

SPRINGER TRACTS IN MODERN PHYSICS

*Ergebnisse der exakten
Naturwissenschaften*

VOLUME 45

REGGE POLES IN PARTICLE PHYSICS

P. D. B. COLLINS and E. J. SQUIRES

SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG NEW YORK 1968

П. Коллинз, Ю. Сквайрс

ПОЛЮСА РЕДЖЕ В ФИЗИКЕ ЧАСТИЦ

Перевод с английского

А. И. НАУМОВА

Под редакцией

А. М. БРОДСКОГО

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР» МОСКВА 1971

УКАЗАТЕЛЬ ПРОЦЕССОВ РАССЕЯНИЯ

πN (полное сечение) 249, 287, 297, 308
 $\pi N \rightarrow \pi N$ (упругое рассеяние) 35, 63,
 201, 266, 287, 300, 304
 $\pi N \rightarrow N\pi$ 121, 263, 282, 311, 333
 $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ 255, 261, 271, 287, 302, 313,
 321, 325, 331

$\pi^- p \rightarrow \eta n$ 155, 255, 262, 278, 316, 321,
 332

$\pi^- p \rightarrow p^+$ недостающая масса 238

$\pi^+ p \rightarrow \pi^0 \Delta$ 296

$\pi^+ p \rightarrow A_2 p$ 296

$\pi^+ p \rightarrow \omega \Delta$ 296

$\pi N \rightarrow \rho N$ 263, 295, 306, 307

$\pi N \rightarrow f N$ 295

$\pi N \rightarrow \rho \Delta$ 295, 306

$\pi N \rightarrow f \Delta$ 295

$\pi N \rightarrow (\pi\rho) N$ 261

$\pi^- p \rightarrow \Delta K^0$ 263

$\pi^- p \rightarrow \Sigma^0 K^0$ 263

$\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^-$ 301

NN (полное сечение) 249, 305, 309

$NN \rightarrow NN$ (упругое рассеяние) 141,
 146, 265, 271, 287, 298, 300

$\bar{p}p \rightarrow \bar{n}n$ 261, 283

$pn \rightarrow np$ 261, 283

$pp \rightarrow pN^*$ 140, 259

$\bar{p}p \rightarrow p\bar{N}^*$ 140

$\bar{p}p \rightarrow \Lambda \bar{\Lambda}$ 263, 296

$\bar{p}p \rightarrow \Delta \bar{\Sigma}$ 296

$\bar{p}p \rightarrow \Sigma \bar{\Sigma}$ 296

KN (полное сечение) 249, 267, 308

$KN \rightarrow KN$ (упругое рассеяние) 273,
 287, 333

$K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$ 261, 267, 281, 287

$K^+ n \rightarrow K^0 p$ 261, 267, 281

$K^+ p \rightarrow K^0 \Delta$ 296

$K^- p \rightarrow \Delta \pi^0$ 263

$K^- p \rightarrow \Sigma^+ \pi^-$ 263

$K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0$ 263

$KN \rightarrow K^* \Delta$ 295

$K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-$ 301

$\pi\pi \rightarrow \pi\pi$ 47, 62, 198, 202

$\rho\pi \rightarrow \rho\pi$ 323

$\pi K^* \rightarrow \pi K^*$ 324

$K\rho \rightarrow K\rho$ 324

$\gamma A \rightarrow \gamma A$ 327

$\gamma\pi \rightarrow \gamma\pi$ 328

$\gamma p \rightarrow \pi N, KN$ 330

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода	5
Введение	10
Г л а в а I. S-матрица	17
§ 1. Введение	17
§ 2. Постулаты теории S -матрицы	18
§ 3. Символическая запись условия унитарности	21
§ 4. Структура сингулярностей амплитуд рассеяния	26
§ 5. Кроссинг и CPT -теорема	30
§ 6. Связия четыреххвостка	31
§ 7. Связь между амплитудой рассеяния и измеряемыми величинами	35
§ 8. Сингулярности связиной четыреххвостки	37
§ 9. Скачок на двухчастичном разрезе	40
§ 10. Дисперсионные соотношения по одной переменной	42
§ 11. Мандельштамовское представление	45
§ 12. Двойная спектральная функция упругого процесса	49
Г л а в а II. Парциальные амплитуды и полюса Редже	56
§ 1. Парциальные амплитуды	56
§ 2. Амплитуды с определенной сигнатурой	58
§ 3. Проекция Грибова — Фруассара	59
§ 4. Сингулярности парциальных амплитуд	61
§ 5. Условие унитарности для парциальных амплитуд и фазовые сдвиги	65
§ 6. Асимптотическое поведение и представление Грибова — Фруассара	68
§ 7. Граница Фруассара	69
§ 8. Аналитическое продолжение по угловому моменту	72
§ 9. Преобразование Зоммерфельда — Ватсона	74
§ 10. Полюса Редже	80
§ 11. Сингулярности парциальных амплитуд при нецелых l	84
§ 12. Преобразование Маидельштама — Зоммерфельда — Ватсона	86
Г л а в а III. Полюса Редже и маидельштамовское представление	90
§ 1. Некоторые свойства реджевских функций	90
§ 2. Полюса Редже и маидельштамовское представление	97
§ 3. Представление Чью — Джонса	101
§ 4. Представление Хури — Джоиса	106
§ 5. Степенное разложение Хури	108
§ 6. Проблемы кинематики частиц с неравными массами	111
§ 7. Дочерние траектории	119
§ 8. Некоторые экспериментальные следствия	121

Глава IV. Спин	124
§ 1. Разложение по парциальным волнам для частиц со спином	124
§ 2. Свойства функций $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ и $e_{\lambda\mu}^J(\theta)$	126
§ 3. Кинематические сингулярности и дисперсионные соотношения по одной переменной	131
§ 4. Обобщенная проекция Грибова — Фруассара	132
§ 5. Преобразование Зоммерфельда — Ватсона	134
§ 6. Кинематические ограничения на вычеты	136
§ 7. Четность	143
§ 8. Вклад траектории Померанчука	144
§ 9. Применение теоретико-групповых методов к теории Редже	147
Глава V. Природа сингулярностей в J -плоскости	156
§ 1. Аналитическое продолжение унитарности	156
§ 2. Движущиеся сингулярности в J -плоскости	158
§ 3. Разрезы в комплексной плоскости углового момента	159
§ 4. Неподвижные полюса в J -плоскости	163
§ 5. Сингулярности в интеграле Грибова — Фруассара и свержающиеся соотношения	165
§ 6. Сингулярности Грибова — Померанчука	169
Глава VI. Зашнуровка	172
§ 1. Гипотеза зашнуровки	172
§ 2. N/D -уравнения	176
§ 3. Неупругие каналы в N/D -уравнениях	185
§ 4. Обменные силы	190
§ 5. Некоторые простые примеры зашнуровочных вычислений	196
§ 6. Новая форма полосного приближения	201
§ 7. Итерационная процедура Мандельстама	211
§ 8. Некоторые проблемы	214
Глава VII. Теория возмущений и элементарные частицы	217
§ 1. Роль теории возмущений	217
§ 2. Высокоэнергетическое поведение фейнмановских диаграмм	218
§ 3. Граничные вклады	220
§ 4. Пинчевые вклады	224
§ 5. Частицы со спином и реджезация элементарных частиц	228
§ 6. Элементарные частицы	230
Глава VIII. Обзор экспериментальной ситуации	235
§ 1. Траектории Редже	235
1. Введение (235). 2. Мезонные траектории (236). 3. Барийные траектории (241).	
§ 2. Полюса Редже и высокие энергии	244
§ 3. Полные сечения при высоких энергиях	247
1. Полюса Редже и полиые сечения (247). 2. Предел Померанчука (248). 3. Вклады других траекторий (250). 4. Обработка экспериментальных данных (251). 5. Дисперсионные правила сумм для рассеяния вперед (256).	
§ 4. Сечения неупругого рассеяния вперед	258
1. Введение (258). 2. Возможен обмен померанчоном (258). 3. Обмен нестранным мезоном возможен, обмен померанчоном запрещен (261). 4. Возможен обмен странным мезоном (263). 5. Возможен обмен барионом (263). 6. Невозможен обмен никакими известными траекториями (264).	

§ 5. Фаза амплитуды рассеяния вперед	264
1. Предсказание теории полюсов Редже (264). 2. Экспериментальная проверка (265). 3. Другие способы вывода предсказаний теории Редже (268).	
§ 6. Угловая зависимость дифференциальных сечений	269
1. Полюса Редже и дифференциальные сечения (269). 2. $\pi - N$ -рассеяние с перезарядкой и ρ -траектория (271). 3. Рассеяние $\pi^- p \rightarrow \eta p$ и A_2 -траектория (278). 4. Другие процессы мезон-нуклонного рассеяния с перезарядкой (281) 5. $\pi^\pm p$ -рассеяние назад и фермионные траектории (282). 6. Обмен пионом при NN - и $\bar{N}N$ -рассеянии с перезарядкой (283). 7. Упругое рассеяние (287). 8. Процессы рождения (295). 9. Реджевские разрезы (296).	
§ 7. Поляризация и спиновые матрицы плотности	301
1. Поляризация и полюса Редже (301). 2. Поляризация в процессе $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ (302). 3. Поляризация в других процессах упругого πN -рассеяния (304). 4. Спиновая структура в NN -рассеянии (305). 5. Выражения для матриц плотности через спиральные амплитуды кросс-канала (306). 6. Матрицы плотности для процессов $\pi N \rightarrow \rho N$ и $\pi N \rightarrow \rho \Delta$ (306).	
§ 8. Низкие энергии и интерференция с резонансами прямого канала	309
§ 9. Прямолинейные траектории и обменное вырождение	316
1. Динамика прямолинейных траекторий (316). 2. Кварковая модель для траекторий (319).	
§ 10. Применение свёрхсходящихся соотношений	321
§ 11. Электромагнитные и слабые процессы	327
Д о п о л н е н и е	331
1. Дочерние траектории, конспирации и $O(4)$	331
2. Нули вычетов	332
3. Разрезы	332
4. Бесконечно растущие траектории	333
5. Правила сумм	333
6. Зашнуровка	333
Л и т е р а т у р а	334
П р е д м е т н ы й у к а з а т е л ь	345
У к а з а т е л ь п р о ц е с с о в р а с с е я н и я	348

Книга посвящена принципиальным проблемам физики высоких энергий. Подробно излагается важнейший динамический подход, применяемый для описания сильных взаимодействий и основанный на введении в релятивистскую теорию представлений о полюсах Редже. Авторы дают обзор результатов, опубликованных в многочисленных журнальных статьях.

Ценной особенностью книги является проводимое в ней сопоставление теории с данными экспериментов по рассеянию и рождению адронов при высоких энергиях.

Книга будет полезной как для физиков, интересующихся проблемами теории элементарных частиц и принципиальными проблемами физики вообще, так и для аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях физики высоких энергий.

Редакция литературы по физике

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предлагаемая вниманию читателей книга Коллинза и Сквайрса посвящена в основном обзору различных теоретических представлений о роли полюсов Редже в физике высоких энергий и анализу результатов сравнения теории с экспериментом.

Гипотеза, согласно которой полюса, сопоставляемые стабильным частицам и резонансам с различающимися спинами, но одинаковыми прочими квантовыми числами, объединяются в релятивистской теории траекториями Редже (подобно тому, как это имеет место для резонансов при нерелятивистском рассеянии на потенциале юкавского типа), возникла в начале шестидесятых годов. Она была использована прежде всего для развития аппарата аналитической теории S -матрицы, исходные положения которой изложены в первых двух главах настоящей книги. В дальнейшем гипотеза о полюсах Редже стала неотъемлемой частью аналитической теории S -матрицы, в особенности того ее физического направления, представители которого сознательно больше стремятся к наилучшему описанию непрерывно накапливающегося экспериментальных данных, чем заботятся об абсолютной математической строгости и внутренней непротиворечивости развиваемых представлений. Общая идеология этого направления лучше всего отражена в книге Чью [1], который писал: «...поскольку основной объект теории поддается прямому экспериментальному измерению, можно делать вид, что находишь решения крайне сложных нелинейных систем, слушая подсказки природы».

Возникающие при использовании гипотезы о полюсах Редже возможности развития теории сразу вызвали очень живой интерес, и отношение к этой гипотезе, несмотря на сравнительно короткий период ее существования, уже имеет весьма бурную историю с периодами подъема и спада. Важнейшим экспериментальным следствием указанной гипотезы было заключение о том, что полюса Редже с факторизующимися вычетами [2] определяют поведение сечений в кросс-каналах в пределе высоких энергий, которое в простейшем случае, когда доминирует одна траектория, должно иметь степенной вид с показателем, зависящим от передаваемого импульса. В частности, это приводит к выводу о сужении дифракционного конуса с ростом энергии, которое действительно было обнаружено для протон-протонного рассеяния. Однако дальнейшие эксперименты при высоких

энергиях показали, что указанный случай рассеяния является в этом отношении скорее исключением, чем правилом. Для объяснения наблюдаемых фактов оказалось необходимым учитывать несколько траекторий Редже. При этом используется довольно большое число параметров, что, конечно, делает результаты сопоставления теории с экспериментом значительно менее убедительными. Кроме того, Мандельстам теоретически показал, что в релятивистском случае на комплексной плоскости углового момента, помимо полюсов, обязательно появляются движущиеся точки ветвления, что еще больше увеличивает количество параметров, фигурирующих в теории. В результате интерес к полюсам Редже в релятивистской теории временно снизился.

В дальнейшем выяснилось, что с помощью гипотезы о полюсах Редже удастся достаточно удовлетворительно описать полученную в последнее время экспериментальную информацию о сечениях неупругих процессов, используя, естественно, для каждого из них одни и те же параметры данной траектории. Поскольку теория полюсов Редже, являясь составной и весьма существенной частью теории S -матрицы, пока сохраняет также роль наиболее претенциозной из всех развивающихся сейчас теорий элементарных частиц, была проделана большая по объему работа по выяснению теоретических закономерностей, касающихся полюсов и разрезов на комплексной плоскости углового момента с учетом спинов частиц и различия в их массах. Обобщение на этот случай оказалось связанным с известными трудностями, так как если ограничиваться индивидуальными реджевскими траекториями, то некоторые из кинематических условий, вообще говоря, не удовлетворяются (например, определенные амплитуды рассеяния вперед с переворотом спина не обращаются автоматически в нуль, хотя это и требуется законом сохранения момента). Чтобы удовлетворить такого рода условиям, приходится накладывать некоторые ограничения в виде соотношений, которым должны удовлетворять различные траектории и их вычеты, что приводит к конспирациям или же к объединению отдельных траекторий в целые семейства (родительские, дочерние, сестринские траектории или даже траектории-предки). Дочерние траектории возникают также из других соотношений, в частности при объединении реджевского анализа с представлением Мандельстама или при использовании теоретико-групповых методов. Третья, четвертая и пятая главы данной книги посвящены результатам очень большого числа теоретических работ, опубликованных по всем этим вопросам и касающихся выяснения общей природы сингулярностей в плоскости углового момента.

При чтении этих глав может возникнуть представление об известной противоречивости изложения или даже об отсутствии в некоторых случаях четкой собственной точки зрения у авторов. Однако подобная противоречивость является естественной в существующей ситуации и неизбежна для каждого обзора, учитывающего самые последние

достижения данного направления, если, конечно, исключить возможность оригинального революционного научного труда, полностью разрешающего все существующие трудности. Во всяком случае, проведенная авторами систематизация чисто теоретических работ по полюсам Редже в физике высоких энергий является значительно более отчетливой и гораздо более полной, чем в написанных ранее монографиях [3—5].

Значительное место авторы отводят обсуждению принципа максимальной аналитичности второй степени и развитию ряда моделей зашнуровки (бутстрепа) с использованием унитарности, представления Манделштама и реджевских траекторий. Однако рассмотренные модели содержат принципиальные трудности и не могут объяснить последние результаты экспериментального анализа на основе реджевской феноменологии. В частности, совершенно непонятным является отсутствие заметного увеличения ширины резонансов при движении в сторону высших спинов по линиям Чью — Фраучи. Более актуальным сейчас является развитие идеи зашнуровки на простой основе так называемой дуальности, согласно которой высокоэнергетическое реджевское поведение амплитуды рассеяния тесно связано с низкоэнергетическими резонансами того же канала; эта идея привлекла особое внимание уже после выхода в свет книги Коллинза и Сквайрса, в которой она только упоминается.

Одной из наиболее интересных является восьмая глава книги, в которой проводится сопоставление теории с экспериментом. Это сопоставление подтверждает, как считают авторы, что все сильно взаимодействующие частицы действительно являются членами реджевских семейств, причем удается нетривиальным образом объяснить многие данные, касающиеся поведения сечений.

При сопоставлении с экспериментом нельзя не заметить также определенных противоречий. Часть из них носит ограниченный характер (например, рассмотренное авторами несоответствие теоретических предсказаний с данными по поляризации при высоких энергиях) в том смысле, что такие противоречия всегда присущи каждой живой, быстро развивающейся, но еще не законченной теории. Однако реджевский подход имеет и более принципиальные трудности. Главной из них является удивительная линейность траекторий при одинаковом наклоне порядка 1 Гэв^{-2} в исследованном интервале значений манделштамовских переменных вплоть до 8 Гэв^2 . Если ожидаемый по аналогии с результатами нерелятивистской теории загиб траекторий происходит при некоторых существенно более высоких энергиях, то это будет означать, что в области сильных взаимодействий имеется дополнительный энергетический масштаб. В этом случае, по-видимому, теряются многие привлекательные стороны аналитической теории S -матрицы как универсальной замкнутой динамической схемы. Значительно проще и естественнее указанный масштаб появляется, например, в модели тяжелых кварков, связанных некоторыми силами

среднего радиуса действия. Гипотеза кварков позволяет разрешить и другую принципиальную трудность обычной теории Редже — наличие вырождения траекторий по сигнатуре, которое обсуждается в восьмой главе книги.

В самое последнее время большое внимание уделяется феноменологическому анализу, продолжающему общую логику развития реджевской теории в рамках аналитической теории S -матрицы и основанному на так называемой модели Венециано [6]. Эта модель является конкретным воплощением идеи дуальности и существенно использует прямолинейность траекторий, автоматически включая в себя реджевское асимптотическое поведение. Однако здесь также сохраняются некоторые из старых трудностей и возникают новые принципиальные трудности (например, с самого начала нарушается условие унитарности, очень трудно ввести ненулевую ширину резонансов и учесть вклад померанчона, трудно удовлетворить принципу симметрии Мак-Дауэлла для фермионных траекторий и т. д.). Еще более усложнится вся ситуация в аналитической теории S -матрицы, если будут подтверждены данные, полученные на Серпуховском ускорителе, которые дают указание на нарушение известной теоремы Померанчука [7].

В заключение отметим, что в целом книга представляет большой интерес для всех, интересующихся развитием теории элементарных частиц. Правда, ряд вопросов, имеющих непосредственное отношение к предмету книги, рассмотрен недостаточно подробно или даже опущен. Например, как указывают сами авторы, отсутствуют результаты, касающиеся сингулярностей в комплексной плоскости углового момента, которые возникают в нерелятивистской трехчастичной задаче. Кроме того, не упоминаются интересные исследования по «адронной спектроскопии», основанные на использовании высших динамических симметрий типа $O(4, 2)$ (см., например, [8]), и т. д. Однако в рамках ограниченного объема книги авторы сделали очень много. Прочтение этой книги позволит читателю достаточно подробно ознакомиться с главными результатами самого обширного (по крайней мере по числу работ) направления в рассматриваемой центральной области физики, полученными до выхода в свет западногерманского издания книги.

Обзор всех изменений, как в экспериментальной ситуации, так и в развитии теоретических представлений, происшедших с момента написания книги, читатель может найти в Трудах Киевской международной конференции 1970 г. по физике высоких энергий [9].

А. М. Бродский

ЛИТЕРАТУРА

1. Чью Дж., Аналитическая теория S-матрицы, изд-во «Мир», 1968.
2. Грибов В. Н., Померанчук И. Я., Phys. Rev. Letters, 8, 343 (1962).
3. Frautschi S., Regge Poles and S-matrix Theory, New York, 1963.
4. Omnes R., Froissart M., Mandelstam Theory and Regge Poles, New York, 1963.
5. Squires E., Complex Angular Momentum and Particle Physics, New York, 1963.
6. Veneziano G., Nuovo Cimento, 57A, 190 (1968).
7. Allanby J. A., Bushin Yu. B., Denisov S. P., Diddens A. N., Dobinson R. W., Doskov S. V., Giacomelli G., Gorin Yu. P., Klovhing A., Petrukhin A. I., Prokoshin Yu. D., Shuvalov P. S., Stahlbrandt C. A., Stoyanova D. A., Paper submitted to the Lund Conference on Elementary Particles, Lund, 1969; Phys. Letters, 30B, 500 (1969).
8. Barut A. O., в книге Proceedings of the Symposium on Hadron Spectroscopy, Akad. Kiado, Budapest, 1969, and Springer Tracts in Modern Physics, Berlin, vol. 50, 1969.
9. Труды Киевской международной конференции по физике высоких энергий, 1970.

ВВЕДЕНИЕ

Ватсон еще в 1918 г. [406] предложил рассматривать угловой момент l как комплексную переменную с целью последующего преобразования разложения по парциальным волнам в интеграл вдоль контура на комплексной l -плоскости. Эту идею упомянул также в 1949 г. Зоммерфельд [365], однако до работы Редже [346], появившейся в 1959 г., никто не сознавал, что она может представлять определенную ценность для физики частиц. Редже показал, что для широкого класса потенциалов единственными сингулярностями нерелятивистской амплитуды рассеяния в l -плоскости являются полюса, положение которых зависит от энергии, т. е. $l = \alpha(s)$. Теперь они называются полюсами Редже, а функция $\alpha(s)$ носит название траектории Редже. Свой метод Редже использовал для того, чтобы заполнить существенный (хотя с физической точки зрения и не очень интересный) пробел, имевшийся в предшествующих доказательствах представления Манделштама для потенциального рассеяния. Однако тот факт, что траектории Редже соответствуют физическим частицам или резонансам [когда функция $\alpha(s)$ при положительных s принимает целочисленное значение], а также определяют высокоэнергетическое поведение амплитуд в кросс-канале, привлек значительное внимание теоретиков, занимающихся элементарными частицами, и начиная с 1961 г. данное направление исследований переживало и продолжает переживать захватывающую и полную противоречий и дискуссий историю.

Выводы первых исследований казались многообещающими. Весьма правдоподобное предположение, что при высоких энергиях полное сечение стремится к константе, привело к заключению о существовании особой реджевской траектории («померанчона») с квантовыми числами вакуума и со свойством $\alpha(0) = 1$, которая не соответствовала ни одной из известных в то время частиц или резонансов. Вскоре была открыта частица f со спином 2 и массой $1250 M_{\pi}$, хорошо укладывающаяся на эту траекторию.

Была высказана гипотеза о существовании полюса Редже, который дает основной вклад в сечения при высоких энергиях, приводящая к интересному заключению о простом степенном поведении дифференциального сечения с показателем, зависящим от передачи импульса. Такое поведение предсказывает «стягивание» дифракционного пика

по мере увеличения энергии, что для потенциального рассеяния соответствует радиусу взаимодействия, который является возрастающей функцией энергии. Было обнаружено, что для $p-p$ — p -рассеяния действительно имеет место такое весьма необычное поведение; казались удачными и попытки скоррелировать полные сечения упругих процессов с известными частицами. Что касается траекторий, то была установлена приближенная прямолинейность так называемых кривых Чью — Фраучи, изображающих зависимость функции $\text{Re } \alpha$ от действительного переменного s .

Тем временем появилось большое количество работ, посвященных анализу реджевских траекторий в случае потенциального рассеяния. Кроме того, были предприняты безуспешные попытки показать, что теория допускает обобщение на релятивистские амплитуды, подчиняющиеся мандельштамовскому представлению. В общую схему удалось также включить частицы со спином, когда переменной, продолжаемой на комплексные значения, является полный угловой момент J .

Введение понятия полюса Редже позволило прояснить различие между «связанным состоянием», которое лежит на реджевской траектории, и «элементарной» частицей, которая на траектории не лежит, а соответствует δ -функции при значении J , равном спину частицы. Это резко стимулировало развитие идеи «ядерной демократии», согласно которой все сильно взаимодействующие частицы являются связанными состояниями, а также развитие гипотезы зашнуровки.

Однако этот первый период бурного расцвета теории и феноменологии был весьма кратковременным. Последующие эксперименты, выполненные в конце 1962 и в начале 1963 гг., показали, что для всех процессов, кроме $p-p$ — p -рассеяния, сужения дифференциальных сечений не наблюдается. Правда, имеющиеся экспериментальные данные можно было согласовать с теорией посредством введения нескольких полюсов Редже, но наличие слишком большого числа подгоночных параметров делало подобную процедуру весьма неубедительной. С другой стороны, Мандельстам на основании теоретических соображений показал, что в случае релятивистского рассеяния в J -плоскости имеются разрезы, обусловленные наличием третьей двойной спектральной функции. В потенциальном рассеянии, где имеет место лишь двухчастичное условие унитарности, подобные разрезы отсутствуют. Поэтому появилось большое количество работ, посвященных трехчастичной задаче; в них предпринимались попытки получить члены с указанными разрезами, но соответствующие исследования натолкнулись на множество трудностей. При рассмотрении частиц со спином было обнаружено также, что элементарные частицы могут лежать и на траекториях Редже, так как в J -плоскости появляются дополнительные δ -функции, которые могут скомпенсировать упоминавшиеся выше δ -функции. В результате энтузиазм по отношению ко всему направлению в целом угас примерно на два года,

исключение составила лишь небольшая группа преданных ему физиков.

Позднее, начиная с 1965 г., возрастающее количество экспериментальных данных, особенно по неупругим процессам при высоких энергиях, возродило интерес к феноменологии, основанной на полюсах Редже; с ее помощью удалось успешно систематизировать многие экспериментальные данные. Стало появляться больше работ и по теоретическим аспектам, касающимся комплексной J -плоскости; детальный анализ вопросов, связанных со спиновыми частицами и с рассеянием частиц разных масс, привел к введению понятий «конспирации» и «дочерей». Благодаря последним работам прояснилась ситуация с разрезами и неподвижными полюсами, имеющимися в J -плоскости, а также проблема реджезации элементарных частиц.

В этой книге предпринята попытка дать обзор теории в ее современном состоянии, а также показать, сколь хорошо она согласуется с экспериментальной информацией.

В главе I дается краткое введение в аналитическую теорию S -матрицы и рассматривается принцип максимальной аналитичности первой степени. Довольно подробно описывается его применение к анализу двухчастичной амплитуды рассеяния, что приводит к мандельштамовскому представлению. Мы надеемся, что эта глава будет доступна даже тем читателям, которые прежде не сталкивались с подобными вопросами, и побудит их обратиться к изучению цитируемой литературы.

В главе II рассматриваются парциальные амплитуды и соответствующие им дисперсионные соотношения и вводятся понятия комплексного углового момента, полюсов Редже и разрезов. Здесь же выясняется смысл постулируемого принципа максимальной аналитичности второй степени.

В главе III мандельштамовское представление объединяется с анализом полюсов Редже, что позволяет получить некоторые свойства траекторий и вычетов. Обсуждаются также различные реджевские представления, которые удовлетворяют мандельштамовским требованиям аналитичности, и подробно исследуются трудности, возникающие при анализе рассеяния частиц с неравными массами. Выясняются причины, по которым при попытке согласования мандельштамовской аналитичности с реджевским асимптотическим поведением приходится предполагать, что с каждой траекторией связана бесконечная последовательность «дочерних» траекторий, значения которых при $s = 0$ отличаются друг от друга на единицу углового момента. Хотя мы и не считаем, что аргументы, приводящие к появлению дочерних траекторий, являются совершенно бесспорными, но несомненно, что подобные траектории следует искать, и в книге рассматриваются имеющиеся по этому вопросу экспериментальные данные.

В главе IV впервые вводится спин и подробно развивается формализм для частиц произвольного спина. При интерпретации экспери-

ментальных данных необходимо учитывать различные кинематические особенности амплитуд; для определения их положения используется спиральная кроссинг-матрица. Рассматриваются также кинематические ограничения на реджевское представление и вводятся «конспирации», привлечение которых позволяет удовлетворить этим ограничениям. Приводится краткий анализ возможности применения в теории Редже теоретико-групповых методов и отмечается, что в случае нулевого 4-импульса имеет место $SO(4)$ -симметрия.

Глава V посвящена дальнейшему исследованию свойств комплексной J -плоскости. В ней предпринимается попытка выяснить, в какой мере результаты, справедливые для потенциального рассеяния, применимы в теории S -матрицы. Оказывается, что хотя и здесь сохраняются некоторые ограничения на возможные сингулярности, но вследствие наличия третьей двойной спектральной функции в релятивистской области ситуация является гораздо более сложной. Например, в некоторых амплитудах должны присутствовать разрезы и неподвижные полюса (хотя последние не оказывают влияния на асимптотическое поведение). В этой главе доказывается также теорема о факторизации и выводятся «сверхсходящиеся соотношения».

В главе VI делается попытка установить связь между максимальной аналитичностью первой и второй степени и вводится гипотеза зашнуровки (бутстрепа), на основе которой проводятся довольно подробные вычисления, связанные с траекториями Редже.

Глава VII занимает несколько обособленное положение — в ней выясняется, какую пользу при исследовании свойств комплексной J -плоскости могут принести «старомодные» методы теории возмущений. В частности, предпринимается попытка прояснить аргументацию, приводящую к разрезам, и различие между «элементарными» частицами и частицами, лежащими на траекториях Редже.

Авторы считают, что все частицы окажутся лежащими на траекториях Редже, и эту точку зрения подтверждают доказательства, представленные в главе VIII, где дается обзор экспериментальной ситуации в целом. Показано, что все известные частицы с большой степенью достоверности можно разместить на траекториях, и что эти траектории приводят к удовлетворительному объяснению экспериментальных данных, касающихся сечений высокоэнергетических процессов. Удивительным образом во всей доступной энергетической области траектории оказываются прямолинейными, причем между траекториями противоположной сигнатуры имеется вырождение. Обсуждаются некоторые возможные способы объяснения такого поведения. Рассматриваются также попытки удовлетворить сверхсходящимся соотношениям, учитывая состояния лишь нескольких отдельных частиц. Глава заканчивается коротким параграфом, посвященным амплитудам электромагнитных и слабых процессов, которым свойственны некоторые любопытные особенности.

Вероятно, требуют пояснения принятые в книге обозначения и система ссылок. Главы нумеруются римскими цифрами, а параграфы и уравнения — арабскими; при этом обозначение (II.3.4) отвечает уравнению 4 в § 3, гл. II. Однако большинство ссылок относится к уравнениям той же самой главы; в этом случае ради краткости первое число опускается, так что в пределах главы II указанное уравнение фигурирует под номером (3.4). Мы старались давать как можно больше перекрестных ссылок, поэтому книгу не обязательно читать последовательно.

Библиография приведена в конце книги, причем работы помещены в алфавитном порядке фамилий авторов. Конечно, невозможно надеяться на то, что в столь обширной и быстро развивающейся области удастся дать исчерпывающий список первоисточников. Однако мы стремились включить все существенные работы, что особенно относится к работам, опубликованным после того, как были написаны более ранние обзоры. Гораздо более полный список литературы вплоть до конца 1963 г., включающий, естественно, все работы, которые относятся к периоду становления теории полюсов Редже, в особенности статьи по потенциальному рассеянию, выходящие за рамки нашей книги, можно найти в монографии Ньютона [315].

Одно исключение из нашей схемы цитирования сделано для так называемого «Рукописного проекта Бейтмана»¹⁾, этой библии всех теоретиков, которые занимаются полюсами Редже. К различным томам этой книги приходится обращаться очень часто, поэтому мы сократили соответствующие ссылки, так что, например, уравнение 4 из § 3, гл. 2, т. I «Высшие трансцендентные функции» [162] цитируется как (B1,2.3.4); на подобное же уравнение из «Таблиц интегральных преобразований» [163] мы ссылаемся как на (T1,2.3.4).

Имеет смысл остановиться также на двух вопросах математического характера. Мы будем очень часто иметь дело с асимптотическим поведением функций. При этом будут встречаться выражения трех типов. Запись

$$A(s, t) \sim t^\alpha(s)$$

означает, что предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(s, t)}{t^{\alpha(s)}}$$

равен отличной от нуля константе (т. е. не зависит от t). Символ

$$A(s, t) \rightarrow \Gamma(s) t^{\alpha(s)}$$

используется в том смысле, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(s, t)}{t^{\alpha(s)}} = \Gamma(s).$$

¹⁾ В русском переводе «Высшие трансцендентные функции» [162] и «Таблицы интегральных преобразований» [163].— *Прим. ред.*

Иногда применяется также обозначение

$$A(s, t) = O(t^\alpha(s)),$$

которое соответствует тому, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{A(s, t)}{t^\alpha(s)} \leq \text{const} \quad (\text{const не зависит от } t).$$

Другой вопрос связан с многократным использованием термина «аналитичность». Когда математики говорят, что некоторая функция «аналитична» в данной области, то они имеют в виду, что в этой области функция не имеет сингулярностей (т. е. голоморфна). У физиков существует тенденция использовать этот термин в гораздо более широком смысле для указания того, что функция имеет лишь изолированные особенности типа полюсов или точек ветвления, но не содержит существенных сингулярностей — ступенек, δ -функций или каких-либо иных патологических «негладких» участков. Большинство функций, с которыми мы будем иметь дело, являются (или соответствующее поведение постулируется) аналитическими в последнем смысле, включая возможность наличия у них изолированных полюсов или точек ветвления. «Аналитическими» мы будем называть именно такие функции, сохраняя термин «голоморфные» для случая полного отсутствия особенностей (и конечно, под «мероморфными» будут пониматься функции, имеющие в данной области лишь полюса).

Нам, очевидно, следует принести некоторые извинения. Пытаясь учесть самые последние данные, мы вынуждены были использовать работы, которые во время написания книги существовали лишь в виде препринтов. В каждом подобном случае мы стремились получить соответствующее разрешение авторов, но иногда мы могли этого и не сделать. За подобные упущения, а также за случаи, в которых мы исказили, не учли или недостаточно оценили подлинную важность работы автора, мы можем лишь принести свои извинения. Например, мы не могли отдать должное $SO(4)$ -симметрии, в значительной степени пренебрегли трехчастичной задачей и весьма кратко рассмотрели различные приложения. Единственным оправданием может служить лишь то, что книга и в таком виде имеет объем, значительно превосходящий первоначально принятый.

Мы рассмотрели только модель полюсов Редже, фактически исключив все другие теории, но мы откровенно заявляем, что, по нашему мнению, в физике высоких энергий эта модель не имеет ни одного серьезного конкурента. В течение некоторого времени по праву пользовалась популярностью абсорптивная периферическая модель, и она несомненно содержит элементы истины. Но пока не найдено ни одного средства, которое позволило бы включить в ее схему обмен частицами с высшими спинами. В настоящее время включение в теорию Редже вклада от абсорптивных поправок ничем не оправдано, хотя не исключена возможность того, что некоторая переформулировка проблемы,

состоящая, вероятно, в учете разрезов, приведет к успеху. Модель кварков, конечно, ни в коей мере не составляет конкуренции, так как она исследует проблему совершенно другими методами. Для нас очевидно, что успешная корреляция между процессами рассеяния при высоких энергиях и известными частицами, к которой приводит теория Редже, не является случайной и что гипотеза Редже имеет гораздо более прочный теоретический фундамент, чем любая другая из предложенных схем. Мы полагаем, что эта теория и в будущем сохранит свою ценность, и надеемся, что данная книга успешно обосновывает нашу точку зрения.

К сожалению, нам пришлось быть не совсем последовательными в требованиях, предъявляемых к читателю. С одной стороны, мы попытались изложить теорию S -матрицы хотя бы в общих чертах с самого начала; с другой стороны, предполагается знакомство с $SU(3)$ -симметрией и т. д., а в одной из глав — даже с анализом фейнмановских диаграмм. По-видимому, если только не писать полную энциклопедию, не существует какого-либо простого способа преодоления этой трудности. Однако мы стремились по мере необходимости давать полезные ссылки на вводящие в соответствующую проблематику работы, а также на оригинальные исследования.

В заключение мы хотим выразить благодарность большому кругу людей, с которыми имели подробные дискуссии; среди них особенно следует упомянуть С. Мандельстама (который, как будет видно из дальнейшего, внес огромный вклад в рассматриваемый предмет), Дж. Чью (который ввел нас в данный круг вопросов), Э. Лидера, Р. Филлипса и А. Мартина.

*Дургам, Англия
октябрь 1967*

*П. Коллинз
Ю. Сквайрс*

S-МАТРИЦА

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на то, что в течение последнего десятилетия достигнут значительный прогресс в развитии теории дисперсионных соотношений для аналитической матрицы рассеяния (или, короче, S -матрицы), пока еще отсутствует общепринятый базис, на основе которого можно было бы рассматривать явления из области сильных взаимодействий. Сама теория дисперсионных соотношений еще не завершена, причем фактически открытым остается даже вопрос, нужно ли свойства аналитичности просто постулировать, или их можно (а значит и должно) выводить из некоторых более общих представлений о причинности.

Мы не видим необходимости вступать в непосредственную полемику по этому вопросу, хотя в дальнейшем предвзятость нашей точки зрения будет выступать, вероятно, довольно явственно. Отметим только, что полюса Редже были введены в физику высоких энергий именно в рамках теории S -матрицы, и если мы стремимся дать нечто большее, чем чисто феноменологический анализ, то с необходимостью приходится использовать эту теорию, зачастую просто угадывая те результаты, для которых пока не получено формальных доказательств. Совершенно очевидно, что такая ситуация гораздо менее удовлетворительна, чем в теории потенциального рассеяния, где существует прочный фундамент, и свойства полюсов Редже удается получить чисто формально. Однако, с другой стороны, полюса Редже по-настоящему полезны только в релятивистской теории, так как в потенциальном рассеянии они по существу играют роль лишь некоего математического курьеза.

В этой главе дается краткий обзор теории S -матрицы в ее современном состоянии, причем главное внимание обращается на те особенности теории, которые будут использованы ниже в данной книге. В начале главы описываются постулаты, лежащие в основе теории S -матрицы, и вводится определенная символика, применяемая для записи условия унитарности. После краткого анализа характера сингулярностей, являющихся следствием постулируемого принципа «максимальной аналитичности первой степени», более подробно рассматриваются кинематика и сингулярности связной четыреххвостки (амплитуды рассеяния для процесса соударения двух частиц, когда в конечном состоянии имеется тоже только две частицы). Для этой амплитуды выписываются однократные и двойные дисперсионные

соотношения и показывается, как из необходимости делать в некоторых интегралах «вычитания» вытекают определенные неоднозначности, что прокладывает путь введению в гл. II «максимальной аналитичности второй степени». В конце главы демонстрируется методика вычисления упругой части двойных спектральных функций.

Гораздо более исчерпывающее описание аксиом и диаграммной техники с большим количеством ссылок можно найти в монографии Идена и др. [160], а обзор применения теории к динамическим расчетам содержится в нескольких работах Чью [97, 102, 103, 106]. Полюса Редже в теории потенциального рассеяния подробно рассматриваются в ряде книг [17, 315, 368].

§ 2. ПОСТУЛАТЫ ТЕОРИИ S-МАТРИЦЫ

Существует несколько различных способов формулировки постулатов теории S-матрицы (см., например, [321, 377]), но, по-видимому, достаточно принять следующие шесть постулатов.

1. Квантовомеханический принцип суперпозиции.
2. Существование унитарной S-матрицы.
3. Лоренцевская инвариантность S-матрицы.
4. Разложимость S-матрицы, обусловленная конечностью радиуса сильного взаимодействия.
5. Максимальная аналитичность первой степени, которая требует, чтобы единственными сингулярностями S-матрицы были полюса, отвечающие стабильным или нестабильным частицам, а также особенности, порождаемые этими полюсами благодаря условию унитарности.
6. Максимальная аналитичность второй степени, которая требует возможности продолжения S-матрицы по угловому моменту в комплексную плоскость этой переменной, причем допускаются лишь изолированные особенности.

Из приведенных постулатов первые четыре почти бесспорны, и вряд ли приходится сомневаться в том, что им должна удовлетворять любая последовательная теория сильных взаимодействий. В то же время постулаты 5 и 6 носят весьма дискуссионный характер, но они составляют основу динамической теории S-матрицы [102, 103, 106]. Необходимо отметить, что, по крайней мере частично, утверждение 6 следует из постулата 5, так что его не обязательно высказывать в виде отдельного постулата. Тем не менее, его удобно рассматривать как независимую аксиому. В этой главе мы рассмотрим следствия, или ожидаемые следствия, постулатов 1—5, а анализ постулата 6, касающегося полюсов Редже, отложим до следующей главы.

В постулате 1 содержится следующее требование: если $|\psi_1\rangle$ и $|\psi_2\rangle$ — физические состояния, то и $|\psi_3\rangle = a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle$ при произвольных комплексных числах a и b также является физическим состоянием. В действительности благодаря правилам суперот-

бора, таким, как сохранение заряда или барионного числа, это утверждение не всегда верно, но соответствующие усложнения поддаются достаточно простому анализу¹⁾, так что здесь мы их рассматривать не будем.

Эксперименты в области сильных взаимодействий ставятся следующим образом. Прежде всего фиксируют начальное состояние $|i\rangle$ двух (или, по крайней мере в принципе, большего числа) частиц, затем им дают возможность провзаимодействовать, и наконец, наблюдают конечное состояние $|f\rangle$, в котором находится произвольное число образовавшихся частиц. Определим элемент S-матрицы $\langle f|S|i\rangle$ так, чтобы величина

$$P_{fi} = |\langle f|S|i\rangle|^2 = \langle i|S^\dagger|f\rangle \langle f|S|i\rangle \quad (2.1)$$

представляла вероятность обнаружить конечное состояние $|f\rangle$ при заданном начальном состоянии $|i\rangle$. Вследствие постулата 4 и благодаря тому, что мы пренебрегаем слабыми, но дальнедействующими силами (такими, как электромагнетизм и гравитация), состояния $|i\rangle$ и $|f\rangle$ с уверенностью можно считать состояниями свободных частиц.

Постулат 2 требует, чтобы существовал полный ортонормированный набор состояний свободных частиц $|m\rangle$ ($m = 1, 2, \dots$). Далее, вероятность того, что частицы из исходного начального состояния $|i\rangle$ перейдут в какое-либо конечное состояние, равна единице, так что

$$\sum_m |\langle m|S|i\rangle|^2 = \sum_m \langle i|S^\dagger|m\rangle \langle m|S|i\rangle = \langle i|S^\dagger S|i\rangle = 1, \quad (2.2)$$

где использовано условие полноты

$$\sum_m |m\rangle \langle m| = 1. \quad (2.3)$$

Так как это справедливо при любом выборе базисных состояний $|m\rangle$, получаем матричное соотношение

$$S^\dagger S = S S^\dagger = 1, \quad (2.4)$$

т. е. S-матрица унитарна.

Состояние одной свободной частицы полностью характеризуется заданием ее вида t (включая спин), 4-импульса p и спиральности λ , которая определяется [247] как проекция спина σ на направление движения:

$$\lambda = \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{|\mathbf{p}|}, \quad (2.5)$$

где \mathbf{p} — трехмерный вектор импульса. Спиральность λ принимает целые или (для фермионов) полуцелые значения, ограниченные неравенством $|\lambda| \leq |\sigma|$. Поскольку частицы являются свободными

¹⁾ Н. Р. Стапп, Lawrence Radiation Laboratory Report UCRL-10843, 1963 (не опубликовано).

