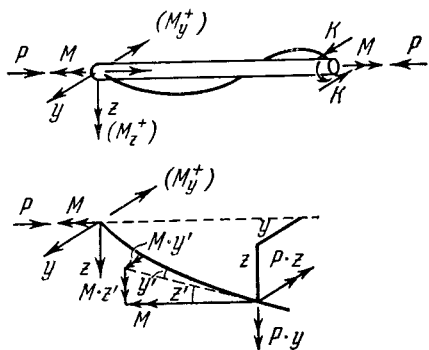
¹⁾ J. Ratzersdorfer, Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien, 1936, 35; С. В. Биезено, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939, 545 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. I, Гостехиздат, 1950].

устойчивость в форме винтообразной линии: с ростом крутящего момента вначале имеет место только скручивание, затем, при определенном «критическом» крутящем моменте M , ось винтообразно деформируется. Если вал к тому же подвергается действию осевой сжимающей силы P (рис. 1.9), то эта винтообразная деформация наступает раньше, т. е. уже при меньшей величине крутящего момента M .

Рассмотрим вал в слабо изогнутом состоянии, т. е. при малых y и z . Моменты Pz и Pu пренебрежимо малы. Крутящий момент M , напротив, имеет относительно большую величину и должен быть разложен на компоненты Mu' и Mz' по осевым направлениям (рис. 1.9). Поэтому, согласно принятым в п. 1.5 (ср. рис. 1.7) обозначениям, имеем уравнения изгиба:

$$-\alpha z'' = Pz - My',$$

$$-\alpha y'' = Pu + Mz'.$$



Здесь принято $\alpha_y = \alpha_z$ и поэтому жесткость на изгиб обозначена просто через α ; первое уравнение дает при дифференцировании

Рис. 1.9. Вал под действием сжатия и кручения.

$$(-\alpha z'')' = Pz' - My'' = Pz' + \frac{MP}{\alpha} y + \frac{M^2}{\alpha} z'. \quad (1.14)$$

Умножение на α и повторное дифференцирование соотношения (1.14)

$$-\alpha [(\alpha z'')']' = P(\alpha z')' + M^2 z'' + MPy'$$

приводят к дифференциальному уравнению

$$[\alpha (\alpha z'')']' + P [(\alpha z')' + \alpha z''] + M^2 z'' + P^2 z = 0$$

с краевыми условиями:

$$z(0) = z(l) = 0, \quad \left[(\alpha z'')' + Pz' + \frac{M^2}{\alpha} z' \right]_{x=0}^{x=l} = 0$$

(последние два уравнения следуют из (1.14) при $y=0$).

Если вал имеет постоянное поперечное сечение, т. е. $\alpha = \text{const}$, то дифференциальное уравнение имеет вид

$$z^{IV} + \frac{2P}{\alpha} z'' + \frac{M^2}{\alpha^2} z'' + \frac{P^2}{\alpha^2} z = 0. \quad (1.15)$$

Если M задан и ищется критическая осевая сжимающая сила P , то собственное значение входит в дифференциальное уравнение квадратично. При заданной силе P и неизвестном критическом моменте M собственное значение $\lambda = M^2$, как и прежде, входит в первой степени. В случае отсутствия осевой силы дифференциальное уравнение можно привести к самосопряженной форме:

$$(az''')'' = -M^2 \left(\frac{z'}{a} \right)'. \quad (1.16)$$

В качестве другой особенности следует упомянуть о вхождении собственного значения в краевые условия.

1.8. Выпучивание круговой арки¹⁾. Пусть изогнутый тонкий стержень постоянного сечения, ось которого является дугой с радиусом a и центральным углом 2β , подвержен действию равномерного одностороннего внешнего давления p . В качестве простого слу-

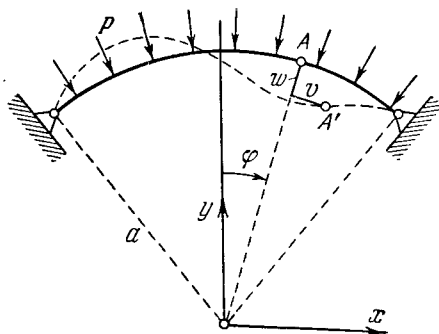


Рис. 1.10. Выпучивание кругового стержня в его плоскости под действием внешнего давления.

чая изучения потери устойчивости может быть вычислено критическое давление, при котором стержень может выпучиваться в своей плоскости. При этом принимается, что давление после деформации направлено также перпендикулярно к искаженной средней линии. Введя полярные координаты r, φ (рис. 1.10), можно охарактеризовать новое положение частицы A заданием ее смещений v, w , рассматриваемых как малые, в тангенциальном и радиальном направлениях. Новое положение A' в прямоугольных координатах дается следующими выражениями:

$$x = (a - w) \sin \varphi + v \cos \varphi, \quad y = (a - w) \cos \varphi - v \sin \varphi.$$

Смещения v и w обуславливают тангенциальные растяжения $\frac{1}{a} \frac{dv}{d\varphi}$ и $-\frac{w}{a}$ соответственно. Сделаем теперь следующее допущение о нестяжимости средней линии, т. е. что полное тангенциальное растяжение ϵ_t равно нулю:

$$a\epsilon_t = \frac{dv}{d\varphi} - w = 0, \quad \text{или} \quad w = \frac{dv}{d\varphi}.$$

Для изгиба слабо искривленного стержня действителен закон: изгибающий момент M равен жесткости на изгиб α , умноженной на изме-

¹⁾ J. Ratzersdorfer, Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien, 1936, 305.

нение кривизны K^* . Здесь $K^* = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{a}$ есть изменение кривизны в результате деформации. Новая кривизна K вычисляется по известной формуле

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{-x'y'' + y'x''}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad (1.17)$$

где штрихи означают производные по величине $s = \alpha\varphi$ (s — длина дуги до деформации). Пренебрегая квадратичными членами в v , ω и используя условие $\omega = av'$, получаем

$$ax' = a \cos \varphi - (v + a\omega') \sin \varphi,$$

$$ay' = -a \sin \varphi - (v + a\omega') \cos \varphi,$$

$$a^2x'' = (-a - av' - a^2\omega'') \sin \varphi - (v + a\omega') \cos \varphi,$$

$$a^2y'' = (-a - av' - a^2\omega'') \cos \varphi + (v + a\omega') \sin \varphi,$$

$$x'^2 + y'^2 = 1, \quad a^3(y'x'' - x'y'') = a^2(1 + v' + a\omega'')$$

и тем самым в силу $\omega = av'$

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{1}{a}(1 + v' + a^2v''').$$

Используя соотношение между изгибающим моментом и изменением кривизны

$$K^* = \frac{1}{\rho} - \frac{1}{a} = \frac{v'}{a} + av''',$$

имеем

$$M = \alpha K^* = \frac{\alpha}{a}(v' + a^2v'''). \quad (1.18)$$

После этого предварительного геометрического рассмотрения выделим элемент стержня длины Δs и составим условие равновесия для действующих на этот элемент сил и моментов. Действующими являются поперечная сила Q , нормальная сила N , изгибающий момент M и внешняя нагрузка $p \Delta s$. Силы Q , N и изгибающий момент M , как это видно по направлению стрелок на рис. 1.11, считаются положительными; например, положительный момент увеличивает кривизну. Пусть ψ есть угол касательной к деформированной оси стержня с фиксированным в пространстве направлением, и, таким образом, $\Delta\psi$ — угол, который образуют друг с другом нормали к концевым сечениям выделенного элемента. Уравнения равновесия всех сил

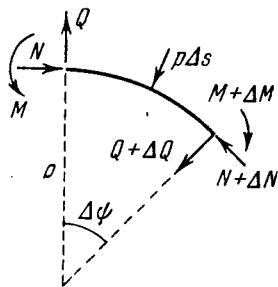


Рис. 1.11. Силы и моменты на элементе кругового стержня.

в проекции на радиальное и тангенциальное направления имеют вид

$$\begin{aligned} Q - p \Delta s - (Q + \Delta Q) + N \frac{\Delta \psi}{2} + (N + \Delta N) \frac{\Delta \psi}{2} &= 0, \\ -Q \frac{\Delta \psi}{2} + N - (N + \Delta N) - (Q + \Delta Q) \frac{\Delta \psi}{2} &= 0; \end{aligned}$$

уравнение моментов относительно точки пересечения касательных к оси стержня в конечных точках элемента

$$Q \frac{\Delta s}{2} + (Q + \Delta Q) \frac{\Delta s}{2} - M + (M + \Delta M) = 0.$$

Переходя в этих уравнениях к пределу при $\Delta \psi \rightarrow 0$ и учитывая, что

$$K = \frac{1}{\rho} = \frac{d\psi}{ds}, \text{ получаем}$$

$$-Q' - p + NK = 0, \quad (1.19)$$

$$-QK - N' = 0, \quad (1.20)$$

$$Q + M' = 0. \quad (1.21)$$

Так как $M = \alpha K^*$, то из (1.21) следует, что $Q = -\alpha (K^*)' = -\alpha K'$ (K^* и K отличаются на постоянную); затем из (1.19) и, далее, из (1.20) получаем

$$KK''' - K'K'' + \frac{p}{\alpha} K' + K^3 K' = 0. \quad (1.22)$$

Если, наконец, выразить кривизну K через смещение v и оставить только линейные относительно v члены, то получим искомое дифференциальное уравнение шестого порядка:

$$v^{VI} + \frac{2}{a^2} v^{IV} + \frac{v''}{a^4} + \frac{pa}{\alpha} \left(v^{IV} + \frac{v''}{a^2} \right) = 0. \quad (1.23)$$

В качестве краевых условий добавляются:

на шарнирно закрепленных концах $v = w = M = 0$ или $v = v' = v''' = 0$

и на защемлении $v = w = w' = 0$ или $v = v' = v'' = 0$.

Собственным значением здесь является критическое давление p .

§ 2. Задачи о колебаниях

2.1. Колебания свободно подвешенного каната. Рассмотрим малые колебания абсолютно гибкого тяжелого нерастяжимого каната длины l , подвешенного за один конец. Начало координат совпадает с точкой подвеса, ось x направлена вниз (рис. 2.1). Предполагается, что колебания происходят в плоскости x, y ; боковое отклонение y и угол отклонения y' принимаются малыми ($\arctg y' \approx y'$). На выделенный элемент длины Δx действуют силы натяжения S и $S + \Delta S$, сила тяжести $\rho g F \Delta x$ и (согласно принципу Даламбера) сила инерции

— $\rho F \Delta x \ddot{y}$ (где ρ есть плотность, F — площадь поперечного сечения, g — ускорение свободного падения, штрихи обозначают производные по длине x , а точки — по времени t). Разлагая силы натяжения на горизонтальные и вертикальные составляющие и заменяя ΔS по формуле Тейлора на $S' \Delta x$, получаем условия равновесия:

$$S' \Delta x + \rho g F \Delta x = 0,$$

$$(S y')' - \rho F \ddot{y} = 0$$

или

$$S' = -\rho g F, \quad (2.1)$$

$$(S y')' = \rho F \ddot{y}. \quad (2.2)$$

Первое из этих уравнений означает, что уменьшение силы натяжения с ростом x обусловлено влиянием собственного веса каната. Без дополнительного рассмотрения можно понять случай, когда канат нагружен внизу сосредоточенной массой M с весом $G = Mg$. Тогда сила натяжения в точке x равна сумме весов нижележащей части каната и подвешенного груза G . Для однородного каната (ρ и F постоянны), например:

$$S = G + \rho g F (l - x).$$

Сила натяжения S , следовательно, может считаться известной. Тем самым (2.2) является дифференциальным уравнением колебаний каната; это — уравнение с частными производными для неизвестной функции $y(x, t)$. Для однородного нагруженного каната это уравнение имеет вид

$$[(G + \rho g F (l - x)) y']' = \rho F \ddot{y}. \quad (2.3)$$

Из всей совокупности возможных колебательных процессов нас в данный момент интересуют синхронные колебания, так называемые собственные колебания, т. е. вопрос о том, обладает ли дифференциальное уравнение с частными производными решением вида

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega(t - t_0), \quad (2.4)$$

где t_0 есть постоянная. При таком виде движения все частицы каната колеблются с одинаковой круговой частотой ω и в одной фазе, но с разными амплитудами Y . При решении вида (2.4) имеем

$$\ddot{y} = -\omega^2 y,$$

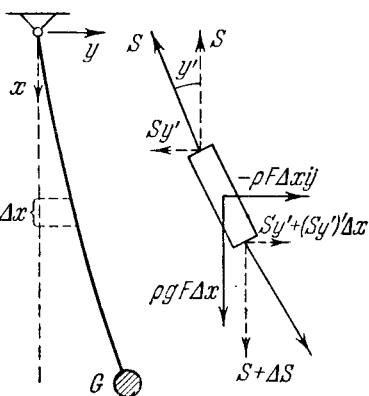


Рис. 2.1. Малые колебания свободно подвешенного гибкого каната.

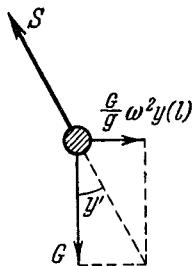


Рис. 2.2. К выводу краевых условий при колебаниях каната с массой на конце.

и в результате получаем обыкновенное дифференциальное уравнение ¹⁾

$$[(G + \rho g F (l - x)) y']' = -\rho F \omega^2 y. \quad (2.5)$$

Это уравнение даже при постоянном ρF не может быть проинтегрировано элементарно из-за множителя $(l - x)$ и решение этого уравнения приводит к функциям Бесселя. Краевые условия имеют вид

$$1) y(0) = 0, \quad 2) y'(l) = \frac{\omega^2}{g} y(l). \quad (2.6)$$

Второе краевое условие получается из рассмотрения равновесия сил, приложенных к подвешенному грузу (рис. 2.2); сила тяжести и сила инерции должны давать равнодействующую, которая уравнивает силу натяжения и которая, следовательно, наклонена под углом y' к вертикали, т. е.

$$y' = \frac{G}{g} y(l) \frac{\omega^2}{G}.$$

Таким образом, это краевое условие не зависит от величины веса G и действительно также для $G = 0$. (Вместо условия 2) можно также записать $y''(l) = 0$.)

Круговые частоты ω являются искомыми. Ищутся, таким образом, те значения параметра ω , для которых уравнение (2.5) с краевыми условиями (2.6) имеет тождественно не равное нулю («нетривиальное») решение. Снова имеем задачу на собственные значения, как и в § 1. Величина ω^2 является собственным значением λ ; как и в п. 1.3 здесь имеет место та особенность, что собственное значение входит в краевые условия (именно во второе уравнение (2.6)). Собственные колебания имеют особое значение при рассмотрении общего решения уравнения в частных производных (2.3). Известно, что имеются основное колебание, т. е. собственное колебание с наименьшей круговой частотой ω_1 , и последовательность высших колебаний с частотами $\omega_2, \omega_3, \dots$. Пусть ω_i расположены по порядку возрастания их величин; каждой частоте ω_i соответствует определенная (с точностью до постоянного множителя) собственная функция y_i . Так как уравнение (2.3) линейно и однородно, то сумма двух решений есть также решение. Можно составлять линейные комбинации нескольких и даже бесконечного числа решений («наложение»), т. е. выражение

$$y(x, t) = \sum_{v=1}^{\infty} y_v(x) (A_v \cos \omega_v t + B_v \sin \omega_v t)$$

является также решением при любых постоянных A_v, B_v , поскольку A_v и B_v убывают так быстро, что ряд, полученный путем двукрат-

¹⁾ Можно в (2.5) заменить y на Y . Как амплитудная функция $Y(x)$, так и колебательная функция $y(x, t)$ при любом фиксированном t (т. е. в каждый момент времени) удовлетворяют уравнению (2.5). Вместо $y(x, t)$ здесь будет кратко писаться $y(x)$.

ного почленного дифференцирования по x и по t , равномерно сходится. Это решение для $t=0$ удовлетворяет определенным начальным значениям:

$$\left. \begin{aligned} g(x) = y(x, 0) &= \sum_{v=1}^{\infty} A_v y_v(x), \\ h(x) = \dot{y}(x, 0) &= \sum_{v=1}^{\infty} B_v \omega_v y_v(x). \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

Пусть теперь для проблемы собственных значений можно доказать так называемую теорему о разложении, т. е. установить, что «произвольную» функцию $\varphi(x)$ можно разложить по собственным функциям $y_i(x)$. В рассматриваемом случае это означает, например, что для любых заданных функций $g(x)$ и $h(x)$ найдутся постоянные (коэффициенты) A_v и $B_v \omega_v$ соответственно такие, что соотношения (2.7) будут иметь место. Тогда оказывается, что бесконечный ряд для $y(x, t)$ представляет общее решение дифференциального уравнения с частными производными, так как любое решение этого уравнения определяется его начальными значениями $g(x)$ и $h(x)$. Следовательно, любое движение каната может быть представлено как суперпозиция собственных колебаний.

2.2. Крутильные колебания стержней. Рассмотрим крутильные колебания прямого (но не обязательно постоянного сечения) стержня длины l относительно своей оси. Предположим, далее, что он зашпелен на одном конце и свободен на другом. Ось x направим от свободного конца, где поместим начало координат, к зашпеленному вдоль неизогнутой оси стержня. Пусть $\vartheta = \vartheta(x, t)$ есть угол поворота поперечного сечения в точке x к моменту t относительно положения равновесия. (Мы не учитываем здесь то обстоятельство, что все сечения, исключая круговые и кольцевые, при кручении не остаются плоскими, но искривляются.) Если обозначить жесткость стержня при кручении в точке x через $C = C(x)$ (как и в п. 1.5), то крутящий момент определяется выражением

$$M_t = C \frac{d\vartheta}{dx} = C\vartheta'.$$

При крутильных колебаниях на элемент стержня действует слева момент M_t и справа $M_t + \Delta M_t$ (рис. 2.3), так что ΔM_t определяет

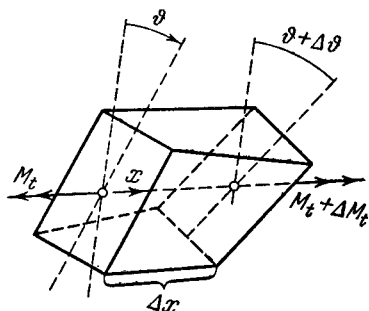


Рис. 2.3. Моменты, действующие на элемент стержня при крутильных колебаниях.

угловое ускорение элемента. Имеем

$$\Delta M_t = J_p \rho \Delta x \ddot{\vartheta},$$

где ρ — плотность и J_p — полярный момент инерции поперечного сечения в точке x . Тем самым для $\vartheta(x, t)$ получаем дифференциальное уравнение движения в частных производных

$$M_t' = (C\vartheta')' = \rho J_p \ddot{\vartheta}. \quad (2.8)$$

Взяв снова решение для собственных колебаний вида (2.4)

$$\vartheta(x, t) = D(x) \cos \omega t$$

и положив $\ddot{\vartheta} = -\omega^2 \vartheta$, получаем обыкновенное дифференциальное уравнение

$$-(C\vartheta')' = \omega^2 \rho J_p \vartheta \quad (2.9)$$

с краевыми условиями:

$$\begin{aligned} \vartheta(l) &= 0 \quad (\text{угол поворота заземленного сечения равен нулю}), \\ \vartheta'(0) &= 0 \quad (\text{равенство нулю крутящего момента на свободном конце}). \end{aligned}$$

В случае балки двутаврового сечения, как в п. 1.6, порядок дифференциального уравнения повышается; если, как в (1.11), дополнить

член $C\vartheta'$ слагаемым $-\frac{h^2}{2}(\alpha_f \vartheta'')'$, то (2.9) переходит в

$$\frac{h^2}{2}(\alpha_f \vartheta'')' - (C\vartheta')' = \rho J_p \omega^2 \vartheta \quad (2.10)$$

с такими же краевыми условиями, как в (1.13):

$$\vartheta(l) = 0, \quad \vartheta'(l) = 0, \quad \vartheta''(0) = 0,$$

$$\left[-\frac{h^2}{2}(\alpha_f \vartheta'')' + C\vartheta' \right]_{x=0} = 0.$$

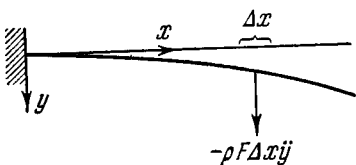


Рис. 2.4. Колебания изгиба заземленного стержня.

Условие $\vartheta'(l) = 0$ определяется изгибом полок, так как для заземленных полок имеет место $y' = 0$ (ср. п. 1.6). Для балки без полок в общем случае $\vartheta'(0) \neq 0$.

2.3. Изгибные колебания стержня. Стержень длины l с прямой осью, закрепленный каким-нибудь образом, например заземленный одним концом, как на рис. 2.4, может, кроме исследованных в п. 2.2 крутильных колебаний, также совершать изгибные колебания. Пусть ось x совпадает с прямой осью стержня, а ось y направлена в сторону предполагаемого отклонения от положения равновесия; отклонение полагается малым. Рассмотрим вначале колебательный процесс при условии, что каждый элемент стержня колеблется как твердая частица параллельно оси y . Остаются неучтенными, таким образом, все побочные влияния, обусловленные тем, что в действительности из-за изменения наклонов упругой линии при колебаниях

каждый элемент стержня поворачивается с некоторым угловым ускорением и что элементы стержня не сохраняют свою форму и вследствие изменения углов возникают напряжения сдвига и т. д. Рассматривая затем при обычных обозначениях (плотность ρ , площадь сечения F , жесткость на изгиб α) силу инерции $-\rho F \ddot{y}$ в качестве нагрузки p , из известного уравнения изгиба стержня

$$(\alpha y'')'' = p$$

непосредственно получим уравнение движения

$$(\alpha y'')'' = -\rho F \ddot{y}. \quad (2.11)$$

Отсюда, взяв решение уравнения для собственных колебаний в виде

$$y = y(x, t) = Y(x) \cos \omega t,$$

получим обыкновенное дифференциальное уравнение

$$(\alpha y'')'' = \rho F \omega^2 y. \quad (2.12)$$

В зависимости от вида закрепления концов стержня имеем различные краевые условия; выделим несколько примеров (см. рис. 2.5).

1. Стержень слева зашпечлен, справа свободен:

$$y(0) = y'(0) = 0, \quad y''(l) = y'''(l) = 0.$$

2. Стержень закреплен с обеих сторон шарнирно:

$$y(0) = y(l) = 0, \quad y''(0) = y''(l) = 0.$$

3. Осуществлено с обеих сторон упругое закрепление стержня.

Здесь при опускании левого конца стержня на величину $y(0)$ возникает поперечная сила $Q = cy(0)$ (где c — коэффициент жесткости пружины), следовательно, на левом конце

$$Q = -(\alpha y'')'_{x=0} = cy(0).$$

На правом конце возникает опорная реакция $-Q = (\alpha y'')'_{x=l} = cy(l)$. Таким образом, имеем краевые условия:

$$y''(0) = 0, \quad (\alpha y'')'_0 + cy(0) = 0,$$

$$y''(l) = 0, \quad (\alpha y'')'_l - cy(l) = 0.$$

4. Стержень слева закреплен шарнирно, справа — упругое закрепление:

$$y(0) = y''(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \quad (\alpha y'')'_l - cy(l) = 0$$

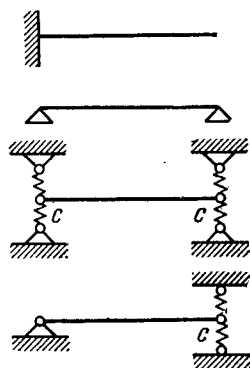


Рис. 2.5. Различные виды закрепления колеблющегося стержня.

(нижние индексы показывают, что имеются в виду производные в точках $x = 0$, $x = l$ соответственно).

2.4. Пример физической задачи с отрицательными собственными значениями. Если в приведенных выше случаях 3 и 4 закрепления концов стержня при его изгибных колебаниях коэффициент жесткости является отрицательным (т. е. при малых отклонениях на концах действует сила, увеличивающая отклонение, что физически можно легко реализовать), то собственные значения могут оказаться отрицательными. С целью облегчения вычислений выберем только одну опору упругой, другую же — в виде жесткого шарнира. Пусть стержень имеет постоянное сечение; тогда уравнение (2.12)

$$\alpha y^{IV} = \rho F \omega^2 y, \quad (2.13)$$

если ввести ради краткости обозначения

$$\lambda = \frac{\rho F \omega^2}{\alpha} = k^4, \quad (2.14)$$

принимает вид

$$y^{IV} = \lambda y = k^4 y. \quad (2.15)$$

Общим решением этого уравнения для $k = 0$ будет

$$y = A \sin kx + B \cos kx + C \operatorname{sh} kx + D \operatorname{ch} kx,$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные.

Из первых двух краевых условий

$$y(0) = B + D = 0, \quad y''(0) = k^2(-B + D) = 0$$

имеем

$$B = D = 0.$$

Два других краевых условия

$$y''(l) = 0, \quad y'''(l) - \frac{c}{\alpha} y(l) = 0$$

при $k \neq 0$ означают

$$-A \sin kl + C \operatorname{sh} kl = 0,$$

$$A \left(-k^3 \cos kl - \frac{c}{\alpha} \sin kl \right) + C \left(k^3 \operatorname{ch} kl - \frac{c}{\alpha} \operatorname{sh} kl \right) = 0.$$

Это — система двух линейных однородных уравнений для A и C , которая имеет решение, отличное от $A = C = 0$, если определитель, составленный из коэффициентов этой системы, обращается в нуль:

$$\begin{vmatrix} -\sin kl & \operatorname{sh} kl \\ -k^3 \cos kl - \frac{c}{\alpha} \sin kl & k^3 \operatorname{ch} kl - \frac{c}{\alpha} \operatorname{sh} kl \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисление этого определителя дает после деления на $\sin kl \operatorname{sh} kl$ трансцендентное уравнение для k (и тем самым одновременно для собственного значения λ):

$$\operatorname{cth} kl - \operatorname{ctg} kl = 2 \frac{c}{\alpha} \frac{1}{k^3}. \quad (2.16)$$

Из графического представления обеих частей этого уравнения (рис. 2.6) видно, что как при положительных, так и при отрицательных c существует бесконечно много вещественных точек пересечения кривых $\operatorname{cth} kl - \operatorname{ctg} kl$ и $\frac{2c}{\alpha k^3}$ для положительных k ; таким образом, согласно (2.14), существует бесконечно много положительных собственных значений λ .

Имеются ли также и отрицательные собственные значения λ ?

Для $\lambda < 0$ представим k , согласно (2.14), как корень четвертой степени из отрицательного числа в виде $k = s(1+i)$, где s вещественно. Пусть, далее, $l = 1$; подстановка $k = s(1+i)$ в (2.16) и использование соотношений

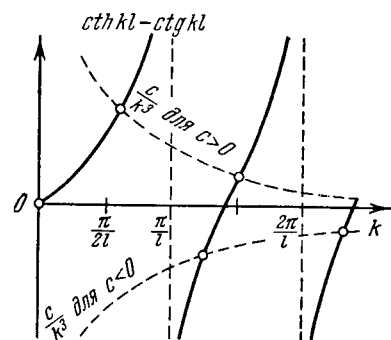


Рис. 2.6. Вещественные корни трансцендентного уравнения (2.16);

$$C = 2 \frac{c}{\alpha}.$$

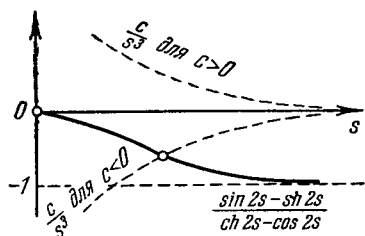


Рис. 2.7. Графическое представление комплексных корней уравнения (2.16); $C = \frac{c}{2\alpha}$.

$$C = \frac{c}{2\alpha}.$$

показывает, что для положительных c нет ни одной вещественной, а при отрицательных c имеется одна вещественная точка пересечения. Таким образом, для $c < 0$ имеется одно отрицательное собственное значение λ . Соответствующее ему движение не может быть названо «собственным колебанием», самое большее его можно назвать «собственным движением»:

$$y(x, t) = Y(x) \cos \omega t = Y(x) \cos \sqrt{\frac{\lambda \alpha}{\rho F}} t = Y(x) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{-\lambda \alpha}{\rho F}} t;$$

$$\begin{aligned} \sin k &= \sin s \operatorname{ch} s + i \cos s \operatorname{sh} s, \\ \cos k &= \cos s \operatorname{ch} s - i \sin s \operatorname{sh} s, \\ \operatorname{sh} k &= \cos s \operatorname{sh} s + i \sin s \operatorname{ch} s, \\ \operatorname{ch} k &= \cos s \operatorname{sh} s + i \sin s \operatorname{sh} s \end{aligned}$$

после коротких преобразований дает новое уравнение для s :

$$\frac{c}{2\alpha s^3} = \frac{\sin 2s - \operatorname{sh} 2s}{\operatorname{ch} 2s - \cos 2s}.$$

Графическое представление правой части этого уравнения (рис. 2.7)

функция $y(x, t)$ имеет, следовательно, для отрицательного λ возрастающий со временем множитель. Прочие собственные значения λ , которые являются положительными, соответствуют обычным колебаниям; однако рассматриваемая система является нестабильной; имеющаяся в наличии даже очень малая компонента собственного движения, соответствующая отрицательному собственному значению, растет со временем неограниченно. Если осуществлено упругое закрепление обоих концов стержня (способ крепления 3 в п. 2.3, рис. 2.5), то при $l=1$ для k получается трансцендентное уравнение

$$\left(\operatorname{cth} k - \operatorname{ctg} k - \frac{2c}{\alpha k^3} \right) \left(\operatorname{tg} k + \operatorname{th} k - \frac{2c}{\alpha k^3} \right) = 0.$$

Первый множитель уже подробно исследован выше, второй снова дает бесконечно много положительных собственных значений и для отрицательного c еще одно отрицательное собственное значение; при $k = s(1+i)$ он дает уравнение

$$-\frac{c}{2\alpha s^3} = \frac{\sin 2s + \operatorname{sh} 2s}{\cos 2s + \operatorname{ch} 2s}.$$

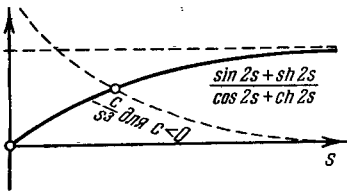


Рис. 2.8. Графическое представление в случае отрицательных собственных значений колеблющегося стержня, упруго закрепленного на обоих концах; $C = \frac{c}{2\alpha}$.

Правая часть представлена графически на рис. 2.8. При таком способе закрепления, следовательно, для $c < 0$ возникают два отрицательных и бесконечное множество положительных собственных значений.

2.5. Колебания стержня с учетом влияния собственного веса. Рассмотрим изгибные колебания заземленного на одном конце

вертикального стержня (например, высокой дымовой трубы¹⁾) при тех же допущениях, что и в п. 2.3. Пусть ось x совпадает с неотклоненной осью стержня и направлена вертикально вниз, боковое (малое) отклонение обозначается через y . На элемент стержня в отклоненном положении теперь, кроме силы инерции, действует еще сила тяжести (рис. 2.9), так что выражение для изгибающего момента будет иметь вид

$$M = -\alpha y'' = - \int_0^x [-\rho F \ddot{y}(\xi)] (x - \xi) d\xi - \int_0^x \rho g F [y(\xi) - y(x)] d\xi.$$

Дифференцирование дает

$$M' = -(\alpha y'')' = \int_0^x \rho F \ddot{y}(\xi) d\xi + \int_0^x \rho g F y'(\xi) d\xi.$$

¹⁾ М. Г. Р u w e i n, Beton und Eisen 39 (1940), 162.

Второй интеграл имеет величину $y'(x)G(x)$, где $G(x) = \int_0^x \rho g F d\xi$ — вес стержня от верхнего конца до точки x . Таким образом, после повторного дифференцирования имеем

$$-(\alpha y'')'' = \rho F \ddot{y} + (Gy')' \quad (2.17)$$

или снова с учетом выражения для собственных колебаний (2.4):

$$(\alpha y'')'' + (Gy')' = \rho F \omega^2 y. \quad (2.18)$$

Для случая стержня постоянного поперечного сечения $G = \rho F g x$, следовательно, и в этом случае дифференциальное уравнение имеет переменные коэффициенты и собственное значение $\lambda = \omega^2$ невозможно найти просто в замкнутой форме, как в случае уравнения с постоянными коэффициентами. Краевые условия имеют вид

$$y(l) = y'(l) = 0, \quad y''(0) = y'''(0) = 0.$$

2.6. Критическое число оборотов вала с гироскопическим эффектом¹⁾.

«Летающим валом» называют вращающийся с угловой скоростью ω вал, защемленный с одной стороны и несущий на другом, свободном, конце диск. Здесь при вычислении критического числа оборотов в общем случае нельзя пренебрегать гироскопическим эффектом, вызываемым наклоном диска и частиц вала. Вследствие наклона диска ось вращения больше не является главной осью инерции, вектор момента количества движения J (кинетический момент) поэтому не совпадает с направлением оси вращения, а вращается вокруг нее. Изменение момента количества движения (точнее, его производная по времени) равно действующему на диск моменту.

Пусть наклон диска характеризуется малым углом $\varphi = y'$. Пусть, далее, диск имеет момент инерции A относительно его оси симметрии и B относительно перпендикулярной к ней оси. Компоненты угловой скорости относительно обеих этих осей тогда равны (рис. 2.10) $\omega \cos \varphi$ и $\omega \sin \varphi$ или, вследствие малости φ , ω и $\omega \varphi$, а компоненты вектора момента количества движения будут: $J_1 = A\omega$ и $J_2 = B\omega\varphi$. Из этих компонент можно построить полный момент количества движения J ; конец вектора кинетического момента находится от оси вращения на «расстоянии»

$$a = J_1 \sin \varphi - J_2 \cos \varphi \approx J_1 \varphi - J_2 = (A - B) \omega \varphi = C \omega \varphi,$$

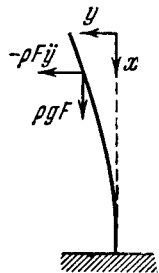


Рис. 2.9. Колебания изгиба стержня с учетом собственного веса.

¹⁾ С. В. Виезено, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939, 803—806, 821 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. II, Гостехиздат, 1950].

где подставлено $C = A - B$. Вследствие равномерности вращения производная по времени

$$\frac{dJ}{dt} = \dot{J} = a\omega = C\omega^2\varphi.$$

Это есть момент, с которым вал действует на диск¹⁾.

Момент, с которым диск действует на вал, таким образом, равен

$$M = -C\omega^2\varphi. \quad (2.19)$$

Далее, возникают центробежные силы: $-m\ddot{y} = +m\omega^2 y$, где $y(x, t) = Y(x) \cos \omega t$, причем $m = \rho F$ есть масса вала на единицу длины.

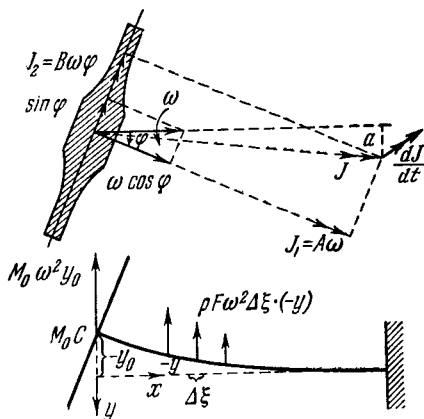


Рис. 2.10. К выводу дифференциального уравнения летящего вала.

Если M_0 есть масса диска и c — разность моментов инерции на единицу длины вала (соответствующая C), то изгибающий момент имеет вид

$$M = -ay'' = - \left. \begin{aligned} & \int_0^x \underbrace{\rho F \omega^2 y(\xi) (x - \xi) d\xi}_{\text{центробежная сила вала}} - \underbrace{M_0 \omega^2 y_0 x}_{\text{диска}} \\ & \underbrace{- C \omega^2 y'_0}_{\text{гироскопический эффект диска,}} - \int_0^x \underbrace{c \omega^2 y'(\xi) d\xi}_{\text{вала}} \end{aligned} \right\} \quad (2.20)$$

Дифференцирование дает

$$M' = (-ay'')' = - \int_0^x \rho F \omega^2 y(\xi) d\xi - M_0 \omega^2 y_0 - c \omega^2 y'(x), \quad (2.21)$$

¹⁾ Этот вектор-момент направлен перпендикулярно к плоскости, определяемой ω , J_1 и J_2 , и на рис. 2.10 показан в перспективе как $\frac{dJ}{dt}$.

и повторное дифференцирование приводит к дифференциальному уравнению задачи

$$(\alpha y'')'' = \omega^2 [\rho F y + (c y')']. \quad (2.22)$$

В точке защемления $x = l$ имеем, как в п. 2.3, краевые условия: $y(l) = y'(l) = 0$; краевые условия для $x = 0$ получаем, подставляя в (2.20) и (2.21) $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \alpha y''(0) &= C \omega^2 y'(0), \\ (\alpha y'')'_0 &= M_0 \omega^2 y(0) + c \omega^2 y'(0). \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

В этой задаче собственное значение ω^2 также входит в краевые условия.

2.7. Крутильные колебания диска¹⁾. В насаженном на вал вращающемся диске, толщина $y(r)$ которого зависит от расстояния r до оси вращения, под влиянием изменения числа оборотов могут иметь место колебания кручения и растяжения в своей плоскости, которые связаны между собой. Силы связи, однако, количественно малы по сравнению с обуславливающими колебания силами инерции, и при вычислении собственных частот можно пренебречь связью²⁾, а также производить расчет для невращающегося диска. Поэтому в дальнейшем радиальное растяжение не рассматривается; вал принимается защемленным на концах (рис. 2.11). При крутильных колебаниях концентрические окружности диска сдвигаются друг относительно друга и нанесенная первоначально на диске прямая переходит в кривую, характеризуемую углом закручивания $\varphi = \varphi(r)$ (рис. 2.12). Это дает связь между относительным сдвигом γ (изменение первоначально прямого угла) и напряжением сдвига τ . Из рис. 2.12 непосредственно получается

$$\gamma = r \frac{\Delta \varphi}{\Delta r}$$

или в пределе, если штрихом обозначать производную по r ,

$$\gamma = r \varphi', \quad \tau = G \gamma = G r \varphi'. \quad (2.24)$$

Здесь G есть модуль сдвига.

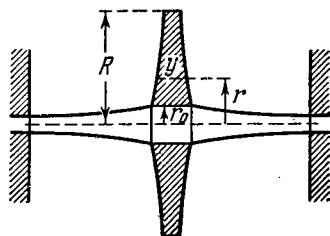


Рис. 2.11. К крутильным колебаниям диска, общая схема.

¹⁾ R. Grammel, Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), 193—200; С. В. Виезено, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939, 652 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. II, Гостехиздат, 1950].

²⁾ С. В. Виезено, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939, 655 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. II, Гостехиздат, 1950].

Выделим теперь в диске кольцо в пределах от r до $r + \Delta r$. Все напряжения сдвига создают в итоге моменты относительно оси вала (различные внутри и снаружи; внутри момент M , а снаружи $M + \Delta M$); разность ΔM обуславливает ускорение вращения кольца. Напряжения сдвига действуют на поверхности величиной $2\pi r\tau$, они дают, следовательно, момент

$$M = 2\pi r\tau r \text{ внутри, } M + \frac{dM}{dr} \Delta r \text{ снаружи.}$$

Выделенное кольцо имеет момент инерции

$$\rho 2\pi r \Delta r y r^2,$$

где ρ есть плотность; следовательно, для него уравнение движения имеет вид

$$\Delta M \approx \frac{dM}{dr} \Delta r = \rho 2\pi r \Delta r y r^2 \ddot{\varphi}$$

или

$$(r^2 \tau y)' = \rho r^3 y \ddot{\varphi},$$

и если вместо τ подставить его величину согласно (2.24), то

$$G (r^3 y \varphi')' = \rho r^3 y \ddot{\varphi}. \quad (2.25)$$

При $\varphi(r, t) = \Phi(r) \cos \omega t$ дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{G}{\rho} (r^3 y \varphi')' = -\omega^2 r^3 y \varphi. \quad (2.26)$$

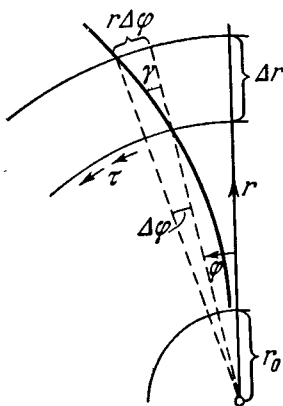


Рис. 2.12. Деформация диска при крутильных колебаниях.

На внутренней границе $r = r_0$ имеем краевое условие:

$$\varphi'(r_0) = c\varphi(r_0),$$

т. е. напряжение сдвига пропорционально углу закручивания; постоянная c вычисляется на основе конструктивных данных и была бы, к примеру, другой, если бы вал был зашпелен с одной стороны.

На свободном внешнем крае $r = R$ напряжение сдвига $\tau = 0$ и поэтому

$$\varphi'(R) = 0.$$

Если же на краю имеется еще инертная масса, что-нибудь вроде турбинных лопаток, то напряжения сдвига приносят момент, который обуславливает угловое ускорение лопаток. Тогда $-\tau(R) = \ddot{\varphi}(R) \cdot \text{const}$, и имеем краевое условие $\varphi'(R) = C_1 \omega^2 \varphi(R)$. Здесь C_1 есть положительная постоянная и ω^2 — собственное значение.

§ 3. Дополнения

3.1. Задачи на собственные значения и проблема ветвления.

Многие из рассматриваемых здесь задач являются «задачами ветвления». Поясним это на обсужденном в п. 1.1 примере потери устойчивости при продольном изгибе стержня, защемленного на одном

конце и свободного на другом. Боковое смещение точки приложения силы определяется значением постоянной интегрирования B ; при этом обнаруживается парадоксальный результат: для всех значений величины нагрузки P , отличных от критической, величина B должна быть равной нулю, а для критической нагрузки значение B может быть любым.

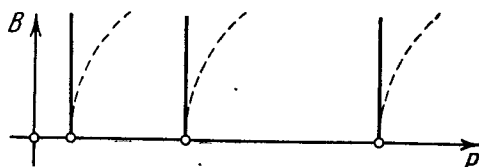


Рис. 3.1. Боковое смещение точки приложения силы при прогибе согласно теории малых отклонений (—) и согласно точной теории (---) (не в масштабе).

Этот результат противоречив, так как, согласно этой теории, при нагрузке, несколько превышающей критическую, снова было бы возможным лишь прямолинейное положение равновесия. Противоречие снимается, если вместо дифференциального уравнения (1.1) использовать уравнение для конечного прогиба $y(x)$

$$M = -\frac{\alpha}{\rho}, \quad \rho = \frac{(\sqrt{1+y'^2})^3}{y''},$$

где ρ есть радиус кривизны упругой линии. Вместо (1.2) тогда будем иметь

$$\frac{y''}{(\sqrt{1+y'^2})^3} = -\frac{P}{\alpha(x)} y. \quad (3.1)$$

Это уравнение уже не является линейным, его интегрирование при постоянном $\alpha(x)$ возможно с помощью эллиптических функций¹⁾. Уравнение (3.1) при краевых условиях $y(0) = y'(l) = 0$ снова имеет для любого P тривиальное решение $y=0$, но, кроме того, от этого решения в точках

$$P = \alpha \left[\frac{(2m-1)\pi}{2l} \right]^2$$

ответвляются нетривиальные решения $y(x)$; соответствующие боковые смещения точки приложения силы показаны штриховыми линиями на рис. 3.1. Штриховые кривые в «точках ветвления» имеют вертикальные касательные, так что для достаточно малых прогибов штриховые и сплошные линии совпадают. Дифференциальное уравнение задачи

¹⁾ Н. Heinzerling, Mathematische Behandlung einiger grundlegender Fragen des Knicksproblems des geraden Stabes, Diss., Karlsruhe, 1938, 39.

на собственные значения (1.2) получается из (3.1) путем «линеаризации», т. е. путем разложения по η и его производным и отбрасывания всех нелинейных членов. Места ветвления при этом схватываются точно. Вычисление собственных значений дает, следовательно, места ветвления точно поставленной задачи, учитывающей конечные деформации.

3.2. Системы дифференциальных уравнений. Постановка технических задач на собственные значения часто приводит (ср. примеры в пп. 1.7,

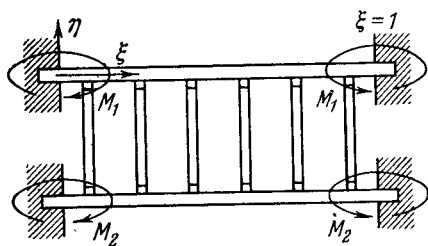


Рис. 3.2. Опрокидывание решетки под воздействием изгибающих моментов.

1.8, 2.1) к системе обыкновенных дифференциальных уравнений со многими неизвестными, которые можно свести к одному дифференциальному уравнению высшего порядка путем исключения неизвестных. Назовем здесь в качестве другого примера задачу определения предела опрокидывания ребристой решетки¹⁾, нагруженной изгибающими моментами M_1, M_2 (рис. 3.2).

Для бокового отклонения η и обоих углов опрокидывания β_1 и β_2 при введении безразмерных величин получаются дифференциальные уравнения

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} (\mu_1 \beta_1'' + \mu_2 \beta_2'') + c_1 \eta^{IV} &= 0, \\ c_1 \mu_1 \eta'' - \beta_1'' + c_2 (2\beta_1 + \beta_2) &= 0, \\ c_1 \mu_2 \eta'' - \beta_2'' + c_2 (\beta_1 + 2\beta_2) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

где $M_1 = \mu_1 c_3$, $M_2 = \mu_2 c_3$. При этом c_1, c_2, c_3 — заданные постоянные, зависящие от геометрических размеров, жесткости обоих брусев и ребер. Независимой переменной является координата ξ в направлении одного из брусев, штрихи означают производные по ξ . Если принять концы брусев с обеих сторон жестко зашцементированными, то имеем краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} \beta_1(0) = \beta_1(1) = \beta_2(0) = \beta_2(1) &= 0, \\ \eta(0) = \eta(1) = \eta'(0) = \eta'(1) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Вводя величины $\beta_1 + \beta_2 = \gamma$, $\beta_1 - \beta_2 = \delta$, можно придать дифференциальным уравнениям форму

$$\begin{aligned} (\mu_1 + \mu_2) \gamma'' + (\mu_1 - \mu_2) \delta'' + 4c_1 \eta^{IV} &= 0, \\ c_1 (\mu_1 + \mu_2) \eta'' - \gamma'' + 3c_2 \gamma &= 0, \\ c_1 (\mu_1 - \mu_2) \eta'' - \delta'' + c_2 \delta &= 0. \end{aligned}$$

Теперь γ и δ можно легко исключить и для η получается уравнение восьмого порядка

$$\eta^{VIII} + \eta^{VI} \left(-4c_2 + \frac{\mu_1^2 + \mu_2^2}{2} \right) + c_2 \eta^{IV} (3c_2 - \mu_1^2 + \mu_1 \mu_2 - \mu_2^2) = 0. \quad (3.4)$$

¹⁾ J. Weinhöld, Über Kipplasten eines Holm — Rippenrostes, Ing.-Arch. 9 (1938), 411—419.

В граничных точках $\xi = 0$ и $\xi = 1$ выражения

$$\eta, \eta', 2\eta^{IV} + (\mu_1^2 + \mu_2^2)\eta'', 2\eta^{VI} + (\mu_1^2 + \mu_2^2)\eta^{IV} + 2c_2(\mu_1^2 + \mu_1\mu_2 + \mu_2^2)\eta'' \quad (3.5)$$

равны нулю. Если подставить $\mu_2 = \text{const} \cdot \mu_1$, то μ_1^2 выступает в качестве собственного значения λ .

В то время как в случае системы (3.2) собственное значение λ не входит в краевые условия (3.3), в случае дифференциального уравнения восьмого порядка собственное значение появляется в краевых условиях (3.5).

В случаях $\mu_1 = \mu_2$ и $\mu_1 = -\mu_2$ порядок уравнения снижается до шестого. Для $\mu_1 = \mu_2 = \sqrt{\lambda}$ получается уравнение

$$-\eta^{VI} + 3c_2\eta^{IV} = \lambda\eta^{IV} \quad (3.6)$$

и для $\mu_1 = -\mu_2 = \sqrt{\lambda}$

$$-\eta^{VI} + c_2\eta^{IV} = \lambda\eta^{IV}. \quad (3.7)$$

В обоих случаях имеем шесть краевых условий:

$$\eta(0) = \eta'(0) = \eta(1) = \eta'(1) = \eta^{IV}(0) + \lambda\eta''(0) = \eta^{IV}(1) + \lambda\eta''(1) = 0.$$

3.3. Другие краевые условия, соотношение между значениями на обоих концах. Могут иметь место различные краевые условия, отличные

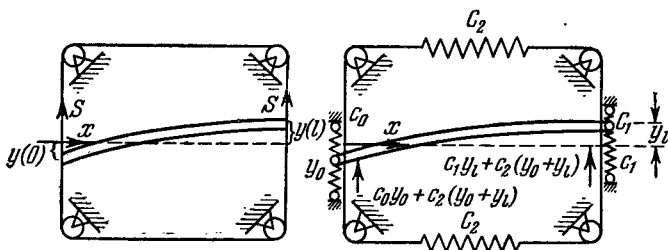


Рис. 3.3. Краевые условия другого вида.

от содержащихся в §§ 1 и 2, например такие, которые вносят связь между обоими краями. Если, скажем, при помощи каната, растянутого силой S , задать равные амплитуды на краях в случае изгибных колебаний стержня (рис. 3.3 слева), то краевые условия будут иметь вид

$$y(0) = -y(l), \quad y''(0) = y''(l) = 0, \\ (\alpha y'')'_{x=0} = -(\alpha y'')'_{x=l} = S.$$

Если в канат включить еще пружины и концы закрепить упруго (рис. 3.3 справа), то получим краевые условия:

$$y''(0) = y''(l) = 0,$$

$$(\alpha y'')'_{x=0} = (C_0 + C_2)y(0) + C_2y(l); \quad -(\alpha y'')'_{x=l} = (C_1 + C_2)y(l) + C_2y(0).$$

3.4. Задачи на собственные значения для уравнений с частными производными. Здесь кратко перечисляются некоторые типичные примеры без сколько-нибудь подробных выводов.

Поперечные колебания однородной мембраны удовлетворяют уравнению

$$c^2 \Delta \omega = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

При этом $\omega = \omega(x, y, t)$ есть отклонение мембраны в точке x, y в момент t ; средняя плоскость мембраны в положении равновесия перекрывает данную область \mathfrak{B} плоскости (x, y) . Далее, $c^2 = p/\rho$ есть частное от деления действующего в мембране напряжения p на плотность ρ , а $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ — оператор Лапласа. Если, как в п. 2.1, для собственных колебаний примем форму $\omega(x, y, t) = z(x, y) e^{i\omega t}$, где ω является круговой частотой, то при

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2}$$

получаем дифференциальное уравнение

$$-\Delta z = \lambda z. \quad (3.9)$$

Кроме того, в качестве краевых условий имеем: в случае заземленного края $z = 0$, в случае упруго закрепленного края $\alpha z + \beta \frac{\partial z}{\partial n} = 0$, где α и β — заданные на краях функции и n означает направление внешней нормали.

При эллиптической форме мембраны целесообразно ввести эллиптические координаты. Тогда возникает дифференциальное уравнение¹⁾

$$-\Delta z = \lambda (\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y) z,$$

причем собственная функция z входит в правую часть, будучи умноженной на некоторую функцию веса.

В случае неоднородной массы или неравномерно напряженной мембраны²⁾ имеем дифференциальное уравнение

$$-(Az_x + Bz_y)_x - (Bz_x + Cz_y)_y = \lambda z, \quad (3.10)$$

где A, B, C — заданные функции x, y ; здесь нижние индексы x, y означают дифференцирование, т. е., например, $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$.

Дифференциальное уравнение четвертого порядка возникает, в частности, в случае плоских колебаний:

$$\Delta \Delta z = \lambda z.$$

Простейшими являются краевые условия:

$$z = 0, \quad \frac{\partial z}{\partial n} = 0 \quad \text{при заземлении}$$

и $z = 0, \Delta z = 0$ в случае свободного опирания многоугольной области.

¹⁾ F. Pockels, Über die partielle Differentialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig, 1891.

²⁾ Handbuch der Physik, т. VI, Berlin, 1928, 381.

Вместо дальнейшего перечисления примеров укажем на подборку их в таблице II, которая, равно как и таблица I, ограничивается задачами из механики. Рассмотрение других крупных прикладных областей физики, таких как задачи на собственные значения в акустике, аэродинамике, учении об электричестве, ядерной физике и т. д., завело бы нас слишком далеко; назовем лишь в качестве одной из наиболее известных задачу на собственные значения для уравнения Шредингера¹⁾:

$$\Delta\psi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} [\lambda - U(x, y, z)] \psi = 0, \quad (3.11)$$

где m , h — постоянные, $U(x, y, z)$ — потенциальная энергия, являющаяся заданной функцией координат, ψ — собственная функция и λ — собственное значение энергии. В качестве краевого условия имеем равенство нулю ψ на бесконечности.

В таблице II применяются те же обозначения, что и в таблице I.

3.5. Упражнения. 1. Сформулировать задачу на собственные значения, в частности, краевые условия, в случае сжатого стержня заземленного на одном конце, при упругом закреплении на другом ($x=0$)²⁾, см. рис. 3.4. Пусть c есть коэффициент жесткости упругого закрепления, $\alpha(x)$ — жесткость на изгиб стержня. P — искомая критическая сила. Собственным весом пренебречь.

Решение. Дифференциальное уравнение (1.3) с краевыми условиями

$$y(l) = y'(l) = y''(0) = 0; \quad Py'(0) + cy(0) + (\alpha y'')'_{x=0} = 0.$$

Собственное значение $\lambda = P$ появляется в последнем из них.

2. Опертый на концах стержень длины l с постоянной жесткостью на изгиб α и постоянной массой μ на единицу длины нагружен на расстоянии a от опоры массой M (рис. 3.5) (мотор на балке). Составить трансцендентное уравнение для собственных частот изгибных колебаний (как в п. 2.3., пренебрегая побочными влияниями, например продольными колебаниями и т. д.).

Решение³⁾. Если обозначить прогиб в левом пролете $y_1(x)$, в правом $y_2(x)$, то при $\lambda = \frac{\mu\omega^2}{\alpha} = k^4$ функции

$$y_1 = A_1 \sin kx + B_1 \operatorname{sh} kx, \quad y_2 = A_2 \sin k(l-x) + B_2 \operatorname{sh} k(l-x)$$

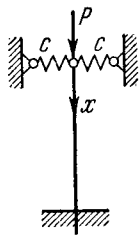


Рис. 3.4. Сжатый стержень, заземленный на одном конце и упруго закрепленный на другом.

¹⁾ Подробнее см. G. Joos, Lehrbuch der theoretischen Physik, изд. 3, Leipzig, 1939, 605; Frank u. v. Mises, Differential u. Integralgleichungen, т. II, изд. 2, Braunschweig, 1935, 992—1044 [Ф. Франк и Р. Мизес. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937].

²⁾ A. Föppl, L. Föppl, Drang und Zwang, т. II, изд. 3, München — Berlin, 1928, 311 [А. Фепплъ и Л. Фепплъ, Сила и деформация, т. II, ОНТИ, 1936] (там, правда, другой подход).

³⁾ Подобная задача есть в книге K. Hohenemser, W. Prager, Dynamik der Stabwerke, Berlin, 1933, 139, там она ставится, но не доводится до уравнения (3.12).

удовлетворяют дифференциальному уравнению и краевым условиям. Постоянные A_1, B_1, A_2, B_2 исключаются при помощи переходных условий:

$$y_1(a) = y_2(a); \quad y_1'(a) = y_2'(a); \quad y_1''(a) = y_2''(a);$$

$$y_1'''(a) = y_2'''(a) - \frac{M\omega^2}{\alpha} y_1(a).$$

Обозначая $b = l - a$, получаем для k характеристическое уравнение

$$\frac{\sin ka \sin kb}{\sin kl} - \frac{\operatorname{sh} ka \operatorname{sh} kb}{\operatorname{sh} kl} = \frac{2\mu}{Mk}. \quad (3.12)$$

Для $a = b$ получается более простое уравнение

$$\operatorname{tg} ka - \operatorname{th} ka = \frac{4\mu}{Mk}.$$

3. Призматический стержень длины l , закрепленный на концах, как показано на рис. 3.6, в середине и на правом конце подвергается действию осевой силы Q . Вычислить критическое значение Q , т. е. значение, при превышении которого наступает потеря устойчивости при продольном изгибе.

Решение. Поскольку стержень имеет постоянную жесткость на изгиб α ,

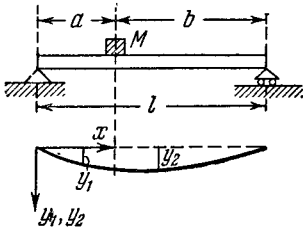


Рис. 3.5. Колебания изгиба балки с сосредоточенной нагрузкой.

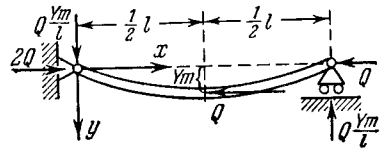


Рис. 3.6. Задача о продольном изгибе стержня при наличии двух сжимающих сил Q .

дифференциальное уравнение упругой линии в каждом из двух пролетов слева и справа от срединной нагрузки можно проинтегрировать в замкнутом виде при помощи тригонометрических функций; исключение постоянных интегрирования из краевых и переходных условий дает для

величины $\sigma = \sqrt{\frac{Q}{\alpha}} \frac{l}{2}$ трансцендентное уравнение

$$6\sigma \operatorname{ctg} \sigma + 3\sqrt{2}\sigma \operatorname{ctg}(\sqrt{2}\sigma) = 1.$$

Первые два корня σ_1, σ_2 , соответствующие собственным значениям, были приближенно вычислены способом, отличным от приведенного здесь, в работе ¹⁾:

$$\frac{Q_1 l^2}{\alpha} = (2\sigma_1)^2 = 6,506, \quad \frac{Q_2 l^2}{\alpha} = (2\sigma_2)^2 \approx 25,2.$$

4. Рассмотрим предыдущий пример, предположив, что в середине действует сила P вместо Q (следовательно, левая опорная реакция равна $P + Q$,

¹⁾ С. В. Biezeno, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939, 512—516 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. II, Гостехиздат, 1950].

вместо $2Q$). Установим соотношение между P и Q , необходимое для начала потери устойчивости при продольном изгибе.

Ход решения как в предыдущем примере. Полагая

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{Q}{\alpha}} \frac{l}{2}, \quad \sigma_2 = \sqrt{\frac{P+Q}{\alpha}} \frac{l}{2},$$

получаем

$$Q(2P+Q)\sigma_2 \operatorname{ctg} \sigma_2 + (P+Q)(P+2Q)\sigma_1 \operatorname{ctg} \sigma_1 = P^2.$$

5. Составить трансцендентное уравнение для собственных частот в случае изгибных колебаний балки на трех опорах с длинами пролетов l_1 и l_2 (рис. 3.7). Жесткость на изгиб α и масса μ на единицу длины на каждом пролете постоянны, посторонними влияниями, как и в примере 2, пренебречь.

Результат. Применяя обозначения

$$l_1 \sqrt[4]{\frac{\mu_1 \omega^2}{\alpha_1}} = k_1, \quad l_2 \sqrt[4]{\frac{\mu_2 \omega^2}{\alpha_2}} = k_2,$$

можно записать искомое уравнение в форме:

$$\frac{\mathfrak{C}(k_1)}{\mathfrak{B}(k_1)} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sqrt[4]{\frac{\alpha_1 \mu_2}{\alpha_2 \mu_1}} \frac{\mathfrak{C}(k_2)}{\mathfrak{B}(k_2)} = 0. \quad (3.13)$$

Здесь использованы введенные Хозензер и Прагером¹⁾ табулированные вспомогательные функции, которые оказываются пригодными во многих колебательных задачах для отдельных балок и целых стержневых систем:

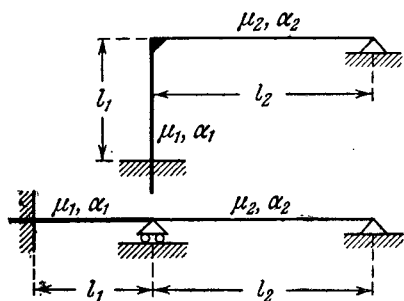


Рис. 3.8. Колебания изгиба рамы.

6. На рис. 3.8 показана рама с жестким углом с высотой стойки l_1 и длиной перекладины l_2 . Пусть на одном конце рама закреплена, а на другом закреплена шарнирно. Заданные жесткости на изгиб α_1 , α_2 и массы μ_1 , μ_2 на единицу длины полагаются постоянными. Определить сначала в общем виде, а затем для частного случая $\frac{\mu_1}{\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\alpha_2}$, $l_2 = 2l_1$ собственные частоты изгибных колебаний, снова пренебрегая, как в примере 2, посторонними влияниями.

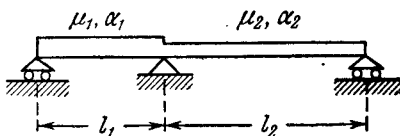
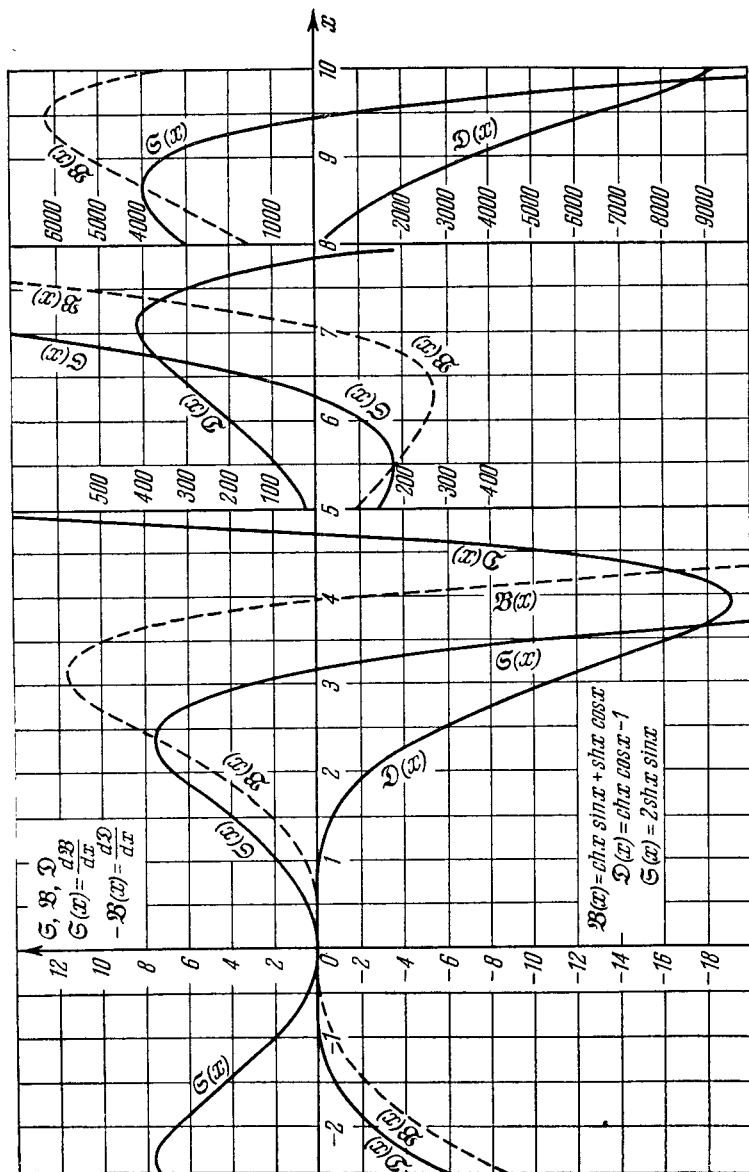


Рис. 3.7. Колебания изгиба балки на трех опорах.

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{M}(x) &= \operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x, \\ \mathfrak{B}(x) &= \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x, \\ \mathfrak{C}(x) &= 2 \operatorname{ch} x \cos x, \\ \mathfrak{D}(x) &= 2 \operatorname{sh} x \sin x, \\ \mathfrak{E}(x) &= \operatorname{ch} x \cos x - 1, \\ \mathfrak{F}(x) &= \operatorname{ch} x \cos x + 1. \end{aligned} \right\} (3.14)$$

На рис. 3.9 и 3.10 графически представлены функции \mathfrak{C} , \mathfrak{B} , \mathfrak{D} и часто встречающиеся отношения $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{D}}$ и $\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{B}}$.

¹⁾ К. Ноненсер, W. Прагер, *Dynamik der Stabwerke*, Berlin, 1933, 127 и далее. Там имеется также много других просчитанных примеров для балок и систем стержней.

Рис. 3.9. Графическое представление частотных функций B , D , G Хоэнмэзер и Прагера.

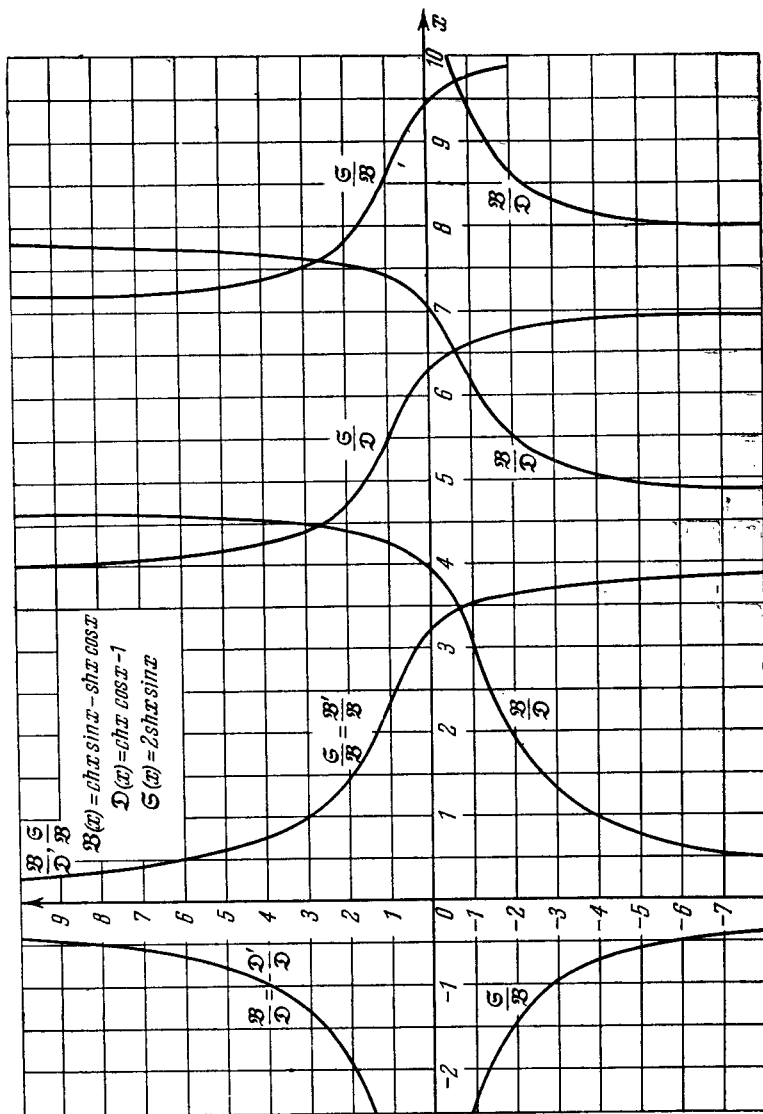
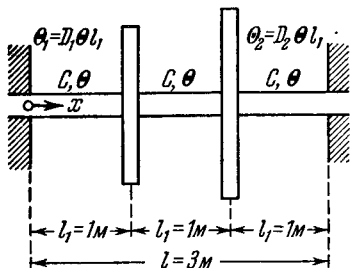


Рис. 3.10. Графическое представление функций \mathfrak{B} и \mathfrak{C} .

Результат. Собственные частоты будут такими же, как в случае балки с защемлением и двумя опорами по типу рис. 3.8. При использовании введенных в примере 5 частотных функций Хоэнмэзер—Прагера и примененных там же обозначений k_1 , k_2 уравнение для частот имеет вид



$$\frac{\mathfrak{B}(k_1)}{\mathfrak{D}(k_1)} = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \sqrt[4]{\frac{\alpha_1 \mu_2}{\alpha_2 \mu_1} \frac{\mathfrak{S}(k_2)}{\mathfrak{B}(k_2)}}.$$

В частном случае $\frac{\mu_1}{\alpha_1} = \frac{\mu_2}{\alpha_2}$, $l_2 = 2l_1$ получаем

$$\frac{\mathfrak{B}(k_1)}{\mathfrak{D}(k_1)} = \frac{\mathfrak{S}(2k_1)}{\mathfrak{B}(2k_1)}.$$

Рис. 3.11. Крутильные колебания вала с двумя насаженными сосредоточенными массами.

Из рис. 3.10 можно получить приближенные значения для k_1 и улучшить их при помощи таблиц Хоэнмэзер—Прагера. Для основного и первого высшего колебаний получаем величины $k_1 = 1,809$ и соответственно $3,2804$, что позволяет вычислить частоты ω по формуле

$$\omega = \frac{k_1^2}{l_1^2} \sqrt{\frac{\alpha_1}{\mu_1}}.$$

7. Крутильные колебания вала с сосредоточенными вращающимися массами. На однородном, с обеих сторон защемленном валу (рис. 3.11) насажены две сосредоточенные вращающиеся массы с моментами инерции масс Θ_1 ,

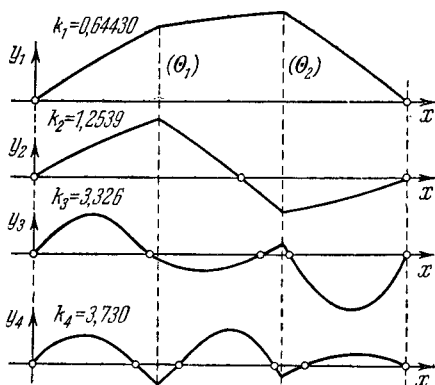


Рис. 3.12. Вид первых четырех собственных колебаний системы, показанной на рис. 3.11.

Θ_2 относительно оси вала. Необходимо вычислить собственную частоту ω крутильных колебаний. Пусть C — жесткость на кручение и Θ — момент инерции массы на единицу длины вала, C и Θ постоянны.

Результат. Обозначая ради краткости

$$\frac{\omega^2 \Theta l_1^2}{C} = \lambda = k^2, \quad D_1 = \frac{\Theta_1}{\Theta l_1}, \quad D_2 = \frac{\Theta_2}{\Theta l_1},$$

получаем для k трансцендентное уравнение

$$3 - 4 \sin^2 k - (D_1 + D_2) k \sin 2k + D_1 D_2 k^2 \sin^2 k = 0.$$

Численный пример: $D_1 = 1$, $D_2 = 2$. Тогда первые четыре корня уравнения будут

$$k_1 = 0,64430, \quad k_2 = 1,2539, \quad k_3 = 3,326, \quad k_4 = 3,730$$

и

$$\lambda_1 = 0,41512, \quad \lambda_2 = 1,5721, \quad \lambda_3 = 11,06, \quad \lambda_4 = 13,91.$$

На рис. 3.12 показаны соответствующие им первые четыре типа собственных колебаний (угол $y(x)$, на который поворачивается поперечное сечение вала в точке x из положения равновесия). В точках крепления сосредоточенных масс кривая $y(x)$ терпит изломы. На концах $y = 0$. В случае основного колебания y всюду, кроме концов, отлично от нуля, первое высшее колебание обнаруживает один, а второе — ровно три узла; замечательно, что в данном примере отсутствует тип собственного колебания с двумя внутренними узлами.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СРЕДСТВА

Параграфы 4 и 5 содержат некоторые основные определения и простые теоремы из теории задач на собственные значения и сведения о функции Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений, постоянно используемые в последующих главах. §§ 6 и 7 являются в основном обзорными и должны ознакомить читателя с необходимыми сведениями из теории дифференциальных уравнений в частных производных и интегральных уравнений.

§ 4. Основные сведения о задачах на собственные значения

Общее определение задачи на собственные значения¹⁾. Пусть задано линейное однородное (обыкновенное или в частных производных) дифференциальное уравнение относительно функции z одного или многих переменных x_1, \dots, x_r . Коэффициенты, с которыми функция z и ее производные входят в дифференциальное уравнение, являются заданными функциями переменных x_1, \dots, x_r и параметра λ . Далее, на z налагается некоторое число линейных однородных краевых условий, т. е. уравнений, которые являются линейными и однородными относительно значений z и ее производных в каких-нибудь данных точках x_1, \dots, x_r . Ищется значение параметра λ , для которого существует некоторая тождественно не равная нулю функция z , удовлетворяющая всем краевым условиям и дифференциальному уравнению. Задачи такого типа называются задачами на собственные значения.

Вначале рассмотрим обыкновенные дифференциальные уравнения²⁾.

4.1. Различные случаи распределения собственных значений.

В первой задаче на собственные значения, рассмотренной в п. 1.1,

¹⁾ Говорят также о «собственных значениях» в случае матриц, интегральных уравнений и вообще других линейных однородных задач; здесь, однако, в первую очередь и почти исключительно речь пойдет о собственных значениях применительно к дифференциальным уравнениям.

²⁾ В обыкновенных дифференциальных уравнениях вместо z будем использовать букву y .

была получена бесконечная последовательность вещественных и даже положительных собственных значений. Эта ситуация имеет место в большинстве технических задач на собственные значения. Следующие простые примеры показывают, однако, что отнюдь не в любой задаче возникает такое «нормальное» распределение собственных значений; наличие такого распределения обеспечивается только при определенных предпосылках. Таким образом, указанный вопрос нуждается в более подробном математическом исследовании.

Пример I. Случай отсутствия собственных значений. Рассмотрим задачу на собственные значения

$$y^{IV} = -\lambda y'', \quad y''(0) = y'''(0) = y(1) = y'(1) = 0. \quad (4.1)$$

Здесь $y(x)$ — искомая функция, штрихи означают производные по x^1 . Внешне эта задача лишь незначительно отличается от задачи об изгибных колебаниях стержня или продольного изгиба.

В случае дифференциального уравнения вида $y^{IV} = \lambda y$ мы имели бы в точности уравнение изгибных колебаний стержня, заземленного в точке $x=1$ и свободного на другом конце ($x=0$). Рассматриваемое же дифференциальное уравнение (4.1) и три из четырех краевых условий такие же, как в задаче о продольном изгибе для такого стержня (формулировка иная, чем в п. 1.1). Только четвертое краевое условие $y'''(0) = 0$ должно быть заменено условием $(\alpha y'')'_{x=0} = -\lambda y(0)$ или, так как $y''(0) = 0$, условием $\alpha y_0''' = \lambda y_0'^2$). В обеих названных физических задачах мы, естественно, имеем нормальное распределение собственных значений, в рассматриваемой же задаче, напротив, вообще нет собственных значений! Итак, уже незначительное изменение условий задачи может полностью изменить распределение собственных значений.

Для $\lambda = 0$ дифференциальное уравнение $y^{IV} = 0$ имеет решение $y = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3$; при заданных краевых условиях это решение дает $y \equiv 0$ и потому отпадает. Для $\lambda \neq 0$ общее решение рассматриваемого дифференциального уравнения при $\lambda = k^2$ имеет вид

$$y = c_1 + c_2 x + c_3 \sin kx + c_4 \cos kx. \quad (4.2)$$

Краевое условие $y''(0) = 0$ требует $c_4 = 0$, а условия: $y'''(0) = 0$, $y'(1) = 0$, $y(1) = 0$ — требуют равенства нулю c_3 , c_2 и c_1 соответственно, т. е. нет ни собственных значений, ни собственных функций.

Пример II. Случай комплексных собственных значений. Рассмотрим то же самое дифференциальное уравнение (4.1), но с другими краевыми условиями:

$$y^{IV} = -\lambda y'', \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0.$$

При $\lambda = 0$ имеем решение дифференциального уравнения снова в виде полинома третьей степени, но краевые условия выполняются только для $y \equiv 0$.

1) Знак при λ не имеет значения. Но вообще целесообразно записывать дифференциальное уравнение так, чтобы y , y^{IV} , ... имели положительные знаки, а y'' , y^{VI} , ... — отрицательные; тогда собственные значения в случае «нормального» их распределения, как правило, положительны.

2) Пflugер в качестве проблемы продольного изгиба называет задачу для стержня постоянного поперечного сечения, заземленного в точке $x=1$ и свободного в точке $x=0$, нагруженного на свободном конце силой, действующей всегда в направлении касательной, т. е. силой, которая при отклонении изменяет направление и называется «следящей силой».

При $\lambda \neq 0$ общее решение дифференциального уравнения, как и в примере 1, имеет форму (4.2). Краевое условие

$$\begin{aligned} y''(0) = 0 & \text{ дает } c_4 = 0, \\ y(0) = 0 & \text{ дает } c_1 = 0, \\ y'(0) = 0 & \text{ дает } c_2 + kc_3 = 0, \text{ т. е. } c_2 = -kc_3, \\ y(1) = 0 & \text{ дает } -kc_3 + c_3 \sin k = 0, \end{aligned}$$

следовательно, если исключить случай $c_3 = 0$ (ввиду $y \neq 0$), то

$$\sin k = k.$$

Это уравнение имеет в вещественной области только корень $k = 0$, отброшенный выше, и, кроме того, комплексные корни, т. е. существуют только комплексные собственные значения. Имеются и физические задачи, которые приводят к комплексным собственным значениям, например задача о затухающих колебаниях струны [см. уравнение (2.2) при $S = \text{const}$; K — коэффициент затухания]:

$$Sy'' = \rho F \ddot{y} + K \dot{y}. \quad (4.3)$$

Это же уравнение возникает и в других случаях затухающих колебаний, например при крутильных колебаниях стержней и валов; укажем еще телеграфное уравнение и т. д.¹⁾

Если решение имеет вид

$$y(x, t) = e^{\lambda t} Y(x),$$

то (4.3) переходит в

$$SY'' = (\rho F \lambda^2 + K \lambda) y$$

или, с другими обозначениями (k_1, k_2 — положительные постоянные):

$$y'' = (k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda) y.$$

При краевых условиях (длина струны $l = 1$)

$$y(0) = y(1) = 0$$

имеем решения

$$y = \sin n\pi x,$$

где

$$k_1 \lambda^2 + k_2 \lambda = -n^2 \pi^2.$$

Вычисляемые отсюда собственные значения являются вообще (например при не слишком больших величинах k_2) комплексными.

Пример III. Вхождение собственных значений в краевые условия. Пусть в задаче на собственные значения

$$-y'' = \lambda y$$

с краевыми условиями

$$y(0) = 0, \quad y(1) = k(\lambda) y'(1)$$

$k(\lambda)$ есть заданная функция λ . После подстановки в краевые условия общего решения дифференциального уравнения вида

$$y = c_1 \sin \omega x + c_2 \cos \omega x$$

¹⁾ Ph. Frank, R. v. Mises, Differential- und Integralgleichungen, т. I, 1930, 469 [Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, 1937].

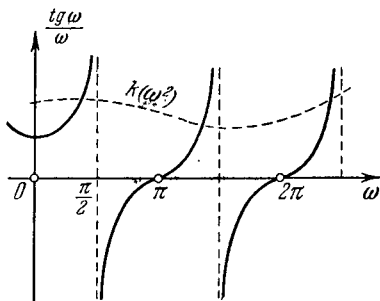


Рис. 4.1. Графическое представление к решению уравнения (4.4).

(здесь взято $\lambda = \omega^2$) получаем трансцендентное уравнение для ω

$$\frac{\operatorname{tg} \omega}{\omega} = k(\omega^2). \quad (4.4)$$

Точки пересечения кривых $\frac{\operatorname{tg} \omega}{\omega}$ и $k(\omega^2)$ дают собственные значения (рис. 4.1). В зависимости от свойств функции $k(\lambda)$ можно получить либо бесконечное, либо конечное множество собственных значений, либо даже ни одного (например, когда $k(\omega^2) = \frac{\operatorname{tg} \omega}{\omega} - 1$).

Пример IV. Появление кусочного спектра. Рассмотрим уравнение Шредингера (3.11) в частном случае одномерного периодического силового поля

$$y'' + (E - U(x))y = 0. \quad (4.5)$$

Постоянный множитель при $E - U$ здесь принят равным единице, что возможно, если соответственно подобрать масштаб по оси x . Пусть потенциальная энергия $U(x)$ есть заданная кусочно-непрерывная вещественная периодическая функция с периодом a :

$$U(x + a) = U(x).$$

Ищется собственное значение энергии E , для которого дифференциальное уравнение обладает тождественно не равным нулю решением $y(x)$ и которое при всех (вещественных) x остается ограниченным.

Используем ради наглядности матричное исчисление. Пусть $z_1(x)$, $z_2(x)$ — система фундаментальных функций уравнения (4.5). Тогда в силу периодичности дифференциального уравнения $z_1(x + a)$, $z_2(x + a)$ — также решения; их можно, следовательно, представить как линейные комбинации $z_1(x)$, $z_2(x)$:

$$\left. \begin{aligned} z_1(x + a) &= a_{11}z_1(x) + a_{12}z_2(x), \\ z_2(x + a) &= a_{21}z_1(x) + a_{22}z_2(x). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Вронскиан этой системы имеет независимую от x и отличную от нуля величину

$$\begin{vmatrix} z_1(x + a) & z_2(x + a) \\ z_1'(x + a) & z_2'(x + a) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} z_1(x) & z_2(x) \\ z_1'(x) & z_2'(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix};$$

следовательно,

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1. \quad (4.7)$$

Если ввести вектор-столбец

$$\delta k = \begin{pmatrix} z_1(x + ka) \\ z_2(x + ka) \end{pmatrix}$$

и матрицу коэффициентов

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

то (4.6) можно записать так:

$$\delta k = \mathfrak{A} \delta_{k-1} = \mathfrak{A}^2 \delta_{k-2} = \dots = \mathfrak{A}^k \delta_0. \quad (4.8)$$

\mathfrak{A} есть невырожденная матрица; (4.8) действительно для всех целочисленных (также отрицательных) значений k .

Пусть κ_1 , κ_2 есть характеристические числа матрицы \mathfrak{A} , т. е. в силу (4.7) корни уравнения

$$\kappa^2 - F\kappa + 1 = 0, \quad \text{где } F = a_{11} + a_{22}. \quad (4.9)$$

Тогда из теорем матричного исчисления можно вывести:

1. Если $|F| = |a_{11} + a_{22}| > 2$, то корни κ_1, κ_2 вещественны, их произведение равно 1, т. е., например, если $|\kappa_1| > 1$, то $|\kappa_2| < 1$; $\mathcal{U}^k \delta_0$ при $k \rightarrow \infty$ или $k \rightarrow -\infty$ неограниченно; соответствующая величина E не является в этом случае собственным значением.

2. Если $|F| < 2$, то κ_1, κ_2 являются комплексно сопряженными, $|\kappa_1| = |\kappa_2| = 1$; $\mathcal{U}^k \delta_0$ при любом δ_0 остается ограниченным; каждое решение уравнения (4.5) является собственной функцией; соответствующие величины E являются двукратно вырожденными собственными значениями.

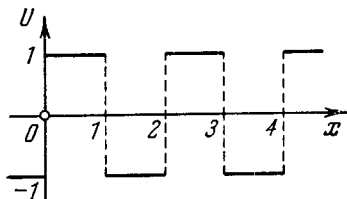


Рис. 4.2. Периодический кусочно-постоянный потенциал.

3. При $|F| = 2$, т. е. при $F = \pm 2$, имеем $\kappa_1 = \kappa_2 = \pm 1$; имеется по меньшей мере один вектор δ_0 , удовлетворяющий равенству $\mathcal{U} \delta_0 = \pm \delta_0$, т. е. решение $y(x)$ уравнения (4.5), обладающее свойством: $y(x+a) = \pm y(x)$. Тогда имеет место равенство $y(x+2a) = y(x)$.

Обозначим непрерывную функцию $F(E)$ через F ; области, в которых $|F| < 2$ и которые, следовательно, содержат континуум собственных значений, будут ограничены величинами E , при которых $F = \pm 2$, и, таким образом, существуют периодические решения с периодом a или $2a$ ¹⁾. В качестве примера возьмем потенциал (см. рис. 4.2):

$$U(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < 1, \\ -1 & \text{при } 1 \leq x < 2, \\ U(x+2) & \text{при всех } x. \end{cases}$$

Введем сокращенные обозначения y_k, y'_k для $y(k), y'(k)$, а также обозначим

$$a^2 = E - 1, \quad b^2 = E + 1. \quad (4.10)$$

Тогда можно из y_0 и y'_0 вычислить величины y_1, y'_1 , а затем и y_2, y'_2 :

$$y_1 = y_0 \cos a + \frac{y'_0}{a} \sin a,$$

$$y'_1 = -y_0 a \sin a + y'_0 \cos a,$$

$$y_2 = y_1 \cos b + \frac{y'_1}{b} \sin b =$$

$$= y_0 \left(\cos a \cos b - \frac{a}{b} \sin a \sin b \right) + y'_0 \left(\frac{\sin a \cos b}{a} + \frac{\sin b \cos a}{b} \right),$$

$$y'_2 = -y_1 b \sin b + y'_1 \cos b =$$

$$= y_0 \left(-b \sin b \cos a - a \sin a \cos b \right) + y'_0 \left(-\frac{b}{a} \sin a \sin b + \cos a \cos b \right).$$

¹⁾ В работе Н. А. Крамера, Das Eigenwertproblem im eindimensionalen periodischen Kraftfeld, Physika, т. II, 1935, 483—490, доказывалось, что существует бесконечно много таких отдельных областей; см. также пример в работе R. de L. Kronig, W. G. Пенееу, Quantum Mechanics of Electrons in Crystal Lattices, Proc. Royal Soc. London A 130 (1931), 499—513.

Возникающая здесь матрица

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} \cos a \cos b - \frac{a}{b} \sin a \sin b & \frac{1}{a} \sin a \cos b + \frac{1}{b} \sin b \cos a \\ -b \sin b \cos a - a \sin a \cos b & -\frac{b}{a} \sin a \sin b + \cos a \cos b \end{pmatrix}$$

имеет в качестве характеристических чисел κ_1, κ_2 корни уравнения (4.9), где

$$F = 2 \cos a \cos b - \frac{a^2 + b^2}{ab} \sin a \sin b,$$

причем a и b , согласно (4.10), выражаются через E . На рис. 4.3 показана зависимость функции F от E . Для больших значений E область $|F| > 2$ становится очень малой; вблизи $E = 10$ эта область примерно определяется неравенством $9,85 < E < 9,95$.

4.2. Обозначения. Простые примеры п. 4.1 показывают, что не во всех случаях можно заранее получить информацию о числе и расположении собственных значений и о собственных функциях. Поэтому в последующем, ориентируясь на технические проблемы, выделим вполне определенный класс задач на собственные значения.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$M[y] = \lambda N[y], \quad (4.11)$$

где $M[y]$ и $N[y]$ суть линейные однородные обыкновенные дифференциальные выражения типа ¹⁾

$$M[y] = \sum_{v=0}^m (-1)^v [f_v(x) y^{(v)}(x)]^{(v)}, \quad (4.12)$$

$$N[y] = \sum_{v=0}^n (-1)^v [g_v(x) y^{(v)}(x)]^{(v)}. \quad (4.13)$$

Здесь $f_v(x)$ и $g_v(x)$ суть заданные, вещественные, v -кратно непрерывно дифференцируемые функции ²⁾.

¹⁾ (4.12) не является общим видом линейного однородного обыкновенного дифференциального выражения, а охватывает лишь частный случай так называемых «самосопряженных» дифференциальных выражений.

²⁾ Видно, что (4.12) и (4.13) являются типичными дифференциальными выражениями для большинства дифференциальных уравнений на собственные значения, возникающих в технических задачах; например, уравнение (1.5) получается при

$$\alpha(x) = f_2, \quad G(x) = f_1, \quad P = \lambda, \quad f_0 = g_0 = 0, \quad g_1 = 1.$$

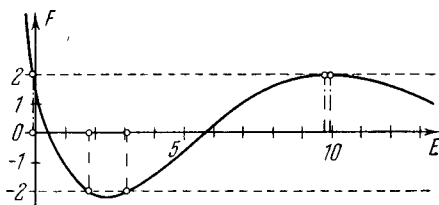


Рис. 4.3. Континуум собственных значений в области $|F| \leq 2$.

Пусть $m > n$; тогда, следовательно, $2m$ есть порядок дифференциального уравнения, а $2n$ — порядок выражения, умножаемого на λ . Далее предполагается

$$f_m \neq 0, \quad g_n \neq 0, \quad m > n \geq 0.$$

В зависимости от того, будет ли $n = 0$ или $n > 0$, рассмотрим следующие два случая.

1. Случай $n = 0$: тогда $N[y] = g_0 y$. К этому случаю относятся две группы задач в таблице I. Эти задачи назовем «частными задачами на собственные значения»¹⁾.

2. Случай $n > 0$: в таблице I это — задачи третьей и четвертой групп, которые называются «общими задачами на собственные значения».

К дифференциальному уравнению порядка $2m$ прибавляются еще $2m$ линейных однородных краевых условий

$$U_\mu[y] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2m). \quad (4.14)$$

Это — линейные однородные уравнения относительно значений y и его производных вплоть до порядка $(2m - 1)$ в двух фиксированных точках $x = a$ и $x = b$.

Одно из этих условий имеет вид

$$\sum_{\nu=0}^{2m-1} (\alpha_\nu y^{(\nu)}(a) + \beta_\nu y^{(\nu)}(b)) = 0,$$

где α_ν и β_ν суть заданные вещественные, не равные одновременно нулю постоянные (или также некоторые заданные функции собственного значения λ). $2m$ краевых условий (4.14) должны быть линейно независимыми.

Краевые условия подразделяются на главные и естественные²⁾:

Определение. Постараемся из возможно большего числа $2m$ данных краевых условий (4.14) устранить производные m -го и высших порядков посредством линейных комбинаций этих условий. В результате получим k краевых условий, которые содержат производные порядка не выше $(m - 1)$ и которые назовем «главными краевыми условиями», в то время как ни из одного из $(2m - k)$ оставшихся краевых условий все производные m -го и высших порядков не устраняются; последние называются «естественными краевыми условиями».

¹⁾ Здесь предполагается, что $g_0(x) \neq 0$. В литературе обсуждается также «полярный» случай, когда непрерывная функция $g_0(x)$ меняет знак; например, в работе Е. К а т к е, Math. Z. 45 (1939), 759.

²⁾ Е. К а т к е, Math. Z. 48 (1942), 67—100.

Если, например, в некоторой задаче второго порядка ¹⁾ ($m = 1$) имеют место краевые условия $y(a) + y'(a) = 0$, $y(b) + 2y'(a) = 0$, то можно посредством линейных комбинаций вывести новое краевое условие $2y(a) - y(b) = 0$, в котором первая производная больше не встречается; однако нельзя установить никакие другие краевые условия, линейно независимые от только что названных, которые не содержали бы никаких производных. В этом случае имеем, следовательно, главное краевое условие, а именно $2y(a) - y(b) = 0$, и естественное краевое условие, например $y(a) + y'(a) = 0$.

Содержащиеся в таблице I краевые условия уже разделены на эти две группы.

Для удобства терминологии целесообразно в дальнейшем ввести классификацию встречающихся функций. Установим следующие три класса вещественных функций, из которых каждый последующий представляет сужение (подмножество) предыдущего.

1. «Допустимые функции» — удовлетворяют главным краевым условиям и m -кратно непрерывно дифференцируемы.

2. «Функции сравнения» — удовлетворяют всем краевым условиям и $2m$ -кратно непрерывно дифференцируемы.

3. «Собственные функции» — удовлетворяют всем краевым условиям и дифференциальному уравнению. Функция $u \equiv 0$ при этом из всех трех классов исключается.

Примечание. Понятия «допустимые функции» и «функции сравнения» устанавливаются здесь только для случая, когда собственное значение λ не входит в краевые условия.

4.3. Самосопряженность. Принятые до сих пор ограничения все еще не являются достаточными. В примерах I и II п. 4.1 дифференциальные уравнения имеют форму, определяемую выражениями (4.11) — (4.13); однако мы не имели там нормального распределения собственных значений. В обоих примерах причина этого лежит в краевых условиях; в них нарушается свойство, называемое

¹⁾ Для частных задач в литературе встречаются еще следующие обозначения:

В случае дифференциального уравнения второго порядка ($m = 1$) условия носят названия:

$$y(a) = y(b) = 0 \text{ краевых условий первого рода,}$$

$$y'(a) = y'(b) = 0 \text{ краевых условий второго рода,}$$

$$c_1 y(a) + c_2 y'(a) = d_1 y(b) + d_2 y'(b) = 0 \text{ краевых условий третьего рода или также условий Штурма.}$$

В книге С. В. Визено, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939, 136 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, т. I, Гостехиздат, 1950] в задачах второго и четвертого порядка в связи с механическими представлениями главные краевые условия названы геометрическими, а естественные — динамическими.

в последующем «самосопряженностью». Это свойство в дальнейших исследованиях будет очень часто использоваться¹⁾.

Пусть a, b есть интервал, в котором рассматривается дифференциальное уравнение задачи. Обычно $x = a$ и $x = b$ являются точками, которые входят в краевые условия. Тогда имеем

Определение самосопряженности. *Рассматриваемая задача на собственные значения (4.11), (4.14) называется самосопряженной, если для двух любых функций сравнения u, v справедливо*

$$\int_a^b (uM[v] - vM[u]) dx = 0, \quad \int_a^b (uN[v] - vN[u]) dx = 0. \quad (4.15)$$

Является рассматриваемая задача на собственные значения самосопряженной или нет, легко установить при помощи интегрирования по частям.

Например, задача на собственные значения

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = Ay(0), \quad y'(l) = By(l)$$

является самосопряженной; здесь A и B — заданные числа. А именно, для двух функций u, v , удовлетворяющих граничным условиям, имеем

$$\int_0^l \{u(-v'') - v(-u'')\} dx = [-uv' + vu']_0^l + \int_0^l (u'v' - v'u') dx = 0,$$

так как если подставить

$$\begin{aligned} u'(0) &= Au(0), & u'(l) &= Bu(l), \\ v'(0) &= Av(0), & v'(l) &= Bv(l), \end{aligned}$$

то все сокращается.

Вообще самосопряженность можно дополнительно проверить при помощи интегрирования по частям следующим образом.

Образум на основе (4.15) выражение

$$\int_a^b uM[v] dx = \int_a^b u \sum_{v=0}^m (-1)^v [f_v(x) v^{(v)}]^{(v)} dx.$$

¹⁾ Название «самосопряженный» происходит из теории, в которой каждому обыкновенному линейному дифференциальному уравнению сопоставляется его «сопряженное» уравнение. Мы здесь не будем углубляться дальше в эту теорию.

Выделяем один из членов суммы и применяем ν -кратное интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} (-1)^\nu \int_a^b u [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu)} dx &= \\ &= (-1)^\nu [u [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1)}]_a^b + (-1)^{\nu-1} \int_a^b u' [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1)} dx = \\ &= (-1)^\nu [u [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu-1)} - u' [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu-2)} + u'' [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu-3)} - \dots]_a^b + \\ &\quad + \int_a^b u^{(\nu)} f_\nu(x) v^{(\nu)} dx. \quad (4.16) \end{aligned}$$

Точно так же преобразуем соответствующий член в $\int_a^b vM[u] dx$ и, так как интегралы справа взаимно сокращаются, получим в правой части только краевой член ¹⁾:

$$\begin{aligned} (-1)^\nu \int_a^b \{u [f_\nu v^{(\nu)}]^{(\nu)} - v [f_\nu u^{(\nu)}]^{(\nu)}\} dx &= \\ &= \left[\sum_{\rho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+\rho} \{u^{(\rho)} [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1-\rho)} - v^{(\rho)} [f_\nu(x) u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\rho)}\} \right]_a^b. \end{aligned}$$

Такие суммы должны быть образованы для каждого члена дифференциального выражения и просуммированы по ν . Тогда получается так называемое преобразование Дирихле ²⁾

$$\begin{aligned} \int_a^b (uM[v] - vM[u]) dx &= \\ &= \left[\sum_{\nu=0}^m \sum_{\rho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+\rho} \{u^{(\rho)} [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1-\rho)} - v^{(\rho)} [f_\nu(x) u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\rho)}\} \right]_a^b. \end{aligned} \quad (4.17)$$

¹⁾ Как это обычно принято в записи сумм, сумма для $\nu=1$ означает только член с $\rho=0$, а для $\nu=0$ сумма является пустой и заменяется нулем.

²⁾ П. Г. Дирихле, немецкий математик, родился 13 февраля 1805 г. в семье почтового служащего в Дюрене (район Аахена), жил долгое время (до 1822 г.) в Париже, в 1827 г. стал доцентом университета в Бреслау, в 1829 г. переселился в Берлин, в 1832 г. стал экстраординарным и в 1839 г. ординарным профессором математики Берлинского университета; с 1832 г. — член Берлинской академии наук, после смерти Гаусса в 1855 г. — профессор в Геттингене, где умер 5 мая 1859 г.

Если краевые условия таковы, что сумма обращается в нуль как для дифференциального выражения M , так и для N , то задача является самосопряженной.

Большинство задач таблицы I самосопряженные, но не все. Исключение составляет, например, задача об изгибных колебаниях «летающего» вала с гироскопическим эффектом, снабженного диском на конце.

Далее, все задачи таблицы VII, поскольку краевые условия оговариваются, являются самосопряженными, и нет необходимости для каждой задачи этого типа делать проверку на самосопряженность.

Обсудим некоторые простые следствия самосопряженности.

4.4. Обобщенная ортогональность. Будем исходить из предположения, что задача на собственные значения (4.11), (4.14) имеет собственные значения λ и собственные функции y и является самосопряженной. Пусть λ_i и λ_k — два различных собственных значения с соответствующими им собственными функциями y_i и y_k . Таким образом,

$$M[y_i] = \lambda_i N[y_i]$$

и

$$M[y_k] = \lambda_k N[y_k].$$

Тогда, имея в виду, что собственные функции являются и функциями сравнения, из самосопряженности получаем

$$0 = \int_a^b (y_i M[y_k] - y_k M[y_i]) dx$$

или, используя дифференциальное уравнение для собственных функций,

$$0 = \lambda_k \int_a^b y_i N[y_k] dx - \lambda_i \int_a^b y_k N[y_i] dx.$$

Оба интеграла равны (опять же вследствие самосопряженности), следовательно,

$$0 = (\lambda_k - \lambda_i) \int_a^b y_i N[y_k] dx.$$

Таким образом, в силу того, что $\lambda_k \neq \lambda_i$, следует

$$\int_a^b y_i N[y_k] dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_k. \quad (4.18)$$

Две заданные в интервале a, b интегрируемые функции $\psi(x), \phi(x)$ называются «ортогональными», если $\int_a^b \psi \phi dx = 0$. Так как в нашем

случае имеем не просто

$$\int_a^b y_i y_k dx = 0, \quad \text{но} \quad \int_a^b y_i N[y_k] dx = 0,$$

то говорят, что функции y_i и y_k являются «ортогональными в обобщенном смысле».

Если заменить в случае $\lambda_k \neq 0$ в (4.18) $N[y_k]$ на $\frac{1}{\lambda_k} M[y_k]$, то получим

$$\int_a^b y_i M[y_k] dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_k. \quad (4.19)$$

Это равенство действительно также в случае $\lambda_k = 0$, так как тогда $M[y_k] \equiv 0$.

Теорема. Если задача на собственные значения $M[y] = \lambda N[y]$ с краевыми условиями $U_\mu[y] = 0$ является самосопряженной и имеются два не равных друг другу собственных значения λ_i, λ_k с соответствующими им собственными функциями y_i, y_k , то последние ортогональны в обобщенном смысле, т. е. для них действительны соотношения (4.18), (4.19).

Частные случаи. В частных задачах на собственные значения $M[y] = \lambda g_0(x) y$ соотношение ортогональности имеет вид

$$\int_a^b g_0(x) y_i(x) y_k(x) dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_k. \quad (4.20)$$

Здесь, следовательно, функции $\sqrt{|g_0|} y_i$ и $\sqrt{|g_0|} y_k$ ортогональны в обычном смысле.

Если $N[y]$ имеет частный вид $[g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$ и в краевые условия входит требование, чтобы $y, y', \dots, y^{(n-1)}$ были равны нулю на обоих краях a и b , то в результате n -кратного интегрирования по частям получаем

$$\int_a^b y_i N[y_k] dx = \int_a^b g_n y_i^{(n)} y_k^{(n)} dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_k. \quad (4.21)$$

В этом случае, таким образом, функции $\sqrt{|g_n|} y_i^{(n)}$ ортогональны в обычном смысле.

Пример обобщенной ортогональности. Задача о продольном изгибе двусторонне защемленного стержня длины $l = 1$ (см. п. 1.2) формулируется в виде $y^{IV} = -\lambda y''$; $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$.

Нечетные собственные значения $\lambda_1, \lambda_3, \lambda_5, \dots$ определяются формулой

$$\lambda_{2r-1} = 4r^2\pi^2 \quad (r = 1, 2, 3, \dots),$$

а четные — соответственно формулой

$$\lambda_{2r} = 4z_r^2 \quad (r = 1, 2, 3, \dots),$$

где z_r суть положительные корни трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} z = z$.

Собственные функции, соответствующие нечетным собственным значениям, не меняют знак в основной области; здесь, таким образом, ортогональность в обычном смысле уже не имеет места. Например, y_1, y_3 явно не ортогональны. Однако вполне справедливо (4.18):

$$\int_0^1 y_i y_k'' dx = 0, \quad i \neq k.$$

В этом случае в силу условий $y_i(0) = y_i(1) = 0$ можно записать

$$\int_0^1 y_i' y_k' dx = 0,$$

т. е. y_i' образуют ортогональную систему функций (рис. 4.4). Кроме того, все y_i' по той же причине ортого-

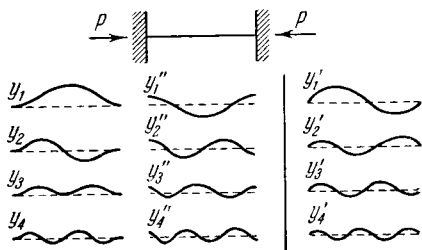


Рис. 4.4. К задаче о продольном изгибе. Функции y_i' и y_i образуют ортогональные системы.

нальны функции $u \equiv 1$. Равенство (4.19) показывает, что функции y_i'' также образуют ортогональную систему.

4.5. Вещественность собственных значений. Выясним, может ли задача на собственные значения (4.11), (4.14), которую мы предполагаем самосопряженной и в которой, как и во всех ранее рассмотренных задачах, все коэффициенты дифференциального уравнения и краевых условий вещественны, иметь комплексные собственные значения.

Некоторой вещественной собственной функции y , для которой $N[y] \neq 0$, обязательно соответствует вещественное собственное значение. Поэтому комплексному собственному значению $\lambda = s + it$ (где s, t вещественны, $t \neq 0$) при $N[y] \neq 0$ обязательно соответствует комплексная собственная функция $y(x) = u(x) + iv(x)$ (где u, v — вещественны). Тогда вследствие вещественности коэффициентов дифференциального уравнения и постоянных краевых условий комплексно сопряженная величина $\bar{\lambda} = s - it$ является также собственным значением, соответствующим собственной функции $\bar{y} = u - iv$. Вследствие предполагаемой самосопряженности имеем

$$0 = \int_a^b (yM[\bar{y}] - \bar{y}M[y]) dx.$$

Поскольку имеют место соотношения

$$M[\bar{y}] = \lambda N[\bar{y}], \quad M[y] = \lambda N[y],$$

то

$$0 = \bar{\lambda} \int_a^b y N [\bar{y}] dx - \lambda \int_a^b \bar{y} N [y] dx$$

или, опять в силу самосопряженности,

$$0 = (\bar{\lambda} - \lambda) \int_a^b y N [\bar{y}] dx. \quad (4.22)$$

Кроме того, имеем

$$\bar{\lambda} - \lambda = -2it.$$

Значит, если интеграл $\int_a^b y N [\bar{y}] dx \neq 0$, то из этого следует $t = 0$,

т. е. собственные значения могут быть только вещественными. В силу условия

$$N [u - iv] = N [u] - iN [v]$$

этот интеграл можно представить так:

$$\begin{aligned} \int_a^b (u + iv) N [u - iv] dx &= \\ &= \int_a^b u N [u] dx + i \int_a^b (v N [u] - u N [v]) dx + \int_a^b v N [v] dx. \end{aligned}$$

Здесь мнимое слагаемое равно нулю, так как и вещественная u , и мнимая v части u являются функциями сравнения. Рассматриваемый интеграл, следовательно, имеет вид

$$\int_a^b y N [\bar{y}] dx = \int_a^b (u N [u] + v N [v]) dx.$$

В частной задаче на собственные значения, когда $N [y] = g_0(x) y$, он принимает значение

$$\int_a^b g_0(x) (u^2 + v^2) dx,$$

и, так как тождественное равенство нулю u и v исключается, он отличен от нуля, если $g_0(x)$ имеет постоянный знак. Тогда все собственные значения вещественны. Вообще действительна

Теорема. Если задача на собственные значения (4.11), (4.14) имеет вещественные коэффициенты, является самосопряженной

и интеграл $\int_a^b uN[u] dx$ для всех функций сравнения сохраняет один и тот же знак, то все ее собственные значения вещественны. Последняя предпосылка выполняется, например, в частной задаче на собственные значения, если $g_0(x)$ имеет постоянный знак.

4.6. Формула Дирихле. Для более подробного исследования предпосылки, появившейся в последней теореме, естественно напрашивается мысль об общем рассмотрении интегралов

$$\int_a^b uM[u] dx \quad \text{и} \quad \int_a^b uN[u] dx.$$

Их можно преобразовать, точно так же как интеграл в (4.15), при помощи интегрирования по частям. $M[u]$ означает сумму (4.12), и из этой суммы, как в п. 4.3, выделяется один член. Результат интегрирования по частям имеет вид [он содержится уже в (4.16), если там подставить $u = v$]

$$\begin{aligned} (-1)^v \int_a^b u [f_v u^{(v)}]^{(v)} dx &= \\ &= \left[\sum_{\rho=0}^{v-1} (-1)^{v+\rho} u^{(\rho)} [f_v u^{(v)}]^{(v-1-\rho)} \right]_a^b + \int_a^b f_v (u^{(v)})^2 dx. \end{aligned}$$

При суммировании по v получается так называемая формула Дирихле

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b uM[u] dx &= \int_a^b \sum_{v=0}^m f_v (u^{(v)})^2 dx + M_0[u], \\ \text{где} \quad M_0[u] &= \left[\sum_{v=0}^m \sum_{\rho=0}^{v-1} (-1)^{v+\rho} u^{(\rho)} [f_v u^{(v)}]^{(v-1-\rho)} \right]_a^b. \end{aligned} \right\} \quad (4.23)$$

$M_0[u]$ называется краевым выражением Дирихле.

Точно так же для $N[u]$ можно вывести формулу

$$\int_a^b uN[u] dx = \int_a^b \sum_{v=0}^n g_v (u^{(v)})^2 dx + N_0[u], \quad (4.24)$$

где $N_0[u]$ — краевое выражение Дирихле, образованное так же, как и $M_0[u]$.

Пример. Для уже рассмотренной в п. 4.3 задачи на собственные значения

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = Ay(0), \quad y'(l) = By(l)$$

можно получить путем однократного интегрирования по частям в качестве

результата формулу Дирихле

$$\int_0^l u(-u'') dx = [u(-u')]_0^l - \int_0^l -u'u' dx = \int_0^l u'^2 dx - Bu^2(l) + Au^2(0). \quad (4.25)$$

При этом $M_0[u] = -Bu^2(l) + Au^2(0)$ есть краевое выражение Дирихле. При более простых краевых условиях (u или u' на краях равно нулю) оно бы исчезло, но здесь это выражение появляется (и должно быть, например, принято во внимание при применении метода Ритца, см. § 15).

4.7. Одночленный класс. Вещественность собственных значений гарантируется, согласно теореме п. 4.5, если, кроме самосопряженности задачи, выполняется еще предпосылка, что $\int_a^b uN[u] dx$ сохраняет постоянный знак для всех функций сравнения. Эта предпосылка выполняется не только в случае частных задач на собственные значения, но и в случае более обширного класса задач, так называемого «одночленного класса». Эти задачи образуют важный особый класс общих задач на собственные значения, с которым мы часто будем встречаться.

Определение одночленного класса. *Задача на собственные значения вида (4.11) — (4.14) принадлежит к одночленному классу, если: 1) дифференциальное выражение $N[u]$, которое является множителем при собственном значении λ , состоит только из члена*

$$N[y] = (-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)} \quad (4.26)$$

и 2) краевые условия (4.14) таковы, что для двух любых функций сравнения u, v действительно равенство

$$\int_a^b uN[v] dx = \int_a^b g_n(x) u^{(n)} v^{(n)} dx. \quad (4.27)$$

Пояснение. Таким образом, в случае одночленного класса дифференциальное уравнение имеет вид

$$M[y] = \lambda (-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}. \quad (4.28)$$

Условие (4.27) в каждом отдельном случае всегда может быть легко проверено при помощи интегрирования по частям (преобразование Дирихле согласно п. 4.3); например, (4.27) наверняка выполняется, если краевые условия таковы, что на краях $y^{(l)} [g_n y^{(n)}]^{(n-1-l)} = 0$ при $l = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

Одночленный класс, естественно, содержит частные задачи на собственные значения, т. е. задачи $M[y] = \lambda g_0 y$ с любыми краевыми

условиями; далее, задачи $M[u] = -\lambda(g_1(x)y')'$, если краевые условия таковы, что uy' на краях равно нулю. В таблице I задачи третьей группы принадлежат к одночленному классу.

Согласно формуле Дирихле (4.24) в задачах одночленного класса краевые выражения Дирихле, относящиеся к дифференциальному выражению $N[u]$, равны нулю, и из (4.27) непосредственно следует

$$\int_a^b uN[u] dx = \int_a^b g_n(u^{(n)})^2 dx$$

для всех функций сравнения u . Так как в соответствии с предпосылкой, принятой в п. 4.2, функция $g_n(x)$ имеет постоянный знак, справедлива

Теорема. *В случае самосопряженных задач одночленного класса, в которых для любых функций сравнения $u^{(n)} \not\equiv 0$, все собственные значения вещественны.*

4.8. Пример самосопряженной задачи с не вещественными собственными значениями. В примерах п. 4.1, в которых появляются не вещественные собственные значения, задачи были несамосопряженными. В теоремах пп. 4.5 и 4.7 о вещественности собственных значений самосопряженность была существенной предпосылкой. На вопрос о том, может ли самосопряженная задача вообще иметь только вещественные собственные значения, следует ответить отрицательно. Докажем это при помощи построения обратного примера. Возьмем в качестве дифференциального уравнения для самосопряженной задачи, не принадлежащей к одночленному классу, следующее:

$$(f_2 y''')' - (f_1 y')' + f_0 y = \lambda \{-(g_1 y')' + g_0 y\}. \quad (4.29)$$

Чтобы обеспечить самосопряженность подходящими краевыми условиями, положим

$$y(-1) = y'(-1) = y(1) = y'(1) = 0.$$

Этим краевым условиям, например, удовлетворяет функция

$$y = (x^2 - 1)^2 h(x),$$

где $h(x)$ четырежды непрерывно дифференцируема во всем замкнутом интервале $(-1, +1)$. Функция $h(x)$ должна быть комплексной, если собственное значение λ будет комплексным. Выберем $h(x) = x^2 + i$; таким образом,

$$y(x) = x^6 + x^4(i - 2) + x^2(1 - 2i) + i.$$

¹⁾ Как показывает пример II п. 5.7, нельзя отказаться от требования, что для всех функций сравнения $u^{(n)} \not\equiv 0$. Там $u' \equiv 0$ для функции сравнения $u \equiv 1$ и каждое число λ (в том числе любое комплексное число) является собственным значением.

Теперь можно легко указать уравнение типа (4.29), которому удовлетворяет y , представляя f_v и g_v в виде полиномов. Вычисление показывает, что y удовлетворяет следующему уравнению с незначительными собственными значениями¹⁾:

$$\begin{aligned} \frac{1}{6} \left[\left(\frac{-146}{7} x^4 + 21x^2 - 5 \right) y'' \right]'' + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1891}{7} x^2 - 1 \right) y' \right]' + 167y &= \\ &= \lambda \left\{ \frac{1}{2} [(-9x^2 + 121)y']' + 189y \right\}. \end{aligned}$$

4.9. Определенность задачи на собственные значения. Определение. *Задача на собственные значения называется «определенной», если все собственные значения являются вещественными и имеют один и тот же знак. Она называется «положительно определенной», если все $\lambda > 0$, и «отрицательно определенной», если все $\lambda < 0$. Задача называется «полуопределенной», если среди собственных значений встречается также число нуль, но все остальные собственные значения имеют один и тот же знак.*

Введем, далее, понятие «полностью определенной задачи».

Определение. *Задача на собственные значения с уравнением (4.11) называется полностью определенной, если для каждой функции сравнения и выполняются неравенства*

$$\int_a^b uM[u] dx > 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b uN[u] dx > 0. \quad (4.30)$$

В этом случае верна

Теорема. Полностью определенная задача на собственные значения является положительно определенной.

Например, если λ_k есть собственное значение полностью определенной задачи, соответствующее собственной функции y_k , то равенство

$$y_k M[y_k] = \lambda_k y_k N[y_k]$$

тождественно выполняется для всех x , и из этого равенства путем

¹⁾ В этом примере принятое в п. 4.2 требование $g_n(x) \neq 0$ выполняется в основном интервале $-1 \leq x \leq 1$. Если отказаться от этого требования, то то же самое положение вещей имеет место в следующем примере (сообщенном мне Виляндтом): самосопряженная задача на собственные значения

$$y'' + \frac{\cos^2 x}{1 + \cos^2 x} y = \lambda \frac{\cos x}{1 + \cos^2 x} y, \quad y'(0) = y'(\pi) = 0$$

имеет собственные значения $\lambda = i$, соответствующие собственным функциям $y = i + \cos x$.

интегрирования обеих частей в интервале a, b получаем

$$\lambda_k = \frac{\int_a^b y_k M[y_k] dx}{\int_a^b y_k N[y_k] dx}.$$

При названных предпосылках отношение

$$R[u] = \frac{\int_a^b u M[u] dx}{\int_a^b u N[u] dx}, \quad (4.31)$$

которое называют «отношением Рэля»¹⁾, может принимать только положительные значения, если u есть некоторая функция сравнения*). А так как все собственные функции являются функциями сравнения, то в силу равенства $R[y_k] = \lambda_k$ все собственные значения положительны.

Если к интегралам отношения Рэля применить формулу Дирихле, то получим

$$R[u] = \frac{\int_a^b \sum_{v=0}^m f_v [u^{(v)}]^2 dx + M_0[u]}{\int_a^b \sum_{v=0}^n g_v [u^{(v)}]^2 dx + N_0[u]}. \quad (4.32)$$

Из этого представления можно непосредственно получить достаточные условия определенности задачи, полагая, например, слагаемые в числителе и знаменателе порознь положительными. Это дает²⁾ следующее

Определение. *Самосопряженная задача на собственные значения (4.11) — (4.14) называется K-определенной, соответственно*

¹⁾ Джон Вильям Стретт (с 1873 г. лорд Рэлей) родился 12.XI 1842 г. в Лэнгфорд Гров (Эссекс), с 1869 г. — член «Тринити колледжа» в Кембридже; в 1879 г. стал преемником Максвелла в качестве профессора экспериментальной физики в Кембриджском университете. В 1877 г. завершил работу «Теория звука». С 1873 г. — член Лондонского королевского общества. Умер 30.VI 1919 г.

*) Выражение $R[u]$ сопоставляет каждой функции сравнения u некоторое число и, следовательно, согласно современной математической терминологии, является функционалом.

²⁾ Е. К а ш к е, Math. Z. 48 (1942), 71.

K -полуопределенной, если все функции f_v и g_v неотрицательны и краевые выражения Дирихле $M_0[u]$ и $N_0[u]$, рассматриваемые как квадратичные формы относительно значений u, u', u'', \dots [(см. (4.23), (4.24)], принимаемых ими на краях, являются положительно определенными, соответственно полуопределенными.

В этом случае действителен

Достаточный критерий. K -определенная задача на собственные значения является одновременно определенной.

K -определенность легко проверяется.

Кроме формулы Дирихле, имеются также другие преобразования, при помощи которых может быть проверена определенность задачи. Например, задача о колебаниях балки, изогнутой по дуге окружности (см. таблицу I),

$$-y^{VI} + 2y^{IV} - y'' = \lambda(-y'' + y)$$

с краевыми условиями

$$y(a) = y'(a) = y''(a) = y(b) = y'(b) = y''(b) = 0$$

или

$$y(a) = y'(a) = y'''(a) = y(b) = y'(b) = y'''(b) = 0$$

является положительно определенной, ибо с учетом краевых условий интегрирование по частям дает

$$\int_a^b u M[u] dx = \int_a^b u (-u^{VI} + 2u^{IV} - u'') dx = \int_a^b (u''' - u')^2 dx \geq 0.$$

Знак равенства может иметь место только при условии $u''' - u' \equiv 0$. Следовательно, u должно быть решением этого дифференциального уравнения и иметь, таким образом, форму

$$u = c_1 + c_2 e^x + c_3 e^{-x},$$

где c_1, c_2, c_3 — постоянные. Но тогда вследствие краевых условий $u \equiv 0$. Поэтому для каждой функции сравнения имеет место неравенство

$$\int_a^b u M[u] dx > 0.$$

Так как одновременно

$$\int_a^b u N[u] dx > 0,$$

то отсюда следует положительная определенность задачи.

Пример. Самосопряженная частная задача на собственные значения

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = Ay(0), \quad y'(l) = By(l),$$

согласно теореме п. 4.5, имеет только вещественные собственные значения. В п. 4.6 для этого примера уже была записана формула Дирихле. Согласно (4.25) краевое выражение Дирихле имеет вид

$$M_0[u] = -Bu^2(l) + Au^2(0).$$

Для $A > 0, B < 0$ имеем $M_0[u] \geq 0$. Следовательно, задача при этом является K -определенной, а все собственные значения заведомо неотрицательны. Расчет простой задачи при $\lambda = k^2$, когда общее решение дифференциального уравнения (постоянные интегрирования c_1, c_2)

$$y = c_1 \sin kx + c_2 \cos kx$$

подчинено краевым условиям, дает для k трансцендентное уравнение

$$\operatorname{tg} kl = \frac{k(A-B)}{AB + k^2}. \quad (4.33)$$

При любых A и B получается бесконечное множество положительных собственных значений λ . В каких случаях могли бы появиться отрицательные

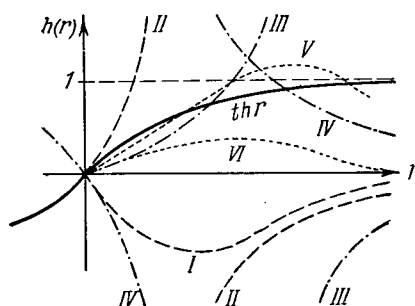


Рис. 4.5. К графическому решению уравнения (4.34).

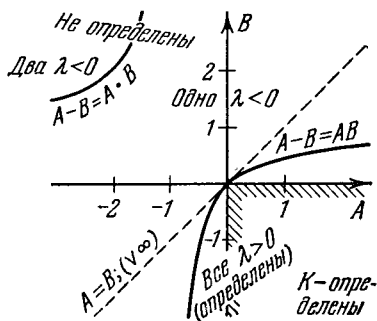


Рис. 4.6. К примеру п. 4.9. $A-B$ — области с отсутствием, с одним и с двумя отрицательными собственными значениями.

собственные значения λ ? Тогда k можно записать в виде $k = ir$ и, так как $\operatorname{tg} ilr = i \operatorname{th} lr$, уравнение для r принимает форму

$$\operatorname{th} lr = \frac{r(A-B)}{AB - r^2}. \quad (4.34)$$

Подставим $l = 1$ и найдем точки пересечения кривых $\operatorname{th} r$ и $h(r) = \frac{r(A-B)}{AB - r}$. Для $A > 0$ и $B < 0$ кривая $h(r)$ имеет форму I (рис. 4.5); в этом случае, следовательно, нет ни одной точки пересечения при $r \neq 0$, а значит, ни одного отрицательного собственного значения. Далее возможны еще кривые типов II (ни одного $\lambda < 0$), III и IV (по одному $\lambda < 0$), V (два $\lambda < 0$). Тип VI при вещественных A и B не имеет места. Плоскость AB разделяется на области с двумя, одним и совсем без отрицательных собственных значений. В частности, видно, что область K -определенности [квадрант $A > 0, B < 0$ (рис. 4.6)] не распространяется на всю область положительных собственных значений, следовательно, данный выше достаточный критерий определенности не является одновременно необходимым.

§ 5. Функция Грина для обыкновенных дифференциальных уравнений

Для дальнейшего понадобятся некоторые сведения о функциях Грина. Ниже они будут кратко рассмотрены и, для начала, вне зависимости от задач на собственные значения¹⁾.

5.1. Определение функции Грина. Пусть

$$L[y] = \sum_{\nu=0}^k p_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x) \quad (5.1)$$

есть некоторое линейное дифференциальное выражение, порядок которого k может быть четным или нечетным. Функции $p_{\nu}(x)$ предполагаются непрерывными и $p_k(x)$ для всех x отличны от нуля. Пусть, далее, рассматривается неоднородная краевая задача, в которой при заданной непрерывной функции $r(x)$ надо найти решение неоднородного дифференциального уравнения

$$L[y] = r(x), \quad (5.2)$$

которое удовлетворяет краевым условиям, как в (4.14):

$$U_{\mu}[y] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k). \quad (5.3)$$

Попытаемся построить функцию $G(x, \xi)$, так называемую «функцию Грина»²⁾ (именуемую также «функцией влияния»), которая разрешает краевую задачу в форме

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi \quad (5.4)$$

для любой заданной функции $r(x)$.

Функция Грина $G(x, \xi)$ определяется посредством следующих условий:

1. G как функция ξ при фиксированном x из интервала $a < \xi < b$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению $L[G] = 0$ при всех $x \neq \xi$. В каждой из двух треугольных областей $a \leq x \leq \xi \leq b$ и $a \leq \xi \leq x \leq b$ (рис. 5.2) G обладает частными производными

$$\frac{\partial^{\nu} G(x, \xi)}{\partial x^{\nu}} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots, k),$$

и эти производные в каждой из этих областей являются непрерывными функциями x и ξ .

¹⁾ Литература к § 5: E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, London, 1927, 205; E. Камке, Math. Z. 46 (1940), 234, 244; E. Камке, Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, т. I, изд. 3, Leipzig, 1944, 188. [Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., «Наука», 1965; см., например, Ф. М. Морс и Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. I, ИЛ, 1958.]

²⁾ Грин Джордж (1793—1841) — английский физик-теоретик.

2. G как функция x удовлетворяет крайним условиям $U_\mu[G] = 0$.

3. G для $x = \xi$ при $a < \xi < b$ непрерывна со своими производными по x вплоть до $(k-2)$ -го порядка, в то время как производные $(k-1)$ -го порядка испытывают скачок на величину $\frac{1}{p_k(\xi)}$.

Обозначив

$$G^v(x, \xi) = \frac{\partial^v G(x, \xi)}{\partial x^v}, \quad (5.5)$$

имеем

$$G(x, \xi), G'(x, \xi), \dots, G^{(k-2)}(x, \xi)$$

непрерывны при $x = \xi$

и

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [G^{(k-1)}(\xi + \varepsilon, \xi) - G^{(k-1)}(\xi - \varepsilon, \xi)] = \frac{1}{p_k(\xi)}$$

или, в более краткой записи,

$$G^{(k-1)}(\xi + 0, \xi) - G^{(k-1)}(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_k}. \quad (5.6)$$

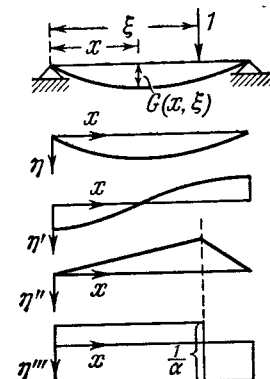


Рис. 5.1. Коэффициент влияния (прогиб в точке x под влиянием единичной нагрузки в точке ξ) в качестве функции Грина.

Вопрос об условиях существования функции Грина $G(x, \xi)$, удовлетворяющей всем выдвинутым здесь требованиям, будет исследован в п. 5.3.

Пример. В некоторых физических задачах почти непосредственно очевидно, как получить функцию Грина. Рассмотрим в качестве примера балку длины l на двух опорах, нагруженную на расстоянии ξ от левой опоры единичной силой (рис. 5.1). Тогда функция Грина $G(x, \xi)$ равна прогибу $\eta(x)$: $G(x, \xi) = \eta(x)$ при единичной нагрузке в точке ξ есть «функция влияния» $\varepsilon(x, \xi)$. Поперечная сила $Q = -(\alpha\eta'')$ в точке нагрузки $x = \xi$ испытывает скачок единичной величины, или при постоянном α , η'' испытывает скачок на величину $1/\alpha$, в то время как η , η' , η'' в точке $x = \xi$ непрерывны. Дифференциальное уравнение для прогиба $\eta(x)$ при плотности нагрузки $p(x)$ имеет вид

$$(\alpha\eta'')'' = p(x).$$

Крайевые условия: η и η'' равны нулю при $x = 0$ и $x = l$. $\eta = G(x, \xi)$ удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению $(\alpha\eta'')'' = 0$, за исключением точки приложения нагрузки $x = \xi$, и крайевым условиям.

Если вместо единичной силы действует нагрузка $p(\xi)\Delta\xi$, то прогиб равен $G(x, \xi)p(\xi)\Delta\xi$, а если по всей балке распределена нагрузка с интенсивностью $p(\xi)$, то полный прогиб будет

$$\eta(x) = \int_0^l G(x, \xi) p(\xi) d\xi,$$

т. е. становится очевидным, что при помощи функции Грина можно получить решение неоднородной краевой задачи в указанной интегральной форме.

5.2. Вывод формулы решения для краевой задачи. Положим, прежде всего, что для нашей краевой задачи (5.2), (5.3) имеется функция Грина $G(x, \xi)$, которая удовлетворяет выдвинутым в п. 5.1 условиям, и покажем, что тогда функция $F(x)$, определяемая интегралом

$$F(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi,$$

есть решение $y(x)$ указанной задачи. Дифференцируя эту функцию и используя обозначение (5.5), имеем

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_a^b G'(x, \xi) r(\xi) d\xi, & F''(x) &= \int_a^b G''(x, \xi) r(\xi) d\xi, \dots \\ \dots, F^{(k-1)}(x) &= \int_a^b G^{(k-1)}(x, \xi) r(\xi) d\xi = \int_a^x \dots + \int_x^b \dots \end{aligned}$$

При последующем дифференцировании необходимо учитывать, что $G^{(k-1)}(x, \xi)$ в точке $x = \xi$ испытывает скачок, соответственно чему интервал интегрирования от a до b точкой x подразделяется на два интервала:

$$\begin{aligned} F^{(k)}(x) &= \int_a^x \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} r(\xi) d\xi + \left[\frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} r(\xi) \right]_{\xi=x-0} + \\ &+ \int_x^b \frac{\partial^k G(x, \xi)}{\partial x^k} r(\xi) d\xi - \left[\frac{\partial^{k-1} G(x, \xi)}{\partial x^{k-1}} r(\xi) \right]_{\xi=x+0}. \end{aligned}$$

Здесь $[G^{(k-1)}(x, \xi)]_{\xi=x-0}$ есть предельная величина, причем ξ меньше, чем x , и стремится к x слева. Для этого предела можно также записать $[G^{(k-1)}(x, \xi)]_{x-\xi+0}$, так как $(k-1)$ -я производная G по x в области $a \leq \xi \leq x \leq b$ предполагается непрерывной функцией x и ξ (эта производная для $x = \xi$ принимается «односторонней»). Теперь можно использовать соотношение разрывности (5.6), из чего следует

$$F^{(k)}(x) = \int_a^b G^{(k)}(x, \xi) r(\xi) d\xi + \frac{r(x)}{p_k(x)}.$$

При подстановке в дифференциальное уравнение (5.1) получаем

$$L(F) = \sum_{\nu=0}^k p_\nu F^{(\nu)} = \int_a^b \left\{ \sum_{\nu=0}^k p_\nu(x) \frac{\partial^\nu G(x, \xi)}{\partial x^\nu} \right\} r(\xi) d\xi + \frac{r(x)}{p_k(x)} p_k(x).$$

Интеграл в правой части исчезает, так как G удовлетворяет однородному дифференциальному уравнению $L[G] = 0^1$; следовательно, имеем $L[F] = r(x)$. Далее, $F(x)$, так же как и $G(x, \xi)$, удовлетворяет всем краевым условиям и фактически является, таким образом, решением рассматриваемой краевой задачи. Вместе с тем, однако, еще нельзя сказать, является ли $F(x)$ единственным решением задачи.

Если имеется несколько, т. е. по крайней мере два, различных решений, например $F_1(x)$ и $F_2(x)$, то их разность $z(x) = F_1(x) - F_2(x)$ является тождественно не равным нулю решением аналогичной (5.2), (5.3) однородной задачи:

$$L[z] = 0, \quad U_\mu[z] = 0.$$

Если бы можно было показать, что эта однородная задача имеет только решение $z \equiv 0$, то тем самым было бы доказано, что неоднородная задача (5.2), (5.3) может иметь лишь единственное решение. Этот вопрос обсуждается в следующем пункте.

5.3. Построение функции Грина из фундаментальной системы.

В данном пункте исследуется остававшийся до сих пор открытым вопрос о существовании и единственности функции Грина, причем применяется метод, который одновременно может служить способом для построения функции Грина.

Однородное дифференциальное уравнение

$$L[y] = 0 \tag{5.7}$$

имеет фундаментальную систему из k линейно независимых решений z_1, z_2, \dots, z_k . (Решения обозначены z_i , а не y_i , так как y_i ниже обозначают собственные функции.) Итак, имеем

$$L[z_i] = 0.$$

Тогда общее решение уравнения (5.7) имеет вид

$$y = \sum_{i=1}^k c_i z_i,$$

где c_i — произвольные постоянные.

Так как функция Грина точно так же должна удовлетворять однородному дифференциальному уравнению, то с необходимостью следует возможность построения ее в каждой из двух областей $x \leq \xi$ и $x \geq \xi$ из решений z_i , взятых с разными коэффициентами c_i и c_i^*

¹⁾ G удовлетворяет дифференциальному уравнению $L[G] = 0$, за исключением точки $x = \xi$, но при интегрировании по ξ это не имеет значения.

в каждой области (см. рис. 5.2):

$$\left. \begin{aligned} G(x, \xi) &= \sum_{i=1}^k c_i z_i(x) = \sum_{i=1}^k (a_i + b_i) z_i(x), & x \leq \xi; \\ G(x, \xi) &= \sum_{i=1}^k c_i^* z_i(x) = \sum_{i=1}^k (a_i - b_i) z_i(x), & x \geq \xi. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Здесь c_i и c_i^* заменены соответственно на $a_i + b_i$ и $a_i - b_i$ (a_i и b_i — пока неизвестные функции ξ). Прежде всего, можно определить b_i из переходных условий в точке $x = \xi$.

Условие непрерывности функций $G(x, \xi)$, $G'(x, \xi)$, ..., $G^{(k-2)}(x, \xi)$ дает

$$\sum_{i=1}^k b_i z_i^{(\nu)}(\xi) = 0 \quad (\nu = 0, 1, \dots, k-2). \quad (5.9)$$

Наконец, условие скачка (5.6) для $G^{(k-1)}(x, \xi)$ требует

$$\sum_{i=1}^k b_i z_i^{(k-1)}(\xi) = -\frac{1}{2p_k(\xi)}. \quad (5.10)$$

Таким образом, для k неизвестных $b_i(\xi)$ получено k линейных уравнений, из которых всегда можно вычислить b_i , так как определитель системы этих уравнений

$$\begin{vmatrix} z_1(\xi) & z_2(\xi) & \dots & z_k(\xi) \\ z_1'(\xi) & z_2'(\xi) & \dots & z_k'(\xi) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ z_1^{(k-1)}(\xi) & z_2^{(k-1)}(\xi) & \dots & z_k^{(k-1)}(\xi) \end{vmatrix} \quad (5.11)$$

не равен нулю; это «определитель Вронского» для функций z_i . Он отличен от нуля вследствие того, что z_i предполагаются линейно независимыми¹⁾.

После того как b_i найдены, a_i вычисляются из краевых условий. Последние имеют вид

$$U_\mu[G] = U_\mu \left[\sum_{i=1}^k (a_i \pm b_i) z_i \right] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k).$$

Верхний знак применяется в том случае, если в краевых условиях рассматривается левый край $x = a$; при рассмотрении правого края

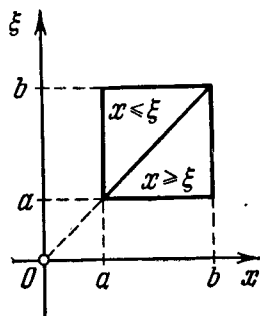


Рис. 5.2. Две области, $x \leq \xi$ и $x \geq \xi$, в случае функции Грина.

¹⁾ J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, изд. 2, Berlin — Leipzig, 1927, 57 [см., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М. — Л., Гостехиздат, 1952].

$x = b$ берется нижний знак. Вследствие линейности U_μ получаем, таким образом, для k неизвестных a_i столько же уравнений:

$$\sum_{i=1}^k a_i U_\mu [z_i] = \mp \sum_{i=1}^k b_i U_\mu [z_i] \quad (\mu = 1, 2, \dots, k). \quad (5.12)$$

Определитель этой системы уравнений имеет вид

$$|U_\mu [z_i]| = \begin{vmatrix} U_1 [z_1] & U_1 [z_2] & \dots & U_1 [z_k] \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ U_k [z_1] & U_k [z_2] & \dots & U_k [z_k] \end{vmatrix}. \quad (5.13)$$

Если $|U_\mu [z_i]| \neq 0$, a_i можно вычислить; в этом случае функция Грина существует, причем находится однозначно.

Если $|U_\mu [z_i]| = 0$, a_i из (5.12) либо не могут быть вычислены, либо находятся неоднозначно; в п. 5.7 при рассмотрении задачи на собственные значения показывается, что в этом случае равенство $|U_\mu [z_i]| = 0$ как раз представляет условие существования для собственных значений.

Согласно (5.8) можно, таким образом, в случае, если $|U_\mu [z_i]| \neq 0$, записать функцию Грина в форме

$$G(x, \xi) = \underbrace{\sum_{i=1}^k a_i z_i(x)}_{G_1(x, \xi)} \pm \underbrace{\sum_{i=1}^k b_i z_i(x)}_{G_2(x, \xi)} \begin{cases} + \text{ при } x \leq \xi, \\ - \text{ при } x \geq \xi, \end{cases} \quad (5.14)$$

причем $G_1(x, \xi)$ непрерывно, а $G_2(x, \xi)$ имеет разрыв $(k-1)$ -й производной.

Функция Грина, следовательно, составляется из двух частей; первая часть $G_1(x, \xi)$ k раз непрерывно дифференцируема по x , другая часть $G_2(x, \xi)$ испытывает скачок $(k-1)$ -й производной.

Элемент G_2 всегда определен, так как определитель системы уравнений для b_i не обращается в нуль; в противоположность этому элемент G_1 существует лишь в случае, когда определитель $|U_\mu [z_i]|$ не равен нулю. Согласно правилу Грама при вычислении a_i этот определитель появляется в знаменателе и можно записать

$$G_1(x, \xi) = \frac{H(x, \xi)}{\det |U_\mu [z_i]|},$$

причем числитель $H(x, \xi)$ существует всегда, а именно, $H(x, \xi)$ как линейная комбинация из $z_i(x)$ при постоянном ξ есть решение однородного дифференциального уравнения: $L[H] = 0$. G_2 не зависит от краевых условий, зато G_1 зависит от них.

Определитель (5.13) появляется также при рассмотрении вопроса о том, имеет ли аналогичная (5.2), (5.3) однородная краевая задача

$$L[y] = 0, \quad U_\mu[y] = 0$$

нетривиальное (тождественно не равное нулю) решение y . Такое решение y должно допускать представление его в виде

$$y(x) = \sum_{i=1}^n C_i z_i(x),$$

где C_i — постоянные, удовлетворяющие системе уравнений:

$$\sum_{i=1}^n C_i U_\mu[z_i] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k).$$

Определителем этой системы уравнений снова является определитель (5.13). Числа C_i не равны одновременно все нулю, а однородная краевая задача имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, если $|U_\mu[z_i]| = 0$. Если же $|U_\mu[z_i]| \neq 0$, однородная задача имеет только решение $y \equiv 0$; в этом случае решение неоднородной задачи находится однозначно.

Итак, в результате получается

Теорема. Пусть $z_1(x), \dots, z_k(x)$ есть фундаментальная система (k линейно независимых решений) обыкновенного линейного однородного дифференциального уравнения k -го порядка $L[y] = 0$. Если в точках $x = a$ и $x = b$ налагаются k (линейно независимых) линейных однородных краевых условий $U_\mu[y] = 0$ ($\mu = 1, 2, \dots, k$), то в случае, когда $|U_\mu[z_i]| \neq 0$, имеется однозначно устанавливаемая при помощи трех названных в п. 5.1 требований функция Грина $G(x, \xi)$. Она разрешает краевую задачу $L[y] = r(x)$, $U_\mu[y] = 0$ при произвольной правой части $r(x)$ посредством формулы решения (5.4), причем решение это является единственным. В случае же, если определитель $|U_\mu[z_i]|$ равен нулю, однородная краевая задача $L[y] = 0$, $U_\mu[y] = 0$ имеет тождественно не равное нулю решение.

Подробно просчитанный пример построения функции Грина согласно описанному методу дан в п. 7.8, упражнение 2.

Дополнение. Частные производные $\frac{\partial^{\rho+\sigma} G(x, \xi)}{\partial x^\rho \partial \xi^\sigma}$ при $0 \leq \rho + \sigma \leq k - 2$ являются непрерывными функциями x и ξ .

Именно, если эти производные образованы от G в форме (5.8), то можно показать, что в точке $x = \xi$ элементы, полученные из

$\sum_{i=1}^k b_i(\xi) z_i(x)$, исчезают. Дифференцируя первое уравнение (5.9),

представляющее тождество относительно ξ , получаем¹⁾

$$\sum_{i=1}^k \frac{db_i}{d\xi} z_i + b_i(\xi) z'_i(\xi) = 0,$$

т. е. вследствие второго уравнения (5.9)

$$\sum_{i=1}^k \frac{db_i}{d\xi} z_i(\xi) = 0, \quad (5.15)$$

следовательно, $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial \xi}$ непрерывна; аналогично, дифференцируя второе уравнение (5.9), получаем

$$\sum_{i=1}^k \frac{db_i}{d\xi} z'_i(\xi) = 0, \quad (5.16)$$

т. е. $\frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x \partial \xi}$, и точно так же $\frac{\partial^3 G(x, \xi)}{\partial x^2 \partial \xi}$, ..., $\frac{\partial^{k-2} G(x, \xi)}{\partial x^{k-3} \partial \xi}$, непрерывна. Далее, дифференцируя (5.15) с учетом (5.16), получаем

$$\sum_{i=1}^k \frac{d^2 b_i}{d\xi^2} z_i(\xi) = 0,$$

т. е. $\frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial \xi^2}$ непрерывна, а при дифференцировании (5.15) подтверждается непрерывность $\frac{\partial^3 G(x, \xi)}{\partial x \partial \xi^2}$ и т. д.

5.4. Симметрия функции Грина $G(x, \xi) = G(\xi, x)$ для самосопряженной краевой задачи. Пусть теперь краевая задача (5.2), (5.3) является самосопряженной²⁾; это значит, что: 1) дифференциальное уравнение имеет четный порядок $k = 2m$ и записывается в виде

$$L[y] = M[y] = \sum_{v=0}^m (-1)^v [f_v(x) y^{(v)}(x)]^{(v)} = r(x)$$

и 2) краевые условия $U_\mu[y] = 0$ таковы, что для любых функций сравнения u, v

$$\int_a^b (uM[v] - vM[u]) dx = 0.$$

¹⁾ В последующем доказательстве используется то обстоятельство, что функции $b_i(\xi)$ обладают непрерывными производными до $(k-2)$ -го порядка. Это обеспечено, если функции $p_\nu(x)$ предположить не только непрерывными, как в п. 5.1, но даже $(k-2)$ раз непрерывно дифференцируемыми. Этой дополнительной предпосылки можно, однако, избежать, см. Е. К а т к е, Math. Z. 46 (1940), 272.

²⁾ До сих пор понятие самосопряженности вводилось только в случае задач на собственные значения.