(мы всегда будем иметь дело лишь с начальными и конечными состояниями, не рассматривая состояний взаимодействия), выполняется ограничение массовой поверхностью

$$p^2 = m^2 = p_0^2 - \mathbf{p}^2. \quad (2.6)$$

Здесь m — масса частицы, p_0 — ее энергия, причем единицы выбраны так, что скорость света $c = 1$. Таким образом, состояния можно записывать в виде $|p, t, \lambda\rangle$.

Примем релятивистскую нормировку

$$\langle p', t', \lambda' | p, t, \lambda \rangle = (2\pi)^3 2p_0 \delta^3(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) \delta_{tt'} \delta_{\lambda\lambda'}; \quad (2.7)$$

тогда условие полноты (2.3) для состояний одной частицы запишется в виде

$$\sum_{t'} \sum_{\lambda'} \int |p', t', \lambda'\rangle \langle p', t', \lambda'| (2\pi)^{-3} \delta^+(p'^2 - m^2) d^4 p' = 1. \quad (2.8)$$

Используя для набора индексов состояния $\{p, t, \lambda\}$ символ P , можно обозначить N -частичное состояние как $|P_1, P_2, \dots, P_N\rangle$ с соотношением ортонормированности

$$\langle P'_1 \dots P'_N | P_1 \dots P_N \rangle = \prod_N (2\pi)^3 2p_{0N} \delta^3(\mathbf{p}'_N - \mathbf{p}_N) \delta_{NN'} \quad (2.9)$$

и условием полноты

$$\sum_{N=0}^{\infty} (2\pi)^{-3N} \int d^4 p_1 \dots d^4 p_N \delta^+(p_1^2 - m_1^2) \dots \delta^+(p_N^2 - m_N^2) |P_1 \dots P_N\rangle \times \langle P_1 \dots P_N| = 1. \quad (2.10)$$

Тогда условие унитарности (2.2) запишется в виде

$$\sum_N (2\pi)^{-3N} \int \prod_{i=1}^N d^4 q_i \delta^+(q_i^2 - m_i^2) \langle P'_1 \dots P'_M | S | Q_1 \dots Q_N \rangle \times \langle Q_1 \dots Q_N | S^\dagger | P_1 \dots P_M \rangle = \langle P'_1 \dots P'_M | P_1 \dots P_M \rangle, \quad (2.11)$$

где символ $Q \equiv \{q, t, \lambda\}$ обозначает промежуточное состояние частицы с четырехмерным импульсом q .

Условие унитарности имеет решающее значение для развития теории, но очевидно, что в приведенной записи оно является весьма громоздким. Был изобретен гораздо более простой способ выражения условия унитарности, использующий специфическую диаграммную запись [219]¹⁾.

¹⁾ Первоначальный вариант этой работы опубликован в 1962 г.

§ 3. СИМВОЛИЧЕСКАЯ ЗАПИСЬ УСЛОВИЯ УНИТАРНОСТИ

В данном параграфе для сокращения записи индексы, указывающие тип частицы t и ее спиральность λ , будут опускаться. Никаких принципиальных моментов при этом не возникает, но не следует забывать, что интегрирование, когда это необходимо, включает также суммирование по данным индексам. Кроме того, все массы считаются равными (и обозначаются через m) и рассматриваются лишь стабильные частицы. Эти ограничения будут сняты несколько позже.

Вследствие лоренцевской инвариантности (постулат 3) элемент S -матрицы обращается в нуль, если не сохраняются энергия и импульс:

$$\langle p'_1 \dots p'_{N'} | S | p_1 \dots p_M \rangle = 0 \quad \text{при} \quad \sum p \neq \sum p' \quad (3.1)$$

Таким образом, в условии унитарности (2.11) дают вклад лишь те промежуточные состояния, для которых $(Nm)^2 \leq (\sum p)^2$. Мы отразим это обстоятельство, используя символику [160, 219, 321], в которой элементам S -матрицы сопоставляются круги:

$$\langle p'_1 \dots p'_{N'} | S | p_1 \dots p_M \rangle \equiv \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow \\ \vdots \\ \leftarrow \text{---} \text{---} \text{---} \leftarrow \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \\ \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \\ \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} \rightarrow \end{array} \\ & \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} & \end{array} \quad (3.2)$$

и

$$\langle p'_1 \dots p'_{N'} | S^\dagger | p_1 \dots p_M \rangle \equiv \begin{array}{ccc} & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} & \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \text{---} \\ \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} \end{array} \\ & \text{---} \circ \text{---} \text{---} \text{---} & \end{array} \quad (3.3)$$

Разрешенные промежуточные состояния изображаются в виде

$$(2\pi)^{-3N} \int \prod_{i=1}^N d^4 q_i \delta^+(q_i^2 - m^2) \equiv \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} | 2 \\ \text{---} \text{---} \text{---} | 1 \\ \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} | N \end{array}, \quad (3.4)$$

где вертикальные черточки на концах линий указывают, что эти линии присоединяются к кружкам. Наконец, перекрытие частиц начального и конечного состояний изображается линиями без черточек:

$$\langle p'_1 \dots p'_M | p_1 \dots p_M \rangle \equiv \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} 1 \\ \text{---} \text{---} \text{---} 2 \\ \vdots \\ \text{---} \text{---} \text{---} M \end{array} \quad (3.5)$$

Таким образом, при $(2m)^2 < (\sum p)^2 < (3m)^2$ благодаря сохранению энергии-импульса в (2.11) будут входить лишь двухчастичные состояния, а именно

$$(2\pi)^{-6} \int d^4 q_1 d^4 q_2 \delta^+(q_1^2 - m^2) \delta^+(q_2^2 - m^2) \langle p'_1 p'_2 | S | q_1 q_2 \rangle \times \\ \times \langle q_1 q_2 | S^\dagger | p_1 p_2 \rangle = \langle p'_1 p'_2 | p_1 p_2 \rangle, \quad (3.6)$$

или в принятых обозначениях

$$\text{Diagram (3.6a)} = \text{Diagram (3.6a)} \quad (3.6a)$$

Стабильность частиц исключает появление одночастичных промежуточных состояний. При более высоких энергиях, в области

$$(3m)^2 < (\sum p)^2 < (4m)^2,$$

возможны двухчастичные и трехчастичные состояния, поэтому имеем

$$\begin{aligned} & \text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} = \text{Diagram 3}, \\ & \text{Diagram 4} + \text{Diagram 5} = 0, \\ & \text{Diagram 6} + \text{Diagram 7} = 0, \\ & \text{Diagram 8} + \text{Diagram 9} = \text{Diagram 10}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Равенство нулю правой части второго и третьего соотношений обусловлено ортогональностью

$$\langle p'_1 \dots p'_n | p_1 \dots p_m \rangle = 0 \quad \text{при } n \neq m.$$

Аналогичные наборы диаграмм можно составить для более высоких энергий (см. [160], стр. 189).

Дальнейшее упрощение условий унитарности обусловлено свойством разложимости (постулат 4). Вследствие короткодействия элемент S -матрицы часто можно разложить на несвязные компоненты. Так, матричный элемент с четырьмя внешними линиями можно разложить следующим образом:

$$\text{Diagram (3.8)} = \text{Diagram (3.8)} + \text{Diagram (3.8)} \equiv \langle p'_1 p'_2 | p_1 p_2 \rangle + \langle p'_1 p'_2 | S | p_1 p_2 \rangle. \quad (3.8)$$

Причина, по которой в кружке ставится знак плюс, поясняется ниже.

Принципиальное различие между этими двумя членами заключается в том, что они содержат разные δ -функции, соответствующие сохранению энергии-импульса. Первый член описывает движение частиц без взаимодействия, поэтому сохраняется импульс каждой из них в отдельности; в то же время второй член, так называемая «связная часть» S -матрицы (отсюда и индекс S), соответствует как раз взаимодействию частиц, так что сохраняется только суммарный импульс $p_1 + p_2$. Таким образом, вводя для обозначения связной части матрицы A , можно переписать соотношение (3.6) в следующем виде:

$$\textcircled{S} = (2\pi)^6 4p_{01}p_{02}\delta^3(\mathbf{p}'_1 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{p}'_2 - \mathbf{p}_2) + \\ + i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \langle p'_1 p'_2 | A^+ | p_1 p_2 \rangle \quad (3.9)$$

(множители i и $(2\pi)^4$ введены для удобства). Отметим, что общепринятым является именно такое определение матрицы A ; от определений, принятых в работах [120, 361], оно отличается знаком минус, который компенсируется множителем -1 в равенстве (3.16).

Когда имеется более четырех внешних линий, разложение становится сложнее, например

$$\textcircled{S} = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} \quad (3.10)$$

Дальнейшие примеры такого типа можно найти в книге Идена и др. [120], стр. 190.

Аналогично для матричного элемента $\textcircled{S^+}$ напомним

$$\textcircled{S^+} = \text{---} + (-1) \textcircled{-}, \quad (3.11)$$

где

$$\textcircled{-} \equiv i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p'_1 - p'_2) \langle p'_1 p'_2 | A^- | p_1 p_2 \rangle. \quad (3.12)$$

Подобное же разложение имеет место и для более сложных диаграмм, причем каждое слагаемое следует умножить на $(-1)^I$, где I — число кружков со знаком минус внутри.

Учитывая эти разложения, условие унитарности (3.6а) можно записать в виде

$$\left(\text{---} + \textcircled{+} \right) \left(\text{---} - \textcircled{-} \right) = \text{---}. \quad (3.13)$$

Производя перемножение и собирая члены одной и той же связности (с одинаковыми наборами δ -функций), получаем

$$\text{⊗}^+ - \text{⊗}^- = \text{⊗}^+ \text{---} \text{⊗}^- \quad (3.14)$$

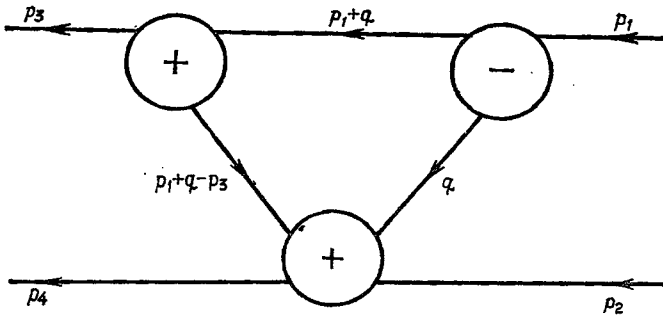
Аналогично, при энергиях, соответствующих (3.7), соотношение

$$\text{---} \text{⊗}^S \text{---} \text{⊗}^{S+} + \text{---} \text{⊗}^S \text{---} \text{⊗}^{S+} = \text{---} \text{---}$$

дает

$$\text{---} \text{⊗}^+ \text{---} - \text{---} \text{⊗}^- \text{---} = \text{---} \text{⊗}^+ \text{---} \text{⊗}^- \text{---} + \text{---} \text{⊗}^+ \text{---} \text{⊗}^- \text{---} \quad (3.15)$$

Выписывая для этих диаграмм явные выражения, получим, что каждая замкнутая петля, подобная изображенной на фиг. I.1, содержит



Ф и г. I.1. Петлевая диаграмма.

Благодаря сохранению энергии-импульса в каждом кружке единственным независимым 4-импульсом является вектор q . Для всей диаграммы в целом имеет место равенство $p_4 = p_1 + p_2 - p_3$.

лишь один независимый импульс q и что δ -функции вместе со всевозможными коэффициентами i , 2π и т. д., отвечающие сохранению полного импульса и сохранению импульса в каждой вершине, можно просто сократить. Таким образом, для каждой диаграммы мы приходим к набору более простых правил [321]:

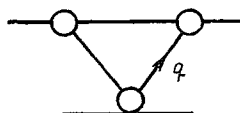
для кружка

$$\begin{aligned} \text{---} \text{⊗}^\pm \text{---} &\equiv (-1) \langle p'_1 \dots p'_M | A^\pm | p_{M+1} \dots p_N \rangle \equiv \\ &\equiv (-1) A^\pm (p'_1 \dots p_N), \end{aligned} \quad (3.16)$$

для внутренней линии с импульсом q

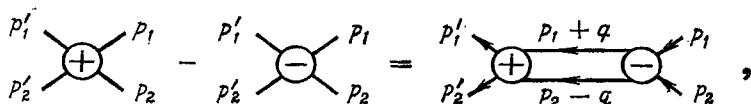
$$\overline{\text{---} q \text{---}} \equiv -2\pi i \delta^+(q^2 - m^2), \quad (3.17)$$

для петли с независимым импульсом



$$= \frac{i}{(2\pi)^4} \int d^4 q. \quad (3.18)$$

Применяя эти правила к особо важному случаю двухчастичного условия унитарности для четыреххвостки, из (3.14) получаем



или

$$\begin{aligned} & A^+(p_1, p_2, p'_1, p'_2) - A^-(p_1, p_2, p'_1, p'_2) = \\ &= \frac{-i}{(2\pi)^4} \int d^4 q (-2\pi i)^2 \delta^+[(p_1 + q)^2 - m^2] \delta^+[(p_2 - q)^2 - m^2] \times \\ & \times A^+(p_1 + q, p_2 - q, p'_1, p'_2) A^-(p_1, p_2, p_1 + q, p_2 - q). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Смысл введения матриц A вместо S -матрицы состоит в том, что при этом исключаются все кинематические δ -функции. Каждая матрица A является функцией совокупности переменных, описывающих входящие и выходящие частицы:

$$\langle P'_1 \dots [P'_M] [A^+] [P_{M+1} \dots P_N] \rangle = A^+(P'_1 \dots P_N). \quad (3.20)$$

Однако требование лоренцевской инвариантности матриц A накладывает сильные ограничения на эту функциональную зависимость. Если частицы не имеют спина, то это требование приводит просто к тому, что матрицы A должны быть функциями инвариантов, образованных из импульсов p . До конца этой главы мы будем рассматривать лишь частицы с нулевым спином. Изменения, к которым приводит наличие спина, рассматриваются в гл. IV, где показано, что почти все, сказанное здесь, остается справедливым для частиц со спином, но, к сожалению, возникают некоторые трудности. Спин в рамках теории S -матрицы проанализирован в работе Тейлора [383].

Если ввести совокупность инвариантов

$$s_{ijk\dots} = (\pm p_i \pm p_j \pm p_k \pm \dots)^2,$$

то мы будем иметь $A = A(s_1, s_2, s_{12}, \dots, s_{1\dots N})$, но, конечно, не все переменные s независимы. Для каждой матрицы A с N внешними


линиями существует $4N$ переменных (по 4 компоненты для каждого из N четырехмерных векторов). Однако все частицы находятся на массовой поверхности, что дает N условий связи; кроме того, к четырем соотношениям приводит сохранение полной энергии-импульса и еще 6 ограничений обусловлены инвариантностью относительно вращений в четырехмерном пространстве. Таким образом, остается лишь $3N - 10$ независимых переменных. Для проверки этого результата заметим,

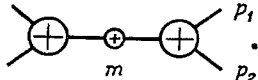
что для одной частицы мы имеем диаграмму $\overset{p_1}{\circ} \text{---} \overset{p_2}{\circ}$, т. е. $3 \times 2 - 10 = -4$ степеней свободы, или четыре условия связи, каковыми являются равенства $p_{1\mu} = p_{2\mu}$ ($\mu = 1, 2, 3, 4$) для компонент импульса.


Совокупность частиц, соответствующих входящим (или выходящим) линиям элемента матрицы A , называют «каналом». При заданном входном канале число выходных каналов, конечно, как правило, ограничено сохранением всевозможных внутренних квантовых чисел (заряд, изоспин, барионное число и т. д.), которые определяются сортом частиц. Каналы с одинаковыми внутренними квантовыми числами называют «взаимосвязанными» [103].


§ 4. СТРУКТУРА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ АМПЛИТУД РАССЕЙНИЯ

На основе постулатов 1—4 можно показать, что соотношения унитарности приводят к появлению у матрицы A определенных сингулярностей по различным инвариантам, от которых она зависит. Вывод этих сингулярностей рассматривается в монографии Идена и др. [160]; здесь мы ограничимся перечислением некоторых результатов без указаний о наличии строгих доказательств.

Прежде всего существуют полюса, соответствующие одночастичным внутренним линиям. Таким образом, матрица $A^+ =$  имеет

полюс вида $1/(s_{12} - m^2)$, который отвечает диаграмме .

[Символ  на линии указывает просто на то, что она является

частью кружка , а не внутренней линией, входящей

в интеграл условия унитарности и соответствующей, как видно из (3.17), функции $-2\pi i d^+(q^2 - m^2)$.] Можно показать, что вычет

в этом полюсе имеет вид


$$\begin{array}{c} \diagup \\ \oplus \\ \diagdown \end{array} \xrightarrow[m]{q} \begin{array}{c} \diagdown \\ \ominus \\ \diagup \end{array} \begin{array}{l} P_1 \\ P_2 \end{array} = 2\pi i A_1^+ A_2^- \delta^+(s_{12} - m^2). \quad (4.1)$$


Наиболее существенно, что этот вычет можно факторизовать, т. е. представить в виде произведения двух амплитуд A_1^+ и A_2^- . Таким образом, вклад полюса в амплитуду A^+ равен

$$A^+ \approx \frac{A_1^+ A_2^-}{s_{12} - m^2} \text{ при } s_{12}, \text{ близком к } m^2. \quad (4.2)$$

Этот результат справедлив независимо от того, стабильна или нестабильна частица, хотя диаграмма (4.1) может соответствовать физическому процессу, конечно, лишь в том случае, если частица с массой m нестабильна. В противном случае этот полюс отвечает связанному состоянию.

Еще одним типом сингулярности является точка ветвления, возникающая на пороге рождения каждой группы частиц, которая может

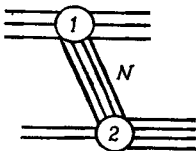
быть промежуточным состоянием. Так амплитуда  имеет поро-

говую точку ветвления, соответствующую диаграмме ,

причем можно показать, что скачок амплитуды на разрезе определяется

диаграммой . Этот скачок вычисляется явно

в § 9 данной главы. Этот результат допускает обобщение, и скачок на разрезе, возникающем благодаря N -частичному промежуточному состоянию типа



дается правилами Катковского [131, 132] в виде

$$\text{Dis}_N [A] = \int \prod_{l=1}^{N-1} \left[\frac{id^4 k_l}{(2\pi)^4} \right] \prod_{i=1}^N [-2\pi i \delta^+(q_i^2 - m_i^2)] A_1^+ A_2^-. \quad (4.3)$$

Интегрирование здесь проводится по $N-1$ независимым петлям l , образованным N промежуточными линиями. Используя тождество

$$\frac{1}{q_i^2 - m_i^2 \mp i\epsilon} = P \frac{1}{q_i^2 - m_i^2} \pm 2\pi i \delta^+(q_i^2 - m_i^2)$$

(P — символ главного значения), приведенное выражение можно переписать в виде

$$\text{Dis}_N [A] = \text{Dis} \left\{ \int \prod_{l=1}^{N-1} \left[\frac{id^4 k_l}{(2\pi)^4} \right] \prod_{i=1}^N \frac{1}{q_i^2 - m_i^2} A_1^+ A_2^- \right\}$$

Это выражение очень похоже на фейнмановский интеграл для соответствующей диаграммы; единственное различие состоит в том, что вместо констант связи в вершинах стоят амплитуды A^+ и A^- . Положение сингулярностей этих интегралов определяется правилами Ландау [271]

$$q_i^2 = m_i^2 \quad \text{для всех } i$$

и

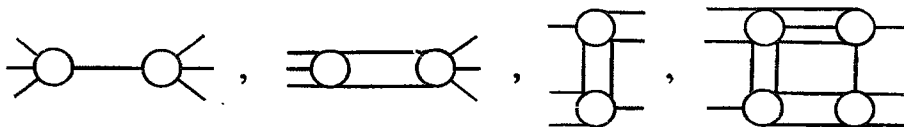
$$\sum_j \alpha_j q_j = 0, \quad (4.4)$$

по петле

где α_j — некоторые константы ($\alpha_j \neq 0$), причем суммирование по j ведется по каждой замкнутой петле. Заметим, что этим способом получается только ведущая сингулярность соответствующей фейнмановской диаграммы; другие сингулярности появляются уже в более простых диаграммах.

Таким образом, для заданной амплитуды  можно

найти *минимальный* набор сингулярностей, рисуя все допустимые диаграммы (которых существует бесконечное множество) с тем же числом входящих и выходящих внешних линий, например,



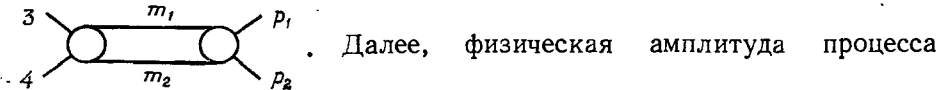
и т. д., и используя для определения положения сингулярностей и скачков на разрезах, отвечающих этим диаграммам, правила Ландау — Каткоского. Постулат максимальной аналитичности первой степени (постулат 5) утверждает, что этот минимальный набор исчерпывает все сингулярности, т. е. что не существует сингулярностей, отличных от тех, которые даются условием унитарности. Если это действительно так, то задав полный набор полюсов, соответствующих всем частицам, как стабильным, так и нестабильным, в принципе можно найти все прочие сингулярности, применяя правила Ландау и Каткоского, так как в (4.3) и (4.4) входят только массы частиц. Однако число частиц, фигурирующих в теории, так же как и их массы, абсолютно ничем не фиксировано. Предположение о существовании

новой частицы приводит просто к тому, что возникает дополнительный (бесконечный) набор сингулярностей.

Если массы частиц вещественны (т. е. частицы стабильны), то сингулярности, определяемые правилами Ландау—Катковского, возникают при вещественных значениях инвариантов. Например, при

$$s_{12} \equiv (p_1 + p_2)^2 = (m_1 + m_2)^2$$

имеется точка ветвления, которая соответствует диаграмме



$1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ вычисляется, конечно, при вещественных s_{12} , но подойти к действительной оси можно как сверху, так и снизу. Примем $+i\varepsilon$ -правило, согласно которому в физической области изменения переменной s_α (для любого канала α) физическая амплитуда имеет вид

$$\text{физ. } A^+(s_\alpha, \dots) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A^+(s_\alpha + i\varepsilon, \dots) \quad (s_\alpha \text{ вещественно}), \quad (4.5)$$

т. е. мы будем всегда подходить к действительной оси сверху, как это показано на фиг. 1.2. Ясно, что если бы во всех случаях применялось противоположное правило ($-i\varepsilon$), то мы имели бы дело просто

15



Ф и г. 1.2. Направление, по которому следует подходить к вещественной оси переменной s , чтобы получить физическую амплитуду.

Разрез из точки ветвления $s = (m_1 + m_2)^2$ проводится вдоль положительного направления вещественной оси.

с комплексно сопряженными амплитудами, что не привело бы ни к каким существенным изменениям. Но мы не можем быть уверены в том, что не следует использовать какое-то смешанное правило, согласно которому к одним из разрезов нужно подходить сверху, а к другим — снизу. Принимается гипотеза, согласно которой имеется «физический лист» [103, 160] данного инварианта, на котором продолжение на действительную ось сверху приводит к физическим амплитудам. Существуют определенные надежды, что в конце концов эту гипотезу удастся доказать.


Поскольку A^- комплексно сопряжена A^+ , физическая амплитуда

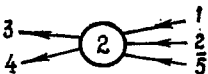
$$\text{физ. } A^-(s_\alpha, \dots) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A^-(s_\alpha - i\varepsilon, \dots). \quad (4.6)$$

Массы нестабильных частиц имеют отрицательную мнимую часть, поэтому они не лежат на физическом листе. Следует ожидать, что это справедливо и для других сингулярностей, которые генерируются из полюсов, отвечающих нестабильным частицам, условием унитарности (см. § 8).

§ 5. КРОССИНГ И CPT-ТЕОРЕМА

Одним из наиболее важных результатов, полученных на основе этих принципов, является так называемый «кроссинг». К сожалению, его не удастся строго доказать, так как в настоящее время не выяснено, можно ли осуществить необходимое аналитическое продолжение из одной области изменения переменных в другую, оставаясь на физическом листе (насколько это оправдано, мы подробно рассмотрим в § 8). Если такая процедура возможна, то с помощью аналитического

продолжения из амплитуды  можно получить ампли-

туду , где символ $\bar{5}$ относится к античастице частицы 5.

Очевидно, квантовые числа частиц $\bar{5}$ и 5 имеют противоположные знаки. Конечно, этим процессам соответствуют разные области изменения переменных, так как для первой амплитуды должно выполняться неравенство

$$\sqrt{s_{12}} \geq \sqrt{s_{34}} + m_5,$$

а для второй

$$\sqrt{s_{34}} \geq \sqrt{s_{12}} + m_{\bar{5}}$$

(напомним, что $m_{\bar{5}} = m_5$). Однако тот факт, что обеим этим амплитудам соответствует единая функция, значения которой в разных областях связаны аналитическим продолжением, накладывает на их поведение очень сильные ограничения.

Если обратить направления всех стрелок

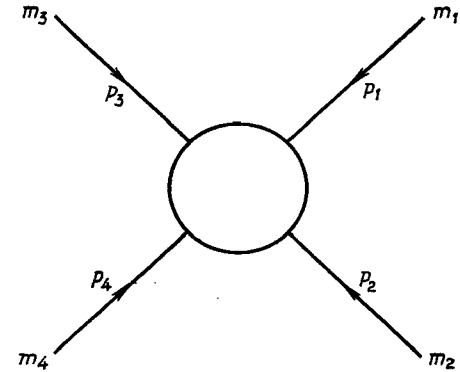


то область изменения переменных останется прежней, и мы приходим к выводу о совпадении амплитуд, описывающих процессы $1 + 2 \rightarrow 3 + 4 + 5$ и $\bar{3} + \bar{4} + \bar{5} \rightarrow \bar{1} + \bar{2}$. Это утверждение является част-

ным случаем *CPT*-теоремы, согласно которой *S*-матрица инвариантна относительно совместного применения операций обращения времени, зарядового сопряжения и изменения знака четности.

§6. СВЯЗНАЯ ЧЕТЫРЕХХВОСТКА

В этой книге часто будет рассматриваться связанная четыреххвостка, описывающая простейший из возможных процессов, в котором происходит рассеяние двух частиц в две (не обязательно те же самые). В оставшихся параграфах данной главы некоторые из обсуждавшихся выше общих идей будут применены для анализа этой амплитуды.



Ф и г. I.3. Связная четыреххвостка.

Из § 3 нам известно, что среди инвариантов, которые можно построить из четырехмерных векторов p_1, p_2, p_3 и p_4 , имеется только два независимых. Для удобства условимся считать все четыре частицы входящими, как это указано на фиг. I.3. В любом реальном процессе выходящим частицам будут соответствовать две античастицы. Из *CPT*-теоремы и кроссинга следует, что данная амплитуда описывает шесть процессов:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad & 1 + 2 \rightarrow \bar{3} + \bar{4}, & 3 + 4 \rightarrow \bar{1} + \bar{2}; \\ \text{II.} \quad & 1 + 3 \rightarrow \bar{2} + \bar{4}, & 2 + 4 \rightarrow \bar{1} + \bar{3}; \\ \text{III.} \quad & 1 + 4 \rightarrow \bar{2} + \bar{3}, & 2 + 3 \rightarrow \bar{1} + \bar{4}. \end{aligned}$$

Однако процессам I, II и III соответствуют разные области изменения переменных.

Введем следующие три инварианта:

$$s = (p_1 + p_2)^2 = (p_3 + p_4)^2, \quad (6.1a)$$

$$t = (p_1 + p_3)^2 = (p_2 + p_4)^2, \quad (6.1б)$$

$$u = (p_1 + p_4)^2 = (p_2 + p_3)^2 \quad (6.1в)$$

(в каждой формуле второе равенство следует из сохранения энергии-импульса).

В системе центра масс частиц 1 и 2 четырехмерные векторы можно выписать явно:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{q}_{s12}), \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{q}_{s12}), \quad (6.2a)$$

где \mathbf{q}_{s12} — трехмерный импульс частицы 1 в этой системе, а E_1 — ее энергия, и т. д. Аналогично, для частиц 3 и 4 имеем

$$p_3 = (E_3, \mathbf{q}_{s34}), \quad p_4 = (E_4, -\mathbf{q}_{s34}). \quad (6.2б)$$

Ограничения массовой поверхностью требуют, чтобы

$$p_1^2 = E_1^2 - q_{s12}^2 = m_1^2, \quad (6.3a)$$

$$p_2^2 = E_2^2 - q_{s12}^2 = m_2^2, \quad (6.3б)$$

$$p_3^2 = E_3^2 - q_{s34}^2 = m_3^2 \quad (6.3в)$$

и

$$p_4^2 = E_4^2 - q_{s34}^2 = m_4^2. \quad (6.3г)$$

В то же время величина

$$s = (E_1 + E_2)^2 = (E_3 + E_4)^2 \quad (6.4)$$

есть квадрат полной энергии в системе центра масс частиц 1 и 2 или 3 и 4 для процесса I. Поэтому процесс I называется *s*-каналом, тогда как процесс II — *t*-каналом, а процесс III — *u*-каналом.

Кроме того, из (6.1) имеем

$$s = p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2,$$

или, учитывая (6.3),

$$s = m_1^2 + m_2^2 + 2p_1p_2. \quad (6.5a)$$

Аналогично,

$$t = m_1^2 + m_3^2 + 2p_1p_3 \quad (6.5б)$$

и

$$u = m_1^2 + m_4^2 + 2p_1p_4. \quad (6.5в)$$

Складывая эти равенства, получаем

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 + 2m_1^2 + 2p_1(p_2 + p_3 + p_4). \quad (6.6)$$

Используя сохранение четырехмерного импульса

$$p_2 + p_3 + p_4 = -p_1 \quad (6.7)$$

и соотношения (6.3), приходим к следующему результату:

$$s + t + u = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 + m_4^2 \equiv \Sigma. \quad (6.8)$$

Таким образом, как и следовало ожидать, между нашими тремя инвариантами имеется одно соотношение, так что только два из них являются независимыми. Однако большей частью бывает удобным работать со всеми тремя инвариантами, изображая их на диаграмме Мандельштама [288], которая представлена на фиг. I.4.

Выразим через введенные инварианты другие физические переменные. Из (6.5a) имеем

$$p_1p_2 = \frac{1}{2}(s - m_1^2 - m_2^2). \quad (6.9)$$

Кроме того, используя (6.2a), получаем

$$m_1^2 + p_1p_2 = p_1(p_1 + p_2) = E_1\sqrt{s}. \quad (6.10)$$

Исключая из (6.9) и (6.10) величину $p_1 p_2$, приходим к формуле

$$E_1 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_1^2 - m_2^2). \quad (6.11a)$$

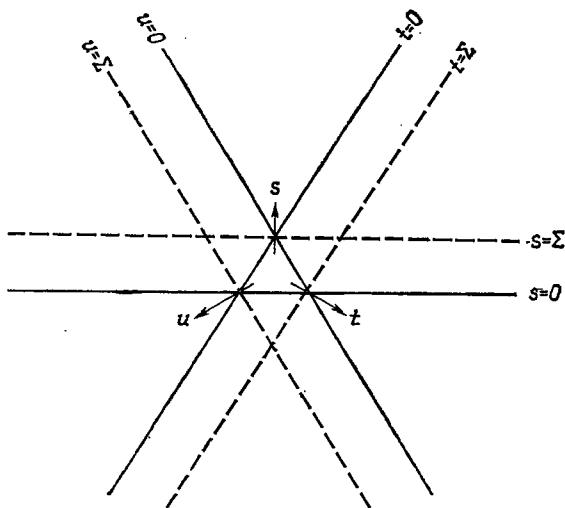
Аналогично этому можно показать, что

$$E_2 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_2^2 - m_1^2), \quad (6.11б)$$

$$E_3 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_3^2 - m_4^2), \quad (6.11в)$$

$$E_4 = \frac{1}{2\sqrt{s}} (s + m_4^2 - m_3^2). \quad (6.11г)$$

Таким образом, s определяет энергию каждой частицы в системе



Ф и г. 1.4. Мандельштамовская плоскость, на которой указаны переменные s , t и u .

центра масс. Соответствующие трехмерные импульсы можно найти, комбинируя (6.3а) с (6.11а), что дает

$$q_{s12}^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_1 + m_2)^2] [s - (m_1 - m_2)^2] \quad (6.12a)$$

и аналогично

$$q_{s34}^2 = \frac{1}{4s} [s - (m_3 + m_4)^2] [s - (m_3 - m_4)^2]. \quad (6.12б)$$

Из (6.5б) и (6.2а), (6.2б) получаем

$$\begin{aligned} t &= m_1^2 + m_3^2 + 2E_1 E_3 - 2q_{s12} q_{s34} = \\ &= m_1^2 + m_3^2 + 2E_1 E_3 - 2q_{s12} q_{s34} \cos \theta_s, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где θ_s — угол между направлениями движения частиц 1 и 3 в системе центра масс, называемый обычно углом рассеяния в этой системе (фиг. I.5). Используя (6.11а) и (6.11в), получаем

$$\cos \theta_s = \frac{s^2 + s(2t - \Sigma) + (m_1^2 - m_3^2)(m_2^2 - m_4^2)}{4sq_{s12}q_{s34}}, \quad (6.14)$$

так что при заданной энергии s угол рассеяния определяется переменной t . Имеет смысл отметить, что в случае равенства всех масс формулы (6.12) и (6.14) значительно упрощаются и приводятся к виду

$$q_s^2 = \frac{s - 4m^2}{4}, \quad (6.15)$$

$$\cos \theta_s = 1 + \frac{t}{2q_s^2} = 1 + \frac{2t}{s - 4m^2}. \quad (6.16)$$

Очевидно, физическая область для s -канала определяется неравенствами

$$s > (m_1 + m_2)^2 \quad (\text{т. е. } q_{s12}^2 > 0)$$

и

$$-1 \leq \cos \theta_s \leq 1.$$

Это последнее условие в переменных s и t записывается следующим образом [266, 160]:

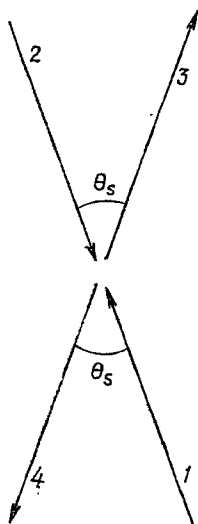
$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & m_2^2 & t & m_1^2 \\ 1 & m_2^2 & 0 & m_3^2 & s \\ 1 & t & m_3^2 & 0 & m_4^2 \\ 1 & m_1^2 & s & m_4^2 & 0 \end{vmatrix} \geq 0.$$

В случае равных масс оно дает

$$-(s - 4m^2) \leq t \leq 0,$$

причем из (6.8) следует, что линия $t = -(s - 4m^2)$ отвечает значению $u = 0$. Аналогичные условия получаются и для физических областей t - и u -каналов. На фиг. I.6 показаны физические области всех каналов для двух различных комбинаций масс.

В заключение отметим следующее. Мы полагаем, что двухчастичная амплитуда рассеяния $A(s, t)$ является аналитической функцией пере-



Фиг. I.5. Угол рассеяния θ_s в системе центра масс.

менных s , t , u , на которые наложено условие $s + t + u = \Sigma$, и что в соответствующих областях она определяет физические амплитуды процессов I—III.

§ 7. СВЯЗЬ МЕЖДУ АМПЛИТУДОЙ РАССЕЯНИЯ И ИЗМЕРЯЕМЫМИ ВЕЛИЧИНАМИ

Чтобы можно было сравнить теорию с экспериментом, необходимо знать, как введенные выше инвариантные амплитуды рассеяния связаны с сечениями, которые измеряют экспериментаторы.

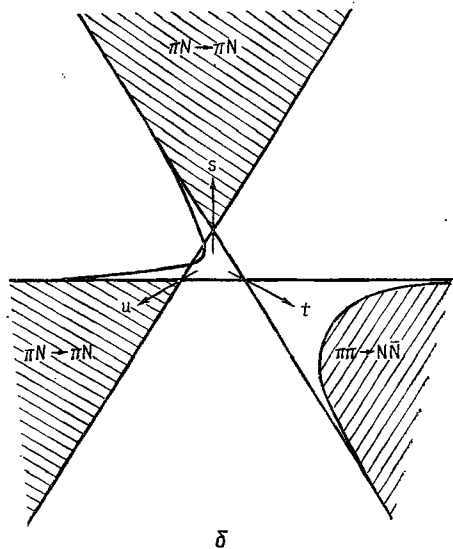
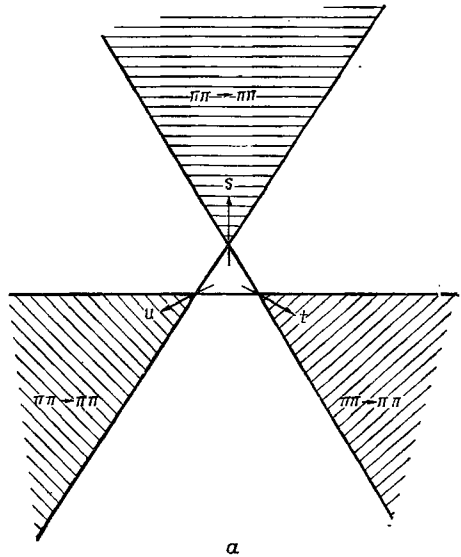
Элемент S -матрицы, связывающий начальное состояние $|i\rangle$ (полный четырехмерный импульс p_i) с конечным состоянием $|f\rangle$ (полный четырехмерный импульс p_f), можно записать в виде

$$S_{fi} = \delta_{fi} + i (2\pi)^4 \times \times \delta^4(p_f - p_i) \langle f | A^+ | i \rangle. \quad (7.1)$$

Вероятность перехода в единицу времени в единице объема из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ дается формулой

$$P_{fi} = (VT)^{-1} | (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \times \times \langle f | A^+ | i \rangle |^2 = (2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \times \times | \langle f | A^+ | i \rangle |^2, \quad (7.2)$$

где с квадратом δ -функции мы обращаемся по обычным правилам. Если начальное состояние содержит две частицы с импульсами p_1 и p_2 , а конечное состояние — произвольное число N частиц с импульсами p'_j , то при условии нормировки (2.7) мы будем



Ф и г. 1.6. Физические области для процессов рассеяния частиц. a — с равными массами, например $\pi\pi \rightarrow \pi\pi$, и b — с двумя разными массами, например $\pi N \rightarrow \pi N$.

ИМЕТЬ

$$P_{fi} = (2\pi)^4 \int \prod_j \left[\frac{d^3 p'_j}{2\rho'_{0j} (2\pi)^3} \right] |\langle p'_1 \dots p'_N | A^+ | p_1 p_2 \rangle|^2 \delta(p_f - p_1 - p_2). \quad (7.3)$$

В системе центра масс поток падающих частиц равен модулю относительной скорости, с которой сближаются две частицы, деленному на нормировочный объем из (2.7) [объем равен $(2E_1 \cdot 2E_2)^{-1}$]:

$$\text{поток} = 4E_1 E_2 |v_1 - v_2|_{\text{с. ц. м.}} = 4E_1 E_2 \left| \frac{q_{s12}}{E_1} + \frac{q_{s12}}{E_2} \right| = 4q_{s12} \sqrt{s}. \quad (7.4)$$

Следовательно, сечение рассеяния из состояния $|i\rangle$ в состояние $|f\rangle$ дается формулой

$$\sigma = \frac{\text{вероятность перехода}}{\text{единичный поток}} = \frac{(2\pi)^4}{4q_{s12} \sqrt{s}} \int \prod_j \left[\frac{d^3 p'_j}{2\rho'_{0j} (2\pi)^3} \right] \times \\ \times |\langle p'_1 \dots p'_N | A^+ | p_1 p_2 \rangle|^2 \delta(p_f - p_1 - p_2). \quad (7.5)$$

Если в конечном состоянии имеется только две частицы, четырехмерные импульсы которых в системе центра масс равны

$$p_3 = (E_3, q_{s34}) \quad \text{и} \quad p_4 = (E_4, -q_{s34}),$$

то мы получим

$$\sigma = \frac{1}{(8\pi)^2 q_{s12} \sqrt{s}} \int \frac{d^3 p_3 d^3 p_4}{E_3 E_4} |\langle p_3 p_4 | A^+ | p_1 p_2 \rangle|^2 \delta(p_3 + p_4 - p_1 - p_2). \quad (7.6)$$

Проводя одно интегрирование с помощью δ -функции, получаем

$$\sigma = \frac{1}{(8\pi)^2 q_{s12} \sqrt{s}} \int \frac{d^2 q_{s34}}{E_3 E_4} \delta(\sqrt{s} - E_3 - E_4) |\langle p_3 p_4 | A^+ | p_1 p_2 \rangle|^2. \quad (7.7)$$

Равенство

$$\int d^2 q_{s34} = \int q_{s34}^2 dq_{s34} d\Omega \quad (7.8)$$

($\int d\Omega$ обозначает интегрирование по углам, определяющим направление движения частицы 3) позволяет переписать сечение в виде

$$\sigma = \frac{q_{s34}}{(8\pi)^2 q_{s12} s} \int |\langle p_3 p_4 | A^+ | p_1 p_2 \rangle|^2 d\Omega. \quad (7.9)$$

Дифференциальное сечение соответственно равно

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_{s34}}{q_{s12}} \frac{1}{(8\pi)^2 s} |\langle p_3 p_4 | A^+ | p_1 p_2 \rangle|^2, \quad (7.10)$$

или в инвариантных переменных

$$d\Omega = \frac{dt}{2q_{s12} q_{s34}} d\varphi, \quad (7.11)$$

так что

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{1}{64\pi s q_{s12}^2} |A(s, t)|^2. \quad (7.12)$$

Нам потребуется также известное соотношение между полным сечением и мнимой частью амплитуды упругого рассеяния, т. е. оптическая теорема. Условие унитарности (2.2) дает

$$(SS^\dagger)_{ji} = \sum_m S_{jm} S_{mi}^\dagger = \delta_{ji}. \quad (7.13)$$

Подставляя сюда (7.1), получаем

$$i(\langle f | A^+ | i \rangle - \langle f | A^- | i \rangle) = -(2\pi)^4 \sum_m \delta(p_i - p_f) \langle f | A^+ | m \rangle \langle m | A^- | i \rangle. \quad (7.14)$$

Поэтому, если начальное и конечное состояния совпадают, то

$$2 \operatorname{Im} \langle i | A | i \rangle = (2\pi)^4 \sum_m \delta(p_i - p_m) |\langle m | A^+ | i \rangle|^2. \quad (7.15)$$

Сравнение с (7.5) показывает, что правая часть соотношения (7.15) пропорциональна сумме сечений, соответствующих переходам из двухчастичного состояния $|i\rangle = |p_1 p_2\rangle$ во все другие состояния, которые допускаются законом сохранения энергии-импульса.

Таким образом,,

$$\sigma_{i \rightarrow \text{все состояния}}^{\text{полн}} = \frac{1}{[2q_{s12} \sqrt{s}]} \operatorname{Im} \langle i | A | i \rangle. \quad (7.16)$$

Конечное состояние амплитуды $\langle i | A | i \rangle$ тождественно начальному состоянию, поэтому частицы конечного состояния должны двигаться в направлении вперед, т. е. $t=0$, так что

$$\sigma^{\text{полн}} = \frac{1}{2q_{s12} \sqrt{s}} \operatorname{Im} A(s, 0). \quad (7.17)$$

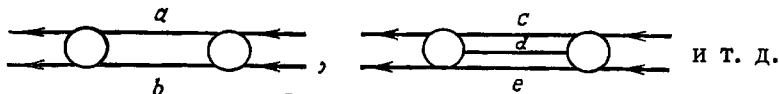
На формулы (7.10), (7.12) и (7.17) мы будем часто ссылаться в дальнейшем.