При помощи преобразования Дирихле (см. п. 4.3) этот интеграл в общем случае трансформируется в краевое выражение порядка $2m - 1$:

$$\int_a^b (uM[v] - vM[u]) dx = [S(u, v)]_a^b. \quad (5.17)$$

Здесь

$$S(u, v) = \sum_{\nu=0}^m \sum_{\rho=0}^{\nu-1} (-1)^{\nu+\rho} \{u^{(\rho)} [f_\nu(x) v^{(\nu)}]^{(\nu-1-\rho)} - v^{(\rho)} [f_\nu(x) u^{(\nu)}]^{(\nu-1-\rho)}\}$$

есть билинейная форма относительно u , v и их производных до $(2m-1)$ -го порядка, а именно, согласно (4.17) производные $(2m-1)$ -го порядка $u^{(2m-1)}$, $v^{(2m-1)}$ появляются в сумме только при $\rho = 0$, $\nu = m$, так что можно записать

$$S(u, v) = (-1)^m \{f_m(uv^{(2m-1)} - v u^{(2m-1)})\} + \text{низшие производные.}$$

Предположим теперь, что для рассматриваемой краевой задачи функция Грина существует, и образуем эту функцию для двух произвольных, однако в дальнейшем фиксированных точек $\xi = \xi_1$ и $\xi = \xi_2$ при $a < \xi_1$, $\xi_2 < b$; обозначим эти функции $G_{(1)}$ и $G_{(2)}$:

$$G_{(1)} = G_{(1)}(x) = G(x, \xi_1), \quad G_{(2)} = G(x, \xi_2).$$

Тогда имеем

$$\int_a^b (G_{(1)}M[G_{(2)}] - G_{(2)}M[G_{(1)}]) dx = 0,$$

так как

$$M[G_{(1)}] = M[G_{(2)}] = 0,$$

т. е. потому, что G , за исключением точки $x = \xi_1$ и соответственно $x = \xi_2$, удовлетворяет дифференциальному уравнению [но не вследствие самосопряженности, так как $G_{(1)}$ и $G_{(2)}$ из-за разрывности $(2m-1)$ -й производной не являются функциями сравнения]. С другой стороны, приведенный выше интеграл можно оценить путем: а) разбиения интервала интегрирования a , b на три частичных интервала: от a до $\xi_1 - \varepsilon$, от $\xi_1 + \varepsilon$ до $\xi_2 - \varepsilon$ и от $\xi_2 + \varepsilon$ до b ; б) применения в каждом из этих частичных интервалов преобразования (5.17) и в) устремления ε к нулю. Таким образом, получается

$$\begin{aligned} 0 &= \int_a^b = \int_a^{\xi_1-\varepsilon} + \int_{\xi_1+\varepsilon}^{\xi_2-\varepsilon} + \int_{\xi_2+\varepsilon}^b = \\ &= [S(G_{(1)}, G_{(2)})]_a^{\xi_1-\varepsilon} + [S(G_{(1)}, G_{(2)})]_{\xi_1+\varepsilon}^{\xi_2-\varepsilon} + [S(G_{(1)}, G_{(2)})]_{\xi_2+\varepsilon}^b = \\ &= [S(G_{(1)}, G_{(2)})]_a^b - [S(G_{(1)}, G_{(2)})]_{\xi_1-\varepsilon}^{\xi_1+\varepsilon} - [S(G_{(1)}, G_{(2)})]_{\xi_2-\varepsilon}^{\xi_2+\varepsilon}. \end{aligned}$$

Далее, вследствие допущения о самосопряженности задачи имеем

$$[S(G_{(1)}, G_{(2)})]_a^b = 0.$$

Точно так же в выражении $[S(G_{(1)}, G_{(2)})]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}$ исчезают все величины, содержащие производные порядка ниже, чем $2m - 1$, так как они непрерывны; лишь в производных $(2m - 1)$ -го порядка вследствие соотношения разрывности (5.6)

$$G_{(1)}^{(k-1)}(\xi_1 + 0) - G_{(1)}^{(k-1)}(\xi_1 - 0) = \frac{1}{P_k(\xi_1)} = \frac{(-1)^m}{f_m(\xi_1)}$$

остается

$$-(-1)^m f_m(\xi_1) G_{(2)}(\xi_1) \frac{(-1)^m}{f_m(\xi_1)}.$$

Соответственно в выражении $[S(G_{(1)}, G_{(2)})]_{\xi_2-0}^{\xi_2+0}$ остается

$$(-1)^m f_m(\xi_2) G_{(1)}(\xi_2) \frac{(-1)^m}{f_m(\xi_2)}.$$

Обе величины в сумме дают нуль, т. е. на самом деле имеем

$$G(\xi_1, \xi_2) = G(\xi_2, \xi_1). \quad (5.18)$$

Это равенство утверждает свойство симметрии функции Грина.

Другое доказательство¹⁾ симметрии функции Грина $G(x, \xi)$ для самосопряженной задачи (5.2), (5.3) основано на использовании непосредственно формулы решения (5.4). Пусть $r(x)$ и $s(x)$ — две непрерывные, а в остальном произвольные, заданные в основном интервале $a \leq x \leq b$ функции, а $u(x)$ и соответственно $v(x)$ — решения краевых задач:

$$\begin{aligned} L[u] &= r(x) & U_\mu[u] &= 0, \\ L[v] &= s(x) & U_\mu[v] &= 0. \end{aligned}$$

Согласно формуле решения (5.4) это означает

$$u(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi, \quad v(x) = \int_a^b G(x, \xi) s(\xi) d\xi.$$

В силу допущения о самосопряженности имеем

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u]) dx = 0$$

или, подставляя выражения для u , v , $L[u]$, $L[v]$:

$$\int_a^b \int_a^b (G(x, \xi) - G(\xi, x)) r(\xi) s(x) d\xi dx = 0;$$

¹⁾ Это доказательство сообщил мне Г. Зейферт.

при этом во втором члене x и ξ меняются местами. Вследствие произвольности функций $r(x)$ и $s(x)$ это равенство требует обращения в нуль множителя

$$\varphi(x, \xi) = G(x, \xi) - G(\xi, x);$$

так как если $\varphi(x, \xi)$ в некоторой точке квадрата $a < x, \xi < b$ отлично от нуля, например положительно при $x = x_0, \xi = \xi_0$, то в силу непрерывности G оно было бы положительно в малом квадрате $|x - x_0| \leq \delta, |\xi - \xi_0| \leq \delta$. Если при этом взять непрерывные функции $s(x)$ и $r(x)$ положительными при $|x - x_0| < \delta$ и $|\xi - \xi_0| < \delta$ соответственно (исключая значения $s(x) \equiv 0$ и $r(\xi) \equiv 0$), то двойной интеграл не был бы равен нулю. Имеем, следовательно,

$$G(x, \xi) \equiv G(\xi, x).$$

5.5. Простые примеры функции Грина. 1. Функцию Грина для дифференциального уравнения $M[y] = -y''$ и краевых условий $y(0) = y(1) = 0$ можно легко найти при помощи метода, приведенного в п. 5.3:

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x(1-\xi) & \text{при } x \leq \xi, \\ \xi(1-x) & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

На рис. 5.3 G и $\frac{\partial G}{\partial x}$ как функции x и ξ нанесены в аксонометрической проекции.

2. Для задачи

$$M[y] = -y'', \quad y(0) = y'(1) = 0$$

функция Грина имеет вид

$$G(x, \xi) = \begin{cases} x & \text{при } x \leq \xi, \\ \xi & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

Рис. 5.4 демонстрирует те же G и $\frac{\partial G}{\partial x}$ как функции x и ξ в аксонометрической проекции.

Можно утверждать: функция Грина $G(x, \xi)$ симметрична относительно биссектрисы $x = \xi$.

Напротив, функция $\frac{\partial G(x, \xi)}{\partial x}$ уже не симметрична! Кроме того, видно, что скачок $\frac{\partial G}{\partial x}$ в ξ -направлении имеет обратный знак по сравнению со скачком в x -направлении:

$$G'(x, x+0) - G'(x, x-0) = 1, \quad G'(x+0, x) - G'(x-0, x) = -1.$$

3. Для задачи

$$M[y] = \alpha y^{IV}, \quad y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) = 0,$$

где α постоянно, функция Грина просто равна прогибу (рис. 5.1); пример аналогичен приведенному в п. 5.1.

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{x(\xi-l)}{6l\alpha} (x^2 + \xi^2 - 2l\xi) & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\xi(x-l)}{6l\alpha} (\xi^2 + x^2 - 2lx) & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

Здесь величина

$$\frac{\partial^2 G(x, \xi)}{\partial x^2} = \begin{cases} \frac{x(\xi - l)}{l\alpha} & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\xi(x - l)}{l\alpha} & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

с точностью до постоянного множителя равна функции Грина для примера 1 при $l = 1$.

4. Для задачи

$$M[y] = -y'' - \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = \lambda y(1),$$

подставляя $\lambda = k^2$, получим

$$G(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\sin kx}{k} \left[\frac{\sin k\xi (k \cos k + \sin k)}{\cos k - k \sin k} + \cos k\xi \right] & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\sin k\xi}{k} \left[\frac{\sin kx (k \cos k + \sin k)}{\cos k - k \sin k} + \cos kx \right] & \text{при } x \geq \xi. \end{cases}$$

Функцию Грина, следовательно, также можно построить, если параметр λ

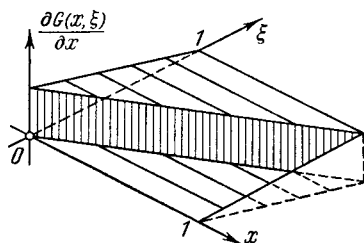
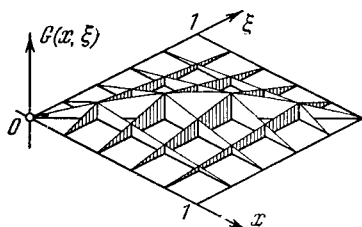


Рис. 5.3. Функция Грина $G(x, \xi)$ и ее первая частная производная по x для дифференциального выражения $-y''$ при нулевых значениях на краях.

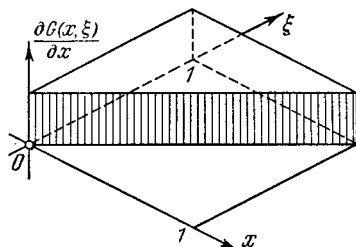
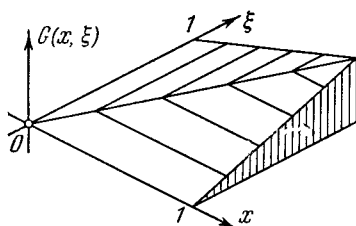


Рис. 5.4. Функция Грина и ее первая частная производная по x для второго примера в п. 5.5.

входит в дифференциальное уравнение и в краевые условия. Это приводит нас к следующему классу задач на собственные значения.

5.6. Резольвента Грина для несобственных значений. В качестве краевой задачи рассмотрим теперь самосопряженную задачу на собственные значения

$$\left. \begin{aligned} L[y] &\equiv M[y] - \lambda N[y] = 0, \\ U_\mu[y] &= U_\mu[y, \lambda] = 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.19)$$

в которой, возможно, выполняются предпосылки п. 4.2; единственное отличие от пп. 5.1—5.4 состоит в том, что здесь появляется параметр λ . Функция Грина будет теперь зависеть еще и от λ :

$$G(x, \xi) = G(x, \xi, \lambda).$$

Функцию Грина $G(x, \xi, \lambda)$ называют тогда также «резольвентой Грина». При этом под λ понимается параметр, который может принимать любые значения, за исключением собственных. (Согласно теореме п. 5.3 функция Грина существует, если однородная краевая задача имеет только решение $y \equiv 0$, т. е. если λ не является собственным значением.) Тогда, следовательно, величина

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda) r(\xi) d\xi \quad (5.20)$$

есть решение краевой задачи

$$\left. \begin{aligned} L[y] &\equiv M[y] - \lambda N[y] = r(x), \\ U_\mu[y, \lambda] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.21)$$

5.7. Условия существования собственных значений. В задаче на собственные значения (5.19) функции $z_i(x)$ фундаментальной системы (см. п. 5.3) дифференциального уравнения $M[y] - \lambda N[y] = 0$ зависят также от λ : $z_i(x) = z_i(x, \lambda)$. Линейные комбинации их должны давать собственные функции y :

$$y = \sum_{i=1}^{2m} C_i z_i(x).$$

При этом C_i должны быть определены так, чтобы были удовлетворены краевые условия

$$\sum_{i=1}^{2m} C_i U_\mu[z_i, \lambda] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2m). \quad (5.22)$$

Это — $2m$ линейных однородных уравнений для $2m$ неизвестных C_i , которые имеют нетривиальное решение в том случае, когда определитель из коэффициентов равен нулю. Это есть как раз определитель, уже фигурировавший в (5.13):

$$\Delta(\lambda) = \det |U_\mu[z_i, \lambda]| = 0. \quad (5.23)$$

Последнее уравнение есть условие существования чисел $C_i \neq 0$, т. е. существования собственных функций. Итак, уравнение (5.23) есть уравнение для собственных значений λ .

Теперь, если воспользоваться сведениями из аналитической теории обыкновенных дифференциальных уравнений, можно сделать некоторые общие заключения о локализации собственных значений. В этом и в последующих пунктах привлекаются поэтому теоремы из этой

теории. Используем, во-первых, теорему о зависимости решений дифференциального уравнения от параметров.

Если коэффициенты дифференциального уравнения и начальных условий являются дифференцируемыми функциями некоторого параметра λ и, следовательно, с рассматриваемой точки зрения являются аналитическими функциями λ , то решения также суть аналитические функции λ ¹⁾.

Параметр λ входит в дифференциальное уравнение (5.19) линейно, следовательно, решения $z_i(x, \lambda)$, которые могут быть определены постоянными, не зависящими от λ начальными условиями, являются регулярными функциями λ , а именно, $z_i(x, \lambda)$ — целые функции λ для фиксированного x из области $a \leq x \leq b$.

Если λ входит в краевые условия аналитически, то $\Delta(\lambda)$ также является аналитической функцией λ . В примерах таблицы I λ встречается в краевых условиях, если оно вообще в них входит, всегда лишь в первой степени, т. е. $U_\mu[z_i]$ является целой функцией λ . Значит, $\Delta(\lambda)$ также есть целая функция λ ; поэтому справедливо следующее утверждение:

Либо $\Delta(\lambda)$ есть тождественный нуль, тогда каждое λ является собственным значением, либо уравнение $\Delta(\lambda) = 0$ обладает, самое большее, бесконечным счетным множеством изолированных нулевых точек без точки сгущения в конечной области. В этом случае собственные значения можно расположить в порядке возрастания их модулей:

$$0 \leq |\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq |\lambda_3| \leq \dots$$

Пример I. Каждое λ является собственным значением. В задаче на собственные значения

$$L[y] = -y'' - \lambda y = 0, \quad U_1[y] = y(0) - y(1) = 0, \quad U_2[y] = y'(0) + y'(1) = 0$$

функции

$$z_1 = \sin kx, \quad z_2 = \cos kx,$$

где $\lambda = k^2 \neq 0$, образуют фундаментальную систему²⁾. Уравнение (5.23) здесь будет

$$\begin{vmatrix} -\sin k & 1 - \cos k \\ k(1 + \cos k) & -k \sin k \end{vmatrix} = k(\sin^2 k + \cos^2 k - 1) = 0.$$

¹⁾ J. Horn, Gewöhnliche Differentialgleichungen, изд. 2, Berlin — Leipzig, 1927, гл. 8 [см., например, Н. М. Матвеев, Дифференциальные уравнения, изд. ЛГУ, 1965].

²⁾ Фундаментальная система из целых функций λ : $z_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \sin \sqrt{\lambda} x$, $z_2 = \cos \sqrt{\lambda} x$, удовлетворяет свободным от λ начальным условиям:

$$z_1(0) = 0, \quad z_1'(0) = 1, \quad z_2(0) = 1, \quad z_2'(0) = 0.$$

Это равенство выполняется для каждого k , значит, все значения (не должны исключаться также комплексные числа λ и $\lambda = 0$) являются собственными значениями. Им отвечают собственные функции $y = \cos k \left(x - \frac{1}{2} \right)$.

Пример II. Задача о продольном изгибе. В случае продольного изгиба стержня постоянного сечения с защемленными, но подвижными концами (рис. 5.5), имеем задачу на собственные значения вида

$$y^{IV} = -\lambda y'',$$

$$y'(0) = y'''(0) = y'(l) = y'''(l) = 0.$$

Здесь $\lambda = \frac{P}{a}$ (где P есть сжимающая сила и a — жесткость на изгиб) и краевые условия означают равенство нулю наклона и поперечной силы на краях. Каждое значение λ является собственным значением, соответствующим собственной функции $y = \text{const}$, и стержень может сдвигаться параллельно самому себе. Кроме того, имеется последовательность собственных значений

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots),$$

соответствующих собственным функциям $y_n = \cos \frac{n\pi x}{l}$; эти собственные значения, таким образом, являются «двукратно вырожденными».

Дополнение о двукратно вырожденных собственных значениях. В последнем примере появился термин *двукратно вырожденные* собственные значения. Определение вырожденных собственных значений дано в п. 5.9. Здесь скажем только: число λ называется двукратно вырожденным собственным значением, если ему отвечают две линейно независимые собственные функции. Докажем используемую в п. 5.8 теорему: если λ_j — двукратно вырожденное собственное значение, то производная возникающего в (5.23) определителя $\Delta(\lambda)$ обращается в нуль в точке $\lambda = \lambda_j$ ¹⁾

$$0 = \left(\frac{d}{d\lambda} \Delta(\lambda) \right)_{\lambda = \lambda_j}. \quad (5.24)$$

Одному такому собственному значению λ_j отвечают, согласно выше данному определению, две линейно независимые собственные функции $y^{(1)}, y^{(2)}$, а значит, две линейно независимые системы решений $C_i^{(1)}, C_i^{(2)}$ системы уравнений (5.22). Так как постоянные множители при C_i произвольны, можно положить $C_i^{(1)} = C_i^{(2)} = 1$ [возможно, после

¹⁾ Теорема может быть также обращена и обобщена на многократно вырожденные собственные значения. Вырожденность собственного значения λ_j в случае самосопряженной задачи совпадает с кратностью, которую имеет λ_j как нулевая точка $\Delta(\lambda)$. См. список на стр. 94.

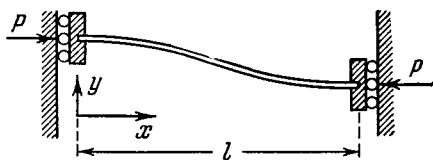


Рис. 5.5. Задача о продольном изгибе для стержня с защемленно-подвижными концами.

перенумерации z_1, z_2, \dots, z_{2m} , если при первоначальной нумерации $C_1^{(1)}$ или $C_2^{(2)}$ должны обратиться в нуль; при этом у определителя (5.23), самое большее, изменится знак]. Сложим теперь в определителе (5.23) [он выписан в (5.13)] элементы i -х столбцов для $i = 2, 3, \dots, 2m$, умноженные на $C_i^{(1)}$, с элементами первого столбца и элементы i -х столбцов для $i = 1, 3, 4, \dots, 2m$, умноженные на $C_i^{(2)}$, с элементами второго столбца; тогда в первом и втором столбцах (5.13), согласно (5.22), останутся одни нули. Если теперь продифференцировать определитель, дифференцируя нужные столбцы и складывая получающиеся определители, то производные для $\lambda = \lambda_i$ обратятся в нули, так как каждый из определителей содержит по меньшей мере один нулевой столбец, т. е. действительно (5.24).

5.8. Поведение резольвенты Грина в точках собственных значений λ . Пусть $\lambda = \lambda_1$ есть собственное значение, а именно простой корень характеристического уравнения (5.23)

$$\Delta(\lambda_1) = 0.$$

Имеем $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \Delta^*(\lambda)$, и $\Delta^*(\lambda)$ есть аналитическая функция λ , причем $\Delta^*(\lambda_1) \neq 0$.

Функция Грина согласно (5.14) имеет вид

$$G(x, \xi, \lambda) = G_1(x, \xi, \lambda) + G_2(x, \xi, \lambda) = \frac{H(x, \xi, \lambda)}{\Delta(\lambda)} + G_2(x, \xi, \lambda).$$

Здесь H и G_2 — целые функции λ , поэтому $G(x, \xi, \lambda)$ является «мероморфной» функцией λ , т. е. G во всей λ -плоскости, исключая полюсы, регулярна, а именно G имеет полюсы в точках собственных значений λ_i ; умножение на $(\lambda - \lambda_1)$ дает

$$G(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1) = \frac{H(x, \xi, \lambda)}{\Delta^*(\lambda)} + (\lambda - \lambda_1) G_2(x, \xi, \lambda). \quad (5.25)$$

Выражение в левой части при $\lambda = \lambda_1$ не определено, так как в этом случае функция Грина не существует. Выражение же в правой части имеет вполне определенный предел, когда λ стремится к λ_1 . При этом отношение H/Δ^* остается регулярным, второй член в правой части стремится к нулю, следовательно, левая часть $G(x, \xi, \lambda)(\lambda - \lambda_1)$ при $\lambda \rightarrow \lambda_1$ имеет предел

$$\frac{H(x, \xi, \lambda_1)}{\Delta^*(\lambda_1)};$$

она является, в частности, регулярной при $\lambda = \lambda_1$, если ее рассматривать как функцию λ при любых, но фиксированных x и ξ . Теперь утверждается, что эта предельная функция $\frac{H(x, \xi, \lambda_1)}{\Delta^*(\lambda_1)}$ есть соответствующая λ_1 собственная функция. $H(x, \xi, \lambda)$ является $2m$ раз непрерывно дифференцируемой и, согласно (5.3), как линейная комбинация решений фундаментальной системы удовлетворяет во всем ин-

тервале $a \leq x \leq b$ дифференциальному уравнению (5.19) при $\lambda = \lambda_1$. Далее, для каждого $\lambda \neq \lambda_i$ функция $G(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет крайевым условиям $U_\mu = 0$, т. е. имеет место

$$U_\mu [G(x, \xi, \lambda) (\lambda - \lambda_1)] = 0 \text{ при } \lambda \neq \lambda_1,$$

а значит, и в пределе¹⁾

$$U_\mu \left[\lim_{\lambda \rightarrow \lambda_1} G(x, \xi, \lambda) (\lambda - \lambda_1) \right] = 0,$$

т. е. $H(x, \xi, \lambda_1)$ равным образом удовлетворяет крайевым условиям. Функция $H(x, \xi, \lambda_1)$, таким образом, при фиксированном ξ является соответствующей λ_1 собственной функцией, и так как, согласно п. 5.7, в случае невырожденного собственного значения не существует двух линейно независимых, отвечающих этому значению собственных функций, можно записать $H(x, \xi, \lambda_1) = \text{const} \cdot y_1(x)$, где y_1 есть некоторая выделенная фиксированная собственная функция, соответствующая λ_1 . Постоянная, которую обозначим через C , может зависеть еще от ξ ; таким образом, имеем $H(x, \xi, \lambda_1) = y_1(x) C(\xi)$.

Функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ для значений λ , не являющихся собственными, согласно п. 5.4, симметрична относительно x и ξ . Следовательно, и $G(x, \xi, \lambda) (\lambda - \lambda_1)$ при $\lambda \neq \lambda_1$, а значит, и предельная функция при $\lambda \neq \lambda_1$ и вместе с ней и $H(x, \xi, \lambda_1)$ симметричны относительно x и ξ . Последняя функция должна, следовательно, иметь вид

$$H(x, \xi, \lambda_1) = y_1(x) y_1(\xi) C^*,$$

при этом постоянная C^* теперь больше не зависит от x или от ξ . Можно, таким образом, для любого λ записать

$$H(x, \xi, \lambda) = y_1(x) y_1(\xi) C^* + (\lambda - \lambda_1) H^*,$$

где H^* — опять целая функция λ . При $C_1 = \frac{C^*}{\Delta^*(\lambda_1)}$, следовательно, имеем

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{C_1 y_1(x) y_1(\xi)}{(\lambda - \lambda_1)} + G_1^*(x, \xi, \lambda), \quad (5.26)$$

причем G_1^* есть мероморфная, но в точке $\lambda = \lambda_1$ регулярная функция λ . Точно так же можно поступать с другими точками собственных значений $\lambda_2, \lambda_3, \dots$, пока эти λ_i являются невырожденными; тогда, если y_2, y_3, \dots суть соответствующие указанным собственным значениям собственные функции, получаем

$$G(x, \xi, \lambda) = \sum_{v=1}^s \frac{C_v y_v(x) y_v(\xi)}{\lambda - \lambda_v} + G_s^*(x, \xi, \lambda), \quad (5.27)$$

¹⁾ Согласно (5.14) $G(x, \xi, \lambda)$ есть конечная сумма z_i , значит, разрешена перемена местами операций дифференцирования и предельного перехода.

где G_s^* — мероморфная, но в точках $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ регулярная функция, имеющая полюсы в точках следующих собственных значений $\lambda_{s+1}, \lambda_{s+2}, \dots$

5.9. Кратные собственные значения. Определение. *Собственное значение λ называют r -кратно вырожденным, или говорят, что оно имеет кратность r , если имеется ровно r линейно независимых собственных функций y_1, y_2, \dots, y_r , соответствующих этому собственному значению:*

$$M[y_i] = \lambda N[y_i], \quad U_\mu[y_i] = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r). \quad (5.28)$$

Это определение точно так же действительно и в случае дифференциальных уравнений в частных производных, где необходимо только $y(x)$ заменить на $z(x, y, \dots)$.

Приведем в качестве простого примера самосопряженную задачу о сжатом стержне на упругой опоре:

$$y^{IV} + 4y = -\lambda y'', \quad y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0. \quad (5.29)$$

Здесь наименьшее собственное значение $\lambda_1 = 5$ является двукратно вырожденным, ему соответствуют две линейно независимые собственные функции $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin 2x$. Самосопряженная задача

$$\begin{aligned} -y^{IV} - 49y'' &= \lambda(14y^{IV} + 36y), \\ y = y'' = y^{IV} &= 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \pi \end{aligned}$$

имеет $\lambda = 1$ в качестве трехкратно вырожденного собственного значения с собственными функциями $y_k = \sin kx$, где $k = 1, 2, 3$. Можно легко привести примеры собственных значений с любой кратностью r , например построить задачи

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^m f_\nu y^{(2\nu)} &= \lambda \sum_{\nu=0}^n g_\nu y^{(2\nu)} \\ y = y'' = \dots = y^{(2m-2)} &= 0 \text{ при } x = 0 \text{ и } x = \pi \end{aligned}$$

с постоянными коэффициентами f_ν, g_ν , в которых $\sin x, \sin 2x, \dots, \dots, \sin rx$ суть собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению.

При появлении вырожденных собственных значений можно, в сущности, воспользоваться результатами для случая отсутствия вырождения, однако доказательства усложняются и требуют более обширных вспомогательных средств. Поэтому ограничимся здесь сообщением результатов, а при необходимости некоторых доказательств — указанием литературы.

Если линейно независимые функции y_1, y_2, \dots, y_r в качестве собственных функций самосопряженной полностью определенной задачи на собственные значения (4.11) — (4.14) отвечают r -кратно вырожденному собственному значению λ , то функции

$$Y_\rho = \sum_{\sigma=1}^r a_{\rho\sigma} y_\sigma \quad (\rho = 1, 2, \dots, r)$$

при любых постоянных $a_{\rho\sigma}$ также являются собственными функциями, отвечающими тому же самому собственному значению λ . В частности, можно $a_{\rho\sigma}$ определить так, что функции Y_ρ будут ортогональны в обобщенном смысле:

$$\int_a^b Y_\rho N[Y_\sigma] dx = 0 \quad \text{при } \rho \neq \sigma, \quad (5.30)$$

а постоянный множитель при Y_ρ можно с точностью до знака определить так, что Y_ρ будут «нормированными», т. е.

$$\int_a^b Y_\rho N[Y_\rho] dx = 1 \quad \text{при } \rho = 1, 2, \dots, r. \quad (5.31)$$

Что можно найти постоянные $a_{\rho\sigma}$ с такими свойствами и осуществить такой «процесс ортонормировки», доказывается с другой точки зрения в п. 15.4; это можно видеть, однако, и непосредственно, подставляя

$$Y_1 = \frac{y_1}{\sqrt{\int_a^b y_1 N[y_1] dx}},$$

а другие Y_ρ вычисляя по рекуррентным формулам¹⁾:

$$\left. \begin{aligned} Y_{s+1}^*(x) &= y_{s+1}(x) - \sum_{\sigma=1}^s Y_\sigma(x) \int_a^b Y_\sigma(\xi) N[y_{s+1}(\xi)] d\xi, \\ Y_{s+1}(x) &= \frac{Y_{s+1}^*(x)}{\sqrt{\int_a^b Y_{s+1}^*(\xi) N[Y_{s+1}^*(\xi)] d\xi}} \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

($s = 1, 2, \dots, r-1$).

Вследствие предположения о линейной независимости функций y_ρ ни одна из величин Y_σ^* тождественно не равна нулю, поэтому все числители в (5.32) отличны от нуля.

Полагая процесс ортонормировки уже выполненным, будем писать снова y вместо Y . Точно так же могут быть нормированы собственные функции, соответствующие другим собственным значениям, и ортонормированы, поскольку они соответствуют вырожденным собственным значениям, так что формула (4.18) принимает вид

$$\int_a^b y_i N[y_k] dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (5.33)$$

¹⁾ R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, т. I, изд. 2, Berlin, 1931, 42 [Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, ГИТТЛ, 1951].

Теорема. В случае самосопряженной полностью определенной задачи на собственные значения (4.11) — (4.14) имеется нормированная, в обобщенном смысле ортогональная система собственных функций y_i . Для нее существует соотношение (5.33).

Пусть теперь $G(x, \xi, \lambda)$ есть, как в п. 5.6, резольвента Грина, которая, следовательно, разрешает неоднородную краевую задачу (5.21) посредством формулы (5.20). Если λ_1 есть r -кратно вырожденное собственное значение, то можно $G(x, \xi, \lambda)$ записать в форме, соответствующей (5.27):

$$G(x, \xi, \lambda) = \sum_{\rho=1}^r \frac{C_{\rho} y_{\rho}(x) y_{\rho}(\xi)}{\lambda - \lambda_1} + G^*(x, \xi, \lambda), \quad (5.34)$$

где G^* мероморфна относительно λ и при $\lambda = \lambda_1$ регулярна. Функции y_{ρ} принимаются ортогональными в обобщенном смысле. Это представление резольвенты Грина может быть доказано средствами теории вычетов¹⁾.

Суть предыдущего можно выразить следующим образом: представление (5.27) резольвенты Грина верно также в случае вырожденных собственных значений, поскольку собственные функции, соответствующие таким λ_j , выбраны ортогональными в обобщенном смысле.

Из (5.34) можно вывести важную теорему о разрешимости неоднородной краевой задачи

$$M[u] - \lambda N[u] = h(x), \quad U_{\alpha}[u] = 0 \quad (5.35)$$

при $\lambda = \lambda_j$. Эта задача разрешима не для любых правых частей, а только для определенных функций $h(x)$, а именно всегда, если $h(x)$ ортогональна ко всем собственным функциям y_1, y_2, \dots, y_r , соответствующим собственным значениям λ_j :

$$\int_a^b y_{\rho}(x) h(x) dx = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, r), \quad (5.36)$$

т. е. если подставить выражение (5.34) для резольвенты Грина в формулу решения (5.20), то в силу (5.36) в правой части остается только член

$$\int_a^b G^*(x, \xi, \lambda) h(\xi) d\xi.$$

Так как G^* при $\lambda = \lambda_j$ является регулярной, то для $\lambda \rightarrow \lambda_j$ получаем

$$u(x) = \int_a^b G^*(x, \xi, \lambda_j) h(\xi) d\xi. \quad (5.37)$$

¹⁾ Е. Камке, Definite selbstadjungierte Eigenwertaufgaben, Math. Z. 46 (1940), 242—250.

Тот факт, что таким способом найденная предельная функция $u(x)$ на самом деле разрешает краевую задачу (5.35), нуждается в более подробном доказательстве, которое здесь не может быть приведено; общее решение (5.35) получается из (5.37) путем аддитивного дополнения собственных функций, соответствующих λ_j .

5.10. Полуопределенные задачи на собственные значения. В случае полуопределенной задачи на собственные значения (4.11)—(4.14)

$$M[y] = \lambda N[y], \quad U_\mu[y] = 0$$

в числе прочих собственных значений, согласно определению п. 4.9, появляется также число нуль. Например, в задаче об изгибных колебаниях призматического, свободное на обоих концах стержня

$$y^{IV} = \lambda y, \quad y''(0) = y'''(0) = y''(1) = y'''(1)$$

встречается собственное число $\lambda = 0$, а именно, в качестве двукратно вырожденного собственного значения с собственными функциями $y = 1$ и $y = x$. Появление собственного значения $\lambda = 0$ означает, согласно пп. 5.3 и 5.7, что для краевой задачи

$$M[y] = r(x), \quad U_\mu[y] = 0 \quad (5.38)$$

функция Грина не существует. Можно, однако, построить так называемую «обобщенную функцию Грина», при помощи которой задача на собственные значения, поскольку она вообще имеет решение, разрешается посредством формулы, аналогичной (5.4):

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) r(\xi) d\xi.$$

Теория, представленная в § 8 и далее, также может быть распространена на полуопределенные задачи на собственные значения, но более глубокое рассмотрение здесь не проводится ¹⁾.

§ 6. Функция Грина для уравнений с частными производными

Общая теория уравнений с частными производными сложна и не может рассматриваться как законченная. Приведем, однако, некоторые краткие сведения о функции Грина и о задачах на собственные значения в простейших случаях ²⁾, а именно только те, которые позже (в пп. 7.4, 11.2, 14.1 и в § 23) потребуются.

¹⁾ Более подробно в книге E. K a m k e, *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen*, изд. 7, Leipzig, 1961, 191 [Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, «Наука», 1965], а также *Math. Z.* 46 (1940), 231—286; далее в книге R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, т. I изд. 2, Berlin, 1931, 306 [Р. Курант и Д. Гильберт *Методы математической физики*, т. I, ГИИТЛ, 1951].

²⁾ Более строгое и подробное рассмотрение см. R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, т. I, II, Berlin, 1931, 1937 [Р. Курант и Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. I и II, ГИИТЛ, 1951].

6.1. Основные понятия. Формальное распространение основных понятий, рассмотренных в § 4, на уравнения с частными производными не представляет затруднений. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$M[z] = \lambda N[z], \quad (6.1)$$

где z — неизвестная функция, M и N — заданные линейные однородные дифференциальные операторы для функций нескольких независимых переменных x, y, \dots ; λ — собственное значение. К этому добавляются краевые условия:

$$U_\mu[z] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k). \quad (6.2)$$

Здесь $U_\mu[z]$ — линейные однородные дифференциальные выражения относительно z , взятые на некоторой заданной граничной кривой (или граничной поверхности) области \mathfrak{B} , которую назовем основной областью. Числа λ , для которых имеются тождественно не равные нулю удовлетворяющие краевым условиям решения уравнения (6.1) («собственные функции»), называются *собственными значениями* задачи.

Тождественно не равные нулю функции u независимых переменных x, y, \dots называются «*функциями сравнения*», если они удовлетворяют краевым условиям $U_\mu[u] = 0$ и обладают непрерывными частными производными такого высокого порядка, как это необходимо для образования $M[u]$ и $N[u]$. Задача на собственные значения называется *самосопряженной*, если для любых двух функций сравнения u, w всегда имеет место

$$\int_{\mathfrak{B}} (uM[w] - wM[u]) dv = 0, \quad \int_{\mathfrak{B}} (uN[w] - wN[u]) dv = 0. \quad (6.3)$$

Здесь интегралы берутся по основной области \mathfrak{B} , $dv = dx dy \dots$ означает элемент объема.

Задача на собственные значения называется *определенной*, если все собственные значения λ_i вещественны и имеют один и тот же знак, и *полуопределенной*, если все λ_i вещественны, не меняют знака и среди них имеется число нуль.

Задача на собственные значения называется *полностью определенной*, если для любой функции сравнения всегда выполняются неравенства

$$\int_{\mathfrak{B}} uM[u] dv > 0, \quad \int_{\mathfrak{B}} uN[u] dv > 0. \quad (6.4)$$

Тогда имеем: полностью определенная задача на собственные значения является определенной и все ее собственные значения положительны. Это следует из того, что z есть собственная функция, отвечающая собственному значению λ , и поэтому всегда

$$\lambda = \frac{\int_{\mathfrak{B}} zM[z] dv}{\int_{\mathfrak{B}} zN[z] dv} > 0. \quad (6.5)$$

Если в первом неравенстве (6.4) вместо знака $>$ допустить знак \geq , то таким же образом получается, что задача на собственные значения является определенной или полуопределенной.

В то время как из полной определенности следует вещественность собственных значений, нельзя ожидать, что одна только самосопряженность обуславливает вещественность собственных значений, ибо это не имеет места даже в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, как показано в примере п. 4.8. Предпосылки самосопряженности и полной определенности проверяются в отдельных случаях, как и при обыкновенных дифференциальных уравнениях, путем применения интегрирования по частям или соответствующих вспомогательных средств, как, например, интегральной теоремы Гаусса и т. д. (см. проведение проверки в п. 6.2). Поскольку, как уже отмечалось, столь же общая теория, как в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь в настоящее время не может быть дана, выделим в последующем — до некоторой степени в качестве примера — частный класс задач.

6.2. Частный класс задач. Рассмотрим задачу на собственные значения следующего типа при двух независимых переменных x, y . Пусть дифференциальное уравнение (его называют «эллиптическим») имеет вид

$$M[z] \equiv -(pz_x)_x - (pz_y)_y + qz = \lambda N[z] \equiv \lambda g_0 z. \quad (6.6)$$

Здесь $z = z(x, y)$ — неизвестная собственная функция, λ — собственное значение, $p(x, y)$, $q(x, y)$ и $g_0(x, y)$ — заданные непрерывные функции; кроме того, p и g_0 положительны и p имеет непрерывные частные производные по x и y . Индекс x или y означает частное дифференцирование по соответствующей переменной, т. е., например,

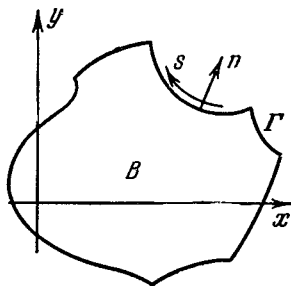
$$(pz_x)_x = \frac{\partial}{\partial x} \left(p \frac{\partial z}{\partial x} \right).$$

Пусть в плоскости независимых переменных x, y задана замкнутая, односвязная область \mathfrak{B} , которая ограничивается кусочно-гладким контуром Γ (рис. 6.1). На Γ функции $z(x, y)$ подчинены краевому

условию ¹⁾:

$$\alpha z + \beta \frac{\partial z}{\partial n} = 0. \quad (6.7)$$

Здесь α и β — заданные на Γ , непрерывные, не равные одновременно нулю функции длины дуги s , измеряемой от некоторой выбранной фиксированной точки контура.



При этом n означает направление внешней нормали (рис. 6.1); если (n, x) и соответственно (n, y) суть углы между n и направлениями осей x и y , то для любой непрерывно дифференцируемой функции $w(x, y)$ имеем

$$w_n \equiv \frac{\partial w}{\partial n} = w_x \cos(n, x) + w_y \cos(n, y). \quad (6.8)$$

Рис. 6.1. Область \mathfrak{B} , положительно ориентированный контур Γ , внешняя нормаль n .

Вспомогательным средством, соответствующим интегрированию по частям в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, здесь является интегральная теорема Гаусса, которая для любой функции $f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные по x , может быть записана в виде ²⁾

функции $f(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные по x , может быть записана в виде ²⁾

$$\iint_{\mathfrak{B}} \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} dx dy = \int_{\Gamma} f(x, y) \cos(n, x) ds. \quad (6.9)$$

Направление обхода контура Γ при этом должно быть выбрано положительным.

Если α и β имеют одинаковые знаки и $q(x, y) > 0$, то задача, как легко проверить посредством интегрирования по частям, является полностью определенной. Необходимо для этого лишь исследовать первый из двух данных в (6.4) интегралов, так как неравенство

$$\int_{\mathfrak{B}} uN[u] dv = \iint_{\mathfrak{B}} g_0 u^2 dx dy > 0$$

¹⁾ Это краевое условие не так безобидно, как кажется на первый взгляд. Помимо того, что в возможных точках излома контура $\partial z/\partial n$ не определена, вообще нельзя в случае уравнений в частных производных требовать, чтобы все разрешающие функции удовлетворяли краевым условиям во всех точках контура. О более подробной формулировке краевых условий см. R. Courant, D. Hilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, т. II, изд. 2, Berlin, 1931, 508 [Р. Курант и Д. Гильберт, *Методы математической физики*, т. II, ГИТТЛ, 1951].

²⁾ К. Кнорр, *Einführung in die höhere Mathematik*, т. III, Leipzig, 1942, 347 [см., например, В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*, т. II, М.—Л., Гостехиздат, 1952].

выполняется. Указанный интеграл равен

$$\int_{\mathfrak{B}} u M[u] dv = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} [-u(pu_x)_x - u(pu_y)_y + qu^2] dx dy.$$

Член $\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} qu^2 dx dy$ положителен вследствие положительности q . Первый член можно преобразовать, если к функции $f = u(pu_x)$, имеющей производную $f_x = u(pu_x)_x + pu_x^2$, применить теорему (6.9). Получаем

$$- \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} u(pu_x)_x dx dy = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} pu_x^2 dx dy - \int_{\Gamma} pu_x u \cos(n, x) ds.$$

Точно так же для второго члена

$$- \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} u(pu_y)_y dx dy = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} pu_y^2 dx dy - \int_{\Gamma} pu_y u \cos(n, y) ds.$$

В силу (6.8)

$$u_x \cos(n, x) + u_y \cos(n, y) = u_n,$$

поэтому имеем

$$\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} u M[u] dx dy = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} [qu^2 + p(u_x^2 + u_y^2)] dx dy - \int_{\Gamma} pu u_n ds.$$

Отсюда видно, что условия (6.4) выполняются, так как контурный интеграл в силу краевого условия (6.7)

$$\alpha u = -\beta u_n$$

неотрицателен; для $\beta \neq 0$ подынтегральное выражение удовлетворяет соотношению

$$p \frac{\alpha}{\beta} u^2 \geq 0,$$

а для $\beta = 0$ оно исчезает, так как u равно нулю.

Если положить также равным нулю q , то из рассмотрения следует, что все собственные значения неотрицательны:

$$\lambda_i \geq 0.$$

Тогда может случиться, что число нуль также является собственным значением (например, в случае $\alpha = 0$, т. е. краевых условий вида $u_n = 0$, число нуль является собственным значением с собственной функцией $u = \text{const}$).

Далее, при помощи интегральной теоремы Гаусса (6.9) легко проверяется и самосопряженность задачи на собственные значения (6.6), (6.7).

Если в (6.6), (6.7) подставить

$$f = pu_x w - p u w_x, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = (pu_x)_x w - (p w_x)_x u,$$

то имеет место

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} [(pu_x)_x w - (p w_x)_x u] dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma} [p w u_x \cos(n, x) - p u w_x \cos(n, x)] ds; \end{aligned}$$

аналогично

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{B}} [(pu_y)_y w - (p w_y)_y u] dx dy &= \\ &= \int_{\Gamma} [p w u_y \cos(n, y) - p u w_y \cos(n, y)] ds. \end{aligned}$$

Сложив эти два равенства и (6.8), получим

$$\int_{\mathfrak{B}} \{-w M[u] + u M[w]\} dx dy = \int_{\Gamma} p (\omega u_n - u \omega_n) ds. \quad (6.10)$$

Это — так называемая «формула Грина» (аналог «формулы Дирихле» в случае обыкновенных дифференциальных уравнений).

При краевых условиях (6.7) интеграл, стоящий в правой части, исчезает, так как для $\beta \neq 0$ имеем

$$u_n = -\frac{\alpha}{\beta} u, \quad \omega_n = -\frac{\alpha}{\beta} \omega,$$

следовательно, $\omega u_n - u \omega_n = 0$; а для $\beta = 0$

$$u = \omega = 0,$$

т. е. краевая задача (6.6), (6.7) является самосопряженной.

6.3. Функция Грина, предварительные замечания. Этот пункт еще не содержит доказательств и служит лишь введением в теорию функции Грина для уравнений в частных производных. Целью является, как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, решение краевой задачи при неоднородном уравнении посредством функции Грина.

При любой непрерывной правой части $\varphi(x, y)$ дифференциального уравнения, в котором $M[z]$ имеет вид (6.6),

$$M[z] = \varphi(x, y) \quad (6.11)$$

и однородных краевых условиях $\alpha z + \beta z_n = 0$ на контуре Γ решение можно представить в форме

$$z(x, y) = \iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (6.12)$$

где $G(x, y; \xi, \eta)$ есть функция Грина, которая и здесь выражает «функцию влияния».

Чтобы получить представление о функции влияния, рассмотрим сначала в качестве примера случай $p = 1, q = 0$, т. е. уравнение Пуассона

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\varphi(x, y)$$

с краевым условием $z = 0$ на Γ . Тогда $z(x, y)$ можно истолковать как прогиб равномерно нагруженной мембраны, защемленной по контуру Γ , причем $\varphi(x, y)$ есть произведение плотности нагрузки $\Phi(x, y)$ на постоянный множитель C , зависящий от толщины и упругих свойств мембраны. Если взять теперь единичную нагрузку, равномерно распределенную на малой круговой площадке радиуса ρ с центром в точке ξ, η , в то время как остальная часть мембраны не нагружена, то возникает прогиб $z(x, y)$, который зависит от величины выбранной площадки. Если, далее, устремить ρ к нулю (сохраняя нагрузку единичной), т. е., образно выражаясь, приложить игольчатую нагрузку, то соответствующий прогиб сходится к функции влияния, которая в данном случае, точно так же как в п. 5.1 для нагруженного стержня, представляет функцию Грина $G(x, y; \xi, \eta)$. Однако в противоположность случаю нагруженного стержня прогиб в рассматриваемом примере не остается конечным; при приближении к точке приложения нагрузки он логарифмически стремится к бесконечности. Пусть, например, задана функция Грина для круговой мембраны единичного радиуса

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln r + \frac{1}{4\pi} \ln [(1 - x\xi - y\eta)^2 + (x\eta - y\xi)^2], \quad (6.13)$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2};$$

на рис. 6.2 в аксонометрии показана функция Грина при фиксированных ξ, η в зависимости от x и y .

Функцию Грина G можно определить посредством следующих требований: $G(x, y; \xi, \eta)$, как функция x, y при фиксированных ξ, η , удовлетворяет краевым условиям и дифференциальному уравнению $M[G] = 0$ вплоть до точки $x = \xi, y = \eta$. (При этом точка (ξ, η) пусть будет внутренней точкой \mathfrak{B} .) В этой точке G имеет особенность, а именно, должно быть

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial G}{\partial n} ds = -\frac{1}{p(\xi, \eta)}. \quad (6.14)$$

Это равенство соответствует условию скачка (5.6) в случае обыкновенных дифференциальных уравнений. Интегрирование производится по малому кругу радиуса ρ вокруг точки ξ, η (рис. 6.3), а затем должен быть выполнен предельный переход $\rho \rightarrow 0$. Следовательно, $\frac{\partial G}{\partial n}$ может стать неограниченной; например, при $p = 1, q = 0$, т. е. в случае оператора Лапласа

$$M[f] = -\Delta f,$$

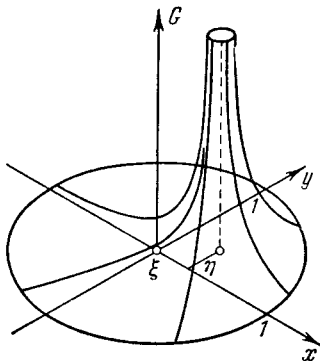


Рис. 6.2. Функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$ к дифференциальному выражению Δz с краевым условием $z = 0$ при $x^2 + y^2 = 1$.

при любой области \mathfrak{B} функция Грина имеет вид

$$G = \frac{1}{2\pi} \ln r + \text{непрерывная функция, где } r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Выражение (6.13) дает пример функции Грина для круговой области \mathfrak{B} и $\beta = 0$. При этом

$$\frac{\partial G}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} + \text{непрерывная функция.}$$

Таким образом, имеем

$$\int_0^{2\pi\rho} \frac{\partial G}{\partial n} ds = -1 + 2\pi\rho R,$$

причем R ограничено; значит, в пределе при $\rho \rightarrow 0$ остается только число -1 , как этого требует (6.14).

6.4. Решение краевой задачи при помощи функции Грина. И в случае общего дифференциального уравнения (6.6), рассмотренного нами, G имеет логарифмическую особенность:

$$G = \frac{a(x, y; \xi, \eta)}{2\pi p(\xi, \eta)} \ln r + b(x, y; \xi, \eta), \quad (6.15)$$

где a и b — непрерывные функции, имеющие непрерывные вторые частные производные, причем $a(\xi, \eta; \xi, \eta) \equiv -1$. Сложный вопрос о существовании функции Грина здесь не рассматривается¹⁾. Напротив, здесь принимается, что задана функция $G(x, y; \xi, \eta)$, которая удовлетворяет краевым условиям (6.7) и дифференциальному уравнению и которая в окрестности точки $x = \xi$, $y = \eta$ может быть представлена в виде (6.15). Тогда выставленное вначале требование (6.14) о предельном значении малого контурного интеграла

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_0^{2\pi\rho} \frac{\partial G}{\partial n} ds = -\frac{1}{p(\xi, \eta)}$$

удовлетворяется само собой.

Введенная таким способом функция Грина $G(x, y; \xi; \eta)$ решает краевую задачу. Чтобы понять это, подставим в формулу Грина (6.10) $w = z$, т. е. $M[w] = \varphi$, и $u = G(x, y; \xi, \eta)$ и проинтегрируем по заданной области, вырезав при этом малый круг радиуса ρ вокруг точки (ξ, η) . Область интегрирования заштрихована на рис. 6.3. В качестве контура области интегрирования теперь, кроме контурной

¹⁾ R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, т. I, изд. 2, Berlin, 1931, 320; т. II, 1937, 471. Там же подробно обсуждается вопрос о допустимой области \mathfrak{B} [Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, II, ГИТТЛ, 1951].

кривой Γ , выступает еще контур C малого круга. Чтобы подчеркнуть, что в последующих уравнениях направление обхода контура C должно быть отрицательным (рис. 6.3), определим границу как $\Gamma - C$. В полной области интегрирования $M[G] = 0$, и остается

$$\iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) \varphi(x, y) dx dy = \int_{\Gamma - C} p \left(z \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial z}{\partial n} \right) ds.$$

Так как z и G удовлетворяют однородным краевым условиям (6.7), интеграл по внешнему контуру Γ отпадает, как и в п. 6.2. При интегрировании по круговому контуру C и при переходе к пределу при $\rho \rightarrow 0$ имеем

$$\int_{-C} p \frac{\partial z}{\partial n} G ds \rightarrow 0 \quad \text{и}$$

$$\int_{-C} pz \frac{\partial G}{\partial n} ds \rightarrow z(\xi, \eta).$$

Если при этом взять логарифмическую особенность, то G растет как $\ln \rho$, длина пути интегрирования есть $2\pi\rho$, а $\rho \ln \rho$ при $\rho \rightarrow 0$ стремится к нулю. Имеем, следовательно,

$$\iint_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) \varphi(x, y) dx dy = z(\xi, \eta).$$

Это есть общая формула решения; надо только еще поменять местами x, y и ξ, η . Функция Грина при этом не меняется; покажем симметрию

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y). \quad (6.16)$$

Для этого рассмотрим две различные точки ξ_1, η_1 и ξ_2, η_2 , назвав соответствующие им функции Грина кратко G_1, G_2 :

$$G_1 = G(x, y; \xi_1, \eta_1), \quad G_2 = G(x, y; \xi_2, \eta_2).$$

Подставим эти функции в формулу Грина (6.10), положив $u = G_1$ и $w = G_2$, и проинтегрируем по заданной области \mathfrak{B} , причем обе взятые точки вырежем малыми кругами

радиуса ρ . Область интегрирования заштрихована на рис. 6.4; имеем три контура R_1, R_2, R_3 , при этом направление обхода контурных кривых R_1 и R_2 является отрицательным. Тогда

$$\iint_{\mathfrak{B}} \{-G_2 M[G_1] + G_1 M[G_2]\} dx dy = 0,$$

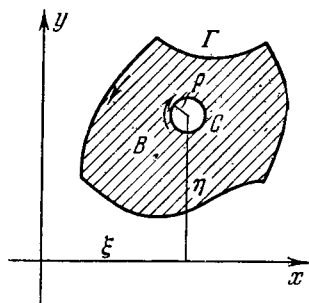


Рис. 6.3. К особенностям функции Грина.

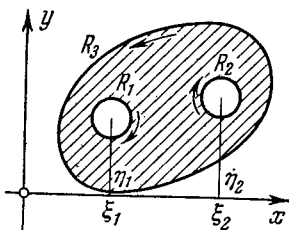


Рис. 6.4. К симметрии функции Грина.

так как G_1 и G_2 (за исключением этих точек) удовлетворяют уравнению $M[G_1] = M[G_2] = 0$. Согласно формуле Грина поэтому имеем

$$0 = \int_{R_3 - R_1 - R_2} p \left(G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} - G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} \right) ds.$$

Интеграл по R_3 исчезает в силу того, что G_1 и G_2 удовлетворяют крайевым условиям (6.6). Из интеграла по $-R_1$ при предельном переходе $\rho \rightarrow 0$ получаем

$$\int_{-R_1} p G_1 \frac{\partial G_2}{\partial n} ds \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad - \int_{-R_1} p G_2 \frac{\partial G_1}{\partial n} ds \rightarrow -G_2(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2).$$

Если те же соображения применить к интегралу по R_2 , то получим:

$$G_1(\xi_2, \eta_2; \xi_1, \eta_1) - G_2(\xi_1, \eta_1; \xi_2, \eta_2) = 0.$$

6.5. Другие типы уравнений с частными производными. Соображения пп. 6.2 и 6.4 можно в принципе перенести на уравнение

$$M[z] = -(pz_{x_1})_{x_1} - (pz_{x_2})_{x_2} - (pz_{x_3})_{x_3} + qz = \lambda g_0 z, \quad (6.17)$$

где $z(x_1, x_2, x_3)$ есть некоторая функция трех независимых переменных x_1, x_2, x_3 . При крайевых условиях (6.7) на граничной поверхности можно доказать самосопряженность, а для $\alpha\beta \geq 0$ и полную определенность задачи, как это было проделано в п. 6.2 только при двух независимых переменных x, y . Основное отличие состоит в том, что функция Грина $G(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)$ имеет теперь другую, не логарифмическую особенность, а именно:

$$G = \frac{a(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3)}{4\pi p(\xi_1, \xi_2, \xi_3)} \frac{1}{r} + b(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3),$$

где

$$r = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2 + (x_3 - \xi_3)^2}.$$

Здесь a и b — непрерывные со своими производными до второго порядка включительно функции, которые определяются посредством следующих требований: G должна удовлетворять, кроме точки $r = 0$, соответствующему (6.17) однородному уравнению $M[G] = 0$ и крайевым условиям. К вопросу о существовании функции Грина здесь опять нет возможности подойти. Симметрию G , напротив, точно так же как в п. 6.4, можно легко доказать.

Функцию Грина можно построить также и в случае уравнений в частных производных более высокого порядка. Для уравнения

$$\Delta\Delta z \equiv \frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = \lambda g_0 z$$

от двух независимых переменных x, y функция Грина имеет вид

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{8\pi} r^2 \ln r + b(x, y; \xi, \eta),$$

где $r^2 = (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2$. Функция $b(x, y; \xi, \eta)$, непрерывная с ее частными производными до четвертого порядка включительно, должна быть определена так, чтобы G (кроме точки $r = 0$) удовлетворяла уравнению $\Delta\Delta G = 0$ и крайевым условиям.

§ 7. Связь с интегральными уравнениями

7.1 Одночленный класс и интегральные уравнения. Пусть $G(x, \xi)$, как и в п. 5.4, есть функция Грина для дифференциального выражения $M[y]$ при краевых условиях:

$$U_\mu[y] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2m).$$

Она, согласно п. 5.6, существует как раз тогда, когда $\lambda = 0$ не является собственным значением задачи (4.11) — (4.14), что мы и предполагаем здесь. Решение краевой задачи $M[y] = r(x)$, $U_\mu[y] = 0$ при любом непрерывном $r(x)$ дается общей формулой решения (5.4). Так как для собственной функции действительно дифференциальное уравнение (4.11), то из (5.4) при $r(x) = \lambda N[y]$ возникает для собственной функции $y(x)$ соотношение

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) N[y(\xi)] d\xi. \quad (7.1)$$

Выражение такого типа для $n > 0$ (см. 4.13) называют линейным однородным «интегро-дифференциальным уравнением».

Для $n = 0$, т. е. для частного класса задач $N[y] = g_0(x) y$, при положительном $g_0(x)$ и при

$$\varphi(x) = \sqrt{g_0(x)} y(x), \quad K(x, \xi) = \sqrt{g_0(x) g_0(\xi)} G(x, \xi)$$

для $\varphi(x)$ получаем уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Это — так называемое линейное однородное интегральное уравнение второго рода. Если задача на собственные значения является самосопряженной, то $G(x, \xi)$, а вместе с тем и «ядро» $K(x, \xi)$ симметричны относительно x и ξ .

Задачи подобного типа в более общем виде получают для одночленного класса (п. 4.7); в этом случае $N[y]$, согласно (4.26), имеет вид $(-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$, а формула решения (7.1) переходит в следующую:

$$y(x) = (-1)^n \lambda \int_a^b G(x, \xi) [g_n(\xi) y^{(n)}(\xi)]^{(n)} d\xi.$$

В силу предпосылки (4.27), сделанной в случае одночленного класса, интеграл в правой части путем n -кратного интегрирования по частям может быть преобразован к виду

$$y(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial \xi^n} g_n(\xi) y^{(n)}(\xi) d\xi.$$

Здесь n -кратное дифференцирование под знаком интеграла допустимо¹⁾, так как производные

$$\frac{\partial^{v+n} G(x, \xi)}{\partial x^v \partial \xi^n},$$

согласно дополнению к п. 5.3 (имеем $n < m$, т. е. выполняется соотношение $v + n \leq 2m - 2$), при $0 \leq v \leq n$ являются непрерывными функциями. Итак, получаем

$$y^{(n)}(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} g_n(\xi) y^{(n)}(\xi) d\xi.$$

Если в случае положительной функции $g_n(x)$ подставить

$$\sqrt{g_n(x)} y^{(n)}(x) = \varphi(x) \quad (7.2)$$

и

$$K(x, \xi) = \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \sqrt{g_n(x) g_n(\xi)}, \quad (7.3)$$

то для φ снова получим обычное линейное однородное интегральное уравнение второго рода:

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Ядро $K(x, \xi)$ симметрично, если симметрична $G(x, \xi)$.

Зададимся обратным вопросом: является ли тождественно не равное нулю решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \sqrt{g_n(x) g_n(\xi)} \varphi(\xi) d\xi \quad (7.4)$$

собственной функцией $y(x)$ соответствующей задачи одночленного класса. Для этого исследования примем дополнительные предположки:

1. Пусть $3n < 2m - 1$.

2. В числе краевых условий $U_\mu[y] = 0$ встречаются такие:

$$\left. \begin{aligned} y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \dots \\ \dots = y^{(n-1)}(b) = 0. \end{aligned} \right\} (7.5)$$

Для частных задач на собственные значения $n = 0$, и тогда дополнительные предположки отсутствуют.

¹⁾ К. Кнорр, Einführung in die höhere Mathematik, т. III, изд. 7, 1942, 317 [см., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М.—Л., Гостехиздат, 1952].

Во-первых, из требования $3n < 2m - 1$ следует, что производные $\frac{\partial^{3n} G(x, \xi)}{\partial x^{2n} \partial \xi^n}$ все еще непрерывны. Если $\varphi(x)$ есть непрерывное решение (7.4), то n -кратное дифференцирование (7.4) обеспечивает существование непрерывных производных $\varphi^{(n)}(x)$. Мы можем, следовательно, образовать функцию

$$y(x) = \int_a^b G(x, \xi) \frac{d^n}{d\xi^n} (\sqrt{g_n(\xi)} \varphi(\xi)) d\xi \quad (7.6)$$

и доказать, что эта функция является собственной функцией задачи одночленного класса. Уравнение (7.6), согласно (5.4), эквивалентно следующей задаче:

$$M[y] = (\sqrt{g_n(x)} \varphi(x))^{(n)}, \quad U_\mu[y] = 0;$$

следовательно, y удовлетворяет всем краевым условиям. Далее, так как $G(x, \xi)$ удовлетворяет дополнительно наложенным краевым условиям (7.5), из (7.6) путем n -кратного интегрирования по частям получается

$$y(x) = (-1)^n \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial \xi^n} \sqrt{g_n(\xi)} \varphi(\xi) d\xi.$$

n -кратное дифференцирование по x при использовании (7.4) дает

$$y^{(n)}(x) = (-1)^n \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \sqrt{g_n(\xi)} \varphi(\xi) d\xi = \frac{(-1)^n \varphi(x)}{\lambda \sqrt{g_n(x)}}$$

и, таким образом,

$$M[y] = (\sqrt{g_n} \varphi)^{(n)} = (-1)^n \lambda [g_n y^{(n)}]^{(n)}.$$

Значит, y удовлетворяет также дифференциальному уравнению и является поэтому собственной функцией.

Теорема. Самосопряженную задачу на собственные значения (4.28), (4.14), для которой $\lambda = 0$ не является собственным значением и функция $g_n(x)$ в основном интервале a, b имеет постоянный знак, при помощи функции Грина можно трансформировать в линейное однородное интегральное уравнение второго рода с вещественным симметричным непрерывным ядром. Каждому решению $y(x)$ одночленного класса можно, согласно (7.2), сопоставить решение интегрального уравнения (7.4). При дополнительных предположениях (7.5) можно также, обратно, из каждого решения интегрального уравнения, согласно (7.6), построить собственную функцию задачи одночленного класса.

7.2. Выводы из теории интегральных уравнений. Ограничимся здесь приведением без доказательства следующих выводов из теории интегральных уравнений^{1) 2)}. Относительно вещественного тождественно не равного нулю ядра $K(x, \xi)$ линейного однородного интегрального уравнения второго рода

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi \quad (7.7)$$

при $a \leq x, \xi \leq b$ предполагается следующее:

- 1) симметричность, т. е. $K(x, \xi) = K(\xi, x)$;
- 2) квадратичная интегрируемость, т. е. интегралы

$$\int_a^b K(x, \xi) dx, \quad \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) dx d\xi,$$

$$\int_a^b K^2(x, \xi) dx, \quad \int_a^b \int_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi$$

существуют и, поскольку они зависят еще от ξ , являются ограниченными;

3) непрерывность в среднем, т. е. для всех x выполняется условие:

$$\lim_{x_1 \rightarrow x} \int_a^b [K(x, \xi) - K(x_1, \xi)]^2 d\xi = 0. \quad (7.8)$$

Если $K(x, \xi)$ непрерывно, то предпосылки 2) и 3) выполняются автоматически.

Далее, имеем определение:

Число λ , для которого (7.7) имеет тождественно не равное нулю квадратично интегрируемое решение $\varphi(x)$, называется *собственным значением*, а отвечающее ему решение — *собственной функцией*.

¹⁾ Доказательство можно найти, например, в книгах: G. Hamel, Integralgleichungen, Berlin, 1937, 51—91 и R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, Berlin, 1931, т. I, 96—130 [Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, ГИТТЛ, 1951].

²⁾ Существенным прогрессом теория интегральных уравнений обязана Гильберту.

Давид Гильберт после Гаусса был наиболее значительным, весьма многосторонним математиком. Теория задач иа собственные значения обязана ему больше, чем это можно выразить в отдельных замечаниях.

Д. Гильберт родился 23.I 1862 г., в Кеингсберге, где он в 1884 г. защитил докторскую диссертацию. В 1895 г. Феликс Клейн пригласил его в Геттинген, где Д. Гильберт работал вплоть до своей смерти, последовавшей 14.II 1943 г. [См. некролог G. Hamel, Z. angew. Math. Mech. 23(1943), 128.]

Собственная функция φ называется *нормированной*, если

$$\int_a^b \varphi^2(x) dx = 1.$$

Функция $u(x)$ называется *истокообразно представимой*, если имеется такая квадратично интегрируемая функция $v(x)$, что действительно равенство

$$u(x) = \int_a^b K(x, \xi) v(\xi) d\xi.$$

При названных предпосылках имеет место следующая теорема:

Все собственные значения λ уравнения (7.7) являются вещественными; очевидно, что $\lambda = 0$ не есть собственное значение. Имеется минимум одно собственное значение λ и максимум счетное бесконечное множество собственных значений, которые могут быть расположены поэтому в виде последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ и которые в конечной области не имеют точки сгущения; далее, кратность вырождения собственного значения, которая указывает число линейно независимых собственных функций, отвечающих этому собственному значению, может быть только конечной.

Число собственных значений при непрерывном ядре конечно в том случае, когда ядро «вырождено», т. е. когда оно может быть представлено в виде конечной суммы произведений некоторой функции x на некоторую функцию ξ :

$$K(x, \xi) = \sum_{k=1}^r a_k(x) b_k(\xi).$$

Собственные функции, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad \lambda_i \neq \lambda_k.$$

Собственные функции, соответствующие вырожденному собственному значению, могут быть ортогонализированы (см. п. 5.9), так что если вырожденные собственные значения в последовательности $\lambda_1, \lambda_2, \dots$ повторяются соответственно кратности вырождения, то существует надлежащая система нормированных ортогональных собственных функций $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, так называемая «ортонормированная система», для которой

$$\int_a^b \varphi_i \varphi_k dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (7.9)$$

Всякую истокообразно представимую функцию $u(x)$ можно разложить в ряд по таким образом нормированным и ортогонализированным собственным функциям $\varphi_k(x)$, который сходится абсолютно и равномерно:

$$u(x) = \sum_k c_k \varphi_k(x), \quad (7.10)$$

причем коэффициенты разложения c_k определяются формулой

$$c_k = \int_a^b u(x) \varphi_k(x) dx. \quad (7.11)$$

«Итерированное ядро» $K_2(x, \xi)$

$$K_2(x, \xi) = \int_a^b K(x, \rho) K(\rho, \xi) d\rho$$

можно разложить в ряд, сходящийся абсолютно и равномерно по x и по ξ :

$$K_2(x, \xi) = \sum_k \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(\xi)}{\lambda_k^2},$$

и действительно соотношение

$$\int_a^b K_2(x, x) dx = \int_a^b \int_a^b [K(x, \xi)]^2 dx d\xi = \sum_k \frac{1}{\lambda_k^2}. \quad (7.12)$$

Если $K(x, \xi)$ непрерывно и все собственные значения λ_k положительны или только конечное число их отрицательно, то имеет силу абсолютно и равномерно сходящееся разложение (теорема Меркера):

$$K(x, \xi) = \sum_k \frac{\varphi_k(x) \varphi_k(\xi)}{\lambda_k}$$

и

$$\int_a^b K(x, x) dx = \sum_k \frac{1}{\lambda_k}. \quad (7.13)$$

Соответствующее (7.7) неоднородное интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi + f(x) \quad (7.14)$$

имеет, поскольку λ не является собственным значением, однозначно определяемое решение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b \left[K(x, \xi) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(x) \varphi_i(\xi)}{\lambda_i - \lambda} \right] f(\xi) d\xi. \quad (7.15)$$

При этом бесконечный ряд сходится равномерно по x и по ξ для всех λ , не являющихся собственными значениями.

Далее, действительна теорема включения¹⁾: Если $v(x)$ непрерывна, а функция

$$\Phi(x) = \frac{v(x)}{\int_a^b K(x, \xi) v(\xi) d\xi} \quad (7.16)$$

заклучена между конечными границами Φ_{\min} и Φ_{\max} и имеет постоянный знак, то между Φ_{\min} и Φ_{\max} расположено по меньшей мере одно собственное значение λ_k :

$$\Phi_{\min} \leq \lambda_k \leq \Phi_{\max}. \quad (7.17)$$

Собственные значения можно определять из вариационного принципа. Так n -ое положительное собственное значение λ_n (поскольку оно существует) определяется соотношением

$$\frac{1}{\lambda_n} = \max \int_a^b \int_a^b K(x, \xi) \omega(x) \omega(\xi) dx d\xi, \quad (7.18)$$

причем $\omega(x)$ пробегает область всех квадратично интегрируемых функций²⁾, которые удовлетворяют дополнительным условиям:

$$\int_a^b \omega^2(x) dx = 1, \quad \int_a^b \omega \varphi_i dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1); \quad (7.19)$$

здесь φ_i есть i -я собственная функция вышеупомянутой ортонормированной системы.

7.3. Применение к одночленному классу. Применим теперь эти теоремы к интегральному уравнению (7.4) для задач одночленного класса (п. 7.1). Ядро (7.3) вещественно, непрерывно, симметрично и удовлетворяет, следовательно, всем требуемым в описанной теории предпосылкам. Теория обеспечивает вещественность собственных

¹⁾ L. Kollatz, Math. Z. 47 (1941), 395.

²⁾ Соотношения (7.18), (7.19) сохраняют силу также и в том случае, если $\omega(x)$ пробегает только область непрерывных или кусочно-непрерывных функций, см. R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, т. I, изд. 2, Berlin, 1931, 104 [Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, ГИТТЛ, 1951]

значений в соответствии с теоремой п. 4.7; соотношение ортогональности (7.9) при представлении собственных функций y_k задачи в форме дифференциального уравнения с помощью равенства $\varphi_i(x) = \sqrt{g_n(x)} y_i^{(n)}(x)$ (см. (7.2)) переходит в

$$\int_a^b g_n(x) y_i^{(n)}(x) y_k^{(n)}(x) dx = 0 \quad \text{при } \lambda_i \neq \lambda_k \quad (7.20)$$

в соответствии с (4.21); формулы (7.12) и (7.13) при выполнении дополнительных предпосылок (7.5) означают

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k} &= \int_a^b \left(\frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \right)_{x=\xi} g_n(x) dx, \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_k^2} &= \int_a^b \int_a^b \left(\frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \right)^2 g_n(x) g_n(\xi) dx d\xi, \end{aligned} \right\} \quad (7.21)$$

причем верхняя формула доказывается только для случая, когда появляется, самое большее, конечное число отрицательных λ_k [см., например, (8.2), когда отрицательных собственных значений нет].

При применении теоремы разложения (7.10), (7.11) возникает вопрос: какие функции $u(x)$ являются истокообразно представимыми? Для ответа на него примем предпосылки, приводившиеся уже в (7.5): среди краевых условий $U_\mu[y] = 0$ могут присутствовать и такие:

$$\begin{aligned} y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \dots \\ \dots = y^{(n-1)}(b) = 0. \end{aligned} \quad (7.22)$$

выполняется неравенство $3n < 2m - 1$ и $\lambda = 0$ не является собственным значением. Пусть, далее, $w(x)$ есть любая функция сравнения. Тогда соотношением $M[w] = \varphi(x)$ определяется некоторая функция $\varphi(x)$ и, согласно (5.4), действительно равенство

$$w(x) = \int_a^b G(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi.$$

Так как $G(x, \xi)$ удовлетворяет краевым условиям (7.22), то путем n -кратного интегрирования по частям получаем

$$w(x) = \int_a^b \frac{\partial^n G(x, \xi)}{\partial \xi^n} \Phi(\xi) d\xi,$$

где $\Phi(x)$ есть функция, удовлетворяющая уравнению $\frac{\partial^n \Phi}{\partial x^n} = (-1)^n \varphi(x)$. Дифференцируя под знаком интеграла n раз, что допустимо, получаем

$$\omega^{(n)}(x) = \int_a^b \frac{\partial^{2n} G(x, \xi)}{\partial x^n \partial \xi^n} \Phi(\xi) d\xi.$$

Согласно (7.3) поэтому имеем

$$\omega^{(n)}(x) \sqrt{g_n(x)} = \int_a^b K(x, \xi) \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{g_n(\xi)}} d\xi.$$

Это есть функция $u(x) = \omega^{(n)}(x) \sqrt{g_n(x)}$, истокообразно представляемая посредством непрерывной функции $v(\xi) = \frac{\Phi(\xi)}{\sqrt{g_n(\xi)}}$ и, следовательно, она может быть разложена в ряд

$$\omega^{(n)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k^{(n)}(x)$$

по собственным функциям (7.2)

$$\varphi_i(x) = \sqrt{g_n(x)} y_i^{(n)}(x).$$

Этот ряд сходится абсолютно и равномерно. При n -кратном почленном интегрировании от a до x получается, что каждую функцию сравнения можно разложить в ряд по собственным функциям $y_k(x)$ [постоянные интегрирования отпадают в силу краевых условий (7.22)]

$$\omega(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x) \quad (7.23)$$

и что этот ряд можно почленно n раз дифференцировать. Аналогичная теорема разложения будет доказана в п. 10.5 другим способом (без интегральных уравнений); там получается, что ряд (7.23) может дифференцироваться почленно даже $(m-1)$ раз.

Несмотря на изящество и большую прозрачность методов интегральных уравнений, мы не будем изучать их подробнее, потому что они достаточны лишь для задач одночленного класса, а общие задачи на собственные значения сводятся к интегро-дифференциальным уравнениям (7.1), которые математически освоены еще слишком мало.

7.4. Интегральные уравнения и дифференциальные уравнения с частными производными. Интегральные уравнения играют полезную роль не только при изучении обыкновенных дифференциальных уравнений (при этом теория интегральных уравнений, правда, не так глубока, как представленная в §§ 4, 5, 8, 12 прямая теория дифференциальных уравнений). Они особенно полезны при анализе уравнений

с частными производными. Большим преимуществом теории интегральных уравнений является то, что выводы теории одинаково применимы как при одной, так и при многих x, y, \dots независимых переменных. Например, при двух независимых переменных x, y вместо интегрирования по основному интервалу (a, b) следует всего лишь интегрировать по основной области \mathfrak{B} плоскости (x, y) . Покажем это на примере приведенного в п. 6.2 частного класса задач на собственные значения уравнения второго порядка с частными производными (6.6)

$$M[z] = -(pz_x)_x - (pz_y)_y + qz = \lambda g_0 z \text{ в области } \mathfrak{B}$$

с граничными условиями (6.7)

$$\alpha z + \beta z_n = 0 \text{ на контуре } \Gamma.$$

Как и в п. 6.4, предполагаем существование функции Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, которая разрешает краевую задачу (6.11), (6.7) в форме (6.12). Для собственной функции $z(x, y)$ выполняется (6.11) при $\varphi = \lambda g_0 z$; тогда формула решения (6.12) принимает вид

$$z(x, y) = \lambda \int \int_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) g_0(\xi, \eta) z(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Следовательно, если подставить (полагая g_0 положительным)

$$K(x, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) \sqrt{g_0(x, y) g_0(\xi, \eta)} \quad (7.24)$$

и [φ теперь означает иное, чем в (6.11)]

$$\varphi(x, y) = z(x, y) \sqrt{g_0(x, y)}, \quad (7.25)$$

то φ есть собственная функция однородного интегрального уравнения второго рода:

$$\varphi(x, y) = \lambda \int \int_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta) \varphi(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Ядро $K(x, y; \xi, \eta)$ удовлетворяет названным в п. 7.2 предпосылкам; оно вещественно и симметрично, так как функция Грина является, согласно (6.16), симметричной. Далее, оно не является ни непрерывным, ни ограниченным, так как функция Грина имеет логарифмическую особенность, однако оно квадратично интегрируемо, потому что в силу строения (6.15) функции Грина можно записать

$$K(x, y; \xi, \eta) = A(x, y; \xi, \eta) \ln r + B(x, y; \xi, \eta), \quad (7.26)$$

где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}.$$

Здесь A и B — непрерывные функции, которые обладают даже непрерывными частными производными второго порядка, если ими обладает $g_0(x, y)$.

Так, если образовать интеграл

$$\iint_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta) dx dy,$$

то особенность при $x = \xi$, $y = \eta$ не сказывается. Действительно, если ввести полярные координаты

$$x = \xi + \rho \cos \vartheta, \quad y = \eta + \rho \sin \vartheta,$$

то $dx dy$ переходит в $\rho d\rho d\vartheta$, а интеграл по малому кругу радиуса r вокруг точки $x = \xi$, $y = \eta$ при достаточно малом r дает сколь угодно малый вклад, так как $r \ln r$ стремится к нулю при $r \rightarrow 0$. И $r (\ln r)^2$ также стремится к нулю при $r \rightarrow 0$, т. е. все приведенные в предпосылке 2 п. 7.2 интегралы существуют и являются ограниченными. Легко видеть, наконец, что ядро $K(x, y; \xi, \eta)$ обладает непрерывностью в среднем. Так как сумма двух непрерывных в среднем ядер есть также непрерывное в среднем ядро¹⁾, то достаточно проверить непрерывность в среднем члена $A(x, y; \xi, \eta) \ln r$ ядра K (7.26). При образовании интеграла (7.8) вырежем из области \mathfrak{B} малый круг радиуса r вокруг точки $x = \xi$, $y = \eta$; точка x_1 , y_1 лежит уже в этой круговой области. Вклад круговой области стремится к нулю, потому что $r (\ln r)^2 \rightarrow 0$ при $r \rightarrow 0$.

Ядро $K(x, y; \xi, \eta)$ вида (7.26) удовлетворяет, таким образом, всем предпосылкам для применения теории интегральных уравнений. Тем самым доказывается, прежде всего, существование по меньшей мере одного и вещественность всех имеющихся собственных значений. Соотношение ортогональности (7.9) в силу (7.25) переходит в следующее:

$$\iint_{\mathfrak{B}} g_0 z_i z_k dx dy = 0 \quad \text{при } \lambda_i \neq \lambda_k. \quad (7.27)$$

¹⁾ Если ядра $K(x, \xi)$ и $K^*(x, \xi)$ непрерывны в среднем, т. е. если для них выполняется (7.8), то (7.8) выполняется также для ядра $S(x, \xi) = K + K^*$, ибо имеем

$$\begin{aligned} \lim_{x_1 \rightarrow x} \int_a^b [S(x, \xi) - S(x_1, \xi)]^2 d\xi &= \lim \Delta + \lim \Delta^* + \\ &+ 2 \lim \int_a^b [K(x, \xi) - K(x_1, \xi)] [K^*(x, \xi) - K^*(x_1, \xi)] d\xi, \end{aligned}$$

где

$$\Delta = \int_a^b [K(x, \xi) - K(x_1, \xi)]^2 d\xi; \quad \Delta^* = \int_a^b [K^*(x, \xi) - K^*(x_1, \xi)]^2 d\xi.$$

Согласно предпосылкам Δ и Δ^* стремятся к нулю при $x_1 \rightarrow x$, а третий член в правой части, оцениваемый по абсолютной величине при помощи неравенства Шварца как $\sqrt{\Delta \Delta^*}$, точно так же стремится к нулю.

Теорема разложения (7.10), (7.11) обеспечивает разложение в ряд по собственным функциям любой, удовлетворяющей краевым условиям (6.7) и обладающей непрерывными частными производными до второго порядка включительно, функции $u(x, y)$. Дальнейшие применения теории интегральных уравнений к дифференциальным уравнениям в частных производных обсуждаются в пп. 11.2 и 14.1.

Также и в других названных в п. 6.5 типах задач на собственные значения особенности функций Грина, а значит, и ядра соответствующего интегрального уравнения, не являются помехой. Приведенные в предпосылке 2 п. 7.2 интегралы, как легко видеть, существуют и ограничены. Теория интегральных уравнений, таким образом, имеет очень обширные возможности применения; мы, однако, не рассматриваем ее более подробно, так как уже вопрос о существовании функции Грина, как указывалось в п. 6.4, выходит за рамки данной книги.

7.5. Одночленный класс и интегральное уравнение Вольтерра. Интегральные уравнения вида

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (7.28)$$

в которых, следовательно, верхним пределом интегрирования служит переменная x , называются *интегральными уравнениями Вольтерра второго рода*, а именно, при $f(x) \not\equiv 0$ — неоднородными и при $f(x) \equiv 0$ — однородными. Любое обыкновенное дифференциальное уравнение k -го порядка $L[y] = r(x)$ можно трансформировать непосредственно в интегральное уравнение Вольтерра второго рода при помощи формул

$$\left. \begin{aligned} y^{(k)}(x) &= \varphi(x), & y^{(k-1)}(x) &= c_0 + \int_{x_0}^x \varphi(\xi) d\xi, \\ y^{(k-2)}(x) &= c_1 + c_0 x + \int_{x_0}^x (x - \xi) \varphi(\xi) d\xi, \\ &\dots \dots \dots \\ y^{(k-p+1)}(x) &= \sum_{\rho=0}^p c_{p-\rho} \frac{x^\rho}{\rho!} + \int_{x_0}^x \frac{(x - \xi)^\rho}{\rho!} \varphi(\xi) d\xi \\ &&& (p = 0, 1, \dots, k-1), \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

где $c_0, c_1, \dots, c_{k-1}, x_0$ — постоянные. Если применить этот метод к задаче на собственные значения

$$M[y] = \lambda N[y], \quad (7.30)$$

то собственное значение λ появится в уравнении Вольтерра вообще в различных местах и не только просто в качестве множителя при интеграле, как в (7.28).

Однако в задачах одночленного класса можно построить несколько иного типа уравнение Вольтерра, в котором собственное значение λ выступает, точно так же как в (7.28), в качестве множителя при интеграле и нигде больше. Построение этого интегрального уравнения связано с методом вариации коэффициентов для получения частного интеграла неоднородного дифференциального уравнения

$$M[y] = r(x). \quad (7.31)$$

Пусть z_1, z_2, \dots, z_k есть фундаментальная система, т. е. k линейно независимых решений уравнения $M[y] = 0$, и пусть $p_k(x)$ есть коэффициент¹⁾ при высшей производной $y^{(k)}(x)$. Решение (7.31), как известно²⁾, имеет тогда вид

$$y = \sum_{i=1}^k \gamma_i(x) z_i(x). \quad (7.32)$$

Если ввести $\gamma'_i(x) = C_i(x)$, то $C_i(x)$ определяются из уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^k z_i(x) C_i(x) &= 0, \\ \sum_{i=1}^k z'_i(x) C_i(x) &= 0, \\ \cdot &\dots\dots\dots \\ \sum_{i=1}^k z_i^{(k-2)}(x) C_i(x) &= 0, \\ \sum_{i=1}^k z_i^{(k-1)}(x) C_i(x) &= \frac{r(x)}{p_k(x)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Эта система уравнений имеет однозначно определяемое решение, так как ее определитель, будучи вронскианом фундаментальной системы $z_i(x)$, отличен от нуля. В силу этих уравнений из (7.32) путем последовательного дифференцирования получаем

$$\left. \begin{aligned} y^{(s)}(x) &= \sum_{i=1}^k \gamma_i(x) z_i^{(s)}(x) \quad (s = 1, 2, \dots, k-1), \\ y^{(k)}(x) &= \sum_{i=1}^k \gamma_i(x) z_i^{(k)}(x) + \frac{r(x)}{p_k(x)}. \end{aligned} \right\} \quad (7.34)$$

¹⁾ В (4.11), (4.12) коэффициент при высшей производной обозначался $(-1)^m f_m(x)$. Здесь мы пишем $p_k(x)$, так как соображения данного пункта действительны не только для самосопряженных выражений вида (4.11), (4.12), но и для дифференциальных выражений типа (5.1).

²⁾ J. Н о р г, *Gewöhnliche Differentialgleichungen*, изд. 2., Berlin — Leipzig, 1927, 67 [см., например, Н. М. М а т в е е в, *Дифференциальные уравнения*, изд. ЛГУ, 1965].

При подстановке (7.32) в (7.31) в силу $M[z_i] = 0$ тотчас получается, что $M[y] = r(x)$, т. е. $y(x)$ является интегралом (7.31). Если обозначить решение системы (7.33) в случае $r = 1$ через $D_i(x)$, то имеем $C_i(x) = r(x)D_i(x)$, причем $D_i(x)$ не зависит от $r(x)$. Поэтому общее решение (7.31) можно записать в форме

$$y(x) = \sum_{i=1}^k c_i z_i(x) + \sum_{i=1}^k z_i(x) \int_a^x D_i(\xi) r(\xi) d\xi. \quad (7.35)$$

Здесь c_1, c_2, \dots, c_k — произвольные постоянные.

В системе (7.33), за исключением последнего уравнения, $C_i(x)$ можно заменить через $D_i(x)$. Эти уравнения тогда совпадают с уравнениями (5.9), (5.10) для величин $b_i(x)$. Поэтому, применяя последовательное дифференцирование уравнений (7.33)¹⁾, точно как в п. 5.3, приходим к следующему:

$$\sum_{i=1}^k z_i^{(\mu)}(x) D_i^{(\nu)}(x) = 0 \quad \text{при } \mu + \nu \leq k - 2. \quad (7.36)$$

Применим теперь формулу решения (7.35) к уравнению на собственные значения одночленного класса или вообще к уравнению вида

$$M[y] = \lambda [g(x) y^{(p)}]^{(q)}, \quad (7.37)$$

где $p + q \leq k - 2$, причем $g(x)$ пусть непрерывно дифференцируема как p раз, так и q раз.

В качестве общего решения этого уравнения имеем

$$y(x) = \sum_{i=1}^k c_i z_i(x) + \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^k z_i(\xi) D_i(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q)} d\xi. \quad (7.38)$$

При интегрировании по частям интеграл в правой части приводится к виду

$$\left[\sum_{i=1}^k z_i(x) D_i(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q-1)} \right]_{\xi=a}^{\xi=x} - \int_a^x \sum_{i=1}^k z_i(x) D_i'(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q-1)} d\xi.$$

Краевое выражение исчезает при $\xi = x$ в силу (7.36), а при $\xi = a$ оно является линейной комбинацией $z_i(x)$ и, следовательно, может

¹⁾ При этом требуется, чтобы $D_i(\xi)$ имела непрерывные производные до $(k-2)$ -го порядка. О $b_i(\xi)$ следует сказать дословно то же самое, что и в сноске ¹⁾ на стр. 82.

быть добавлено к первой сумме в (7.38). Итак, с новыми постоянными $c_{i,1}$, имеем

$$y(x) = \sum_{i=1}^k c_{i,1} z_i(x) - \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^k z_i(x) D_i'(\xi) [g(\xi) y^{(p)}(\xi)]^{(q-1)} d\xi.$$

Точно так же получаем, $q-1$ раз интегрируя по частям:

$$y(x) = \sum_{i=1}^k c_{i,q} z_i(x) + (-1)^q \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^k z_i(x) D_i^{(q)}(\xi) g(\xi) y^{(p)}(\xi) d\xi.$$

Учитывая, что, согласно (7.36),

$$\sum_{i=1}^k z_i [D_i^{(q)} g]' = g \sum_{i=1}^k z_i D_i^{(q+1)} + g' \sum_{i=1}^k z_i D_i^{(q)} = 0$$

и, равным образом,

$$\sum_{i=1}^k z_i [D_i^{(q)} g]'' = 0$$

и т. д., применяя вторично p -кратное интегрирование по частям, получаем для $y(x)$ (если постоянные снова обозначить c_i) неоднородное интегральное уравнение Вольтерра второго рода:

$$y(x) = \sum_{i=1}^k c_i z_i(x) + (-1)^{p+q} \lambda \int_a^x \sum_{i=1}^k z_i(x) [D_i^{(q)}(\xi) g(\xi)]^{(p)} y(\xi) d\xi. \quad (7.39)$$

Дальнейшие рассуждения приводятся без доказательства (впрочем, легко выполняемого)¹⁾. В случае ограниченного непрерывного ядра K , т. е.

$$|K(x, \xi)| \leq C \quad \text{при } a \leq \xi \leq x \leq b,$$

решение $\varphi(x)$ неоднородного уравнения (7.28) существует; оно однозначно определяется посредством (7.28) и может быть найдено методом последовательных приближений. Если $y_0(x)$ есть произвольная интегрируемая функция, то функции $y_n(x)$, определяемые соотношением

$$y_{n+1}(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, \xi) y_n(\xi) d\xi \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (7.40)$$

сходятся в интервале a, b равномерно к решению $\varphi(x)$.

В случае уравнения (7.39) положение несколько иное, так как постоянные c_i и λ неизвестны. Несмотря на это, можно применить метод последовательных приближений, данный формулой (7.40),

¹⁾ G. Hamel, Integralgleichungen, Berlin, 1937, 32.

а именно следующим образом (при этом, правда, ничего нельзя сказать о сходимости метода): исходим из произвольно выбранных, наперед заданных краевых условий, которым функция $y_0(x)$ по возможности уже удовлетворяет, и определяем постоянные c_i , которые при вычислении $y_{n+1}(x)$ еще выбираются свободно, а также величину λ , которую затем рассматриваем в качестве приближенного собственного значения, таким образом, чтобы y_{n+1} удовлетворяла краевым условиям и была бы величиной одного порядка с y_n . Множитель же при y_{n+1} еще не зафиксирован, и мы используем какое-нибудь условное нормировки, например: $y_n(x_0) = y_{n+1}(x_0)$ или $y'_n(x_0) = y'_{n+1}(x_0)$. Детали см. в следующем примере.

7.6. Пример. Изгибные колебания защемленного на одном конце и свободного на другом стержня постоянного сечения длины $l=1$ приводят, согласно п. 2.3 (рис. 2.5), к задаче на собственные значения:

$$y^{IV} = \lambda y, \quad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0.$$

В силу (7.29) при $k=4$, $p=3$ можно сразу записать соответствующее интегральное уравнение Вольтерра

$$y(x) = \sum_{\rho=0}^3 c_{\rho} x^{\rho} + \lambda \int_0^x \frac{(x-\xi)^3}{3!} y(\xi) d\xi.$$

Из краевых условий $y(0) = y'(0) = 0$ получаем $c_0 = c_1 = 0$; из других двух краевых условий c_2 и c_3 так просто выразить нельзя.

Для решения интегрального уравнения итерационным методом, согласно (7.40), исходим из функции $y_0(x)$:

$$y_0(x) = 6x^2 - 4x^3 + x^4,$$

удовлетворяющей всем краевым условиям, и получаем

$$y_1(x) = c_2 x^2 + c_3 x^3 + \lambda \left(\frac{x^6}{60} - \frac{x^7}{210} + \frac{x^8}{1680} \right).$$

Множитель при λ может быть непосредственно найден путем четырехкратного интегрирования $y_0(x)$; например, из $6x^2$ получаем

$$\frac{6x^6}{3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{x^6}{60}.$$

Далее, $y_1(x)$ должно удовлетворять краевым условиям. Произвольный пока множитель при $y_1(x)$ устанавливается, согласно рекомендации в заключении п. 7.5, так, чтобы y_0 и y_1 были величинами одного порядка; наиболее просто потребовать $y_0(1) = y_1(1)$. Из трех уравнений

$$y_1''(1) = 2c_2 + 6c_3 + \frac{\lambda}{3} = 0, \quad y_1'''(1) = 6c_3 + \frac{6\lambda}{5} = 0,$$

$$y_0(1) - y_1(1) = 3 - c_2 - c_3 - \frac{\lambda}{80} = 0$$

находим

$$c_2 = \frac{312}{59}, \quad c_3 = -\frac{144}{59}, \quad \lambda = \frac{720}{59} = 12,2034$$

вместо точного значения $\lambda = 12,362$.

Улучшенное приближенное значение получаем, проделывая следующие итерационные шаги. Так как постоянный множитель при y_1 не зафиксирован, разделив найденные величины на $\frac{24}{59}$, имеем

$$y_1(x) = 13x^2 - 6x^3 + \frac{x^6}{2} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^8}{56}.$$

Тогда $y_2(x)$ будет

$$y_2(x) = c_2x^2 + c_3x^3 + \frac{\lambda}{45} \left(\frac{13x^6}{8} - \frac{9x^7}{28} + \frac{x^{10}}{224} - \frac{x^{11}}{11 \cdot 112} + \frac{x^{12}}{112 \cdot 132} \right).$$

Из трех линейных уравнений $y_2''(1) = y_2'''(1) = y_1(1) - y_2(1) = 0$ получаем для неизвестных c_2, c_3, λ значения:

$$c_2 = \frac{661}{630} \lambda, \quad c_3 = -\frac{13}{27} \lambda, \quad \lambda = \frac{148\,680}{12\,031} = 12,3581 \text{ (ошибка } -0,03\% \text{)}^1).$$

7.7. Асимптотическое распределение собственных значений.

При помощи интегрального уравнения Вольтерра (7.51) можно определить асимптотическое распределение собственных значений в случае дифференциального уравнения второго порядка²⁾

$$-(f_1 y') + f_0 y = \lambda g_0 y \quad (7.41)$$

и краевых условий Штурма

$$c_1 y'(a) + c_2 y(a) = 0, \quad c_3 y'(b) + c_4 y(b) = 0. \quad (7.42)$$

Пусть $f_1 > 0, g_0 > 0, f_1, f_0, g_0$ непрерывны, f_1 и g_0 дважды непрерывно дифференцируемы. Вначале дифференциальное уравнение (7.41) путем введения новой переменной трансформируется к более простой форме при помощи преобразования, полезного и в других случаях. Вводятся новая независимая переменная

$$z = z(x) = \frac{1}{K} \int_a^x \sqrt{\frac{g_0}{f_1}} dx \quad (7.43)$$

и новая зависимая переменная

$$u = \Theta y, \quad \text{где } \Theta = (g_0 f_1)^{1/4}. \quad (7.44)$$

Постоянная K подлежит определению позже. Здесь это преобразование ради краткости дается готовым, его можно, разумеется, проводить при любых функциях Θ и $z(x)$; Θ и $z(x)$ можно

¹⁾ «Ошибка» приближения ξ к «истинной величине» x в литературе вводится, к сожалению, различными способами: $\xi - x, x - \xi$ или $|\xi - x|$. Здесь, следуя F. Kohlrusch, *Praktische Physik*, т. I, Leipzig und Berlin, 1943, стр. 12, она определяется как $\xi - x$, так что имеем: приближенная величина равна истинной величине плюс ошибка и истинная величина равна приближенной величине плюс «поправка». Относительная ошибка выражается в процентах истинной величины.

²⁾ E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, London, 1927, 270–273.

определить из требования, чтобы дифференциальное уравнение имело простое строение (7.45).

Из (7.43) и (7.44) следует

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{K} \left(\frac{g_0}{f_1} \right)^{1/2} = \frac{1}{K} \frac{\Theta^2}{f_1}$$

и

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dz} \left(\frac{u}{\Theta} \right) \frac{dz}{dx} = \left[\frac{1}{\Theta} \frac{du}{dz} - \frac{u}{\Theta^2} \frac{d\Theta}{dz} \right] \frac{1}{K} \frac{\Theta^2}{f_1} = \frac{1}{K f_1} \left[\frac{du}{dz} \Theta - u \frac{d\Theta}{dz} \right],$$

$$(f_1 y')' = \frac{1}{K} \frac{d}{dz} \left[\frac{du}{dz} \Theta - u \frac{d\Theta}{dz} \right] \frac{dz}{dx} = \frac{1}{K^2} \left[\frac{d^2 u}{dz^2} \Theta - u \frac{d^2 \Theta}{dz^2} \right] \frac{\Theta^2}{f_1}.$$

Дифференциальное уравнение (7.41) переходит, таким образом, в следующее:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + [\Lambda^2 - q(z)] u = 0, \quad (7.45)$$

где

$$\Lambda^2 = K^2 \lambda, \quad q(z) = \frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{dz^2} + K^2 \frac{f_0}{g_0},$$

Постоянная K связана с длиной нового основного интервала; он равен π для

$$K = \frac{1}{\pi} \int_a^b \sqrt{\frac{g_0}{f_1}} dx. \quad (7.46)$$

Краевые условия (7.42) принимают вид

$$c_1^* \left(\frac{du}{dz} \right)_0 + c_2^* u(0) = 0, \quad c_3^* \left(\frac{du}{dz} \right)_\pi + c_4^* u(\pi) = 0. \quad (7.47)$$

Пусть сначала $c_1^* \neq 0$, $c_3^* \neq 0$; тогда (7.47) можно записать в форме

$$\left(\frac{du}{dz} \right)_0 - hu(0) = 0, \quad (7.48)$$

$$\left(\frac{du}{dz} \right)_\pi - hu(\pi) = 0. \quad (7.49)$$

Свободный пока множитель при $u(z)$ может быть определен посредством начальных условий¹⁾:

$$u(0) = 1, \quad \left(\frac{du}{dz} \right)_0 = h, \quad (7.50)$$

тогда (7.48) удовлетворяется. Решение (7.45) можно теперь сразу получить описанным в п. 7.5 методом вариации коэффициентов. Если положить в (7.31) $M[y] = \frac{d^2 u}{dz^2} + \Lambda u$, $r(z) = q(z)u(z)$ и в качестве

¹⁾ $u(0)$ не может быть равным нулю, так как в противном случае, согласно (7.48), было бы равным нулю и $u'(0)$, а значит, $u(x) \equiv 0$ — решение (7.45) при начальных условиях $u = u' = 0$.

фундаментальной системы $u_1 = \cos \Lambda z$, $u_2 = \sin \Lambda z$, то формула решения (7.35) дает

$$u(z) = A \cos \Lambda z + B \sin \Lambda z + \frac{1}{\Lambda} \int_0^z \sin(\Lambda(z-t)) q(t) u(t) dt.$$

Что эта функция на самом деле удовлетворяет дифференциальному уравнению (7.45), легко установить путем подстановки. Из начальных условий (7.50) получаем постоянные интегрирования: $A = 1$, $B = \frac{h}{\Lambda}$. Таким образом, интегральное уравнение Вольтерра для $u(z)$ имеет вид

$$u(z) = \cos \Lambda z + \frac{h}{\Lambda} \sin \Lambda z + \frac{1}{\Lambda} \int_0^z \sin(\Lambda(z-t)) q(t) u(t) dt. \quad (7.51)$$

Решение $u(z)$ исходной краевой задачи (7.45), (7.50) в интервале $0 \leq z \leq \pi$ при заданном Λ устанавливается однозначно и является непрерывным. Пусть M есть максимальное абсолютное значение $u(x)$ в этом интервале, которое соответствует точке $z = z_1$. Тогда при

$$Q = \int_0^\pi |q(t)| dt$$

посредством оценки интеграла в (7.51) получаем для M неравенство

$$|u(z_1)| = M \leq \left| \cos \Lambda z_1 + \frac{h}{\Lambda} \sin \Lambda z_1 \right| + \frac{M}{|\Lambda|} Q.$$

Функция $\cos \Lambda z + \frac{h}{\Lambda} \sin \Lambda z$ представляет относительно z колебания с амплитудой

$$\sqrt{1 + \frac{h^2}{\Lambda^2}};$$

имеем, таким образом,

$$M \leq \sqrt{1 + \frac{h^2}{\Lambda^2}} + \frac{MQ}{|\Lambda|}$$

или

$$M \leq \frac{\sqrt{1 + \frac{h^2}{\Lambda^2}}}{1 - \frac{Q}{|\Lambda|}} \quad \text{при } |\Lambda| > Q.$$

Итак, M ограничено для всех $|\Lambda| > Q$, а значит, для всех вещественных Λ

$$M \leq M_1.$$

M_1 , а в дальнейшем M_2, M_3, \dots означают независимые от Λ постоянные. Таким образом, из (7.51) следует

$$\left(\frac{du}{dz} \right)_\pi = -\Lambda \sin \Lambda \pi + a_2, \quad \text{где } |a_2| \leq M_2;$$

вследствие неравенства $|u(\pi)| \leq M_1$ получается второе краевое условие (7.49):

$$\sin \Lambda \pi = \frac{a_3}{\Lambda}, \quad \text{где } |a_3| \leq M_3. \quad (7.52)$$

Корни $\Lambda = \Lambda_n$ этого трансцендентного уравнения, которые одновременно являются собственными значениями (7.45), (7.47), для больших Λ как угодно мало отличаются от корней уравнения $\Lambda \pi = 0$.

Легко видеть (рис. 7.1, кривая $\frac{a_3}{\Lambda}$ должна проходить в заштрихованной области), что

$$\Lambda = n + \frac{a_4}{n},$$

где

$$|a_4| \leq M_4.$$

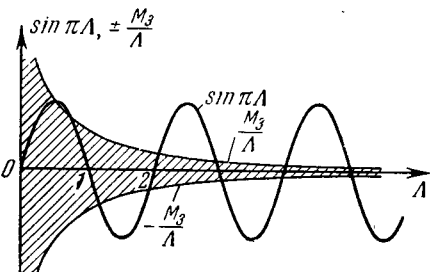


Рис. 7.1. К асимптотическому распределению собственных значений.

Этим еще раз доказано, что число $n + a_4/n$ и есть как раз n -е собственное значение Λ_n ; оно могло бы быть, например, $(n+1)$ -м или $(n-1)$ -м собственным значением, либо при n могло бы быть несколько корней (7.52). (Последний случай можно, правда, исключить, показав, что рост $\frac{a_3}{\Lambda}$ при $\Lambda \rightarrow \infty$ как угодно мал.) В случае, до сих пор не рассмотренном, когда c_1^* или c_3^* исчезает, соответствующие рассуждения приводят к результату¹⁾:

$$\text{при } c_1^* = c_3^* = 0 \quad \Lambda = n + \frac{a_5}{n}, \quad \text{где } |a_5| \leq M_5,$$

а когда исчезает одно из двух c^* , то

$$\Lambda = n + \frac{1}{2} + \frac{a_6}{n}, \quad \text{где } |a_6| \leq M_6.$$

Величины a_i можно задать в виде формул и оценить, благодаря чему можно получить более точные асимптотические выражения²⁾.

Если в выражение $\Lambda^2 = K^2 \lambda$ подставить для K его значение из (7.46), то получается резюмирующая

Теорема. Пусть λ_n есть n -е собственное значение задачи (7.41), (7.42) с входящими сюда предпосылками относительно f_1 ,

¹⁾ См. Е. Камке, Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lösungen, изд. 3, Leipzig 1944, 213 [Э. Камке, Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, М., «Наука», 1965].

²⁾ Е. Л. Инсе, Ordinary Differential Equations, London, 1927, 270—273.

f_0 и g_0 . Тогда имеет силу закон асимптотического распределения собственных значений

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda_n}{n^2} = \left[\frac{\pi}{\int_a^b \sqrt{\frac{g_0}{f_1}} dx} \right]^2. \quad (7.53)$$

Порядок величины собственных значений, таким образом, вовсе не зависит от коэффициентов c_v и функций f_0 , входящих в краевые условия (7.42) и в (7.41) соответственно.

7.8. Упражнения. 1. Рассмотрим особые случаи распределения собственных значений. Решить следующие несамосопряженные задачи на собственные значения (найти все собственные значения с соответствующими собственными функциями):

- а) $y'' = \lambda y'$; $y(0) = y(l) = 0$.
 б) $-y'' = \lambda y$; $y(0) = y'(0) = 0$.
 в) $-y'' = \lambda y$; $y(0) = y'(1) - \lambda y'(0) = 0$.
 г) $y^{IV} = -\lambda y''$; $y(0) = y''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.
 д) $y^{IV} = -\lambda y''$; $y''(0) = y'''(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

Решения:

- а) Имеются только комплексные собственные значения: $\lambda_k = \frac{2k\pi i}{l}$;

$y_k = e^{\lambda_k x} - 1$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm \dots$).

б) Нет никаких собственных значений.

в) При $\lambda = k^2$ для k получается трансцендентное уравнение $\cos k = k^2$; оно имеет в вещественной области два отличающихся только знаками корня и, кроме того, бесконечное множество комплексных (а не чисто мнимых) корней; имеется, следовательно, одно вещественное положительное и бесконечное множество комплексных собственных значений. Положительное собственное значение: $\lambda = 0,6792$.

При краевых условиях $y(0) = y'(1) - \lambda a y'(0) = 0$ трансцендентное уравнение имеет вид $\cos k = ak^2$. В этом случае, задаваясь любым положительным целым числом r , можно надлежащим выбором постоянной a достичь того, что будут иметь место ровно r вещественных собственных значений.

г) Имеется только одно невырожденное собственное значение: $\lambda_1 = 0$ при $y_1 = x$.

д) Каждое число λ является двукратно вырожденным собственным значением с $y_1 = 1$ и $y_2 = x$.

2. Построить функцию Грина для краевой задачи

$$L[y] = y^{IV} + k^2 y'' = r(x), \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0.$$

Это одновременно пример для резольвенты Грина, если положить $k^2 = z$. Для контроля вычислить

$$\int_0^1 G(x, \xi) d\xi = h(x)$$

и убедиться, что $h(x)$ разрешает краевую задачу при $r \equiv 1$.

Вычисление по методу, данному в п. 5.3:

Фундаментальную систему уравнения $L[y] = 0$ образуют функции

$$z_1 = 1, \quad z_2 = x, \quad z_3 = \sin kx, \quad z_4 = \cos kx.$$

Уравнения (5.9), (5.10) для b_i здесь имеют вид

$$\begin{aligned} b_1 + b_2 \xi + b_3 \sin k\xi + b_4 \cos k\xi &= 0, \\ b_2 + kb_3 \cos k\xi - kb_4 \sin k\xi &= 0, \\ -k^2 b_3 \sin k\xi - k^2 b_4 \cos k\xi &= 0, \\ -k^3 b_3 \cos k\xi + k^3 b_4 \sin k\xi &= -\frac{1}{2}, \end{aligned}$$

а их решения

$$b_1 = \frac{\xi}{2k^2}, \quad b_2 = -\frac{1}{2k^2}, \quad b_3 = \frac{1}{2k^3} \cos k\xi, \quad b_4 = -\frac{1}{2k^3} \sin k\xi.$$

Теперь необходимо решить систему уравнений (5.12) для a_i . Она имеет вид

$$\begin{aligned} a_1 + b_1 + a_4 + b_4 &= 0, \\ a_2 + b_2 + k(a_3 + b_3) &= 0, \\ a_1 - b_1 + a_2 - b_2 + (a_3 - b_3) \sin k + (a_4 - b_4) \cos k &= 0, \\ a_2 - b_2 + k(a_3 - b_3) \cos k - k(a_4 - b_4) \sin k &= 0 \end{aligned}$$

и имеет единственное решение, если определитель

$$D = k(2 - 2 \cos k - k \sin k)$$

не равен нулю. Ради краткости обозначим: $\sin k = s$ и $\cos k = c$. Тогда для a_i получаются выражения:

$$\begin{aligned} Da_1 &= b_1 k^2 s + 2b_2(s - kc) + 2b_3 k(s - kc) + 2b_4 k(ks + c - 1), \\ Da_2 &= -2b_1 k^2 s - b_2 k^2 s + 2b_3 k^2(c - 1) - 2b_4 k^2 s, \\ Da_3 &= 2b_1 ks + 2b_2(ks + c - 1) + b_3 k^2 s + 2b_4 ks, \\ Da_4 &= 2b_1 k(c - 1) + 2b_2(kc - s) + 2b_3 k(kc - s) - b_4 k^2 s. \end{aligned}$$

Согласно (5.8) функция Грина может быть построена непосредственно при помощи a_i и b_i . Если в выражения для a_i подставить значения b_i , то после упорядочивания и группировки членов получаем

$$k^2 DG(x, \xi) = (kx - \sin kx) [-s(k\xi - \sin k\xi) + (c - 1)(1 + \cos k\xi) + ks] + \\ + (1 - \cos kx) [(1 - c)(k\xi + \sin k\xi) + (kc - s)(1 - \cos k\xi) - ks \sin k\xi]$$

при $x \leq \xi$; при $x \geq \xi$ функцию Грина получаем из условия симметрии $G(x, \xi) = G(\xi, x)$. Для проверки вычисляется

$$\begin{aligned} h(x) &= \int_0^1 G(x, \xi) d\xi = \int_0^x + \int_x^1 = \\ &= \frac{1}{2k^3 D} [kDx^2 + k(k + kc - 2s)(1 - \cos kx) - D(kx - \sin kx)]. \end{aligned}$$

Эта функция фактически разрешает краевую задачу при $r \equiv 1$.

3. Определить функцию Грина $G(x, \xi)$ для задачи

$$L[y] = y^{IV} = r(x),$$

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) = 0.$$

Ответ.

$$G(x, \xi) = \frac{x^2(\xi - 1)^3}{120} [10\xi^2 - 5x\xi(3\xi + 1) + x^2(6\xi^2 + 3\xi + 1)]$$

при $x \leq \xi$; при $x \geq \xi$ функция $G(x, \xi)$ получается путем перемены местами x и ξ .

4. Вырожденные собственные значения. Если задано любое целочисленное $k > 0$, то можно указать собственное значение λ_j самосопряженной определенной задачи

$$\Delta z \equiv \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\lambda z,$$

$z = 0$ на контуре квадрата со стороной длины π , которое является по меньшей мере k -кратно вырожденным.

Доказательство. Если стороны квадрата заданы уравнениями $x = 0$, $x = \pi$, $y = 0$, $y = \pi$, то собственные функции

$$z = \sin mx \sin ny$$

при целочисленных m , n соответствуют собственному значению $\lambda = \lambda_{mn} = m^2 + n^2$.

Используем теперь k различных точек (x_1, y_1) ; (x_2, y_2) ; ...; (x_k, y_k) с рациональными координатами в первом октанте единичного круга, т. е.

$$x_i^2 + y_i^2 = 1 \quad (i = 1, 2, \dots, k), \\ 0 < y_i < x_i.$$

Если представить себе все $2k$ дробей $x_1, y_1, \dots, x_k, y_k$ отнесенными к общему знаменателю R , то собственному значению $\lambda = R^2$ соответствуют k линейно независимых собственных функций

$$z = \sin(Rx_i x) \sin(Ry_i y) \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

5. Двукратно вырожденное собственное значение. Наименьшее собственное значение задачи

$$y^{IV} + \frac{9\pi^4}{l^4} y = -\lambda y'', \quad y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$$

является двукратно вырожденным. Какие собственные функции ему соответствуют?

О т в е т. Собственному значению $\lambda = 10\pi^2/l^2$ соответствуют

$$y_1 = 3 \sin \frac{\pi x}{l} - \sin \frac{3\pi x}{l} \quad \text{и} \quad y_2 = \cos \frac{\pi x}{l} - \cos \frac{3\pi x}{l}.$$

6. Если в задаче на собственные значения $-y'' = \lambda g_0(x) y$; $y(a) = y(b) = 0$ непрерывная функция $g_0(x)$ в интервале $a \leq x \leq b$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, то существует бесконечное множество отрицательных собственных значений (см. сноску ¹) на стр. 60). Просчитать в качестве примера, разрешаемого в замкнутом виде, случай [в котором, правда, предпосылка о непрерывности $g_0(x)$ не выполняется]

$$a = -1, \quad b = 1, \quad g_0(x) = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 & \text{при } -1 \leq x \leq 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Результат. Если μ_1, μ_2, \dots — положительные корни уравнения $\operatorname{tg} \mu + \operatorname{th} \mu = 0$ ($\mu_1 = 2,3650$, $\mu_2 = 5,4978$, F. Emde, Tafeln elementaren Funktionen, 1940, стр. 131), то собственные значения λ_i суть $\pm \mu_i^2$, где $i = 1, 2, \dots$, а соответствующие им собственные функции имеют вид

$$y_i(x) = \begin{cases} \sin \sqrt{\lambda_i} \operatorname{sh}(\sqrt{\lambda_i}(x+1)) & \text{при } x < 0, \\ \operatorname{sh} \sqrt{\lambda_i} \sin(\sqrt{\lambda_i}(1-x)) & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

На рис. 7.2 показаны собственные функции, соответствующие первым трем положительным и первым трем отрицательным собственным значениям.

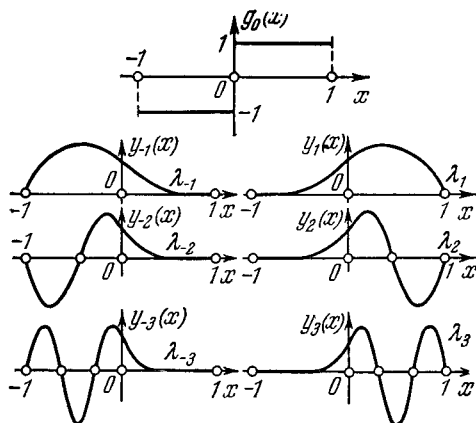


Рис. 7.2. Задаче $-y'' = \lambda (\operatorname{sgn} x) y$; $y(\pm 1) = 0$ соответствует бесконечное множество положительных и бесконечное множество отрицательных собственных значений.

7. При краевых условиях: $y(-1) = y(1) = 0$ найти первую собственную функцию $y_1(x)$ и первое собственное значение λ_1 для дифференциальных уравнений:

$$\text{а) } -y'' = \lambda(10 - x^2)y, \quad \text{в) } -y'' = \lambda \frac{x^2 y}{3 + 3x^2 - x^4},$$

$$\text{б) } -y'' = \lambda \frac{y}{5 - x^2}, \quad \text{г) } -y'' = \lambda \frac{(1 + 5x^2)y}{4 + x^2 - x^4}.$$

Решения:

$$\text{а) } y_1 = e^{-\frac{x^2}{4}}(1 - x^2), \quad \lambda_1 = \frac{1}{4}, \quad \text{в) } y_1 = 3 - 5x^4 + 2x^6, \quad \lambda_1 = 60.$$

$$\text{б) } y_1 = (5 - 6x^2 + x^4), \quad \lambda_1 = 12, \quad \text{г) } y_1 = 4 - 3x^2 - 2x^4 + x^6, \quad \lambda_1 = 6.$$

8. Пусть

$$\pm x_1, \pm x_2, \pm x_3, \dots, \pm x_i, \dots$$

суть расположенные в порядке возрастания абсолютных величин отличные от нуля корни уравнений:

$$\text{а) } x \operatorname{tg} x = A, \quad \text{б) } \operatorname{tg} x + Ax = 0.$$

Вычислить при $A > 0$ сумму обратных квадратов

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i^2}.$$

Решение. Величины $x_i^2 = \lambda_i$ суть собственные значения уравнения $-y'' = \lambda y$ при краевых условиях:

$$\text{а) } y'(0) = 0, \quad y'(1) + Ay(1) = 0;$$

$$\text{б) } y(0) = 0, \quad Ay'(1) + y(1) = 0.$$

Так как функцию Грина для этой задачи можно найти (см. таблицу IV), то уравнение (7.13), соответственно (7.21), дает непосредственно в качестве суммы обратных квадратов:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i^2} = \int_0^1 \frac{A+1-Ax}{A} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{A},$$

в случае б)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{x_i^2} = \int_0^1 \left(x - \frac{x^2}{A+1} \right) dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{3(A+1)}.$$

В таблице VI найти в качестве примера результаты для нескольких значений A .

9. Проверить следующие примеры ¹⁾ задач на собственные значения, в которых собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, отличаются друг от друга как угодно мало. Пусть ε есть произвольная, в частности как угодно малая постоянная. Самосопряженная задача

$$-y'' = \lambda \frac{\varepsilon \sin x}{1 + \varepsilon \sin x} y, \quad y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi)$$

имеет для $\lambda_1 = 0$ собственную функцию $y_1 \equiv 1$ и для $\lambda_2 = 1$ — собственную функцию $y_2 = 1 + \varepsilon \sin x$. Задача не принадлежит к рассмотренному в § 4 классу задач, так как функция g_0 в интервале $0 < x < 2\pi$ меняет знак и нарушается принятая в п. 4.2 предпосылка $g_n \neq 0$.

Уравнение

$$y^{IV} + y = -\lambda (g_1 y')$$

с неоднородными краевыми условиями $y^{(v)}(0) = y^{(v)}(2\pi)$, $v = 0, 1, 2, 3$,

в случае комплексной функции $g_1 = 34 - \frac{9}{\varepsilon} e^{-ix}$ для $\lambda_1 = \frac{1}{17}$ имеет собственную функцию $y_1 = e^{ix}$ и для $\lambda = 1/8$ собственную функцию $y_2 = e^{ix} + \varepsilon e^{2ix}$.

10. Сопоставить системе ²⁾ дифференциальных уравнений первого порядка относительно двух функций $y(x)$, $z(x)$

$$\frac{dy}{dx} = b(x)y + \lambda c(x)z, \quad \frac{dz}{dx} = -\lambda a(x)y - b(x)z$$

путем исключения z дифференциальное уравнение второго порядка относительно y .

¹⁾ Оба примера сообщены мне Виландтом.

²⁾ Подробную теорию собственных значений, вытекающую из так называемой канонической системы

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_i}{dx} &= \sum_{j=1}^n (b_{ji}(x) y_j + \lambda c_{ij}(x) z_i), \\ \frac{dz_i}{dx} &= \sum_{j=1}^n (-\lambda a_{ij}(x) y_j - b_{ij}(x) z_i) \end{aligned} \right\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Результат. При $\lambda^2 = \mu$ получаем для y дифференциальное уравнение в самосопряженной форме (4.11), (4.12)

$$-\frac{d}{dx} \left(\frac{y'}{c} \right) + \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{b}{c} \right) + \frac{b^2}{c} \right) y = \mu ay.$$

11. Определить собственные значения и собственные функции интегрального уравнения с симметричным вырожденным ядром от двух независимых переменных x, y

$$z(x, y) = \lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x - \xi - y + \eta)^2 z(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Указание. Правая часть есть полином второй степени относительно x и y , т. е. z имеет вид

$$z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2.$$

Если подставить этот полином z в обе части, то путем сравнения коэффициентов для шести неизвестных a_v получим систему шести линейных однородных уравнений с определителем (подставлено $\mu = 1/4\lambda$):

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3} - \mu & 0 & 0 & \frac{14}{45} & -\frac{2}{9} & \frac{14}{45} \\ 0 & -\frac{2}{3} - \mu & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} - \mu & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} - \mu & 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\mu & -\frac{2}{3} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} - \mu \end{vmatrix} = 0.$$

Шесть корней этой системы уравнений (расположенных по порядку возрастания абсолютной величины λ):

$$\mu_1 = \frac{2}{3} + 4\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \mu_2 = -\frac{4}{3}, \quad \mu_3 = \frac{2}{3} - 4\sqrt{\frac{1}{15}}, \quad \mu_4 = \mu_5 = \mu_6 = 0.$$

Соответствующие им собственные функции:

$$z_{1,3} = \pm 4 \sqrt{\frac{1}{15}} + (x - y)^2; \quad z_2 = x - y; \quad z_4 = x + y; \quad z_5 = x^2 - y^2;$$

$z_6 = -10 + 15(x^2 + y^2) + 12xy$. Начертить узловую линию ($z_v = 0$) в квадрате $-1 \leq x, y \leq 1$ и проверить соотношения ортогональности (7.9) и формулы (7.12), (7.13) для

$$\sum_{k=1}^6 \frac{1}{\lambda_k} = 0; \quad \sum_{k=1}^6 \frac{1}{\lambda_k^2} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x - \xi - y + \eta)^4 dx dy d\xi d\eta = \frac{384}{5}.$$

КРАТКИЙ ОЧЕРК МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

В § 8 будут обоснованы минимальные свойства собственных значений. Эти свойства составляют основу для развитых в § 9 и в гл. IV и V численных методов. В § 10 дается доказательство теоремы о разложении, которая не обладает такой же степенью общности, как минимальные свойства, однако распространяется на одночленный класс. Доказательство этой теоремы предполагает у читателя несколько большую математическую подготовку, чем предыдущие параграфы, но в силу центрального положения этой теоремы оно дается по возможности полно. Формулировка теоремы понятна и для менее математически подготовленных читателей.

Для часто встречающегося частного класса задач на собственные значения второго порядка

$$-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y, \quad y(a) = y(b) = 0$$

— независимо от прочих исследований этой главы — элементарное доказательство важнейших фактов будет дано в п. 11.1.

§ 8. Минимальные свойства собственных значений

8.1. Минимальное свойство наименьшего собственного значения. При исследовании определенности задачи на собственные значения нам уже встречалось [см. (4.31)] отношение Рэля

$$R[u] = \frac{\int_a^b uM[u] dx}{\int_a^b uN[u] dx}. \tag{8.1}$$

Это число $R[u]$, поскольку знаменатель не обращается в нуль, может быть образовано для любых функций сравнения u , т. е. (см. п. 4.2) для функций $u \neq 0$, которые $2m$ -кратно непрерывно дифференцируемы и удовлетворяют краевым условиям.

Сделаем следующие предположения:

Пусть задача на собственные значения (4.11) — (4.14)

$$M[y] - \lambda N[y] = 0, \quad U_\mu[y] = 0$$

является самосопряженной (см. п. 4.3) и вполне определена, т. е. в соответствии с (4.30)

$$\left. \begin{aligned} \int_a^b uM[u] dx > 0, \\ \int_a^b uN[u] dx > 0 \end{aligned} \right\} \text{ для всех функций сравнения.} \quad (8.2)$$

Проверка этих предположений в каждом отдельном случае может быть легко осуществлена методами, изложенными в § 4.

Тогда, как будет доказано в п. 8.2,

$$R[u] \geq \lambda_1, \quad (8.3)$$

т. е. образованное с некоторой функцией сравнения u отношение Рэля $R[u]$ никогда не будет меньше наименьшего собственного значения λ_1 . Если же в качестве u используется первая собственная функция y_1 , то $R[y_1] = \lambda_1$. Таким образом, справедлива

Теорема. Пусть задача на собственные значения (4.11)—(4.14) является самосопряженной, а условия полной определенности (8.2) выполнены. Тогда первая собственная функция y_1 разрешает вариационную задачу нахождения минимума отношения Рэля (8.1), если u пробегает всю область функций сравнения. Соответствующий минимум есть первое собственное значение λ_1 .

8.2. Проведение доказательства. Пусть теперь u — некоторая фиксированная функция сравнения. Мы полагаем, что $R[u]$ получено при помощи этой функции; отношение $R[u]$ есть, таким образом, определенное число.

Для доказательства утверждения (8.3) строится вспомогательная функция $\eta(x)$ путем подстановки в дифференциальное уравнение u вместо y и R вместо λ :

$$M[u] - RN[u] = \eta(x). \quad (8.4)$$

Если выбранная функция u совпадает с собственной функцией y_1 , то $R = \lambda_1$ и $\eta(x) \equiv 0$. Если же совпадение приблизительно, то возникает «функция ошибки» $\eta(x)$, принимающая лишь малые значения. Обратное: если $\eta(x) \equiv 0$, то u — решение уравнения

$$M[u] - RN[u] = 0,$$

т. е. u — собственная функция, соответствующая собственному значению R . В этом случае соотношение $R \geq \lambda_1$, несомненно, верно. Поэтому случай $\eta \equiv 0$ можно исключить из рассмотрения.

При фиксированном u также и $\eta(x)$ есть некоторая определенная непрерывная функция. Сформулируем следующую краевую задачу:

$$M[v] - \lambda N[v] = \eta(x), \quad U_{\mu}[v] = 0, \quad (8.5)$$

где λ — параметр, возрастающий от нуля. Таким образом, это — неоднородная краевая задача с заданной правой частью $\eta(x)$. Решение зависит еще от параметра λ , $v = v(x, \lambda)$, и для тех λ , которые не являются собственными значениями, может быть сразу же указано при помощи резольвенты Грина на основании (5.20), (5.21):

$$v(x, \lambda) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda) \eta(\xi) d\xi. \quad (8.6)$$

В соответствии с п. 5.8 резольвента Грина — мероморфная функция λ ; она имеет полюсы в местах собственных значений $\lambda = \lambda_i$ и в остальной области регулярна. Поэтому и $v(x, \lambda)$ также непрерывна и регулярна относительно λ , за исключением, быть может, точек $\lambda = \lambda_i$. Построим еще одну вспомогательную функцию

$$h(\lambda) = \int_a^b \eta(x) v(x, \lambda) dx. \quad (8.7)$$

Эта функция вводится потому, что с использованием (8.5) она может быть записана в форме

$$h(\lambda) = \int_a^b (v(x, \lambda) M[v(x, \lambda)] - \lambda v(x, \lambda) N[v(x, \lambda)]) dx. \quad (8.8)$$

Как видно, здесь появляются фигурирующие в исходных условиях выражения

$$\int_a^b v M[v] dx \quad \text{и} \quad \int_a^b v N[v] dx.$$

Вместе с $v(x, \lambda)$ функция $h(\lambda)$ также непрерывна и регулярна относительно λ , за исключением точек $\lambda = \lambda_i$. Чтобы наглядно описать функцию $h(\lambda)$, вычислим ее для некоторых частных случаев.

1. $\lambda = R$. В этом случае дифференциальное уравнение (8.5) относительно v переходит в дифференциальное уравнение (8.4) относительно $u(x)$, причем граничные условия оказываются как раз такими, которым должна удовлетворять функция u , т. е.

$$v(x, R) = u(x)$$

и в силу (8.8)

$$h(R) = \int_a^b (u M[u] - R u N[u]) dx = \int_a^b u M[u] dx - R \int_a^b u N[u] dx = Q,$$

так как R , согласно (8.1), определено именно как отношение обоих интегралов. Итак, констатируем: $h(R) = 0$.

2. $\lambda = 0$. В силу полной определенности задачи $\lambda = 0$ не является собственным значением, так что этот выбор возможен. При этом, согласно (8.5), $v(x, 0)$ есть решение краевой задачи

$$M[v] = \eta(x), \quad U_\mu[v] = 0.$$

С определенной таким образом функцией ввиду условий (8.2) имеем

$$h(0) = \int_a^b v M[v] dx > 0.$$

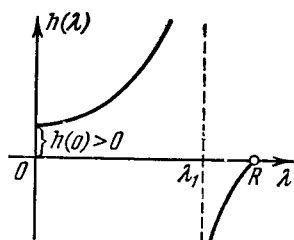


Рис. 8.1. График вспомогательной функции $h(\lambda)$.

Докажем еще, что производная $dh/d\lambda$ везде положительна. Это значит, что $h(\lambda)$ выглядит, как это показано на рис. 8.1: $h(\lambda)$ имеет при $\lambda = 0$ положительное значение, а при $\lambda = R$ значение нуль; $h(\lambda)$ везде непрерывна и дифференцируема, за исключением точек $\lambda = \lambda_i$; $h(\lambda)$ везде (кроме точек $\lambda = \lambda_i$) возрастает. Если бы между точками 0 и R не было собственных значений, выполнялось бы неравенство $h(R) > h(0)$, что не имеет места. Отсюда следует, что между нулем и R лежит по меньшей мере одно собственное значение. Итак, $R \geq \lambda_1$.

Для доказательства положительности производной вычислим разность двух значений функции h в точках λ и λ^* . В соответствии с (8.7)

$$h(\lambda) - h(\lambda^*) = \int_a^b \{v(x, \lambda) \eta(x) - v(x, \lambda^*) \eta(x)\} dx.$$

В подынтегральном выражении первый раз полагаем

$$\eta(x) = M[v(x, \lambda^*)] - \lambda^* N[v(x, \lambda^*)]$$

и второй раз

$$\eta(x) = M[v(x, \lambda)] - \lambda N[v(x, \lambda)]$$

[согласно (8.5) оба выражения действительно равны заданной функции $\eta(x)$]. Тогда

$$h(\lambda) - h(\lambda^*) = \int_a^b \{v(x, \lambda) M[v(x, \lambda^*)] - v(x, \lambda^*) M[v(x, \lambda)] - \lambda^* v(x, \lambda) N[v(x, \lambda^*)] + \lambda v(x, \lambda^*) N[v(x, \lambda)]\} dx.$$

Первые два слагаемых справа при интегрировании взаимно уничтожаются в силу предполагаемой самосопряженности, а интегралы от

вторых слагаемых, не считая множителя λ , равны друг другу, опять-таки из-за самосопряженности. Таким образом,

$$h(\lambda) - h(\lambda^*) = (\lambda - \lambda^*) \int_a^b v(x, \lambda) N[v(x, \lambda^*)] dx. \quad (8.9)$$

Отсюда следует, что в пределе при $\lambda^* \rightarrow \lambda$ в силу (8.2)

$$\frac{dh}{d\lambda} = \lim_{\lambda^* \rightarrow \lambda} \frac{h(\lambda) - h(\lambda^*)}{\lambda - \lambda^*} = \int_a^b v(x, \lambda) N[v(x, \lambda)] dx > 0. \quad (8.10)$$

Этим доказательство неравенства $R \geq \lambda_1$ завершено. Одновременно доказано существование по крайней мере одного собственного значения.

8.3. Минимальные свойства высших собственных значений¹⁾.

Точно так же и второе собственное значение λ_2 можно определить при помощи вариационной задачи. А именно, оказывается, что оно является наименьшей величиной, которую принимает отношение Рэлея, когда u пробегает область не всех функций сравнения, а только тех из них, которые ортогональны первой собственной функции y_1 в обобщенном смысле (или ортогональны $N[y_1]$ в обычном смысле).

Мы исходим из функции u , которая, как функция сравнения, удовлетворяет таким же условиям, как и в п. 8.1, и, сверх этого, удовлетворяет еще «дополнительному условию»

$$\int_a^b u(x) N[y_1(x)] dx = 0. \quad (8.11)$$

Теперь уже $u(x)$ не может быть, например, собственной функцией, отвечающей λ_1 . Вопрос о существовании такой функции $u(x)$ не рассматривается. Если, например, $w(x)$ — какая-нибудь функция сравнения, которая не должна быть первой собственной функцией y_1 , то условию (8.11) будет удовлетворять функция

$$u(x) = w(x) - y_1(x) \frac{\int_a^b w(\xi) N[y_1(\xi)] d\xi}{\int_a^b y_1(\xi) N[y_1(\xi)] d\xi}.$$

¹⁾ Приведенную в заключение этого пункта теорему о минимальных свойствах $(s+1)$ -го собственного значения λ_{s+1} мы доказываем при дополнительном предположении, что $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_{s+1}$ являются невырожденными собственными значениями. Теорема, однако, верна также в случае вырождения и формулируется здесь в общем виде. Доказательство для последнего случая имеется в статье E. Kamke, Math. Z. 46 (1940), 251—286.

Для обоснования минимальных свойств второго собственного значения снова положим, что $u(x)$ — фиксированная функция, тогда отношение Рэля $R[u]$ также есть некоторое определенное число. Построим, подобно (8.4), вспомогательную функцию $\eta(x)$:

$$M[u] - RN[u] = \eta(x). \quad (8.12)$$

Если $\eta(x) \equiv 0$, то $u(x)$ является собственной функцией, и так как она не может быть первой собственной функцией, то это — вторая или одна из высших собственных функций. Тогда, следовательно, верно неравенство $R \geq \lambda_2$. Поэтому достаточно доказать истинность утверждения $R \geq \lambda_2$ при условии $\eta(x) \neq 0$.

Аналогично (8.5) сформулируем краевую задачу

$$M[v] - \lambda N[v] = \eta(x), \quad U_\mu[v] = 0,$$

решение которой $v = v(x, \lambda)$ можно найти непосредственно при помощи резольвенты Грина:

$$v(x, \lambda) = \int_a^b G(x, \xi, \lambda) \eta(\xi) d\xi.$$

Резольвента Грина имеет полюс при $\lambda = \lambda_1$, и можно, согласно (5.26), записать ее в виде

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{C_1 y_1(x) y_1(\xi)}{\lambda - \lambda_1} + G_1^*(x, \xi, \lambda),$$

причем $G_1^*(x, \xi, \lambda)$ в точке $\lambda = \lambda_1$ регулярна. Имеем поэтому

$$v(x, \lambda) = \int_a^b \frac{C_1 y_1(x) y_1(\xi)}{\lambda - \lambda_1} \eta(\xi) d\xi + \int_a^b G_1^*(x, \xi, \lambda) \eta(\xi) d\xi.$$

Первый интеграл обращается в нуль, так как из предпосылки, что u ортогональна $N[y_1]$, в силу самосопряженности следует

$$\int_a^b u N[y_1] dx = \int_a^b y_1 N[u] dx = 0.$$

Далее имеем

$$\int_a^b u N[y_1] dx = \int_a^b u \frac{M[y_1]}{\lambda_1} dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b y_1 M[u] dx = 0.$$

Следовательно,

$$\int_a^b y_1 M[u] dx = \int_a^b y_1 N[u] dx = 0,$$

и, таким образом, в силу (8.12)

$$\int_a^b y_1(\xi) \eta(\xi) d\xi = 0.$$

Итак, остается

$$v(x, \lambda) = \int_a^b G_1^*(x, \xi, \lambda) \eta(\xi) d\xi. \quad (8.13)$$

Особенность при $\lambda = \lambda_1$, таким образом, выпала, $v(x, \lambda)$ может быть определена с помощью этого уравнения также и в этом случае. При $\lambda = \lambda_1$ функция $v(x, \lambda)$ регулярна, она является сингулярной только в случае более высоких собственных значений λ_i . В дальнейшем доказательство идентично таковому в п. 8.2. Вспомогательная функция, построенная аналогично (8.7),

$$h(\lambda) = \int_a^b \eta(x) v(x, \lambda) dx$$

при $\lambda = R$ и $\lambda = \lambda_1$ имеет частные значения:

$$h(R) = 0,$$

и

$$\begin{aligned} h(\lambda_1) &= \int_a^b \{v(x, \lambda_1) M[v(x, \lambda_1)] - \lambda_1 v(x, \lambda_1) N[v(x, \lambda_1)]\} dx = \\ &= \int_a^b v(x, \lambda_1) N[v(x, \lambda_1)] dx \cdot \{R[v(x, \lambda_1)] - \lambda_1\}. \end{aligned}$$

Здесь оба множителя положительны¹⁾, первый согласно предпосылке (8.2), второй в силу уже обоснованных минимальных свойств первого собственного значения λ_1 , следовательно, $h(\lambda_1) > 0$.

В остальной области $h(\lambda)$ имеет, как в (8.10), положительную производную и, таким образом, вид, как на рис. 8.2. Значит, $h(\lambda)$ не для всех λ из интервала $\lambda_1 \leq \lambda \leq R$ может быть регулярной, т. е. в этом интервале локализовано следующее собственное значение. Тем самым доказаны утверждение $R \geq \lambda_2$ и одновременно существование второго собственного значения. Вообще точно таким же образом доказывается, что:

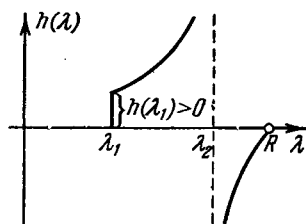


Рис 8.2. К доказательству минимального свойства второго собственного значения.

¹⁾ При этом используется то обстоятельство, что $v(x, \lambda)$ является функцией сравнения также и при $\lambda = \lambda_1$, что можно доказать на основе (8.13). Для более подробного представления об этом см. сноску на стр. 135.

Если функция сравнения u удовлетворяет с дополнительным условиям

$$\int_a^b uN[y_i(x)] dx = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, s), \quad (8.14)$$

то имеет место

$$R[u] \geq \lambda_{s+1}.$$

Так как при $u = y_{s+1}$ отношение Рэлея принимает значение λ_{s+1} , то обосновано минимальное свойство для собственного значения λ_{s+1} .

Теорема. Пусть задача на собственные значения (4.11), (4.14) является самосопряженной и условия (8.2) полной определенности выполняются. Тогда существует бесконечное множество вещественных положительных собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots$. При этом $(s+1)$ -е собственное значение равно минимуму, который принимает отношение Рэлея (8.1), когда u пробегает область всех тех функций сравнения, которые ортогональны в обобщенном смысле первым s собственным функциям (т. е. выполняются дополнительные условия (8.14)); при этом вырожденные собственные значения должны перечисляться согласно их кратности.

Одновременно следует, что собственные значения λ_s растут неограниченно:

$$\lambda_s \rightarrow \infty \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty,$$

так как, согласно п. 5.7, собственные значения λ в конечной области не могут иметь точки сгущения.

8.4. Минимаксимальный принцип Куранта¹⁾. При обсуждении в п. 8.3 минимальных свойств $(s+1)$ -го собственного значения в дополнительные условия (8.14) вошли s первых собственных функций. Ниже собственное значение λ_{s+1} определяется «независимым» способом, при котором нет надобности обращаться к низшим собственным функциям. Возьмем s линейно независимых интегрируемых функций

$$\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$$

и рассмотрим только те функции сравнения u , которые ортогональны в обычном смысле к этим s выбранным функциям и которые, следовательно, удовлетворяют дополнительным условиям

$$\int_a^b u\omega_\sigma dx = 0 \quad (\sigma = 1, 2, \dots, s). \quad (8.15)$$

¹⁾ R. Courant, D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik, т. 1, изд. 2, Berlin, 1931, 352 [Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. 1, ГИТТЛ, 1951].

Минимум¹⁾ отношения Рэлея (8.1) для допустимых теперь функций u имеет величину, зависящую еще от выбранных функций ω_σ :

$$\min_u R[u] = M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s).$$

В этом случае собственное значение λ_{s+1} является максимумом этой функции $M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$, когда ω_σ пробегает совокупность интегрируемых функций:

$$\lambda_{s+1} = \max M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s). \quad (8.16)$$

В качестве резюме получается

Теорема. Пусть задача на собственные значения (4.11), (4.14) является самосопряженной и полностью определенной [т. е. удовлетворяется (8.2)]. Пусть, далее, $M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$ есть минимум или нижняя граница отношения Рэлея (8.1), когда u пробегает область всех функций сравнения, ортогональных с данным линейно независимым интегрируемым функциям $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$. Тогда $(s+1)$ -е собственное значение λ_{s+1} равно наибольшей величине, которую принимает $M(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s)$, когда ω_σ пробегает совокупность всех рассматриваемых систем функций.

Доказательство. Пусть, сначала, $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$ — фиксированные функции. Покажем, что имеются допустимые функции (ортогональные, следовательно, всем ω_σ), которые могут быть построены как линейные комбинации из первых $(s+1)$ собственных функций y_σ :

$$u = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma y_\sigma. \quad (8.17)$$

Условия ортогональности требуют

$$0 = \int_a^b u \omega_\rho dx = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma \int_a^b \omega_\rho y_\sigma dx \quad \text{при } \rho = 1, 2, \dots, s.$$

Это — s линейных однородных уравнений относительно $(s+1)$ коэффициентов a_σ ; следовательно, всегда найдутся a_σ , не все равные нулю.

Для функций u , построенных с этими a_σ , согласно (8.17), используя (4.18) или (5.33), получаем

$$\begin{aligned} \int_a^b u M[u] dx &= \int_a^b \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma y_\sigma \sum_{\tau=1}^{s+1} a_\tau M[y_\tau] dx = \\ &= \int_a^b \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_\sigma y_\sigma \sum_{\tau=1}^{s+1} a_\tau \lambda_\tau N[y_\tau] dx. \end{aligned}$$

¹⁾ Или нижняя граница. В вариационной задаче может случиться, что нижняя граница не достигается ни при какой функции сравнения.

В силу обобщенной ортогональности собственных функций от интегралов остаются только члены с $\sigma = \tau$:

$$\int_a^b u M [u] dx = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_{\sigma}^2 \lambda_{\sigma} \int_a^b y_{\sigma} N [y_{\sigma}] dx$$

и соответственно

$$\int_a^b u N [u] dx = \sum_{\sigma=1}^{s+1} a_{\sigma}^2 \int_a^b y_{\sigma} N [y_{\sigma}] dx.$$

Стоящие в правых частях интегралы, согласно предпосылке (8.2), положительны, т. е. в силу того, что $\lambda_{\sigma} \leq \lambda_{s+1}$, можно получить оценку:

$$\int_a^b u M [u] dx \leq \lambda_{s+1} \int_a^b u N [u] dx$$

и тем самым

$$R [u] \leq \lambda_{s+1}.$$

Искомый минимум R может быть лишь еще меньше, чем определенное таким образом $R [u]$, значит, и подавно

$$\min R \leq \lambda_{s+1}.$$

Итак, доказано, что

$$M (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s) \leq \lambda_{s+1}.$$

Теперь варьируем $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_s$: если взять, в частности,

$$\omega_{\sigma} = N [y_{\sigma}],$$

то имеем прежнюю минимальную задачу для высших собственных значений, и тогда $M = \lambda_{s+1}$. Значит, λ_{s+1} есть максимум M при вариации ω_{σ} , или, пользуясь одной символической формулой:

$$\lambda_{s+1} = \max_{(\omega_1, \dots, \omega_s)} \left\{ \begin{array}{c} \min_u R [u] \\ \text{дополнит. условия (8.15)} \end{array} \right\}. \quad (8.18)$$

8.5. Теорема сравнения. Она является прямым следствием мини-максимального принципа и гласит:

Теорема. Если рассматриваются две самосопряженные задачи на собственные значения вида (4.11), (4.14)

$$M [y] = \lambda N [y], \quad M [y] = \lambda^* N^* [y] \quad (8.19)$$

при одном и том же $M[u]$ и с одинаковыми краевыми условиями $U_\mu[u] = 0$ и если для всех функций сравнения

$$\int_a^b uM[u] dx > 0, \\ \int_a^b uN[u] dx \geq \int_a^b uN^*[u] dx > 0, \quad (8.20)$$

то для всех собственных значений λ_s и λ_s^* обеих задач (8.19) имеем

$$\lambda_s \leq \lambda_s^* \quad \text{при } s = 1, 2, \dots$$

В силу предпосылки (8.20)

$$R[u] \leq R^*[u],$$

и это неравенство имеет место также для всех минимумов и максимумов, т. е. $\lambda_s \leq \lambda_s^*$ при всех s .

Теорему сравнения часто можно использовать для быстрой оценки собственных значений. Если, например, имеем уравнение

$$y^{IV} = \lambda(1+x)y$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0,$$

то в качестве задач сравнения берем самосопряженные полностью определенные задачи с теми же краевыми условиями:

$$y^{IV} = \lambda^*y, \quad y^{IV} = 2\lambda^{**}y.$$

Имеем

$$\int_0^1 u(1+x)u dx = \int_0^1 (1+x)u^2 dx \geq \int_0^1 u^2 dx.$$

Следовательно, теорема сравнения применима. Из нее получаем

$$\lambda_s^* \geq \lambda_s \geq \lambda_s^{**}.$$

Таким образом, имеем задачи сравнения, решения которых (дифференциальные уравнения имеют постоянные коэффициенты)

$$y_n = \sin n\pi x$$

с

$$\lambda_n^* = (n\pi)^4, \quad \lambda_n^{**} = \frac{(n\pi)^4}{2};$$

значит, все собственные значения заключены в границах

$$\frac{(n\pi)^4}{2} \leq \lambda_n \leq (n\pi)^4.$$

§ 9. Теорема включения

9.1. Формулировка теоремы. Дальнейшее применение минимаксимального принципа п. 8.4 представляет теорема включения; она распространяется на задачи одночленного класса с дифференциальным уравнением (4.28)

$$M[y] = \lambda N[y] - (-1)^n \lambda [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)} \quad (9.1)$$

и краевыми условиями $U_\mu[y] = 0$ согласно (4.14).