§ 8. СИНГУЛЯРНОСТИ СВЯЗНОЙ ЧЕТЫРЕХХВОСТКИ

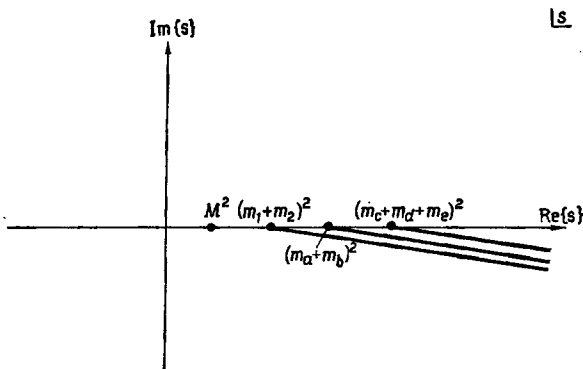
В каждом канале имеются сингулярности, которые требуются условием унитарности. Таким образом, если существует некоторая частица массы M , которая имеет те же внутренние квантовые числа, что и двухчастичная система $1+2$, т. е. которая взаимосвязана с s -каналом, то мы имеем полюс



Кроме того, имеются пороговые точки ветвления, соответствующие всевозможным порогам рождения



всех наборов частиц $\{a, b\}$, $\{c, d, e\}$ и т. д., взаимосвязанных с данным каналом. Положения этих порогов определяются значениями $s = (m_a + m_b)^2$, $s = (m_c + m_d + m_e)^2$ и т. д. В случае стабильных частиц (масса m вещественна) точки ветвления лежат на действительной оси комплексной плоскости переменного s , и мы можем провести разрезы, идущие вдоль действительной оси из точек ветвления в точку $s = +\infty$. Это показано на фиг. 1.7, где принято, что ближайший



Ф и г. 1.7. Физический лист переменной s , на котором указан полюс при M^2 , соответствующий связанному состоянию, и некоторые пороговые разрезы.

порог, взаимосвязанный с каналом, соответствует системе $1 + 2$. Разрезы изображены несколько смещенными вниз, чтобы они не накладывались друг на друга.

Конечно, мы вправе проводить разрезы вдоль любого направления, но указанный выбор является наиболее удобным, так как при этом амплитуда становится эрмитовой аналитической. Чтобы получить физическую амплитуду в области $s > (m_1 + m_2)^2$, необходимо подходить к разрезам сверху, т. е. в соответствии с $+i\varepsilon$ -правилом (см. § 4)

$$\text{физ. (s-канал)} \quad A^+(s, t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(s + i\varepsilon, t).$$

Лист, для которого такое продолжение приводит к правильному результату (он показан на фиг. 1.6), является физическим листом. Аналогично для амплитуды $A^-(s, t)$ правильное граничное значение имеет вид

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(s - i\varepsilon, t).$$

Ниже самого близкого порога справедливо равенство $A^+ = A^-$, поэтому амплитуда A является эрмитово аналитической.

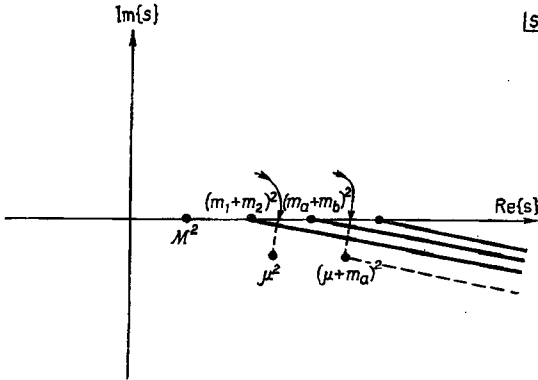
Если существует нестабильная частица массы μ , причем $\text{Re } \mu > m_1 + m_2$, то у этой массы имеется отрицательная мнимая часть, определяемая шириной, которая входит в формулу Брейта — Вигнера

$$A(s, t) = \frac{g}{E - E_R + (i/2)\Gamma} = \frac{g}{E - \mu}. \quad (8.1)$$

Здесь $E = \sqrt{s}$ — энергия в системе центра масс, $E_R = \text{Re } \mu$ — положение резонанса, Γ — ширина резонанса, g — вычет в полюсе. При $s \approx s_R \equiv E_R^2$ имеет место равенство

$$A(s, t) \approx \frac{2E_R g}{s - s_R + iE_R \Gamma} \approx \frac{2E_R g}{s - \mu^2} \quad (8.2)$$

(в приближении $\Gamma \ll \text{Re } \mu$). Это сдвигает полюс на первый нефизический лист, как показано на фиг. I.8. Аналогично, любой порог, связанный



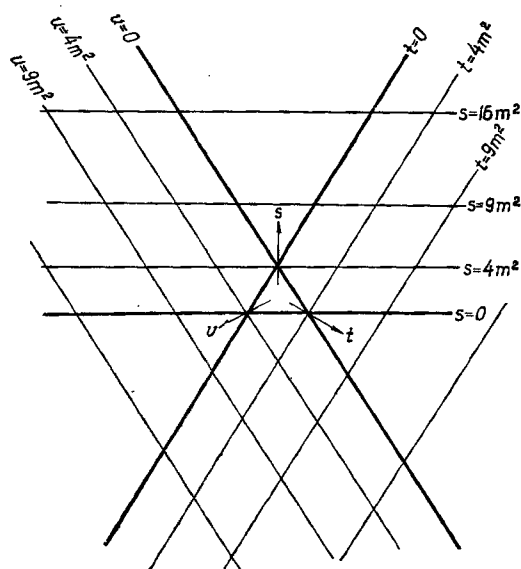
Ф и г. I.8. Физический лист, на котором указан полюс нестабильной частицы с массой μ и один из порогов с этой частицей.

с рождением частицы массы μ , например порог $\mu + m_a$, будет лежать также на нефизическом листе.

Считается, что на физическом листе единственными сингулярностями являются полюса стабильных частиц и пороги, связанные с рождением только стабильных частиц (мы не рассматриваем аномальные пороги, возникающие, когда массы частиц удовлетворяют определенным неравенствам, см. [160]), а все другие, более сложные сингулярности расположены на нефизических листах. Эти полюса и пороги возникают в каждом из трех каналов s, t и u ; их положение на мандельштамовской плоскости показано на фиг. I.9. Более сложные сингулярности соответствуют более сложным диаграммам, с большими массами

промежуточных состояний, поэтому, в согласии с правилами Ландау — Катковского, они должны появляться при более высоких значениях инвариантов.

Низкоэнергетические сингулярности обычно имеют простую структуру. Кроме полюсов, вид которых определяется формулой (4.2), ближайшими сингулярностями часто являются двухчастичные пороги;



Ф и г. 1.9. Сингулярности на мандельштамовской плоскости для амплитуды рассеяния частиц с равными массами; указаны пороги в каждом канале, лежащие при $(2m)^2$, $(3m)^2$ и $(4m)^2$.

для вычисления скачков амплитуды на соответствующих разрезах можно воспользоваться условием унитарности (3.9). Поскольку в дальнейшем они будут играть важную роль, получим их в явном виде.

§ 9. СКАЧОК НА ДВУХЧАСТИЧНОМ РАЗРЕЗЕ

Определим скачок на разрезе по переменной s как

$$D_s(s, t) = \frac{1}{2i} [A^+(s, t) - A^-(s, t)] = \frac{1}{2i} [A(s_+, t) - A(s_-, t)], \quad (9.1)$$

где величина $s_+ \equiv s + i\varepsilon$ вычисляется чуть выше разреза, а величина s_- — чуть ниже него. Если рассматривается система частиц с одинаковыми массами, то в области

$$(2m)^2 < s < (3m)^2$$

возможно лишь двухчастичное промежуточное состояние и из (3.19) мы имеем

$$D_s(s, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^4q \delta^+ [(p_1 + q)^2 - m^2] \delta^+ [(p_2 - q)^2 - m^2] A^+ A^-. \quad (9.2)$$

Удобно перейти к интегрированию по другой переменной

$$q \rightarrow q - p_1,$$

что дает

$$D_s(s, t) = \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^4q \delta^+ (q^2 - m^2) \delta^+ [(p_1 + p_2 - q)^2 - m^2] A^+ A^-. \quad (9.3)$$

В системе центра масс

$$p_1 = (p_{01}, \mathbf{p}) \quad \text{и} \quad p_2 = (p_{02}, -\mathbf{p}),$$

так что

$$p_1 + p_2 = (p_{01} + p_{02}, 0) = (\sqrt{s}, 0).$$

Если положить, например,

$$q \equiv (q_0, \mathbf{q})$$

и принять во внимание первую δ -функцию из (9.3), то в аргументе второй δ -функции будем иметь

$$(p_1 + p_2 - q)^2 - m^2 = s - 2\sqrt{s}q_0 + q^2 - m^2 = s - 2\sqrt{s}q_0.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} D_s(s, t) &= \frac{1}{2(2\pi)^2} \int d^4q \delta^+ (q^2 - m^2) \delta^+ (s - 2\sqrt{s}q_0) A^+ A^- = \\ &= \frac{1}{2(2\pi)^2 2\sqrt{s}} \int dq_0 d^3\mathbf{q} \delta^+ (q_0^2 - |\mathbf{q}|^2 - m^2) \delta^+ \left(\frac{\sqrt{s}}{2} - q_0 \right) A^+ A^- = \\ &= \frac{1}{(4\pi)^2 \sqrt{s}} \int d^3\mathbf{q} \delta^+ \left(\frac{s}{4} - |\mathbf{q}|^2 - m^2 \right) A^+ A^-. \end{aligned} \quad (9.4)$$

Воспользовавшись тем, что

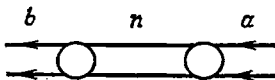
$$\int d^3\mathbf{q} = \frac{1}{2} \int |\mathbf{q}| d|\mathbf{q}|^2 d\Omega,$$

окончательно получаем

$$\begin{aligned} D_s(s, t) &= \frac{\sqrt{(s/4) - m^2}}{(4\pi)^2 2\sqrt{s}} \int d\Omega A^+(s, t') A^-(s, t'') = \\ &= \frac{q_s}{32\pi^2 \sqrt{s}} \int d\Omega A^+(s, t') A^-(s, t''). \end{aligned} \quad (9.5)$$

Связь между t' и t'' и переменной t будет установлена в § 12.

Можно сформулировать и более общий результат: амплитуда перехода из канала a в канал b



на разрезе, соответствующем каналу n , имеет скачок, который дается формулой, обобщающей (9.5):

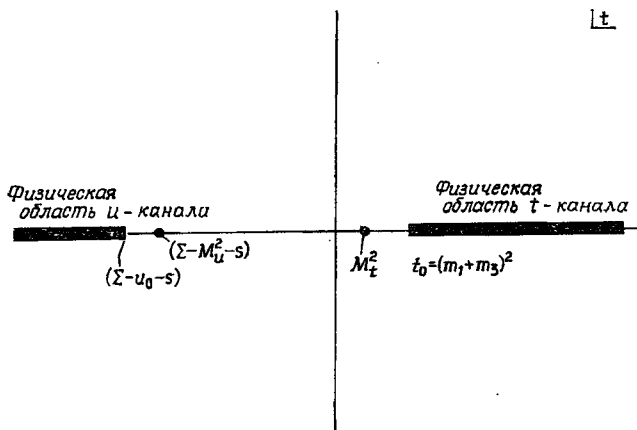
$$A^{ab}(s_+, t) - A^{ab}(s_-, t) = 2i \frac{q_{sn}}{32\pi^2 \sqrt{s}} \int d\Omega_n A^{bn}(s_+, t') A^{na}(s_-, t''), \quad (9.6)$$

где q_{sn} — импульс состояния n .

§ 10. ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

На физическом листе все сингулярности исчерпываются полюсами и порогом каждого канала, поэтому для любого из каналов s , t или u они легко определяются с помощью диаграммы Мандельштама, приведенной на фиг. I.9. При фиксированном вещественном положительном s сингулярности в t -плоскости имеют вид, показанный на фиг. I.10.

При положительном t имеется полюс, скажем, в точке $t = M_t^2$, соответствующий связанному состоянию массы M_t в t -канале. Кроме



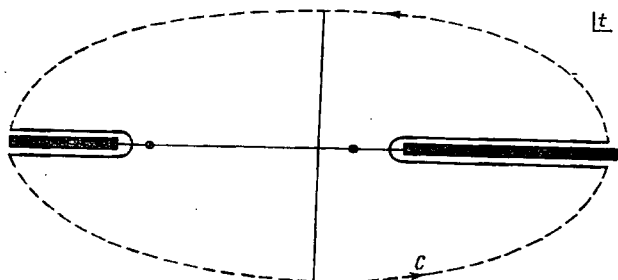
Ф и г. I.10. Сингулярности в комплексной t -плоскости при фиксированном s .

того, имеется разрез, который начинается на ближайшем пороге t -канала при $t_0 = (m_1 + m_3)^2$ и идет вправо. Аналогично, мы видим, что слева существует полюс при $u = M_u^2$ и порог u -канала при $u_0 = (m_1 + m_4)^2$, который порождает разрез, идущий к $u = \infty$. Поскольку согласно (6.8) $t = \Sigma - s - u$, эти сингулярности лежат при $t =$

$\Sigma - s - M_u^2$ и $t = \Sigma - s - u_0$ соответственно. Отметим также, что хотя физическая амплитуда u -канала равна

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} A(s, t, u + i\varepsilon),$$

но вследствие условия (6.8) ей соответствует подход *снизу* к отрицательной части действительной оси t . [В этом параграфе u включается



Ф и г. I.11. Контур интегрирования в комплексной t -плоскости.

в число переменных, которые определяют амплитуду $A(s, t, u)$, но условие (6.8), конечно, по-прежнему означает, что независимы только две переменные.]

Определим скачки амплитуды при фиксированном s как

$$\begin{aligned} D_t(s, t) &= \frac{1}{2i} [A(s, t_+, u) - A(s, t_-, u)], \\ D_u(s, u) &= \frac{1}{2i} [A(s, t, u_+) - A(s, t, u_-)], \end{aligned} \quad (10.1)$$

где

$$t_{\pm} \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (t \pm i\varepsilon),$$

причем скачок берется по всем разрезам в плоскости t (или u) при фиксированном s . В функциях D_t и D_u опущена третья, зависимая, переменная. Вследствие эрмитовой аналитичности

$$A(s, t^*, u) = A^*(s, t, u) \quad (10.2)$$

имеем

$$\begin{aligned} D_t(s, t) &= \Delta_t \{A(s, t, u)\} \quad \text{при } t > t_0, \\ D_u(s, u) &= \Delta_u \{A(s, t, u)\} \quad \text{при } u > u_0, \end{aligned} \quad (10.3)$$

где Δ_t — скачок на разрезе в t -плоскости, деленный на $2i$, и т. д.

Далее, если на физическом листе лежат лишь эти сингулярности, то, воспользовавшись теоремой Коши, можно написать

$$A(s, t, u) = \frac{g_t}{M_t^2 - t} + \frac{g_u}{M_u^2 - u} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{dt'}{t' - t} A(s, t', u'), \quad (10.4)$$

где контур C показан на фиг. I.11.

Если амплитуда $A(s, t, u)$ достаточно быстро убывает при $t \rightarrow \infty$, то из (10.4) получаем

$$A(s, t, u) = \frac{gt}{M_t^2 - t} + \frac{gu}{M_u^2 - u} + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} D_t(s, t') + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{u' - u} D_u(s, u'), \quad (10.5)$$

где $u' + t' + s = \Sigma$.

Справедливость дисперсионного соотношения этого типа может служить для проверки принципа максимальной аналитичности (постулат 5). В той мере, в которой это допускают имеющиеся экспериментальные данные, установлено, что для некоторых процессов подобные соотношения согласуются с экспериментом (см., например, монографию [226], в которой имеется обзор такого рода сравнений для $\pi - N$ -рассеяния).

В общем случае амплитуда убывает на бесконечности не столь быстро, чтобы для нее было справедливо дисперсионное соотношение в том виде, как мы его записали. Входящие в (10.5) интегралы расходятся, вклады от бесконечно удаленных дуг не равны нулю. Тогда прибегают к «вычитаниям», т. е. выписывают дисперсионное соотношение не для самой амплитуды $A(s, t, u)$, а для функции $A(s, t, u) \times \times 1(t - t_1)(t - t_2) \dots (t - t_N)^{-1}$. Пренебрежем на время в выражении (10.5) полюсными членами от связанных состояний и предположим, что в некотором формальном смысле имеет место представление

$$A(s, t, u) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{t' - t} D_t(s, t') + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{u' - u} D_u(s, u'), \quad (10.6)$$

в котором, однако, интегралы расходятся. Тогда можно написать

$$A(s, t, u) \prod_{i=1}^N (t - t_i)^{-1} = \prod_{j=1}^N \frac{A(s, t_j, u)}{t - t_j} \prod_{\substack{i=1 \\ (i \neq j)}}^N (t_j - t_i)^{-1} + \\ + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t(s, t') dt'}{(t' - t_1) \dots (t' - t_N)(t' - t)} + (\text{член с } u), \quad (10.7)$$

где выделен вклад от полюсов в точках $t = t_i$. Таким образом,

$$A(s, t, u) = F^{N-1}(s, t) + \frac{1}{\pi} \prod_{i=1}^N (t - t_i) \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t(s, t') dt'}{(t' - t_1) \dots (t' - t_N)(t' - t)} + \\ + (\text{член с } u), \quad (10.8)$$

где $F^{N-1}(s, t)$ — некоторая функция переменной s , умноженная на полином от t степени $N-1$. Итак, если при фиксированном s

$$D_t(s, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^{N-\varepsilon} \quad (\varepsilon > 0),$$

то интегралы сходятся и дисперсионное соотношение является корректным. (Мы не рассматриваем те вычитания, которые могут потребоваться также для члена с D_u). Если функция $A(s, t, u)$ полиномиально ограничена по t , то такая процедура возможна всегда. Однако в отличие от выражения (10.6) амплитуда $A(s, t, u)$ уже не определяется полностью функцией $D_t(s, t)$ (и D_u). Требуется дополнительная информация о значениях $A(s, t_j, u)$ при $j = 1, \dots, N$.

Таким образом, требования, чтобы амплитуда удовлетворяла максимальной аналитичности первой степени, и знания всех ее сингулярностей, определяемых с помощью правил Ландау — Каткоского, не всегда достаточно для полного восстановления этой функции. Этих сведений было бы достаточно, если бы мы знали, что амплитуда соответствующим образом убывает на бесконечности, но в противном случае необходимо делать вычитания, которые приводят к появлению произвольных параметров. В следующей главе мы увидим, как требование максимальной аналитичности второй степени (постулат б) позволяет избавиться от этих неоднозначностей.

§ 11. МАНДЕЛЬСТАМОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

В предыдущем параграфе были введены скачки D_s, D_t, D_u связанной четыреххвостки по инвариантам s, t и u . Однако максимальная аналитичность (постулат 5) требует также, чтобы сами эти скачки имели точки ветвления, так что, например, функция $D_t(s, t)$ должна иметь разрез как в плоскости s , так и в плоскости u [вспомним условие (6.8)]. Можно положить (но, к сожалению, строго пока это не доказано), что все такие точки ветвления лежат на действительной оси, и поэтому вдоль этой оси можно снова провести разрезы и написать для D_t и т. д. простые дисперсионные соотношения.

Определим скачок функции D_t по переменной s как

$$\rho_{st}(s, t) = \frac{1}{2i} [D_t(s_+, t) - D_t(s_-, t)], \quad s > b_1(t) > 0, \quad (11.1)$$

и

$$\rho_{tu}(t, u) = \frac{1}{2i} [D_t(u_+, t) - D_t(u_-, t)], \quad u > b_2(t) > 0, \quad (11.2)$$

так что

$$D_t(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{b_1(t)}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s'', t)}{s'' - s} ds'' + \frac{1}{\pi} \int_{b_2(t)}^{\infty} \frac{\rho_{tu}(t, u'')}{u'' - u} du''. \quad (11.3)$$

Эти интегралы берутся по областям переменных s'' и u'' , в которых функции ρ_{st} и ρ_{tu} при заданном значении t отличны от нуля. Границы

этих областей $s = b_{1,2}(t)$ и т. д. рассматриваются в следующем параграфе.

Аналогично можно написать

$$D_u(s, u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{su}(s'', u)}{s'' - s} ds'' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho_{tu}(t'', u)}{t'' - t} dt''. \quad (11.4)$$

Подставляя (11.3) и (11.4) в (10.6), получаем

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{st}(s'', t'')}{(s'' - s)(t'' - t)} ds'' dt'' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{tu}(t'', u'')}{(u'' - u')(t'' - t)} dt'' du'' + \\ + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{su}(s'', u'')}{(s'' - s)(u'' - u)} ds'' du'' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{tu}(t'', u'')}{(t'' - t')(u'' - u)} dt'' du''. \quad (11.5)$$

Заметим, что это соотношение, так же как и (10.6), написано при фиксированном значении s , поэтому во втором и четвертом слагаемых переменные должны иметь штрихи, которые переходят из знаменателей формул (11.3) и (11.4), т. е., согласно (6.8),

$$s + t + u = s + t' + u' = \Sigma. \quad (11.6)$$

Переставляя штрихи в четвертом слагаемом и объединяя его со вторым, получаем

$$\iint \rho_{tu}(t'', u'') \left[\frac{1}{(u'' - u')(t'' - t)} + \frac{1}{(t'' - t')(u'' - u)} \right] dt'' du''.$$

Используя (11.6), это выражение можно упростить и привести к виду

$$\iint \rho_{tu}(t'', u'') \frac{1}{(t'' - t)(u'' - u)} dt'' du''.$$

Таким образом, из (11.5) окончательно имеем

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{st}(s'', t'')}{(s'' - s)(t'' - t)} ds'' dt'' + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{su}(s'', u'')}{(s'' - s)(u'' - u)} ds'' du'' + \\ + \frac{1}{\pi^2} \iint \frac{\rho_{tu}(t'', u'')}{(t'' - t)(u'' - u)} dt'' du''. \quad (11.7)$$

Это и есть мандельштамовское представление [288—290]. Хотя (11.7) получено из дисперсионного соотношения (10.6), в котором s фиксировано, но из симметрии переменных s , t и u ясно, что из какого бы дисперсионного соотношения мы ни исходили, результат будет получаться тем же самым. Это обусловлено тем, что из (11.1) и (10.1) следует (зависимая переменная не выписывается)

$$\rho_{st}(s, t) = \frac{1}{2i} \left\{ \frac{1}{2i} [A(s_+, t_+) - A(s_-, t_+)] - \frac{1}{2i} [A(s_+, t_-) - A(s_-, t_-)] \right\} = \\ = -\frac{1}{4} [A(s_+, t_+) + A(s_-, t_-) - A(s_-, t_+) - A(s_+, t_-)],$$

что можно записать двумя разными способами:

$$\frac{1}{2i} [D_t(s_+, t) - D_t(s_-, t)] \quad \text{или} \quad \frac{1}{2i} [D_s(s, t_+) - D_s(s, t_-)].$$

Общих доказательств того, что амплитуды можно представить в такой форме, не существует; результаты, полученные в этом направлении в настоящее время, рассматриваются в монографии [160], к которой мы и отсылаем читателя.

В следующем параграфе будет показано, как вычисляются «двойные спектральные функции» ρ_{st} , ρ_{su} , ρ_{tu} по крайней мере в некоторых ограниченных областях изменения переменных. В частности, будет показано, как по заданным в трех каналах порогам s_0 , t_0 и u_0 можно определить границы двойных спектральных функций. Оказывается, что существуют минимальные значения переменных s , t и u , при которых функции D_s , D_t и D_u соответственно отличны от нуля. Например, для амплитуды $\pi - \pi$ -рассеяния функция $\rho_{st}(s, t)$ ограничена двумя кривыми

$$t = 4t_0 + \frac{t_0^2}{q_s^2} \quad \text{и} \quad s = 4s_0 + \frac{s_0^2}{q_t^2}.$$

Учитывая, что $s_0 = t_0 = 4m_\pi^2$, $q_s^2 = (s/4) - m_\pi^2$, $q_t^2 = (t/4) - m_\pi^2$, получаем границы, показанные на фиг. 1.15. Двойные спектральные функции могут отличаться от нуля только в нефизических областях изменения переменных.

Если нам известны двойные спектральные функции, то представление (11.7) позволяет определить амплитуду при всех s и t . Но снова встает проблема вычитаний, упоминавшаяся в предыдущем параграфе. Из (11.1) можно видеть, что если $D_t(s, t) \sim t^N$, то обычно и $\rho_{st}(s, t) \sim t^N$. Таким образом, само по себе мандельштамовское представление определяет амплитуду вообще говоря с точностью до неопределенного числа произвольных вычитаний по каждой из переменных s , t и u .

Оказывается, однако, что должна все же существовать некоторая связь между этим асимптотическим поведением и природой полюсов, сопоставляемых связанным состояниям и резонансам, фигурирующим в теории. Например, резонанс в s -канале спина l массы $\sqrt{s_R}$ и ширины Γ вносит в амплитуду полюс вида [ср. с (8.2)]

$$A(s, t) \approx \frac{g(s) P_l(\cos \theta_s)}{s - s_R + i\Gamma \sqrt{s_R}},$$

где $g(s)$ — вычет в этом полюсе. При малых Γ приближенно имеем

$$D_s(s, t) \approx g(s) P_l(\cos \theta_s) \delta(s - s_R).$$

Далее, согласно (B1.3.9.19),

$$P_l(\cos \theta_s) \underset{\cos \theta_s \rightarrow \infty}{\sim} (\cos \theta_s)^l, \quad l > -\frac{1}{2},$$

а из (6.14) имеем

$$\cos \theta_s \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \frac{t}{2q_{s12}q_{s34}},$$

так что получаем

$$D_s(s, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} t^l.$$

Следовательно, если асимптотическое поведение по t при всех s ограничено степенью t^l , то самый большой спин, которым может обладать полюс s -канала, равен l . Но может существовать, конечно, сколь угодно большое число частиц со всеми спинами $\leq l$. Это не должно нас удивлять, так как максимальная аналитичность первой степени не ограничивает общее число полюсов; она лишь позволяет отыскать по заданным полюсам все прочие сингулярности.

С другой стороны, было бы весьма удивительно, если бы в действительности все полюса можно было задавать произвольным образом. Пусть, например, мы ввели в S -матрицу нейтронный и протонный полюса. Можно было бы ожидать, что дейтронный полюс возникает за счет «сил», действующих между этими двумя частицами; при этом нет необходимости вводить его заранее. Ясно, что такая надежда основывается на интуитивном представлении о дейтроне как о составной частице, и эта неэлементарность должна быть следствием теории, а не каких-то постулатов. В квантовой электродинамике нужно задать массы и заряды электрона и позитрона, но для позитрония эти характеристики задавать не следует, так как они могут быть вычислены. Если же в теорию включить дополнительное требование, чтобы масса позитрония имела некоторое определенное значение, отличное от экспериментального, то это несомненно привело бы к противоречию. Почти столь же несомненно, что и теория сильных взаимодействий, которая позволяет нам задавать массы и константы связи всех частиц произвольным образом, также будет противоречивой.

Итак, основная трудность применения теории S -матрицы, исходящей из постулатов 1—5, заключается в том, что нам неизвестно, какое количество информации, т. е. сколько масс частиц и констант связи требуется с самого начала ввести в теорию (если в этом вообще есть необходимость). В нерелятивистской физике, а также, вероятно, в квантовой электродинамике, мы в состоянии провести различие между «элементарными» частицами типа электрона и протона и между составными частицами, такими, как атом водорода или позитроний; но в области сильных взаимодействий установить такое различие намного труднее, а может быть и вообще невозможно¹⁾. Очевидно

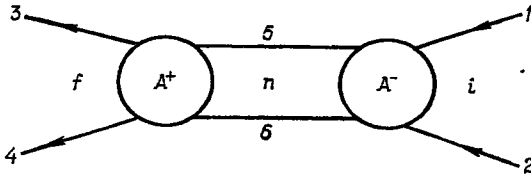
¹⁾ Обзор различных подходов к проблеме нахождения условия «сложности» частиц в теории поля см., например, в лекции Хагена (С. Н. Hagen в книге *Lectures in Theoretical High Energy Physics*, ed. H. Aly, p. 165, London, 1968). — *Прим. ред.*

лишь, что ответ на этот вопрос должен в значительной степени определяться свойствами S -матрицы, связанными с угловым моментом, которые рассматриваются в следующей главе.

В заключительном параграфе этой главы будет показано, как можно вычислить двойные спектральные функции в том случае, когда справедливо двухчастичное условие унитарности.

§ 12. ДВОЙНАЯ СПЕКТРАЛЬНАЯ ФУНКЦИЯ УПРУГОГО ПРОЦЕССА

Двойные спектральные функции, входящие в мандельштамовское представление, в большинстве случаев вычислить невозможно. Однако если для данной амплитуды существует область, в которой имеет место упругая унитарность, то, воспользовавшись формулой (9.5),



Ф и г. I.12. Двухчастичное условие унитарности с промежуточным состоянием n .

можно определить $D_s(s, t)$, а затем, взяв скачок функции D_s по переменной t , можно найти и двойную спектральную функцию, по крайней мере для той области изменения s , где справедлива упругая унитарность [288—290]. В принципе можно было бы использовать формулу (9.6) для совокупности связанных друг с другом двухчастичных каналов, но при этом пришлось бы рассматривать сразу несколько амплитуд, что делает вычисления чрезмерно сложными. Как только достигаются многочастичные пороги, проблема становится совершенно необозримой. Имеет смысл, однако, исследовать проблему вычисления двойных спектральных функций упругих процессов, так как для большинства амплитуд, с которыми мы будем иметь дело, упругие пороги являются в то же время ближайшими взаимосвязанными порогами, а это означает, что граница такой двойной спектральной функции является и границей полной двойной спектральной функции. Таким образом, это позволяет определить границу. Кроме того, в некоторых случаях имеет смысл приближение, в котором вкладом неупругих процессов в условие унитарности просто пренебрегается; такое приближение часто используется в гл. VI.

Прежде всего, напомним снова формулу (9.5), которая определяет скачок, соответствующий диаграмме на фиг. I.12:

$$D_s(s, t) = \frac{q_s}{32\pi^2 \sqrt{s}} \int d\Omega_s A^+(s, t') A^-(s, t''). \quad (12.1)$$

Здесь $t' = t(z', s)$, где $z' \equiv \cos \theta_{nf}$ отвечает углу между направлениями движения частиц, находящихся в состояниях f и n (в системе

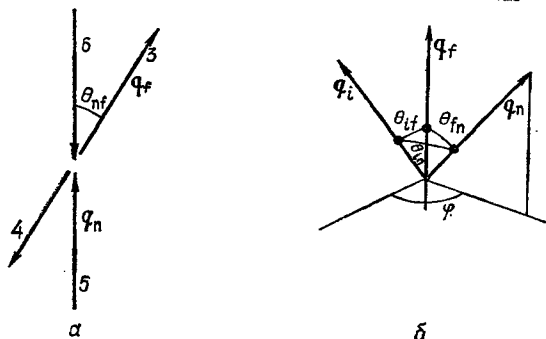
центра масс); $t'' = t(z'', s)$, где $z'' \equiv \cos \theta_{in}$ задает аналогичный угол для состояний i и n . Эти углы связаны с углом, соответствующим переменной t [$t = (z_s, s)$], где $z_s = \cos \theta_{if}$, посредством теоремы сложения косинусов (см. фиг. I.13)

$$\cos \theta_{in} = \cos \theta_{if} \cos \theta_{fn} + \sin \theta_{if} \sin \theta_{fn} \cos \varphi,$$

или

$$z'' = z_s z' + \sqrt{1 - z_s^2} \sqrt{1 - z'^2} \cos \varphi. \quad (12.2)$$

Подставляя теперь в (12.1) дисперсионное соотношение [(10.6)] для каждой из амплитуд [в (10.6) предполагается, что полюса, сопоста-



Ф и г. I.13. Трехмерные импульсы в системе центра масс и угол рассеяния θ_{nf} (а) и связь между тремя углами θ_{if} , θ_{in} и θ_{fn} (б) (угол θ_{if} отсчитывается от оси q_f и лежит в плоскости, проходящей через векторы q_f и q_i).

вляемые связанным состоянием, отсутствуют; они будут учтены позднее], получаем

$$D_s(s, t) = \frac{q_s}{32\pi^2 \sqrt{s}} \int d\Omega_s \left[\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t(s_+, t_1)}{t_1 - t''} dt_1 + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{D_u(s_+, u_1)}{u_1 - u''} du_1 \right] \times \\ \times \left[\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t(s_-, t_2)}{t_2 - t'} dt_2 + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{D_u(s_-, u_2)}{u_2 - u'} du_2 \right], \quad (12.3)$$

где

$$s + t + u = s + t_1 + u_1 = s + t' + u' = s + t'' + u'' = \Sigma. \quad (12.4)$$

Заменяя далее переменные t и u соответствующими косинусами, получаем

$$D_s(s, t) = \frac{q_s}{32\pi^2 \sqrt{s}} \frac{1}{\pi^2} \int_{-1}^1 dz' \int_0^{2\pi} d\varphi \left[\int_{z_{t0}}^{\infty} \frac{D_t(s_+, t_1)}{z_1 - z''} dz_1 + \int_{z_{u0}}^{\infty} \frac{D_u(s_+, u_1)}{z_1 - z''} dz_1 \right] \times \\ \times \left[\int_{z_{t0}}^{\infty} \frac{D_t(s_-, t_2)}{z_2 - z'} dz_2 + \int_{z_{u0}}^{\infty} \frac{D_u(s_-, u_2)}{z_2 - z'} dz_2 \right], \quad (12.5)$$

где

$$z_{t_0} = z_s(s, t_0) \quad \text{и} \quad z_{u_0} = z_s(s, \Sigma - s - u_0).$$

Изменив в (12.5) порядок интегрирования, получим интеграл по углам

$$\int_{-1}^1 dz' \int_0^{2\pi} d\varphi \frac{1}{(z_1 - z'') (z_2 - z')}.$$

Используя формулу (12.2), можно показать, что он равен

$$\frac{2\pi}{\sqrt{k}} \ln \frac{z_s - z_1 z_2 + \sqrt{k}}{z_s - z_1 z_2 - \sqrt{k}},$$

где

$$k \equiv z_s^2 + z_1^2 + z_2^2 - 1 - z_s z_1 z_2,$$

причем нужно выбрать такую ветвь логарифма, чтобы при $-1 \leq z_s \leq 1$ он был вещественным. Вернемся теперь к переменным t , используя (6.14) и то обстоятельство, что для упругого рассеяния $q_{s12} = q_{s34} = q_s$; в результате окончательно получим

$$\begin{aligned} D_s(s, t) = & \frac{1}{16\pi^3} \frac{q_s}{\sqrt{s}} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt_1}{2q_s^2} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt_2}{2q_s^2} [D_t(s_+, t_1) + D_u(s_+, t_1)] \times \\ & \times [D_t(s_-, t_2) + D_u(s_-, t_2)] 2q_s^2 K^{-1/2}(t, t_1, t_2, s) \times \\ & \times \ln \left[\frac{t - t_1 - t_2 - t_1 t_2 / 2q_s^2 + K^{1/2}}{t - t_1 - t_2 - t_1 t_2 / 2q_s^2 - K^{1/2}} \right], \end{aligned} \quad (12.6)$$

где

$$K(t, t_1, t_2, s) = t^2 + t_1^2 + t_2^2 - 2(tt_1 + tt_2 + t_1 t_2) - \frac{tt_1 t_2}{q_s^2}, \quad (12.7)$$

а t_0 — меньшая из величин t_0 и u_0 .

Для определения двойных спектральных функций нужно просто найти скачки функций (12.6). Анализ упростится, если временно не рассматривать скачок D_u , соответствующий u -каналу, так что функция $D_s(s, t)$ будет иметь лишь один скачок по переменной t , который дается двойной спектральной функцией $\rho_{st}(s, t)$. При этом имеем

$$\begin{aligned} D_s(s, t) = & \frac{1}{\pi} \int_{b(s)}^{\infty} \frac{\rho_{st}(s, t')}{t' - t} dt' = \\ = & \frac{1}{16\pi^3} \frac{q_s}{\sqrt{s}} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt_1}{2q_s^2} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt_2}{2q_s^2} \frac{D_t(s_+, t_1) D_t(s_-, t_2)}{(1/2q_s^2) K^{1/2}(t, t_1, t_2, s)} \ln[...]. \end{aligned} \quad (12.8)$$

Теперь $\rho_{st}(s, t)$ можно найти, взяв скачок по t левой и правой частей этого равенства. Скачок правой части возникает из-за того, что

функция $K^{1/2}$ обращается в нуль. Минимальные значения переменных t_1 и t_2 , входящих в интеграл, равны

$$t_1 = t_2 = t_0,$$

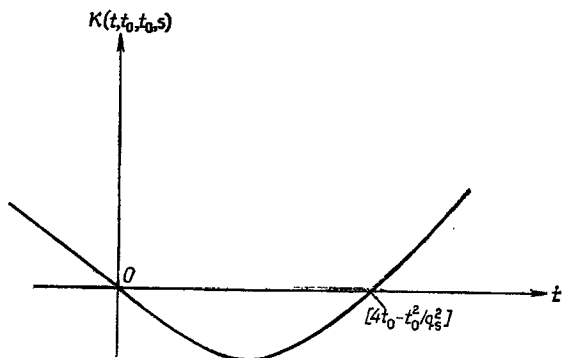
в результате чего функция K приводится к виду

$$K(t, t_0, t_0, s) = t \left(t - 4t_0 - \frac{t_0^2}{q_s^2} \right).$$

Таким образом, $K=0$ при $t=0$ или при $t=4t_0 + t_0^2/q_s^2$; характер изменения этой функции в зависимости от t показан на фиг. I.14. Однако следует учесть, что при $K=0$ аргумент логарифма в формуле (12.6) равен единице. Далее

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z, \quad (12.9)$$

поэтому $\ln 1 = 2\pi ni$, где число n зависит от выбора ветви логарифма. Выше отмечалось, что следует выбирать ту ветвь логарифма, которая



Ф и г. I.14. График изменения функции $K(t, t_0, t_0, s)$ в зависимости от t при фиксированном s .

вещественна при $-1 \leq z_s \leq 1$, а согласно (6.16), $z_s = 1$ соответствует значению $t = 0$, так что $t = 0$ не является сингулярной точкой функции $K^{-1/2} \ln(\dots)$. Но при увеличении t у аргумента логарифма появляется ненулевая фаза, которая становится равной 2π при

$$t = 4t_0 + \frac{t_0^2}{q_s^2};$$

в этой точке функция $D_s(s, t)$ имеет сингулярность. При более высоких значениях переменных интегрирования t_1 и t_2 увеличивается и значение t , при котором K обращается в нуль (при заданном q_s^2), так что границей двойной спектральной функции будет

$$t = 4t_0 + \frac{t_0^2}{q_s^2} \equiv b(s). \quad (12.10)$$

Возьмем в правой и левой частях соотношения (12.8) скачок по переменной t при $t > b(s)$. Используя формулу

$$\text{Dis}[\ln(\dots)] = 2\pi \text{ при } K > 0,$$

которая следует из (12.9), получаем

$$\rho_{st}(s, t) = \frac{1}{8\pi^2} \frac{q_s}{\sqrt{s}} \int_{t_0}^{K(t, t_1, t_2, s)=0} \frac{dt_1}{2q_s^2} \int_{t_0}^{dt_2} \frac{D_t(s_+, t_1) D_t(s_-, t_2)}{(1/2q_s^2) K^{1/2}(t, t_1, t_2, s)} \text{ при } t > b(s). \quad (12.11)$$

Интегрирование здесь проводится лишь по той области изменения переменных $t_1, t_2 > t_0$, в которой функция $K(t, t_1, t_2, s)$ положительна, так как при $K < 0$ скачок по t в (12.8) отсутствует. Конечность области интегрирования играет важную роль в приложениях, которые рассматриваются в гл. VI. При выводе (12.11) предполагалось, что скачок в u -канале отсутствует. Возвращаясь к (12.6) и проводя аналогичные рассуждения, находим

$$\rho_{st}^{\text{упр. } s}(s, t) = \frac{1}{16\pi^2 q_s \sqrt{s}} \int_{t_0}^{K=0} \int dt_1 dt_2 \frac{D_t(s_+, t_1) D_t(s_-, t_2) + D_u(s_+, t_1) D_u(s_-, t_2)}{K^{1/2}(t, t_1, t_2, s)}, \quad (12.12)$$

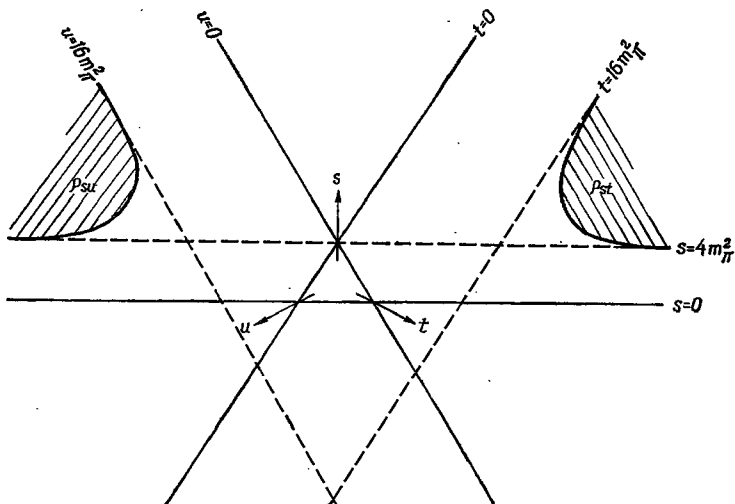
$$\rho_{su}^{\text{упр. } s}(s, t) = \frac{1}{16\pi^2 q_s \sqrt{s}} \int_{t_0}^{K=0} \int dt_1 dt_2 \times \\ \times \frac{D_t(s_+, t_1) D_u(s_-, t_2) + D_u(s_+, t_1) D_t(s_-, t_2)}{K^{1/2}(t, t_1, t_2, s)}. \quad (12.13)$$

Эти формулы определяют двойные спектральные функции, отвечающие упругим процессам в s -канале; их область существования изображена на фиг. I.15. Вычисляя аналогичным способом двойные спектральные функции упругих процессов в t - и u -каналах, получим полный набор этих величин, приведенный на фиг. I.16. Полученные результаты являются точными лишь в области $s < s_I$ (и $t < t_I$, $u < u_I$), где s_I — ближайший порог неупругих процессов в s -канале. Конечно, спектральные функции можно вычислить и для $s > s_I$, причем уже имеющиеся выражения служат, по-видимому, хорошим приближением в несколько более широкой области значений s .