Правда, должны быть приняты несколько более сильные предпосылки, чем в п. 4.7. Теорема гласит¹⁾:

Теорема включения. Пусть задача одночленного класса (9.1), (4.14) удовлетворяет предпосылкам:

а) она является самосопряженной,

б) для каждой функции сравнения $\int_a^b u M[u] dx > 0$,

в) функции $g_n(x)$ в основном интервале a, b имеют постоянный знак,

г) для двух любых функций сравнения u, v и n раз непрерывно дифференцируемой функции $g(x)$

$$(-1)^n \int_a^b u [g v^{(n)}]^{(n)} dx = \int_a^b g u^{(n)} v^{(n)} dx.$$

Если имеем функцию сравнения F_1 и $2n$ раз непрерывно дифференцируемую функцию F_0 , которые удовлетворяют соотношению

$$M[F_1] = N[F_0], \quad (9.2)$$

и если функция

$$\Phi(x) = \frac{F_0^{(n)}(x)}{F_1^{(n)}(x)} \quad (9.3)$$

лежит в интервале a, b между конечными границами и не меняет там знак, то между максимумом и минимумом функции Φ локализовано по меньшей мере одно собственное значение задачи (9.1), (4.14):

$$\Phi_{\min} \leq \lambda_s \leq \Phi_{\max}. \quad (9.4)$$

Если, например, F_0 есть собственная функция y_i , то в силу (9.2) $F_1 = \frac{1}{\lambda_i} F_0$, и для частного Φ получаем, согласно (9.3), $\Phi = \lambda_i = \text{const}$. Если теперь F_0 отличается от y_i , то $\Phi(x)$ в интервале a, b уже не

¹⁾ Г. Виландт показывает, что данная теорема включения, теорема включения Крылова—Боголюбова в п. 14.2, формула (12.19) и др. могут рассматриваться как частные случаи общей теоремы включения.

остается постоянной (см. рис. 9.1), однако между наибольшей и наименьшей величинами Φ остается заключенным по меньшей мере одно собственное значение.

Предпосылка г) в каждом отдельном случае может быть легко проверена при помощи интегрирования по частям и требует от краевых условий, чтобы краевые выражения, проявляющиеся при интегрировании по частям, исчезали. Приведенные в таблице I задачи одночленного класса все удовлетворяют выдвинутым здесь более сильным предпосылкам.

Согласно теореме п. 8.3 все собственные значения λ_s , а значит, в силу теоремы включения также и Φ , имеют тот же знак, что и функция $g_n(x)$.

В случае частных задач на собственные значения ($n=0$) условия для F_0 и F_1 можно сформулировать несколько проще¹⁾.

Здесь достаточно исходить из какой-нибудь функции сравнения F_1 и подставить

$$F_0 = \frac{1}{g_0(x)} M[F_1]. \quad (9.5)$$

Тогда

$$\Phi(x) = \frac{F_0}{F_1} = \frac{M[F_1]}{g_0 F_1} = \frac{M[F_1]}{N[F_1]} \quad (9.6)$$

и имеем

$$\left(\frac{M[F_1]}{g_0 F_1} \right)_{\min} \leq \lambda_s \leq \left(\frac{M[F_1]}{g_0 F_1} \right)_{\max}. \quad (9.7)$$

Функция F_0 не обязательно должна удовлетворять краевым условиям, однако стараются F_0 и F_1 выбирать так, чтобы F_0 удовлетворяла по возможности большему числу этих условий, с тем чтобы она приближалась к собственной функции, а пределы (9.4) не были бы слишком грубыми.

9.2. Пример к теореме включения. Прежде чем провести доказательство теоремы включения, рассмотрим простейший пример задачи частного класса (рис. 9.2):

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(1) = 0. \quad (9.8)$$

¹⁾ Теорема включения в случае частных задач на собственные значения для первого собственного значения доказана в работе G. Temple, Proc. Lond. math. Soc. (2) 29 (1929), 257—280.

Оценки для всех собственных значений сверху и снизу в случае дифференциального уравнения (не обязательно линейного относительно λ) $-y'' = Q(x, \lambda)y$ с краевыми условиями Штурма имеются в работе W. Q u a d e, Math. Z. 51 (1948), 92—125.

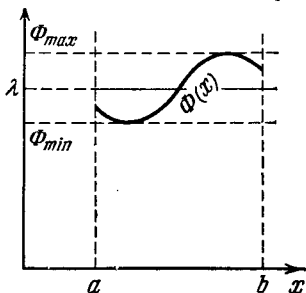


Рис. 9.1. К теореме включения.

Для определения функций F_0, F_1 , удовлетворяющих всем поставленным условиям, возьмем F_1 в виде полинома, который при любых значениях c_1 и c_2 удовлетворяет краевым условиям:

$$F_1 = x^4 + c_1 x^3 + c_2 x^2 + x(-4 - 3c_1 - 2c_2).$$

Тогда в силу (9.5)

$$F_0 = -F_1'' = -12x_2 - 6c_1 x - 2c^2.$$

Для достижения лучшего результата F_0 должно также удовлетворять краевым условиям, следовательно, $c_2 = 0$, $c_1 = -4$. Таким образом,

$$F_0 = 12(2x - x^2), \quad F_1 = 8x - 4x^3 + x^4.$$

Имеем

$$\Phi = \frac{F_0}{F_1} = \frac{12x(2-x)}{8x-4x^3+x^4} = \frac{12}{4+2x-x^2} = \frac{12}{5-(1-x)^2}.$$

Здесь видно сразу (рис. 9.3), что в интервале $(0, 1)$ $\Phi_{\max} = 3$, $\Phi_{\min} = 2,4$, т. е. имеем $2,4 \leq \lambda_s \leq 3$.

При желании вычислить более близкие границы¹⁾ для λ_s (мы, таким образом, забегаем вперед, в следующую главу, и даем уже рекомендации для метода последовательных приближений) можно найти следующие функции F_2, F_3, \dots из соотношений:

$$M[F_{n+1}] = N[F_n], \quad U_\mu[F_{n+1}] = 0,$$

т. е. в нашем случае из формул

$$-F_{n+1}'' = F_n, \quad F_{n+1}(0) = F_{n+1}'(1) = 0.$$

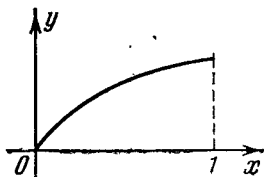


Рис. 9.2. Первая собственная функция задачи (9.8).

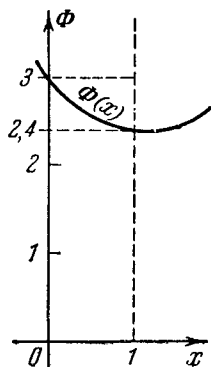


Рис. 9.3. К теореме включения для параметра (9.8).

Непосредственно путем двукратного интегрирования полинома и определения постоянных интегрирования из краевых условий получаем

$$F_2 = \frac{1}{30} (96x - 40x^3 + 6x^5 - x^6) = \frac{x(2-x)}{30} (48 + 24x - 8x^2 - 4x^3 + x^4),$$

$$F_3 = \frac{1}{210} \left(272x - 112x^3 + 14x^5 - x^7 + \frac{x^8}{8} \right) = \\ = \frac{x(2-x)}{1680} (1088 + 544x - 176x^2 - 88x^3 + 12x^4 + 6x^5 - x^6).$$

¹⁾ См. Н. v. S a n d e n, Praxis der Differentialgleichungen, Berlin, 1943, 73.

Частное $\Phi_n = \frac{F_{n-1}}{F_n}$, если ради краткости обозначить $2x - x^2 = \rho = 4v$, примет вид

$$\Phi_2 = \frac{30(4 + \rho)}{48 + 12\rho + \rho^2} = \frac{15(1 + v)}{2(3 + 3v + v^2)}$$

и

$$\Phi_{\min} = \Phi_2(1) = \frac{150}{61} = 2,4590, \quad \Phi_{\max} = \Phi_2(0) = \frac{5}{2} = 2,5;$$

итак, теперь уже имеем $2,459 \leq \lambda_s \leq 2,5$. Далее,

$$\Phi_3 = \frac{56(48 + 12\rho + \rho^2)}{1088 + 272\rho + 24\rho^2 + \rho^3} = \frac{14(3 + 3v + v^2)}{17 + 17v + 6v^2 + v^3}$$

и

$$\Phi_{\min} = \Phi_3(1) = \frac{3416}{1385} = 2,4664, \quad \Phi_{\max} = \Phi_3(0) = \frac{42}{17} = 2,4706.$$

Теперь, следовательно, $2,4664 \leq \lambda_s \leq 2,4706$.

Такая точность для многих технических задач достаточна. Точное значение

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,4674011.$$

В рассмотренном примере удалось удобным способом вычислить следующие функции F_2, F_3 и тем самым повысить точность. В более сложных задачах вычисление следующих F_n часто наталкивается на большие практические трудности, и в этих случаях метод последовательных приближений на основе одних только F_0 и F_1 в состоянии дать значительно более точные границы для первого собственного значения, чем это возможно при помощи теоремы включения.

9.3. Доказательство теоремы включения. Согласно (9.1), (9.2) в теореме включения применяются две функции F_0, F_1 , удовлетворяющие соотношению

$$M[F_1] = N[F_0] = (-1)^n [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}.$$

Если из (9.3) подставить сюда

$$F_0^{(n)} = \Phi(x) F_1^{(n)},$$

то получим, что F_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$M[F_1] = (-1)^n [g_n(x) \Phi(x) F_1^{(n)}]^{(n)}, \quad (9.9)$$

т. е. F_1 есть собственная функция этого дифференциального уравнения при краевых условиях $U_\mu[F_1] = 0$.

Построим теперь три задачи сравнения:

$$\left. \begin{aligned} 1. \quad M[y] &= (-1)^n \lambda' [g_n(x) \Phi_{\min} y^{(n)}]^{(n)}. \\ 2. \quad M[y] &= (-1)^n \lambda'' [g_n(x) \Phi(x) y^{(n)}]^{(n)}. \\ 3. \quad M[y] &= (-1)^n \lambda''' [g_n(x) \Phi_{\max} y^{(n)}]^{(n)}. \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

(при одних и тех же краевых условиях $U_\mu[y] = 0$).

Вторая задача имеет собственную функцию $y = F_1$, с собственным значением 1, причем пусть 1 есть s -е собственное значение этой задачи:

$$y = F_1, \quad \lambda_s'' = 1.$$

Первая и третья задачи имеют собственные функции $y = y_s$ с собственными значениями λ_s' , λ_s''' , а именно:

$$\lambda_s' \Phi_{\min} = \lambda_s, \quad \lambda_s''' \Phi_{\max} = \lambda_s,$$

где λ_s есть s -е собственное значение исходной задачи (9.1), (4.14), т. е.

$$\lambda_s' = \frac{\lambda_s}{\Phi_{\min}}, \quad \lambda_s''' = \frac{\lambda_s}{\Phi_{\max}}.$$

Теперь предпосылки теоремы сравнения из п. 8.5 выполнены. Необходимо еще дополнительно проверить неравенство (8.20)

$$\int_a^b u N[u] dx \geq \int_a^b u N^*[u] dx.$$

Здесь, как выясняется при помощи n -кратного интегрирования по частям, для всех функций сравнения u в силу предпосылки г) теоремы п. 9.1 [мы могли бы без ограничения общности считать $g_n(x)$ положительной]:

$$\begin{aligned} & \int_a^b u (-1)^n [g_n \Phi_{\max} u^{(n)}]^{(n)} dx = \\ & = \int_a^b g_n(x) \Phi_{\max} [u^{(n)}]^2 dx \geq \int_a^b g_n \Phi(x) [u^{(n)}]^2 dx \geq \int_a^b g_n \Phi_{\min} [u^{(n)}]^2 dx, \end{aligned}$$

т. е., согласно теореме сравнения, имеем

$$\frac{\lambda_s}{\Phi_{\max}} \leq 1 \leq \frac{\lambda_s}{\Phi_{\min}},$$

следовательно, (9.4) доказано.

9.4. Сравнение с задачами, разрешимыми в замкнутом виде. Часто при помощи теорем включения и сравнения удастся указать границы для всех собственных значений. Если, например, рассматривается задача

$$-y'' = \lambda p(x)y, \quad y(0) = y(a) = 0 \quad (a > 0),$$

то ее следует сравнить с некоторой аналогично построенной задачей

$$-y'' = \lambda^* p^*(x)y$$

с теми же краевыми условиями, собственное значение λ_n^* которой известно. Например, в случае

$$p^*(x) = \frac{c}{(x+b)^2} \quad (b > 0, c > 0)$$

имеем (согласно таблице V) собственные значения

$$\lambda_n^* = \frac{n^2\pi^2}{c \left(\ln \frac{a+b}{b} \right)^2} + \frac{1}{4c}$$

с собственными функциями

$$y_n^* = \sqrt{x+b} \sin \left(\frac{n\pi \ln \frac{x+b}{b}}{\ln \frac{a+b}{b}} \right).$$

Если применить y_n^* в качестве F_1 в теореме включения, то в силу (9.6)

$$\Phi = \lambda_n^* \frac{p^*}{p}$$

и имеем границы

$$\Phi_{\min} = \lambda_n^* \left(\frac{p^*}{p} \right)_{\min} \leq \lambda_n \leq \Phi_{\max} = \lambda_n^* \left(\frac{p^*}{p} \right)_{\max}.$$

Чем лучше p^* можно «подогнать» к p , тем ближе сходятся границы, причем относительные границы для всех собственных значений одинаково близки. Таким образом, хорошо иметь возможно больший набор разрешимых в замкнутом виде задач на собственные значения. В таблице V приведено несколько простых, разрешимых в замкнутом виде случаев.

§ 10. Теорема о разложении

10.1. Предварительные замечания. В § 8 для полностью определенных самосопряженных задач на собственные значения в форме (4.11) — (4.14) было доказано существование бесконечного множества вещественных положительных собственных значений λ_i . Собственные значения снова считаем расположенными в порядке возрастания их величин: $0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 \dots$; каждому собственному значению λ_i соответствует собственная функция y_i ; собственные функции можно полагать нормированными и ортогональными в обобщенном смысле (см. (5.33)):

$$\int_a^b y_i N[y_k] dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (10.1)$$

Тогда в силу равенства $M[y_k] = \lambda_k N[y_k]$ также

$$\int_a^b y_i M[y_k] dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (10.2)$$

Зададимся, далее, вопросом, можно ли произвольную функцию сравнения $u(x)$ «разложить» по собственным функциям $y_k(x)$, т. е. имеет ли место представление

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(x), \quad (10.3)$$

где a_k — постоянные. К такой постановке вопроса мы уже подходили в п. 2.1, а так называемая «теорема о разложении» является важнейшим вспомогательным средством, которым мы будем пользоваться в разных местах.

10.2. Коэффициенты Фурье. В случае простого примера задачи на собственные значения

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

собственным значениям $\lambda_k = k^2$ соответствуют собственные функции

$y_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$. Из теории рядов Фурье известно, что каждая функция сравнения $u(x)$, т. е. каждая дважды непрерывно дифференцируемая функция $u(x)$ при условиях: $u(0) = u(\pi) = 0$, посредством соотношения $u(-x) = -u(x)$ дополняется до некоторой нечетной, определенной в интервале $-\pi \leq x \leq \pi$, функции и может быть разложена в тригонометрический ряд¹⁾, здесь, в частности, по синусам:

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx.$$

При этом «коэффициенты Фурье» b_k определяются формулой²⁾

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u(x) \sin kx dx.$$

¹⁾ К. Кнорр, Einführung in die höhere Mathematik, Leipzig, 1942 [см., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1952]. Предпосылка непрерывной двукратной дифференцируемости для разложимости $u(x)$ — непрерывная функция ограниченной вариации (Кнорр, т. II, 519); даже требование непрерывности может быть ослаблено.

²⁾ К. Кнорр, Einführung in die höhere Mathematik, Leipzig, 1942 [см., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1952].

Если подставить $\sin kx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} y_k$ и $a_k = b_k \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, то получим

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k y_k(x),$$

где

$$a_k = \int_0^{\pi} u(x) y_k(x) dx.$$

На этом простом примере теория рядов Фурье показывает возможность разложения любой функции сравнения u по собственным функциям y_k . Зададимся теперь вопросом о разложимости в случае более сложных задач на собственные значения.

Считая равенство (10.3) справедливым, умножим обе его части на $N[y_i(x)]$ и получившийся при этом ряд почленно проинтегрируем в интервале (a, b) . Тогда, в силу (10.1), все члены ряда, кроме одного (при $k=i$), обращаются в нуль, и мы имеем

$$\int_a^b u(x) N[y_i(x)] dx = a_i. \quad (10.4)$$

Такое эвристическое рассмотрение дает

Определение. В качестве коэффициентов Фурье a_i заданной непрерывной функции $u(x)$, применительно к задаче на собственные значения (4.11) — (4.14), вводятся величины (10.4).

С этими величинами a_i можно формально построить ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x) \quad (10.5)$$

и возникают вопросы:

1. Сходится ли ряд (10.5)?
2. Если ряд (10.5) сходится, то представляет ли он тогда функцию $u(x)$, с которой образованы коэффициенты a_i ?

10.3. Формула Парсеваля. В дальнейшем будем считать, что $u(x)$ есть функция сравнения. Прежде всего, можно показать, что для формально составленного ряда (10.5) сумма

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$$

всегда сходится, т. е. что a_i в любом случае с ростом i стремится к нулю *).

*) Сходимость ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ — более сильный факт, чем стремление

к нулю a_i . Например, $\frac{1}{\sqrt{n}} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится.

Для доказательства этого введем «остаток» $r_p(x)$ ряда (10.5) и положим

$$r_p(x) = u(x) - \sum_{i=1}^p a_i y_i(x). \quad (10.6)$$

В любом случае $r_p(x)$ является функцией сравнения. Если $r_p \equiv 0$ для некоторого числа p , то u есть линейная комбинация собственных функций y_1, \dots, y_p ; тогда в силу (10.1) и (10.4) $a_{p+1} = a_{p+2} = \dots = 0$ и поэтому все последующие остатки r_{p+1}, r_{p+2}, \dots равны нулю — вопрос о сходимости является тривиальным. Положим поэтому $r_p \neq 0$.

Если бы мы смогли показать, что $r_p(x)$ с ростом p для всех x из области $a \leq x \leq b$ стремится к нулю, то на поставленные в заключение п. 10.2 вопросы о сходимости мы получили бы утвердительные ответы.

Функция $r_p(x)$ ортогональна в обобщенном смысле p первым собственным функциям y_1, y_2, \dots, y_p , так как, используя (10.1) и (10.4), получаем

$$\int_a^b r_p N[y_k] dx = \int_a^b u N[y_k] dx - \sum_{i=1}^p a_i \int_a^b y_i N[y_k] dx = a_k - a_k = 0$$

при $k = 1, 2, \dots, p$. (10.7)

Точно так же в силу равенства $M[y_k] = \lambda_k N[y_k]$ имеем

$$\int_a^b r_p M[y_k] dx = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, p. \quad (10.8)$$

Поэтому, согласно теореме п. 8.3, отношение Рэлея, построенное с функцией r_p , является верхней границей для $(p+1)$ -го собственного значения λ_{p+1} :

$$R[r_p] \geq \lambda_{p+1}.$$

Далее, в отношении Рэлея

$$R[r_p] = \frac{Z_p}{N_p}, \quad \text{где } Z_p = \int_a^b r_p M[r_p] dx \quad \text{и} \quad N_p = \int_a^b r_p N[r_p] dx,$$

числитель является ограниченным. На самом деле в силу (10.8) и (10.2)

$$\begin{aligned} \int_a^b u M[u] dx &= \int_a^b \left(r_p + \sum_{i=1}^p a_i y_i \right) M \left[r_p + \sum_{i=1}^p a_i y_i \right] dx = \\ &= Z_p + \int_a^b \left(\sum_{i=1}^p a_i y_i \right) M \left[\sum_{i=1}^p a_i y_i \right] dx = Z_p + \sum_{i=1}^p a_i^2 \lambda_i, \end{aligned} \quad (10.9)$$

в левой части стоит фиксированное число

$$\int_a^b uM[u] dx,$$

следовательно, Z_p для всех p ограничено. Из того, что $R[r_p] \geq \lambda_{p+1}$, получаем

$$N_p \leq \frac{Z_p}{\lambda_{p+1}}.$$

Так как Z_p остается ограниченным, а λ_{p+1} с ростом p неограниченно растет, N_p с ростом p стремится к нулю. Аналогично (10.9) в силу (10.7) и (10.1) имеем

$$\begin{aligned} \int_a^b uN[u] dx &= \int_a^b \left(r_p + \sum_{i=1}^p a_i y_i \right) N \left[r_p + \sum_{i=1}^p a_i y_i \right] dx = \\ &= N_p + \int_a^b \left(\sum_{i=1}^p a_i y_i \right) N \left[\sum_{i=1}^p a_i y_i \right] dx = N_p + \sum_{i=1}^p a_i^2. \end{aligned} \quad (10.10)$$

Итак, для $p \rightarrow \infty$ получаем так называемую формулу Парсеваля

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \int_a^b uN[u] dx. \quad (10.11)$$

Из нее легко вывести также часто употребляемую формулу, которая связывает две функции сравнения $u(x)$, $v(x)$ и их коэффициенты Фурье a_i , b_i . Если запишем формулу Парсеваля для функции $u(x) + v(x)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (a_i + b_i)^2 &= \int_a^b (u + v)N[u + v] dx = \\ &= \int_a^b uN[u] dx + 2 \int_a^b uN[v] dx + \int_a^b vN[v] dx \end{aligned}$$

и вычтем отсюда формулы Парсеваля для функций u и v , то получим:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \int_a^b uN[v] dx. \quad (10.12)$$

Дополнение 1. При несколько более слабых предпосылках можно вместо равенства Парсеваля (10.11) получить неравенство

Парсевалю (10.13) *). Для этого вводится понятие «полудопустимой» функции. Чтобы функция $u(x)$ при любой заданной функции сравнения v удовлетворяла условиям

$$\int_a^b uN[u] dx > 0, \quad \int_a^b (uN[v] - vN[u]) dx = 0,$$

в общем, не обязательно, чтобы u сама была функцией сравнения; достаточно, чтобы u была $2n$ раз непрерывно дифференцируема и удовлетворяла части наперед заданных краевых условий $U_\mu[u] = 0$ (какие это и сколько краевых условий, можно всегда легко установить посредством интегрирования по частям, см. пп. 4.3 и 4.9). Функцию, которая удовлетворяет этим краевым условиям и для которой существует $u^{(2n)}$, следует называть полудопустимой. Для такой функции (10.7) выполняется, а уравнение (10.10) дает для нее в силу $N_p \geq 0$ неравенство Парсевала

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 \leq \int_a^b uN[u] dx. \quad (10.13)$$

Дополнение. 2. В качестве дополнительного результата из (10.9) в силу $Z_p \geq 0$ получаем сразу так называемое неравенство Бесселя **)

$$\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 \leq \int_a^b uM[u] dx. \quad (10.14)$$

Как резюме результатов этого пункта может быть сформулирована еще одна

Теорема. Пусть задача на собственные значения является самосопряженной и полностью определенной, причем $u(x)$ — некоторая функция сравнения и a_i — ее коэффициенты Фурье согласно

(10.4). Тогда ряды $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ и $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2$ сходятся, а именно, действительны равенство Парсевала и неравенство Бесселя:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 = \int_a^b uN[u] dx, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i a_i^2 \leq \int_a^b uM[u] dx.$$

Если u не является функцией сравнения, а только полудопустимой функцией, то имеет место неравенство Парсевала (10.13).

10.4. Вспомогательная теорема о некоторых рядах по собственным функциям. В дальнейшем нам понадобится снова для самосопряженной полностью определенной задачи на собственные

*) По общепринятой терминологии, неравенство Бесселя.

**) Термин не является общепринятым.

значения (4.11) — (4.14) сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{[y_k^{(v)}(x)]^2}{\lambda_k} \quad (v = 0, 1, \dots, m-1), \quad (10.15)$$

представляющего собой сумму квадратов v -х производных собственных функций y_k , деленных на собственные значения¹⁾; v в дальнейшем пусть будет фиксированным.

Для доказательства сходимости рассмотрим функцию $\varpi(x)$, которая m раз непрерывно дифференцируема и должна удовлетворять краевым условиям

$$\begin{aligned} \varpi(a) = \varpi'(a) = \dots = \varpi^{(m-1)}(a) = \varpi(b) = \varpi'(b) = \\ = \dots = \varpi^{(m-1)}(b) = 0; \end{aligned} \quad (10.16)$$

в остальном она может быть совершенно произвольной. Получим при помощи этой функции числа a_k :

$$a_k = \int_a^b \frac{y_k^{(v)}(x)}{\lambda_k} \varpi(x) dx. \quad (10.17)$$

Эти числа a_k можно считать коэффициентами Фурье некоторой функции сравнения $v(x)$, определенной как решение краевой задачи

$$M[v] = (-1)^v \varpi^{(v)}(x), \quad U_\mu[v] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, 2m).$$

Эта краевая задача, поскольку $\lambda = 0$ не является собственным значением, имеет однозначно определяемое решение $v(x)$, представимое посредством функции Грина, согласно (5.20), (5.21):

$$v(x) = (-1)^v \int_a^b G(x, \xi) \varpi^{(v)}(\xi) d\xi.$$

Теперь легко вычисляются коэффициенты Фурье $v(x)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b v(x) N[y_k(x)] dx &= \int_a^b \frac{v}{\lambda_k} M[y_k] dx = \int_a^b \frac{y_k}{\lambda_k} M[v] dx = \\ &= (-1)^v \int_a^b \frac{y_k}{\lambda_k} \varpi^{(v)} dx; \end{aligned}$$

v -кратное интегрирование по частям с учетом (10.16) подтверждает, что коэффициенты Фурье функции v совпадают с величинами a_k из (10.17).

¹⁾ Последующее доказательство дано в статье Е. Камке, Math. Z. 46 (1940), 273.

Неравенство Бесселя (10.14) для функции сравнения $v(x)$ и для какого-нибудь натурального числа p имеет вид

$$\int_a^b v M[v] dx \geq \sum_{k=1}^p \frac{\left[\int_a^b y_k^{(v)}(x) w(x) dx \right]^2}{\lambda_k} = \sum_{k=1}^p \int_a^b \int_a^b \frac{y_k^{(v)}(x) y_k^{(v)}(\xi)}{\lambda_k} w(x) w(\xi) dx d\xi.$$

С другой стороны,

$$\int_a^b v M[v] dx = (-1)^v \int_a^b v w^{(v)} dx = \int_a^b \int_a^b G(x, \xi) w^{(v)}(x) w^{(v)}(\xi) dx d\xi.$$

В силу (10.16) v -кратное интегрирование по частям как по x , так и по ξ дает

$$\int_a^b v M[v] dx = \int_a^b \int_a^b \frac{\partial^{2v} G(x, \xi)}{\partial x^v \partial \xi^v} w(x) w(\xi) dx d\xi,$$

так как, согласно дополнению к п. 5.3, в силу $2v \leq 2m - 2$ частные производные

$$\frac{\partial^{2v} G(x, \xi)}{\partial x^v \partial \xi^v}$$

существуют и являются непрерывными функциями x и ξ . Если сравнить оба результата для $\int_a^b v M[v] dx$ друг с другом, то получим

$$\int_a^b \int_a^b \left\{ \frac{\partial^{2v} G(x, \xi)}{\partial x^v \partial \xi^v} - \sum_{k=1}^p \frac{y_k^{(v)}(x) y_k^{(v)}(\xi)}{\lambda_k} \right\} w(x) w(\xi) dx d\xi \geq 0. \quad (10.18)$$

Так как это неравенство должно быть действительным для каждой функции $w(x)$, которая только m раз непрерывно дифференцируема и которая должна удовлетворять краевым условиям (10.16), то для $x = \xi$ получается

$$\left(\frac{\partial^{2v} G(x, \xi)}{\partial x^v \partial \xi^v} \right)_{x=\xi} \geq \sum_{k=1}^p \frac{[y_k^{(v)}(x)]^2}{\lambda_k}. \quad (10.19)$$

Это следует из того, что если бы в (10.18) величина в фигурных скобках имела отрицательное значение в точке $x = \xi = x_0$, то вследствие непрерывности она была бы отрицательной и в достаточно малом квадрате

$$|x - x_0| \leq \varepsilon, \quad |\xi - x_0| \leq \varepsilon.$$

Тогда можно было бы функцию $\omega(x)$ выбрать так, что она для $|x - x_0| < \varepsilon$ принимала бы положительные значения, а в остальной области исчезала и неравенство (10.18) было бы нарушено.

Неравенством (10.19) утверждаемая сходимость доказана.

10.5. Сходимость ряда Фурье (10.5). Теперь мы можем ответить на первый из двух поставленных в п. 10.2 вопросов о сходимости.

Теорема. Пусть задача на собственные значения (4.11) — (4.14) является самосопряженной и полностью определенной. Пусть u есть функция сравнения и с ней образованы коэффициенты Фурье a_i согласно (10.4). Тогда, согласно (10.5), построенный с этими a_i ряд u и ряд, полученный путем его почленного ν -кратного дифференцирования (ν может принимать значения $0, 1, 2, \dots, m-1$)

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i^{(\nu)}(x), \quad (10.20)$$

сходятся; сходится равномерно в интервале a, b даже ряд, составленный из абсолютных величин членов.

Это видно непосредственно из неравенства Шварца¹⁾); согласно последнему, для двух натуральных чисел p, q

$$\left(\sum_{i=p}^q |a_i y_i^{(\nu)}(x)| \right)^2 = \left(\sum_{i=p}^q |a_i| \sqrt{\lambda_i} \frac{|y_i^{(\nu)}(x)|}{\sqrt{\lambda_i}} \right)^2 \leq \left(\sum_{i=p}^q a_i^2 \lambda_i \right) \left(\sum_{i=p}^q \frac{(y_i^{(\nu)}(x))^2}{\lambda_i} \right).$$

Здесь первая скобка в правой части в силу неравенства Бесселя (10.14) стремится к нулю при $p, q \rightarrow 0$ (независимо от x), а вторая скобка, согласно формуле (10.19), остается ограниченной равномерно по x . Следовательно, также

$$\sum_{i=p}^q |a_i y_i^{(\nu)}(x)| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad p, q \rightarrow \infty$$

равномерно для всех x из интервала $a \leq x \leq b$, т. е. ряд (10.20) сходится абсолютно и равномерно по x .

¹⁾ К. Кнорр, Einführung in die höhere Mathematik, Leipzig, 1942, т. I, 106, 133 [см., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, М.—Л., 1952]. Неравенство Шварца означает: если c_1, c_2, \dots, c_n и d_1, d_2, \dots, d_n — любые вещественные числа, то имеем

$$(c_1 d_1 + \dots + c_n d_n)^2 \leq (c_1^2 + \dots + c_n^2)(d_1^2 + \dots + d_n^2);$$

Это неравенство непосредственно следует из тождества

$$\begin{aligned} (c_1^2 + \dots + c_n^2)(d_1^2 + \dots + d_n^2) - (c_1 d_1 + \dots + c_n d_n)^2 &= \\ &= \sum_{k>l} (c_k d_l - c_l d_k)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

^{*}) В отечественной литературе принят термин «неравенство Коши».

10.6. Теорема о разложении. Доказательство в случае $n = 0$. Теперь необходимо исследовать, какова сумма ряда (10.5). Для этого привлекаем обобщенную формулу Парсеваля (10.12), в которой y является какой-нибудь функцией сравнения с коэффициентами Фурье b_i :

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i b_i = \int_a^b u N [v] dx.$$

Если подставить сюда значения коэффициентов Фурье

$$b_i = \int_a^b v N [y_i] dx = \int_a^b y_i N [v] dx \quad (i = 1, 2, \dots),$$

то получим (изменение порядка суммирования и интегрирования в силу доказанной в п. 10.5 равномерной сходимости ряда $\sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i$ законно)

$$\int_a^b \left\{ u(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x) \right\} N [v] dx = 0.$$

Положив

$$U(x) = u(x) - \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x), \quad (10.21)$$

имеем, таким образом, для всех функций сравнения $v(x)$

$$\int_a^b U(x) N [v] dx = 0. \quad (10.22)$$

О функции $U(x)$ мы знаем следующее: она $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируема и удовлетворяет из краевых условий (согласно разделению краевых условий в п. 4.2) всем главным краевым условиям (так как u и y_i удовлетворяют этим условиям). Если бы мы, кроме того, знали, что $U(x)$ непрерывно дифференцируема даже $2m$ раз и является функцией сравнения, то (10.22) означало бы, что все коэффициенты Фурье u_p функции $U(x)$ равны нулю. Тогда, согласно формуле Парсеваля (10.11), должно было бы быть

$$\int_a^b U N [U] dx = 0,$$

и в силу предположения (8.2) мы имели бы $U \equiv 0$. Тем самым теорема о разложении для любой функции сравнения $u(x)$ была бы доказана.

Во многих случаях к заключению о том, что $U(x) \equiv 0$, можно было бы прийти на основании приведенных выше свойств $U(x)$, не опираясь на недоказанное утверждение, что $U(x)$ есть функция сравнения. Ограничимся здесь только случаем задач одночленного класса, хотя можно было бы обсуждать и несколько более общие случаи¹⁾.

Пусть дифференциальное уравнение имеет вид (4.28)

$$M[y] = \lambda N[y] = \lambda (-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)},$$

где $g_n(x) > 0$, а в числе краевых условий должны быть (главные краевые условия)

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \dots \\ \dots = y^{(n-1)}(b) = 0. \quad (10.23)$$

В случае $n=0$, т. е. в частных задачах на собственные значения $M[y] = \lambda g_0(x) y$, никакие предпосылки (10.23) о краевых условиях не нужны. В этом случае из (10.22) и без того следует, что

$$\int_a^b g_0 U v dx = 0, \quad (10.24)$$

значит, U должно быть тождественным нулем, так как если бы U было отлично от нуля, например $U > 0$ в некоторой точке x_0 , то в силу непрерывности U также и в некотором малом интервале $|x - x_0| \leq \varepsilon$ функция U была бы положительной и, выбрав v достаточно гладкой, положительной в $|x - x_0| < \varepsilon$ и равной нулю в остальной области, мы получили бы нарушение (10.24).

Тем самым в случае $n=0$ теорема о разложении доказана. Для $n > 0$ необходимо некоторое вспомогательное рассмотрение; доказательство теоремы о разложении завершается только в п. 10.8.

10.7. Замечание. В случае некоторого произвольного n в дифференциальном уравнении (4.28) из (10.22) при принятых предпосылках путем n -кратного интегрирования по частям следует

$$\int_a^b g_n U^{(n)} v^{(n)} dx = 0. \quad (10.25)$$

$U^{(n)}$ существует в силу $n \leq m - 1$ и является непрерывной.

Это равенство действительно для всех функций сравнения v ; последние удовлетворяют краевым условиям (10.23). Из этого можно заключить²⁾, что функции $g_n U^{(n)}$, обозначаемые для краткости γ ,

¹⁾ Е. Камке, Math. Z. 46 (1940), 276—280. Пробел, имеющийся в приведенном там доказательстве, восполнен здесь в п. 10.7.

²⁾ За краткое доказательство этого автор признателен Теодору Букку, Штуттгарт.

являются полиномами P_{n-1} степени $(n - 1)$:

$$\gamma(x) = g_n U^{(n)} = P_{n-1}(x). \tag{10.26}$$

Для доказательства этого вводится вспомогательная функция $\varphi(x)$

$$\varphi(x) = \int_a^x \dots \int_a^x \underbrace{\gamma(x) \, dx \dots dx}_{n\text{-кратно}} - p_{2n-1}(x), \tag{10.27}$$

причем $p_{2n-1}(x)$ есть полином степени не выше $(2n - 1)$, определенный так, что $\varphi(x)$ удовлетворяет краевым условиям (10.23). Это, как известно, всегда возможно, так как для $2n$ неизвестных коэффициентов данного полинома имеем систему $2n$ уравнений, получаемых из (10.23), определитель которой Δ_n отличен от нуля. Для доказательства можно, без ограничения общности, принять $a = 0, b = 1$, тогда

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & (n-1) & \dots & (2n-2) & \dots & (2n-1) \\ 0 & 0 & 1 \cdot 2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 & \dots & (n-2)(n-1) & \dots & (2n-2)(2n-3) & \dots & (2n-1)(2n-2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! & \dots & (2n-2)(2n-3) \dots n(2n-1)(2n-2) \dots (n+1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1! & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 2! & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & (n-1)! \end{vmatrix} \cdot \delta_n, \tag{10.28}$$

где

$$\delta_n = \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 & & & & \dots & 1 \\ n & & & & (n+1) & & & & \dots & 2n-1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n(n-1) \dots 2 & (n+1)n & \dots & 3 & \dots & (2n-1)(2n-2) \dots (n+1) \end{vmatrix} = (n-1)! \begin{vmatrix} 1 & & & & 1 & & & & \dots & 1 \\ n & & & & n+1 & & & & \dots & 2n-2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n(n-1) \dots 3 & (n+1)n & \dots & 4 & \dots & (2n-2) \dots (n+1) \end{vmatrix} = \dots$$

$$\dots = \prod_{v=0}^{n-1} v! \neq 0.$$

Для функций $\varphi(x)$, определенных согласно (10.27), тогда имеем

$$\varphi^{(n)}(x) = \gamma(x) - q_{n-1}(x), \quad (10.29)$$

где $q_{n-1}(x)$ есть некоторый полином степени $(n-1)$. Далее, $\varphi^{(n)}$ ортогональны q_{n-1} , так как для x^r , где $0 \leq r \leq n$, из интегрирования по частям с учетом краевых условий (10.23), которым φ удовлетворяет, следует

$$\int_a^b \varphi^{(n)} x^r dx = \left[\sum_{\rho=0}^r (-1)^\rho \varphi^{(n-\rho-1)} r(r-1) \dots (r-\rho+1) x^{r-\rho} \right]_a^b = 0;$$

таким образом, из (10.25) при $v = \varphi$ получаем

$$0 = \int_a^b \gamma(x) \varphi^{(n)}(x) dx = \int_a^b [\varphi^{(n)}]^2 dx + \int_a^b \varphi^{(n)} q_{n-1} dx = \int_a^b [\varphi^{(n)}]^2 dx,$$

т. е. $\varphi^{(n)}(x) \equiv 0$, или в силу (10.29) $\gamma(x) = q_{n-1}(x)$ есть полином степени $(n-1)$.

10.8. Теорема о разложении. Завершение доказательства для $n \geq 0$. Теперь начатые в п. 10.6 рассуждения могут быть быстро доведены до конца. Проведенные в предыдущем пункте вспомогательные рассмотрения дали следующий результат: пусть $u(x)$ есть функция сравнения и $U(x)$, согласно (10.21), — отличие этой функции сравнения от формально построенного для нее ряда Фурье. Тогда посредством (10.29) доказано, что функция $\gamma(x) = g_n U^{(n)}$ есть полином P_{n-1} степени $(n-1)$, см. (10.26). Поэтому n -кратное дифференцирование $\gamma(x)$ дает

$$[g_n U^{(n)}]^{(n)} = 0.$$

Функция U удовлетворяет этому дифференциальному уравнению и $2n$ краевым условиям (10.23) и должна быть, таким образом, тождественно равной нулю, ибо в противном случае она была бы собственной функцией самосопряженной удовлетворяющей условиям (8.2) задачи

$$(-1)^n [g_n y^{(n)}]^{(n)} = \lambda y$$

с краевыми условиями (10.23), т. е. она соответствовала бы собственному значению $\lambda = 0$. Эта задача, однако, будучи полностью определенной задачей на собственные значения, имеет только положительные собственные значения. Таким образом, имеет место ¹⁾

¹⁾ Расширение границ применимости теоремы разложения дано у Н. Schubert, «Über die Entwicklung zulässiger Funktionen nach den Eigenfunktionen bei definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben», Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, Mathematisch — Naturwissenschaftliche Klasse, 1948, вып. 8, 22.

Теорема о разложении. Пусть задача на собственные значения (4.11) — (4.14) удовлетворяет предпосылкам:

1. $N[y]$ имеет частный вид $N[y] = (-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$, где $g_n(x) > 0$.

2. Задача является самосопряженной и условия (8.2) полной определенности выполняются.

3. В числе краевых условий присутствуют условия (10.23): $y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0$.

Тогда любую функцию сравнения $u(x)$ можно разложить в ряд по собственным функциям, абсолютно и равномерно сходящийся в интервале (a, b) :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i y_i(x),$$

причем a_i определяются посредством (10.4), и этот ряд можно $(n-1)$ раз почленно дифференцировать.

В случае частного класса задач можно показать, что не только функции сравнения, но все кусочно-непрерывные функции с квадратично интегрируемыми первыми производными могут быть разложены в ряды по собственным функциям¹⁾.

§ 11. Дополнения

11.1. Элементарное обоснование минимальных свойств в случае уравнений второго порядка. Для частных задач на собственные значения вида

$$-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y \quad (11.1)$$

с краевыми условиями $y(a) = y(b) = 0$ минимальные свойства наименьшего собственного значения λ_1 , которые описываются теоремой п. 8.1, могут быть обоснованы совершенно элементарно (без использования функции Грина и т. д.) на основе тождества (11.6), полезного также для многих других доказательств. Так как минимальные свойства составляют основу метода Ритца, а (11.1) — очень часто встречающееся дифференциальное уравнение, то здесь доказательство будет повторено, хотя результат содержится уже в п. 8.2.

О распространении метода доказательства на уравнения четвертого порядка см. второе упражнение в п. 11.4.

Чтобы сохранить элементарный характер доказательства, здесь дополнительно обосновываются моменты, которые опытному читателю хорошо известны.

¹⁾ См. список ²⁾ на стр. 111.

О функциях f_1, f_0, g_0 сделаем следующие предположения: пусть в интервале $a \leq x \leq b$ f_1, g_0 являются положительными, f_0, g_0 — непрерывными и f_1 — непрерывно дифференцируемой.

А. Существование одной собственной функции. Прежде всего докажем, что имеется по меньшей мере одно вещественное собственное значение и что отвечающая наименьшему вещественному собственному значению собственная функция y_1 в интервале $a < x < b$ отлична от нуля, т. е., например, может быть принята положительной.

Собственная функция y задачи (11.1) может иметь только невырожденную нулевую точку, так как если бы, например, при $x = x_0$ было

$$y(x_0) = y'(x_0) = 0,$$

то y , являясь однозначно определяемым начальными значениями интегралом линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с $f_1 \neq 0$, должна была бы быть тождественным нулем. Следовательно, должно быть, в частности, $y'(a) \neq 0$.

Полагаем теперь, что собственная функция однозначно определяется с точностью до постоянного множителя условием $y'(a) = 1$. Рассмотрим, далее, решение $z(x, \lambda)$ задачи

$$-(f_1 z')' + f_0 z = \Lambda g_0 z,$$

$$z(a) = 0, \quad z'(a) = 1. \quad (11.2)$$

Для каждого вещественного Λ функция $z(x, \Lambda)$ тем самым однозначно определена (рис. 11.1), а те значения Λ , для которых $z(b, \Lambda) = 0$, являются собственными значениями задачи (11.1). В некоторой достаточно малой окрестности точки $x = a$ справа функция $z(x, \Lambda)$ положительна для каждого фиксированного Λ (ибо если бы такого интервала не существовало, т. е. точка $x = a$ была бы точкой сгущения в области $z \leq 0$, то также должно было бы иметь место неравенство $z'(a) \leq 0$ ¹⁾).

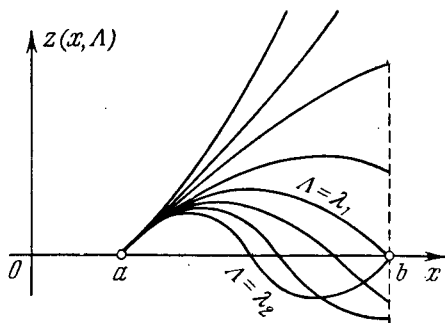


Рис. 11.1. Поведение $z(x, \Lambda)$ при различных значениях Λ .

¹⁾ Легко можно также подобрать положительные постоянные c_1 и c_2 так [например, путем использования приводящего к (11.4) преобразования и сравнения с дифференциальным уравнением (11.5) с постоянными коэффициентами], чтобы $z(x, \Lambda)$ была положительной при

$$a < x \leq a + c_1 (c_2 + |\Lambda|)^{-\frac{1}{2}}.$$

Для очень больших отрицательных значений Λ функция $z(x, \Lambda)$ положительна во всем интервале $a < x \leq b$; так как для

$$\Lambda < -\frac{|f_0(x)|_{\max}}{(g_0(x))_{\min}}, \quad (11.3)$$

разность $f_0 - \Lambda g_0$ положительна; если бы $z(x, \Lambda)$ не была положительной при всех $x > a$, то $z(x, \Lambda)$ должна была бы иметь в этом интервале нулевую точку при $x = \xi > a$, там было бы $z' < 0$, в то время как из (11.2) путем интегрирования от a до ξ следовало бы

$$f_1 z'(\xi) = f_1(a) \cdot 1 + \int_a^\xi (f_0 - \Lambda g_0) z(x) dx > 0.$$

Далее, $z(x, \Lambda)$ является непрерывной (даже дифференцируемой) функцией Λ и для каждого фиксированного Λ — дважды непрерывно дифференцируемой функцией x . Если рассмотреть $z(x, \Lambda)$ для Λ , растущего от $-\infty$, то вначале при $a < x \leq b$ функция z положительна. Мыслимы следующие два случая:

I. $z(x, \Lambda)$ положительна для всех Λ и x при $a < x \leq b$.

II. $z(x, \Lambda)$ положительна не для всех Λ и x при $a < x \leq b$.

Так как для достаточно больших отрицательных Λ [например, для Λ из (11.3)] $z > 0$ при $a < x \leq b$, то во втором случае

Рис. 11.2. К доказательству в п. 11.1.

вследствие непрерывности z и z' по x и Λ должно быть наименьшее $\Lambda = \Lambda_1$, для которого z впервые становится нулем при $x = x_0$, где $a < x_0 \leq b$; следовательно, $z(x_0, \Lambda_1) = 0$ и $z(x, \Lambda) > 0$ при $\Lambda < \Lambda_1$ и $a < x \leq b$. [Если x_Λ означает первую после a нулевую точку $z(x, \Lambda)$, то $z'(x_\Lambda, \Lambda) < 0$, т. е. x_Λ при $\Lambda \rightarrow \Lambda_1$ не может как угодно близко подойти к a вследствие непрерывности z' и условия $z'(a, \Lambda) = 1$.]

В этом случае возможно лишь $x_0 = b$, т. е. $z(b, \Lambda_1) = 0$, и $z(x, \Lambda_1) > 0$ при $a < x < b$, значит, Λ_1 есть наименьшее собственное значение λ_1 , а отвечающая ему собственная функция положительна при $a < x < b$. Действительно, если бы $z(x_0, \Lambda_1)$ было равно нулю при $a < x_0 < b$, как на рис. 11.2, то вследствие того, что $z(x, \Lambda_1) \geq 0$ для всех других x интервала $a < x \leq b$, производная $z'(x, \Lambda)$ должна была бы быть равной нулю. Однако z и z' не могут одновременно обращаться в нуль в одной и той же точке x_0 , как это выше разъяснялось для u .

Итак, необходимо только еще показать, что случай I исключается.

Введем вместо x новую независимую переменную ξ

$$\xi = \xi(x) = \int_a^x \frac{dt}{f_1(t)}.$$

При этом интервал a, b из-за положительности $f_1(x)$ однозначно преобразуется в интервал $0, \xi(b)$ на оси ξ . Если положить

$$\begin{aligned} z(x(\xi)) &= w(\xi); & f_0(x(\xi)) &= F_0(\xi); & f_1(x(\xi)) &= F_1(\xi); \\ g_0(x(\xi)) &= G_0(\xi), \end{aligned}$$

то задача (11.2) в силу соотношений $\frac{dx}{d\xi} = f_1(x) = F_1(\xi)$ и $\frac{dw}{d\xi} = = f_1(x) z'(x)$ принимает вид

$$\left. \begin{aligned} w'' &= -s(\xi)w(\xi) = F_1(\xi)[F_0(\xi) - \Lambda G_0(\xi)]w(\xi), \\ w(0) &= 0, \quad w'(0) = F_1(0), \end{aligned} \right\} \quad (11.4)$$

где штрихи означают производные по ξ . В случае I $w(\xi, \Lambda)$ должна быть положительной для всех Λ и ξ из $0 < \xi \leq \xi(b)$; мы, однако, покажем, что это не так для больших положительных Λ . Для этого сравним $w(\xi, \Lambda)$ с решением $v(\xi) = \frac{1}{k} F_1(0) \sin k\xi$ дифференциального уравнения

$$v'' = -k^2 v \quad (11.5)$$

с такими же начальными условиями $v(0) = 0, v'(0) = F_1(0)$.

Ближайшая за $\xi = 0$ следующая нулевая точка $v(\xi)$ есть $\xi = \pi/k$. Рассмотрим теперь еще интервал $0 \leq \xi \leq \pi/k$, который обозначим J , и выберем $k > \pi/\xi(b)$, так что J содержится в $0, \xi(b)$.

Выберем, далее, Λ таким большим, что $s(\xi) > k^2$ для всех ξ из интервала J , для чего следует лишь положить

$$\Lambda > \frac{k^2 + \max(F_1 |F_0|)}{\min(F_1 G_0)}.$$

Если умножить первое уравнение (11.4) на v , а (11.5) на w , то их разность дает

$$w''v - v''w = -(s(\xi) - k^2)vw.$$

Если бы w было положительным для всех ξ внутри J , то правая часть последнего уравнения была бы там отрицательной, а поэтому также и интеграл по этому интервалу от 0 до ξ :

$$w'v - v'w = - \int_0^\xi (s(\xi) - k^2)vw d\xi < 0 \quad (\text{при } \xi > 0 \text{ из } J).$$

Для $\xi = \frac{\pi}{k}$ вследствие того, что $v = 0, v' = -F_1(0) < 0$; из этого следует, что $w(\pi/k) < 0$, в противоречии с предположением $w > 0$. Следовательно, $w(\xi, \Lambda)$, а значит, и $z(x, \Lambda)$ не могут быть положительными для всех x из интервала $a < x \leq b$ и для всех Λ . Тем самым доказано существование наименьшего вещественного собственного значения λ_1 и положительной в интервале $a < x < b$ первой собственной функции.

Б. Минимальные свойства наименьшего собственного значения. Доказательство минимальных свойств λ_1 основывается на следующем тождестве для некоторых трех функций u , f , y , для которых лишь должны существовать u' , f' , y'' в рассматриваемой точке x и $y(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{u^2 f y'}{y}\right)' = \frac{u^2 (f y')'}{y} + u'^2 f - f y^2 \left(\frac{u}{y}\right)'^2. \quad (11.6)$$

Это тождество подтверждается вычислением:

$$\begin{aligned} \left(\frac{u^2 f y'}{y}\right)' &= \frac{u^2}{y} (f y')' + \frac{2u u' f y'}{y} - \frac{u^2 f y'^2}{y^2} = \\ &= \frac{u^2}{y} (f y')' + u'^2 f - f \left(u'^2 - 2 \frac{u u' y'}{y} + \frac{u^2 y'^2}{y^2}\right), \end{aligned}$$

из чего (11.6) следует непосредственно.

Пусть теперь u есть любая «допустимая функция», т. е. тождественно не равная нулю, удовлетворяющая краевым условиям $u(a) = u(b) = 0$, непрерывно дифференцируемая функция [было бы даже достаточно вместо непрерывной дифференцируемости потребовать, чтобы u была кусочно-непрерывно дифференцируемой и чтобы существовали $u'(a)$ и $u'(b)$]. Далее, положим в (11.6) $f = f_1$ и y — равным первой собственной функции y_1 , существование которой уже доказано. Тогда в силу (11.1)

$$\frac{(f_1 y_1)'}{y_1} = f_0 - \lambda_1 g_0.$$

Если проинтегрировать (11.6) в интервале a, b , то левая часть обратится в нуль. На самом деле, y_1' на краях не исчезает, следовательно, u/y_1 на краях имеет конечные значения, а краевые значения u^2/y_1 равны нулю. В правой части $y_1 \left(\frac{u}{y_1}\right)' = u' - y_1' \frac{u}{y_1}$ имеет на краях конечные значения, так что интеграл существует. Таким образом, при интегрировании получаем

$$\int_a^b u^2 (f_0 - \lambda_1 g_0) dx + \int_a^b u'^2 f_1 dx - \int_a^b f_1 y_1^2 \left(\frac{u}{y_1}\right)'^2 dx = 0.$$

Так как y_1 , кроме точек $x=a$ и $x=b$, нигде в интервале интегрирования не обращается в нуль, как это было показано выше, то третий интеграл имеет конечную и неотрицательную (так как $f_1 > 0$) величину. Третий интеграл равен нулю тогда и только тогда, когда $\left(\frac{u}{y_1}\right)' \equiv 0$, т. е. когда u сама есть первая собственная функция.

Если опустить третий интеграл, то тогда знак равенства следует заменить на знак \geq , и получается

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_a^b (f_1 u'^2 + f_0 u^2) dx}{\int_a^b g_0 u^2 dx}, \quad (11.7)$$

т. е. наименьшее собственное значение λ_1 одновременно является наименьшей величиной, которую принимает частное в правой части (11.7), когда u пробегает область всех допустимых функций. Знак равенства будет иметь место только в том случае, если u сама является первой собственной функцией.

Для второго собственного значения λ_2 при помощи описанного здесь метода доказательства получается формулировка: Если ξ является лежащей внутри интервала a, b нулевой точкой второй собственной функции y_2 , т. е. $y_2(\xi) = 0$, то λ_2 является минимумом, который принимает частное в правой части (11.7), если от допустимых функций дополнительно потребовать, чтобы они обращались в нуль в точке ξ , т. е. $u(\xi) = 0$. Дополнительные условия теперь, следовательно, иные, чем в теореме п. 8.3.

В. Теорема включения для первого собственного значения. Присоединяем данное Барта¹⁾ элементарное доказательство для частного случая теоремы включения, которое использует несколько отличающееся от (11.6) тождество (11.8). Последнее для трех функций u, f, y , для которых должны лишь существовать u'', f', y'' в некоторой рассматриваемой точке x и $u(x) \neq 0$, имеет вид

$$(fy')' = \frac{y}{u} (fu')' - \frac{1}{u} [f(u'y - uy')]' \quad (11.8)$$

В правильности этого тождества легко убедиться путем дифференцирования выражения в квадратных скобках.

Пусть теперь u есть произвольная функция сравнения, т. е. дважды непрерывно дифференцируемая функция с $u(a) = u(b) = 0$, которая, однако, внутри интервала принимает только положительные значения:

$$u(x) > 0 \quad \text{при } a < x < b.$$

Далее, подставим в (11.8) вместо f функцию f_1 из (11.1) и вместо y первую собственную функцию y_1 , о которой мы уже знаем, что она внутри интервала не обращается в нуль, т. е., например, $y_1 > 0$ при $a < x < b$. Тогда, согласно (11.1),

$$(f_1 y_1')' = f_0 y_1 - \lambda_1 g_0 y_1$$

¹⁾ J. Barta, Ing.-Arch. 8 (1937), 35—37.

и (11.8) после деления на $g_0 y_1$ принимает вид

$$\lambda_1 = \frac{f_0}{g_0} - \frac{(f_1 u')'}{g_0 u} + \frac{Z}{g_0 u y_1}, \quad (11.9)$$

где

$$Z = Z(x) = [f_1(u'y_1 - uy_1')]'. \quad (11.10)$$

Если теперь для данной функции u при $a < x < b$ ввести вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = \frac{-(f_1 u')' + f_0 u}{g_0 u} = \frac{M[u]}{N[u]},$$

то (11.9) принимает форму

$$\lambda_1 = \Phi(x) + \frac{Z}{g_0 u y_1}. \quad (11.11)$$

Теперь $Z(x)$ в силу (11.10) есть непрерывная функция, интеграл которой по основной области из-за краевых условий для u и y_1 обращается в нуль:

$$\int_a^b Z(x) dx = [f_1(u'y_1 - uy_1')]_a^b = 0.$$

Следовательно, либо $Z \equiv 0$, либо Z при $a < x < b$ принимает значения обоих знаков. Так как g_0 , u , y_1 при $a < x < b$ положительны, функция $\frac{Z}{g_0 u y_1}$ — либо тождественный нуль, либо принимает значения обоих знаков. Таким образом, в (11.11) функция $\lambda_1 - \Phi(x)$ не при всех x из $a < x < b$ всегда положительна или всегда отрицательна, т. е. имеем

$$\Phi_{\min} \leq \lambda_1 \leq \Phi_{\max}.$$

Это есть формулировка теоремы включения п. 9.1 для первого собственного значения λ_1 задачи (11.1).

11.2. Минимальные свойства собственных значений в случае уравнений с частными производными. Пусть

$$M[z] = \lambda g_0 z \quad (11.12)$$

есть уравнение с частными производными для функции z двух или более независимых переменных x, y, \dots , а g_0 — заданная непрерывная положительная функция этих переменных и на z на краях некоторой области \mathfrak{B} налагаются, как в (6.2), краевые условия

$$U_\mu[z] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k). \quad (11.13)$$

Пусть эта задача на собственные значения является самосопряженной и полностью определенной (см. (6.3) и (6.4)) и существуют функция

Грина¹⁾ $G(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots)$ и связанное с ней, согласно (7.24), ядро

$$K(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots) = \\ = G(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots) \sqrt{g_0(x, y, \dots) g_0(\xi, \eta, \dots)}, \quad (11.14)$$

которое симметрично, квадратично интегрируемо и непрерывно в среднем, так что приведенная в п. 7.2 теория интегральных уравнений применима.

При этих предпосылках всю изложенную в пп. 8.1—8.4 теорию минимальных свойств собственных значений можно почти дословно перенести на уравнение с частными производными (11.12). Мы можем поэтому быть краткими. Пусть $u(x, y, \dots)$ есть некоторая функция сравнения, т. е. (см. п. 6.1) имеющая столько частных производных, сколько необходимо для образования $M[u]$, и пусть $U_\mu[u] = 0$, $u \neq 0$. Тогда с этой функцией можно построить отношение Рэлея

$$R[u] = \frac{\int_{\mathfrak{B}} u M[u] dx dy \dots}{\int_{\mathfrak{B}} g_0 u^2 dx dy \dots} \quad (11.15)$$

и соответствующую²⁾ (8.4) функцию η^*

$$M[u] - R g_0 u = \eta^*(x, y). \quad (11.16)$$

Для доказательства неравенства $R[u] \geq \lambda_1$ можно снова положить $\eta^* \equiv 0$. Тогда решение краевой задачи, соответствующей (8.5):

$$M[v] - \lambda g_0 v = \eta^*, \quad U_\mu[v] = 0,$$

имеет вид

$$v(x, y, \lambda) = \int \int_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) [\lambda g_0(\xi, \eta) v(\xi, \eta, \lambda) + \eta^*(\xi, \eta)] d\xi d\eta,$$

т. е. функция $V(x, y) = v(x, y, \lambda) \sqrt{g_0(x, y)}$ есть однозначно определяемое решение неоднородного интегрального уравнения

$$V(x, y) = \lambda \int \int_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta) V(\xi, \eta) d\xi d\eta + f(x, y),$$

¹⁾ То есть $M[z] = r(x, y, \dots)$, $U_\mu[z] = 0$ эквивалентно уравнению

$$z(x, y, \dots) = \int_{\mathfrak{B}} G(x, y, \dots; \xi, \eta, \dots) d\xi d\eta \dots$$

²⁾ Мы пишем η^* вместо η как в (8.4), так как здесь, например, в (11.14) η применяется в другом значении. В дальнейшем для экономии места, опустим многоточие за x, y , соответственно за ξ, η .

где

$$f(x, y) = \int_{\mathfrak{B}} \int G(x, y; \xi, \eta) \sqrt{g_0(x, y)} \eta^*(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (11.17)$$

поскольку λ не является собственным значением. Именно, $V(x, y)$, согласно общей формуле решения (7.15), которая действительна и в случае функций многих переменных, можно прямо записать в виде

$$\begin{aligned} v(x, y, \lambda) \sqrt{g_0(x, y)} = \\ = f(x, y) + \lambda \int_{\mathfrak{B}} \int \left[K(x, y; \xi, \eta) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z_i(x, y) z_i(\xi, \eta)}{\lambda_i (\lambda_i - \lambda)} \sqrt{g_0(x, y) g_0(\xi, \eta)} \right] \times \\ \times f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (11.18) \end{aligned}$$

причем $z_i(x, y) \sqrt{g_0(x, y)}$ есть собственная функция ядра K ; следовательно, $z_i(x, y)$ — собственная функция задачи (11.12), (11.13).

Далее, можно, точно так же как в (8.7), построить функцию

$$h(\lambda) = \int_{\mathfrak{B}} \int \eta^*(x, y) v(x, y, \lambda) dx dy$$

и дальнейшее доказательство вести при $N[u] = g_0 u$, как в п. 8.2.

Точно так же на рассматриваемый случай можно перенести доказательство минимальных свойств второго собственного значения λ_2 , данное в п. 8.3; дополнительному условию (8.11) здесь соответствует условие

$$\int_{\mathfrak{B}} \int u(x, y) g_0(x, y) z_1(x, y) dx dy = 0. \quad (11.19)$$

Однако доказательство того, что вследствие этого дополнительного условия обходится особенность функции Грина в точке $\lambda = \lambda_1$, надо проводить, руководствуясь формулой решения (11.18). В последней при $\lambda = \lambda_1$ в сумме выпадает неограниченно возрастающий член, если имеет место условие

$$\int_{\mathfrak{B}} \int z_1(\xi, \eta) \sqrt{g_0(\xi, \eta)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = 0. \quad (11.20)$$

Далее, (11.20) фактически есть следствие из (11.19), так как в силу равенства $M[z_1] = \lambda_1 g_0 z_1$ имеем, согласно (11.19) и предполагаемой самосопряженности:

$$\int_{\mathfrak{B}} \int u(x, y) M[z_1(x, y)] dx dy = \int_{\mathfrak{B}} \int z_1(x, y) M[u(x, y)] dx dy = 0,$$

и в силу (11.16) и (11.19)

$$\int_{\mathfrak{B}} \int z_1(x, y) \eta^*(x, y) dx dy = 0.$$

Подставив сюда вместо z_1 ее значение, вытекающее из (11.12),

$$z_1(x, y) = \lambda_1 \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) g_0(\xi, \eta) z_1(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

получаем уравнение

$$\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} z_1(\xi, \eta) \sqrt{g_0(\xi, \eta)} \times \\ \times \left[\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} G(x, y; \xi, \eta) \sqrt{g_0(\xi, \eta)} \eta^*(x, y) dx dy \right] d\xi d\eta = 0,$$

которое с учетом (11.17) непосредственно переходит в (11.20).

Вообще для n -го собственного значения λ_n имеем: λ_n является минимумом отношения Рэля (11.15), когда u пробегает область всех функций сравнения, ортогональных $(n-1)$ первым собственным функциям $z_i(x, y)$, умноженным на g_0 :

$$\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} u g_0 z_i dx dy = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1). \quad (11.21)$$

Этому вариационному принципу можно сопоставить еще второй. Приведенный в п. 7.2 для случая интегральных уравнений вариационный принцип в силу (7.18) означает

$$\lambda_1 = \min \frac{\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} w^2(x, y) dx dy}{\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta) w(x, y) w(\xi, \eta) dx dy d\xi d\eta}, \quad (11.22)$$

причем w пробегает область непрерывных (ненормированных) функций. Для w определяется функция сравнения $F_1(x, y)$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$w = \frac{1}{\sqrt{g_0}} M[F_1], \quad (11.23)$$

т. е.

$$F_1(x, y) = \int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} K(x, y; \xi, \eta) \frac{w(\xi, \eta)}{\sqrt{g_0(x, y)}} d\xi d\eta. \quad (11.24)$$

Таким образом,

$$\lambda_1 = \min \frac{\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} \frac{1}{g_0(x, y)} (M[F_1])^2 dx dy}{\int_{\mathfrak{B}} \int_{\mathfrak{B}} F_1(x, y) M[F_1] dx dy}, \quad (11.25)$$

причем F_1 пробегает область всех функций сравнения.

Отношение в правой части имеет форму, отличную от (11.5). К соотношению этих двух минимальных принципов¹⁾ мы еще вернемся в п. 14.1.

Теорему включения § 9 можно также непосредственно распространить и на уравнения в частных производных. Используем для этого формулы (7.16), (7.17) теории интегральных уравнений и положим, как в (11.23),

$$v(x) = \frac{1}{V g_0} M[F_1].$$

Тогда (7.16) принимает вид

$$\Phi(x, y) = \frac{M[F_1(x, y)]}{g_0(x, y)F_1(x, y)}. \quad (11.26)$$

Это отношение можно образовать для произвольной функции сравнения $F_1(x, y)$. Если Φ в области \mathfrak{B} имеет постоянный знак и заключено между пределами Φ_{\min} и Φ_{\max} , то между Φ_{\min} и Φ_{\max} имеется по меньшей мере одно собственное значение λ_k .

11.3. Двухпараметрические задачи на собственные значения, кривые собственных значений. Бывает иногда, что в задаче на собственные значения появляются два параметра, например, при исследовании влияния некоторой величины a , присутствующей в дифференциальном уравнении, на собственное значение λ или что-нибудь подобное. Если обозначить оба параметра через λ_1 и λ_2 , т. е. в только что приведенном случае, например, $\lambda = \lambda_1$ и $a = \lambda_2$, то вообще для каждого λ_1 имеется счетное бесконечное множество значений λ_2 , и при графическом представлении в плоскости λ_1, λ_2 получается счетное бесконечное множество ветвей «кривых собственных значений»²⁾. (Способ обозначения здесь иной, чем раньше, — в п. 5.7 λ_i обозначало i -е собственное значение.)

В качестве примера³⁾ рассмотрим защемленный на обоих концах сжатый стержень на упругом основании, когда коэффициент постели

¹⁾ На наличие двух минимальных принципов указывается в книге G. HammeI, *Integralgleichungen*, Berlin, 1937, 88.

²⁾ В частных случаях свойства кривых собственных значений исследуются у H. Schaefer, *Beitrag zur Berechnung des kleinsten Eigenwertes eindimensionaler Eigenwertaufgaben*, Diss., Hannover, 1937, 6.

³⁾ В технической литературе имеется много примеров двухпараметрических задач на собственные значения; назовем лишь задачу о потере устойчивости при кручении однородного вала (С. В. Виезено, R. Граммель, *Technische Dynamik*, Berlin, 1939, 547 [К. Б. Бицено и Р. Граммель, *Техническая динамика*, т. II, Гостехиздат, 1950]). В этом примере крутящий момент W и осевая сжимающая сила P — два параметра. Условием потери устойчивости является квадратичное соотношение между W и P , а так называемая диаграмма потери устойчивости, являющаяся параболой в плоскости (P, W) , есть ветвь кривой собственных значений.

взят как переменный параметр. Задача в этом случае имеет вид:

$$y^{IV} = \lambda_1 y - 2\lambda_2 y'', \quad y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0.$$

Множитель 2 перед λ_2 добавлен только из соображений удобства при вычислениях. Решение задачи приводит к трансцендентному уравнению, которое при

$$K_1^2 = \lambda_2 + \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2^2},$$

$$K_2^2 = -\lambda_2 + \sqrt{\lambda_1 + \lambda_2^2},$$

$$2\sigma = K_1 l, \quad 2\tau = K_2 l$$

распадается на два:

$$\frac{\operatorname{tg} \sigma}{\sigma} = \frac{\operatorname{th} \tau}{\tau},$$

$$\sigma \operatorname{tg} \sigma = -\tau \operatorname{th} \tau.$$

На рис. 11.3 показаны первые три ветви соответствующей кривой собственных значений.

11.4. Упражнения. 1. Проверить формулу Парсеваля (10.11) и неравенство Бесселя (10.14) в примере: $-y'' = \lambda y$, $y(0) = y(\pi) = 0$ для функции сравнения $u = \pi x - x^2$.

Проверка. Как уже указывалось в п. 10.2, здесь имеются собственные значения $\lambda_k = k^2$ с нормированными собственными функциями

$y_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin kx$. Коэффициенты Фурье функции $u(x)$ вычисляются по формуле

$$a_k = \int_0^{\pi} u(x) y_k(x) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} (\pi x - x^2) \sin kx dx =$$

$$= \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{4}{k^3} & \text{при нечетных } k, \\ 0 & \text{при четных } k. \end{cases}$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \frac{32}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^6} = \frac{\pi^5}{30}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k a_k^2 = \frac{32}{\pi} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(2r-1)^4} = \frac{\pi^3}{3}.$$

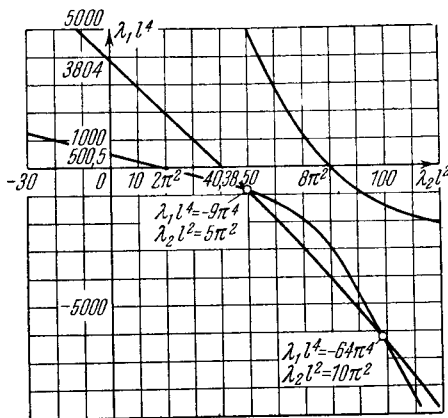


Рис. 11.3. Кривые собственных значений для задачи $y^{IV} = \lambda_1 y - 2\lambda_2 y''$, $y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$.

Эти величины совпадают с

$$\int_0^{\pi} uN[u] dx = \int_0^{\pi} (\pi x - x^2)^2 dx = \frac{\pi^5}{30}$$

и

$$\int_0^{\pi} uM[u] dx = \int_0^{\pi} 2(\pi x - x^2) dx = \frac{\pi^3}{3}.$$

2. Распространить описанный в п. 11.1 элементарный метод обоснования минимальных свойств наименьшего собственного значения на задачу четвертого порядка:

$$(f_2 y'')'' = \lambda g_0 y, \quad y(a) = y''(a) = y(b) = y''(b) = 0.$$

Пусть при этом g_0, f_2 положительны, g_0 непрерывна, f_2 дважды непрерывно дифференцируема.

Указание. Вместо тождества (11.6) использовать здесь тождество

$$\left(\frac{u^2 f_2 y''}{y}\right)'' = \left[\frac{2u^2}{y} (f_2 y'')'\right]' + \\ + \frac{2f_2 y''}{y^3} (u'y - uy')^2 - \frac{f}{y^2} (u''y - uy'')^2 - \frac{u^2}{y} (f_2 y'')'' + fu''^2;$$

подставить u в качестве «допустимой функции», т. е. дважды непрерывно дифференцируемой функции, удовлетворяющей главным краевым условиям

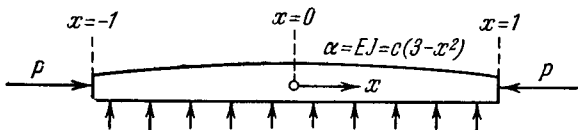


Рис. 11.4. Сжатый стержень на упругом основании.

$u(a) = u(b) = 0; f = f_2$ и $y = y_1$. При этом y_1 есть первая собственная функция, следующие свойства которой надо использовать: $y_1 > 0$ и $y_1'' < 0$ при $a < x < b$; y_1' и y_1''' не обращаются в нуль на краях a, b . Такое доказательство (при других обозначениях) проведено в работе «Deutsche Mathematik», т. II, 1937, 205.

3. Теорема включения. Найти верхнюю и нижнюю границы критической нагрузки P для сжатого стержня на упругом основании (коэффициент постели $K = 60c$), шарнирно закрепленного в точках $x = \pm 1$, и имеющего переменную жесткость на изгиб $a = c(3 - x^2)$ (рис. 11.4).

При $P = c\lambda$ задача, согласно п. 1.4, имеет вид

$$M[y] = [(3 - x^2) y'']' + 60y = -\lambda y'', \\ y(-1) = y''(-1) = y(+1) = y''(+1) = 0.$$

Взяв два полинома $F_0(x)$ и $F_1(x)$, которые удовлетворяют краевым условиям и находятся в соотношении $M[F_1] = -F_0''$, получаем

$$\left. \begin{aligned} F_1 &= 39 - 45x^2 + 5x^4 + x^6, \\ 14F_0 &= 5(3433 - 4032x^2 + 546x^4 + 56x^6 - 3x^8). \end{aligned} \right\} \quad (11.27)$$

Согласно (9.3) построим отношение

$$\Phi(x) = \frac{F'_0(x)}{F'_1(x)} = \frac{30 \left(48 - 13x^2 - 2x^4 + \frac{1}{7} x^6 \right)}{45 - 10x^2 - 3x^4}.$$

$\Phi(x)$ принимает свои экстремальные значения при $x=0$ и $x=\pm 1$:

$$\Phi(0) = 32, \quad \Phi(1) = 31 \frac{1}{14} \approx 31,07.$$

Итак, в силу (9.4) имеем $31,07 \leq \lambda \leq 32$.

Более близкие границы для этого примера вычисляются по формуле (12.19) в задаче 2 п. 14.6.

4. Теорема включения. Задача на собственные значения

$$-(e^{-x^2} y')' = \lambda e^{-x^2} y, \quad y(0) = y'(1) = 0$$

возникает при крутильных колебаниях диска переменной толщины. Краевые условия соответствуют закрепленному внутреннему и свободному внешнему краям. Этим краевым условиям удовлетворяет функция

$$w = e^{\frac{1}{2} x^2} \sin a_n x,$$

если числа a_n выбраны так, что $\operatorname{tg} a_n + a_n = 0$.

Согласно (9.6) вычисляем

$$\Phi = \frac{-(e^{-x^2} w')'}{e^{-x^2} w} = a_n^2 + x^2 - 1$$

и отсюда в силу (9.7)

$$a_n^2 - 1 \leq \lambda_n \leq a_n^2.$$

Для первых четырех собственных значений получаем такие границы:

n	a_n	границы для λ_n	
		Нижняя	Верхняя
1	2,029	3,116	4,116
2	4,913	23,14	24,14
3	7,978	62,65	63,65
4	11,09	121,9	122,9

Границы для более высоких собственных значений вычисляются всегда относительно более точно. Для двух первых собственных значений ср. задачу 2 п. 25.7 или Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), 304, 306.

5. Теорема включения. Нахождение критической нагрузки для сжатого стержня постоянного сечения на упругом основании, закрепленного шарнирно, приводит к задаче

$$y'' + Ay = -\lambda y'', \quad y(-1) = y''(-1) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Найти границы для λ_1 при $A = 20$.

Решение. Для определения двух функций $F_0(x)$ и $F_1(x)$, удовлетворяющих всем краевым условиям и соотношению $F_1^{IV} + AF_1 = -F_0''$, исходим

из некоторой функции $F_1(x)$, причем F_1 , F_1'' и F_1^{IV} обращаются в нуль в граничных точках $x = \pm 1$ (так как из условия $F_1 = F_1'' = 0$ следует также равенство нулю F_1^{IV}). Полином наиминшей степени, удовлетворяющий этим условиям, определяется с точностью до постоянного множителя выражением

$$F_1(x) = 61 - 75x^2 + 15x^4 - x^6 = (1 - x^2)(61 - 14x^2 + x^4).$$

Тогда

$$-F_1' = 120(3x - x^3) + A \left(61x - 25x^3 + 3x^5 - \frac{x^7}{7} \right).$$

Требуется найти не F_0 , а, согласно (9.3), отношение

$$\Phi = \frac{F_0'}{F_1'} = \frac{20(3 - x^2) + \frac{1}{6}A \left(61 - 25x^2 + 3x^4 - \frac{1}{7}x^6 \right)}{(5 - x^2)^2}.$$

Ниже в таблице для нескольких значений A даны Φ_{\min} , Φ_{\max} , средние значения $\frac{1}{2}(\Phi_{\max} + \Phi_{\min})$ с максимальной ошибкой

$$\frac{\Phi_{\max} - \Phi_{\min}}{\Phi_{\max} + \Phi_{\min}}$$

и для сравнения соответствующие точные собственные значения. Фактическая ошибка среднего значения, особенно при $A = 40$, значительно меньше максимальной. При $A = 20$ F_1 представляет приближение для первой, а при $A = 40$ — для второй собственной функции, так как при $A = 40$ стержень изгибается скорее по полной синусоиде (с узлом в середине), чем по полу-синусоиде.

A	Φ_{\min}	Φ_{\max}	Среднее значение $\frac{1}{2}(\Phi_{\max} + \Phi_{\min})$	Теоретические границы ошибки, %	Точное собственное значение
10	6,466	6,548	6,507	0,63	$\lambda_1 = 6,5202$
20	10,533	10,595	10,564	0,3	$\lambda_1 = 10,5731$
40	18,66667	18,69047	18,67857	0,064	$\lambda_2 = 18,67879$
90	38,928	39	38,964	0,1	$\lambda_3 = 38,9430$

6. Метод Ф. Кисслинга (Z. angew. Math. Mech. 10 (1930), 594). Границы в теореме включения сближаются введением в функции $F_0(x)$, $F_1(x)$ из п. 9.1 дополнительного параметра ρ , который подбирается таким образом, что пределы (9.4) располагаются возможно ближе. Провести это в примере

$$-y'' = \lambda(1 + \sin x)y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

для

$$F_1(x) = \sin x + \rho \sin 3x.$$

Результат.

$$\Phi(x) = \frac{\sin x + 9\rho \sin 3x}{(\sin x + \rho \sin 3x)(1 + \sin x)}.$$

Если представить $\Phi(x)$ для разных значений ρ графически, то различные кривые проходят через некоторую фиксированную точку, в данном случае через точку

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad \Phi = 2(2 - \sqrt{3}) \approx 0,5359.$$

Φ_{\min} становится наибольшим, если ρ определяется из условия: $\Phi' \left(\frac{\pi}{3} \right) = 0$,

т. е. при $\rho = \frac{\sqrt{3} - 2}{24} \approx -0,01118$; при этом $\Phi_{\min} = 0,5359$.

Φ_{\max} становится наименьшим, именно $\Phi_{\max} = 0,5673$, если ρ определяется из условия: $\Phi(0) = \Phi \left(\frac{\pi}{2} \right)$, т. е. при $\rho = \frac{1}{27} (29 - \sqrt{868}) \approx -0,01710$.

Итак, имеем границы:

$$\lambda_1 \geq 0,5359 \quad (\text{ошибка } -0,7\%),$$

$$\lambda_1 \leq 0,5673 \quad (\text{ » } +5,1\%).$$

Без параметра ρ , т. е. при $\rho = 0$, получились бы лишь весьма грубые границы: $0,5 \leq \lambda_1 \leq 1$.

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Описанный здесь метод последовательных приближений (называемый также итерационным процессом) применим не только для задач на собственные значения, но и во многих других задачах, связанных с дифференциальными уравнениями, и имеет большое значение как для теории, так и для численных расчетов. Прежде всего, он представляет стандартный метод для приближенного вычисления наименьшего собственного значения самосопряженных задач вида (4.11)—(4.14) (при некоторых дополнительных условиях, см. теорему п. 12.4), а следовательно, для большого числа проблем, встречающихся в технике. При небольшой вычислительной трудоемкости метод позволяет получить часто очень близкие верхнюю и нижнюю границы для первого собственного значения. Практическое применение метода подробно излагается в пп. 12.5 и 13.6.

§ 12. Постоянные Шварца

12.1. Метод последовательных приближений в общем случае.

Метод последовательных приближений применим при очень общих предположениях, а именно, если собственное значение λ входит линейно в дифференциальное уравнение и краевые условия (процесс применим также и для дифференциальных уравнений в частных производных, см. п. 14.1). В основу будут положены дифференциальные уравнения (4.11) и краевые условия (4.14).

В общем случае метод заключается в следующем. Исходя из произвольно выбранной функции $F_0(x)$, определяют последовательность функций F_1, F_2, \dots , при этом F_k получают из F_{k-1} , решая краевую задачу. Во всех членах дифференциального уравнения и краевых условий, содержащих λ в качестве множителя, λu заменяют на F_{k-1} , а в членах, свободных от λ , заменяют u на F_k . Например, для задачи $-u'' = \lambda u$; $u(1) = 0$; $\lambda u'(0) = u(0)$ имели бы

$$-F_k'' = F_{k-1}, \quad F_k(1) = 0, \quad F_{k-1}'(0) = F_k(0).$$

Процесс упрощается, если λ не входит в краевые условия. Тогда, исходя из $F_0(x)$, функции F_1, F_2, \dots определяют, решая краевые задачи

$$\left. \begin{aligned} M[F_k] &= N[F_{k-1}], \\ U_\mu[F_k] &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (12.1)$$

Можно ожидать, что в случае сходимости F_n с ростом n все более принимают вид собственной функции y_s . Тогда $\frac{M[F_n]}{N[F_n]}$ должно приближенно равняться соответствующему собственному значению λ_s . Это отношение зависит еще от x . За приближенное собственное значение Λ принимают величину

$$\Lambda = \frac{\int_a^b F_n M[F_n] dx}{\int_a^b F_n N[F_n] dx} = \frac{\int_a^b F_n N[F_{n-1}] dx}{\int_a^b F_n N[F_n] dx}, \quad (12.2)$$

образованную по способу отношения Рэля (4.31). Ниже при подробном исследовании мы ограничимся более узким классом задач¹⁾.

12.2. Введение постоянных Шварца a_k и отношений μ_k . Пусть задача на собственные значения вида (4.11) — (4.14) самосопряженная, выполнены условия полной определенности (8.2) и собственное значение λ не входит в краевые условия.

Начальная функция $F_0(x)$ может быть выбрана произвольной, однако так, чтобы выполнялись следующие условия: функция должна быть непрерывной вместе со своими $2n$ производными. Она может не удовлетворять всем граничным условиям, достаточно, чтобы для

¹⁾ Более общие результаты приводятся в работе: Н. Wielandt, Das Iterationsverfahren bei nicht-selbstadjungierten Eigenwertaufgaben, Math. Z. 50 (1944), 93—143. В частности, на стр. 134 показывается, что если, например, а) наименьшее по модулю собственное значение λ_1 не вырождено, отлично от нуля и в известном смысле причастно к F_0 ; б) не существует другого

собственного значения с тем же самым модулем, что и λ_1 ; в) $\int_a^b y_1 N[y_1] dx \neq 0$ для собственной функции y_1 , принадлежащей к собственному значению λ_1 , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda^{(n)} = \lambda_1$$

и функции F_n при подходящей нормировке равномерно сходятся вместе со своими $2m$ производными к собственной функции y_1 .

любой функции сравнения u имело место¹⁾

$$\int_a^b (F_0 N[u] - u N[F_0]) dx = 0 \quad \text{и} \quad \int_a^b F_0 N[F_0] dx > 0. \quad (12.3)$$

С помощью преобразования Дирихле (4.17) можно в каждом отдельном случае легко установить, каким краевым условиям должна удовлетворять F_0 для выполнения (12.3). Например, в случае $N[y] = g_0 y$, т. е. для частного вида задачи на собственные значения, условия (12.3) выполняются автоматически. Функция F_0 не должна при этом удовлетворять каким-либо краевым условиям и может быть любой непрерывной функцией, тождественно не равной нулю. Если же само F_0 удовлетворяет всем $2m$ краевым условиям, то вследствие самосопряженности, разумеется, будет выполнено и условие (12.3).

Для получения точных границ выбирают обычно F_0 так, чтобы были уже выполнены все краевые условия. Однако иногда для удобства вычисления подчиняют F_0 только некоторым краевым условиям, и тогда лишь функции F_1, F_2, \dots , определяемые из (12.1), удовлетворяют всем $2m$ краевым условиям. (Для практических целей часто ограничиваются F_1 .)

С помощью F_n , найденных таким образом из решения краевой задачи, образуют введенные Шварцем²⁾ постоянные a_k (постоянные Шварца):

$$a_k = \int_a^b F_i N[F_{k-i}] dx, \quad 0 \leq i \leq k, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.4)$$

Они только внешне зависят от i , так как, используя итерационное правило (12.1) и самосопряженность, можно получить

$$\begin{aligned} a_k &= \int_a^b F_i M[F_{k-i+1}] dx = \int_a^b F_{k-i+1} M[F_i] dx = \\ &= \int_a^b F_{k-i+1} N[F_{i-1}] dx = \int_a^b F_{i-1} N[F_{k-i+1}] dx, \end{aligned} \quad (12.5)$$

т. е. интеграл $\int_a^b F_i N[F_{k-i}] dx$ зависит только от суммы $i + (k - i)$, а следовательно, только от k . Например,

$$a_2 = \int_a^b F_2 N[F_0] dx = \int_a^b F_1 N[F_1] dx = \int_a^b F_0 N[F_2] dx. \quad (12.6)$$

¹⁾ То есть $F_0(x)$ по терминологии п. 10.3 (см. дополнение 1) должна быть полудопустимой функцией.

²⁾ Карл Герман Амандус Шварц (1843—1921) — немецкий математик.

В силу (8.2) все a_k положительны, так как

$$a_{2k} = \int_a^b F_k N [F_k] dx > 0, \quad a_{2k-1} = \int_a^b F_k M [F_k] dx > 0. \quad (12.7)$$

Используя постоянные Шварца a_k , можно вычислить отношения Шварца

$$\mu_{k+1} = \frac{a_k}{a_{k+1}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (12.8)$$

Ввиду (12.7) все μ_k положительны. Отношения μ_{2k} с четным индексом можно записать в виде отношений Рэля (4.31)

$$\mu_{2k} = \frac{a_{2k-1}}{a_{2k}} = \frac{\int_a^b F_k M [F_k] dx}{\int_a^b F_k N [F_k] dx} = R [F_k]. \quad (12.9)$$

Пример. Пусть дана задача на собственные значения

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1) + y'(1) = 0.$$

От функции $F_0(x)$ здесь требуется только непрерывность. Мы можем положить, например, $F_0(x) = 1$. По итерационному правилу (12.1) $F_1(x)$ определим из задачи

$$-F_1'' = F_0, \quad F_1(0) = F_1(1) + F_1'(1) = 0.$$

Интегрируя уравнение, найдем $F_1 = c_1 + c_2 x - \frac{1}{2} x^2$, причем постоянные интегрирования c_1 и c_2 определим так, чтобы F_1 подчинялась краевым условиям. Находим

$$F_1 = \frac{1}{4} (3x - 2x^2).$$

Вычислим теперь постоянные Шварца a_0, a_1, a_2 и отношения μ_1 и μ_2 :

$$a_0 = \int_0^1 F_0^2 dx = 1; \quad a_1 = \int_0^1 F_0 F_1 dx = \frac{5}{24}; \quad a_2 = \int_0^1 F_1^2 dx = \frac{1}{20};$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{24}{5}; \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{25}{6};$$

аналогично найдем F_2, F_3 и F_4

$$48F_2 = 7x - 6x^3 + 2x^4,$$

$$1440F_3 = 50x - 35x^3 + 9x^5 - 2x^6,$$

$$241\,920F_4 = 2035x - 1400x^3 + 294x^5 - 36x^7 + 6x^8.$$

Следующая таблица содержит первые a_k и μ_k .

k	a_k	μ_k	$\mu_{k-1} - \mu_k$
0	1	—	—
1	$\frac{5}{24}$	$\frac{24}{5} = 4,8$	—
2	$\frac{1}{20}$	$\frac{25}{6} = 4,1667$	0,6333
3	$\frac{163}{28 \cdot 480}$	$\frac{672}{163} = 4,12270$	0,0440
4	$\frac{1069}{315 \cdot 1152}$	$\frac{4401}{1069} = 4,116932$	0,00577
5	$\frac{653}{3168 \cdot 288}$	$\frac{94072}{22855} = 4,1160399$	0,000896
6	$\frac{108281}{3003 \cdot 207360}$	$\frac{891345}{216562} = 4,11588829$	0,0001476

С помощью приведенной в дальнейшем основной формулы (12.19) и найденных значений μ_k можно вычислить первое собственное значение до пятого знака включительно

$$\lambda_1 = 4,1159.$$

В качестве l_2 при этом было взято второе собственное значение уравнения $-y'' = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = 0$, равное $\frac{9\pi^2}{4}$. Найденное собственное значение λ_1 может быть точно вычислено как наименьший положительный корень трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} k = -k$ ($\lambda = k^2$).

12.3. μ_k образуют монотонную невозрастающую последовательность. Это легко установить, если принять во внимание, что ввиду (8.2) для любой функции сравнения u

$$Q_1 = \int_a^b uM[u] dx > 0, \quad Q_2 = \int_a^b uN[u] dx > 0.$$

Мы положим теперь

$$u = a_{2k+1}F_k - a_{2k}F_{k+1}.$$

Эта функция u , когда $u \neq 0$, для $k=0$ является полудопустимой, а для $k > 0$ — функцией сравнения. Возможно также, что $u \equiv 0$, например, если F_0 является собственной функцией, поэтому в дальнейшем мы будем писать $Q_1 \geq 0$, $Q_2 \geq 0$.

Далее, используя (12.4) и (12.5), получим

$$\begin{aligned}
 Q_1 &= \int_a^b (a_{2k+1}F_k - a_{2k}F_{k+1})(a_{2k+1}M[F_k] - a_{2k}M[F_{k+1}]) dx = \\
 &= a_{2k+1}^2 a_{2k-1} - 2a_{2k}a_{2k+1}a_{2k} + a_{2k}^2 a_{2k+1} = \\
 &= a_{2k+1}(a_{2k-1}a_{2k+1} - a_{2k}^2) \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \\
 Q_2 &= a_{2k}(a_{2k}a_{2k+2} - a_{2k+1}^2) \geq 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).
 \end{aligned}$$

Ввиду (12.7) можно оба эти неравенства разделить на $a_{2k}a_{2k+1}^2$ или на $a_{2k}a_{2k+1}a_{2k+2}$, в результате будем иметь

$$\left. \begin{aligned}
 \mu_{2k} &\geq \mu_{2k+1} \quad (k = 1, 2, \dots), \\
 \mu_{2k+1} &\geq \mu_{2k+2} \quad (k = 0, 1, \dots).
 \end{aligned} \right\} \quad (12.10)$$

Следовательно, μ_k монотонно убывают. Согласно (12.9) μ_{2k} является отношением Рэля $R[F_k]$. По теореме в п. 8.1 $R[F_k] \geq \lambda_1$; поэтому все μ_k больше или равны λ_1 .

Итак, имеет место

Теорема. Пусть задача на собственные значения (4.11)—(4.14) является самосопряженной, выполнены условия полной определенности (8.2) и собственное значение λ не входит в краевые условия. Если начальная функция F_0 удовлетворяет условию (12.3), то отношения Шварца μ_k , вычисленные согласно (12.1), (12.4), (12.8) с помощью F_0 , образуют монотонно убывающую, ограниченную снизу первым собственным значением λ_1 и, таким образом, сходящуюся последовательность

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq \lambda_1. \quad (12.11)$$

Отсюда вытекает существование нижней границы последовательности μ_k , но ничего нельзя сказать о величине этой границы, кроме того, что она больше или равна λ_1 . Если, например, $F_0(x)$ является s -й собственной функцией u_s , то $\mu_k = \lambda_s$ для всех k . Граница в этом случае равна λ_s . Таким образом μ_k могут быть очень далеки от λ_1 . Для вычислений очень важно, что при известных добавочных условиях μ_k могут быть достаточно близки к λ_1 и что даже можно оценить величину ошибки $|\mu_k - \lambda_1|$.

12.4. Нижняя граница для первого собственного значения. В этом параграфе в случае простого первого собственного значения будет оценена сверху ошибка $\mu_k - \lambda_1$, и таким образом будут установлены верхняя и нижняя границы для λ_1 . Результатом явится формула (12.19). Эта важная формула будет в п. 14.3 выведена еще раз другим путем, с помощью теоремы разложения.

Для доказательства¹⁾ формулы (12.19), именно только для доказательства, а не для численных расчетов, используется, кроме исходной функции $F_0(x)$, еще вспомогательная функция $H_0(x)$, которая является линейной комбинацией из F_0 и первой собственной функции y_1 ²⁾:

$$H_0 = F_0 - cy_1. \quad (12.12)$$

Она в обобщенном смысле ортогональна первой собственной функции y_1 :

$$\int_a^b H_0 N[y_1] dx = 0. \quad (12.13)$$

Первую собственную функцию $y_1(x)$ мы будем считать нормированной в виде

$$\int_a^b y_1 N[y_1] dx = 1. \quad (12.14)$$

Тогда из требования (12.13) найдем c

$$\int_a^b F_0 N[y_1] dx = c \int_a^b y_1 N[y_1] dx = c$$

и, таким образом, полностью определим функцию H_0 . Она ортогональна к $N[y_1]$ и, как говорят, не содержит компоненты первой собственной функции. Представим себе теперь, что с помощью метода последовательных приближений (12.1) определены последующие функции сравнения H_1, H_2, \dots по правилу $M[H_n] = N[H_{n-1}]$ при $U_\mu[H_n] = 0$, т. е. аналогично тому, как из F_0 определяются F_n ³⁾.

¹⁾ Формула (12.19) для частного вида задач на собственные значения доказана у G. Temple, Proc. Lond. math. Soc. (2) 29 (1929), 257—280, а также у G. Temple and W. G. Bickley, Rayleigh's Principle and its Application to Engineering, London, 1933.

²⁾ Если $F_0(x)$ является первой собственной функцией, то все $\mu_k = \lambda_1$ и в (12.19) будет иметь место знак равенства. В дальнейшем мы исключим этот тривиальный случай, тогда $H_0 \neq 0$.

³⁾ Подобно F_0 функция H_0 является также полудопустимой функцией.

Из $\int_a^b H_0 N[H_0] dx > 0$ следует, в частности, $N[H_0] = M[H_1] \neq 0$, стало быть,

$H_1 \neq 0$; точно так же $H_k \neq 0$ для всех k .

Тогда также все последующие H_i будут ортогональны к $N[y_1]$, так как

$$\begin{aligned} \int_a^b H_1 N[y_1] dx &= \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b H_1 M[y_1] dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b y_1 M[H_1] dx = \\ &= \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b y_1 N[H_0] dx = \frac{1}{\lambda_1} \int_a^b H_0 N[y_1] dx = 0. \end{aligned}$$

Точно так же

$$\int_a^b H_k N[y_1] dx = \frac{1}{\lambda_1^k} \int_a^b H_0 N[y_1] dx = 0. \quad (12.15)$$

Если мы теперь образуем отношение Рэля $R[H_k]$ для $k \geq 1$, то по теореме из п. 8.3 оно будет верхней границей для второго собственного значения λ_2 , так как в силу (12.15) дополнительное условие (8.14) (при $k=1$) выполнено. Стало быть, $R[H_k] \geq \lambda_2$ для $k \geq 1$. Построим с помощью функций H_k постоянные Шварца b_k и отношения ν_k :

$$b_k = \int_a^b H_i N[H_{k-i}] dx, \quad \nu_{k+1} = \frac{b_k}{b_{k+1}} \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Тогда ν_k образуют монотонно убывающую числовую последовательность с $\nu_k \geq \lambda_2$.

Функции H_k определенным образом связаны с F_k . Так, например,

$$H_1 = F_1 - \frac{c}{\lambda_1} y_1,$$

поскольку с учетом (12.12)

$$M\left[F_1 - \frac{c}{\lambda_1} y_1\right] = M[F_1] - \frac{c}{\lambda_1} M[y_1] = N[F_0] - cN[y_1] = N[H_0]$$

и функция $F_1 - \frac{c}{\lambda_1} y_1$ удовлетворяет, таким образом, уравнению, которому должна удовлетворять функция H_1 :

$$M[H_1] = N[H_0], \quad U_\mu[H_1] = 0.$$

Точно так же можно показать, что вообще

$$H_k = F_k - \frac{c}{\lambda_1^k} y_1 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Между постоянными Шварца a_k и b_k также существует определенная связь:

$$\begin{aligned} a_k &= \int_a^b F_0 N[F_k] dx = \int_a^b (H_0 + cy_1) N \left[H_k + \frac{c}{\lambda_1^k} y_1 \right] dx = \\ &= \int_a^b H_0 N[H_k] dx + \frac{c}{\lambda_1^k} \int_a^b H_0 N[y_1] dx + \\ &\quad + c \int_a^b y_1 N[H_k] dx + \frac{c^2}{\lambda_1^k} \int_a^b y_1 N[y_1] dx. \end{aligned}$$

Поэтому вследствие (12.13), (12.14) и вытекающего из (12.15) равенства

$$\int_a^b y_1 N[H_k] dx = 0$$

получается

$$a_k = b_k + \frac{c^2}{\lambda_1^k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Это равенство перепишем также для $k+1$

$$a_{k+1} = b_{k+1} + \frac{c^2}{\lambda_1^{k+1}}$$

и, исключая c^2 , придем к соотношению

$$a_k - \lambda_1 a_{k+1} = b_k - \lambda_1 b_{k+1} \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Используя это равенство, мы можем установить связь между отношениями Шварца μ_k и ν_k :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_{k+1} - \lambda_1} + 1 \right) \mu_{k+1} &= \frac{\mu_k - \lambda_1}{\mu_{k+1} - \lambda_1} \mu_{k+1} = \frac{a_{k-1} - \lambda_1 a_k}{a_k - \lambda_1 a_{k+1}} = \\ &= \frac{b_{k-1} - \lambda_1 b_k}{b_k - \lambda_1 b_{k+1}} = \frac{\nu_k - \lambda_1}{\nu_{k+1} - \lambda_1} \nu_{k+1}. \end{aligned} \quad (12.16)$$

Теперь можно оценить

$$\frac{\nu_k - \lambda_1}{\nu_{k+1} - \lambda_1} \nu_{k+1} \geq \nu_{k+1} \geq \lambda_2,$$

и, таким образом, из (12.16) получим

$$\frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_{k+1} - \lambda_1} \geq \frac{\lambda_2}{\mu_{k+1}} - 1 \quad (12.17)$$

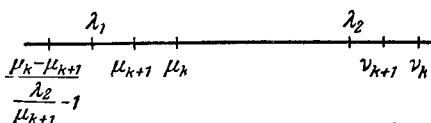
или в случае $\lambda_2 > \mu_{k+1}$ (на этом условии мы еще остановимся в дальнейшем, оно требует $\lambda_2 > \lambda_1$ и таким образом, чтобы λ_1 было невырожденным собственным значением) имеем

$$0 \leq \mu_{k+1} - \lambda_1 \leq \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\frac{\lambda_2}{\mu_{k+1}} - 1}. \quad (12.18)$$

Неравенство (12.17) остается в силе, если в нем λ_2 заменить его нижней границей l_2 . Это важно, потому что во многих случаях второе собственное значение неизвестно, но может быть задана нижняя граница для него. Для перехода к (12.18) нужно потребовать в таком случае, чтобы $l_2 > \mu_{k+1}$. Таким образом, получен следующий результат.

Теорема. Пусть для задачи на собственные значения (4.11) — (4.14) выполнены условия:

- а) самосопряженности,
- б) полной определенности (8.2), а также
- в) собственное значение λ не входит в краевые условия,
- г) наименьшее собственное значение λ_1 невырожденное.



Исходя из $2n$ -кратно непрерывно дифференцируемой функции $F_0(x)$, которая удовлетворяет такому количеству краевых условий, что справедливо (12.3), с помощью метода последовательных приближений (12.1) найдем функции F_1, F_2, \dots и далее постоянные Шварца (12.4) и отношения μ_k (12.8). Если при этом l_2 удовлетворяет условию

Рис. 12.1. Локализация собственных значений и отношений Шварца.

$$\mu_{k+1} < l_2 < \lambda_2,$$

то для первого собственного значения λ_1 справедлива оценка

$$\mu_{k+1} - \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\frac{l_2}{\mu_{k+1}} - 1} \leq \lambda_1 \leq \mu_{k+1}. \quad (12.19)$$

12.5. Практическое проведение метода. В методе последовательных приближений исходят из выбранной функции $F_0(x)$ и каждую последующую функцию $F_1(x), F_2(x), \dots$ получают, решая краевую задачу. Если рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет достаточно простое строение, то можно, как это показано в примере 12.2, вычислить некоторое число функций $F_k(x)$. Однако в случае более сложной задачи на собственные значения (при более сложном дифференциальном уравнении) повторное решение краевой задачи наталкивается часто на большие трудности. Поэтому важно,

что для многих задач с достаточной для прикладных целей точностью можно обойтись только функциями $F_0(x)$ и $F_1(x)$.

Вычислительный процесс состоит из следующих трех шагов.

1. Находим две функции $F_0(x)$ и $F_1(x)$ такие, что $M[F_1] = N[F_0]$. При этом $F_1(x)$ удовлетворяет всем крайевым условиям, а $F_0(x)$ — только такой их части, чтобы выполнялось (12.3).

Во многих случаях такие две функции F_0 и F_1 можно определить графическим интегрированием. Подробнее об этом см. п. 13.6. Для специальных задач на собственные значения, когда $N[F_0] = g_0 F_0$, можно исходить из одной функции F_1 , которая удовлетворяет всем крайевым условиям, а F_0 вычислять на основании равенства $g_0 F_0 = M[F_1]$. Обычно к F_1 можно прибавить удовлетворяющие крайевым условиям функции ψ_i , умноженные на константы c_i , выбрав последние так, чтобы функция F_0 удовлетворяла крайевым условиям. При этом часто получают существенно более благоприятные результаты, причем вообще результат тем лучше, чем ближе F_0 и F_1 к первой собственной функции.

2. Вычисляют постоянные Шварца (12.4) и отношения (12.8)

$$a_0 = \int_a^b F_0 N[F_0] dx, \quad a_1 = \int_a^b F_1 N[F_0] dx, \quad a_2 = \int_a^b F_1 N[F_1] dx, \quad (12.20)$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2}.$$

Тогда, как известно,

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_1.$$

3. Чтобы вычислить нижнюю границу для λ_1 , необходимо знать нижнюю границу l_2 для второго собственного значения λ_2 , хотя бы совсем грубо, но все же так, чтобы выполнялось неравенство $l_2 > \mu_2$. Часто нижнюю границу для собственных значений удается установить путем сравнения с задачей на собственные значения, коэффициенты которой постоянны. Далее, для практических целей часто бывает достаточно погрешность от μ_2 знать приближенно (знать, какой десятичный знак может быть еще использован). В этом случае за l_2 принимают приближенное значение для λ_2 , вычисленное методом Рунца, методом конечных разностей, либо каким-нибудь другим методом. Хотя этот прием не совсем точен и не всегда правилен (т. е. l_2 не будет нижней границей λ_2), но имеет известное оправдание вследствие того, что оценки (12.19) мало зависят от l_2 , если l_2 не лежит вблизи μ_{k+1} . Тогда в силу (12.19)

$$\mu_2 - \frac{\mu_1 - \mu_2}{\frac{l_2}{\mu_2} - 1} \leq \lambda_1 \leq \mu_2. \quad (12.21)$$

12.6. Примеры применения метода последовательных приближений.

1. Пример. Шарнирно опертый сжатый стержень. Пусть имеется сжатый стержень (рис. 12.2) длины $l = \pi$ и с переменной жесткостью

$$\alpha = \frac{c}{1 + \sin x},$$

который шарнирно оперт на обоих концах $x = 0$ и $x = \pi$.

Для нахождения критической нагрузки P нужно решить следующую задачу:

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda(1 + \sin x)y, \\ y(0) &= y(\pi) = 0, \end{aligned}$$

где $\lambda = \frac{P}{c}$.

Мы исходим из удовлетворяющей краевым условиям функции

$$F_1 = \sin x$$

и определяем F_0 согласно (12.1) из уравнения

$$-F_1'' = (1 + \sin x)F_0,$$

тогда

$$F_0 = \frac{\sin x}{1 + \sin x}.$$

Найдем постоянные Шварца

$$a_0 = \int_0^\pi (1 + \sin x) F_0^2 dx = \int_0^\pi \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x} dx = 4 - \pi,$$

$$a_1 = \int_0^\pi (1 + \sin x) F_0 F_1 dx = \int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2},$$

$$a_2 = \int_0^\pi (1 + \sin x) F_1^2 dx = \int_0^\pi (1 + \sin x) \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} + \frac{4}{3}$$

и отношения

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{8}{\pi} - 2 = 0,54648, \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{1 + \frac{8}{3\pi}} = 0,54088.$$

При этом в силу (12.11) $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \lambda_1$. Для установления нижней границы λ_1 нужно оценить λ_2 снизу. Это мы сделаем путем сравнения с задачей, коэффициенты которой постоянны.

Если заменить $1 + \sin x$ числом 2, то, согласно п. 9.4, все собственные значения уменьшатся (если заменить $1 + \sin x$ единицей, то все собственные значения увеличатся). Вспомогательная задача

$$-\tilde{y}'' = 2\tilde{\lambda}\tilde{y}$$

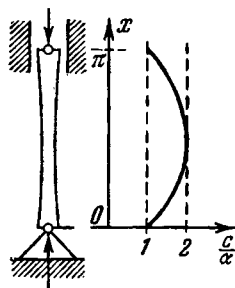


Рис. 12.2. Продольный изгиб стержня с переменной жесткостью.

имеет собственные функции $\tilde{y}_n = \sin nx$ с собственными значениями

$$\tilde{\lambda}_n = \frac{n^2}{2}.$$

Так как $\lambda_2 \geq \tilde{\lambda}_2 \geq 2$, то $l_2 = 2$ будет нижней границей для λ_2 .

Из (12.19) получаем оценки

$$0,53880 \leq \lambda_1 \leq 0,54088.$$

Среднее значение $\lambda_1 \approx 0,5398$ и, следовательно, ошибка не больше 0,2%.

2. Пример. Защемленный на одном конце, шарнирно опертый на другом сжатый стержень.

Задача изгиба для стержня, защемленного с одной стороны и шарнирно опертого с другой (рис. 12.3), длины $l=1$ и с переменной жесткостью $\alpha = c(2-x)$ приводит, согласно (1.3), к дифференциальному уравнению

$$(\alpha y'')'' = -P y'',$$

или, если положить $\lambda = \frac{P}{c}$, к уравнению

$$\{(2-x)y''\}'' = -\lambda y''$$

с краевыми условиями

$$y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0.$$

Для нахождения F_0 и F_1 , удовлетворяющих (12.1), положим

$$F_1 = a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5.$$

Рис. 12.3. Продольный изгиб стержня, защемленного на одном конце и шарнирно закрепленного — на другом.

Здесь также целесообразно исходить из F_1 . Так как F_1 — полином пятой степени, то $M[F_1] = N[F_0] = -F_0''$ — полином второй степени и F_0 — полином четвертой степени. Постоянные интегрирования и величины a_i определим так,

чтобы F_0 удовлетворяло трем главным краевым условиям $F_0(0) = F_0'(0) = F_0(1) = 0$, а F_1 — всем четырем краевым условиям.

Получим

$$F_1 = 24x^2 - 4x^3 - 47x^4 + 27x^5,$$

$$F_1'' = 12(4 - 2x - 47x^2 + 45x^3),$$

$$F_0 = 12(92x^2 - 137x^3 + 45x^4).$$

Теперь согласно (12.4) определим постоянные Шварца

$$a_0 = - \int_0^1 F_0 F_0'' dx = \frac{96}{7} 4978,1 \approx 288 \cdot 237,052,$$

$$a_1 = - \int_0^1 F_0 F_1'' dx = - \int_0^1 F_1 F_0'' dx = \frac{16\,026}{7} \approx 144 \cdot 15,8988,$$

Контроль!

$$a_2 = - \int_0^1 F_1 F_1'' dx = \frac{12}{7} 45,2 = 12 \cdot 6,45714$$

и отношения

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 29,8201, \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 29,54646.$$

Грубую нижнюю границу для λ_2 найдем, решив вспомогательную задачу с постоянными коэффициентами. Для этого в исходном уравнении заменим функцию $(2-x)$ постоянной величиной, и притом наименьшим ее значением в интервале $0 \leq x \leq 1$, равным 1,

$$f^{IV} = -\tilde{\lambda} f''.$$

Собственное значение этого уравнения при заданных краевых условиях (см. таблицу VI) получим из трансцендентного уравнения

$$\operatorname{tg} k = k$$

при $\tilde{\lambda} = k^2$.

Первые корни этого уравнения будут

$$\tilde{\lambda}_1 = 20,19, \quad \tilde{\lambda}_2 = 59,68.$$

Таким образом, получим грубую границу l_2 для λ_2

$$\lambda_2 \geq 59,68 = l_2$$

и из (12.21) получим оценки для λ_1

$$29,275 \leq \lambda_1 \leq 29,5465.$$

Среднее значение $\lambda \approx 29,41$ имеет ошибку не более 0,5%.

§ 13. Графическое интегрирование

13.1. Графическое однократное интегрирование. Графическое интегрирование функции $y(x)$, заданной в виде кривой, читателям должно быть хорошо известно¹⁾. Мы кратко изложим здесь основные моменты, которые понадобятся в дальнейшем. Остановимся на особенно удобном «методе со средней абсциссой».

Функция $y(x)$ изображена на рис. 13.1. Интеграл от этой функции запишем в виде

$$z(x) = \int_{x_0}^x y(\xi) d\xi. \quad (13.1)$$

Рассматриваемый отрезок оси x разделим на некоторое число частичных интервалов точками x_1, x_2, \dots . Функцию $y(x)$ в каждом частичном интервале, например $[x_0, x_1]$, заменим кусочно-постоянной функцией $Y(x)$ равной $y(x_0)$ слева от ξ_0 и $y(x_1)$ справа от ξ_0 . Называемая «средней абсциссой», ξ_0 выбирается так, чтобы части поверхности, заштрихованные на рис. 13.1, имели равные площади. Обычно ξ_0

¹⁾ См., например, Fr. A. Willers, Methoden der praktischen Analysis, Berlin—Leipzig 1928 [см. также Д. Н. Головин, Графическая математика, ОНТИ, 1934].

выбирается «на глаз». Тогда будет выполнено

$$\int_{x_0}^{x_1} y(\xi) d\xi = \int_{x_0}^{x_1} Y(\xi) d\xi$$

и в качестве

$$Z(x) = \int_{x_0}^x Y(\xi) d\xi \quad (13.2)$$

получим ломаную линию, которая не только совпадает с $z(x)$ в точках x_0, x_1, \dots , но и имеет в этих точках одинаковые с $z(x)$ касательные.

Для проведения интегрирования (см. рис. 13.1) выбирается «полюс» P на расстоянии H см (H называется полюсным расстоянием)

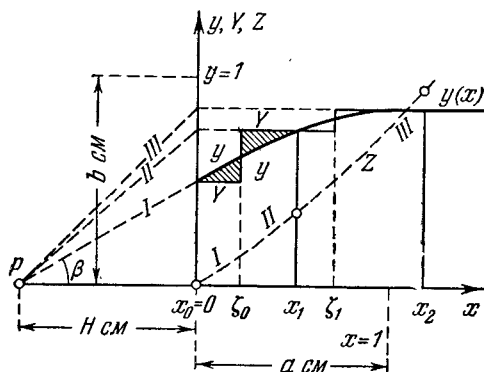


Рис. 13.1. Графическое однократное интегрирование по методу средней абсциссы.

от начала координат в сторону отрицательных y . Спроектируем на ось Oy ординаты функции Y , а именно, $y(x_0), y(x_1), y(x_2), \dots$, и соединим полученные точки с точкой P прямыми, наклон которых, следовательно, будет пропорционален значениям $Y(x_i)$. Таким образом, эти прямые должны быть параллельны $Z(x)$ в частичных интервалах. Далее, путем нанесения параллельных линий (обозначенных на рис. 13.1 теми же римскими цифрами) получают ломаную линию $Z(x)$, которая в точках, обозначенных кружками, дает правильные значения функции $z(x)$ и ее производной. Затем можно заменить полученную ломаную гладкой кривой. В этом, по существу, и заключается процесс численного интегрирования. Для практического проведения этого процесса еще нужно выбрать масштаб.

Масштаб может быть введен как отношение¹⁾

$$\text{Масштаб } m = \frac{\text{действительная величина}}{\text{величина изображения в см (на чертеже)}}. \quad (13.3)$$

Тогда для взятой на чертеже величины изображения в сантиметрах действительное значение находится умножением на масштаб:

$$\text{Действительная величина} = \text{величине изображения в см} \times \text{масштаб } m. \quad (13.4)$$

Прежде всего, мы используем масштаб по осям x и y при построении кривой $y(x)$, выбирая единичную длину по оси x равной a см, а по оси y — равной b см. Тогда

$$m_x = \frac{1}{a_{\text{см}}}, \quad m_y = \frac{1}{b_{\text{см}}}. \quad (13.5)$$

Величину изображения будем отличать от истинной чертой сверху, так например, $Y(x_0)$ будет представляться длиной $\bar{Y}(x_0)$ см, таким образом,

$$Y = m_y \bar{Y}, \quad \xi_0 = m_x \bar{\xi}_0, \quad Z(\xi_0) = m_z \bar{Z}(\bar{\xi}_0).$$

Появившаяся здесь величина m_z есть искомый подлежащий вычислению масштаб, с помощью которого мы по найденной Z -ординате вычислим истинное значение z .

Из рис. 13.1 найдем

$$\text{tg } \beta = \frac{\bar{Y}(x_0)}{H} = \frac{Y(x_0)}{m_y H}. \quad (13.6)$$

С другой стороны (см. ломаную Z),

$$\text{tg } \beta = \frac{\bar{Z}(\bar{\xi}_0)}{\bar{\xi}_0} = \frac{Z(\xi_0) m_x}{m_z \bar{\xi}_0}. \quad (13.7)$$

Сравнивая оба выражения для $\text{tg } \beta$ и учитывая равенство $Z(\xi_0) = \bar{\xi}_0 Y(x_0)$, получим

$$m_z = H m_x m_y. \quad (13.8)$$

Пример. На рис. 13.2 графически изображена функция $y = \cos x$. Выберем масштабы

$$m_x = \frac{1}{4 \text{ см}} \quad \text{и} \quad m_y = \frac{1}{5 \text{ см}}.$$

В качестве точек деления возьмем точки с абсциссами $x_1 = 0,5$; $x_2 = 0,8$; $x_3 = 1,1$; $x_4 = 1,4$ и заменим кривую $y = \cos x$ кусочно-постоянной функцией Y . Положим полюсное расстояние $H = 3$ см и проведем графическое

¹⁾ См., например, Th. Pöschl, Lehrbuch der Technischen Mechanik, т. II, Berlin, 1936, 82 и К. Klotter, Einführung in die technische Schwingungslehre, Berlin, 1938, 9.

интегрирование описанным выше методом до точки $x = 1,1$. Масштаб m_z вычислим по формуле (13.8)

$$m_z = H m_x m_y = \frac{3}{20 \text{ см}}.$$

Если, например, нужно узнать значение z в точке $x = 0,8$, то находим

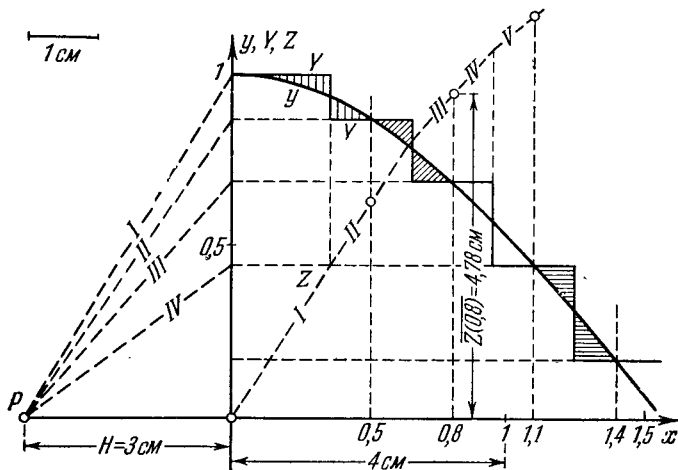


Рис. 13.2. Пример графического однократного интегрирования по методу средней абсциссы.

сначала из графика значение $\overline{Z(0,8)} = 4,78 \text{ см}$ и, далее,

$$Z(0,8) = \overline{Z(0,8)} m_z = 0,717.$$

13.2. Переменное полюсное расстояние. В предыдущем разделе графически определялась функция $z(x)$, удовлетворяющая дифференциальному уравнению

$$z'(x) = y(x).$$

Можно также путем введения переменного полюсного расстояния графически интегрировать уравнение

$$p(x) z'(x) = y(x) \quad (13.9)$$

и, таким образом, построить интеграл

$$z(x) = \int_{x_0}^x \frac{y(\xi)}{p(\xi)} d\xi. \quad (13.10)$$

Переменное полюсное расстояние реализует, следовательно, умножение функции $y(x)$, стоящей под знаком интеграла, на заданную функцию $\frac{1}{p(x)}$.

Выберем масштаб m_p для функции $p(x)$ и отложим на отрицательной оси x (рис. 13.3) вместо фиксированного до сих пор полюсного расстояния H отрезки

$$\overline{p(x_i)} = \frac{p(x_i)}{m_p}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Последующий процесс точно такой же, как и в п. 13.1, только теперь используется не фиксированный полюс P , а полюсы P_0, P_1, \dots , соответствующие x_i . Вместо равенства (13.6) получим теперь

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\overline{Y(x_0)}}{p(x_0)} = \frac{Y(x_0) m_p}{p(x_0) m_y},$$

и равенство (13.8) для масштаба m_z перейдет в

$$m_z = \frac{m_x m_y}{m_p}. \quad (13.11)$$

Подобно предыдущему полученную ломаную заменяют гладкой кривой, проведенной через точки, обозначенные кружками. Правда, теперь

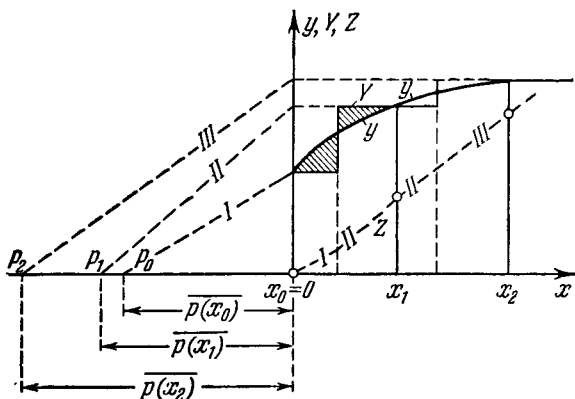


Рис. 13.3. Графическое однократное интегрирование с переменным полюсным расстоянием.

из равенства заштрихованных поверхностей не следует, что указанные точки принадлежат $z(x)$; можно лишь утверждать, что с уменьшением частных интервалов (x_i, x_{i+1}) функции $z(x)$ и $Z(x)$ могут быть сделаны как угодно близкими. При практическом проведении интегрирования точки деления не следует выбирать слишком часто, чтобы не допустить накопления неизбежных неточностей чертежа. Если требуется большая точность, то лучше построить по точкам функцию $\frac{y(x)}{p(x)}$ и интегрировать по методу, указанному в п. 13.1.

Пример. На рис. 13.4 дан пример практического применения метода для $y = \cos x$ и $p = 1 + x^2$. Таким образом, рассматривается

$$z(x) = \int_0^x \frac{\cos \xi}{1 + \xi^2} d\xi.$$

Выберем масштабы: $m_x = \frac{1}{4 \text{ см}}$; $m_y = \frac{1}{5 \text{ см}}$; $m_p = \frac{1}{2 \text{ см}}$. По формуле (13.11) вычислим $m_z = \frac{1}{10 \text{ см}}$. В точке $x = 1$, например, из

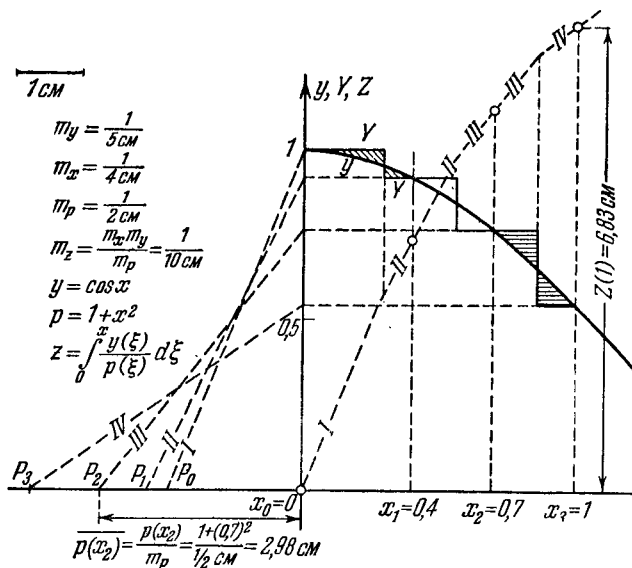


Рис. 13.4. Пример графического однократного интегрирования с переменным полюсным расстоянием.

рисунка будем иметь $\overline{z(1)} = 6.83 \text{ см}$ и соответствующая этому значению x истинная величина z будет

$$z(1) = \overline{z(1)} m_z = 0.683.$$

13.3. Графическое двукратное интегрирование. Для приложений очень важно, что двукратное интегрирование можно выполнять графически одним шагом. Пусть требуется вычислить функцию $y(x)$, удовлетворяющую дифференциальному уравнению

$$(py')' = g(x) \quad (13.12)$$

(о краевых условиях будет говориться лишь в п. 13.5). При этом $p(x)$ и $g(x)$ — заданные в виде кривых функции. Графическое инте-

гирование основано на том, что первый интеграл этого уравнения в виде формулы (C — постоянная интегрирования)

$$y'(x) = \frac{1}{p(x)} \left(\int_0^x g(\xi) d\xi + C \right) \quad (13.13)$$

изображается в виде кривой.

График функции $g(x)$ располагают над осью x (рис. 13.5). Рассматриваемый отрезок оси x делят точками x_i на некоторое число частичных интервалов и определяют площади F_1, F_2, \dots относящиеся к этим частичным интервалам (стрелки для F_1, F_2, \dots в левой

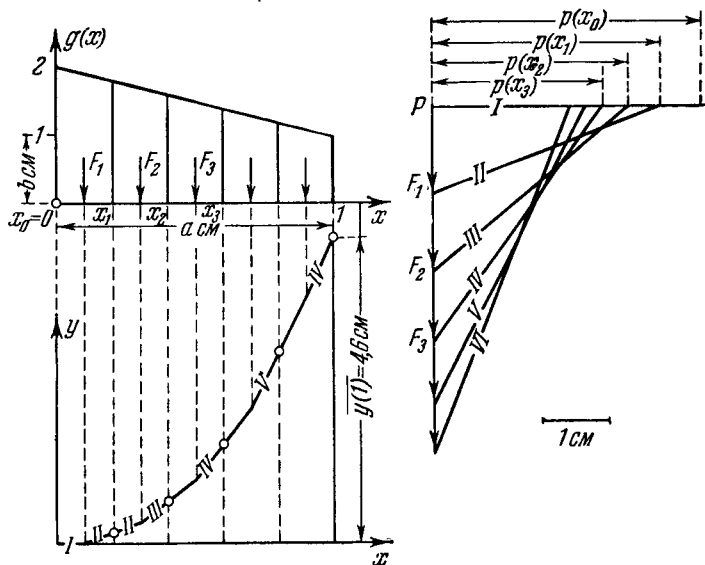


Рис. 13.5. Графическое определение $y(x)$ из уравнения $(py')' = g(x)$.

части рисунка проходят через центр тяжести соответствующих площадей). Эти площади вместе взятые дадут интеграл

$$\int_0^x g(\xi) d\xi.$$

К нему можно теперь еще добавить постоянную C . Далее следует выбрать какую-нибудь точку P , из которой откладываются в горизонтальном направлении значения заданной функции $p(x)$ в точках деления рассматриваемого интервала, т. е. значения $p_0 = p(0)$, $p_1 = p(x_1)$, ... Теперь можно построить направления y' , которые

находятся по формуле (13.13), и получить путем их переноса ломаную линию для $y(x)$. Значения этой ломаной в точках x_i (на рис. 13.5 эти значения обозначены кружочками) используют для построения гладкой кривой.

Теперь нужно еще вычислить масштаб, в котором получены значения кривой $y(x)$. При построении кривой $g(x)$ сначала выбирают масштаб для x и g (рис. 13.5):

$$m_x = \frac{1}{a \text{ см}}, \quad m_g = \frac{1}{b \text{ см}}.$$

Далее измеряются и наносятся в виде отрезков площади графика $g(x)$, для этого выбирается поверхностный масштабный множитель

$$m_F = \frac{K \text{ см}^2}{1 \text{ см}}.$$

Если, например, поверхность в 4 см^2 представляется 1 см , то

$$m_F = \frac{4 \text{ см}^2}{1 \text{ см}}.$$

Далее выбирается масштаб для построения значений функции $p(x)$

$$m_p = \frac{1}{c \text{ см}}.$$

С помощью этих масштабов нужно теперь вычислить аналогичный масштаб m_y .

Прежде всего определяют масштаб m_f , в котором наносится значение интеграла. При этом каждый сантиметр в соответствии с выше принятым масштабом означает $m_F \text{ см}^2$, и так как см^2 площади кривой $g(x)$ в действительности равен $m_x \cdot m_g$, то каждый сантиметр значения интеграла равен $m_F m_x m_g$; таким образом,

$$m_f = m_F m_x m_g. \quad (13.14)$$

В этом масштабе следует наносить также постоянную интегрирования C , если она задана. Наклон кривой, как видно, будет искажен в отношении масштабов, т. е.

$$m_{\text{tg } \beta} = \frac{m_f}{m_p},$$

и отсюда следует, наконец, масштаб для y :

$$m_y = m_x m_{\text{tg } \beta}$$

или

$$m_y = \frac{m_x^2 m_g \cdot m_F}{m_p}. \quad (13.15)$$

Пример. Рис. 13.5 представляет одновременно пример практического проведения интегрирования для функций $p = \frac{1}{1+x}$, $g = 2 - x$. При выбранных масштабах $m_x = m_p = 1/4$ см, $m_g = 1/1$ см, $m_F = 1,2$ см²/1 см вычисляют, согласно (13.15), $m_y = \frac{0,3}{1 \text{ см}}$. Так, в точке $x = 1$ из рисунка получаем

$$\overline{y(1)} = 4,6 \text{ см};$$

отсюда $y(1) = m_y \overline{y(1)} = 1,38$.

В то же время точное решение

$$y = x^2 + \frac{1}{2} x^3 - \frac{1}{8} x^4,$$

удовлетворяющее крайним условиям $y(0) = y'(0) = 0$, принимает в точке $x = 1$ значение $y(1) = 1,375$.

13.4. Особый случай обыкновенного веревочного многоугольника. В качестве важного особого случая следует рассмотреть случай, когда $p = 1$ (рис. 13.6). При этом, следовательно, интегрируют дифференциальное уравнение

$$y'' = g(x). \quad (13.16)$$

Вся p -шкала свертывается в одну точку и получается конструкция обыкновенного веревочного многоугольника¹⁾. При этом

$$m_p = \frac{1}{c \text{ см}} = \frac{1}{\text{расстояние до полюса}} = \frac{1}{H}$$

и из (13.5) находим формулу для масштабного множителя

$$m_y = H m_g m_F m_x^2. \quad (13.17)$$

Пример будет рассмотрен в следующем пункте.

13.5. Учет крайних условий. Для уравнения $y'' = g(x)$ соответствующее однородное уравнение $y'' = 0$ имеет решение $y = c_1 + c_2 x$. Следовательно, к решению неоднородного уравнения можно добавить любую линейную функцию, и ординату y можно отсчитывать не от оси x , а от произвольной прямой, всегда получая решение дифференциального уравнения (13.16). Эта прямая («замыкающая линия») выбирается так, что y или y' удовлетворяют заданным крайним условиям.

Пример. На рис. 13.6 показано построение веревочного многоугольника для уравнения $y'' = g(x) = \sin x$ в интервале $0 \leq x \leq 2$. Полюс может быть выбран в любой точке. Возьмем следующие масштабы:

$$m_g = 1/2 \text{ см}, \quad m_x = 1/2,5 \text{ см}, \quad H = 2,5 \text{ см}, \quad m_F = 1,25 \text{ см}^2/1 \text{ см}.$$

Тогда по формуле (13.17) найдем

$$m_y = \frac{1}{4 \text{ см}}.$$

¹⁾ См., например, W. S c h l i n k, Technische Statik, Berlin, изд. 3, 1946, 114.

Через точки ломаной, обведенные кружками, проведем гладкую кривую. Рассмотрим два частных случая крайних условий.

А. $y(0) = y(2) = 0$. Точки пересечения двух крайних сторон веревочного многоугольника I и V с ординатами, соответствующими $x = 0$ и $x = 2$,

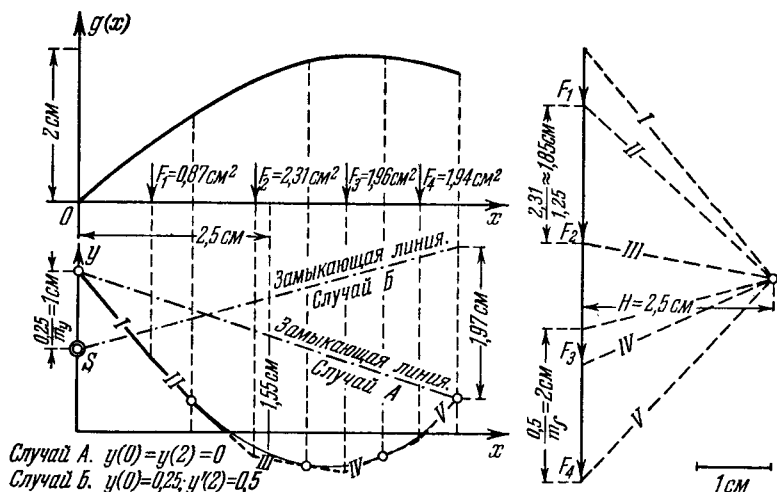


Рис. 13.6. Построение веревочного многоугольника для двукратного интегрирования.

соединим «замыкающей линией». Ординаты $y(x)$ отсчитывают от этой линии, и, например, для $x = 1$ получим

$$\overline{y(1)} = -1,55 \text{ см}$$

и отсюда $y(1) = \overline{y(1)} m_y = -0,387$.

Б. $y(0) = 0,25$; $y'(2) = 0,5$. Теперь, откладывая на ординате при $x = 0$ отрезок $\frac{0,25}{m_y} = 1$, соответствующий начальному значению $y(0) = 0,25$, мы будем иметь точку S «замыкающей линии» (рис. 13.6). Далее, из начального условия $y'(2) = 0,5$ мы имеем ее наклон. Вычислим по формуле (13.14) масштаб, в котором нанесены площади F^1) (на полюсном многоугольнике, правая часть рис.)

$$m_f = m_F m_x m_g = \frac{1}{4 \text{ см}}.$$

Путем нанесения отрезка $\frac{0,5}{m_f} = 2$ на полюсном многоугольнике найдем на-

правление замыкающей линии и построим теперь эту линию. Возьмем, например, на графике $\overline{y(2)} = -1,97 \text{ см}$ и отсюда $y(2) = \overline{y(2)} m_y = -0,492$.

1) Это будет одновременно масштаб, в котором на этой прямой откладываются значения y' . Масштаб, обозначенный в п. 13.3 через $m_{tg \beta}$, имеет другой смысл и показывает, как вычислить значение y' , исходя из значения тангенса угла наклона луча.

Не так нагляден учет краевых условий при графическом интегрировании уравнения $(py')' = g(x)$, обсуждавшемся в п. 13.3. Здесь линейная функция $c_1 + c_2x$ при $p \neq \text{const}$ не является решением однородного уравнения $(py')' = 0$, и поэтому нет такой удобной возможности учесть краевые условия путем подходящего расположения замыкающей линии. Имеются две возможности:

1. Расположить точку P на произвольной высоте.
2. Начинать с $y(x_0)$ на произвольной высоте.

Если имеется одно краевое условие для y' и одно для y , то процесс прост. Из краевого условия для y' устанавливают первый или последний полюсный луч и, перенося его в правую часть рисунка, определяют высоту точки P . Если же даны другие краевые условия, например $y(0) = y(a) = 0$, то нужно построить два веревочных многоугольника для двух различных точек P и взять линейную комбинацию полученных таким образом функций

$$y = \frac{c_1 y_1 + c_2 y_2}{c_1 + c_2}.$$

Условие $y(0) = 0$ будет выполняться тогда, например, при $y_1(0) = y_2(0) = 0$, а отношение $c_1 : c_2$ выбирается так, чтобы было $y(a) = 0$.

13.6. Графическое проведение метода последовательных приближений. Для метода последовательных приближений, описанного в § 12, используют, согласно п. 12.5, две функции $F_0(x)$ и $F_1(x)$ такие, что $M[F_1] = N[F_0]$. При этом F_1 удовлетворяет всем краевым условиям, а F_0 — некоторой их части.

Во многих прикладных задачах две такие функции можно определить графическим интегрированием. Мы рассмотрим, прежде всего, простейшие случаи частной задачи на собственные значения $M[y] = \lambda g_0 y$. При этом функцию F_0 выбирают так, чтобы она по возможности передавала ожидаемый ход первой собственной функции y_1 , а функцию F_1 определяют путем графического интегрирования с помощью веревочного многоугольника. Для задач с $M[y] = (f_2 y'')''$ или $M[y] = (f_1 y')'$ это удастся сделать сразу. В качестве примера рассмотрим колебания шарнирно опертого с обеих сторон стержня с заданной переменной жесткостью на изгиб $\alpha(x)$ и с заданным распределением массы $g_0(x)$ (рис. 13.7). Тогда

$$(\alpha F_1'')'' = g_0 F_0.$$

Теперь выбирается F_0 и строится кривая $g_0 F_0$. Путем двукратного интегрирования (первый веревочный многоугольник) получают отсюда сначала F_1'' и, интегрируя еще двукратно, получают F_1 (второй веревочный многоугольник). Следует заметить, что графически всегда только интегрируют, но не дифференцируют. Затем вычисляют

постоянные Шварца и отношения по формулам (12.4) и (12.8):

$$a_0 = \int_a^b F_0 N[F_0] dx = \int_a^b g_0 F_0^2 dx,$$

$$a_1 = \int_a^b F_0 N[F_1] dx = \int_a^b g_0 F_0 F_1 dx, \quad a_2 = \int_a^b F_1 N[F_1] dx = \int_a^b g_0 F_1^2 dx.$$

Необходимое при этом интегрирование производят графически с помощью планиметра или численно по формулам Симпсона. Для определения верхней и нижней границ для наименьшего собственного значения λ_1 используются формулы (12.21), как это описано в п. 12.5'.

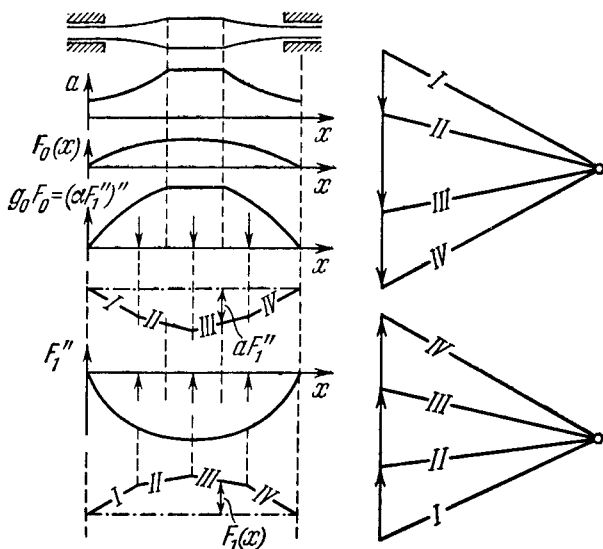


Рис. 13.7. Графическое интегрирование уравнения $(\alpha y'')'' = \lambda g_0 y$.

Обратимся снова к более общим случаям. Нахождение двух функций F_0 и F_1 , удовлетворяющих поставленным в § 12 условиям, удастся осуществить в общем случае для задач в форме

$$M[y] = \lambda [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}, \quad (13.18)$$

$$[f_m(x) y^{(m)}]^{(m)} = \lambda N[y]. \quad (13.19)$$

Уравнение (13.18) относится к одночленному классу (см. п. 4.7). Мы полагаем его в основу при последующем изложении, в случае уравнения (13.19) можно действовать аналогично.

При (13.18), таким образом, должно выполняться

$$M[F_1] = [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}.$$

В выражении $M[F_1]$ наивысшую производную будет иметь член

$$[f_m(x) F_1^{(m)}]^{(m)}.$$

Далее обычно поступают так:

а) Выбирают наивысшую производную F_1 , т. е. $F_1^{(2m)}$, и все более низкие производные определяют путем интегрирования.

б) Затем образуют $M[F_1]$ и получают уравнение

$$M[F_1] = [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}.$$

в) Интегрируют n раз функцию $M[F_1]$ и находят, таким образом, $g_n(x) F_0^{(n)}$.

г) Путем деления на $g_n(x)$ получают $F_0^{(n)}$ и, наконец, посредством n -кратного интегрирования определяют F_0 .

Теперь нужно учесть краевые условия; F должно удовлетворять всем краевым условиям, F_0 — в общем случае только некоторой их части. Во многих случаях (см. таблицу VII) их можно учесть сразу при интегрировании (например, при помощи подходящей замыкающей линии), иногда, однако, наталкиваются при этом на трудности. Все же эти трудности можно преодолеть, применяя наложение, которое в силу линейности задачи всегда возможно. Проводят весь процесс для нескольких функций $F_1^{(1)}$, $F_1^{(2)}$, ..., $F_1^{(r)}$ и определяют в выражении ¹⁾

$$F_1 = \sum_{v=1}^r c_v F_1^{(v)}$$

коэффициенты c_v так, чтобы F_1 и F_0 удовлетворяли всем краевым условиям, которые еще должны быть выполнены.

В таблице VII для некоторых часто встречающихся задач указывается, как можно определить две удовлетворяющие заданным требованиям функции.

13.7. Графическое определение μ_1 . В пп. 12.5 и 13.6 описывался графический метод, в котором оба отношения Шварца μ_1 и μ_2 являются верхними границами для первого собственного значения λ_1 , причем с их помощью по формуле (12.19) можно найти также и нижнюю границу для λ_1 . Вместо этого можно во многих случаях с меньшей затратой труда (в основном посредством графически проведенного интегрирования) находить только μ_1 , которое во всяком случае

¹⁾ Верхние индексы в двойных скобках означают не производные, а служат для обозначения функций.

даст нижнюю границу для λ_1 . Число μ_1 обеспечивает меньшую точность, чем μ_2 , и, кроме того, ничего нельзя сказать о погрешности $\mu_1 - \lambda_1$, но для многих технических целей реализуемая точность достаточна, в особенности если функция $F_0(x)$, которая является приближением для первой собственной функции $y_1(x)$, выбрана удачно.

В качестве примера рассмотрим поперечные колебания стержня с переменной жесткостью на изгиб $\alpha(x)$, длины l , с плотностью ρ и площадью поперечного сечения $F(x)$. Пусть стержень закреплен на одном конце и свободен на другом. Тогда (см. п. 2.3) будем иметь задачу на собственные значения

$$(\alpha y'')'' = \lambda \rho F y; \quad y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0. \quad (13.20)$$

По методу последовательных приближений будем исходить из функции $F_0(x)$, которая передает ожидаемый ход первой собственной функции и, в частности, удовлетворяет главным краевым условиям (в обозначениях п. 4.2)

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0.$$

С помощью F_0 методом последовательных приближений путем графического интегрирования определяют F_1 , которая удовлетворяет уравнению и условиям:

$$(\alpha F_1'')'' = \rho F F_0, \quad F_1(0) = F_1'(0) = F_1''(l) = F_1'''(l) = 0.$$

Именно, сначала из

$$G'' = \rho F F_0, \quad G(l) = G'(l) = 0 \quad (13.21)$$

с помощью первого веревочного многоугольника определяют $G(x) = \alpha F_1''$, а затем из

$$F_1'' = \frac{1}{\alpha} G(x), \quad F_1(0) = F_1'(0) = 0 \quad (13.22)$$

с помощью второго веревочного многоугольника находят F_1 .

Далее, по формулам (12.4), (12.8) вычисляют отношения Шварца μ_1 и μ_2 :

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2},$$

где

$$a_0 = \int_0^l \rho F F_0^2 dx, \quad a_1 = \int_0^l \rho F F_0 F_1 dx, \quad a_2 = \int_0^l \rho F F_1^2 dx. \quad (13.23)$$

Теперь a_1 можно записать также в форме

$$a_1 = \int_0^l G'' F_1 dx = \int_0^l G F_1'' dx = \int_0^l \frac{1}{\alpha} G^2 dx, \quad (13.24)$$

и видно, что a_0 , a_1 , а вместе с этим и μ_1 можно вычислить уже с помощью F_0 и G , не решая задачи (13.2).

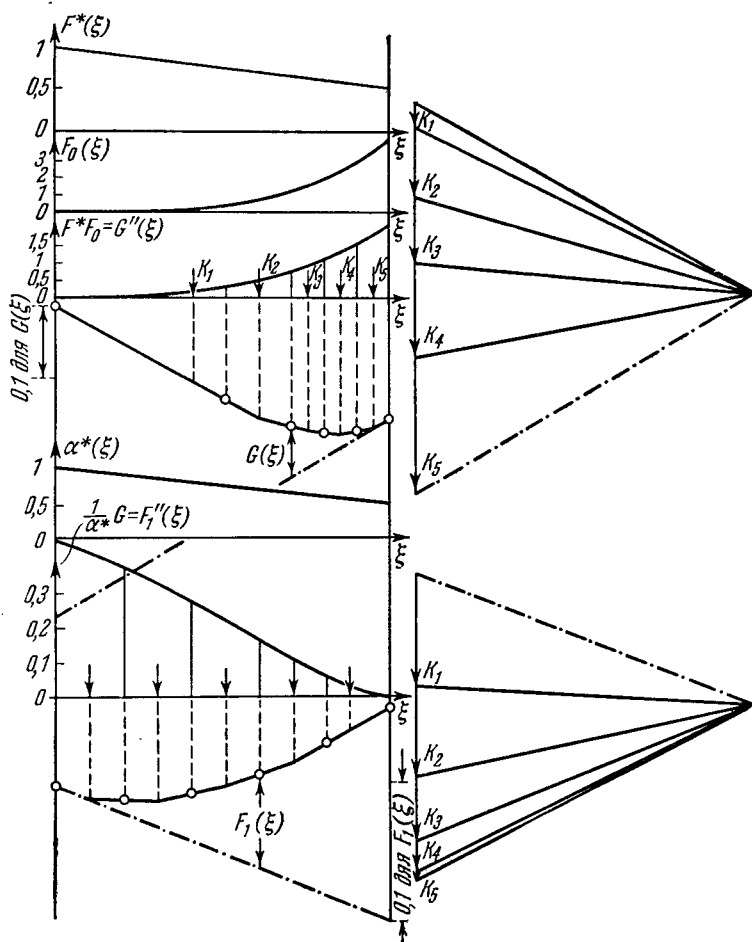


Рис. 13.8. Графическое определение наименьшего собственного значения при поперечных колебаниях стержня с переменной жесткостью.