В дисперсионных соотношениях (10.6), использованных в формуле (12.3), мы пренебрегали возможностью существования полюсов, отвечающих связанным состояниям, т. е. членов, входящих в (10.5). Их присутствие вносит в (12.12) и (12.13) дополнительный вклад

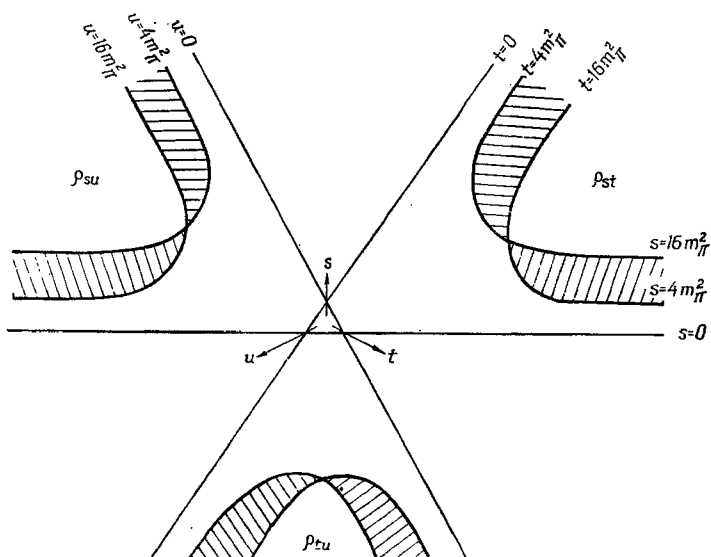
$$D_t(s, t) = \pi g_i \delta(t - M_i^2),$$

так что область интегрирования по t_1 и t_2 должна включать точки $t_1 = M_i^2$ и $t_2 = M_i^2$. При этом граница двойной спектральной функции



Ф и г. I.15. Мандельштамовская диаграмма для $\pi\pi$ -рассеяния, на которой указаны двойные спектральные функции s -канала, соответствующие упругому процессу.

Границы определяются формулой (12.10) и имеют асимптоты $s = 4m_{\pi}^2$ и t (или u) $= 16m_{\pi}^2$. Эти двойные спектральные функции совпадают с полными только в области до $s = 16m_{\pi}^2$.



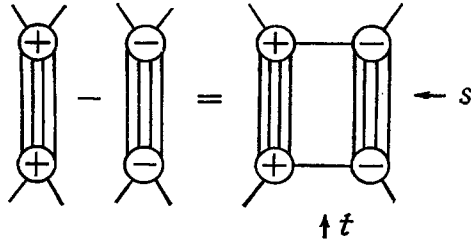
Ф и г. I.16. Двойные спектральные функции для упругого $\pi\pi$ -рассеяния. В заштрихованных областях они совпадают с полными двойными спектральными функциями.

определяется формулой

$$t = 4M_t^2 - \frac{M_t^4}{q^2} \equiv b(s) \quad (12.14)$$

вместо (12.10).

Условие унитарности (12.1) при помощи диаграмм изображается следующим образом:



Сюда входят все допустимые обменные процессы t -канала с двух-частичным условием унитарности в s -канале. Возможность вычисления подобных «лестниц» является одним из наиболее ценных качеств мандельштамовского представления [96, 107, 108]. Конечно, чтобы можно было пользоваться соотношениями (12.12), (12.13), необходимо знать функции D_t и D_u , но в гл. VI на основе этих соотношений будет развита некоторая итерационная процедура, позволяющая определять как скачки, так и двойные спектральные функции.

ПАРЦИАЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ И ПОЛЮСА РЕДЖЕ

§ 1. ПАРЦИАЛЬНЫЕ АМПЛИТУДЫ

В предыдущей главе указывалось, что при анализе вычитаний, которые необходимо делать в мандельштамовском представлении, существенную роль должен играть угловой момент, так как источником по крайней мере некоторых из расходимостей являются полюса, соответствующие частицам со спином. В данной главе подробно рассматривается разложение амплитуды рассеяния по парциальным волнам. Сначала мы рассмотрим лишь целые значения углового момента; для бозонов, конечно, только они являются физически допустимыми значениями, которые определяются правилами квантования. Но потом мы увидим, что представляет интерес и обобщение первоначального определения парциальных амплитуд на нефизические значения момента, отличающиеся от целых чисел и даже комплексные. При этом мы столкнемся с сингулярностями амплитуд, лежащими в комплексной плоскости углового момента и связанными с расходимостями мандельштамовского представления — с «полюсами Редже» и разрезами. Мы увидим также, что привлечение принципа максимальной аналитичности второй степени (постулат б в гл. I, § 2) решает полностью проблему расходимостей и приводит к тому, что все полюса, сопоставляемые частицам, соответствуют «полюсам Редже», аналогичным тем, которые были открыты в теории потенциального рассеяния [346; 347]. В конце концов амплитуду рассеяния удастся выразить через ее сингулярности в плоскости углового момента. Все эти утверждения, конечно, зависят от справедливости постулата б. Основным подтверждением правильности этого постулата служат экспериментальные следствия гипотезы полюсов Редже, которые рассматриваются в гл. VIII.

Начнем с определения парциальных амплитуд. По «парциальным волнам» можно разложить любой элемент S -матрицы, но пока мы ограничимся связной четыреххвосткой, внешние частицы которой не имеют спина. Изменения, к которым приводит наличие спина, подробно рассматриваются в гл. IV.

Как видно из (I.6.14), при фиксированном s инвариант t зависит только от косинуса угла рассеяния [вследствие (I.6.8) это справедливо и для u], поэтому амплитуду $A(s, t)$, приведенную в гл. I, § 6, можно записать как $A[s, t(z_s, s)]$, где $z_s = z_s(s, t) \equiv \cos \theta_s$. Тогда парциаль-

ную амплитуду в s -канале можно определить как

$$A_l(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_s P_l(z_s) A[s, t(z_s, s)] \quad \text{при } l=0, 1, 2, \dots \quad (1.1)$$

Здесь $P_l(z)$ — полином Лежандра первого рода l -го порядка. Множитель $(16\pi)^{-1}$ введен для того, чтобы упростить двухчастичное условие унитарности, которое будет обсуждаться в § 5 этой главы.

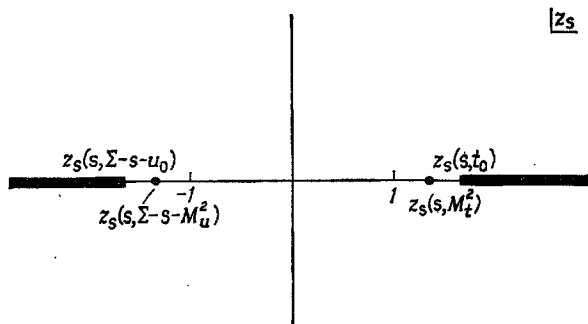
Благодаря ортогональности полиномов Лежандра (B1.3.12.10)

$$\int_{-1}^1 P_l(z) P_{l'}(z) dz = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'} \quad (1.2)$$

формулу (1.1) можно обратить и записать в виде

$$A[s, t(z_s, s)] = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l(s) P_l(z_s). \quad (1.3)$$

Очевидно, этот ряд не может сходиться при всех s и t , так как при целых $l \geq 0$ функция $P_l(z_s)$ является целой функцией от z_s (т. е. она голоморфна — при конечных z_s не имеет сингулярностей), вследствие



Фиг. П.1.1. Сингулярности в z_s -плоскости, соответствующие фиг. I.10.

чего амплитуда $A(s, t)$, определяемая (1.3), не может иметь сингулярностей по t (или по u). Таким образом, у ближайшей из сингулярностей по t (или по u) разложение в ряд становится непригодным. На фиг. I.10 показаны сингулярности в t -плоскости при фиксированном s ; используя (I.6.14), их можно изобразить в z_s -плоскости при фиксированном s , что и сделано на фиг. П.1.1. Разложение (1.3) становится непригодным или при $z_s = z_s(s, M_t^2)$, или при $z_s = z_s(s, \Sigma - s - M_u^2)$ в зависимости от того, какая из этих точек расположена ближе. Полюса и пороги t -канала существуют при положительных z_s ($z_s > 1$), а полюса и пороги u -канала — при отрицательных z_s ($z_s < -1$).

§ 2. АМПЛИТУДЫ С ОПРЕДЕЛЕННОЙ СИГНАТУРОЙ

Мы видели, что в z_s -плоскости имеются правосторонние сингулярности, соответствующие сингулярностям t -канала, и левосторонние сингулярности, соответствующие сингулярностям u -канала. Однако, как мы увидим ниже (см. § 8), более удобно работать с амплитудами, у которых существуют только правосторонние сингулярности. Они называются «амплитудами с определенной сигнатурой» и строятся следующим образом. Пусть

$$A(s, t) = A^R(s, t) + A^L(s, t), \quad (2.1)$$

где $A^R(s, t)$ содержит только правосторонние, а $A^L(s, t)$ — только левосторонние сингулярности амплитуды $A(s, t)$. Пользуясь формулой (I.10.5), для этих функций можно написать дисперсионные соотношения по z :

$$A^R(s, t) = \sum_i \frac{g_{t_i}(s)}{z_s(s, t_i) - z_s(s, t)} + \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} \frac{D_t(s, t')}{z' - z_s(s, t)} dz', \quad (2.2)$$

$$A^L(s, t) = \sum_i \frac{g_{u_i}(s)}{z_s(s, t_i) - z_s(s, t)} + \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, \Sigma - s - u_0)}^{-\infty} \frac{D_u(s, t')}{z' - z_s(s, t)} dz', \quad (2.3)$$

где $t' = t(z', s)$, а суммирование в (2.2) и (2.3) распространяется на все полюса t - и u -каналов соответственно.

Введем теперь амплитуды с определенной сигнатурой

$$A^{\pm}(s, t) = A^R[s, t(z_s, s)] \pm A^L[s, t(-z_s, s)], \quad (2.4)$$

каждая из которых, очевидно, имеет только правосторонние сингулярности. Отметим, что при таком определении $A^+(s, t)$ содержит четную часть амплитуды $A(s, t)$ по переменной z_s , а $A^-(s, t)$ — нечетную часть, хотя сами функции $A^+(s, t)$ и $A^-(s, t)$ не являются ни четными, ни нечетными. [Функция $f(x)$ «четна» по x , если $f(-x) = f(x)$, и «нечетна», если $f(-x) = -f(x)$.] Такое применение верхних индексов \pm совершенно не совпадает с их использованием в предыдущей главе для обозначения связанных частей матриц S или S^{\dagger} . Ниже индексы \pm всегда будут относиться к сигнатуре.

Мандельштамовское представление для амплитуд $A^{\pm}(s, t)$ является несколько более сложным, чем в случае $A(s, t)$. Не учитывая любых возможных полюсов связанных состояний, в соответствии с (I.10.6) будем иметь

$$A^{\pm}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t(s, t'')}{t'' - t} dt'' \pm \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{D_u(s, u'')}{u'' - t} du''. \quad (2.5)$$

Обращаем внимание, что в знаменателе второго слагаемого стоит переменная t , появление которой связано с тем, что z_s заменяется на

— z_s . Подставляя в (2.5) выражения (I.11.3), (I.11.4), после некоторых преобразований получаем

$$A^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int \int \frac{\rho_{st}(s', t'') \pm \rho_{s\bar{t}}(s', t'')}{(s' - s)(t'' - t)} ds' dt'' + \\ + \frac{1}{\pi^2} \int \int \frac{\rho_{tu}(t'', u') \pm \rho_{t\bar{u}}(u', t'')}{(u' - u'')(t'' - t)} du' dt''. \quad (2.6)$$

Соотношение (2.5) можно записать также в виде

$$A^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t'')}{t'' - t} dt'', \quad (2.7)$$

где

$$D_t^\pm(s, t) = D_t(s, t) \pm D_u(s, t) = \\ = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{st}(s', t)}{s' - s} ds' \pm \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{su}(s', t)}{s' - s} ds' + \\ + \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{tu}(t, u')}{u' - u} du' \pm \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{t\bar{u}}(u', t)}{u' - u} du'. \quad (2.8)$$

В (2.7) t_0 обозначает меньшую из величин t_0 и u_0 . Можно ввести также скачки по переменной s

$$D_s^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho_{st}(s, t'') \pm \rho_{s\bar{t}}(s, t'')}{t'' - t} dt''. \quad (2.9)$$

Поскольку выбраны амплитуды с определенной сигнатурой, соответствующие s -каналу, выписанные соотношения уже не обладают симметрией по переменным s , t и u .

Теперь мы воспользуемся этими дисперсионными соотношениями для того, чтобы получить другое определение парциальной амплитуды (1.1).

§ 3. ПРОЕКЦИЯ ГРИБОВА — ФРУАССАРА

Восстанавливая в соотношении (2.7) возможные полюса t -канала, получаем дисперсионное соотношение

$$A^\pm(s, t) = \sum_i \frac{g_{t_i}}{M_{t_i}^2 - t} \pm \sum_i \frac{g_{u_i}}{M_{u_i}^2 - t} + \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t')}{t' - t} dt', \quad (3.1)$$

где суммирование в первом и втором членах проводится по полюсам t - и u -каналов соответственно. Используя (I.6.14), это соотношение можно записать в виде

$$A^\pm(s, t) = \sum_i \frac{g_{t_i}(s)}{z_s(s, M_{t_i}^2) - z_s(s, t)} \pm \\ \pm \sum_i \frac{g_{u_i}(s)}{z_s(s, \Sigma - s - M_{u_i}^2) - z_s(s, t)} + \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t')}{z' - z_s(s, t)} dz', \quad (3.2)$$

где

$$g_{i_i}(s) = \frac{g_{i_i}}{2q_{s12}q_{s34}}, \quad (3.3a)$$

$$g_{u_i}(s) = \frac{g_{u_i}}{2q_{s12}q_{s34}} \quad (3.36)$$

и

$$z' = z_s(s, t').$$

Подставим теперь (3.2) в (1.1), изменим порядок интегрирования и проинтегрируем по z' , используя формулу Неймана (B1,3.6.29),

$$Q_l(z) = -\frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{dz'}{z' - z} P_l(z'). \quad (3.4)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} A_l^\pm(s) = & (16\pi)^{-1} \sum_i \{g_{i_i}(s) Q_l[z_s(s, M_{i_i}^a)] \pm \\ & \pm g_{u_i}(s) Q_l[z_s(s, \Sigma - s - M_{u_i}^a)]\} + \\ & + (16\pi)^{-1} \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} D_l^\pm(s, t') Q_l(z') dz' \end{aligned} \quad (3.5)$$

(при условии, что интеграл сходится, — иначе нельзя было бы менять порядок интегрирования). Это выражение известно под названием представления (или проекции) Грибова — Фруассара для парциальных амплитуд с определенной сигнатурой [194, 195, 213].

Итак, для парциальных амплитуд с определенной сигнатурой мы имеем два выражения (для сокращения записи полюса явно не учитываются)

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} D_l^\pm(s, t') Q_l(z') dz' \quad [\text{из (3.5)}] \quad (3.6)$$

и

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 P_l(z') A^\pm(s, t') dz' \quad [\text{из (1.1)}], \quad (3.7)$$

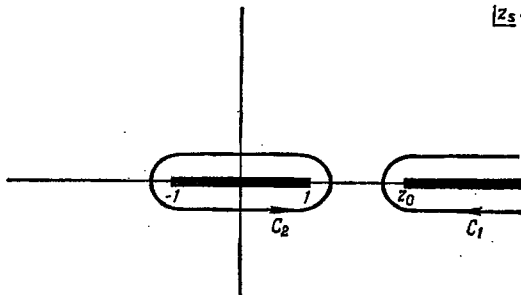
где $l=0, 1, 2, \dots$. Далее, функции $D_l^\pm(s, t)$ являются скачками амплитуд $A^\pm(s, t)$ по переменной t и отличны от нуля только при $z_s > z_s(s, t_0)$; в то же время, как это следует из (3.4), скачок функции $Q_l(z)$ равен

$$\text{Im} \{Q_l(z)\} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} P_l(z) & \text{при } -1 < z < 1, \\ 0 & \text{при } z < -1 \text{ и } z > 1 \end{cases} \quad (3.8)$$

($l = 0, 1, 2, \dots$). Поэтому (3.6) и (3.7) можно объединить в одно выражение

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{32\pi^2 i} \int_{C_1 \text{ или } C_2} dz' Q_l(z') A^\pm(s, t'), \quad (3.9)$$

где контуры интегрирования C_1 и C_2 показаны на фиг. II.2. Разложение по парциальным волнам для амплитуд с определенной сигнатурой



Ф и г. II.2. Контурь интегрирования в комплексной z_s -плоскости, соответствующие выражению (3.9).

турой, соответствующее ряду (1.3), имеет вид

$$A^\pm(s, t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A_l^\pm(s) P_l(z_s). \quad (3.10)$$

В § 2 отмечалось, что $A^+(s, t)$ содержит четную по переменной z_s часть амплитуды $A(s, t)$, а A^- — ее нечетную часть. Далее, согласно (B1,3.2.10),

$$P_l(-z_s) = (-1)^l P_l(z_s) \text{ при целых } l, \quad (3.11)$$

поэтому функция $P_l(z)$ является четной или нечетной, в зависимости от того, четно или нечетно l . Следовательно,

$$A_l^+(s) = A_l(s) \text{ при четных } l, \quad (3.12)$$

$$A_l^-(s) = A_l(s) \text{ при нечетных } l. \quad (3.13)$$

Соответствующие значения момента часто удобно называть «физическими» значениями l для парциальных амплитуд с определенной сигнатурой.

§ 4. СИНГУЛЯРНОСТИ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД

Из формулы (3.9) очевидно, что парциальные амплитуды $A_l^\pm(s)$ имеют такие же пороги по s , как и $A^\pm(s, t)$; эти пороги соответствуют всем каналам, взаимосвязанным с частицами $1 + 2$, как на фиг. I.7. Парциальные амплитуды имеют также полюса тех связанных состояний или резонансов, спин которых равен l . Таким образом, $A_l^\pm(s)$

обладают в s -плоскости правосторонними сингулярностями такого же типа, как и $A^\pm(s, t)$, за исключением того, что они не обязательно содержат все полюса.

Кроме того, существует набор левосторонних сингулярностей, которые порождаются тем, что сингулярности t - или u -канала сливаются с точками ветвления $z = \pm 1$ функции $Q_l(z)$. Например, если $A^\pm(s, t)$ имеет в t -канале связанное состояние с полюсом, лежащим при $z_s = z_s(s, t_p)$, так что

$$D_l^\pm(s, t) = g_p(s) \pi \delta[z_s - z_s(s, t_p)], \quad (4.1)$$

то из (3.6) мы получаем

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi} g_p(s) Q_l[z_s(s, t_p)], \quad (4.2)$$

и $A_l^\pm(s)$ имеет точки ветвления при $z_s(s, t_p) = \pm 1$. В более общем случае для любой сингулярности $A^\pm(s, t)$ при $t = t_n$ парциальные амплитуды $A_l^\pm(s)$ имеют точку ветвления при

$$\frac{s^2 + s(2t_n - \Sigma) + (m_1^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_4^2)}{4s^2 s_{12} s_{34}} = \pm 1, \quad (4.3)$$

как это следует из (I.6.14).

Рассмотрим два простых примера. Мы знаем, что в случае $\pi - \pi$ -рассеяния парциальные амплитуды $A_l^\pm(s)$ имеют правосторонние точки ветвления на порогах, соответствующих двум пионам ($4m_\pi^2$), четырем пионам ($16m_\pi^2$) и т. д. Сингулярности t -канала, расположенные при $t = t_n$, дают точки ветвления при

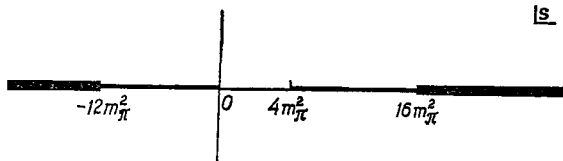
$$\pm 1 = 1 + \frac{2t_n}{s - 4m_\pi^2}. \quad (4.4)$$

(Напомним, что в амплитудах с определенной сигнатурой не содержится никаких сингулярностей u -канала, так как посредством определения (2.4) они «загоняются» в t -канал.) Эти точки ветвления возникают при $s = \infty$ и $s = 4m_\pi^2 - t_n$. В t -канале сингулярности, конечно, такие же, как и в s -канале, т. е. представляют собой различные пороги; поэтому $t_n = 4m_\pi^2, 16m_\pi^2, \dots$. Однако амплитуда $\pi - \pi$ -рассеяния содержит также резонансные полюса, например ρ -мезонный полюс со спином 1, который расположен при

$$s = m_\rho^2 \approx (29 - 0,8i) m_\pi^2.$$

Он приводит к появлению правостороннего полюса только в амплитуде $A_l^\pm(s)$. Но левосторонние точки ветвления при $s = \infty$ и $s = 4m_\pi^2 - m_\rho^2$, порождаемые ρ -мезоном t -канала, имеются у $A_l^\pm(s)$ при всех l . Обычно разрезы от правосторонних точек ветвления проводятся вдоль положительной действительной оси [как в случае $A^\pm(s, t)$], а от левосторонних точек ветвления — вдоль отрицательной действительной оси, как показано на фиг. II.3.

Такая простая картина, которая свойственна кинематике частиц с равными массами, является, однако, нетипичной. В общем случае

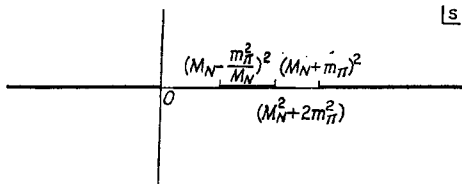


Ф и г. II.3. Разрезы в парциальных амплитудах $\pi\pi$ -рассеяния.

уравнение (4.3) имеет четыре решения: $s = 0$, $s = \infty$ и еще два других. Так, например, в $\pi - N$ -рассеянии из $\frac{1}{2}$ -обменного нуклонного полюса, соответствующего значению $t = M_N^2$, возникают точки ветвления при

$$s = \infty, \quad s = 0, \quad s = \left(M_N - \frac{m_\pi^2}{M_N}\right)^2 \quad \text{и} \quad s = M_N^2 + 2m_\pi^2.$$

Обычно их соединяют, как показано на фиг. II.4, так что имеется дополнительный «короткий разрез». Если бы масса пиона была равна



Ф и г. II.4. Разрезы в парциальных амплитудах πN -рассеяния, обусловленные обменом нуклонным полюсом.

массе нуклона, то левый разрез выходил бы из точки $s = 3M_N^2$ и шел бы в $-\infty$. Более подробный анализ $\pi - N$ -сингулярностей см. в работе [226].

Проводя разрезы указанным выше образом, для парциальных амплитуд можно записать следующие дисперсионные соотношения:

$$A_I^\pm = \frac{1}{\pi} \int_{\text{лев. разр.}} \frac{\text{Im} [A_I^\pm(s')]}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{\text{прав. разр.}} \frac{\text{Im} [A_I^\pm(s')]}{s' - s} ds'. \quad (4.5)$$

Если для каждой сигнатуры ограничиться «физическими» значениями t , то мы увидим, что скачок на левом разрезе определяется скачком функции $Q_l(z)$ в (3.6). Поэтому, учитывая (3.8) и вспоминая, что при $z_s < z_s(s, t_0)$ функция $D_I^\pm(s, t)$ равна нулю, получаем

$$\text{Im} [A_I^\pm(s)] = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{z_s(s, t_0)} P_l(z') D_I^\pm(s, t') dz' \quad \text{на левом разрезе.} \quad (4.6)$$

Вследствие наличия в дисперсионных соотношениях для амплитуд с определенной сигнатурой дополнительных спектральных функций [см. (2.6)] вклад в скачок на левом разрезе обычно не исчерпывается выписанной величиной. Этот вопрос подробно рассматривается в § 11. Однако для физических значений l формула (4.6) верна.

Скачки справа определяются скачками функций $A^\pm(s, t)$, так что из выражения (3.7) получаем

$$\text{Im}[A_l^\pm(s)] = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 P_l(z') D_s^\pm(s, t') dz' \text{ на правом разрезе.} \quad (4.7)$$

В процессе проектирования на парциальную волну в амплитуду на пороге вносится кинематический нуль. Из (I.6.14) и (I.6.12) видно, что если $q_{s_{12}} \rightarrow 0$ или $q_{s_{34}} \rightarrow 0$, то $z_s \rightarrow \infty$. Такая ситуация возникает на порогах двух каналов

$$s = s_a \equiv (m_1 + m_2)^2 \quad \text{и} \quad s = s_b \equiv (m_3 + m_4)^2,$$

а также в нефизических точках

$$s = (m_1 - m_2)^2 \quad \text{и} \quad s = (m_3 - m_4)^2.$$

Откладывая обсуждение нефизических точек, свойственных только рассеянию частиц с неравными массами, до гл. III, мы рассмотрим здесь пороговое поведение.

Из (B1.3.9.21)

$$Q_l(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{-(l+1)} \quad (4.8)$$

имеем

$$Q_l(z) \sim [q_{s_{12}}(s) q_{s_{34}}(s)]^{l+1} \quad \text{при} \quad s \rightarrow s_a \quad \text{или} \quad s \rightarrow s_b.$$

Следовательно, пороговое поведение парциальных амплитуд имеет следующий вид [отметим, что вследствие равенства $dz' = dt'/(2q_{s_{12}}q_{s_{34}})$ в (3.6) появляется еще один множитель типа $q_{s_{12}}q_{s_{34}}$]:

$$A_l(s) \sim [q_{s_{12}}(s) q_{s_{34}}(s)]^l \quad \text{при} \quad s \rightarrow s_a \quad \text{или} \quad s \rightarrow s_b. \quad (4.9)$$

При этом предполагается, что интеграл (3.6) сходится, т. е. что проекция Грибова — Фруассара определена. В противном случае доказать, что поведение будет именно таким, невозможно, но общие соображения подсказывают, что оно будет иметь такой же вид, как и в задаче потенциального рассеяния, в которой потенциалы обладают разумными свойствами [103—105].

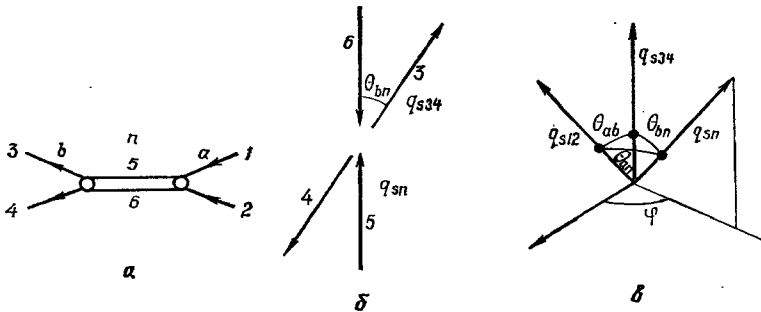
Если $s_a \neq s_b$, т. е. $m_1 + m_2 \neq m_3 + m_4$, то указанные нули соответствуют точкам ветвления при нечетных l , и дисперсионное соотношение (4.5) не справедливо. В следующем параграфе будет показано, какие поправки следует внести для учета этого обстоятельства.

§ 5. УСЛОВИЕ УНИТАРНОСТИ ДЛЯ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД И ФАЗОВЫЕ СДВИГИ

Чрезвычайно удобным является тот факт, что условие унитарности для парциальных амплитуд записывается в более простой форме, чем для полной амплитуды. Например, если взять формулу (I.9.6) для двухчастичного скачка и подставить в нее разложение (1.3) каждой из амплитуд по парциальным волнам, то мы получим

$$16\pi \sum_l (2l+1) [A_l^{ab}(s_+) - A_l^{ab}(s_-)] P_l(z_s) = \\ = 2i \frac{q_{sn}}{32\pi^2 \sqrt{s}} (16\pi)^2 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dz' \sum_{l'} (2l'+1) A_{l'}^{bn}(s_+) P_{l'}(z') \times \\ \times \sum_{l''} (2l''+1) A_{l''}^{na}(s_-) P_{l''}(z''). \quad (5.1)$$

Здесь $z' = \cos \theta_{bn}$ — косинус угла между направлениями движения частиц в состояниях b и n в системе центра масс, а $z'' = \cos \theta_{an}$ —



Ф и г. II.5. Амплитуда рассеяния $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ через промежуточное состояние $5 + 6$, т. е. рассеяния $a \rightarrow b$ через n (а). Трехмерные импульсы и угол рассеяния θ_{bn} в системе центра масс (б). Связь между тремя углами θ_{ab} , θ_{bn} и θ_{an} (угол θ_{ab} отсчитывается от оси q_{s34} и лежит в плоскости, проходящей через векторы q_{s34} и q_{s12}) (в).

косинус угла между направлениями движения частиц в состояниях n и a (фиг. II.5). Теорема сложения косинусов приводит к соотношению

$$\cos \theta_{an} = \cos \theta_{ab} \cos \theta_{bn} + \sin \theta_{ab} \sin \theta_{bn} \cos \varphi,$$

или

$$z'' = z_s z' + \sqrt{1 - z_s^2} \sqrt{1 - z'^2} \cos \varphi, \quad (5.2)$$

а теорема сложения для функций Лежандра (B1.3.11.1) дает

$$P_l(z'') = P_l(z_s) P_l(z') + 2 \sum_{m=1}^l (-1)^m \frac{\Gamma(l-m+1)}{\Gamma(l+m+1)} P_l^m(z_s) P_l^m(z') \cos m\varphi, \quad (5.3)$$

где $P_l^m(z)$ — присоединенная функция Лежандра первого рода. Используя соотношения ортогональности (1.2), (B1,3.12.19) и (B1,3.12.21), получаем

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-1}^1 dz' P_{l'}(z') P_{l''}(z'') = \delta_{l'l''} \frac{4\pi}{2l'+1} P_{l'}(z_s). \quad (5.4)$$

Подставляя это выражение в (5.1) и проводя многочисленные сокращения, будем иметь

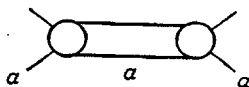
$$A_l^{ab}(s_+) - A_l^{ab}(s_-) = 4i \frac{q_{sn}}{\sqrt{s}} A_l^{bn}(s_+) A_l^{na}(s_-), \quad (5.5)$$

или

$$\Delta_n [A_l^{ab}(s)] = \frac{2q_{sn}}{\sqrt{s}} A_l^{bn}(s_+) A_l^{na}(s_-), \quad (5.6)$$

где Δ_n — скачок на разрезе, связанном с двухчастичным состоянием n , деленный на 2. Отсутствие множителя 16π обусловлено выбором нормировки в определении (1.1).

В частности, в случае условия унитарности для упругого процесса



соотношение (5.6) принимает вид

$$\text{Im} [A_l^{aa}(s)] = \frac{2q_{s12}}{\sqrt{s}} |A_l^{aa}(s)|^2 = \rho^a(s) |A_l^{aa}(s)|^2 \quad \text{при } s < s_I, \quad (5.7)$$

где $\rho^a(s)$ — множитель двухчастичного фазового объема для канала a $\rho^a(s) = 2q_{s12}/\sqrt{s}$, а s_I — ближайший неупругий порог. Заметим, что из (1.6.12) следует $\rho^a(s) \leq 1$ при всех s , откуда

$$|A_l^{aa}(s)| \leq 1 \quad \text{при } s \rightarrow \infty. \quad (5.8)$$

В задачах нерелятивистского потенциального рассеяния (см., например, [410]) парциальная амплитуда f_l часто записывается в виде

$$f_l(s) = \frac{\exp[i\delta_l(s)] \sin \delta_l(s)}{q_s}, \quad (5.9)$$

где $\delta_l(s)$ — «фазовый сдвиг». Поскольку при вещественных $\delta_l(s)$

$$\text{Im} \{f_l(s)\} = \frac{\sin^2 \delta_l(s)}{q_s} = q_s |f_l(s)|^2, \quad (5.10)$$

такая форма записи автоматически учитывает нерелятивистское условие унитарности. Запишем по аналогии

$$A_l^{aa}(s) = \frac{e^{i\delta_l(s)} \sin \delta_l(s)}{\rho^a(s)} = \frac{e^{2i\delta_l(s)} - 1}{2i\rho^a(s)} \quad (5.11)$$

Эта формула определяет релятивистский фазовый сдвиг и включает в себя условие унитарности (5.7). Дополнительный множитель \sqrt{s} (и неявно входящий коэффициент 16π) является следствием использования инвариантной нормировки (I.2.7).

Если открыто несколько каналов, то (5.6) дает

$$\text{Im} \{A_l^{ab}(s)\} = \sum_n \rho^n(s) A_l^{bn}(s_+) A_l^{na}(s_-) + \text{многочастичные каналы}, \quad (5.12)$$

где суммирование проводится по всем открытым двухчастичным каналам. Это условие унитарности может удовлетворяться лишь в том случае, если фазы $\delta_l(s)$, входящие в (5.11), не являются вещественными.

Оптическая теорема (I.7.17) дает

$$\sigma_{a \rightarrow \text{все состояния}}^{\text{полн}}(s) = \frac{1}{2q_{s12} \sqrt{s}} \text{Im} \{A^{aa}(s, 0)\}. \quad (5.13)$$

Используя (1.3) и учитывая, что $P_l(\cos \theta = 1) = 1$ при всех l , получаем

$$\sigma^{\text{полн}}(s) = \frac{8\pi}{q_{s12} \sqrt{s}} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \text{Im} \{A_l^{aa}(s)\}. \quad (5.14)$$

Таким образом, можно ввести полное парциальное сечение, которое определяется как

$$\sigma_l^{\text{полн}}(s) = \frac{8\pi}{q_{s12} \sqrt{s}} (2l+1) \text{Im} \{A_l^{aa}(s)\}. \quad (5.15)$$

С другой стороны, парциальное сечение упругого процесса, получаемое в результате подстановки (1.3) в (I.7.9) и использования соотношения (1.2), равно

$$\sigma_l^{\text{упр } aa}(s) = (2l+1) \frac{16\pi}{s} |A_l^{aa}(s)|^2. \quad (5.16)$$

Подставляя (5.7) в (5.15), получаем, что ниже порогов неупругих процессов $\sigma^{\text{полн}} = \sigma^{\text{упр}}$, как и должно быть.

Выше отмечалось, что парциальные амплитуды имеют кинематические нули, а иногда и точки ветвления, возникающие в дополнение к динамическим сингулярностям (см. предыдущий параграф). Часто желательно избавиться от этих сингулярностей, что можно сделать, вводя «приведенную» парциальную амплитуду

$$B_l^{ab}(s) = \frac{A_l^{ab}(s)}{(q_{s12} q_{s34})^l}. \quad (5.17)$$

Для этой функции условие унитарности (5.12) записывается в виде

$$B_l^{ab}(s_+) - B_l^{ab}(s_-) = 2i \sum_n \rho_l^n(s) B_l^{bn}(s_+) B_l^{na}(s_-) + \text{многочастичные каналы}, \quad (5.18)$$

где

$$\rho_l^n(s) = \frac{2q_n^{2l+1}(s)}{\sqrt{s}}. \quad (5.19)$$

Сравнение с (5.11) позволяет также написать

$$B_l^{aa}(s) = \frac{\exp[i\delta_l(s)] \sin \delta_l(s)}{\rho_l^n(s)}. \quad (5.20)$$

Для $B_l(s)$ справедливы дисперсионные соотношения в форме (4.5), причем в этом случае не возникает никаких кинематических проблем, которые упоминались в конце § 4. Особенно важную роль это играет, когда мы отказываемся от требования целочисленности l , что впоследствии и будет сделано: пороговое поведение всегда вносит в $A_l(s)$ нежелательные точки ветвления, но у функции $B_l(s)$ они не возникают.

§ 6. АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ И ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГРИБОВА — ФРУАССАРА

В гл. I, § 11 мы видели, что основная трудность в использовании мандельштамовского представления заключается в необходимости делать вычитания, без которых интегралы не определены. Скорее всего такое соотношение, как (3.2) (с опущенными для сокращения записи полюсными членами, отвечающими связанным состояниям)

$$A^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t')}{z' - z_s} dz', \quad (6.1)$$

для большинства значений s смысла не имеет. Однако если функция $D_t^\pm(s, t)$ полиномиально ограничена, т. е.

$$D_t^\pm(s, t) \sim z_s^{N(s) - \varepsilon(s)}, \quad 0 < \varepsilon(s) < 1, \quad N(s) - \text{целое}, \quad (6.2)$$

то в точке $z = 0$ можно сделать N вычитаний [ср. с соотношением (I.10.8)], в результате чего мы получим

$$A^\pm(s, t) = F^{N-1}(s, z_s) + \frac{z_s^N}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t')}{(z' - z_s) z'^N} dz', \quad (6.3)$$

где $F^{N-1}(s, z_s)$ — полином степени $N-1$ по переменной z_s , причем интеграл теперь сходится. Тогда из (1.1) имеем

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 dz_s P_l(z_s) \left[F^{N-1}(s, z_s) + \frac{z_s^N}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t')}{(z' - z_s) z'^N} dz' \right] \quad (6.4)$$

при $l = 0, 1, 2, \dots$

Далее, в силу соотношения ортогональности (1.2),

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_s P_l(z_s) z_s^M = 0 \quad \text{при } M < l.$$

Поэтому, записывая

$$\left(\frac{z_s}{z'}\right)^N = \left[1 + \left(\frac{z_s - z'}{z'}\right)\right]^N$$

и производя разложение по степеням $(z_s - z')/z'$, получаем при $l \geq N(s)$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_s P_l(z_s) \left(\frac{z_s}{z'}\right)^N \frac{1}{z' - z_s} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_s \frac{P_l(z_s)}{z' - z_s} + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-1}^1 dz_s P_l(z_s) \left[-\frac{z_s^{N-1}}{z'^N} + \dots\right] = Q_l(z'). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} Q_l(z') D_l^\pm(s, t') dz' \quad \text{при } l \geq N(s). \quad (6.5)$$

Благодаря асимптотическому поведению функции $Q_l(z)$ [см. формулу (4.8)] этот интеграл существует.

Итак, если мандельштамовское представление полиномиально ограничено, то высшие парциальные амплитуды полностью определяются функциями D_l^\pm (или двойными спектральными функциями). Произвольные вычитания содержатся лишь в низших парциальных амплитудах.

§ 7. ГРАНИЦА ФРУАССАРА

На самом деле условие унитарности накладывает определенные ограничения на $N(s)$, которые в некоторой области переменной s являются чрезвычайно сильными [195] (наше изложение следует здесь лекциям [103]).

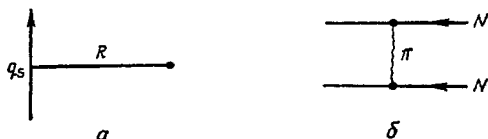
Согласно (B1,3.9.1) (см. также [367]),

$$Q_l(z) \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{l}} e^{-[(l+1/2)\xi(z)]}, \quad (7.1)$$

где

$$\xi(z) = \ln(z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (7.2)$$

Поэтому, если интеграл (6.5) сходится, то основной вклад в высшие парциальные амплитуды дают наименьшие значения переменной z' , которые она может принимать в подинтегральном выражении.



Ф и г. II.6. Периферические взаимодействия: a — налетающая частица, проходя на расстоянии R от мишени, имеет угловой момент $q_s R$; b — периферическое $N-N$ -взаимодействие, создаваемое обменом пионом.

Другими словами, высшие парциальные амплитуды определяются ближайшими сингулярностями по t (или u), т. е. силами наиболее далекого действия, — взаимодействие является «периферическим». Кроме того, если принять, что ближайшая сингулярность по t (или u) соответствует значению $z = z_n$ (напомним, что $z_n > 1$, см. фиг. II.1), то высшие парциальные амплитуды, для которых

$$l > l_{\text{эфф}} \equiv \frac{1}{\xi(z_n)},$$

будут гораздо меньше парциальных амплитуд с $l < l_{\text{эфф}}$. Мы можем ввести радиус действия силы R , такой, что (фиг. II.6)

$$Rq_s = l_{\text{эфф}} \quad \text{при } s \rightarrow \infty,$$

откуда

$$R = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{1}{q_s \xi(z_n)}. \quad (7.3)$$

Например, при $N-N$ -рассеянии силы наиболее далекого действия обусловлены обменом π -мезонами, так что $t_n = m_\pi^2$, т. е. в соответствии с (I.6.16) $z_n = 1 + m_\pi^2/2q_s^2$, что дает $R = 1/m_\pi$. Вспоминая, что в нашей системе единиц $\hbar = c = 1$, мы видим, что радиус взаимодействия равен комptonовской длине волны пиона: $R = \hbar/m_\pi c$.

Итак, при условии полиномиальной ограниченности амплитуды, подставляя (7.1) в (6.5), получаем

$$A_l^\pm(s) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} f(s) e^{-l\xi(z_n)}, \quad (7.4)$$

где $f(s)$ — некоторая функция от s . (При этом требуется, чтобы $z_n > 1$. Это неравенство справедливо при всех $s > s_0$, т. е. во всей области, которая здесь нужна.) Далее, используя (7.3) и учитывая, что $q_s \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sqrt{s}/2$, имеем

$$A_l^\pm(s) \xrightarrow{l, s \rightarrow \infty} f(s) e^{-l/Rq_s} \rightarrow f(s) e^{-2l/R\sqrt{s}}, \quad (7.5)$$

или

$$A_l^\pm(s) \xrightarrow{l, s \rightarrow \infty} \exp \left\{ -\frac{2l}{R\sqrt{s}} + \ln f(s) \right\}. \quad (7.6)$$

Таким образом, при больших s разложение по парциальным волнам (1.3) можно оборвать на угловом моменте

$$l \approx \sqrt{s} R \ln f(s) = c \sqrt{s} \ln s,$$

где c — некоторая константа. Мы видели [см. (5.8)], что при всех l и s имеет место неравенство $|A_l(s)| < 1$; поэтому для направления вперед, используя (1.3) и равенство $P_l(1) = 1$ при всех l , получаем

$$|A^\pm[s, t(z_s = 1, s)]| < \text{const} \sum_{l=0}^{c\sqrt{s} \ln s} (2l + 1).$$

Суммируя арифметическую прогрессию, имеем

$$|A^\pm[s, t(z_s = 1, s)]| < \text{const} s \ln^2 s. \quad (7.7)$$

Для углов, отличных от нуля, согласно (B1, 3.9.2) или [367],

$$P_l(z_s) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} \frac{g(z_s)}{\sqrt{l}} \quad \text{при } -1 < z_s < 1,$$

где $g(z_s) < 1$; поэтому

$$|A^\pm(s, t)| < \text{const} \sum_{l=0}^{c\sqrt{s} \ln s} \frac{2l+1}{\sqrt{l}} < \text{const} s^{3/4} \ln^{3/2} s. \quad (7.8)$$

Присутствие в этих соотношениях логарифмических множителей не совсем понятно; кроме того, в экспериментально доступной области энергий логарифмическую зависимость от s чрезвычайно сложно уловить. Поэтому, предполагая, что подобными множителями можно пренебречь, из неравенств (7.7) и (7.8) получаем следующий результат:

$$A^\pm(s, t) = O(s^{N(t)}), \quad (7.9)$$

где $N(t) \leq 1$ при $t \leq 0$.

Используя далее кроссинг-симметрию, можно утверждать, что такое же поведение имеет место и при больших t (т. е. z_s) в области отрицательных s , а именно:

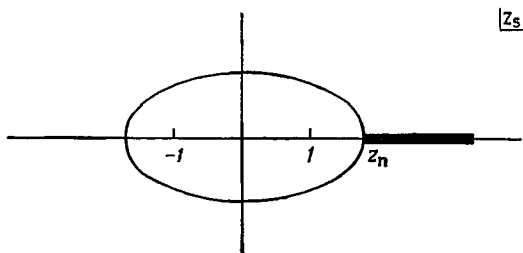
$$A^\pm(s, t) = O(z_s^{N(s)}) \quad \text{с } N(s) \leq 1 \quad \text{при } s \leq 0. \quad (7.10)$$

Таким образом, мы видим, что по крайней мере при отрицательных s все парциальные амплитуды, за исключением разве лишь S - и P -волн, определяются функциями $D_l^\pm(s, t)$, фигурирующими в (6.1). В это выражение может входить только два произвольных вычитания.

Отметим также, что (7.9) совместно с оптической теоремой (5.13) дает

$$\sigma^{\text{полн}}(s) \sim s^{N(0)-1} \leq \text{const}.$$

В § 1 упоминалось, что в точках, соответствующих сингулярностям по l (или u), наиболее близким к физической области s -канала, разложение в ряд по парциальным волнам (1.3) становится непригодным.



Ф и г. II.7. Эллипс Лемана.

Область сходимости разложения по парциальным волнам ограничена ближайшей сингулярностью z_n .

Теперь становится более понятным, почему это происходит. Из асимптотического вида $P_l(z_s)$ при $\text{Re } l \rightarrow \infty$ [см. (B1,3.9.2), а также [367]] следует, что

$$|P_l(z_s)| < \frac{1}{\sqrt{l}} \exp \{ |\text{Im } l \cdot \text{Re } \theta + \text{Re } l \cdot \text{Im } \theta| \} f(z_s), \quad 0 < \text{Re } \theta < \pi. \quad (7.11)$$

Комбинируя (7.11) с (7.4), видим, что ряд по парциальным волнам сходится, если $|\text{Im } \theta| \leq \xi(z_n) = \text{ar ch } z_n$. Это условие определяет в комплексной плоскости переменной z_s эллипс Лемана с фокусами в точках $z = \pm 1$ и большой полуосью z_n [275] (фиг. II.7).

§ 8. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ ПО УГЛОВОМУ МОМЕНТУ

Соотношение (6.5) можно использовать для того, чтобы определить функцию $A_l^\pm(s)$ при всех значениях l , даже если они не являются целыми числами, как это предполагалось до сих пор. Единственными сингулярностями $Q_l(z)$ по l являются полюса при целых отрицательных значениях этой переменной [см. формулу (B1,3.3.3)]. Поэтому функция $A_l^\pm(s)$, определенная указанным способом, голоморфна по l при $\text{Re } l > l_M(s)$, где $l_M(s)$ — степень роста $D_l^\pm(s, z_s)$ в формуле (6.2), причем из (7.10) известно, что при $s \leq 0$ имеет место неравенство $l_M(s) \leq 1$. Следовательно, при всех l , удовлетворяющих условию $\text{Re } l > l_M(s)$, соотношение (6.5) определяет аналитическое продолжение парциальных амплитуд по l ; чтобы подчеркнуть соответствующую функциональную зависимость, введем обозначение $A^\pm(s, l)$ [не смешивать с $A^\pm(s, t)$]. Впоследствии мы вернемся к старому обозначению $A_l^\pm(s)$ даже для нецелочисленных l .

Сразу не очевидно, какое преимущество дает данное продолжение, так как $A^\pm(s, l)$ имеет физический смысл только при целых l , и может показаться, что в равной степени допустима любая другая мыслимая интерполяция этой функции по ее значениям в физических точках. Как мы увидим в следующем параграфе, преимущество выбранного продолжения заключается в том, что функция $A^\pm(s, l)$, определяемая (6.5), голоморфна по l при $\text{Re } l > l_M(s)$ и, согласно (7.4),

$$A^\pm(s, l) = O[e^{-l\xi(z_n)}]. \quad (8.1)$$

Продолжение с такими свойствами является единственным, что следует из теоремы Карлсона в теории функций комплексного переменного. Мы приведем лишь формулировку этой теоремы (доказательство см. [388]).

Теорема Карлсона

Если функция $f(z)$ регулярна при $\text{Re } z \geq 0$ и имеет вид $O(e^{k|z|})$, где $k < \pi$, причем $f(z) = 0$ при $z = 0, 1, 2, \dots$, то $f(z) = 0$ тождественно.

Из теоремы Карлсона следует, что нужная нам функция $A^\pm(s, l)$ для всех $\text{Re } l > l_M(s)$ полностью определяется своими значениями при целых l . Так, например, если к значениям $A^\pm(s, l)$, полученным из (6.5) [обозначим их $A^{\Gamma\Phi}(s, l)$], прибавить некоторую функцию, равную нулю при целых l , переходя, скажем, к

$$A^\pm(s, l) = A^{\Gamma\Phi}(s, l) + f(s) \sin \pi l, \quad (8.2)$$

то эта новая функция будет осциллировать при $l \rightarrow \infty$ и тем самым не будет удовлетворять требованию

$$A^\pm(s, l) = O(e^{l^k}) \quad \text{при } k < \pi. \quad (8.3)$$

Таким образом, если на функцию наложить требование, чтобы она обладала достаточно хорошим поведением при $l \rightarrow \infty$, то наша интерполяция будет единственной.

Именно стремлением иметь соответствующее поведение при $l \rightarrow \infty$ вызвано введение в § 2 вместо $A_l(s)$ амплитуд с определенной сигнатурой $A_l^\pm(s)$. Если бы в (1.1) подставлялось (2.3), то, в отличие от представления (3.5), возникло бы слагаемое, которое содержит интеграл от $Q_l(z')$ по отрицательным z' . Далее, согласно (B1,3.3.12),

$$Q_l(-z) = l^{-i\pi l} Q_l(z); \quad (8.4)$$

поэтому

$$A(s, l) = e^{-i\pi l} O[e^{-l\xi(z_n)}], \quad (8.5)$$

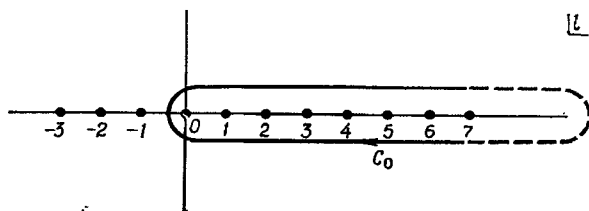
т. е. эта функция не удовлетворяет условию (8.3). К такому же выводу можно прийти, вводя в приведенное выше соотношение (7.1) член $c z_n < -1$.

Итак, мы видим, что другое определение парциальных амплитуд, а именно (1.1), непригодно для интерполяции по l , так как, согласно (7.11), полиномы $P_l(z)$ не обладают необходимым поведением при $|l| \rightarrow \infty$.

Таким образом, существует тесная связь между расходимостями в мандельштамовском представлении и возможностью продолжения по моменту амплитуд рассеяния с определенной сигнатурой. Однако для того, чтобы исследовать эту связь более детально, необходимо иметь такое представление $A^\pm(s, t)$ через $A^\pm(s, l)$ и z_s , которое было бы справедливо и вне области сходимости ряда по парциальным волнам, т. е. вне эллипса Лемана. Такое представление можно получить, используя преобразование Зоммерфельда — Ватсона.

§ 9. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗОММЕРФЕЛЬДА — ВАТСОНА

Предположим, что $A^\pm(s, l)$ является функцией, аналитической по l во всей правой полуплоскости, где она имеет только изолированные сингулярности; это позволяет продолжить ее даже левее линии $\text{Re } l = l_M(s)$, получая при целых l физические значения. Очевидно, это чрезвычайно сильное предположение, и в дальнейшем следует попытаться оправдать его. Если это действительно так, то разложение



Ф и г. II.8. Контур C_0 в комплексной плоскости углового момента.

по парциальным волнам (1.3) можно заменить интегралом по контуру в комплексной l -плоскости, изображенному на фиг. II.8 (подобный прием использовал Зоммерфельд [365], позаимствовавший его у Ватсона [406]):

$$A^\pm(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_0} (2l+1) A^\pm(s, l) \frac{P_l(-z_s)}{\sin \pi l} dl. \quad (9.1)$$

Контур C_0 выбирается так, чтобы внутри него лежали все положительные целые числа и нуль, но не попадала ни одна из сингулярностей функции $A^\pm(s, l)$. Подынтегральное выражение имеет полюс в каждой точке, соответствующей целому числу n , когда

$$\sin \pi l \xrightarrow{l \rightarrow n} (-1)^n (l-n) \pi.$$

Используя соотношение (B1,3.3.10), согласно которому

$$P_n(-z_s) = (-1)^n P_n(z_s),$$

получаем, что вычет в этом полюсе равен

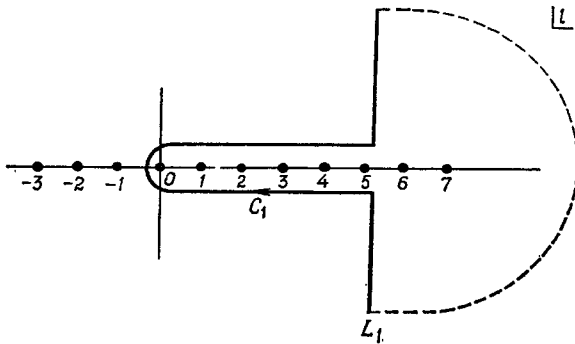
$$\frac{2\pi i P_n(-z_s) A^\pm(s, n) (2n+1)}{(-1)^n \pi} = 2i P_n(z_s) A^\pm(s, n) (2n+1). \quad (9.2)$$

(Именно по этой причине, конечно, в (9.1) в качестве аргумента полинома P_l берется $-z_s$.) В результате, применяя теорему Коши, получаем (отметим, что обход контура интегрирования по часовой стрелке дает знак минус)

$$A^\pm(s, t) = 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) A^\pm(s, l) P_l(z_s),$$

что и требовалось доказать.

Предположим теперь, что контур C_0 деформируется в контур C_1 , показанный на фиг. II.9, с прямой $\text{Re } l = L_1$, параллельной мнимой оси, и с бесконечно удаленной полуокружностью. Если $L_1 > l_M(s)$,



Ф и г. II.9. Второй контур C_1 с бесконечно удаленной полуокружностью.

то мы знаем, что при такой деформации контур не будет пересекать ни одной сингулярности функции $A^\pm(s, l)$, так что интегралы по C_0 и по C_1 будут равны. Вследствие (8.1) и соотношения

$$\left| \frac{P_l(-z_s)}{\sin \pi l} \right| < \frac{1}{\sqrt{l}} \frac{\exp\{|\text{Im } \theta \text{ Re } l + (\pi - \text{Re } \theta) \text{Im } l|\}}{\exp\{\pi |\text{Im } l|\}} f(z_s) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} 0, \quad (9.3)$$

вытекающего из (7.11), вклад от полуокружности обращается в нуль. Это означает, что рассматриваемое представление справедливо в более широкой области, чем эллипс Лемана; фактически область сходимости не зависит от $\text{Im } \theta$ и содержит все $z \leq 1$. [Напомним, что, согласно замечанию, сделанному после формулы (7.4), соотношение (8.1) справедливо, строго говоря, лишь в области $s > s_0$; продолжение на другие значения s указано в гл. III.]

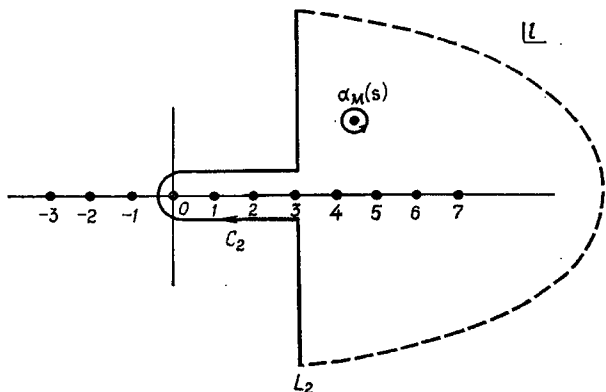
При уменьшении L контур будет пересекать сингулярности функции $A^\pm(s, l)$. Пусть «главной сингулярностью» (т. е. самой правой в комплексной l -плоскости) является полюс при $l = \alpha_M(s)$ с вычетом $\beta_M(s)$, так что

$$A^\pm(s, l) \approx \frac{\beta_M(s)}{l - \alpha_M(s)} \quad \text{при } l \rightarrow \alpha_M(s). \quad (9.4)$$

Тогда, обходя этот полюс, как показано на фиг. II.10, получаем

$$\begin{aligned} A^\pm(s, t) = & -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_2} (2l+1) A^\pm(s, l) \frac{P_l(-z_s)}{\sin \pi l} dl - \\ & - 16\pi^2 [2\alpha_M(s) + 1] \beta_M(s) \frac{P_{\alpha_M(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_M(s)}. \end{aligned} \quad (9.5)$$

Рассмотрим сразу же асимптотическое поведение этого выраже-



Ф и г. II.10. Третий контур C_2 , обходящий полюс при $\alpha_M(s)$.

ния по переменной z_s . Прежде всего выразим $P_\alpha(z)$ через гипергеометрические функции (B1,3.2.23):

$$\begin{aligned} P_\alpha(z) = & \frac{\Gamma(-\alpha-1/2)}{\Gamma(-\alpha)} \frac{(2z)^{-\alpha-1}}{\sqrt{\pi}} F\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, \frac{\alpha}{2} + 1, \alpha + \frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right) + \\ & + \frac{\Gamma(\alpha+1/2)}{\Gamma(\alpha+1)} \frac{(2z)^\alpha}{\sqrt{\pi}} F\left(-\frac{\alpha}{2}, -\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}, -\alpha + \frac{1}{2}, \frac{1}{z^2}\right). \end{aligned} \quad (9.6)$$

При $z \rightarrow \infty$ гипергеометрические функции стремятся к единице, и если α не равно целому отрицательному числу,

$$P_\alpha(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\sim} z^{|\alpha+1/2|-1/2}. \quad (9.7)$$

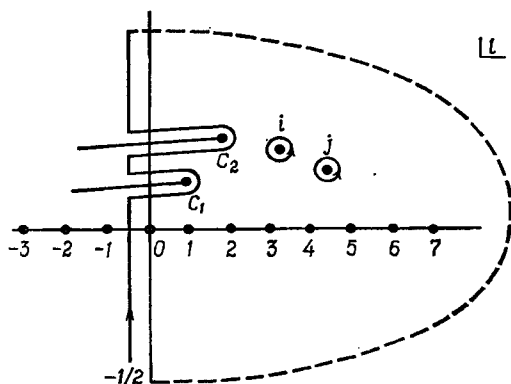
Таким образом, если $\text{Re} \{ \alpha_M(s) \} > -1/2$, то вследствие неравенства $\text{Re} \{ \alpha_M(s) \} > L_2$ (см. фиг. II.10) основной вклад в асимптотику в формуле (9.5) дает второе слагаемое, и мы имеем

$$A^\pm(s, t) \underset{zs \rightarrow \infty}{\sim} z_s^{\text{Re} \{ \alpha_M(s) \}}. \quad (9.8)$$

Поскольку $\alpha_M(s)$ является самой правой сингулярностью в l -плоскости, полученный результат можно отождествить с асимптотическим поведением, определяющим сходимость интеграла (6.5), т. е.

$$\text{Re} \{ \alpha_M(s) \} = l_M(s).$$

С другой стороны, если сингулярностью, которая пересекается контуром при его деформации, является точка ветвления $\alpha_c(s)$, то в l -плоскости можно провести разрез, идущий в отрицательном направлении



Ф и г. II.11. Контур интегрирования, соответствующий выражению (9.10) (указаны два полюса i и j и два разреза C_1 и C_2).

оси $\text{Re } l$, как это показано на фиг. II. 11. В этом случае амплитуда дается выражением

$$A^\pm(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{C_3} (2l + 1) A^\pm(s, l) \frac{P_l(-z_s)}{\sin \pi l} dl, \quad (9.9)$$

и ее асимптотическое поведение с точностью до логарифмических множителей имеет вид

$$A^\pm(s, t) \underset{zs \rightarrow \infty}{\sim} z_s^{\text{Re} \{ \alpha_C(s) \}}.$$

Насколько известно, единственными сингулярностями амплитуды в l -плоскости должны быть, по-видимому, полюса и разрезы. Вследствие соотношения (9.7) вклад от вертикального участка контура интегрирования можно сделать минимальным, отодвинув его до пря-

мой $\text{Re } l = -1/2$ (фиг. II.11). Тогда получим

$$\begin{aligned}
 A^\pm(s, t) = & -\frac{16\pi}{2i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2l+1) A^\pm(s, l) \frac{P_l(-z_s)}{\sin \pi l} dl - \\
 & - \sum_i \quad (по \text{ полюсам}) \quad 16\pi^2 [2\alpha_i(s) + 1] \beta_i(s) \frac{P_{\alpha_i(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_i(s)} - \\
 & - \sum_j \quad (по \text{ разрезам}) \quad \frac{16\pi}{2i} \int_{C_j} (2l+1) A^\pm(s, l) \frac{P_l(-z_s)}{\sin \pi l} dl. \quad (9.10)
 \end{aligned}$$

Первый член, так называемый «фоновый интеграл», при $z_s \rightarrow \infty$ обращается в нуль вследствие (9.7), и остается сумма «полюсов Редже» и «разрезов Редже», которая представляет собой расходящуюся (по z_s или t) часть амплитуды. Как было доказано Редже в его основополагающих работах [346, 347, 66], в потенциальном рассеянии разрезы отсутствуют, а имеются только полюса. Однако в случае релятивистского рассеяния следует ожидать появления также и разрезов. Причины появления и свойства этих разрезов рассматриваются в гл. V. В последующей части данной главы мы будем говорить главным образом о полюсах. Полюса в l -плоскости приводят к тому, что и амплитуда $A^\pm(s, t)$ в s -плоскости также содержит полюса. Они возникают при таких значениях $s = s_R$, когда $\alpha_i(s_R)$ равно целому числу; это связано с тем, что $\sin |\pi \alpha_i(s)| \rightarrow 0$ при $s \rightarrow s_R$. Функцию $\alpha_i(s)$ называют «траекторией Редже». Ограничение Фруассара требует, чтобы для всех траекторий при $s \leq 0$ выполнялось неравенство $\alpha_i(s) \leq 1$.

Если предположения, которые использовались при выводе (9.10), правильны, т. е. парциальная амплитуда действительно аналитична в правой полуплоскости переменной l , имея здесь только изолированные сингулярности, то проекцию Грибова — Фруассара можно продолжить даже левее прямой $\text{Re } l = l_M(s)$. Если в (6.5) подставить первый член выражения (9.10), то интеграл будет существовать при $\text{Re } l > -1/2$. Проблема, таким образом, заключается в расходимости вкладов от полюсов и разрезов. Сконцентрировав для простоты все внимание на полюсах, заметим, что одиночная траектория Редже $\alpha(s)$ дает следующий вклад в амплитуду:

$$A_R^\pm(s, t) = -16\pi^2 [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \frac{P_{\alpha(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha(s)}. \quad (9.11)$$

Соответствующий скачок по переменной t можно получить, если вспомнить, что, согласно (B1.3.2.10),

$$\text{Im}[P_\alpha(z)] = \begin{cases} -P_\alpha(-z) \sin \pi \alpha & \text{при } z < -1, \\ 0 & \text{при } z \geq -1, \end{cases} \quad (9.12)$$

так что

$$D_{Rt}^{\pm}(s, t) = 16\pi^2 [2\alpha(s) + 1] \beta(s) P_{\alpha(s)}(z_s), \quad z_s > 1. \quad (9.13)$$

Конечно, в действительности $D^{\pm}(s, t)$ становится отличным от нуля не при $z_s = 1$, а в точке $z_s = z_s(s, t_0)$ (см. фиг. II.1), но, как будет показано в гл. III, в области $1 < z_s < z_s(s, t_0)$ этот скачок компенсируется соответствующим членом фонового интеграла. Здесь же нас интересует лишь поведение при больших z_s , благодаря которому и возникает сингулярность. Если подставить (9.13) в (6.5) и воспользоваться тем, что, согласно (B1,3.12.4),

$$\int_1^{\infty} P_{\alpha}(z) Q_l(z) dz = \frac{1}{(l-\alpha)(l+\alpha+1)}, \quad (9.14)$$

то получим

$$A_{R}^{\pm}(s, l) = \frac{[2\alpha(s) + 1] \beta(s)}{[l - \alpha(s)][l + \alpha(s) + 1]}. \quad (9.15)$$

Итак, если использовать соотношение (6.5) для продолжения амплитуды $A^{\pm}(s, l)$ в область, лежащую левее прямой $l_M(s)$, то для каждой траектории будут возникать полюса этой функции по переменной s при таких $s = s_R$, что $\alpha(s_R) = l$, где l — целые числа. Поскольку $D_t^{\pm}(s, t)$ не имеет полюсов по s , такие сингулярности $A^{\pm}(s, l)$ может породить только расходимость интеграла (6.5).

Таким образом, мы видим, что гипотеза, согласно которой амплитуду рассеяния можно продолжить по угловому моменту, сформулированная в гл. I в виде постулата 6; определяет вычитания, необходимые при написании мандельштамовского представления. Если окажется, что [ср. с (9.13)]

$$D_t^{\pm}(s, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \Gamma_i(s) t^{\alpha_i(s)}, \quad (9.16)$$

то вычитание будет соответствовать полюсу Редже типа (9.11). Этот полюсной член соответствует вычитательному члену $F^{N-1}(s, z_s)$ в (6.3), который до сих пор был произвольным. В общем случае, конечно, в правой полуплоскости углового момента имеется несколько полюсов и разрезов, и в асимптотике содержится целая совокупность членов, подобных (9.16). Однако, по крайней мере в принципе, если имеется достаточно точная информация об асимптотическом поведении амплитуды, то мы сможем определить последовательно каждую из сингулярностей. Выводы, которые отсюда следуют, рассматриваются более подробно в гл. VI, но уже сейчас очевидно, что произвольные вычитания более не допустимы. Действительно, предположим, что в соотношении (6.3) мы положили $N = 1$, что приводит к появлению произвольной функции $F^0(s)$. Эта функция, будучи независимой от t , дает вклад только в S -волну, т. е. в амплитуду $A_0^{\pm}(s)$, и может быть записана как $F^0(s) \delta_{l,0}$. Аналогично при $N = 2$ получим полином

первой степени по l , который дает вклад только в S - и P -волны, и т. д. Таким образом, произвольные вычитания соответствуют дельта-символам Кронекера в l -плоскости, и ясно, что подобные члены исключаются принятым постулатом аналитичности. Низшие парциальные волны должны получаться посредством аналитического продолжения высших парциальных волн, которые уже известны из (6.5), и асимптотическое поведение амплитуды должно быть таким же, как и асимптотическое поведение скачка.

С помощью преобразования Зоммерфельда — Ватсона можно также показать другим способом, почему теорема Карлсона обеспечивает однозначность интерполяции по значениям при целых l . Действительно, предположим противное, т. е. что имеются две функции, $A^\pm(s, l)$ и $A_1^\pm(s, l)$, которые равны при всех целых значениях $l > l_M(s)$ и ограничены условием (8.3). Тогда можно построить еще одну функцию

$$A_2^\pm(s, l) = A^\pm(s, l) + \frac{A^\pm(s, l) - A_1^\pm(s, l)}{l - l_1}$$

(l_1 — некоторое произвольное число), которая при целых l равна $A^\pm(s, l)$ и также удовлетворяет условию (8.3). Однако если для функции $A^\pm(s, l)$ совершить преобразование Зоммерфельда — Ватсона, взяв в качестве ее парциальных амплитуд $A_2^\pm(s, l)$, то дополнительный полюс при l_1 даст в $A^\pm(s, l)$ член, который при $z \rightarrow \infty$ ведет себя как z^{l_1} . Поскольку l_1 произвольно, такая ситуация невозможна, и единственный способ избежать ее заключается в том, чтобы положить $A^\pm(s, l_1) = A_1^\pm(s, l_1)$ при всех $l_1 > l_M(s)$. Итак, функция $A^\pm(s, l)$ единственна.

После этого рассмотрения, носящего математический характер, в следующем параграфе мы приступим к выяснению физического смысла максимальной аналитичности второй степени.

§ 10. ПОЛЮСА РЕДЖЕ

Характерный вид траекторий, полученных в теории потенциального рассеяния, которого можно ожидать также в физике релятивистских частиц (некоторые примеры можно найти в работе [285]¹⁾), показан на фиг. II.12; каждая из них дает в $A^\pm(s, t)$ вклад, определяемый формулой (9.11). Вспоминая, что четная часть функции $A(s, t)$ содержится в A^+ , а нечетная — в A^- , получаем, что вклад в физическую амплитуду равен [см. (2.4)]

$$A(s, t) = -16\pi^2 [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \frac{P_\alpha(-z_s) \pm P_\alpha(z_s)}{\sin \pi\alpha(s)}, \quad (10.1)$$

причем знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, какой функции, A^+ или A^- , соответствует траектория, т. е. имеет ли

¹⁾ См. также А. А h m a d z a d e h, Ph. D. Thesis, University of California, UCRI-11096, 1963.

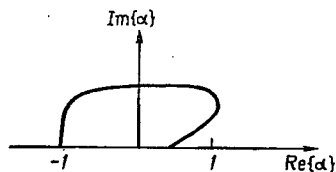
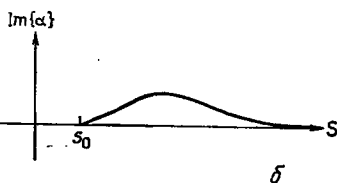
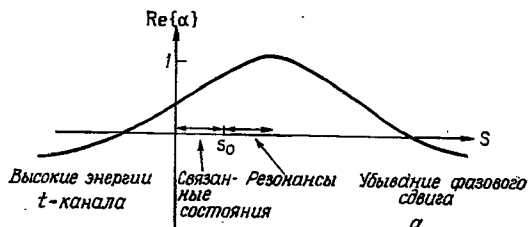
она положительную или отрицательную «сигнатуру». Поскольку, согласно (В1,3.2.10),

$$P_{\alpha}(-z) = e^{-i\pi\alpha} P_{\alpha}(z) - \frac{2}{\pi} \sin \pi\alpha \cdot Q_{\alpha}(z), \quad (10.2)$$

формулу (10.1) можно переписать в более удобном виде

$$A(s, t) = -16\pi^2 [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \times \\ \times \left\{ [1 \pm e^{-i\pi\alpha(s)}] \frac{P_{\alpha}(-z_s)}{\sin \pi\alpha(s)} \mp \frac{2}{\pi} Q_{\alpha}(-z_s) \right\}. \quad (10.3)$$

Множитель $[1 \pm e^{-i\pi\alpha(s)}]$ называется «сигнатурным множителем». Его присутствие означает, что данная траектория дает полюсный вклад



Ф и г. П.12. Поведение типичной траектории.

На верхнем рисунке указан физический смысл отдельных участков графика функций $\text{Re } \alpha$. Предельные значения наиболее высоких траекторий $\alpha (\pm \infty)$ в теории потенциального рассеяния равны -1 .

в физическую амплитуду только при чередующихся целых значениях: при четных l в случае положительной сигнатуры и при нечетных l в случае отрицательной сигнатуры. Слагаемое с Q_{α} , очевидно, не сингулярно, и так как, согласно (12.8), $Q_{\alpha}(z) \sim z^{-\alpha-1}$, в асимптотике оно роли не играет. Однако мы будем продолжать пользоваться главным образом функциями $A^{\pm}(s, t)$, обращаясь к $A(s, t)$ лишь в тех случаях, когда желательно провести сравнение с экспериментом.

Чтобы найти вклад полюса Редже в парциальную амплитуду, подставим (9.11) в (3.7) и воспользуемся формулой (B1,3.12.7)

$$\frac{1}{2} \int_{-1}^1 P_{\alpha}(-z) P_l(z) dz = \frac{1}{\pi} \frac{\sin \pi \alpha}{(\alpha-l)(\alpha+l+1)}, \quad (10.4)$$

где l — целое, а α — любое число. В результате получим [111]

$$A_l^{\pm}(s) = \frac{[2\alpha(s)+1]\beta(s)}{[l-\alpha(s)][l+\alpha(s)+1]},$$

т. е. (9.15). Свойства функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$ рассматриваются в гл. III; следует ожидать, что $\alpha(s)$ является вещественно-аналитической функцией¹⁾ от s с точкой ветвления на пороге s_0 , как это показано на фиг. II.12. Поэтому при вещественных s функцию α можно разделить на вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \alpha(s) &= \alpha_R(s) + i\alpha_I(s), \\ \alpha_I(s) &= 0 \quad \text{при } s < s_0 \text{ (} s \text{ вещественно)}. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Далее, если, как и в предыдущем параграфе, выбрать такое s_R , что $\alpha_R(s_R) = l$, где l — целое число, и разложить α_R в окрестности точки s_R :

$$\alpha(s) = l + \alpha'_R(s_R)(s - s_R) + \dots + i\alpha_I(s_R), \quad (10.6)$$

то из (9.15) получим

$$A_l^{\pm}(s) \approx \frac{\beta(s_R)}{\alpha'(s_R)(s_R - s) - i\alpha_I(s_R)} \quad \text{при } s \approx s_R. \quad (10.7)$$

Подставляя $s = E^2$, где E — полная энергия в системе центра масс, и $s_R = M^2$, будем иметь

$$A_l^{\pm}(s) \approx \frac{\beta(M^2)/2M\alpha'_R(M^2)}{(M-E) - i[\alpha_I(M^2)/\alpha'_R(M^2)2M]}.$$

Это соответствует брейт-вигнеровскому резонансу с массой M и шириной

$$\Gamma = \frac{\alpha_I(M^2)}{\alpha'_R(M^2)M}$$

[ср. с (I.8.1)]. При $s < s_0$, когда $\alpha_I = 0$, получаем полюс, соответствующий связанному состоянию.

Итак, мы видим, что полюса, отвечающие связанным состояниям и резонансам, имеют совершенно одинаковую природу. Единственное различие между ними заключается в том, что первые появляются,

¹⁾ Вещественно-аналитические функции часто называют также вещественно определенными аналитическими функциями. — *Прим. ред.*

когда траектория проходит через соответствующие (т. е. четные или нечетные, в зависимости от сигнатуры) целые значения при s , лежащих ниже порога, а последние — при s , лежащих выше порога. На одной траектории может быть расположено, например, связанное состояние спина нуль и резонанс спина два. Раньше уже отмечалось, что ограничение Фруассара требует, чтобы при $s \leq 0$ для всех траекторий выполнялось неравенство $\alpha(s) \leq 1$. Однако при $s > 0$ траектории могут достигать и более высоких значений углового момента, причем каждому из чередующихся целых чисел будет соответствовать частица, а фазовый сдвиг в этих точках будет проходить последовательно через $\pi/2$, $3\pi/2$, При уменьшении α в области более высоких энергий (см. фиг. II.12) эта функция также принимает всевозможные целочисленные значения, которым отвечают фазовые сдвиги, проходящие последовательно через . . . , $3\pi/2$, $\pi/2$; конечно, такие точки не соответствуют частицам. Максимальная аналитичность второй степени делает все частицы равноправными: все они являются составными — стабильный нуклон в такой же степени, как и нестабильный резонанс N^* или стабильный дейтрон, который всегда считался составным [109, 62, 182, 98].

Таким образом, оказывается, что ответ на вопрос, существуют ли или нет элементарные (несоставные) частицы, тесно связан со справедливостью постулата 6. Эта связь рассматривается в гл. VI, VII, но, по-видимому, если бы удалось установить, что все частицы действительно лежат на траекториях Редже и что постулат 6 справедлив, то ни одна из частиц не могла бы считаться элементарной. В гл. VIII приводятся экспериментальные свидетельства в пользу последнего утверждения.

Поведение траекторий при $s < 0$ также очень важно с физической точки зрения, так как эта область (или ее аналог для кинематики частиц с неравными массами, см. гл. I, § 6) соответствует физической области t -канала. В предыдущем параграфе отмечалось, что, согласно (9.11), траектория Редже дает в асимптотическое поведение амплитуды вклад

$$A^{\pm}(s, t) \sim t^{\alpha(s)}.$$

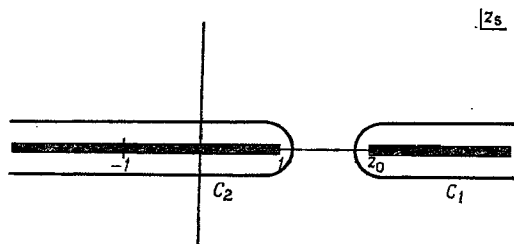
Если α — правая сингулярность в l -плоскости, то эта формула описывает асимптотическое поведение амплитуды рассеяния в t -канале. В гл. VIII будет показано, что для нескольких процессов такая связь между полюсами Редже в s -канале и асимптотическим поведением в t -канале оправдывается достаточно хорошо. Это обстоятельство является наиболее сильным подтверждением и вообще основным достижением теории Редже. Наоборот, выяснение характера асимптотического поведения амплитуды рассеяния в t -канале позволяет определить сингулярности в l -плоскости при $s < 0$.

Физический смысл различных участков траектории указан на фиг. II.12.

§ 11. СИНГУЛЯРНОСТИ ПАРЦИАЛЬНЫХ АМПЛИТУД ПРИ НЕЦЕЛЫХ l

В § 4 рассматривались сингулярности по переменной s , которыми обладают амплитуды $A_l^\pm(s)$ при целых l , и было показано, что в дополнение к правосторонним сингулярностям, соответствующим полюсам и порогам s -канала, существуют также и левосторонние сингулярности, обусловленные точками ветвления функции $Q_l(z)$ при $z = \pm 1$. При нецелых l левосторонние сингулярности усложняются, так как в этом случае $Q_l(z)$ имеет четыре точки ветвления, и наряду с разрезом от -1 до $+1$ следует провести также разрез между $z = -\infty$ и $z = -1$.

Оба выражения (3.9) для проекций на парциальные волны по-прежнему справедливы, но теперь контур C_2 должен охватывать всю веще-



Ф и г. II.13. Контурсы интегрирования в комплексной z_s -плоскости, соответствующие выражению (3.9) с комплексным l (ср. фиг. II.2).

ственную ось z от $z = -\infty$ до $z = 1$ (фиг. II.13). Из (B1,3.3.11—12) следует, что мнимая часть функции $Q_l(z)$ [ср. (3.8)]

$$\operatorname{Im} \{Q_l(z)\} = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} P_l(z) & \text{при } -1 < z < 1, \\ \sin \pi l \cdot Q_l(-z) & \text{при } -\infty < z < -1, \end{cases} \quad (11.1)$$

так что выражения для $A_l^\pm(s)$ принимают вид [ср. (3.6), (3.7)]

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} D_l^\pm(s, t') Q_l(z') dz', \quad (11.2)$$

$$A_l^\pm(s) = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^1 P_l(z') A^\pm(s, t') dz' - \frac{\sin \pi l}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{-1} Q_l(-z') A^\pm(s, t') dz'. \quad (11.3)$$

Однако если вместо $A_l^\pm(s)$ рассматривать функции $B_l^\pm(s)$, определяемые формулой (5.17), то дополнительный разрез по s , возникающий при $z < -1$, исчезнет. Действительно, из (B1, 3.2.12) имеем

$$Q_l(-z \pm i\varepsilon) = -e^{\mp i\pi l} Q_l(z) \quad \text{при } z > 1. \quad (11.4)$$

Кроме того,

$$(q_{s12}q_{s34})^{-l} = e^{\mp i\pi l} (-q_{s12}q_{s34})^{-l}. \quad (11.5)$$

Поэтому при $t > 0$, когда вследствие (I.6.14) значению $s \pm i\varepsilon$ соответствует $z \pm i\varepsilon$, получаем выражение

$$\frac{Q_l(z \pm i\varepsilon)}{(q_{s12}q_{s34} \pm i\varepsilon)^l} = -\frac{Q_l(-z)}{(-q_{s12}q_{s34})^l}, \quad (11.6)$$

которое при $z < -1$ не имеет разреза.

С другой стороны, согласно (B1, 3.2.10), при $-1 < z < 1$

$$\sin \pi l \cdot Q_l(z \pm i\varepsilon) = \frac{\pi}{2} [e^{\mp i\pi l} P_l(z) - P_l(-z)],$$

но в области $-1 < z < 1$ $P_l(z)$ не имеет разреза, так что

$$\frac{Q_l(z + i\varepsilon)}{(q_{s12}q_{s34} + i\varepsilon)^l} - \frac{Q_l(z - i\varepsilon)}{(q_{s12}q_{s34} - i\varepsilon)^l} = \frac{i\pi P_l(-z)}{(-q_{s12}q_{s34})^l}.$$

В соответствии с (11.2) имеем

$$B_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_s(s, t_0)} D_l^\pm(s, t') Q_l(z') dz' \frac{1}{(q_{s12}q_{s34})^l}. \quad (11.7)$$

В этот интеграл входят только значения $t > 0$. В скачок на левом разрезе дают вклад как скачок функции $Q_l(z_s)$, так и скачок функции $D_l^\pm(s, t)$ в области отрицательных s . Из (11.1) и (2.8) получаем

$$\begin{aligned} \text{Im} \{B_l^\pm(s)\}_{\text{л. п}} &= \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{z_s(s, t_0)} P_l(-z') D_l^\pm(s, t') dz' \frac{1}{(-q_{s12}q_{s34})^l} + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \int_{a(s)}^{b(s)} Q_l(z') [\rho_{tu}(t', u') \pm \rho_{tu}(u', t')] dz' \frac{1}{(q_{s12}q_{s34})^l}, \end{aligned} \quad (11.8)$$

где $u' + t' + s = \Sigma$, а dz' связано с dt' соотношением (I.6.14). Областью интегрирования во втором слагаемом является такая область, в которой при заданном s двойные спектральные функции не равны нулю. Если воспользоваться формулой (8.4) и учесть, что взаимная замена t' и u' эквивалентна изменению знака z' , то получим

$$\begin{aligned} \text{Im} \{B_l^\pm(s)\}_{\text{л. п}} &= \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{z_s(s, t_0)} P_l(-z') D_l^\pm(s, t') dz' \frac{1}{(-q_{s12}q_{s34})^l} + \\ &+ \frac{1}{16\pi^2} \int_{a(s)}^{b(s)} Q_l(z') (1 \mp e^{-i\pi l}) \rho_{tu}(t', u') dz' \frac{1}{(q_{s12}q_{s34})^l}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

При физических значениях l последнее слагаемое вклада не дает, и мы снова приходим к (4.6). Скачок на правом разрезе возникает просто из скачков функции $D_i^\pm(s, t)$, так что из (2.8) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{B_i^\pm(s)\}_{\text{п. п}} &= \frac{1}{16\pi^2} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} [\rho_{st}(s, t') \pm \rho_{su}(s, t')] \times \\ &\times Q(z') dz' \frac{1}{(q_{s12}q_{s34})^l}. \end{aligned} \quad (11.10)$$

Более подробное обсуждение связи между сингулярностями в z -плоскости и сингулярностями по переменным s и t мы отложим до гл. III.

§ 12. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ МАНДЕЛЬСТАМА — ЗОММЕРФЕЛЬДА — ВАТСОНА

Вследствие асимптотического поведения $P_l(z)$, которое дается формулой (9.7), при перемещении контура интегрирования в область $\operatorname{Re} l < -1/2$ фоновый интеграл начинает преобладать над сингулярностями правой полуплоскости переменной l при больших z_s . С другой стороны, согласно (B1, 3.3.1),

$$P_\alpha(z) = P_{-\alpha-1}(z);$$

поэтому для каждой траектории α мы получаем весьма нежелательную связанную с ней траекторию $-\alpha - 1$. Мандельстам [291] показал, как можно преодолеть эти трудности, и установил, что при больших z_s преобладают все же сингулярности правой полуплоскости, даже если фоновый интеграл берется вдоль прямой $\operatorname{Re} l < -1/2$. Особенно важно, что это справедливо и для случая, когда внешние частицы обладают спином (см. гл. IV).

Использованный Мандельстамом [291] прием основан на том, что, во-первых, (1.3) переписывается в виде

$$\begin{aligned} A^\pm(s, t) &= 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ (2l+1) A^\pm(s, l) P_l(z_s) + \right. \\ &+ \frac{1}{\pi} (-1)^{l-1} (2l) A^\pm\left(s, l - \frac{1}{2}\right) Q_{l-1/2}(z_s) \left. \right\} - \\ &- 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} (-1)^{l-1} (2l) A^\pm\left(s, l - \frac{1}{2}\right) Q_{l-1/2}(z_s). \end{aligned} \quad (12.1)$$

Очевидно, что первые члены (с $l=0$) в дополнительных суммах равны нулю, но для упрощения записи их удобно сохранить.

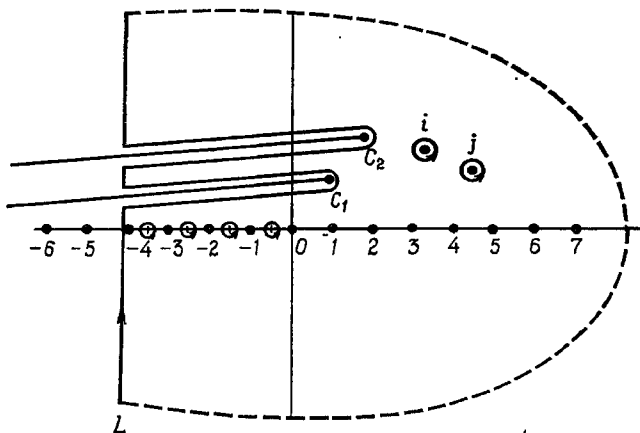
Далее, согласно (B1, 3.3.3),

$$\frac{P_l(z)}{\sin \pi l} - \frac{1}{\pi} \frac{Q_l(z)}{\cos \pi l} = -\frac{1}{\pi} \frac{Q_{-l-1}(z)}{\cos \pi l}, \quad (12.2)$$

а полюса функции $(\cos \pi l)^{-1}$ возникают, конечно, при полуцелых l , так что над членом, заключенным в (12.1) в фигурные скобки, можно произвести преобразование Зоммерфельда—Ватсона (9.10). В результате получим

$$\begin{aligned}
 A^{\pm}(s, t) = & \frac{16}{2i} \int_{-1/2+\varepsilon-i\infty}^{-1/2+\varepsilon+i\infty} (2l+1) A^{\pm}(s, l) \frac{Q_{-l-1}(-z_s)}{\cos \pi l} dl + \\
 & + \sum_{i \text{ (по полюсам)}} 16\pi [2\alpha_i(s) + 1] \beta_i(s) \frac{Q_{-\alpha_i(s)-1}(-z_s)}{\cos \pi \alpha_i(s)} + \\
 & + \sum_{j \text{ (по разрезам)}} \frac{16}{2i} \int_{c_j} (2l+1) A^{\pm}(s, l) \frac{Q_{-l-1}(-z_s)}{\cos \pi l} dl - \\
 & - 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{\pi} (-1)^{l-1} (2l) A^{\pm}\left(s, l - \frac{1}{2}\right) Q_{l-1/2}(-z_s), \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.
 \end{aligned} \tag{12.3}$$

Участок контура, по которому берется фоновый интеграл, выбирается несколько правее прямой $\operatorname{Re} l = -1/2$, чтобы избежать появ-



Ф и г. II.14. Контур интегрирования, соответствующий выражению (12.4) с сингулярностями в l -плоскости, показанными на фиг. II.11 (здесь возникают дополнительные полюса при отрицательных полуцелых значениях углового момента).