Пример. На рис. 13.8 показано решение задачи (13.20) при помощи рассмотренного метода. Прежде всего вводятся безразмерные величины ξ , α^* , F^* , λ^* посредством соотношений

$$x = l\xi, \quad \alpha = \alpha(0) \alpha^*(\xi), \quad F = F(0) F^*(\xi),$$

$$\lambda^* = \frac{\lambda \rho F(0) l^4}{\alpha(0)}.$$

Уравнение (13.20) при этих обозначениях будет иметь вид

$$(\alpha^* y'')'' = \lambda^* F_y^* \quad (13.25)$$

Штрихи обозначают теперь производные по ξ . На рис. 13.8 даны графики α^* и F^* как функций ξ .

Исходя из функции $F_0(\xi)$, которая должна быть близкой к первой собственной функции, найдем функцию G путем графического интегрирования согласно (13.21):

$$G'' = F^* F_0, \quad G(1) = G'(1) = 0.$$

Точки ломаной линии, обозначенные кружками, являются истинными точками кривой $G(\xi)$, ломаную линию, впрочем, нужно заменить гладкой кривой, которая на рис. 13.8 не показана во избежание нагромождения.

Масштабы можно вычислить непосредственно из (13.17). На рис. 13.8 нанесена вместо масштаба вычисленная сообразно с ним шкала. С помощью F_0 и G можно теперь по формулам (13.23) и (13.24) определить постоянные Шварца a_0 и a_1 . Измеряя ординаты и приближенно вычисляя по формуле Симпсона интегралы, получим ¹⁾

$$a_0 = 1,337, \quad a_1 = 0,0620, \quad \mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 21,6.$$

Более точное значение можно получить после графического интегрирования уравнения (13.22)

$$F_1'' = \frac{1}{\alpha^*} G, \quad F_1(0) = F_1'(0) = 0$$

и определения F_1 .

Тогда по формуле (13.23) получим $a_2 = 0,00322$ и верхнюю границу для первого собственного значения $\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 19,25$.

§ 14. Дополнения

14.1. Метод последовательных приближений для дифференциальных уравнений с частными производными. Как уже указывалось в п. 12.1, метод последовательных приближений можно применять принципиально для любой задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными

$$M[z] = \lambda N[z]. \quad (14.1)$$

Функции F_0, F_1, F_2, \dots многих независимых переменных x, y, \dots можно вычислить по правилу (12.1) и с их помощью по формуле (12.2) находить приближенные значения Λ для собственного значения λ .

Но для того, чтобы сделать определенные заключения о Λ , нужны дальнейшие предположения, а именно, примем те же самые предположения, что и в п. 11.2. Пусть дифференциальное уравнение имеет вид

$$M[z] = \lambda g_0 z \quad (14.2)$$

¹⁾ Приведенный здесь пример довольно груб и служит только для пояснения метода. Путем построения большого чертежа и более тщательного выбора исходной функции $F_0(x)$ можно значительно улучшить результат.

для функции z двух или большего числа независимых переменных x, y, \dots ; ради простоты будем писать только x, y . Предположим, что функция $g_0(x, y)$ непрерывна и положительна, причем краевые условия

$$U_\mu(z) = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k), \quad (14.3)$$

как и в (6.2), заданы на контуре Γ области \mathfrak{B} . Пусть, далее, для задачи на собственные значения (ср. (6.3) и (6.4)) выполнены условия самосопряженности и полной определенности и имеется функция Грина $G(x, y; \xi, \eta)$, причем ядро

$$K(x, y; \xi, \eta) = G(x, y; \xi, \eta) \sqrt{g_0(x, y) g_0(\xi, \eta)} \quad (14.4)$$

симметрично, квадратично интегрируемо и непрерывно в среднем, т. е. применима теория интегральных уравнений из п. 7.2. Исходя из функции сравнения $F_0(x, y)$ (т. е. такой не равной тождественно нулю функции, которая удовлетворяет краевым условиям $U_\mu[F_0] = 0$ и с которой можно образовать $M[F_0]$), определяют последующие функции сравнения F_n :

$$M[F_n] = g_0 F_{n-1}, \quad U_\mu[F_n] = 0 \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14.5)$$

Затем находят постоянные Шварца

$$a_n = \iint g_0 F_i F_{n-i} dx dy \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (14.6)$$

и отношения

$$\mu_n = \frac{a_{n-1}}{a_n} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (14.7)$$

Тогда неравенство

$$\mu_1 \geq \mu_2 \geq \mu_3 \geq \dots \geq \lambda_1 \quad (14.8)$$

и основную формулу (12.19) при $\lambda_2 \geq l_2 > \mu_{n+1}$

$$\mu_{n+1} - \frac{\mu_n - \mu_{n+1}}{\frac{l_2}{\mu_{n+1}} - 1} \leq \lambda_1 \leq \mu_{n+1} \quad (14.9)$$

можно доказать почти дословно так же, как и в § 12, поскольку для доказательства монотонного уменьшения μ_n необходимы только самосопряженность и полная определенность задачи¹⁾.

Отношения μ_{2n} с четными индексами $2n$ можно снова записать как отношения Рэлея, и даже, согласно (11.15), в виде (12.9)

$$\mu_{2n} = R[F_n].$$

Ввиду минимальности наименьшего собственного значения (см. п. 11.2) μ_{2n} , следовательно, и все μ_n , являются верхними границами для λ_1 .

¹⁾ Факт монотонного уменьшения μ_n имеет место для любого дифференциального уравнения $M[z] = \lambda N[z]$, если соответствующая краевая задача самосопряжена и полностью определена.

Этим доказано (14.8). Отношения μ_{2n-1} с нечетными индексами связаны с минимальным принципом (11.25) для наименьшего собственного значения, который в п. 11.2 назван вторым. Отношение, стоящее в правой части (11.25), равно μ_1 , и соответственно оно будет равно μ_{2n} , если записать F_n вместо F_1 .

Доказательство (14.9) можно провести точно так же, как в п. 12.4, положив вместо y , $N[y]$, $\int_a^b \dots dx$ соответственно z , $g_0 z$, $\int_{\mathfrak{B}} \dots dx dy$.

14.2. Теорема включения Крылова — Боголюбова для одночленного класса¹⁾. Эта теорема использует теорему разложения из п. 10.8 и справедлива с той же степенью общности. Итак, пусть имеется самосопряженная вполне определенная задача из одночленного класса (4.28), (4.14) для дифференциального уравнения

$$M[y] = \lambda N[y] = (-1)^n \lambda [g_n y^{(n)}]^{(n)}$$

с $g_n(x) \neq 0$, и в числе краевых условий встречаются

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \dots = y^{(n-1)}(b) = 0. \quad (14.10)$$

Тогда имеет место

Теорема включения Крылова — Боголюбова. Пусть при выполнении предпосылок теоремы разложения из п. 10.8 для двух функций $F_0(x)$ и $F_1(x)$ вычислены отношения μ_1 и μ_2 (12.20), причем $F_0(x)$, согласно дополнению 1 в п. 10.3, есть полудопустимая, а $F_1(x)$ — функция сравнения и они связаны соотношением

$$M[F_1] = N[F_0].$$

Тогда между числами

$$\mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2} \quad \text{и} \quad \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2)\mu_2} \quad (14.11)$$

лежит по меньшей мере одно собственное значение рассматриваемой задачи.

Для задачи на собственные значения частного вида $M[y] = \lambda g_0 y$ можно исключить предпосылку (14.10) и условие полудопустимости $F_0(x)$, так как тогда любая непрерывная функция $F_0(x)$ полудопустима, и частная форма теоремы гласит:

¹⁾ Для специального случая эта теорема, часто называемая в литературе по имени Вайнштейна, приводится у Н. Крылова и Н. Боголюбова, Бюлл. Акад. наук СССР, сер. физ.-мат., Ленинград (1929), 471. Для специальных задач на собственные значения теорема доказана Г. Д. Вайнштейном [см. Н. Д. Weinstein, Proc. nat. Acad. Sci. Washington 20 (1934), 529] и при более слабых предположениях Е. Камке, Math. Z. 45 (1939), 788.

Пусть при функции сравнения $F_1(x)$ образованы числа

$$a_0 = \int_a^b \frac{1}{g_0} (M[F_1])^2 dx, \quad a_1 = \int_a^b F_1 M[F_1] dx,$$

$$a_2 = \int_a^b g_0 F_1^2 dx, \quad \mu_1 = \frac{a_0}{a_1}, \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2}.$$

Тогда между границами (14.11) лежит по крайней мере одно собственное значение.

Доказательство. По условию функции F_0 и F_1 связаны соотношением

$$M[F_1] = N[F_0].$$

F_1 удовлетворяет краевым условиям и является функцией сравнения. По теореме п. 10.8 она может быть разложена в $(m-1)$ -кратно почленно дифференцируемый ряд по нормированным собственным функциям y_p

$$F_1(x) = \sum_{p=1}^{\infty} b_p y_p,$$

где (согласно (10.4))

$$b_p = \int_a^b F_1 N[y_p] dx,$$

причем ряд абсолютно и равномерно сходится в интервале a, b (это касается и дифференцированных рядов). Образует с помощью F_0 и F_1 по (12.20) постоянные Шварца a_0, a_1, a_2 и отношения μ_1 и μ_2 . Тогда с учетом самосопряженности будем иметь

$$\frac{\int_a^b (\mu_2 F_1 - F_0) (\mu_2 N[F_1] - N[F_0]) dx}{\int_a^b F_1 N[F_1] dx} =$$

$$= \mu_2^2 - 2\mu_2 \frac{\int_a^b F_1 N[F_0] dx}{\int_a^b F_1 N[F_1] dx} + \frac{\int_a^b F_0 N[F_0] dx}{\int_a^b F_1 N[F_1] dx} =$$

$$= \mu_2^2 - 2\mu_2 \mu_2 + \mu_1 \mu_2 = (\mu_1 - \mu_2) \mu_2. \quad (14.12)$$

Выражение, стоящее в левой части равенства, можно преобразовать.

Если для сокращения записи обозначить $\psi = \mu_2 F_1 - F_0$, то числитель примет вид

$$\int_a^b \psi N[\psi] dx,$$

причем для этого выражения будет выполняться неравенство Парсеваля (10.13)

$$\int_a^b \psi N[\psi] dx \geq \sum_{p=1}^{\infty} c_p^2,$$

где через c_p обозначены коэффициенты Фурье функции ψ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_a^b F_0 N[y_p] dx &= \int_a^b y_p N[F_0] dx = \int_a^b y_p M[F_1] dx = \\ &= \int_a^b F_1 M[y_p] dx = \lambda_p \int_a^b F_1 N[y_p] dx = \lambda_p b_p \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$c_p = b_p (\mu_2 - \lambda_p).$$

Таким образом, для числителя левой части (14.12) справедливо

$$\int \psi N[\psi] dx \geq \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 (\mu_2 - \lambda_p)^2,$$

в то время как знаменатель можно вычислить следующим образом (ряд для F_1 вследствие $n \leq m - 1$ почленно дифференцируем n раз):

$$\begin{aligned} \int_a^b F_1 N[F_1] dx &= \int_a^b F_1 (-1)^n [g_n F_1^{(n)}]^{(n)} dx = \int_a^b F_1^{(n)} g_n F_1^{(n)} dx = \\ &= \int_a^b \sum_{p=1}^{\infty} b_p y_p^{(n)} g_n F_1^{(n)} dx = \int_a^b \sum_{p=1}^{\infty} b_p F_1 N[y_p] dx = \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2. \end{aligned}$$

Если же не только $n \leq m - 1$, но и $2n \leq m - 1$, то ряд для F_1 можно почленно дифференцировать $2n$ раз, и последний результат можно получить короче:

$$\int_a^b F_1 N[F_1] dx = \sum_{p, q=1}^{\infty} \int_a^b b_p y_p b_q N[y_q] dx = \sum_{p=1}^{\infty} b_p^2.$$

Таким образом, (14.12) дает

$$\frac{\sum_{p=1}^{\infty} b_p^2 (\mu_2 - \lambda_p)^2}{\sum_{p=1}^{\infty} b_p^2} \leq (\mu_1 - \mu_2) \mu_2. \quad (14.13)$$

Если теперь λ_j ближайшее к μ_2 собственное значение (или одно из возможных одинаково удаленных), то для всех p

$$(\mu_2 - \lambda_p)^2 \geq (\mu_2 - \lambda_j)^2$$

и из (14.13) следует

$$(\mu_2 - \lambda_j)^2 \leq (\mu_1 - \mu_2) \mu_2$$

или, как утверждалось в (14.11),

$$\mu_2 - \sqrt{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2} \leq \lambda_j \leq \mu_2 + \sqrt{(\mu_1 - \mu_2) \mu_2}.$$

14.3. Доказательство основной формулы (12.19) при помощи теоремы о разложении. Формулы § 12 для метода последовательных приближений очень удобно и наглядно можно доказать с помощью теоремы разложения (§ 10). Этот способ проведения доказательства будет кратко изложен в дальнейшем. В § 12 был использован более сложный, но зато и более общий метод. Там рассматривалась общая проблема на собственные значения, в то время как теорема разложения пока связывается с задачами из одночленного класса. К тому же предположение, что F_0 есть функция сравнения, необходимое для применимости теоремы разложения, в прикладных задачах часто не выполняется или трудно выполнимо. Пусть для задач на собственные значения (4.11) — (14.14) выполнены условия теоремы включения, в частности, рассматривается дифференциальное уравнение вида

$$M[y] = \lambda N[y] = \lambda (-1)^n [g_n(x) y^{(n)}]^n \quad (14.14)$$

и, кроме того, $2n \leq m - 1$ ¹⁾. Функцию сравнения F_0 можно разложить в ряд по собственным функциям y_l

$$F_0 = \sum_{l=r}^{\infty} c_l y_l \quad (14.15)$$

и ряд можно почленно $(m - 1)$ раз дифференцировать. Ряд (14.15), а также ряды, полученные почленным дифференцированием (14.15), сходятся абсолютно и равномерно. Поэтому

$$N[F_0] = \sum c_l N[y_l]. \quad (14.16)$$

¹⁾ Это предположение для частных задач на собственные значения всегда выполняется.

Сумма (14.15) начинается при этом с номера $i=r$, где $r \geq 1$. Поэтому можно допустить, что F_0 не имеет компонент первых $(r-1)$ собственных функций. В (14.15) тогда $c_r \neq 0$.

Ряд

$$\varphi(x) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \frac{y_i(x)}{\lambda_i}$$

удовлетворяет уравнению

$$M[\varphi] = \sum c_i \frac{M[y_i]}{\lambda_i} = \sum c_i N[y_i] = N[F_0]$$

и краевым условиям (4.14), т. е. $\varphi(x)$ равна функции $F_1(x)$, которая получается в методе последовательных приближений из $F_0(x)$. Точно так же для последующих функций $F_2(x)$, $F_3(x)$, ... получим

$$F_k(x) = \sum_{i=r}^{\infty} c_i \frac{y_i(x)}{\lambda_i^k} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (14.17)$$

Теперь сразу можно вычислить постоянные Шварца. При сделанных предположениях ряды можно перемножать и почленно интегрировать. Для a_k с учетом (5.33) получим

$$a_k = \int_a^b F_k N[F_0] dx = \int_a^b \sum_{i=r}^{\infty} c_i \frac{y_i(x)}{\lambda_i^k} \sum_{j=r}^{\infty} c_j N[y_j] dx = \sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}. \quad (14.18)$$

Для отношений Шварца (12.8) отсюда будем иметь

$$\mu_{k+1} = \frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}}{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{k+1}}} = \lambda_r \frac{\sum_{i=r}^{\infty} c_i^2 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)^k}{\sum_{i=r}^{\infty} c_i^2 \left(\frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right)^{k+1}} \quad (k=0, 1, 2, \dots). \quad (14.19)$$

Так как все λ_i положительны и $\lambda_i \geq \lambda_r$, то монотонное уменьшение μ_k и их ограниченность, согласно (12.11), т. е. в данном случае факт

$$\mu_k \geq \mu_{k+1} \geq \mu_{k+2} \geq \dots \geq \lambda_r, \quad (14.20)$$

можно установить непосредственно из следующих соотношений:

$$\mu_k - \lambda_r = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^{k-1}}}{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}} \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots), \quad (14.21)$$

$$\mu_k - \mu_{k+1} = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \sum_{j>i} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{k+1}} \frac{c_j^2}{\lambda_j^{k+1}} (\lambda_j - \lambda_i)^2}{\left(\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}\right) \left(\sum_{j=r}^{\infty} \frac{c_j^2}{\lambda_j^{k+1}}\right)} \geq 0. \quad (14.22)$$

Из (14.19) следует, далее, сходимость μ_k к собственному значению λ_r (также и в случае вырожденного λ_r), а из (14.17) следует сходимость функции F_k с подходящим множителем (например, с $\frac{\lambda_r^k}{c_r}$) к r -й собственной функции $y_r(x)$ при $k \rightarrow \infty$ (в случае вырожденного λ_r , т. е. если $\lambda_r = \lambda_{r+1} = \dots = \lambda_{r+p}$, к $\sum_{i=r}^{r+p} c_i y_i(x)$).

Из (14.21) следует

$$\frac{\mu_k - \lambda_r}{\mu_{k+1} - \lambda_r} = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^{k-1}}}{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}} \cdot \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \frac{c_i^2}{\lambda_i^{k+1}}}{\sum_{i=r}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}}$$

и

$$\frac{\mu_k - \lambda_r}{\mu_{k+1} - \lambda_r} \mu_{k+1} = \frac{\sum_{i=r}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^{k-1}}}{\sum_{i=r}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda_r}{\lambda_i}\right) \frac{c_i^2}{\lambda_i^k}}. \quad (14.23)$$

В суммах выпадает член с $i = r$; поэтому значения отношений (14.23) можно уменьшить, положив в знаменателе $l_{r+1} \lambda_i^{k-1}$ вместо λ_i^k , где $l_{r+1} \leq \lambda_{r+1}$. Тогда l_{r+1} можно вынести за знак суммы; числитель и знаменатель после этого будут иметь общий множитель, сократив на который, получим

$$\frac{\mu_k - \lambda_r}{\mu_{k+1} - \lambda_r} \mu_{k+1} \geq l_{r+1}. \quad (14.24)$$

Нижнюю границу l_{r+1} при переходе к следующей формуле (14.25) нужно выбрать так, чтобы $l_{r+1} > \mu_k$. (Если $\lambda_{r+1} > \lambda_r$, то из-за сходимости μ_k к λ_r при достаточно большом k всегда будет выполнено $l_{r+1} > \mu_{k+1}$.) Тогда из (14.24) получим

$$\left(\frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\mu_{k+1} - \lambda_r} + 1 \right) \mu_{k+1} \geq l_{r+1}$$

или

$$\mu_{k+1} - \frac{\mu_k - \mu_{k+1}}{\frac{l_{r+1} - 1}{\mu_{k+1}}} \leq \lambda_r \leq \mu_{k+1}, \quad (14.25)$$

что для случая, когда λ_r есть первое собственное значение λ_1 , совпадает с (12.19)¹⁾.

14.4. Сходимость итерационного процесса для краевых задач. Начнем с простого примера. Краевая задача

$$y'' = a^2(1 - y), \quad y(-1) = y(1) = 0$$

имеет вполне определенное решение $y(x) = 1 - \frac{\cos ax}{\cos a}$. Оно существует, если $\cos a \neq 0$, т. е. если a не равно числам $\pm \pi/2, \pm 3\pi/2, \pm 5\pi/2, \dots$

Для решения этой краевой задачи можно применить следующий итерационный процесс: исходя из произвольно выбранной непрерывной функции $Y_0(x)$, определяют последовательность функций $Y_1(x), Y_2(x), \dots$ как решений краевых задач

$$\left. \begin{aligned} Y_{n+1}'' &= a^2(1 - Y_n), \\ Y_{n+1}(-1) &= Y_{n+1}(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Для исследования сходимости этого итерационного процесса вводится отклонение $Y_n(x)$ от точного решения $y(x)$

$$z_n(x) = Y_n(x) - y(x).$$

Тогда $z_n(x)$ удовлетворяет соотношениям

$$\left. \begin{aligned} z_{n+1}''(x) &= -a^2 z_n(x), \\ z_{n+1}(-1) &= z_{n+1}(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

$z_1(x)$ — дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяет краевым условиям, и ее можно, следовательно, разложить в ряд Фурье

$$z_1(x) = \sum_{v=1}^{\infty} C_v \sin \frac{v\pi(x+1)}{2}.$$

¹⁾ Дальнейшие формулы для оценок см. в Math. Z. 46 (1940), 698—702.

Тогда

$$z_2(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{4a^2}{\nu^2\pi^2} C_{\nu} \sin \frac{\nu\pi(x+1)}{2}.$$

Почленно дифференцируя выражение для z_2 (в данном случае это можно делать), получим $z_2'' = -a^2 z_1$; кроме того, z_2 удовлетворяет краевым условиям. Точно так же следует

$$z_{n+1} = \sum_{\nu=1}^{\infty} \left(\frac{4a^2}{\nu^2\pi^2} \right)^n C_{\nu} \sin \frac{\nu\pi(x+1)}{2},$$

т. е. для $|a| < \pi/2$ z_n стремится к нулю. Итерационный процесс сходится. При $|a| > \pi/2$ $z_n \rightarrow \infty$, если $C_1 \neq 0$. Итерационный процесс при этом в общем случае расходится.

Пусть теперь

$$\left. \begin{aligned} M[y] - aN[y] &= r(x), \\ U_{\mu}(y) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (14.26)$$

есть самосопряженная краевая задача и для соответствующей однородной краевой задачи

$$M[y] - \lambda N[y] = 0, \quad U_{\mu}[y] = 0 \quad (14.27)$$

выполнены условия, требуемые в теореме разложения п. 10.8. Исходя из произвольно выбранной непрерывной функции $Y_0(x)$, вычислим последующие функции Y_n по формулам

$$M[Y_{n+1}] = aN[Y_n] + r(x), \quad U_{\mu}[Y_{n+1}] = 0 \quad (n = 0, 1, \dots). \quad (14.28)$$

Для исследования сходимости снова введем отклонение от истинного решения

$$z_n(x) = Y_n(x) - y(x).$$

Тогда справедливо

$$M[z_{n+1}] = aN[z_n], \quad U_{\mu}[z_{n+1}] = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

При принятых предположениях $z_1(x)$ можно разложить в ряд по собственным функциям $y_i(x)$ задачи (14.27)

$$z_1(x) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i y_i(x).$$

Тогда

$$z_2(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{a}{\lambda_i} c_i y_i(x)$$

есть решение краевой задачи

$$M[z_2] = aN[z_1], \quad U_{\mu}[z_2] = 0,$$

и в общем случае

$$z_{n+1}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\lambda_i} \right)^n c_i y_i(x). \quad (14.29)$$

Таким образом, итерационный процесс сходится при любом c_i , если модуль a меньше наименьшего собственного значения: $|a| < \lambda_1$; если же $|a| \geq \lambda_1$, итерационный процесс при $c_1 \neq 0$ в общем случае расходится.

14.5. Метод Коха для высших собственных значений¹⁾. Применение теоремы разложения для исследования метода последовательных приближений в п. 14.3 показало: если исходная функция $F_0(x)$ в обобщенном смысле ортогональна к первым $r-1$ собственным функциям, но не ортогональна к r -й собственной функции, то отношения Шварца μ_k сходятся к r -му собственному значению λ_r . Если, в частности, $F_0(x)$ ортогональна только к первой собственной функции $y_1(x)$, то μ_k сходятся в общем случае ко второму собственному значению λ_2 . Поэтому второе собственное значение λ_2 можно приближенно вычислить, исходя из функции $H_0(x)$, ортогональной в обобщенном смысле к последней функции $F_n(x)$, которая была определена при вычислении первого собственного значения и которая является лучшим приближением для $y_1(x)$. Но так как $F_n(x)$ не точно совпадает с $y_1(x)$, то $H_0(x)$ все же будет иметь небольшую компоненту первой собственной функции, и в целях осторожности на каждом шаге итерации отнимают компоненту функции $F_n(x)$, которая является лучшим приближением для первой собственной функции. Таким образом, функция H_k вычисляется по следующему правилу:

$$\left. \begin{aligned} M[H_k^*] &= N[H_{k-1}], & U_\mu[H_k^*] &= 0, \\ H_k &= H_k^* - \frac{F_n}{\int_a^b F_n N[F_n] dx} \int_a^b H_k^*(\xi) N[F_n(\xi)] d\xi \end{aligned} \right\} \quad (14.30)$$

$$(k = 1, 2, \dots),$$

и приближенное значение для λ_2 получают по формуле

$$\lambda_2 \approx R[H_k] = \frac{\int_a^b H_k M[H_k] dx}{\int_a^b H_k N[H_k] dx}. \quad (14.31)$$

¹⁾ J. J. Koch, Verhandl. 2 internat. Congr. f. Techn. Mech., Zürich, 1926, 213—218.

Аналогично можно определить и третье собственное значение, вычитая после каждого шага метода компоненты первой и второй собственных функций¹⁾ (см. задачу 4 в п. 16.11).

14.6. Упражнения. 1. Согласно примеру в п. 12.2 провести метод последовательных приближений для краевой задачи

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) + y'(1) = 0,$$

исходя из функции $F_0(x) = 1$ (по сравнению с п. 12.2 здесь изменено только первое краевое условие).

Результат. Из (12.1) получим

$$2! F_1 = 3 - x^2,$$

$$4! F_2 = 49 - 18x^2 + x^4,$$

$$6! F_3 = 1987 - 735x^2 + 45x^4 - x^6.$$

По формулам (12.4) и (12.8) получим для a_k и μ_k значения

k	a_k	μ_k	$\mu_{k-1} - \mu_k$	$\frac{\mu_{k-2} - \mu_{k-1}}{\mu_{k-1} - \mu_k} \mu_k$
0	1	—	—	—
1	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{4} = 0,75$	—	—
2	$\frac{9}{5}$	$\frac{20}{27} = 0,740741$	0,009259	—
3	$\frac{766}{315}$	$\frac{567}{766} = 0,7402089$	0,0005319	12,89
4	$\frac{9314}{2835}$	$\frac{3447}{4657} = 0,74017608$	0,00003280	12,00
5	$\frac{230698}{51975}$	$\frac{256135}{346047} = 0,740174023$	0,000002056	11,80

Для первых двух собственных значений будем тогда иметь

$$\lambda_1 = 0,740174, \quad \lambda_2 \approx 11,8.$$

Точные собственные значения можно получить как корни уравнения

$$k \operatorname{tg} k = 1.$$

Из таблицы VI $\lambda_2 = 11,73$.

2. Найти границы для первого собственного значения задачи, рассмотренной в задаче 3 из п. 11.4,

$$[(3 - x^2) y'']'' + 60y = -\lambda y, \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0.$$

¹⁾ Другие методы для приближенного определения высших собственных значений можно найти в работе А. Трапкле, Ing.-Arch. 1 (1930), 499—526.

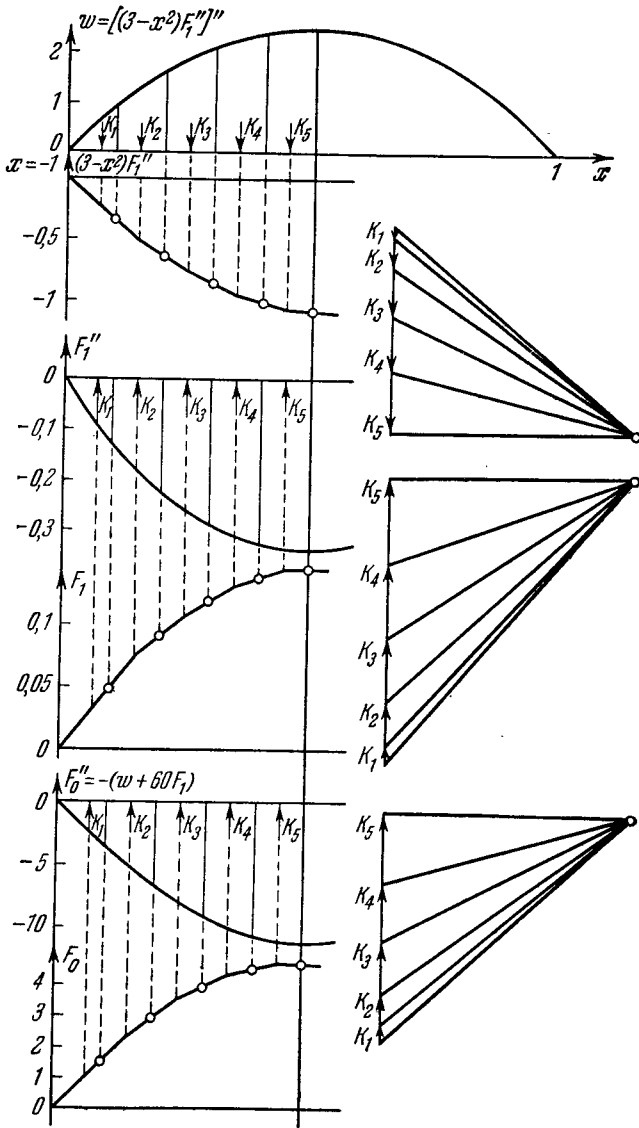


Рис. 14.1. Графическое решение уравнения $(\alpha y'')'' + cy = \lambda y''$; $y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$.

Решение. Две функции сравнения, связанные требуемым в (12.1) соотношением, уже даны в (11.27). По формулам (12.4), (12.8) вычислим теперь

$$a_0 = 3\,761\,275; \quad a_1 = 119\,950,9; \quad a_2 = 3825,593$$

и отсюда

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 31,35679; \quad \mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 31,35485.$$

Нижнюю границу l_2 для второго собственного значения λ_2 (при рассмотрении только симметричных собственных функций) получим путем сравнения с задачей, коэффициенты которой постоянны. Заменяя функцию $3 - x^2$ ее наименьшим значением 2, найдем

$$l_2 = 60 \left(\frac{2}{3\pi} \right)^2 + 2 \left(\frac{3\pi}{2} \right)^2 = 47,11$$

и получим по формуле (12.19) границы более близкие, чем в п. 11.4,

$$31,35096 \leq \lambda_1 \leq 31,35485.$$

3. Решить задачу 2 графически по методу § 13.

Будем исходить из функции $w(x) = [(3 - x^2)F_1'']$, которая изображена на рис. 14.1. Функция w равна нулю на концах интервала $[-1, 1]$ и симметрична, поэтому в дальнейшем можно будет ограничиться правой частью интервала $[0, 1]$. Первый веревочный многоугольник дает $(3 - x^2)F_1''$, разделив на $3 - x^2$, найдем функцию F_1'' , которая с помощью второго веревочного многоугольника приводит к F_1 . Затем вычислим функцию $-F_0'' = w + 60F_1$ и отсюда с помощью третьего веревочного многоугольника найдем $F_0(x)$. Масштаб для F_1'' , F_1 , F_0 получим сразу по формуле (13.17). На рис. 14.1 приведена шкала. Интегралы для постоянных Шварца вычисляются по формуле Симпсона

$$a_0 = 71,5, \quad a_1 = 2,28, \quad a_2 = 0,073.$$

Отношения Шварца $\mu_1 = \frac{a_0}{a_1}$ и $\mu_2 = \frac{a_1}{a_2}$ не отличаются друг от друга в пределах точности чертежа и имеют значение приблизительно 31,3.

4. Найти по (12.19) критическую нагрузку шарнирно опертого на обоих концах стержня (рис. 12.2) длины $l = \pi$ и с переменной жесткостью

$$\alpha = \frac{c}{2 + \cos x} \quad (\text{рис. 14.2}).$$

При $P = c\lambda$ имеем

$$-y'' = \lambda(2 + \cos x)y = \lambda g_0 y, \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Решение. Две функции F_0 , F_1 , удовлетворяющие крайевым условиям и связанные соотношением $-F_1'' = g_0 F_0$, легко найти, положив

$$F_1 = c \sin x + \sin 2x, \quad F_0 = \frac{c \sin x + 4 \sin 2x}{2 + \cos x}.$$

Константу c можно выбрать любой. Но для того, чтобы получить хороший результат, потребуем, чтобы F_0 и F_1 , которые должны быть приближениями для первой собственной функции, по возможности были близкими.

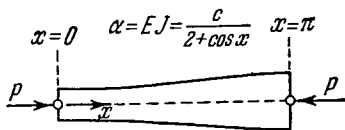


Рис. 14.2. Продольный изгиб стержня к задаче 4 п. 14.6.

При этом F_0 можно грубо оценить значением в середине интервала $F_0\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и значением производных на концах интервала $F_0'(0)$, $F_0'(\pi)$.

Чтобы функция F_1 была бы близкой к F_0 , потребуем выполнения равенств:

$$F_0'(0) : F_1'(0) = F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) : F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{значение } c = 10),$$

$$F_0'(\pi) : F_1'(\pi) = F_0\left(\frac{\pi}{2}\right) : F_1\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad (\text{значение } c = 14).$$

Таким образом, не удается достигнуть очень хорошего совпадения, и для получения возможно лучшего совпадения положим $c = 12$. Тогда по формулам (12.4) и (12.8) найдем

$$a_0 = \int_0^{\pi} g_0 F_0^2 dx = 16\pi(4 - \sqrt{3}), \quad a_1 = \int_0^{\pi} g_0 F_0 F_1 dx = 74\pi,$$

$$a_2 = \int_0^{\pi} g_0 F_1^2 dx = 151\pi, \quad \mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = \frac{8(4 - \sqrt{3})}{37} = 0,4903674,$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = \frac{74}{151} = 0,4900662.$$

Нижнюю границу l_2 для λ_2 можно получить, заменив $g_0(x)$ максимальным значением 3. Решая полученную краевую задачу, найдем

$$l_n = \frac{n^2}{3}, \quad l_2 = \frac{4}{3}$$

и отсюда по формуле (12.19)

$$0,489891 \leq \lambda_1 \leq 0,490066$$

(см. также задачу 1 из п. 25.7).

5. Найти для задачи 5 из п. 11.4 (стр. 173)

$$y^{IV} + 20y = -\lambda y'', \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

два первых собственных значения λ_1 и λ_2 .

Результат. Применим, как и в п. 11.4, в качестве исходной функции для λ_1

$$F_1(x) = 61 - 75x^2 + 15x^4 - x^6.$$

Тогда

$$F_0(x) = 644 \frac{9}{14} - 790x^2 + 155x^4 - 10x^6 + \frac{5}{14}x^8,$$

$$a_0 = - \int_{-1}^1 F_0 F_0'' dx = 1\,027\,294, \quad a_1 = - \int_{-1}^1 F_0 F_1'' dx = 97\,160\,652,$$

$$a_2 = - \int_{-1}^1 F_1 F_1'' dx = 9189\,4026,$$

$$\mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 10,573148, \quad \mu_2 = 10,573120 \text{ (ошибка } + 0,00024\%).$$

Для нахождения второго собственного значения λ_2 будем исходить из нечетной функции $F_1(x)$, которая, таким образом, кроме условия $F_1(\pm 1) = F_1''(\pm 1) = F_1^{IV}(\pm 1)$, удовлетворяет еще условию $F_1(0) = 0$ (что равносильно обобщенной ортогональности к первой собственной функции:

$$\int_{-1}^1 F_1 y_1'' dx = 0); \text{ имеем}$$

$$F_1 = 31x - 49x^3 + 21x^5 - 3x^7,$$

$$F_0 = \frac{5}{6} (430x - 628x^3 + 210x^5 - 12x^7 + x^9),$$

$$a_0 = - \int_{-1}^1 F_0 F_0'' dx = 141\,082,65, \quad a_1 = 11\,779,580,$$

$$a_2 = 989,62786, \quad \mu_1 = \frac{a_0}{a_1} = 11,97688,$$

$$\mu_2 = \frac{a_1}{a_2} = 11,90304 \text{ (ошибка } + 0,06\%).$$

Точные собственные значения

$$\lambda_n = \frac{20 + \left(\frac{n\pi}{2}\right)^4}{\left(\frac{n\pi}{2}\right)^2} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\lambda_1 = 10,573096, \quad \lambda_2 = 11,896028, \quad \lambda_3 = 23,10724.$$

6. Вычислить несколько функций $F_n(x)$ для краевой задачи

$$y^{IV} = -\lambda y'', \quad y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0.$$

Решение. Исходя из $F_0(x) = 1 - x^2$, получим

$$12F_1(x) = (1 - x^2)^2, \quad 360F_2(x) = (1 - x^2)^2(3 - x^2),$$

$$60480F_3(x) = (1 - x^2)^2(51 - 22x^2 + 3x^4),$$

$$a_0 = \frac{8}{3}, \quad a_1 = \frac{8}{45}, \quad a_2 = \frac{16}{945}, \quad a_3 = \frac{8}{7 \cdot 675},$$

$$a_4 = \frac{16}{231 \cdot 405}, \quad \mu_1 = 15, \quad \mu_2 = 10,5,$$

$$\mu_3 = 10, \quad \mu_4 = 9,9, \quad \lambda_1 = \pi^2 = 9,8696.$$

7. Вычислить верхние границы μ_1, μ_2 для наименьшего собственного значения λ_1 краевой задачи

$$y^{IV} + A[(1-x)y']' = \lambda y, \quad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$$

при $A = 2$, применяя в методе последовательных приближений для $F_0(x)$ и $F_1(x)$ многочлены возможно более низкой степени, такие, чтобы функция $F_0(x)$ удовлетворяла главным, а $F_1(x)$ — всем крайевым условиям.

Решение. С помощью функций

$$F_0 = 6x^2 + 28x^3 - 15x^4, \quad F_1 = \frac{1}{10} (30x^2 - 10x^3 - 5x^4 + 3x^5)$$

(если A отлично от 2 или 6, то нужно для F_0 и F_1 применить полином соответственно пятой и шестой степени) получим постоянные Шварца и

отношения

$$a_0 = \frac{2432}{35} = 69,4857, \quad a_1 = \frac{778}{105} = 7,40935, \quad a_2 = \frac{55\,688}{69\,300} = 0,803579,$$

$$\mu_1 = \frac{3648}{389} = 9,37789, \quad \mu_2 = \frac{64\,185}{6961} = 9,22066.$$

8. Для нелинейной задачи на собственные значения (собственное значение λ входит в квадрате)

$$-y'' = \lambda y + \lambda^2 x^2 y, \quad y(\pm 1) = 0$$

определить по правилу

$$-F_k'' = F_{k-1} + x^2 F_{k-2}, \quad F_k(\pm 1) = 0$$

несколько приближенных функций F_k и приближение для соответствующего собственного значения (члены дифференциального уравнения, которые содержат в качестве множителя λ^p , соответствуют в итерационном правиле членам F_{k-p}).

Решение. В качестве двух исходных функций, удовлетворяющих крайним условиям, выберем

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 - x^2$$

и получим

$$12F_2 = 5 - 6x^2 + x^4,$$

$$360F_3 = 79 - 75x^2 - 15x^4 + 11x^6,$$

$$20\,160F_4 = 2239 - 2212x^2 - 350x^4 + 364x^6 - 41x^8.$$

Из отношения двух последующих функций $\frac{F_{k+1}}{F_k}$ получим приближенное собственное значение $\lambda_1 \approx 1,94$.

ЧИСЛЕННАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ МИНИМАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

Рассматриваются три минимальных принципа. К каждому из них можно применить «схему Ритца»; таким образом получают соответственно уравнения Галеркина, Камке, Граммеля. Параграф шестнадцатый посвящается практическому, численному и графическому, применению метода Ритца и, кроме того, таким технически важным случаям, в которых не полностью выполнены принимавшиеся до сих пор в этой книге допущения, но в которых с помощью энергетического рассмотрения можно составить экстремальные выражения и затем применить к ним процесс Ритца. В отдельных доказательствах в пп. 15.3, 15.4 и 15.8 будет использовано несколько простых фактов из теории матриц. Те, для кого эти факты непривычны, могут пропустить соответствующие доказательства; в гл. VI о матрицах, независимо от представленного в гл. V материала, сообщаются все необходимые сведения.

§ 15. Основы метода Ритца

15.1. Три минимальных принципа. Возьмем самосопряженную задачу на собственные значения (4.11) — (4.14), у которой собственное значение λ не фигурирует в граничных условиях. Пусть условия полной определенности (8.2)

$$\int_a^b uM[u] dx > 0, \quad \int_a^b uN[u] dx > 0$$

выполняются для всех функций сравнения. Тогда справедливы следующие минимальные принципы.

1. *Минимальный принцип Рэлея.* По теореме п. 8.1 наименьшее собственное число λ_1 есть минимум, который принимает отношение Рэлея (8.1),

$$R[u] = \frac{\int_a^b uM[u] dx}{\int_a^b uN[u] dx}, \quad (15.1)$$

если u пробегает область всех функций сравнения,

2. Минимальный принцип Камке. Область функций u можно расширить по сравнению со случаем минимального принципа Рэля, что при практическом решении часто дает большие преимущества. При этом, правда, сверх полной определенности нужно предполагать K -определенность (см. п. 4.9). Так как доказательство сравнительно длинно, приведем только результат; за доказательством следует обратиться к оригинальной работе Камке ¹⁾.

Если применить к отношению Рэля в соответствии с п. 4.6 формулу Дирихле, то $R[u]$ перейдет в

$$K[u] = \frac{\int_a^b \sum_{v=0}^m f_v [u^{(v)}]^2 dx + M_0[u]}{\int_a^b \sum_{v=0}^n g_v [u^{(v)}]^2 dx + N_0[u]}. \quad (15.2)$$

При этом вследствие принятой самосопряженности можно исключить с помощью краевого условия $U_\mu[u] = 0$ в краевых выражениях Дирихле $M_0[u]$ и $N_0[u]$ производные u порядка m и выше, так что в (15.2) останутся только u и производные u до порядка $(m-1)$ включительно. В таблице III в явном виде выписаны выражения $M_0[u]$ и $N_0[u]$ для важнейших классов задач.

Теорема Камке тогда гласит, что λ_1 есть минимум отношения $K[u]$, если u пробегает область допустимых функций, которые по определению в п. 4.2 должны быть только m раз непрерывно дифференцируемы и удовлетворять лишь главным краевым условиям.

3. Минимальный принцип для частных задач на собственные значения ²⁾. Для случая $N[y] = g_0(x)$ у получается еще один принцип из метода последовательных приближений (см. п. 12.1). Пусть $u(x)$ — произвольная функция сравнения; ее можно понимать как функцию $F_1(x)$ итерационного процесса и для нее образовать функцию

$$F_0(x) = \frac{1}{g_0(x)} M[F_1]. \quad (15.3)$$

Тогда отношение Рэля (15.1) можно записать, как отношение Шварца μ_2 (согласно (12.9))

$$R[u] = R[F_1] = \mu_2.$$

¹⁾ E. Kamke, Über die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben, IV, Math. Z. 49 (1942), 67—100.

²⁾ L. Collatz, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), 228.

Но так как, согласно (12.11), μ_k монотонно убывает, то $\mu_1 \geq \lambda_1$. Теперь легко μ_1 выразить через F_1 :

$$\mu_1 = \frac{\int_a^b F_0 N [F_0] dx}{\int_a^b F_1 N [F_0] dx} = \frac{\int_a^b F_0 M [F_1] dx}{\int_a^b F_1 M [F_1] dx}; \quad (15.4)$$

значит, в соответствии с (15.3), если вместо F_1 снова написать u , получается

$$\mu_1 = \frac{\int_a^b \frac{1}{g_0(x)} (M[u])^2 dx}{\int_a^b u M[u] dx}. \quad (15.5)$$

Минимум этого отношения μ_1 для u , пробегающих область всех функций сравнения, есть наименьшее собственное значение λ . В общем $R[u]$ есть лучшее приближение, чем μ_1 при той же функции сравнения, однако μ_1 часто вычисляется быстрее, см. пп. 13.7 и 16.10¹⁾.

Пример. Сравним три рассмотренных выше принципа на примере следующей задачи:

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) + Cy(1) = 0, \quad C > 0.$$

В соответствии с принципом Рэля (15.1) имеем

$$\lambda_1 = \min \frac{-\int_0^1 uu'' dx}{\int_0^1 u^2 dx},$$

причем u пробегает область функций сравнения, т. е. всех дважды непрерывно дифференцируемых функций, для которых $u(0) = u'(1) + Cu(1) = 0$. Согласно принципу Камке (15.2), учитывая (4.25), получим

$$\lambda_1 = \min \frac{\int_0^1 (u')^2 dx + C[u(1)]^2}{\int_0^1 u^2 dx},$$

¹⁾ Новый экстремальный принцип и получающиеся из него верхние и нижние границы для собственных значений представлены в диссертации Лемана (J. Lehmann, Beiträge zur numerischen Lösung linearer Eigenwertprobleme, Dresden, 1948).

где u пробегает область допустимых функций, т. е. всех непрерывно дифференцируемых функций с $u(0) = 0$ (необходимо удовлетворить лишь главным краевым условиям). Для третьего минимального принципа (15.5)

$$\lambda_1 = \min \frac{\int_0^1 (u'')^2 dx}{-\int_0^1 u u'' dx}$$

u пробегает область функций сравнения.

Численный пример для отношения Рэлея. Задача

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) = 0$$

в качестве первой собственной функции имеет

$$y_1 = \cos \frac{\pi}{2} x$$

с собственным значением

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,4674 \dots$$

В качестве пробной функции, для которой выполняются граничные условия, возьмем, например, полином, а именно полином наименьшей степени, удовлетворяющий краевым условиям:

$$u = 1 - x^2.$$

Тогда в соответствии с (15.1) получим

$$R[u] = \frac{\int_0^1 2(1-x^2) dx}{\int_0^1 (1-x^2)^2 dx} = \frac{4/3}{8/15} = \frac{5}{2} = 2,5 > \lambda_1 = 2,4674.$$

Таким образом, уже с этой совсем простой пробной функцией можно получить для λ_1 значение с превышением всего на 1,5%.

15.2. Общий метод Ритца. Направивается мысль ввести функцию u , зависящую от параметров a_1, a_2, \dots, a_p :

$$u = u(x; a_1, a_2, \dots, a_p).$$

и варьировать их так, чтобы образованное с помощью этой функции минимальное выражение, например отношение Рэлея

$$R[u] = R[u(x; a_1, a_2, \dots, a_p)],$$

принимало наименьшее значение. Тогда можно предположить, что это наименьшее значение R будет близким к λ_1 (Вальтер Ритц, 1908)¹⁾.

При нахождении минимума R как функции a_1, a_2, \dots, a_p в качестве необходимых условий выступают равенства

$$\frac{\partial R}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial R}{\partial a_2} = 0, \quad \dots, \quad \frac{\partial R}{\partial a_p} = 0. \quad (15.6)$$

Они представляют собой p уравнений для определения величин a_1, a_2, \dots, a_p . Точно так же можно и в двух других приведенных в п. 15.1 минимальных выражениях $K[u]$ и $\mu_1[u]$ взять u , зависящую от параметров a_1, a_2, \dots, a_p , и получить уравнения, подобные (15.6).

Рассмотрим теперь три введенных в п. 15.1 минимальных принципа более подробно.

15.3. Уравнения Галеркина *). К удобным уравнениям можно прийти, если вместо произвольной (нелинейной) зависимости u от a_1, a_2, \dots, a_p использовать линейное представление

$$u = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x) + \dots + a_p v_p(x). \quad (15.7)$$

При этом v_1, v_2, \dots, v_p должны быть линейно независимыми функциями сравнения, так что $u \equiv 0$ только при $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$. Этот случай исключается. Таким образом, u также является функцией сравнения. При подстановке u в (15.1) получается²⁾

$$R[u] = \frac{\int_a^b \sum_{r=1}^p a_r v_r(x) \sum_{s=1}^p a_s M[v_s(x)] dx}{\int_a^b \sum_{r=1}^p a_r v_r(x) \sum_{s=1}^p a_s N[v_s(x)] dx}. \quad (15.8)$$

Для краткости введем величины m_{rs} и n_{rs} :

$$m_{rs} = \int_a^b v_r(x) M[v_s(x)] dx, \quad n_{rs} = \int_a^b v_r(x) N[v_s(x)] dx. \quad (15.9)$$

¹⁾ Вальтер Ритц, немецкий физик-теоретик, родился 22 февраля 1878 г. в семье художника в Швейцарии, учился с 1899 по 1902 г. в Цюрихе и Геттингене.

Его основные работы, которые здесь следует назвать, — это диссертация о новом методе решения некоторой вариационной задачи математической физики, а также *J. f. reine u. angew. Math.* 135 (1908), 1 и *Annalen d. Physik* 28 (1909), 737. Умер Ритц в 1909 г.

^{*}) Б. Г. Галеркин (1871—1945) — выдающийся русский математик и инженер, специалист по строительной механике.

²⁾ При практическом проведении процесса часто бывает лучше не задаваться функциями $v_r(x)$ и из них образовывать $M[v_r(x)]$, а выбирать функции $M[v_r]$ и из них интегрированием получать v_r . При графическом проведении метода такой обратный порядок действий прямо-таки необходим, см. пп. 16.9 и 16.10.

Их можно понимать также как элементы двух квадратных матриц \mathfrak{M} и \mathfrak{N} :

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ m_{p1} & \dots & m_{pp} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{N} = \begin{pmatrix} n_{11} & \dots & n_{1p} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ n_{p1} & \dots & n_{pp} \end{pmatrix}.$$

Ввиду принятой самосопряженности задачи обе эти матрицы симметричны:

$$m_{rs} = m_{sr}, \quad n_{rs} = n_{sr}. \quad (15.10)$$

Тогда R имеет вид отношения двух квадратичных форм Z и N (можно не опасаться, что читатель спутает знаменатель с дифференциальным оператором, обозначенным той же буквой N): $R[u] = \frac{Z}{N}$, где

$$Z = \sum_{r, s=1}^p m_{rs} a_r a_s, \quad N = \sum_{r, s=1}^p n_{rs} a_r a_s. \quad (15.11)$$

Числитель и знаменатель в соответствии с (8.2) могут принимать только положительные значения (случай $a_1 = a_2 = \dots = a_p = 0$ исключается), таким образом, Z и N — положительно определенные квадратичные формы. Необходимые условия минимума тогда имеют вид

$$\frac{\partial R}{\partial a_r} = \frac{N \frac{\partial Z}{\partial a_r} - Z \frac{\partial N}{\partial a_r}}{N^2} = 0, \quad r = 1, 2, \dots, p.$$

Минимум R обозначим через Λ ; он принимается в качестве приближенного значения для первого собственного значения λ_1 :

$$\Lambda = \min R[u(x; a_1, a_2, \dots, a_p)]. \quad (15.12)$$

Согласно принципу Рэля (15.1) $\Lambda \geq \lambda_1$. Это Λ одновременно является значением Z/N в точке минимума. Поэтому уравнения для a_p упрощаются

$$\frac{\partial Z}{\partial a_r} - \Lambda \frac{\partial N}{\partial a_r} = 0. \quad (15.13)$$

В соответствии с (15.11)

$$Z = \sum_{r, s=1}^p m_{rs} a_r a_s = m_{11} a_1^2 + 2m_{12} a_1 a_2 + \dots + m_{22} a_2^2 + \dots$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial Z}{\partial a_r} = 2 \sum_{s=1}^p m_{rs} a_s, \quad \frac{\partial N}{\partial a_r} = 2 \sum_{s=1}^p n_{rs} a_s.$$

Из (15.13) поэтому имеем

$$\sum_{s=1}^p a_s (m_{rs} - \Lambda n_{rs}) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, p. \quad (15.14)$$

Эти уравнения называют уравнениями Галеркина *). Они представляют собой p линейных однородных уравнений для a_s и имеют нетривиальное (т. е. не равное тождественно нулю) решение, когда матрица коэффициентов уравнений имеет равный нулю определитель

$$\det(m_{rs} - \Lambda n_{rs}) = \begin{vmatrix} m_{11} - \Lambda n_{11} & \dots & m_{1p} - \Lambda n_{1p} \\ m_{21} - \Lambda n_{21} & \dots & m_{2p} - \Lambda n_{2p} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{p1} - \Lambda n_{p1} & \dots & m_{pp} - \Lambda n_{pp} \end{vmatrix} = 0. \quad (15.15)$$

Это — алгебраическое уравнение p -й степени относительно Λ ; оно имеет p корней $\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_p$; так как обе матрицы \mathcal{M} и \mathcal{N} симметричны и действительны и соответствующая \mathcal{N} квадратичная форма N положительно определена, все корни Λ_i , согласно известной теореме алгебры, действительны¹⁾. Мы можем расположить их в порядке возрастания $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_p$ и рассматривать эти числа в качестве приближенных значений первых p собственных чисел $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$. В п. 15.8 показано, что все они являются верхними границами для собственных значений: $\Lambda_i \geq \lambda_i$.

Уравнениям (15.14) можно дать еще одно толкование. Отношение $R = Z/N$ не меняет своего значения, если все a_r умножить на одну и ту же постоянную $C \neq 0$. Можно поэтому представлять себе a_r «нормированным» и рассматривать только такие системы чисел a_1, a_2, \dots, a_p , для которых знаменатель N принимает определенное значение, например значение, равное 1:

$$\sum_{r,s=1}^p n_{rs} a_r a_s = 1. \quad (15.16)$$

Тогда $R = Z$ и можно исследовать минимум квадратичной формы Z при дополнительном условии (15.16)²⁾.

15.4. Сведение к вековому уравнению. Если используемые в представлении (15.7) функции $v_r(x)$ ортогональны и нормированы в обобщенном смысле, т. е. имеют место соотношения

$$n_{rs} = \int_a^b v_r(x) N [v_s(x)] dx = \begin{cases} 0 & \text{при } r \neq s, \\ 1 & \text{при } r = s, \end{cases} \quad (15.17)$$

*) По-видимому, автор имеет в виду связь уравнений (15.14) с методом Галеркина, в котором они получаются независимо от проблемы минимизации функционала. В знак того, что эти уравнения выражают основной результат как метода Галеркина, так и метода Ритца, их целесообразно назвать уравнениями Галеркина — Ритца.

¹⁾ По теореме в п. 18.4; см. также О. Реггон, Algebra, Berlin — Leipzig, 1927. [См. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, изд. 2, 1963.]

²⁾ Отсюда можно сделать заключение о существовании минимума Λ ; по теореме Вейерштрасса Z как непрерывная функция a_1, a_2, \dots, a_p на замкнутом ограниченном множестве, заданном с помощью (15.16), достигает минимума по крайней мере в одной точке.

то уравнение (15.15) для приближенных значений Λ_i — обыкновенное вековое уравнение

$$\begin{vmatrix} m_{11} - \Lambda & m_{12} & \dots & m_{1p} \\ m_{21} & m_{22} - \Lambda & \dots & m_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{p1} & m_{p2} & \dots & m_{pp} - \Lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (15.18)$$

Тогда Λ_i — собственные значения (характеристические числа) матрицы \mathfrak{M} , и для их нахождения имеются специальные методы*).

Если же исходные функции $v_r(x)$ не удовлетворяют уравнениям (15.17), то с помощью линейного преобразования

$$\left. \begin{array}{l} w_1 = c_{11}v_1, \\ w_2 = c_{21}v_1 + c_{22}v_2, \\ \dots \\ w_p = c_{p1}v_1 + c_{p2}v_2 + \dots + c_{pp}v_p \end{array} \right\} \quad (15.19)$$

можно перейти к новой системе функций, ортогональных и нормированных в обобщенном смысле. Этот переход называется ортогонализацией¹⁾. Сначала определяют c_{11} из

$$\int_a^b w_1 N[w_1] dx = 1,$$

так что

$$c_{11}^2 = \frac{1}{\int_a^b v_1 N[v_1] dx}.$$

Согласно (8.2) знаменатель отличен от нуля; знак числа c_{11} выбирается произвольно, так как функции $w_r(x)$ определяются только с точностью до знака. Затем определяют два числа c_{21}^* и c_{22}^* , не равных одновременно нулю, так, чтобы функция

$$w_2^* = c_{21}^*v_1 + c_{22}^*v_2$$

была ортогональна к w_1 , т. е. должно быть

$$c_{21}^* \int_a^b w_1 N[v_1] dx + c_{22}^* \int_a^b w_1 N[v_2] dx = 0.$$

*) См. гл. VI, подробнее см. Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева. Вычислительные методы линейной алгебры, Физматгиз, изд. 2, 1963.

¹⁾ Ортогонализация в п. 5.9 была проведена с помощью готовых формул (5.32), однако ввиду ее важности этот процесс будет здесь повторен в несколько иной форме.

Так как v_1 и v_2 линейно независимы, w_2^* не может быть тождественно равна нулю; теперь можно определить еще одну постоянную C_2 так, чтобы $w_2 = C_2 w_2^*$ удовлетворяло условию нормировки

$$\int_a^b w_2 N[w_2] dx = 1.$$

При этом положим $c_{21} = C_2 c_{21}^*$ и $c_{22} = C_2 c_{22}^*$.

Теперь определим три не равных одновременно нулю числа таких, чтобы функция $w_3^* = c_{31}^* v_1 + c_{32}^* v_2 + c_{33}^* v_3$ была ортогональна w_1 и w_2 :

$$c_{31}^* \int_a^b w_1 N[v_1] dx + c_{32}^* \int_a^b w_1 N[v_2] dx + c_{33}^* \int_a^b w_1 N[v_3] dx = 0,$$

$$c_{31}^* \int_a^b w_2 N[v_1] dx + c_{32}^* \int_a^b w_2 N[v_2] dx + c_{33}^* \int_a^b w_2 N[v_3] dx = 0.$$

Ввиду линейной независимости v_1, v_2, v_3 функция w_3^* не может быть тождественно равна нулю, так что ее можно умножить на постоянную C_3 такую, чтобы для $w_3 = C_3 w_3^*$ выполнялось условие

$$\int_a^b w_3 N[w_3] dx = 1.$$

Продолжая таким образом, получаем

$$\int_a^b w_r N[w_s] dx = \begin{cases} 0 & \text{для } r \neq s, \\ 1 & \text{для } r = s. \end{cases} \quad (15.20)$$

Функции $w_r(x)$ линейно независимы, так как из соотношения

$$\sum_{r=1}^p \alpha_r w_r(x) = 0$$

с помощью умножения на $N[w_q]$ и интегрирования по интервалу от a до b мы получили бы, что $\alpha_q = 0$ для $q = 1, 2, \dots, p$. Согласно (15.9) можно v_r выразить через w_r :

$$\left. \begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{c_{11}} w_{11} = d_{11} w_1, \\ v_2 &= \quad \quad \quad d_{21} w_1 + d_{22} w_2, \\ \dots & \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \quad \quad \quad \dots \\ v_p &= \quad \quad \quad d_{p1} w_1 + d_{p2} w_2 + \dots + d_{pp} w_p. \end{aligned} \right\} \quad (15.21)$$

т. е. в преобразовании (15.19) c_{ii} не равны нулю; действительно, если бы было $c_{qq} = 0$ при не равных нулю $c_{11}, c_{22}, \dots, c_{q-1, q-1}$, то в q -м уравнении из (15.19) возникло бы линейное соотношение между w_1, w_2, \dots, w_q с не равными одновременно нулю коэффициентами, что невозможно.

Напишем теперь с только что полученными путем ортогонализации функциями $w_r(x)$ представление, подобное (15.7),

$$u = \sum_{r=1}^p b_r w_r(x), \tag{15.22}$$

получим, далее, уравнения Галеркина и вычислим корни соответствующего векового уравнения, которые обозначим через Λ_i^* (звездочка имеет здесь другое значение, нежели раньше).

Тогда $\Lambda_1 = \Lambda_1^*$; действительно, совокупность функций u при использовании представления (15.7) та же, что и при (15.22), поэтому минимум Λ_1 для $R[u]$ в обоих случаях один и тот же. Но и остальные корни вековых уравнений (15.15) для представлений с v_r и с w_r совпадают

$$\Lambda_i = \Lambda_i^*, \quad i = 1, 2, \dots, p. \tag{15.23}$$

Это легко видеть, если записать уравнения Галеркина в матричной форме. Введем матрицы

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = (d_{ik}) = \begin{pmatrix} d_{11} & 0 & \dots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{p1} & d_{p2} & \dots & d_{pp} \end{pmatrix};$$

тогда можно оба представления (15.7) и (15.22) сравнить между собой, пользуясь (15.21):

$$u = \sum_{s=1}^p a_s v_s = \sum_{s=1}^p \sum_{r=1}^p a_s d_{sr} w_r = \sum_{r=1}^p b_r w_r, \quad \text{где } b_r = \sum_{s=1}^p d_{sr} a_s,$$

или

$$b = \mathfrak{D}' a,$$

причем \mathfrak{D}' обозначает матрицу, транспонированную к \mathfrak{D} .

Обозначим числа, образованные по аналогии с (15.9) при помощи $w_r(x)$ вместо $v_r(x)$, через

$$m_{rs}^* = \int_a^b w_r M[w_s] dx, \quad n_{rs}^* = \int_a^b w_r N[w_s] dx$$

и будем понимать их как элементы матриц \mathfrak{M}^* и \mathfrak{N}^* ; очевидно,

$\mathfrak{N}^* = \mathfrak{E}$ — единичная матрица; подстановка (15.21) в (15.9) дает

$$m_{rs} = \sum_{k, l=1}^p d_{rk} d_{sl} m_{kl}^*, \quad n_{rs} = \sum_{k=1}^p d_{rk} d_{sk}.$$

или

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{D}\mathfrak{M}^*\mathfrak{D}', \quad \mathfrak{N} = \mathfrak{D}\mathfrak{D}',$$

и уравнения Галеркина (15.14)

$$(\mathfrak{M} - \Lambda\mathfrak{N})\alpha = 0$$

переходят в

$$(\mathfrak{D}\mathfrak{M}^*\mathfrak{D}' - \Lambda\mathfrak{D}\mathfrak{D}')\alpha = 0.$$

Умножая слева на \mathfrak{D}^{-1} , получаем

$$(\mathfrak{M}^* - \Lambda\mathfrak{E})(\mathfrak{D}'\alpha) = \mathfrak{M}^*\mathfrak{b} - \Lambda\mathfrak{b} = 0.$$

Но это — уравнения Галеркина для представления (15.22) с $\omega_r(x)$. Если Λ — значение, для которого уравнения (15.14) имеют нетривиальное решение, то мы имеем для того же самого значения $\Lambda = \Lambda^*$ нетривиальное решение для уравнений Галеркина с представлением (15.22).

15.5. Линейное представление в случае минимального принципа Камке. Здесь по аналогии с тем, как это делалось в п. 15.3, применим представление

$$u = \sum_{r=1}^p a_r v_r(x)$$

к минимальному принципу Камке (15.2). Функции $v_r(x)$ должны быть допустимыми функциями и удовлетворять главным граничным условиям, удовлетворение естественным граничным условиям не требуется. Обозначив краевые значения u и производных u в граничных точках a и b

$$u(a), u'(a), \dots, u^{(m-1)}(a); \quad u(b), u'(b), \dots, u^{(m-1)}(b)$$

через

$$u_1, u_2, \dots, u_{2m},$$

получим для краевых выражений Дирихле в (15.2) $M_0[u]$ и $N_0[u]$ следующие квадратичные формы относительно u_1, \dots, u_{2m} :

$$M_0[u] = \sum_{k, l=1}^{2m} b_{kl} u_k u_l, \quad N_0[u] = \sum_{k, l=1}^{2m} c_{kl} u_k u_l. \quad (15.24)$$

Выражения $M_0[u]$ и $N_0[u]$ для ряда практически важных случаев приведены в таблице III. Минимальное выражение $K[u]$ при подстановке представления u (точно так же как в предыдущем пункте

выражение $R[u]$ станет отношением двух квадратичных относительно a_r форм:

$$K[u] = \frac{Z^*}{N^*},$$

где

$$Z^* = \sum_{r, s=1}^p m_{rs}^* a_r a_s, \quad N^* = \sum_{r, s=1}^p n_{rs}^* a_r a_s,$$

и (m_{rs}^* и n_{rs}^* имеют другой смысл, нежели в п. 15.4) если крайние значения функции $v_r(x)$

$$v_r(a), v_r'(a), \dots, v_r^{(m-1)}(a); \quad v_r(b), v_r'(b), \dots, v_r^{(m-1)}(b)$$

обозначить через $v_{r1}, v_{r2}, \dots, v_{r2m}$, имеем далее

$$\begin{aligned} Z^* &= \int_a^b \sum_{v=0}^m f_v \left(\sum_{r=1}^p a_r v_r^{(v)} \right) \left(\sum_{s=1}^p a_s v_s^{(v)} \right) dx + \sum_{k, l=1}^{2m} b_{kl} \sum_{r=1}^p a_r v_{rk} \sum_{s=1}^p a_s v_{sl} = \\ &= \sum_{r, s=1}^p m_{rs}^* a_r a_s, \end{aligned}$$

причем m_{rs}^* симметрична по записи, т. е. $m_{rs}^* = m_{sr}^*$, так что

$$m_{rs}^* = \int_a^b \sum_{v=0}^m f_v(x) v_r^{(v)}(x) v_s^{(v)}(x) dx + \sum_{k, l=1}^{2m} b_{kl} \frac{v_{rk} v_{sl} + v_{rl} v_{sk}}{2}. \quad (15.25)$$

Точно так же

$$n_{rs}^* = \int_a^b \sum_{v=0}^n g_v(x) v_r^{(v)}(x) v_s^{(v)}(x) dx + \sum_{k, l=1}^{2m} c_{kl} \frac{v_{rk} v_{sl} + v_{rl} v_{sk}}{2}. \quad (15.26)$$

Дальнейший ход рассуждений такой же, как в п. 15.3, только $R[u]$, Z , N здесь заменяются $K[u]$, Z^* , N^* . Тогда для первых p собственных значений описанный здесь способ дает приближения Λ , получаемые как корни уравнения

$$\det(m_{rs}^* - \Lambda n_{rs}^*) = \begin{vmatrix} m_{11}^* - \Lambda n_{11}^* & m_{12}^* - \Lambda n_{12}^* & \dots & m_{1p}^* - \Lambda n_{1p}^* \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ m_{p1}^* - \Lambda n_{p1}^* & m_{p2}^* - \Lambda n_{p2}^* & \dots & m_{pp}^* - \Lambda n_{pp}^* \end{vmatrix} = 0. \quad (15.27)$$

15.6. Уравнения Гаммеля. Точно так же как в пп. 15.3 и 15.4, введем теперь линейное представление

$$u = \sum_{r=1}^p a_r v_r(x)$$

в третье из записанных в п. 15.1 минимальных выражений (15.5), а именно в $\mu_1[u]$. При этом сначала примем, что обсуждается частная задача на собственные значения для дифференциального уравнения

$$M[y] = \lambda g_0(x) y.$$

Здесь $v_r(x)$ должны образовывать систему p заданных функций сравнения, следовательно, как и в п. 15.3, они должны удовлетворять всем крайевым условиям, не только главным. Тогда будет (в точном соответствии с п. 15.3)

$$\mu_1[u] = \frac{Z^\square}{N^\square},$$

$$Z^\square = \int_a^b \frac{1}{g_0(x)} \left(\sum_{r=1}^p a_r M[v_r(x)] \right) \left(\sum_{s=1}^p a_s M[v_s(x)] \right) dx = \sum_{r,s=1}^p m_{rs}^\square a_r a_s,$$

где

$$m_{rs}^\square = \int_a^b \frac{1}{g_0(x)} M[v_r(x)] M[v_s(x)] dx; \quad (15.28)$$

и соответственно этому

$$N^\square = \sum_{r,s=1}^p n_{rs}^\square a_r a_s$$

и

$$n_{rs}^\square = \int_a^b v_r(x) M[v_s(x)] dx. \quad (15.29)$$

Величины n_{rs}^\square совпадают с величинами m_{rs} в (15.9). Результаты дальнейших вычислений перенесены из п. 15.3, только величины Z , N , m_{rs} и n_{rs} отмечены значком \square . Уравнениям (15.14) здесь соответствуют уравнения Граммеля¹⁾:

$$\sum_{s=1}^p a_s (m_{rs}^\square - \Lambda n_{rs}^\square) = 0, \quad r = 1, 2, \dots, p, \quad (15.30)$$

и приближенные значения Λ для первых p собственных значений получаются как корни уравнения

$$\det(m_{rs}^\square - \Lambda n_{rs}^\square) = \begin{vmatrix} m_{11}^\square - \Lambda n_{11}^\square & \dots & m_{1p}^\square - \Lambda n_{1p}^\square \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{p1}^\square - \Lambda n_{p1}^\square & \dots & m_{pp}^\square - \Lambda n_{pp}^\square \end{vmatrix} = 0. \quad (15.31)$$

¹⁾ Р. Граммель, Ein neues Verfahren zur Lösung technischer Eigenwertprobleme, Ing.-Arch. 10 (1939), 35—46. Уравнения там были получены другим способом,

При реализации метода удобно исходить не из $v_r(x)$, а из $M[v_r(x)]$ и определять $v_r(x)$ из них путем интегрирования, см., например, п. 16.10.

Если рассматривается общая задача на собственные значения для дифференциального уравнения $M[y] = \lambda N[y]$, то вместо (15.5) следует вернуться к первоначальному выражению величины μ_1 (15.4) (см. также (12.20)), дающему верхнюю границу для λ_1 . Положим

$$F_1(x) = u(x) = \sum_{r=1}^p a_r v_r(x)$$

и выберем функцию F_0 так, чтобы в соответствии с (12.1) было $M[F_1] = N[F_0]$. При этом F_0 должна быть полудопустимой, т. е. удовлетворять тем краевым условиям, которые необходимы для выполнения (12.3). (Требование (12.3) относится ко всем функциям сравнения, а не только к примененным здесь специальным функциям $u = \sum a_r v_r$.) Для того чтобы получить F_0 , определим для каждой из p функций $v_r(x)$ соответствующую ей полудопустимую функцию $w_r(x)$ с помощью равенства $M[v_r] = N[w_r]$ ¹⁾. Тогда можно положить

$$F_0(x) = \sum_{r=1}^p a_r w_r(x).$$

Проварьируем теперь a_r так, чтобы отношение (15.4) $\mu_1 = \frac{Z^\square}{N^\square}$ стало минимальным; числитель имеет теперь вид

$$Z^\square = \int_a^b \left(\sum_{r=1}^p a_r w_r(x) \right) \left(\sum_{s=1}^p a_s M[v_s(x)] \right) dx = \sum_{r,s=1}^p m_{rs}^\square a_r a_s,$$

в то время как знаменатель не изменился в сравнении с (15.29).

Формула (15.28) должна быть теперь заменена равенством

$$m_{rs}^\square = \int_a^b w_r(x) M[v_s(x)] dx,$$

в то время как (15.29), (15.30) и (15.31) остаются без изменений.

15.7. Численные примеры. Частная задача на собственные значения. Рассмотрим теперь обсуждавшийся в п. 12.2 пример:

$$M[y] \equiv -y'' = \lambda y, \quad y(0) = y(1) + y'(1) = 0$$

с помощью трех минимальных принципов. Для этого в минимальных выражениях, приведенных в конце п. 15.1, нужно только положить $C = 1$. Для всех трех принципов используем представление Ритца (15.7) с сохране-

¹⁾ Следовательно, для $n \geq 1$ $w_r(x)$ определяется как решение краевой задачи. Мы предполагаем, что эти краевые задачи разрешимы для $r = 1, 2, \dots, p$, в противном случае $v_r(x)$ видоизменяются подходящим образом.

нием двух членов, в качестве которых используются два подходящих простейших полинома.

А. Уравнения Галеркина. Будем применять функции v_1, v_2 , которые удовлетворяют всем граничным условиям. Полиномами низшей степени, удовлетворяющими этим условиям, будут

$$v_1 = 3x - 2x^2, \quad v_2 = 2x - x^3.$$

Тогда $M[v_1] = 4$, $M[v_2] = 6x$. Производя с ними вычисления в соответствии с (15.9), получим

$$m_{11} = \int_0^1 v_1 M[v_1] dx = \int_0^1 4(3x - 2x^2) dx = \frac{10}{3},$$

$$m_{12} = \int_0^1 v_1 M[v_2] dx = \int_0^1 6x(3x - 2x^2) dx = 3$$

и точно так же

$$m_{22} = \frac{14}{5}, \quad n_{11} = \frac{4}{5}, \quad n_{12} = \int_0^1 v_1 v_2 dx = \frac{11}{15}, \quad n_{22} = \frac{71}{105}.$$

Уравнение (15.15) тогда примет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{10}{3} - \Lambda \frac{4}{5} & 3 - \Lambda \frac{11}{15} \\ 3 - \Lambda \frac{11}{15} & \frac{14}{5} - \Lambda \frac{71}{105} \end{vmatrix} = 0.$$

Положив $\Lambda = 7z$, получим

$$\begin{vmatrix} 50 - 84z & 45 - 77z \\ 45 - 77z & 42 - 71z \end{vmatrix} = 35z^2 - 148z + 75 = 0.$$

Корни этого квадратного уравнения $z = \frac{1}{35}(74 \pm \sqrt{2851})$ дают верхние границы для обоих собственных значений

$$\Lambda_{1,2} = \frac{1}{5}(74 \pm \sqrt{2851}) = \begin{cases} 4,1211 & (\text{ошибка } +0,13\%), \\ 25,479 & (\text{ошибка } +5,5\%). \end{cases}$$

Точные собственные значения определяются по таблице VI с $\lambda = k^2$ из трансцендентного уравнения $\operatorname{tg} k = -k$, $\lambda_1 = 4,11586$, $\lambda_2 = 24,14$ ($k_1 = 2,02876$, $k_2 = 4,913$).

О приближенных значениях, появляющихся при применении представления Ритца с двумя функциями, как мы здесь это делали, можно утверждать следующее. Пусть Λ_1^* и Λ_2^* (пронумерованные в порядке возрастания $\Lambda_1^* \leq \Lambda_2^*$) суть отношения Рэля, образованные с помощью координатных функций v_1 и v_2 в качестве пробных функций, а Λ_1 и Λ_2 — приближенные значения, полученные при двучленном представлении $u = a_1 v_1 + a_2 v_2$, тогда для самосопряженной задачи на собственные значения, для которой выполняются условия (8.2), имеют место неравенства

$$0 < \lambda_1 \leq \Lambda_1 \leq \Lambda_1^* \leq \Lambda_2^* \leq \Lambda_2. \quad (15.32)$$

Действительно,

$$\Lambda_1^* = \frac{m_{11}}{n_{11}}, \quad \Lambda_2^* = \frac{m_{22}}{n_{22}},$$

а уравнение (15.15), принимая во внимание симметричность (15.10), можно привести к виду

$$(\Lambda - \Lambda_1^*)(\Lambda - \Lambda_2^*) = \frac{(m_{12} - \Lambda n_{12})^2}{n_{11}n_{22}}.$$

Приближения Λ_1 , Λ_2 , полученные при использовании двучленного представления, удовлетворяют этому уравнению. В силу предположения (8.2) $n_{11} > 0$, $n_{22} > 0$ и, следовательно, правая часть неотрицательна и обращается в нуль

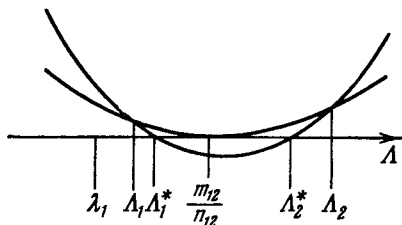


Рис. 15.1. Расположение нулей для двучленного представления Рунца.

только при $\Lambda = \frac{m_{12}}{n_{12}}$. Относительно $\frac{m_{12}}{n_{12}}$ ничего сказать нельзя, в нашем численном примере $\frac{m_{12}}{n_{12}} < \lambda_1$. Если обе части уравнения как функции Λ представить графически (рис. 15.1), то получим две параболы, из которых одна принимает между Λ_1^* и Λ_2^* отрицательные значения, следовательно, между Λ_1^* и Λ_2^* нет точек, общих с другой параболой, т. е. справедливо (15.32)¹⁾. Пусть, например, v_2 дает хорошее приближение для собственной функции y_2 и Λ_2^* немного больше λ_2 , тогда новое приближенное значение Λ_2 окажется хуже! ($\Lambda_2 \geq \Lambda_2^* \geq \lambda_2$)

Б. Минимальный принцип Камке. Теперь возьмем функции v_1 и v_2 , являющиеся только допустимыми, следовательно, удовлетворяющие лишь главным краевым условиям. Из краевых условий $y(0) = 0$ есть главное, а $y(1) + y'(1) = 0$ — естественное. Простейшие полиномы v_1 , v_2 с $v_i(0) = 0$ суть $v_1 = x$ и $v_2 = x^2$; таким образом, мы получаем представление $u = a_1x + a_2x^2$. Теперь можно согласно (15.25) и (15.26) вычислить m_{rs}^* и n_{rs}^* , но можно их также получить подстановкой представления u в минимальное выражение

$$K[u] = \frac{Z^*}{N^*} = \frac{\int_0^1 (u')^2 dx + [u(1)]^2}{\int_0^1 u^2 dx}.$$

¹⁾ Это можно доказать также следующим образом. Согласно (15.12) минимум отношения Рэлея R при вариации a_1 , a_2 есть число $\Lambda = \Lambda_1$, и это число есть корень уравнения (15.15). Точно так же максимум R тоже должен быть корнем (15.15) и равен Λ_2 . И следовательно, $\Lambda_2^* \leq \Lambda_2$. [Примечание ред. Автор имеет в виду $R[a_1v_1 + a_2v_2]$.]

Тогда будет

$$Z^* = \int_0^1 (a_1 + 2a_2x)^2 dx + (a_1 + a_2)^2 = 2a_1^2 + 4a_1a_2 + \frac{7}{3}a_2^2 = \sum_{r,s=1}^2 m_{rs}^* a_r a_s,$$

следовательно,

$$m_{11}^* = 2, \quad m_{12}^* = 2, \quad m_{22}^* = \frac{7}{3}.$$

Соответственно

$$N^* = \int_0^1 (a_1x + a_2x^2)^2 dx = \frac{1}{3}a_1^2 + \frac{1}{2}a_1a_2 + \frac{1}{5}a_2^2$$

и

$$n_{11}^* = \frac{1}{3}, \quad n_{12}^* = \frac{1}{4}, \quad n_{22}^* = \frac{1}{5}.$$

Уравнение для Λ (15.27) при этом имеет вид

$$\begin{vmatrix} 2 - \frac{1}{3}\Lambda & 2 - \frac{1}{4}\Lambda \\ 2 - \frac{1}{4}\Lambda & \frac{7}{3} - \frac{1}{5}\Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Это квадратное уравнение имеет корни $\Lambda = \frac{1}{3}(64 \pm 4\sqrt{166})$ или

$$\Lambda_1 = 4,1545, \quad \Lambda_2 = 38,512.$$

В уравнения Граммеля. В данном случае функции v_1, v_2 , взятым в качестве функций сравнения, должны снова удовлетворять всем краевым условиям; в качестве первого грубого приближения возьмем те же функции что и в п. А:

$$v_1 = 3x - 2x^2, \quad v_2 = 2x - x^3,$$

для которых

$$M[v_1] = 4, \quad M[v_2] = 6x.$$

Здесь $g_0(x)$ имеет значение, равное 1, поэтому из (15.28), (15.29) получаем

$$m_{11}^{\square} = 16, \quad m_{12}^{\square} = m_{22}^{\square} = 12, \quad n_{11}^{\square} = \frac{10}{3}, \quad n_{12}^{\square} = 3, \quad n_{22}^{\square} = \frac{14}{5}$$

и уравнение (15.31)

$$\begin{vmatrix} 16 - \frac{10}{3}\Lambda & 12 - 3\Lambda \\ 12 - 3\Lambda & 12 - \frac{14}{5}\Lambda \end{vmatrix} = 0,$$

имеющее корни

$$\Lambda_{1,2} = \frac{12}{5}(8 \pm \sqrt{39}) = \begin{cases} 4,2120, \\ 34,188. \end{cases}$$

Лучшие приближения можно было бы получить, если исходить не из $v_r(x)$, а из функций $M[v_2(x)]$, например $M[v_1] = x$, $M[v_2] = x^2$, и применением итерации получить удовлетворяющие граничным условиям функции v_1, v_2 ¹⁾.

15.8. Приближения Ритца для высших собственных значений.

В соответствии с идеей Ритца (см. (15.12)) разыскивается минимум отношения Рэлея R ; совершенно очевидно, что все корни Λ_i , которые получаются из (15.15), суть верхние границы для первого собственного значения λ_1 . Если представить себе Λ_i расположенными в порядке их возрастания, как в п. 15.3, то, кроме того, высшие приближения Ритца окажутся верхними границами для соответствующих высших собственных значений, т. е. справедлива следующая

Теорема. Пусть задача на собственные значения (4.11)—(4.14) самосопряженная и полностью определенная (что означает выполнение (8.2)) и собственные значения λ не входят в крайние условия. С помощью линейно независимых координатных функций v_1, v_2, \dots, v_p метод Ритца проводится в форме Галеркина, т. е. по (15.9) могут быть вычислены постоянные m_{rs} и n_{rs} , а также p корней уравнения (15.15) Λ_i . Все Λ_i действительны; их можно расположить в порядке возрастания: $\Lambda_1 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda_p$, так что они будут представлять собой верхние границы для соответствующих собственных значений:

$$\Lambda_i \geq \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (15.33)$$

Доказательство достаточно провести здесь только для второго собственного значения $\Lambda_2 \geq \lambda_2$, для остальных оно выглядит аналогично. Итак, пусть задана определенная система функций v_1, v_2, \dots, v_p , с помощью которой мы получаем представление Ритца

$$u = \sum_{r=1}^p a_r v_r.$$

Систему функций можно считать ортонормированной в обобщенном смысле

$$\int_a^b v_r N[v_s] dx = \begin{cases} 0 & \text{для } r \neq s, \\ 1 & \text{для } r = s. \end{cases}$$

Действительно, в п. 15.4 было показано, что если $v_r(x)$ линейно независимы, то всегда можно перейти к другой системе $w_s(x)$, для которой выполняются (15.20) и с которой получаются те же Λ , что и с $v_r(x)$. Тогда Λ_i суть корни векового уравнения или характе-

¹⁾ Практическая применимость уравнений Граммеля показана на различных технических примерах, см. E. M a i e r, Biegeschwingungen von spannungslos verwundenen Stäben, insbesondere von Luftschraubenblättern, Ing. — Archiv II (1940), 73—98; R. G r a m m e l, Über die Lösung technischer Eigenwertprobleme, Forschungsh. Gebiet Stahlbau, 6 (1943), 36—42.

ристические числа симметричной матрицы $\mathfrak{M} = (m_{ik})$, или также характеристические числа квадратичной формы

$$Z = \sum_{r, s=1}^p m_{rs} a_r a_s.$$

Отношение Рэлея, согласно (15.8), (15.11) и (15.17), принимает вид

$$R[u] = \frac{\sum_{r, s=1}^p m_{rs} a_r a_s}{\sum_{s=1}^p a_s^2} = Q.$$

Доказательство утверждения $\Lambda_2 \geq \lambda_2$ апеллирует к минимаксимальному принципу Куранта для квадратичных форм¹⁾. Сообразно с этим сначала утверждается: минимум $Q = \Lambda_1$, т. е. минимум Q при варьировании a_v дает значение Λ_1 . Обозначим теперь через $m = m(c_r)$, где c_1, c_2, \dots, c_p — произвольно заданные постоянные, минимум Q при дополнительном линейном однородном условии

$$\sum_{r=1}^p c_r a_r = 0;$$

тогда минимаксимальный принцип Куранта гласит: Λ_2 будет равно максимуму $m(c_r)$ при варьировании c_r :

$$\max_{c_r} (\min_{a_v} Q) = \Lambda_2.$$

Этот принцип в точности соответствует минимаксимальному принципу, изложенному в п. 8.4.

Обозначим теперь, как в п. 8.4, минимум отношения Рэлея $R[u]$ при дополнительном условии

$$\int_a^b w u dx = 0$$

через $M(w)$, тогда в соответствии с принципом Куранта в п. 8.4

$$\max_w (\min_u R[u]) = \lambda_2,$$

т. е. λ_2 есть максимум $M(w)$, если w пробегает область всех интегрируемых функций.

Теперь мы докажем, что для произвольно выбранной функции w всегда $M(w) \leq \Lambda_2$. Если это доказано, то это неравенство должно быть справедливо также для максимального значения, которое принимает $M(w)$, т. е. будет $\lambda_2 \leq \Lambda_2$. Итак, пусть w — произвольная,

¹⁾ В соответствии с п. 18.6; см. также R. Courant и D. Gilbert, Methoden der mathematischen Physik, т. 1, изд. 2, Berlin, 1931 [Р. Курант, Д. Гильберт, «Методы математической физики», т. 1, изд. 2, ГТТИ, М. — Л., 1951].

но в дальнейшем фиксированная функция. Мы вычислим для нее постоянные c_r по правилу

$$c_r = \int_a^b \omega v_r dx$$

и образуем $m(c_r)$, т. е. минимум Q (одновременно минимум R) при варьировании a_r с дополнительным условием

$$\sum_{r=1}^p c_r a_r = 0.$$

Это условие идентично условию

$$\sum_{r=1}^p a_r \int_a^b \omega v_r dx = \int_a^b \omega u dx = 0,$$

следовательно, $m(c_r)$ есть минимум R для функций $u = \sum_{r=1}^p a_r v_r$ при

условии $\sum_{r=1}^p c_r a_r = 0$, и эти функции составляют подмножество допустимых для $M(\omega)$ функций. Таким образом,

$$m(c_r) \geq M(\omega).$$

Теперь $\Lambda_2 = \max m(c_r)$, следовательно, $m(c_r) \leq \Lambda_2$, а отсюда следуют $M(\omega) \leq \Lambda_2$ и утверждение $\lambda_2 \leq \Lambda_2$.

Для высших собственных значений лишь привлекается соответственно больше дополнительных условий (о более подробном доказательстве см. примечание на стр. 222).

§ 16. Дальнейшее развитие метода Ритца

16.1. Вариационные уравнения Эйлера. Общая теорема в п. 15.8, которая дает строгое обоснование метода Ритца, связана с несколькими предположениями (например, должно выполняться условие полной определенности (8.2))¹⁾. Имеются задачи технического происхождения, для которых эти предположения не выполняются, но в которых тем не менее метод Ритца применим. Во многих из этих случаев может быть составлено некоторое выражение J . Рассматриваемые в вариационном исчислении необходимые условия минимума J , так называемые уравнения Эйлера²⁾ с их граничными условиями, совпадают

¹⁾ Могут быть сформулированы более сильные теоремы.

²⁾ Леонард Эйлер, выдающийся математик, родился в 1707 г. в семье священника в Базеле. В 1727 г. приехал в Петербург, где в 1730 г. стал профессором физики, а в 1733 — профессором математики. В 1741 г. он был приглашен в качестве профессора математики в Берлин, а в 1766 г. вернулся обратно в Петербург. Умер в 1783 г.

с заданными дифференциальными уравнениями и их граничными условиями. Вычислители-практики в этих случаях порой применяют метод Ритца, ожидая, что нижняя граница отношения Рэлея будет одновременно приближением для наименьшего собственного числа краевой задачи. Ясности ради необходимо подчеркнуть, что уравнения Эйлера дают лишь необходимые, но не достаточные условия минимума. Из-за этой трудности «классического» подхода метод Ритца в § 15 был введен вне связи с вариационным исчислением; подход, примененный в §§ 4, 5, 8, 12, 15, позволяет ответить на оставшийся открытым в классическом вариационном исчислении вопрос о существовании минимума.

Дадим краткий вывод¹⁾ уравнений Эйлера и применим их к задаче на собственные значения.

Пусть задана вариационная задача о нахождении наименьшего значения выражения J :

$$J = J[u] = \int_a^b F(x, u, u', u'', \dots, u^{(m)}) dx + \\ + A(u(a), u'(a), u''(a), \dots, u^{(m-1)}(a)) + \\ + B(u(b), u'(b), u''(b), \dots, u^{(m-1)}(b)) = \min. \quad (16.1)$$

При этом F — заданная, непрерывная функция от $x, u, u', \dots, u^{(m)}$ с непрерывными частными производными до $(m+1)$ -го порядка включительно; A и B — непрерывные, с непрерывными частными производными по всем аргументам функции краевых значений от $u, u', \dots, u^{(m-1)}$, и пусть в качестве функций сравнения допустимы все $2m$ раз непрерывно дифференцируемые функции $u(x)$, которые удовлетворяют некоторым заданным однородным линейным краевым условиям

$$V_\mu[u] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, k. \quad (16.2)$$

Пусть эти краевые условия будут того же типа, что и написанные раньше в (4.14) $U_\mu[y] = 0$, пусть они линейно независимы и не содержат частных производных порядка выше $m-1$ (главные краевые условия). Положим, что J имеет минимум и что среди допустимых функций u имеется одна функция $y(x)$, которая доставляет минимум

$$J[y] \leq J[u]. \quad (16.3)$$

Пусть $\eta(x)$ — допустимая функция; тогда можно с помощью параметра ε ввести однопараметрическое семейство функций

$$u(x) = y(x) + \varepsilon \eta(x) \quad (16.4)$$

¹⁾ Для более подробного ознакомления см., например, R. Courant, D. Gilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, тт. I, II, изд. 2, Berlin, 1931. [Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, тт. I, II, ГИТТЛ, изд. 2, М. — Л., 1951.]

и установить для него неравенство (16.3). Для этого семейства функций $J[u]$ будет непрерывно дифференцируемой, функцией ε , так что $J[u] = \Phi(\varepsilon)$. Эта функция будет принимать минимум для $\varepsilon = 0$ только тогда, когда ее производная $\Phi'(0) = 0$ (если, следовательно, «первая вариация» $\varepsilon\Phi'(0)$, которую обозначают также δJ , обращается в нуль).

Вычисления дают

$$\begin{aligned} \Phi'(0) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left\{ \int_a^b F(x, y + \varepsilon\eta, y' + \varepsilon\eta', \dots, y^{(m)} + \varepsilon\eta^{(m)}) dx + \right. \\ &\quad + A(y + \varepsilon\eta, \dots, y^{(m-1)} + \varepsilon\eta^{(m-1)})_{x=a} + \\ &\quad \left. + B(y + \varepsilon\eta, \dots, y^{(m-1)} + \varepsilon\eta^{(m-1)})_{x=b} \right\}_{\varepsilon=0} = \\ &= \int_a^b (F_y\eta + F_{y'}\eta' + \dots + F_{y^{(m)}}\eta^{(m)}) dx + \\ &\quad + A_y\eta(a) + \dots + A_{y^{(m-1)}}\eta^{(m-1)}(a) + \\ &\quad + B_y\eta(b) + \dots + B_{y^{(m-1)}}\eta^{(m-1)}(b). \quad (16.5) \end{aligned}$$

При этом нижними индексами обозначаются частные производные, например

$$F_{y^{(i)}} = \frac{\partial F}{\partial y^{(i)}}.$$

Теперь преобразуем интеграл путем интегрирования по частям отдельных слагаемых подынтегральной функции до тех пор, пока в подынтегральном выражении вместо $\eta^{(i)}$ не появится η :

$$\begin{aligned} \int_a^b F_{y'}\eta' dx &= [\eta F_{y'}]_a^b - \int_a^b \eta \frac{d}{dx} F_{y'} dx, \\ \int_a^b F_{y''}\eta'' dx &= \left[\eta' F_{y''} - \eta \frac{d}{dx} F_{y''} \right]_a^b + \int_a^b \eta \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} dx, \end{aligned}$$

и так же для последующих слагаемых. Из равенства $\Phi'(0) = 0$ в соответствии с (16.5) следует

$$\int_a^b \eta \left[F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}} \right] dx + S = 0 \quad (16.6)$$

с краевым выражением

$$\begin{aligned}
 S = & \left[\eta F_{y'} + \left(\eta' F_{y''} - \eta \frac{d}{dx} F_{y''} \right) + \dots \right. \\
 & \dots + \left(\eta^{(m-1)} F_{y^{(m)}} - \eta^{(m-2)} \frac{d}{dx} F_{y^{(m)}} + \eta^{(m-3)} \frac{d^2}{dx^2} F_{y^{(m)}} - \dots \right. \\
 & \left. \left. \dots + (-1)^{m-1} \eta \frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} F_{y^{(m)}} \right) \right]_a^b + A_y \eta(a) + \dots \\
 & \dots + A_{y^{(m-1)}} \eta^{(m-1)}(a) + B_y \eta(b) + \dots + B_{y^{(m-1)}} \eta^{(m-1)}(b). \quad (16.7)
 \end{aligned}$$

Функция $\eta(x)$ может быть произвольной допустимой функцией; поэтому (16.6) может быть выполнено только тогда, когда выражение в прямоугольных скобках подынтегральной функции тождественно равно нулю, что следует из такого косвенного доказательства: если бы выражение в прямоугольных скобках не обращалось в нуль, например, было больше нуля в некоторой точке x_0 , $a < x_0 < b$, то это выполнялось бы и в достаточно малой окрестности $|x - x_0| \leq \delta$ этой точки; тогда, если (16.6) выполняется для функции $\eta = \eta^*$, то для $\eta = \eta^{**}$ оно должно было бы нарушаться при подстановке

$$\eta^{**} = \begin{cases} \eta^* + (x - x_0 - \delta)^{2m+1} (x - x_0 + \delta)^{2m+1} & \text{для } |x - x_0| \leq \delta, \\ \eta^* & \text{для } |x - x_0| > \delta. \end{cases}$$

Таким образом, должно быть

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - \dots + (-1)^m \frac{d^m}{dx^m} F_{y^{(m)}} = 0. \quad (16.8)$$

Это — так называемое уравнение Эйлера вариационной задачи (16.1), (16.2); оно представляет собой необходимое условие, которому должно удовлетворять решение задачи $y(x)$, и имеет порядок $2m$.

При обращении в нуль выражения в квадратных скобках из (16.6) обращается в нуль и краевое выражение S . Предположим теперь для нашей задачи на собственные значения, что фигурирующие в (16.1) функции F , A и B суть квадратичные формы u и ее производных; тогда S — билинейная однородная форма, т. е. линейная однородная форма краевых значений как u и ее производных, так и η . Пусть u и η удовлетворяют краевым условиям (16.2). С помощью (16.2) k из $2m$ краевых значений $\eta(a)$, $\eta'(a)$, \dots , $\eta^{(m-1)}(a)$; $\eta(b)$, $\eta'(b)$, \dots , $\eta^{(m-1)}(b)$ могут быть выражены через остальные. Эти остальные $2m - k$ краевых значений могут быть названы «свободными краевыми значениями»¹⁾ и их произвольную последовательность можно обозначить $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_{2m-k}$. Если выразить в S все краевые значения от η через «свободные краевые значения», то S примет вид

$$S = \sum_{v=1}^{2m-k} \eta_v \cdot W_v[y] = 0, \quad (16.9)$$

¹⁾ Е. Камке, Math. Z., 48 (1942), 70.

причем $W_v[y]$ линейна и однородна относительно y в краевых значениях. Так как η_v может быть выбрана произвольно и для каждой η_v имеется соответствующая допустимая функция, из (16.9) следует

$$W_v[y] = 0, \quad v = 1, 2, \dots, 2m - k. \quad (16.10)$$

Это $2m - k$ необходимых условия на решение u вариационной задачи (16.1), (16.2), которые в общем должны быть отличны от k краевых условий (16.2), так что, вообще говоря, для функции, удовлетворяющей дифференциальному уравнению порядка $2m$, должно быть $2m$ краевых условий. О разрешимости этой краевой задачи, однозначности решения и о различии краевых условий (16.2) и (16.10) при данной степени общности ничего не утверждается.

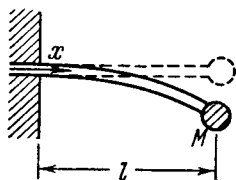


Рис. 16.1. Изгибные колебания закрепленного на одном конце стержня с сосредоточенной массой.

16.2. Пример. Задача на собственные значения. Для изгибных колебаний зашпеленного одним концом стержня длины l , свободный конец которого нагружен точечной массой M и для которого жесткость на изгиб равна α , а масса на единицу длины μ постоянна (рис. 16.1), вариационная задача, как будет более подробно обосновано в п. 16.4, имеет вид

(рис. 16.1), вариационная задача, как будет более подробно обосновано в п. 16.4, имеет вид

$$J = \int_0^l (\alpha u''^2 - \lambda \mu u^2) dx - \lambda M u(l)^2 = \text{экстремум} \quad (16.11)$$

с главными краевыми условиями

$$u(0) = u'(0) = 0. \quad (16.12)$$

Выражение $\Phi'(0)$, представляющее собой с точностью до множителя ε первую вариацию и обращающееся в нуль, здесь, как это тотчас получается интегрированием по частям, имеет вид

$$0 = \left[\frac{\partial J[y + \varepsilon \eta]}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon=0} = \int_0^l [(\alpha y'')' - \lambda \mu y] \eta dx + S, \quad (16.13)$$

где

$$\begin{aligned} S &= [\eta' \alpha y'']_0^l - [\eta (\alpha y'')']_0^l - \lambda M y(l) \eta(l) = \\ &= \eta(0) (\alpha y'')'_{x=0} - \eta'(0) (\alpha y'')_{x=0} + \\ &\quad + \eta(l) [-(\alpha y'')' - \lambda M y]_{x=l} + \eta'(l) (\alpha y'')_{x=l}. \end{aligned}$$

Здесь $\eta(0)$ и $\eta'(0)$ обращаются в нуль согласно (16.12). Итак, из

$S = 0$ следует и обращение в нуль множителей при $\eta(l)$ и $\eta'(l)$, и для u получаются краевые условия

$$[(\alpha y'')' + \lambda M u]_{x=l} = 0, \quad y''(l) = 0.$$

К этим краевым условиям добавляются еще $y(0) = y'(0) = 0$. Дифференциальное уравнение для u получается приравниванием нулю выражения в прямоугольных скобках в (16.13), что дает

$$(\alpha y'')'' = \lambda \mu u;$$

λ получается как собственное значение этой краевой задачи.

Уравнения этой задачи на собственные значения можно также понимать как необходимые условия другой вариационной задачи.

Пусть λ входит, по предположению, линейно и функции F , A , B из (16.1) суть квадратичные формы u и производных от u ; тогда выражение J из (16.1) может быть представлено в виде $J = J_1 + \lambda J_2$, причем J_1 и J_2 уже не зависят от λ . Тогда необходимые условия (16.8) и (16.10) эквивалентны отысканию минимума выражения J_1 с дополнительным условием $J_2 = \text{const}$ (в частности, $J_2 = 1$) или отысканию минимума отношения¹⁾

$$Q = \frac{J_1}{J_2}.$$

16.3. Обратная постановка задачи и метод Ритца. В п. 16.1 для данной вариационной задачи (16.1), (16.2) были указаны в качестве необходимых условий её решения дифференциальное уравнение Эйлера (16.8) и краевые условия (16.10). На обратную постановку вопроса: найти для заданных дифференциального уравнения и краевых условий соответствующую вариационную задачу, для которой они выражают необходимые условия, налагаемые на решение, ответить не так легко; не для всякой краевой задачи имеется соответствующая вариационная задача, она, например, не может быть поставлена, когда порядок дифференциального уравнения нечетный; но и при четном порядке уравнения не всегда имеется вариационная формулировка, соответствующая данной задаче.

Дифференциальное уравнение в самосопряженной форме

$$\sum_{\nu=0}^m (-1)^\nu [f_\nu(x) y^{(\nu)}]^{(\nu)} = \lambda \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu [g_\nu(x) y^{(\nu)}]^\nu$$

всегда можно записать как уравнение Эйлера (16.8), нужно только в (16.1) подставить

$$F = \frac{1}{2} \sum_{\nu=0}^m f_\nu [y^{(\nu)}]^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{\nu=0}^n g_\nu [y^{(\nu)}]^2. \quad (16.14)$$

¹⁾ О правилах вариационного исчисления для задачи с дополнительными условиями см. R. Courant, D. Gilbert, Methoden der mathematischen Physik, т. I, II, изд. 2, Berlin, 1931 [Р. Курант, Д. Гильберт, Методы математической физики, тт. I, II, ГИТТЛ, изд. 2, М.—Л., 1951].

В качестве (16.2) применяют главные краевые условия. Затем пытаются так задать две квадратичные формы A и B в (16.1), чтобы (16.10) соответствовало естественным краевым условиям; вопрос о том, когда это возможно, здесь вообще не исследуется. Для сопряженных полностью определенных задач на собственные значения, у которых λ не входит в краевые условия, в § 15 были получены соответствующие вариационные задачи, а для подавляющего большинства задач, возникающих в физике и технике, соответствующие вариационные задачи часто могут быть получены более коротким путем из энергетического рассмотрения. Несколько примеров этого будет дано в пп. 16.4 и 16.5.

Пусть для некоторой задачи дано подлежащее минимизации выражение $J[u]$ вида (16.1), тогда можно, как в § 15, применить метод Ритца. Подставим представление (обычно линейное) (15.7)

$$u = \sum_{i=1}^p a_i v_i(x) \quad (16.15)$$

в (16.1) и получим с помощью

$$\frac{\partial J \left[\sum_{i=1}^p a_i v_i(x) \right]}{\partial a_k} = 0, \quad k = 1, 2, \dots, p, \quad (16.16)$$

уравнения метода Ритца. В качестве $v_i(x)$ применяют линейно независимые, удовлетворяющие главным краевым условиям, достаточное число раз дифференцируемые функции.

16.4. Энергетический метод для задач о колебаниях. Пусть задана произвольная колебательная система, совершающая малые колебания около положения равновесия. Если для некоторого собственного колебания принять синусоидальную форму движения каждой отдельной частицы, то получим, что отклонение¹⁾ из положения равновесия в зависимости от времени будет $y(t) = Y \sin \omega t$. При этом примем, что все частицы колеблются в одном ритме, т. е. с одинаковой круговой частотой ω и одинаковой фазой; все частицы проходят одновременно положение равновесия и в одно время достигают своего наибольшего отклонения (амплитуда Y). Это значение Y зависит от конкретной частицы, т. е. является функцией места.

Составим теперь выражения кинетической энергии T и потенциальной U . Обозначим через ρ плотность, а через dv элемент объема тел, тогда

$$T = T(t) = \frac{1}{2} \int \rho y^2 dv = \frac{1}{2} \int \rho \omega^2 Y^2 \cos^2 \omega t dv = T^* \omega^2 \cos^2 \omega t. \quad (16.17)$$

¹⁾ $y(t)$ зависит от положения выделяемой частицы, характеризуемой координатами x_1, x_2, \dots, x_r . Вместо $y(t)$ можно бы было писать $y(t, x_1, x_2, \dots, x_r)$.

При этом

$$T^* = \frac{1}{2} \int \rho Y^2 dv \quad (16.18)$$

— так называемая «приведенная кинетическая энергия».

Выражение для потенциальной энергии зависит от рассматриваемого тела и не может быть выписано в общем виде. Потенциальная энергия представляет собой работу, которую надо совершить, чтобы вызвать изменение положения отдельных частиц, заданных с помощью $y(t)$ (например, работа против внешних сил, работа деформации и т. д.). Она для каждой рассматриваемой системы должна считаться известной и зависит указанным образом от смещений y .

Будем рассматривать колебательные процессы без затухания. Тогда по закону сохранения энергии $E = T(t) + U(t)$ в любой момент времени, т. е. при максимальном T потенциальная энергия U будет минимальна и наоборот. Определим произвольную постоянную при U так, чтобы в положении равновесия было $U = 0$; тогда полная энергия $E = T_{\max} = U_{\max}$, т. е. при колебаниях имеет место полный обмен между кинетической и потенциальной энергиями.

Тогда, согласно (16.17), $T_{\max} = \omega^2 T^*$, следовательно,

$$\omega^2 = \frac{U_{\max}}{T^*}. \quad (16.19)$$

Если известна форма колебаний, т. е. распределение амплитуды Y по объему тела, то по этой формуле можно вычислить соответствующую круговую частоту ω .

Сформулируем теперь «рэлеевский принцип» механики: если подставить в (16.19) справа вместо Y произвольно выбранную, но возможную, т. е. совместную с краевыми условиями, функцию, описывающую форму колебаний, то получившееся значение будет больше или равно квадрату наименьшей собственной частоты ω_1^2 или, выражаясь иначе, ω_1^2 есть минимум отношения Рэля (16.19), если использовать для сравнения все распределения амплитуды, совместные с краевыми условиями.

Этот принцип часто обосновывают следующим образом¹⁾: пусть Y^* — произвольно выбранное, но удовлетворяющее граничным условиям распределение амплитуды; заданная система сравнивается с другой, которая имеет лишь одну степень свободы и для которой распределение амплитуды имеет форму $y = cY^*$, причем c зависит только от t , но не от координат. Дополнительные условия связи, в общем, увеличивают жесткость тела и вместе с тем частоту основного колебания.

¹⁾ S. Timoshenko, Schwingungsprobleme der Technik, Berlin, 1932 [С. П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, Физматгиз, 1962].

Конечно, это заключение не является строгим обоснованием минимальных свойств ω_1^2 ; минимальные свойства трудно обосновать с такой общностью с помощью подобных простых рассуждений. Все же минимальный принцип выполняется строго в большом числе случаев, например, когда рассматриваемая задача приводит к задаче на собственные значения, для которой выполняются предположения теоремы в п. 15.8; в этом случае выражение (16.19) соответствует отношению Рэля (4.31). Постулируем теперь механический принцип Рэля также для тех технических задач, для которых минимальные свойства ω_1^2 не могут быть обоснованы строго, и используем его как основание метода Ритца при приближенном вычислении ω_1 .

Метод Ритца тогда проводится уже описанным в § 15 и в заключении п. 16.3 способом; составляют представление

$$Y = \sum_{i=1}^p a_i v_i, \quad (16.20)$$

где a_i — постоянные, а v_i — допустимые амплитудные функции. Вместо того чтобы находить минимум отношения $\frac{U_{\max}}{T^*}$, можно в соответствии с правилом вариационного исчисления использовать требование ($\omega^2 = \lambda$)

$$J = U_{\max} - \lambda T^* = \text{экстремум} \quad (16.21)$$

и далее составить уравнения метода Ритца в форме

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (16.22)$$

16.5. Изгибные колебания. Если при вычислении собственных частот изгибных колебаний ферм, рам, стержней и т. д. пренебрежимы побочные влияния продольных колебаний, инерции вращения и сил сдвига, то приведенная кинетическая энергия T^* и потенциальная энергия U должны задаваться выражениями:

$$T^* = \frac{1}{2} \int \rho F u^2 ds, \quad (16.23)$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int \frac{M^2}{a} ds = \frac{1}{2} \int a u'^2 ds. \quad (16.24)$$

При этом, как обычно, обозначаем: ρ — плотность, F — площадь поперечного сечения, a — жесткость на изгиб, M — изгибающий момент, s — длина дуги и, наконец, u — амплитуда (ранее обозначавшаяся через Y). Интеграл берется по всему телу, например, по всему стержню.

В качестве примера рассмотрим балку постоянного сечения, нагруженную сосредоточенной массой M . Пусть длина балки 3 м. Конфигурация и размеры системы показаны на рис. 16.2. Пусть M составляет две трети от общей

массы балки, равной ρFl . Выражения для (16.23) и (16.24) для энергий T^* и U_{\max} здесь имеют вид

$$T^* = \frac{1}{2} \int \rho F u^2 dx + \frac{1}{2} M (u(1))^2,$$

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int \alpha u'^2 dx.$$

Подставляя $M = \frac{2}{3} \rho Fl$, из (16.19) получим

$$\lambda_1 = \frac{\rho F}{\alpha} \omega_1^2 \leq R[u] =$$

$$= \frac{\int_0^3 u'^2 dx}{\int_0^3 u^2 dx + 2u^2(1)} = \frac{Z}{N}.$$

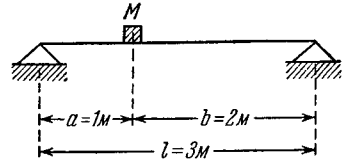


Рис. 16.2. Изгибные колебания опертой концами балки, нагруженной сосредоточенной массой.

Краевые условия здесь $u(0) = u''(0) = u(3) = u''(3) = 0$. В помещенной ниже таблице в первой строке в качестве u приведена функция $u = \sin \frac{\pi}{3} x$, удовлетворяющая всем граничным условиям, которая для основного колебания дает меньшее, следовательно, более точное значение $R[u]$, чем стоящая во второй строке функция $u = 3x - x^2$, удовлетворяющая только главным краевым условиям $u(0) = u(3) = 0$. В третьей строке приведены результаты удвоенного, в четвертой строке трехчленного представления Ритца для $R[u]$

u	Z	N	$R = \frac{Z}{N}$
$\sin \frac{\pi}{3} x$	$\frac{\pi^4}{81} \cdot \frac{3}{2}$	$\frac{3}{2} + 2 \cdot \frac{3}{4} = 3$	$\frac{\pi^4}{81} \cdot 0,5 = 0,60129$
$3x - x^2$	12	$\frac{81}{10} + 2 \cdot 4 = \frac{161}{10}$	$\frac{120}{161} = 0,7453$
$a_1 \sin \frac{\pi}{3} x +$ $+ a_2 \sin \frac{2\pi}{3} x$	$\frac{\pi^4}{81} \times$ $\times \frac{3}{2} (a_1^2 + 16a_2^2)$	$3a_1^2 + \frac{3}{2} 2a_1a_2 + 3a_2^2$	$\frac{\pi^4}{81} \cdot \frac{1}{3} (17 \pm \sqrt{241}) =$ $= \frac{\pi^4}{81} \begin{cases} 0,49193 \\ 10,84 \end{cases} =$ $= \begin{cases} 0,59159 \\ 13,03 \end{cases}$
$\sum_{v=1, 2, 4} a_v \sin \frac{v\pi x}{3}$	$\frac{\pi^4}{81} (a_1^2 + 16a_2^2 +$ $+ 256a_4^2)$	$3(a_1^2 + a_2^2 + a_4^2 +$ $+ a_1a_2 - a_1a_4 -$ $- a_2a_4)$	$\begin{cases} 0,59097 \\ 12,94 \\ 233 \end{cases}$

16.6. Пример. Крутильные колебания. В качестве следующего примера¹⁾ будет рассмотрен вал кругового сечения с насаженными на него дисками (рис. 16.3).

Ось x направим по оси цилиндра; жесткость при кручении C и момент инерции Θ на единицу длины цилиндра пусть будут постоянны. В точках $x = l_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, насажены вращающиеся массы с моментами инерции относительно оси, равными θ_i . Концевые точки $x = 0$ и $x = l$ будем считать

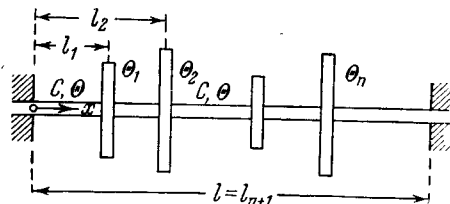


Рис. 16.3. Крутильные колебания вала с насаженными дисками.

закрепленными, а через $\varphi(x, t)$ обозначим угол, на который отклоняется от положения равновесия сечение x в момент времени t ; тогда для $\varphi(x, t) = \Phi(x) \sin \omega t$ приведенная кинетическая энергия может быть записана в виде

$$T^* = \frac{1}{2} \left[\int_0^l (\Phi'(x))^2 \Theta(x) dx + \sum_{i=1}^n \theta_i (\Phi(l_i))^2 \right], \quad (16.25)$$

а максимальная потенциальная энергия будет

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_0^l C(x) (\Phi'(x))^2 dx. \quad (16.26)$$

(Здесь для общности написаны еще $C(x)$ и $\Phi(x)$.)

Вводя

$$\lambda^* = \omega^2 \frac{\Theta}{C}, \quad D_i^* = \frac{\theta_i}{\Theta},$$

получают, согласно (16.21), соответствующую вариационную задачу (фигурирующее здесь λ^* отличается от λ в (16.21) множителем $\frac{C}{\Theta}$):

$$J^* = \int_0^l (\Phi'(x))^2 dx - \lambda^* \left[\int_0^l (\Phi(x))^2 dx + \sum_{i=1}^n D_i^* (\Phi(l_i))^2 \right] = \text{экстремум}. \quad (16.27)$$

¹⁾ Из-за разрывности производных (см. (16.28)) теоремы, сформулированные в этой книге, не могут быть доказаны для рассматриваемого случая. Это пример технического происхождения (см. п. 16.4), в котором все же можно получить вариационную задачу (16.29) на основе метода Ритца. В остальном изложенная в книге теория легко переносится на имеющиеся случаи, подобные этому, см., например, замечания в конце этого пункта; далее см. G. Temple, W. G. Bickley, *Rayleigh's Principle and its Application to Engineering*, London, 1933.

Так как концы считаются заземленными, в качестве главных краевых условий имеем $\Phi(0) = \Phi(l) = 0$, при незаземленных концах было бы $\Phi'(0) = \Phi'(l) = 0$.

Далее учитывают переходные условия в точках $x = l_i$. В то время как Φ непрерывно в точках $x = l_i$, Φ' делает там скачок. Условия скачка можно получить непосредственно из уравнений движения для вращающихся масс Θ_i , можно их также получить из вариационной задачи в соответствии с методом п. 16.1; продемонстрируем это. Если подставить $\Phi = y + \varepsilon \eta$ в (16.27) и проинтегрировать по частям, то при $l_0 = 0$, $l_{n+1} = l$ из-за

$$\int_0^l y' \eta' dx = \sum_{i=0}^n \int_{l_i}^{l_{i+1}} y' \eta' dx = - \sum_{i=0}^n \int_{l_i}^{l_{i+1}} \eta y'' dx + \sum_{i=0}^n [y' \eta]_{l_i}^{l_{i+1}}$$

получим в качестве множителя при ε уравнение (первая производная приравнивается нулю)

$$\int_0^l \eta (-y'' - \lambda^* y) dx + \sum_{i=1}^n \eta(l_i) [-y'(l_i + 0) + y'(l_i - 0) - \lambda^* D_i^* y(l_i)] = 0.$$

При этом уже использовано $\eta(0) = \eta(l) = 0$, а $y'(l_i - 0)$, соответственно $y'(l_i + 0)$, обозначает, как это принято, значение y' в точке l_i при приближении к ней справа и слева. Из последнего уравнения непосредственно получают дифференциальное уравнение $-y'' = \lambda^* y$ и условия скачка

$$y'(l_i + 0) - y'(l_i - 0) = -\lambda^* D_i^* y(l_i). \quad (16.28)$$

Численный пример. Возьмем уже обсуждавшуюся в задаче 7 п. 3.4 систему (см. рис. 3.11). При этом $l_1 = 1$ м, $l_2 = 2l_1$, $l = l_3 = 3l_1$. Вводятся «безразмерные» величины

$$x = l_1 \xi, \quad D_i = \frac{D_i^*}{l_1}, \quad \varphi(\xi) = y(l_1 \xi), \quad \varphi'(\xi) = l_1 y'(x), \quad \lambda = \lambda^* l_1^2.$$

Тогда вариационная задача (16.27) будет иметь вид

$$J[\varphi] = \int_0^3 \varphi'^2 d\xi - \lambda \left[\int_0^3 \varphi^2 d\xi + D_1 \varphi(1)^2 + D_2 \varphi(2)^2 \right] = \text{экстремум} \quad (16.29)$$

с главными краевыми условиями

$$\varphi(0) = \varphi(3) = 0 \quad (16.30)$$

и следующими из (16.28) условиями скачка:

$$\left. \begin{aligned} \varphi'(1+0) - \varphi'(1-0) &= -\lambda D_1 \varphi(1), \\ \varphi'(2+0) - \varphi'(2-0) &= -\lambda D_2 \varphi(2). \end{aligned} \right\} \quad (16.31)$$

Для случая $D_1 = 1$, $D_2 = 2$ может быть применено следующее дупараметрическое представление Ритца:

$$\varphi(\xi) = \begin{cases} a_1 \xi & \text{для } \xi \leq 1, \\ a_1 + a_2(1 - \xi) & \text{для } 1 \leq \xi \leq 2, \\ (a_1 - a_2)(3 - \xi) & \text{для } 2 \leq \xi \leq 3. \end{cases}$$

Подставляя φ в (16.29), получаем уравнение относительно Λ для вычисления приближенных значений λ :

$$J = 2(a_1^2 - a_1 a_2 + a_2^2) - \frac{\Lambda}{3}(14a_1^2 - 17a_1^2 a_2 + 8a_2^2).$$

Уравнения $\frac{\partial J}{\partial a_1} = 0$, $\frac{\partial J}{\partial a_2} = 0$ тогда дают для $\frac{\Lambda}{6} = \mu$

$$0 = \begin{vmatrix} 2 - 28\mu & 1 - 17\mu \\ 1 - 17\mu & 2 - 16\mu \end{vmatrix} = 3(1 - 18\mu + 53\mu^2)$$

и

$$\Lambda = \frac{6}{53}(9 \pm \sqrt{28}) = \begin{cases} 0,41983 & (\text{ошибка } + 1,1\%), \\ 1,6179 & (\text{ошибка } + 2,9\%). \end{cases}$$

Двучленное представление Ритца

$$\varphi = a_1 \sin \frac{\pi}{3} \xi + a_2 \sin \frac{2\pi}{3} \xi$$

приводит к

$$J = \frac{\pi^2}{3} \left(\frac{a_1^2}{2} + 2a_2^2 \right) - 3\Lambda \left(\frac{5}{4} a_1^2 + \frac{1}{2} a_1 a_2 + \frac{5}{4} a_2^2 \right),$$

дающему худшие, чем в предыдущем случае, приближения

$$\Lambda = \begin{cases} 0,4330 & (\text{ошибка } + 4\%), \\ 1,8517 & (\text{ошибка } + 18\%). \end{cases}$$

Представление Ритца с линейными функциями, проведенное вначале, лучше описывает изломы кривой φ (см. рис. 3.12).

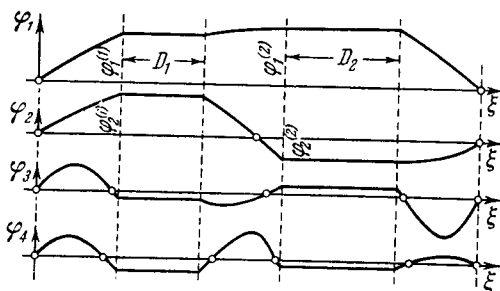


Рис. 16.4. К замене функций φ_i , ортогональных с весом, функциями ψ_i , ортогональными в обычном смысле.

В случае распределенных и в случае сосредоточенных масс можно теорию собственных значений построить в полном соответствии с гл. II и III, здесь мы лишь приведем пример свойств ортогональности. Пусть φ_i и φ_k — две собственные функции — $\varphi'' = \lambda\varphi$, подчиненные условиям (16.30) и (16.31) с различными собственными значениями, тогда можно вычислить

$$\int_0^3 \varphi_i \varphi_k d\xi + D_1 \varphi_i(1) \varphi_k(1) + D_2 \varphi_i(2) \varphi_k(2) = 0 \quad (\lambda_i \neq \lambda_k)$$

и характеризовать это соотношение как «ортогональность с весом». С помощью отрезков длины D_i , в которых функции φ_i постоянны, можно составить функции ψ_i , ортогональные в обычном смысле. Возникающее таким образом из рис. 3.12 представление дано на рис. 16.4.

16.7. Энергетический метод для дифференциальных уравнений с частными производными. Описанные в п. 16.4 энергетические методы без всяких оговорок применимы и для дифференциальных уравнений с частными производными. Мы поясним их на классическом примере однородной мембраны толщины h и плотности ρ , совершающей поперечные колебания. Поверхность мембраны в состоянии покоя покрывает односвязную область \mathfrak{B} плоскости (x, y) ; пусть мембрана закреплена по периметру и равномерно натянута; это означает, что если сделать произвольное сечение мембраны, перпендикулярное к ее средней плоскости, то в плоскости сечения не будет напряжений сдвига, а будет лишь всюду одинаковое нормальное напряжение σ .

Если обозначить через $z(x, y, t)$ отклонение мембраны из плоскости (x, y) в момент времени t , то получим, учитывая

$$z(x, y, t) = Z(x, y) \sin \omega t,$$

согласно (16.18) выражение для приведенной кинетической энергии

$$T^* = \frac{1}{2} \rho h \int \int_{\mathfrak{B}} Z^2(x, y) dx dy.$$

Потенциальная энергия U определяется увеличением площади мембраны¹⁾, т. е. при малых отклонениях посредством выражения

$$U = \frac{1}{2} \sigma h \int \int_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy.$$

Круговая частота ω , соответствующая собственному колебанию $Z(x, y)$, задается тогда, согласно (16.19), выражением

$$\lambda = \frac{\rho \omega^2}{\sigma} = \frac{\int \int_{\mathfrak{B}} \left[\left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial Z}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy}{\int \int_{\mathfrak{B}} Z^2(x, y) dx dy}. \quad (16.32)$$

Краевое условие $Z=0$ на контуре Γ позволяет записать интеграл в числителе в виде (согласно преобразованию п. 6.2 для $p=1, q=0$)

$$- \int \int_{\mathfrak{B}} Z \Delta Z dx dy, \quad (16.33)$$

¹⁾ S. Timoshenko, *Swingungsprobleme der Technik*, Berlin, 1932, [С. Тимошенко, *Колебания в инженерном деле*, Физматгиз, 1959.]

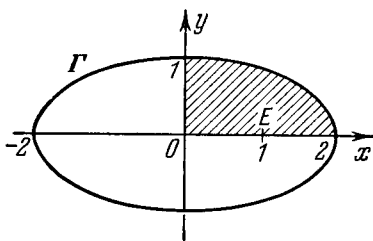
где

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

— оператор Лапласа.

Если вид функции собственного колебания неизвестен, можно, как в (16.20), (16.22), вычислить круговую частоту с помощью метода Ритца.

Пример. Эллиптическая мембрана¹⁾. Пусть контур мембраны Γ описывается эллипсом (рис. 16.5)



$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Собственные колебания $Z(x, y)$ могут быть представлены с помощью функций Матье, т. е., вообще говоря, сложным образом. Приближенно собственные значения можно здесь определить с помощью трехчленного представления Ритца

$$Z = \sum_{i=1}^3 a_i v_i(x, y).$$

Рис. 16.5. Эллиптическая мембрана.

В качестве $v_i(x, y)$, если рассматривать лишь симметричные относительно осей x и y обращаемые в нуль на Γ собственные функции, используем следующие функции:

$$v_1(x, y) = 4 - x^2 - 4y^2, \quad v_2(x, y) = x^2 v_1(x, y), \quad v_3(x, y) = y^2 v_1(x, y).$$

Тогда $\Delta Z = -10a_1 + 4(2 - 5x^2 - 2y^2)a_2 + 2(4 - x^2 - 25y^2)a_3$. При проведении метода появляется интеграл $\int \int x^{2m} y^{2n} dx dy$. На основании симметрии можно для всех интегралов ограничиться заштрихованной на рис. 16.5 областью E эллипса. Тогда интегралы

$$a_{2m, 2n} = \frac{1}{\pi} \int \int_E x^{2m} y^{2n} dx dy$$

легко вычисляются:

$$\begin{aligned} a_{00} &= 1/2, & a_{02} &= 1/8, & a_{04} &= 1/16, & a_{06} &= 5/128, & a_{08} &= 7/256, \\ a_{20} &= 1/2, & a_{22} &= 1/12, & a_{24} &= 1/32, & a_{26} &= 1/64, \\ a_{40} &= 1, & a_{42} &= 1/8, & a_{44} &= 3/80, \\ a_{60} &= 5/2, & a_{62} &= 1/4, \\ a_{80} &= 7. \end{aligned}$$

С помощью этих интегралов можно

$$J = - \int \int_E (Z \Delta Z) dx dy - \lambda \int \int_E Z^2 dx dy$$

¹⁾ E. Trefftz, Über Fehlerabschätzung bei Berechnung von Eigenwerten. Math. Ann. 108 (1933), 595—602.

выразить через a_1, a_2, a_3 и получить из условия совместимости (16.22) уравнение для Λ , дающее приближения собственных значений λ :

$$\begin{vmatrix} 10 - \frac{8}{3}\Lambda & \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda & \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\Lambda \\ \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda & \frac{46}{3} - \frac{8}{5}\Lambda & \frac{5}{6} - \frac{2}{15}\Lambda \\ \frac{5}{3} - \frac{1}{3}\Lambda & \frac{5}{6} - \frac{2}{15}\Lambda & \frac{47}{24} - \frac{1}{10}\Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Заменяя $2\Lambda = 5(2 - \nu)$, получаем

$$\begin{vmatrix} -1 + 2\nu & \nu & \nu \\ 5\nu & 11 + 6\nu & 1 + 2\nu \\ 5\nu & 1 + 2\nu & 35 + 6\nu \end{vmatrix} = 4(6\nu^3 + 73\nu^2 + 124\nu - 96) = 0.$$

Решая это кубическое уравнение, находим

$$\Lambda = \begin{cases} 3,5692, \\ 12,045, \\ 29,803. \end{cases}$$

При проведении метода Ритца с двучленным представлением, при котором отбрасывается член с $v_3(x, y)$, получается

$$\begin{vmatrix} 10 - \frac{8}{3}\Lambda & \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda \\ \frac{20}{3} - \frac{4}{3}\Lambda & \frac{46}{3} - \frac{8}{5}\Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

и отсюда

$$\Lambda = \frac{5}{14}(22 \pm \sqrt{141}) = \begin{cases} 3,6163, \\ 12,098. \end{cases}$$

16.8. Проблема потери устойчивости. Для этих задач также можно получить подлежащие минимизации выражения и, с помощью энергетического подхода, установить возможность применения метода Ритца, однако входить в детали мы здесь не будем¹⁾.

16.9. Графическое проведение метода Ритца. Метод Ритца во всех случаях, когда в согласии с п. 13.6 можно провести графически метод последовательных приближений, точно так же удобно реализовать графически. Это имеет место в таких важных случаях, когда уравнения имеют вид (13.18) или (13.19):

$$M[y] = (-1)^n \lambda [g_n(x) y^{(n)}]^n \quad (16.34)$$

и

$$(-1)^m [f_m y^{(m)}]^{(m)} = \lambda N[y]. \quad (16.35)$$

В дальнейшем мы ограничимся уравнениями (16.34); в случае уравнения (16.35) поступают вполне аналогично. В п. 13.6 было показано,

¹⁾ В задаче о продольном изгибе прямого стержня метод применен в работах: J. Ratzersdorfer, Die Knickfestigkeit von Stäben und Stabwerken, Wien, 1936; K. Marguerre, Über die Behandlung von Stabilitätsproblemen mit Hilfe der Energetischen Methode, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), 57—73; DVL-Jahrbuch, 1938, 252—262.

как с помощью только интегрирования (избегая графических дифференцирований) можно составить две функции $F_0(x)$ и $F_1(x)$, которые удовлетворяют условиям метода последовательных приближений и для которых, в частности, справедливо

$$M[F_1] = H(x) = (-1)^n [g_n(x) F_0^{(n)}]^{(n)}. \quad (16.35)$$

При использовании p -членного представления Ритца (15.7)

$$u = \sum_{r=1}^p a_r v_r(x), \quad (16.36)$$

метод последовательных приближений проводят p раз (с линейно независимыми функциями) и составляют функции $F_{0(1)}, F_{0(2)}, \dots, F_{0(p)}, F_{1(1)}, F_{1(2)}, \dots, F_{1(p)}, H_{(1)}, H_{(2)}, \dots, H_{(p)}$; эти функции связаны друг с другом соотношениями

$$M[F_{1(r)}] = H_{(r)} = (-1)^n [g_n(x) F_{0(r)}^{(n)}]^{(n)}, \quad r = 1, 2, \dots, p,$$

и удовлетворяют необходимым краевым условиям. В соответствии со сказанным выше это возможно благодаря численному интегрированию.

Далее, функции $F_{1(r)}$ можно использовать в качестве исходных функций $v_r(x)$ в представлении Ритца (16.36) и определить посредством численных или графических квадратур величины (15.9)

$$\left. \begin{aligned} m_{rs} &= \int_a^b v_r H_{(s)} dx, \\ n_{rs} &= \int_a^b (-1)^n v_r [g_n(x) v_{(s)}^{(n)}]^{(n)} dx, \quad 1 \leq r, s \leq p; \end{aligned} \right\} \quad (16.37)$$

подставляя эти величины в (15.15), получим уравнения для определения приближений Ритца Λ . Дифференцирование $[g_n v_{(1)}^{(n)}]^{(n)}$ во втором уравнении (16.37) только кажущееся, так как в п. 13.6 было описано, как можно, исходя из высших производных $F_{1(s)}^{(2m)}$, получить все низшие производные $F_{1(s)}^{(v)}$ с $v < 2m$ с помощью интегрирования; выражение $[g_n v_{(s)}^{(n)}]^{(n)}$ можно, следовательно, найти из уже имеющихся $F_{1(s)}^{(v)}$ без дифференцирования. Пример приведен в п. 16.10.

16.10. Графическое получение уравнений Граммеля. В п. 13.7 было показано, что в методе последовательных приближений при получении верхних границ μ_1 и μ_2 и нижней границы для первого собственного числа λ_1 во многих случаях можно, проделав вдвое меньшую работу, составить верхнюю границу μ_1 , точность которой достаточна в технических задачах, особенно если исходные функции подобраны удачно.

Это соответствует тому, что в этих случаях при проведении метода Ритца точно так же (во всяком случае, что касается составления уравнений Ритца) можно сократить работу, минимизируя, как в п. 15.1, не μ_2 , а μ_1 . Тогда получают уравнения Граммеля (15.30).

Поясним это, как и в п. 13.7, на примере изгибных колебаний заземленного на одном конце стержня (с теми же обозначениями, что и в п. 13.7)

$$M[y] = (\alpha y'')'' = \lambda \rho F y = \lambda g_0 y, \\ y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0.$$

Исходя из p линейно независимых функций $F_{0(r)}$, $r = 1, 2, \dots, p$ удовлетворяющих главным краевым условиям

$$F_{0(r)} = F'_{0(r)} = 0 \quad \text{для } x = 0,$$

определяют графически при помощи p веревочных многоугольников функции $G_{(r)}$ из

$$G''_{(r)} = \rho F F_{0(r)}, \quad G_{(r)} = G'_{(r)} = 0 \quad \text{для } x = l.$$

Для уравнений Галеркина (15.14) еще раз вычерчивают p веревочных многоугольников и определяют $F_{1(r)}$ из

$$F''_{1(r)} = \frac{1}{\alpha(x)} G_{(r)}, \quad F_{1(r)} = F'_{1(r)} = 0 \quad \text{для } x = 0.$$

Для уравнений Граммеля (15.30) нужны только первые p веревочных многоугольников и не нужны функции $F_{1(r)}$, так как величины m_{rs}^{\square} и n_{rs}^{\square} уже выражены через $F_{0(r)}$ и $G_{(r)}$. Если заменить $v_r(x)$ на $F_{1(r)}$, то получим, согласно (15.28) и (15.29),

$$m_{rs}^{\square} = \int_0^l \sigma F F_{0(r)} F_{0(s)} dx, \\ n_{rs}^{\square} = \int_0^l F_{1(r)} M[F_{1(s)}] dx = \int_0^l F_{1(r)} G''_{(s)} dx = \\ = \int_0^l F''_{1(r)} G_{(s)} dx = \int_0^l \frac{1}{\alpha} G_{(r)} G_{(s)} dx.$$

Следовательно, можно составить уравнения Граммеля (15.30).

Сравнительно легко определить также функции $F_{1(r)}$ при помощи построения последующих веревочных многоугольников, так что по (15.9) можно найти величины

$$m_{rs} = \int_0^l \rho F v_r F_{0(s)} dx = n_{rs}^{\square}, \quad n_{rs} = \int_0^l \rho F v_r v_s dx$$

и, решая (15.15), получить те же значения, что и при решении по (15.30).

Пример. Рассмотрим тот же пример, что и в п. 13.7 (см. рис. 13.8), а именно, изгибные колебания заземленного на одном конце стержня

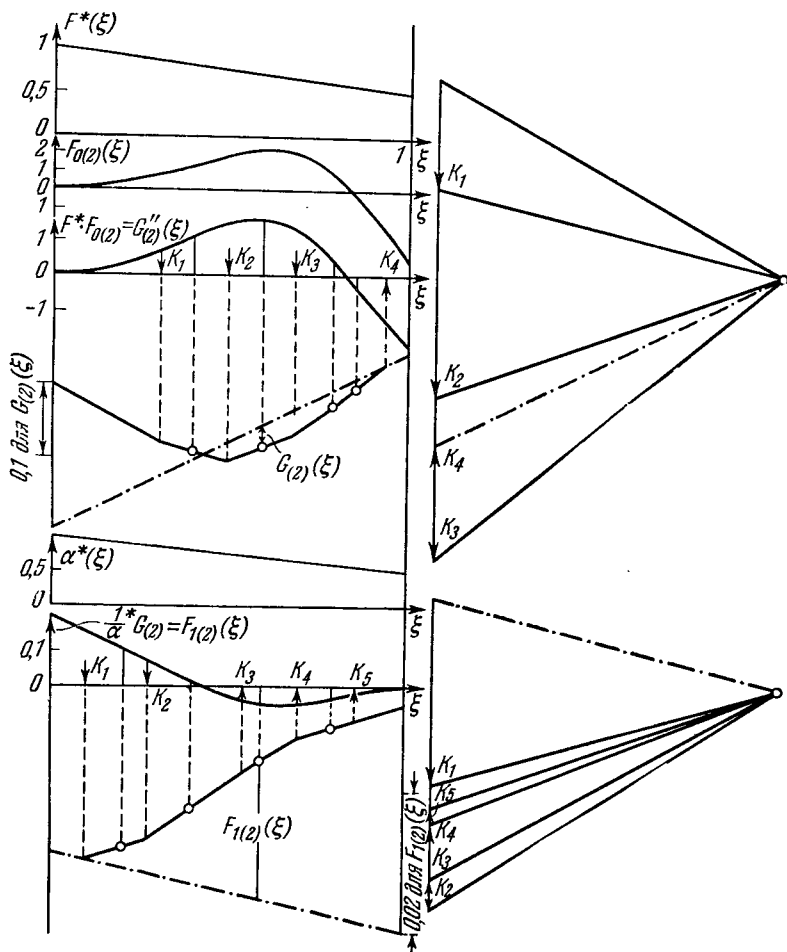


Рис. 16.6. Пример графического проведения метода Ритца.

с переменной жесткостью на изгиб. Соответствующее (записанное в безразмерном виде) дифференциальное уравнение (13.25) имеет вид

$$(\alpha^* y'')'' = \lambda^* F^* y,$$

Показанные на рис. 16.6 функции α^* , F^* перенесены из рис. 13.8, функции $F_0(\xi)$, $G(\xi)$ и $F_1(\xi)$ рис. 13.8 будут дальше использоваться в качестве функций $F_{0(1)}$, $G_{(1)}$ и $F_{1(1)}$. Возьмем теперь двучленное представление

Ритца; для этого применим еще раз графическое интегрирование с другой функцией $F_{0(2)}$. Функции $F_{0(2)}$ и $F_{0(1)}$ должны быть линейно независимыми и первая из них на рис. 16.6 задана произвольно так, как представляют первое высшее колебание. Совершенно не требуется, чтобы $F_{0(2)}$ передавало форму высшего колебания; в действительности графическое построение показывает, что $F_{0(2)}$ имеет заметную компоненту в направлении первого собственного колебания (основного тона); конструируемая с помощью $F_{0(2)}$ функция $F_{1(2)}$ по своей форме близка к основному колебанию, в частности, $F_{1(2)}$ не имеет больше нулевых точек на отрезке $0 < \xi < 1$.

Первый веревочный многоугольник дает функцию $G_2(\xi)$; смысл построения и масштаб те же, что и в примере п. 13.7. Теперь могут быть составлены уравнения Граммеля. Из п. 13.7 возьмем величины

$$m_{11}^{\square} = a_0 = 1,337, \quad n_{11}^{\square} = a_1 = 0,0620.$$

Заново определим численное значение интегралов (вычисленных здесь по методу Симпсона)

$$m_{12}^{\square} = \int_0^1 F^* F_{0(1)} F_{0(2)} d\xi = -0,174, \quad m_{22}^{\square} = \int_0^1 F^* F_{0(2)}^2 d\xi = 1,678,$$

$$n_{12}^{\square} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha^*} G_{(1)} G_{(2)} d\xi = 0,0151, \quad n_{22}^{\square} = \int_0^1 \frac{1}{\alpha^*} G_{(2)}^2 d\xi = 0,00642.$$

Из уравнений Граммеля тогда получаем

$$\begin{vmatrix} 1,337 - 0,0620\Lambda & -0,174 - 0,0151\Lambda \\ -0,174 - 0,0151\Lambda & 1,678 - 0,00642\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

и отсюда

$$\Lambda = \begin{cases} 19,3, \\ 674. \end{cases}$$

Интегрируя $G_{(2)}$ с помощью второго веревочного многоугольника, найдем $F_{1(2)}$; теперь можно составить уравнения Галеркина (15.15). Для этого, кроме уже известных величин $m_{rs} = n_{rs}^{\square}$ ($r, s = 1, 2$) и $n_{11} = a_2 = 0,00322$, заново вычислены интегралы

$$n_{12} = \int_0^1 F^* F_{1(1)} F_{1(2)} d\xi = 0,000824, \quad n_{22} = \int_0^1 F^* F_{1(2)}^2 d\xi = 0,000216.$$

Тогда из уравнений (15.15)

$$0 = \begin{vmatrix} 0,0620 - 0,003220\Lambda & 0,0151 - 0,000824\Lambda \\ 0,0151 - 0,000824\Lambda & 0,00642 - 0,000216\Lambda \end{vmatrix}$$

и отсюда

$$\Lambda = \begin{cases} 19,20, \\ 535,0. \end{cases}$$

16.11. Упражнения. 1. Вычислить приближенное значение собственной частоты основного тона и первого высшего для изгибных колебаний балки, изображенной на рис. 16.7 (см. также задачи 5, 6 п. 3.5). Как и в п. 3.5, введем сокращение

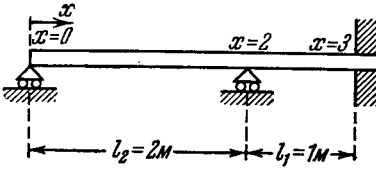


Рис. 16.7. Изгибные колебания защемленной на одном конце балки с двумя опорами.

$$k = l_1^4 \sqrt{\frac{\mu}{\alpha} \omega^2}.$$

Тогда получим

$$k^4 = \min \frac{\int_0^3 u''^2 dx}{\int_0^3 u^2 dx},$$

где u пробегает область допустимых функций, т. е. удовлетворяет краевым условиям (рис. 16.7):

$$u(0) = u(2) = u(3) = u'(3) = 0, \\ u'(2) \text{ непрерывна.}$$

Р а с ч е т. В качестве двух допустимых функций возьмем, например,

$$v_1 = \sin \frac{\pi x}{6} - 2 \sin \frac{2\pi x}{6} + \sin \frac{3\pi x}{6} - \sin \frac{4\pi x}{6},$$

$$v_2 = \sin \frac{\pi x}{6} + 2 \sin \frac{3\pi x}{6} + \sin \frac{5\pi x}{6}.$$

Если принять

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2, \quad \left(\frac{6k}{\pi}\right)^4 = \mu, \quad \frac{512}{315\pi} = \sigma$$

и учесть, что

$$\int_0^3 \sin \frac{k\pi x}{6} \sin \frac{l\pi x}{6} dx = \begin{cases} 0 & \text{для } k-l \text{ четных, } k \neq l, \\ \frac{3}{2} & \text{для } k=l, \\ \frac{3}{\pi} \left[\frac{(-1)^{\frac{k-l-1}{2}}}{k-l} - \frac{(-1)^{\frac{k+l-1}{2}}}{k+l} \right], & \text{для } k-l \text{ не-} \\ & \text{четных,} \end{cases}$$

то (15.15) дает

$$\begin{vmatrix} 402 - 552\sigma - \mu(7 - 12\sigma) & 163 - 940\sigma - \mu(3 - 10\sigma) \\ 163 - 940\sigma - \mu(3 - 10\sigma) & 950 - 6\mu \end{vmatrix} = 0,$$

откуда получаем

$$\mu = \begin{cases} 146,74, \\ 1775,0 \end{cases}$$

и

$$k = \begin{cases} 1,8224 & (\text{ошибка } +0,7\%), \\ 3,3990 & (\text{ошибка } +3,0\%). \end{cases}$$

2. Применить для приведенного в конце п. 15.1 примера

$$-y'' = \lambda y, \quad y'(0) = y(1) = 0$$

двучленное представление Ритца

$$u = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x)$$

с функциями сравнения $v_1 = 1 - x^2$, $v_2 = 1 - x^3$.

Результат. Уравнение (15.15) для этого случая имеет вид

$$\begin{vmatrix} \frac{4}{3} - \frac{8}{15} \Lambda & \frac{3}{2} - \frac{7}{12} \Lambda \\ \frac{3}{2} - \frac{7}{12} \Lambda & \frac{9}{5} - \frac{9}{14} \Lambda \end{vmatrix} = 0$$

и его корни

$$\Lambda = 6/65 (141 \pm \sqrt{13056}) = \begin{cases} 2,46803 & (\text{ошибка } + 0,03\%) \\ 23,563 & (\text{ошибка } + 6,0\%). \end{cases}$$

3. Вычислить для отдельных допустимых функций отношения Рэля и применить двучленное представление Ритца для случая продольного изгиба шарнирно опертого с одной стороны и защемленного — с другой стержня (рис. 12.3, стр. 188) с переменной жесткостью на изгиб

$$[(2-x)y''']' = -\lambda y'', \quad y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0$$

(см. пример 2 п. 12.6).

Результат. Согласно (15.2) отношение

$$K[u] = \frac{Z^*}{N^*} = \frac{\int_0^1 (2-x) u''^2 dx}{\int_0^1 u'^2 dx}$$

задано в следующей таблице для некоторых функций u :

Функция u	Выполнение краевых условий	Числитель Z^*	Знаменатель N^*	$K[u] = \frac{Z^*}{N^*}$
$x^2 - x^3$	только главные	5	$\frac{2}{15}$	$\frac{75}{2} = 37,5$ (ошибка + 28%)
$3x^2 - 5x^3 + 2x^4$	все	$\frac{57}{5}$	$\frac{12}{35}$	$\frac{133}{4} = 33,25$ (ошибка + 13%)
$\sin \pi x - \frac{1}{2} \sin 2\pi x$	все	$\pi^2 \left(\frac{15\pi^2}{4} - \frac{32}{9} \right)$	π^2	$\frac{15}{4} \pi^2 - \frac{32}{9} = 33,45$ (ошибка + 14%)

Представление Ритца $u(x) = a_1 v_1(x) + a_2 v_2(x)$ с удовлетворяющими только главным краевым условиями функциями

$$v_1(x) = x^2 - x^3, \quad v_2 = x^3 - x^4$$

в соответствии с (15.27) приводит к

$$\begin{vmatrix} 5 - \frac{2}{15} \Lambda & \frac{23}{5} - \frac{1}{10} \Lambda \\ \frac{23}{5} - \frac{1}{10} \Lambda & \frac{27}{5} - \frac{3}{35} \Lambda \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\Lambda = 80 \pm 2 \sqrt{578} = \begin{cases} 31,917 & (\text{ошибка } \pm 8\%), \\ 128,08. \end{cases}$$

Рассмотренные здесь представления еще очень грубы, и полученные результаты хуже, чем в п. 12.6.

4. Для рассмотренной в примере 4 п. 14.6 задачи (см. рис. 14.2, стр. 217)

$$-y'' = \lambda (2 + \cos x) y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

ввести n -членное представление Ритца

$$u = \sum_{v=1}^n a_v \sin vx.$$

Результат. Здесь

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} [u'^2 - \lambda (2 + \cos x) u^2] dx = \sum_{v=1}^n (v^2 - 2\lambda) a_v^2 - \sum_{v=1}^n a_v a_{v+1},$$

и уравнение (15.15) после отбрасывания постоянных множителей примет вид

$$F_n(\Lambda) = \begin{vmatrix} 2 - 4\Lambda & -\Lambda & 0 & \dots & 0 \\ -\Lambda & 8 - 4\Lambda & -\Lambda & \dots & 0 \\ 0 & -\Lambda & 18 - 4\Lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2n^2 - 4\Lambda \end{vmatrix} = 0.$$

При $n \rightarrow \infty$ можно перейти к уравнению, полученному в п. 25.6 методом цепных дробей. По рекуррентной формуле

$$F_n = (2n^2 - 4\Lambda) F_{n-1} - \Lambda^2 F_{n-2}, \quad n = 3, 4, 5, \dots$$

можно вычислить полиномы высоких степеней F_n и исследовать сходимость приближений Ритца. Для $n \leq 4$ получим следующие приближенные значения.

Приближенные значения при n -членном представлении Ритца

n	Для λ_1	Для λ_2	Для λ_3	Для λ_4
1	0,5	—	—	—
2	0,490059	2,17660	—	—
3	0,49003570	2,06120	5,09162	—
4	0,49003562	2,05936	4,67187	9,3529

Из таблицы видно, что, вообще говоря, высшие приближенные значения получаются неудачно; следовательно, например, для того чтобы получить приближение для собственного значения λ_3 , необходимо не трехчленное,

а по меньшей мере четырехчленное представление Ритца. Однако можно при вычислении высших собственных значений избежать дополнительных вычислений, связанных с увеличением числа свободных параметров, если использовать представление, которое требует ортогональности к низшим, уже вычисленным с определенной степенью точности собственным функциям. Пусть в рассматриваемом примере в качестве приближения первой собственной функции y_1 получена функция Y_1 :

$$Y_1 = \sin x + \varepsilon \sin 2x, \quad \varepsilon = \frac{1}{2} (\sqrt{10} - 3) = 0,0081139;$$

применим теперь две функции представления

$$u_1 = a_1 (\delta \sin x + \sin 2x), \quad u_2 = a_2 \sin 3x,$$

которые удовлетворяют условию ортогонализации

$$\int_0^{\pi} (2 + \cos x) Y_1(x) u_j(x) dx = 0 \quad \text{для } j = 1 \text{ и } 2.$$

Это дает $\delta = -\frac{1+4\varepsilon}{4+\varepsilon} = -4\varepsilon = -0,324556$. Получаемое с этим представлением уравнение

$$\begin{vmatrix} 2\delta^2 + 8 - \Lambda(4\delta^2 + 2\delta + 4) & -\Lambda \\ -\Lambda & 18 - 4\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

дает

$$\Lambda = \begin{cases} 2,06122, \\ 5,0892, \end{cases}$$

т. е. приблизительно такую же точность, как трехчленное представление без обращения к ортогонализации¹⁾.

5. Для задачи на собственные значения

$$-y'' = \lambda y, \quad y(-1) = y(1) = 0$$

ввести представление Ритца

$$u = \sum_{v=1}^p a_v (1 - x^{2v})$$

для колебаний симметричной формы.

Результат. Для $p = 1$ получаем с $u = 1 - x^2$ отношение Рэля

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{5}{2} = 2,5.$$

Для $p = 2$ приближенные по Ритцу собственные значения будут следующие:

$$\lambda_{1,2}^{(2)} = 14 \pm \sqrt{133} = \begin{cases} 2,4674374, \\ 25,53256 \end{cases}$$

при точных значениях

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,46740110027, \quad \lambda_2 = \frac{9\pi^2}{4} = 22,206610.$$

¹⁾ См. W. J. D u n k a n, D. D. L i n d s a y, Methods for Calculating the Frequencies of Overtones, Reports and Memoranda № 1888 (4207), Aeronautical Research Committee, 1938.

При трехчленном представлении ($p=3$) получаем, положив $\lambda = \frac{5-\mu}{2}$, кубическое уравнение для μ $\mu^3 + 210\mu^2 + 6735\mu = 440$ и для λ_1 исключительно хорошее значение $\lambda_1^{(3)} = 2,4674011087$.

6. Решить с помощью представления Ритца $u = a_1x^2 + a_2x^3$ пример $y^{IV} = \lambda y$, $y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$.

Результат. Корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 4 - \frac{1}{5} \Lambda & 6 - \frac{1}{6} \Lambda \\ 6 - \frac{1}{6} \Lambda & 12 - \frac{1}{7} \Lambda \end{vmatrix} = 12 - \frac{34}{35} \Lambda + \frac{\Lambda^2}{1260} = 0$$

получаются следующие:

$$\Lambda = \begin{cases} 12,4802 & (\text{ошибка } + 1\%), \\ 1211,52. \end{cases}$$

7. Для обсуждавшегося в задаче 5 п. 11.4 и задаче 5 п. 14.6 сжатого стержня введем удовлетворяющее всем краевым условиям представление Ритца

$$y^{IV} + 20y = -\lambda y'', \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0, \\ u = a_1(5 - 6x^2 + x^4) + a_2(9x^2 - 14x^4 + 5x^6).$$

При обозначении $\mu = \frac{3}{2} \Lambda$ получим для μ уравнение

$$\begin{vmatrix} 8899 - 561\mu & 2014 - 121\mu \\ 2014 - 121\mu & \frac{7}{13} \cdot 17911 - 281\mu \end{vmatrix} = 0$$

и

$$\Lambda = \begin{cases} 10,5730968 & (\text{ошибка } + 0,00001\%), \\ 24,036371 & (\text{ошибка } + 0,4\%). \end{cases}$$

Если бы пример решался только с a_1 , то отношение Рэля дало бы результат

$$\Lambda = \frac{1618}{153} = 10,57516 \quad (\text{ошибка } + 0,02\%).$$

8. Для задачи

$$y^{IV} + A[(l-x)y']' = \lambda y, \quad y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0$$

применить представление Ритца $u = a_1x^2 + a_2x^3$ и сравнить значения, полученные для $A=2$, $l=1$ с соответствующими результатами задачи 7 п. 14.6.

Результат. Корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 4 - \frac{A}{3} l^3 + \frac{1}{5} \Lambda l^4 & 6 - \frac{3}{10} \Lambda l^3 + \frac{1}{6} \Lambda l^4 \\ 6 - \frac{3}{10} \Lambda l^3 + \frac{1}{6} \Lambda l^4 & 12 - \frac{3}{10} \Lambda l^3 + \frac{1}{7} \Lambda l^4 \end{vmatrix} = 0$$

дадут приближения собственных значений

$$\Lambda = \frac{6}{l^4} (8C - 102 \pm \sqrt{9984 - 1072C + 29C^2}),$$

здесь обозначено $C = \frac{1}{10} Al^3$; для $A = 2$, $l = 1$ получается

$$\Lambda = \begin{cases} 9,31706 \\ 1195,5. \end{cases}$$

9. Для задачи

$$y^{IV} = \lambda y, \quad y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$$

ввести нелинейное, удовлетворяющее главным граничным условиям представление Ритца

$$u = 1 - \cos ax.$$

Результат. Имеем

$$R[u] = \frac{\int_0^1 u''^2 dx}{\int_0^1 u^2 dx} = \frac{a^4 (2a + \sin 2a)}{6a - 8 \sin a + \sin 2a}.$$

Подставляя вместо a разные значения, например $a = 1, 2, 3$, получают при интерполяции наименьшее значение R для $a \approx 1,85$ и соответствующее $R = 12,89$ (ошибка $+4\%$).

10. Применить метод Ритца к интегро-дифференциальному уравнению¹⁾

$$y^{IV} - 20y'' + k \int_{-1}^{+1} y dx = \lambda (1 - x^2) y, \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0.$$

Решение. В отношении Рэлея

$$R[u] = \frac{\int_{-1}^{+1} (u''^2 + 20u'^2) dx + k \left(\int_{-1}^{+1} u dx \right)^2}{\int_{-1}^{+1} (1 + x^2) u^2 dx} = \min$$

вводится представление $u = (1 - x^2)(a + bx^2)$ и получается

$$\begin{vmatrix} \frac{23}{3} + \frac{2}{9} k - \frac{16}{105} \Lambda & \frac{7}{3} + \frac{2}{45} k - \frac{8}{315} \Lambda \\ \frac{7}{3} + \frac{2}{45} k - \frac{8}{315} \Lambda & \frac{661}{105} + \frac{2}{225} k - \frac{32}{3465} \Lambda \end{vmatrix} = 0;$$

для $k = 200$

$$\Lambda = \begin{cases} 331,73, \\ 1165,7. \end{cases}$$

¹⁾ К. Klöppel, K. H. Lie, Lotrechte Schwingungen von Hängebrücken. Ing. Arch., 13 (1942), 211—266.

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ МАТРИЦ

В этой главе в большей степени, чем в других, у читателя предполагаются знания математики и навык математического мышления. Последующее изложение не является введением в теорию матриц, а должно лишь показать тем, кто уже немного знаком с матрицами, аналогию между задачами на собственные значения для дифференциальных уравнений, интегральных уравнений и матриц.

Так, будут предполагаться известными основные понятия элементарной матричной алгебры, такие, например, как понятие произведения двух матриц, квадрата матрицы \mathfrak{A}^2 , произведения двух квадратных матриц, обратной матрицы \mathfrak{A}^{-1} и т. д. *). Предполагается также, что понятие ортогональности, эрмитовости и унитарности частично знакомо читателю; однако определения этих понятий будут в краткой форме даны еще раз. Почти всегда будут рассматриваться комплексные матрицы, хотя для многих приложений можно было бы ограничиться матрицами с действительными элементами. Но как раз в последнее время комплексные матрицы появились в различных областях приложений, например, при исследованиях устойчивости линейных колебательных систем со сдвинутыми по фазе силами, в квантовой физике и т. д., так что в основу изложения для общности положены комплексные матрицы. Кроме того, благодаря этому изложение становится значительно более законченным. Однако тот, кто интересуется только действительными матрицами, может каждой теореме, сформулированной для комплексных матриц, легко сопоставить соответствующую теорему для действительных матриц, используя тот факт, что для действительных матриц совпадают понятия симметричности и эрмитовости и понятия ортогональности и унитарности. Впрочем, понимание материала должны облегчить приводимые примеры.

*) Подробнее о матрицах см., например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, изд. 2, «Наука», 1966; А. П. Мишина и И. В. Проскураков, Высшая алгебра, СМБ, изд. 2, «Наука», 1965; Д. К. Фаддеев, В. Н. Фаддеева, Вычислительные методы линейной алгебры, изд. 2, Физматгиз, 1963.

§ 17. Основные сведения о задачах на собственные значения для матриц

17.1. Обозначения. Матрицы мы будем обозначать готическими буквами, например

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

а также сокращенно: $\mathfrak{A} = (a_{jk})$. Элементы матрицы могут быть как действительными, так и комплексными. Если все a_{jk} действительны, матрица называется действительной, в противном случае — комплексной.

В дальнейшем мы будем рассматривать только квадратные матрицы, т. е. матрицы, у которых совпадают число строк и число столбцов. Нам, кроме того, встретятся матрица-строка ($n = 1$) и матрица-столбец ($m = 1$). Оба последних типа матриц мы будем также называть векторами и обозначать строчными готическими буквами.

Матрица, получающаяся из \mathfrak{A} заменой строк столбцами (для квадратной матрицы — отражением относительно главной диагонали), называется транспонированной (или «отраженной») относительно \mathfrak{A} и обозначается штрихом:

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}, \text{ или, короче, } \mathfrak{A}' = (a_{kj}).$$

Так, например, матрицы

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ и } \mathfrak{x}' = (x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (17.1)$$

транспонированы друг относительно друга.

Замена в матрице \mathfrak{A} всех элементов a_{jk} комплексно сопряженными \bar{a}_{jk} коротко обозначается чертой над \mathfrak{A} :

$$\bar{\mathfrak{A}} = (\bar{a}_{jk}).$$

Квадратную матрицу \mathfrak{E} называют единичной матрицей n -го порядка, если все элементы главной диагонали равны единице, а остальные равны нулю:

$$\mathfrak{E} = (\delta_{jk}), \quad \text{где } \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{для } j = k, \\ 0 & \text{для } j \neq k. \end{cases}$$

Квадратную матрицу называют вырожденной (соответственно невырожденной), если ее определитель

$$\det \mathfrak{A} = |a_{jn}|$$

равен нулю (соответственно не равен нулю). Для каждой невырожденной матрицы \mathfrak{A} существует обратная ей однозначно определенная матрица \mathfrak{A}^{-1} такая, что

$$\mathfrak{A}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{A}^{-1} = \mathfrak{E}.$$

Имеют место следующие соотношения:

$$\left. \begin{aligned} (\mathfrak{A}\mathfrak{B})' &= \mathfrak{B}'\mathfrak{A}', & \overline{(\mathfrak{A}\mathfrak{B})} &= \overline{\mathfrak{A}}\overline{\mathfrak{B}}, \\ (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^{-1} &= \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}^{-1}, & (\mathfrak{A}^{-1})' &= (\mathfrak{A}')^{-1}, & \overline{(\mathfrak{A}^{-1})} &= \overline{(\mathfrak{A})}^{-1}, \end{aligned} \right\} \quad (17.2)$$

справедливые для любых квадратных матриц; последние три равенства верны при дополнительном условии невырожденности \mathfrak{A} и \mathfrak{B} .

17.2. Матрицы с особыми свойствами. Матрица \mathfrak{A} называется симметричной, если она равна своей транспонированной, т. е. если она при зеркальном отображении относительно главной диагонали переходит сама в себя: $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$.

При переходе к комплексным матрицам оказывается, что большее значение имеет понятие «эрмитовой»¹⁾ матрицы, а не «симметричной», а именно, матрица \mathfrak{A} называется эрмитовой, если она при транспонировании переходит в комплексно сопряженную:

$$\mathfrak{A}' = \overline{\mathfrak{A}} \quad \text{или также} \quad \overline{\mathfrak{A}'} = \mathfrak{A};$$

следовательно, попарно симметричные относительно главной диагонали элементы матрицы комплексно сопряжены друг другу, а на главной диагонали стоят только действительные числа. Например, матрица

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 + 3i \\ 1 - 3i & -1 \end{pmatrix} \quad \text{эрмитова.}$$

В действительной области понятия симметричности и эрмитовости совпадают.

Матрица \mathfrak{A} называется кососимметричной (антисимметричной), если

$$\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}',$$

если, следовательно, при отражении относительно главной диагонали матрица переходит в саму себя, умноженную на -1 ; на главной диагонали тогда стоят нули.

¹⁾ Ш. Эрмит (Charles Hermite) родился 24 декабря 1822 г. в Лотарингии. Его основные работы посвящены теории чисел, алгебре, эллиптическим и другим специальным функциям. Особенно известно его доказательство трансцендентности числа e . Умер в 1901 г.

Матрица \mathfrak{A} , обладающая свойствами

$$\mathfrak{A} = -\bar{\mathfrak{A}}' \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}' = -\bar{\mathfrak{A}},$$

называется «антиэрмитовой»; у антиэрмитовой матрицы на главной диагонали стоят чисто мнимые числа (или нули); например, матрица

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 + 3i \\ -1 + 3i & -2i \end{pmatrix} \quad \text{антиэрмитова.}$$

Матрица \mathfrak{A} называется инволютивной, соответственно полуинволютивной, если ее квадрат \mathfrak{A}^2 равен единичной матрице \mathfrak{E} , соответственно $-\mathfrak{E}$. Для полуинволютивной матрицы $\mathfrak{A}^4 = \mathfrak{E}$.

Матрица \mathfrak{A} называется ортогональной, если

$$\mathfrak{A}' = \mathfrak{A}^{-1} \quad \text{или, следовательно,} \quad \mathfrak{A}\mathfrak{A}' = \bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A} = \mathfrak{E}.$$

Понятием, имеющим в комплексной области такой же смысл, как ортогональность матрицы в действительной области, является понятие унитарности матрицы. Матрица \mathfrak{A} называется унитарной, если

$$\bar{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{A}^{-1}, \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}' = \bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A} = \mathfrak{E}.$$

Так как модуль определителя матрицы \mathfrak{A} не изменится, если перейти к комплексно сопряженной матрице $\bar{\mathfrak{A}}$ или к транспонированной матрице \mathfrak{A}' , то из

$$\det \mathfrak{A} \det \mathfrak{A}' = 1 \quad \text{или} \quad \det \mathfrak{A} \cdot \det \bar{\mathfrak{A}}' = 1$$

следует, что как ортогональная, так и унитарная матрицы имеют не равный нулю определитель с модулем 1.

Названные здесь свойства позволяют составить «звезду свойств» такую, что соединенные по три одинаковыми линиями свойства некоторой матрицы связаны между собой в том смысле, что из любых двух с необходимостью вытекает третье; например, связаны вместе действительность матрицы, ортогональность и унитарность, или ортогональность, полуинволютивность и кососимметричность и т. д. (см. рис. 17.1).

В таблице VIII сопоставлены названные здесь свойства и приведены соответствующие примеры.

Для дальнейшего примем, что матрица называется нормальной, если $\mathfrak{A}\bar{\mathfrak{A}}' = \bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A}$. Все эрмитовы, кососимметричные и унитарные матрицы нормальны.

17.3. Квадратичные и эрмитовы формы. Мы разовьем некоторые понятия, руководствуясь геометрическими представлениями для симметричных матриц, а затем дадим определения для произвольных матриц.

В аналитической геометрии рассматривают общие уравнения кривых ($n=2$) и поверхностей ($n=3$) второго порядка в прямоугольных

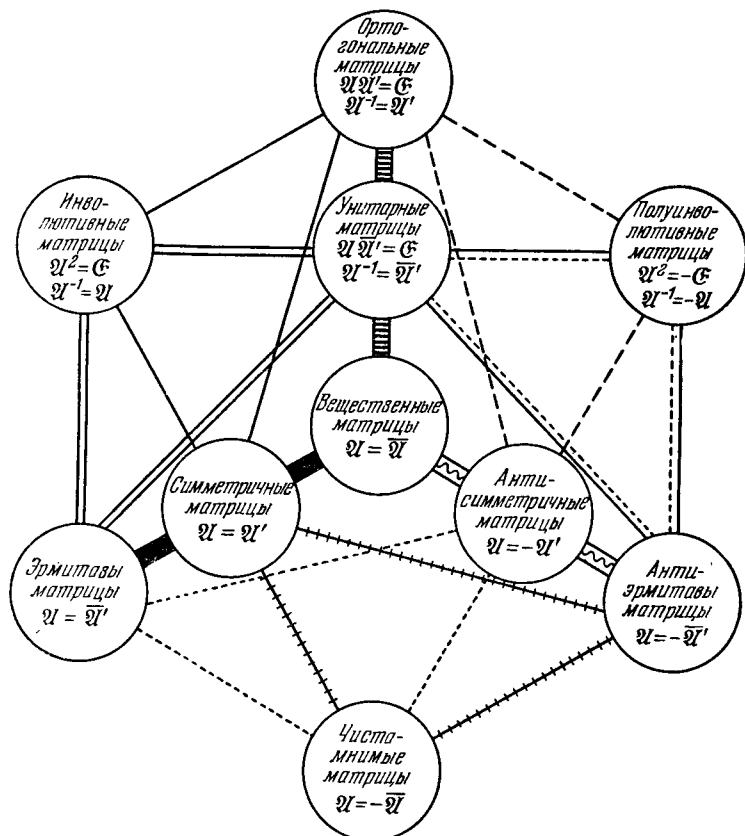


Рис. 17.1 Звезда свойств матриц.

координатах x_1, x_2, \dots :

$$Q = \sum_{j, k=1}^n a_{jk} x_j x_k = 1, \quad a_{jk} = a_{kj}. \quad (17.3)$$

С помощью матричного произведения это уравнение можно записать как матричное уравнение

$$\chi' \mathfrak{U} \chi = 1,$$

причем \mathfrak{U} — симметричная матрица данных коэффициентов $\mathfrak{U} = (a_{jk}) = (a_{kj})$, а χ' и χ имеют тот же смысл, что и в (17.1). Предполагается, что \mathfrak{U} невырождена.

При этом особый интерес представляет нахождение главных осей, т. е. таких векторов χ кривой или поверхности, которые параллельны нормали π в точках пересечения с поверхностью (кривой), $\pi \parallel \chi$ (рис. 17.2). В качестве компонент вектора нормали можно, согласно известным теоремам, взять компоненты градиента Q :

$$\text{grad } Q = \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial Q}{\partial x_n} \right),$$

или, учитывая

$$\frac{\partial Q}{\partial x_j} = 2 \sum_{k=1}^n a_{jk} x_k, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

так как множитель 2 не изменяет направления нормали:

$$\pi' = \left(\sum_{k=1}^n a_{1k} x_k, \sum_{k=1}^n a_{2k} x_k, \dots, \sum_{k=1}^n a_{nk} x_k \right).$$

Рис. 17.2. К определению главных осей

(Согласно (17.1) матрицу-строку мы обозначаем π' .) Для главных осей должно быть $\pi \parallel \chi$ или

$$\pi = \kappa \chi \quad (17.4)$$

с множителем пропорциональности κ . Более подробно:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= \kappa x_1, \\ \dots & \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= \kappa x_n; \end{aligned}$$

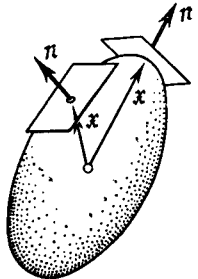
в матричной форме эти уравнения означают

$$\mathfrak{A}\chi = \kappa\chi. \quad (17.5)$$

Это n линейно независимых уравнений для x_1, x_2, \dots, x_n ; необходимое и достаточное условие существования нетривиального решения χ_j — равенство нулю определителя матрицы коэффициентов

$$\varphi(\kappa) = \det(\mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{E}) = \begin{vmatrix} a_{11} - \kappa & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \kappa & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \kappa \end{vmatrix} = 0. \quad (17.6)$$

Корни $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ этого алгебраического уравнения, которое называется «характеристическим уравнением матрицы \mathfrak{A} » или также «вековым» уравнением, называются «характеристическими числами» матрицы \mathfrak{A} . Уравнение (17.6) применяется также для определения характеристических чисел несимметричных и произвольных комплексных матриц.



Для дальнейших определений матрица \mathfrak{A} не обязательно должна быть симметричной; только применительно к поверхностям второго порядка матрица \mathfrak{A} будет предполагаться симметричной.

Обратные величины $\lambda_s = \frac{1}{\kappa_s}$ называют «собственными значениями» матрицы \mathfrak{A} *), они являются корнями уравнения

$$\det(\lambda \mathfrak{A} - \mathfrak{E}) = \begin{vmatrix} \lambda a_{11} - 1 & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} - 1 & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \dots & \lambda a_{nn} - 1 \end{vmatrix} = 0. \quad (17.7)$$

В то время как уравнение (17.6) для κ всегда имеет степень n , уравнение (17.7) для λ только для невырожденных матриц имеет степень n . Иногда говорят, что у вырожденных матриц появляются собственные значения $\lambda = \infty$.

Вектор ξ , являющийся решением (17.5), в случае, когда его компоненты не все равны нулю одновременно, называется «собственным вектором» матрицы \mathfrak{A} .

Каждый собственный вектор ξ_s принадлежит определенному характеристическому числу κ_s , в то время как каждому характеристическому числу κ_s принадлежит по крайней мере однопараметрическое семейство пропорциональных друг другу собственных векторов. Из этого семейства можно выбрать два отличающихся лишь знаком различных «нормированных» собственных вектора. При этом вектор называется нормированным, если

$$\bar{\xi}' \xi = \sum_{j=1}^n \bar{x}_j x_j = \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = 1.$$

Если имеется q связанных с собственным числом κ_r линейно независимых векторов, то говорят, что κ_r имеет кратность q (q -кратно вырождено)¹⁾.

Для поверхности второго порядка характеристические числа связаны с главными осями a_s .

Из семейства собственных векторов выберем вектор ξ_s , соответствующий точке на поверхности:

$$\bar{\xi}' \mathfrak{A} \xi = 1,$$

и если эта точка находится на расстоянии a от начала координат

$$\bar{\xi}' \xi_s = a_s^2,$$

*) Обычно собственными значениями называют κ_s .

¹⁾ Это приведенное здесь определение удобно для эрмитовых матриц; для произвольных матриц кратность характеристического числа определяют по кратности корня κ_r уравнения (17.6) (это может давать другое число кратности).

то из (17.5) следует

$$\begin{aligned} \kappa_s \bar{x}'_s x_s &= 1, \\ \kappa_s &= \frac{1}{a_s^2} = \frac{1}{\lambda_s}. \end{aligned} \quad (17.8)$$

Таким образом, собственные числа равны квадратам длин главных осей. Положительные характеристические числа означают действительные главные оси. Характеристические числа кратности два появляются, например, в случае эллипсоида вращения.

В комплексной области квадратичным формам соответствуют эрмитовы формы

$$H = \sum_{j, k=1}^n a_{jk} \bar{x}_j x_k, \quad (17.9)$$

где должно быть $a_{jk} = \bar{a}_{kj}$, в остальном a_{jk} и x_j могут быть произвольными комплексными числами; тогда можно коротко записать

$$H = \bar{x}' \mathfrak{A} x.$$

Следовательно, \mathfrak{A} предполагается эрмитовой матрицей $\bar{\mathfrak{A}}' = \mathfrak{A}$. Такая эрмитова форма для произвольных комплексных векторов принимает всегда только действительные значения; поскольку H есть просто число, т. е. матрица из одного элемента, равная, очевидно, своей транспонированной матрице, то, согласно (17.2), имеем

$$H = H' = (\bar{x}' \mathfrak{A} x)' = x' \mathfrak{A}' \bar{x}. \quad (17.10)$$

Если образуем комплексно сопряженное к H' число $\bar{H} = \bar{H}' = \overline{(x' \mathfrak{A}' \bar{x})} = \bar{x}' \bar{\mathfrak{A}}' x$, то с помощью равенства $\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}'$ получим $H = \bar{H}$, т. е. H — действительное число.

Пусть H может быть положительным числом только при $\bar{x}' x > 0$ и, следовательно, $H = 0$ только при $x \equiv 0$, тогда эрмитова форма и принадлежащая ей матрица называются «положительно определенными». Соответственно H и \mathfrak{A} называются «отрицательно определенными», когда

$$H \begin{cases} < 0 & \text{для } \bar{x}' x > 0, \\ = 0 & \text{для } \bar{x}' x = 0. \end{cases}$$

Если H может принимать оба знака, то H и \mathfrak{A} называют «неопределенными». При $H \geq 0$ для всех x ($H = 0$ для некоторых векторов x , при $\bar{x}' x > 0$), H и \mathfrak{A} называют «положительно полуопределенными»; соответственно объясняется понятие «отрицательная полуопределенность».

Матрица называется положительной, когда все ее элементы положительны; положительно определенная матрица не обязательно

положительна, например, $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ положительно определенная,

но не положительна. Наоборот, матрица $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ положительна, но не положительно определенная.

В различных приложениях возникают следующие задачи на собственные значения для матриц:

1. Частные задачи на собственные значения

$$\mathfrak{A}\chi = \kappa\chi.$$

Задана матрица \mathfrak{A} , требуется найти характеристические числа κ , для которых уравнение имеет нетривиальное решение χ .

2. Промежуточная задача

$$\mathfrak{A}\chi = \kappa\mathfrak{D}\chi. \quad (17.11)$$

Кроме матрицы \mathfrak{A} , задана еще диагональная матрица \mathfrak{D} , у которой не равны нулю только элементы главной диагонали:

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}. \quad (17.12)$$

Кроме того, предполагается еще $d_j > 0$. Тогда можно с помощью диагональной матрицы

$$\mathfrak{D}^{1/2} = \begin{pmatrix} \sqrt{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sqrt{d_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sqrt{d_n} \end{pmatrix},$$

у которой все корни выбираются положительными, свести задачу к частной задаче на собственные значения для $\psi = \mathfrak{D}^{1/2}\chi$:

$$\mathfrak{C}\psi = \mathfrak{D}^{-1/2}\mathfrak{A}\mathfrak{D}^{-1/2}\psi = \kappa\psi, \quad (17.13)$$

при этом \mathfrak{C} эрмитова, если эрмитова \mathfrak{A} .

3. Общая задача на собственные значения

$$\mathfrak{A}\chi = \kappa\mathfrak{B}\chi. \quad (17.14)$$

Здесь задаются две матрицы \mathfrak{A} , \mathfrak{B} . Характеристические числа $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$, для которых (17.14) имеет отличные от нуля соб-

ственные векторы в качестве решений, являются здесь корнями «характеристического уравнения»

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \kappa b_{11} & a_{12} - \kappa b_{12} & \dots & a_{1n} - \kappa b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} - \kappa b_{n1} & a_{n2} - \kappa b_{n2} & \dots & a_{nn} - \kappa b_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (17.15)$$

17.4. Вещественность характеристических чисел. Пусть для общей задачи на собственные значения (17.14) \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — эрмитовы матрицы. Допустим, что задача имеет характеристическое число κ и принадлежащий ему собственный вектор χ . Умножим обе части уравнения слева на $\bar{\chi}'$:

$$\bar{\chi}'\mathfrak{A}\chi = \bar{\chi}'\mathfrak{B}\chi.$$

Согласно (17.10) обе части этого уравнения действительны, так как \mathfrak{A} и \mathfrak{B} по предположению эрмитовы. Если матрица \mathfrak{B} положительно определенная, то $\bar{\chi}'\mathfrak{B}\chi \neq 0$ и из

$$\kappa = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{R[\chi]} = \frac{\bar{\chi}'\mathfrak{A}\chi}{\bar{\chi}'\mathfrak{B}\chi} \quad (17.16)$$

следует, что κ тогда тоже должно быть действительным. Через $R[\chi]$ обозначено отношение Рэля, которое будет использовано ниже. Разумеется, если вместо \mathfrak{B} положительно определенной является \mathfrak{A} , то можно перейти к обратным величинам и заключить, что все имеющиеся характеристические числа действительны, может быть, бесконечны. Аналогично получается, если \mathfrak{A} или \mathfrak{B} отрицательно определены. Но если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} неопределенны, то может случиться, что для какого-то собственного вектора $\bar{\chi}'\mathfrak{A}\chi = \bar{\chi}'\mathfrak{B}\chi = 0$ и κ не действительно. Приведем простой пример.

Матрицы $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ и $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ действительны и симметричны, следовательно, также эрмитовы, но обе неопределенны. Для задачи (17.14) один из собственных векторов равен

$$\chi = \begin{pmatrix} -2i \\ \sqrt{3} + i \end{pmatrix};$$

тогда будет $\bar{\chi}'\mathfrak{A}\chi = \bar{\chi}'\mathfrak{B}\chi = 0$, и характеристические числа, получающиеся как корни уравнения $\begin{vmatrix} -1 - \kappa & -2\kappa \\ -2\kappa & 1 - \kappa \end{vmatrix} = 0$, равны $\kappa_{1,2} = \pm \frac{i}{\sqrt{3}}$, т. е. не действительны.

Если \mathfrak{B} — единичная матрица, т. е. рассматривается частная задача на собственные значения, то для действительности собственных чисел достаточно, чтобы \mathfrak{A} была эрмитовой (в случае действительных матриц — симметричной), так как единичная матрица \mathfrak{E} , конечно,

положительно определенная. Для частной задачи на собственные значения при комплексной матрице \mathfrak{A} действительные собственные значения получаются не в случае симметричной, а в случае эрмитовой матрицы.

Так, пусть дана симметричная, но не эрмитова матрица $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ 2i & -1 \end{pmatrix}$,

ее характеристические числа $\kappa_{1,2} = \pm i\sqrt{3}$ не действительны.

Если в общей задаче на собственные значения \mathfrak{B} не вырождена, то можно (17.14) умножить слева на \mathfrak{B}^{-1} :

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}\chi = \kappa\chi,$$

и действительность характеристических чисел имеет место в соответствии с только что доказанным, если $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$ — эрмитова матрица, т. е.

$$\bar{\mathfrak{C}}' = \overline{(\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A})'} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{C}.$$

С другой стороны, если \mathfrak{A} и \mathfrak{B} предполагаются эрмитовыми, то имеют место равенства

$$\bar{\mathfrak{C}}' = \bar{\mathfrak{A}}' (\bar{\mathfrak{B}}^{-1})' = \bar{\mathfrak{A}}' (\bar{\mathfrak{B}}')^{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1}.$$

Таким образом, матрица \mathfrak{C} эрмитова в том случае, если

$$\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}^{-1} \quad (17.17)$$

или (умножая на \mathfrak{B} справа и слева обе части равенства) если $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\mathfrak{A}$, т. е. \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — перестановочные матрицы.

Резюмируя, получаем

Теорему о действительности характеристических чисел. Пусть в общей задаче на собственные значения

$$\mathfrak{A}\chi = \kappa\mathfrak{B}\chi$$

матрицы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} эрмитовы. Если, кроме того, матрица \mathfrak{B} определена либо не вырождена, причем \mathfrak{A} и \mathfrak{B} перестановочны, то все характеристические числа действительны. В промежуточной задаче на собственные значения $\mathfrak{A}\chi = \kappa\mathfrak{B}\chi$ для действительности характеристических чисел достаточно, чтобы матрица \mathfrak{A} была эрмитова и имела положительные элементы, и, наконец, для частной задачи достаточно эрмитовости \mathfrak{A} . Последний случай включает также действительную симметричную матрицу.

Пример. Обе матрицы $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & a+b \end{pmatrix}$ и $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c+bd \end{pmatrix}$ для действительных a, b, c, d эрмитовы и перестановочны. В общем случае они не являются определенными, например, для $a = 1, b = -1, c = 1, d = 2$ матрицы

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

неопределенны; в соответствии с теоремой корни уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \kappa & 1 - 2\kappa \\ 1 - 2\kappa & \kappa \end{vmatrix} = 0 \text{ действительны: } \kappa_{1,2} = \frac{1}{2} \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{5}} \right).$$

17.5. Обобщенная унитарность собственных векторов. Примем, что в общей задаче на собственные значения (17.14) с эрмитовыми матрицами \mathfrak{A} , \mathfrak{B} (матрица \mathfrak{B} положительно определена) имеются два собственных вектора \bar{x}_r , \bar{x}_s , принадлежащих двум различным характеристическим числам κ_r и κ_s . Запишем

$$\mathfrak{A}\bar{x}_r = \kappa_r \mathfrak{B}\bar{x}_r, \quad \overline{\mathfrak{A}}\bar{x}_s = \kappa_s \overline{\mathfrak{B}}\bar{x}_s.$$

Умножая первое уравнение слева на \bar{x}'_s и второе на \bar{x}'_r , получим после вычитания

$$\bar{x}'_s \mathfrak{A}\bar{x}_r - \bar{x}'_r \overline{\mathfrak{A}}\bar{x}_s = \kappa_r \bar{x}'_s \mathfrak{B}\bar{x}_r - \kappa_s \bar{x}'_r \overline{\mathfrak{B}}\bar{x}_s. \quad (17.18)$$

Пусть теперь $z = \bar{x}'_s \mathfrak{A}\bar{x}_r$ — число, которое можно представить как одноэлементную матрицу, равную своей транспонированной:

$$z = z' = (\bar{x}'_s \mathfrak{A}\bar{x}_r)' = \bar{x}'_r \overline{\mathfrak{A}}\bar{x}_s.$$

Так как $\mathfrak{A}' = \overline{\mathfrak{A}}$ и $\mathfrak{B}' = \overline{\mathfrak{B}}$, получаем

$$\bar{x}'_s \mathfrak{A}\bar{x}_r = \bar{x}'_r \overline{\mathfrak{A}}\bar{x}_s, \quad \bar{x}'_s \mathfrak{B}\bar{x}_r = \bar{x}'_r \overline{\mathfrak{B}}\bar{x}_s. \quad (17.19)$$

Тогда (17.18) перейдет в

$$0 = (\kappa_r - \kappa_s) \bar{x}'_s \mathfrak{B}\bar{x}_r,$$

следовательно,

$$\bar{x}'_s \mathfrak{B}\bar{x}_r = 0 \quad \text{для} \quad \kappa_r \neq \kappa_s. \quad (17.20)$$

Если умножить

$$\mathfrak{A}\bar{x}_r = \kappa_r \mathfrak{B}\bar{x}_r$$

слева на \bar{x}'_s , то, учитывая (17.20), получим

$$\bar{x}'_s \mathfrak{A}\bar{x}_r = 0 \quad \text{для} \quad \kappa_r \neq \kappa_s. \quad (17.21)$$

Введем следующие

Определения.

Два вектора \bar{x} , \bar{y} называются

$$\text{ортогональными друг другу, если } \bar{x}'\bar{y} = 0. \quad (17.22)$$

$$\text{унитарными друг относительно друга, если } \bar{x}'\bar{y} = 0 \quad (17.23)$$

и обобщенно унитарными относительно задачи на собственные значения $\mathfrak{A}\bar{x} = \kappa \mathfrak{B}\bar{x}$ (или, коротко, обобщенно унитарными), если

$$\bar{x}'\mathfrak{B}\bar{y} = 0. \quad (17.24)$$

Из (17.22) сразу следует

$$(\bar{y}'y)' = y'\bar{x} = 0,$$

а из (17.23)

$$(\overline{\bar{x}'y})' = \bar{y}'\bar{x} = 0;$$

из (17.24), согласно (17.19), поскольку \mathfrak{B} эрмитова, имеем

$$\bar{y}'\mathfrak{B}\bar{x} = 0. \quad (17.25)$$

При $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ обобщенная унитарность (17.24) переходит в обычную унитарность (17.23); если хотя бы один из векторов \bar{x} , \bar{y} действителен, то унитарность и ортогональность (17.22) равносильны.

С помощью введенных обозначений может быть сформулирована следующая

Теорема. Пусть общая задача на собственные значения $\mathfrak{A}\bar{x} = \kappa\mathfrak{B}\bar{x}$ имеет два собственных вектора \bar{x}_r , \bar{x}_s , принадлежащих двум различным собственным числам κ_r , κ_s , и пусть \mathfrak{A} , \mathfrak{B} эрмитовы матрицы, а \mathfrak{B} — положительно определенная матрица; тогда \bar{x}_r , \bar{x}_s обобщенно унитарны, т. е. имеют место равенства (17.20) и (17.21).

При $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$, т. е. для частной задачи на собственные значения $\mathfrak{A}\bar{x} = \kappa\bar{x}$, векторы, принадлежащие двум различным κ_r , κ_s , унитарны:

$$\bar{y}'_r\bar{x}_s = 0.$$

17.6. Примеры промежуточных задач на собственные значения из механики.

А. Колебания балки с сосредоточенными массами.

Пусть балка длины l нагружена в точках, отстоящих от левой опоры на расстояния x_1, \dots, x_n , сосредоточенными массами m_1, \dots, m_n (рис. 17.3). Оба конца балки шарнирно оперты; можно рассматривать и другие способы крепления, при этом изменятся только коэффициенты связи α_{jk} .

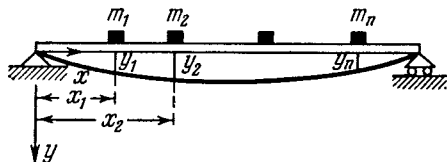


Рис. 17.3. Изгибные колебания балки с n сосредоточенными массами.

m_1, m_2, \dots, m_n можно пренебречь, и будем учитывать только жесткость на изгиб балки EJ .

Нагрузка P в точке x_j вызывает в точке x_k прогиб $y_k = P\alpha_{jk}$. Для шарнирно опертой на обоих концах балки при постоянной жесткости на изгиб EJ 1)

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{jk} &= \frac{x_j^2(l-x_j)^2}{6EJ} \left(2\frac{x_k}{x_j} + \frac{x_k}{l-x_j} - \frac{x_k^3}{x_j^2(l-x_j)} \right), & x_k \leq x_j \\ \alpha_{kj} &= \alpha_{jk} & \text{для всех } j, k. \end{aligned} \right\} \quad (17.26)$$

1) См. Hütte, Инженерный справочник, т. I, ГИТТЛ, 1932.

В соответствии с принципом Даламбера при колебаниях добавляются силы инерции $-m_j\ddot{y}_j$, имеющие смысл нагрузки, так что, складывая прогибы, полученные от суммарного действия n сил, получим

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= -m_1\ddot{y}_1\alpha_{11} - m_2\ddot{y}_2\alpha_{12} - \dots - m_n\ddot{y}_n\alpha_{1n}. \\ &\dots\dots\dots \\ y_n &= -m_1\ddot{y}_1\alpha_{n1} - m_2\ddot{y}_2\alpha_{n2} - \dots - m_n\ddot{y}_n\alpha_{nn}. \end{aligned} \right\} \quad (17.27)$$

Введя матрицы

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad (17.28)$$

можно коротко записать (17.27) в следующем виде:

$$\eta = -\mathfrak{A}\mathfrak{M}\ddot{\eta}. \quad (17.29)$$

Будем теперь рассматривать собственные колебания, при которых все массы колеблются в одном ритме, т. е. с одной круговой частотой ω и одинаковой фазой:

$$y_j = Y_j \cos \omega t,$$

т. е.

$$\ddot{y}_j = -\omega^2 y_j \quad \text{или} \quad \ddot{\eta} = -\omega^2 \eta. \quad (17.30)$$

Отсюда следует

$$\eta = \omega^2 \mathfrak{A}\mathfrak{M}\eta; \quad (17.31)$$

здесь

$$\omega^2 = \frac{1}{\kappa} = \lambda; \quad (17.32)$$

таким образом, получается частная задача на собственные значения

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M}\eta = \kappa\eta \quad (17.33)$$

с матрицей $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$, в общем случае несимметричной.

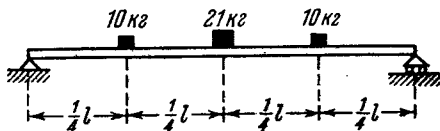


Рис. 17.4. Балка с тремя сосредоточенными массами.

Для $\mathfrak{M}\eta = \zeta$ получается, однако, промежуточная задача на собственные значения

$$\mathfrak{A}\zeta = \kappa\mathfrak{M}^{-1}\zeta \quad (17.34)$$

с симметричной матрицей \mathfrak{A} .

Наконец, введя, как в (17.13), обозначение $\mathfrak{M}^{1/2}\eta = w$, получаем частную задачу на собственные значения

$$\mathfrak{C}w = \mathfrak{M}^{1/2}\mathfrak{A}\mathfrak{M}^{1/2}w \quad (17.35)$$

с симметричной матрицей \mathfrak{C} .

Например, можно выбрать $x_j = j \frac{l}{4}$, $j = 1, 2, 3$, и $m_j = \frac{G_j}{g}$; $G_1 = G_3 = 10 \text{ кг}$; $G_2 = 21 \text{ кг}$ (рис. 17.4).

Матрицы \mathfrak{K} и \mathfrak{M} здесь получаются следующие:

$$\mathfrak{K} = \alpha \mathfrak{K}^* = \alpha \begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix} \text{ с } \alpha = \frac{l^3}{768 EJ}, \quad \mathfrak{M} = \mu \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mu = \frac{1 \text{ кг}}{g}.$$

Уравнение (17.34) с обозначениями $\kappa^* = \frac{\kappa}{\alpha \mu} = \frac{1}{\alpha \mu \omega^2}$ приводит к следующему вековому уравнению:

$$\begin{vmatrix} 9 - \frac{\kappa^*}{10} & 11 & 7 \\ 11 & 16 - \frac{\kappa^*}{21} & 11 \\ 7 & 11 & 9 - \frac{\kappa^*}{10} \end{vmatrix} = \left(2 - \frac{\kappa^*}{10}\right) \begin{vmatrix} 16 - \frac{\kappa^*}{21} & 22 \\ 11 & 16 - \frac{\kappa^*}{10} \end{vmatrix} = \\ = \left(2 - \frac{\kappa^*}{10}\right) \frac{\kappa^{*2} - 496\kappa^* + 2940}{210} = 0.$$

Его корни:

$$\kappa_1^* = 490 \text{ (основное колебание),}$$

$$\kappa_2^* = 20 \text{ (1-е высшее колебание),}$$

$$\kappa_3^* = 6 \text{ (2-е высшее колебание).}$$

Теперь легко также найти форму собственных колебаний; например $\kappa_3^* = 6$ дает для компонент z_j вектора \mathfrak{z} однородную систему уравнений (легко выписываемую по определителю)

$$8,4z_1 + 11z_2 + 7z_3 = 0,$$

$$11z_1 + \frac{110}{7}z_2 + 11z_3 = 0,$$

$$7z_1 + 11z_2 + 8,4z_3 = 0.$$

Решение с точностью до постоянного множителя будет

$$z_1 = 1, \quad z_2 = -1,4, \quad z_3 = 1.$$

Соответственно для других колебаний получаем собственные векторы (не нормированные)

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1,4 \\ 1 \end{pmatrix},$$

из которых с помощью $\eta = \mathfrak{M}^{-1}\xi$ вычисляются смещения (рис. 17.5):

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ \frac{1}{7} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ 0 \\ -\frac{1}{10} \end{pmatrix}, \quad \eta_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \\ -\frac{1}{15} \\ \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Эти векторы не ортогональны друг другу, как были бы ортогональны векторы

$$w_j = \mathfrak{M}^{1/2} \eta_j.$$

Б. Колебания опертой на пружинах прямоугольной пластинки. Пусть жесткая однородная прямоугольная пластинка толщины d расположена горизонтально и опирается на четыре размещенные

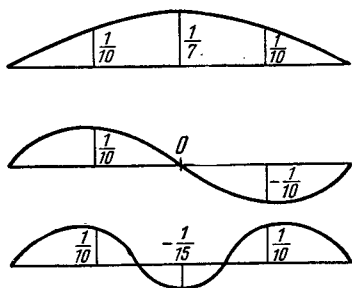


Рис. 17.5. Форма собственных колебаний балки, изображенной на рис. 17.4.

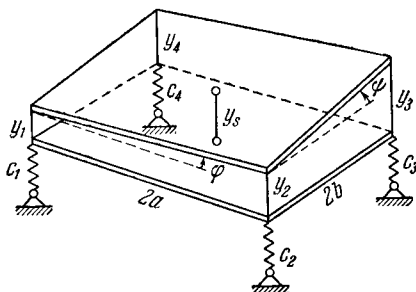


Рис. 17.6. Прямоугольная пластинка, укрепленная на пружинах.

по углам пружины (c_1, c_2, c_3, c_4 — коэффициенты жесткости пружин) и совершает малые колебания; в первом приближении каждая точка пластинки колеблется вертикально. Для смещения углов пластинки y_1, y_2, y_3, y_4 справедливо соотношение

$$y_1 + y_3 = y_2 + y_4.$$

Пластинка имеет три степени свободы; состояние системы можно задать с помощью y_1, y_2, y_3 или естественным образом через смещение центра тяжести z_1 и два угла наклона φ, ψ (рис. 17.6):

$$z_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_3), \quad \varphi = \frac{y_2 - y_1}{2a} = \frac{z_2}{a}, \quad \psi = \frac{y_4 - y_1}{2b} = \frac{z_3}{b}.$$

При этом $2a$ и $2b$ — длины сторон прямоугольника, а для углов наклона выполняется предположение малости. Пусть пластинка имеет общую массу M и моменты инерции Θ_1 и Θ_2 относительно двух проходящих через центр тяжести осей, параллельных прямым, соединяющим угловые точки 1,4 и 1,2; тогда уравнения движения можно записать следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{z}_1 &= -c_1 y_1 - c_2 y_2 - c_3 y_3 - c_4 y_4, \\ \Theta_1 \ddot{\varphi} &= a(c_1 y_1 - c_2 y_2 - c_3 y_3 + c_4 y_4), \\ \Theta_2 \ddot{\psi} &= b(c_1 y_1 + c_2 y_2 - c_3 y_3 - c_4 y_4). \end{aligned} \right\} \quad (17.36)$$

Введя $\Theta_1 = M \frac{a^2}{3}$, $\Theta_2 = M \frac{b^2}{3}$ (для выступающих пластинок были бы соответственно другие значения), при обозначениях

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= z_1 - z_2 - z_3, & y_3 &= z_1 + z_2 + z_3, \\ y_2 &= z_1 + z_2 - z_3, & y_4 &= z_1 - z_2 + z_3 \end{aligned} \right\} \quad (17.37)$$

получим уравнения

$$\begin{aligned} -M\ddot{z}_1 &= Cz_1 + (C - 2c_1 - 2c_4)z_2 + (C - 2c_1 - 2c_2)z_3, \\ -\frac{M}{3}\ddot{z}_2 &= (C - 2c_1 - 2c_4)z_1 + Cz_2 + (C - 2c_2 - 2c_4)z_3, \\ -\frac{M}{3}\ddot{z}_3 &= (C - 2c_1 - 2c_2)z_1 + (C - 2c_2 - 2c_4)z_2 + Cz_3. \end{aligned}$$

При этом $C = c_1 + c_2 + c_3 + c_4$. Эти уравнения можно записать в виде матричного уравнения

$$\mathfrak{M}\ddot{\delta} = -\mathfrak{M}\delta,$$

где

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & -c_1 + c_2 + c_3 - c_4 & -c_1 - c_2 + c_3 + c_4 \\ -c_1 + c_2 + c_3 - c_4 & c_1 + c_2 + c_3 + c_4 & c_1 - c_2 + c_3 - c_4 \\ -c_1 - c_2 + c_3 + c_4 & c_1 - c_2 + c_3 - c_4 & c_1 + c_2 + c_3 + c_4 \end{pmatrix}, \quad (17.38)$$

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} M & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}M & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}M \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}.$$

Подход к собственным колебаниям, соответствующий (17.30), дает $\ddot{\delta} = -\omega^2\delta$, откуда следует промежуточная задача на собственные значения

$$\mathfrak{M}\delta = \omega^2\mathfrak{M}\delta. \quad (17.39)$$

Пример. Пусть будет $c_1 = c$, $c_2 = 3c$, $c_3 = 2c$, $c_4 = 4c$; тогда

$$\frac{1}{c}\mathfrak{M} = \mathfrak{M}^* = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Введя обозначение $k = \frac{\omega^2 M}{c}$, вместо (17.39) получим уравнение для частот

$$\begin{vmatrix} 10 - k & 0 & 2 \\ 0 & 10 - \frac{k}{3} & -4 \\ 2 & -4 & 10 - \frac{k}{3} \end{vmatrix} = \frac{-1}{9} (k^3 - 70k^2 + 1344k - 7200) = 0. \quad (17.40)$$

Уравнение имеет следующие корни:

$$k_1 = 42,198, \quad k_2 = 18,672, \quad k_3 = 9,1402.$$

Соответствующие собственные векторы получаются путем решения системы линейных однородных уравнений, например, для $k_3 = 9,1402$:

$$\begin{aligned} 0,8598z_1 &+ 2z_3 = 0, \\ 6,9533z_2 &- 4z_3 = 0, \\ 2z_1 &- 4z_2 + 6,9533z_3 = 0. \end{aligned}$$

Из этой системы получаем $z_3 = 1$, $z_1 = -2,326$, $z_2 = 0,575$. В рассматриваемом случае, когда определитель (17.40) содержит два нуля, наиболее удобно определять собственные векторы δ_j и числа k_j с помощью интерполяции, при которой задаются числом k , взяв $z_3 = 1$, из первых двух уравнений находят z_1 и z_2 и подставляют их в третье уравнение.

Таким образом, получается таблица

k	$z_1 = \frac{2}{k-10}$	$z_2 = \frac{4}{10 - \frac{1}{3}k}$	$2z_1 - 4z_2 + \left(10 - \frac{k}{3}\right)z_3$
9,15	-2,353	0,5755	-0,058
9,14	-2,32558	0,57527	+0,00111

и далее собственные векторы

$$\delta_1 = \begin{pmatrix} 0,00621 \\ -0,984 \\ 1,0 \end{pmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{pmatrix} 0,231 \\ 1,059 \\ 1,0 \end{pmatrix}, \quad \delta_3 = \begin{pmatrix} -2,326 \\ 0,575 \\ 1,0 \end{pmatrix}.$$

Каждому этому собственному вектору соответствует собственное колебание с определенной узловой линией, которую получают, определяя из (17.37) u_j и находя вдоль периметра пластинки точки с нулевым отклонением, пользуясь интерполяциями (рис. 17.7). Точки пересечения трех узловых линий суть три узловые точки P_1, P_2, P_3 . Отклонения

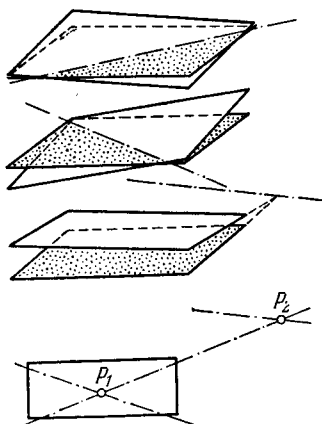


Рис. 17.7. Узловые линии собственных колебаний прямоугольной пластинки.

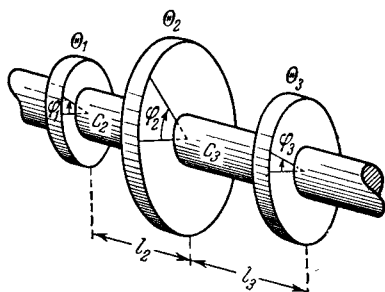


Рис. 17.8. Вал с насаженными дисками.

в трех узловых точках — это так называемые «главные координаты». Если преобразовать уравнения движения к главным координатам, то они окажутся полностью «развязанными»:

$$\ddot{x}_j = -\omega_j^2 x_j, \quad j = 1, 2, 3.$$

В. Вал с вращающимися массами. Пусть на валу насажено несколько дисков с моментами инерции $\Theta_1, \Theta_2, \dots, \Theta_n$ (рис. 17.8). Отрезок вала между дисками с моментами инерции Θ_{j-1} и Θ_j имеет длину l_j , жесткость при кручении $GJ_j = C_j = D_j l_j$ и пренебрежимо малый момент инерции

по сравнению с Θ_j . Обозначим через $\varphi_j(t)$ угловое отклонение j -го диска относительно произвольно определенного в пространстве направления в момент времени t . Если концы вала могут свободно вращаться в опорах, то уравнения движения запишутся следующим образом:

$$\Theta_j \ddot{\varphi}_j + D_{j+1}(\varphi_j - \varphi_{j+1}) + D_j(\varphi_j - \varphi_{j-1}) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

причем должно быть положено $\varphi_0 = \varphi$ и $\varphi_{n+1} = \varphi_n$. Используя свойства собственных колебаний (17.30)

$$\ddot{\varphi}_j = -\omega^2 \varphi_j,$$

получают промежуточную задачу на собственные значения

$$\omega^2 \vartheta \varepsilon = -\mathfrak{A} \varepsilon,$$

где

$$\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \varphi_n \end{pmatrix}, \quad \vartheta = \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Theta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \Theta_n \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} D_2 & -D_2 & 0 & \dots & 0 \\ -D_2 & D_2 + D_3 & -D_3 & \dots & 0 \\ 0 & -D_3 & D_3 + D_4 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & D_n \end{pmatrix}.$$

По вращательным колебаниям имеется обширная литература.

17.7. Примеры обобщенных задач на собственные значения из механики.

А. Малые колебания системы без затухания. Пусть задана в потенциальном поле с помощью обобщенных координат q_1, q_2, \dots, q_n голономная и склерономная механическая система без трения, имеющая n степеней свободы. Система совершает малые колебания около положения равновесия, определяемого координатами

$$q_j = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Пусть точка системы с координатами q_j в момент времени t занимает положение, определяемое радиусом-вектором

$$r = r(q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Тогда ее скорость v будет

$$v = \sum_{j=1}^n \frac{\partial r}{\partial q_j} \dot{q}_j,$$

и ее кинетическая энергия

$$T = \frac{1}{2} S m v^2 = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n b_{jk} \dot{q}_j \dot{q}_k, \quad (17.41)$$

где

$$b_{jk} = S m \frac{\partial r}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial r}{\partial q_k}, \quad (17.42)$$

причем значок S означает суммирование по всем массам.

Все b_{jk} суть функции от q_k , но при малых колебаниях их можно считать постоянными (равными значению функции при $q_r = 0$). Таким образом, кинетическая энергия T является положительно определенной квадратичной формой относительно скоростей \dot{q}_j с постоянными коэффициентами.

Потенциальная энергия может быть разложена в ряд Тейлора в точке $q_r = 0$:

$$V(q_1, \dots, q_n) = V(0, \dots, 0) + \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial V(0, \dots, 0)}{\partial q_j} + \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n q_j q_k \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial q_j \partial q_k},$$

причем волнистая линия означает, что должно быть взято значение в подходящей промежуточной точке. Так как значение V определяется с точностью до постоянного слагаемого, примем $V(0, \dots, 0) = 0$.

Поскольку точка $q_r = 0$ должна быть положением равновесия,

$$\frac{\partial V(0, \dots, 0)}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Если заменить в первом приближении, как было сделано при вычислении кинетической энергии, функцию $\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k}$ значением в точке $q_r = 0$

$$a_{jk} = \left[\frac{\partial^2 V}{\partial q_j \partial q_k} \right]_{q_1=0, \dots, q_n=0}, \quad (17.43)$$

то для потенциальной энергии получим также квадратичную форму

$$V = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^n a_{jk} q_j q_k, \quad (17.44)$$

а именно, положительно определенную форму, если положение равновесия является устойчивым.

Уравнения Лагранжа второго рода для системы

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0, \quad L = T - V, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.45)$$

принимают вид:

$$\sum_{k=1}^n (b_{jk} \ddot{q}_k + a_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

С помощью матриц

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & \dots & b_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}, \quad q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \cdot \\ q_n \end{pmatrix} \quad (17.46)$$

это можно записать короче

$$\mathfrak{B} \ddot{q} + \mathfrak{A} q = 0. \quad (17.47)$$

Для собственных колебаний соответственно (17.30)

$$q_j = Q_j \cos \omega t, \quad \ddot{q} = -\omega^2 q; \quad (17.48)$$

в результате получим общую задачу на собственные значения

$$\mathfrak{A} q = \kappa \mathfrak{B} q, \quad \omega^2 = \kappa. \quad (17.49)$$

Б. Система с затуханием. Если учесть также силу сопротивления, пропорциональную скорости, то уравнения движения примут вид ¹⁾

$$\sum_{k=1}^n (b_{jk} \ddot{q}_k + c_{jk} \dot{q}_k + a_{jk} q_k) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.50)$$

или при помощи матрицы \mathfrak{C} , определенной по аналогии с (17.46):

$$\mathfrak{B} \ddot{q} + \mathfrak{C} \dot{q} + \mathfrak{A} q = 0. \quad (17.51)$$

Принимая, что

$$q_j = Q_j e^{\kappa t}, \quad \dot{q}_j = \kappa q_j, \quad \ddot{q}_j = \kappa^2 q_j, \quad (17.52)$$

получаем

$$(\mathfrak{B} \kappa^2 + \mathfrak{C} \kappa + \mathfrak{A}) q = 0. \quad (17.53)$$

Тогда κ определяются как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} \kappa^2 + c_{11} \kappa + a_{11} & \dots & b_{1n} \kappa^2 + c_{1n} \kappa + a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} \kappa^2 + c_{n1} \kappa + a_{n1} & \dots & b_{nn} \kappa^2 + c_{nn} \kappa + a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (17.54)$$

Так как матрица \mathfrak{B} не вырождена, можно перейти также к частной задаче на собственные значения с матрицей \mathfrak{M} порядка $2n$. Для (17.51) можно записать

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p, \\ \dot{p} &= -\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A} q - \mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{C} p \end{aligned} \quad (17.55)$$

Введя матрицу \mathfrak{M} и вектор с $2n$ компонентами $q_1, \dots, q_n; p_1, \dots, p_n$:

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 0 & \mathfrak{C} \\ -\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{A} & -\mathfrak{B}^{-1} \mathfrak{C} \end{pmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad (17.56)$$

получим

$$\mathfrak{M} \varepsilon = \kappa \varepsilon. \quad (17.57)$$

В. Пример системы без затухания. Пусть сложный, например тройной, маятник с пружинной связью (рис. 17.9) составлен из стержней с длинами l_1, l_2, l_3 с закрепленными массами m_1, m_2, m_3 и имеет пружину, коэффициент жесткости которой c . Колебания, возникающие при отклонениях стержней на углы $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ от положения

равновесия, будем считать малыми. Тогда, согласно (17.41), кинетическая энергия

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} [m_1 (l_1 \dot{\varphi}_1)^2 + m_2 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2)^2 + m_3 (l_1 \dot{\varphi}_1 + l_2 \dot{\varphi}_2 + l_3 \dot{\varphi}_3)^2] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^3 b_{jk} \dot{\varphi}_j \dot{\varphi}_k. \end{aligned}$$

¹⁾ См., например, Ph. Frank, R. v. Mises, Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, т. II, изд. 2, Braunschweig, 1935 [Ф. Франк, Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ОНТИ, М., 1937].

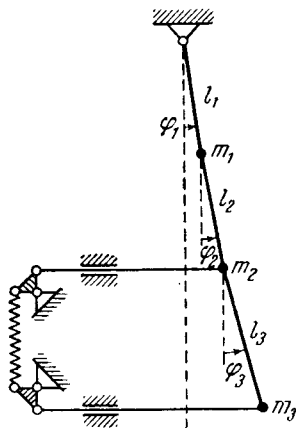


Рис. 17.9. Сложный маятник с пружинной связью.

причем коэффициенты b_{jk} образуют матрицу \mathfrak{B} (см. (17.41), (17.42)):

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} l_1^2(m_1 + m_2 + m_3) & l_1 l_2(m_2 + m_3) & l_1 l_3 m_3 \\ l_1 l_2(m_2 + m_3) & l_2^2(m_2 + m_3) & l_2 l_3 m_3 \\ l_1 l_3 m_3 & l_2 l_3 m_3 & l_3^2 m_3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{q} = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \varphi_3 \end{pmatrix}. \quad (17.58)$$

Потенциальная энергия составляется из энергии положения в поле тяготения и энергии деформации пружин

$$V = \frac{g}{2} [(m_1 l_1 \varphi_1^2) + m_2 (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2) + m_3 (l_1 \varphi_1^2 + l_2 \varphi_2^2 + l_3 \varphi_3^2)] + \\ + \frac{c}{2} [(l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2) + (l_1 \varphi_1 + l_2 \varphi_2 + l_3 \varphi_3)]^2 = \frac{1}{2} \sum_{j, k=1}^3 a_{jk} \varphi_j \varphi_k$$

с матрицей коэффициентов a_{jk} :

$$\mathfrak{A} = (a_{jk}) = \begin{pmatrix} g l_1(m_1 + m_2 + m_3) + 4c l_1^2 & 4c l_1 l_2 & 2c l_1 l_3 \\ 4c l_1 l_2 & g l_2(m_2 + m_3) + 4c l_2^2 & 2c l_2 l_3 \\ 2c l_1 l_3 & 2c l_2 l_3 & g l_3 m_3 + c l_3^2 \end{pmatrix}. \quad (17.59)$$

Рассмотрим численный пример

$$l_1 = l_2 = 1 \text{ м}, \quad l_3 = 2 \text{ м}, \quad m_1 g = 2 \text{ кг}, \quad m_2 g = m_3 g = 1 \text{ кг}, \quad c = 1 \frac{\text{кг}}{\text{м}}.$$

При этом

$$\mathfrak{B} = \frac{2}{g} \text{м}^2 \text{кг} \cdot \mathfrak{B}^*, \quad \mathfrak{B}^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{A} = 2 \text{ м кг} \cdot \mathfrak{A}^*, \quad \mathfrak{A}^* = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Введя

$$k = \omega^2 \frac{1 \text{ м}}{g},$$

согласно (17.49) будем иметь

$$\mathfrak{A}^* \mathfrak{q} = k \mathfrak{B}^* \mathfrak{q}.$$

Легко получить, далее, следующее уравнение:

$$\begin{vmatrix} 4 - 2k & 2 - k & 2 - k \\ 2 - k & 3 - k & 2 - k \\ 2 - k & 2 - k & 3 - 2k \end{vmatrix} = \\ = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 - k & 3 - k & 2 - k \\ 2 - k & 2 - k & 3 - k \end{vmatrix} (2 - k) = (2 - k) (k^2 - 6k + 6) = 0,$$

корни которого $k_1 = 3 + \sqrt{3}$, $k_2 = 2$, $k_3 = 3 - \sqrt{3}$.

Вычисляя соответствующий k_1 собственный вектор из системы

$$-2(1 + \sqrt{3})\varphi_1 - (1 + \sqrt{3})\varphi_2 - (1 + \sqrt{3})\varphi_3 = 0,$$

$$-(1 + \sqrt{3})\varphi_1 - \sqrt{3}\varphi_2 - (1 + \sqrt{3})\varphi_3 = 0,$$

$$-(1 + \sqrt{3})\varphi_1 - (1 + \sqrt{3})\varphi_2 - (3 + 2\sqrt{3})\varphi_3 = 0,$$

получаем

$$\varphi_3 = 1, \quad \varphi_1 = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1), \quad \varphi_2 = -2 - \sqrt{3},$$

и, таким образом, собственные векторы

$$q_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \sqrt{3}) \\ -2 - \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}, \quad q_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3}) \\ -2 + \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Рис. 17.10 показывает форму соответствующих колебаний. Низшая частота принадлежит k_3 ; соответствующее колебание может классифицироваться как основное и имеет узел в области 3-го стержня, в то время как 1-е высшее колебание не имеет узлов. При этом колебании стержни между массами m_1 и m_2 и массами m_2 и m_3 колеблются вместе, как твердое тело.

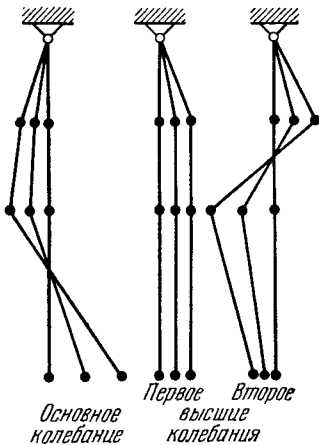


Рис. 17.10. Форма собственных колебаний сложного маятника.

Г. Колебания балки с массами и пружинами. Пусть на произвольно опертой балке находится несколько сосредоточенных масс m_1, m_2, \dots, m_n , которые связаны с жестким основанием пружинами, имеющими коэффициенты жесткости c_1, c_2, \dots, c_n .

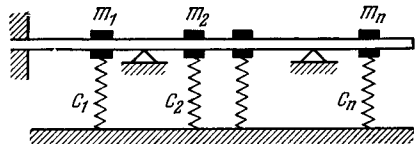


Рис. 17.11. Балка с сосредоточенными массами и пружинами.

как это изображено на рис. 17.11. Массу балки будем считать малой по сравнению с массами m_1, m_2, \dots, m_n .

Введем, как в п. 17.6, коэффициенты влияния α_{jn} и получим тогда уравнения движения

$$y_j = - \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} (m_k \ddot{y}_k + c_k y_k), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (17.60)$$

Для собственных колебаний, согласно (17.30), получается общая задача на собственные значения

$$\omega^2 \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} m_k y_k = y_j + \sum_{k=1}^n \alpha_{jk} c_k y_k, \quad j = 1, 2, \dots, n, \quad (17.61)$$

или с использованием матриц

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_n \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & c_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

уравнение

$$\omega^2 \mathfrak{F} M y = (C + \mathfrak{F} C) y. \quad (17.62)$$

С помощью \mathfrak{F}^{-1} данную задачу можно привести к промежуточной задаче на собственные значения

$$\omega^2 M y = (\mathfrak{F}^{-1} + C) y. \quad (17.63)$$

В качестве примера рассмотрим расположенную на двух опорах балку с постоянной изгибной жесткостью EJ , несущую четыре расположенные на

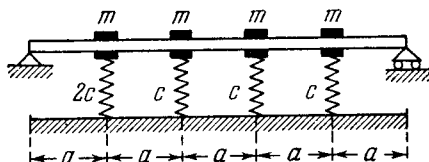


Рис. 17.12. Балка на двух опорах с четырьмя массами на пружинах.

равных расстояниях $a = \frac{1}{5} l$ массы (рис. 17.12). Матрица коэффициентов влияния \mathfrak{F} с $A = \frac{a^3}{30EJ}$ будет следующая:

$$\mathfrak{F} = (\alpha_{jk}) = A \begin{pmatrix} 32 & 45 & 40 & 23 \\ 45 & 72 & 68 & 40 \\ 40 & 68 & 72 & 45 \\ 23 & 40 & 45 & 32 \end{pmatrix}.$$

обратная матрица равна

$$\mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{1045A} \begin{pmatrix} 344 & -331 & 144 & -36 \\ -331 & 488 & -367 & 144 \\ 144 & -367 & 488 & -331 \\ -36 & 144 & -331 & -344 \end{pmatrix}.$$

Пусть, в частности,

$$m_1 = m_2 = m_3 = m_4 = m, \quad \frac{1}{2} c_1 = c_2 = c_3 = c_4 = c = \frac{0,4}{A}.$$

Тогда (17.63) перейдет в частную задачу на собственные значения с $\kappa = 1045\omega^2 mA$:

$$\mathfrak{K} y = \kappa y,$$

где

$$\mathfrak{K} = \begin{pmatrix} 1180 & -331 & 144 & -36 \\ -331 & 906 & -367 & 144 \\ 144 & -367 & 906 & -331 \\ -36 & 144 & -331 & 762 \end{pmatrix}. \quad (17.64)$$

В п. 18.8 этот пример исследуется численно.

Д. Балка с подвешенными на пружинах массами. Можно дать множество других механических примеров, ведущих к общим задачам на собственные значения. Рассмотрим еще конструкцию, изображенную на рис. 17.13. На произвольно опертой балке расположены сосредоточенные массы m_1, m_2, \dots, m_q , соединенные пружинами, коэффициенты жесткости которых c_1, c_2, \dots, c_q , с другими массами m_{q+1}, \dots, m_{2q} . Масса балки

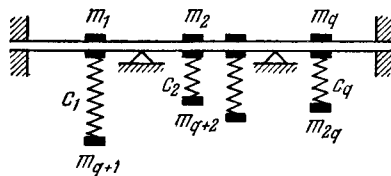


Рис. 17.13. Балка, нагруженная сосредоточенными и подвешенными на пружинах массами.

пусть будет опять пренебрежимо мала. При введении, как в п. 17.6А, коэффициентов влияния α_{jk} уравнения движения примут вид:

$$\left. \begin{aligned} y_j &= \sum_{k=1}^q \alpha_{jk} (-m_k \ddot{y}_k + c_k (y_{k+q} - y_k)), \\ m_{j+q} \ddot{y}_{j+q} &= -c_j (y_{j+q} - y_j) \end{aligned} \right\}, \quad j = 1, 2, \dots, q. \quad (17.65)$$

Теперь могут быть введены матрицы порядка q :

$$\mathfrak{F} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1q} \\ \alpha_{q1} & \dots & \alpha_{qq} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_1 = \begin{pmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & m_q \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{M}_2 = \begin{pmatrix} m_{q+1} & \dots & 0 \\ 0 & \dots & m_{2q} \end{pmatrix},$$

$$\mathfrak{C} = \begin{pmatrix} c_1 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & c_q \end{pmatrix}, \quad \psi_1 = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}, \quad \psi_2 = \begin{pmatrix} y_{q+1} \\ \vdots \\ y_{2q} \end{pmatrix}.$$

Тогда уравнения движения с учетом соотношений (17.30) можно записать так:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 \mathfrak{F} \mathfrak{M}_1 \psi_1 &= \psi_1 + \mathfrak{F} \mathfrak{C} \psi_1 - \mathfrak{F} \mathfrak{C} \psi_2, \\ \omega^2 \mathfrak{M}_2 \psi_2 &= -\mathfrak{C} \psi_1 + \mathfrak{C} \psi_2. \end{aligned} \right\} \quad (17.66)$$

Введя матрицы порядка $2q$:

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{A} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{C} + \mathfrak{F} \mathfrak{C} & -\mathfrak{F} \mathfrak{C} \\ -\mathfrak{C} & \mathfrak{C} \end{pmatrix}, & \mathfrak{B} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{F} \mathfrak{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}, \\ \mathfrak{A}^* &= \begin{pmatrix} \mathfrak{F}^{-1} + \mathfrak{C} & -\mathfrak{C} \\ -\mathfrak{C} & \mathfrak{C} \end{pmatrix}, & \mathfrak{M} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{M}_1 & 0 \\ 0 & \mathfrak{M}_2 \end{pmatrix}, & \psi &= \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \end{aligned} \right\} \quad (17.67)$$

можно записать общую задачу на собственные значения

$$\mathfrak{A} \psi = \omega^2 \mathfrak{B} \psi,$$

или в случае, если \mathfrak{F}^{-1} существует и известна, можно получить промежуточную задачу на собственные значения

$$\mathfrak{A}^* \psi = \omega^2 \mathfrak{M} \psi. \quad (17.68)$$

17.8. Эрмитова самосопряженность в случае интегро-дифференциальных уравнений. Настоящий параграф выпадает из общего содержания главы о матрицах и имеет целью проиллюстрировать тот факт, что различные понятия матричного исчисления легко переносятся на интегро-дифференциальные уравнения.

Рассмотрим симметричную матрицу $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}'$ и два произвольных вектора u , v ; тогда

$$u' \mathfrak{A} v = (u' \mathfrak{A} v)' = v' \mathfrak{A}' u = v' \mathfrak{A} u; \quad (17.69)$$

если, наоборот, для какой-либо матрицы \mathfrak{A} для любых векторов u , v имеет место соотношение

$$u' \mathfrak{A} v - v' \mathfrak{A} u = 0, \quad (17.70)$$

то матрица \mathfrak{A} является симметричной; действительно, выберем в качестве u и v единичные векторы (см. (18.9)) таким образом, что у u j -я, а у v k -я компоненты равны 1, а остальные равны нулю; тогда получим из (17.70)

$$a_{jk} = a_{kj}.$$

Следовательно, условие (17.70) означает симметрию матрицы \mathfrak{A} . В случае дифференциальных уравнений (17.70) соответствует самосопряженности (4.15). Аналогично

$$\begin{aligned} u' \mathfrak{A} v - v' \bar{\mathfrak{A}} u = 0 & \text{ обозначает эрмитову матрицу } \mathfrak{A}, \\ u' \mathfrak{A} v + v' \mathfrak{A} u = 0 & \text{ обозначает антисимметричную матрицу } \mathfrak{A}, \\ u' \mathfrak{A} v + v' \bar{\mathfrak{A}} u = 0 & \text{ обозначает антиэрмитову матрицу } \mathfrak{A}. \end{aligned}$$

Определим теперь общую самосопряженность не только для задач на собственные значения, но и для дифференциальных выражений.

Определение. При заданных действительных краевых условиях (4.15)

$$U_{\mu}[y] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, r, \quad (17.71)$$

дифференциальное выражение (5.1)

$$L[y] = \sum_{v=0}^k p_v(x) y^{(v)}(x) \quad (17.72)$$

называется самосопряженным, соответственно эрмитово самосопряженным, если для двух произвольных функций сравнения $u(x)$, $v(x)$ имеет место

$$\int_a^b (uL[v] - vL[u]) dx = 0,$$

соответственно

$$\int_a^b (uL[v] - v\bar{L}[u]) dx = 0.$$

При этом функция $u(x)$ называется функцией сравнения, если она отлична от нуля, удовлетворяет краевым условиям и k раз непрерывно дифференцируема. Через \bar{L} обозначено комплексно сопряженное к L дифференциальное выражение

$$\bar{L}]y = \sum_{\nu=0}^k \bar{p}_{\nu}(x) y^{(\nu)}(x).$$

Так, например, при краевых условиях

$$y(a) = y'(a) = \dots = y^{(m)}(a) = y(b) = \dots = y^{(m)}(b) = 0 \quad (17.73)$$

$$L[y] = \sum_{\mu=0}^m \{ [p_{2\mu}(x) y^{(\mu)}]^{(\mu)} + i [2p_{2\mu+1} y^{(\mu+1)} + p'_{2\mu+1} y^{(\mu)}]^{(\mu)} \} \quad (17.74)$$

— эрмитово самосопряженное дифференциальное выражение, при условии, что все функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_{2m+1}(x)$ являются действительными (и дифференцируемыми столько раз, сколько нужно для образования выражения L); подробнее:

$$L[y] = p_0 y + (p_2 y')' + (p_4 y'')'' + \dots \\ \dots + i(2p_1 y' + p'_1 y) + i(2p_3 y'' + p'_3 y')' + i(2p_5 y''' + p'_5 y'')'' + \dots;$$

после q -кратного интегрирования по частям следует требуемое равенство ($q \leq m$):

$$\int_a^b \{ u i [2p_{2q+1} v^{(q+1)} + p'_{2q+1} v^{(q)}]^{(q)} + v i [2p_{2q+1} u^{(q+1)} + p'_{2q+1} u^{(q)}]^{(q)} \} dx = \\ = (-1)^q i \int_a^b \{ u^{(q)} [2p_{2q+1} v^{(q+1)} + p'_{2q+1} v^{(q)}] + \\ + v^{(q)} [2p_{2q+1} u^{(q+1)} + p'_{2q+1} u^{(q)}] \} dx = \\ = (-1)^q 2i \int_a^b \frac{d}{dx} [p_{2q+1} u^{(q)} v^{(q)}] dx = (-1)^q 2i [p_{2q+1} u^{(q)} v^{(q)}]_a^b = 0.$$

Аналогично можно ввести антисимметричность и антиэрмитовость.

Определение. Дифференциальное выражение (17.72) с краевыми условиями (17.71) называется антисимметричным, соответственно антиэрмитовым, если для всех функций сравнения u , v имеют место равенства

$$\int_a^b (uL[v] + vL[u]) dx = 0$$

и соответственно

$$\int_a^b (uL[v] + v\bar{L}[u]) dx = 0.$$

Точно так же как это было сделано выше, можно показать, что при краевых условиях (17.73) выражение

$$L[y] = \sum_{\mu=0}^n \{ [2p_{2\mu+1}y^{(\mu+1)} + p'_{2\mu+1}y^{(\mu)}]^{(\mu)} + i [p_{2\mu}y^{(\mu)}]^{(\mu)} \}$$

будет антиэрмитовым.

Пусть теперь задано интегро-дифференциальное уравнение ¹⁾ в форме

$$\Phi[y] = \lambda\Psi[y], \quad (17.75)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Phi[y] &= M[y] + \int_a^b F(x, \xi) y(\xi) d\xi, \\ \Psi[y] &= N[y] + \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) d\xi, \\ M[y] &= \sum_{\rho=0}^m \mu_{\rho}(x) y^{(\rho)}(x), \quad N[y] = \sum_{\rho=0}^m \nu_{\rho}(x) y^{(\rho)}(x). \end{aligned} \right\} (17.76)$$

Пусть функции $\mu_{\rho}(x)$, $\nu_{\rho}(x)$ — заданные в интервале $a \leq x \leq b$ непрерывные комплексные функции x ; $F(x, \xi)$ и $G(x, \xi)$ заданы в $a \leq x$, $\xi \leq b$ и также являются непрерывными функциями x и ξ , а λ — отыскиваемое собственное значение, принадлежащее собственной функции $y(x)$. Пусть $m \geq n$; m называется порядком интегро-дифференциального уравнения, соответственно этому к (17.75) добавляется m линейных, однородных, линейно независимых действительных краевых условий

$$U_{\mu}[y] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, m. \quad (17.77)$$

Обычные интегральные уравнения понимаются тогда как интегро-дифференциальные уравнения нулевого порядка, к которым не требуется добавлять краевые условия; к интегро-дифференциальным уравнениям нулевого порядка относятся также такие уравнения, как,

¹⁾ Задачи на собственные значения для интегро-дифференциальных и общих функциональных уравнений рассмотрены в работе: R. Courant, Über die Anwendungen der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen, Acta mathematica 49 (1926), 1—68.

например,

$$\int_a^b K(x - \xi) y(\xi) d\xi = \lambda \int_a^b L(x - \xi) y(\xi) d\xi \quad (17.78)$$

с заданными функциями $K(x)$, $L(x)$.

Оператор Φ называется эрмитово самосопряженным, если $M[y]$ эрмитово самосопряжено и ядро F эрмитово, т. е. если

$$F(x, \xi) = \overline{F(\xi, x)}. \quad (17.79)$$

Тогда для всех функций сравнения $u(x)$, $v(x)$ будет

$$\int_a^b (u\Phi[v] - v\overline{\Phi}[u]) dx = 0. \quad (17.80)$$

Оператор Φ называют положительно определенным, если для всех функций сравнения $u(x)$

$$\int_a^b \overline{u}\Phi[u] dx > 0. \quad (17.81)$$

Аналогичное утверждение справедливо для Ψ .

Точно так же как в пп. 4.4 и 4.5, можно показать при предполагаемой эрмитовой самосопряженности Φ и Ψ и положительной определенности Ψ вещественность λ и свойства ортогональности. Пусть дано собственное значение λ и принадлежащая ему собственная функция y . Тогда из (17.75) следует

$$\lambda = R[u] = \frac{\int_a^b \overline{y}\Phi[y] dx}{\int_a^b \overline{y}\Psi[y] dx}, \quad (17.82)$$

причем $R[u]$ имеет смысл отношения Рэлея. Знаменатель положителен. Числитель вследствие эрмитовой самосопряженности Φ действителен: так как

$$Z = \int_a^b \overline{y}\Phi[y] dx, \quad \overline{Z} = \int_a^b y\overline{\Phi}[\overline{y}] dx = Z;$$

следовательно, все имеющиеся собственные значения λ действительны. Если, кроме того, Φ — положительно определенный оператор, все собственные значения положительны. Пусть, далее, y_j , y_k — собственные функции, соответствующие двум различным собственным

значениям λ_j, λ_k ,

$$\Phi[y_j] = \lambda_j \Psi[y_j], \quad \Phi[y_k] = \lambda_k \Psi[y_k].$$

Следовательно, также

$$\bar{\Phi}[\bar{y}_k] = \bar{\lambda}_k \bar{\Psi}[\bar{y}_k],$$

где

$$\bar{\Phi}[u] = \bar{M}[u] + \int_a^b \bar{F}(x, \xi) u(\xi) d\xi.$$

Таким образом, получаем

$$\int_a^b (\bar{y}_k \Phi[y_j] - y_j \bar{\Phi}[\bar{y}_k]) dx = \lambda_j \int_a^b \bar{y}_k \Psi[y_j] dx - \bar{\lambda}_k \int_a^b y_j \bar{\Psi}[\bar{y}_k] dx.$$

Так как y_j и y_k — функции сравнения, из-за эрмитовой самосопряженности следует, что левая часть равна нулю, а оба интеграла в правой части равны друг другу; тогда

$$(\lambda_j - \bar{\lambda}_k) \int_a^b \bar{y}_k \Psi[y_j] dx = 0,$$

или, если использовать действительность собственных значений:

$$\int_a^b \bar{y}_k \Psi[y_j] dx = 0 \quad (17.83)$$

при $\lambda_j \neq \lambda_k$.

Пример. Для

$$y'' + iy' = \lambda y, \quad y(-1) = y(1) = 0$$

$M[y] = y'' + iy'$ при данных краевых условиях эрмитово самосопряжен, а $N[y] = y$, кроме того, положительно определен, следовательно, все собственные значения действительны. Так как здесь общее решение дифференциального уравнения может быть задано в виде экспоненциальной функции, собственные значения легко вычисляются; получаем

$$\lambda_n = \frac{1 - \pi^2 n^2}{4}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

§ 18. Экстремальные свойства характеристических чисел

Ниже дается новое определение характеристических чисел¹⁾, обозначаемых через κ_s^* , и далее показывается, что κ_s^* совпадают с определенными согласно (17.6) κ_s . Максимальные свойства и теорема

¹⁾ В этом параграфе мы следуем книге R. Courant, D. Gilbert, *Methoden der mathematischen Physik*, т. I, II, изд. 2, Berlin, 1931 [Р. Курант, Д. Гильберт, *Методы математической физики*, тт. I, II, ГИТТЛ, изд. 2-е, М.—Л., 1951].

включения дают основу для различных численных методов нахождения собственных значений матриц.

18.1. Определение характеристических чисел при помощи задач на максимум. Пусть дана эрмитова форма

$$H = \bar{x}' \mathfrak{A} x = \sum_{j, k=1}^n a_{jk} \bar{x}_j x_k \quad (18.1)$$

с эрмитовой матрицей $\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}'$. Наглядности ради читатель может оперировать с частным случаем действительной симметричной матрицы и при $H=1$ представлять себе уравнение поверхности второго порядка. Эти геометрические представления помогут также при дальнейших определениях и образовании новых понятий. А именно, для таких поверхностей наименьшую и наибольшую главные оси можно определить через расстояния до точек поверхности с минимальным, соответственно максимальным, удалением от центра, т. е.

$$H = 1, \quad |x|^2 = \sum_{j=0}^n x_j^2 = \begin{cases} \text{max,} \\ \text{min.} \end{cases}$$

Точно так же оба эти направления главных осей можно задать с помощью соотношения

$$\sum_{j=1}^n x_j^2 = 1, \quad H = \begin{cases} \text{min,} \\ \text{max.} \end{cases}$$

Рис. 18.1. К определению главных осей при помощи задачи на экстремум.

Обозначим через x_1 и x_n решения этих задач. Вторая по величине главная ось может быть найдена путем определения наименьшего расстояния до поверхности на направлениях, перпендикулярных к первой главной оси (рис. 18.1), следовательно,

$$H = 1, \quad x \perp x_1, \quad |x|^2 = \sum_{j=1}^n x_j^2 = \text{min,}$$

и так же можно найти другие главные оси.

От этих наглядных представлений мы переходим к решениям экстремальной задачи для эрмитовой матрицы \mathfrak{A}

$$H = \bar{x}' \mathfrak{A} x = \text{max} \quad (18.2)$$

с дополнительным условием

$$\bar{x} x = 1. \quad (18.3)$$

Согласно (17.10) H принимает только действительные значения. Наверняка имеется вектор x_1 , являющийся решением этой задачи на

максимум, так как по теореме Вейерштрасса непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве достигает своего наибольшего (а также наименьшего) значения по крайней мере в одной точке области. Этот максимум обозначим через κ_1^* .

Можно легко задать также границы для H на множестве точек $\bar{x}'x = 1$ (и вместе с тем для κ_1^*). Пусть максимальный модуль a_{jk} есть A :

$$|a_{jk}| \leq A, \quad j, k = 1, 2, \dots, n,$$

тогда будет

$$|H| = \left| \sum_{j, k=1}^n a_{jk} \bar{x}_j x_k \right| \leq \sum_{j, k=1}^n |a_{jk}| |\bar{x}_j| |x_k| \leq \leq A \sum_{j, k=1}^n |\bar{x}_j| |x_k| = A \left(\sum_{j=1}^n |x_j| \right)^2$$

и, далее, по неравенству Шварца (см. подстрочное примечание 1 в п. 10.5 стр. 155)

$$|H| \leq A \sum_{j=1}^n 1^2 \cdot \sum_{j=1}^n |x_j|^2 = nA. \quad (18.4)$$

Итак, H — ограниченная и непрерывная функция.

Максимум κ_1^* для H достигается при $x = x_1$.

Будем теперь разыскивать максимум H при двух дополнительных условиях

$$\bar{x}'x = 1, \quad \bar{x}'x_1 = 0; \quad (18.5)$$

таким образом, к сравнению допускаются только нормированные и унитарные к x_1 (см. (17.23)) векторы. Снова по теореме Вейерштрасса должен существовать вектор $x = x_2$, на котором достигается новый максимум, обозначаемый через κ_2^* . Компоненты векторов x_1 и x_2 будут x_{j1} , x_{j2} соответственно.

Теперь составляются третья задача на максимум

$$H = \max$$

при дополнительных условиях $\bar{x}'x = 1$, $\bar{x}'x_1 = \bar{x}'x_2 = 0$, решение которой $H = \kappa_3^*$ для $x = x_3$, и общая r -я задача на максимум

$$H = \max$$

при дополнительных условиях $\bar{x}'x = 1$, $\bar{x}'x_s = 0$, для $s = 1, 2, 3, \dots, r-1$. Для $r \leq n$ наверняка найдутся такие векторы; пусть \mathfrak{z} — линейно независимый относительно x_1, x_2, \dots, x_{r-1} вектор, тогда

$$x^* = \mathfrak{z} - \sum_{\rho=1}^{r-1} (\bar{\mathfrak{z}}'x_\rho) x_\rho$$

унитарен к x_1, x_2, \dots, x_{r-1} и x^* не может быть тождественно равен нулю, так как иначе вектор \mathfrak{z} был бы линейно зависим относительно

$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{r-1}$. Умножением на подходящий множитель C можно нормировать ξ^* к $\xi = C\xi^*$. Процесс оканчивается при $r = n$ n -й задачей на максимум, для которой $H = \lambda_n^*$. Далее видно, что последовательно найденные решения ξ_k линейно независимы. Из условия

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_q \xi_q = 0$$

умножением слева на $\bar{\xi}_j$ получаем, что все α_j должны быть равны нулю.

18.2. Приведение к главным осям. Компоненты x_{jr} вектора ξ_r , найденного по указанному выше методу, запишем теперь в виде матрицы U

$$U = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}; \quad (18.6)$$

утверждается, что U — унитарная матрица, которая для

$$\xi = U\eta \quad (18.7)$$

эрмитову форму переводит в чисто квадратичную. Форма H переходит в новую форму (так как в данном случае путаницы можно не опасаться, сохранена буква H):

$$H = \bar{\xi}' A \xi = \bar{\eta}' U' A U \eta = \bar{\eta}' \mathcal{C} \eta,$$

где

$$\mathcal{C} = U' A U, \quad (18.8)$$

и можно показать, что \mathcal{C} — диагональная матрица. Пусть в новой координатной системе $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$ — единичные векторы:

$$\eta_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \eta_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \eta_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (18.9)$$

При преобразовании (18.7) η_r переходит в ξ_r .

Прежде всего, следует, что U унитарна; действительно, записывая векторы $\bar{\xi}'_1, \bar{\xi}'_2, \dots, \bar{\xi}'_n$ как строки матрицы \bar{U}' , вследствие

$$\bar{\xi}'_r \xi_s = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{при } r = s, \\ 0 & \text{при } r \neq s \end{cases} \quad (18.10)$$

получаем

$$\bar{u}'u = \begin{pmatrix} \bar{x}'_1 \\ \vdots \\ \bar{x}'_n \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} \bar{x}'_1 x_1 & \dots & \bar{x}'_1 x_n \\ \bar{x}'_2 x_1 & \dots & \bar{x}'_2 x_n \\ \vdots & \dots & \vdots \\ \bar{x}'_n x_1 & \dots & \bar{x}'_n x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathfrak{E}. \quad (18.11)$$

Вместо (18.8) можно писать также $\mathfrak{E} = u^{-1} \mathfrak{A} u$. При унитарных преобразованиях (18.7) сохраняется квадрат модуля вектора или его «норма»:

$$\bar{x}'x = \bar{y}'\bar{u}'u y = \bar{y}'y \quad (18.12)$$

(в действительной области унитарным преобразованиям соответствуют ортогональные преобразования, при которых сохраняется длина вектора).

Полученная из \mathfrak{A} новая матрица \mathfrak{E} эрмитова, так как

$$\bar{\mathfrak{E}}' = \overline{(\bar{u}'\mathfrak{A}u)'} = \bar{u}'\bar{\mathfrak{A}}'u = \bar{u}'\mathfrak{A}u = \mathfrak{E}, \quad (18.13)$$

Преобразованная эрмитова форма имеет вид

$$H = \bar{y}'\mathfrak{E}y = \sum_{j, k=1}^n c_{jk} \bar{y}_j y_k. \quad (18.14)$$

Можно показать, что \mathfrak{E} имеет диагональную форму, т. е. что $c_{jk} = 0$ для $j \neq k$. Так как вектор x_1 был определен из требования $H = \max = \kappa_1^*$ для $\bar{x}'x = 1$, то в преобразованной форме H принимает максимум κ_1^* при $y = y_1$; подставим, согласно (18.9), y_1 в (18.14), тогда получим $c_{11} = H_{\max} = \kappa_1^*$. Далее утверждается, что $c_{12} = 0$. Для доказательства применительно к y_1 используем действительную вариацию ε такую, что $-1 < \varepsilon < 1$, и перейдем к некоторому вектору y_1^* , который остается допустимым вектором, удовлетворяющим дополнительному условию $\bar{y}_1^* y_1^* = 1$:

$$y_1^* = \begin{pmatrix} \sqrt{1 - \varepsilon^2} \\ \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (18.15)$$

Для этого вектора $H = \kappa_1^*(1 - \varepsilon^2) + (c_{12} + c_{21})\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} + c_{22}\varepsilon^2$. Согласно (18.13) матрица \mathfrak{E} эрмитова, т. е. $c_{21} = \bar{c}_{12}$, следовательно,

$$H = \kappa_1^* + (c_{12} + \bar{c}_{12})\varepsilon\sqrt{1 - \varepsilon^2} + \varepsilon^2(c_{22} - \kappa_1^*); \quad (18.16)$$

при $\varepsilon = 0$ эта функция должна принимать максимум κ_1^* ; для поведения при малых ε существенным является линейный относительно ε член, и H только тогда принимает максимум, когда обращается в нуль производная $\left(\frac{dH}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0}$, т. е. когда исчезает множитель при ε :

$$c_{12} + \bar{c}_{12} = 0,$$

следовательно, c_{12} должно быть чисто мнимым. Если повторить теперь рассуждения с

$$y_1^{**} = \begin{bmatrix} \sqrt{1-\varepsilon^2} \\ i\varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (18.17)$$

то из $H(y^{**}) = \kappa_1^*(1-\varepsilon^2) + (c_{12} - c_{21})i\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2} + c_{22}\varepsilon^2$ следует, что $c_{12} = c_{21} = \bar{c}_{12}$, т. е. c_{12} должно быть действительно. На основании первого равенства c_{12} должно быть чисто мнимым, следовательно, $c_{12} = c_{21} = 0$.

Соответствующие рассуждения можно применить ко всем c_{jk} , $j \neq k$. Например, для c_{23}

$$y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\varepsilon^2} \\ \varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \text{соответственно} \quad y_2^{**} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sqrt{1-\varepsilon^2} \\ i\varepsilon \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тогда при

$$\bar{y}_2' y_2^* = \bar{y}_2^{**'} y_2^{**} = 1$$

выполняются также и необходимые для определения $H_{\max} = \kappa_2^*$ дополнительные условия $\bar{y}_2' y_1 = 0$ и соответственно $\bar{y}_2^{**'} y_1 = 0$. Таким образом, показывается, что в преобразованной форме все смешанные произведения $c_{jk} \bar{y}_j y_k$ для $j \neq k$ исчезают и H принимает вид

$$H = \sum_{j=1}^n c_{jj} \bar{y}_j y_j = \sum_{j=1}^n \kappa_j^* \bar{y}_j y_j = \sum_{j=1}^n \kappa_j^* |y_j|^2. \quad (18.18)$$

Как видно, \mathfrak{C} имеет характеристические числа κ_s^* ; тогда

$$\mathfrak{C}y_s = \kappa_s^* y_s, \quad s = 1, 2, \dots, n,$$

или, согласно (18.8),

$$\bar{u}' \mathfrak{A} u y_s = \kappa_s^* y_s.$$

Умножая слева на u и учитывая, что $x_s = u y_s$, получаем в соответствии с (18.7)

$$u \bar{u}' \mathfrak{A} u y_s = \mathfrak{A} x_s = \kappa_s^* u y_s = \kappa_s^* x_s. \quad (18.19)$$

Таким образом, x_s суть собственные векторы матриц \mathfrak{A} , соответствующие характеристическим числам $\kappa_s = \kappa_s^*$.

Теорема. Пусть \mathfrak{A} — некоторая эрмитова матрица, имеющая n действительных характеристических чисел $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$:

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n. \quad (18.20)$$

Эрмитова форма $H = \bar{x}' \mathfrak{A} x$ достигает максимума κ_1 для $x = x_1$, когда x пробегает область всех нормированных ($\bar{x}' x = 1$) n -компонентных векторов, и максимума κ_r при $x = x_r$, если, кроме нормировки $\bar{x}' x_s = 1$, наложит еще дополнительные условия $\bar{x}' x_s = 0$, $s = 1, 2, \dots, r - 1$. Решения x_1, x_2, \dots, x_n задачи на максимум одновременно являются собственными векторами матрицы \mathfrak{A} при характеристических числах $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$. Эти нормированные собственные векторы образуют унитарную матрицу u :

$$u = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

которая при $x = u y$ преобразует эрмитову форму к диагональному виду $\sum_{j=1}^n \kappa_j |y_j|^2$.

Если бы в (18.2) разыскивался не максимум, а минимум H при дополнительных условиях (18.3), то аналогичное рассмотрение показало бы, что минимальное значение H является характеристическим числом матрицы, т. е., согласно (18.20),

$$H_{\min} = (\bar{x}' \mathfrak{A} x)_{\min} = \kappa_n \quad \text{при} \quad \bar{x}' x = 1.$$

18.3. Выводы и оценки. В случае, если H при $\bar{x}' x > 0$ оказывается всегда положительным, все максимумы $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ будут положительными; таким образом, справедлива следующая

Теорема. Эрмитова матрица \mathfrak{A} тогда и только тогда положительно определена, когда все ее характеристические числа положительны.

Так как H и $\bar{x}' x$ суть однородные эрмитовы формы, можно для чисел κ_1 и κ_n , обозначаемых далее $(\kappa_{\mathfrak{A}})_{\max}$ и $(\kappa_{\mathfrak{A}})_{\min}$, записать

следующие неравенства

$$(\kappa_{\mathfrak{A}})_{\min} \cdot \bar{x}'x \leq \bar{x}'\mathfrak{A}x \leq (\kappa_{\mathfrak{A}})_{\max} \cdot \bar{x}'x, \quad (18.21)$$

причем удовлетворение дополнительному условию $\bar{x}'x = 1$ больше не требуется.

Для произвольной неэрмитовой матрицы \mathfrak{A} матрица

$$\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A}$$

эрмитова; она является положительно определенной при невырожденной матрице \mathfrak{A} и положительно полуопределенной при вырожденной \mathfrak{A} . Действительно, $\bar{\mathfrak{B}}' = \bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$, и если заменить x на $\mathfrak{A}y$, получим

$$\bar{x}'x = \bar{y}'\mathfrak{B}y \geq 0, \quad (18.22)$$

где $\bar{y}'\mathfrak{B}y$ при невырожденной матрице \mathfrak{A} обращается в нуль только, когда $y = 0$. Обозначим теперь (неотрицательные) характеристические числа матрицы $\mathfrak{B} = \bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A}$ через $(\kappa_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}})^2$:

$$\kappa_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} = +\sqrt{\kappa_{\bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A}}} = +\sqrt{\kappa_{\mathfrak{B}}}. \quad (18.23)$$

Для эрмитовой матрицы \mathfrak{A}

$$\kappa_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} = |\kappa_{\mathfrak{A}}| \quad (18.24)$$

и для положительно определенной эрмитовой матрицы

$$\kappa_{\mathfrak{B}}^{\mathfrak{A}} = \kappa_{\mathfrak{A}}.$$

В случае произвольной матрицы, введя для $\kappa_{\min}^{\mathfrak{A}}$ и $\kappa_{\max}^{\mathfrak{A}}$ обозначения $|\underline{\mathfrak{A}}|$ и $|\overline{\mathfrak{A}}|$, получим соотношения¹⁾

$$|\underline{\mathfrak{A}}| \leq |\kappa_{\mathfrak{A}}| \leq |\overline{\mathfrak{A}}|; \quad (18.25)$$

так как x есть собственный вектор, соответствующий характеристическому числу κ , то имеет место соотношение

$$\kappa x = \mathfrak{A}x, \quad \bar{\kappa}\bar{x}' = \bar{x}'\bar{\mathfrak{A}}'$$

и $|\kappa|^2 \bar{x}'x = \bar{x}'\bar{\mathfrak{A}}'\mathfrak{A}x = \bar{x}'\mathfrak{B}x$. В соответствии с (18.21) теперь получаем

$$(\kappa_{\mathfrak{B}})_{\min} \bar{x}'x \leq |\kappa|^2 \bar{x}'x \leq (\kappa_{\mathfrak{B}})_{\max} \bar{x}'x,$$

откуда, сокращая на $\bar{x}'x$, непосредственно приходим к (18.25). Если применить векторную форму записи для модуля

$$|x| = \sqrt{\bar{x}'x}, \quad |y| = \sqrt{\bar{y}'y},$$

¹⁾ Эти обозначения применялись Виландтом.

то неравенство (18.21) с учетом (18.22) даст

$$(\kappa_{\mathfrak{B}})_{\min} \bar{y}' y \leq \bar{y}' \mathfrak{B} y \leq (\kappa_{\mathfrak{B}})_{\max} \bar{y}' y$$

или

$$(\kappa_{\mathfrak{B}})_{\min} |y|^2 \leq |\xi|^2 \leq (\kappa_{\mathfrak{B}})_{\max} |y|^2.$$

При этом в левой, соответственно правой, части будет знак равенства, если заменить y собственным вектором задачи $\bar{\mathfrak{A}}' \mathfrak{A} y = (\kappa^{\mathfrak{A}})^2 y$, принадлежащим $|\bar{\mathfrak{A}}|$, соответственно $|\mathfrak{A}|$.

Теорема. Для линейного преобразования $\mathfrak{A} y = \xi$ справедлива оценка

$$\frac{|\xi|}{|\mathfrak{A}|} \leq |y| \leq \frac{|\xi|}{|\bar{\mathfrak{A}}|}, \quad (18.26)$$

причем в качестве знаменателя выступает наибольшее, соответственно наименьшее, число (18.23), или

$$|\mathfrak{A}| |y| \leq |\mathfrak{A} y| \leq |\bar{\mathfrak{A}}| |y|. \quad (18.27)$$

Если \mathfrak{A} — эрмитова матрица, то

$$|\mathfrak{A}| \bar{x}' x \leq |\bar{x}' \mathfrak{A} x| \leq \mathfrak{A} \bar{x} x.$$

Введем несколько неравенств, которые понадобятся в дальнейшем.

Пусть \mathfrak{A} и \mathfrak{B} — заданные матрицы и v_1 — принадлежащий $|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}|$ собственный вектор задачи

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})' (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) v = \kappa v, \quad (18.28)$$

Тогда, используя равенство

$$\xi_1 = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) v_1,$$

согласно (18.27) получим

$$|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| |v_1| = |(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) v_1| \leq |\mathfrak{A} v_1| + |\mathfrak{B} v_1| \leq |\bar{\mathfrak{A}}| |v_1| + |\bar{\mathfrak{B}}| |v_1|.$$

Далее, пусть v_n — принадлежащий $|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}|$ собственный вектор (18.28).

Тогда

$$|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| |v_n| = |(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}) v_n| \geq |\mathfrak{A} v_n| - |\mathfrak{B} v_n| \geq |\underline{\mathfrak{A}}| |v_n| - |\bar{\mathfrak{B}}| |v_n|.$$

Итак, имеют место соотношения

$$\begin{aligned} |\bar{\mathfrak{A}}| - |\bar{\mathfrak{B}}| &\leq |\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| \leq |\bar{\mathfrak{A}}| + |\bar{\mathfrak{B}}|, \\ |\underline{\mathfrak{A}}| - |\bar{\mathfrak{B}}| &\leq |\mathfrak{A} + \mathfrak{B}| \leq |\underline{\mathfrak{A}}| + |\bar{\mathfrak{B}}|. \end{aligned} \quad (18.29)$$

Эти неравенства можно наглядно изобразить на числовой оси κ (рис. 18.2).

18.4. Одновременное приведение к главным осям двух эрмитовых форм. Для общей задачи на собственные значения преобразование к главным осям происходит совершенно аналогично случаю

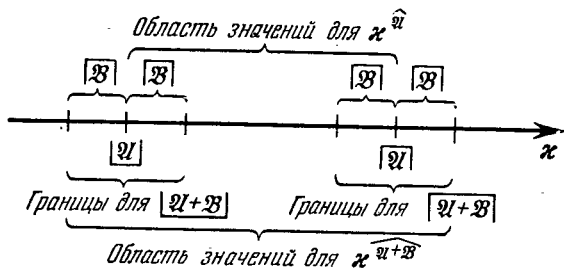


Рис. 18.2. Границы для собственных чисел.

частной задачи, поэтому все изложенное выше будет повторено более кратко. Пусть снова поставлена задача

$$A\zeta = \lambda B\zeta;$$

A и B — эрмитовы матрицы и B , — кроме того, положительно определенная матрица, тогда

$$\bar{\zeta}' B \zeta > 0 \text{ для всех } \zeta, \text{ для которых } \bar{\zeta}' \zeta > 0. \quad (18.30)$$

В этом случае все характеристические числа λ положительны. Вместо имевшейся раньше нормировки $\bar{\zeta}' \zeta = 1$ выступает нормировочное условие с матрицей B :

$$\bar{\zeta}' B \zeta = 1. \quad (18.31)$$

Каждый не равный тождественно нулю вектор ζ можно умножением на постоянную C перевести в вектор $\zeta = C\zeta$, для которого справедливо (18.31). Будем опять исходить из задач на максимум. Сначала составим максимум

$$H = \bar{\zeta}' A \zeta$$

на множестве векторов с $\bar{\zeta}' B \zeta = 1$. Этот максимум λ_1^* достигается при $\zeta = \zeta_1$.

Максимум существует, как и ранее, на основании теоремы Вейерштрасса; можно легко сделать оценку для H : по теореме из п. 18.3 следует

$$|H| \leq \frac{|\overline{A}|}{|\overline{B}|} \bar{\zeta}' \zeta \leq \frac{|\overline{A}|}{|\overline{B}|} \bar{\zeta}' B \zeta = \frac{|\overline{A}|}{|\overline{B}|}.$$

Таким образом, форма H при дополнительном условии (18.31) является ограниченной,

Вторая задача на максимум

$$H = \max$$

с дополнительными условиями $\bar{x}'Bx = 1$, $\bar{x}'Bx_s = 0$ имеет решение $x = x_2$ при $H = x_2^*$; вообще $x = x_r$ при $H = x_r^*$ — решение задачи

$$H = \max$$

с дополнительными условиями $\bar{x}'Bx = 1$, $\bar{x}'Bx_s = 0$ для $s = 1, 2, \dots, r - 1$. Найденные последовательно векторы, являющиеся решениями задачи, линейно независимы, так как из равенства

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_q x_q = 0$$

после умножения слева на $\bar{x}'_j B$ следует $\alpha_j = 0$, так что все постоянные должны обращаться в нуль.

Пусть z есть линейно независимый по отношению к x_1, x_2, \dots, x_{r-1} ($r \leq n$) вектор; тогда имеет место равенство

$$x^* = z - \sum_{\rho=1}^{r-1} (\bar{z}'Bx_\rho) x_\rho$$

с дополнительными условиями $\bar{x}^* B x_\sigma = 0$ для $\sigma = 1, 2, \dots, r - 1$, и после умножения x^* на постоянную C можно удовлетворить также условию (18.31), так как x^* не равен тождественно нулю из-за предполагаемой линейной независимости. Итак, для всех n задач на максимум имеются допустимые векторы, а вместе с тем и векторы x_1, x_2, \dots, x_n , являющиеся решениями задачи.

Как в (18.6) составим из полученных таким образом векторов-решений матрицу преобразования X , которая больше не должна быть унитарной:

$$X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}, \quad (18.32)$$

Вследствие линейной независимости x_r $\det X \neq 0$; таким образом X не вырождена.

При преобразовании

$$x = Xu \quad (18.33)$$

векторы x_r переходят в единичные векторы u_r (см. (18.9)).

Вместо (18.10), (18.11) здесь появляются (для $s > r$ в соответствии с (17.25))

$$\bar{x}'_r B x_s = \delta_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{для } r = s, \\ 0 & \text{для } r \neq s \end{cases} \quad (18.34)$$

и

$$\bar{x}' B x = \begin{pmatrix} \bar{x}'_1 \\ \bar{x}'_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{x}'_n \end{pmatrix} (B_{x_1}, B_{x_2}, \dots, B_{x_n}) =$$

$$= \begin{pmatrix} \bar{x}'_1 B_{x_1} & \dots & \bar{x}'_1 B_{x_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \bar{x}'_n B_{x_1} & \dots & \bar{x}'_n B_{x_n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \mathbb{E}. \quad (18.35)$$

При преобразовании (18.33) эрмитова форма H переходит в

$$H = \bar{x}' A x = \bar{y}' \bar{x}' A x y = \bar{y}' C y$$

с

$$\mathbb{C} = \bar{x}' A x. \quad (18.36)$$

Так как дополнительные условия $\bar{x}' B x = 1$, $\bar{x}' B x_s = 0$ переходят здесь, согласно (18.33), (18.35), в

$$\bar{y}' C x y = \bar{y}' y = 1, \quad \bar{y}' y_s = 0,$$

то доказательство факта, что \mathbb{C} — диагональная матрица с элементами κ_r^*

$$\mathbb{C} = \begin{pmatrix} \kappa_1^* & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \kappa_2^* & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & \kappa_n^* \end{pmatrix},$$

буквально такое же, как в п. 18.2; необходимо только выступавшие там дополнительные условия $\bar{x}' x = 1$, $\bar{x}' x_r = 0$ заменить на $\bar{x}' B x = 1$, $\bar{x}' B x_r = 0$. Таким образом, обе эрмитовы формы $\bar{x}' A x$ и $\bar{x}' B x$ перейдут в

$$\bar{y}' C y = \sum_{j=1}^n \kappa_j^* \bar{y}_j y_j \quad \text{и} \quad \bar{y}' y = \sum_{j=1}^n \bar{y}_j y_j.$$

Следовательно, \mathbb{C} опять имеет в качестве характеристических чисел κ_s^* , т. е.

$$\mathbb{C} y_s = \kappa_s^* y_s$$

или по (18.35), (18.36)

$$\bar{x}' A x y_s = \kappa_s^* y_s = \kappa_s^* \bar{x}' B x y_s.$$

Умножением слева на $(\bar{\mathfrak{X}}')^{-1}$ (\mathfrak{X} несингулярна, следовательно, $(\bar{\mathfrak{X}}')^{-1}$ существует) получают в соответствии с (18.33)

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_s = \kappa_s^* \mathfrak{B}\mathfrak{x}_s,$$

т. е. вектор-решение \mathfrak{x}_s одновременно является собственным вектором общей задачи на собственные значения (17.14) с характеристическими числами $\kappa_s = \kappa_s^*$.

Теорема. Пусть \mathfrak{A} , \mathfrak{B} — две эрмитовы матрицы и \mathfrak{B} положительно определена. Общая задача на собственные значения имеет тогда n действительных характеристических чисел $\kappa_1, \dots, \kappa_n$

$$\kappa_1 \geq \kappa_2 \geq \dots \geq \kappa_n, \quad (18.37)$$

обладающих максимальными свойствами: эрмитова форма $H = \bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{A} \mathfrak{x}$ достигает максимума κ_1 при $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_1$, когда \mathfrak{x} пробегает область векторов с $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x} = 1$, и максимума κ_r при $\mathfrak{x} = \mathfrak{x}_r$, если, кроме того, наложить дополнительные условия $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_s = 0$ для $s = 1, 2, \dots, r-1$. Решения задачи на максимум одновременно являются собственными векторами задачи $\mathfrak{A}\mathfrak{x} = \kappa \mathfrak{B}\mathfrak{x}$ с характеристическими числами $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$.

Эти нормированные посредством равенства $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x} = 1$ собственные векторы образуют матрицу

$$\mathfrak{X} = (\mathfrak{x}_1, \mathfrak{x}_2, \dots, \mathfrak{x}_n),$$

которая при $\mathfrak{x} = \mathfrak{X}\mathfrak{y}$ приводит к диагональному виду сразу обе эрмитовы формы $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{A} \mathfrak{x}$ и $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x}$:

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j \bar{y}_j y_j \quad \text{и} \quad \sum_{j=1}^n \bar{y}_j y_j,$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathfrak{x}}_r' \mathfrak{A} \mathfrak{x}_s &= \begin{cases} \kappa_r & \text{для } r = s, \\ 0 & \text{для } r \neq s, \end{cases} \\ \bar{\mathfrak{x}}_r' \mathfrak{B} \mathfrak{x}_s &= \begin{cases} 1 & \text{для } r = s, \\ 0 & \text{для } r \neq s. \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (18.38)$$

Как и в (18.21), здесь тоже можно, введя обозначения для κ_1 и κ_n ($\kappa_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}})_{\max}$ и ($\kappa_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}})_{\min}$ соответственно, перейти к неравенствам

$$(\kappa_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}})_{\min} \bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x} \leq \bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{A} \mathfrak{x} \leq (\kappa_{\mathfrak{A}, \mathfrak{B}})_{\max} \bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x}$$

и отказаться от дополнительных условий $\bar{\mathfrak{x}}' \mathfrak{B} \mathfrak{x} = 1$.

18.5. Пример. Геометрическая интерпретация собственных векторов двух квадратичных форм. Пусть заданы две действительные эрмитовы (квадратичные) формы

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= 4x_1^2 - 4x_1x_2 - 2x_2^2 = \mathfrak{A}x, \\ H_2 &= 3x_1^2 + 2x_1x_2 + 3x_2^2 = \mathfrak{B}x \end{aligned} \right\} \quad (18.40)$$

с матрицами

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Здесь \mathfrak{B} положительно определена, \mathfrak{A} неопределенна. Поставим задачу — привести одновременно обе формы с помощью линейного преобразования к чисто квадратичному виду.

Характеристические числа κ соответствующей задачи на собственные значения (17.14) определяются из (17.15)

$$\det(\mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{B}) = \begin{vmatrix} 4 - 3\kappa & -2 - \kappa \\ -2 - \kappa & -2 - 3\kappa \end{vmatrix} = 8\kappa^2 - 10\kappa - 12 = 0,$$

$\kappa_1 = 2$; $\kappa_2 = -\frac{3}{4}$. Теперь можно определить соответствующие собственные векторы. Для $\kappa_1 = 2$ имеем уравнения

$$-2x_1 - 4x_2 = 0, \quad -4x_1 - 8x_2 = 0,$$

следовательно, $x_1 = \begin{pmatrix} 2a \\ -a \end{pmatrix}$, причем произвольную постоянную a определим так, чтобы выполнялось условие нормировки (18.34):

$$3 \cdot 4a^2 + 2 \cdot 2a(-a) + 3(-a)^2 = 1, \quad \text{откуда } a = \frac{1}{\sqrt{11}};$$

соответственно второй нормированный вектор будет

$$x_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sqrt{22}} \\ \frac{5}{2\sqrt{22}} \end{pmatrix}.$$

Из собственных векторов составляется матрица преобразования в соответствии с (18.32), (18.33)

$$x = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{11}} & \frac{1}{2\sqrt{22}} \\ \frac{-1}{\sqrt{11}} & \frac{5}{2\sqrt{11}} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0,603 & 0,106 \\ -0,302 & 0,532 \end{pmatrix}, \quad (18.41)$$

так что записанные подробно формулы преобразования имеют вид

$$x_1 = \frac{2}{\sqrt{11}} y_1 + \frac{1}{2\sqrt{22}} y_2, \quad x_2 = \frac{-1}{\sqrt{11}} y_1 + \frac{5}{2\sqrt{22}} y_2.$$

Это преобразование действительно переводит H_1 и H_2 , согласно (18.40), одновременно в две чисто квадратичные формы

$$H_1 = 2y_1^2 - \frac{3}{4}y_2^2 = \kappa_1 y_1^2 + \kappa_2 y_2^2, \quad H_2 = y_1^2 + y_2^2.$$

Матрица (18.41) не унитарна (здесь — в действительной области — не ортогональна), т. е. если x_1, x_2 толковать как прямоугольные координаты, после преобразования получаются косоугольные координаты y_1, y_2 .

На рис. 18.3 показаны кривые $H_1 = 1$ (гипербола) и $H_2 = 1$ (эллипс). Новые главные оси y_1, y_2 не совпадают ни со старыми главными осями e_1, e_2 эллипса, ни с осями h_1, h_2 гиперболы, видно, что касательные в точках пересечения одной из новых осей с эллипсом и гиперболой параллельны другой и другой оси. Относительно этих косоугольных координат будут «аффинно-симметричными» к этим осям y_1, y_2 . (Новые оси суть сопряженные сечения как для эллипса, так и для гиперболы). Вследствие нормировки обе единичные точки лежат на эллипсе.

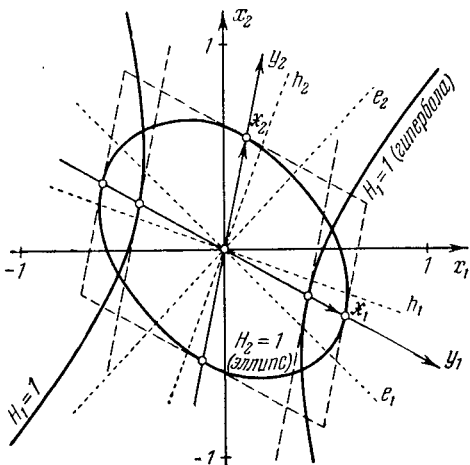


Рис. 18.3. Главные оси двух конических сечений.

18.6. Минимаксимальный принцип Куранта.

В общих задачах на собственные значения для матриц можно так же, как в п. 8.4 для дифференциальных уравнений (с учетом сделанных в п. 18.4 допущений), найти собственные числа κ_s «независимым» путем, без использования собственных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{s-1}$. В качестве основной геометрической идеи могло бы служить представление, что, например, для трехосного эллипсоида длины главных осей могут быть найдены независимо друг от друга, как будет показано для средней оси. Пусть q — произвольный вектор, тогда $b(q)$ — максимальное удаление центра от точек эллипсоида, лежащих в плоскости, проходящей через центр и перпендикулярной к вектору q (рис. 18.4). Минимум всех значений b при вариации q есть искомая вторая главная ось. Он реализуется, когда q имеет направление наибольшей оси.

Составим для общей задачи (17.14) задачу на экстремум

$$H = \bar{\xi}' \mathcal{A} \xi = \max \tag{18.42}$$

при дополнительных условиях

$$\bar{\xi}' \mathcal{B} \xi = 1, \quad \alpha'_j \xi = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r-1, \tag{18.43}$$

причем $q_s = \begin{bmatrix} q_{1s} \\ \vdots \\ q_{rs} \end{bmatrix}$ — произвольно заданные линейно независимые векторы.

Максимум M от H зависит от выбранных векторов q : $M(q_1, \dots, q_{r-1})$. Утверждается, что r -е характеристическое число κ_r является минимумом M , когда q_s пробегает совокупность всех систем $r-1$ векторов.

Теорема. Пусть \mathcal{A} и \mathcal{B} — две произвольные эрмитовы матрицы и \mathcal{B} положительно определена. Пусть $M(q_1, \dots, q_{r-1})$ — максимум эрмитовой формы $H = \bar{x}' \mathcal{A} x$ при произвольно заданных векторах q_1, \dots, q_{r-1} , если на x налагаются дополнительные условия $\bar{x}' \mathcal{B} x = 1$, $q'_s x = 0$, $s = 1, 2, \dots, r-1$. Тогда r -е характеристическое число κ_r общей задачи на собственные значения $\mathcal{A} x = \kappa \mathcal{B} x$ есть минимум M , когда q_s пробегает совокупность всех систем $r-1$ линейно независимых векторов.

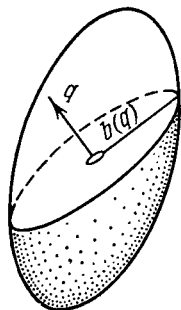


Рис. 18.4. К минимально-принципу Куранта.

Для проведения доказательства будем считать собственные векторы x_1, \dots, x_n известными. Определим сначала вектор

$$x = \sum_{j=1}^r c_j x_j,$$

принадлежащий r -й экстремальной задаче, т. е. удовлетворяющий дополнительным условиям (18.43):

$$\bar{x}' \mathcal{B} x = 1,$$

$$\sum_{j=1}^r c_j (q'_s x_j) = 0, \quad s = 1, 2, \dots, r-1.$$

Последние $r-1$ уравнений суть однородные линейные уравнения для r неизвестных c_1, c_2, \dots, c_r и, следовательно, всегда имеют нетривиальное решение, а один общий множитель всегда можно определить так, чтобы выполнялось первое нормировочное условие $\bar{x}' \mathcal{B} x = 1$ (при использовании (18.34)):

$$\bar{x}' \mathcal{B} x = \sum_{j,k=1}^r \bar{c}_j \bar{x}'_j \mathcal{B} c_k x_k = \sum_{j=1}^r \bar{c}_j c_k = 1. \quad (18.44)$$

При подстановке вектора x эрмитова форма H принимает вид (при использовании (18.34))

$$H = \sum_{j,k=1}^r \bar{c}_j \bar{x}'_j \mathcal{A} c_k x_k = \sum_{j,k=1}^r \bar{c}_j \bar{x}'_j \kappa_k \mathcal{B} c_k x_k = \sum_{j=1}^r \kappa_j \bar{c}_j c_j.$$

Вследствие (18.37) и (18.44) $H \geq \kappa_r$.

Искомый максимум может быть только больше, следовательно, имеет место неравенство

$$M(q_1, \dots, q_r) \geq \kappa_r.$$

Но значение κ_r можно вычислить также непосредственно по теореме п. 18.4, а именно, если положить $q_j = \mathfrak{B}'\bar{x}_j$ для $j=1, 2, \dots, r-1$.

Таким образом, κ_r есть минимум M , как утверждалось. Можно снова освободиться от нормировочного условия $\bar{x}'\mathfrak{B}\bar{x} = 1$, отыскивая вместо максимума H максимум отношения

$$\frac{1}{R} = \frac{\bar{x}'\mathfrak{A}\bar{x}}{\bar{x}'\mathfrak{B}\bar{x}}. \quad (18.45)$$

Одновременно из этого отношения видно, что в двух задачах

$$\mathfrak{A}\bar{x} = \kappa\mathfrak{B}\bar{x}, \quad \mathfrak{A}\bar{x} = \kappa^*\mathfrak{B}^*\bar{x}, \quad (18.46)$$

для которых предположения предыдущей теоремы выполняются и

$$\bar{x}'\mathfrak{B}\bar{x} \geq \bar{x}'\mathfrak{B}^*\bar{x} \quad (18.47)$$

для всех \bar{x} , отношение $1/R$ первой задачи всегда меньше или равно отношению $1/R$ второй задачи при том же самом \bar{x} ; это неравенство справедливо для всех максимумов и соответствующих минимумов, т. е.

$$\kappa_r \leq \kappa_r^* \quad \text{для } r=1, 2, \dots, n \quad (18.48)$$

18.7. Теорема включения. Теорема легко доказывается для задачи (17.11) (промежуточной), но, вероятно, справедлива и в более широкой области. Она гласит:

Теорема. Пусть в промежуточной задаче

$$\mathfrak{A}\bar{x} = \kappa\mathfrak{D}\bar{x}$$

\mathfrak{A} эрмитова, а \mathfrak{D} — диагональная матрица с положительными элементами d_j . Пусть π — вектор с не равными нулю компонентами π_j , из которого образуем далее вектор $v = \mathfrak{A}\pi$ с компонентами v_j . Если все отношения $q_j = \frac{v_j}{d_j\pi_j}$ лежат в интервале J действительной оси, то J содержит по меньшей мере одно характеристическое число κ_s .

Для доказательства введем диагональную матрицу \mathfrak{Q} :

$$\mathfrak{Q} = \begin{pmatrix} q_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & q_n \end{pmatrix}. \quad (18.49)$$

Тогда по определению

$$v = \Omega D u = \mathcal{A} u, \quad (18.50)$$

т. е. u — собственный вектор задачи, соответствующий характеристическому числу $\kappa = 1$: $\mathcal{A} x = \kappa \Omega D x$.

Будем различать два случая.

1-й случай. Все q_j положительны.

Сопоставим три задачи сравнения:

$$\text{I. } \mathcal{A} x = \kappa_1 q D x,$$

$$\text{II. } \mathcal{A} x = \kappa_{II} \Omega D x,$$

$$\text{III. } \mathcal{A} x = \kappa_{III} Q D x,$$

причем q и Q пусть будут наименьшим (соответственно наибольшим) из чисел q_j (предполагаемых действительными).

Задачи I и III имеют собственные векторы x_j , соответствующие характеристическим числам

$$\kappa_{Ij} = \frac{\kappa_j}{q}, \quad \text{соответственно } \kappa_{IIIj} = \frac{\kappa_j}{Q}.$$

Задача II имеет одно собственное число (например, s -е)

$$\kappa_{II s} = 1.$$

Теперь, так как для любого x имеет место соотношение

$$\bar{x}' q D x \leq \bar{x}' \Omega D x \leq \bar{x}' Q D x,$$

применима теорема сравнения (18.47), (18.48):

$$\frac{\kappa_s}{q} \kappa_{I s} \geq \kappa_{II s} = 1 \geq \kappa_{III s} = \frac{\kappa_s}{Q}$$

или

$$q \leq \kappa_s \leq Q. \quad (18.51)$$

2-й случай. Не все q_j положительны. Этот случай сводится к предыдущему.

Пусть имеется число N такое, что все $q_j^* = q_j + N$ становятся положительными. Произведем замену

$$\mathcal{A} + N D = \mathcal{A}^*, \quad \Omega + N \mathcal{E} = \Omega^*, \quad v^* = \mathcal{A}^* u,$$

так что будет иметь место $(\mathcal{A} + N D) u = v^* = \Omega^* D u$ и для задачи с величинами, снабженными звездочками, все отношения будут положительны. Задача $\mathcal{A}^* x = \kappa^* D x$ имеет собственные векторы x_j , соответствующие характеристическим числам

$$\kappa_j^* = \kappa_j + N.$$

Интервал q_j^* имеет по меньшей мере одно характеристическое число $\kappa_s^* = \kappa_s + N$, следовательно, интервал для q_j включает по крайней мере одно κ_s .

Сформулируем еще одну теорему включения при других предположениях.
Теорема. Пусть в задаче

$$\mathfrak{A}x = \kappa \mathfrak{D}x$$

\mathfrak{A} (не обязательно симметричная) — матрица с неотрицательными элементами $a_{jk} \geq 0$ и \mathfrak{D} — диагональная матрица с положительными элементами d_j главной диагонали; u — вектор с положительными компонентами u_j , из которого образуем вектор $v = \mathfrak{A}u$ с компонентами v_j .

В интервале J , между наибольшим и наименьшим из n чисел $q_j = \frac{v_j}{d_j u_j}$ лежит наибольший корень κ_1 задачи $\mathfrak{A}x = \kappa \mathfrak{D}x$.

Для доказательства используем теорему, восходящую к Фробениусу¹⁾. При сделанных предположениях задача $\mathfrak{A}x = \kappa \mathfrak{D}x$ имеет одно действительное неотрицательное характеристическое число κ_1 , которое называется максимальным корнем, и нет другого характеристического числа, превосходящего его по абсолютному значению. Имеется собственный вектор, соответствующий κ_1 , все компоненты которого неотрицательны. С \mathfrak{A} связана также транспонированная матрица \mathfrak{A}' ; $\mathfrak{A}'x = \kappa \mathfrak{D}x$ имеет те же характеристические числа и такой же максимальный корень, что и $\mathfrak{A}x = \kappa \mathfrak{D}x$. Пусть δ_1 — собственный вектор задачи $\mathfrak{A}'x = \kappa \mathfrak{D}x$, соответствующий максимальному корню κ_1 , который имеет неотрицательные компоненты z_{j1} . Введем, как в (18.49), матрицу \mathfrak{D} , тогда получим, согласно (18.50),

$$0 = v' \delta_1 - v' \delta_1 = u' \mathfrak{D}' \mathfrak{D}' \delta_1 - u' \mathfrak{A}' \delta_1 = u' \mathfrak{D} \mathfrak{D} \delta_1 - u' \kappa_1 \mathfrak{D} \delta_1 = u' (\mathfrak{D} - \kappa_1 \mathfrak{E}) \mathfrak{D} \delta_1.$$

(Для диагональных матриц $\mathfrak{D}' \mathfrak{D}' = \mathfrak{D} \mathfrak{D} = \mathfrak{D} \mathfrak{D}$.) Здесь все $u_j > 0$, все $d_j > 0$, все $z_{j1} \geq 0$, но не все $z_{j1} = 0$; стоящее справа выражение может не обратиться в нуль, если для всех j величины $q_j - \kappa_1$ все положительны или все отрицательны. Следовательно, должно быть

$$\min_j q_j \leq \kappa_1 \leq \max_j q_j$$

18.8. Численное применение теоремы включения. Численное нахождение характеристических чисел будет произведено на примере собственных колебаний балки с массами и пружинами, взятом из п. 17.7Г. Итак, зададимся частной задачей на собственные колебания (17.5) с матрицей (см. (17.64))

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1180 & -331 & 144 & -36 \\ -331 & 906 & -367 & 144 \\ 144 & -367 & 906 & -331 \\ -36 & 144 & -331 & 762 \end{pmatrix}.$$

Сначала оценим грубо собственный вектор для основного колебания

$$u' = (1, 2, 2, 1),$$

откуда следует $v' = (\mathfrak{A}u)' = (770, 891, 891, 352)$; при получении $v = \mathfrak{A}u$ рекомендуется проверка сумм столбцов; образуют вектор сумм столбцов матрицы \mathfrak{A} :

$$s' = (957, 352, 352, 539);$$

¹⁾ G. Frobenius, Sitz.-Ber. Preuß. Akad. Wiss., Math.-phys. Kl., Berlin, 1912, ч. 1.

тогда сумма компонент v должна быть равна ξ'_{11} :

$$\xi'_{11} = 2904 = 770 + 891 + 891 + 352.$$

Вычисляя отношения q_j , имеем числа: 770; 445,5; 445,5; 352. Простым варьированием компонент можно быстро сблизить отношения; целесообразно применить схему, содержащую поправки компонент u_j и обусловленные ими поправки компонент v_j , которые получаются непосредственно, и тогда отношения могут быть вычислены с помощью логарифмической линейки. При этом важно сначала уравнивать друг с другом отношения при компонентах с большими модулями, тогда можно будет легко скорректировать компоненты с относительно малыми модулями.

Процесс вычислений понятен из приведенной таблицы.

Вектор u с текущими поправками				Вектор $v = \mathcal{A}u$ с текущими поправками, обусловленными изменением u				Отношения q_j			
u_1	u_2	u_3	u_4	v_1	v_2	v_3	v_4	v_1/u_1	v_2/u_2	v_3/u_3	v_4/u_4
1	2	2	1	770	891	891	352	770	446	446	352
-0,5				-590	+165,5	-72	+18				
0,5	2	2	1	180	1056,5	819	370	360	528	410	370
		+1	+1	+108	-223	+575	+431				
0,5	2	3	2	288	833,5	1394	801	576	417	465	401
			+0,2	-7,2	+28,8	-66,2	+152,4				
0,5	2	3	2,2	280,8	862,3	1327,8	953,4	562	431	443	433
-0,08				-94,4	+26,48	-11,52	+2,88				
0,42	2	3	2,2	186,4	888,78	1316,28	956,28	444	445	439	434

Теперь согласно теореме включения

$$434 \leq \kappa \leq 445;$$

очевидно, точность можно легко повысить, продолжая процесс; можно избежать проб, находя вектор δ из системы линейных уравнений. Опишем сначала метод в общих чертах. Пусть задан вектор, являющийся приближенным решением задачи $\mathcal{A}u = \kappa \mathcal{B}u$. Приближенное собственное значение определяется из отношения Рэлея

$$\tilde{\kappa} = \frac{\bar{u}' \mathcal{A} u}{\bar{u}' \mathcal{B} u}, \quad (18.52)$$

a и b находится из системы уравнений $\mathcal{A}(u + b) = \tilde{\kappa} \mathcal{B}(u + b)$, т. е. из

$$(\mathcal{A} - \tilde{\kappa} \mathcal{B}) b = f = \tilde{\kappa} \mathcal{B} u - \mathcal{A} u. \quad (18.53)$$

Это — система n линейных уравнений для такого же числа неизвестных, причем определитель системы практически равен нулю, так как $\tilde{\kappa}$ является хорошим приближением для κ . Приравняем одну компоненту b нулю, например j -ю, если модуль u_j достаточно велик; если u было хорошим приближением, то n уравнений для оставшихся $(n - 1)$ неизвестных с удовлетворительной точностью будут совместны.

Для частной задачи на собственные значения ($\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$) процесс упрощается:

$$v = \mathfrak{A}u, \quad \tilde{\kappa} = \frac{\bar{u}'v}{\bar{u}'u}, \quad (\mathfrak{A} - \tilde{\kappa}\mathfrak{C})\delta = f = \tilde{\kappa}u - v. \quad (18.54)$$

В данном примере u и v взяты как заданные векторы, стоящие в последней строке приведенной выше таблицы:

$$\tilde{\kappa} = \frac{u'v}{u'u} = 438,961, \quad \tilde{\kappa} = \frac{v'v}{v'u} = 438,988.$$

Положим $\tilde{\kappa} = 438,9$ и $d_2 = 0$.

Для вектора δ получается тогда система:

$$\begin{aligned} 741,1d_1 + 144d_3 - 36d_4 &= -2,06, \\ -331d_1 - 357d_3 + 144d_4 &= -10,98, \\ 144d_1 + 467,1d_3 - 331d_4 &= 0,42, \\ -36d_1 - 331d_3 + 323,1d_4 &= 9,30; \end{aligned}$$

ее решение

$$d_1 \approx -0,016, \quad d_3 \approx 0,095, \quad d_4 = 0,128.$$

Компоненты векторов (после округления) будут следующие:

$$u' = (0,404; 2; 3,10; 2,33),$$

$$v' = (177,24; 876,096; 1361,546; 1022,816).$$

Отношения q_j равны: 438,7; 438,16; 439,2; 439,0 и $\tilde{\kappa} = \frac{u'v}{u'u} = 438,8969$;

$$\tilde{\kappa} = \frac{v'v}{u'v} = 438,8974.$$

Таким образом, приближенное значение

$$\kappa = 438,897,$$

а верхняя и нижняя границы следующие:

$$438,16 \leq \kappa \leq 439,2.$$

Этот процесс применим точно так же и для других характеристических чисел (описанный в § 19 итерационный процесс мог бы сходиться к вектору, принадлежащему не основному колебанию, а высшему).

§ 19. Итерационный метод и главные векторы

19.1. Итерационный метод в общем случае. Точно так же как для дифференциальных уравнений (см. гл. IV), для матриц имеется опробованный приближенный метод определения собственных векторов и характеристических чисел задач на собственные значения типа

$$\mathfrak{A}x = \kappa\mathfrak{B}x. \quad (19.1)$$

Образует, отправляясь от произвольно выбранного начального вектора $\delta_0 \neq 0$, последовательность векторов $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_s, \dots$ согласно правилу

$$\mathfrak{A}\delta_{s-1} = \mathfrak{B}\delta_s, \quad s = 1, 2, \dots, \quad (19.2)$$

и соответственно для частной задачи $\mathfrak{A}\xi = \kappa\xi$ — по правилу

$$\mathfrak{A}\xi_{s-1} = \kappa_s \xi_{s-1}, \quad s = 1, 2, \dots \quad (19.3)$$

При исследовании сходимости может быть использована

Теорема о разложении. Пусть дана общая задача на собственные значения $\mathfrak{A}\xi = \kappa\mathfrak{B}\xi$ с заданными матрицами \mathfrak{A} и \mathfrak{B} порядка n с различными характеристическими числами $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$, причем \mathfrak{B} — невырожденная матрица, или \mathfrak{A} и \mathfrak{B} эрмитовы и \mathfrak{B} — положительно определенная матрица. Тогда имеется n собственных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, таких, что произвольный вектор ξ может быть представлен в виде линейной комбинации ξ_ν с коэффициентами c_ν :

$$\xi = \sum_{\nu=1}^n c_\nu \xi_\nu. \quad (19.4)$$

Для этого нужно доказать, что имеется n линейно независимых векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$. Для эрмитовых матриц \mathfrak{A} и \mathfrak{B} и положительно определенной матрицы \mathfrak{B} это уже было выполнено в п. 18.1. Покажем теперь, что при невырожденной матрице \mathfrak{B} собственные векторы, принадлежащие различным характеристическим числам, линейно независимы. Если имеет место линейная зависимость, должно существовать наименьшее число $s \geq 2$ собственных векторов, для которых

$$\alpha_1 \xi_1 + \alpha_2 \xi_2 + \dots + \alpha_s \xi_s = 0, \quad (19.5)$$

где все $\alpha_s \neq 0$. Так как \mathfrak{B} не вырождена, существует \mathfrak{B}^{-1} , и каждый собственный вектор удовлетворяет уравнению

$$\mathfrak{C}\xi_j = \kappa_j \xi_j, \quad j = 1, 2, \dots, s,$$

где $\mathfrak{C} = \mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{A}$.

Умножим (19.5) слева на \mathfrak{C} , тогда получим

$$\alpha_1 \kappa_1 \xi_1 + \alpha_2 \kappa_2 \xi_2 + \dots + \alpha_s \kappa_s \xi_s = 0.$$

Из этого уравнения и из (19.5) можно исключить ξ_1 и прийти к линейной зависимости $(s-1)$ векторов

$$\alpha_2 (\kappa_2 - \kappa_1) \xi_2 + \dots + \alpha_s (\kappa_s - \kappa_1) \xi_s = 0,$$

что находится в противоречии с предположением о минимальном числе линейно зависимых векторов s .

Сформулированная теорема о разложении позволяет при итерационном процессе представлять начальный вектор через собственные векторы

$$\xi_0 = \sum_{r=1}^n c_r \xi_r. \quad (19.6)$$

При этом c_r — постоянные, не все равные нулю. Из (19.2) следует

$$\mathfrak{B}\mathfrak{z}_1 = \mathfrak{A}\mathfrak{z}_0 = \sum_{r=1}^n c_r \mathfrak{A}x_r = \sum_{r=1}^n c_r \kappa_r \mathfrak{B}x_r$$

и после умножения слева на \mathfrak{B}^{-1}

$$\mathfrak{z}_1 = \sum_{r=1}^n c_r \kappa_r x_r.$$

Таким образом, на каждом шаге итерационного процесса постоянные c_r умножаются на характеристические числа κ_r .

После s -й итерации получают

$$\mathfrak{z}_s = \sum_{r=1}^n c_r \kappa_r^s x_r. \quad (19.7)$$

Расположим κ_r в порядке убывания модулей:

$$|\kappa_1| \geq |\kappa_2| \geq \dots \geq |\kappa_n|. \quad (19.8)$$

Возможны два случая.

1-й случай. Принадлежащее первому не равному нулю c_q характеристическое число κ_q по модулю больше, чем последующие κ_{q+1} , т. е.

$$\left. \begin{array}{l} \text{или } c_1 \neq 0 \text{ и } |\kappa_1| > |\kappa_j| \text{ для } j = 2, 3, \dots, n, \\ \text{или } c_1 = c_2 = \dots = c_{q-1} = 0, c_q \neq 0, \\ |\kappa_q| > |\kappa_j|, j = q + 1, q + 2, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (19.9)$$

Вторая возможность содержит первую в качестве частного случая. Из (19.7) тогда следует ($\kappa_q \neq 0$)

$$\kappa_q^{-s} \mathfrak{z}_s = c_q x_q + \sum_{r=q+1}^n c_r \left(\frac{\kappa_r}{\kappa_q} \right)^s x_r. \quad (19.10)$$

При $s \rightarrow \infty$ выражение $\left(\frac{\kappa_r}{\kappa_q} \right)^s$ стремится к нулю, и тогда получается

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \kappa_q^{-s} \mathfrak{z}_s = c_q x_q, \quad (19.11)$$

т. е. векторы \mathfrak{z}_s , умноженные на подходящие постоянные, сходятся к q -му собственному вектору.