ления полюса у $(\cos \pi l)^{-1}$. Однако если теперь сдвинуть его влево до некоторого $L < -1/2$, как показано на фиг. II.14, то нужно будет обойти дополнительные полюса при $l = l' \equiv -1/2, -3/2, \dots$;

поэтому (12.3) примет вид

$$\begin{aligned}
 A^{\pm}(s, t) = & \frac{16}{2i} \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} (2l+1) A^{\pm}(s, l) \frac{Q_{-l-1}(-z_s)}{\cos \pi l} dl + \sum_i + \\
 & \text{(по полюсам)} \\
 + & \sum_j \text{(по разрезам)} - 16\pi \sum_{l'=-L'}^{-1/2} (2l'+1) A^{\pm}(s, l') Q_{-l'-1}(-z_s) \frac{(-1)^{l'-1/2}}{\pi} - \\
 & - 16\pi \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\pi} (2l) A^{\pm}\left(s, l-\frac{1}{2}\right) Q_{l-1/2}(-z_s), \quad (12.4)
 \end{aligned}$$

где l' — ближайшее к L полуцелое значение, лежащее справа от него.

Заменяя теперь в четвертом члене правой части индекс суммирования l' на $l = -l' - 1/2$, получаем

$$16\pi \sum_{l=0}^{L'-1/2} \frac{(-1)^{l-1}}{\pi} (-2l) A^{\pm}\left(s, -l-\frac{1}{2}\right) Q_{l-1/2}(-z_s). \quad (12.5)$$

Если

$$A\left(s, l-\frac{1}{2}\right) = A\left(s, -l-\frac{1}{2}\right) \text{ при целых } l, \quad (12.6)$$

т. е. если для полуцелых значений l амплитуда симметрична относительно точки $l = -1/2$, то выписанный член сокращается с первыми $L' - 1/2$ слагаемыми последней суммы, входящей в (12.4). Известно, что это свойство симметрии имеет место во многих задачах потенциального рассеяния. Оно будет справедливо также и для сильных взаимодействий, поскольку для соответствующих значений l можно воспользоваться представлением Грибова — Фруассара, а затем вывести необходимое соотношение с помощью (B1, 3.3.3). Итак, окончательно получаем

$$\begin{aligned}
 A^{\pm}(s, t) = & \frac{16}{2i} \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} (2l+1) A^{\pm}(s, l) \frac{Q_{-l-1}(-z_s)}{\cos \pi l} dl + \sum_i + \\
 & \text{(по полюсам)} \\
 + & \sum_j \text{(по разрезам)} - \sum_{L'+1/2}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\pi} (2l) A\left(s, -l-\frac{1}{2}\right) Q_{l-1/2}(-z_s). \quad (12.7)
 \end{aligned}$$

Преимущество этого представления, содержащего функции $Q_{-l-1}(-z_s)$, по сравнению с (9.10) заключается в следующем. Поскольку, согласно (B1, 3.2.41),

$$Q_l(z) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} (2z)^{-l-1} F\left(\frac{l}{2}+1, \frac{l}{2}+\frac{1}{2}, l+\frac{3}{2}, \frac{1}{z^2}\right), \quad (12.8)$$

мы имеем

$$Q_l(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(l+1)}{\Gamma(l+3/2)} (2z)^{-l-1}; \quad (12.9)$$

поэтому первый и последний члены в (12.7) заведомо убывают как z^L для $L < -1/2$; в то же время член, соответствующий полюсу Редже $l = \alpha_i(s)$ (или разрезу), по-прежнему дает вклад, который при больших z_s ведет себя как $z_s^{\operatorname{Re}\{\alpha_i(s)\}}$. Полюса на s -плоскости в этом представлении соответствуют полюсам функции $Q_{-\alpha-1}(-z_s)$, где $(-\alpha-1)$ равно отрицательным целым числам. Полюса при полуцелых значениях α , появляющиеся в тех случаях, когда $\cos \pi\alpha$ обращается в нуль, являются, конечно, ложными. Это очевидно из того, что мы просто заменили $P_\alpha(-z_s)/\sin \pi\alpha$ выражением

$$\frac{Q_\alpha(-z_s)}{\pi \cos \pi\alpha} - \frac{Q_{-\alpha-1}(-z_s)}{\pi \cos \pi\alpha},$$

в котором полюса сокращаются. При положительных значениях α эти полюса сокращаются с полюсами функции $\Gamma(-\alpha + 1/2)$, фигурирующей в (12.9). При отрицательных значениях α условие симметрии (12.6) приводит к тому, что β равно нулю.

В следующей главе мы рассмотрим связь между описанными методами, позволяющими выразить амплитуду через ее сингулярности в l -плоскости, и мандельштамовским представлением.

ПОЛЮСА РЕДЖЕ
И МАНДЕЛЬСТАМОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

§ 1. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА РЕДЖЕВСКИХ ФУНКЦИЙ

В этой главе будет показано, как объединить реджевское разложение амплитуды, описанное в гл. II, с мандельштамовским представлением, введенным в гл. I. Непосредственным следствием такого объединения является возможность установить аналитические свойства функций, связанных с полюсом Редже, т. е. траектории $\alpha(s)$ и вычета $\beta(s)$. Соответствующие результаты весьма сходны с теми, которые были получены в теории потенциального рассеяния [66] (см. также [315, 368]).

Используя представление (II.6.5), можно записать [56, 320]

$$A_l^\pm(s) = E_l^\pm(s) + F_l^\pm(s), \quad (1.1)$$

где

$$E_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\pi} \int_T^\infty Q_l(z') D_l^\pm(s, t') dt', \quad (1.2)$$

а $F_l^\pm(s)$ задается тем же интегралом, но с пределами от t_0 до T . Поскольку функция $F_l^\pm(s)$ определена с помощью конечного интеграла, она должна быть голоморфной при $\text{Re } l > -1$ и иметь простые полюса при отрицательных целых значениях l , ибо именно таким поведением обладает $Q_l(z)$. Все другие сингулярности $A_l^\pm(s)$ в l -плоскости возникают из-за асимптотического поведения подынтегрального выражения в (1.2) по переменной t (см. гл. II, § 9), и поэтому они будут содержаться в $E_l^\pm(s)$. Конкретнее, если

$$D_l^\pm(s, t) \sim t^{\alpha(s)},$$

то, учитывая (II.12.9)

$$Q_l(z) \sim t^{-l-1},$$

мы имеем

$$E_l^\pm(s) \sim \int_T^\infty t^{-l-1+\alpha(s)} dt = -\frac{e^{[\alpha(s)-l]T}}{\alpha(s)-l}, \quad (1.3)$$

что дает полюс при $l = \alpha(s)$. С другой стороны, если функция $D_l^\pm(s, t)$ не просто полиномиально ограничена, а содержит логарифмические

множители, то они приводят к появлению точек ветвления по l . В данной главе все внимание будет сосредоточено на полюсах.

Положение полюса определяется уравнением

$$[E_l^\pm(s)]^{-1} = 0 \quad \text{при} \quad l = \alpha(s), \quad (1.4)$$

но так как $E_l^\pm(s)$ сингулярна на пороге, удобнее использовать «приведенную» амплитуду (II.5.17) и написать

$$[q_{s12}q_{s34}]^l [E_l^\pm(s)]^{-1} = 0 \quad \text{при} \quad l = \alpha(s). \quad (1.5)$$

Соответственно, если воспользоваться теоремой Коши, то вычет в полюсе, который определяется формулой (II.9.4), равен

$$\beta(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint dl E_l^\pm(s), \quad (1.6)$$

или, вводя

$$\gamma(s) \equiv \beta(s) [q_{s12}q_{s34}]^{-l}, \quad (1.7)$$

получаем

$$\gamma(s) = \frac{1}{2\pi i} \oint dl [q_{s12}q_{s34}]^{-l} E_l^\pm(s), \quad (1.8)$$

где интеграл берется по контуру, окружающему точку $l = \alpha(s)$. Соотношения (1.5) и (1.8) позволяют установить аналитические свойства $\alpha(s)$ и «приведенного вычета» $\gamma(s)$ по s .

Если $\text{Re } l > \text{Re } \alpha_M(s)$, где $\alpha_M(s)$ — самая правая сингулярность в l -плоскости (см. гл. II, § 9), то интеграл (1.2) сходится. Поэтому функция $E_l^\pm(s) [q_{s12}q_{s34}]^{-l}$ имеет в s -плоскости сингулярности такого же типа, как и те, которые рассматривались в гл. II, § 11 при анализе полной парциальной амплитуды. Эти сингулярности представляют собой правый разрез при $s > s_0$ и левый разрез, скачки на которых даются формулами (II.11.10) и (II.11.9). Однако поскольку интегрирование (в 1.2) ведется не от t_0 , а от $t = T$, левосторонней точкой ветвления при больших T будет $s \approx -T$. Точное положение этой точки можно найти, подставляя в (II.4.3) $t_n = T$ и выбирая в правой части знак минус. В качестве T можно взять сколь угодно большое число, отодвигая тем самым левый разрез функции $E_l^\pm(s)$ как угодно далеко к $-\infty$. Это означает, что среди сингулярностей функций $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$, возникающих благодаря сингулярностям $E_l^\pm(s)$, не содержатся левосторонние точки ветвления парциальной амплитуды. В этом можно убедиться и другим способом, замечая, что при $\text{Re } l > -1$ скачок на левом разрезе (II.11.9) является голоморфной функцией, и поэтому он не может привести к появлению сингулярностей $E_l^\pm(s)$ в этой области l -плоскости.

Таким образом, все имеющие в данном случае значение сингулярности функции $E_l^\pm(s)$ расположены при $s > s_0$. Если теперь продолжить ее по l в область $\text{Re } l < \text{Re } \alpha_M(s)$, используя для этого процедуру аналитического продолжения выражения (1.2), описанную в гл. II, § 9, то появятся новые сингулярности $E_l^\pm(s)$. Однако в s -плоскости не будет никаких сингулярностей, не зависящих от l , так как в противном случае они появились бы скачком при $\text{Re } l = \text{Re } \alpha_M(s)$, что противоречит теоремам о продолжении функций двух комплексных переменных (см. [320]). Единственными новыми сингулярностями $E_l^\pm(s)$ будут сингулярности реджевского типа, которые определяются, например, (1.5).

Далее, согласно теореме о неявных функциях, если $[E_l^\pm(s)]^{-1}$ регулярна в окрестности точки $s = s_p$, причем $l = \alpha(s_p) \equiv \alpha_p$, и если

$$\frac{\partial}{\partial l} [E_l^\pm(s_p)]^{-1} \Big|_{l=\alpha_p} \neq 0, \quad (1.9)$$

то функция $\alpha(s)$ также регулярна в окрестности s_p . Действительно, функцию $[E_l^\pm(s)]^{-1}$ можно разложить в ряд Тейлора относительно точки s_p [93]:

$$[E_l^\pm(s)]^{-1} = a[\alpha(s) - \alpha_p] + b(s - s_p) + c[\alpha(s) - \alpha_p]^2 + d(s - s_p)^2 + \dots \quad (1.10)$$

Если $a \neq 0$, то из (1.5) мы будем иметь

$$\alpha(s) = \alpha_p - \left(\frac{b}{a}\right)(s - s_p) + \dots,$$

т. е. $\alpha(s)$ аналитична вблизи s_p . Однако если $a = 0$ [т. е. условие (1.9) не выполняется], а $c \neq 0$, то

$$\alpha(s) = \alpha_p \pm \left(-\frac{b}{c}\right)^{1/2} (s - s_p)^{1/2} + \dots,$$

так что имеются две траектории, пересекающиеся в точке $s = s_p$, которая будет точкой ветвления каждой из них. Однако если при этом и $b = 0$, то существование точки ветвления не обязательно. Таким образом, если две траектории пересекаются, то в принципе может появиться точка ветвления функции $\alpha(s)$, но она появляется не во всех случаях.

Ниже мы увидим, что в случае фермионов существование указанных пересечений необходимо для выполнения принципа симметрии Мак-Дауэлла (см. гл. IV, § 6). Кроме того, было показано, что они возникают при решении разнообразных задач теории потенциального рассеяния [285, 11, 402, 404]¹⁾. Эти вопросы рассматриваются в рабо-

¹⁾ А. А h m a d z a d e h, Ph. D. Thesis, University of California UCRL-11096, 1963 (не опубликовано).

тах [29, 145]. Поскольку, как показано в гл. VI, «потенциалы», генерирующие траектории в физике сильных взаимодействий, соответствуют смеси притяжения и отталкивания, вполне возможно, что подобные точки ветвления действительно имеют место [39]. В случае потенциального рассеяния a может обращаться в нуль только при $l < -1/2$ (см. [315], стр. 50), поэтому естественно ожидать, что для $\alpha(s)$ указанные разрезы возникают только при больших по модулю отрицательных s для высших траекторий. Но если внешние частицы обладают спином, то, конечно, точки ветвления могут соответствовать и более высоким значениям J , и, следовательно, появляться при меньших $|s|$.

Сингулярности $\alpha(s)$, не считая подобных разрезов, расположены только в тех точках, где функция $[E_l^\pm(s)]^{-1}$ сингулярна, т. е. при $s > s_0$. Вследствие соотношения (1.8) аналогичные замечания справедливы и для $\gamma(s)$, но свойства вычета $\beta(s)$, который имеет точки ветвления $[q_{s_{12}} q_{s_{34}}]^l$, будут, конечно, другими.

И, наконец, можно ожидать, что, кроме тех точек, в которых траектории пересекаются, $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$ будут вещественно-аналитическими функциями в плоскости с разрезом от s_0 до ∞ .

Можно также сделать несколько замечаний общего характера относительно порогового поведения $\alpha(s)$ [56, 382], аналогичных результатам, полученным в теории потенциального рассеяния [66]. Рассмотрим амплитуду, для которой ближайший порог s_0 соответствует двухчастичному упругому процессу. Согласно (II.5.20), приведенная амплитуда $B_l(s)$, задаваемая формулой (II.5.17), удовлетворяет соотношению

$$\Delta_s \{ [B_l(s)]^{-1} \} = -i\rho(s) (q_{s_{12}}^2)^l,$$

где $\rho(s)$ — функция, фигурирующая в (II.5.7), и скачок берется на разрезе, соответствующем условию унитарности для упругого процесса.

Функция

$$\frac{-i\rho(s) (-q_{s_{12}}^2)^l}{\cos \pi l} = \frac{i\rho(s) (q_{s_{12}}^2)^l e^{\pm i\pi l}}{\cos \pi l}$$

при $s_0 < s < s_l$, где s_l — первый неупругий порог, имеет такой же скачок, что и $[B_l(s)]^{-1}$. Таким образом, функция

$$Y(s, l) \equiv \cos \pi l [B_l(s)]^{-1} + i\rho(s) (-q_{s_{12}}^2)^l \quad (1.11)$$

при $s < s_l$ не имеет разрезов. Положение траектории $\alpha(s)$ определяется уравнением

$$[B_l(s)]^{-1} = 0 \quad \text{при} \quad l = \alpha(s), \quad (1.12)$$

или

$$Y(s, l) = i\rho(s) (-q_{s_{12}}^2)^l \quad \text{при} \quad l = \alpha(s). \quad (1.13)$$

Если разложить $Y(s, l)$ в ряд по s относительно точки s_0 , а l — относительно $l = \alpha_0 \equiv \alpha(s_0)$, то, вводя

$$Y_s \equiv \left. \frac{\partial Y(s, l)}{\partial s} \right|_{\substack{l=\alpha_0 \\ s=s_0}} \quad (1.14)$$

и

$$Y_l \equiv \left. \frac{\partial Y(s, l)}{\partial l} \right|_{\substack{l=\alpha_0 \\ s=s_0}}, \quad (1.15)$$

получим

$$Y[s, \alpha(s)] = Y(s_0, \alpha_0) + [\alpha(s) - \alpha_0] Y_l + (s - s_0) Y_s + \dots \quad (1.16)$$

С другой стороны, из (1.13) при s , близких к s_0 , имеем

$$Y[s, \alpha(s_0)] = i\rho(s) (-q_{s12}^2)^{\alpha_0},$$

что с учетом соотношения (II.5.7) для $\rho(s)$ дает

$$Y(s, \alpha_0) = -\frac{2}{\sqrt{s_0}} (-q_{s12}^2)^{\alpha_0+1/2} \quad \text{при } s \approx s_0. \quad (1.17)$$

Поэтому

$$Y(s_0, \alpha_0) = 0, \quad \text{если } \alpha_0 > -\frac{1}{2}, \quad (1.18)$$

и

$$Y(s_0, \alpha_0) \xrightarrow{s \rightarrow s_0} \infty, \quad \text{если } \alpha_0 < -\frac{1}{2}. \quad (1.19)$$

Объединяя (1.16) и (1.17), получаем

$$\begin{aligned} \alpha(s) = \alpha_0 - \frac{2}{\sqrt{s_0}} \frac{1}{Y_l} \left(\frac{s-s_0}{4} \right)^{\alpha_0+1/2} e^{-i\pi[\alpha(s)+1/2]} - \\ - (s-s_0) \left(\frac{Y_s}{Y_l} \right) + \dots \quad \text{при } \alpha_0 > -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (1.20)$$

Для $\alpha_0 < -1/2$, разлагая в ряд $\bar{Y}(s, l) \equiv [Y(s, l)]^{-1}$, получаем вместо (1.20)

$$\alpha(s) = \alpha_0 - \frac{2}{\sqrt{s_0}} \bar{Y}_l^{-1} \left(\frac{s-s_0}{4} \right)^{-[\alpha(s)+1/2]} e^{i\pi[\alpha(s)+1/2]} - \left(\frac{\bar{Y}_s}{\bar{Y}_l} \right) (s-s_0) + \dots \quad (1.21)$$

Таким образом, из (1.20) находим, что при приближении к порогу сверху

$$\text{Im } \alpha(s) \approx \frac{2}{\sqrt{s_0}} Y_l^{-1} \sin \left[\pi \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \right) \right] \left(\frac{s-s_0}{4} \right)^{\alpha_0+1/2} \quad (1.22)$$

и

$$\operatorname{Re} \alpha(s) \approx \alpha_0 - \frac{2}{\sqrt{s_0}} Y_l^{-1} \cos \left[\pi \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \right) \right] \left(\frac{s-s_0}{4} \right)^{\alpha_0+1/2} - (s-s_0) \frac{Y_s}{Y_l}, \quad (1.23)$$

в то время как при приближении к порогу снизу

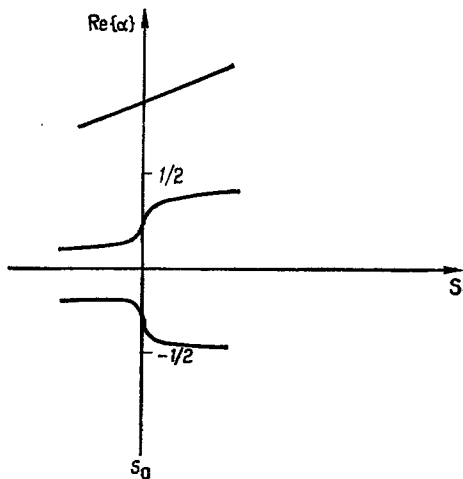
$$\alpha(s) = \operatorname{Re} \alpha(s).$$

Наклон траектории на пороге

$$\left. \frac{d \operatorname{Re} \alpha(s)}{ds} \right|_{\substack{s \approx s_0 \\ \text{но } s > s_0}} = \operatorname{const} \cdot \cos \left[\pi \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \right) \right] \left(\alpha_0 + \frac{1}{2} \right) \left(\frac{s-s_0}{4} \right)^{\alpha_0-1/2} \quad (1.24)$$

при $-1/2 < \alpha_0 < 1/2$ бесконечен, но в случае $\alpha_0 > 1/2$ он имеет конечное значение. Если $-1/2 < \alpha_0 < 0$ и мы подходим к порогу снизу, где $\alpha(s)$ вещественно, то знак наклона будет противоположен знаку выражения (1.24), так что в этом случае имеется выступ; но если $\alpha_0 > 0$, то выступа нет.

На фиг. III.1 приведены некоторые примеры, иллюстрирующие характер поведения функции $\operatorname{Re} \alpha(s)$ при переходе траектории через порог. Более полный анализ соответствующих вопросов можно найти в монографии Ньютона [315] (гл. 9). Для многочастичных порогов фазовый объем будет другим, и поэтому естественно ожидать, что поведение функции $\operatorname{Re} \alpha(s)$ при переходе через порог будет более регулярным [192]. Экспериментальных подтверждений такого рода порогового поведения пока не существует, причем в гл. VIII



Ф и г. III.1. Примеры поведения траекторий, проходящих через порог [315].

будет показано, что если исходить из уже имеющихся данных, то оно является достаточно гладким, хотя непосредственное наблюдение траекторий в пороговой области, конечно, невозможно. На самом деле это и неудивительно, так как известно [403], что в случае потенциального рассеяния влияние указанных выступов и тому подобных особенностей столь незначительно, что им можно полностью пренебречь; можно ожидать, что аналогичный вывод окажется справедливым и в физике сильных взаимодействий.

Другое характерное пороговое свойство можно получить из соотношения (1.17), если положить в нем $l \rightarrow -1/2$. Имеем

$$Y(s, l) \xrightarrow{l \rightarrow -1/2} -\frac{2}{\sqrt{s_0}} \quad (1.25)$$

и поэтому (1.13) принимает вид

$$\frac{2}{\sqrt{s_0}} = \frac{2}{\sqrt{s_0}} (q_{s12}^2)^{l+1/2} e^{-i\pi(l+1/2)}, \quad (1.26)$$

или

$$1 = \exp \{ [\ln(q_{s12}^2) - i\pi] (l + 1/2) \}. \quad (1.27)$$

Это уравнение удовлетворяется при $l = \alpha_n$ для любого α_n , такого, что

$$[\ln(q_{s12}^2) - i\pi] \left(\alpha_n + \frac{1}{2} \right) = \pm 2\pi ni, \quad (1.28)$$

или

$$\alpha_n = \frac{\pm 2\pi n}{\pi + i \ln(q_{s12}^2)} - \frac{1}{2}. \quad (1.29)$$

Таким образом, существует бесконечное число траекторий, принимающих при $q_{s12}^2 \rightarrow 0$ одно и то же значение $\alpha = -1/2$. Подобное сгущение траекторий на пороге обнаружено в работах [218, 145] (см. также [146]).

Основной вывод, который мы хотели бы сделать в этом параграфе, заключается в том, что если траектории не пересекаются, то $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$ являются вещественно-аналитическими функциями. Это означает, что можно постулировать следующие дисперсионные соотношения:

$$\alpha(s) = \alpha(\infty) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im } \alpha(s')}{s' - s} ds' \quad (1.30)$$

и

$$\gamma(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im } \gamma(s')}{s' - s} ds'. \quad (1.31)$$

Пример траектории, удовлетворяющей соотношению (1.30), приведен на фиг. II.12. Мы предположили, что для $\alpha(s)$ требуется одно вычитание. В случае потенциального рассеяния $\alpha(\infty)$ всегда равно отрицательному целому числу: некоторые траектории начинаются при -1 , другие при -2 и т. д. Как мы увидим в гл. VIII, в релятивистском рассеянии ситуация является более сложной, но соотношение (1.30) можно считать вполне приемлемым. Предполагается, что при $s \rightarrow \infty$ $\gamma(s)$ обращается в нуль, поэтому вычитания здесь не делаются.

В гл. V будет показано, что условие унитарности требует положительности $\text{Im } \alpha(s)$, благодаря чему $\alpha(s)$ является функцией Герглотца [232]. Это означает, что при любом $s < s_0$ все высшие производные положительны, так как из (1.30)

$$\frac{d[\alpha(s)]}{ds} = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{i \text{Im } \alpha(s')}{(s' - s)^2} ds'. \quad (1.32)$$

В теории потенциального рассеяния известно [347] (см. также [368]), что

$$\left. \frac{d\alpha(E)}{dE} \right|_{E \approx 0} \approx \frac{r^2}{2\alpha + 1}, \quad (1.33)$$

где $E = \sqrt{s}$, а r — радиус рассматриваемого состояния. Если этот радиус отождествить с радиусом взаимодействия R , то можно ожидать, что наклон данной траектории будет связан с радиусом взаимодействия, порождающего эту траекторию (см. гл. II. § 7) следующим приближенным соотношением:

$$\frac{d\alpha(s)}{ds} = \frac{R^2}{2M[2\alpha(s) + 1]}, \quad (1.34)$$

где M — масса соответствующих частиц. Поскольку для большинства сильно взаимодействующих систем радиусы сил мало отличаются друг от друга, можно считать, что наклоны различных траекторий сравнимы по величине. В гл. VIII мы увидим, что это действительно так.

В следующих параграфах рассматривается влияние аналитических свойств функций $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$ на аналитичность всего реджевского полюсного члена в целом.

§ 2. ПОЛЮСА РЕДЖЕ И МАНДЕЛЬСТАМОВСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ

Как говорилось в гл. I, связная четыреххвостка удовлетворяет мандельштамовскому представлению с двойными спектральными функциями, не равными нулю лишь в некоторой области с определенными границами [$s = b_1(t)$ и т. д., см. (I.11.3) и далее], положение которых зависит от масс внешних частиц. Расчеты, позволяющие определить положение этих границ, подробно рассматриваются в гл. I, § 12. Для амплитуд с определенной сигнатурой мы остановились на представлении типа (II.2.6). В дальнейшем будет удобно считать, что амплитуда содержит только одну двойную спектральную функцию (скажем, ρ_{st}), так как вклады от остальных легко получить путем перестановки переменных s , t и u . Поэтому из (II.2.6), меняя порядок интегрирования, получаем следующее мандельштамовское представле-

ние:

$$A^{\pm}(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} ds' \int_{b(s')}^{\infty} dt'' \frac{\rho_{st}(s', t'')}{(s' - s)(t'' - t)}. \quad (2.1)$$

С другой стороны, в гл. II предпринята попытка представить амплитуду в виде суммы полюсов Редже и разрезов с добавлением некоторого фонового члена, который выбирается так, чтобы при стремлении переменных к бесконечности он обращался в нуль по крайней мере как обратный квадратный корень [см. (II.9.10) или (II.12.7)]. Полюса и разрезы существуют, конечно, в каждом из каналов s , t и u , но опять-таки в этой главе удобнее работать только с полюсами s -канала и не учитывать вообще разрезы, так что из (II.9.10) имеем

$$A^{\pm}(s, t) = - \sum_i 16\pi^2 [2\alpha_i(s) + 1] \beta_i(s) \frac{P_{\alpha_i(s)}(-z_s)}{\sin \pi \alpha_i(s)} - \frac{16\pi}{2i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2l+1) A^{\pm}(s, t) \frac{P_l(-z_s)}{\sin \pi l} dl, \quad (2.2)$$

или из (II.12.7)

$$A^{\pm}(s, t) = \sum_i 16\pi [2\alpha_i(s) + 1] \beta_i(s) \frac{Q_{-\alpha_i(s)-1}(-z_s)}{\cos \pi \alpha_i(s)} + \frac{16}{2i} \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} (2l+1) A^{\pm}(s, t) \frac{Q_{l-1}(-z_s)}{\cos \pi l} dl - \sum_{L'+1/2}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{\pi} (2l) A\left(s, l - \frac{1}{2}\right) Q_{l-1/2}(-z_s), \quad (2.3)$$

где $(-L')$ — ближайшее к L полуцелое число, лежащее справа от него. Преимущество выражения (2.3) по сравнению с (2.2) заключается в том, что оно позволяет включить в явном виде все полюса с $\text{Re } \alpha_i(s) > L$ (отметим, что в общем случае L отрицательно) и сделать фоновый член обращающимся в нуль сколь угодно быстро ($\sim t^L$). Однако иногда проще использовать выражение (2.2).

Эквивалентность (2.1) выражению (2.2) или (2.3) отнюдь не очевидна, так как реджевские полюсные члены сами имеют скачки и двойные спектральные функции, отличные от нуля вне области, которая предписывается правилами Мандельстама. Чтобы показать это, рассмотрим простой случай $\pi - \pi$ -рассеяния, в котором все внешние частицы имеют одну и ту же массу. В гл. I, § 12 мы видели, что тогда двойная спектральная функция ρ_{st} не равна нулю только в области, показанной на фиг. I.16. Однако если в (2.3) ограничиться одиночным полю-

сом Редже, т. е. положить

$$A_R^\pm(s, t) = 16\pi [2\alpha(s) + 1] \beta(s) \frac{Q_{-\alpha(s)-1}(-z_s)}{\cos \pi \alpha(s)}, \quad (2.4)$$

то это выражение заведомо будет иметь сингулярности в нежелательной области. Действительно, в предыдущем параграфе показано, что $\alpha(s)$ является вещественно-аналитической функцией переменной s с динамическим разрезом от порога s_0 , соответствующего s -каналу и равного в данном случае $4m_\pi^2$, до ∞ (при условии, что две траектории не пересекаются, так как в этом случае следует включать вклады каждой из них).

Кроме того, величина

$$z_s = 1 + \frac{t}{2q_s^2} \quad (2.5)$$

имеет полюс в точке $q_s^2 = 0$, который приводит к появлению нежелательного кинематического разреза у функции $Q_{-\alpha(s)-1}(-z_s)$. Однако он устраняется, если в соответствии с (1.7) положить

$$\beta(s) = \gamma(s) (q_s^2)^{\alpha(s)}, \quad (2.6)$$

так чтобы разрез для $Q_{-\alpha(s)-1}(-z_s)$ сокращался с разрезом для $(q_s^2)^{\alpha(s)}$ [см. (II.11.6)].

Как было показано, можно ожидать, что этот так называемый «приведенный» вычет также является вещественно-аналитической функцией с динамическим разрезом, который начинается на пороге. В гл. II отмечалось, что преобразование Зоммерфельда — Ватсона предполагает, что парциальные амплитуды удовлетворяют условию (II.8.1), которое, однако, справедливо только при $q_s^2 > 0$ [см. (II.7.1)]. Как видно из соотношения (II.4.9), парциальная амплитуда $A^\pm(s, t)$, определяемая формулой (II.3.6), имеет на пороге точку ветвления. Поскольку в этом случае интегрирование в (II.6.5) проводится по отрицательным z_s , парциальная амплитуда вместо (II.7.4) удовлетворяет следующему асимптотическому условию:

$$A^\pm(s, l) \underset{l \rightarrow \infty}{\sim} e^{-i\pi l} e^{-i\zeta(z_n)} \quad \text{при } s < s_0.$$

Следовательно, при $s < s_0$ преобразование Зоммерфельда — Ватсона совершить нельзя. Но функция

$$\hat{A}^\pm(s, l) \equiv e^{i\pi l} A^\pm(s, l)$$

обладает хорошим поведением при $l \rightarrow \infty$, и поэтому при $s < s_0$ вместо (2.2) можно написать [85, 86]

$$A^\pm(s, t) = 16\pi \sum_l (2l+1) \hat{A}^\pm(s, l) P_l(z) = \\ = \frac{16\pi}{2i} \int_C (2l+1) \hat{A}^\pm(s, l) \frac{P_l(-z)}{\sin \pi l} dl + \text{полюса Редже и разрезы.}$$

Конечно, при $s > s_0$ это представление не справедливо. Какую из амплитуд, $A^\pm(s, t)$ или $\hat{A}^\pm(s, t)$, следует вводить, зависит от того, как выбирается положение кинематического разреза, — идет ли он от s_0 в положительном или в отрицательном направлении вещественной оси.

В соответствии с этим реджевский полюсный член должен содержать кинематический множитель (2.6), чтобы при переходе к отрицательным q_s^2 разрез по t оставался фиксированным. В противном случае связь между разрезами по z_s и разрезами по t была бы неоднозначной, так как $t \pm i\varepsilon$ может соответствовать $z \mp i\varepsilon$ или $z \pm i\varepsilon$, в зависимости от того, положительно или отрицательно q_s^2 в (2.5). Лучше всего это обстоятельство можно отразить, записав

$$A_R^\pm(s, t) = \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t} \right)^{\alpha(s)} (-t)^{\alpha(s)} Q_{-\alpha(s)-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right), \quad (2.7)$$

где

$$\Gamma(s) = \frac{16\pi [2\alpha(s) + 1] \gamma(s)}{\cos \pi \alpha(s)}. \quad (2.8)$$

Тогда разрез для функции $Q_{-\alpha(s)-1}(-1-t/2q_s^2)$ при $(-1-t/2q_s^2) < -1$ будет всегда сокращаться с разрезом для функции $(-q_s^2/t)^{\alpha(s)}$ при $(q_s^2/t) > 0$, так как, согласно (II.11.4) и (II.11.5),

$$\left(-\frac{q_s^2}{t} \pm i\varepsilon \right) Q_{-\alpha(s)-1}(-z \pm i\varepsilon) = \left(\frac{q_s^2}{t} \right)^{\alpha(s)} Q_{-\alpha(s)-1}(z). \quad (2.9)$$

Итак, для функции $A_R^\pm(s, t)$, определяемой выражением (2.7), имеются следующие разрезы:

при фиксированном s

разрез по t от $t = 0$ до ∞ , обусловленный членом $(-t)^{\alpha(s)}$,

разрез по t от $t = 0$ до $-4q_s^2$ из (I.11.1) при $-1 < z < 1$;

при фиксированном t

разрез по s от $s = s_0$ до ∞ из разрезов $\Gamma(s)$ и $\alpha(s)$,

разрез по s от $q_s^2 = -\infty$ до $-t/4$ из (I.11.1) при $-1 < z < 1$.

Однако амплитуда (2.3) должна иметь скачок по t только от t_0 до ∞ и скачок по s только от s_0 до ∞ с двойной спектральной функцией, ограниченной даже меньшей областью, показанной на фиг. 1.16. Очевидно, что (2.3) согласуется с мандельштамовским представлением лишь в том случае, если фоновый член имеет такие сингулярности, которые сокращаются с сингулярностями функции $A_R^\pm(s, t)$. Может показаться, что для этого требуется вмешательство чудодейственной силы, но не следует забывать, что (2.3) является всего лишь частным случаем разложения амплитуды (2.1), и поэтому сингулярности в нем автоматически должны объединяться попарно. В теории потенциального рассеяния известно, что амплитуда удовлетворяет мандельштамовскому представлению и одновременно обладает реджевским пове-

дением, и необходимое согласование обеспечивается там автоматически.

Аналогичные трудности возникают и в представлении (2.2), где одиночный реджевский член дает

$$A_R^\pm(s, t) = -G(s) (q_s^2)^{\alpha(s)} \frac{P_{\alpha(s)}(-1 - t/2q_s^2)}{\sin \pi \alpha(s)}, \quad (2.10)$$

$$G(s) = 16\pi^2 [2\alpha(s) + 1] \gamma(s). \quad (2.11)$$

В этом случае несколько сложнее исключить сингулярность в точке $q_s^2 = 0$, так как при изменении знака аргумента для $P_\alpha(z)$ будет иметь место соотношение (II.10.2), а не более простое соотношение (II.11.4), которое справедливо для $Q_\alpha(z)$. Однако если воспользоваться формулой (II.11.4), то при $q_s^2 < 0$ можно написать

$$A_R^\pm(s, t) = -G(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \left[\frac{P_\alpha(1 + t/2q_s^2)}{\sin \pi \alpha(s)} + \frac{2}{\pi} Q_\alpha\left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right) \right]. \quad (2.12)$$

Таким образом,

при фиксированном s имеется разрез по t от $t = -4q_s^2$ до ∞ ,
при фиксированном t имеются разрезы от $q_s^2 = 0$ до ∞ и от $q_s^2 = -t/2$ до 0 .

В этом случае также необходимо, чтобы вне области, соответствующей мандельштамовскому представлению, сингулярности сокращались.

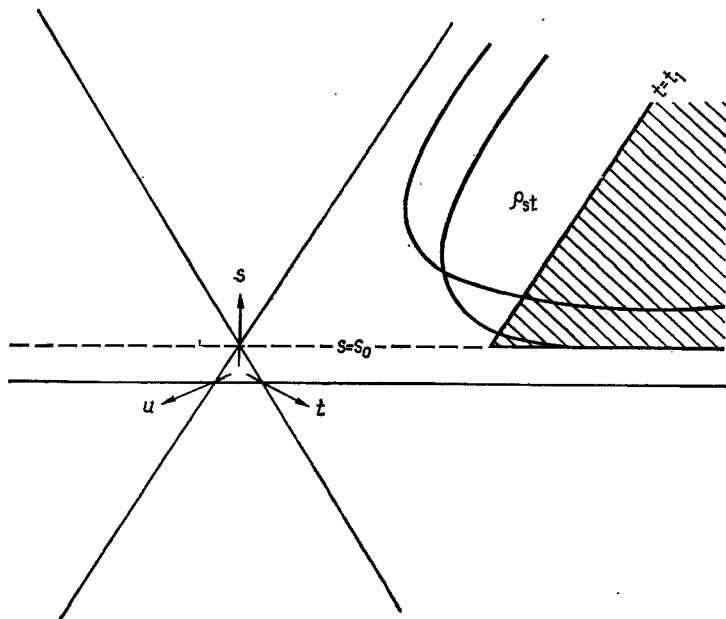
В физике сильных взаимодействий часто возникает естественное стремление представлять амплитуду просто в виде суммы полюсов Редже, пренебрегая при этом фоновым членом, так как мы знаем, что он не играет никакой роли в асимптотике. Однако теперь очевидно, что необходимо включать хотя бы некоторую его часть, достаточную для компенсации нежелательных сингулярностей реджевских полюсных членов. И конечно, до сих пор лишь предполагалось, что эти члены можно сделать такими, чтобы они удовлетворяли мандельштамовскому представлению. Нам еще следует показать, что необходимая согласованность действительно может быть достигнута, особенно когда кинематика является более сложной, чем в обсуждавшемся до сих пор случае равных масс.

В нескольких последующих параграфах рассматриваются некоторые из представлений, предложенных для полюсов Редже, — сначала (§ 3—5) для кинематики равных масс, а затем и для более общего случая.

§ 3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЧЬО — ДЖОНСА

Чью и Джонс [112] предложили очень простое представление для полюсов Редже, которое оказалось удобным при динамических вычислениях в случае кинематики равных масс. Как заметили эти авторы,

можно ожидать, что реджевский полюсный член s -канала будет давать существенный вклад в двойные спектральные функции только вне области резонансов кросс-канала. Так, если рассматривать фиг. III.2, то можно думать, что для полюсов Редже s -канала двойная спектральная функция будет отлична от нуля в основном в области $t > t_1$, где



Ф и г. III.2. Область, в которой отлична от нуля двойная спектральная функция для полюса Редже s -канала, входящая в представление Чью — Джексона (заштрихована), в сравнении с истинными границами, показанными на фиг. I.16.

Если t_1 достаточно велико, то границу можно выбрать при s_0 , внося при этом лишь небольшую погрешность.

t_1 — достаточно большое значение, лежащее выше всех полюсов t -канала. Значение t_1 должно выбираться так, чтобы оно соответствовало энергии, при которой поведение в t -канале становится явно реджевским, т. е. энергии, равной обычно 2—3 Гэв. При таких значениях t граница двойной спектральной функции почти совпадает с прямой $s = s_0$ [см. (I.12.10)]. Поэтому представляется вполне разумным положить для одиночного полюса Редже s -канала

$$\rho(s, t) = \rho^R(s, t) \theta(t - t_1) \theta(s - s_0), \quad (3.1)$$

где $\rho^R(s, t)$ — двойная спектральная функция, соответствующая либо (2.7), либо (2.10). При динамических вычислениях обычно не приходится иметь дело с областью $\text{Re } \alpha < -1/2$, поэтому удобно использовать выражение (2.10), с которого мы и начнем наше обсуждение.

Согласно (2.12), одиночный полюс Редже дает в амплитуду вклад

$$A_R^\pm(s, t) = -G(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \frac{P_{\alpha(s)}(1+t/2q_s^2)}{\sin \pi \alpha(s)}, \quad (3.2)$$

где член с Q_α опущен, так как при $t > t_1$ он пренебрежимо мал [см. (II.12.9)]. При $s > s_0$ эта функция имеет скачок по s

$$D_{sR}^\pm(s, t) = \Delta_s \left\{ -G(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \frac{P_{\alpha(s)}(1+t/2q_s^2)}{\sin \pi \alpha(s)} \right\} \theta(s-s_0), \quad (3.3)$$

обусловленный разрезами для $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$, а также разрезами для функции Лежандра [см. выводы после формулы (2.12)]. Конечно, для функции (3.2) это не единственный разрез по s , но нам требуется только он. Если теперь в (3.3) взять скачок по t в области, соответствующей (3.1), то, используя (II.9.12), получим

$$\rho(s, t) = \Delta_s \left\{ G(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} P_{\alpha(s)} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right) \right\} \theta(t-t_1) \theta(s-s_0). \quad (3.4)$$

Если подставить это выражение в (2.1), то интегрирование по s' , будучи интегрированием вдоль всех разрезов по s у выражения, заключенного в (3.4) в фигурные скобки, сведется просто к изменению знака скачка Δ_s , и останется

$$A^\pm(s, t) = G(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \frac{1}{\pi} \int_{t_1}^{\infty} \frac{P_{\alpha(s)}(-1-t''/2q_s^2)}{t''-t} dt''. \quad (3.5)$$

Если $\alpha(s) \geq 0$, то этот интеграл не определен, и чтобы осуществить аналитическое продолжение по α , следует воспользоваться дисперсионным соотношением для функции Лежандра [111]

$$P_\alpha(-z) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \int_1^{\infty} \frac{P_\alpha(z')}{z'-z} dz'. \quad (3.6)$$

Эта процедура приводит к определенному вычитанию того же типа, как и рассмотренное в гл. II, § 9. Таким образом, из (3.5) получаем

$$A^\pm(s, t) = G(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \left[-\frac{P_{\alpha(s)}(1+t/2q_s^2)}{\sin \pi \alpha(s)} - \frac{1}{\pi} \int_{-4q_s^2}^{t_1} \frac{P_{\alpha(s)}(-1-t''/2q_s^2)}{t''-t} dt'' \right]. \quad (3.7)$$

Отличие соотношения (3.7) от (3.2) состоит просто в том, что в нем устранен тот вклад в A_R , который соответствует мешающей нам части двойной спектральной функции от $t = -4q_s^2$ до t_1 . При фиксированном s этот поправочный член ведет себя асимптотически как t^{-1} , и поэтому он вполне может содержаться в фоновом интеграле. Исполни-

зование такого представления для динамических вычислений рассматривается в гл. VI.

С другой стороны, для амплитуды с одиночным полюсом Редже можно предпочесть представление (2.3), записав

$$A^\pm(s, t) = A_R^\pm(s, t) + B^\pm(s, t) \quad (3.8)$$

и взяв $A_R^\pm(s, t)$ из (2.7). В выводах, следующих за формулой (2.9), указаны разрезы для $A_R^\pm(s, t)$, и чтобы амплитуда $A^\pm(s, t)$ удовлетворяла мандельштамовскому представлению, некоторые из них должны сокращаться с разрезами для функции $B^\pm(s, t)$; в то же время по-прежнему функция $B^\pm(s, t)$ должна стремиться к нулю при $t \rightarrow \infty$ по крайней мере как $t^{-1/2}$.

Далее, функция (2.7)

$$A_R^\pm(s, t) = \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t}\right)^{\alpha(s)} (-t)^{\alpha(s)} Q_{-\alpha(s)-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right)$$

при $s > s_0$ имеет скачок по s , который дается формулой

$$D_{sR}^\pm(s, t) = \Delta_s \left[\Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t}\right)^{\alpha(s)} (-t)^{\alpha(s)} Q_{-\alpha(s)-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right) \right] \theta(s - s_0), \quad (3.9)$$

хотя соответствующий разрез для $A_R^\pm(s, t)$ по s и не является единственным.

Воспользовавшись затем соотношением (2.9), получим следующий скачок по t этого выражения в области $t > 0$:

$$\begin{aligned} \rho(s, t) &= \Delta_s \left[-\Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t}\right)^{\alpha(s)} t^{\alpha(s)} \sin \pi \alpha(s) Q_{-\alpha(s)-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right) \right] \times \\ &\quad \times \theta(s - s_0) \theta(t) = \\ &= \Delta_s \left[-\Gamma(s) \left(\frac{q_s^2}{t}\right)^{\alpha(s)} t^{\alpha(s)} \sin \pi \alpha(s) Q_{-\alpha(s)-1} \left(1 + \frac{t}{2q_s^2}\right) \right] \times \\ &\quad \times \theta(s - s_0) \theta_t. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Конечно, такая граница для двойной спектральной функции еще не является правильной, но в дальнейшем из нее легко вычистить часть (см. фиг. III.2)

$$\begin{aligned} \bar{B}(s, t) &\equiv \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \int_0^{b_1(s')} \frac{dt''}{t'' - t} \times \\ &\quad \times \Delta_s \left[-\Gamma(s') \left(\frac{q_{s'}^2}{t''}\right)^{\alpha} (t'')^{\alpha} \sin \pi \alpha Q_{-\alpha-1} \left(1 + \frac{t''}{2q_{s'}^2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Использование границ, фигурирующих в (3.10), позволяет записать поправочные члены в более простой форме. (В последующих формулах аргумент у $\alpha(s)$ часто опускается.)

Если подставить (3.10) в

$$D_s^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty dt'' \frac{\rho(s, t'')}{t'' - t}, \quad (3.12)$$

то мы получим

$$\begin{aligned} D_s^\pm(s, t) = & \Delta_s \left[\Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t} \right)^\alpha (-t)^\alpha Q_{-\alpha-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right) \right] + \\ & + \Delta_s \left[\frac{1}{2} \int_0^{-4q_s^2} \frac{dt''}{t'' - t} \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t''} \right)^\alpha (-t'')^\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t''}{2q_s^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Это выражение отличается от (3.9) наличием поправочных членов от дополнительного разреза по t для функции (3.10), который вычисляется с помощью (II.11.1).

Аналогично для величины

$$D_t^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^\infty ds' \frac{\rho(s', t)}{s' - s} \quad (3.14)$$

имеем

$$\begin{aligned} D_t^\pm(s, t) = & -\Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t} \right)^\alpha t^\alpha \sin \pi\alpha Q_{-\alpha-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right) - \\ & - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-t-s_0} \frac{ds'}{s' - s} \Gamma(s') \left(-\frac{q_s^2}{t} \right)^\alpha t^\alpha \sin \pi\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

и как (3.13), так и (3.15) [с учетом (3.11)] приводят к представлению

$$\begin{aligned} A^\pm(s, t) = & \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t} \right)^\alpha (-t)^\alpha Q_{-\alpha-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-t-s_0} \frac{ds'}{s' - s} \Gamma(s') \left(-\frac{q_s^2}{t} \right)^\alpha (-t)^\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right) + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{-4q_s^2} \frac{dt''}{t'' - t} \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t''} \right)^\alpha (-t'')^\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t''}{2q_s^2} \right) - \bar{B}(s, t). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Отличие (3.16) от (2.7) состоит просто в том, что в этом представлении устранен вклад от лишних разрезов реджевского полюсного члена. Остается лишь проверить, что последние три члена в (3.16) имеют необходимое асимптотическое поведение. Очевидно, что второй член в правой части (3.16) $\sim t^{\alpha(-\infty)}$, а третий и четвертый члены $\sim t^{-1}$, так что достаточно потребовать, чтобы $\alpha(-\infty) < -1/2$.

Как (3.7), так и (3.16) можно использовать в качестве вклада в амплитуду от одиночной траектории Редже, который удовлетворяет мандельштамовскому представлению для кинематики равных масс.

§ 4. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ХУРИ — ДЖОНСА

Недостатком представления Чью — Джонса является то, что поправочные члены в нем можно записать только в виде некоторых интегралов, вычисление которых весьма затруднительно. Без явных численных расчетов фактически невозможно проанализировать характер вклада в амплитуду, который дает данная траектория Редже. Несколько раньше независимо друг от друга Хури [262] и Джонс¹⁾ предложили иной метод. Хотя в некоторых отношениях он и является менее удовлетворительным, чем метод Чью — Джонса, но зато обладает тем преимуществом, что с его помощью весьма просто производится разложение амплитуды по парциальным волнам.

Основная идея этого метода в точности та же. Устраним из реджевского члена (3.2) ту часть, которая соответствует разрезу между $t = -4q_s^2$ и $t = t_1$. С этой целью обратимся к интегральному представлению функции Лежандра (В1,3.7.11)

$$P_\alpha(z) = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \sin \pi \alpha \int_0^\infty \frac{\text{ch}[(\alpha+1/2)x]}{(\text{ch } x+z)^{1/2}} \quad \text{при } -1 < \text{Re } \alpha < 0, \quad (4.1)$$

которое можно переписать в виде

$$P_\alpha(z) = -\frac{\sin \pi \alpha}{\pi \sqrt{2}} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(\alpha+1/2)x}}{(\text{ch } x+z)^{1/2}} dx, \quad (4.2)$$

или, интегрируя по частям,

$$P_\alpha(z) = -\frac{\sin \pi \alpha}{2\pi \sqrt{2}(\alpha+1/2)} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{(\alpha+1/2)x} \text{sh } x}{(\text{ch } x+z)^{3/2}} dx. \quad (4.3)$$

Таким образом, можно получить такое представление реджевского члена (3.2), в котором разрез начинается в точке $t = t_1$, а именно

$$A^\pm(s, t) = 16\pi\gamma(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{\xi(s)}^\infty \frac{e^{(\alpha+1/2)x} \text{sh } x}{(\text{ch } x+z_s)^{3/2}} dx, \quad (4.4)$$

¹⁾ С. Е. Jones, Lawrence Radiation Laboratory Report UCRL-10700 (не опубликовано).

где

$$\xi(s) = \operatorname{ar ch} \left(1 + \frac{t_1}{2q_s^2} \right) = \ln \left\{ \left(1 + \frac{t_1}{2q_s^2} \right) + \left[\left(1 + \frac{t_1}{2q_s^2} \right)^2 - 1 \right]^{1/2} \right\}. \quad (4.5)$$

Выражение (4.4) определено лишь при $\operatorname{Re} \alpha < 0$, но с помощью формулы (4.3) можно получить его аналитическое продолжение в область $\operatorname{Re} \alpha > 0$, аналогичное (3.7). В результате получаем

$$A^\pm(s, t) = 16\pi\gamma(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \times \\ \times \left[\frac{\pi [2\alpha(s) + 1] P_{\alpha(s)}(1 + t/2q_s^2)}{\sin \pi\alpha(s)} - \frac{1}{\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\xi(s)} \frac{e^{[\alpha(s)+1/2]x} \operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x + z_s)^{3/2}} dx \right]. \quad (4.6)$$

В интервале $-1 < \operatorname{Re} \alpha < 0$ справедливо как выражение (4.4), так и (4.6), причем можно показать, что здесь эти выражения совпадают (см. [262]).

Преимуществом такого представления по сравнению с представлением Чью — Джонса является то, что проекция амплитуды (4.4) или (4.6) на парциальную волну принимает в данном случае особенно простой вид. Подставляя любое из этих выражений, справедливое при данном значении α , в формулу (II.1.1) и используя соотношение, обратное (4.3), т. е.

$$\frac{\operatorname{sh} x}{(\operatorname{ch} x + z)^{3/2}} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} (2l+1) P_l(z) \frac{e^{-(l+1/2)x}}{\cos [\pi(l+1/2)]} dl, \quad (4.7)$$

получаем

$$A_l^\pm(s) = -\gamma(s) (-q_s^2)^{\alpha(s)} \frac{\exp \{ -[l - \alpha(s)] \xi(s) \}}{\alpha(s) - l}. \quad (4.8)$$

Благодаря асимптотическому поведению $P_l(z)$ при $l \rightarrow \infty$, определяемому формулой (II.7.11), разложение амплитуды по парциальным волнам (II.1.3), которое содержит функцию (4.8), будет, очевидно, сходиться при $t < t_1$. Это является следствием исключения вклада двойной спектральной функции при $t < t_1$, и формула Чью — Джонса из предыдущего параграфа имеет ту же область сходимости.

Основной недостаток представления Хури — Джонса заключается в том, что, наряду с правым разрезом по s от $s = 4m^2$ до ∞ , обусловленным разрезами для $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$, имеется также и левый разрез от $4q_s^2 = -t_1$ (т. е. от $s = -t_1 + 4m^2$) до $-\infty$; который обусловлен поведением функции $\xi(s)$ (4.5). Следует ожидать (см. гл. II, § 4), что такой разрез присутствует только в парциальной амплитуде, а в полную амплитуду не входит. Если бы функция $A^\pm(s, t)$, определяемая выражением (4.4) или (4.6), была точной амплитудой, то в сумме, соответствующей разложению по парциальным волнам, этот разрез сокращался бы, но так как она является всего лишь приближением,

то на полную компенсацию надеяться не приходится. Этот дефект приводит к тому, что представление Хури — Джонса непригодно при динамических вычислениях. Однако выражение (4.8) для парциальной амплитуды является весьма поучительным, так как оно показывает, в чем состоит отличие сил, возникающих за счет обмена траекторией Редже, от сил, обусловленных обменом (элементарной) частицей с фиксированным спином. Эти вопросы рассматриваются в гл. VI.

Аналогичное, но более сложное выражение для амплитуды, в котором исключен левый разрез, получено в работе [270].

§ 5. СТЕПЕННОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ ХУРИ

До настоящего параграфа гипотеза полюсов Редже была тесно связана с разложением амплитуды по парциальным волнам, т. е. по функциям Лежандра, а это, как мы видели, приводит к некоторым трудностям, поскольку угол рассеяния z_s зависит как от s , так и от t . Однако в конечном итоге нас обычно интересуют асимптотические свойства амплитуды не по z_s , а по s или t , и представляется вполне разумным исходить из степенного разложения по этим инвариантам, а не из разложения по функциям Лежандра. Возможность такого подхода продемонстрировал Хури [263, 264]. При этом необходимо было решить два вопроса: во-первых, существует ли соответствующая интерполяция коэффициентов степенного разложения и, во-вторых, можно ли разлагать амплитуду не по z_s , а по t .

Запишем вместо разложения (II.1.3) разложение в степенной ряд

$$A^\pm(s, t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c(s, \nu) t^\nu, \quad (5.1)$$

где ν — целое число. Из дисперсионного соотношения (II.2.7)

$$A^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{i_0}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t'')}{t'' - t} dt'' \quad (5.2)$$

получаем

$$A^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{i_0}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t'')}{t''} \left[1 + \frac{t}{t''} + \left(\frac{t}{t''} \right)^2 + \dots \right] dt''. \quad (5.3)$$

Сравнивая это выражение с (5.1), находим

$$c(s, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{i_0}^{\infty} D_t^\pm(s, t'') (t'')^{-(\nu+1)} dt''. \quad (5.4)$$

Последнее выражение позволяет осуществить продолжение коэффициентов $c(s, \nu)$ по переменной ν на все ее значения, при которых имеет

смысл интеграл (5.4). Сравнивая его с (II.6.5), видим, что он сходится при всех ν , удовлетворяющих неравенству $\text{Re } \nu \geq l_M(s)$. Поэтому функция $c(s, \nu)$ голоморфна по ν в той же области, в которой функция $A(s, l)$ голоморфна по l . Чтобы продолжить (5.4) в область левее указанной границы, необходимо так же, как это делалось в гл. II, § 9, вычест из $D_i^\pm(s, t)$ те вклады, которые соответствуют всевозможным правосторонним сингулярностям в l -плоскости. Предположим для удобства, что разрезов нет, а существуют лишь полюса при $l = \alpha_i(s)$. Используя совместно с (II.11.1) выражение (2.4) для вклада от полюса Редже, можно написать

$$D_i^\pm(s, t) = D_i^B(s, t) + \sum_i 16\pi [2\alpha_i(s) + 1] \times \\ \times \gamma_i(s) (q_s^2)^{\alpha_i(s)} \text{tg } \pi\alpha_i(s) Q_{-\alpha_i(s)-1}(-z_s), \quad (5.5)$$

где $D_i^B(s, t)$ — вклад от фонового члена, причем его можно выбрать так, чтобы при $t \rightarrow \infty$ он обращался в нуль по крайней мере как $t^{-1/2}$. Воспользовавшись далее формулой (II.12.8), разложим функцию $Q_{-\alpha-1}(-z)$ по степеням z^{-2} :

$$Q_{-\alpha-1}(z) = g_0(\alpha) z^\alpha + g_1(\alpha) z^{\alpha-2} + \dots + g_n(\alpha) z^{\alpha-2n} + \dots \quad (5.6)$$

и проведем интегрирование в (5.4), в результате чего получим

$$c(s, \nu) = c^B(s, \nu) - \sum_i 8 [2\alpha_i(s) + 1] \gamma_i(s) \frac{\text{tg } \pi\alpha_i(s)}{4^{\alpha_i(s)}} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha_i+n)}{\Gamma(-2\alpha_i+n)} \frac{(-1)^n}{n!} (4q_s^2)^n \frac{1}{\nu+n-\alpha_i}, \quad (5.7)$$

где $c^B(s, \nu)$ — вклад от $D_i^B(s, t)$. Таким образом, каждому полюсу Редже соответствует последовательность полюсов функции $c(s, \nu)$, лежащих при $\nu = \alpha_i(s), \alpha_i(s) - 1, \alpha_i(s) - 2$ и т. д.

Для разложения (5.1), совершенно аналогично тому, как это сделано в гл. II, § 9, можно совершить преобразование Зоммерфельда — Ватсона, в результате чего получаем

$$A^\pm(s, t) = -\frac{1}{2i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \frac{c(s, \nu)}{\sin \pi\nu} (-t)^\nu d\nu - \sum_i \frac{8\pi\gamma_i(s) [2\alpha_i(s) + 1]}{4^{\alpha_i(s)} \cos \pi\alpha_i(s)} \times \\ \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-\alpha_i+n)}{\Gamma(-2\alpha_i+n)} \frac{1}{n!} (4q_s^2)^n (-t)^{\alpha_i-n}. \quad (5.8)$$

Очевидно, что разложение Хури соответствует просто разложению реджевских полюсных членов в ряд по степеням t . Конечно, если возникнет необходимость, прямую, вдоль которой берется фоновый интеграл, всегда можно сдвинуть левее прямой $\text{Re } \nu = -1/2$.

Таким образом, каждому полюсу Редже $\alpha_i(s)$ соответствует главный полюс Хури при $\nu = \alpha_i(s)$, приводящий к асимптотическому поведению $t^{\alpha_i(s)}(s)$, и бесконечная последовательность «сопутствующих» полюсов при $\nu = \alpha_i(s) - n$ ($n = 1, 2, \dots$), которые дают в асимптотику вклады типа $t^{\alpha_i(s)-1}$, $t^{\alpha_i(s)-2}$ и т. д. Приведенные выше рассуждения можно было бы обратить, и мы получили бы, что каждому полюсу Хури при $\nu = \alpha_i(s)$ соответствует бесконечная последовательность полюсов Редже при $l = \alpha_i(s)$, $\alpha_i(s) - 1$ и т. д. Однако при этом, конечно, если включить в (5.8) полную последовательность сопутствующих полюсов, то они будут давать вклады, компенсирующие друг друга, так, что останется только один полюс Редже при $l = \alpha_i(s)$.

Каждый из членов последовательности, входящий в (5.8), имеет разрез по t от $t = 0$ до ∞ , однако точно так же, как в § 3, легко добиться, чтобы при $t < t_i$ эти разрезы сокращались с сингулярностями фонового интеграла. Соответствующие вычисления в явном виде проведены в работе Хури [264]. При практическом использовании представления (5.8) суммирование по n , очевидно, нужно обрывать на некотором, своем для каждой траектории, значении $n = N_i$, таком, чтобы при всех s выполнялось неравенство

$$\alpha_i(s) - N_i < -\frac{1}{2},$$

т. е. чтобы все последующие члены ряда убывали асимптотически так же, как фоновый интеграл. Тогда основное отличие (5.8) от обычного реджевского представления будет заключаться в характере его асимптотического поведения по s . Реджевский полюсный член (2.4) имеет асимптотическое поведение по s , определяемое функцией

$$\frac{[2\alpha(s) + 1] \gamma(s)}{\cos \pi \alpha(s)},$$

тогда как в (5.8) входит комбинация

$$\frac{[2\alpha(s) + 1] \gamma(s)}{\cos \pi \alpha(s)} (4q_s^2)^N.$$

Истинное значение реджевских полюсных членов определяется тем, что асимптотическое поведение по s задается полюсами t - и u -каналов, в то время как вклады полюсов s -канала при больших s обращаются в нуль. Чтобы удовлетворить этому условию, в случае, когда обрывается разложение (5.8), на поведение функции $\gamma(s)$ необходимо наложить более жесткие ограничения, чем в случае представления Чью — Джонса, поэтому последнее обычно более предпочтительно (см. в этой связи [250]).

Теперь ясно, что вместо разложения по парциальным волнам, т. е. по z_s , при котором возникают полюса Редже, можно использовать многие другие типы полиномиальных разложений амплитуды,

выбирая в качестве аргументов таких полиномов различные другие переменные (лишь бы они зависели от s и t); после этого можно совершать преобразования, аналогичные преобразованию Зоммерфельда — Ватсона. Однако усложнение сингулярностей в комплексной плоскости переменной, определяющей порядок полинома (аналогичной l -плоскости или ν -плоскости), и затруднения, связанные с необходимостью компенсации сингулярностей в плоскости аргумента (аналога переменной z_s или t), делают подобную процедуру в общем довольно бессмысленной. Очевидно, наиболее удобно использовать такую плоскость (переменной, определяющей порядок полинома), в которой число полюсов, соответствующих каждой физической частице, минимально (желательно, чтобы оно было равно единице). Именно такой и является реджевская l -плоскость. Однако, как будет видно из последующих параграфов, усложнения, характерные для кинематики частиц с неравными массами, привели к тому, что некоторые авторы высказывают сомнения относительно выделенной роли реджевской плоскости в физике частиц.

§ 6. ПРОБЛЕМЫ КИНЕМАТИКИ ЧАСТИЦ С НЕРАВНЫМИ МАССАМИ

До сих пор в этой главе мы принимали, что все внешние частицы имеют одинаковые массы, и поэтому q_s^2 и z_s связаны с переменными s и t простыми соотношениями (I.6.15), (I.6.16). В результате соответствие между асимптотическим поведением по t и асимптотическим поведением по z_s оказывается очень простым; столь же просто связаны между собой сингулярности по z_s и сингулярности по s и t (см. § 2). Единственная трудность обусловлена наличием точки ветвления при $q_s^2 = 0$, которая рассматривается в § 2. Однако если массы частиц различны, так что имеют место более общие кинематические соотношения (I.6.12) и (I.6.14), то анализ существенно усложняется. В этом случае теряется однозначность соответствия между сингулярностями по z_s и по s , а связь между асимптотиками по t и по z_s становится в гораздо большей степени зависящей от s . Таким образом, возникают две взаимосвязанные проблемы. Можно ли построить соответствующим образом исправленное реджевское представление, аналогичное полученному в § 3, которое удовлетворяло бы мандельштамовскому представлению, и если можно, то будет ли при всех s справедливым реджевское асимптотическое поведение?

В дальнейшем ради простоты подробно рассматривается лишь случай, когда s -канал соответствует упругому рассеянию двух частиц с массами m_1 и m_2 , так что $m_3 = m_1$ и $m_4 = m_2$. Обобщение на случай, когда все массы не равны между собой, проводится аналогично, но является гораздо более трудоемким.

Из (I.6.12) имеем

$$q_{s12}^2 = q_{s34}^2 \equiv q_s^2 = \frac{s^2 - s\Sigma + \Delta^2}{4s}, \quad (6.1)$$

где

$$\Sigma = 2m_1^2 + 2m_2^2, \quad \Delta = m_1^2 - m_2^2, \quad (6.2)$$

а из (I.6.14)

$$z_s = 1 + \frac{t}{2q_s^2} = \left[1 + \frac{2st}{s^2 - s\Sigma + \Delta^2} \right]. \quad (6.3)$$

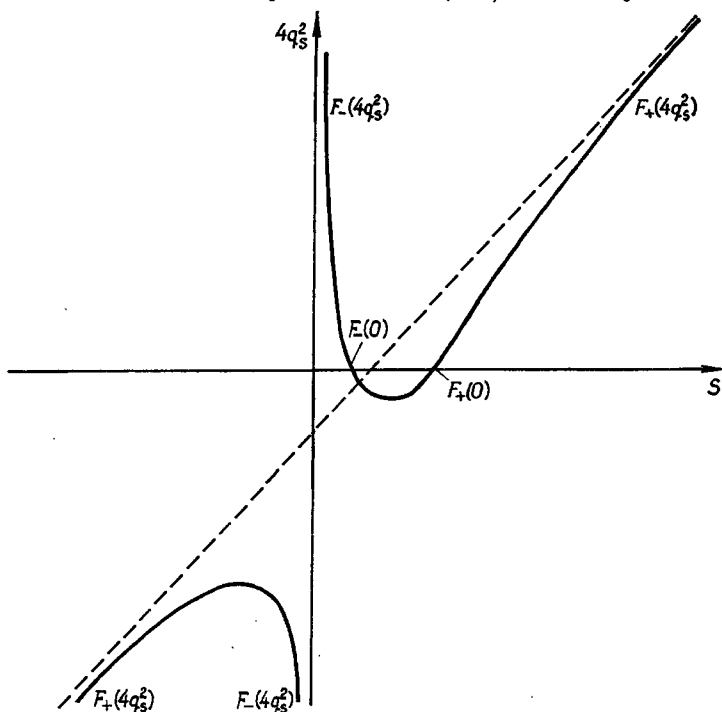
Основная трудность связана с неоднозначностью соответствия между q_s^2 и s , которая становится явной, если (6.1) разрешить относительно s :

$$s = \frac{1}{2} \{ \Sigma + 4q_s^2 \pm [(\Sigma + 4q_s^2)^2 - 4\Delta^2]^{1/2} \}, \quad (6.4)$$

или

$$s \equiv F_{\pm}(4q_s^2), \quad (6.5)$$

где в зависимости от выбора знака в (6.4) используется обозначение



Ф и г. III.3. Зависимость величины $4q_s^2$ от s , соответствующая двум решениям уравнения (6.4) (пунктирная линия соответствует случаю равных масс).

ние F_+ или F_- . Изменение величины $4q_s^2$, как функции от s , показано на фиг. III.3. Порог s -канала находится при

$$s_0 = (m_1 + m_2)^2 = F_+(0). \quad (6.6)$$

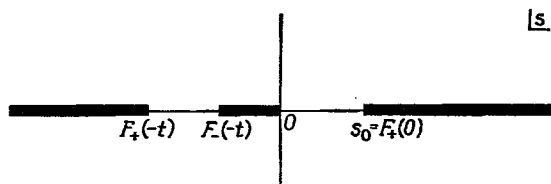
Особо следует отметить, что $q_s^2 \rightarrow \infty$ как при $s \rightarrow 0$, так и при $s \rightarrow \infty$, поэтому вклад одиночного полюса Редже (2.7)

$$A_R^\pm(s, t) = \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t}\right)^{\alpha(s)} (-t)^{\alpha(s)} Q_{-\alpha(s)-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right)$$

при $s=0$ становится неопределенным. Кроме того, из (6.3) следует, что имеется некоторая область изменения переменной s , а именно

$$F_-(-t) \leq s \leq 0, \quad (6.7)$$

в которой $|z_s| \leq 1$, так что при $t \rightarrow \infty$ в точке $s=0$ значения z_s ограничены единицей. Это обстоятельство является достаточно важ-



Фиг. III.4. Разрезы в s -плоскости при фиксированном (положительном) t в реджевском члене (2.7) в случае кинематики частиц с неравными массами.

ным, так как оно означает, что для рассеяния вперед в t -канале (т. е. при $s=0$) совсем не очевидно, что асимптотическое поведение будет обязательно реджевским.

Попытаемся теперь модифицировать выражение (2.7) в духе § 3, так чтобы оно удовлетворяло мандельштамовскому представлению. При этом окажется, что указанные аномалии в точке $s=0$ автоматически исчезают.

В случае равных масс разрезы для (2.7) приведены в выводах, следующих за формулой (2.9). Когда массы различны, разрезы по t при фиксированном s , очевидно, не меняются; то же справедливо и для разреза по s от $s=s_0$ до ∞ , который обусловлен функциями $\alpha(s)$ и $\Gamma(s)$. Все различие сосредоточено в разрезе от $q_s^2 = -\infty$ до $-t/4$, который теперь превращается в два разреза в s -плоскости:

от $s = -\infty$ до $F_+(-t)$ и

от $s=0$ до $F_-(-t)$.

Эти разрезы по s при положительном t показаны на фиг. III.4. Мы снова будем исходить из двойной спектральной функции (3.10)

$$\rho(s, t) = \Delta_s \left[-\Gamma(s) \left(\frac{q_s^2}{t}\right)^\alpha t^\alpha \sin \pi \alpha Q_{-\alpha-1} \left(1 + \frac{t}{2q_s^2}\right) \right] \theta(s-s_0) \theta(t),$$

которая после ее подстановки в (3.12) опять дает скачок $D_s^\pm(s, t)$, определяемый формулой (3.13). Однако если (3.10) подставить в (3.14),

то вследствие дополнительного разреза по s получим

$$\begin{aligned}
 D_t^\pm(s, t) = & -\Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t}\right)^\alpha t^\alpha \sin \pi\alpha Q_{-\alpha-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right) - \\
 & -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{F_+(-t)} \frac{\Gamma(s')}{s'-s} \left(-\frac{q_{s'}^2}{t}\right)^\alpha t^\alpha \sin \pi\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t}{2q_{s'}^2}\right) ds' - \\
 & -\frac{1}{2} \int_0^{F_-(-t)} \frac{\Gamma(s')}{s'-s} \left(-\frac{q_{s'}^2}{t}\right)^\alpha t^\alpha \sin \pi\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t}{2q_{s'}^2}\right) ds'. \quad (6.8)
 \end{aligned}$$

Таким образом, окончательно имеем [с учетом (3.11)]

$$\begin{aligned}
 A^\pm(s, t) = & \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t}\right)^\alpha (-t)^\alpha Q_{-\alpha-1} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{-4q_s^2} \frac{dt''}{t''-t} \Gamma(s) \left(-\frac{q_{s''}^2}{t''}\right)^\alpha (-t'')^\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t''}{2q_{s''}^2}\right) + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{F_+(-t)} \frac{\Gamma(s')}{s'-s} \left(-\frac{q_{s'}^2}{t}\right)^\alpha (-t)^\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t}{2q_{s'}^2}\right) ds' + \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^{F_-(-t)} \frac{\Gamma(s')}{s'-s} \left(-\frac{q_{s'}^2}{t}\right)^\alpha (-t)^\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t}{2q_{s'}^2}\right) ds' - \\
 & - \bar{B}(s, t) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\Delta_s \{B_M(s', t)\}}{s'-s} ds'. \quad (6.9)
 \end{aligned}$$

Последний член, стоящий в правой части (6.9), в представлении (3.16) не выписывался. Он соответствует вкладу от той части фонового интеграла [см. (3.8)], которая удовлетворяет мандельштамовскому представлению, т. е. от той части $B^\pm(s, t)$, разрезы которой целиком лежат в области, где отлична от нуля двойная спектральная функция. Полная функция $B^\pm(s, t)$ задается всеми слагаемыми (6.9) за исключением первого. Член с B_M записан в виде интеграла от скачка по s просто для того, чтобы напомнить, что при $s < s_0$ он не может иметь никаких сингулярностей по s . По построению амплитуда (6.9) удовлетворяет мандельштамовскому представлению, но следует еще проверить ее асимптотическое поведение, которое всюду должно быть реджевским, и убедиться в том, что действительно $B^\pm(s, t) \sim t^{-1/2}$. Из (6.1) и (6.3) находим, что при $s \rightarrow 0$

$$q_s^2 \rightarrow \frac{\Delta^2}{4s} \quad (6.10)$$

и

$$z_s \rightarrow 1 + \frac{2st}{\Delta^2};$$

поэтому первый член в (6.9) при $s = 0$ заведомо является сингулярным. Но так как амплитуда $A^\pm(s, t)$ удовлетворяет мандельштамовскому представлению, она не может иметь сингулярностей при $s = 0$ (если, конечно, нет связанного состояния, которому соответствует полюс с $\alpha(0)$, равным целому числу; но это сингулярности совершенно иного типа, и здесь они пока не рассматриваются). Таким образом, какой-то из других членов должен иметь сингулярность, которая компенсирует сингулярность первого члена. И действительно, сразу видно, что четвертый член в правой части (6.9) сингулярен; ниже будет показано в явном виде, как происходит необходимая компенсация. Сначала, однако, рассмотрим асимптотическое поведение при $s \neq 0$.

Имеем

$$A^\pm(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} c_1 t^{\alpha(s)} + c_2 t^{-1} + c_3 t^{\alpha(-\infty)} + c_4 t^{\alpha(0)-1} + c_5 t^{-1} + ? \quad (6.11)$$

где отдельные слагаемые соответствуют различным членам (6.9), которые аналогичны обсуждавшимся в § 3, за исключением того, что теперь мы не можем установить характер поведения $B_M(s, t)$, а поведение четвертого члена заранее не очевидно. Чтобы показать, что он действительно ведет себя как $t^{\alpha(0)-1}$, запишем его в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{F_-(-t)} \frac{\Gamma(s') (q_s^2)^{\alpha} P_{\alpha}(-1 - t/2q_s^2)}{s' - s} ds' = \\ & = \int_0^{-\Delta^2/t} + \int_{-\Delta^2/t}^{F_-(-t)} \frac{1}{2} \frac{\Gamma(s') (q_s^2)^{\alpha} P_{\alpha}(-1 - t/2q_s^2)}{s' - s} ds'. \end{aligned} \quad (6.12)$$

При $t \rightarrow \infty$

$$F_-(-t) \rightarrow -\frac{\Delta^2}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right),$$

поэтому второй интеграл будет иметь степень по t , на единицу меньшую, чем первый, так что им можно пренебречь. Запишем первый интеграл в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^{-\Delta^2/t} \left\{ \Gamma(s') (q_s^2)^{\alpha(s')} P_{\alpha(s')} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right) - \right. \\ & \left. - \Gamma(0) \left(\frac{\Delta^2}{4s'} \right)^{\alpha(0)} P_{\alpha(0)} \left(-1 - \frac{2s't}{\Delta^2} \right) \right\} \frac{ds'}{s' - s} + \\ & + \frac{1}{2} \int_0^{-\Delta^2/t} \Gamma(0) \left(\frac{\Delta^2}{4s'} \right)^{\alpha(0)} P_{\alpha(0)} \left(-1 - \frac{2s't}{\Delta^2} \right) \frac{ds'}{s' - s}, \end{aligned} \quad (6.13)$$

где из подынтегрального выражения мы вычли член, определяющий поведение в точке $s' = 0$, в которой сингулярно q_s^2 ; он включен во вто-

рой интеграл и рассматривается отдельно. Опять асимптотика по t у первого интеграла содержит степень, на единицу меньшую, чем у второго, так что его можно отбросить. Второй интеграл в (6.13) и является тем «опасным» членом, который мы стремились выделить. Полус $s' = 0$ подынтегрального выражения сливается с одним из пределов интегрирования. Рассматривая выражение

$$\left(\frac{\Delta^2}{4s}\right)^{\alpha(0)} Q_{-\alpha(0)-1}\left(-1-\frac{2st}{\Delta^2}\right) \quad (6.14)$$

с точки зрения обсуждавшихся в § 2 разрезов для функций Лежандра, находим, что оно имеет лишь один разрез по s (при фиксированном t) от $s = 0$ до $-\Delta^2/t$, т. е. от $z = -1$ до 1. Другой разрез при $z < -1$ сокращается благодаря соотношению (2.9). Из (II.11.1) следует, что если бы из-за асимптотики (t фиксировано)

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta^2}{4s}\right)^{\alpha(0)} Q_{-\alpha(0)-1}\left(-1-\frac{2st}{\Delta^2}\right) = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma[-\alpha(0)]}{\Gamma[-\alpha(0)+1/2]} (-t)^{\alpha(0)}$$

второй интеграл в (6.13) не обращался в бесконечность, то он был бы дисперсионным интегралом для выражения (6.14) вдоль его разрезов по s . Таким образом, в точке $s = \infty$ необходимо сделать вычитание, и мы получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\Delta^2}{4s}\right)^{\alpha(0)} Q_{-\alpha(0)-1}\left(-1-\frac{2st}{\Delta^2}\right) - \sqrt{\pi} \frac{\Gamma[-\alpha(0)]}{\Gamma[-\alpha(0)+1/2]} (-t)^{\alpha(0)} = \\ & = \lim_{s_1 \rightarrow \infty} \frac{s-s_1}{2} \int_0^{-\Delta^2/t} \frac{ds'}{(s'-s)(s'-s_1)} \left(\frac{\Delta^2}{4s'}\right)^{\alpha(0)} P_{\alpha(0)}\left(-1-\frac{2s't}{\Delta^2}\right) = \\ & = -\frac{1}{2} \int_0^{-\Delta^2/t} \frac{ds'}{s'-s} \left(\frac{\Delta^2}{4s'}\right)^{\alpha(0)} P_{\alpha(0)}\left(-1-\frac{2s't}{\Delta^2}\right). \quad (6.15) \end{aligned}$$

Следовательно, асимптотическое поведение по t интеграла (6.12) определяется асимптотикой по t левой части (6.15), которая, как и утверждалось выше, имеет вид $t^{\alpha(0)-1}$. Все отброшенные члены в самом худшем случае ведут себя как $t^{\alpha(0)-2}$.

В (6.11) имеется одна кажущаяся трудность, связанная с тем, что явно выписанные члены приводят к асимптотическому поведению функции $B^\pm(s, t)$ вида $t^{\alpha(0)-1}$. Напомним, однако, что при сравнении (2.7) с (6.9) получаем

$$\begin{aligned} B^\pm(s, t) &= \frac{1}{2} \int_0^{-4q_s^2} \frac{dt''}{t''-t} \Gamma(s) \left(-\frac{q_s^2}{t''}\right)^\alpha (-t'')^\alpha P_\alpha\left(-1-\frac{t''}{2q_s^2}\right) + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{F_+(-t)} \frac{\Gamma(s')}{s'-s} \left(-\frac{q_{s'}^2}{t}\right)^\alpha (-t)^\alpha P_\alpha\left(-1-\frac{t}{2q_{s'}^2}\right) ds' + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \int_0^{F-(-t)} \frac{\Gamma(s')}{s'-s} \left(-\frac{q_s^2}{t}\right)^\alpha (-t)^\alpha P_\alpha \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2}\right) ds' - \\
& - \bar{B}(s, t) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\Delta_s \{B_M(s', t)\}}{s'-s} ds'. \quad (6.16)
\end{aligned}$$

Мы знаем, что левая часть этого соотношения ведет себя как $t^{-1/2}$; поэтому более плохое поведение, вызываемое различными членами правой части, должно компенсироваться последним членом, про асимптотику которого еще ничего не говорилось. Мы уже видели, что, например, для померанчона, по-видимому, $\alpha(0) = 1$, так что в любой амплитуде, в которую дает вклад эта траектория, должна иметь место указанная компенсация. В таком случае последний член в (6.16)

$$\frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\Delta_s \{B_M(s', t)\}}{s'-s} ds'$$

должен асимптотически вести себя как $t^{\alpha(0)-1}$, несмотря на то, что при всех s' подынтегральное выражение $\sim t^{-1/2}$. Поэтому некоторые авторы [208, 209] высказывают сомнения в возможности согласования реджевского и мандельштамовского представлений для тех амплитуд, у которых полюс таков, что $\alpha(0) > 1/2$. В действительности, однако, нет никаких реальных оснований считать, что необходимая компенсация действительно невозможна.

Рассмотрим сначала, что происходит в точке $s = 0$. Первый член в (6.9) сокращается с первым членом левой части (6.15), поэтому ведущая асимптотика определяется вторым членом в (6.15), который не содержит сингулярностей по s и ведет себя как $t^{\alpha(0)}$. Следовательно, при $s = 0$ амплитуда сохраняет реджевское асимптотическое поведение, но оно связано не с самим слагаемым $A_R^\pm(s, t)$, а с тем, что имеющаяся у него сингулярность при $s = 0$ действительно компенсируется членом $B^\pm(s, t)$, как это и должно быть.

Разлагая $Q_{-\alpha(0)-1}$ в левой части (6.15) в ряд по степеням z^{-2} , получаем

$$\frac{c'_4}{s} t^{\alpha(0)-1} + \frac{c''_4}{s^2} t^{\alpha(0)-2} + \dots, \quad (6.17)$$

где $c'_4/s = c_4$. Выше указывалось, что существуют и некоторые другие члены, ведущие себя как $t^{\alpha(0)-2}$. Таким образом, наша задача сводится к построению такой функции $B_M(s, t)$, входящей в (6.16), которая компенсировала бы это поведение, приводя тем самым к асимптотике $B(s, t) \sim t^{-1/2}$. С другой стороны, поскольку эта функция ведет себя как фоновый член, должно выполняться требование

$$\Delta_s \{B_M(s, t)\} \sim t^{-1/2}; \quad (6.18)$$

кроме того, $B_M(s, t)$ при $s = 0$ не может иметь сингулярностей выражения (6.17). Но эти сингулярности, конечно, и не нужны, так как мы уже знаем, что они сокращаются с сингулярностями $A_R^\pm(s, t)$. Итак, должно выполняться требование

$$B_M(s, t) \sim \begin{cases} \frac{1}{s} t^{\alpha(0)-1} & \text{при } s \neq 0, \\ t^{-1/2} & \text{при } s = 0. \end{cases}$$

Такое требование, приводящее к отсутствию единообразного поведения функции $B_M(s, t)$, на первый взгляд представляется довольно странным. Но, конечно, оно является не более странным, чем отсутствие единообразия у других членов представления (6.9). В действительности именно это обстоятельство и вынуждает нас обратиться к столь длинным рассуждениям.

Функция $B_M(s, t)$, удовлетворяющая всем требованиям, может иметь следующий вид:

$$B_M(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\Delta_s \{ \Gamma(s') (q_s^2)^{\beta(s')} Q_{-\beta(s')-1}(-1-t/2q_s^2) (1/1+s't) \}}{s' - s} ds', \quad (6.19)$$

где $\beta(0) = \alpha(0) - 1$. Если $\beta(s) < 1/2$ при всех s , то условие (6.18) выполняется. Этот интеграл можно вычислить так же, как это делалось при получении представления (6.9), из скачка $D_s^\pm(s, t)$, но с тем отличием, что теперь подынтегральное выражение имеет дополнительный полюс при $s' = -1/t$. При $t \rightarrow \infty$ этот полюс дает вклад типа $t^{\beta(0)}/s$, поэтому если $\beta(0) = \alpha(0) - 1$, то всегда можно добиться того, чтобы он сокращался с (6.17). Однако при $s = 0$ $B_M(s, t)$ не имеет сингулярностей. Эти проблемы рассмотрены в работе [323]. Конечно, функция (6.19) не имеет каких-либо особых достоинств; она лишь показывает, что можно построить член со всеми необходимыми свойствами. Вопрос о том, выбрала ли природа именно такой способ компенсации асимптотического поведения фоновым интегралом, должен решаться экспериментально, и он будет рассмотрен в § 8. В следующем параграфе рассматривается другой возможный механизм компенсации за счет введения дополнительных траекторий, известных под названием «дочерних» траекторий.

Если $\alpha(-\infty)$ превышает $-1/2$, то в осуществлении намеченной нами программы возникают некоторые трудности, так как в этом случае необходимо сначала отыскать такую область переменной s (не обязательно на физическом листе), в которой $\alpha(s) < -1/2$, затем совершить преобразование Зоммерфельда — Ватсона и, наконец, осуществить аналитическое продолжение в нужную область. Насколько нам известно, за эту задачу никто еще не брался. Имеются также некоторые формальные проблемы, связанные со сгущением полюсов на пороге, которое возникает в том случае, когда фоновый интеграл вычисляется вдоль прямой, сдвинутой левее линии $\text{Re } l = -1/2$.

§ 7. ДОЧЕРНИЕ ТРАЕКТОРИИ

В предыдущем параграфе отмечалось, что реджевское асимптотическое поведение сохраняется даже в точке $s = 0$, в которой сам реджевский полюсный член становится неопределенным, но имеет место его компенсация функцией $B^\pm(s, t)$. Вследствие этих усложнений может показаться, что удобнее работать со степенным разложением Хури, описанным в § 5, в котором гарантировано единое асимптотическое поведение по t при всех s . Однако, взглянув на (5.8), сразу же можно увидеть, что трудности, свойственные кинематике неравновесных масс, должны появляться и здесь. Они возникают из-за поведения величины q_s^2 при $s = 0$, которое определяется формулой (6.10). Каждый из членов суммы по n в (5.8) имеет при $s = 0$ полюс n -го порядка по s . Как компенсируются эти сингулярности? Существуют две возможности. Можно обратиться к тем же аргументам, которые были приведены в предыдущем параграфе, условившись, что сингулярности компенсируются фоновым интегралом. Такая возможность рассмотрена в работе [164], но так как при такой компенсации почти несомненно будет более предпочтительным представление Чью—Джонса из предыдущего параграфа, то мы здесь не будем воспроизводить соответствующую аргументацию. Степенное разложение Хури упоминается в связи с тем, что оно делает совершенно ясным другой тип сокращения, впервые рассмотренный в работах [187, 188], а именно сокращение членов, принадлежащих разным траекториям.

Самую правую из траекторий, которые входят в (5.8), обозначим через $\alpha_0(s)$. Тогда, выписывая первые члены суммы по n , получаем

$$-8\pi \frac{\gamma_0(s) [2\alpha_0(s) + 1]}{4^{\alpha_0(s)} \cos \pi\alpha_0(s)} \frac{\Gamma[-\alpha_0(s)]}{\Gamma[-2\alpha_0(s)]} \times \\ \times \left\{ (-t)^{\alpha_0(s)} - \frac{\alpha_0(s)}{2} 4q_s^2 (-t)^{\alpha_0(s)-1} + \dots \right\}. \quad (7.1)$$

Второй член, который при $s=0$ имеет простой полюс по s , сокращается с главным членом второго полюса Редже $\alpha_1(s)$, если вычет в этом полюсе $\gamma_1(s)$ сам имеет полюс при $s=0$, а $\alpha_1(0) = \alpha_0(0) - 1$. В явном виде это требование имеет вид

$$\gamma_1(s) = -\frac{\gamma_0(0) [2\alpha_0(0) + 1] \Delta^2}{4s} + \text{регулярная часть} \quad (7.2)$$

вблизи точки $s=0$. Потребуем также, чтобы для третьей траектории $\alpha_2(s)$ выполнялось требование

$$\alpha_2(0) = \alpha_0(0) - 2$$

и соответствующий вычет имел при $s = 0$ двойной полюс. При этом главный член α_2 будет сокращаться с третьим членом α_0 и со вторым членом α_1 и т. д. Таким образом, требуется существование бесконечного множества траекторий со все более сингулярными вычетами.

Траектория $\alpha_1(s)$ обычно называется первой «дочерью» траектории $\alpha_0(s)$, $\alpha_2(s)$ — второй «дочерью» и т. д. (Этих «дочерей», для которых характерны сингулярные вычеты, не следует смешивать с сопутствующими полюсами Хури, см. § 5.)