2-й случай. Соответствующее первому не равному нулю c_q число κ_q равно по модулю числу κ_{q+1} . Тогда, в общем, отсутствует сходимость итерационной последовательности, а также последовательности $\kappa_q^{-s} \mathfrak{z}_s$. Рассмотрим два частных случая.

Случай 2а: $\kappa_q = -\kappa_{q+1}$; $|\kappa_q| > |\kappa_{q+2}| \geq 0$. В этом случае векторы \mathfrak{z}_s при четном s и при нечетном s сходятся к разным пределам:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \kappa_q^{-2\sigma} \mathfrak{z}_{2\sigma} &= c_q \mathfrak{x}_q + c_{q+1} \mathfrak{x}_{q+1}, \\ \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \kappa_q^{-(2\sigma+1)} \mathfrak{z}_{2\sigma+1} &= c_q \mathfrak{x}_q - c_{q+1} \mathfrak{x}_{q+1}. \end{aligned} \right\} \quad (19.12)$$

Случай 2б. Пусть $\kappa_{q+1} = \bar{\kappa}_q$; $c_q \neq 0$; $|\kappa_q| > |\kappa_{q+2}| \geq 0$. Пусть также ¹⁾ $\kappa_q = A + iB$, где A и B действительны. В (19.10)

$$\kappa_q^{-s} \mathfrak{z}_s = c_q \mathfrak{x}_q + c_{q+1} \left(\frac{\bar{\kappa}_q}{\kappa_q} \right)^s \mathfrak{x}_{q+1} + \sum_{r=q+2}^n c_r \left(\frac{\kappa_r}{\kappa_q} \right)^s \mathfrak{x}_r$$

сумма справа сходится к нулю при $s \rightarrow \infty$. Поэтому для достаточно большого s

$$\mathfrak{z}_s \approx c_q \kappa_q^s \mathfrak{x}_q + c_{q+1} \bar{\kappa}_q^s \mathfrak{x}_{q+1}. \quad (19.13)$$

Запишем это приближенное равенство для s , $s+1$, $s+2$ и умножим на

$$\kappa_q \bar{\kappa}_q, \quad -(\kappa_q + \bar{\kappa}_q), \quad 1;$$

тогда при суммировании \mathfrak{x}_q и \mathfrak{x}_{q+1} исчезают, так что

$$\mathfrak{z}_{s+2} - (\kappa_q + \bar{\kappa}_q) \mathfrak{z}_{s+1} + \kappa_q \bar{\kappa}_q \mathfrak{z}_s \approx 0. \quad (19.14)$$

Заменяем здесь s на $s+1$, тогда получим два приближенных равенства для определения величин $\kappa_q + \bar{\kappa}_q = 2A$, $\kappa_q \bar{\kappa}_q = A^2 + B^2$:

$$\left. \begin{aligned} (\kappa_q + \bar{\kappa}_q) (\mathfrak{z}'_s \mathfrak{z}_{s+2} - \mathfrak{z}'_{s+1} \mathfrak{z}_{s+1}) &\approx (\mathfrak{z}'_s \mathfrak{z}_{s+3} - \mathfrak{z}'_{s+1} \mathfrak{z}_{s+2}), \\ \kappa_q \bar{\kappa}_q (\mathfrak{z}'_s \mathfrak{z}_{s+2} - \mathfrak{z}'_{s+1} \mathfrak{z}_{s+1}) &\approx (\mathfrak{z}'_{s+1} \mathfrak{z}_{s+3} - \mathfrak{z}'_{s+2} \mathfrak{z}_{s+2}). \end{aligned} \right\} \quad (19.15)$$

Если линейная зависимость трех векторов \mathfrak{z}_s , \mathfrak{z}_{s+1} , \mathfrak{z}_{s+2} , согласно (19.14), выполняется с достаточной степенью точности, то (19.14) справедливо для каждой компоненты вектора, например, для j -й компоненты $z_{j,s}$ вектора \mathfrak{z}_s , так что (19.15) переходит в

$$\left. \begin{aligned} \kappa_q + \bar{\kappa}_q = 2A &\approx \frac{1}{\Delta_{j,s}} (z_{j,s} z_{j,s+3} - z_{j,s+1} z_{j,s+2}), \\ \kappa_q \bar{\kappa}_q = A^2 + B^2 &\approx \frac{\Delta_{j,s+1}}{\Delta_{j,s}}, \end{aligned} \right\} \quad (19.16)$$

где

$$\Delta_{j,s} = z_{j,s} z_{j,s+2} - z_{j,s+1}^2.$$

¹⁾ W. J. Dunkan, A. R. Collar, *Matrices applied to the Motions of Damped Systems*, Philos. Magazine, 19, 7 (1935), 197—219.

Пример. *Механическая система с затуханием.* Для системы, изображенной на рис. 19.1, с массами m_1 , m_2 , пружинами с коэффициентами жесткости c_1 , c_2 и с учетом сил сопротивления, пропорциональных скоростям

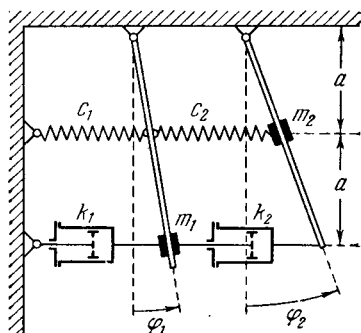


Рис. 19.1. Механическая система с затуханием.

с коэффициентами пропорциональности k_1 , k_2 , уравнения движения для малых угловых отклонений φ_1 , φ_2 имеют вид

$$\begin{aligned} 4m_1\ddot{\varphi}_1 &= -c_1\varphi_1 + c_2(\varphi_2 - \varphi_1) - 4k_1\dot{\varphi}_1 + 4k_2(\dot{\varphi}_2 - \dot{\varphi}_1), \\ m_2\ddot{\varphi}_2 &= c_2(\varphi_1 - \varphi_2) + 4k_2(\dot{\varphi}_1 - \dot{\varphi}_2) \end{aligned}$$

(сила тяжести здесь не учитывается). Допуская, что

$$\frac{1}{2}c_1 = c_2, \quad 4m_1 = m_2, \quad 4k_1 = 4k_2 = \sqrt{c_2 m_2},$$

полагая

$$\varphi_j(t) = \Phi_j e^{rt}, \quad \dot{\varphi}_j = r\varphi_j, \quad \ddot{\varphi}_j = r^2\varphi_j$$

и вводя обозначения

$$\kappa = r \sqrt{\frac{m_2}{c_2}}, \quad \dot{\varphi}_j = \sqrt{\frac{c_2}{m_2}} \zeta_j$$

получаем частную задачу на собственные значения

$$\mathfrak{A}\xi = \kappa\xi,$$

где

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix},$$

$$\delta' = (-2, 0, 0, 1).$$

Так же как в п. 18.8, δ' —вектор, полученный суммированием столбцов \mathfrak{A} . Итерационный процесс начнем с вектора $(1, 1, 0, 0)$, причем можно вынести за скобку множитель 2, так как начиная со следующей итерации все векторы δ_ν получают этот множитель. Приведенная на стр. 320 таблица содержит векторы $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_{12}$, появляющиеся при итерациях. Столбец с компонентами

v	z_v	$s^2 z_{v-1}$	$s^2 z_{v-1}$	$s^2 z_{v-1}$	$s^2 z_{v-1}$	$s^2 z_{v-1}$	Разность $=\Delta_v$	$s^2 z_{v-1}$	Разность $=D_v$	$\frac{\Delta_v}{\Delta_{v-1}}$	$\frac{D_v}{\Delta_v}$
0	0,5	0	0	0	0	0					
1	0	-1	0	-0,5	1	-1,5	0,5	-2	2,5		-1,67
2	-1	0	2	2	6	-4	1	-8	9	2,67	-2,25
3	2	-2	2	1	13	-12	23	-6	29	3	-2,42
4	-2	-1	-2	-27	10	-37	88	-5	93	3,083	-2,51
5	-1	-4	9	-19	99	-118	64	-237	301	3,1892	-2,5508
6	9	13	-20	285	666	-381	43	-932	975	3,2288	-2,55905
7	-20	-20	22	215	1453	-1238	2491	-682	3173	3,24934	-2,56300
8	22	9	9	-2993	1046	-4039	9894	-459	10353	3,26252	-2,56326
9	9	42	-95	-2237	10 951	-13188	7232	-26561	33793	3,265164	-2,562405
10	-95	-137	214	32291	75 354	-43063	3997	-106334	110331	3,2653170	-2,562083
11	214	-137	-238	26389	167 005	-140616				3,2653554	
12	-238	-101	-89	-214							

s_v , соответствующий вектору δ_v , используется, согласно п. 18.8, для проверки с помощью суммирования

$$s_v = \delta'_v \delta_{v-1}.$$

Согласно (19.16) вычислены приближенные значения

$$\kappa + \bar{\kappa} = 2A = -2,562, \quad \kappa \bar{\kappa} = A^2 + B^2 = 3,265.$$

Из уравнения $\kappa^2 + 2,562\kappa + 3,265 = 0$ находим величины

$$\kappa_{1,2} = A \pm iB = -1,281 \pm i1,274,$$

определяющие частоту и затухание колебания (здесь — для первого обертона).

Нетрудно определить также частоту и затухание для основного колебания, так как сразу находятся след матрицы \mathfrak{M} $S_{\mathfrak{M}} = \kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4 = -3$ и ее определитель $\det \mathfrak{M} = \kappa_1 \kappa_2 \kappa_3 \kappa_4 = 2$. При $\kappa_1 + \kappa_2 = -2,562$ и $\kappa_1 \kappa_2 = 3,265$ можно найти $\kappa_3 + \kappa_4 = -0,438$; $\kappa_3 \kappa_4 = 0,6126$ и тогда получается

$$\kappa_{3,4} = -0,219 \pm i0,751.$$

19.2. Нижняя и верхняя границы для характеристических чисел. Как в § 12, и в случае матриц можно при итерационном процессе (19.2) получить постоянные Шварца a_k и отношения v_k , а затем границы для характеристических чисел. Пусть матрицы \mathfrak{A} и \mathfrak{B} эрмитовы и \mathfrak{B} — положительно определенная; для полученной согласно (19.2) последовательности векторов δ_s образуем числа

$$a_k = \bar{\delta}_j^T \mathfrak{B} \delta_{k-j}, \quad 0 \leq j \leq k, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

тогда из (19.7) и (18.38) следует

$$a_k = \sum_{q,s=1}^n \bar{c}_q \kappa_q^j \bar{\delta}_q^T \mathfrak{B} c_s \kappa_s^k - j \chi_s = \sum_{q=1}^n \bar{c}_q c_q \kappa_q^k.$$

Расположим κ_j , как в (19.8), в порядке убывания модулей; при этом некоторые c_q могут быть равны нулю (не все); тогда

$$\sum_{q=1}^n \bar{c}_q c_q = a_0 = \bar{\delta}_0^T \mathfrak{B} \delta_0 > 0.$$

Первое не равное нулю c_q пусть равно c_r и относится к числу $\kappa_r \neq 0$. Тогда, следовательно,

$$a_k = \sum_{q=r}^n |c_q|^2 \kappa_q^k. \quad (19.17)$$

Дальше образуются отношения

$$v_k = \frac{a_k}{a_{k-1}} = \frac{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \kappa_q^k}{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \kappa_q^{k-1}} = \kappa_r \frac{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \left(\frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right)^k}{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \left(\frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right)^{k-1}}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19.18)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \kappa_r - \nu_k &= \kappa_r \frac{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \left(1 - \frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right) \kappa_q^{k-1}}{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \kappa_q^{k-1}} = \\ &= \kappa_r \frac{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \left(1 - \frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right) \left(\frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right)^{k-1}}{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \left(\frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right)^{k-1}} \end{aligned} \quad (19.19)$$

и

$$\nu_{k+1} - \nu_k = \frac{\sum_{p=r}^n \sum_{q>p}^n |c_p c_q|^2 (\kappa_p \kappa_q)^{k-1} (\kappa_p - \kappa_q)^2}{\sum_{p=r}^n |c_p|^2 \kappa_p^{k-1} \sum_{q=r}^n |c_q|^2 \kappa_q^k}; \quad (19.20)$$

далее

$$\frac{\kappa_r - \nu_k}{\kappa_r - \nu_{k+1}} \cdot \frac{1}{\nu_k} = \frac{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \left(1 - \frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right) \kappa_q^{k-1}}{\sum_{q=r}^n |c_q|^2 \left(1 - \frac{\kappa_q}{\kappa_r}\right) \kappa_q^k}. \quad (19.21)$$

Из (19.19) при $k \rightarrow \infty$ следует

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_k = \kappa_r. \quad (19.22)$$

Различают два случая.

1-й случай. Все κ_q неотрицательны, тогда выражения в (19.19), (19.20) неотрицательны, ν_k , монотонно возрастая, стремится к κ_r при $k \rightarrow \infty$:

$$\nu_1 \leq \nu_2 \leq \dots \leq \kappa_r.$$

В (19.21) из суммы выпадает член с $q=r$. Пусть l_{r+1} — верхняя граница для κ_{r+1} , которая все же меньше ν_k :

$$\nu_k > l_{r+1} \geq \kappa_{r+1} \quad (\geq \kappa_q \text{ для } q=r+2, r+3, \dots),$$

тогда

$$\kappa_q^k \leq l_{r+1} \kappa_q^{k+1},$$

и далее следует

$$\frac{\kappa_r - \nu_k}{\kappa_r - \nu_{k+1}} \cdot \frac{1}{\nu_k} \geq \frac{1}{l_{r+1}},$$

ПОЭТОМУ

$$\frac{v_{k+1} - v_k}{\kappa_r - v_{k+1}} \geq \frac{1}{l_{r+1}} - 1$$

и

$$v_{k+1} \leq \kappa_r \leq v_{k+1} + \frac{v_{k+1} - v_k}{\frac{v_k}{l_{r+1}} - 1}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (19.23)$$

2-й случай. κ_q имеют различные знаки. Тогда проводят вычисления только с δ_{2k} с четным индексом:

$$\delta_{2k} = \delta_k^*, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

величины a_k^* определяются согласно

$$a_k^* = a_{2k} = \frac{1}{\delta_k^*} \mathfrak{B}_k > 0. \quad (19.24)$$

Введя обозначения $\kappa_q^2 = \kappa_q^*$ и $v_{2k} v_{2k+1} = v_k^*$, получим

$$a_k^* = \sum_{q=r}^n |c_q|^2 \kappa_q^{*k}, \quad v_k^* = \frac{a_{2k}}{a_{2k-2}} = \frac{a_k^*}{a_{k-1}^*}, \quad (19.25)$$

т. е. имеют место соотношения (19.17), (19.18), в которых величины a_k , κ_q , v_k заменены величинами со звездочками, и справедливы дальнейшие преобразования до (19.23), так как все κ_q^* неотрицательны.

Неравенства (19.23), например, имеют вид

$$v_{2k+2} v_{2k+1} \leq \kappa_r^2 \leq v_{2k+2} v_{2k+1} + \frac{v_{2k+2} v_{2k+1} - v_{2k} v_{2k-1}}{\frac{v_{2k} v_{2k-1}}{l_{r+1}^*} - 1}, \quad (19.26)$$

причем l_{r+1}^* теперь есть верхняя граница для κ_{r+1}^2 :

$$v_{2k} v_{2k-1} > l_{r+1}^* \geq \kappa_{r+1}^2. \quad (19.27)$$

19.3 Понижение порядка. Если в общей задаче на собственные значения

$$\mathfrak{A}x = \kappa \mathfrak{B}x \quad (19.28)$$

известны одно характеристическое число κ_1 и принадлежащий ему собственный вектор x_1 , то можно его «отщепить» и тем самым порядок задачи n понизить на 1. (В этом разделе κ_1 не означает наибольшего по модулю характеристического числа.) Запишем векторы x_1 и $\mathfrak{B}x_1$:

$$x_1 = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}x_1 = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{bmatrix},$$

где ξ_j не могут быть все равны нулю. Пусть $\xi_1 \neq 0$ (при $\xi_1 = 0$, но $\xi_q \neq 0$ последующие рассуждения могли бы быть проведены с q -м столбцом).

Умножим столбцы определителя (17.15) последовательно на x_1, x_2, \dots, x_n и заменим первый столбец суммой всех умноженных на x_q столбцов

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \kappa b_{11})x_1 + \dots + (a_{1n} - \kappa b_{1n})x_n & a_{12} - \kappa b_{12} & \dots & a_{1n} - \kappa b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (a_{n1} - \kappa b_{n1})x_1 + \dots + (a_{nn} - \kappa b_{nn})x_n & a_{n2} - \kappa b_{n2} & \dots & a_{nn} - \kappa b_{nn} \end{vmatrix} = 0.$$

Вследствие $\mathfrak{A}_{\xi_1} = \kappa_1 \mathfrak{B}_{\xi_1}$ можно в первом столбце заменить

$$a_{j1}x_1 + \dots + a_{jn}x_n = \kappa_1 (b_{j1}x_1 + \dots + b_{jn}x_n) = \kappa_1 \xi_j$$

и вынести из первого столбца множитель $\kappa_1 - \kappa$:

$$(\kappa_1 - \kappa) \begin{vmatrix} \xi_1 & a_{12} - \kappa b_{12} & \dots & a_{1n} - \kappa b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \xi_n & a_{n2} - \kappa b_{n2} & \dots & a_{nn} - \kappa b_{nn} \end{vmatrix} = 0. \quad (19.29)$$

Таким образом, полином n -й степени относительно κ представляется в виде произведения $(\kappa_1 - \kappa)$ на полином $(n-1)$ -й степени. В оставшемся определителе вычтем из q -й строки (для $q \geq 2$) первую строку, умноженную на ξ_q / ξ_1 ; тогда в первом столбце окажутся только нули, за исключением числа $\xi_1 \neq 0$, и можно отбросить первую строку и первый столбец

$$\begin{vmatrix} a_{22} - \kappa b_{22} - \frac{\xi_2}{\xi_1} (a_{12} - \kappa b_{12}) & \dots & a_{2n} - \kappa b_{2n} - \frac{\xi_2}{\xi_1} (a_{1n} - \kappa b_{1n}) \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} - \kappa b_{n2} - \frac{\xi_n}{\xi_1} (a_{12} - \kappa b_{12}) & \dots & a_{nn} - \kappa b_{nn} - \frac{\xi_n}{\xi_1} (a_{1n} - \kappa b_{1n}) \end{vmatrix} = 0. \quad (19.30)$$

Таким образом, задача $\mathfrak{A}_x = \kappa \mathfrak{B}_x$ переходит в подобную задачу

$$\mathfrak{A}_x^* = \kappa \mathfrak{B}_x^*, \quad (19.31)$$

но с матрицами $(n-1)$ -го порядка $\mathfrak{A}^*, \mathfrak{B}^*$.

В частной задаче на собственные значения

$$\mathfrak{A}_x = \kappa x$$

(19.30) упрощается, так как $\mathfrak{B} = \mathfrak{E}$ и $x_j = \xi_j$; новое уравнение (19.30) снова оказывается вековым уравнением. Оно соответствует новой частной задаче

$$\mathfrak{A}_x^* = \kappa x^*$$

«спектральное смещение». Из физических представлений, (см. также рис. 23.18) возьмем в качестве приближения векторы (см. таблицу)

j	u_j (приближенное значение ξ_j)					$v_j = \eta u_j$					Проба $\xi' u_j$	Отношения				
1	2	5	4	3	3	22	54	50	35	33	194	11	10,8	12,5	11,67	11
2	6	5	-4	2	-4	12	16	-8	4	-3	21	2	3,2	2	2	0,75
5	2	-5	4	3	-3	-18	42	-38	-29	23	-20	-9	-8,4	-9,5	-9,67	-7,67

($\xi' = (3, 13, 9, 15, 14)$ — снова вектор, составленный из сумм столбцов).

Таким образом, $\kappa_1 \approx 11$, $\kappa_2 \approx 2$, $\kappa_5 \approx -9$. Итерационный процесс здесь хотя и сходится, но медленно, так как $\left| \frac{\kappa_5}{\kappa_1} \right|$ только немного менее 1. Если сдвинуть все значения κ на 3, заменив $\tilde{\kappa} = \kappa + 3$, $\tilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} + 3E$, то будет

$$\tilde{\kappa}_1 \approx 14, \quad \tilde{\kappa}_2 \approx 5, \quad \tilde{\kappa}_5 \approx -6$$

и отношение, определяющее сходимость, будет намного лучше. Проведем здесь итерации с матрицей $\tilde{\mathcal{M}}$ и вектором $\tilde{\xi}'$ (для проверки согласно п. 18.8): $\tilde{\xi}' = (6, 16, 12, 18, 17)$.

v	Компоненты $v_v = \tilde{\mathcal{M}}_1 v_{v-1}$						Проба $\tilde{\xi}' v_{v-1}$
(0)	1	1	1	1	1	1	(5)
(1)	7	21	17	12	12	12	69
0	2	5	4	3	3	(17)	
1	28	69	62	44	42	245	
2	392	1 003	886	622	619	3 522	
3	5 648	14 335	12 866	9 010	8 892	50 751	
4	81 008	206 925	185 094	129 442	128 515	730 984	
5	1 167 592	2 977 749	2 669 986	1 866 746	1 850 614	10 532 687	

Частные от деления компонент v_v и компонент v_{v-1} (наибольшие и наименьшие величины подчеркнуты)					Разность между наибольшим и наименьшим значениями	Отношение $\frac{\tilde{v}_v}{\tilde{v}_{v-1}}$
7	21	17	12	12	14	13,8
14	<u>13,8</u>	<u>15,5</u>	14,7	14	1,7	14,41
14	<u>14,5</u>	<u>14,3</u>	14,14	14,74	0,74	14,376
<u>14,4</u>	14,292	14,521	14,49	<u>14,36</u>	0,229	14,4097
14,343	<u>14,435</u>	<u>14,39</u>	14,37	14,453	0,110	14,40334
<u>14,4133</u>	<u>14,3905</u>	<u>14,4250</u>	14,4215	<u>14,4000</u>	0,0345	14,40892

При этом мы сначала исходили из $(\delta'_0) = (1, 1, 1, 1, 1)$, получили $(\delta'_1) = (7, 21, 17, 12, 12)$ и, так как эти числа относятся приблизительно как $2:5:4:3:3$, взяли эти числа в качестве компонент δ_0 . Можно, так же как в п. 19.2, составить таблицу из величин a_k и отношений v_k :

$$a_{2m} = \bar{\delta}'_m \delta'_m, \quad a_{2m+1} = \bar{\delta}'_{m+1} \delta'_m, \quad v_{m+1} = \frac{a_{m+1}}{a_m}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

k	a_k	$v_k = \frac{a_k}{a_{k-1}}$	k	a_k	$v_k = \frac{a_k}{a_{k-1}}$
0	63		5	$3,9099665 \cdot 10^7$	14,40287
1	907	14,397	6	$5,631738 \cdot 10^8$	14,40355
2	13089	14,4311	7	$8,114250 \cdot 10^9$	14,40807
3	188481	14,4000	8	$1,1691138 \cdot 10^{11}$	14,40816
4	2714714	14,40312			

Примем во внимание, что теперь больше не выполняется $a_k = \bar{\delta}'_j \delta'_{k-j}$; для произвольных j , например, теперь имеет место

$$\bar{\delta}'_0 \delta'_3 = 188\,141 \neq \bar{\delta}'_1 \delta'_2 = 188\,481,$$

матрица \tilde{A} здесь не эрмитова; кроме того, отношения v_k не обнаруживают монотонной сходимости, например, если вычислены v_4, v_5, v_6 и оказалось, что они почти равны друг другу, то из этого еще нельзя заключить, что дальнейшие v_k сохраняют это значение.

Прервем итерации на δ_5 ; тогда в качестве собственного вектора следует принять:

$$\xi_1 = (1; 2,550; 2,287; 1,599; 1,585).$$

С $x_1 = 1$ получаются непосредственно нужные для (19.32) отношения. Например $x_2/x_1 = 2,550$; эти числа согласно (19.32) дают матрицу

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -7,2 & 4 & 2,9 & 2 \\ -5,148 & 3 & -2,574 & 8 \\ -2,396 & 1 & -1,198 & 4 \\ -5,34 & 4 & 0,83 & 3 \end{pmatrix}.$$

Можно было бы исходить из произвольного вектора, однако процесс ускоряется путем пересчета вектора

$$(x_{12}; x_{22}; x_{32}; x_{42}; x_{52}) = (2; -5; 4; 3; -3)$$

согласно (19.33) в вектор

$$(x_{12}^*; x_{22}^*; x_{32}^*; x_{42}^*; x_{52}^*) = (2; -10,1; -0,574; -0,2; -6,17).$$

Так как, однако, \tilde{x}_2 и \tilde{x}_5 близки по модулю, сделаем для ускорения сходимости обратный сдвиг

$$\psi = \tilde{A}^* - 3\tilde{\xi}, \quad \tilde{\xi}^* = (-23,084; 9; -3,042; 14)$$

и получим тогда из итерационного процесса (последний столбец дает приближенное значение для κ_5):

v	$i_v = \mathfrak{A}^* i_{v-1}$ (округлено)				Сумма s_v
0	-10,1	-0,574	-0,2	-6,17	-17,04
1	-87,8	-3,15	-0,2	-51,5	-142,7
2	-78	-3,9	-0,4	-45,6	-127,9
3	-68,7	-3,8	-0,2	-40	-112,7

v	$\mathfrak{A}^* s_v$				Сумма t_v
0	87,80	3,15	-0,215	51,47	142,21
1	780,5	39,48	-0,38	456,42	1276,0
2	687,6	37,77	2,27	400,5	1128,1
3	605	34,18	1,645	351,5	992,3

v	Отношения компонент				$\frac{t_v}{s_v}$
0	-8,70	-5,5	+1	-8,32	-8,35
1	-8,90	-12,5	+1,9	-8,86	-8,96
2	-8,93	-9,7	-5,7	-8,78	-8,83
3	-8,80	-8,99	-8,22	-8,79	-8,805

19.5. Введение главных векторов. При исследовании сходимости итерационного процесса выше была использована теорема о разложении, по которой произвольный вектор начального приближения ξ_0 может быть представлен с помощью собственных векторов ξ_j . Но это не всегда возможно. Имеются примеры, когда не существует ни одного собственного вектора, и представление с помощью собственных векторов невозможно. В таких случаях используются главные векторы.

Пример 1. Частная задача на собственные значения с одним собственным вектором. Матрицы

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 7 & -10 & -6 \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad \mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} + \mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 2 \\ 7 & -10 & -5 \end{pmatrix}$$

имеют $\kappa = 0$, соответственно $\kappa^* = 1$, в качестве трехкратно вырожденного характеристического числа и обладают однопараметрическим семейством собственных векторов

$$\xi_1 = c \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Пример 2. Общая задача на собственные значения без собственного вектора. Задача (17.14) для

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(\mathfrak{A} и \mathfrak{B} обе симметричны и неопределенны) не имеет характеристических чисел; определитель

$$\begin{vmatrix} 1-\kappa & 2-\kappa \\ 2-\kappa & 3-\kappa \end{vmatrix} \equiv -1$$

не обращается в нуль ни для какого κ .

Определение главного вектора. Вектор \mathfrak{h} называется *главным вектором частной задачи на собственные значения*

$$(\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{B}))\mathfrak{h} = 0, \quad (19.35)$$

если для некоторого целого $r > 0$ имеет место

$$(\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{B}))^r \mathfrak{h} = 0; \quad (19.36)$$

при этом \mathfrak{h} называется *главным вектором степени r* , если r — наименьшая степень, при которой \mathfrak{h} удовлетворяет уравнению (19.36).

Собственные векторы суть главные векторы 1-й степени.

Пример.

Для приведенного выше примера 1 уравнение главных векторов 2-й степени $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_2$ для матрицы \mathfrak{A} с $\kappa = 0$ имеет следующий вид:

$$\mathfrak{A}^2 \mathfrak{h} = 0, \quad \text{где } \mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} -4 & 24 & 8 \\ 2 & -12 & -4 \\ -8 & 48 & 16 \end{pmatrix} \quad \text{и } \mathfrak{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}.$$

Для компонент \mathfrak{h} получают условие

$$h_1 - 6h_2 - 2h_3 = 0.$$

Все векторы

$$\mathfrak{h} = \begin{pmatrix} 6h_2 + 2h_3 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$$

двупараметрического семейства с произвольными h_2, h_3 суть главные векторы степени $r \leq 2$, а именно 2, поскольку они не являются собственными векторами и не могут иметь степень 1. Вследствие того, что $\mathfrak{A}^3 = 0$, все векторы с тремя компонентами, не являющиеся главными векторами степени 2 или 1, суть главные векторы степени 3. Собственные векторы, проведенные из фиксированной точки, образуют прямую g , а главные векторы степени 2 — плоскость, проходящую через эту прямую, но не содержащую ее (рис. 19.2.)

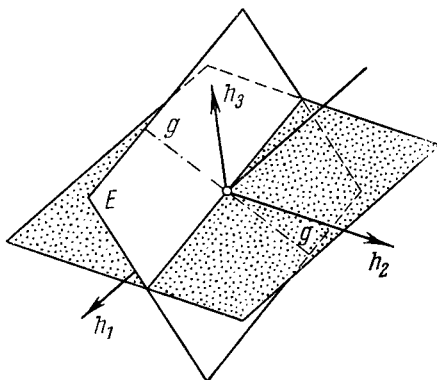


Рис. 19.2. Плоскость E главных векторов 2-й степени.

при этом \mathfrak{h} удовлетворяет уравнению (19.36).

Для главных векторов справедлива следующая простая теорема:

Главный вектор \mathfrak{h}_r r -й степени удовлетворяет одновременно всем уравнениям высших степеней $r + 1, r + 2, \dots$, как непосредственно видно из равенства

$$(\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{S})^s) \mathfrak{h}_r = (\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{S})^{s-r}) (\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{S})^r) \mathfrak{h}_r = 0.$$

Очевидно,

$$(\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{S})^q) \mathfrak{h}_r = \mathfrak{h}_{r-q}$$

для $q < r$ есть главный вектор степени $r - q$ и, следовательно, для $q = r - 1$ — собственный вектор.

Введение главных векторов не добавляет новых характеристических чисел; но если для некоторого числа κ имеется главный вектор степени r , то для того же числа κ имеется также собственный вектор \mathfrak{r} ; нужно только сделать замену

$$(\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{S})^{r-1}) \mathfrak{h}_r = \mathfrak{r} \quad (19.37)$$

для того, чтобы получить $(\mathfrak{A} - \kappa(\mathfrak{S})) \mathfrak{r} = 0$ (не может быть $\mathfrak{r} \equiv 0$, так как иначе \mathfrak{h}_r было бы степени $\leq r - 1$).

В тех случаях, когда, как в приведенном выше примере 2, отсутствуют характеристические числа, нет и главных векторов. Однако имеет место следующая

Теорема о разложении. Для частной задачи на собственные значения с произвольной матрицей всегда имеется по меньшей мере одно характеристическое число и главные векторы такие, что произвольный вектор \mathfrak{z}_0 может быть представлен как сумма

$$\mathfrak{z}_0 = \sum_{j=1}^k \mathfrak{h}_j. \quad (19.38)$$

(Здесь индекс при \mathfrak{h} не означает степени главного вектора.)

19.6. Доказательство теоремы о разложении. Для доказательства будем вектор \mathfrak{z}_0 понимать как начальный вектор последовательности итераций, образованных согласно (19.3),

$$\mathfrak{z}_s = \mathfrak{A} \mathfrak{z}_{s-1} = \mathfrak{A}^s \mathfrak{z}_0, \quad s = 1, 2, \dots \quad (19.39)$$

Полученная после n итераций последовательность из $(n + 1)$ векторов не будет линейно независимой в пространстве размерности n , следовательно, имеет место соотношение

$$0 = \sum_{q=0}^m c_q \mathfrak{z}_q = \sum_{q=0}^m c_q \mathfrak{A}^q \mathfrak{z}_0, \quad (19.40)$$

где не все $c_q = 0$; в частности, можно положить $c_m \neq 0$, а именно $c_m = 1$; может быть $m = n$, но также может быть и $m < n$. Введем теперь полином

$$p(x) = \sum_{q=0}^m c_q x^q. \quad (19.41)$$

Пусть он имеет корни $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k$ кратности r_1, r_2, \dots, r_k :

$$p(x) = (x - \xi_1)^{r_1} (x - \xi_2)^{r_2} \dots (x - \xi_k)^{r_k} = \prod_{j=1}^k (x - \xi_j)^{r_j},$$

причем $r_1 + r_2 + \dots + r_k = m$.

Образуем, далее, k вспомогательных функций $p_1(x), \dots, p_k(x)$, каждая из которых не содержит множителя $(x - \xi_j)$:

$$p_j(x) = \frac{p(x)}{(x - \xi_j)^{r_j}}, \quad j = 1, 2, \dots, k, \quad (19.42)$$

и которые в своей совокупности являются взаимно простыми. Согласно известной теореме алгебры¹⁾ тогда имеются полиномы $q_1(x), \dots, q_k(x)$ такие, что

$$1 \equiv p_1(x) q_1(x) + p_2(x) q_2(x) + \dots + p_k(x) q_k(x).$$

Теперь в каждом таком тождестве степени x можно заменить степенями матрицы \mathfrak{A} , а x^0 через $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E}$; так как степени матрицы $\mathfrak{A}^j, \mathfrak{A}^k$ перестановочны друг с другом, матричные полиномы можно вычислять алгебраически, как обычные полиномы. Следовательно, имеет место

$$\mathfrak{E} = \sum_{j=1}^k p_j(\mathfrak{A}) q_j(\mathfrak{A}).$$

Умножение этого равенства справа на \mathfrak{z}_0 дает

$$\mathfrak{z}_0 = \sum_{j=1}^k \mathfrak{h}_j, \quad \text{где } \mathfrak{h}_j = p_j(\mathfrak{A}) q_j(\mathfrak{A}) \mathfrak{z}_0.$$

Введенные здесь векторы \mathfrak{h}_j являются главными векторами. Действительно, из (19.42) следует

$$(x - \xi_j)^{r_j} p_j(x) q_j(x) \equiv q_j(x) \cdot p(x).$$

Если, далее, заменить x матрицей \mathfrak{A}

$$(\mathfrak{A} - \xi_j \mathfrak{E})^{r_j} p_j(\mathfrak{A}) q_j(\mathfrak{A}) = q_j(\mathfrak{A}) p(\mathfrak{A})$$

и учесть, что согласно (19.40), (19.41)

$$p(\mathfrak{A}) \mathfrak{z}_0 = 0,$$

то после умножения на \mathfrak{z}_0 справа получим

$$(\mathfrak{A} - \xi_j \mathfrak{E})^{r_j} \mathfrak{h}_j = 0,$$

т. е. \mathfrak{h}_j — главный вектор матрицы \mathfrak{A} степени r_j и принадлежит характеристическому числу ξ_j . Этим доказана возможность представления \mathfrak{z}_0 с помощью главных векторов.

¹⁾ О. Реггон, Algebra, т. I, Berlin — Leipzig, 1927, 185 [см. А. Г. Курош, Курс высшей алгебры, Физматгиз, 1963].

19.7. Сходимость итерационного метода для частных задач на собственные значения.

Пусть снова \mathfrak{A} — произвольная квадратная матрица, а \mathfrak{z}_s — итерационная последовательность, полученная при произвольном начальном векторе согласно (19.39). На основании (19.38) \mathfrak{z}_0 можно представить как сумму главных векторов \mathfrak{h}_j , причем \mathfrak{z}_0 и \mathfrak{h}_j не равны тождественно нулю. Тогда имеет место соотношение

$$\mathfrak{z}_s = \sum_{j=1}^k \mathfrak{A}^s \mathfrak{h}_j = \sum_{j=1}^k (\mathfrak{A} - \kappa_j \mathfrak{E} + \kappa_j \mathfrak{E})^s \mathfrak{h}_j.$$

Пусть \mathfrak{h}_j — главный вектор степени r_j , принадлежащий характеристическому числу κ_j . По формуле бинома Ньютона

$$\mathfrak{z}_s = \sum_{j=1}^k \sum_{\sigma=0}^s \binom{s}{\sigma} (\mathfrak{A} - \kappa_j \mathfrak{E})^\sigma \kappa_j^{s-\sigma} \mathfrak{h}_j. \quad (19.43)$$

Согласно определению главного вектора

$$(\mathfrak{A} - \kappa_j \mathfrak{E})^\sigma \mathfrak{h}_j = \begin{cases} \text{собственный вектор } \mathfrak{x}_j \text{ для } \sigma = r_j - 1, \\ 0 & \text{для } \sigma \geq r_j, \end{cases}$$

таким образом, сумма (19.43) распространяется только на σ от 0 до $r_j - 1$. В подробной записи сумма (19.43) имеет вид

$$\mathfrak{z}_s = \sum_{j=1}^k \left\{ \kappa_j^s + \binom{s}{1} \kappa_j^{s-1} (\mathfrak{A} - \kappa_j \mathfrak{E}) + \binom{s}{2} \kappa_j^{s-2} (\mathfrak{A} - \kappa_j \mathfrak{E})^2 + \dots \right. \\ \left. \dots + \binom{s}{r_j-1} \kappa_j^{s-r_j+1} (\mathfrak{A} - \kappa_j \mathfrak{E})^{r_j-1} \right\} \mathfrak{h}_j. \quad (19.44)$$

Пусть теперь s неограниченно возрастает.

Как и в п. 19.1, будем различать несколько случаев:

1-й случай. Среди различных характеристических чисел κ_j , принадлежащих векторам $\mathfrak{h}_1, \dots, \mathfrak{h}_k$, имеется одно, например κ_1 , превосходящее по модулю остальные: $|\kappa_1| > |\kappa_j|$ для $j = 2, 3, \dots, n$. (Все $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ различны, так как согласно доказательству в п. 19.6 $\mathfrak{h}_1, \mathfrak{h}_2, \dots, \mathfrak{h}_k$ в теореме о разложении принадлежат исключительно различным характеристическим числам.) Тогда в (19.44) при $s \rightarrow \infty$ преобладающим становится последний член

$$\binom{s}{r_1-1} \kappa_1^{s-r_1+1} (\mathfrak{A} - \kappa_1 \mathfrak{E})^{r_1-1} \mathfrak{h}_1.$$

т. е.

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\kappa_1^{r_1-1-s}}{\binom{s}{r_1-1}} \mathfrak{z}_s = (\mathfrak{A} - \kappa_1 \mathfrak{E})^{r_1-1} \mathfrak{h}_1 = \mathfrak{x}_1; \quad (19.45)$$

при этом \mathfrak{x}_1 есть принадлежащий κ_1 собственный вектор.

1-й случай, в частности, имеет место, если каждые попарно различные друг от друга собственные числа (которые могут повторяться многократно) имеют также различные модули.

2-й случай. Пусть существуют два различных характеристических числа κ_1, κ_2 , равных по модулю, таких, что

$$|\kappa_1| = |\kappa_2| \geq |\kappa_j| \quad \text{для } j \geq 3.$$

Тогда сходимость вообще отсутствует; как и в п. 19.1, можно рассмотреть ряд частных случаев¹⁾.

19.8. О степенях матрицы. Из (19.44) можно вывести важные факты о степенях матрицы \mathfrak{A} . Если мы выберем в качестве ξ_0 j -й единичный вектор (все компоненты ξ_0 равны нулю, за исключением j -го, который равен 1), то полученный из итерационного процесса (19.39) вектор $\xi_s = \mathfrak{A}^s \xi_0$ равен j -му столбцу матрицы \mathfrak{A}^s . Пусть, далее, все характеристические числа κ_q по модулю меньше 1, тогда согласно (19.44) ξ_s сходится к нулю, т. е. j -й столбец \mathfrak{A}^s стремится поэлементно к нулю при $s \rightarrow \infty$. Это справедливо для каждого j , следовательно, все n^2 элементов \mathfrak{A}^s по отдельности стремятся к нулю.

Если, с другой стороны, имеется хотя бы одно характеристическое число κ_q с модулем $|\kappa_q| \geq 1$, то все элементы \mathfrak{A}^s не могут стремиться к нулю. Действительно, для принадлежащего κ_q собственного вектора ξ_q имеет место равенство

$$\mathfrak{A}^s \xi_q = \kappa_q^s \xi_q,$$

и правая часть не стремится к нулевому вектору при $s \rightarrow \infty$.

Теорема. Только в случае, когда все характеристические числа матрицы \mathfrak{A} по модулю меньше 1, последовательность матриц \mathfrak{A}^s при $s \rightarrow \infty$ сходится поэлементно к нулевой матрице.

Используем одно простое следствие теоремы. Пусть все $|\kappa_q| < \alpha < 1$, тогда матрица $\frac{1}{\alpha} \mathfrak{A} = \mathfrak{A}^*$ имеет характеристические числа $\kappa_q^* = \frac{1}{\alpha} \kappa_q$, которые также все по модулю меньше 1, $|\kappa_q^*| < \alpha < 1$ и согласно теореме \mathfrak{A}^{*s} сходится поэлементно к нулю, т. е. все элементы $a_{jk}^{*(s)}$ матрицы $\mathfrak{A}^{*(s)}$ ограничены:

$$|a_{jk}^{*(s)}| < A \quad \text{для всех } j, k, s.$$

Для элементов $a_{jk}^{(s)}$ матрицы \mathfrak{A}^s тогда имеет место соотношение

$$|a_{jk}^{(s)}| < \alpha^s A \quad \text{для всех } j, k, s.$$

¹⁾ Н. Wieland, Das Iterationsverfahren bei nicht-selbstadjungierten Eigenwertaufgaben, Math. Z. 50 (1944), 93 — 144.

Пусть вектор z имеет компоненты z_1, z_2, \dots, z_n с $|z_j| \leq z$. Тогда векторный ряд

$$z + \mathfrak{A}z + \mathfrak{A}^2z + \dots \tag{19.46}$$

сходится, так как ряд для j -й компоненты жоржирован следующей геометрической прогрессией: $z + naAz + na^2Az + \dots$

Если же \mathfrak{A} имеет характеристическое число κ_q с модулем ≥ 1 , соответствующее собственному вектору ξ_q , то ряд $\sum_{v=0}^{\infty} \mathfrak{A}^v \xi$ расходится, если выбрать $\xi = \xi_q$. Таким образом, справедлива

Теорема. Ряд $\sum_{v=0}^{\infty} \mathfrak{A}^v z$ сходится для произвольного вектора z только тогда, когда все характеристические числа матрицы \mathfrak{A} по модулю меньше 1. Сходимость в этом случае абсолютная, и ряд $\sum_{v=0}^{\infty} \mathfrak{A}^v$ также сходится абсолютно.

19.9 Системы обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Обсудим некоторые применения матричного исчисления к системам дифференциальных уравнений. Пусть задана система линейных дифференциальных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy_j}{dt} = \dot{y}_j = a_{j_1}(t)y_1 + a_{j_2}(t)y_2 + \dots + a_{j_n}(t)y_n + r_j(t), \\ j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \right\} \tag{19.47}$$

причем $a_{jk}(t)$ и $r_j(t)$ — заданные непрерывные и ограниченные функции времени, и ставится задача отыскания решений этой системы. Для отыскания решений этой системы зададимся начальным условием:

$$y_{j0} = y_j(0) \quad \text{для} \quad t = 0.$$

Как известно, каждое линейное дифференциальное уравнение n -го порядка можно переписать в виде системы (19.47).

Применим матрицы

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \dot{y} = \begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix}, \quad r = \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_n \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

тогда (19.47) будет иметь вид

$$\dot{y} = \mathfrak{A}y + r. \tag{19.48}$$

При $r \equiv 0$ система называется однородной, при $r \neq 0$ — неоднородной. Представим себе, что с помощью различных начальных условий оп-

ределены n линейно независимых решений однородной системы. Эти n векторов v_j образуют «фундаментальную систему»:

$$v_1 = \begin{pmatrix} y_{11} \\ y_{21} \\ \vdots \\ y_{n1} \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} y_{12} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{n2} \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad v_n = \begin{pmatrix} y_{1n} \\ y_{2n} \\ \vdots \\ y_{nn} \end{pmatrix}.$$

В качестве примера можно считать, что система решений задается начальными условиями

$$y_1(0) = y_2(0) = \dots = y_{j-1}(0) = y_{j+1}(0) = \dots = y_n(0) = 0, \\ y_j(0) = 1.$$

Система решений удовлетворяет для каждого $j=1, 2, \dots, n$ уравнениям

$$\dot{v}_j = \mathfrak{A}v_j. \quad (19.49)$$

Векторы v_j для некоторого значения $t=t_0$ линейно независимы, если образованная при этом матрица

$$\mathfrak{y}) = (v_1, v_2, \dots, v_n) = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix} \quad (19.50)$$

не вырождена, т. е. если $\Delta = \det \mathfrak{y}) \neq 0$. Далее справедливо следующее утверждение: если система v_j линейно независима для какого-либо $t=t_0$, то она линейно независима для любых t . Для производной определителя, дифференцируя по столбцам, получим из (19.49)

$$\dot{\Delta} = \begin{vmatrix} a_{11}y_{11} + \dots + a_{1n}y_{n1} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{n1}y_{11} + \dots + a_{nn}y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} + \\ + \begin{vmatrix} y_{11} & a_{11}y_{12} + \dots + a_{1n}y_{n2} & y_{13} & \dots & y_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ y_{n1} & a_{n1}y_{12} + \dots + a_{nn}y_{n2} & y_{n3} & \dots & y_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\ \dots + \begin{vmatrix} y_{11}y_{12} & \dots & y_{1, n-1} & a_{11}y_{1n} + \dots + a_{1n}y_{nn} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n1}y_{n2} & \dots & y_{n, n-1} & a_{n1}y_{1n} + \dots + a_{nn}y_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь каждое a_{jj} имеет множитель Δ , например множитель при a_{11}

$$y_{11} \begin{vmatrix} y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} - y_{12} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} y_{1n} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2, n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n, n-1} \end{vmatrix} = \Delta,$$

в то время как все a_{jk} при $j \neq k$ имеют множитель 0, например множитель при a_{12}

$$y_{12} \begin{vmatrix} y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} - y_{22} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{23} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n3} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} + \dots \\ \dots + (-1)^{n-1} y_{2n} \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2, n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{n, n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_{n1} & y_{n2} & \cdots & y_{nn} \end{vmatrix} = 0,$$

так как совпадают две строки.

Обозначим, через $s_{\mathfrak{A}}$ след матрицы \mathfrak{A} :

$$s_{\mathfrak{A}} = \sum_{j=1}^n a_{jj},$$

тогда имеет место соотношение

$$\dot{\Delta} = s_{\mathfrak{A}} \cdot \Delta$$

или

$$\Delta(t) = \Delta(0) e^{\int_0^t s_{\mathfrak{A}}(t) dt} \quad (19.51)$$

т. е. или $\Delta \equiv 0$, или Δ отличен от нуля для всех t . При системе решений ψ_1, \dots, ψ_n вектор

$$\psi = \mathfrak{y} \cdot c \quad (19.52)$$

также порождает систему решений, причем вектор

$$c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{pmatrix}$$

содержит n произвольных постоянных c_j . Как видно, (19.52) является общим решением однородной системы, так как оно может

быть связано с произвольными начальными условиями $y(0) = y_0$, нужно только положить

$$c = y(0)^{-1} y_0;$$

y^{-1} существует, так как $\Delta = \det y \neq 0$.

Так же как в случае отдельного дифференциального уравнения, для нахождения частного решения неоднородной системы (19.48) здесь можно применить метод вариации постоянной.

Запишем

$$y = y \cdot c(t), \quad (19.53)$$

где $c_j(t)$ — функции, подлежащие определению. Подставляя (19.53) в (19.48), получаем

$$\dot{y} = \dot{y} \cdot c + y \cdot \dot{c} = \mathfrak{A}y c + r.$$

Теперь согласно (19.49)

$$\dot{y} = (\dot{y}_1, \dot{y}_2, \dots, \dot{y}_n) = \mathfrak{A}y,$$

таким образом,

$$y \dot{c} = r, \text{ т. е. } \dot{c} = y^{-1} r$$

или

$$c = \int_0^1 y^{-1} r dt + c^*,$$

причем c^* — вектор с константами $c_1^*, c_2^*, \dots, c_n^*$. Таким образом, получаем общее решение неоднородной системы

$$y = y \left(c^* + \int_0^t y^{-1} r dt \right). \quad (19.54)$$

19.10. Постоянные коэффициенты и главные векторы. Пусть в (19.47), в частности, коэффициенты a_{jk} постоянны; тогда для однородной системы, так же как и в случае одного уравнения, можно получить представление

$$y = \chi e^{\kappa t},$$

где χ — постоянный вектор, а κ — подлежащая определению постоянная. Так как

$$\dot{y} = \kappa \chi e^{\kappa t} = \mathfrak{A}y = \mathfrak{A} \chi e^{\kappa t},$$

то после сокращения на не равный нулю множитель $e^{\kappa t}$ получаем

$$\mathfrak{A} \chi = \kappa \chi.$$

Если \mathfrak{A} имеет различные характеристические числа κ_j с соответствующими им собственными векторами χ_j , то с помощью неопределенных

коэффициентов c_j общее решение однородной системы уравнений $\dot{y} = \mathcal{A}y$ можно записать следующим образом:

$$y = \sum_{j=1}^n c_j x_j e^{\lambda_j t}.$$

При кратных характеристических числах появляется небольшое усложнение. Для однородного линейного дифференциального уравнения n -го порядка с постоянными коэффициентами в случае двукратно вырожденного корня характеристического уравнения решением дифференциального уравнения, помимо $e^{\lambda t}$, будет также $t e^{\lambda t}$; здесь же, однако, $t^j e^{\lambda t}$ вообще не будет j -м решением при двукратно вырожденных характеристических числах и приходится рассматривать главные векторы η . Пусть η_r есть главный вектор степени r , принадлежащий характеристическому числу λ матрицы \mathcal{A} . Введем дальше векторы

$$\eta_{r-1}, \eta_{r-2}, \dots, \eta_1, \eta_0 \equiv 0$$

с помощью соотношений

$$(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E})^s \eta_r = (\mathcal{A} - \lambda \mathcal{E}) \eta_{r-s+1} = \eta_{r-s}, \quad s = 1, 2, \dots, r. \quad (19.55)$$

Вместо неприменимого представления

$$(a_0 x + a_1 t x + \dots + a_{r-1} t^{r-1} x) e^{\lambda t}$$

введем представление с главными векторами

$$y = (a_0 \eta_r + a_1 t \eta_{r-1} + a_2 t^2 \eta_{r-2} + \dots + a_{r-1} t^{r-1} \eta_1) e^{\lambda t}$$

и попытаемся определить a_j таким образом, чтобы y удовлетворяло однородным уравнениям. При подстановке y в равенство $\dot{y} = \mathcal{A}y$ и после сокращения на множитель $e^{\lambda t}$ получаем

$$a_0 \lambda \eta_r + a_1 \lambda t \eta_{r-1} + \dots + a_{r-1} \lambda t^{r-1} \eta_1 + a_1 \eta_{r-1} + 2a_2 t \eta_{r-2} + \dots \\ \dots + (r-1) a_{r-1} t^{r-2} \eta_1 = a_0 \mathcal{A} \eta_r + a_1 t \mathcal{A} \eta_{r-1} + \dots + a_{r-1} t^{r-1} \mathcal{A} \eta_1.$$

Если сравнить коэффициенты при одинаковых степенях t , например при t^q , то имеем с учетом (19.55)

$$(q+1) a_{q+1} \eta_{r-q-1} = a_q \mathcal{A} \eta_{r-q} - a_q \lambda \eta_{r-q} = a_q \eta_{r-q-1}, \\ q = 0, 1, \dots, r-2$$

или

$$a_{q+1} = \frac{a_q}{q+1} = \frac{a_{q-1}}{(q+1)q} = \dots = \frac{a_0}{(q+1)!}.$$

Следовательно,

$$y = \left(\eta_r + \frac{t}{1!} \eta_{r-1} + \frac{t^2}{2!} \eta_{r-2} + \dots + \frac{t^{r-1}}{(r-1)!} \eta_1 \right) e^{\lambda t} \quad (19.56)$$

есть решение однородной системы. С помощью линейных комбинаций решений такого рода можно, используя теорему о разложении, удовлетворить любым начальным условиям, следовательно, это есть наиболее общее решение однородной системы.

Простой пример. Пусть задана система

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = 3y_1 - y_2, \\ \dot{y}_2 = y_1 + y_2. \end{cases} \quad (19.57)$$

Здесь

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

имеет только одно характеристическое число $\kappa = 2$ как корень уравнения $\begin{vmatrix} 3 - \kappa & -1 \\ 1 & 1 - \kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 - 4\kappa + 4 = 0$ с однопараметрическим семейством собственных векторов $\mathfrak{z} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решением (19.57) будет, следовательно, $y = ce^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, но не $\mathfrak{z} = c \cdot t \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, так как $\dot{\mathfrak{z}} = c \cdot e^{2t} \begin{pmatrix} 1 + 2t \\ 1 + 2t \end{pmatrix} \neq \mathfrak{A}\mathfrak{z} = ce^{2t} \begin{pmatrix} 2t \\ 2t \end{pmatrix}$. Найдем главные векторы \mathfrak{h}_2 2-й степени: $(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{E})^2 \mathfrak{h}_2 = 0$; здесь $(\mathfrak{A} - 2\mathfrak{E})^2 \equiv 0$, следовательно, любой вектор $\mathfrak{h}_2 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ есть главный вектор,

и при

$$\mathfrak{h}_1 = (\mathfrak{A} - 2\mathfrak{E}) \mathfrak{h}_2 = \begin{pmatrix} a - b \\ a - b \end{pmatrix}$$

согласно (19.56)

$$y = \begin{pmatrix} a + t(a - b) \\ b + t(a - b) \end{pmatrix} \cdot e^{2t}$$

есть общее решение (19.57), как можно проверить непосредственно подстановкой.

§ 20. Дополнения

20.1. Матричные полномы и уравнение Кэли. Если \mathfrak{A} имеет в качестве характеристических чисел $\kappa_1, \dots, \kappa_n$, то характеристическими числами \mathfrak{A}^2 будут $\kappa_1^2, \dots, \kappa_n^2$, так как из равенства $\varphi(\kappa) = \det(\mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{E}) = 0$ следует $\varphi(\kappa)\varphi(-\kappa) = \det(\mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{E})\det(\mathfrak{A} + \kappa\mathfrak{E}) = \det(\mathfrak{A}^2 - \kappa^2\mathfrak{E}) = 0$. (В случае кратных характеристических чисел κ_j матрицы \mathfrak{A} высказанные соображения еще ничего не говорят относительно кратности κ_j^2 .) Далее, если \mathfrak{A} не вырождена, обратная матрица \mathfrak{A}^{-1} имеет характеристические числа $\kappa_1^{-1}, \kappa_2^{-1}, \dots, \kappa_n^{-1}$, как видно из следующего соотношения: $\det\left(\mathfrak{A}^{-1} - \frac{1}{\kappa}\mathfrak{E}\right) = \kappa^{-n} \det \mathfrak{A}^{-1} \times \det(\kappa\mathfrak{E} - \mathfrak{A}) = 0$. Теперь можно поставить вопрос о вычислении характеристических чисел произвольного матричного полинома.

Пусть

$$h(x) = \sum_{v=0}^r h_v x^v = h_r \prod_{\rho=1}^r (x - x_\rho)$$

— заданный полином относительно x с коэффициентами h_v (например, $h_r \neq 0$ для $r \geq 1$) и корнями x_ρ , тогда полином $h(\mathfrak{A})$ относительно некоторой заданной матрицы \mathfrak{A} определяется так:

$$h(\mathfrak{A}) = \sum_{v=0}^r h_v \mathfrak{A}^v = h_r \prod_{\rho=1}^r (\mathfrak{A} - x_\rho \mathfrak{E}), \quad (20.1)$$

причем $\mathfrak{A}^0 = \mathfrak{E}$. Если, как в (17.6),

$$\varphi(\kappa) = \det(\mathfrak{A} - \kappa \mathfrak{E}) = \prod_{\sigma=1}^n (\kappa_\sigma - \kappa) = \sum_{v=0}^n a_v \kappa^v \quad (20.2)$$

— характеристический полином матрицы \mathfrak{A} с характеристическими числами κ_σ в качестве корней, то из (20.1) следует после перехода к определителям

$$\begin{aligned} \det h(\mathfrak{A}) &= h_r^n \prod_{\rho=1}^r \det(\mathfrak{A} - \kappa_\rho \mathfrak{E}) = h_r^n \prod_{\rho=1}^r \prod_{\sigma=1}^n (\kappa_\sigma - \kappa_\rho) = \\ &= \prod_{\rho=1}^n \left(h_r \prod_{\sigma=1}^r (\kappa_\sigma - \kappa_\rho) \right) = \prod_{\rho=1}^n h(\kappa_\rho). \end{aligned} \quad (20.3)$$

В частности, если сделать замену $h(x) = g(x) - \kappa$, то получим важное и удивительно простое соотношение

$$\det(g(\mathfrak{A}) - \kappa \mathfrak{E}) = \prod_{\sigma=1}^n (g(\kappa_\sigma) - \kappa). \quad (20.4)$$

Теорема. Пусть \mathfrak{A} — произвольная матрица с характеристическими числами $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ и $g(x)$ — заданный полином x . Тогда матрица $g(\mathfrak{A})$ имеет характеристические числа $g(\kappa_1), g(\kappa_2), \dots, g(\kappa_r)$. Это справедливо и в случае кратных характеристических чисел.

Для степеней матрицы \mathfrak{A} имеет место примечательное соотношение — уравнение Кэли, или Гамильтона — Кэли ¹⁾.

¹⁾ Артур Кэли, английский математик, родился в 1821 г. После окончания Кембриджского университета становится адвокатом и одновременно занимается математическими исследованиями. В этот период (до 1863 г.) им было написано около 300 статей. В 1863 г. Кэли стал профессором математики в Кембридже. Умер в 1895 г.

Вильям Роуэн Гамильтон родился в 1805 г. в Дублине. Уже в 1827 г. он становится профессором астрономии в Дублинском университете и одновременно директором обсерватории. Гамильтону принадлежит много работ по механике и математике, в частности, им были открыты кватернионы. Умер Гамильтон в Дублине в 1865 г.

Для матрицы $\mathfrak{B}(\kappa) = \mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{C}$, которая для произвольного κ в общем случае не вырождена, можно образовать обратную матрицу

$$\mathfrak{B}^{-1}(\kappa) = \frac{1}{\varphi(\kappa)} \begin{pmatrix} A_{11}(\kappa) & A_{21}(\kappa) & \dots & A_{n1}(\kappa) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n}(\kappa) & A_{2n}(\kappa) & \dots & A_{nn}(\kappa) \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\varphi(\kappa) = \det \mathfrak{B} = \det (\mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{C}) = \sum_{\nu=0}^n \alpha_{\nu} \kappa^{\nu},$$

как и в (20.2), — характеристический полином матрицы \mathfrak{A} , а $A_{kj}(\kappa)$ — алгебраические дополнения элементов матрицы \mathfrak{B} , следовательно, полиномы относительно κ , имеющие наивысшую степень $(n-1)$. Таким образом, можно $\varphi(\kappa)\mathfrak{B}^{-1}(\kappa)$ записать в виде

$$\varphi(\kappa)\mathfrak{B}^{-1}(\kappa) = \mathfrak{B}_0 + \kappa\mathfrak{B}_1 + \dots + \kappa^{n-1}\mathfrak{B}_{n-1},$$

причем матрицы $\mathfrak{B}_0, \mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{n-1}$ не содержат величин κ . При умножении справа на $\mathfrak{B} = \mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{C}$ в правой и левой частях равенства окажутся полиномы n -й степени:

$$\varphi(\kappa) \cdot \mathfrak{C} = (\mathfrak{B}_0 + \kappa\mathfrak{B}_1 + \dots + \kappa^{n-1}\mathfrak{B}_{n-1})(\mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{C}),$$

а сравнение коэффициентов и последующее перемножение с заданными степенями \mathfrak{A}

$$\begin{array}{l|l} a_0\mathfrak{C} = & \mathfrak{B}_0\mathfrak{A} & \cdot \mathfrak{C} \\ a_1\mathfrak{C} = & \mathfrak{B}_1\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_0 & \cdot \mathfrak{A} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1}\mathfrak{C} = & \mathfrak{B}_{n-1}\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_{n-2} & \cdot \mathfrak{A}^{n-1} \\ a_n\mathfrak{C} = & -\mathfrak{B}_{n-1} & \cdot \mathfrak{A}^n \end{array}$$

при сложении дает

$$a_0\mathfrak{C} + a_1\mathfrak{A} + a_2\mathfrak{A}^2 + \dots + a_n\mathfrak{A}^n = 0, \quad (20.5)$$

так как с правой стороны все члены взаимно уничтожаются.

Теорема. Пусть $\varphi(\kappa)$ — характеристический полином матрицы \mathfrak{A} , т. е. $\varphi(\kappa) = \det(\mathfrak{A} - \kappa\mathfrak{C})$; тогда \mathfrak{A} удовлетворяет своему характеристическому уравнению, уравнению Гамильтона — Кэли:

$$\varphi(\mathfrak{A}) = 0. \quad (20.6)$$

С помощью уравнения Кэли (20.6) можно выразить n -ю и высшие степени матрицы \mathfrak{A} через $\mathfrak{C}, \mathfrak{A}, \mathfrak{A}^2, \dots, \mathfrak{A}^{n-1}$ с помощью линейной комбинации.

Пример.

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} 5 & 8 & 13 \\ 8 & 14 & 23 \\ 13 & 23 & 38 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{A}^3 = \begin{pmatrix} 34 & 60 & 99 \\ 60 & 105 & 173 \\ 99 & 173 & 285 \end{pmatrix}.$$

Коэффициенты уравнения Кэли a_0, a_1, a_2

$$-\mathfrak{X}^3 = a_0\mathfrak{E} + a_1\mathfrak{X} + a_2\mathfrak{X}^2$$

можно определить без вычисления характеристического определителя из первых строк матриц; получаем

$$\begin{aligned} -34 &= a_0 + 0 && + a_2 \cdot 5, \\ -60 &= 0 + a_1 \cdot 1 && + a_2 \cdot 8, \\ -99 &= 0 + a_1 \cdot 2 && + a_2 \cdot 13, \end{aligned}$$

и отсюда $a_0 = 1, a_1 = -4, a_2 = -7$; таким образом,

$$\mathfrak{X}^3 = 7\mathfrak{X}^2 + 4\mathfrak{X} - \mathfrak{E}.$$

Высшие степени можно получить умножением этого уравнения на $\mathfrak{X}, \mathfrak{X}^2, \dots$, например

$$\mathfrak{X}^4 = 7\mathfrak{X}^3 + 4\mathfrak{X}^2 - \mathfrak{X} = 53\mathfrak{X}^2 + 27\mathfrak{X} - 7\mathfrak{E} = \begin{pmatrix} 258 & 451 & 743 \\ 451 & 789 & 1300 \\ 743 & 1300 & 2142 \end{pmatrix}.$$

Умножением на $\mathfrak{X}^{-1}, \mathfrak{X}^{-2}, \dots$ получаются отрицательные степени, например

$$\mathfrak{X}^{-1} = 4\mathfrak{E} + 7\mathfrak{X} - \mathfrak{X}^2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

20.2. Функции матриц и степенные ряды матриц. Матричные полиномы часто бывает удобнее вычислять с помощью интерполяционных формул Лагранжа. Эти формулы позволяют с помощью «вспомогательного полинома Лагранжа» *)

$$L_q(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{q-1})(x-x_{q+1})\dots(x-x_n)}{(x_q-x_1)(x_q-x_2)\dots(x_q-x_{q-1})(x_q-x_{q+1})\dots(x_q-x_n)} \quad (20.7)$$

задать полином $f(x)$ степени не выше $(n-1)$, который в заданных n точках x_1, x_2, \dots, x_n принимает заданные значения функции $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$:

$$f(x) = \sum_{q=1}^n f(x_q) L_q(x). \quad (20.8)$$

Справедливость этой формулы непосредственно видна из соотношения

$$L_q(x_s) = \delta_{sq} = \begin{cases} 1 & \text{для } s = q, \\ 0 & \text{для } s \neq q. \end{cases}$$

Если потребовать, чтобы для всех n значений функции было $f(x_q) = 1$, получим $f(x) \equiv 1$:

$$1 \equiv \sum_{q=1}^n L_q(x). \quad (20.9)$$

*) Термин в русской литературе не употребляется; интерполяционным полиномом Лагранжа называют $f(x)$ (20.8).

Заменим в (20.7), (20.8), (20.9) x матрицей \mathfrak{A} , характеристические числа которой $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$ все отличны по модулю, и выберем эти κ_q в качестве точек x_q , тогда получим

$$L(\mathfrak{A}) = \frac{(\mathfrak{A} - \kappa_1 \mathfrak{E}) \dots (\mathfrak{A} - \kappa_{q-1} \mathfrak{E}) (\mathfrak{A} - \kappa_{q+1} \mathfrak{E}) \dots (\mathfrak{A} - \kappa_n \mathfrak{E})}{(\kappa_q - \kappa_1) \dots (\kappa_q - \kappa_{q-1}) (\kappa_q - \kappa_{q+1}) \dots (\kappa_q - \kappa_n)}, \quad (20.10)$$

$$f(\mathfrak{A}) = \sum_{q=1}^n f(\kappa_q) L_q(\mathfrak{A}), \quad (20.11)$$

$$\mathfrak{E} = \sum_{q=1}^n L_q(\mathfrak{A}). \quad (20.12)$$

Пусть теперь $g(x)$ — заданный полином n -й степени относительно x , который мы разложим по степеням $(x - \kappa_j)$ в точке $x = \kappa_j$:

$$g(x) = g(\kappa_j) - \sum_{r=1}^N a_r (x - \kappa_j)^r.$$

Умножим это уравнение на $L_j(x)$ и заменим x на \mathfrak{A} :

$$g(\mathfrak{A}) L_j(\mathfrak{A}) = g(\kappa_j) L_j(\mathfrak{A}) - \sum_{r=1}^N a_r (\mathfrak{A} - \kappa_j \mathfrak{E})^r L_j(\mathfrak{A}). \quad (20.13)$$

Сумма, фигурирующая в написанном равенстве, равна нулю, так как каждый член содержит множитель $\Phi(\mathfrak{A})$, который обращается в нуль, как это следует из уравнения Кэли (20.6); например,

$$(\mathfrak{A} - \kappa_1 \mathfrak{E}) L_1(\mathfrak{A}) = \frac{\Phi(\mathfrak{A})}{(\kappa_1 - \kappa_2) \dots (\kappa_1 - \kappa_n)} = 0.$$

Если просуммировать (20.13) по j , то уравнение упростится вследствие (20.12):

$$g(\mathfrak{A}) = \sum_{j=1}^n g(\kappa_j) L_j(\mathfrak{A}). \quad (20.14)$$

Таким образом, если известны характеристические числа матрицы \mathfrak{A} и составлен интерполяционный полином Лагранжа $L_j(\mathfrak{A})$ согласно (20.10), то можно образовать полином любой степени $g(\mathfrak{A})$ без вычисления высоких степеней \mathfrak{A} .

Пусть $s(x)$ — функция, представляемая с помощью частичных сумм степенного ряда

$$s(x) = \lim_{q \rightarrow \infty} s_q(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r,$$

где

$$s_q(x) = \sum_{r=0}^q c_r x^r.$$

Тогда, согласно (20.14), имеет место соотношение

$$s_q(\mathfrak{A}) = \sum_{j=1}^n s_q(\kappa_j) L_j(\mathfrak{A}).$$

Если степенной ряд сходится для всех значений $x = \kappa_j$, то предельный переход $q \rightarrow \infty$ дает

$$s(\mathfrak{A}) = \sum_{j=1}^n s(\kappa_j) L_j(\mathfrak{A}),$$

причем матрица $s(\mathfrak{A})$ определяется с помощью равенства

$$s(\mathfrak{A}) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \mathfrak{A}^r.$$

Теорема. Пусть матрица \mathfrak{A} имеет различные характеристические числа $\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_n$. Пусть также имеется степенной ряд $s(x)$

$$s(x) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r x^r,$$

а все характеристические числа κ_q находятся в области сходимости степенного ряда, тогда сходится также степенной ряд матриц

$$\sum_{r=0}^{\infty} c_r \mathfrak{A}^r,$$

и для матрицы, определяющей сумму ряда, имеет место соотношение

$$s(\mathfrak{A}) = \sum_{r=0}^{\infty} c_r \mathfrak{A}^r = \sum_{j=1}^n s(\kappa_j) L_j(\mathfrak{A}), \quad (20.15)$$

причем $L_j(\mathfrak{A})$ определяются согласно (20.10).

Пример. Для матрицы

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

характеристические числа получаются из уравнения

$$\varphi(\kappa) = \begin{vmatrix} 2-\kappa & -1 & 1 \\ 1 & -1-\kappa & 3 \\ -2 & 1 & 1-\kappa \end{vmatrix} = -(\kappa-2)(\kappa-1)(\kappa+1) = 0;$$

$$\kappa_1 = 2; \quad \kappa_2 = 1; \quad \kappa_3 = -1.$$

Согласно (20.10) имеем

$$L_1(\mathfrak{A}) = \frac{(\mathfrak{A} - \mathfrak{E})(\mathfrak{A} + \mathfrak{E})}{(2-1)(2+1)} = \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{E}}{3},$$

$$L_2(\mathfrak{A}) = \frac{-\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A} + 2\mathfrak{E}}{2}, \quad L_3(\mathfrak{A}) = \frac{\mathfrak{A}^2 - 3\mathfrak{A} + 2\mathfrak{E}}{6},$$

причем

$$\mathfrak{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 3 & 1 \\ -5 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Проверка по (20.12) подтверждает правильность вычислений.

Согласно (20.14), (20.15) тогда, к примеру, получается

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^{10} - 2\mathfrak{A}^9 &= (2^{10} - 2 \cdot 2^9) \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{E}}{3} + (1^{10} - 2 \cdot 1^9) \frac{-\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{A} + 2\mathfrak{E}}{2} + \\ &+ ((-1)^{10} - 2(-1)^9) \frac{\mathfrak{A}^2 - 3\mathfrak{A} + 2\mathfrak{E}}{6} = \frac{\mathfrak{A}^2}{2} - \frac{\mathfrak{A}}{2} - \mathfrak{E} + \frac{\mathfrak{A}^2}{2} - \frac{3\mathfrak{A}}{2} + \mathfrak{E} = \\ &= \mathfrak{A}^2 - 2\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ -7 & 5 & -5 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\sin(\pi\mathfrak{A}) = 0;$$

$$\cos(\pi\mathfrak{A}) = L_1(\mathfrak{A}) - L_2(\mathfrak{A}) - L_3(\mathfrak{A}) = \frac{1}{3}(2\mathfrak{A}^2 - 5\mathfrak{E}) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -10 & 1 & 2 \\ -10 & 4 & -1 \end{pmatrix};$$

$$\cos^2(\pi\mathfrak{A}) = \mathfrak{E}.$$

Для всегда сходящихся степенных рядов, соответствующих таким функциям, как $\cos x$, $\sin x$, e^x , $\operatorname{ch} x$, $\operatorname{sh} x$ и т. д., можно просто составить матричные ряды для функций $\cos \mathfrak{A}$, $\sin \mathfrak{A}$, $e^{\mathfrak{A}}$, $\operatorname{ch} \mathfrak{A}$, $\operatorname{sh} \mathfrak{A}$ и т. д. согласно (20.15), если матрица \mathfrak{A} имеет различные характеристические числа. Сходимость геометрического ряда

$$\sum_{r=0}^{\infty} \mathfrak{A}^r = \left(\frac{1}{1-x} \right)_{x=\mathfrak{A}} = \frac{1}{1-\mathfrak{A}} \left(\text{или } \frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{E}-\mathfrak{A}}, \text{ или } (\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^{-1} \right)$$

имеет место в том случае, если все числа λ_j различны и по модулю меньше единицы. Сходимость ряда при наличии кратных λ_j , модули которых, однако, меньше 1, следует из теоремы п. 19.8.

20.3. Приближенные решения систем линейных уравнений.

Системам линейных уравнений и приближенным методам их решения посвящено большое количество работ, в которых с успехом используются матрицы и характеристические числа. Здесь будут даны лишь несколько оценок применимости характеристических чисел и матриц к системам уравнений.

1. Систему уравнений

$$\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = r_j, \quad j = 1, 2, \dots, n,$$

можно коротко записать в матричном виде, согласно п. 17.1, как

$$\mathfrak{A}x = r. \quad (20.16)$$

Пусть y — приближенное значение вектора x , а матрица \mathfrak{A} вследствие ошибок округления преобразуется в матрицу $\mathfrak{A} + \mathfrak{B}$. Если образовать выражение $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})y$, то справа к вектору r добавится вектор ошибки f :

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})y = r + f. \quad (20.17)$$

Возникает задача оценки этой ошибки $y - x$ по известным величинам \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , y , r , f .

Вычитанием (20.16) из (20.17) получаем

$$(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})(y - x) = f - \mathfrak{B}x.$$

Согласно (18.27) можно дать оценку

$$|y - x| \leq \frac{|f - \mathfrak{B}x|}{|\mathfrak{A} + \mathfrak{B}|},$$

а из (20.16)

$$|\mathfrak{B}x| \leq |\mathfrak{B}| |x| \leq \frac{|\mathfrak{B}| |r|}{|\mathfrak{A}|}$$

При использовании (18.29) имеет место¹⁾

Теорема. Если для линейной системы уравнений $\mathfrak{A}x = r$ известно решение «близкой системы» $(\mathfrak{A} + \mathfrak{B})y = r + f$, то модуль вектора разности может быть оценен следующим образом:

$$|y - x| \leq \frac{|f| + |r| \cdot \frac{|\mathfrak{B}|}{|\mathfrak{A}|}}{|\mathfrak{A}| - |\mathfrak{B}|}; \quad (20.18)$$

предполагается, что знаменатель положителен.

При $\mathfrak{B} = 0$ будет

$$|y - x| \leq \frac{|f|}{|\mathfrak{A}|}. \quad (20.19)$$

2. Для приближенного решения системы линейных уравнений (20.16) с преобладающими элементами главной диагонали $a_{jj} \neq 0$ часто используется итерационный метод. Заменяем в матрице \mathfrak{A} нулями сначала элементы a_{jk} с $j < k$, затем a_{jk} с $j \geq k$, тогда получим две матрицы \mathfrak{B} и \mathfrak{C} :

$$\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{C} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ 0 & 0 & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (20.20)$$

Вследствие $a_{jj} \neq 0 \det \mathfrak{B} \neq 0$, т. е. \mathfrak{B} не вырождена.

¹⁾ Н. Wittmeyer, Z. angew. Math. Mech. 18 (1938).

В названном итерационном методе определяют последовательность приближенных векторов $\mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \dots, \mathfrak{x}^{(v)}, \dots$ исходя из некоторого произвольно выбранного вектора $\mathfrak{x}^{(0)}$ по правилу

$$\mathfrak{B}\mathfrak{x}^{(v+1)} + \mathfrak{C}\mathfrak{x}^{(v)} = \mathfrak{r}, \quad v = 0, 1, 2, \dots \quad (20.21)$$

Для исследования сходимости этого метода вводятся векторыращения $\mathfrak{z}^{(v)}$:

$$\mathfrak{z}^{(v)} = \mathfrak{x}^{(v+1)} - \mathfrak{x}^{(v)}.$$

Они удовлетворяют уравнению

$$\mathfrak{B}\mathfrak{z}^{(v+1)} + \mathfrak{C}\mathfrak{z}^{(v)} = 0$$

или, с введением $\mathfrak{D} = -\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C}$,

$$\mathfrak{z}^{(v+1)} = \mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(v)} = \mathfrak{D}^2\mathfrak{z}^{(v-1)} = \dots = \mathfrak{D}^{v+1}\mathfrak{z}^{(0)}.$$

Теперь рассмотрим ряд

$$\mathfrak{x}^{(0)} + \mathfrak{z}^{(0)} + \mathfrak{z}^{(1)} + \mathfrak{z}^{(2)} + \dots = \mathfrak{x}^{(0)} + \mathfrak{z}^{(0)} + \mathfrak{D}\mathfrak{z}^{(0)} + \mathfrak{D}^2\mathfrak{z}^{(0)} + \dots,$$

частные суммы которого суть непосредственно приближенные решения $\mathfrak{x}^{(0)}, \mathfrak{x}^{(1)}, \mathfrak{x}^{(2)}, \dots$

Согласно второй теореме п. 19.8 ряд сходится для произвольного вектора $\mathfrak{z}^{(0)}$ в том случае, если все характеристические числа κ_q матрицы \mathfrak{D} , а следовательно, корни уравнения

$$\det(\mathfrak{D} - \kappa\mathfrak{E}) = \det(-\mathfrak{B}^{-1}\mathfrak{C} - \kappa\mathfrak{E}) = \det(-\mathfrak{B}^{-1}) \det(\kappa\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = 0,$$

по модулю меньше 1.

Пусть $\mathfrak{z}^{(0)}$ и $\mathfrak{x}^{(0)}$ связаны друг с другом соотношением $\mathfrak{B}\mathfrak{z}^{(0)} + \mathfrak{A}\mathfrak{x}^{(0)} = \mathfrak{r}$, так что при невырожденной матрице \mathfrak{A} каждому $\mathfrak{z}^{(0)}$ соответствует определенный вектор $\mathfrak{x}^{(0)}$. Тогда справедлива следующая

Теорема. Пусть \mathfrak{A} — невырожденная матрица, у которой элементы главной диагонали не все равны нулю. Итерационный метод (20.20), (20.21), дающий приближенное решение линейной системы (20.16), сходится для произвольного начального вектора $\mathfrak{x}^{(0)}$ только тогда, когда все корни уравнения κ

$$\det(\kappa\mathfrak{B} + \mathfrak{C}) = \begin{vmatrix} \kappa a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \kappa a_{21} & \kappa a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \kappa a_{n1} & \kappa a_{n2} & \kappa a_{n3} & \dots & \kappa a_{nn} \end{vmatrix} = 0 \quad (20.22)$$

по модулю меньше единицы.

Если \mathfrak{A} предполагается действительной и симметричной, то можно дать другие критерии сходимости; имеется обширная литература¹⁾.

¹⁾ R. v. Mises u. H. Pollaczek-Geiringer, Praktische Verfahren der Gleichungsauflösung, Z. angew. Math. Mech. 9 (1929), 58—77, 152—164.

20.4. Оценки характеристических чисел матриц.

А. Пусть характеристическому числу κ матрицы \mathfrak{A} принадлежит собственный вектор ξ с компонентами x_1, x_2, \dots, x_n . Среди них имеется одно, наибольшее по модулю, например m -е: $|x_m| \geq |x_j|$, для $j=1, \dots, n$. В m -м уравнении, соответствующем этой компоненте,

$$(\kappa - a_{mm}) x_m = \sum'_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n a_{mk} x_k$$

(здесь штрих обозначает исключение из суммы члена с индексом $k=m$) можно построить оценки:

$$|\kappa - a_{mm}| |x_m| \leq \sum'_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n |a_{mk}| |x_k| \leq \sum'_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n |a_{mk}| |x_m|.$$

Так как $x_m \neq 0$, то можно разделить обе части неравенства на $|x_m|$. Левая часть оценивается снизу, причем имеется две возможности:

$$\left. \begin{array}{l} |\kappa| - |a_{mm}| \\ |a_{mm}| - |\kappa| \end{array} \right\} \leq |\kappa - a_{mm}| \leq \sum'_{\substack{k=1 \\ k \neq m}}^n |a_{mk}|.$$

Так как неизвестно, какое значение имеет m , нужно выбрать наиболее неблагоприятный случай; тогда получаются оценки:

$$|\kappa| \leq \max_m \sum'_{k=1}^n |a_{mk}|, \quad (20.23)$$

$$|\kappa| \geq \min_m \left(|a_{mm}| - \sum'_{k=1}^n |a_{mk}| \right). \quad (20.24)$$

Поскольку матрица \mathfrak{A} и транспонированная матрица \mathfrak{A}' имеют одинаковые характеристические числа, можно в этих формулах заменить a_{mk} на a_{km} .

Б. Другая оценка связана с неравенством (18.25):

$$|\kappa_{\mathfrak{A}}| \leq \kappa_{\max}^{\mathfrak{A}} = \sqrt{|\mathfrak{A}|}.$$

При этом согласно (18.23) $\kappa_{\mathfrak{A}} = +\sqrt{\kappa_{(\mathfrak{A}'\mathfrak{A})}}$. Матрица $\mathfrak{B} = \mathfrak{A}'\mathfrak{A}$, согласно п. 18.3, положительно определенная или, в случае вырожденной матрицы \mathfrak{A} , положительно полуопределенная. В первом случае все $\kappa_{j\mathfrak{B}} > 0$, во втором случае $\kappa_{j\mathfrak{B}} \geq 0$. Назовем теперь «следом» некоторой матрицы $\mathfrak{B} = (b_{jk})$ сумму элементов главной диагонали

$$s_{\mathfrak{B}} = \sum_{j=1}^n b_{jj}. \quad (20.25)$$

В характеристическом уравнении

$$\varphi(\kappa) = \prod_{j=1}^n (\kappa_{j\mathfrak{B}} - \kappa) = \begin{vmatrix} b_{11} - \kappa & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} - \kappa & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} - \kappa \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^n [\kappa^n - s_{\mathfrak{B}} \kappa^{n-1}] + \dots + \det \mathfrak{B} = 0 \quad (20.26)$$

след является множителем при κ^{n-1} , так что по теореме Виета

$$s_{\mathfrak{B}} = \sum_{j=1}^n b_{jj} = \sum_{j=1}^n \kappa_{j\mathfrak{B}}, \quad \det \mathfrak{B} = \prod_{j=1}^n \kappa_{j\mathfrak{B}}. \quad (20.27)$$

В данном случае элементами главной диагонали матрицы $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{U}}\mathfrak{U}$ являются числа

$$b_{kk} = \bar{a}_{1k}a_{1k} + \bar{a}_{2k}a_{2k} + \dots + \bar{a}_{nk}a_{nk}$$

и след равен

$$s_{\mathfrak{B}} = \sum_{j, k=1}^n \bar{a}_{jk}a_{jk} = \sum_{j, k=1}^n |a_{jk}|^2. \quad (20.28)$$

Для эрмитовой матрицы, следовательно, имеет место, согласно (18.24), соотношение

$$\sum_{j=1}^n \kappa_j = \sum_{j=1}^n a_{jj}, \quad \sum_{j=1}^n \kappa_j^2 = \sum_{j, k=1}^n |a_{jk}|^2 \quad (20.29)$$

и для произвольной матрицы \mathfrak{U}

$$|\kappa_{j\mathfrak{U}}| \leq |\overline{\mathfrak{U}}| = \sqrt{\kappa_{\mathfrak{B}\max}} \leq \sqrt{\sum_{j=1}^n \kappa_{j\mathfrak{B}}} = \sqrt{s_{\mathfrak{B}}}.$$

Таким образом,

$$|\kappa_{\mathfrak{U}}| \leq |\overline{\mathfrak{U}}| \leq \sqrt{\sum_{j, k=1}^n |a_{jk}|^2}. \quad (20.30)$$

В. Выведенная Эрхардом Шмидтом оценка использует разложение матрицы \mathfrak{U} на диагональную \mathfrak{D} и остаточную \mathfrak{B} :

$$\mathfrak{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & 0 & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно (18.25) и (18.26), имеют место соотношения

$$|\mathfrak{D}| - |\mathfrak{B}| \leq |\mathfrak{U}| \leq |\kappa_{\mathfrak{U}}| \leq |\overline{\mathfrak{U}}| \leq |\mathfrak{D}| + |\mathfrak{B}|.$$

Диагональная матрица \mathfrak{D} имеет, очевидно, характеристические числа a_{jj} . Тогда

$$|\overline{\mathfrak{D}}| = |a_{jj}|_{\max}, \quad |\underline{\mathfrak{D}}| = |a_{jj}|_{\min}$$

и согласно (20.30)

$$|\mathfrak{B}| \leq \sqrt{\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}|^2},$$

причем штрих у знака суммы вновь обозначает исключение члена с $j = k$.

Таким образом,

$$\left. \begin{aligned} |\kappa_{\mathfrak{A}}| &\leq |\overline{\mathfrak{A}}| \leq \max_q |a_{qq}| + \sqrt{\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}|^2}, \\ |\kappa_{\mathfrak{A}}| &\geq |\underline{\mathfrak{A}}| \geq \min_q |a_{qq}| + \sqrt{\sum_{\substack{j, k=1 \\ j \neq k}}^n |a_{jk}|^2}. \end{aligned} \right\} \quad (20.31)$$

Г. Можно также оценить отдельно мнимую и действительную части характеристического числа.

Из равенства $\mathfrak{A}\bar{x} = \kappa\bar{x}$ следует

$$\bar{x}'\mathfrak{A}'\bar{x} = \kappa\bar{x}'\bar{x}, \quad (20.32)$$

а из $\bar{\mathfrak{A}}\bar{x} = \bar{\kappa}\bar{x}$ получается

$$\bar{x}'\bar{\mathfrak{A}}'\bar{x} = \bar{\kappa}\bar{x}'\bar{x} \quad (20.33)$$

при переходе к транспонированным величинам в

$$\bar{x}'\bar{\mathfrak{A}}'\bar{x} = \bar{\kappa}\bar{x}'\bar{x}.$$

Если положить

$$\kappa = \alpha + i\beta,$$

где α и β — действительные числа, то сложением (соответственно вычитанием) (20.32) и (20.33) получим

$$\left. \begin{aligned} \bar{x}'\mathfrak{H}\bar{x} &= \alpha\bar{x}'\bar{x}, \\ \bar{x}'\mathfrak{S}\bar{x} &= \beta\bar{x}'\bar{x}, \end{aligned} \right\} \quad \text{где} \quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{H} &= \frac{1}{2}(\mathfrak{A} + \bar{\mathfrak{A}}'), \\ \mathfrak{S} &= \frac{1}{2i}(\mathfrak{A} - \bar{\mathfrak{A}}'). \end{aligned} \right.$$

При этом $\mathfrak{A} = \mathfrak{H} + i\mathfrak{S}$ представляется как сумма эрмитовой матрицы \mathfrak{H} и антиэрмитовой матрицы $i\mathfrak{S}$; \mathfrak{S} снова оказывается эрмитовой. Из (18.21) непосредственно следуют оценки:

$$\kappa_{\mathfrak{H}\min} \leq \alpha \leq \kappa_{\mathfrak{H}\max}, \quad \kappa_{\mathfrak{S}\min} \leq \beta \leq \kappa_{\mathfrak{S}\max}.$$

Возьмем в качестве простого примера матрицу

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Эрмитова составляющая \mathfrak{A} будет

$$\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

а антиэрмитова

$$i\mathfrak{S} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для этих матриц $\kappa_{\mathfrak{S}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $\kappa_{\mathfrak{S}} = \pm 2$, откуда для $\kappa_{\mathfrak{A}} = \alpha + i\beta$ получаем

$$2 \leq \alpha \leq 3, \quad -2 \leq \beta \leq 2.$$

В этом прямоугольнике плоскости (α, β) лежат характеристические числа матрицы \mathfrak{A} (рис. 20.1):

$$\kappa_{\mathfrak{A}} = \frac{1}{2}(5 \pm i\sqrt{15}).$$

Д. Хорошая оценка снизу модуля характеристического числа матрицы простыми средствами без использования значения определителя матрицы \mathfrak{A} вряд ли возможна, так как при $\mathfrak{A} = 0$ имеется также характеристическое число $\kappa = 0$. Пусть теперь $\det \mathfrak{A} \neq 0$. Если образовать снова соответствующую матрицу $\mathfrak{B} = \overline{\mathfrak{A}}' \mathfrak{A}$, то все $\kappa_{j\mathfrak{B}}$ будут положительны, и согласно (20.27) имеет место соотношение

$$\det \mathfrak{B} = |\det \mathfrak{A}|^2 = \prod_{j=1}^n \kappa_{j\mathfrak{B}}. \quad (20.34)$$

Среднее геометрическое положительных чисел не больше среднего их арифметического

$$\begin{aligned} \sqrt[n-1]{\kappa_{2\mathfrak{B}} \cdot \kappa_{3\mathfrak{B}} \dots \kappa_{n\mathfrak{B}}} &\leq \frac{1}{n-1} (\kappa_{2\mathfrak{B}} + \kappa_{3\mathfrak{B}} + \dots + \kappa_{n\mathfrak{B}}) = \\ &= \frac{1}{n-1} (s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}}), \end{aligned}$$

следовательно,

$$|\det \mathfrak{A}|^2 \leq \kappa_{1\mathfrak{B}} \left(\frac{s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}}}{n-1} \right)^{n-1}. \quad (20.35)$$

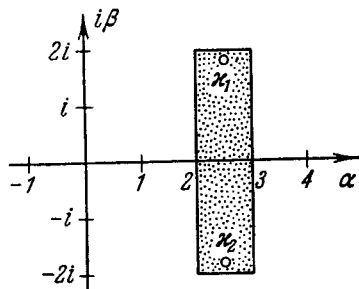


Рис. 20.1. Оценка вещественной и мнимой частей характеристического числа.

Более грубая оценка $s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}} \leq s_{\mathfrak{B}}$ дает¹⁾

$$|\kappa_{\mathfrak{A}}|_{\min} \geq |\mathfrak{A}| = \sqrt{\kappa_{\mathfrak{A}}|_{\min}} \geq |\det \mathfrak{A}| \cdot \left(\frac{n-1}{s_{\mathfrak{B}}}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \quad (20.36)$$

Несколько более точную оценку можно дать с помощью биномиального разложения, так как $s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}}$ и $\kappa_{1\mathfrak{B}}$ неотрицательны:

$$s_{\mathfrak{B}}^n = (s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}} + \kappa_{1\mathfrak{B}})^n \geq (s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}})^n + n(s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}})^{n-1} \kappa_{1\mathfrak{B}};$$

следовательно, согласно (20.35),

$$s_{\mathfrak{B}}^n - (s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}})^n \geq n(s_{\mathfrak{B}} - \kappa_{1\mathfrak{B}})^{n-1} \kappa_{1\mathfrak{B}} \geq n(n-1)^{n-1} |\det \mathfrak{A}|^2,$$

и, решая это неравенство относительно $\kappa_{1\mathfrak{B}}$, получаем

$$|\kappa_{\mathfrak{B}}|_{\min}^2 \geq |\mathfrak{A}|^2 = |\mathfrak{B}| \geq s_{\mathfrak{B}} - \sqrt{\frac{n}{s_{\mathfrak{B}}^n - n(n-1)^{n-1} \det \mathfrak{B}}}. \quad (20.37)$$

Эта оценка имеет место для любой положительно определенной эрмитовой матрицы \mathfrak{B} и любой матрицы \mathfrak{A} , если $s_{\mathfrak{B}}$ и $\det \mathfrak{B}$, согласно (20.28) и (20.34), выражены через элементы \mathfrak{A} . При неэрмитовых матрицах \mathfrak{A} увеличение вычислительных затрат не окупается большей частью увеличением точности по сравнению с (20.36).

Таблица IX показывает на многих примерах, что средн различных оценок, полученных в этом пункте, иногда оказываются подходящими одни, иногда — другие.

20.7. Особые методы получения характеристического уравнения. Уравнение Кэли (20.6) также используется для построения метода составления²⁾ характеристического уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ матрицы \mathfrak{A} ; исходя из произвольного начального вектора, образуем, согласно (19.3), последовательность итераций $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \dots, \delta_n$; тогда из (20.5) после умножения на δ_0 справа следует

$$a_{00}\delta_0 + a_{11}\delta_1 + \dots + a_{nn}\delta_n = 0.$$

Это векторное уравнение с n компонентами представляет собой при известном δ_0 систему уравнений для n отношений $\frac{a_0}{a_n}, \frac{a_1}{a_n}, \dots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$. Видоизменение этого метода было предложено Хессенбергом³⁾.

Метод последовательного повышения порядка. Описанным ниже методом можно составить характеристическое уравнение симметричной матрицы \mathfrak{A} n -го порядка, если для подматрицы $(n-1)$ -го порядка

$$\mathfrak{A}' = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1, n-1} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n-1, 1} & \dots & a_{n-1, n-1} \end{pmatrix}$$

¹⁾ Оценки до (20.37) были получены в диссертации Н. Wittmeуer, *Einfluß der Änderung einer Matrix...*, Darmstadt, 1934.

²⁾ R. A. Frazer, W. J. Duncan, A. R. Collar, *Elementary Matrices*, London, 1946. [Р. Фрезер, В. Дункан, А. Коллар, Теория матриц и ее приложения к дифференциальным уравнениям и динамике, ИИЛ, М., 1950.]

³⁾ K. Hessenberg, *Auflösung linearer Eigenwertaufgaben mit der Hilfe der Hamilton-Cayleyschen Gleichung*, Diss., Darmstadt, 1941. Метод реферирован в работе L. Collatz, *Grafische und Numerische Verfahren*, Fiat Review, 1948, *Angewandte Math.*, I.

известны все характеристические числа $\tilde{\kappa}_1, \tilde{\kappa}_2, \dots, \tilde{\kappa}_{n-1}$ с принадлежащими им собственными векторами. При введении вектора $\alpha' = (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{n, n-1})$ характеристическое уравнение для матрицы \mathfrak{A} имеет вид ¹⁾

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{(a' \tilde{\xi}_j)^2}{\tilde{\xi}'_j \tilde{\xi}_j} \cdot \frac{1}{(\tilde{\kappa}_j - \kappa)} = a_{nn} - \kappa. \quad (20.38)$$

Эта форма уравнения часто бывает удобна при итерационных методах нахождения κ .

При описанном здесь методе образуют характеристические числа и собственные векторы, например, для матрицы второго порядка $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$; затем можно перейти к матрице третьего порядка и для нее согласно (20.38) определить характеристические числа и из решения однородной системы уравнений — относящиеся к ним собственные векторы и т. д., чтобы путем последовательного повышения порядка матрицы подойти к заданной матрице. Рассмотрим для пояснения метода один простой пример:

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 9 \\ 10 & 12 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\mathfrak{A}} = \begin{pmatrix} 14 & 10 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\kappa}_{1,2} = 13 \pm \sqrt{101} = \begin{cases} 23,0499, \\ 2,9501. \end{cases}$$

$$\tilde{\xi}'_1 = (1; 0,90499), \quad \tilde{\xi}'_2 = (1; -1,10499), \quad \alpha' = (9; 4),$$

$$\alpha' \tilde{\xi}'_1 = 12,6200, \quad \alpha' \tilde{\xi}'_2 = 4,5800;$$

уравнение (20.38) тогда имеет вид

$$f(\kappa) = \frac{87,555}{23,050 - \kappa} + \frac{9,447}{2,9501 - \kappa} + \kappa - 3 = 0.$$

Процесс решения этого уравнения по методу Ньютона иллюстрируется легко обозримой схемой, причем приближенные значения могут быть получены с помощью логарифмической линейки.

κ	27	26,79	4,5	-2,3
$\kappa - 3$	24	23,79	1,5	-5,3
$87,555 : (23,050 - \kappa)$	-22,2	-23,410	4,720	3,454
$9,4447 : (2,9501 - \kappa)$	-0,39	-0,396	-6,094	1,799
$f(\kappa) = \text{сумме}$	1,4	-0,016	0,126	-0,047
$87,555 : (23,050 - \kappa)^2$	5,62	6,26	0,25	0,14
$9,4447 : (2,9501 - \kappa)^2$	0,02	0,02	3,94	0,34
$f'(\kappa) = \text{сумме} + 1$	6,64	7,28	5,19	1,48
уточнение $= -f(\kappa) : f'(\kappa)$	-0,21	+0,002	-0,024	0,032
новое значение	26,79	26,792	4,476	-2,268
		$= \kappa_1$	$= \kappa_2$	$= \kappa_3$

¹⁾ Доказательство и пример матрицы 12-го порядка, элементы которой суть 5—6-разрядные числа, даны в работах J. Morris and J. W. Head, On an «Escalator» Method for the Numerical Solution of Lagrangian Frequency Equations, Aircraft Engineering, Nov. 1942; Coupled Flexural Vibrations of the Blades of a Propeller and Torsional Vibration of an Engine Crankshaft System, Reports and Memoranda № 2011 (6348), Aeronautical Research Council, 1942.

20.6. Упражнения. 1. Показать, что все характеристические числа κ унитарной матрицы \mathfrak{A} равны по модулю 1.

Решение. Из $\mathfrak{A}\bar{x} = \kappa\bar{x}$ следует $\overline{\mathfrak{A}\bar{x}} = \overline{\kappa\bar{x}}$ и $\bar{x}'\overline{\mathfrak{A}'} = \overline{\kappa\bar{x}'}$. Вследствие $\overline{\mathfrak{A}'\mathfrak{A}} = \mathfrak{E}$ получаем

$$\bar{x}'\overline{\mathfrak{A}'}\mathfrak{A}\bar{x} = \bar{x}'\bar{x} = \overline{\kappa\bar{x}'}\kappa\bar{x}.$$

Таким образом, как утверждалось, $\overline{\kappa\kappa} = 1$.

2. Пусть на защемленной на одном конце балке с жесткостью на изгиб EJ

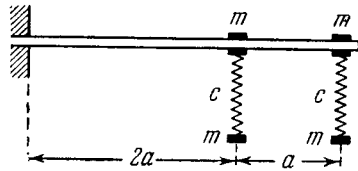


Рис. 20.2. Колебания системы «балка — массы — пружины».

(собственной массой балки можно пренебречь) на расстоянии $2a$ и $3a$ от конца закреплены две массы, связанные пружинами (c — коэффициенты жесткости) с двумя другими массами m (рис. 20.2). Требуется найти собственные частоты. Пусть

$$c = \frac{1}{A} \cdot \frac{3EJ}{a^3}.$$

Решение. Составим сначала в соответствии с п. 17.7Д матрицу коэффициентов связи \mathfrak{F} . Получим

$$\mathfrak{F} = A \begin{pmatrix} 8 & 14 \\ 14 & 27 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{F}^{-1} = \frac{1}{20A} \begin{pmatrix} 27 & -14 \\ -14 & 8 \end{pmatrix},$$

следовательно,

$$\mathfrak{A}^* = \frac{1}{20A} \begin{pmatrix} 47 & -14 & -20 & 0 \\ -14 & 28 & 0 & -20 \\ -20 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из диагональных элементов число 20; тогда получим задачу

$$\mathfrak{G}y = \kappa y, \quad \text{где } \mathfrak{G} = 20(A\mathfrak{A}^* - \mathfrak{E}) \text{ и } \kappa = 20(\omega^2 mA - 1).$$

Характеристическое уравнение для \mathfrak{G}

$$\begin{vmatrix} 27 - \kappa & -14 & -20 & 0 \\ -14 & 8 - \kappa & 0 & -20 \\ -20 & 0 & -\kappa & 0 \\ 0 & -20 & 0 & -\kappa \end{vmatrix} = \kappa^2 \begin{vmatrix} \kappa - \frac{400}{\kappa} & -27 & 14 \\ 14 & \kappa - \frac{400}{\kappa} & -8 \end{vmatrix} = 0$$

можно путем замены $\kappa - \frac{400}{\kappa} = z$ перевести в квадратное уравнение для z , решения которого будут

$$z = \frac{1}{2}(35 \pm \sqrt{1145}), \quad \kappa = \frac{1}{2}(z \pm \sqrt{1600 + z^2}).$$

В таблице, приведенной ниже, даны найденные значения κ_j и принадлежащие им собственные решения y_j ; вид соответствующих собственных колебаний изображен на рис. 20.3.

j	z_j	κ_j	$\kappa_j + 20 =$ $= 20A_m \omega^2$	y_1	$y_2 = \frac{27 - z_j}{14}$	$y_3 = -\frac{20}{\kappa_j} y_1$	$y_4 = -\frac{20}{\kappa_j} y_2$
1	0,58108	-19,7116	0,2884	1	1,8871	1,0146	1,9147
2	34,4189	-9,175	10,825	1	-0,530	2,180	-1,155
3	$= z_1$	20,293	40,293	1	1,8871	-0,986	-1,860
4	$= z_2$	43,594	63,594	1	-0,530	-0,459	0,243

3. Назовем распределением чисел на многограннике такое упорядочение чисел u_1, u_2, \dots, u_l в вершинах P_1, P_2, \dots, P_l , что для каждой вершины P_j v -кратное числа u_j , соответствующего вершине, равно сумме чисел, сопоставляемых соседним вершинам. Число v называется тогда характеристическим числом многогранника, а все возможные числа v образуют «спектр» многогранника (см. также задачу 5 п. 23.6). v есть характеристическое число матрицы $\mathfrak{A} = (a_{jk})$, сопоставляемой многограннику, такой, что ее элементы a_{jk} равны 0 или 1 в зависимости от того, имеют вершины P_j и P_k общее ребро или нет; $a_{jj} = 0$.

Вычислим спектр кубооктаэдра¹⁾, т. е. такого многогранника, который получается соединением середин 12 ребер куба (рис. 20.4).

Результат. Соответственно 12 углам октаэдра получают матрицу \mathfrak{A} 12-го порядка, характеристическое уравнение которой можно получить непосредственным вычислением

$$\begin{aligned} \varphi(v) = \det(\mathfrak{A} - v\mathfrak{E}) = & v^{12} - 24v^{10} - 16v^9 + \\ & + 192v^8 + 192v^7 - 640v^6 - 768v^5 + \\ & + 768v^4 + 1024v^3 = (v-4)(v-2)^3 v^3 (v+2)^5. \end{aligned}$$

Тот, кто обладает хорошим пространственным воображением, может представить себе 12 распределений чисел непосредственно из рисунка и получить полином без составления матрицы и раскрытия определителя. В результате:

$v = 4$. Все вершины имеют одно и то же число $u_j = \text{const}$, например $u_j = 1$ (см. рис. 20.4, а).

$v = 2$. Плоскость ε , проведенная по середине между двумя параллельными гранями куба, рассекает кубооктаэдр в «квадрате среднего сечения» (см. рис. 20.4, б). Вершины многогранника располагаются в четырех точках P квадрата среднего сечения и по четыре точки Q и R в двух квадратных гранях. Положим в точках P число u равным 0, в точках Q $u = 1$ и $u = -1$ в точках R , тогда получим распределение чисел, соответствующее $v = 2$.

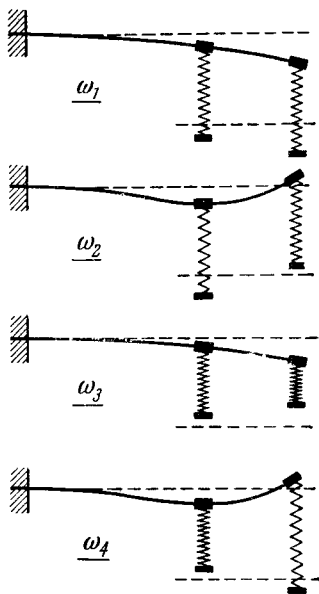


Рис. 20.3. Форма собственных колебаний системы, изображенной на рис. 20.2.

¹⁾ Пример У. Sinogowitz'a к нашей совместной работе о спектрах графов.

Так как имеется три квадрата среднего сечения, существуют три линейно независимых распределения чисел; следовательно, $\nu = 2$ — характеристическое число кратности 3.

$\nu = 0$. Пусть два угла квадрата среднего сечения, противоположных друг другу, получают число $+1$, два других — значение -1 , остальные восемь вершин многогранника — число 0 (см. рис. 20.4, в). В этом случае также имеются три таких распределения.

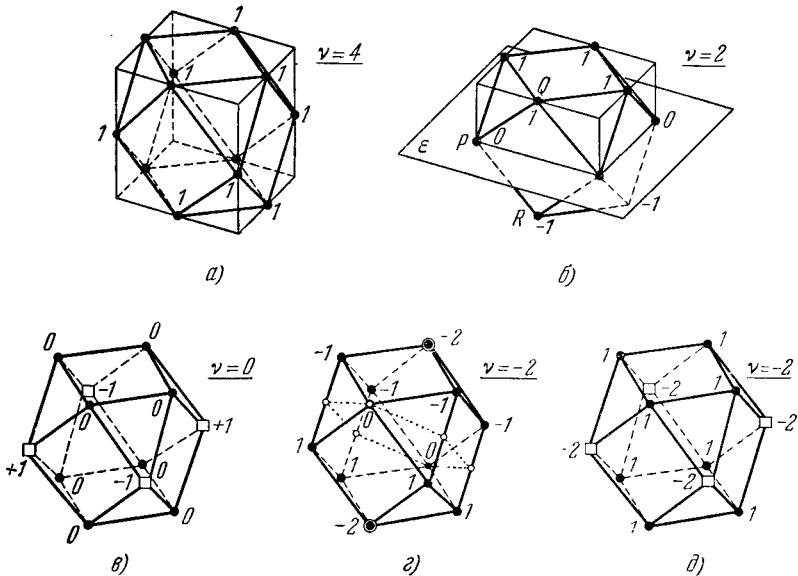


Рис. 20.4. Спектр кубоктаэдра.

$\nu = -2$. Проведенная через две противоположные вершины плоскость симметрии образует при пересечении с октаэдром шестиугольник, нанесенный на рис. 20.4, г пунктиром. В обеих этих вершинах положим $u = 0$, в восьми соседних ± 1 , в двух оставшихся ± 2 (см. рис. 20.4, г). В данном случае имеются также три линейно независимых распределения.

$\nu = -2$. Пусть теперь углы квадрата среднего сечения получают значение -2 , а все остальные восемь вершин многогранника — значение 1 (см. рис. 20.4, д). Если нарисовать распределение для трех квадратов среднего сечения, то нетрудно установить, что третье распределение является линейной комбинацией двух других. (Сумма трех распределений есть тождественный нуль.) Таким образом, $\nu = -2$ — характеристическое число, кратность которого равна пяти.

4. Проведем итерационный процесс п. 19.1 для матрицы с комплексными элементами

$$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 2 & 1-2i \\ 2-i & 1+2i & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Исходя из $\delta_0 = (1, 1, 1)$, далее получаем приведенные в таблице векторы δ_v . В пятой колонке даны результаты проверки с вектором сумм столбцов $\delta' = (6 - 2i; 4 + 3i; 4 - i)$ согласно п. 18.8.

v	δ'_v			Сумма компонент $\delta'_v = \delta' \delta_{v-1}$	$ \delta'_v ^2$	Ошибка $\frac{ \delta'_v }{ \delta_{v-1} }$ (%)
0	1	1	1	3	3	
1	$6 + 2i$	$4 - 3i$	$4 + i$	14	82	5,2281 (-11%)
2	$32 + 13i$	$22 - 17i$	$28 + 4i$	82	2766	5,80790 (-0,7%)
3	$187 + 80i$	$125 - 105i$	$161 + 25i$	473	94 565	5,84708 (-0,04%)

Характеристическое уравнение здесь имеет вид

$$\varphi(\kappa) = \det(\mathfrak{M} - \kappa \mathfrak{E}) = -\kappa^3 + 6\kappa^2 + \kappa - 11 = 0$$

и имеет корни

$$\kappa = \begin{cases} 5,84947, \\ 1,44865, \\ -1,29812. \end{cases}$$

Рис. 20.5 показывает, как на комплексной плоскости многоугольники (здесь треугольники), соответствующие собственным векторам, делают постепенно похожими друг на друга и приближаются к виду многоугольника, представляющего собственный вектор.

5. Сколько значений имеет корень квадратный \tilde{x} из матрицы второго порядка \mathfrak{M} ? Пусть задана

матрица $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Сколько

различных матриц $\tilde{x} = \begin{pmatrix} e & f \\ y & h \end{pmatrix}$ удовлетворяют равенству $\tilde{x}^2 = \mathfrak{M}$?

Решение. Из $e^2 + fg = a$, $f(e+h) = b$, $g(e+h) = c$, $h^2 + fg = d$ исключением f, g, h получаем уравнение 4-й степени для e , в котором e^4 имеет коэффициент $A = (a-d)^2 + 4bc$. В случае $A \neq 0$ имеются, вообще говоря, четыре различные матрицы \tilde{x} , например, для матрицы $\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} 7 & -1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ получается $\tilde{x} = \pm \frac{1}{\sqrt{17}} \begin{pmatrix} 11 & -1 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$

и $\tilde{x}_{3,4} = \pm \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$,

Мы здесь откажемся от полного (легко проводимого) обсуждения различных возможностей и отметим еще только, что для матрицы $\mathfrak{M} = \pm \mathfrak{E}$ существует бесконечно много решений.

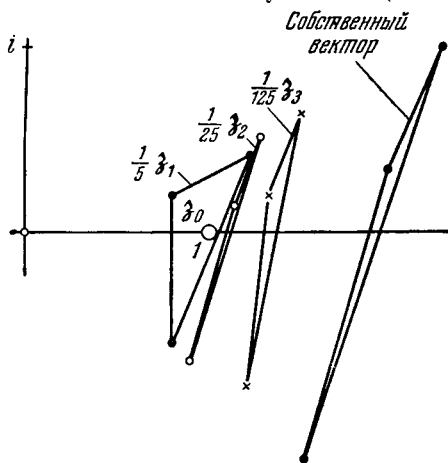


Рис. 20.5. Сходимость итерационного метода для комплексной матрицы.

Рис. 20.5. Сходимость итерационного метода для комплексной матрицы.

Для $\mathfrak{X} = \mathfrak{E}$ можно в $\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \sqrt{bc+1} & -b \\ c & -\sqrt{bc+1} \end{pmatrix}$, а для $\mathfrak{X} = -\mathfrak{E}$ в $\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} \sqrt{bc-1} & -b \\ c & -\sqrt{bc-1} \end{pmatrix}$ величины b и c выбирать произвольно.

6. Матрицу $\mathfrak{X} = (a_{jk})$ назовем «равностолбцовой», если все столбцы имеют постоянную сумму q

$$q = \sum_{j=1}^n a_{jk}.$$

В теории вероятностей¹⁾ особую роль играют «стохастические матрицы», т. е. матрицы с действительными неотрицательными элементами и постоянными суммами столбцов $q = 1$. Нижеследующие теоремы справедливы и для матриц с постоянными суммами строк.

Покажем: а) что сумма и произведение двух равностолбцовых матриц \mathfrak{X} и \mathfrak{Y} с суммами столбцов $q_{\mathfrak{X}}$, $q_{\mathfrak{Y}}$ суть снова равностолбцовые матрицы с суммами строк (в очевидных обозначениях)

$$q_{\mathfrak{X}+\mathfrak{Y}} = q_{\mathfrak{X}} + q_{\mathfrak{Y}}, \quad q_{\mathfrak{X}\cdot\mathfrak{Y}} = q_{\mathfrak{X}} \cdot q_{\mathfrak{Y}}$$

(равностолбцовые матрицы образуют «кольцо»); б) что для равностолбцовой матрицы q есть характеристическое число; в) что обратная к \mathfrak{X} матрица \mathfrak{X}^{-1} есть также равностолбцовая матрица, если \mathfrak{X} не вырождена. (Равностолбцовые невырожденные матрицы образуют неабелеву группу с умножением в качестве группового сложения. Группа имеет различные подгруппы, например, подгруппу матриц с рациональными элементами или матриц с определителем -1 и т. д.)

Доказательство. а) непосредственно вычисляется; б) соответствующий собственный вектор \mathfrak{X}' есть $\mathfrak{x}' = (1, 1, \dots, 1)$; в) матрица \mathfrak{X} удовлетворяет своему уравнению Кэли (20.5)

$$a_0 \mathfrak{E} + a_1 \mathfrak{X} + \dots + a_n \mathfrak{X}^n = 0,$$

причем предполагается

$$a_0 = \det \mathfrak{X} \neq 0.$$

Отсюда получаем

$$\mathfrak{X}^{-1} = -\frac{1}{a_0} (a_1 \mathfrak{E} + \dots + a_n \mathfrak{X}^{n-1}).$$

Согласно а) все матрицы правой стороны \mathfrak{E} , \mathfrak{X} , $\mathfrak{X}^2, \dots, \mathfrak{X}^{n-1}$, следовательно, и вся правая часть равностолбцовые, что и требовалось доказать; последнее можно пояснить также следующим образом²⁾: для вектора \mathfrak{x} , согласно б) имеет место равенство $q\mathfrak{x} = \mathfrak{X}\mathfrak{x}$ или $\mathfrak{X}^{-1}\mathfrak{x} = \frac{1}{q}\mathfrak{x}$, т. е. \mathfrak{X}^{-1} имеет постоянную сумму столбцов $1/q$.

¹⁾ Например, G. Schulz, Zur Theorie des Galtonschen Brettes, Z. f. Physik 92 (1936), 747—754; Grenzwertsätze für die Wahrscheinlichkeiten verketteter Ereignisse, Deutsche Math. I (1936), 665—669,

²⁾ Частное сообщение Г. Виланда.

МЕТОД КОНЕЧНЫХ РАЗНОСТЕЙ

§ 21. Метод конечных разностей первого приближения для обыкновенных дифференциальных уравнений

В методе конечных разностей используется замена всех дифференциальных соотношений разностными. Это возможно не только для задач на собственные значения, но и для любых задач, связанных с решением дифференциальных уравнений.

В п. 21.1 этот метод излагается в общих чертах, независимо от задач на собственные значения.

21.1. Описание метода конечных разностей. Интервал (a, b) , в котором требуется найти решение $y(x)$ какой-либо задачи для дифференциального уравнения, разбивают на n одинаковых частей длины h :

$$h = \frac{b-a}{n};$$

h называется шагом. Таким образом получают точки деления $x_i = a + ih$. Значение функции в точке деления отмечают индексом. Так, например, y_i есть значение $y(x)$ в точке x_i (см. рис. 21.1) и Y_i — приближенное значение величины y_i .

В методе конечных разностей рассматривают дифференциальное уравнение в точке $x = x_i$ и заменяют в ней определенным образом все дифференциальные соотношения разностными, таким образом получают систему линейных уравнений для определения приближенных значений Y_i .

Так, например, производную $y'(x_i)$ заменяют через

$$\frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} \tag{21.1}$$

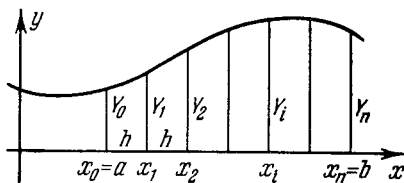


Рис. 21.1. К методу конечных разностей.

и вторую производную $y''(x_i)$ — через

$$\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2}. \quad (21.2)$$

Далее вводится оператор Δ для любой функции $f(x)$ по правилу

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x)$$

и оператор Δ^k

$$\Delta^k f(x) = \Delta(\Delta^{k-1} f(x)) = \Delta^{k-1} f(x+h) - \Delta^{k-1} f(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

$$(c \Delta^0 f(x) = f(x)).$$

Так, например,

$$\Delta Y_i = Y_{i+1} - Y_i, \quad \Delta^2 Y_i = Y_{i+2} - 2Y_{i+1} + Y_i,$$

$$\Delta Y_{i-1} = Y_i - Y_{i-1}, \quad \Delta Y_i + \Delta Y_{i-1} = Y_{i+1} - Y_{i-1}.$$

Тогда в общем случае можно дать следующее правило для замены производной $y^k(x_i)$ разностными отношениями:

Производную $y^k(x_i)$ четного порядка k можно заменить k -м разностным соотношением

$$\frac{1}{h^k} \Delta^k Y_{i - \frac{k}{2}}, \quad (21.3)$$

а производную $y^p(x)$ нечетного порядка p — средним арифметическим p -х разностных соотношений

$$\frac{1}{2} \frac{1}{h^p} \left(\Delta^p Y_{i - \frac{p+1}{2}} + \Delta^p Y_{i - \frac{p-1}{2}} \right). \quad (21.4)$$

Таким образом, дифференциальное уравнение в точке x_i можно заменить так называемым «разностным уравнением», т. е. уравнением для конечного числа приближенных значений Y_i . Начальные или краевые условия также заменяются разностными соотношениями. Например, для краевой задачи четного порядка k с k краевыми условиями, заданными в точках $x = a$ и $x = b$, в каждой точке деления x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) составляют разностное уравнение и каждому краевому условию соответствует во всяком случае одно разностное уравнение. Таким образом, получают $n + k + 1$ уравнений для такого же количества неизвестных

$$Y_{-\frac{k}{2}}, Y_{-\frac{k}{2}+1}, \dots, Y_{n+\frac{k}{2}}.$$

Эти уравнения линейны, если линейны дифференциальное уравнение и краевые условия, в противном случае получается нелинейная система уравнений.

О разрешимости этой системы уравнений при той степени общности, которая здесь принята, ничего сказать нельзя.

Дополнение. Часто можно применять еще и другие способы замены дифференциального соотношения разностным и получать, таким образом, различные разностные уравнения. Например, в выражении $(fy')'_{x=x_i}$ можно сначала произвести дифференцирование и использовать описанный здесь способ замены для каждой производной; тогда получилось бы выражение

$$f'_i \frac{Y_{i+1} - Y_{i-1}}{2h} + f_i \frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2};$$

или можно было сделать замену согласно (21.1) каждой из обеих производных. В этом случае получилось бы выражение

$$\frac{f_{i+1} \frac{Y_{i+2} - Y_i}{2h} - f_{i-1} \frac{Y_i - Y_{i-2}}{2h}}{2h}.$$

Третье выражение будет получено в п. 21.5. Уравнения, полученные различными способами, в общем случае отличаются друг от друга и приводят к различным результатам (см. задачу 7 в п. 23.6).

21.2. Пример для дифференциального уравнения второго порядка. В качестве примера мы рассмотрим продольный изгиб шарнирно опертого с обеих сторон стержня, жесткость которого на изгиб для правой половины равна J , а для левой равна $\frac{1}{2}J$. Уравнение изгиба

$$-y'' = \frac{P}{EJ(x)} y$$

путем введения безразмерных величин можно свести к следующей задаче на собственные значения:

$$\begin{cases} -y'' = \lambda g_0 y, \\ y(0) = y(1) = 0, \end{cases} \quad (21.5)$$

где g_0 есть функция, показанная на рис. 21.2,

$$g_0 = \begin{cases} 2, & 0 \leq x < \frac{1}{2}, \\ 1, & \frac{1}{2} < x \leq 1. \end{cases} \quad (21.6)$$

Тогда критическая нагрузка

$$P = \lambda_1 \frac{EJ}{l^2}.$$

В это выражение подлежащее вычислению собственное значение λ_1 входит вместо известного из формулы Эйлера множителя π^2 .

Будем производить вычисления с шагом $h = 1/3$. В силу краевых условий $Y_0 = Y_3 = 0$ получается только два неизвестных значения функций Y_1 и Y_2 (рис. 21.2).

Дифференциальному уравнению в точке $x = x_i$ соответствует теперь разностное уравнение

$$-\frac{Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1}}{h^2} = \Lambda g_0(x_i) Y_i$$

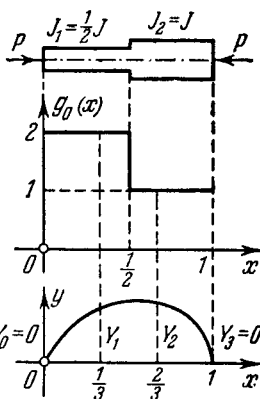


Рис. 21.2. Продольный изгиб стержня.

Вместо λ записано приближенное значение Λ . Если обозначить $\Lambda h^2 = \mu$, то уравнение перейдет в

$$Y_{i+1} - 2Y_i + Y_{i-1} + \mu g_0(x_i) Y_i = 0.$$

Положив теперь $i=1$ и $i=2$, с учетом краевых условий получим два линейных однородных уравнения:

$$\begin{aligned} Y_2 - 2Y_1 + \mu 2Y_1 &= 0, \\ -2Y_2 + Y_1 + \mu Y_2 &= 0. \end{aligned}$$

Эта система имеет нетривиальное решение, если определитель, составленный из ее коэффициентов, равен нулю

$$\begin{vmatrix} -2 + 2\mu & 1 \\ 1 & -2 + \mu \end{vmatrix} = 2\mu^2 - 6\mu + 3 = 0,$$

откуда следует $\mu = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{3}$, или

$$\Lambda = \frac{9}{2} (3 \pm \sqrt{3}) = \begin{cases} 5,7058 & (\text{ошибка} - 11\%), \\ 21,294 & (\text{ошибка} - 25\%). \end{cases}$$

Чтобы получить более точные значения, повторим вычисления с меньшим шагом $h = 1/5$ (рис. 21.3). В силу краевых условий $Y_0 = Y_5 = 0$. Разностные уравнения в этом случае будут

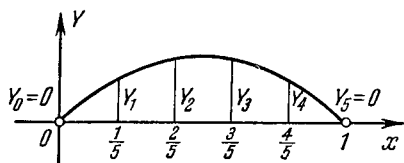


Рис. 21.3. Вычисления с меньшим шагом.

разить через Y_1 . Последнее уравнение дает тогда искомое алгебраическое уравнение для Λ

$$\begin{aligned} Y_2 &= Y_1 (2 - 2\mu), \\ Y_3 &= Y_1 (4\mu^2 - 8\mu + 3), \\ Y_4 &= Y_1 (-4\mu^3 + 16\mu^2 - 17\mu + 4), \\ Y_1 (4\mu^4 - 24\mu^3 + 45\mu^2 - 30\mu + 5) &= 0. \end{aligned}$$

Корнями этого уравнения 4-й степени будут

$$\mu_1 = 0,24605, \mu_2 = 1, \mu_3 = 1,62218, \mu_4 = 3,13177$$

и отсюда при $\Lambda = 25\mu$ найдем

$$\begin{aligned} \Lambda_1 &= 6,1513 & (\text{ошибка} - 4\%), & \Lambda_3 &= 40,55 & (\text{ошибка} - 31\%), \\ \Lambda_2 &= 25 & (\text{ошибка} - 12\%), & \Lambda_4 &= 78,29 & (\text{ошибка} - 30\%). \end{aligned}$$

Точное решение можно получить из трансцендентного уравнения

$$\sqrt{2} \operatorname{tg} z + \operatorname{tg}(z\sqrt{2}) = 0, \text{ при } \lambda = 4z^2.$$

Первыми четырьмя корнями этого уравнения будут

$$\begin{aligned} z_1 &= 1,2657, & z_3 &= 3,833, \\ z_2 &= 4,6663, & z_4 &= 5,263, \end{aligned}$$

откуда

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 6,4075, & \lambda_3 &= 58,78, \\ \lambda_2 &= 28,437, & \lambda_4 &= 110,8. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_2 - 2Y_1 + 2\mu Y_1 &= 0, \\ Y_3 - 2Y_2 + Y_1 + 2\mu Y_2 &= 0, \\ Y_4 - 2Y_3 + Y_2 + \mu Y_3 &= 0, \\ -2Y_4 + Y_3 + \mu Y_4 &= 0, \end{aligned}$$

где опять положено $\Lambda h^2 = \mu$.

Здесь также можно было вычислить определитель, однако более просто Y_2, Y_3, Y_4 последовательно вы-

21.3. Пример для дифференциального уравнения четвертого порядка. При решении дифференциальных уравнений выше второго порядка нужно использовать значения функции Y_i вне заданного интервала, как это уже указывалось в п. 21.1. Эти значения должны быть исключены с помощью заданных краевых условий.

В качестве примера возьмем рассмотренную в п. 12.6 задачу о сжатии стержня, описываемую дифференциальным уравнением

$$[(2-x)y'']'' = -\lambda y''$$

при краевых условиях $y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0$.

Краевые условия при шаге $h = 1/n$ следующим образом соответствуют условиям для Y_i (рис. 21.4):

$$\begin{aligned} y(0) = 0, & \quad Y_0 = 0, \\ y'(0) = 0, & \quad Y_1 = Y_{-1}, \\ y(1) = 0, & \quad Y_n = 0, \\ y''(1) = 0, & \quad Y_{n+1} = -Y_{n-1}. \end{aligned}$$

Последнее условие получено из равенства $Y_{n+1} - 2Y_n + Y_{n-1} = 0$.

Теперь дифференциальное уравнение заменяется разностным. Для этого можно сначала произвести дифференцирование в уравнении и потом y'' , y''' , y^{IV} заменить по отдельности соответствующими разностными соотношениями или, что более удобно, действовать следующим образом, который для наглядности описан при шаге $h = 1/5$. В конечноразностном методе отдельным выражениям y , y'' , ... соответствуют значения:

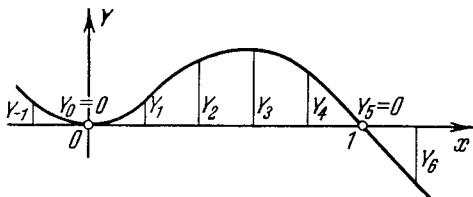


Рис. 21.4. Метод конечных разностей при продольном изгибе стержня, защемленного на одном конце и шарнирно закрепленного на другом.

y'' , y''' , y^{IV} заменить по отдельности соответствующими разностными соотношениями или, что более удобно, действовать следующим образом, который для наглядности описан при шаге $h = 1/5$. В конечноразностном методе отдельным выражениям y , y'' , ... соответствуют значения:

x	y	$h^2 y''$	$2-x$	$5h^2(2-x)y''$
$-\frac{1}{5}$	Y_1			
0	0	$2Y_1$	$\frac{10}{5}$	$20Y_1$
$\frac{1}{5}$	Y_1	$Y_2 - 2Y_1 = \alpha$	$\frac{9}{5}$	$9Y_2 - 18Y_1$
$\frac{2}{5}$	Y_2	$Y_3 - 2Y_2 + Y_1 = \beta$	$\frac{8}{5}$	$8Y_3 - 16Y_2 + 8Y_1$
$\frac{3}{5}$	Y_3	$Y_4 - 2Y_3 + Y_2 = \gamma$	$\frac{7}{5}$	$7Y_4 - 14Y_3 + 7Y_2$
$\frac{4}{5}$	Y_4	$-2Y_4 + Y_3 = \delta$	$\frac{6}{5}$	$-12Y_4 - 6Y_3$
1	0	0	$\frac{5}{5}$	0
$\frac{6}{5}$	$-Y_4$			

Дифференциальному уравнению $[(2-x)y'']' = -\lambda y''$ в точке $x = 1/5$ будет тогда соответствовать разностное уравнение

$$(20Y_1) - 2(9Y_2 - 18Y_1) + (8Y_3 - 16Y_2 + 8Y_1) = \mu(Y_2 - 2Y_1),$$

где

$$\mu = -5h^2\lambda.$$

Можно было бы для точек $x_i = \frac{i}{5}$ ($i = 1, 2, 3, 4$) написать четыре разностных уравнения, однако несколько удобнее в качестве неизвестных рассматривать не Y_i , а вторые разности, которые для краткости обозначены через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, и уже с этими величинами провести описанную выше схему. Теперь нужно еще Y_1 выразить через $\alpha, \beta, \gamma, \delta$:

$$Y_1 = -\frac{1}{5}(4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta).$$

Таким образом, имеем теперь следующие значения:

x	$h^2 y''$	$5h^2(2-x)y''$	$h^2[5h^2(2-x)y'']'$
0	$-\frac{2}{5}(4\alpha + 3\beta + 2\gamma + \delta)$	$-16\alpha - 12\beta - 8\gamma - 4\delta$	
$\frac{1}{5}$	α	9α	$-34\alpha - 4\beta - 8\gamma - 4\delta$
$\frac{2}{5}$	β	8β	$9\alpha - 16\beta + 7\gamma$
$\frac{3}{5}$	γ	7γ	$8\beta - 14\gamma + 6\delta$
$\frac{4}{5}$	δ	6δ	$7\gamma - 12\delta$
1	0	0	

Разностные уравнения будут иметь вид

$$-19\alpha - 4\beta - 8\gamma - 4\delta = -\rho\alpha,$$

$$9\alpha - \beta + 7\gamma = -\rho\beta,$$

$$8\beta + \gamma + 6\delta = -\rho\gamma,$$

$$7\gamma + 3\delta = -\rho\delta$$

где $5h^2\lambda = \rho + 15$.

Из равенства нулю определителя

$$\begin{vmatrix} -19 + \rho & -4 & -8 & -4 \\ 9 & -1 + \rho & 7 & 0 \\ 0 & 8 & 1 + \rho & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 3 + \rho \end{vmatrix} = \rho^4 - 16\rho^3 + 120\rho^2 + 1320\rho + 1335 = 0$$

следует

$$\rho = \begin{cases} -9,541 \\ -0,942 \\ 8,073 \\ 18,4 \end{cases} \quad \text{и} \quad \Lambda = \begin{cases} 27,30 \text{ (ошибка } -7\%) \\ 70,29 \\ 115,4 \\ 167 \end{cases}$$

21.4. Прямые методы для разностных уравнений. Чтобы избежать решения систем алгебраических уравнений высоких порядков, которые получаются при применении метода конечных разностей с мелким шагом, часто используют прямые методы (см. гл. VI) для приближенного нахождения характеристических чисел¹⁾.

Мы поясним это на примере задачи о крутильных колебаниях диска (задача 4 п. 11.4):

$$-y'' + 2xy' = \lambda y$$

с краевыми условиями $y(0) = y'(1) = 0$.

Дифференциальному уравнению, согласно (21.1), (21.2), соответствует при шаге $h = 1/n$ разностное уравнение (обозначения см. на рис. 21.5)

$$\left(\frac{1}{h^2} + j\right)Y_{j-1} + \left(\frac{1}{h^2} - j\right)Y_{j+1} = \mu Y_j \quad (j = 1, 2, \dots, n),$$

где $\Lambda = \frac{2}{h^2} - \mu$.

Из краевых условий получим

$$Y_0 = 0, \quad Y_{n-1} = Y_{n+1}.$$

Прежде всего произведем вычисления с шагом $h = 1/3$.

Из уравнений

$$8Y_2 = \mu Y_1, \quad 11Y_1 + 7Y_3 = \mu Y_2, \quad 18Y_2 = \mu Y_3$$

получим путем исключения

$$\mu_{1,3} = \pm \sqrt{214}, \quad \mu_2 = 0$$

¹⁾ Эти методы отчасти совпадают с методом релаксации, который подробно описан в учебниках: R. V. Southwell, *Relaxation methods for engineers*, London, 1940, *Relaxation methods in theoretical physics*, London, 1946 [см. также М. В. Николаева. О релаксационном методе Саусвелла (критический обзор), Груды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, АН СССР, XXVIII 1949].

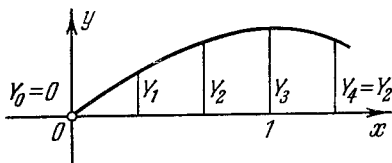


Рис. 21.5 Метод конечных разностей при крутильных колебаниях диска.

и отсюда

$$\Lambda_1 = 3,371, \quad \Lambda_2 = 18, \quad \Lambda_3 = 32,63.$$

При меньшем шаге $h = 1/5$ разностные уравнения в матричной записи будут иметь вид

$$\mathfrak{A}y = \mu u$$

при

$$y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \end{pmatrix} \text{ и } \mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь для нахождения формы основного колебания воспользуемся решением задачи, полученным при шаге $h = 1/3$, добавляя к нему (приближенно, методом графической интерполяции) промежуточные ординаты.

Таким образом, получим приближенный вектор для y

$$u' = (0,286 \quad 0,555 \quad 0,779 \quad 0,931 \quad 1);$$

отсюда

$$(\mathfrak{A}u)' = v' = (13,32 \quad 25,64 \quad 36,11 \quad 43,59 \quad 46,75)$$

и отношения

$$\frac{v_j}{u_j} = (46,6 \quad 46,3 \quad 46,4 \quad 46,7 \quad 46,75).$$

Из того, что эти отношения остаются почти постоянными, можно заключить, что собственная функция найдена достаточно хорошо. Но для собственного значения точность еще не достаточна, так как нужно найти $\Lambda = 50 - \mu$. Можно указать на различные способы повышения точности, как, например, дальнейшие итерации или внесение поправок ϵ_j в компоненты вектора, с тем чтобы сделать отношения более близкими.

В этом простом случае уравнения второго порядка скорее всего приводит к цели последующая интерполяция. Положим первую компоненту вектора $u_1 = 1$ и последующие компоненты u_n вычислим из уравнений $\mathfrak{A}u = \mu u$. Ошибка в последнем уравнении $50u_4 - \mu u_5 = 0$ является мерой ошибки в вычислении приближенного значения μ . В результате многократного проведения вычислений с различными значениями μ и интерполяции легко можно получить $\mu = 46,485$; $\Lambda = 3,515$.

На таблице показано проведение вычислений.

Приближения для μ	u_1	$v_2 = \mu u_1$	$u_2 = \frac{1}{24} v_2$	$v_3 = \mu u_2 - 27u_1$	$u_3 = \frac{1}{23} v_3$
46,5	1	46,5	1,9375	63,0938	2,74321
46,6	1	46,6	1,94167	63,4817	2,76007
46,485	1	46,485	1,936875	63,03563	2,740680
Приближения для μ	$v_4 = \mu u_3 - 28u_2$	$u_4 = \frac{1}{22} v_4$	$v_5 = \mu u_4 - 29u_3$	$u_5 = \frac{1}{21} v_5$	$\mu u_5 = 50u_4$
46,5	73,3091	3,33233	75,3958	3,59028	0,336
46,6	74,2527	3,37512	77,2387	3,67803	2,640
46,485	73,16801	3,325819	75,12096	3,577187	-0,00537

Так как метод конечных разностей дает только приближенное значение, то не имеет смысла получать Λ с большой точностью. При заданном шаге последняя строка таблицы необязательна, она только показывает, как легко μ и Λ могли бы быть вычислены с точностью до следующих 2—3 десятичных знаков.

21.5. Минимальное свойство наименьшего собственного значения в методе конечных разностей. Для разностных уравнений можно построить такую же теорию, как и для дифференциальных уравнений. Ради простоты поясним это на примере уравнения второго порядка:

$$-(fy)'' + qy = \lambda gy, \quad y(0) = y(l) = 0 \quad (21.7)$$

при $f > 0$ и $g > 0$.

При шаге $h = l/n$ задача (21.7) соответствует разностным уравнениям

$$\left. \begin{aligned} -\Delta \left(f_{i-\frac{1}{2}} \Delta Y_{i-1} \right) + h^2 q_i Y_i &= \Lambda h^2 g_i Y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \\ Y_0 = Y_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (21.8)$$

при $f_{i-\frac{1}{2}} = f \left(\left(i - \frac{1}{2} \right) h \right)$.

Точно так же как наименьшее собственное значение λ_1 задачи (21.7) согласно § 8 можно найти, решая проблему минимума, и для наименьшего собственного значения Λ_1 задачи (21.8) имеется соответствующая минимальная проблема:

$$\Lambda_1^{(n)} \leq \frac{\sum_{i=0}^{n-1} f_{i+\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{h} \Delta u_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} q_i u_i^2}{\sum_{i=1}^{n-1} q_i u_i^2}. \quad (21.9)$$

При этом u_j могут быть какими-нибудь действительными удовлетворяющими краевым условиям $u_0 = u_n = 0$ числами с $u_j \neq 0$. В (21.9) знак равенства имеет место, если u_j являются компонентами собственного вектора Y_j разностного уравнения (21.8). При $n \rightarrow \infty$ (21.9) переходит в соответствующее минимальное выражение для первого собственного значения задачи (21.7) (ср. (11.7)).

Если обозначить числитель и знаменатель выражения (21.9) соответственно через Z и N , то отношение Z/N принимает все значения, которые оно вообще может принимать, уже для значений u_i , удовлетворяющих дополнительному условию $N = 1$. По теореме Вейерштрасса, согласно которой функция, непрерывная в ограниченной замкнутой области, принимает наименьшее значение по крайней мере в одной ее точке, разрешимость минимальной проблемы $Z = \min$ при $N = 1$ гарантирована.

Для нахождения минимума, согласно правилам дифференциального исчисления, должны быть выполнены необходимые условия:

$$\frac{\partial (Z - \lambda N)}{\partial u_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n-1), \quad (21.10)$$

но эти условия совпадают с уравнениями (21.8).

Путем более точного сравнения минимальных выражений для λ_1 и $\Lambda_1^{(n)}$ можно показать¹⁾, что $\Lambda_1^{(n)}$ при $n \rightarrow \infty$ сходится к λ_1 и ошибка с уменьшением h стремится к нулю²⁾ как h^2 :

$$|\lambda_1 - \Lambda_1^{(n)}| \leq \text{const} \cdot h^2. \quad (21.11)$$

§ 22. Улучшение метода конечных разностей

При применении описанного в § 21 «обыкновенного» метода конечных разностей с большим шагом h , а следовательно, при относительно нетрудоемких вычислениях, можно получить вполне пригодное для многих целей представление о порядке величины собственного значения и о поведении собственной функции. Для получения более точного решения приходится повторять этот процесс с более

¹⁾ L. Collatz, Deutsche Mathematik, т. II (1937), 189—215; там обсуждаются также задачи для уравнений четвертого порядка. Дальнейшая литература по теории метода конечных разностей: M. P l a n c h e r e l, Le passage à la limite des équations aux différences aux équations différentielles dans les problèmes aux limites, Bull. Sci. math. (2) 47 (1923), 153—160, 170—177.

²⁾ Как улучшенные приближенные значения $\Lambda_1^{*(n)}$ в работе Н. В ü c k n e r, «Über Konvergenzsätze, die sich bei der Anwendung eines Differenzenverfahrens auf ein Sturm—Liouvillesches Eigenwertproblem ergeben», Math. Zeitschr. 51 (1948), 423—465, применяются

$$\Lambda_1^{*(n)} = \Lambda_1^{(n)} + Ch^2,$$

где C — легко вычисляемая постоянная.

мелким шагом, однако из-за очень медленной сходимости данного метода при уменьшении h объем вычислительной работы растет много быстрее, чем точность. В этом параграфе описаны различные виды улучшения обыкновенного метода разностей.

22.1. Конечные выражения. Основой для описанного в п. 22.2 метода конечных разностей повышенной точности являются определенные «конечные» выражения. Они представляют линейные комбинации значений функции $y_{i+\nu}$, которые приближенно, но по возможности хорошо, совпадают со значением взятой вперед производной $y^{(k)}$ в точке x_i . Так, например, при небольшом шаге h следующие выражения в общем случае дают лучшие приближения для первой и второй производной $y'(x_i)$ и $y''(x_i)$, чем примененные в § 21 разностные отношения (21.1), (21.2),

$$y'_i \approx \frac{-y_{i+2} + 8y_{i+1} - 8y_{i-1} + y_{i-2}}{12h}, \quad (22.1)$$

$$y''_i \approx \frac{-y_{i+2} + 16y_{i+1} - 30y_i + 16y_{i-1} - y_{i-2}}{12h^2} \quad (22.2)$$

Эти выражения легко получаются с помощью формулы Тейлора. Пусть, например,

$$y''_i \approx \sum_{\rho=-2}^{+2} c_\rho y_{i+\rho},$$

где c_ρ подлежат определению. Разложим каждый член этой суммы по формуле Тейлора:

$$y_{i+\rho} = y_i + \rho h y'_i + \frac{\rho^2 h^2}{2!} y''_i + \dots$$

Таким образом,

$$y''_i \approx y_i \sum_{\rho=-2}^2 c_\rho + h y'_i \sum_{\rho=-2}^2 \rho c_\rho + \frac{h^2}{2!} y''_i \sum_{\rho=-2}^2 \rho^2 c_\rho + \frac{h^3}{3!} y'''_i \sum_{\rho=-2}^2 \rho^3 c_\rho + \dots$$

Если потребовать, чтобы выражение, стоящее в правой части последнего равенства, с точностью до членов порядка h^5 совпадало с y''_i , то получается пять линейных уравнений для пяти неизвестных c_ρ

$$\sum_{\rho=-2}^2 c_\rho = \sum_{\rho=-2}^2 \rho c_\rho = \sum_{\rho=-2}^2 \rho^3 c_\rho = \sum_{\rho=-2}^2 \rho^4 c_\rho = 0; \quad \sum_{\rho=-2}^2 \rho^2 c_\rho = \frac{2}{h^2}.$$

Решение этой системы дается конечным выражением, стоящим в правой части равенства (22.2).

Примененные в этом примере методы можно обобщить. Сначала мы дадим следующее

Согласование разложения (22.6) с (22.3) дает для C_p систему $k + r + 1$ уравнений

$$\sum_{\rho=-p}^q \rho^x C_p = \begin{cases} \frac{x!}{h^x} p_x(x_i), & 0 \leq x \leq k, \\ 0, & k+1 \leq x \leq k+r. \end{cases} \quad (22.8)$$

Эта система линейных уравнений в случае $q + p \geq k + r$, т. е. в том случае, когда имеется достаточно много абсцисс $x_i + \rho h$, а следовательно, и достаточное количество неизвестных, всегда разрешима. Если количество неизвестных $C_p (p + q + 1)$ больше, чем количество уравнений $(k + r + 1)$, то $(p + q - k - r)$ неизвестных можно положить равными нулю, а остальные вычислить из системы уравнений (22.8). Действительно, определитель этой системы есть определитель Вандермонда и как произведение разностей отличных друг от друга чисел всегда отличен от нуля.

В таблице XI приведены простые конечные выражения для низших производных. С их помощью можно составить конечные выражения для любого дифференциального оператора до четвертого порядка включительно.

22.2. Метод конечных разностей повышенной точности. Этот метод вполне аналогичен рассмотренному в § 21 обыкновенному методу конечных разностей, который можно рассматривать как метод конечных разностей первого приближения. Разница состоит в том, что теперь дифференциальные соотношения заменяются при помощи конечных выражений, приведенных в п. 22.1 и в таблице XI. Поясним этот метод в r -м приближении, используя обозначения п. 21.1, при этом ограничимся случаем нечетного $r = 2s + 1$.

Заменим каждое дифференциальное отношение в точке x_i разностным выражением r -го приближения, которое использует только точки, симметрично расположенные относительно x_i , от x_{i-m-s} до x_{i+m+s} (пусть $2m$ — порядок дифференциального уравнения). Тогда можно для каждой из двух граничных точек и для $(n-1)$ внутренних точек, т. е. для точек $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, записать разностное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению, и получить для $n + 2m + 2s + 1$ неизвестных значений Y_i , а именно значений от Y_{-m-s} до Y_{n+m+s} , $(n+1)$ уравнений. Далее, каждое из $2m$ краевых условий дает одно разностное уравнение.

Не хватает еще $2s$ уравнений. Поэтому необходимо присоединить еще $2s$ конечных уравнений более низкого приближения, что можно сделать по-разному, например, можно для каждой из двух граничных точек x_0 и x_n добавить соответствующие дифференциальному уравнению разностные уравнения 1, 3, \dots , $(2s-1)$ -го приближения. Этот способ будет проведен на последующих примерах. Если в краевых условиях не встречаются $(2m-1)$ -е производные, то разностные уравнения r -го приближения, записанные для точек x_0 и x_n , можно

опустить, тогда будут иметь место только значения от Y_{-m-s+1} до $Y_{n+m+s-1}$.

22.3. Пример для разностного метода повышенной точности. Мы используем пример, приведенный в п. 21.2 при демонстрации обыкновенного метода конечных разностей (продольный изгиб стержня, рис. 21.2). Таким образом, имеет место задача на собственные значения (21.5), (21.6). При шаге $h = 1/3$ получим для неизвестных значений функции $Y_{-1}, Y_0, Y_1, \dots, Y_4$ (рис. 22.1) в точках x_1, x_2 два разностных уравнения третьего приближения

$$\frac{-Y_3 + 16Y_2 - 30Y_1 + 16Y_0 - Y_{-1}}{12h^2} + \Lambda 2Y_1 = 0,$$

$$\frac{-Y_4 + 16Y_3 - 30Y_2 + 16Y_1 - Y_0}{12h^2} + \Lambda Y_2 = 0.$$

В силу краевых условий $Y_0 = Y_3 = 0$.

Для того чтобы исключить значения Y_{-1} и Y_4 вне интервала $[0, 1]$ нужно привлечь еще уравнения более низкого приближения. Поэтому мы запишем для x_0 и x_3 обыкновенные разностные уравнения

$$\frac{Y_1 - 2Y_0 + Y_{-1}}{h^2} + 2\Lambda Y_0 = 0,$$

$$\frac{Y_4 - 2Y_3 + Y_2}{h^2} + \Lambda Y_3 = 0.$$

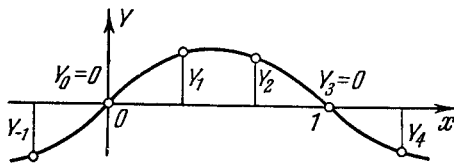


Рис. 22.1. Значения функции вне интервала $[0, 1]$.

и $Y_4 = -Y_2$. Если положить $\mu = 12\Lambda h^2$, получатся следующие уравнения:

$$16Y_2 - 29Y_1 + 2\mu Y_1 = 0,$$

$$16Y_1 - 29Y_2 + \mu Y_2 = 0.$$

Приравняв нулю определитель этой системы

$$0 = \begin{vmatrix} -29 + 2\mu & 16 \\ 16 & -29 + \mu \end{vmatrix} = 2\mu^2 - 87\mu + 585 = 0,$$

найдем

$$\mu = \frac{1}{4} (87 \pm \sqrt{2889})$$

или

$$\Lambda = \begin{cases} 6,2345 & (\text{ошибка} - 2,7\%), \\ 26,39 & (\text{ошибка} - 7\%). \end{cases}$$

Сравнение с результатами обыкновенного метода конечных разностей в п. 21.2) показывает, что здесь с большим шагом $h = 1/3$ результат лучше, чем там с шагом $h = 1/5$.

22.4. Вспомогательные формулы для многоточечного метода.

Методы, о которых будет рассказано в пп. 22.4—22.6, в случае простых дифференциальных уравнений часто приводят к хорошим результатам, хотя их применение иногда бывает довольно сложным.

Улучшение по сравнению с обыкновенным методом конечных разностей состоит в том, что каждое отдельное разностное уравнение

учитывает соответствующую задачу на собственные значения в большем количестве точек. Этот метод основан на использовании выражений следующего вида:

$$B = \sum_{v=i-p}^{i+p} (a_v y_v + A_v y_v^{(k)}), \quad (22.9)$$

являющихся линейными комбинациями значений y и значений производных некоторого фиксированного порядка k функции в соседних точках x_v ; при этом постоянные a_v , A_v определены так, чтобы при разложении выражения в ряд Тейлора в точке x_i производные до возможно более высокого порядка получили множитель нуль.

Мы поясним это на примере производной второго порядка ($k=2$). Для нее известно обыкновенное разностное отношение второго порядка, и можно записать приближенное равенство

$$y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} - h^2 y_i'' = 0.$$

При разложении этого выражения в ряд Тейлора в точке x_i оказывается, что первый поправочный член *) будет порядка $h^4 y^{IV}$. Легко видеть, что если использовать y_{i+1}'' и y_{i-1}'' , то можно получить выражение, в котором поправочный член будет еще более высокого порядка по h . Положим при $i=0$

$$B = a_{-1} y_{-1} + a_0 y_0 + a_1 y_1 + A_{-1} y_{-1}'' + A_0 y_0'' + A_1 y_1''$$

и разложим это выражение в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} B = & y_0 (a_{-1} + a_0 + a_1) + \\ & + h y_0' (-a_{-1} + a_1) + \\ & + \frac{h^2}{2!} y_0'' \left(+a_{-1} + a_1 + \frac{2}{h^2} [A_{-1} + A_0 + A_1] \right) + \\ & + \frac{h^3}{3!} y_0''' \left(-a_{-1} + a_1 + \frac{6}{h^2} [-A_{-1} + A_1] \right) + \\ & + \frac{h^4}{4!} y_0^{IV} \left(+a_{-1} + a_1 + \frac{12}{h^2} [A_{-1} + A_1] \right) + \dots \end{aligned}$$

Если приравнять выражения в круглых скобках нулю, то получим

$$a_{-1} = a_1 = -\frac{1}{2} a_0, \quad A_{-1} = A_1 = -\frac{h^2}{12} a_1 = \frac{1}{10} A_0.$$

Таким образом, получится формула

$$\frac{B}{a_1} = y_1 - 2y_0 + y_{-1} - \frac{h^2}{12} (y_1'' + 10y_0'' + y_{-1}'') + \\ + \text{члены шестого порядка} \quad (22.10)$$

(в силу симметрии члены с y^V отсутствуют).

*) Имеется в виду поправка, делающая приближенное равенство точным.

Совершенно аналогично можно рассмотреть общий случай с производной любого порядка k . Разложение выражения B в ряд Тейлора в точке x_i будет иметь вид

$$B = \sum_{v=i-p}^{i+p} \left\{ a_v (y_i + (v-i)hy'_i + (v-i)^2 \frac{h^2}{2!} y''_i + \dots) + A_v \left(y_i^{(k)} + (v-i)hy_i^{(k+1)} + (v-i)^2 \frac{h^2}{2!} y_i^{(k+2)} + \dots \right) \right\}; \quad (22.11)$$

a_v и A_v должны быть определены так, чтобы y_i, y'_i, y''_i, \dots до производной возможно более высокого порядка, скажем до порядка $(k+r)$ включительно, получили бы множитель нуль.

Для этого коэффициенты a_v и величины

$$b_v = \frac{k!}{h^k} A_v \quad (22.12)$$

должны удовлетворять системе уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v=i-p}^{i+p} a_v (v-i)^x &= 0, & x &= 0, 1, 2, \dots, k-1, \\ \sum_{v=i-p}^{i+p} \left[a_v (v-i)^x + b_v \binom{x}{k} (v-i)^{x-k} \right] &= 0, \\ x &= k, k+1, \dots, k+r. \end{aligned} \right\} \quad (22.13)$$

Будем искать такое выражение B вида (22.9), в котором не все a_v и b_v равны нулю. Это будет гарантировано в случае, если потребовать, чтобы коэффициент b_i в точке разложения x_i был отличен от нуля. Так как выражение B определяется с точностью до произвольного множителя, можно положить $b_i = 1$. Тогда (22.13) есть неоднородная система $(k+r+1)$ уравнений для неизвестных a_v и b_v . Если выбрать p достаточно большим и иметь достаточное количество неизвестных, то система будет иметь любое количество решений (существование бесконечного множества решений следует уже из того, что каждому конечному выражению, которое можно составить способом, указанным в (22.1), соответствует решение системы (22.13)).

В таблице XI приведены выражения вида (22.9) для производных до четвертого порядка включительно.

Для случая, когда используются точно три значения b_{-1}, b_0, b_1 , в задаче 6 п. 23.6 даны в явном виде выражения для производных любого порядка. Наконец, еще представляет интерес следующий специальный случай. Пусть k и r — четные числа, $k = 2p$, $r = 2q$ и $0 < q \leq p$. Мы сохраним только b_v с $|v-i| \leq q$ и, таким

образом, положим

$$b_{i-p} = b_{i-p+1} = \dots = b_{i-q-1} = b_{i+q+1} = b_{i+q+2} = \dots = b_{i+p} = 0.$$

Мы утверждаем, что система уравнений (22.13) будет иметь единственное решение, если нормировка выбрана так, что $b_i = 1$ при $a_i = 1$.

В этом случае число уравнений будет совпадать с числом неизвестных и будет равно $k+r+1$; нам нужно еще, таким образом, показать, что определитель D системы (22.13) в данном случае не равен нулю. Он имеет вид

$$D = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \dots 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -p & \dots & -1 & 1 \dots p & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p^2 & & 1 & 1 \dots p^2 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-p)^{k-1} & \dots & (-1)^{k-1} & 1 \dots p^{k-1} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ (-p)^k & \dots & (-1)^k & 1 \dots p^k & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ (-p)^{k+1} & \dots & (-1)^{k+1} & 1 \dots p^{k+1} & \binom{k+1}{k} (-q) & \dots & \binom{k+1}{k} (-1) & 0 & \binom{k+1}{k} & \dots & \binom{k+1}{k} q \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-p)^{k+r} & \dots & (-1)^{k+r} & 1 \dots p^{k+r} & \binom{k+r}{k} (-q)^r & \dots & \binom{k+r}{k} (-1)^r & 0 & \binom{k+r}{k} & \dots & \binom{k+r}{k} q^r \end{vmatrix} \quad (22.14)$$

Легко видеть, что определитель (22.14) равен произведению двух определителей

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 \dots 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-p)^{k-1} & \dots & (-1)^{k-1} & 1 \dots p^{k-1} \end{vmatrix} \quad (22.15)$$

и

$$D_2 = \begin{vmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots \\ \binom{k+r}{k} (-q)^r & \dots & \binom{k+r}{k} q^r \end{vmatrix}.$$

Оба они не равны нулю, так как D_1 есть определитель Вандермонда (см. п. 22.1), а D_2 переходит в определитель Вандермонда, если вынести из каждой строчки множители

$$\binom{k+1}{k}, \binom{k+2}{k}, \dots, \binom{k+r}{k}.$$

22.5. Пример. Мы снова рассмотрим задачу о продольном изгибе из пп. 21.2 и 22.3 (см. рис. 21.2) с уравнениями и граничными условиями (21.5) и (21.6):

$$y'' = -\lambda g_0 y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

При шаге $h = 1/3$ мы имеем значения функций Y_0, Y_1, Y_2, Y_3 (обозначения см. на рис. 21.2).

Воспользуемся формулой (22.10), пренебрегая членами шестого порядка (в этом случае мы должны вместо точных значений функции y_i и значений

производных y_i'' записать приближенные значения Y_i и Y_i'' , в точках $x_1 = 1/3$; и $x_2 = 2/3$:

$$Y_2 - 2Y_1 + Y_0 - \frac{h^2}{12} (Y_2'' + 10Y_1'' + Y_0'') = 0,$$

$$Y_3 - 2Y_2 + Y_1 - \frac{h^2}{12} (Y_3'' + 10Y_2'' + Y_1'') = 0.$$

Краевые условия дадут $Y_0 = Y_3 = 0$. Согласно дифференциальному уравнению

$$Y_1'' = -\Lambda^2 Y_1, \quad Y_2 = -\Lambda Y_2, \quad Y_0'' = Y_3'' = 0.$$

Таким образом,

$$Y_2 - 2Y_1 + \frac{h^2}{12} \Lambda (Y_2 + 20Y_1) = 0,$$

$$-2Y_2 + Y_1 + \frac{h^2}{12} \Lambda (10Y_2 + 2Y_1) = 0,$$

где положено

$$\frac{h^2}{12} \Lambda = \mu.$$

Из условия равенства нулю определителя этой системы

$$\begin{vmatrix} -2 + 20\mu & 1 + \mu \\ 1 + 2\mu & -2 + 10\mu \end{vmatrix} = 0$$

получим квадратное уравнение для $\mu = \frac{1}{v}$

$$v^2 - 21v + 66 = 0,$$

откуда

$$\Lambda = \begin{cases} 6,2966 & (\text{погрешность} - 1,7\%), \\ 28,067 & (\text{погрешность} - 1,3\%). \end{cases}$$

Эти значения существенно точнее в сравнении с полученными обыкновенным методом разностей в п. 21.2 и точнее, чем значения, полученные разностным методом в третьем приближении.

22.6. Метод в общем случае. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$M[y] = \lambda N[y].$$

Наивысшая производная пусть будет $y^{(2m)}$. Воспользовавшись формулой (22.9), запишем, таким образом, уравнение

$$\sum_{v=i-p}^{i+p} (a_v Y_v + A_v Y_v^{(2m)}) = 0 \quad (22.16)$$

для всех внутренних точек.

Используя дифференциальное уравнение, заменим везде $Y_v^{(2m)}$ через низшие производные $Y_v^{(2m-1)}$, $Y_v^{(2m-2)}$, ..., Y_v' , Y_v . Эти $Y^{(s)}$ будут выступать как дополнительные неизвестные. Запишем теперь для всех производных, входящих в дифференциальное уравнение, формулы

Нужно еще исключить Y'_0 . Для этого применяется согласно таблице XI следующее соотношение

$$Y_1 - \frac{1}{5}(Y'_1 + Y'_0) = 0.$$

Теперь имеется достаточное количество уравнений для исключения неизвестных значений функций.

Решая полученную систему уравнений, найдем

$$218\Lambda^2 - 5423\Lambda - 16\,329 = 0$$

или

$$\Lambda = \begin{cases} 3,5049 & (\text{ошибка} - 2,5\%), \\ 21,371 & (\text{ошибка} - 11\%). \end{cases}$$

§ 23. Метод конечных разностей для уравнений с частными производными

Как уже указывалось в § 21, метод конечных разностей применим для очень широкого класса

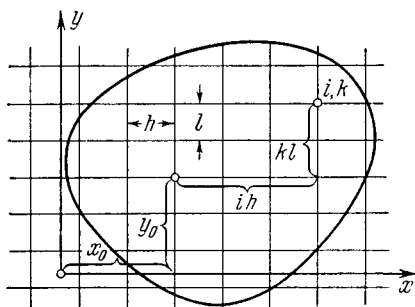


Рис. 23.1. Прямоугольная сетка к методу конечных разностей для дифференциальных уравнений с частными производными.

задач. Для уравнений с частными производными при сложной форме границы этот метод является единственным практически пригодным, так как при применении других методов учет граничных условий весьма затруднителен.

Ради удобства изложения мы ограничимся случаем двух независимых переменных x , y , хотя метод можно точно так же применять и для большего числа независимых переменных.

23.1. Обыкновенный метод конечных разностей или метод первого приближения. Мы введем прямоугольную сеть с шагом h по горизонтали и l по вертикали (см. рис. 23.1). Точки с координатами

$$\left. \begin{aligned} x_i &= x_0 + ih, \\ y_k &= y_0 + kl \end{aligned} \right\} \quad (i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (23.1)$$

называются узлами.

Выбор начальной точки x_0 , y_0 и величин h и l произволен; но все же большей частью для лучшего удовлетворения краевым условиям стремятся к тому, чтобы возможные прямолинейные участки границы совпадали с прямыми сетки (23.1) или в случае криволинейной границы особенно характерные точки совпадали с узлами сетки.

Можно применять и другие, отличные от прямоугольной, сетки, но при этом разностные выражения усложняются и становятся не-

удобными для численных расчетов, особенно если применять сетку, которая не переходит в себя при параллельном переносе. В подавляющем большинстве случаев используется квадратная сетка.

Значения функции в точках x_i, y_k мы обозначим индексами i, k : так например, $z_{i, k}$ есть значение искомой функции $z(x, y)$ в точках $x = x_i, y = y_k$ и $Z_{i, k}$ — приближенное значение для $z_{i, k}$.

Дифференциальному уравнению и граничным условиям соответствуют, точно так же как и в случае обыкновенных дифференциальных уравнений, разностные уравнения. Разностные соотношения и конечные выражения можно легко получить с помощью «операторов сдвига» E_x и E_y , применение которых к любой функции $g(x, y)$ увеличивает аргумент x или y на величину шага. Таким образом,

$$\begin{cases} E_x g(x, y) = g(x + h, y), & E_y g(x, y) = g(x, y + l), \\ E_x z_{i, k} = z_{i+1, k}, & E_y z_{i, k} = z_{i, k+1}. \end{cases} \quad (23.2)$$

Операторы можно возводить в любую целочисленную (положительную или отрицательную) степень ¹⁾

$$E_x^k E_y^m g(x, y) = g(x + kh, y + ml).$$

С этими операторами можно действовать формально как с алгебраическими величинами и ими можно заменить дифференциальные операторы.

Как пример для вычислений с помощью этих операторов запишем разностное отношение для $\frac{\partial^3 g}{\partial x^2 \partial y}$. Согласно таблице XI, отбрасывая остаточный член, при $h = l$ будем иметь

$$\left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right)_{0,0} \approx \frac{1}{h^2} (g_{1,0} - 2g_{0,0} + g_{-1,0}) = \frac{1}{h^2} (E_x - 2E_x^0 + E_x^{-1}) g_{0,0}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)_{0,0} \approx \frac{1}{2h} (g_{0,1} - g_{0,-1}) = \frac{1}{2h} (E_y - E_y^{-1}) g_{0,0}$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial}{\partial y} g \right)_{0,0} &\approx \frac{1}{2h^3} (E_x - 2E_x^0 + E_x^{-1})(E_y - E_y^{-1}) g_{0,0} = \\ &= \frac{1}{2h^3} (g_{1,1} - 2g_{0,1} + g_{-1,1} - g_{1,-1} + 2g_{0,-1} - g_{-1,-1}). \end{aligned}$$

Так, любому дифференциальному уравнению можно сопоставить разностное уравнение. Это производится для каждой «внутренней» узловой точки, т. е. для каждой узловой точки, которая вместе со своими четырьмя соседними точками $x_{i+1}, y_k; x_{i-1}, y_k; x_i, y_{k+1}; x_i, y_{k-1}$ находится внутри или на границе Γ области \mathfrak{B} задачи.

¹⁾ J. F. Steffensen, Interpolation, Baltimore, 1927.

Особой тщательности требует перевод заданных граничных условий в разностные условия, т. е. уравнения, связывающие Z_{ik} . Способ, которым осуществляется этот перевод, может иметь большое влияние на точность определения приближенного собственного значения.

Например, при граничном условии $z = 0$ на кривой Γ (рис. 23.2) можно совсем грубо положить $Z = 0$ в точке B , но тогда не приходится ожидать большой точности. Лучше потребовать, чтобы значения Z в точках A, B, C лежали на прямой, тогда, если длина $AB = \delta$, то

$$Z_B = \frac{\delta}{\delta + h} Z_C$$

или, привлекая точку D , лежащую вне кривой Γ , получим

$$Z_B = -\frac{\delta}{h - \delta} Z_D. \quad (23.3)$$

При сложных краевых условиях и криволинейной границе можно потребовать, чтобы разностные условия на границе области получались автоматически путем разложения в ряд Тейлора.

Рис. 23.2. К обсуждению краевого условия $z = 0$ в методе конечных разностей.

чтобы разностные условия на границе области получались автоматически путем разложения в ряд Тейлора.

23.2. Пример. Собственные колебания эллиптической мембраны. Пусть мембрана постоянной толщины и эллиптической формы закреплена по краю. Определение ее собственных частот сводится к задаче на собственные значения (см. п. 3.4)

$$-\Delta z \equiv -\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = \lambda z$$

при $z = 0$ на краю области, ограниченной эллипсом с полуосями 1 и 2:

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 1.$$

Мы применим (исключительно для пояснения метода) совсем грубую квадратную сетку с шагом $h = \frac{2}{3}$ и будем иметь, если нас интересуют только симметричные по x и y колебания, семь неизвестных значений функций, которые пронумеруем Z_1, Z_2, \dots, Z_7 (рис. 23.3).

Путем непосредственного применения второго разностного отношения для выражения $(\Delta z)_{i,k}$ получим

$$\frac{1}{h^2} (Z_{i+1,k} + Z_{i-1,k} + Z_{i,k+1} + Z_{i,k-1} - 4Z_{i,k}). \quad (23.4)$$

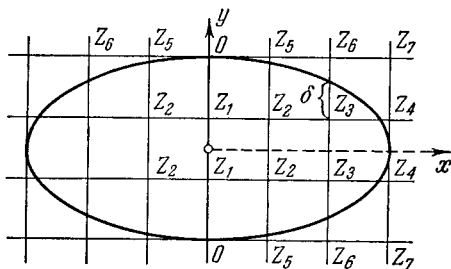


Рис. 23.3. Собственные колебания эллиптической мембраны.

Если Λ есть приближенное собственное значение λ , вычисленное методом конечных разностей, то разностное уравнение будет иметь вид

$$Z_{i+1, k} + Z_{i-1, k} + Z_{i, k+1} + Z_{i, k-1} = \nu Z_{i, k}, \quad (23.5)$$

где введено обозначение $\nu = 4 - \Lambda h^2$.

В данном случае при $\mu = \nu - 1$

$$2Z_2 = \mu Z_1, \quad Z_1 + Z_3 + Z_5 = \mu Z_2, \quad Z_2 + Z_4 + Z_6 = \mu Z_3.$$

Если теперь грубо положить $Z_4 = Z_5 = Z_6 = 0$ (Z_7 здесь не учитывается), то получится уравнение $\mu(\mu^2 - 3) = 0$ и отсюда приближенные значения для μ_i , приведенные в первом столбце таблицы, помещенной ниже. Более точные значения можно получить, если Z_4, Z_5, Z_6 исключить согласно (23.3), но и при этом ошибка из-за небольшого числа узловых точек будет все же довольно значительной. Согласно рис. 23.3

$$\delta = \frac{\sqrt{5} - 1}{3}, \quad \text{таким образом, } Z_6 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} Z_3;$$

точно так же получим

$$Z_4 = \frac{1 - \sqrt{2}}{2} Z_3, \quad Z_4 = \frac{5 - 4\sqrt{2}}{7} Z_2$$

и для определения μ будем иметь следующее уравнение:

$$(\mu + 0,82514)(\mu^2 + 0,09384\mu - 2) = \mu.$$

Корни этого уравнения μ_i , найденные по ним приближенные значения Λ_i , а также значения, вычисленные многоточечным методом (см. п. 23.4) с учетом $Z_7 = -\frac{2}{3} Z_3$, приводятся в следующей таблице:

Корни μ_i и приближенные значения Λ_i

Обыкновенный метод конечных разностей п. 23.1			Многоточечный метод п. 23.4		
Краевые условия $Z_4, Z_5, Z_6 = 0$		Краевые значения исключены по (23.3)			
μ_i	Λ_i	μ_i	Λ_i	μ_i	Λ_i
$\sqrt{3}$	2,853	1,5839	3,186	7,694	3,52
0	6,75	-0,528	7,94	-3,245	9,85
$-\sqrt{3}$	10,65	-1,976	11,20	-9,825	15,10

23.3. Метод конечных разностей повышенной точности. В этом методе, подобно тому как это было сделано в п. 22.1 — 22.3 для обыкновенных дифференциальных уравнений, разностное отношение заменяется конечным выражением, разложение которого в ряд Тейлора давало бы лучшее совпадение с заданным дифференциальным выражением (т. е. до членов более высокой степени), чем разложение в ряд Тейлора разностного отношения. Для вывода конечного выражения такого рода имеются два способа: 1) операторный способ и 2) непосредственное разложение в ряд Тейлора.

Достаточно описать, как для одного из членов $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ произвольного дифференциального выражения находится конечное выражение (а именно «конечное выражение r -го приближения», в разложении Тейлора которого, кроме члена $\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}$ имеются только члены s -го порядка, где $s = \alpha + \beta + r + 1$).

При операторном способе используются снова введенные посредством (23.2) операторы сдвига E_x и E_y . По теореме п. 22.1 для производной α -го порядка имеется конечное выражение $(r + \beta + 1)$ -го приближения, которое с помощью оператора E_x можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^\alpha z}{\partial x^\alpha}\right)_{i,k} = \sum_{\rho=-p}^p C_\rho E_x^\rho z_{i,k} + \vartheta_1 D \left| \frac{\partial^s z}{\partial x^s} \right|_{\max}.$$

При этом $r \geq 0$ есть любое наперед заданное число, $s = r + \alpha + \beta + 1$, $|\vartheta_1| \leq 1$, D и p — зависящие от r числа. Соответственно имеются такие константы C_ρ^* , D^* , p^* , что при $|\vartheta_2| \leq 1$ справедливо

$$\left(\frac{\partial^\beta z}{\partial y^\beta}\right)_{i,k} = \sum_{\rho=-p^*}^{p^*} C_\rho^* E_y^\rho z_{i,k} + \vartheta_2 D^* \left| \frac{\partial^s z}{\partial y^s} \right|_{\max}.$$

Вместе с тем следующие операторные уравнения справедливы, если операторы применяются к целым рациональным функциям $z(x, y)$, которые содержат x и y в степени не выше $(s-1)$ и для которых, таким образом, остаточный член отсутствует:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha} = \sum_{\rho=-p}^p C_\rho E_x^\rho, \quad \frac{\partial^\beta}{\partial y^\beta} = \sum_{\rho=-p^*}^{p^*} C_\rho^* E_y^\rho.$$

Так как для рассматриваемого класса функций дифференцирование и сдвиг являются перестановочными операциями, то можно записать

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^\alpha \partial y^\beta} = \sum_{\rho=-p}^p \sum_{\sigma=-p^*}^{p^*} C_\rho C_\sigma^* E_x^\rho E_y^\sigma = Q.$$

Теперь образуем для произвольной функции $g(x, y)$, имеющей непрерывные частные производные до s -го порядка включительно, выражение

$$(Qg(x, y))_{i,k} \equiv \sum_{\rho=-p}^p \sum_{\sigma=-p^*}^{p^*} C_\rho C_\sigma^* g(x_i + \rho h, y_k + \sigma l)$$

и при разложении в ряд Тейлора в точке x_i, y_k получим

$$\left(Qg - \frac{\partial^{\alpha+\beta} g}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)_{i,k} = \sum_{\substack{a \geq 0, b \geq 0 \\ a+b < s}} \gamma_{a,b} \left(\frac{\partial^{\alpha+b} g}{\partial x^a \partial y^b}\right)_{i,k} + \vartheta D' |g^{(s)}|_{\max}, \quad (23.6)$$

при этом $|g^{(s)}|_{\max}$ означает максимальное значение суммы всех частных производных s -го порядка в области $|x-x_i| \leq sh; |y-y_k| \leq sl; |\vartheta| \leq 1$, а D' — постоянная.

Константы $\gamma_{a,b}$ для всех рассматриваемых функций одни и те же.

Если g есть целая рациональная функция степени не выше $(s-1)$ по обоим переменным вместе, то правая часть в выражении (23.6) исчезает.

Если положить $g = (x-x_i)^a (y-y_k)^b$ при $a \geq 0, b \geq 0, a+b < s$, то $Qg(x,y)$ есть искомое конечное выражение для

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta} g(x,y)}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}.$$

Число s при этом может принимать любое значение (произвольно), т. е. имеются конечные выражения любого приближения¹⁾.

Конечное выражение с той же степенью приближения, как и в выражениях операторного метода, часто можно получить более просто (используя меньшее число узловых точек), делая непосредственную замену

$$\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} g}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}\right)_{i,k} = \sum_{\rho, \sigma} C_{\rho, \sigma} g(x_i + \rho h, y_k + \sigma l) + \vartheta D |g^{(s)}|_{\max} \quad (23.7)$$

и определяя отсюда неизвестные еще константы $C_{\rho, \sigma}$ так, чтобы при разложении в ряд Тейлора имело место совпадение суммы, стоящей в правой части (23.7), до членов $(s-1)$ -го порядка включительно. В таблице XII приводятся конечные выражения для часто употребляемых дифференциальных операторов

$$\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad \text{и} \quad \Delta \Delta \equiv \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

23.4. Многоточечный метод. Метод, описанный в пп. 22.4—22.6, можно распространить и на дифференциальные уравнения с частными производными. Здесь в еще большей мере справедливо замечание, что этот метод позволяет получить хорошие результаты при простом строении дифференциальных уравнений, в то время как в случае сложных уравнений проведение этого метода гораздо более затруднительно, чем метода п. 23.3.

¹⁾ Подобный же операторный метод можно провести при любом числе независимых переменных.

Воспользуемся опять прямоугольной сеткой (23.1). Пусть дифференциальное уравнение, как в (6.1), имеет вид

$$M[z] = \lambda N[z], \quad (23.8)$$

где $M[z]$ — дифференциальное выражение s -го порядка

$$M[z] = \sum_{\nu=0}^s M_{\nu}[z] \quad \text{при} \quad M_{\nu}[z] = \sum_{\substack{\alpha+\beta=\nu \\ \alpha \geq 0, \beta \geq 0}} P_{\alpha, \beta}^{(\nu)} \frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}, \quad (23.9)$$

при этом $P_{\alpha, \beta}^{(\nu)}$ — заданные функции x, y . Мы будем различать два случая.

Случай I. Коэффициенты $P_{\alpha, \beta}^{(s)}$ наивысшего члена $M_s[z]$ постоянны. Образум выражение типа (22.9)

$$B = \sum_{i, k} (a_{i, k} z_{i, k} + A_{ik} (M_s[z])_{i, k}), \quad (23.10)$$

где число узлов, по которым производится суммирование, подлежит уточнению. Коэффициенты a_{ik} и A_{ik} — константы. Разложим теперь выражение B в некоторой узловой точке по формуле Тейлора. Коэффициенты a_{ik} и A_{ik} определяются тогда из требования, чтобы при разложении в ряд Тейлора коэффициенты при

$$\frac{\partial^{\alpha+\beta}}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}}$$

обращались в нуль для $\alpha + \beta \leq s + r$ ($\alpha \geq 0, \beta \geq 0$). При этом нужно выбирать $r > 0$. В случае $r = 0$ можно в качестве B использовать обыкновенные разностные отношения. В построенном таким образом выражении B $M_s[z]$ выражаются с помощью дифференциальных уравнений (23.8) и (23.9) через низшие производные. Так, для приближенных значений $Z_{i, k}$ получается уравнение

$$\sum_{i, k} \left(a_{ik} Z_{i, k} + A_{ik} \left\{ \lambda N[z] - \sum_{\nu=0}^{s-1} M_{\nu}[z] \right\}_{z=Z_{i, k}} \right) = 0. \quad (23.11)$$

В этом уравнении в качестве неизвестных выступают $Z_{i, k}$ и значения $Z_{i, k}^{(\alpha, \beta)}$, являющиеся приближениями к $\left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} \right)_{ik}$. Уравнения типа (23.11) записываются для каждой внутренней узловой точки. Теперь нужно еще исключить $Z_{i, k}^{(\alpha, \beta)}$ при $\alpha + \beta > 0$. Это возможно благодаря тому, что можно построить выражение вида

$$B^* = \sum_{i, k} \left(a_{ik}^* z_{ik} + A_{ik} \left(\frac{\partial^{\alpha+\beta} z}{\partial x^{\alpha} \partial y^{\beta}} \right)_{ik} \right), \quad (23.12)$$

причем при разложении в ряд Тейлора коэффициенты при $\frac{\partial^{a+b}z}{\partial x^a \partial y^b}$ для $a+b \leq s+r$ равны нулю. Тогда уравнения $B^* = 0$ (с заменой $z_{i,k}$ на $Z_{i,k}$) реализованы для всех производных $\frac{\partial^{a+\beta}z}{\partial x^a \partial y^\beta}$, входящих в (23.8). Точно так же как и дифференциальному уравнению, крайевым условиям сопоставляются соответствующие уравнения для $Z_{i,k}$ и $Z_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$. При этом часто для крайевых условий нужно добавлять уравнения низшего приближения, для того чтобы получить одинаковое количество уравнений и неизвестных.

С л у ч а й П. Коэффициенты $P_{\alpha,\beta}^{(s)}$ наивысшего члена $M_s[z]$ в (23.9) не постоянные, а являются функциями от x и y .

Тогда можно действовать двойко. Или построить уравнения в форме $B^* = 0$ (23.12) для всех производных, встречающихся в дифференциальном уравнении, а также и для производных s -го порядка, и записать, кроме того, дифференциальные уравнения для всех внутренних узловых точек с $Z_{i,k}^{(\alpha,\beta)}$ вместо $\left(\frac{\partial^{a+\beta}z}{\partial x^a \partial y^\beta}\right)_{ik}$, или применить выражение вида

$$B^{**} = \sum_{i,k} (a_{ik}^{**} Z_{i,k} + A_{ik}^{**} (M[z])_{i,k}).$$

При этом коэффициенты a_{ik}^{**} , A_{ik}^{**} теперь в каждом полученном уравнении нужно вычислять заново, так как из-за переменных коэффициентов $P_{\alpha,\beta}^{(s)}$ (которые сами должны быть разложены в ряд Тейлора) разложение в ряд Тейлора нужно производить заново для каждой внутренней точки. Проведение метода из-за этого может быть очень утомительным.

Мы поясним этот случай на примере уравнения (ср. п. 6.2)

$$M[z] = -(pz_x)_x - (pz_y)_y + qz = \lambda g_0 z, \quad (23.13)$$

которое можно также записать в виде

$$\Delta z \equiv z_{xx} + z_{yy} = -\frac{p_x}{p} z_x - \frac{p_y}{p} z_y + \frac{q}{p} z - \lambda \frac{g_0}{p} z. \quad (23.14)$$

Теперь члены с наивысшими производными z_{xx} и z_{yy} имеют постоянные коэффициенты. Используя симметрию, для Δz получим в узловой точке x_i, y_k выражение вида (23.10) с еще неизвестными коэффициентами c_1, c_2, \dots, c_6 ($h=l$)

$$\begin{aligned} B = & c_1 z_{ik} + c_2 (z_{i+1,k} + z_{i-1,k} + z_{i,k+1} + z_{i,k-1}) + \\ & + c_3 (z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot) + c_4 \Delta z_{i,k} + \\ & + c_5 (\Delta z_{i+1,k} + \Delta z_{i-1,k} + \Delta z_{i,k+1} + \Delta z_{i,k-1}) + \\ & + c_6 (\Delta z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot). \end{aligned} \quad (23.15)$$

При этом, кроме четырех соседних точек $(i+1, k)$, $(i-1, k)$, $(i, k+1)$, $(i, k-1)$, обозначенных на рис. 23.4 квадратиками ■, которые уже использовались при выводе обыкновенных разностных соотношений (23.4), были привлечены еще точки $(i+1, k+1)$, $(i+1, k-1)$, $(i-1, k+1)$, $(i-1, k-1)$ (обозначенные на рис. 23.4 кружочками ○).

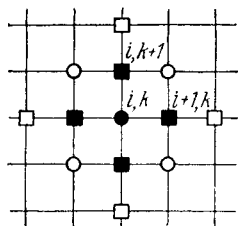
При разложении выражения (23.15) в ряд Тейлора легко видеть, что все члены до частных производных пятого порядка включительно можно положить равными нулю, и при этом остается еще свобода выбора. Можно, например, положить $c_6 = 0$ и получить

$$c_1 = -5c_2 = -20c_3 = \frac{5}{h^2}c_4 = \frac{c_5}{h^2}$$

или, записывая еще раз подробно:

$$\begin{aligned} 40z_{ik} - 8(z_{i+1,k} + z_{i-1,k} + z_{i,k+1} + z_{i,k-1}) - \\ - 2(z_{i+1,k+1} + \dots) + 8h^2\Delta z_{i,k} + h^2(\Delta z_{i+1,k} + \dots) = \\ = \text{остаточный член 6-го порядка.} \end{aligned} \quad (23.16)$$

Формулы такого рода удобно иллюстрировать наглядными схемами, в которых около значков ● записывают числовые коэффициенты перед $Z_{i,k}$ и (курсивом) перед $\Delta Z_{i,k}$



$$\begin{array}{ccc} -2. & -8. & -2. \\ -8. & 40. & -8. \\ -2. & -8. & -2. \end{array}$$

Рис. 23.4. Схема составления выражения Δz .

● ■ точки, используемые в обыкновенном методе конечных разностей,
 ○ □ точки, используемые в методе п. 23.3 (конечное выражение),
 ● ○ точки, используемые в многоточечном методе конечных разностей п. 23.4.

Если представить себе теперь уравнение (23.16), записанное для каждой внутренней узловой точки с заменой z на Z при отбрасывании остаточного члена, а также заменить в нем Δz по разностному уравнению (23.14), то получатся уравнения для $Z_{i,k}$ и приближенных значений $Z_{i,k}^{(1,0)}$ и $Z_{i,k}^{(0,1)}$ для $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{ik}$ и $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{ik}$. Для последних можно использовать формулы из таблицы XI для обыкновенных производных. Таким образом, например, для y — направления

$$Z_{i,k+1} - Z_{i,k-1} - \frac{h}{3}(Z_{i,k+1}^{(0,1)} + 4Z_{i,k}^{(0,1)} + Z_{i,k-1}^{(0,1)}) = 0$$

и еще нужно записать такое количество краевых условий, чтобы получить количество уравнений, равное количеству неизвестных.

23.5. Примеры. Колебания мембраны. Пример 1. Защемленная на краю мембрана в виде прямоугольного равнобедренного треугольника.

Для этого случая имеем дифференциальное уравнение

$$-\Delta z = \lambda z$$

с краевым условием $z = 0$ на границе равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом $l = 1$ (рис. 23. 5).

Этот пример с обыкновенным разностным отношением и конечным выражением был разобран в работе ¹⁾. Результаты приводятся в таблице XIII. Ниже этот пример будет описан многоточечным методом согласно п. 23.4.

При шаге $h = 1/4$ (см. рис. 23.5) имеются три внутренние точки. Значения функции в этих точках мы обозначим через a, b, c . При выводе разностных уравнений типа (23.16) понадобятся также точки, лежащие вне треугольника. Так как на границе $z = 0$, то, таким образом, $\Delta z = 0$, и на гипотенузе (в системе координат ξ, η , показанной на рис. 23. 5) $z_{\xi\xi} = 0$, вместе с тем также $z_{\eta\eta} = 0$.

Продолжим z как нечетную функцию и используем в качестве соответствующих значений функции $-c$ и $-b$.

Можно теперь сразу записать разностные уравнения (23.16). Уравнение, записанное, например, для точки a , будет иметь вид

$$40a - 8b - 8c + 8h^2(-\Lambda a) +$$

$$+ h^2(-\Lambda b - \Lambda c) = 0.$$

Окончательно имеем уравнения

$$40a - 8b - 8c - \frac{\Lambda a}{2} - \frac{\Lambda b}{16} - \frac{\Lambda c}{16} = 0,$$

$$42b - 8a - 2c - \frac{\Lambda b}{2} - \frac{\Lambda a}{16} = 0,$$

$$42c - 8a - 2b - \frac{\Lambda c}{2} - \frac{\Lambda a}{16} = 0.$$

В результате вычислений получим

$$\Lambda_2 = 88, \quad \Lambda_{1,3} = \frac{32}{31} (84 \pm \sqrt{1352}) = \begin{cases} 48,7540, \\ 124,665. \end{cases}$$

Для уравнения $-\Delta z = \lambda z$ можно построить еще и другое разностное уравнение, обладающее той же степенью приближения, но намного благоприятнее для численных расчетов. А именно, для этого можно использовать имеющуюся в (23.15) свободу в выборе констант, чтобы отношения $c_2 : c_3$ и $c_5 : c_6$ сделать равными друг другу. Тогда получится выражение

$$\begin{aligned} B' = & 20Z_{i,k} - 4(Z_{i+1,k} + Z_{i-1,k} + Z_{i,k+1} + Z_{i,k-1}) - \\ & - (Z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot) + \frac{h^2}{3} [13\Delta Z_{i,k} + \\ & + \frac{1}{4} (4(\Delta Z_{i+1,k} + \Delta Z_{i-1,k} + \Delta Z_{i,k+1} + \Delta Z_{i,k-1}) + \\ & + (\Delta Z_{i+1,k+1} + \cdot + \cdot + \cdot))] = \text{остаточный член 6-го порядка.} \end{aligned} \quad (23.17)$$

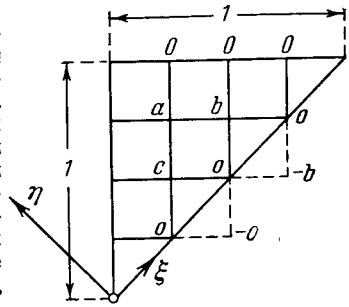


Рис. 23.5. Мембрана в форме равнобедренного треугольника.

¹⁾ G. Schulz, Formelsammlung zur praktischen Mathematik, Sammlung Göschen, Berlin — Leipzig, 1937.

При отбрасывании остаточного члена и замене $\Delta Z_{i,k} = -\Lambda Z_{i,k}$ это уравнение примет вид

$$\nu Z_{i,k} = 4(Z_{i+1,k} + Z_{i-1,k} + Z_{i,k+1} + Z_{i,k-1}) + (Z_{i+1,k+1} + Z_{i+1,k-1} + Z_{i-1,k+1} + Z_{i-1,k-1}), \quad (23.18)$$

где $\Lambda = \frac{12(20 - \nu)}{h^2(52 + \nu)}$.

Уравнение (23.18), кроме того, что в нем более низкие коэффициенты, имеет по сравнению с (23.16) еще и то преимущество, что число ν стоит только при члене $Z_{i,k}$.

При шаге $h = 1/4$ (рис. 23.5) и с теми же обозначениями, как и в предыдущей задаче, из (23.18) получим уравнения

$$\begin{aligned} \nu a &= 4b + 4c, & \nu b &= 4a + c - b, \\ \nu c &= 4a + b - c \end{aligned}$$

и отсюда $\nu_2 = -2$; $\nu_{1,3} = \pm 4\sqrt{2}$.

Таблица XIV дает возможность сопоставить приближенные значения, полученные различными методами.

Рис. 23.6. Ромбическая мембрана.

Пример 2. *Заземленная по краю мембрана в виде ромба с углом $\pi/3$ (рис. 23.6).*

Здесь рекомендуется пользоваться не прямоугольной сеткой, а применять сетку в виде правильного шестигранника или треугольника.

Пусть длина стороны ромба равна A ; мы снова имеем дифференциальное уравнение

$$-\Delta z = \lambda z$$

с граничным условием $z = 0$ на краю ромба. В случае шестиугольной сетки при разложении в ряд Тейлора, вводя значения функции в соответствии с рис. 23.7, получим

$$z_1 + z_2 + z_3 - 3z_0 = \frac{3h^2}{4} \Delta z_0 + \frac{\phi h^3}{3} m_3;$$

при этом $|\phi| \leq 1$, а m_3 — максимальное значение третьей частной производной от z на трех отрезках от точки 0 до точек $1, 2, 3$.

Для дифференциального уравнения $\Delta z = -\lambda z$ разностное уравнение будет иметь вид

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 = \nu Z_0, \quad (23.19)$$

где Λ связано с ν соотношением $\Lambda = \frac{4}{3} \frac{3 - \lambda}{h^2}$.

Метод конечных разностей точно так же можно провести с большим числом узловых точек при еще терпимой вычислительной трудоемкости, особенно если можно использовать симметрию¹⁾.

В таблице XIII приведены результаты, полученные методом конечных разностей с различным шагом и различной длиной шестиугольной сетки. Если обозначить диагонали ромба G_1 и G_2 (см. рис. 23.6), то все собственные функции относительно G_1 симметричны или антисимметричны, и точно

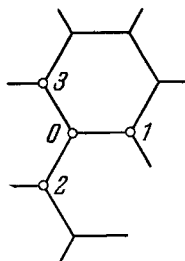


Рис. 23.7. Шестиугольная сетка.

¹⁾ Можно вывести «симметричные формулы» и «антисимметричные формулы» с существенно меньшим количеством неизвестных. См. L. Collatz, Z. angew. Math. Mech. 14 (1934), 316.

так же относительно G_2 , не говоря о собственных функциях, относящихся к вырожденному собственному значению, для которых можно построить несимметричную форму колебаний с помощью линейной комбинации. Например, форма колебаний на рис. 23.8, где обозначены узловые линии, относительно G_2 не симметрична, на рис. 23.8, где обозначены узловые линии, относительно G_1 , одновременно соответствуют собственным функциям равноострого треугольника со стороной A . Они могут быть заданы в замкнутой форме и отвечают собственным значениям ¹⁾

$$\left(\frac{4\pi}{3A}\right)^2 (\mu^2 + \mu\rho + \rho^2),$$

где μ, ρ — любые положительные целые числа.

Вообще формы колебаний, определяющие приближенные собственные значения, могут быть упорядочены, и оказывается, что всякое собственное решение разностного уравнения есть приближение для вполне определенного собственного решения дифференциального уравнения.

При рассмотрении таблицы XIII особенно бросаются в глаза следующие два факта.

1. При n внутренних узловых точках полученные приближения $\Lambda_1^{(n)}, \Lambda_2^{(n)}, \dots, \Lambda_n^{(n)}$ являются приближениями не для первых n собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, а для некоторых n собственных значений $\lambda_{k_1}, \lambda_{k_2}, \dots, \lambda_{k_n}$. Даже последовательность приближенных собственных значений может быть совсем иной, чем для точных собственных значений (например, для шестиугольной сетки с $h = \frac{1}{5} A$ приближения 143,4

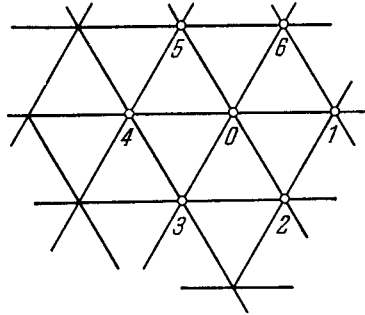


Рис. 23.9. Треугольная сетка.

при возрастании n , как было уже установлено для первого собственного значения, отнюдь не монотонна. При этом шестиугольная сетка располагается в ромбе не произвольно, а совершенно определенным образом, так чтобы конец наибольшей диагонали ромба был центром шестиугольника.

Вместо шестиугольной сетки можно также применить и треугольную сетку. Значения функций обозначим, согласно рис. 23.9, через z_0, z_1, \dots, z_6 . С помощью разложения в ряд Тейлора получим

$$(z_1 + z_2 + z_3 + z_4 + z_6 - 6z_0) = \frac{3h^2}{2} \Delta z_0 + \frac{3}{8} h^4 m_4$$

¹⁾ F. Pockels, Über die partielle Differenzialgleichung $\Delta u + k^2 u = 0$, Leipzig, 1891, 148 — 155.

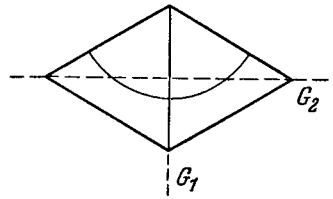


Рис. 23.8. К симметрии формы колебаний.

и 133,3 для седьмого и восьмого собственного значения). Поэтому для более высоких собственных значений существует неопределенность в порядке следования, которую можно устранить только путем более точных вычислений, в частности, с меньшим шагом.

2. Сходимость собственных значений разностных уравнений $\Lambda_i^{(n)}$ к λ_i

при $|\theta| \leq 1$; m_4 — максимальное значение частной производной четвертого порядка от z на отрезках длиной h от точки θ до точек $1, 2, \dots, 6$. Если обозначить приближенное значение через Λ^* , а также заменить Δz_0 через $-\Lambda^* z_0$, то разностное уравнение с $\Lambda^* = \frac{2(6-v)}{3h^2}$ будет иметь вид

$$Z_1 + Z_2 + Z_3 + Z_4 + Z_5 + Z_6 = vZ_0.$$

При треугольной сетке можно также применять более точные методы.

В улучшенном методе конечных разностей, описанном в п. 23.4, исходя из разложения в ряд Тейлора

$$\sum_{i=1}^6 z_i - 6z_0 - \frac{h^2}{16} \left(\sum_{i=1}^6 \Delta z_i + 18\Delta z_0 \right) = \text{остаточный член 6-го порядка.}$$

Если теперь обозначить приближенное значение через Λ^{**} , а также заменить

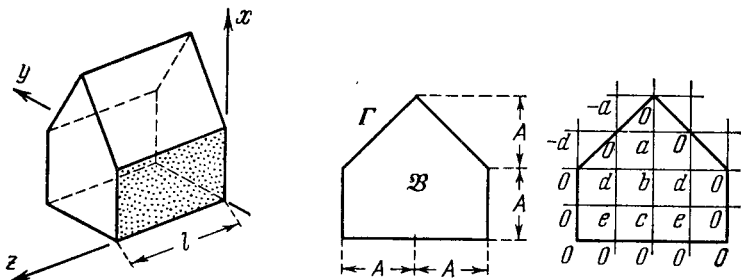


Рис. 23.10. Колебания воздуха в «домике».

Δz_i через $-\Lambda^{**} Z_i$, то разностные уравнения с $\Lambda^{**} = \frac{16}{h^2} \frac{6-v}{18+v}$ будут иметь вид

$$\sum_{i=1}^6 Z_i = vZ_0. \quad (23.20)$$

Разностные уравнения, значения v и собственные функции разностного уравнения точно такие же, как и в случае обыкновенного метода конечных разностей, только приближенные значения Λ^* и Λ^{**} различны, а именно для $|v| < 6$ (при краевом условии $z = 0$ из известной оценки характеристических чисел матрицы¹⁾ следует $|v| < 6$) вследствие неравенства $\frac{16}{18+v} > \frac{2}{3}$.

$$\Lambda^{**} > \Lambda^*.$$

Пример 3. Акустическая задача. При колебании воздуха в замкнутом объеме (домик в виде призмы, размеры которого даны на рис. 23.10) уплотнение воздуха s удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

¹⁾ Величина v есть характеристическое число матрицы, у которой согласно (23.20) каждая строчка состоит из нулей и некоторого числа единиц, а именно 6 единиц, если все соседние точки являются внутренними, а в противном случае — менее шести. Отсюда следует $|v| \leq 6$ согласно (20.23).

с краевым условием $s = 0$ на всей границе (ρ_0 — плотность воздуха в свободном состоянии, а при колебании $\rho = \rho_0(1 + s)$). После выделения временного множителя $e^{i\omega t}$ и множителя $\sin \frac{n\pi z}{l}$ получим для u задачу на собственные значения

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\lambda u,$$

где

$$\lambda = \frac{\omega^2}{c^2} - \frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

с условием $u = 0$ на границе области \mathfrak{B} .

Задачу следует решать улучшенным методом конечных разностей, используя выражение (23.18).

Обозначая значения функции через a, b, c, d, e (см. рис. 23.10), при шаге $h = \frac{1}{2}A$ для симметричной формы колебаний получим следующую систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} 4b + 2d - 2a &= va, \\ 4a + 4c + 8d + 2e &= vb, \\ 4b + 8e + 2d &= vc, \\ 4b + 4e + a + c - d &= vd, \\ 4c + 4d + b &= ve, \end{aligned}$$

которую можно записать в матричном виде $\mathfrak{M}u = v$ при

$$\mathfrak{M} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{pmatrix}.$$

Здесь v связано с Λ соотношением

$$\Lambda = \frac{12}{h^2} \frac{20 - v}{52 + v}.$$

Для того чтобы определить основную форму колебаний, мы оценим сначала совсем грубо распределение u -значений в виде

$$u' = (0,4 \ 1 \ 0,8 \ 0,6 \ 0,6);$$

образуем

$$(\mathfrak{M}u)' = v' = (4,4 \ 10,8 \ 10,7 \ 6,6)$$

и получим как отношения компонент векторов v и u значения

$$(11 \ 10,8 \ 12,5 \ 11,7 \ 11).$$

Теперь легко видеть, как можно улучшить компоненты (например, третья компонента u равная 0,8, слишком мала и т. д.); путем изменения значений методом, описанным в п. 18.8, получим улучшенный начальный вектор

$$u^{*'} = (0,39 \ 1 \ 0,9 \ 0,63 \ 0,62)$$

с

$$(\mathfrak{M}u^{*'})' = v^{*'} = (4,48 \ 11,44 \ 10,22 \ 7,14 \ 7,12)$$

и отношения (11,486 11,44 11,36 11,333 11,48); таким образом, известно:

$$11,33 \leq v_1 \leq 11,49$$

или

$$6,436 \leq \Lambda A^2 \leq 6,569$$

(теорема включения п. 18.7 здесь применима, если перейти к матрице $\mathfrak{M} + 2\mathfrak{C}$, которая имеет только неотрицательные элементы). Эта точность для технических целей часто вполне достаточна. Отношения Рэлея будут

$$\frac{u^{*'} v^*}{u^{*'} u^*} = 11,4084 \quad \text{и}$$

$$\frac{v^{*'} v^*}{u^{*'} v^*} = 11,4087,$$

так что для ΛA^2 получим приближение 6,504.

Мы используем этот пример, чтобы пояснить метод релаксации (ср. п. 21.4) для обыкновенного метода конечных разностей при шаге $h = 1/3$ (рис. 23.11). Будем исходить из совсем грубой оценки. Для значений слева вверху

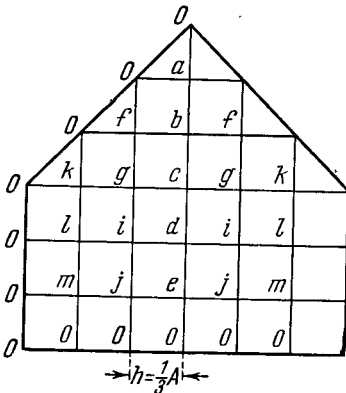


Рис. 23.11. Сетка в методе конечных разностей для акустической задачи.

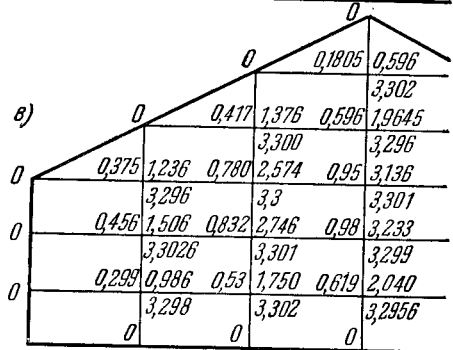
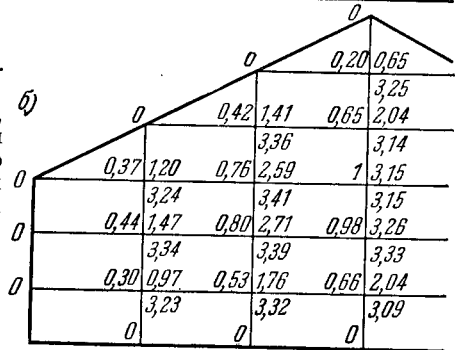
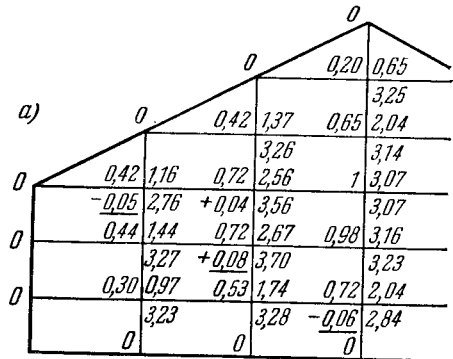


Рис. 23.12. Проведение метода релаксации.

на рис. 23.12 в каждом узле, например, для $k=0,42$ образуем сумму соседних значений и получим значение справа сверху для каждой узловой точки, т. е. для k : $g + l + 0 + 0 = 0,72 + 0,44 + 0 + 0 = 1,16$. Теперь обра-

зуем отношения и вычислим числа, стоящие справа внизу, так для k получим значение $\frac{1,16}{0,42} = 2,76$. Эти отношения суть приближения для v , они должны по возможности совпадать. В нашем примере эти отношения колеблются между 2,76 и 3,7; оценка, таким образом, не очень хороша, но легко видеть, что можно улучшить значения. Вносятся поправки в четыре особенно отличающихся числа. На рис. 23.12, *a* эти поправки подчеркнуты и стоят слева внизу около каждой узловой точки. Улучшенная схема изображена на рис. 23.12, *б*. Колебание упало при этом на одну треть, так что теперь $3,09 \leq v \leq 3,41$. Повторяя этот процесс несколько раз, можно при некотором навыке очень быстро сузить границы так, что они будут лежать в пределах точности счетной линейки. Счетная линейка дает везде значение отношений 3,30, в то время как вычислительная машина в точках e и l дает соответственно значения 3,2955 и 3,3026. Между этими значениями должно лежать v . Из соотношения $v = 4 - \Lambda h^2$ следует $\Lambda A^2 \approx 6,31$.

23.6. Упражнения. 1. Вычислить собственные значения и собственные функции задачи

$$\begin{aligned} -y'' &= \lambda(1+x^2)y, \\ y(-1) &= y(1) = 0 \end{aligned}$$

приближенно обыкновенным методом конечных разностей. Вычисления будем производить с шагом $h = 1/3$. Применим сначала симметричную формулу $Y(ih) = Y(-ih)$ и получим тогда для $\Lambda = 81\mu$ уравнение

$$\begin{vmatrix} -2 + 9\mu & 2 & 0 \\ 1 & -2 + 10\mu & 1 \\ 0 & 1 & -2 + 13\mu \end{vmatrix} = 0,$$

$$= 1170\mu^3 - 674\mu^2 + 93\mu - 2 = 0,$$

откуда

$$\Lambda_1 = 2,1290, \quad \Lambda_3 = 13,9, \quad \Lambda_5 = 30,6.$$

В случае антисимметричной формулы

$$Y(ih) = -Y(-ih)$$

получим

$$\begin{vmatrix} -2 + 10\mu & 1 \\ 1 & -2 + 13\mu \end{vmatrix} = 0,$$

откуда

$$\Lambda = \frac{81}{130} (23 \pm \sqrt{139}), \quad \Lambda_2 = 6,98, \quad \Lambda_4 = 21,6.$$

На рис. 23.13 показаны соответствующие пять собственных функций разностного уравнения.

2. Сравнить приближенные значения Λ , вычисляемые методом повышенной точности в п. 22.2 (по формуле (22.2)) для задачи

$$-y'' = \lambda y, \quad y(0) = y'(1) = 0$$

с точным решением.

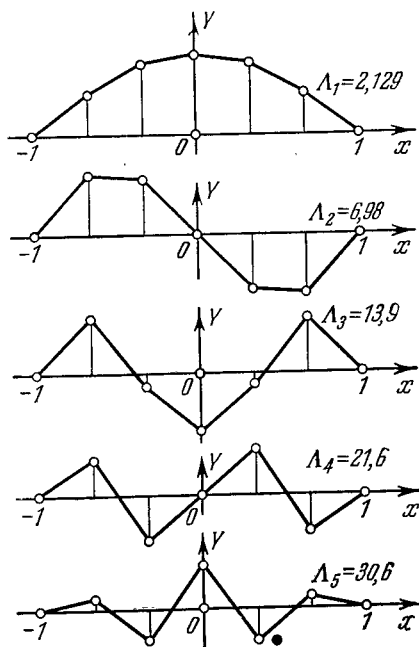


Рис. 23.13. Первые пять собственных функций для задачи 1 из п. 23.6.

Вычисление с шагом $h = 1/4$. Получим уравнение

$$4\mu^4 - 1028\mu^2 - 1024\mu + 32\,257 = 0,$$

где $2\mu = \frac{3}{4} \Lambda - 30$.

μ	Λ	Точное значение	Ошибка по Λ
-14,0750	2,4667	$\lambda_1 = \frac{1}{4} \pi^2 = 2,46740$	-0,026 %
-6,8300	21,787	$\lambda_2 = 9\lambda_1$	-1,8 %
5,4158	54,44	$\lambda_3 = 25\lambda_1$	-12 %
15,489	81,30	$\lambda_4 = 49\lambda_1$	-33 %

3. Вычислить первое собственное значение λ_1 задачи

$$-y'' = \lambda xy, \quad y(0) = y(1) = 0$$

обыкновенным методом конечных разностей § 21, методом повышенной точности (формула (22.2)) и многоточным методом п. 22.4 (с использованием формулы (22.10)).

Результат. Приближенные значения для $\lambda_1 = 18,9563$:

$h =$	Обыкновенный метод конечных разностей § 21		Метод повышенной точности (22.2)		Многоточный метод п. 22.4	
	Λ_1	ошибка	Λ_1	ошибка	Λ_1	ошибка
$\frac{1}{2}$	16	-16 %	18,67	-1,5 %	19,2	+1,3 %
$\frac{1}{3}$	17,12	-9,6 %	18,703	-1,3 %	18,89	-0,35 %
$\frac{1}{4}$	17,871	-5,7 %	18,858	-0,52 %	18,9288	-0,15 %
$\frac{1}{5}$	18,25	-3,7 %	18,9129	-0,23 %		
$\frac{1}{6}$	18,463	-2,6 %				

4. Решить разностные уравнения § 21 и провести метод повышенной точности п. 22.2 для задачи 6 п. 14.6

$$y^{IV} = -\lambda y'', \quad y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0$$

при произвольном шаге $h = 2/n$ в замкнутой форме и сравнить с точным решением.

Результат. При шаге $h = 2/n$ можно решение разностного уравнения

$$\frac{1}{h^4} \Delta^4 Y_{i-2} = -\Lambda \frac{1}{h^2} \Delta^2 Y_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n-1)$$

с краевыми условиями

$$Y_0 = Y_n = 0; \quad Y_{-1} = Y_1; \quad Y_{n-1} = Y_{n+1}$$

дать в замкнутой форме

$$Y_i = 1 - \cos k\pi ih \quad \left(k = 1, 2, \dots, \left[\frac{n-1}{2} \right] \right).$$

Y_0, Y_1, \dots при этом считаются от левого края $x = -1$ (рис. 23.14), а $k = 1$ означает первое собственное решение разностного уравнения, $k = 2$ — второе собственное решение и т. д. до $k = \left[\frac{n-1}{2} \right]$.

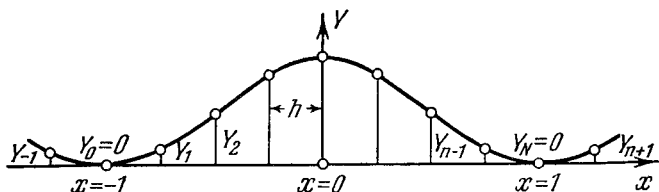


Рис. 23.14. Совпадение Y_i с точными значениями в точках x_i .

Значения Y_i совпадают со значениями, которые принимает собственная функция

$$y_k(x) = (-1)^{k-1} + \cos k\pi x \quad (k = 1, 2, \dots)$$

в точках $x_i = -1 + ih = -1 + \frac{2i}{n}$. Метод конечных разностей, таким образом, позволяет получить в этом примере вид собственных функций без ошибки. Собственное значение же разностного уравнения

$$\Lambda_k^{(n)} = \frac{n^2 \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n} \right)}{2}$$

дает отклонение от точного значения $\lambda_k = k^2\pi^2$

$$\Lambda_k^{(n)} - \lambda_k = -\frac{k^4\pi^4 h^2}{12} + \text{члены с более высокой степенью } h^2,$$

которое стремится к нулю пропорционально h^2 .

При использовании конечных выражений пп. 22.2 и 22.3 получатся разностные уравнения

$$\frac{1}{h^4} \left(\Delta^4 Y_{i-2} - \frac{1}{6} \Delta^6 Y_{i-3} \right) = -\Lambda \frac{1}{h^2} \left(\Delta^2 Y_{i-1} - \frac{1}{12} \Delta^4 Y_{i-2} \right)$$

с краевыми условиями

$$Y_0 = Y_n = 0; \quad Y_1 = Y_{-1}; \quad Y_2 = Y_{-2}; \quad Y_{n-1} = Y_{n+1}; \quad Y_{n-2} = Y_{n+2}$$

Собственные функции разностного уравнения точно такие же, как и полученные выше обыкновенным методом конечных разностей, но собственные значения

$$\Lambda_k^{(n)} = \frac{\xi}{h^2} \frac{1 + \frac{\xi}{6}}{1 + \frac{\xi}{12}} \quad \text{с} \quad \xi = 2(1 - \cos k\pi h)$$

сходятся к точным собственным значениям λ_k быстрее, (отклонение

$$\Lambda_k^{(n)} - \lambda_k = -\frac{13}{720} k^6 \pi^6 h^4 + \text{члены более высокой степени по } h^2$$

стремится к нулю пропорционально h^4 .

5. Из всех заземленных по краю мембран с одинаковыми параметрами (плотность, толщина, натяжение и площадь) наименьший основной тон имеет круговая мембрана, но среди них нет мембраны с наибольшим основным тоном. Для соответствующей разностной задачи, напротив, вопрос о наибольшем основном тоне имеет простой ответ.

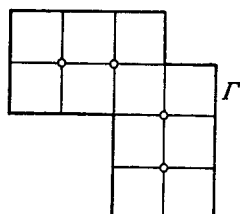


Рис. 23.15. К вопросу о связности области внутренних узловых точек.

каждой области записывается разностная задача на собственные значения согласно (23.5)

$$\begin{aligned} \nu Z_{l,k} &= (4 - \Lambda h^2) Z_{l,k} = \text{сумме четырех значений } Z_{l,k} \text{ в точках,} \\ &\quad \text{соседних с точкой } (i, k); \\ Z_{l,k} &= 0 \text{ для граничных точек } (i, k). \end{aligned} \quad (23.21)$$

Для каждой области \mathcal{G} тогда имеется вполне определенный спектр, т. е. некоторое число собственных значений $\Lambda_{\mathcal{G}}$ разностного уравнения и, в частности $\Lambda_1^{(\mathcal{G})}$.

Доказать, что $\Lambda_1^{(\mathcal{G})}$ будет наибольшим, если область \mathcal{G} будет растянута, т. е. если каждый внутренний узел имеет не больше двух соседних внутренних узлов. На рис. 23.16 для $N = 5$ показаны эти «растянутые» формы, выполненные двумя способами, которые имеют одинаковый спектр.

Доказательство можно провести, пользуясь минимальными свойствами $\Lambda_1^{(\mathcal{G})}$. Узловые точки в области \mathcal{G} , расположенные в какой-либо последовательности, обозначим P_1, P_2, \dots . Если w есть функция, принимающая какие-нибудь действительные значения во внутренних узловых точках и

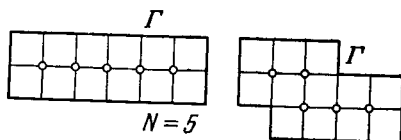


Рис. 23.16. Сеточная область «растянутой формы» с наибольшим Λ .

обращающаяся в нуль на границе, то, положив $w(P_i) = w_i$, получим

$$\Lambda_1^{(3)} \leq \frac{\sum_{P_i, P_k \text{ — смежные}} (w_i - w_k)^2}{\sum_i w_i^2}. \quad (23.22)$$

Знак равенства будет иметь место в том случае, если w_i есть значение первой собственной функции разностного уравнения. Таблица XV дает значения собственных функций разностного уравнения для сеточной области до $N = 6$ внутренних узловых точек, расположенных в порядке убывания наименьшего собственного значения.

Соответственно можно для любого «графа» (рис. 23.17) установить «спектр» собственных значений, пронумеровав узлы от 1 до N , обозначив значения функций в узлах через Z_1, Z_2, \dots, Z_N и выписав для каждого узла уравнение $vZ_i =$ сумме Z -значений в соседних узлах ($i = 1,$

$$2, \dots, N). \quad (23.23)$$

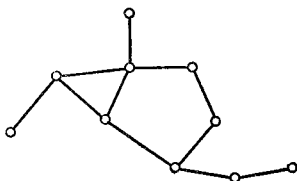


Рис. 23.17. К «спектру» графа.

Если приравнять определитель этой системы нулю, то получим алгебраическое уравнение степени N для определения чисел v , которые образуют спектр.

6. Вывести для многоточечного метода, описанного в п. 22.4, выражение вида (22.9) для любой производной порядка k ; при этом из a_{i-p}, \dots, a_{i+p} берутся значения с $p = \left[\frac{k+1}{2} \right]$ (т. е. $p = \frac{k}{2}$ для четного k и $p = \frac{k+1}{2}$ для нечетного k) и из A_v — значения A_{i-1}, A_i, A_{i+1} .

Результат. Для четного k при разложении в ряд Тейлора получим

$$\Delta^k y_{-\frac{k}{2}} - \frac{kh^k}{24} \left(y_{-1}^{(k)} + \left(\frac{24}{k} - 2 \right) y_0^{(k)} + y_1^{(k)} \right) = C_k h^{k+4} y^{(k+4)} + \text{высшие производные}$$

и для нечетного k

$$\Delta^k \left(y_{-\frac{k+1}{2}} + y_{-\frac{k-1}{2}} \right) - \frac{k+3}{12} h^k \left(y_{-1}^{(k)} + \left(\frac{24}{k+3} - 2 \right) y_0^{(k)} + y_1^{(k)} \right) = C_k h^{k+4} y^{(k+4)} + \text{высшие производные},$$

где C_k — постоянная.

7. Сравнить для задачи

$$-\left(\frac{y'}{1+x} \right)' = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0$$

два способа обыкновенного метода конечных разностей; в первом случае, производя дифференцирование и заменяя производные y', y'' по формулам (21.1), (21.2), — получить уравнения

$$p_i \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + p_i' \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + \Lambda y_i = 0 \quad (23.24)$$

с

$$p(x) = \frac{1}{1+x}, \quad p_i = p(x_i), \quad p_i' = p'(x_i) = -\frac{1}{(1+x_i)^2};$$

в другом случае использовать, согласно (21.8), уравнения

$$P_{i+\frac{1}{2}} y_{i+1} - \left(P_{i+\frac{1}{2}} + P_{i-\frac{1}{2}} \right) y_i + P_{i-\frac{1}{2}} y_{i-1} + \Lambda h^2 y_i = 0. \quad (23.25)$$

По формулам (23.25) получатся несколько улучшенные значения.

$h =$	Вычисления по (23.24)	Ошибка	Вычисления по (23.25)	Ошибка
$\frac{1}{2}$	$\Lambda_1^{(2)} = 5,333$	-21%	$\Lambda_1^{(2)} = 5,486$	-19%
$\frac{1}{3}$	$\Lambda_1^{(3)} = 6,075$	-10%	$\Lambda_1^{(3)} = 6,150$	-9%
	$\Lambda_2^{(3)} = 18,23$	-32%	$\Lambda_2^{(3)} = 18,47$	-31%
$\frac{1}{4}$	$\Lambda_1^{(4)} = 6,371$	-6%	$\Lambda_1^{(4)} = 6,415$	-5%
	$\Lambda_2^{(4)} = 21,35$	-20%	$\Lambda_2^{(4)} = 21,50$	-19%
	$\Lambda_3^{(4)} = 37,50$	-37%	$\Lambda_3^{(4)} = 37,81$	-37%

8. Для колебаний воздуха в примере 3 п. 23.5 обыкновенным методом конечных разностей получить узловые фигуры низших обертонов. Положить при этом $l = 2A$.

При обозначениях, принятых в п. 23.5 и на рис. 23.10, используя (23.5), получим разностные уравнения для симметричной формы колебаний

$$va = b, vb = a + c + 2d, vc = 2e + b, vd = b + e, ve = c + d$$

при $v = 4 - \Lambda^2 h^2$.

Отсюда найдем уравнение

$$v^5 - 7v^3 + 4v = 0$$

для определения частоты колебаний. Для отдельных корней v_j решения изображены на рис. 23.18, куда добавлены оба решения, относящиеся к антисимметричной форме колебаний. Отсюда по формуле

$$\left(\frac{\omega A}{c} \right)^2 = \Lambda A^2 + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} A^2 = 4(4 - v) + \frac{1}{4} \pi^2 n^2$$

можно вычислить приближенные значения более низких собственных частот которые приведены в таблице

v	$\sigma = 4(4 - v)$	$\sigma + \frac{\pi^2}{4}$	$\sigma^2 + \pi^2$	$\sigma + \frac{9\pi^2}{4}$
2,5244	5,90	8,37	15,77	28,1
1	12	14,47	21,87	
0,7923	12,83	15,30		
0	16	18,47		
-0,7923	19,17	21,64		

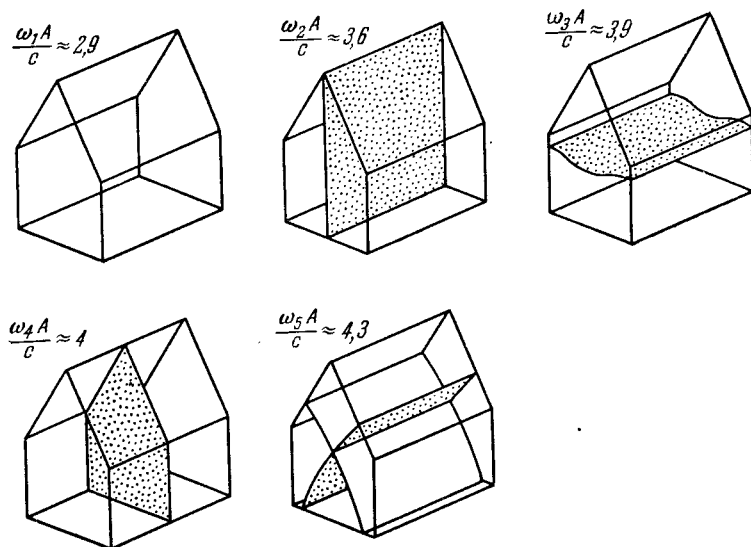
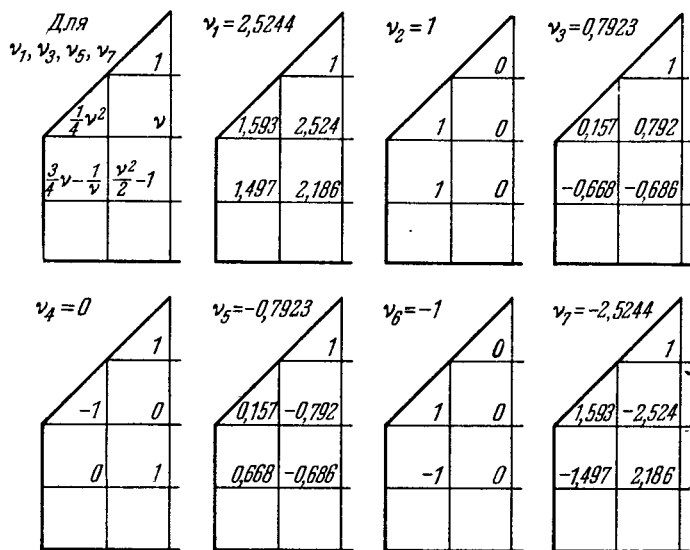


Рис. 23.19. Узловые поверхности при колебаниях воздуха (задача 8)

и уже отсюда приближенно найти узловые фигуры нескольких первых обертонов и пронумеровать их (рис. 23.19). Для большей достоверности рекомендуется повторить вычисления улучшенным методом, по возможности, с меньшим шагом.

9. Для симметричного типа колебаний из задачи 10 п. 16.11

$$y^{IV} - 20y'' + k \int_{-1}^1 y dx = \lambda (1 + x^2) y, \quad y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$$

применить обыкновенный метод конечных разностей, вычисляя интеграл по формуле Симпсона.

Результат. При шаге $h = 1/2$ будем иметь два неизвестных значения функции a, b в точках $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$. Разностные уравнения

$$\begin{aligned} -\frac{8b + 6a}{h^4} - 20 \frac{2b - 2a}{h^2} + k2 \frac{4b + a}{6} &= \Lambda a, \\ \frac{6b - 4a}{h^4} - 20 \frac{a - 2b}{h^2} + k2 \frac{4b + a}{6} &= \Lambda \frac{5}{4} b \end{aligned}$$

дают при $\Lambda = 64\mu, k = 96\rho$

$$\rho = \frac{10\mu^2 - 72\mu + 47}{21\mu - 134},$$

для $k = 200$ получим

$$\Lambda = \begin{cases} 310,4, \\ 431. \end{cases}$$

§ 24. Метод возмущений

Метод возмущений может с большим успехом применяться, если для задачи на собственные значения, решение которой нужно найти, можно указать «близкую» задачу, решение которой известно, т. е. задачу с теми же самыми граничными условиями и с не сильно отличающимися коэффициентами в дифференциальном уравнении.

24.1. Описание метода. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$M[y] = \lambda N[y] \quad (24.1)$$

с краевыми условиями

$$U_{\mu}[y] = 0, \quad \mu = 1, 2, \dots, k. \quad (24.2)$$

Ради простоты мы опишем этот метод для случая одной независимой переменной x , он точно так же будет справедлив для дифференциальных уравнений с частными производными и для большего количества переменных, нужно только тогда интегрирование распространить на всю основную область.

Пусть известно решение другой задачи на собственные значения

$$M^*[y] = \lambda^* N^*[y], \quad (24.3)$$

$$U_{\mu}[y] = 0$$

с теми же краевыми условиями, что и исходная задача, но с коэффициентами дифференциального уравнения, несколько отличающимися от коэффициентов уравнения (24.1). Пусть n -я собственная функция, которую мы обозначим $y_n^* = y_{n,0}$ соответствует собственному значению $\lambda_n^* = \lambda_{n,0}$. Задача с известным решением $y_{n,0}$ называется тогда «невозмущенной» задачей, а задача (24.1), (24.2), решение которой нужно найти, «возмущенной» задачей с членами возмущения

$$\bar{M}[y] = M[y] - M^*[y], \quad \bar{N}[y] = N[y] - N^*[y]. \quad (24.4)$$

Относительно невозмущенной задачи (24.3), (24.2) предположим, что она самосопряжена, так что выполняются условия (4.15), и что для

собственных функций $y_{n,0}$ справедливо

$$\int_a^b y_{n,0} N^* [y_{n,0}] dx > 0.$$

Для возмущенной задачи в данном случае самосопряженности не требуется.

Введем теперь параметр возмущения ε и образуем однопараметрическое семейство задач на собственные значения:

$$\left. \begin{aligned} M^* [y] + \varepsilon \bar{M} [y] &= \lambda \{ N^* [y] + \varepsilon \bar{N} [y] \}, \\ U_\mu [y] &= 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k). \end{aligned} \right\} \quad (24.5)$$

Тогда $\varepsilon = 0$ будет соответствовать невозмущенной задаче, а $\varepsilon = 1$ — возмущенной.

Собственная функция y_n новой задачи (24.5) рассматривается в зависимости от ε . Теперь мы сделаем предположение, в общем случае трудно доказуемое, что n -е собственное значение λ_n и n -я собственная функция y_n могут быть разложены¹⁾ в степенные ряды по ε и эти ряды сходятся при $\varepsilon = 1$, причем $M[y_n]$ и $N[y_n]$ могут быть образованы путем их почленного дифференцирования. Итак,

$$y_n = y_{n,0} + \varepsilon y_{n,1} + \varepsilon^2 y_{n,2} + \dots; \quad \lambda_n = \lambda_{n,0} + \varepsilon \lambda_{n,1} + \varepsilon^2 \lambda_{n,2} + \dots \quad (24.6)$$

¹⁾ При довольно общих предположениях F. Rellich доказал возможность разложения λ_n и y_n в степенные ряды по ε , оценил их область сходимости и даже ошибку при обрывании ряда на k -м члене, им же был рассмотрен случай вырожденного собственного значения, Math. Ann. 113 (1937), 600; 116 (1939), 555; 117 (1940), 356. В качестве примера его оценок (Math. Ann. 117 (1940), 361—378) рассмотрим следующую задачу:

$$-(f_1 y')' + (f_0 + \varepsilon s) y = \lambda y, \quad y(0) = y(l) = 0,$$

f_1 непрерывно дифференцируема; f_0 и s непрерывны;

$$f_1 > 0, \quad s(x) \leq S \quad \text{в } 0 \leq x \leq l.$$

Пусть для невозмущенной задачи (для $\varepsilon = 0$) d_n выбраны так, что в интервале $\lambda_{n,0} - d_n < \lambda < \lambda_{n,0} + d_n$ не содержится других собственных значений, кроме $\lambda_{n,0}$. Тогда ряды (24.6) сходятся для $|\varepsilon| < \frac{d_n}{16S}$ и справедливы оценки (при соответствующей нормировке собственных и возмущенных функций) для $k = 0, 1, 2, \dots$

$$\left| y_n - \sum_{\nu=0}^k \varepsilon^\nu y_{n,\nu} \right| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{16\varepsilon S}{d_n} \right)^{k+1}; \quad \left| \lambda_n - \sum_{\nu=0}^k \varepsilon^\nu \lambda_{n,\nu} \right| \leq \frac{d_n}{4} \left(\frac{16\varepsilon S}{d_n} \right)^{k+1}.$$

Оценку для y_n нужно понимать в смысле сходимости в среднем, так что

$$|f(x)| = \left[\int_0^l |f|^2 dx \right]^{1/2}.$$

Рассмотрим сначала случай, когда $\lambda_{n,0}$ есть простое собственное значение невозмущенной задачи. Случай многократного вырождения собственного значения будет рассмотрен в п. 24.2.

Внося (24.6) в (24.5), получим

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} M^* [y_{n,\nu}] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \bar{M} [y_{n,\nu-1}] &= \\ &= \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \lambda_{n,\nu} \right) \left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon^{\nu} N^* [y_{n,\nu}] + \sum_{\nu=1}^{\infty} \varepsilon^{\nu} \bar{N} [y_{n,\nu-1}] \right). \end{aligned}$$

Формально перемножая ряды и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях ε , будем иметь

$$\text{от } \varepsilon^0: M^* [y_{n,0}] = \lambda_{n,0} N^* [y_{n,0}], \quad (24.7)$$

$$\begin{aligned} \text{от } \varepsilon: M^* [y_{n,1}] + \bar{M} [y_{n,0}] &= \lambda_{n,1} N^* [y_{n,0}] + \lambda_{n,0} (N^* [y_{n,1}] + \\ &+ \bar{N} [y_{n,0}]), \quad (24.8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{от } \varepsilon^{\nu}: M^* [y_{n,\nu}] + \bar{M} [y_{n,\nu-1}] &= \lambda_{n,\nu} N^* [y_{n,0}] + \\ &+ \sum_{\rho=1}^{\nu} \lambda_{n,\nu-\rho} (N^* [y_{n,\rho}] + \bar{N} [y_{n,\rho-1}]). \quad (24.9) \end{aligned}$$

Уравнение (24.7) совпадает с уравнением (24.3) и автоматически выполняется. Вследствие предполагаемой самосопряженности невозмущенной задачи неизвестные $\lambda_{n,1}$, $y_{n,1}$, $\lambda_{n,2}$, $y_{n,2}$, ... можно определить следующим образом¹⁾. Если умножить (24.8) на $y_{n,0}$ и проинтегрировать по всей области, то, учитывая (4.15), а также (24.7), получим

$$\begin{aligned} \int_a^b y_{n,0} (M^* [y_{n,1}] - \lambda_{n,0} N^* [y_{n,1}]) dx &= \\ &= \int_a^b y_{n,0} (\bar{M} [y_{n,0}] - \lambda_{n,0} \bar{N} [y_{n,0}]) dx = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\lambda_{n,1} = \frac{\int_a^b y_{n,0} (\bar{M} [y_{n,0}] - \lambda_{n,0} \bar{N} [y_{n,0}]) dx}{\int_a^b y_{n,0} N^* [y_{n,0}] dx}. \quad (24.10)$$

¹⁾ См. R. Courant, D. Hilbert, Methoden der math. Physik, т. 1, изд. 2, 1931 (Курант и Гильберт, Методы математической физики, т. 1, ГИТТЛ, М.—Л., 1951).

Аналогично из (24.9) при $\nu = 2$ найдем

$$\lambda_{n,2} = \frac{\int_a^b y_{n,0} (\overline{M}[y_{n,1}] - \lambda_{n,1} \overline{N}[y_{n,0}] - \lambda_{n,1} N^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0} \overline{N}[y_{n,1}]) dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx} \quad (24.11)$$

Вычислительный процесс, таким образом, заключается в следующем. При известных $y_{n,0}$ и $\lambda_{n,0}$ вычисляют $\lambda_{n,1}$ из (24.10), для этого потребуются (кроме дифференцирования и элементарных операций) только квадратуры. После вычисления $\lambda_{n,1}$ находят $y_{n,1}$, решая краевую задачу, причем $y_{n,1}$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению (24.8), т. е. уравнению

$$M^*[y_{n,1}] - \lambda_{n,0} N^*[y_{n,1}] = r(x) = -\overline{M}[y_{n,0}] + \\ + \lambda_{n,0} \overline{N}[y_{n,0}] + \lambda_{n,1} N^*[y_{n,0}] \quad (24.12)$$

с краевыми условиями (24.2).

Эта неоднородная краевая задача имеет решение, так как соответствующая однородная задача есть невозмущенная задача на собственные значения (24.3), (24.2), и согласно п. 5.9 неоднородная задача разрешима, если правая часть $r(x)$ ортогональна к собственным функциям $y_{n,0}$

$$\int_a^b r(x) y_{n,0}(x) dx = 0; \quad (24.13)$$

но $\lambda_{n,1}$ было найдено таким образом, что это условие выполнено. Функция $y_{n,1}$ определяется краевой задачей (24.12) не однозначно, а с точностью до $y_{n,0}$ с постоянным коэффициентом, но мы можем отбросить этот добавочный член при $y_{n,1}$, полагая, что он уже учтен при разложении (24.6) в $y_{n,0}$.

Если $y_{n,1}$ определено, то для вычисления $\lambda_{n,2}$ потребуются снова только квадратуры, для вычисления же $y_{n,2}$ опять нужно решить краевую задачу: $y_{n,2}$ должно удовлетворять дифференциальному уравнению (24.9) при $\nu = 2$ и краевым условиям (24.2). Эта краевая задача тоже имеет решение, так как выполнено соответствующее условие (24.13). Аналогично находятся, далее, $\lambda_{n,i}$, $y_{n,i}$. Легко можно вывести формулы для $\lambda_{n,3}, \dots$ ¹⁾, но часто бывает достаточно

¹⁾ W. Meyer zur Capellen, Ann. Physik (5) 8 (1931), 301.

одного $\lambda_{n,1}$, так что для его нахождения не нужно решать крайних задач.

Мы получим тогда как улучшенное собственное значение для задачи (24.1), (24.2) (т. е. для $\varepsilon = 1$) следующее:

$$\lambda_n \approx \lambda_{n,0} + \lambda_{n,1}.$$

24.2. Кратные собственные значения. Пусть теперь λ_n есть α -кратно вырожденное собственное значение невозмущенной задачи (24.3), (24.2); $y_{n,0}, y_{n+1,0}, \dots, y_{n+\alpha-1,0}$ — относящиеся к нему собственные функции, которые мы будем считать ортонормированными в обобщенном смысле (см. п. 5.9). Это требование не определяет однозначно систему $y_{n,0}, \dots, y_{n+\alpha-1,0}$, и, как будет показано, для этого нужны еще дополнительные условия. Наиболее поразительное явление при возмущении вырожденных собственных значений — это «расщепление», т. е. такой факт, когда при внесении небольшого возмущения возмущенная задача в общем случае уже имеет не вырожденное собственное значение, а несколько близких простых собственных значений. В примере (5.29), рассмотренном уже в п. 5.9,

$$y^{IV} + 4y = -\lambda y'',$$

$$y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0$$

наименьшее собственное значение $\lambda_1 = 5$ двукратно вырождено при собственных функциях $\sin x$ и $\sin 2x$. У возмущенной задачи

$$y^{IV} + (4 + \varepsilon)y = -\lambda y''$$

с теми же самыми краевыми условиями $\sin x$ принадлежат собственному значению $5 + \varepsilon$, а $\sin 2x$ — собственному значению $5 + \varepsilon/4$; двукратно вырожденное собственное значение $\lambda_1 = 5$ «расщепилось» на два простых собственных значения.

Схема, продолженная в п. 24.1, применима точно так же и здесь, только теперь нужно при определении $y_{n,1}$ из краевой задачи (24.12) потребовать, чтобы правая часть $r(x)$ была ортогональна ко всем собственным функциям $y_{n,0}, \dots, y_{n+\alpha-1,0}$. Тогда согласно п. 5.9 краевая задача будет иметь решение.

Таким образом, должно удовлетворяться равенство

$$\int_a^b r(x) y_{n+l,0}(x) dx = 0, \quad l = 0, 1, \dots, \alpha - 1, \quad (24.14)$$

или, если положить

$$\bar{M}[y] - \lambda_{n,0} \bar{N}[y] = S[y],$$

то

$$\int_a^b S[y_{n,0}] y_{n+l,0} dx = \lambda_{n,1} \int_a^b N^*[y_{n,0}] y_{n+l,0} dx. \quad (24.15)$$

Интеграл, стоящий в правой части равенства (24.15), при $i=0$ отличен от нуля, а при $i=1, 2, \dots, \alpha-1$ исчезает вследствие (5.33). Поэтому $y_{n+i,0}$ должны удовлетворять условию

$$\int_a^b S[y_{n,0}] y_{n+i,0}(x) dx = 0, \quad i=1, 2, \dots, \alpha-1.$$

Если y_{n+1} рассматривать как функцию от ε и провести те же самые рассуждения с y_{n+1} вместо y_n , то получится аналогичное условие разрешимости краевой задачи для $y_{n+i,1}$:

$$\int_a^b S[y_{n+1,0}] y_{n+i,0}(x) dx = 0, \quad i=0, 2, 3, \dots, \alpha-1. \quad (24.16)$$

В общем случае

$$\int_a^b S[y_{n+k,0}] y_{n+i,0} dx = 0, \quad i \neq k; i, k=0, 1, 2, \dots, \alpha-1. \quad (24.17)$$

Если $y_{n+i,0}$ определены так, что, кроме условия ортогональности (5.33), выполнены еще требования (24.17), то без труда можно использовать схему, описанную в п. 24.1, и, в частности, например, положить

$$\lambda_1 = \frac{\int_a^b S[y_{n+i,0}] y_{n+i,0} dx}{\int_a^b N^*[y_{n+i,0}] y_{n+i,0} dx} \quad (i=0, 1, 2, \dots, \alpha-1). \quad (24.18)$$

То, что всегда имеется система собственных функций, удовлетворяющая требованиям (5.33) и (24.17), следует из известной теоремы алгебры. А именно, если $u_1, u_2, \dots, u_\alpha$ есть любые линейно независимые собственные функции из (24.3), (24.2), то положим

$$y_{n+i-1,0} = \sum_{r=1}^{\alpha} C_{ir} u_r \quad (i=1, 2, \dots, \alpha). \quad (24.19)$$

Тогда при обозначениях

$$N_{rs} = \int_a^b N^*[u_r] u_s dx, \quad S_{rs} = \int_a^b S[u_r] u_s dx;$$

$$n_{ik} = \int_a^b N^*[y_{n+i-1,0}] y_{n+k-1,0} dx, \quad s_{ik} = \int_a^b S[y_{n+i-1,0}] y_{n+k-1,0} dx,$$

имеем

$$n_{ik} = \sum_{r, s=1}^{\alpha} C_{ir} C_{ks} N_{rs}, \quad s_{ik} = \sum_{r, s=1}^{\alpha} C_{ir} C_{ks} S_{rs}. \quad (24.20)$$

Это — формулы, с помощью которых две квадратичные формы

$$Q_1 = \sum_{r, s=1}^{\alpha} N_{rs} Z_r Z_s \quad \text{и} \quad Q_2 = \sum_{r, s=1}^{\alpha} S_{rs} Z_r Z_s$$

путем преобразования

$$Z_r = \sum_{i=1}^{\alpha} C_{ir} x_i \quad (24.21)$$

можно перевести в новые формы:

$$Q'_1 = \sum_{i, k=1}^{\alpha} n_{ik} x_i x_k \quad \text{и} \quad Q'_2 = \sum_{i, k=1}^{\alpha} s_{ik} x_i x_k.$$

Согласно п. 18.4 имеется вещественное преобразование (24.21) с не равным нулю определителем, при котором Q'_1 и Q'_2 содержат только члены с x_i^2 , т. е. для которого $n_{ik} = s_{ik} = 0$ при $i \neq k$, если хотя бы одна из двух квадратичных форм, например Q_1 , является знакоопределенной. Это предположение в данном случае выполнено,

так как $u = \sum_{k=1}^{\alpha} Z_k u_k$ есть собственная функция невозмущенной системы и поэтому

$$Q_1 = \sum_{r, s=1}^{\alpha} N_{rs} Z_r Z_s = \int_a^b N^* \left[\sum_{r=1}^{\alpha} Z_r u_r \right] \left(\sum_{s=1}^{\alpha} Z_s u_s \right) dx \geq 0$$

и $Q_1 = 0$ только для $Z_1 = Z_2 = \dots = Z_{\alpha} = 0$, т. е. Q_1 положительно определена.

Таким образом, имеются числа C_{ik} , с помощью которых Q_1 и Q_2 можно перевести в формы Q'_1 , Q'_2 с $n_{ik} = s_{ik} = 0$ для $i \neq k$, и с помощью этих функций можно из любой выбранной системы собственных функций, согласно (24.19), перейти к системе $u_{n,0}, \dots, u_{n+\alpha-1,0}$, которая ортогональна в обобщенном смысле, удовлетворяет условиям (24.17) и для которой можно провести схему метода возмущений п. 24.1.

24.3. Связь с принципом Рэля. В п. 24.1 было показано, что прогедение первого шага метода возмущения (вычисление $\lambda_{n,1}$) не связано с большой вычислительной работой и сводится к двум квадратурам; последующие же шаги довольно трудоемки: каждый раз приходится решать краевую задачу. Следует обратить внимание на то, что приближение метода возмущений, полученное при учете лишь линейного члена,

$$\lambda_n \approx \lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} \quad (24.22)$$

во многих случаях совпадает с отношением Рэлея

$$R = R[y_{n,0}] = \frac{\int_a^b y_{n,0} M[y_{n,0}] dx}{\int_a^b y_{n,0} N[y_{n,0}] dx}$$

или находится в тесной связи с ним. Из (24.7) получаем

$$\lambda_{n,0} = \frac{\int_a^b y_{n,0} M^*[y_{n,0}] dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx}$$

и с учетом (24.10)

$$\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} = \frac{\int_a^b y_{n,0} \{M[y_{n,0}] - \lambda_{n,0} \bar{N}[y_{n,0}]\} dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx}. \quad (24.23)$$

Сравнивая (24.23) с выражением для $R[y_{n,0}]$, получим, приводя дроби к общему знаменателю и используя (24.4):

$$\begin{aligned} \lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} &= \\ &= R[y_{n,0}] + \frac{\int_a^b y_{n,0} \bar{N}[y_{n,0}] dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx} \cdot \frac{\int_a^b y_{n,0} \{M[y_{n,0}] - \lambda_{n,0} N[y_{n,0}]\} dx}{\int_a^b y_{n,0} N[y_{n,0}] dx}. \end{aligned} \quad (24.24)$$

Частные случаи. Часто метод возмущений применяется в таких случаях, когда для рассматриваемой краевой задачи (24.1), (24.2) имеется близкая задача, у которой одно из выражений M или N не изменено. Если, например, $N = N^*$ и отличаются лишь M и M^* , т. е. $\bar{N} \equiv 0$, то формула (24.24) перейдет в

$$\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} = R[y_{n,0}]. \quad (24.25)$$

Если одновременно $y_{n,0}$ является собственной функцией возмущенной задачи, как функции $\sin x$ в примере п. 24.2, то не только

выполняется (24.25), но тогда $\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1}$ совпадает с точным собственным значением возмущенной задачи.

Если же изменилось только выражение N , а $M = M^*$, то из (24.10) следует

$$\lambda_{n,1} = \lambda_{n,0} - \lambda_{n,0} \frac{\int_a^b y_{n,0} N[y_{n,0}] dx}{\int_a^b y_{n,0} N^*[y_{n,0}] dx} = \lambda_{n,0} \left(1 - \frac{\lambda_{n,0}}{R[y_{n,0}]} \right)$$

и отсюда

$$\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1} = R - \frac{(R - \lambda_{n,0})^2}{R}. \quad (24.26)$$

Если R положительно, то улучшенное значение $\lambda_{n,0} + \lambda_{n,1}$ меньше отношения Рэля R и совпадает с ним только тогда, когда $\lambda_{n,0} = R$. В этом случае $\lambda_{n,0} = R$ и, следовательно, улучшение $\lambda_{n,1} = 0$. Как видно, R играет здесь особую роль.

24.4. Пример к методу возмущений. Продольный изгиб тяжелых стержней. Определение критической нагрузки P при продольном изгибе шарнирно опертого с обоих концов, вертикально расположенного стержня длины l постоянного сечения при учете его собственного веса ¹⁾ приводит к задаче на собственные значения

$$\left. \begin{aligned} y^{IV} - \varepsilon (xy')' &= -\lambda y'', \\ y(0) = y''(0) = y(l) = y''(l) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (24.27)$$

Если α есть жесткость стержня на изгиб, то, зная наименьшее собственное значение λ_1 задачи (24.27), по формуле

$$P = \alpha \lambda_1$$

определим критическую нагрузку.

Для простоты введем безразмерные величины и положим $l = 1$. Пропорциональная плотности стержня величина ε является здесь параметром возмущения. При $\varepsilon = 0$ невозмущенная задача

$$M^*[y] = \lambda^* N^*[y], \text{ т. е. здесь } y^{IV} = -\lambda^* y'',$$

при тех же самых краевых условиях имеет собственные функции

$$y_{n,0} = \sin n\pi x$$

и собственные значения $\lambda^* = \lambda_{n,0} = n^2 \pi^2$.

Возмущением является член

$$\bar{M}[y] = -(xy')',$$

в то же время

$$\bar{N} = 0.$$

¹⁾ Fr. A. Willers, Das Knicken schwerer Gestänge, Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), 43.

Улучшение $\lambda_{n, 1}$ находим непосредственно из (24.10)

$$\lambda_{n, 1} = \frac{\int_0^1 \sin n\pi x [-x (\sin n\pi x)'] dx}{\int_0^1 \sin n\pi x (-n^2\pi^2 \sin n\pi x) dx} = \frac{\int_0^1 x \sin^2 n\pi x dx}{\int_0^1 \sin^2 n\pi x dx} = \frac{1}{2}.$$

Улучшенное собственное значение по (24.27)

$$\lambda_n = n^2\pi^2 + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если хотят получить член при ε^2 , нужно определить $y_{n, 1}$ из (24.12), решая следующую краевую задачу:

$$y_{n, 1}^{IV} + n^2\pi^2 y_{n, 1}'' = (xy_{n, 0}')' - \frac{1}{2} y_{n, 0}'' = n\pi \cos n\pi x + n^2\pi^2 \left(\frac{1}{2} - x\right) \sin n\pi x,$$

$$y_{n, 1}(0) = y_{n, 1}''(0) = y_{n, 1}(1) = y_{n, 1}''(1) = 0.$$

Если отбросить не влияющие на $\lambda_{n, 1}$ функции $\text{const} \cdot \sin n\pi x$, то решение будет

$$y_{n, 1} = \frac{x - x^2}{4n\pi} \cos n\pi x + \frac{3x}{4n^2\pi^2} \sin n\pi x +$$

$$+ \frac{1}{n^3\pi^3} [(\cos n\pi x - 1) + x(1 + (-1)^{n+1})].$$

Теперь для $\lambda_{n, 2}$ из (24.11) с помощью квадратур получим

$$\lambda_{n, 2} = \frac{\int_0^1 y_{n, 0} [(xy_{n, 1}')' - \frac{1}{2} y_{n, 1}''] dx}{\int_0^1 y_{n, 0} y_{n, 0}'' dx}$$

или, подставляя найденные значения для $y_{n, 0}$ и $y_{n, 1}$

$$\lambda_{n, 2} = \frac{1}{48n^2\pi^2} + \frac{7}{16n^4\pi^4} + \begin{cases} \frac{8}{n^6\pi^6} & \text{для нечетных } n, \\ 0 & \text{для четных } n. \end{cases}$$

Теперь можно из (24.27) найти улучшенное собственное значение

$$\lambda_n \approx n^2\pi^2 + \frac{\varepsilon}{2} + \varepsilon^2\lambda_{n, 2}$$

Для $\varepsilon=1$ и $n=1$ получим отсюда $\lambda_1 = 10,371$ вместо соответствующего значения $\lambda_{1, 0} = \pi^2 \approx 9,87$ невозможной задачи.

§ 25. Другие методы

25.1. Формула Данкерлея для сложных систем. Пусть для задач на собственные значения

$$M[y] = \lambda N[y], \quad U_\mu[y] = 0 \quad (25.1)$$

выражение $N[y]$ можно представить в виде суммы нескольких выражений $N_\rho[y]$

$$N[y] = \sum_{\rho=1}^r N_\rho[y], \quad (25.2)$$

при этом для всех r частичных краевых задач

$$M[y] = \lambda^\rho N_\rho[y], \quad U_\mu[y] = 0 \quad (\rho = 1, 2, \dots, r) \quad (25.3)$$

известно наименьшее собственное значение λ_1^ρ .

Далее, пусть для всех частичных краевых задач (25.3) выполнены условия самосопряженности и полной определенности, требуемые в п. 8.1 для справедливости теоремы о минимальных свойствах λ_1^ρ . Таким образом, справедливо

$$\lambda_1^\rho \leq \frac{\int_a^b u M(u) dx}{\int_a^b u N_\rho(u) dx} \quad (25.4)$$

если u есть какая-нибудь функция сравнения.

Тогда можно установить нижнюю границу для первого собственного значения λ_1 сложной задачи (формула Данкерлея):

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\sum_{\rho=1}^r \frac{1}{\lambda_1^\rho}}. \quad (25.5)$$

Если в качестве функции сравнения u в (25.4) взять первую собственную функцию y_1 краевой задачи (25.1), то получим

$$\lambda_1^\rho \leq \frac{\int_a^b y_1 M[y_1] dx}{\int_a^b y_1 N_\rho[y_1] dx} = \lambda_1 \frac{\int_a^b y_1 N[y_1] dx}{\int_a^b y_1 N_\rho[y_1] dx}$$

или

$$\frac{1}{\lambda_1} \int_a^b y_1 N_\rho [y_1] dx \leq \frac{1}{\lambda_1^\rho} \int_a^b y_1 N [y_1] dx.$$

Если написать это уравнение для всех ρ и просуммировать по ρ от 1 до r , то вследствие (25.2) получится

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq \sum_{\rho=1}^r \frac{1}{\lambda_1^\rho}.$$

Пример будет приведен в задаче 6 п. 25.7.

25.2. Формула Саусвелла¹⁾. Эта формула в известном смысле противоположна формуле Данкерлея, она дает нижнюю границу для первого собственного значения λ_1 краевой задачи (25.1), если $M[y]$ может быть представлено как сумма

$$M[y] = \sum_{\rho=1}^r M_\rho[y],$$

а для r частичных краевых задач

$$M_\rho[y] = \lambda^\rho N[y], \quad U_\mu[y] = 0 \quad (25.6)$$

выполнены условия самосопряженности и полной определенности. Из свойства минимальности наименьшего собственного значения λ_1^ρ (25.6) при использовании в качестве функции сравнения собственной функции y_1 из (25.1) получим

$$\lambda_1^\rho \leq \frac{\int_a^b y_1 M_\rho [y_1] dx}{\int_a^b y_1 N [y_1] dx}.$$

Суммируя по ρ от 1 до r , будем иметь

$$\sum_{\rho=1}^r \lambda_1^\rho \leq \frac{\int_a^b y_1 M [y_1] dx}{\int_a^b y_1 N [y_1] dx}.$$

Отношение, стоящее в правой части равенства, равно λ_1 , таким

¹⁾ G. Temple, Proc. Lond. math. Soc. (2) 29 (1929), 271.

образом, отсюда получим неравенство Саусвелла

$$\lambda_1 \geq \sum_{\rho=1}^r \lambda_1^{\rho}. \quad (25.7)$$

25.3. Минимум среднеквадратичной ошибки¹⁾. Метод будет описан для случая одной независимой переменной x , но точно так же применим и для случая многих независимых переменных. Для собственной функции u краевой задачи $M[u] = \lambda N[u]$, $U_{\mu}[u] = 0$ приближенно положим

$$u \approx w(x, c_1, c_2, \dots, c_k) \quad (25.8)$$

где w по возможности удовлетворяет краевым условиям. Если ограничиться нормированными функциями, то требование наименьшей среднеквадратичной ошибки примет вид

$$\int_a^b (M[w] - \Lambda N[w])^2 dx = \min.$$

Но для того чтобы не нужно было вводить условие нормировки, приближенные значения Λ и постоянные c_i определяют из требования

$$F[w] = \frac{\int_a^b (M[w] - \Lambda N[w])^2 dx}{\int_a^b w^2 dx} = \min \quad (25.9)$$

Тогда для определения c_i и Λ получают уравнения

$$\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial c_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k). \quad (25.10)$$

Если в простейшем случае в качестве w взять какую-нибудь функцию, которая не зависит от параметров c_1, c_2, \dots , то из уравнения $\frac{\partial F}{\partial \Lambda} = 0$ получим приближенное значение для Λ

$$\Lambda = \frac{\int_a^b M[w] N[w] dx}{\int_a^b (N[w])^2 dx}. \quad (25.11)$$

Это значение совпадает для $N[u] = \text{const} \cdot u$ с отношением Рэля (8.1).

¹⁾ M. N a s t a, Atti d. R. Accademia Nazionale dei Lincei (6) 12 (1930), 212; W. G r ö b n e r, Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinig. 48 (1938), 22.

25.4. Метод коллокаций. Описанный ниже метод очень прост при ручном счете ¹⁾, не требует никаких специальных предварительных сведений и в большинстве случаев при небольшой трудоемкости позволяет составить не только грубое представление о решении, но иногда даже приводит к довольно точным результатам.

Применение метода не ограничивается обыкновенными дифференциальными уравнениями, а также задачами на собственные значения, он может быть применен для любой краевой задачи, но для простоты мы будем рассматривать только задачи на собственные значения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение из п. 6.1

$$M[z] = \lambda N[z]$$

с такими же краевыми условиями

$$U_{\mu}[z] = 0 \quad (\mu = 1, 2, \dots, k).$$

Для собственной функции z приближенно положим

$$z \approx u = \sum_{\rho=1}^p a_{\rho} v_{\rho}.$$

Функции сравнения v_{ρ} выберем так, чтобы они удовлетворяли всем краевым условиям. Значения параметров a_{ρ} определим из условия, чтобы при подстановке приближенного выражения u в дифференциальное уравнение это уравнение удовлетворялось в p точках. Эти p точек по возможности распределяют равномерно по всему интервалу. Таким образом, получается p линейных однородных уравнений для определения параметров a_{ρ} . Приравненный нулю определитель этой системы дает уравнение для нахождения приближенного собственного значения Λ .

Пример I. Обыкновенное дифференциальное уравнение. Появление комплексных приближений. Будем рассматривать симметричные собственные функции уравнения

$$-y'' = \lambda y, \quad y(-1) = y(1) = 0$$

из задачи 5 п. 16.11 и поэтому возьмем представление

$$u = \sum_{\rho=1}^p a_{\rho} (1 - x^{2\rho}),$$

удовлетворяющее краевым условиям. Подстановка его в дифференциальное уравнение дает

$$\sum_{\rho=1}^p a_{\rho} [-2_{\rho}(2_{\rho} - 1)x^{2\rho-2} + \Lambda(1 - x^{2\rho})] = 0.$$

Потребуем, чтобы это уравнение удовлетворялось в точках x_{σ} , которые по возможности равномерно распределены в интервале $(-1, 1)$. Если выбрать $p = 2$

¹⁾ R. A. Frazer, W. P. Jones, Sylvia W. Skan, *Approximations to Functions and the Solutions of Differential Equations*, Reports and Memoranda № 1799 (2913), Aeronautical Research Committee, 1937, 33.

и взять, например $x_1 = 0$; $x_2 = 1/2$, то в силу симметрии дифференциальное уравнение будет удовлетворено в точках $x = -1/2, 0, 1/2$.

Уравнения будут иметь вид

$$\text{для } x = 0: a_1(-2 + \Lambda) + a_2\Lambda = 0,$$

$$\text{для } x = \frac{1}{2}: a_1\left(-2 + \frac{3}{4}\Lambda\right) + a_2\left(-3 + \frac{15}{16}\Lambda\right) = 0.$$

Из

$$\begin{vmatrix} -2 + \Lambda & \Lambda \\ -2 + \frac{3}{4}\Lambda & -3 + \frac{15}{16}\Lambda \end{vmatrix} = 0$$

получим

$$\Lambda = \frac{1}{3}(23 \pm \sqrt{241}) = \begin{cases} 2,4920, \\ 12,841. \end{cases}$$

В приведенной на стр. 416 таблице даны приближения для λ_i , получающиеся при $p = 1, 2, 3$ при трех различных выборах точек x_σ ; при этом для высших собственных значений получаются комплексные приближения, но для наименьшего собственного значения λ_1 приближения довольно точны. Ошибка с ростом p уменьшается не монотонно.

Пример II. Те же самые приближенные значения, что и в методе Ритца. Для проблемы продольного изгиба (см. задачу 4 п. 14. 6)

$$-y'' = \lambda(2 + \cos x)y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

положим

$$y \approx u = \sum_{\rho=1}^p a_\rho \sin \rho x.$$

Подставляя представление для u в дифференциальное уравнение, будем иметь

$$\sum_{\rho=1}^p a_\rho \sin \rho x (-\rho^2 + \Lambda(2 + \cos x)) = 0.$$

При $p = 1$, например, в точке $x_1 = \frac{1}{2}\pi$ получим

$$a_1(-1 + \Lambda \cdot 2) = 0 \quad \text{или} \quad \Lambda = \frac{1}{2};$$

при $p = 2$ для $x_\sigma = \frac{1}{3}\pi\sigma$ ($\sigma = 1$ и 2) и при $p = 2$ для $x_\sigma = \frac{1}{4}\pi\sigma$ ($\sigma = 1, 2, 3$) получим точно такие же уравнения для определения Λ , а следовательно, такие же приближенные собственные значения, как и в методе Ритца для задачи 4 п. 16. 11, т. е. довольно точные приближения

Пример III. Дифференциальное уравнение с частными производными, эллиптическая мембрана. Пусть, как и в п. 16.7, на границе эллипса Γ

$$\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$$

задано краевое условие $z = 0$; внутри эллипса

$$\Delta z + \lambda z = 0.$$

В качестве приближенного значения z возьмем удовлетворяющую граничным условиям функцию

$$z \approx u(x, y) = (4 - x^2 - 4y^2)(a_1 + a_2x^2 + a_3y^2).$$

Приближенные значения при n -членном представлении

(Ошибка дана в %)

№	Абсциссы x_σ	Положение в $-1 < x_\sigma \leq 1$	Для $\lambda_1 = \frac{\pi^2}{4} = 2,467401$	Для $\lambda_2 = \frac{9\pi^2}{4} = 22,2066$	Для $\lambda_3 = \frac{25\pi^2}{4} = 61,635$
1	$x_1 = 0$		2 (-19%)	—	—
2	$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{2}$		2,49195 (+1%)	12,841 (-42%)	—
3	$x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{3}, x_3 = \frac{2}{3}$		2,46687 (-0,021%)	22,49 ± 19,25	—
1	$x_1 = \frac{1}{3}$		2,25 (-9%)	—	—
2	$x_1 = \frac{1}{5}, x_2 = \frac{3}{5}$		2,48034 (+0,52%)	15,749 (-29%)	—
3	$x_1 = \frac{1}{7}, x_2 = \frac{3}{4}, x_3 = \frac{5}{7}$		2,46708 (-0,013%)	26,39 ± 16,95	—
1	$x_1 = \frac{1}{2}$		2,667 (+8%)	—	—
2	$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}$		2,46424 (-0,13%)	23,745 (+7%)	—
3	$x_1 = \frac{1}{6}, x_2 = \frac{1}{2}, x_3 = \frac{5}{6}$		2,467439 (0,0015%)	21,953 (-1,1%)	59,66 (-3,4%)

Тогда, как и в п. 16.7,

$$\Delta u = -10a_1 + 4(2 - 5x^2 - 2y^2)a_2 + 2(4 - x^2 - 25y^2)a_3.$$

В первом приближении при $a_2 = a_3 = 0$ возьмем $x = 1, y = 0$. Тогда в силу симметрии дифференциальное уравнение будет удовлетворяться в точках $x = \pm 1, y = 0$:

$$-10a_1 + 3\Lambda a_1 = 0,$$

откуда $\Lambda = \frac{10}{3}$.

Качество приближения в очень сильной мере зависит от выбора точек, в которых должно удовлетворяться дифференциальное уравнение. В таблице (рис. 25.1) приведены приближенные значения, полученные для нескольких положений точек коллокации.

25.5. Разложение в непрерывную дробь. Дифференциальное уравнение Матье. Многие прикладные задачи, например задачи теории потенциала, приводят к дифференциальному уравнению Матье

$$-y'' = (\lambda - 2h^2 \cos 2x)y \quad (25.12)$$

с параметрами λ и h^2 . В плоскости λ, h^2 можно найти «неустойчивые» и «устойчивые» области, а именно, говорят, что точка (λ_1, h^2) относится к устойчивой области, если соответствующее дифференциальное уравнение (25.12) имеет при этих параметрах только такое решение, которое остается ограниченным при возрастании x , в противном случае эта точка относится к неустойчивой области¹⁾.

В точках (λ_1, h^2) на границе между этими областями уравнение (25.12) имеет периодическое решение с периодом 2π . Эти периодические решения (25.12) называются функциями Матье первого рода. При заданном h они являются собственными функциями краевой задачи для дифференциального уравнения (25.12) с крайевыми условиями

$$y(0) = y(2\pi), \quad y'(0) = y'(2\pi). \quad (25.13)$$

¹⁾ Эти области представлены в книге М. J. O. Strutt, Lamesche, Mathematische und verwandte Funktionen in Physik und Technik; Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, т. I, Berlin, 1932, 230 [М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, ОНТИ — ДНТВУ, Харьков — Киев, 1935]. Там приведена подробная теория дифференциального уравнения Матье.

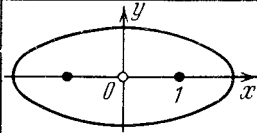
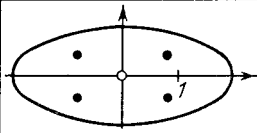
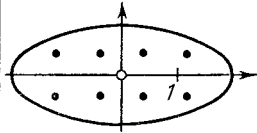
Положение точек	Координаты точек	Приближенные значения для λ
	$x_1 = 1$ $y_1 = 0$	$\Lambda_1 = \frac{10}{3} \approx 3,33$
	$x_1 = 0,8$ $y_1 = 0,4$	$\Lambda_1 = \frac{10}{2,72} \approx 3,68$
	$x_1 = 0,4$ $y_1 = 0,4$ $x_2 = 1,2$ $y_2 = 0,4$	$\Lambda_1 = 3,500$ $\Lambda_2 = 10,705$

Рис. 25.1. Метод коллокации для определения собственных колебаний эллиптической мембраны.

Они могут быть разложены в ряд Фурье и делятся на четыре типа:

$$\left. \begin{aligned} C_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{n, 2m+1} \cos(2m+1)x, & n &= 1, 3, 5, \dots, \\ C_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} A_{n, 2m} \cos 2mx, & n &= 0, 2, 4, \dots, \\ S_n(x) &= \sum_{m=0}^{\infty} B_{n, 2m+1} \sin(2m+1)x, & n &= 1, 3, 5, \dots, \\ S_n(x) &= \sum_{m=1}^{\infty} B_{n, 2m} \sin 2mx, & n &= 0, 2, 4, \dots \end{aligned} \right\} (25.14)$$

Собственные функции и граничные кривые могут быть хорошо вычислены для всех четырех типов методом разложения в непрерывную дробь. Для пояснения метода мы выберем s_n с нечетным n . Подставив выражение для s_n в дифференциальное уравнение (25.12), используя формулу

$$\cos 2x \sin kx = \frac{1}{2} [\sin(k+2)x + \sin(k-2)x],$$

получим после приравнивания коэффициентов перед $\sin x$, $\sin 3x$, $\sin 5x$, ...

$$\text{множитель перед } \sin x: -B_{n,1} + \lambda B_{n,1} + h^2 B_{n,1} - h^2 B_{n,3} = 0,$$

$$\text{множитель перед } \sin 3x: -9B_{n,3} + \lambda B_{n,3} - h^2 B_{n,1} - h^2 B_{n,5} = 0,$$

$$\text{множитель перед } \sin 5x: -25B_{n,5} + \lambda B_{n,5} - h^2 B_{n,3} - h^2 B_{n,7} = 0.$$

.....

Имеем бесконечную систему уравнений с определителем¹⁾

$$\Delta = \begin{vmatrix} \lambda - 1 + h^2 & -h^2 & 0 & 0 & \dots \\ -h^2 & \lambda - 9 & -h^2 & 0 & \dots \\ 0 & -h^2 & \lambda - 25 & -h^2 & \dots \\ 0 & 0 & -h^2 & \lambda - 49 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} (25.15)$$

такого вида, что λ входит только в диагональные члены и линейно и только два соседних с диагональю ряда имеют не равные нулю элементы. Такой определитель может быть представлен непрерывной дробью. Так как подобные определители иногда встречаются, то мы

¹⁾ Определитель здесь представлен чисто формально. Если взять в качестве приближения усеченный определитель, например, третьего порядка, то это будет означать, что из бесконечной системы уравнений использованы только три первых выписанных выше уравнения.

выпишем определитель такого рода в общем виде

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \dots \\ a_{12} & a_{22} - \lambda b_{22} & a_{23} & 0 & \dots \\ 0 & a_{32} & a_{33} - \lambda b_{33} & a_{34} & \dots \\ 0 & 0 & a_{43} & a_{44} - \lambda b_{44} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0 \quad (25.16)$$

Определитель, полученный путем отбрасывания n первых строк и n первых столбцов, мы обозначим через Δ_n . Разлагая его по элементам первого столбца, получим

$$\begin{aligned} \Delta &= (a_{11} - \lambda b_{11}) \Delta_1 - a_{12} a_{21} \Delta_2 = 0, \\ \Delta_1 &= (a_{22} - \lambda b_{22}) \Delta_2 - a_{23} a_{32} \Delta_3, \\ \Delta_2 &= (a_{33} - \lambda b_{33}) \Delta_3 - a_{34} a_{43} \Delta_4 \\ &\dots \end{aligned}$$

Преобразование этих уравнений дает

$$\lambda b_{11} = a_{11} - a_{12} a_{21} \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \frac{\Delta_1}{\Delta_2} = a_{22} - \lambda b_{22} - a_{23} a_{32} \frac{\Delta_3}{\Delta_2},$$

и, таким образом,

$$\lambda b_{11} = a_{11} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22} - \lambda b_{22} - a_{23} a_{32} \frac{\Delta_3}{\Delta_2}}.$$

Продолжая этот процесс до бесконечности, будем иметь

$$\lambda b_{11} = a_{11} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{22} - \lambda b_{22} - \frac{a_{23} a_{32}}{a_{33} - \lambda b_{33} - \frac{a_{34} a_{43}}{a_{44} - \lambda b_{44} - \dots}}} \quad (25.17)$$

Вопрос о сходимости этой непрерывной дроби здесь не рассматривается.

Применяя (25.17) к определителю (25.15), получим

$$\lambda = 1 - h^2 + \frac{h^4}{\lambda - 9 - \frac{h^4}{\lambda - 25 - \frac{h^4}{\lambda - 49 - \dots}}} \quad (25.18)$$

Решать уравнение (25.18) можно итерационным методом. Обозначив правую часть через $K(\lambda)$, получим уравнение $\lambda = K(\lambda)$. Положив в правой части приближенное значение $\lambda^{(v)}$, получим в качестве нового приближения $\lambda^{(v+1)}$

$$\lambda^{(v+1)} = K(\lambda^{(v)}).$$

На рис. 25.2 $\lambda^{(v+1)}$ представлена как функция от $\lambda^{(v)}$. Вычисление $\lambda^{(v+1)}$ происходит очень быстро, так как для вычисления непрерывной дроби вследствие очень хорошей сходимости может быть взято всего несколько членов. Из рисунка видно, что наименьший корень вследствие очень малого наклона кривой $K(\lambda)$ может быть вычислен методом итераций очень точно. Например, имеем для $h = 1$, исходя из $\lambda^{(0)} = 0$,

$$\begin{aligned}\lambda^{(0)} &= 0, & \lambda^{(1)} &= -0,1116, \\ \lambda^{(2)} &= -0,11023, & \lambda^{(3)} &= -0,110249.\end{aligned}$$

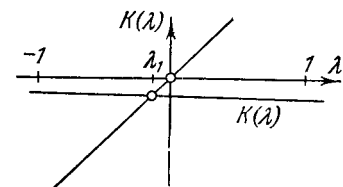


Рис. 25.2. Определение собственных значений уравнения Матье.

Вычисление следующих корней производится не итерационным методом, а вычислением точек кривой на рис. 25.2 и интерполяцией, что также из-за хорошей сходимости (25.18) не представляет больших затруднений (ср. также задачу 1 в п. 25.7),

25.6. Представление в виде ряда. Часто применяемый метод для приближенного решения краевой задачи состоит в том, что собственная функция ищется в виде ряда (степенного, тригонометрического и т. д.)

$$y(x) = \sum_{\rho=1}^{\infty} a_{\rho} \psi_{\rho}(x). \quad (25.19)$$

Возможность такого разложения предполагается.

О достоинствах и применимости такого рода представления при той степени общности, в которой здесь данный метод изложен, ничего сказать нельзя. Известны как примеры, для которых разложения в ряд при небольшой вычислительной работе дают превосходные результаты, так и примеры, в которых сходимость вообще отсутствует, так что для вычислительных целей метод становится неприменимым.

Здесь будет только кратко объяснено, как проводить такое разложение; применимость подобного разложения существенно зависит от удачного выбора исходной системы функций $\psi_{\rho}(x)$ и от умелого проведения метода.

Функции $\psi_{\rho}(x)$ по возможности выбирают так, чтобы они удовлетворяли краевым условиям.

Если подставить представление (25.19) в заданное дифференциальное уравнение и получившиеся функции $M[\psi_{\rho}]$ и $N[\psi_{\rho}]$ разложить в ряд снова по ψ_{ρ} (или по другой полной системе функций)

$$M[\psi_{\rho}] = \sum_{\sigma=1}^{\infty} c_{\rho, \sigma} \psi_{\sigma}, \quad N[\psi_{\rho}] = \sum_{\sigma=1}^{\infty} d_{\rho, \sigma} \psi_{\sigma}, \quad (25.20)$$

то получим уравнение

$$\sum_{\sigma=1}^{\infty} \psi_{\sigma} \left\{ \sum_{\rho=1}^{\infty} a_{\rho} (c_{\rho, \sigma} - \lambda d_{\rho, \sigma}) \right\} = 0. \quad (25.21)$$

Приравнявая нулю выражения, заключенные в скобки, получим бесконечную систему линейных уравнений для нахождения коэффициентов a_{ρ} . Ее обычно решают приближенно, принимая в качестве приближенных значений для k первых собственных чисел нули усеченного определителя, который является полиномом k -й степени относительно λ .

$$\Delta_k(\lambda) = \begin{vmatrix} c_{11} - \lambda d_{11} & c_{12} - \lambda d_{12} & \dots & c_{1k} - \lambda d_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{k1} - \lambda d_{k1} & c_{k2} - \lambda d_{k2} & \dots & c_{kk} - \lambda d_{kk} \end{vmatrix} = 0. \quad (25.22)$$

25.7. Упражнения. 1. Метод разложения в непрерывную дробь. Вычислить критическую нагрузку при продольном изгибе стержня для задачи 4 из п. 14.6 как наименьшее собственное значение λ_1

$$-y'' = \lambda(2 + \cos x)y, \quad y(0) = y(\pi) = 0$$

методом разложения в непрерывную дробь, описанным в 25.5.

Результат. Полагая $y = \sum a_n \sin nx$ и пользуясь формулой

$$2 \cos x \sin nx = \sin(n+1)x + \sin(n-1)x,$$

получим для коэффициентов a_n бесконечную систему линейных уравнений, определитель которой с заменой $\lambda = 1/\mu$ (см. задачу 4 в п. 16.11) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 - \mu & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & 2 - 4\mu & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & 2 - 9\mu & \frac{1}{2} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 2 - 16\mu & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = 0.$$

По формулам (25.16) и (25.17) получим соответствующее уравнение в виде непрерывной дроби

$$\begin{aligned} \lambda &= f(\lambda); \\ f(\lambda) &= \frac{1}{2 - \frac{0,25}{2 - \frac{4}{\lambda} - \frac{0,25}{2 - \frac{9}{\lambda} - \frac{0,25}{2 - \frac{16}{\lambda} - \dots}}}} \end{aligned} \quad (25.23)$$

На рис. 25.3 представлен график функции $f(\lambda)$; кривая в начальных точках имеет очень малый угол наклона к оси абсцисс, так что итерационный метод $\lambda_1^{(v+1)} = f(\lambda_1^{(v)})$ хорошо сходится. Исходя из $\lambda_1^{(0)} = 0$, получим

$$\lambda_1^{(1)} = 0,5, \quad \lambda_1^{(2)} = 0,490, \quad \lambda_1^{(3)} = 0,490036.$$

Дальнейший расчет показывает, что при вычислении последующих $\lambda_1^{(v)}$ шестой десятичный знак для $\lambda_1^{(3)}$ больше не меняется. Второе и более высокие собственные значения можно получить тем же самым методом, однако

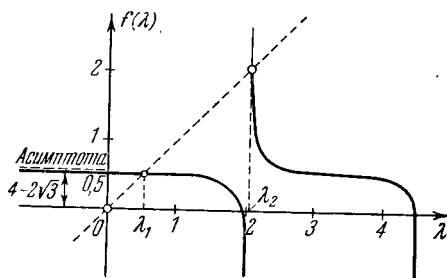


Рис. 25.3. К задаче 1 п. 25.7.

соответствующая ветвь кривой $f(\lambda)$ изменяется очень круто. Получить благоприятную точку пересечения, например, для второго собственного значения λ_2 , можно пересчитывая непрерывную дробь до места $2 - 4/\lambda$, которое вызывает сильное изменение, и представляя (25.23) в форме $g(\lambda) = h(\lambda)$ с

$$g(\lambda) = \frac{1}{2 - \frac{9}{\lambda} - \frac{0,25}{2 - \frac{16}{\lambda} - \frac{0,25}{2 - \frac{25}{\lambda} - \dots}}}$$

$$\text{и } h(\lambda) = 8 \frac{\lambda - 2}{\lambda} + \frac{\lambda}{1 - 2\lambda}.$$

Кривые для $g(\lambda)$ и $h(\lambda)$ графически представлены на рис. 25.4, откуда получим $\lambda_2 = 2,0593$.

2. Разложение в степенной ряд. В примере крутильных колебаний диска, который рассматривался в задаче 4 п. 11.4:

$$-(e^{-x^2} y')' = \lambda e^{-x^2} y, \quad -y'' + 2xy' = \lambda y, \quad y(0) = y'(1) = 0$$

вычислить два наименьших собственных значения с помощью разложения в степенной ряд

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Вычисление. Подстановка степенного ряда для y в дифференциальное уравнение $-y'' + 2xy' - \lambda y = 0$ дает

$$\sum_{n=0}^{\infty} [-(n+1)(n+2)a_{n+2} + (2n-\lambda)a_n] x^n = 0.$$

Приравнивая нулю каждый член в квадратных скобках, получим для a_n

рекуррентную формулу

$$a_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+1)(n+2)} a_n.$$

Используя граничные условия, найдем

$$y'(0) = a_1 = 1, \quad y(0) = a_0 = 0.$$

Отсюда получим

$$y(x) = x - \frac{\lambda - 2}{3!} x^3 + \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 6)}{5!} x^5 - \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 6)(\lambda - 10)}{7!} x^7 + \dots$$

Второе краевое условие $y'(1) = 0$ представляет собой трансцендентное уравнение для нахождения λ

$$g(\lambda) = 1 - \frac{\lambda - 2}{2!} + \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 6)}{4!} - \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 6)(\lambda - 10)}{6!} + \frac{(\lambda - 2)(\lambda - 6)(\lambda - 10)(\lambda - 14)}{8!} - \dots = 0.$$

Нули этой функции $g(\lambda)$ удобнее определять не путем обрывания ряда и решения соответствующего алгебраического уравнения, а вычисляя $g(\lambda)$ для нескольких значений λ по хорошо сходящемуся ряду, затем посредством интерполяции можно найти точки пересечения $g(\lambda)$ с осью абсцисс. Получим

$$\lambda_1 = 3,59692, \quad \lambda_2 = 23,518.$$

3. Вычислить наименьшее собственное значение

$$-\left(\frac{y'}{1+x}\right)' = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Здесь более целесообразно разлагать в ряд не y , а

$$\frac{y'}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Подстановка степенного ряда в дифференциальное уравнение дает рекуррентную формулу для $b_n = n! a_n$

$$b_{n+1} = -\lambda (b_{n+1} - (n-1)b_{n-2}) \quad (n = 2, 3, \dots).$$

С $b_0 = 1$ получим $b_1 = 0$, $b_2 = b_3 = -\lambda$, $b_4 = \lambda^2$, $b_5 = 4\lambda^2$, $b_6 = 4\lambda^2 - \lambda^3$, $b_7 = -9\lambda^3$, $b_8 = -28\lambda^3 + \lambda^4$, ... А из $y(1) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+3}{(n+2)!} b_n = 0$ получим трансцен-

дентное уравнение $\frac{3}{2} - \frac{11}{30} \lambda + \frac{13}{480} \lambda^2 - \frac{953}{7! \cdot 198} \lambda^3 + \frac{785}{11!} \lambda^4 - \dots = 0$, из которого, как и в задаче 2 (не путем обрывания), получим в качестве первого корня

$$\lambda_1 = 6,774.$$

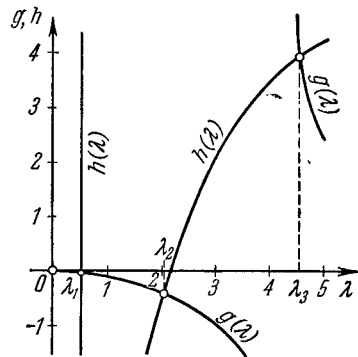


Рис. 25.4. Метод разложения в непрерывную дробь для второго собственного значения.

4. Комбинация различных методов. Вычислить первые три собственных значения для краевой задачи

$$-\left(\frac{y'}{1+x}\right)' = \lambda y, \quad y(0) = y(1) = 0.$$

Теорема сравнения. Грубые границы для λ

$$\frac{1}{2} k^2 \pi^2 \leq \lambda_k \leq k^2 \pi^2 \quad (k = 1, 2, \dots)$$

можно получить путем сравнения с краевыми задачами $-\frac{1}{2} y'' = \lambda y$ и $-y'' = \lambda y$ при тех же краевых условиях. Пользуясь теоремой сравнения из п. 8. 5, получим написанное выше неравенство.

Теорема включения. С помощью удовлетворяющей краевым условиям функции

$$F_1(x) = (1+x)^{-n} \sin \left[k\pi \frac{(1+x)^{2n+2} - 1}{2^{2n+2} - 1} \right]$$

образуем по формуле (9.6) вспомогательную функцию

$$\Phi(x) = k^2 \pi^2 \left(\frac{2n+2}{2^{2n+2} - 1} \right)^2 (1+x)^{4n+1} - \frac{n(n+2)}{(1+x)^3}. \quad (25.24)$$

Для $n = -\frac{1}{4}$, т. е. при $4n+1=0$, получим границы

$$(k\pi A)^2 + \frac{7}{128} \leq \lambda_k \leq (k\pi A)^2 + \frac{7}{16}, \quad A = \frac{3}{14} (2\sqrt{2} + 1) \quad (25.25)$$

или

$$\left. \begin{aligned} 6,697 &\leq \lambda_1 \leq 7,080, \\ 26,624 &\leq \lambda_2 \leq 27,008, \\ 59,836 &\leq \lambda_3 \leq 60,220. \end{aligned} \right\} \quad (25.26)$$

Границы, вычисленные в процентах, более благоприятны для высших собственных значений. Границы можно улучшить с помощью функции Грина (по таблице IV)

$$G(x, \xi) = \left(x + \frac{x^2}{2}\right) \left(1 - \frac{2}{3} \left(\xi + \frac{\xi^2}{2}\right)\right) \quad \text{при } x \leq \xi.$$

Тогда по формуле (7.21) получим

$$\int_0^1 \int_0^1 [G(x, \xi)]^2 dx d\xi = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i^2} = \frac{383}{16200}.$$

Используя верхнюю границу для $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4, \lambda_5$, вычисленную из (25.25), отсюда найдем $\lambda_1 \geq 6,7617$.

Сузить границы можно, кроме того, меняя в (25.24) величину n и определяя наилучшее значение путем интерполяции:

k	$4n + 1$	Экстремальное значение Φ	Границы для собственных значений
1	0,078 0,050	$\Phi_{\max} = 6,843$ $\Phi_{\min} = 6,764$	$6,764 \leq \lambda_1 \leq 6,843$
2	0,0206 0,013	$\Phi_{\max} = 26,782$ $\Phi_{\min} = 26,695$	$26,695 \leq \lambda_2 \leq 26,782$
3	0,0082 0,0056	$\Phi_{\max} = 60,00$ $\Phi_{\min} = 59,91$	$59,91 \leq \lambda_3 \leq 60,00$

Для высших собственных значений этот метод предпочтительнее всех других.

Метод последовательных приближений.

Исходя из $F_0(x) = 360(x - x^2)$, получим согласно п. 12.5

$$F_1(x) = 34x + 17x^2 - 60x^3 - 15x^4 + 24x^5$$

и из (12.20)

$$a_0 = 4320, \quad a_1 = \frac{4422}{7}, \quad a_2 = \frac{107494}{1155},$$

$$\mu_1 = 6,8385, \quad \mu_2 = 6,7876.$$

Если из (25.26) взять $I_2 = 26,624$, то (12.21) дает

$$6,770 \leq \lambda_1 \leq 6,788.$$

5. Показать, что для функционального уравнения на собственные значения

$$-y''(x) = \lambda y\left(\frac{x}{2}\right)$$

с краевыми условиями

$$y(-1) = y(1) = 0$$

(у при $x = 0$ регулярно) существует счетное бесконечное множество положительных собственных значений λ , и которые возрастают не пропорционально n^2 , как в (7.53), а экспоненциально с ростом n . С помощью разложения в степенной ряд вычислить первые три собственных значения.

Результат. $\lambda_n \geq \lambda_1 2^{n-1}$ для $n = 1, 2, \dots$, $\lambda_1 = 2,091$, $\lambda_2 = 13,1$, $\lambda_3 = 51,6$.

6. С помощью формулы Данкерлея (25.5) получить нижнюю границу для первого собственного значения краевой задачи

$$y^{IV} = \lambda(10y - y''), \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0.$$

Решение. Наименьшее собственное значение краевой задачи

$$y^{IV} = 10\lambda^{(1)}y, \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0$$

есть

$$\lambda_1^{(1)} = \frac{(4,73004)^4}{10} \quad (\text{по таблице VI}),$$

а для краевой задачи

$$y^{IV} = -\lambda^2 y'', \quad y(0) = y(1) = y'(0) = y'(1) = 0 \quad \lambda_1^{(2)} = 4\pi^2.$$

Отсюда по формуле (25.5)

$$\lambda_1 \geq \frac{1}{\frac{1}{\lambda_1^{(1)}} + \frac{1}{\lambda_1^{(2)}}} = 22,071.$$

Верхнюю границу для собственного значения λ_1 можно получить с помощью отношения Рэлея

$$R[u] = \frac{\int_0^1 (u'')^2 dx}{\int_0^1 (10u^2 + u'^2) dx},$$

подставляя в качестве функции сравнения $u = 1 - \cos 2\pi x$:

$$\lambda_1 \leq 22,432.$$

Среднее значение $\lambda_1 \approx 22,25$ отличается от точного не более чем на 1%.
7. Для задачи 8 из п. 14,6

$$-y'' = \lambda y + \lambda^2 x^2 y, \quad y(\pm 1) = 0$$

определить несколько собственных значений, разлагая соответствующие собственные функции в степенной ряд.

Результат. Подставив

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

в дифференциальное уравнение, получим для коэффициентов a_n рекуррентную формулу

$$a_n = \frac{-1}{(n-1)n} (\lambda a_{n-2} + \lambda^2 a_{n-4}) \quad (n = 4, 5, 6, \dots);$$

Имеются две системы собственных функций: симметричная ($a_1 = a_3 = \dots = 0$) и антисимметричная ($a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$).

Обозначая $z = \lambda x^2$, получим для симметричных собственных функций

$$y = y_s = 1 - \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{4!} + \frac{13z^3}{6!} + \frac{17z^4}{8!} - \frac{745z^5}{10!} + \dots$$

и для антисимметричных функций

$$y = y_a = x \left(1 - \frac{z}{3!} - \frac{5z^2}{5!} + \frac{25z^3}{7!} + \dots \right).$$

Краевое условие $y(1) = 0$ представляет тогда трансцендентное уравнение для собственных значений. Здесь возникает новое интересное явление: имеются две основные формы колебаний.

Обе симметричные собственные функции, принадлежащие к собственным значениям $\lambda = 1,9517$ и $\lambda \approx -6,5$, не обращаются в нуль внутри интервала $-1 < x < 1$.

РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ВЫБОРУ МЕТОДОВ ПРИБЛИЖЕННОГО ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ

Разумеется, невозможно раз и навсегда указать, какой из описанных в этой книге методов является наилучшим в данном конкретном случае. В зависимости от личного вкуса вычислитель может предпочитать одни методы другим, а при некотором навыке будет использовать видоизменения и комбинации описанных здесь общих методов.

Напомним в краткой форме некоторые из важнейших методов, не претендуя на полноту.

1. Решения в замкнутой форме

а) В случае обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами можно указать общие решения в замкнутой форме. Постоянные интегрирования находятся из краевых условий.

б) В случае обыкновенных дифференциальных уравнений с непостоянными коэффициентами и дифференциальных уравнений с частными производными решения в замкнутой форме удается получить редко. Некоторые примеры таких случаев приведены в таблицах V и VI. Вообще же для вычисления собственных значений применяются численные и графические методы.

2. Приближенное вычисление

а) При небольших требованиях к точности очень часто можно получить границы для первого и даже для высших собственных значений с помощью теоремы сравнения (п. 8.5) или теоремы включения (§ 9). При этом рассматриваемая задача сравнивается с другой, разрешимой в замкнутой форме, например, для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Границы собственных значений часто могут быть существенно улучшены путем использования свободного параметра в теореме включения (см. задачу 6. п. 11.4).

б) Обыкновенный метод конечных разностей (§§ 21 и 23) при грубом шаге и, следовательно, небольшой вычислительной работе дает представление о распределении низших собственных значений и поведении собственных функций (см. задачу 1 п. 23.6). Если требуются более точные значения, то вместо перехода к более мелкому шагу следует воспользоваться одним из улучшенных разностных методов.

3. Более точное вычисление

а) Для первого собственного значения в случаях, когда выполнены дополнительные предпосылки теоремы п. 12.4, наилучшим, пожалуй, является метод последовательных приближений, дающих верхнюю и нижнюю границы согласно (12.19); в зависимости от свойств задачи результат получается численно или графически (§ 12 и 13, в частности п.п. 12.5, 12.6, 13.6).

б) Большую область применения имеет метод Ритца (см. п. 16.1); он дает также верхние границы для высших собственных значений. Если высшие собственные значения требуется определить с большей точностью, то в представлении Ритца берется достаточно большое число членов, например, для вычисления второго собственного значения по крайней мере три. Точность приближенных собственных значений по Ритцу зависит от свойств выбранных функций. Поэтому метод Ритца (обычно при графической реализации) проводят таким образом, что выбранные собственные функции улучшаются итерационно.

Во многих случаях существует возможность ограничиться неполным итерационным шагом. Тогда при меньшей вычислительной (соответственно графической) работе (в сравнении с полным итерационным шагом) и во всяком случае с меньшей точностью можно написать уравнения Граммеля и из них найти приближения для собственных функций и собственных значений.

в) Еще шире область применения метода конечных разностей, который не связан с какими-либо дополнительными предположениями и для некоторых задач, например, в случае дифференциальных уравнений с частными производными, является единственным практически реализуемым методом приближенных вычислений. Методы повышенной точности описаны в §§ 22 и 23. Однако в методе конечных разностей мало что можно сказать о приближениях; вообще неизвестно, являются ли приближенные собственные значения слишком большими или слишком малыми.

4. Прочие методы

Кроме этого, в распоряжении имеется много других методов, которые в различных частных случаях могут быть очень удобны. Не стремясь к полноте, укажем только разложение в ряды (пп. 25.5 и 25.6), метод возмущений (§ 24) и метод интегральных уравнений (§ 7).

ПЕРЕЧЕНЬ РАССМОТРЕННЫХ ПРИМЕРОВ. ТАБЛИЦЫ

Обозначения: *B* — некоторые пояснения, *D* — конечноразностный метод, *Du* — формула Данкерлея, *Dv* — улучшенный конечноразностный метод, *e* — точные решения, *E* — теорема включения, *G* — функция Грина, *I* — метод интегральных уравнений, *It* — итерационный метод, *K* — метод непрерывных дробей, *Kl* — метод коллокации, *P* — метод степенных рядов, *R* — метод Рэлея — Ритца, *S* — метод последовательных приближений, *St* — метод возмущений, *V* — теорема сравнения

Дифференциальное уравнение	Краевые условия	Метод и указание страницы
<i>Дифференциальные уравнения второго порядка</i>		
$-y'' = \lambda y$ (см. также таблицу VI)	Тип $\left\{ \begin{array}{l} y(a) = y(b) = 0 \\ y(a) = y'(b) = 0 \\ y(0) = c_1 y(1) + c_2 y'(1) = 0 \\ y'(0) = c_1 y(1) + c_2 y'(1) = 0 \\ y(0) = y(1) - k(\lambda) y'(1) = 0 \\ y'(0) - Ay(0) = y'(1) - By(1) = 0 \\ y(0) = y'(1) - \lambda y'(0) = 0 \\ y(0) - y(1) = y'(0) + y'(1) = 0 \end{array} \right.$	$G 85, e 171,$ $R 263, Kl 414$ $e 19, G 85, E 143,$ $R 261, S 142,$ $e 394, Dv 394$ $B 128, S 179,$ $R 223, 234,$ $B 128, S 214$ $e 56, G 87$ $B 69, e 74$ $e 125$ $e 88$
$-y'' = \lambda p(x) y$	$y(0) = y(a) = 0$	$E 146$
$p(x) = 10 - x^2$ и некоторые другие примеры	$y(\pm 1) = 0$	$e 127$
$-y'' = \lambda \operatorname{sg} nx \cdot y$	$y(\pm 1) = 0$	$e 127$

Продолжение

Дифференциальное уравнение	Краевые условия	Метод и указание страницы
$-y'' = \begin{cases} 2\lambda y & \text{для } x < 1/2 \\ \lambda y & \text{для } x > 1/2 \end{cases}$	$y(0) = y(1) = 0$	<i>e</i> 362, <i>D</i> 361, <i>Dv</i> 372, 375
$-y'' = \lambda(1 + \sin x)y$ $-y'' = \lambda(2 + \cos x)y$	$y(0) = y(\pi) = 0$ $y'(0) = y'(\pi) = 0$	<i>E</i> 174, <i>S</i> 187 <i>S</i> 217, <i>R</i> 262, <i>KI</i> 415, <i>K</i> 421
$-y'' = \lambda xy$	$y(0) = y(1) = 0$	<i>D</i> 394, <i>Dv</i> 394, <i>Z. angew. Math. Mech.</i> 19 (1939), 316
$-y'' = \lambda(1 + x^2)y$	$y(\pm 1) = 0$	<i>D</i> 393
$-y'' = (\lambda - 2h^2 \cos 2x)y$	Периодичность	<i>K</i> 417
$y'' + (\lambda \pm 1)y = 0$	Периодичность	<i>e</i> 58
$y'' + (\lambda - U(x))y = 0$	y ограничено в бесконечности	<i>B</i> 57
$-y'' = \lambda y + \lambda^2 x^2 y$	$y(\pm 1) = 0$	<i>S</i> 220, <i>P</i> 426
$-(e^{-x^2} y')' = \lambda e^{-x^2} y$	$y(0) = y'(1) = 0$	<i>E</i> 173, <i>Dv</i> 377, <i>D</i> 365, <i>P</i> 422, <i>Z. angew. Math. Mech.</i> 19 (1939), 304—308
$-\left(\frac{y'}{1+x}\right)' = \lambda y$	$y(0) = y(1) = 0$	<i>D</i> 397, <i>P</i> 422, <i>V</i> 424, <i>E</i> 424, <i>G</i> 424, <i>S</i> 425
$y'' = \lambda y'$	$y(0) = y(l) = 0$	<i>e</i> 125
$y'' + iy' = \lambda y$	$y(\pm 1) = 0$	<i>e</i> 295
некоторые другие случаи в таблицах V, VI и стр. 71, 125, 128, 130		

Продолжение

Дифференциальное уравнение	Крайевые условия	Метод и указание страницы
<i>Дифференциальные уравнения порядка выше второго</i>		
$y^{IV} = \lambda y$ (см. также таблицу VI)	$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$ $y''(0) = y''(l) = 0$ $y(0) + c_1 y'''(0) = y(l) + c_2 y'''(l) = 0$	I 120, R 264, 265 e 36, B 95
$y^{IV} = \lambda(1+x)y$	$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$	V 140
$(\alpha y'')'' = \lambda g_0 y$	$y(0) = y'(0) = y''(l) = y'''(l) = 0$	S 202, R 258
$y^{IV} + A(1-x)y'y' = \lambda y$	$y(0) = y'(0) = y''(1) = y'''(1) = 0$	S 219, R 264
$y^{IV} = -\lambda y''$	$y(\pm 1) = y'(\pm 1) = 0$ $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$ различные другие крайевые условия	e 394, D 395, Du 395 e 66, S 219 e 55, 56, 89, 125, табл. VI
$y^{IV} + Ay = -\lambda y''$ $y^{IV} + 4y = -\lambda y''$ $y^{IV} + \frac{9\pi^4}{l^4} y = -\lambda y''$	$y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$ $y(0) = y''(0) = y(\pi) = y''(\pi) = 0$ $y(0) = y'(0) = y(l) = y'(l) = 0$	E 173, S 218, R 264 e 93, St 405 e 127
$y^{IV} = \lambda_1 y - 2\lambda_2 y''$ $y^{IV} = \lambda(10y - y'')$	$y(0) = y'(0) = y'(l) = y'(l) = 0$ $y(0) = y'(0) = y(1) = y'(1) = 0$	e 170 R 426, Du 425
$y^{IV} - \varepsilon(xy')' = -\lambda y''$	$y(0) = y''(0) = y(1) = y''(1) = 0$	St 409
$[(2-x)y'']'' = -\lambda y''$	$y(0) = y'(0) = y(1) = y''(1) = 0$	S 188, R 261, D 363
$[(3-x^2)y'']'' + 60y = -\lambda y''$	$y(\pm 1) = y(\pm 1) = 0$	E 172, S 215
некоторые другие случаи в таблице VI и стр. 70, 129		

Продолжение

Дифференциальное уравнение	Краевые условия	Метод и указание страницы
$y^{VI} = r(x)$	$y, y', y'' = 0$ для $x = 0$ и 1	G 126
$-y^{VI} - 49y'' = \lambda(14y^{IV} + 36y)$	$y, y'', y^{IV} = 0$ для $x = 0$ и π	e 92
$-y^{VI} + 2y^{IV} - y'' = \lambda(-y'' + y)$	y, y', y'' или $y, y', y''' = 0$ при $x = a$ и $x = b$	B 73
<i>Другие примеры</i>		
Продольный изгиб стержня от двух сил		e 48
Крутильные колебания вала с двумя сосредоточенными массами		e 52, R 251
Изгибные колебания балки на двух опорах с сосредоточенной массой		e 48, R 249
Изгибные колебания балки на трех опорах или рамы		e 49, 49, R 259
<i>Дифференциальные уравнения с частными производными</i>		
$-\Delta z = \lambda z$ (колебания мембраны)	$z = 0$ на краю квадрат круг эллипс ромб треугольник пятиугольник, рис. 23.10	e 127, D 429 G 100 R 254, D 380, KI 415 D 388, Dv 389, 496 D 386, Dv 387, e 498, Z. angew. Math. Mech. 19 (1939), 305—309 Dv 390, D 391
$\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 s}{\partial z^2} = \lambda s$	$s = 0$ на краю «домика»	B 390, D 398

Продолжение

Вид уравнения и краевые условия	Метод и указание страницы	
<p>Интегральные и функциональные уравнения</p> $y^{IV} - 20y'' + k \int_{-1}^1 y \, dx = \lambda (1 + x^2) y,$ $y(\pm 1) = y''(\pm 1) = 0$	<p>R 265, D 400</p>	
$z(x, y) = \lambda \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (x - \xi - y + \eta)^2 z(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta$	<p>e 130</p>	
$-y''(x) = \lambda y\left(\frac{x}{2}\right); \quad y(\pm 1) = 0$	<p>P 495</p>	
<p><i>Матрицы</i></p>		
Задачи	Типы матриц	Метод и указание страницы
<p>Степени матриц</p>	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	<p>e 342</p>
<p>Функции матриц</p>	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	<p>e 344</p>
<p>Оценки</p>	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	<p>B 351</p>
<p>Повышение порядка</p>	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 14 & 10 & 9 \\ 10 & 12 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$	<p>B 353</p>

Продолжение

Задачи	Типы матриц	Метод и указание страницы
<i>Частные задачи на собственные значения $\mathfrak{X}\xi = \kappa\xi$</i>		
Матрица системы дифференциальных уравнений	$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	e 339
Пример с только одним собственным вектором и главными векторами	$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \\ 7 & -10 & -6 \end{pmatrix}$	e 339
Балка на двух опорах с подпружиненными массами	$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 1180 & -331 & 144 & -36 \\ -331 & 906 & -367 & 144 \\ 144 & -367 & 906 & -331 \\ -36 & 144 & -331 & 762 \end{pmatrix}$	B 289 E 313
Балка с массами и пружинами	$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 47 & -14 & -20 & 0 \\ -14 & 28 & 0 & -20 \\ -20 & 0 & 20 & 0 \\ 0 & -20 & 0 & 20 \end{pmatrix}$	e 354
Механическая система с затуханием	$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	It 319
Крутильные колебания диска	$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} 0 & 24 & 0 & 0 & 0 \\ 27 & 0 & 23 & 0 & 0 \\ 0 & 28 & 0 & 22 & 0 \\ 0 & 0 & 29 & 0 & 21 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 0 \end{pmatrix}$	It 366
Акустическая задача	$\mathfrak{X} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 4 & 8 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 8 \\ 1 & 4 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$	It 325 E 391

Продолжение

Задачи	Типы матриц	Метод и указание страницы
Комплексные элементы	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1+i & 2+i \\ 1-i & 2 & 1-2i \\ 2-i & 1+2i & 1 \end{pmatrix}$	Ит 356 е 356
Многогранник (кубооктаэдр), матрица 12-го порядка		е 355
Дальнейшие примеры в таблицах VIII и IX		
<i>Промежуточные задачи на собственные значения $\mathfrak{A}\xi = \kappa\mathfrak{D}\xi$</i>		
Балка с сосредоточенными массами	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 9 & 11 & 7 \\ 11 & 16 & 11 \\ 7 & 11 & 9 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$	е 280
Опертая на пружинах прямоугольная пластина	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & -4 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	е 281
<i>Общие задачи на собственные значения $\mathfrak{A}\xi = \kappa\mathfrak{B}\xi$</i>		
Тройной маятник с пружинной связью	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	е 287
Главные оси конических сечений	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	е 308
Задача без собственного вектора	$\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \mathfrak{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$	В 328

Простые примеры технических задач на собственные

Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)
I. Частные задачи на собственные Дифференциальные уравнения		
	Поперечные колебания струны, концы закреплены	1) стр. 453
	Поперечные колебания струны, один конец свободен	
	Поперечные колебания струны. Концы упруго закреплены	2) стр. 453
	Поперечные колебания струны на упругом основании	3) стр. 453
	Продольные колебания стержня. Концы закреплены	4) стр. 453
	Продольные колебания стержня. Один конец свободен	
	Крутильные колебания стержня	5) стр. 453
	Крутильные колебания стержня. Концы в подшипниках	
	Продольный изгиб стержня. Концы шарнирно закреплены	6) стр. 453
	Продольный изгиб стержня. Один конец зашпелен, другой свободен	
	Опрокидывание балки	7) стр. 453
	Диски паровых турбин $\left\{ \begin{array}{l} \text{Крутильные колебания} \\ \text{Колебания растяжения} \end{array} \right.$	8) стр. 453

Таблица I

значения для обыкновенных дифференциальных уравнений

λ	Дифференциальное уравнение	Главные граничные условия Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y_l'' = y''(l)$ и т. д.	Естественные граничные условия
ные значения $M[y] = \lambda p(x)y$ второго порядка			
ω^2	$-y'' = \lambda \frac{\rho F}{S} y$	$y_0 = y_l = 0$	
ω^2	$-y'' = \lambda \frac{\rho F}{S} y$	$y_0 = 0$	$y' = 0$
ω^2	$-y'' = \lambda \frac{\rho F}{S} y$		$c_1 y_0 = y_0'$ $-c_2 y_l = y_l'$
ω^2	$-y'' + c_1 y = \lambda c_2 y$	$y_0 = y_l = 0$	
ω^2	$-E(Fy')' = \lambda \rho F y$	$y_0 = y_l = 0$	
ω^2	$-E(Fy')' = \lambda \rho F y$	$y_0 = 0$	$y_l' = 0$
ω^2	$-(Cy')' = \lambda \rho J_{\rho} y$	$y_l = 0$	$y_0' = 0$
ω^2	$-(Cy')' = \lambda \rho J_{\rho} y$		$y_0' = y_l' = 0$
P	$-y'' = \lambda \frac{1}{a} y$	$y_0 = y_l = 0$	
P	$-y'' = \lambda \frac{1}{a} y$	$y_0 = 0$	$y_l' = 0$
P^2	$-(Cy')' = \lambda \frac{x^2}{a} y$	$y_l = 0$	$y_0' = 0$
$c_1 \omega^2$	$-(x^3 h y')' = \lambda x^3 h y$	$y_l = 0$	$\left. \begin{array}{l} c_2 y_l = y_l' \\ c_3 y_0 = y_0' \end{array} \right\}$
$c_1 \omega^2$	$-y'' - y' \left(\frac{h'}{h} + \frac{1}{x} \right) -$ $-y \left(\frac{v}{x} \frac{h'}{h} - \frac{1}{x^2} \right) = \lambda y$		

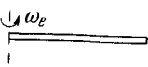
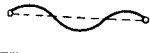


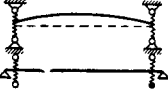
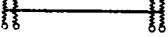
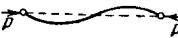
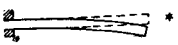
Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)
	Выпучивание кругового кольца при постоянном внешнем давлении p	9) стр. 453
	Колебания маятника с вибрирующей точкой подвеса	10) стр. 453
	Поперечные колебания кольцевой мембраны (внутренний радиус R_i , внешний радиус R_a)	11) стр. 453
	Изгибные колебания стержня, вращающегося около перпендикулярной ему оси (с учетом только центробежных сил)	12) стр. 453
	Устойчивость тонкостенных полых шаров при равномерном внешнем давлении	13) стр. 453
<i>Дифференциальные уравнения</i>		
	Изгибные колебания стержня. Концы шарнирно оперты	14) стр. 453
	Изгибные колебания стержня. Один конец свободен	
	Изгибные колебания стержня. Концы заземлены	
	Изгибные колебания стержня. Упругие опоры	
	Изгибные колебания стержня. Совмещение упругих опор с упругим заземлением	15) стр. 453
	Изгибные колебания сжимаемого стержня	16) стр. 453
	Изгибные колебания сжимаемого стержня с учетом собственного веса (дымовая труба)	17) стр. 453

Таблица I (продолжение)

λ	Дифференциальное уравнение	Главные границные условия Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y_l'' = y''(l)$ и т. д.	Естественные границные условия
ρ	$-y'' + y = \lambda c_1 y$		периодичность
ω^2	$-y'' + g(x)y = \lambda c_1 y$; $g(x) = g(x + 2\pi)$		периодичность
ω^2	$-(xy'')' + \frac{n^2}{x} y = \lambda c_1 xy$	$y(R_l) = y(R_a) = 0$	
ω^2	$-[(c_1^2 - x^2)y']' = \frac{2}{\omega_e^2} \lambda y$		
	$-y'' - y' \operatorname{ctg} x + y \operatorname{ctg}^2 x = \lambda y$		
<i>четвертого порядка</i>			
ω^2	$(\alpha y'')'' = \lambda \rho F y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
	$(\alpha y'')'' = \lambda \rho F y$	$y_0 = y_0' = 0$	$y_l'' = y_l''' = 0$
	$(\alpha y'')'' = \lambda \rho F y$	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
	$(\alpha y'')'' = \lambda \rho F y$		$y_0'' = y_l'' = 0$; $\begin{cases} y_0 + c_1 y_0''' = 0 \\ y_l - c_1 y_l''' = 0 \end{cases}$
	$(\alpha y'')'' = \lambda \rho F y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = c_1 y_0'$; $y_l'' = -c_1 y_l'$ $y_0''' = c_1 y_0''$; $y_l''' = -c_1 y_l''$ $y_0''' = -c_2 y_0$; $y_l''' = c_2 y_l$
	$(\alpha y'')'' + P y'' = \lambda \rho F y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
	$(\alpha y'')'' + (G y')' = \lambda \rho F y$	$y_0 = y_0' = 0$	$y_l'' = y_l''' = 0$


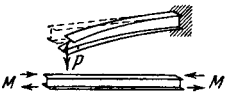
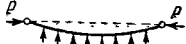
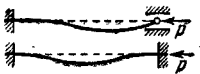

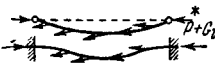
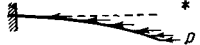
Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)
	Крутильные колебания двутавровых балок с учетом изгиба полок	18) стр. 453
	Крутильные колебания двутавровых балок. Концы оперты	
	Опрокидывание двутавровых балок с учетом изгиба полок	19) стр. 453
	Опрокидывание двутавровых балок под действием моментов, концы оперты	
	Колебания сопротивляющегося изгибу каната { Жесткое защемление Безмоментное защемление	20) стр. 453
	Колебания стержня на упругом основании	21) стр. 453
2. Общие задачи на Одночленный		
	Сжимаемый стержень на упругом основании	22) стр. 453
	Продольный изгиб стержня. Один конец защемлен, другой — шарнирно оперт	23) стр. 453
	Продольный изгиб стержня. Концы защемлены	24) стр. 453
	Продольный изгиб тяжелых стержней. Концы { шарнирно-оперты, защемлены	25) стр. 453
	Продольный изгиб стержня с учетом собственного веса	26) стр. 453

Таблица I (продолжение)

λ	Дифференциальное уравнение	Главные граничные условия Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y_l'' = y''(l)$ и т. д.	Естественные
	$Dy^{IV} - Cy'' = \lambda \rho J_{\rho} y$	$y_l = y_l' = 0$	$y_0'' = 0$; $Cy_0' = Dy_0'''$
	$Dy^{IV} - Cy'' = \lambda \rho J_{\rho} y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$c_1 P$	$Dy^{IV} - Cy'' = \lambda x^2 y$	$y_l = y_l' = 0$	$y_0'' = 0$; $Cy_0' = Dy_0'''$
$c_1 M$	$Dy^{IV} - Cy'' = \lambda y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = 0$; $y_l'' = 0$
ω^2	$y^{IV} - c_1 y'' = \lambda c_2 y$	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$ $y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
ω^2	$(\alpha y'')'' + c_1 y = \lambda c_2 y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$

собственные значения

класс $M[y] = (-1)^n \lambda [g_n(x) y^{(n)}]^{(n)}$

P	$(\alpha y'')'' + \kappa y = -\lambda y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
P	$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0 = y_0' = y_l = 0$	$y_l'' = 0$
P	$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
P	$(\alpha y'')'' - (Gy')' = -\lambda y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
		$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
P	$(\alpha y'')'' - (Gy')' = -\lambda y''$	$y_l = y_0' = 0$	$y_l'' = (\alpha y'')_0' = 0$

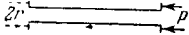
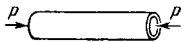
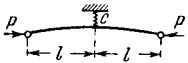
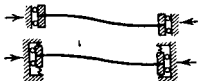
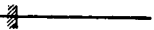



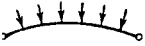




Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)			
	Выпучивание аксиально сжимаемых фланцевых труб	27) стр. 453			
	Продольный изгиб полой круглоцилиндрической колонны при аксиальном сжатии	28) стр. 453			
	Продольный изгиб стержня при наличии упругой опоры на середине	29) стр. 453			
	Продольный изгиб стержня. Концы зашемлены и	30) стр. 453			
	<table border="0"> <tr> <td rowspan="2" style="font-size: 3em; vertical-align: middle;">{</td> <td style="padding-left: 10px;">подвижны</td> <td data-bbox="829 624 989 624">30) стр. 453</td> </tr> <tr> <td style="padding-left: 10px;">упруго оперты</td> <td data-bbox="829 624 989 722">31) стр. 453</td> </tr> </table>	{	подвижны	30) стр. 453	упруго оперты
{	подвижны		30) стр. 453		
	упруго оперты	31) стр. 453			
<i>Более общие</i>					
	Выпучивание винтовой пружины	32) стр. 453			
	Продольные колебания стержней с учетом поперечного сжатия	33) стр. 453			
	Изгибные колебания стержней с учетом инерции вращения	34) стр. 453			
	Изгибные колебания вала с учетом гироскопического эффекта	35) стр. 453			
	Критические числа оборотов с учетом продольной нагрузки и гироскопического эффекта	36) стр. 453			
	Устойчивость радиально нагруженных круговых арок с шарнирно опертыми концами	37) стр. 453			
	Устойчивость радиально нагруженных круговых арок с зашемленными концами	38) стр. 453			

Таблица I (продолжение)

λ	Дифференциальное уравнение	Главные границные условия Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y_l'' = y''(l)$ и т. д.	Естественные
P	$y^{IV} + \frac{\nu}{r^2} y'' + c_1 y = -\lambda c_2 y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
$c_2 P$	$y^{IV} + c_1 y = -\lambda y''$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
P	$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0 = y_l' = 0$	$y_0'' = 0,$ $(\alpha y'')'_l = \frac{c}{2} y_l$
P	$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0' = y_l' = 0$	$y_0''' = y_l''' = 0$
P	$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_0' = y_l' = 0$	$y_0'' + c_1 y_0 =$ $= y_l''' + c_2 y_l = 0$

задачи $M[y] = \lambda N[y]$

P	$-\alpha y'' = \lambda (y - c_1 y'')$	$y_0 = y_l = 0$	
ω^2	$-E y'' = \lambda (y - c_1 y'')$	$y_0 = 0$	$y_l' = 0$
ω^2	$\alpha y^{IV} = \lambda (\rho F y - I \rho y'')$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
ω^2	$(\alpha y'')'' = \lambda (\rho F y + (c y')')$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
ω^2	$(\alpha y'')'' + P y'' = \lambda (c_1 y + c_2 y'')$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
	$y^{IV} + 2y'' + y = \lambda (c_1 y - y'')$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
	»	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	

Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)
	Устойчивость плоских параболических арок. Концы { шарнирные зашемленные	39) стр. 453
	Устойчивость круговых арок, радиально нагруженных в своей плоскости. Внешнее давление перпендикулярно к деформированной средней линии. Концы { шарнирные зашемленные	41) стр. 453 42) стр. 453
	То же, что и выше, но при давлении, направленном к центру круга. Концы зашемленные	43) стр. 454
	Изгибные колебания кругового кольца в своей плоскости	44) стр. 454
	Изгибные колебания кругового кольца при постоянном радиальном давлении { в плоскости кольца перпендикулярно к плоскости кольца. полное кольцо	45) стр. 454
	Колебания круговой арки перпендикулярно к ее плоскости	46) стр. 454
	Колебания двутавровой балки с учетом изгиба полок	

Т а б л и ц а I (продолжение)

λ	Дифференциальное уравнение	Главные границные условия Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y_l'' = y''(l)$ и т. д.	Естественные
опрокиды- вающий момент	$y^{IV} + y'' =$ $= \lambda [4xy''' + (2 - 3x^2)y'' - 4xy']$	$y_0 = y_l = 0$	$y_0'' = y_l'' = 0$
	»	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	
	$y^{IV} = \lambda [-(x^2y')' + 2y]$	$y_0' = y_l = y_l' = 0$	$y_0''' = 0$
$\frac{\rho a^3}{\alpha}$	$-(y^{VI} + 2y^{IV} + y'') = \lambda (y^{IV} + y'')$	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	$y_0''' = y_l''' = 0$
$\frac{\rho a^3}{\alpha}$	$-(y^{VI} + 2y^{IV} + y'') = \lambda (y^{IV} + y'')$	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
$\frac{\rho a^3}{\alpha}$	$-(y^{VI} + 2y^{IV} + y'') = \lambda (y^{IV} + 2y'')$	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
ω^2	$-(y^{VI} + 2y^{IV} - y'') = c_1 \lambda (y - y'')$	периодичность	
ω^2	$-[y^{VI} + (2 + c_1)y^{IV} + (1 + c_1)y''] =$ $= \lambda [y^{IV} + (2 - c_2)y'' + (1 + c_2)y]$	периодичность	
ω^2	$-[y^{VI} + (2 + c_1)y^{IV} + (1 + c_1)y''] =$ $= \lambda [y^{IV} + (2 - c_2)y'' + (1 + c_2)y]$	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	$y_0''' = y_l''' = 0$
ω^2	$-[y^{VI} + (2 + c_1)y^{IV} + (1 + c_1)y''] =$ $= \lambda [y^{IV} + (2 - c_2)y'' + (1 + c_2)y]$	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
ω^2	$-[y^{VI} + (2 + c_1)y^{IV} + (1 + c_1)y''] =$ $= \lambda (y - c_2y'')$	периодичность	
ω^2	$-(y^{VI} + 2y^{IV} + y'') =$ $= \lambda (c_1y^{IV} - c_2y'' + c_3y)$	$\begin{cases} y_0 = y_0' = y_0'' = 0 \\ y_l = y_l' = y_l'' = 0 \end{cases}$	
	уравнение 8-го порядка		

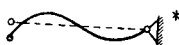
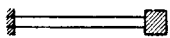
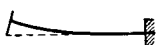

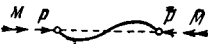
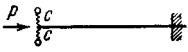
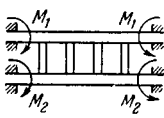
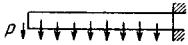
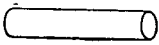
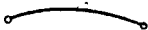



Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)
	Колебания тонкостенного полого обруча	47) стр. 454
	Крутильная устойчивость тонкостенной трубы	48) стр. 454
3. Задачи с λ входит в крае		
	Колебания подвешенного каната с массой на конце	49) стр. 454
	Продольные колебания стержня с массой на конце (колонна)	50) стр. 454
	Диски паровых турбин без лопастей { Крутильные колебания Колебания растяжения	51) стр. 454
	Изгибные колебания вала с учетом гироскопического эффекта, с диском (летающий вал)	52) стр. 454
	Изгибные колебания стержня с массой на конце	53) стр. 454
	Выпучивание сжимаемого вала под действием момента	54) стр. 454
	Изгиб стержня, один конец которого зашцеилен, а другой упруго оперт	55) стр. 454
	Опрокидывание ребристой решетки под действием изгибающих моментов	56) стр. 454 $M_1 = M_2$ $M_1 = -M_2$ $ M_1 \neq M_2 $

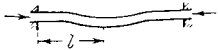
Таблица I (продолжение)

λ	Дифференциальное уравнение	Главные Естественные границные условия	
		Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y'_l = y'(l)$ и т. д.	
	$-y^{VI} + \sum_{v=0}^4 g_v(x) y^{(v)} = \lambda(y - y'')$	периодичность	
	Уравнение 8-го порядка		
особенностями <i>выше условия</i>			
ω^2	$-[(G + g\rho Fx) y']' = \lambda\rho Fy$	$y_l = 0$	$y'_0 + \frac{\lambda}{g} y_0 = 0$
$c_1\omega^2$	$-y'' = \lambda y$		$y'_0 = 0$; $y'_l = \lambda c_2 y_l$
$c_1\omega^2$	$(-x^3 h y')' = \lambda y x^3 h$		$y'(x_1) = c_2 y(x_1)$; $y'_l = \lambda c_3 y_l$
$c_1\omega^2$	$-y'' - y' \left(\frac{h'}{h} + \frac{1}{x} \right) -$ $-y \left(\frac{v}{x} \frac{h'}{h} - \frac{1}{x^2} \right) = \lambda y$		$y'(x_1) = c_2 y(x_1)$ $y'_l = (\lambda c_3 - c_1) y_l$
ω^2	$(\alpha y'')'' = \lambda (\rho Fy + (cy')')$	$y_l = y'_l = 0$	$y''_0 = \lambda c_1 y'_0$ $y'''_0 = \lambda (c_2 y_0 + c_3 y'_0)$
ω^2	$(\alpha y'')'' = \lambda \rho Fy$	$y_l = y'_l = 0$	$y''_0 = 0$; $y'''_0 + c_1 \lambda y_0 = 0$
M^2	$\alpha y^{IV} + 2Py'' + \frac{P^2}{\alpha} y = -\frac{\lambda}{\alpha} y''$	$y_0 = y_l = 0$	$(\alpha^2 y''' +$ $+ (\alpha P + \lambda) y')_0 \text{ и } l = 0$
P	$(\alpha y'')'' = -\lambda y''$	$y_l = y'_l = 0$	$y''_0 = c y_0 +$ $+ \lambda y'_0 + (\alpha y'')'_0 = 0$
$c_1 M^2_1$ $c_1 M^2_1$	$-y^{VI} + 3c_2 y^{IV} = \lambda y^{IV}$ $-y^{VI} + c_2 y^{IV} = \lambda y^{IV}$ Уравнение 8-го порядка	$\begin{cases} y_0 = y'_0 = 0 \\ y_l = y'_l = 0 \end{cases}$	$\begin{cases} y_0^{IV} + \lambda y''_0 = \\ = y_l^{IV} + \lambda y''_l = 0 \end{cases}$

Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)
<i>Дифференциальное</i>		
	Опрокидывание балки под действием массы на конце с учетом собственного веса	57) стр. 454
	Продольные колебания цилиндрических оболочек	58) стр. 454
	Затухающие колебания, например, каната	59) стр. 454
	Выпучивание вращающегося вала под действием сжатия	60) стр. 454
	Изгибные колебания стержней с учетом кручения и изменения угла элемента стержня	61) стр. 454
	Колебания упругого каната	62) стр. 454
	Колебания замкнутых круговых оболочек при равномерном внешнем давлении	63) стр. 454
<i>Другие</i>		
	Колебания свободно подвешенного каната	64) стр. 454

Т а б л и ц а I (продолжение)

λ	Дифференциальное уравнение	Главные Сокращения: $y_0 = y(0)$;	Естественные граничные условия $y_l'' = y''(l)$ и т. д.
<i>уравнение содержит λ и λ²</i>			
P	$-(Cy')' = \frac{1}{\alpha} \left(\lambda x + \frac{1}{2} \rho g F x^2 \right)^2 y$	$y_l = 0$	$y_0' = 0$
ω^2	$-y'' \left(1 - \frac{c_1}{c_2 - \lambda} \right) = \lambda c_3 y$	$y_0 = y_l = 0$	
$i\omega$	$Sy'' = (\rho F \lambda^2 + c_1 \lambda) y$	$y_0 = y_l = 0$	
P	$\alpha y IV + \frac{M^2}{\alpha} y'' = -2\lambda y'' - \frac{\lambda^2}{\alpha} y$	$y_0 = y_l = 0$	$(\alpha^2 y''' + (\alpha \lambda + M^2) y')_{0 \text{ и } l} = 0$
ω^2	$c_1 y IV = \lambda (-y'' - c_2 y) - \lambda^2 c_3 y$	$y_0 = y_l = 0$	$y_j'' = y_l'' = 0$
$c_2 \omega^2$	$c_1 y IV + \lambda y'' + \lambda (\lambda - 1) y = 0$	$y_0 = y_l = 0$	$(y' + c_3 y''')_0 = 0$ $(y' + c_3 y''')_l = 0$
$c_7 \omega^2$	$0 = LLL[y] + (c_1 + \lambda) LL[y] + (c_2 + c_3 \lambda) L[y] + (c_4 \lambda^2 + c_5 \lambda + c_6) y$ $c L[y] = y'' + c_7 g x \cdot y' - c_7 g^2 x \cdot y$		
<i>особенности</i>			
ω^2	$-[g \rho x y']' = \lambda \rho y$	y_0 ограничено, $y_l = 0$	

Обозначенные звездочкой рисунки следует повернуть на 90° в плоскости чертежа	Техническое содержание задачи	Литература (см. стр. 453, 454)				
	Колебания сжимаемых круговых пластин	65) стр. 454				
	Полярно-симметричная потеря устойчивости круговой пластины <table style="display: inline-table; vertical-align: middle; margin-left: 10px;"> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">{</td> <td style="padding-left: 5px;">Край защемлен</td> </tr> <tr> <td style="font-size: 2em; vertical-align: middle;">{</td> <td style="padding-left: 5px;">Край оперт</td> </tr> </table>	{	Край защемлен	{	Край оперт	66) стр. 454
{	Край защемлен					
{	Край оперт					
	Поперечные колебания круговой мембраны	67) стр. 454				
	Радиальные колебания сплошного цилиндра	68) стр. 454				
	Радиальные колебания шара					
	Выпучивание криволинейных стержней	69) стр. 454				
	Колебания конической оболочки	70) стр. 454				
	Критическая длина при опрокидывании стержня	71) стр. 454				

Т а б л и ц а I (продолжение)

λ	Дифференциальное уравнение	Главные границные условия Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y_l'' = y''(l)$ и т. д.	Естественные границные условия
ω^2	$(xy'')'' - \left(\frac{1}{x} y'\right)' + \frac{P}{N} (xy')' = \lambda c_1 xy$	$y_l = y'_0 = y'_l = 0$	предельное условие
	$-(xy')' + \frac{1}{x} y = \lambda xy$	y_0 ограничено, $y_l = 0$	
	$-(xy')' + \frac{1}{x} y = \lambda xy$	y_0 ограничено	$y_l + c_1 y'_l = 0$
$c_1 \omega^2$	$-(xy')' + \frac{n^2}{x} y = \lambda xy$	y_0 ограничено, $y_l = 0$	
$c_1 \omega^2$	$-(xy')' + \frac{n^2}{x} y = \lambda xy$	} y_0 ограничено	$y'_l = c_2 y_l$
$c_1 \omega^2$	$-(x^2 y')' + n(n+1)y = \lambda x^2 y$		
	$y''' + y' + \lambda (g(x) y)' = 0$	$y_{-l} = y_l = 0$	$\int_{-l}^l yg(x)(\cos x - \cos l) dx = 0$
	Диф. уравнение 2-го порядка, содержащее λ , λ^2 , λ^3		
	$y'' = c_1 xy$	$y(\lambda) = 0$	$y'_0 = 0$; собственное значение равно длине основного интервала

Пояснения к задачам на собственные значения для обыкновенных дифференциальных уравнений. В таблице I приведены некоторые простые примеры задач на собственные значения из механики, упорядоченные по типу дифференциального уравнения, определяющего задачу. В первых двух группах собственное значение λ фигурирует, будучи умноженным на собственную функцию, но не на ее производные, в третьей и четвертой группах λ умножается и на производные (общие задачи на собственные значения), дальнейшие группы имеют особенности.

Подобное перечисление, конечно, не претендует на полноту. В простейших случаях, например, для колебаний струны и стержня, для продольного изгиба стержня, приводится несколько типов краевых условий; подобным же образом можно увеличить число примеров, меняя способы закрепления (соответственно краевые условия) и во многих других приведенных случаях. Рассматривая более сложные системы (например, составленные из нескольких частей), можно построить любое число новых задач. Далее, многочисленные примеры задач на собственные значения можно получить, привлекая другие разделы физики, в которые мы не вдаемся.

В таблице I используются обозначения:

- c — коэффициент жесткости пружины,
- \bar{c} — разность моментов инерции,
- C — крутильная жесткость,
- c_1, c_2 — постоянные,
- D — постоянная полог,
- E — модуль упругости,
- F — площадь поперечного сечения,
- G — вес, функция веса,
- g — ускорение свободного падения,
- l — длина стержня, струны и т. д.,
- M — вращающий момент,
- P — сила сжатия,
- S — сила натяжения,
- x — независимая переменная,
- u — собственная функция,
- a — жесткость на изгиб,
- κ — коэффициент постели,
- λ — собственное значение,
- ρ — плотность,
- ω — круговая частота.

Ниже, при указании литературы к таблице I, для экономии места ссылки на следующие труды приводятся в сокращении:

- Р. Курант и Д. Гильберт. Методы математической физики, тт. 1 и 2, ГИИТЛ, 1951;
- Auerbach und Hott, Handbuch der physikalischen und technischen Mechanik, т. III, 1927, т. IV, 1931;

- С. В. Биезено, R. Grammel, Technische Dynamik, Berlin, 1939
 [К. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика, М. — Л., 1950];
 J. Ratzersdorfer, Die Knieckfestigkeit von Stäben und Stabwerken,
 Wien, 1936;
 С. П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, ГИФЛ, 1959;
 Handbuch der Physik, т. VI, Berlin, 1928, статья F. Pfeiffer, 309—403.
 ZaMM — Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik

ЛИТЕРАТУРА К ТАБЛИЦЕ I

- 1) Handbuch d. Physik, **VI**, 353, 355; Courant — Hilbert **1**, 250.
- 2) M. Biot, ZaMM **14** (1934), 216.
- 3) K. Klotter, Ing.-Archiv **3** (1932), 156.
- 4) Handbuch d. Physik **VI**, 357.
- 5) Handbuch d. Physik **VI**, 358.
- 6) I Ratzersdorfer (1936), 22; Biezeno — Grammel, 502, 506.
- 7) L. Prandtl, Dissert. München, 1899; J. Weinholt, ZaMM **14** (1934), 380.
- 8) Biezeno — Grammel, 653, 657, 663.
- 9) Ing.-Archiv **1** (1930), 301; Th. Pöschl, Techn. Mech. **II** (1936), 185.
- 10) Klotter — Kotowski, ZaMM **19** (1939), 289.
- 11) Handbuch d. Physik **VI**, 379.
- 12) Handbuch d. Physik **VI**, 367.
- 13) E. Schwerin, ZaMM **2** (1922), 84.
- 14) Handbuch d. Physik **VI**, 360, 368; С. П. Тимошенко; N. Монопове, ZaMM **1** (1921) 444; Cl Schaefer, Theor. Physik, **1** (1937), 682.
- 15) Hohenemser — Prager, Dynamik der Stabwerke (1933), 77.
- 16) Handbuch d. Physik **VI**, 365.
- 17) Puwein, Beton u. Eisen **39** (1940), 162.
- 18) Förpl, Drang u. Zwang **II** (1920), 355 [А. Фепплъ и Л. Фепплъ, Сила и деформация, т. II, ОНТИ, 1936].
- 19) Förpl, Drang u. Zwang **II** (1920), 359.
- 20) W. Meyer zur Capellen, ZaMM **15** (1935), 243.
- 21) K. Klotter, Ing.-Archiv **3** (1932), 156.
- 22) Biezeno — Grammel, 521; I. Ratzersdorfer (1936), 142.
- 23) Biezeno — Grammel, 508.
- 24) H. Heinzerling, Dissert., Karlsruhe, 1938.
- 25) Fr. A. Willers, ZaMM **21** (1941), 43.
- 26) Auerbach — Hort **IV**, 101; п. 1.3 данной книги.
- 27) E. Chwalla, ZaMM **10** (1930), 74.
- 28) Handbuch d. Physik **VI**, 299, 302; Auerbach — Hort **IV**, 143.
- 29) A. Schleusner, Strenge Theorie d. Knickung u. Biegung, (1937), 115.
- 30) п. 5.7 данной книги.
- 31) Klemperer — Gibbons, ZaMM **13** (1933), 253.
- 32) Biezeno — Koch, ZaMM **5** (1925), 280; Biezeno — Grammel, 550; J. A. Haringx, Proc. Akad. Amsterdam **45** (1942), 533, 650.

- 33) Auerbach—Hort III, 320.
- 34) Auerbach—Hort III, 322; С. П. Тимошенко.
- 35) K. Karas, Ing.-Archiv I (1930), 167; Biezeno—Grammel, 821.
- 36) K. Karas, Ing.-Archiv I (1930), 167.
- 37) Auerbach—Hort IV, 127.
- 38) S. Timoshenko, ZaMM 3 (1923), 360
- 39) J. Ratzersdorfer (1936), 314—320.
- 40) R. Sonntag, ZaMM 9 (1929), 378.
- 41) J. Ratzersdorfer (1936), 305—311.
- 42) P. Funk, ZaMM 4 (1924), 143.
- 43) J. Ratzersdorfer (1936), 311—313.
- 44) Handbuch d. Physik VI, 374; Auerbach—Hort III, 342.
- 45) K. Federhofer, Ing.-Archiv 4 (1933), 112, 115, 279, 283.
- 46) K. Federhofer, ZaMM 20 (1940), 17.
- 47) K. Federhofer, Ing.-Archiv 10 (1939), 129.
- 48) E. Schwerin, ZaMM 5 (1925), 238.
- 49) G. Hamel, Elementare Mechanik (1912), 536—539.
- 50) K. Ludwig, ZaMM 14 (1934), 361.
- 51) Biezeno—Grammel, 657.
- 52) Biezeno—Grammel, 803, 821.
- 53) F. Gassmann, Ing.-Archiv 2 (1932), 222.
- 54) J. Ratzersdorfer (1936), 35.
- 55) стр. 47 данной книги.
- 56) п. 3.2 данной книги; J. Weingold, Ing.-Archiv 9 (1938), 412.
- 57) L. Prandtl, Dissert., München, 1899, 46.
- 58) Handbuch d. Physik VI, 395.
- 59) Frank und v. Mises, Differentialgl. u. Integralgl. I (1930) [Ф Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГИТТЛ, М.—Л., 1937].
- 60) J. Ratzersdorfer (1936), 35.
- 61) Handbuch d. Physik VI, 359; С. П. Тимошенко.
- 62) R. Höger, ZaMM 14 (1934), 361; 15 (1935), 109.
- 63) K. Federhofer, ZaMM 15 (1935), 27.
- 64) G. Hamel, Elementare Mechanik (1912), 536.
- 65) Fr. A. Willehs, ZaMM 20 (1940), 37.
- 66) Biezeno—Grammel, 585; A. Nadai, Elastische Platten (1925), 251.
- 67) Auerbach—Hort III, 355.
- 68) Handbuch d. Physik VI, 399, 402.
- 69) A. Lockshin, ZaMM 16 (1936), 50.
- 70) K. Federhofer, Ing.-Archiv 9 (1938), 293.
- 71) H. v. Sanden, Praxis d. Diff. — Gleichungen, Berlin, 1943, 51,

Т а б л и ц а 11

Простые примеры технических задач на собственные значения для дифференциальных уравнений с частными производными

Объяснение используемых обозначений на стр. 452 и 453

Техническая задача	Дифференциальное уравнение $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$; $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, соответственно z_y, z_{xx} и т. д.	Литература
<i>Дифференциальное уравнение второго порядка</i>		
<p>Поперечные колебания однородной мембраны</p> <p>Поперечные колебания при введении других координат;</p> <p>Например, эллиптическая мембрана</p>	<p>$-\Delta z = \lambda z$</p> <p>$-\Delta z = \lambda g(x, y) z$</p> <p>$-\Delta z = \lambda (\sin^2 x + \operatorname{sh}^2 y) z$</p>	<p>Auerbach - Hort, III, 351</p> <p>С. П. Тимошенко. Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференц. и интегр. ур. матем. физики.</p>
<p>Поперечные колебания неравномерно напряженной мембраны</p>	<p>$-(Az_x + Bz_y)_x - (Bz_x + Cz_y)_y = \lambda z$</p>	<p>Handbuch d. Physik VI, 381.</p>
<p>Поперечные колебания мембраны на упругом основании</p>	<p>$-\Delta z + c_1 z = \lambda z$</p>	<p>K. Klotter, Ing.-Archiv 3 (1932), 156</p>
<p>Выпучивание пластины с квадратично изменяющейся жесткостью</p>	<p>$-\Delta z = \frac{\lambda z}{c_1 + c_2(x^2 + y^2)}$</p>	<p>R. Gran Olsson, Ing.-Archiv 9 (1938), 206</p>
<p>Поперечные колебания быстро вращающегося тонкого диска</p>	<p>$-\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} [x(a^2 - x^2) z_x] - \frac{1 - c_1 x^2}{x^2} z_{yy} = \lambda z$</p>	<p>Handbuch d. Physik VI, 388</p>
<i>Дифференциальное уравнение четвертого порядка $M[z] = \lambda pz$</i>		
<p>Изгибные колебания тонкой пластины</p>	<p>$\Delta \Delta z = \lambda z$</p>	<p>С. П. Тимошенко</p>
<p>Изгибные колебания пластины на упругом основании</p>	<p>$\Delta \Delta z + c_1 z = \lambda z$</p>	<p>K. Klotter, Ing.-Archiv 3 (1932), 156</p>

Таблица II (продолжение)

Техническая задача	Дифференциальное уравнение $\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; $z_x = \frac{\partial z}{\partial x}$, соответственно z_y, z_{xx} и т. д.	Литература
Изгибные колебания пластины, сжимаемой со всех сторон	$\Delta \Delta z + c_1 \Delta z = \lambda z$	K. Federhofer, Ing.-Archiv 6 (1935), 68
Изгибные колебания вращающегося диска	$\Delta \Delta z - \frac{c_1}{x} \frac{\partial}{\partial x} [x(a^2 - x^2) z_x] - c_2 \left(\frac{1}{x^2} - c_3 \right) z_{yy} = \lambda z$	Handbuch d. Physik VI, 388
<i>Дифференциальное уравнение вида $M[z] = \lambda N[z]$</i>		
Выпучивание пластины при одностороннем сжатии	$\Delta \Delta z = -\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$	G. I. Taylor, ZaMM 13 (1933), 147 E. Chwalla, Ing.-Archiv 5 (1934), 54
Выпучивание пластины при сжатии, одинаковом со всех сторон	$\Delta \Delta z = -\lambda \Delta z$	O. H. Faxen, ZaMM 15 (1935), 268 E. Trefftz, ZaMM 15 (1935), 339
Выпучивание пластины при сдвиге	$\Delta \Delta z = -\lambda \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$	E. Seydel, Ing.-Archiv (1933) 4, 169 E. Trefftz—Fr. A. Willers, ZaMM 16 (1936), 336
Выпучивание пластины с переменной жесткостью	$\Delta (N \Delta z) + (1 - \nu) (2N_{xy} z_{xy} - N_{xx} z_{xx} - N_{yy} z_{yy}) = -\lambda \Delta z$	R. Gran Olsson, Ing.-Arch. 9 (1938), 205
Выпучивание цилиндрической оболочки большого диаметра	$\frac{\partial^8 z}{\partial x^8} + c_1 \frac{\partial^4 z}{\partial y^4} = -\lambda \frac{\partial^6 z}{\partial x^6}$	Biezeno—Gramme (1939), 607

Таблица III

Крайевые выражения Дирихле

Дифференциальное уравнение и отношение Релея $R[u]$ $-(f_1 y')' + f_0 y = \lambda g_0 y$ $\int_a^b (f_1 u'^2 + f_0 u^2) dx + M_0 [u]$ $R[u] = \int_a^b g_0 u^2 dx$ $M_0 [u] = [-f_1 u u']_a^b$ $(f_2 y)'' - (f_1 y)' + f_0 y = \lambda [- (g_1 y)' + g_0 y]$ $R [u] = \int_a^b (f_2 u u'^2 + f_1 u'^2 + f_0 u^2) dx + M_0 [u]$ $\int_a^b (g_1 u'^2 + g_0 u^2) dx + N_0 [u]$ $M_0 = M_{0a} + M_{0b}$ $N_0 = N_{0a} + N_{0b}$ $M_0 [u] = [u (f_2 u u') - f_2 u' u'' - f_1 u u']_a^b$ $N_0 [u] = [-g_1 u u']_a^b$ Кроме случая $g_1 \equiv 0$	Крайевые условия (сокращения $y_a = y(a); f_{1b} = f_1(b), \dots$) $y_a = y_b = 0$ $y'_a = \alpha y'_a; y'_b = -\beta y_b$ $y_a = y_b; f_{1a} y'_a = f_{1b} y'_b$ $\begin{cases} y'_a = \alpha y_a + \gamma f_{1b} y_b \\ y'_b = -\gamma f_{1a} y_a - \beta y_b \end{cases}$ $y_a = y'_a = 0$ $y_a = 0; y''_a = \alpha y'_a$ $y'_a = \alpha y'_a; (f_2 y'')'_a = \beta y_a + \alpha (f_2 y')_a$ $y_b = y'_b = 0$ $y_b = 0; y'_b = -\alpha y'_b$ $y'_b = -\alpha y'_b; (f_2 y'')'_b = -\beta y_b - \alpha (f_2 y'')_b$ $\begin{cases} y_a = y_b; (f_1 y')_a = (f_1 y')_b \\ (f_2 y'')'_a = (f_2 y'')'_b \end{cases}$ $\begin{cases} (f_2 y'')'_a = \alpha y_a + \beta y'_a \\ (f_2 y'')'_a = \gamma y_a + (f_{1a} - \alpha) y'_a \end{cases}$ $\begin{cases} (f_2 y'')'_b = \alpha y_b - \beta y'_b \\ (f_2 y'')'_b = \gamma y_b + (f_{1b} - \alpha) y'_b \end{cases}$	Крайевые выражения Дирихле M_0 и N_0 $M_0 = 0$ $M_0 = \alpha f_{1a} u_a^2 + \beta f_{1b} u_b^2$ $M_0 = 0$ $M_0 = \alpha f_{1a} u_a^2 + \beta f_{1b} u_b^2 + 2\gamma f_{1a} f_{1b} u_a u_b$ $M_{0a} = N_{0a} = 0$ $M_{0a} = \alpha f_{2a} u_a'^2; N_{0a} = 0$ $M_{0a} = (\alpha f_{1a} - \beta) u_a^2; N_{0a} = \alpha g_{1a} u_a^2$ $M_{0b} = N_{0b} = 0$ $M_{0b} = \alpha f_{2b} u_b'^2; N_{0b} = 0$ $M_{0b} = (\alpha f_{1b} - \beta) u_b^2; N_{0b} = \alpha g_{1b} u_b^2$ $M_0 = N_0 = 0$ $M_{0a} = -\gamma u_a^2 + 2\alpha u_a u'_a + \beta u_a'^2$ $N_{0a} = 0$ $M_{0b} = \gamma u_b^2 - 2\alpha u_b u'_b + \beta u_b'^2$ $N_{0b} = 0$

Таблица IV
Простые примеры функций Грина

Дифференциальное выражение $M[y] =$	Красные условия $U_\mu y = 0$ Сокращения: $y_0 = y(0)$; $y'_l = y'(l)$	Функции Грина $G(x, \xi)$ при $x \leq \xi$ (при $x > \xi$ функции определяются из равенства $G(x, \xi) = G(\xi, x)$)	
$-y''$	$y(0) = y(l) = 0$ $y(0) = y'(l) = 0$ $\alpha y_0 + \beta y'_0 = \gamma y_l + \delta y'_l = 0$ $\alpha y_0 + \beta y_l = \gamma y'_0 + \delta y'_l = 0$ $\alpha\gamma = \beta\delta$	$x \left(1 - \frac{\xi}{l}\right)$ $\frac{(\alpha x - \beta)(\gamma(\xi - l) - \delta)}{-l\alpha\gamma - \alpha\delta + \beta\gamma}$ $-\beta(\gamma + \delta)\xi + \delta(\alpha + \beta)x + l\beta\gamma$ $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$	Э. Камке, Дифференциальные уравнения, изд. 2, ИЛ, М., 1951
$(-f_1(x)y')$	$y(0) = y(l) = 0$ $y(0) = y'(l) = 0$ $y_0 = y_l + \alpha y'_l = 0$	$q(x) \left(1 - \frac{q(\xi)}{q(l)}\right)$ $q(x)$ $q(x) \left[1 - \frac{q(\xi)}{q(l) + \frac{c}{f_1(l)}}\right]$	$q(x) = \int_0^x f_1(t) dt$
$-y'' - n^2 y$	$y(0) = y(l) = 0$ $y(0) - y(l) = y'(0) - y'(l) = 0$	$\frac{\sin nx \sin n(l - \xi)}{n \sin nl}$ $\frac{1}{2n} \left\{ -\operatorname{cig} \frac{nl}{2} \cos n(x - \xi) + \right.$ $\left. + \sin n(x - \xi) \right\}$	E. L. Ince, Ordinary Differential Equations, London 1927, стр. 258
$-y'' + y$ $-xy'' - y'$ $-(xy')' + \frac{n^2}{x} y$ $-y'' + (1 + x^2)y$	$y(\pm\infty)$ конечно $y(1) = 0$, $y(0)$ конечно $y(1) = 0$, $y(0)$ конечно $y(\pm\infty) = 0$	$\frac{1}{2} e^{x-\xi}$ $-\log \xi$ $\frac{1}{n} \left[\left(\frac{x}{\xi}\right)^n - (x\xi)^n \right]$ $\frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{1}{2}(x^2 + \xi^2)} \int_{-\infty}^x e^{-t^2} dt$ $\int_{\xi}^{\infty} e^{-t^2} dt$	Р. Курант и Д. Гильберт, Методы математической физики, т. I, М.—Л., 1951

y^{IV}	$y_0 = y'_0 = y''_l = y'''_l = 0$ $y_0 = y''_0 = y_l = y'_l = 0$ $y_0 = y'_0 = y_l = y'_l = 0$ $y_0 = y'_0 = y_l = y''_l = 0$	$\frac{1}{6} x^2 (3\xi - x)$ $\frac{1}{6l} x (\xi - l) (x^2 + \xi^2 - 2l\xi)$ $\frac{1}{6l^3} x^2 (\xi - l)^2 (3l\xi - 2\xi x - lx)$ $\frac{x^2 (\xi - l)}{12l^3} \{3l\xi^2 - 6l^2\xi + [-\xi^2 + 2l\xi + 2l^2] x\}$	
$y^{IV} - n^4 y$	$y_0 = y''_0 = y_l = y''_l = 0$	$\frac{1}{2n^3} \left[\frac{\sin n(l - \xi)}{\sin nl} \sin nx - \frac{\operatorname{sh} n(l - \xi)}{\operatorname{sh} nl} \operatorname{sh} nx \right]$	
$(f_2 y)''$	$y_0 = y'_0 = y''_l = y'''_l = 0$ $y_0 = y''_0 = y_l = y''_l = 0$ $y_0 = y'_0 = y_l = y'_l = 0$ $y_0 = y'_0 = y_l = y''_l = 0$	$\xi v(x) - z(x)$ $\left[\xi \left(v(l) - \frac{z(l)}{l} \right) - (lv(\xi) - z(\xi)) \right] \frac{x}{l} + \frac{z(x)}{l} - (\xi - l) \frac{z(x)}{l}$ $\frac{1}{\Delta} \{ [-z(\xi)w(l) + v(\xi)(lw(l) - z(l)) + \xi\Delta] v(x) + [z(\xi)u(l) - v(\xi)w(l) - \Delta] z(x) \}$ $\frac{1}{D} \{ [lz(\xi) - l^2v(\xi) + \xi D] v(x) + [lv(\xi) - z(\xi) - D] z(x) \}$	$u(x) = \int_0^x \frac{dt}{f_2(t)}$ $v(x) = \int_0^x u(t) dt$ $w(x) = \int_0^x \frac{t dt}{f_2(t)}$ $z(x) = \int_0^x w(t) dt$ $\Delta = u(l)z(l) - v(l)w(l)$ $D = lv(l) - z(l)$
$M[y] = r(x)$ $U_\mu = 0$	<p>равносильно</p>	$y(x) = \int_0^l G(x, \xi) r(\xi) d\xi$	

Таблица V

Некоторые разрешимые в замкнутой форме задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка

Тип задачи	Дифференциальное уравнение	Крайние условия	Собственные значения $\lambda_n =$	Собственные функции $y_n =$
$-y'' = \lambda y$			при различных краевых условиях таблицы VI	
$= \lambda g_0(x) y$				
$y(a) = 0$	λy	$y(a) = 0$	$\frac{1}{4} + \left(\frac{n\pi}{\ln \frac{a+c}{b+c}} \right)^2$	$\sqrt{x+c} \sin \frac{n\pi}{\ln \frac{a+c}{b+c}} \left[\ln(x+c) - \ln(b+c) \right]$
$y(b) = 0$	$\frac{\lambda y}{(x+c)^2}$	$y(b) = 0$		
$y(b) = 0$		$x+c \neq 0 \quad (a, b)$		
$-y'' = \frac{\lambda y}{x^4}$		$y(a) = 0$	$\left(\frac{n\pi ab}{a-b} \right)^2$	$x \sin \left[\frac{n\pi b}{b-a} \left(1 - \frac{a}{x} \right) \right]$
		$y(b) = 0$		
		$0 < a < b$		
$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 - x^2)^2}$		$y(a) = 0$	$c^2 + \left(\frac{2cn\pi}{\ln \left(\frac{c+b}{c-a} \right)} \right)^2$	$\sqrt{c^2 - x^2} \sin \left[\frac{\ln \left(\frac{c+x}{c-a} \right)}{\ln \left(\frac{c+b}{c-a} \right)} \right]$
		$y(b) = 0$		
		$-c < a < b < c$		
$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 + x^2)^2}$		$y(a) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{cn\pi}{\operatorname{arctg} \frac{a}{c} - \operatorname{arctg} \frac{a}{c}} \right)^2$	$\sqrt{c^2 + x^2} \sin \left[\frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{c} - \operatorname{arctg} \frac{a}{c}}{\operatorname{arctg} \frac{b}{c} - \operatorname{arctg} \frac{a}{c}} \right]$
		$y(b) = 0$		
$-y'' = \frac{\lambda y}{x}$		$y(0) = 0$	$J_1(2\sqrt{\lambda_n x}) = 0$	$\sqrt{x} J_1(2\sqrt{\lambda_n x})$ (функции Бесселя J_1)
		$y(a) = 0$		
$-y'' = \frac{\lambda y}{x(a-x)}$		$y(0) = 0$	$n(n+1)$	$(x^2 - ax) P'_n \left(\frac{2x}{a} - 1 \right)$ производная сферической функции
		$y(a) = 0$		

$-y'' = \lambda g_0 y$ $g_0 = \begin{cases} c, & 0 \leq x < a \\ d, & a < x \leq l \end{cases}$	$y(0) = 0$ $y(l) = 0$	$\operatorname{tg} [\alpha \sqrt{\lambda_{nc}}] + \sqrt{\frac{c}{d}} \operatorname{tg} [(l-a) \sqrt{\lambda_{nd}}] = 0$	$\sin \sqrt{\lambda_{nd}} (l-x) \sin \sqrt{\lambda_{nc}} x$ $0 \leq x \leq a$ $\sin \sqrt{\lambda_{nc}} x \sin \sqrt{\lambda_{nd}} (l-x)$ $a \leq x \leq l$
$-y'' + f_0 y = \lambda g_0 y$ $y(a) = 0$ $y(b) = 0$	$y(a) = 0$ $y(b) = 0$	$\left(\frac{2n\pi c}{e^{-2bc} - e^{-2ac}} \right)^2$	$e^{cx} \sin \left[n\pi \frac{e^{-2cx} - e^{-2ac}}{e^{-2bc} - e^{-2ac}} \right]$
$-y'' + \frac{c(c-1)}{x^2} y = \frac{\lambda y}{x^{4c}}$ $y(a) = 0$ $y(b) = 0$	$y(a) = 0$ $y(b) = 0$ $0 < a < b$	$\left(\frac{(2c-1)n\pi}{b^{-2c+1} - a^{-2c+1}} \right)^2$	$x^c \sin \left[n\pi \frac{x^{-2c+1} - a^{-2c+1}}{b^{-2c+1} - a^{-2c+1}} \right]$
$-(f_1 y')' = \lambda g_0 y$ $y(a) = 0$ $y(b) = 0$	$y(a) = 0$ $y(b) = 0$ $cx + d \neq 0$ (a, b)	$\left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$	$\frac{1}{cx+d} \sin \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right)$
$-(e^{cx} y')' = \lambda e^{cx} y$	$y(a) = 0$ $y(b) = 0$	$\frac{c^2}{4} + \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$	$e^{-\frac{cx}{2}} \sin \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right)$
$-[y' \sin^2 u]' = \lambda y \sin^2 u$, где $u = cx + d$	$y(a) = 0$ $y(b) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$	$\frac{\sin \left(n\pi \frac{x-a}{b-a} \right)}{\sin (cx+d)}$ При $(b-a)c > \pi$ конечное число отрицательных собственных значений
$-\left(\frac{3}{x^2} y' \right)' = \lambda x^{\frac{3}{2}} y$	$y(a) = 0$ $y(b) = 0$ $0 < a < b$	$\left(\frac{n\pi}{2(\sqrt{b} - \sqrt{a})} \right)^2$	$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin \left[n\pi \frac{\sqrt{x} - \sqrt{a}}{\sqrt{b} - \sqrt{a}} \right]$

Таблица V (продолжение)

Тип задачи	Дифференциальное уравнение	Краевые условия	Собственные значения λ_n	Собственные функции y_n
$-(f_1 y')' = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-(p(x)y')' = \lambda y$ $= \frac{\lambda y}{p(x)}$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{\int_a^b \frac{d\xi}{p(\xi)}} \right)^2$	$\sin \left[\frac{x}{\int_a^b \frac{d\xi}{p(\xi)}} \right]$
$-\left(\frac{1}{p(x)} y' \right)' = \lambda p(x) q^4(x) y$ $q(x) = \left[\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi \right]^{-1}$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi}{q(b) - p(a)} \right)^2$	$\int_{x_0}^x p(\xi) d\xi \sin \left[n\pi \frac{q(x) - q(a)}{q(b) - q(a)} \right]$	
$-y'' + 2c(\operatorname{tg} cx)y' = \lambda y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-y'' - 2c(\operatorname{th} cx)y' = \lambda y$	$y(a) = y(b) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$	$\frac{1}{\cos cx} \sin \left[n\pi \frac{x-a}{b-a} \right]$
$-y'' + f_0 y' + \lambda g_0 y = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-y'' - 2c(\operatorname{tg} cx)y' = \lambda(\cos cx)^2 y$	$y(a) = y(b) = 0$	$c^2 + \left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$	$\frac{1}{\operatorname{ch} cx} \sin \left[n\pi \frac{x-a}{b-a} \right]$
$-y'' + f_0 y' + \lambda g_0 y = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$	$-y'' - \frac{4}{x} y' - \frac{2}{x^2} y = \lambda y$	$y(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{n\pi c}{\sin cb - \sin ca} \right)^2$	$\sin \left[n\pi \frac{\sin cx - \sin ca}{\sin cb - \sin ca} \right]$
$-y'' + f_0 y' + \lambda g_0 y = \lambda g_0 y$ $y(a) = y(b) = 0$			$\left(\frac{n\pi}{b-a} \right)^2$	$\frac{1}{x^2} \sin \left[n\pi \frac{x-a}{b-a} \right]$

$(f_1 y)' = \lambda g_0 y$ $y'(a) = 0$ $y(b) = 0$	$y'' = 2cxy' - c^2 x^2 = \lambda y$	$y(a) = y(b) = 0$	$c + \left(\frac{n\pi}{b-a}\right)^2$	$e^{-\frac{cx}{2}} \sin \left[n\pi \frac{x-a}{b-a} \right]$
$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 - x^2)^2}$	$y'(0) = y(l) = 0$ $ l < c$	$y'(0) = y(l) = 0$	$c^2 + \left(\frac{(2n-1)c\pi}{\ln \frac{c+l}{c-l}}\right)^2$	$\sqrt{c^2 - x^2} \cos \left[\frac{2n-1}{2} \pi \frac{\ln \frac{c+x}{c-x}}{\ln \frac{c+l}{c-l}} \right]$
$-y'' = \frac{\lambda y}{(c^2 + x^2)^2}$	$y'(0) = y(l) = 0$	$y'(0) = y(l) = 0$	$-c^2 + \left(\frac{(2n-1)c\pi}{2 \operatorname{arctg} \frac{c}{l}}\right)^2$	$\sqrt{c^2 + x^2} \cos \left[\frac{2n-1}{2} \pi \frac{\operatorname{arctg} \frac{x}{c}}{\operatorname{arctg} \frac{l}{c}} \right]$
$-y'' = \lambda g_0 y$ $\begin{cases} c; 0 \leq x < \alpha \\ d; \alpha < x \leq l \end{cases}$	$y'(0) = y(l) = 0$	$y'(0) = y(l) = 0$	$\operatorname{tg} [\alpha \sqrt{\lambda_{nc}}] \operatorname{tg} [(l-\alpha) \sqrt{\lambda_{nd}}] = \sqrt{\frac{d}{c}}$	$\sin [\sqrt{\lambda_{nd}} (l-x)] \cos [\sqrt{\lambda_{nc}} x];$ $0 \leq x \leq \alpha$ $\cos [\sqrt{\lambda_{nc}} \alpha] \sin [\sqrt{\lambda_{nd}} (l-x)];$ $\alpha \leq x \leq l$
$-\left(\frac{1}{p(x)} y'\right)' = \lambda p(x) y$	$y'(a) = y(b) = 0$	$y'(a) = y(b) = 0$	$\left(\frac{2n-1}{2} \frac{b}{a} \frac{\pi}{\int_a^b p(\xi) d\xi}\right)$	$\cos \left[\frac{2n-1}{2} \pi \frac{\int_a^x p(\xi) d\xi}{\int_a^b p(\xi) d\xi} \right]$
Периодичность $-[y' \sin^2 u]' = \lambda y \sin^2 u,$ где $u = cx + d$	$y(a) = y\left(a + \frac{2\pi}{c}\right)$ $y'(a) = y'\left(a + \frac{2\pi}{c}\right)$	$-c^2 + c^2 n^2$	$\frac{1}{\sin(cx+d)} \left\{ \sin [nc(x-a)] \right\}$	$n = 0$ — простое собственное значение $n > 0$ — двукратно вырожденное собственное значение

Ряд дальнейших примеров, разрешимых в замкнутой форме задач на собственные значения (с сингулярными крайними точками и с бесконечной основной, областью) имеется в книге: Э. Маделунг, Математический аппарат физики, Физматгиз, 1960.

Трансцендентные уравнения для соб

Дифференциальное уравнение	Крайние условия. Сокращения: $y_0 = y(0), y'_l = y'(l)$	Частный случай	Трансцендентное уравнение для собственных значений
$-y'' = \lambda y$ $\lambda = k^2$	$ay'_0 + by_0 = 0$ $cy'_l + dy_l = 0$		$\text{tg } kl = \frac{(ad - bc)k}{bd + ack^2}$
	$y_0 = y_l = 0$	$a = c = 0$	$\sin kl = 0$
	$y'_0 = y'_l = 0$	$b = d = 0$	$\sin kl = 0$
	$y_0 = y'_l = 0$	$a = d = 0$	$\cos kl = 0$
	$y_0 = y'_l + Ay_l = 0$	$a = 0$	$A \text{tg } kl = -k$
		$Al = 1$	$\text{tg } kl = -kl$
		$Al = \frac{1}{2}$	$\text{tg } kl = -2kl$
		$Al = -\frac{1}{2}$	$\text{tg } kl = 2kl$
		$Al = -1$	$\text{tg } kl = kl$
	$y'_0 = y'_l + Ay_l = 0$	$b = 0$	$k \text{tg } kl = A$
$Al = 2$		$kl \text{tg } kl = 2$	
$Al = 1$		$kl \text{tg } kl = 1$	
$Al = -1$		$kl \text{tg } kl = -1$	
$Al = -2$		$kl \text{tg } kl = -2$	
$ay_l + by_0 = 0$ $cy'_l + dy'_0 = 0$ $y_l = y_b, y'_0 = y'_l$		$-\cos kl = A = \frac{ac + bd}{bc + ad}$	
	$b = -a$ $d = -c$	$\cos kl = 1$	

Таблица VI

Собственных значений простейших задач

Величины для вычисления первых собственных значений	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2}$	Литература. Использованные сокращения см. стр. 432—454
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3l} \frac{3ac + l^2 bd}{ad - bc - lbd}$		Ф. Франк и Р. Мизес, Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики, ГИТТЛ, 1937
$kl = \pi; \quad 2\pi; \quad 3\pi$	$\frac{1}{6}$	
$kl = 0; \quad \pi; \quad 2\pi$	∞	
$kl = \frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{2}; \quad \frac{5\pi}{2}$	$\frac{1}{2}$	
$kl = 2,0288; 4,9132; 7,9787$ $kl = 1,8366; 4,8158; 7,917$ $kl = 1,1656; 4,6042$ $kl = 0; 4,4934; 7,7253; 10,9041$	$\frac{Al + 3}{6(Al + 1)}$ $1/3$ $7/18$ $5/6$ ∞	F. E m d e, Tafeln elementarer Funktionen, 1940, 125—131
$kl = 1,0769; \quad 3,646$ $kl = 0,8603; \quad 3,4256; 6,4373$ $kl = i \cdot 1,1997; 2,7984; 6,1212$ $kl = i \cdot 2,0653; 2,4587; 5,9594$	$\frac{1}{2} + \frac{1}{Al}$ 1 $3/2$ $-1/2$ 0	Biot, ZaMM, 14 (1934), 217 F. E m d e, Tafeln elementarer Funktionen, 1940, 125—131 С. П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, ГИФМЛ, 1959
	$\frac{1}{2(1+A)}$	
$kl = 0; 2\pi; 4\pi; 6\pi; \dots$	∞	

Дифференциальное уравнение	Крайевые условия. Сокращения: $y_0 = y(0), y_l' = y'(l)$	Частный случай	Трансцендентное уравнение для собственных значений
$-y'' - \frac{y'}{x} + \frac{n^2 y}{x^2} = \lambda y;$ $\lambda = k^2$	y_0 конечно, $y_l = 0$	$n = 0$ $n = 1$ $n = 2$	$J_n(kl) = 0$ $J_0(kl) = 0$ $J_1(kl) = 0$ $J_2(kl) = 0$ J_n — функции Бесселя
$-y'' - \frac{y'}{x} + \frac{n^2 y}{x^2} = \lambda y;$ $\lambda = k^2$	y_0 конечно $y_l' + Ay_l = 0$	$n = A = 0$ $n = 0;$ $Al = 1$ $n = 1;$ $Al = 0$ $n = Al = 1$	$kJ_n'(kl) + AJ_n(kl) = 0$ $J_1(kl) = 0$ $-klJ_1(kl) + J_0(kl) = 0$ $klJ_0(kl) - J_1(kl) = 0$ $J_0(kl) = 0$
	$y_a = y_l = 0$	$l = 2a;$ $n = 0$ $l = 2a;$ $n = 1$	$J_n(ka) N_n(kl) =$ $= J_n(kl) N_n(ka)$ J_n — функции Бесселя, N_n — функции Неймана
$y^{IV} = \lambda y;$ $\lambda = k^4$	$\begin{cases} y_0 = y_0'' = 0 \\ ay_l'' + by_l' = 0 \\ cy_l''' + dy_l = 0 \end{cases}$	$b = c = 0$ $a = c = 0$ $b = d = 0$	$(ack^4 + bd) \mathfrak{B}(kl) -$ $- bck^3 \mathfrak{C}(kl) +$ $+ adk \mathfrak{Z}(kl) = 0$ $\sin kl = 0$ $\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$ $\operatorname{tg} kl = \operatorname{th} kl$

Т а б л и ц а VI (продолжение)

Величины для вычисления первых собственных значений	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_{il})^2}$	Литература. Использованные сокращения см. стр. 452—454.
$kl = 2,4048; 5,5201; 8,6537$ $kl = 3,8317; 7,0156; 10,1735$ $kl = 5,135; 8,417; 11,620$	$\frac{1}{4(n+1)}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{12}$	Е. Янке и Ф. Эмде, Таблицы функций с формулами и кривыми, ГИФМЛ, 1959
$kl = 1,2558; 4,0794; 7,156$ $kl = 1,841; 5,331; 8,536$	$\frac{1}{4} \frac{Al + n + 2}{(n+1)(Al+n)}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{3}{8}$	
$ka = 3,123; 6,273; 9,418$ $ka = 3,197; 6,312; 9,4445$		} Е. Янке и Ф. Эмде (см. выше)
	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_{il})^4}$	Прекрасные таблицы имеются в книге Э. Камке, Дифференциальные уравнения, ИЛ, М., 1951
$kl = \pi; 2\pi; 3\pi; \dots$	$\frac{1}{90}$	
$kl = 3,9266; 7,0686; 10,210;$ $13,352$	$\frac{1}{210}$	F. E m d e, Tafeln elementarer Funktionen, 1940, 130—131.
$kl = 0, 3,9266; 7,0686; 10,210;$ $13,352$	∞	

Дифференциальное уравнение	Крайевые условия. Сокращения: $y_0 = y(0), y'_l = y'(l)$	Частный случай	Трансцендентное уравнение для собственных значений
$y^{IV} = \lambda y;$ $\lambda = k^4$	$\begin{cases} y_0 = y'_0 = 0 \\ ay''_l + by'_l = 0 \\ cy'''_l + dy_l = 0 \end{cases}$		$ack^4 \mathfrak{E}(kl) + bck^3 \mathfrak{H}(kl) - adk^2 \mathfrak{B}(kl) + bd \mathfrak{D}(kl) = 0$
	$y_0 = y'_0 = y_l = y'_l = 0$	$a = c = 0$	$\cos kl \operatorname{ch} kl = 1$
	$y_0 = y'_0 = y''_l = y'''_l = 0$	$b = d = 0$	$\cos kl \operatorname{ch} kl = -1$
	$y_0 = y'_0 = y'_l = y'''_l = 0$	$a = d = 0$	$\operatorname{tg} kl + \operatorname{th} kl = 0$
	$\begin{cases} y_0 = y_l = 0 \\ ay''_0 + by'_0 = 0 \\ cy''_0 + dy'_l = 0 \end{cases}$		$ack^2 \mathfrak{S}(kl) + bd \mathfrak{D}(kl) + k(ad - bc) \mathfrak{B}(kl) = 0$
$y^{IV} = -\lambda y''$ $\lambda = k^2$	$\begin{cases} y_0 = y_l = 0 \\ ly''_0 + y'_0 = ly''_l + y'_l = 0 \end{cases}$	$a = c = l$ $b = d = 1$	$(kl)^2 \mathfrak{S}(kl) + \mathfrak{D}(kl) = 0$
	$\begin{cases} y_0 = y'_l = 0 \\ ay''_0 + by'_0 = 0 \\ cy'''_l + dy_l = 0 \end{cases}$		$adk \mathfrak{S}(kl) + cbk^3 \mathfrak{E}(kl) + (ack^4 - bd) \mathfrak{B}(kl) = 0$
	$y''_0 = y'''_0 = y''_l = y'''_l = 0$		$\operatorname{ch} kl \cos kl = 1$
	$y'_0 = y'''_0 = y'_l = y'''_l = 0$		$\sin kl = 0$
	$\begin{cases} y_0 = y''_0 = 0 \\ ay''_l + by'_l = 0 \\ cy'''_l + dy_l = 0 \end{cases}$		$b(k^3 c + kld) \cos kl = d(k^2 l a + b) \sin kl$
		$a = lb$ $l^3 d = -c$	$\operatorname{tg} kl = kl \frac{1 - k^2 l^2}{1 + k^2 l^2}$

Таблица VI (продолжение)

Величины для вычисления первых собственных значений	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2}$	Литература, .. Использованные сокращения см. стр. 452—454
$kl = 4,7300; 7,853; 10,996;$ $14,137$	$\frac{1}{420}$	
$kl = 1,8750; 4,694; 7,855;$ $10,996$ ¹⁾	$\frac{1}{12}$	¹⁾ Вычислено до десятого знака в 1744 г. Эйлером
$kl = 0; 2,3650; 5,4978$		Используемые сокращения: $\mathfrak{H}(x) = \operatorname{ch} x \sin x + \operatorname{sh} x \cos x$ $\mathfrak{B}(x) = \operatorname{ch} x \sin x - \operatorname{sh} x \cos x$ $\mathfrak{C}(x) = 2 \operatorname{ch} x \cos x$ $\mathfrak{S}(x) = 2 \operatorname{sh} x \sin x$ $\mathfrak{D}(x) = \operatorname{ch} x \cos x - 1$ $\mathfrak{E}(x) = \operatorname{ch} x \cos x + 1$
$kl = 3,084; 6,270$		
$kl = 0; 0; 4,7300; 7,853$		
$kl = 0; \pi; 2\pi; \dots$		
$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2} = \frac{1}{10} \frac{bdl^3 - 15bc + 5adl^2}{bdl^3 - 3bc + 3adl^2}$		
$kl = 2,1826; 4,9292$	$\frac{3}{10}$	

Дифференциальное уравнение	Крайевые условия. Сокращения: $y_0 = y(0), y'_l = y'(l)$	Частный случай	Трансцендентное уравнение для собственных значений
$y^{IV} = -\lambda y''$ $\lambda = k^2$	$y_0 = y_0'' = y_l = y_l'' = 0$	$b=c=0$	$\sin kl = 0$
	$y_0 = y_0'' = y_l = y_l' = 0$	$a=c=0$	$\operatorname{tg} kl = kl$
	$\begin{cases} y_0 = y_0' = 0 \\ ay_l'' + by_l' = 0 \\ cy_l''' + dy_l = 0 \end{cases}$		$k^4 ac + [k^3 bc +$ $+ kd(bl - a)] \sin kl +$ $+ k^2 lad \cos kl -$ $- 2bd(1 - \cos kl) = 0$
	$y_0 = y_0' = y_l = y_l' = 0$	$a=c=0$	$\sin \frac{kl}{2} = 0$ и $\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{kl}{2}$
	$\begin{cases} y_0 = y_l = 0 \\ ay_0'' + by_0' = 0 \\ cy_l'' + dy_l' = 0 \end{cases}$		$ack^3 \sin kl +$ $+ k(bc - ad) \times$ $\times (kl \cos kl - \sin kl) +$ $+ bd(kl \sin kl - 2 +$ $+ 2 \cos kl) = 0$
	$\begin{cases} y_0 = y_l = 0 \\ ly_0'' = y_0' = ly_l'' + y_l' = 0 \end{cases}$	$a=c=l$ $b=d=1$	$\sin \frac{kl}{2} = 0$ и $\operatorname{tg} \frac{kl}{2} = \frac{kl + k^3 l^3}{2}$
$y^{IV} - Ay'' = \lambda y$ $s = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{4\lambda + A^2} + \frac{1}{2} A}$ $r = \sqrt{\frac{1}{2} \sqrt{4\lambda + A^2} - \frac{1}{2} A}$	$y_{-l} = y_{-l}' = y_l = y_l' = 0$		$\begin{cases} r \operatorname{tg} \frac{r}{2} + s \operatorname{th} \frac{s}{2} = 0 \text{ и} \\ \frac{1}{r} \operatorname{tg} \frac{r}{2} = \frac{1}{s} \operatorname{th} \frac{s}{2} \end{cases}$
	$-y_{-l} = y_{-l}' = y_l = y_l'' = 0$		$\frac{1}{r} \operatorname{tg} r = \frac{1}{s} \operatorname{th} s$
$y^{IV} + 2y'' + y = \lambda(Ay - y'')$ $\begin{cases} k \\ s \end{cases} = \sqrt{\pm \frac{2+A}{2} + \sqrt{\left(\frac{2+A}{2}\right)^2 + A\lambda - 1}}$	$y_{-l} = y_{-l}' = y_l = y_l' = 0$		$2 + \frac{s^2 - k^2}{sk} \sin kl \operatorname{sh} sl -$ $- 2 \cos kl \operatorname{ch} sl = 0$

Таблица VI (продолжение)

Величины для вычисления первых собственных значений	$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(k_i l)^2}$	Литература. Использованные сокращения см. стр. 452—454
$kl = \pi; 2\pi; \dots$	$\frac{1}{6}$	
$kl = 4,4934; \dots$	$\frac{1}{10}$	
для $c = 0, a = lb$: $kl = 4,7926; 7,8223$	$\frac{7}{75}$	
$kl = 2\pi; 8,987; 4\pi; \dots$	$\frac{1}{15}$	
$kl = 3,0096; 2\pi; 9,4200; 4\pi$	$\frac{29}{165}$	
		W. Meyer zur Capellen, Z. angew. Math. Mech. 15 (1935), 243
		S. Timoshenko, Z. angew. Math. Mech. 3 (1923), 360

Примеры графического проведения метода последовательных приближений

Дифференциальное уравнение	Крайевые условия	Выбор функции	Способ получения F_0 и F_1 (может быть применено (12.20))
$-(f_1 y')' = \lambda g_0 y$	$\begin{cases} ay(0) + by'(0) = 0 \\ cy(t) + dy'(t) = 0 \end{cases}$	$F_0(x)$ удовлетворяет крайевым условиям	Образовать $h_0 = g_0 F_0$; определить $F_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника (в крайнем случае двух многоугольников) так, чтобы были удовлетворены крайевые условия
$-(f_1 y') + f_0 y = \lambda g_0 y$	$y(a) = y(b) = 0$	$w(x)$ при $w(a) = w(b) = 0$	$F_1(x)$ при $F_1(a) = F_1(b)$ при помощи вервочного многоугольника из $(f_1 F_1)' = -w$; тогда $F_0 = \frac{1}{g_0} (w + f_0 F_1)$
При иных крайевых условиях исходить из нескольких выбранных функций w и, используя их линейные комбинации, подчинить F_0 и F_1 крайевым условиям			
$(f_2 y'')'' = \lambda g_0 y$	$\begin{cases} y(0) = y(t) = 0 \\ y''(0) = y''(t) = 0 \end{cases}$	$F_0(x)$ удовлетворяет крайевым условиям	$h_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $h_1'' = g_0 F_0$; $h_1(0) = h_1(t) = 0$; $F_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$; $F_1(0) = F_1(t) = 0$;
$(f_2 y'')'' = \lambda g_0 y$	$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y''(t) = y'''(t) = 0 \end{cases}$	$F_0(x)$ удовлетворяет крайевым условиям	$h_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $h_1'' = g_0 F_0$; $h_1(0) = h_1'(t) = 0$; $F_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$; $F_1(0) = F_1'(t) = 0$;

$(f_2 y'')'' = \lambda g_0 y$	$\begin{cases} y(0) = y'(0) = 0 \\ y(l) = y'(l) = 0 \end{cases}$	<p>$F(x)$ удовлетворяет краевым условиям</p>	<p>$h_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $h_1'' = g_0 F_0$; $h_1(0) = h_1'(0) = 0$ при двух постоянных интегрирования c_1, c_2; $F_1(x)$ при помощи трех вервочных многоугольников из $F_1(0) = F_1'(0) = 0$, $F_1'' = \frac{h_1}{f_2} + \frac{c_1}{f_2} + \frac{c_2 x}{f_2}$ и определить c_1, c_2 так, чтобы $F_1(l) = F_1'(l) = 0$</p>
$(f_2 y'')'' - (f_1 y')' = \lambda g_0 y$	<p>В зависимости от краевых условий метод проводится с несколькими функциями $w(x)$, которые комбинируются так, чтобы F_0 и F_1 удовлетворяли краевым условиям</p>	<p>$w(x)$</p>	<p>$h_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $h_1'' = w$; $F_1'' = \frac{h_1}{f_2}$; при помощи двух интегрирований F_1' и F_1; тогда $F_0 = \frac{1}{g_0} [-f_1' F_1' - f_1 F_1' + w]$</p>
$(f_2 y'')'' + f_0 y = -\lambda (g_1 y')'$	<p>В зависимости от краевых условий метод проводится с несколькими функциями $w(x)$, которые комбинируются так, чтобы F_0 и F_1 удовлетворяли краевым условиям</p>	<p>$w(x)$</p>	<p>$h_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $h_1'' = w$; $F_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$; $f_0(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $-(g_1 F_0)' = w + f_0 F_1$</p>
$(f_2 y'')'' = \lambda \{g_0 y - (g_1 y')'\}$	<p>В зависимости от краевых условий метод проводится с несколькими функциями $w(x)$, которые комбинируются так, чтобы F_0 и F_1 удовлетворяли краевым условиям</p>	<p>$w(x)$</p>	<p>$F_0(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $(g_1 F_0)' = w$; $h_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $h_1'' = g_0 F_0 - w$; $F_1(x)$ при помощи вервочного многоугольника из $F_1'' = \frac{1}{f_2} h_1$</p>

(3)	$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	9 -1	2, 1 1, -2
(4)	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$	5 -1	1, 1 1, -2
(5)	$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$	2i -2i	1, i 1, -i
(6)	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & 1-a \\ a+1 & -a \end{pmatrix} (a \neq 0)$	1 -1 1 -1	1, 1 1, 2 1, 1 a-1, a+1
(7)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$	1 -1 1 -1	1, 1 1, -1 $\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2}$ $\sin \frac{\varphi}{2}, -\cos \frac{\varphi}{2}$
(8)	$\begin{pmatrix} 0,6 & -0,8 \\ 0,8 & 0,6 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$	0,6-0,8i 0,6+0,8i $e^{i\varphi}$ $e^{-i\varphi}$	1, i 1, -i 1, i 1, -i $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$

Таблица VIII (продолжение)

Простейшие примеры			
№	Матрица \mathfrak{A}	Характ. числа λ_{ν}	Соответствующие собственные векторы ξ'_{ν}
(9)	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	i $-i$	i $-i$
(10)	$\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} a & -1 \\ a^2+1 & -a \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \text{sh } \varphi & \text{ch } \varphi \\ -\text{ch } \varphi & -\text{sh } \varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \neq 0)$	i $-i$ i $-i$ i $-i$	$2, 3-i$ $2, 3+i$ $1, a-i$ $1, a+i$ $\text{ch } \varphi, i-\text{sh } \varphi$ $\text{ch } \varphi, -i-\text{sh } \varphi$
(11)	$\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$	1 -1	$2, 1-i$ $-2, 1+i$
(12)	$\begin{pmatrix} 0 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix}$	1 -1	$i, 1$ $-i, 1$
(13)	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \cos \varphi & i \sin \varphi \\ -i \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$ $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2} \right)$	1 -1 1 -1	$i\sqrt{3}, 1$ $i, -\sqrt{3}$ $i \cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2}$ $i \sin \frac{\varphi}{2}, -\cos \frac{\varphi}{2}$

(14)	$\begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\beta} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \sin \alpha \cdot e^{-i\beta} & \cos \alpha \\ \cos \alpha & -\sin \alpha \cdot e^{i\beta} \end{pmatrix}$	$\frac{e^{i\alpha}}{e^{i\beta}}$	$\begin{matrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{matrix}$ $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
(15)	$\begin{pmatrix} i \sin \alpha e^{-i\beta} & \cos \alpha \\ i \cos \alpha & -\sin \alpha e^{i\beta} \end{pmatrix}$		$0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
(16)	$\begin{pmatrix} 0 & e^{i\alpha} \\ -e^{i\alpha} & 0 \end{pmatrix}$	$\frac{ie^{i\alpha}}{-ie^{i\alpha}}$	$\begin{matrix} 1, & i \\ 1, & -i \end{matrix}$ $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
(17)	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} i & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i \cos \alpha & \sin \alpha e^{i\beta} \\ -\sin \alpha e^{-i\beta} & -i \cos \alpha \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} i \\ -i \\ i \\ -i \end{matrix}$	$\begin{matrix} \sqrt{3}, & i \\ 1, & -i\sqrt{3} \\ \cos \frac{\alpha}{2} e^{i\beta}, & i \sin \frac{\alpha}{2} \\ \sin \frac{\alpha}{2} e^{i\beta}, & -i \cos \frac{\alpha}{2} \end{matrix}$ $0 < \alpha, \beta < \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
(18)	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} i \sin \alpha & i \cos \alpha \\ i \cos \alpha & -i \sin \alpha \end{pmatrix} \quad \left(0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2} \right)$	$\begin{matrix} i \\ i \\ -i \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \\ \cos \alpha, & 1 - \sin \alpha \\ -\cos \alpha, & \sin \alpha + 1 \end{matrix}$	
(19)	$\begin{pmatrix} i & 0 \\ \alpha & -i \end{pmatrix}$ $(\alpha \neq 0)$	$\begin{matrix} i \\ -i \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2i, & \alpha \\ 0, & 1 \end{matrix}$	
(20)	$\begin{pmatrix} 0 & \alpha i \\ -\alpha i & 0 \end{pmatrix}$ $(\alpha > 1)$	$\begin{matrix} \alpha \\ -\alpha \end{matrix}$	$\begin{matrix} i, & 1 \\ -i, & 1 \end{matrix}$	

Таблица VIII (продолжение)

№	Простейшие примеры			Соответствующие собственные векторы ξ'_ν
	Матрица \mathfrak{A}	Характ. числа λ_ν		
(21)	$\begin{pmatrix} \sqrt{2} & i \\ -i & \sqrt{2} \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & i \text{ sh } \varphi \\ -i \text{ sh } \varphi & \text{ch } \varphi \end{pmatrix}$	$\sqrt{2} + 1$ $\sqrt{2} - 1$ $\text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi$ $\text{ch } \varphi - \text{sh } \varphi$		$i, 1$ $-i, 1$ $i, 1$ $-i, 1$
(22)	$\begin{pmatrix} \text{ch } \varphi & i \text{ sh } \varphi \\ i \text{ sh } \varphi & -\text{ch } \varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \neq 0)$	1 -1		$i \text{ ch } \frac{\varphi}{2}, -\text{sh } \frac{\varphi}{2}$ $i \text{ sh } \frac{\varphi}{2}, -\text{ch } \frac{\varphi}{2}$
(23)	$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3+i & 3-i \\ -3+i & 3+i \end{pmatrix}$	$1+i$ $\frac{1}{2}(1-i)$		$1, i$ $1, -i$
(24)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \text{ch } \varphi & i \text{ sh } \varphi \\ 0 & 0 & i \text{ sh } \varphi & -\text{ch } \varphi \\ -\text{ch } \varphi & -i \text{ sh } \varphi & 0 & 0 \\ -i \text{ sh } \varphi & \text{ch } \varphi & 0 & 0 \end{pmatrix}$	i $-i$		$\begin{cases} -i \text{ ch } \varphi, & \text{sh } \varphi, & 1, & 0 \\ \text{sh } \varphi, & i \text{ ch } \varphi, & 0, & 1 \end{cases}$ $\begin{cases} i \text{ ch } \varphi, & -\text{sh } \varphi, & 1, & 0 \\ -\text{sh } \varphi, & -i \text{ ch } \varphi, & 0, & 1 \end{cases}$
(25)	$\begin{pmatrix} i \text{ sh } \varphi & \text{ch } \varphi \\ -\text{ch } \varphi & i \text{ sh } \varphi \end{pmatrix} \quad (\varphi \neq 0)$	$i(\text{ch } \varphi + \text{sh } \varphi)$ $i(\text{sh } \varphi - \text{ch } \varphi)$		$1, i$ $1, -i$
(26)	$\begin{pmatrix} 0 & ai \\ ai & 0 \end{pmatrix} \quad (a > 1)$	ai $-ai$		$1, 1'$ $1, -1$

(27)	$\begin{pmatrix} 2a & bi \\ -bi & 0 \end{pmatrix}$ ($ab \neq 0$)	$\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{a - \sqrt{a^2 + b^2}}$	$bi, \sqrt{a^2 + b^2} - a$ $-bi, \sqrt{a^2 + b^2} + a$
(28)	$\begin{pmatrix} i \operatorname{ch} \varphi & \operatorname{sh} \varphi \\ \operatorname{sh} \varphi & -i \operatorname{ch} \varphi \end{pmatrix}$ ($\varphi \neq 0$)	i $-i$	$-\operatorname{ch} \frac{\varphi}{2}, i \operatorname{sh} \frac{\varphi}{2}$ $-\operatorname{sh} \frac{\varphi}{2}, i \operatorname{ch} \frac{\varphi}{2}$
(29)	$\begin{pmatrix} a & 0 \\ bi & 0 \end{pmatrix}$ ($ab \neq 0$)	0 a	$0, 1$ a, bi
(30)	$\begin{bmatrix} 0 & \operatorname{sh} \varphi & 0 & i \operatorname{ch} \varphi \\ -\operatorname{sh} \varphi & 0 & i \operatorname{ch} \varphi & 0 \\ 0 & -i \operatorname{ch} \varphi & 0 & \operatorname{sh} \varphi \\ -i \operatorname{ch} \varphi & 0 & -\operatorname{sh} \varphi & 0 \end{bmatrix}$	1 -1	$\begin{cases} \operatorname{ch} \varphi, 0, & -i \operatorname{sh} \varphi, & -i \\ 0, & \operatorname{ch} \varphi, & -i, & i \operatorname{sh} \varphi \end{cases}$ $\begin{cases} \operatorname{ch} \varphi, 0, & -i \operatorname{sh} \varphi, & i \\ 0, & \operatorname{ch} \varphi, & i, & i \operatorname{sh} \varphi \end{cases}$
(31)	$\begin{pmatrix} 2ai & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}$ ($ab \neq 0$)	$i(a + \sqrt{a^2 + b^2})$ $i(a - \sqrt{a^2 + b^2})$	$b, i(\sqrt{a^2 + b^2} - a)$ $-b, i(\sqrt{a^2 + b^2} + a)$
(32)	$\begin{pmatrix} 2a & bi \\ bi & 0 \end{pmatrix}$ ($ab \neq 0$)	$a + \sqrt{a^2 - b^2}$ $a - \sqrt{a^2 - b^2}$	$bi, \sqrt{a^2 - b^2} - a$ $-bi, \sqrt{a^2 - b^2} + a$
(33)	$\begin{pmatrix} 0 & a + bi \\ -a - bi & 0 \end{pmatrix}$ ($ab \neq 0$) ($a^2 + b^2 \neq 1$)	$-b + ai$ $b - ai$	$1, i$ $1, -i$

Матрицы четвертого порядка приводятся только там, где нет примеров с матрицами второго порядка. Символы $a, b, \alpha, \beta, \varphi$ обозначают вещественные параметры. Может оказаться, что при частных значениях этих параметров (например, $a = 0$ или $\varphi = \frac{\pi}{2}$ и т. п.) соответствующий пример изменяет свое качество, поэтому в частных случаях требуется делать проверку.

Примеры матриц с различными (грубыми) границами

Матрица $\mathbb{A} = (a_{jk})$	Коэффициенты $^1) a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ характеристического полинома (20.2) для \mathbb{A}	Характеристические числа k_j для \mathbb{A}	согласно (20.23) $\frac{\max_j \sum_{k=1}^n a_{jk} }{\max_k \sum_{j=1}^n a_{jk} }$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 9 \end{pmatrix}$	14 -25 10	11,98 1,44 0,58	$\frac{16}{(+34\%)}$
$\begin{pmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$	13 -47 35	7 5 1	$\frac{7}{(0\%)}$
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	-1 -3 0 0	$\frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}$ $\approx \begin{cases} 2,303 \\ -1,303 \end{cases}$ 0 0	$\frac{4}{(+74\%)}$
$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$	12 -47 62	5,52 $3,24 \pm i0,86$	$\frac{7}{(+27\%)}$ $\frac{6}{(+9\%)}$
$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	12 -48 64	4 4 4	$\frac{7}{(+75\%)}$ $\frac{7}{(+75\%)}$

для характеристических чисел (ошибка в %)

$\frac{\min_j (a_{jj} - \sum_k a_{jk})}{\min_k (a_{kk} - \sum_j a_{jk})}$ согласно (20,24)		$\sqrt{s_{33}} = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n a_{jk} ^2}$ согласно (20,30)		$\left. \begin{array}{l} \max_j a_{jj} + \sigma \\ \min_j a_{jj} - \sigma \\ \min \sigma^2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk} ^2 \end{array} \right\}$ согласно (20,31)		$\rho = \det \pi \left(\frac{n-1}{s_{33}} \right)^{\frac{n-1}{2}}$ согласно (20,36)		$\sqrt{s_{33} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{n}{s_{33}} \rho^2} \right)}$ согласно (20,37)	
(-2) не проходит		$\sqrt{146}$ $\approx 12,08$ (+1%)	$9 + \sqrt{52}$ $\approx 16,2$ (+35%)	$2 - \sqrt{52}$ $\approx -5,2$ не проходит	$\frac{10}{73}$ $\approx 0,137$ (-76%)	0,137			
(-1) не проходит		$\sqrt{75}$ $\approx 8,66$ (+24%)	9 (+26%)	-1 не проходит	$\frac{14}{15}$ $\approx 0,933$ (-7%)	0,939 (-6%)			
(-2) не проходит		$\sqrt{7}$ $\approx 2,646$ (+15%)	$1 + \sqrt{6}$ $\approx 3,45$ (+54%)	$-\sqrt{6}$ $\approx -2,45$ не проходит	0 0 (0%)				
1 (-70%)	2 (-40%)	$\sqrt{56}$ $\approx 7,48$ (+41%)	$4 + \sqrt{8}$ $\approx 6,83$ (+24%)	$4 - \sqrt{8}$ $\approx 1,17$ (-65%)	$\frac{31}{14}$ $\approx 2,214$ (-34%)	2,311 (-31%)			
1 1 (-75%)		$\sqrt{54}$ $\approx 7,35$ (+84%)	$4 + \sqrt{6}$ $\approx 6,45$ (+61%)	$4 - \sqrt{6}$ $\approx 1,55$ (-61%)	$\frac{64}{27}$ $\approx 2,370$ (-41%)	2,493 (-38%)			

Матрица $\mathfrak{A} = (a_{jk})$	Коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_0$ характеристического полинома (20.2) для \mathfrak{A}	Характеристические числа k_j для \mathfrak{A}	согласно (20.23) $\frac{\max_j \sum_{k=1}^n a_{jk} }{\max_k \sum_{j=1}^n a_{jk} }$	
$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} -4 \\ -1 \\ -6 \\ 7 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4,45 \\ -0,62 \pm i 1,29 \\ 0,79 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 10 \\ (125\%) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 6 \\ 35\% \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} -1 \\ -4 \\ 4 \\ 0 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{matrix}$	$\frac{10}{(+400\%)} \quad 10$	
$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & i \\ i & 1+i & -i \\ 0 & 1 & i \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 2+3i \\ 1-4i \\ -2+i \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1+2i \\ i \\ 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2+\sqrt{2} \\ 52\% \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3 \\ (34\%) \end{matrix}$
$\begin{pmatrix} 1+i & 0 & i \\ i & -1+i & -1 \\ 0 & 3 & i \end{pmatrix}$	$\begin{matrix} 3i \\ 1 \\ i \end{matrix}$	$\begin{matrix} i \pm \sqrt{2} \\ i \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ (66\%) \end{matrix}$	$\begin{matrix} 3+\sqrt{2} \\ (83\%) \end{matrix}$

¹⁾ Например, для первой матрицы характеристическое уравнение имеет

Таблица IX (продолжение)

$\frac{\min_j (a_{jj} - \sum'_k a_{jk})}{\min_k (a_{kk} - \sum'_j a_{jk})}$ <p style="text-align: center;">согласно (20.24)</p>	$\sqrt{s_B} = \sqrt{\sum_{j,k=1}^n a_{jk} ^2}$ <p style="text-align: center;">согласно (20.30)</p>	$\max_j a_{jj} + \sigma$ <p style="text-align: center;">согласно (20.31)</p> $\min_j a_{jj} - \sigma$ $\min \sigma^2 = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^n a_{jk} ^2$		$\rho = \det W \left(\frac{n-1}{s_B} \right)^{\frac{n-1}{2}}$ <p style="text-align: center;">согласно (20.36)</p>	$\sqrt{s_B \left(1 - \sqrt{1 - \frac{n}{s_B} \rho^2} \right)}$ <p style="text-align: center;">согласно (20.37)</p> $\approx \rho \left(1 + \frac{n-1}{4} \frac{\rho^2}{s_B} \right); \rho^2 \ll s_B$
$\underbrace{-4 \quad -5}$ <p style="text-align: center;">не проходит</p>	$\sqrt{42}$ <p style="text-align: center;">$\approx 6,481$ +46%</p>	$3 + \sqrt{32}$ <p style="text-align: center;">$\approx 8,66$ (+94%)</p>	$-\sqrt{32}$ <p style="text-align: center;">$\approx -5,66$ не проходит</p>	$\frac{1}{\sqrt{56}}$ <p style="text-align: center;">$\approx 0,134$ (-83%)</p>	<p style="text-align: center;">0,134</p>
$\underbrace{-8 \quad -10}$ <p style="text-align: center;">не проходит</p>	$\sqrt{54}$ <p style="text-align: center;">$\approx 7,35$</p>	$1 + \sqrt{53}$ <p style="text-align: center;">$\approx 8,28$</p>	$-\sqrt{53}$ <p style="text-align: center;">$\approx -7,28$ не проходит</p>	$\underbrace{0 \quad 0}$ <p style="text-align: center;">(0%)</p>	<p style="text-align: center;">0</p>
$\underbrace{\sqrt{2}-2 \quad -1}$ <p style="text-align: center;">не проходит</p>	<p style="text-align: center;">3 +34%</p>	$2 + \sqrt{2}$ <p style="text-align: center;">$\approx 3,41$ (+52%)</p>	<p style="text-align: center;">-1 не проходит</p>	$\frac{2}{9} \sqrt{5}$ <p style="text-align: center;">$\approx 0,497$ (-50%)</p>	<p style="text-align: center;">0,504 (-50%)</p>
$\underbrace{-2 \quad \sqrt{2}-3}$ <p style="text-align: center;">не проходит</p>	$\sqrt{17}$ <p style="text-align: center;">$\approx 4,123$ (+71%)</p>	$2 + \sqrt{12}$ <p style="text-align: center;">$\approx 4,88$ (+102%)</p>	$1 - \sqrt{12}$ <p style="text-align: center;">$\approx -2,46$ не проходит</p>	$\frac{2}{17}$ <p style="text-align: center;">$\approx 0,118$ -71%</p>	<p style="text-align: center;">0,118</p>

вид $-x^3 + 14x^2 - 25x + 10 = 0$.

Сравнительный обзор задач на собственные значения для матриц, дифференциальных и интегральных уравнений

Предмет	Матрицы	Дифференциальные уравнения	Интегральные уравнения
<p>Матрицы</p> $\mathfrak{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ $\mathfrak{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$	<p>Линейные дифференциальные операторы</p> $M = \sum_{\mu=0}^m f_{\mu}(x) \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}};$ $N = \sum_{\nu=0}^m g_{\nu}(x) \frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}};$ <p>при краевых условиях</p> $U_{\rho}[y] = \left\{ \sum_{\nu=1}^{m-1} (\alpha_{\nu} y^{(\nu)}(a) + \beta_{\nu} y^{(\nu)}(b)) \right\}_{\rho} = 0;$ <p style="text-align: center;">$\rho = 1, 2, \dots, m$</p>	<p>Ядра</p> $K(x, \xi); L(x, \xi)$	
Сравниваемые объекты	<p>Векторы</p> $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} \neq 0; v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_n \end{pmatrix} \neq 0$	<p>Функции сравнения</p> $u(x) \neq 0; v(x) \neq 0$ <p>m-кратно дифференцируемые и удовлетворяют краевым условиям</p>	<p>Функции сравнения</p> $u(x) \neq 0; v(x) \neq 0$

Симметричность	$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'$ или $u' \mathfrak{U} v = -v' \mathfrak{U} u = 0$ для любых векторов u, v	Самосопряженность $\int_a^b (uM[v] - vM[u]) dx = 0$ для любых функций сравнения u	$K(x, \xi) = K(\xi, x)$ или $\int_a^b \int_a^b (u(x)K(x, \xi)v(\xi) - v(x)K(x, \xi)u(\xi)) dx d\xi = 0$ для всех функций сравнения u, v
Антисимметричность	$\mathfrak{U} = -\mathfrak{U}'$ или $u' \mathfrak{U} v + v' \mathfrak{U} u = 0$	$\int_a^b (uM[v] + vM[u]) dx = 0$	$K(x, \xi) = -K(\xi, x)$ $\int_a^b \int_a^b (u(x)K(x, \xi)v(\xi) + v(x)K(x, \xi)u(\xi)) dx d\xi = 0$
Эрмитовость	$\mathfrak{U} = \overline{\mathfrak{U}'}$ или $u' \mathfrak{U} v - v' \overline{\mathfrak{U} u} = 0$	$\int_a^b (uM[v] - v\overline{M[u]}) dx = 0,$ $\overline{M} = \sum_{\mu=1}^m \overline{f_{\mu}}(x) \frac{d^{\mu}}{dx^{\mu}}$ эрмитов или комплексно самосопряжен	$K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}$ $\int_a^b \int_a^b (u(x)K(x, \xi)v(\xi) - v(x)\overline{K(x, \xi)u(\xi)}) dx d\xi = 0$

Таблица X (продолжение)

	Матрицы	Дифференциальные уравнения	Интегральные уравнения
Положительная определенность при вещественности при комплексности	$u' \mathfrak{U} u > 0$ $ u > 0$ $\bar{u}' \mathfrak{U} u > 0$	$\int_a^b u M [u] dx > 0,$ $\int_a^b \bar{u} M [u] dx > 0$ для любых функций сравнения u	$\int_a^b \int_a^b u(x) K(x, \xi) u(\xi) dx d\xi > 0$ $\int_a^b \int_a^b \bar{u}(x) K(x, \xi) u(\xi) dx d\xi > 0$ для всех функций сравнения u
Задача; собственное значение λ , характеристическое число $\kappa = \frac{1}{\lambda}$	$\mathfrak{U} \xi = \kappa \xi \text{ или } \xi = \lambda \mathfrak{U} \xi$	$M [y] = \lambda y$ $c U_\rho [y] = 0$ $M [y] = \lambda, P(x) = \lambda, P(x) y;$ $U_\rho [y] = 0$	$y(x) = \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi$
Собственное решение	$\xi_s = \begin{pmatrix} x_{1s} \\ x_{2s} \\ \vdots \\ x_{ns} \end{pmatrix} \text{ к } \mathfrak{K}_s$	$y_s(x) \text{ к } \lambda_s$ $y_s(x) \text{ к } \lambda_s$	$y_s(x) \text{ к } \lambda_s$
Собственные значения вещественны, если или при вещественности	$\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'$ $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}'$	$\int_a^b (uM [v] - v\bar{M} [u]) dx = 0$ $\int_a^b (uM [v] - vM [u]) dx = 0$ $(u^{(n)} \neq 0)$	$K(x, \xi) = \overline{K(\xi, x)}$ $K(x, \xi) = K(\xi, x)$

<p>Унитарность (при вещественности ортогональности) для эрмитовых задач при $\lambda_i \neq \lambda_k$</p>	$\bar{\xi}'_j \xi_k = 0$	$\int_a^b \bar{y}_j y_k dx = 0$	$\int_a^b \bar{y}_j \cdot p \cdot y_k dx = 0$	$\int_a^b \bar{y}_j y_k dx = 0$
<p>Нормировка для эрмитовых задач</p>	$\bar{\xi}'_j \xi = 1$	$\int_a^b \bar{y} \cdot y dx = 1$	$\int_a^b \bar{y} \cdot p \cdot y dx = 1$	$\int_a^b \bar{y} y dx = 1$
<p>Отношение Рэлея</p>	$R = \frac{\bar{\xi}' \mathcal{M} \xi}{\bar{\xi}' \xi}$ <p>(здесь $R \leq \kappa_{\max}$)</p>	$R = \frac{\int_a^b \bar{y} M [y] dx}{\int_a^b \bar{y} y dx}$	$R = \frac{\int_a^b \bar{y} M [y] dx}{\int_a^b \bar{y} \cdot p \cdot y dx}$	$R = \frac{\int_a^b \bar{y}(x) y(x) dx}{\int_a^b \int_a^b \bar{y}(x) K(x, \xi) y(\xi) dx d\xi}$
<p>Экстремальные свойства собственных значений см. в общих задачах</p>				
<p>Теорема о разложении (при вещественности)</p>	$\xi = \sum_{j=1}^n c_j \xi_j; \quad c_j = \xi'_j \xi$	$u(x) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(x); \quad c_j = \int_a^b y_j \mu dx$ <p>для функций сравнения $u(x)$</p>	$u(x) = \sum_{j=1}^n c_j y_j(x); \quad c_j = \int_a^b y_j p u dx$ <p>для функций сравнения $u(x)$</p>	$u(x) = \sum_{j=1}^{\infty} c_j y_j(x); \quad c_j = \int_a^b y_j \mu dx$ <p>представлено для источнообразно представимых функций u</p>

Таблица X (продолжение)

	Матрицы	Дифференциальные уравнения	Интегральные уравнения
Теорема включения	$u_j \neq 0$ $v_j = \frac{\sum_{k=1}^n a_{jk} u_k}{u_j}; \text{ шеств.}$ $(v_j)_{\min} \leq \lambda_s \leq (v_j)_{\max}$	$\Phi(x) = \frac{M[u(x)]}{u(x)};$ $u(x) \neq 0$ $\Phi(x) \text{ - веществ.}$ $\Phi_{\min} \leq \lambda_s \leq \Phi_{\max}$	$\Phi(x) = \frac{u(x)}{\int_a^b K(x, \xi) u(\xi) d\xi};$ $u(x) \neq 0$ $\Phi_{\min} \leq \lambda_s \leq \Phi_{\max}$
Разложение матрицы, соответственно ядра	$\mathfrak{A} = \sum_{j=1}^n \lambda_j \bar{e}_j \bar{e}_j'$ $(\bar{e}_j \text{ нормировано})$		<p>Теорема Мерсера: При вещественности</p> $K(x, \xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} y_j(x) y_j(\xi)$ <p>(y_j нормировано) сходится абсолютно и равномерно, если K имеет только конечное число отрицательных собственных значений</p>
При несимметрии собственные значения мнимы, если	$\mathfrak{A} = -\mathfrak{A}'$	$\int_a^b (uM[v] + v\bar{M}[u]) dx = 0$	$K(x, \xi) = -\overline{K(\xi, x)}$

<p>Теоремы суммирования для собственных значений</p>	$\sum_{j=1}^n \kappa_j = \sum_{j=1}^n a_{jj} \text{ (след } \mathfrak{A})$ $\sum_{j=1}^n \kappa_j^2 = \sum_{j=1}^n \alpha_{jk} ^2, \text{ если } \mathfrak{A} \text{ нормировано}$	<p>С помощью функций Грина, см. (7.21)</p>	$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j} = \int_a^b K(x, x) dx$ $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2} = \iint_a^b \iint_a^b K^2(x, \xi) dx d\xi$
<p>Задача</p>	$\mathfrak{A} \mathfrak{E} = \kappa \mathfrak{D} \mathfrak{E}$ $\mathfrak{D} = \begin{bmatrix} d_1 & & & 0 \\ & \cdot & & \\ & & \cdot & \\ 0 & & & d_n \end{bmatrix}$	<p>$M[y] = \lambda p(x) y$ $U_p[y] = 0$ (ср. выше)</p>	<p>$M[y] = (-1)^n \lambda [g(x) y^{(n)}]^{(n)}$ с $U_p[y] = 0$ при $\int_a^b u [g v^{(n)}]^{(n)} dx =$ $= (-1)^n \int_a^b g u^{(n)} v^{(n)} dx$</p>
<p>Собственные значения вещественны, если</p>	<p>$\mathfrak{A} = \overline{\mathfrak{A}}$; $d_j > 0$ веществ.</p>	<p>M эрмитов; $p(x) > 0$ $u^{(n)} \neq 0$</p>	<p>Одночленный класс M эрмитов; $u^{(n)} \neq 0$ $g(x) > 0$</p>

Т а б л и ц а X (продолжение)

	Матрицы	Дифференциальные уравнения	Интегральные уравнения
Обобщенная унитарность (при вещественности обобщенная ортогональность) и нормировка при $\kappa_j \neq \kappa_k$ или $\lambda_j \neq \lambda_k$	$\bar{x}'_j \mathfrak{E}_{jk} = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$	$\int_a^b \bar{y}_j p_{jk} dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$	$\int_a^b \bar{y}_j [gy^{(n)}]^{(a)} dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$
справедливы при дополнительных предположках			
Задача	$\mathfrak{U}\xi = \kappa \mathfrak{B}\xi$	$M[y] = \lambda N[y]; U_\rho[y] = 0$	$\int_a^b L(x, \xi) y(\xi) d\xi =$ $= \lambda \int_a^b K(x, \xi) y(\xi) d\xi$
Собственные значения вещественны, если	\mathfrak{U} и \mathfrak{B} эрмитовы; по крайней мере \mathfrak{U} или \mathfrak{B} положительно определены	M и N эрмитовы; по крайней мере M или N положительно определены	L и K эрмитовы; по меньшей мере L или K положительно определены

Частные задачи при этом содержат	$\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$	$N[y] = y$ или py	$K(x, \xi) =$ $= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \begin{cases} 0, & a \leq \xi < x - \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & x - \varepsilon \leq \xi \leq x + \varepsilon \\ 0, & x + \varepsilon < \xi \leq b \end{cases}$
Обобщенная унитарность (при векщенности обобщенная ортогональность) и нормировка при $\lambda_j \neq \lambda_k$ соответственно $\lambda_j \neq \lambda_k$	$\bar{y}_j \mathfrak{B} \mathfrak{E}_k = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$	$\int_a^b \bar{y}_j N[y_k] dx = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$	$\int_a^b \int_a^b \bar{y}_j(x) L(x, \xi) y_k(\xi) dx d\xi =$ $= \begin{cases} 0; & j \neq k \\ 1; & j = k \end{cases}$
Отношение Рэлея R	$R = \frac{\bar{y}' \mathfrak{B} \mathfrak{E}}{\bar{y}' \mathfrak{B} \mathfrak{E}} \quad (\mathfrak{B} \text{ — положит. опред.})$ $\lambda_{\min} \leq R \leq \lambda_{\max}$	$R = \frac{\int_a^b \bar{y} M[y] dx}{\int_a^b \bar{y} N[y] dx}$	$R = \frac{\int_a^b \int_a^b \bar{y}(x) L(x, \xi) y(\xi) dx d\xi}{\int_a^b \int_a^b \bar{y}(x) K(x, \xi) y(\xi) dx d\xi}$ (K — положит. опред.)

Таблица X (продолжение)

	Матрицы	Дифференциальные уравнения	Интегральные уравнения
<p>Экстремальные свойства 1-го собственного значения</p> <p>$\lambda_1 = \min H$</p>	<p>при</p> <p>$H = \bar{y}' \mathcal{A} \bar{y}$</p> <p>$\bar{y}' \mathcal{B} \bar{y} = 1$</p>	<p>Далее вещественно.</p> <p>$H = \int_a^b y M [y] dx$</p> <p>$\int_a^b y N [y] dx = 1$</p>	<p>$H = \int_a^b \int_a^b y(x) K(x, \xi) y(\xi) dx d\xi,$</p> <p>$\int_a^b \int_a^b y(x) L(x, \xi) y(\xi) dx d\xi = 1$</p>
<p>s-го собственного значения</p> <p>$\lambda_s = \min H$</p>	<p>$\bar{y}' \mathcal{B} \bar{y} = 0$</p>	<p>при дополнительных условиях ($j = 1, 2, \dots, s-1$)</p> <p>$\int_a^b y N [y_j] dx = 1$</p>	<p>$\int_a^b \int_a^b y(x) L(x, \xi) y_j(\xi) dx d\xi = 0$</p>
<p>Минимаксимальный принцип Куранта:</p> <p>$\lambda_s = \max (\min H)$</p>	<p>H нормировано, как и выше, при дополнительных условиях ($j = 1, 2, \dots, s-1$)</p> <p>$\bar{y}' \bar{y} = 0,$</p>	<p>$\int_a^b y r_j(x) dx = 0$</p>	<p>$\int_a^b \int_a^b y(x) L(x, \xi) r_j(\xi) dx d\xi = 0$</p>

при этом r_j , соответственно $r_j(x)$, выбираются произвольно и ищется максимум H_{\min} при вариации r_j , соответственно $r_j(x)$

Выражения конечно-разностного метода для производных

Метод	Выражения для	Выражение Сокращения: $y_i = y(th)$, $y'_i = y'_i(th)$ и т. д.	Дальнейшие члены при разложении Тейлора выражения слева
Обыкновенный метод согласно §21	y'	$y'_0 = \frac{1}{h}(y_1 - y_0) +$	$-\frac{h}{2}y''_0 - \frac{h^2}{6}y'''_0 - \dots$
		$y'_0 = \frac{1}{2h}(y_1 - y_{-1}) +$	$-\frac{h^2}{6}y'''_0 - \frac{h^4}{120}y^{IV}_0 - \dots$
	y''	$y''_0 = \frac{1}{h^2}(y_1 - 2y_0 + y_{-1}) +$	$-\frac{h^2}{6}y^{IV}_0 - \frac{h^4}{360}y^{V}_0 - \dots$
	y'''	$y'''_0 = \frac{1}{2h^3}(y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2}) +$	$-\frac{h^2}{4}y^{IV}_0 - \frac{h^4}{40}y^{V}_0 - \dots$
	y^{IV}	$y^{IV}_0 = \frac{1}{h^4}(y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2}) +$	$-\frac{h^2}{6}y^{V}_0 - \frac{h^4}{30}y^{VI}_0 - \dots$
Метод повышенной точности согласно п. 22.2	y'	$y'_0 = \frac{1}{12h}(-y_2 + 8y_1 - 8y_{-1} + y_{-2}) +$	$+\frac{h^4}{30}y^{IV}_0 + \dots$
		$y'_0 = \frac{1}{60h}(y_3 - 9y_2 + 45y_1 - 45y_{-1} + 9y_{-2} - y_{-3}) +$	$-\frac{h^6}{140}y^{VI}_0 + \dots$
	y''	$y''_0 = \frac{1}{12h^2}(-y_2 + 16y_1 - 30y_0 + 16y_{-1} - y_{-2}) +$	$+\frac{h^4}{90}y^{IV}_0 + \dots$










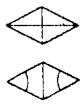



Таблица XI (продолжение)

Метод	Выражения для	Выражение Сокращения: $y_i = u(ih)$, $y'_i = u'(ih)$ и т. д.	Дальнейшие члены при разложении Тейлора выражения слева
Метод повышенной точности согласно п. 22.2	y''	$y''_0 = \frac{1}{180h^2} (2y_3 - 27y_2 + 270y_1 - 490y_0 + 270y_{-1} - 27y_{-2} + 2y_{-3}) +$	$-\frac{h^6}{560} y_0^{VI} + \dots$
	y'''	$y'''_0 = \frac{1}{8h^3} (-y_3 + 8y_2 - 13y_1 + 13y_{-1} - 8y_{-2} + y_{-3}) +$	$+\frac{7h^4}{120} y_0^{VII} + \dots$
	y^{IV}	$y^{IV}_0 = \frac{1}{6h^4} (-y_3 + 12y_2 - 39y_1 + 56y_0 - 39y_{-1} + 12y_{-2} - y_{-3}) +$	$+\frac{7h^4}{240} y_0^{VIII} + \dots$
Многоочечный метод согласно п. 22.4	y'	$y_1 - y_0 - \frac{h}{2} (y'_1 + y'_0) = 0 +$	$-\frac{h^3}{12} y_0''' + \dots$
		$y_1 - y_{-1} - \frac{h}{3} (y'_1 + 4y'_0 + y'_{-1}) = 0 +$	$-\frac{h^5}{90} y_0^V + \dots$
	y''	$y_1 - 2y_0 + y_{-1} - \frac{h^2}{12} (y'' + 10y''_0 + y''_{-1}) = 0 +$	$-\frac{h^6}{240} y_0^{VI} + \dots$
$-y_2 - 16y_1 + 34y_0 - 16y_{-1} - y_{-2} + \frac{4}{3} h^2 (2y''_1 + 11y''_0 + 2y''_{-1}) = 0 +$		$-\frac{92}{3} \frac{h^8}{7!} y_0^{VIII} + \dots$	
y'''	$y_2 - 2y_1 + 2y_{-1} - y_{-2} - \frac{h^3}{2} (y''' + 2y'''_0 + y'''_{-1}) = 0 +$	$\frac{h^7}{120} y_0^{VII} + \dots$	
	$y_2 - 4y_1 + 6y_0 - 4y_{-1} + y_{-2} - \frac{h^4}{6} (y^{IV} + 4y^{IV}_0 + y^{IV}_{-1}) = 0 +$	$-\frac{h^8}{720} y_0^{VIII} + \dots$	

Выражения конечноразностного метода для операторов Δ и $\Delta\Delta$ Таблица XII








Метод	Выражение Сокращения: $z_i, k = z(ih, kh)$; $\Delta z_i, k = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{x=ih, y=kh}$ Выражение Дальнейшие члены при разложении Тейлора выражения слева; сокращение $\zeta_i, k = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{x=0, y=0}$	
Обыкновенный метод согласно п. 23.1	$\Delta z_{0,0} \equiv \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)_{0,0} = \frac{1}{h^2}(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1} - 4z_{0,0}) +$ $\Delta \Delta z_{0,0} \equiv \left(\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^4}\right)_{0,0} =$ $\frac{1}{h^4}[20z_{0,0} - 8(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) + 2(z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1} + z_{-1,-1}) + (z_{0,2} + z_{2,0} + z_{-2,0} + z_{0,-2})] +$	$-\frac{h^2}{12}\zeta_{0,4} - \frac{h^4}{360}\zeta_{0,6} - \frac{h^6}{20 \cdot 160}\zeta_{0,8} - \dots$ $-\frac{h^2}{6}(\zeta_{0,6} + \zeta_{2,4}) - \dots$
Метод повышенной точности согласно п. 23.3	$\Delta z_{0,0} = \frac{1}{12h^2}[-60z_{0,0} + 16(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) - (z_{2,0} + z_{0,2} + z_{-2,0} + z_{0,-2}) +$ $\Delta \Delta z_{0,0} = \frac{1}{6h^4}[-(z_{3,0} + z_{0,3} + z_{-3,0} + z_{0,-3}) + 14(z_{2,0} + z_{0,2} + z_{-2,0} + z_{0,-2}) - 77(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) + 184z_{0,0} + 20(z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1} + z_{-1,-1}) - (z_{1,2} + z_{2,1} + z_{1,-2} + z_{-2,1} + z_{-1,-2} + z_{-2,-1})] +$	$+\frac{h^4}{90}\zeta_{0,6} + \frac{h^6}{1008}\zeta_{0,8} + \dots$ $+\frac{h^4}{4320}(151\zeta_{0,8} + 96\zeta_{2,6} + 30\zeta_{4,4}) + \dots$
Многоточный метод согласно п. 23.4	$40z_{0,0} - 8(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) - 2(z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1} + z_{-1,-1}) + 8h_2 \Delta z_{0,0} + h^2(\Delta z_{1,0} + \Delta z_{0,1} + \Delta z_{-1,0} + \Delta z_{0,-1}) =$ $140z_{0,0} - 16(z_{1,0} + z_{0,1} + z_{-1,0} + z_{0,-1}) + 2(z_{1,1} + z_{1,-1} + z_{-1,1} + z_{-1,-1}) - 3(z_{2,0} + z_{0,2} + z_{-2,0} + z_{0,-2}) + \frac{2}{3}h^2[46\Delta z_{0,0} + 10(\Delta z_{1,0} + \Delta z_{0,1} + \Delta z_{-1,0} + \Delta z_{0,-1}) + \Delta z_{1,1} + \Delta z_{1,-1} + \Delta z_{-1,1} + \Delta z_{-1,-1}] =$	$\frac{h^6}{60}(3\zeta_{0,6} - 5\zeta_{2,4}) + \dots$ $\frac{h^8}{1260}(-23\zeta_{0,8} + 42\zeta_{2,6}) + \dots$

Результаты конечноразностного метода

Сетка		Шестиугольная сетка, параллельно сторонам ромба					
							
Число внутренних узловых точек		2	6	10	16	24	
Шаг		$h = \frac{1}{3} A$	$h = \frac{1}{4} A$	$h = \frac{1}{5} A$	$h = \frac{1}{6} A$	$h = \frac{1}{7} A$	
Симметрия относительно		$\lambda_1 A^2$	$\nu; \Delta A^2$	$\nu; \Delta A^2$	$\nu; \Delta A^2$	$\nu; \Delta A^2$	
			$\nu; \Delta A^3$	$\nu; \Delta A^2$	$\nu; \Delta A^2$	$\nu; \Delta A^2$	
G_1, G_2		24,32	1; 24	2; 21,3	$\frac{1+\sqrt{13}}{2}; 23,24$	2,499; 24,06	2,634; 23,91
G_2		$\frac{16\pi^2}{3} \approx 52,64$	-1; 48	1; 42,7	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}; 46,07$	2; 48	2,247; 49,20
G_1					$\frac{\sqrt{13}-1}{2}; 56,57$	1,662; 64,22	2,029; 63,44
G_1, G_2				-1; 85,3	1; 66,7	1,495; 72,2	1,860; 74,5
G_2		$\frac{112\pi^2}{9} = 122,8$			$\frac{\sqrt{5}-1}{2}; 79,4$	1; 96	$\sqrt{2}; 103,6$
				$\frac{1-\sqrt{5}}{2}; 120,6$			
G_1, G_2					$\frac{1-\sqrt{13}}{2}; 143,4$	0,425; 123,5	1,331; 109
G_1				-2; 106,7	-1; 133,3	0,758; 108	1,123; 122,6
G_1, G_2						-0,758; 180	1; 130,7
G_2		$\frac{64\pi^2}{3} = 210,6$				-1; 192	0,555; 169
G_1					$\frac{-1-\sqrt{13}}{2}; 177$	-0,425; 164	0,673; 152
G_2					$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; 154$	-1; 192	0,802; 143,5 -0,802; 249
G_1, G_2						-1,63; 244	-0,673; 240
G_1, G_2							-1,123; 269
G_1						-2,499; 264	-1; 261,3
						-2; 240	-0,555; 232

для ромбической мембраны из п. 23.5











Таблица XIII

Шестигранная сетка, по другому принципу				Треугольная сетка		
						
32	2	8	6	4	9	16
$h = \frac{1}{8} A$	$h = \frac{1}{3} A \sqrt{3}$	$h = \frac{1}{8} A \sqrt{3}$	$h = \frac{1}{4} A$	$h = \frac{1}{3} A$	$h = \frac{1}{4} A$	$h = \frac{1}{5} A$
$v; \Delta A^2$	$v; \Delta A^2$	$v; \Delta A^2$	$v; \Delta A^2$	$v; \Delta A^2$	$v; \Delta A^2$	$v; \Delta A^2$
2,7157; 24,23	1; 22,22	2,170; 23,6	$\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; 22,79	$\frac{1 + \sqrt{17}}{2}$; 24,080	3,8951; 24,611	4,6024; 24,734
$1 + \frac{\sqrt{2}}{49,99}$	-1; 44,4	1,481; 43,2	1; 42,7	0; 48	2; 51,2	$1 + \frac{\sqrt{5}}{52,061}$
$\frac{2,222}{66,42}$		1; 56,9	$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$; 53,0	-1; 59,29	1; 67,37	2,132; 69,85
2,097; 77,1		0,311; 76,4	$\frac{1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; 75,0	$\frac{1 - \sqrt{17}}{2}$; 66,24	0,397; 77,96	1,943; 81,37
$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \sqrt{3}; 108,2$		-1; 114	-1; 85,3		$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} -1; 105,41$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}; 115,6$
		-0,311; 91				
1,594; 120		-1,481; 127	$\frac{-1 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; 105,2		$\frac{-1,292}{111,7}$	0,183; 128,0
1,363; 139,7					-2	-0,580; 151,1
1,353; 140,5						128
$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} 1; 170,7$		-2,17; 147				$1 - \frac{\sqrt{5}}{172,7}$
						-1,521; 182,6
0,632; 202						-1,84; 194
-0,806; 324						-2,307; 212
0,806; 187						2,332; 213
$\sqrt{2} - 1; 221$						

Спектры сеточных областей
(до шести внутренних точек включительно)

№	Расположение внутренних узловых точек (только топологически различные случаи)	Уравнение для v	Корни v	Числовые значения λ , $\lambda = \frac{4-v}{h^2}$
1		$v = 0$	0	0
2		$v^2 - 1 = 0$	± 1	± 1
3		$v^3 - 2v = 0$	$\pm \sqrt{2}, 0$	$\pm 1, 4142; 0$
4		$v^4 - 4v^2 = 0$	$\pm 2, 0, 0$	$\pm 2; 0; 0$
		$v^4 - 3v^2 = 0$	$\pm \sqrt{3}, 0, 0$	$\pm 1, 7321; 0; 0$
		$v^4 - 3v^2 + 1 = 0$	$\pm \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$	$\pm 1, 6180; \pm 0, 6180$
5		$v^5 - 5v^3 + 2v = 0$	$\pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{17}}{2}}, 0$	$\pm 2, 1358; \pm 0, 6622; 0$
		$v^5 - 4v^3 = 0$	$\pm 2; 0, 0, 0$	$\pm 2; 0; 0; 0$
		$v^5 - 4v^3 + 2v = 0$	$\pm \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}, 0$	$\pm 1, 8478; \pm 0, 7656; 0$
		$v^5 - 4v^3 + 3v = 0$	$\pm \sqrt{3}; \pm 1; 0$	$\pm 1, 7321; \pm 1; 0$

Таблица XV (продолжение)

№	Расположение внутренних узловых точек (только топологически различные случаи)	Уравнение для v	Корни v	Числовые значения v , $\Delta = \frac{4-v}{h^2}$
		$v^6 - 7v^4 + 7v^2 - 1 = 0$	$\pm 1 \pm \sqrt{2}$; ± 1	$\pm 2,4142$; ± 1 ; $\pm 0,4142$
		$v^6 - 6v^4 + 4v^2 = 0$	$\pm \frac{1 \pm \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$; 0 , 0	$\pm 2,2883$; $\pm 0,8740$; 0 ; 0
		$v^6 - 6v^4 + 5v^2 - 1 = 0$	$\pm \frac{1}{2 \cos \frac{k\pi}{7}}$; $k = 1, 2, 3$	$\pm 2,2470$; $\pm 0,8019$; $\pm 0,555$
		$v^6 - 6v^4 + 5v^2 = 0$	$\pm \sqrt{5}$; ± 1 ; 0 , 0	$\pm 2,2861$; ± 1 ; 0 ; 0
		$v^6 - 6v^4 + 6v^2 = 0$	$\pm \sqrt{3 \pm \sqrt{3}}$; 0 ; 0	$\pm 2,1753$; $\pm 1,126$; 0 ; 0
		$v^6 - 5v^4 + 3v^2 = 0$	$\pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{13}}{2}}$; 0 ; 0	$\pm 2,0743$; $\pm 0,8350$; 0 ; 0
		$v^6 - 5v^4 + 4v^2 = 0$	± 2 ; ± 1 ; 0 ; 0	± 2 ; ± 1 ; 0 ; 0
		$v^6 - 5v^4 + 5v^2 - 1 = 0$	$\pm \frac{1 \pm \sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; ± 1	$\pm 1,9319$; ± 1 ; $\pm 0,5176$
		$v^6 - 5v^4 + 5v^2 = 0$	$\pm \sqrt{\frac{5 \pm \sqrt{5}}{2}}$; 0 , 0	$\pm 1,9021$; $\pm 1,1756$; 0 ; 0
		$v^6 - 5v^4 + 6v^2 - 1 = 0$	$\pm 2 \cos \frac{k\pi}{7}$; $k = 1, 2, 3$	$\pm 1,8019$; $\pm 1,2470$; $\pm 0,4459$

ДОПОЛНИТЕЛЬНАЯ ЛИТЕРАТУРА

- Ахизер Н. И. и Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, изд. 2, «Наука», 1966.
- Agószajn N., Rayleigh—Ritz and A. Weinstein methods for approximation of eigenvalues, I, II, Proc. Nat. Acad. Sci. **34** (1948), 470—480, 594—601.
- Bauer F. L., Das Verfahren der Treppeniteration und verwandte Verfahren zur Lösung algebraischer Eigenwertprobleme, Z. angew. Math. Phys., **8** (1957), 214—235.
- Bauer F. L. und Householder A. S., Absolute norms and characteristic roots, Num. Math. **3** (1961), 241—246.
- Блохинцев Д. И., Основы квантовой механики, изд. 4, М., «Высшая школа», 1963.
- Börsch-Supan W. und Bottenbruch H., Eine Methode zur Eingrenzung sämtlicher Eigenwerte einer hermiteschen Matrix mit überwiegender Hauptdiagonale, Z. angew. Math. Mech. **38** (1958), 169—171.
- Borg G., Eine Umkehrung der Sturm—Liouvilleschen Eigenwertaufgabe. Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math. **78** (1946), 1—96.
- Brownwell F. H., Extended asymptotic eigenvalue Distributions for bounded domains in n -space, Z. Math and Mech. **6** (1957), 119—166.
- Buckner H., Die praktische Behandlung von Integralgleichung (Ergebnisse der Angewandten Mathematik, Heft 1), Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1952, 127.
- Bukovics E., Natürliche Eigenwertprobleme bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Symposium on the Numerical Treatment of Ordinary Differential Equations, Integral and Integro-Differential Equations, Basel, 1960, 355—361.
- Causesy R. L. und Hengici P., Convergence of approximate eigenvectors in Jacobi methods, Numer. Math. **2** (1960), 67—78.
- Dettmar H. K., Symmetrisierbare Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, Z. angew. Math. Mech. **34** (1954), 284—287.
- Dettmar H. K. und Schlüter A., Praktische Lösung von Eigenwertaufgaben des Hartree—Fock'schen Typs, Z. angew. Math. Mech. **38** (1958), 220—236.
- Diaz J. B., Upper and lower bounds for eigenvalues, Proc. Symp. Appl. Math. **8** (1958), 53—78.
- Falk S., Einschließungssatz für Eigenwerte und Vektoren normaler Matrizenpaare, Wiss. Z. Techn. Univ. Dresden **10** (1961), 1033—1039.
- Гантмахер Ф. Р. и Крейн М. Г., Осцилляционные матрицы, ядра и малые колебания механических систем, Гостехиздат, М.—Л., 1950.
- Гельфанд И. М. и Костюченко А. Г., О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР **103** (1955), 349—352.
- Haas H. L., Bestimmung der Eigenwerte des allgemeinen Eigenwertproblems, Numer. Math. **2** (1960), 341—343.
- Heinrich H., Ein inverses Eigenwertproblem für endliche Matrizen und seine graphische Lösung für $n=3$, Z. angew. Math. Mech. **40** (1960), 62—64.

- Householder A. S. und Bauer F. L., On certain methods for expanding the characteristic polynomial, *Numer. Math.* **1** (1959), 29—37.
- Howay G., Biharmonic eigenvalue problem of the semi-infinite strip, *Q. of Appl. Math.* **15** (1957), 65—81.
- Kato T., On the upper and lower bounds for eigenvalues, *J. Phys. Soc. Japan* **4** (1949), 415—438.
- Kato T., On positive eigenvectors of positive infinite matrices, *Commun. Pure Appl. Math.* **11** (1958), 573—586.
- Klotter K., Analyse der verschiedenen Verfahren zur Berechnung der Torsionseigenschwingungen von Maschinenwellen, *Ing.-Arch.* **17** (1949), 1—61.
- Klotter K., Technische Schwingungslehre, 2 Bd., 2 Aufl., Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1960, 483.
- Kneschke A., Differentialgleichungen und Randwertprobleme II, Leipzig, 1961, 628, в особенности стр. 436—622.
- Kreuzig E., Die Ausnutzung zusätzlicher Vorkenntnisse für die Einschließung von Eigenwerten beim Iterationsverfahren, *Z. angew. Math. Mech.* **35** (1955), 89—95.
- Laasonen P., On the simultaneous determination of several eigensolutions of a selfadjoint system of differential equations, *Math. Tables and other Aids to Computation* **15** (1959), 13—20.
- Lancaster P., A generalised Rayleigh quotient iteration for lambda matrices, *Arch. Rational Mech. Anal.* **8** (1961), 309—322.
- Läuchli P. und Waldburger H., Berechnung von Beulwerten mit Hilfe von Mehrstellenoperatoren, *Z. angew. Math. Phys.* **11** (1960), 445—454.
- Lehmann N. J., Beiträge zur numerischen Lösung linearer Eigenwertprobleme, *Z. angew. Math. Mech.* **29** (1949), 341—356; **30** (1950), 1—16.
- Lehmann N. J., Zusammenhang allgemeiner Eigenwertaufgaben bei Differentialgleichungen mit der Integralgleichungstheorie, *Z. angew. Math. Mech.* **31** (1951), 251—253.
- Lotkin M., Characteristic values of arbitrary matrices, *Q. of Appl. Math.* **14** (1956), 267—275.
- Magnus K., Schwingungen, Stuttgart, 1961, 251.
- Marguerre K., Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1950.
- Meixner J. und Schäfer F. W., Mathiesche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1954, 414.
- Moser J., Singular perturbation of eigenvalue problems for linear Differential equations of even order, *Commun. Pure and Appl. Math.* **8** (1955), 251—278.
- Müller H., Über eine Klasse von Eigenwertaufgaben mit nichtlinearer Parameterabhängigkeit, *Math. Nachr.* **12** (1954), 173—181.
- Müller P. H. und Kummer H., Zur praktischen Bestimmung nichtlinear auftretender Eigenwerte, Anwendung des Verfahrens auf eine Stabilitätsuntersuchung, *Z. angew. Math. Mech.* **40** (1960), 136—143.
- Наймарк М. А., Линейные дифференциальные операторы, ГИТТЛ, 1954.
- Nitsche J. A., Einfache Fehlerschranken beim Eigenwertproblem symmetrischer Matrizen, *Z. angew. Math. Mech.* **39** (1959), 322—325.
- Nitsche J. A., Fehlerschranken bei Eigenwertproblemen normalisierbarer Matrizen, *Z. angew. Math.* **31** (1961), 320—324.
- Osborne M. R., h^2 -Extrapolation in eigenvalue problems, *Quart. Mech. and Appl. Math.* **13** (1960), 156—168.
- Ostrowski A. M., On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of the characteristic roots and vectors. 6 работ в *Arch. Rational Mech. Anal.* (1957—1960), 1: 233—241; 2: 423—428; 3: 325—340; 3: 341—347; 3: 472—481; 4: 153—165.
- Payne L. F., Inequalities for eigenvalues of supported and free plates, *Q. of Appl. Math.* **16** (1958), 111—120.
- Pflüger A., Stabilitätsprobleme der Elastostatik, Berlin, 1950.

- Redheffer R. M., Maximum principles and duality, *Monatsh. Math. Wien* **62** (1958), 56—75.
- Rutishauser H., Bestimmung der Eigenwerte und Eigenvektoren einer Matrix mit Hilfe des Quotienten — Differenzen — Algorithmus, *Z. angew. Math. Phys.* **6** (1955), 387—401.
- Rutishauser H., Ein quadratisch konvergentes Verfahren zur Eigenwertbestimmung bei unsymmetrischen Matrizen. I, *Z. angew. Math. Phys.* **12** (1961), 568—571.
- Sagan H., Boundary and eigenvalue problems in mathematical physics, New York — London, 1961.
- Schmeidler W., Vorträge über Determinanten und Matrizen, Berlin, 1949.
- Schmeidler W., Integralgleichungen mit Anwendungen in Physik und Technik, Leipzig, 1950.
- Schnell W., Berechnung der Stabilität mehrfeldriger Stäbe mit Hilfe von Matrizen, *Z. angew. Math. Mech.* **35** (1955), 269—284.
- Schönhage A., Zur Konvergenz des Jacobi — Verfahrens, *Num. Math.* **3** (1961), 374—380.
- Schröder J., Fehlerabschätzungen zur Störungsrechnung für linearen Eigenwertprobleme bei gewöhnlicher Differentialgleichungen, *Z. angew. Math. Mech.* **34** (1954), 140—149.
- Schröder J., Störungsrechnung bei Eigenwert- und Verzweigungsaufgaben, *Arch. Rational Mech. Anal.* **1** (1957—1958), 436—468.
- Stiefel E. und Ziegler H., Natürliche Eigenwertprobleme, *Z. angew. Math. Phys.* **1** (1950), 111—138.
- Szabo J., Höhere technische Mechanik, 3 Aufl., Berlin — Göttingen — Heidelberg, 1960.
- Szegő G., Inequalities for certain eigenvalues a membrane of given area, *J. Rat. Mech. Anal.* **3** (1954), 343—356.
- Tithmarsch E. C., Eigenfunction expansions, Oxford, I (1946), II (1958).
- Титчмарш Е. С., Разложения по собственным функциям, связанным с дифференциальными уравнениями второго порядка. ИЛ, т. I, 1960; т. II, 1961.
- Unger H., Nichtlineare Behandlung von Eigenwertaufgaben. *Z. angew. Math. Mech.* **30** (1950), 281—282.
- Unger H., Zur Praxis der Biorthonormierung von Eigen- und Hauptvektoren, *Z. angew. Math. Mech.* **33** (1953), 321—331.
- Weinberger H. F., Upper and lower bounds for eigenvalues by finite difference methods, *Commun. Pure and Appl. Math.* **9** (1956), 613—624.
- Weinel E., Torsionsbeulung eines Plattenstreifens, *Z. angew. Math. Mech.* **36** (1956), 293—296.
- Weinstein A., Bounds for eigenvalues and the method of intermediate problems. *Proc. Internat. Conference on Partial Diff. Equations*, Math. Reserach Center Madison, Wisc., USA, 1961.
- Wetterling W., Zum Einschließungssatz von Kryloff — Bogoliubov für Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen Differentialgleichungen, *Num. Math.* **2** (1960), 18—21.
- Wieland H., Die Einschließungssätze von Eigenwerten normalen Matrizen, *Math. Ann.* **121** (1949), 234—241.
- Wieland H., Einschließung von Eigenwerten hermitescher Matrizen nach dem Abschnittverfahren. *Arch. Math.* **5** (1954), 108—114
- Wittmeyer H., Berechnung einzelner Eigenwerte eines algebraischen linearen Eigenwertproblems durch Störiteration, *Z. angew. Math. Mech.* **35** (1955), 441—452.
- Ziegler H., Knickung gerader Stäbe unter Torsion, *Z. angew. Math. Phys.* **3** (1952), 96—119.
- Zurühl R., Matrizen. Eine Darstellung für Ingenieure, изд. 2, Berlin, 1958.

Л. Коллатц

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

(с техническими приложениями)

М., 1968 г., 504 стр. с илл.

Редактор *И. А. Маркузон*

Техн. редактор *С. Я. Шкляр*

Корректоры *Н. Д. Дорохова, Г. И. Иванова*

Сдано в набор 25/XI 1967 г. Подписано к печати 25/V 1968 г. Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 31,5. Условн. печ. л. 31,5. Уч.-изд. л. 30,1. Тираж 18400 экз. Цена книги 2 р. 37 к. Заказ № 1002.

Издательство «Наука».

Главная редакция

физико математической литературы.

Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский пр., 29.