Таким образом, складывая вклады от родительской и первой дочерней траекторий, получаем

$$G(s) \left\{ (-t)^{\alpha_0(s)} + \frac{a(s)}{s} (-t)^{\alpha_0(s)-1} + \dots + \frac{b(s)}{s} (-t)^{\alpha_1(s)} + \dots \right\}, \quad (7.3)$$

где различные множители, входящие в (7.1) и (7.2), включены в функции $G(s)$, $a(s)$ и $b(s)$, которые регулярны при $s=0$. Разлагая это выражение в ряд по s в точке $s=0$ и производя сокращение сингулярностей типа $1/s$, находим

$$G(0) \left\{ (-t)^{\alpha_0(0)} + c [\alpha'_0(0) - \alpha'_1(0)] \Delta^2 \ln t (-t)^{\alpha_0(0)-1} + d (-t)^{\alpha_0(0)-1} + \dots \right\}, \quad (7.4)$$

где c и d — некоторые константы. Логарифмический член характерен для случая неравных масс.

Если отлична от нуля только одна из разностей масс $m_1 - m_3$ и $m_2 - m_4$, то можно показать, что вклад первого сопутствующего полюса Хури не будет сингулярным, поэтому дочерние траектории нечетного порядка не требуются — достаточно ввести лишь дочерние траектории четного порядка.

Хотя приведенное выше изложение основано на использовании представления Хури, дочерние траектории можно ввести и для того, чтобы добиться необходимого сокращения сингулярностей в представлении Чью — Джонса [191]. Действительно, если, как и прежде, имеется дочерняя траектория, для которой $\alpha_1(0) = \alpha_0(0) - 1$, причем

$$\Gamma_1(s) = -\frac{\Delta^2}{4s} [2\alpha_0(s) + 1] \Gamma_0(0) \text{ вблизи } s=0,$$

то наши вычисления, касающиеся поведения при $s=0$ [см. соотношение (6.12) и далее] следует видоизменить, так как один из пределов интегрирования сливается теперь с двойным полюсом при $s=0$. Тогда, подставляя во второй интеграл, входящий в (6.13), вместо $\Gamma(s)$ функцию $\Gamma_1(s)$ и применяя теорему о вычетах, получим члены, ведущие себя как $t^{\alpha_1(0)}/s$, т. е. члены, имеющие как раз тот вид, который необходим для компенсации сингулярностей выражения (6.16). Конечно, если на каком-то этапе не учесть вклада в компенсацию сингулярностей фонового интеграла, то для компенсации сингулярностей всех членов придется снова ввести бесконечное множество траекторий со все более сингулярными вычетами.

Столь сложная структура плоскости углового момента, возникающая в том случае, когда не прибегают к компенсации членов типа $t^{\alpha(0)-1}$ фоновым интегралом, может вызвать сомнения в согласованности

реджевского и мандельштамовского представлений. В этой связи в работах [187—190] предпринята попытка привести дополнительные доказательства в пользу существования дочерних траекторий, основанная на анализе свойств уравнения Бете — Солпитера, для которого, как известно, в рамках теории возмущений можно установить связь с полюсами Редже (см. гл. VII). Показано, что дочерние траектории могут возникать как следствие четырехмерной симметрии уравнения Бете — Солпитера при $s = 0$, что было выяснено ранее в работе [151]. Сравнительно недавно такого рода дополнительные симметрии, появляющиеся при $s = 0$, рассмотрены с более общей точки зрения, основанной на инвариантности относительно преобразований группы $O(4)$ [159, 312, 189, 170, 150] и охватывающей также проблему «конспираций», которая обсуждается в следующей главе. Соответствующие аргументы пока объясняют лишь, почему дочери могут существовать, но не доказывают необходимость их появления, причем более экономная компенсация сингулярностей фоновым интегралом представляется нам не менее удовлетворительной.

§ 8. НЕКОТОРЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ СЛЕДСТВИЯ

Хотя рассмотрение экспериментальных следствий гипотезы полюсов Редже мы отложили до гл. VIII, но здесь уместно упомянуть некоторые из свойств, которые вытекают из содержания данной главы. Следует напомнить читателю, что ради простоты мы ограничивались амплитудами с определенной сигнатурой, причем учитывалась лишь одна двойная спектральная функция. Для физических амплитуд чаще всего необходимо производить перестановку переменных и включать сигнатурные множители.

Прежде всего предсказывается, что даже в тех областях, где на величину z_s наложено условие (6.7), исключающее на первый взгляд реджевское асимптотическое поведение, оно все же справедливо. Хорошо известным примером такого рода служит упругое πN -расщепление (принимаемое за s -канал) назад ($u = 0$), для которого ожидается, что амплитуда будет определяться при больших s значениями N - и N^* (Δ)-траекторий в $\pi N(u)$ -канале, хотя $u = 0$ — сингулярная точка (соответствующая нашему $s = 0$) и $|z_u| \leq 1$ при $0 \leq u \leq \Delta^2/s$. Эта проблема обсуждалась в ряде работ [46, 47, 120, 375], а общий анализ реджевских представлений в случае такой кинематики содержится в работе [209] (правда, кинематика здесь несколько отличается от нашей, что обусловлено потерей симметрии между переменными u и t в случае неравных масс в s -канале). Общее описание соответствующей подгонки следует отложить до тех пор, пока мы не рассмотрим спин; оно будет дано в гл. VIII; здесь можно просто отметить, что асимптотическое поведение подтверждается достаточно хорошо.

Другая важная проблема связана с существованием дочерних траекторий. Мы видели, что они должны компенсировать сингулярности

родительской траектории в амплитуде данной сигнатуры, т. е. должны иметь те же квантовые числа, что и родительская траектория. Однако из определения (II.10.3) видно, что поскольку мы требуем, чтобы компенсация имела место не только в $A^\pm(s, t)$, но и в $\bar{A}(s, t)$, первая дочерняя траектория, а также все другие нечетные дочерние траектории должны иметь сигнатуру, противоположную сигнатуре родительской траектории и четных дочерних траекторий. Таким образом, при $s = 0$ родительская траектория содержит сигнатурный множитель

$$1 \pm e^{i\pi\alpha_0(0)},$$

тогда как первая дочерняя траектория имеет множитель

$$1 \pm e^{i\pi\alpha_1(0)} = 1 \mp e^{i\pi\alpha_0(0)},$$

так как $\alpha_1(0) = \alpha_0(0) - 1$. Компенсация будет происходить лишь в том случае, если первая дочерняя траектория имеет сигнатуру, противоположную родительской, вторая дочерняя траектория имеет ту же сигнатуру, что и родительская и т. д. Таким образом, сигнатура будет чередоваться. Отсюда вытекает важное следствие, что не существует частицы с нулевой массой и нулевым спином, соответствующей первой дочери траектории Померанчука.

Нам известны лишь значения дочерних траекторий при $s = 0$. Если сделать вполне вероятное предположение, что они идут более или менее параллельно родительским траекториям, то можно ожидать большого количества новых частиц там, где дочерние траектории принимают соответствующие целочисленные значения. Так например, нуклонная траектория, показанная на фиг. VIII.3, должна иметь дочернюю траекторию со спином $3/2^-$ и с массой около 1700 Мэв, которая не столь уж сильно отличается от резонанса $N^*(1518)$. Кроме того, возможно, что все траектории с положительной четностью на фиг. VIII.4 являются дочерьми траекторий, изображенных на фиг. VIII.3. С помощью прямых методов детектирования какие-либо другие частицы такого рода могли быть просто не замечены, но их существование, по-видимому, исключается и чрезвычайно чувствительными интерференционными методами [46, 47], которые рассматриваются в гл. VIII, § 8.

В настоящее время не известно ни одной частицы, которую можно было бы считать лежащей на первой дочерней траектории какой-либо мезонной траектории, хотя в гл. VIII, § 1 и будет упомянута возможность отождествления частицы $\delta(985)$ с дочерней траекторией ρ -мезона.

Поскольку для всех дочерних траекторий $\alpha(0) \leq 0$, возможно, что эти траектории являются очень пологими, и они никогда не будут проявляться в виде частиц. Возможно также, что по каким-то причинам в точках, соответствующих физическим целым значениям, их вычеты обращаются в нуль. В обоих случаях эти траектории можно пытаться обнаружить по их воздействию на высокоэнергетическое поведение сечений соответствующих реакций (эти методы подробно

рассматриваются в гл. VIII). Трудность здесь состоит в том, что «неправильная» сигнатура приводит к отсутствию связи мезонных траекторий (вероятность обнаружить которые таким способом гораздо больше вероятности обнаружить барионы) с большинством доступных процессов. Так, например, помераншон, для которого $B = Y = I = 0$, $G = +1$, должен иметь дочернюю траекторию, которая может привести к появлению мезона 1^- . Если траектория связана, скажем, с процессами $a - \bar{a}$ или $b - \bar{b}$, то можно было бы надеяться обнаружить этот мезон, изучая упругое $a - b$ -рассеяние. Однако поскольку в любом эксперименте по крайней мере одна из частиц a и b должна быть нуклоном (другая может быть π , K и N), а дочерняя траектория не связана с $\pi - \pi$ -рассеянием, так как статистика Бозе исключает состояние 1^- этой системы с $I = 0$, и не связана ни с $N - \bar{N}$ -, ни с $K - \bar{K}$ -рассеянием вследствие G -четности (см., например, [260], стр. 331), этот метод не приведет к успеху. Первую дочернюю траекторию можно надеяться обнаружить лишь в процессах двойного рождения, таких как $N + N \rightarrow N^* + N^*$, где ни одна из вершин не содержит пару частица — античастица. Аналогичные замечания справедливы и для первой дочерней траектории ρ -мезона. Большинство других траекторий лежат слишком низко, чтобы их дочери были наблюдаемыми, причем это справедливо и для вторых дочерей всех траекторий, которые обладают более хорошим поведением. Так как, кроме того, G -четность запрещает большинство прямых распадов бозонных дочерних траекторий, то совсем не удивительно, что они не наблюдались непосредственно в качестве частиц.

В настоящее время единственными свидетельствами в пользу существования дочерних траекторий являются только чисто теоретические соображения.

§ 1. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ПАРЦИАЛЬНЫМ ВОЛНАМ
ДЛЯ ЧАСТИЦ СО СПИНОМ

В этой главе мы обобщим предшествующий анализ таким образом, чтобы он был применим к рассеянию частиц с ненулевым спином. Очевидно, такое обобщение необходимо для большинства практических приложений теории. Как будет видно из дальнейшего, оно не является тривиальным, так как параллельно с резким возрастанием алгебраических трудностей возникает и ряд существенно новых характерных особенностей. К счастью, в большинстве приложений спины рассматриваемых частиц невелики, поэтому формализм остается достаточно простым. Однако весьма поучительно продемонстрировать и те изящные методы, которые позволяют развить теорию с полной общностью. С применениями этих методов в конкретных задачах мы будем иметь дело в гл. VIII.

Существует весьма обширная литература, в которой идеи, связанные с полосами Редже, обобщаются на частицы со спином. В рамках потенциального рассеяния соответствующую теорию развили Шарап и Сквайрс [90—92], а также Десай и Ньютон [144]; эти авторы рассматривали частицы, каждая из которых имеет спин $1/2$. Релятивистский случай изучался в работах [78, 79, 205, 206, 267, 292]. Эндриус и Гансон [21] предложили более формальный подход и ввели функции $e_{\lambda\lambda'}$, которые определяются и используются ниже. Все эти исследования основаны на применении формализма спиральных амплитуд, развитого Якобом и Вико [247]. Дальнейший прогресс связан с использованием спиральной кроссинг-матрицы, которая связывает между собой спиральные амплитуды двух разных каналов. Она была введена и выписана в явном виде Труменом и Вико [393] и Музиничем [310]; в более поздней работе [123] предложен другой вывод этой матрицы. Используя эту кроссинг-матрицу, Хара [310] и Уонг [393] показали в явном виде, как можно полностью выделить кинематические сингулярности спиральных амплитуд. Стапп [378] получил аналогичные результаты, используя несколько другие основные предположения. Общую формулировку теории можно найти также в недавних работах Мюллера и Трумена [307, 308] и Дрекслера [152]. Более конкретный анализ некоторых феноменологических приложений содержится в работах [183—185, 177, 384, 400, 401]. Определенный класс кинематических ограничений более подробно изучил Лидер [272]. В заключение этого литературного обзора отметим, что суще-

ствуют и альтернативные, хотя физически и эквивалентные, методы «реджезации», использующие вместо спиральных амплитуд «инвариантные амплитуды»; краткое описание последних методов можно найти в работах [159, 257, 383].

В этой главе используется формализм спиральных амплитуд Якоба и Вика [247]. Спиральность частицы (I.2.5) определяется как проекция ее спинового углового момента на направление движения. Она является инвариантной величиной, поэтому при заданных спиральностях входящих и уходящих частиц амплитуда рассеяния непосредственно зависит также от скалярных инвариантов s и t . Таким образом, если спиральность i -й частицы обозначить через λ_i , то амплитуду можно записать в виде $\langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$. Будем нормировать эту амплитуду способом, аналогичным случаю частиц нулевого спина (гл. I), так что дифференциальное сечение, усредненное по начальным спиральностям и просуммированное по конечным спиральностям, будет даваться формулой [ср. (I.7.10)]

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{q_{s34}}{q_{s12}} \frac{1}{(8\pi)^2 s} \frac{1}{(2\sigma_1 + 1)(2\sigma_2 + 1)} \sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} |\langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle|^2, \quad (1.1)$$

где σ_i — спин i -й частицы.

Разложение по парциальным волнам, аналогичное (II.1.3), приведено Якобом и Виком [247]; его можно записать в виде

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ & = 16\pi \sum_{J=\max(|\lambda|, |\lambda'|)} (2J+1) \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^J(\theta), \end{aligned} \quad (1.2)$$

где

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2, \quad (1.3a)$$

$$\lambda' = \lambda_3 - \lambda_4, \quad (1.3b)$$

а $d_{\lambda\lambda'}^J(\theta)$ — матрица вращения, которая подробно рассматривается в следующем параграфе. Смысл величин λ и λ' становится ясным, если вспомнить, что в системе центра масс две частицы движутся в противоположные стороны, так что λ и λ' являются проекциями полного спина на направление движения до и после столкновения. Поскольку проекция орбитального момента на это направление равна нулю, λ и λ' являются фактически и проекциями полных угловых моментов на направления движения до и после столкновения. Отсюда следует, что физические значения J должны быть больше максимума величин λ и λ' , что и указано в (1.2). Кроме того, сохранение полного углового момента требует, чтобы в направлении вперед, для которого λ и λ' являются проекциями полного углового момента на это же направление, амплитуда обращалась в нуль во всех случаях, кроме $\lambda = \lambda'$. Это свойство является, конечно, автоматическим следствием нашей записи, и ниже мы им воспользуемся.

При заданном σ_i имеется $\prod_{i=1}^4 (2\sigma_i + 1)$ спиральных амплитуд. Однако не все они независимы, так как инвариантность относительно пространственного отражения и обращения времени устанавливает определенные соотношения между ними (будем считать, что эти принципы инвариантности справедливы для всех рассматриваемых процессов). Из сохранения четности получаем [247]

$$\begin{aligned} & \langle -\lambda_3, -\lambda_4 | A_J(s) | -\lambda_1, -\lambda_2 \rangle = \\ & = \prod_{i=1}^4 \eta_i (-1)^{\sigma_3 + \sigma_4 - \sigma_1 - \sigma_2} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где η_i — внутренняя четность i -й частицы, а из обратимости времени следует

$$\langle \lambda_1 \lambda_2 | A_J(s) | \lambda_3 \lambda_4 \rangle = \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \quad (1.5)$$

В дальнейшем часто оказывается удобным воспользоваться этими симметриями, позволяющими без потери общности рассматривать лишь амплитуды, для которых

$$\lambda \geq |\lambda'|. \quad (1.6)$$

В результате некоторые соотношения принимают более простой вид.

Воспользовавшись свойством ортогональности функций $d_{\lambda\lambda'}^J$, которое будет сформулировано в § 2 в виде формулы (2.3), разложение (1.2) можно обратить, и в результате для физических значений J , т. е. для $J = \lambda, \lambda + 1, \lambda + 2, \dots$, получим

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = \\ & = \frac{1}{32\pi} \int_{-1}^{+1} dz \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^J(\theta). \end{aligned} \quad (1.7)$$

Это выражение аналогично формуле (II.1.1).

§ 2. СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ И $e_{\lambda\mu}^J(\theta)$

Прежде чем перейти к дальнейшему рассмотрению, необходимо обсудить свойства функций $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$, которые входят в (1.2). Для упрощения ссылок мы приведем в этом параграфе все необходимые для дальнейшего формулы. Кроме того, здесь же мы рассмотрим и связанные с $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ функции $e_{\lambda\mu}^J(\theta)$, которые будут использоваться ниже. Этот параграф носит полностью математический характер и представляет собой по существу перечень различных формул.

Функции $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ определяются и рассматриваются, например, в книгах Роуза [348] и Эдмондса [161]. Они обладают следующими

свойствами симметрии:

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) = d_{-\lambda, -\mu}^J(\theta) = (-1)^{\lambda-\mu} d_{\mu\lambda}^J(\theta) \quad (2.1)$$

и

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) = (-1)^{J+\lambda} d_{\lambda, -\mu}^J(\pi - \theta). \quad (2.2)$$

Эти функции удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\int_0^\pi d_{\lambda\mu}^J(\theta) d_{\lambda'\mu'}^{J'}(\theta) \sin \theta d\theta = \delta_{JJ'} \frac{2}{2J+1}, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{2} \sum_J (2J+1) d_{\lambda\mu}^J(\theta) d_{\lambda\mu}^J(\theta') = \delta(\cos \theta - \cos \theta') \quad (2.4)$$

и

$$\sum_\lambda d_{\lambda\mu}^J(\theta) d_{\lambda\mu'}^{J'}(\theta) = \delta_{\mu\mu'}. \quad (2.5)$$

Аналитические свойства $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ как функций переменной $z = \cos \theta$ можно получить, выражая их через полиномы Якоби $P_n^{ab}(z)$:

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) = (-1)^{N-\mu} \left[\frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+N)!(J-N)!} \right]^{1/2} \left(\frac{1-z}{2} \right)^{|\lambda-\mu|/2} \times \\ \times \left(\frac{1+z}{2} \right)^{|\lambda+\mu|/2} P_{J-M}^{|\lambda-\mu|/2, (\lambda+\mu)}(z), \quad (2.6)$$

где

$$M = \max(\lambda, \mu), \quad (2.7)$$

$$N = \min(\lambda, \mu), \quad (2.8)$$

причем это соотношение справедливо только при $M \geq 0$. В других случаях можно воспользоваться свойствами симметрии (2.1).

При n , не равном отрицательному целому числу, $P_n^{ab}(z)$ являются полиномами, поэтому из (2.6) следует, что при таких значениях n функции $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ аналитичны по z всюду, за исключением возможных сингулярностей при $z = \pm 1$, которые соотношением (2.6) определяются в явном виде.

Иногда бывает полезным выразить функции $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ через более привычные полиномы Лежандра. Это можно сделать, воспользовавшись так называемым рядом Клебша — Гордана

$$d_{\lambda\mu}^M(\theta) d_{\lambda\mu}^J(\theta) = \sum_{\tau=-M}^M P_{J+\tau}(z) C(JMJ+\tau; \lambda, -\lambda) C(JMJ+\tau; \mu, -\mu) \quad (2.9)$$

совместно с выражением

$$d_{\lambda\mu}^M(\theta) = (-1)^{N-\lambda} \frac{(2M)!}{(\lambda+\mu)! |\lambda-\mu|!} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{(\lambda+\mu)/2} \left(\frac{1-z}{2}\right)^{|\lambda-\mu|/2}, \quad (2.10)$$

справедливым при $M \geq 0$. Формулу (2.9) можно использовать и при значениях J , отличных от целых чисел, если продолжить коэффициенты Клебша—Гордана с помощью их явных выражений, полученных Вигнером и Рака (см. [90]):

$$\begin{aligned} C(J+a, b, J+c; d, e) &= (2J+2c+1)^{1/2} \times \\ &\times \left[\frac{(2J+a-b+c)! (-a+b+c)! (a+b-c)! (J+c+d+e)! (J+c-d-e)!}{(2J+a+b+c+1)! (J+a-d)! (J+a+d)! (b-e)! (b+e)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \sum_v \frac{(-1)^{v+b+e}}{v!} \frac{(J+b+c+d-v)! (J+a-d+v)!}{(-a+b+c-v)! (J+c+d+e-v)! (J+a-b-d-e+v)!}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Чтобы проанализировать аналитические свойства $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ в J -плоскости, удобно выразить эти функции через гипергеометрическую функцию

$$\begin{aligned} d_{\lambda\mu}^J(\theta) &= (-1)^{N-\lambda} \left(\frac{1-z}{2}\right)^{|\lambda-\mu|/2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{(\lambda+\mu)/2} \left[\frac{(J+M)! (J-M)!}{(J+M)! (J-M)!} \right]^{1/2} \times \\ &\times \frac{1}{|\lambda-\mu|!} F\left(-J+M, J+M+1, M-N+1; \frac{1}{2}(1-z)\right) \end{aligned} \quad (2.12)$$

при $M \geq 0$. Гипергеометрическая функция аналитична по J , так что положение сингулярностей в J -плоскости ясно из (2.12) — оно определяется множителем, содержащим квадратный корень. Если вспомнить, что функция $w!$ имеет в w -плоскости простой полюс всякий раз, когда w становится равным отрицательному целому числу, то мы увидим, что сингулярности функции $d_{\lambda\mu}^J$ возникают при таких целых значениях $J - M$, для которых либо

$$N \leq J < M, \quad (2.13a)$$

либо

$$-M \leq J < -N. \quad (2.13b)$$

Значения в (2.13a) соответствуют рассеянию из возможного физического состояния в невозможное физическое состояние; подобные амплитуды мы будем называть «полубессмысленными» (sense-nonsense) амплитудами [201]. Из (2.12) следует, что вблизи полубессмысленного значения J функция $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ ведет себя как $(J - M - n)^{1/2}$, где $n = 1, 2, 3, \dots$. Такие амплитуды подробно рассматриваются в § 5 данной главы, а также в гл. V, § 4—6.

Из (2.12), используя асимптотику гипергеометрической функции, можно установить также вид функций $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ при больших z . Получаем

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) = \frac{(-1)^{N-\mu} i^{M-N}}{2J+1} \left[\frac{(J+M)!(J-N)!}{(J-M)!(J+N)!} \right]^{1/2} \times \\ \times \left[\frac{(2J+1)!}{(J+M)!(J-N)!} \left(\frac{z}{2} \right)^J \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2} \right) \right) - \right. \\ \left. - \frac{(-2J-1)!}{(-J-1+M)!(-J-1-N)!} \left(\frac{z}{2} \right)^{-J-1} \left(1 + O\left(\frac{1}{z^2} \right) \right) \right] \quad (2.14)$$

при $M \geq 0$. Из этого выражения видно, что при $\text{Re } J \geq -1/2$

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) \sim z^J. \quad (2.15)$$

Исключение составляют полубесмысленные значения J , для которых $d_{\lambda\mu}^J \sim 0$, или «бесмысленные» (nonsense-nonsense) значения J , для которых

$$d_{\lambda\mu}^J(\theta) \sim z^{-J-1}. \quad (2.16)$$

Из (2.14) следует важное свойство, отмеченное Фоксом и Лидером [178]: в пределе больших z (при $\text{Re } J > -1/2$ и вдали от бесмысленных состояний) главный член «факторизуется» в том смысле, что

$$d_{\lambda\lambda}^J(\theta) d_{\mu\mu}^J(\theta) \rightarrow [d_{\lambda\mu}^J(\theta)]^2. \quad (2.17)$$

Обратимся теперь к функциям $e_{\lambda\mu}^J(\theta)$, которые нам потребуются в § 4 и далее. Они связаны с функциями $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$ аналогично тому, как функции $Q_l(z)$ связаны с $P_l(z)$, и играют по существу ту же роль, что и $Q_l(z)$ в теории частиц с нулевым спином. Эти функции были впервые введены в явном виде Эндрьюсом и Гансоном [21]. Следует отметить, что рассматриваемые здесь функции $e_{\lambda\mu}^J$ никак не связаны с теми функциями, которые используются в работах [205, 206] и которые являются просто комбинациями двух функций $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$, соответствующими состояниям с определенной четностью.

Функции $e_{\lambda\mu}^J$ можно определить посредством выражения, аналогичного (2.6), т. е.

$$e_{\lambda\mu}^J(\theta) = (-1)^{N-\lambda} \left[\frac{(J+M)!(J-M)!}{(J+N)!(J-N)!} \right]^{1/2} \left(\frac{1-z}{2} \right)^{|\lambda-\mu|/2} \times \\ \times \left(\frac{1+z}{2} \right)^{(\lambda+\mu)/2} Q_{J-M}^{|\lambda-\mu|, (\lambda+\mu)}(z) \quad (2.18)$$

при $M \geq 0$. Добавим к нему свойства симметрии, аналогичные (2.1):

$$e_{\lambda\mu}^J(\theta) = (-1)^{\lambda-\mu} e_{-\lambda, -\mu}^J(\theta) = (-1)^{\lambda-\mu} e_{\mu\lambda}^J(\theta). \quad (2.19)$$

Функции $Q_n^{ab}(z)$ в (2.18) являются функциями Якоби второго рода. Согласно (B2, 10.8.20), они связаны с функциями Якоби первого рода

соотношением, аналогичным формуле Неймана (II.3.4):

$$Q_n^{ab}(z) = \frac{1}{2} (z-1)^{-a} (z+1)^{-b} \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{z-z'} (1-z')^a (1+z')^b P_n^{ab}(z') \quad (2.20)$$

при n , не равном целому отрицательному числу.

Объединяя (2.20) с (2.18) и (2.6), получаем

$$\begin{aligned} \left(\frac{1-z}{2}\right)^{|\lambda-\mu|/2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{(\lambda+\mu)/2} e_{\lambda\mu}^J(\theta) (-1)^{|\lambda-\mu|} = \\ = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \frac{dz'}{z-z'} d_{\lambda\mu}^J(\theta') \left(\frac{1-z'}{2}\right)^{|\lambda-\mu|/2} \left(\frac{1+z'}{2}\right)^{(\lambda+\mu)/2}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

при целых $J \geq M$. Это соотношение для частиц со спином играет ту же роль, что и формула Неймана для частиц с нулевым спином (ср. гл. II, § 3).

Чтобы установить поведение $e_{\lambda\mu}^J(\theta)$ при больших z , воспользуемся связью $Q_n^{ab}(z)$ с гипергеометрической функцией

$$\begin{aligned} Q_n^{ab}(z) = \frac{1}{2} \frac{(n+a)!(n+b)!}{(2n+a+b+1)!} \left(\frac{z-1}{2}\right)^{-(n+a+1)} \left(\frac{z+1}{2}\right)^{-b} \times \\ \times F\left(n+1, n+a+1, 2n+a+b+2, \frac{2}{1-z}\right); \end{aligned} \quad (2.22)$$

откуда

$$Q_n^{ab}(z) = \frac{1}{2} \frac{(n+a)!(n+b)!}{(2n+a+b+1)!} \left(\frac{z}{2}\right)^{-n-a-b-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right]. \quad (2.23)$$

Объединяя (2.23) с (2.18), получаем

$$\begin{aligned} e_{\lambda\mu}^J(\theta) = \frac{(-1)^{N-\lambda}}{2(2J+1)!} [(J+\lambda)!(J-\lambda)!(J+\mu)!(J-\mu)!]^{1/2} \times \\ \times e^{\pm i(\pi/2)(\lambda-\mu)} \left(\frac{z}{2}\right)^{-J-1} \left[1 + O\left(\frac{1}{z}\right)\right], \end{aligned} \quad (2.24)$$

где выбор знака плюс или минус определяется знаком $\text{Im} z$.

Иногда полезно следующее соотношение между $d_{\lambda\mu}^J$ и $e_{\lambda\mu}^J$, аналогичное (II.12.2):

$$\frac{\pi d_{\lambda\mu}^J(\theta)}{\sin \pi(J-\lambda)} = \frac{e_{\lambda\mu}^J(\theta)}{\cos \pi(J-\lambda)} - \frac{e_{-\lambda, -\mu}^{J-1}(\theta)}{\cos \pi(J-\lambda)}. \quad (2.25)$$

Ясно, что при построении теории частиц со спином всегда можно воспользоваться соотношениями (2.9), (2.10) и сформулировать ее на основе более привычных функций P_J и Q_J . Этот метод используется, например, в работе [78] при обобщении мандельштамовской формы

преобразования Зоммерфельда — Ватсона. Он широко применяется также в работах [307, 308]. Поскольку получаемые при этом выражения являются довольно громоздкими, мы здесь будем пользоваться более компактными выражениями, которые получаются в том случае, когда вводятся функции $e_{\lambda\mu}^j$.

§ 3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СИНГУЛЯРНОСТИ И ДИСПЕРСИОННЫЕ СООТНОШЕНИЯ ПО ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

В гл. II продолжение парциальной амплитуды A_l на комплексные значения l определялось с помощью дисперсионного соотношения по переменной l . Чтобы проделать аналогичную процедуру в случае частиц ненулевого спина, следует прежде всего исключить из амплитуды определенные «кинематические сингулярности». Эти сингулярности по l при фиксированном s возникают вследствие сингулярностей функции $d_{\lambda\lambda'}^j(\theta)$ при $z = \pm 1$, которые даются в явном виде выражением (2.6). Одним из больших преимуществ спирального формализма является как раз то, что при его использовании эти кинематические сингулярности выступают столь явным образом.

Используя (1.2) и (2.6), получаем, что пока разложение по парциальным волнам сходится, функция

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | \hat{A}(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \equiv \left(\frac{1-z}{2} \right)^{-(\lambda-\lambda')/2} \left(\frac{1+z}{2} \right)^{-(\lambda+\lambda')/2} \times \\ \times \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (3.1)$$

не имеет сингулярностей в z -плоскости. Поэтому она аналогична амплитуде $A(s, t)$ для случая нулевого спина и имеет правый физический разрез и левый разрез, возникающий из условия унитарности в u -канале. Следовательно, для t -канала можно написать следующее дисперсионное соотношение (ср. гл. I, § 10):

$$\hat{A}_H(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{dt'}{t'-t} D_{Ht}(s, t') + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{du'}{u'-u} D_{Hu}(s, u'), \quad (3.2)$$

где опущены все вычитательные и полюсные члены, так как они играют здесь точно такую же роль, что и в гл. II. Мы ввели также индекс H , который служит для сокращенного обозначения набора спиральных квантовых чисел $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$.

Следует отметить, что этот метод является наиболее простым из всех существующих методов, позволяющих определить положение кинематических сингулярностей и нулей амплитуды рассеяния. Другие методы, использующие, например, инвариантные амплитуды [207], оказываются чрезвычайно громоздкими, как только значения спинов

перестают быть малыми. Пока, конечно, рассматривались только сингулярности по t при фиксированном s , но в § 6 мы перейдем к t -каналу и воспользуемся той же процедурой для устранения сингулярностей по s .

Наличие кинематических сингулярностей у спиральных амплитуд означает, что анализ, проведенный в гл. III, должен применяться к таким амплитудам, из которых исключены соответствующие множители. Отсюда вытекает одно важное следствие для тех случаев, когда при рассеянии вперед (или назад) при стремлении энергии кросс-канала к бесконечности величина z не стремится к бесконечности. В гл. III, § 6 было показано, что в подобных случаях для бесспиновых частиц реджевские формулы по-прежнему справедливы. Применяя аналогичный метод к общему случаю, получаем, что кинематические множители

$$\left(\frac{1 \pm z}{2}\right)^{(\lambda \pm \lambda')/2}$$

останутся в указанном пределе конечными и что подстановка $z \sim t$ будет справедливой только для оставшейся зависимости от z . Это обстоятельство было подчеркнуто в работах [258, 401]; в гл. VIII, § 7 мы рассмотрим случай, когда оно играет важную роль.

§ 4. ОБОБЩЕННАЯ ПРОЕКЦИЯ ГРИБОВА — ФРУАССАРА

Чтобы получить определение продолженной амплитуды Грибова — Фруассара, подставим (3.2) в (1.7) и изменим порядок интегрирования. Воспользовавшись обобщенной формулой Неймана (2.21), получим

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = & (16\pi)^{-1} \frac{1}{\pi} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} dz_s \left\{ (-1)^{\lambda - \lambda'} D_{Ht}(s, t) \times \right. \\ & \times e_{\lambda\lambda'}^J(\theta_s) \left(\frac{1 - z_s}{2}\right)^{(\lambda - \lambda')/2} \left(\frac{1 + z_s}{2}\right)^{(\lambda + \lambda')/2} + \\ & \left. + (-1)^{J + 2\lambda + \lambda'} D_{Hu}(s, t) e_{\lambda, -\lambda'}^J(\theta_s) \left(\frac{1 - z_s}{2}\right)^{(\lambda - \lambda')/2} \left(\frac{1 + z_s}{2}\right)^{(\lambda + \lambda')/2} \right\} \end{aligned} \quad (4.1)$$

при $\lambda \geq |\lambda'|$. Здесь второй интеграл преобразован в интеграл по положительным z_s с использованием свойств симметрии функций $d_{\lambda\mu}^J(\theta)$. Как и в гл. II, наличие во втором слагаемом (4.1) множителя $(-1)^J$ препятствует продолжению этого выражения на комплексные значения J . Заменим поэтому $A_J(s)$ двумя амплитудами с определен-

ной сигнатурой $A_{\mp}^{\pm}(s)$, которые определяются формулой

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_{\mp}^{\pm}(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = & (16\pi^2)^{-1} \int_{z_s(s, t_0)}^{\infty} dz_s \left\{ (-1)^{\lambda - \lambda'} D_{Ht}(s, t) \times \right. \\ & \times e_{\lambda\lambda'}^J(\theta_s) \left(\frac{1-z_s}{2} \right)^{(\lambda - \lambda')/2} \left(\frac{1+z_s}{2} \right)^{(\lambda + \lambda')/2} \pm (\cos \pi\lambda - \sin \pi\lambda) \times \\ & \times (-1)^{\lambda + \lambda'} D_{Hu}(s, t) e_{\lambda, -\lambda'}^J(\theta_s) \left(\frac{1-z_s}{2} \right)^{(\lambda - \lambda')/2} \left(\frac{1+z_s}{2} \right)^{(\lambda + \lambda')/2} \end{aligned} \quad (4.2)$$

при $\lambda \geq |\lambda'|$. Эта формула позволяет продолжить парциальные амплитуды в область J -плоскости, в которой интегралы сходятся. Из сравнения (4.2) с (4.1) видно, что если физические значения момента являются целыми числами, то $A_{\mp}^{\pm}(s)$ совпадает с физической амплитудой при четных (нечетных) неотрицательных целых значениях J ; если же физические значения момента являются полуцелыми числами, то $A_{\mp}^{\pm}(s)$ совпадает с физической амплитудой при четных (нечетных) неотрицательных целых значениях $J - 1/2$.

Разложение по парциальным волнам (1.2) можно записать через амплитуды с определенной сигнатурой следующим образом [91]:

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = & 16\pi \sum_{J=\lambda}^{\infty} (2J+1) \{ \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_{\mp}^{\pm}(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \times \\ & \times d_{\lambda\lambda'}^{\pm}(J, z) + \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_{\mp}^{\pm}(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle d_{\lambda\lambda'}^{\mp}(J, z) \} \end{aligned} \quad (4.3)$$

при $\lambda \geq |\lambda'|$, где введены функции

$$d_{\lambda\lambda'}^{\pm}(J, z) = d_{\lambda\lambda'}^J(\theta) \pm (\cos \pi\lambda - \sin \pi\lambda) d_{\lambda, -\lambda'}^J(\pi - \theta). \quad (4.4)$$

При выводе формул (4.2) — (4.4) мы не учитывали проблему вычитаний. Она решается точно так же, как и в случае нулевого спина (гл. II), и в результате оказывается, что (4.2) дает физическую амплитуду при всех физических значениях J , для которых интегралы сходятся. Предположим, что для некоторых s при больших z

$$A(s, t) \leq O(z_s^{\alpha}). \quad (4.5)$$

Тогда из (3.1) имеем

$$D_t(s, t) \leq O(z_s^{\alpha - M}), \quad (4.6)$$

где M определяется формулой (2.7); поэтому, используя асимптотическое поведение функций $e_{\lambda\lambda'}^J$, даваемое соотношением (2.24), получаем, что интеграл сходится при

$$\operatorname{Re} J > \alpha. \quad (4.7)$$

Из (4.2), (2.18) и (2.22) следует, что при $\lambda \geq |\lambda'|$ амплитуда $\langle \lambda_3 \lambda_4 | A_{\mp}^{\pm}(s) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle$ имеет неподвижные точки ветвления корневого типа, которым соответствуют полубессмысленные значения момента

$$J = \lambda - 1, \lambda - 2, \lambda - 3, \dots, |\lambda'| \quad (4.8a)$$

и значения

$$J = -|\lambda'| - 1, -|\lambda'| - 2, -|\lambda'| - 3, \dots, -\lambda. \quad (4.8б)$$

Однако подобные неподвижные точки ветвления $A_{\mathcal{J}H}^{\pm}(s)$ сокращаются с точно такими же точками ветвления функций $d_{\lambda\lambda'}^{\pm}(J, z)$ (см. § 2), так что они не приводят к появлению точек ветвления у выражения, стоящего под знаком суммы в (4.3). Важный вопрос о том, имеет ли это выражение какие-либо неподвижные полюса, мы отложим до следующей главы.

Отметим, что доказательство существования точек ветвления $A_{\mathcal{J}H}^{\pm}(s)$, обусловленных (4.2), справедливо лишь в том случае, если интеграл в (4.2) сходится для некоторого s при подходящем значении J .

§ 5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЗОММЕРФЕЛЬДА — ВАТSONA

Как и в гл. II, § 9, запишем (4.3) в виде интеграла по контуру

$$(\lambda_3\lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1\lambda_2) = -\frac{16\pi}{2i} \int_C \frac{dJ(2J+1)}{\sin \pi(J+\lambda)} \times \\ \times \{A_{\mathcal{J}H}^+(s) d_{\lambda\lambda'}^+(J, -z) + A_{\mathcal{J}H}^-(s) d_{\lambda\lambda'}^-(J, -z)\} \quad (5.1)$$

при $\lambda \geq |\lambda'|$, где для сокращенного обозначения четырех спиральных индексов по-прежнему используется символ H . Контур C охватывает часть вещественной оси J -плоскости с $\text{Re } J \geq \lambda$. Развернем теперь контур, как в гл. II, § 9, и сдвинем его влево, чтобы он шел вдоль линии $\text{Re } J = -1/2$ (или чуть правее ее, если физическими значениями J являются полуцелые числа). Как и в случае нулевого спина, большая полуокружность при $|J| = \infty$ дает нулевой вклад (подробности см. [78]).

Будем считать для простоты, что единственными сингулярностями выражения, стоящего в (4.1) в фигурных скобках, являются полюса (вклад от разрезов можно проанализировать точно так же, как в гл. II, § 9); поэтому получаем

$$(16\pi)^{-1} (\lambda_3\lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1\lambda_2) = -\frac{1}{2i} \int_{-1/2-i\infty}^{-1/2+i\infty} \frac{dJ(2J+1)}{\sin \pi(J+\lambda)} \times \\ \times [A_{\mathcal{J}H}^+(s) d_{\lambda\lambda'}^+(J, -z) + A_{\mathcal{J}H}^-(s) d_{\lambda\lambda'}^-(J, -z)] - \\ - \pi \sum_{(\text{Re } \alpha_i > -1/2)} \frac{2\alpha_i^{\pm} + 1}{\sin \pi(\alpha_i^{\pm} + \lambda)} \beta_{iH}^{\pm}(s) d^{\pm}(J, -z) - \\ - \sum_{J=\lambda'}^{\lambda-1} (2J+1) [A_{\mathcal{J}H}^+(s) d_{\lambda\lambda'}^+(J, -z) + A_{\mathcal{J}H}^-(s) d_{\lambda\lambda'}^-(J, -z)] - \\ - \sum_{J=O(1/2)}^{\lambda'-1} (2J+1) [A_{\mathcal{J}H}^+(s) d_{\lambda\lambda'}^+(J, -z) + A_{\mathcal{J}H}^-(s) d_{\lambda\lambda'}^-(J, -z)], \quad (5.2)$$

где $\beta_{iH}^{\pm}(s)$ — вычет в полюсе функций $A_{iH}^{\pm}(s)$ при $J = \alpha_i^{\pm}(s)$. Последние две суммы в (5.2), не имеющие аналога в случае нулевого спина, возникают от целых (или полуцелых) значений J , лежащих между нулем и $\lambda - 1$, которые не включены в исходное разложение по парциальным волнам (1.2). Ниже выяснится причина, по которой они записываются в виде отдельных сумм по полубесмысленным и бесмысленным значениям.

Воспользовавшись формулами (2.15), (2.16), определяющими поведение $d_{\lambda\lambda}^J$ при больших z , увидим, что первые два члена в (5.2) ведут себя при больших z как $z^{-1/2}$ и $z^{\alpha_M(s)}$ (α_M — самая правая траектория Редже) соответственно, а последний член — как z^{-1} или $z^{-1/2}$, в зависимости от того, являются ли физические значения J целыми или полуцелыми. В третьем слагаемом, где суммирование проводится по полубесмысленным значениям, функция $d_{\lambda\lambda}^{\pm}(J, -z)$ имеет нули корневого типа, и поэтому, если A_{iH}^{\pm} конечно при полубесмысленном значении J , это слагаемое будет отсутствовать. Однако в случае значений J «неправильной сигнатуры» (например, при целых J это означает, что для нечетных J сигнатура положительна, а для четных — отрицательна) вблизи соответствующего значения J (скажем, J_0) A_{iH}^{\pm} может изменяться как $(J - J_0)^{-1/2}$, так как подобный вклад устраняется сигнатурным множителем. Последнее обстоятельство в дальнейшем будет играть важную роль. Конечно, было бы весьма желательно, чтобы такие члены обращались в нуль, так как если у функции $d_{\lambda\lambda}^J$ исключить нуль корневого типа $(J - J_0)^{1/2}$, то она будет вести себя как z^{J_0} (при полубесмысленных значениях J), и третье слагаемое в (5.2) приведет к асимптотике $t^{\lambda-1}$ нерджевского типа. Эти вопросы рассматриваются в следующей главе.

Принимая, что третье слагаемое в (5.2) можно отбросить, получаем реджевское поведение плюс фоновый член, который имеет вид $O(t^{-1/2})$ при целых физических значениях J и $O(t^{-1/2+\varepsilon})$ со сколь угодно малым положительным ε при полуцелых физических значениях J .

Следующий шаг заключается в том, чтобы понизить эти степени переменной z или t , по аналогии с методом Мандельстама в случае нулевого спина. Это было сделано в работах [78, 152]. Детали этих вычислений достаточно сложны, поэтому мы не приводим их здесь. Отметим лишь, что результат также зависит от того, справедливо ли соотношение симметрии

$$A_{iHJ}^{\pm} = A_{iH, -J-1}^{\mp} \quad (5.3)$$

при целых (или полуцелых) значениях J [ср. (II.12.6)]. Результат позволяет заменить $d_{\lambda\mu}^J$ в (5.2), например, комбинацией (2.25) функций $e_{\lambda\mu}^J$ и $e_{-\lambda, -\mu}^{-J-1}$, отбросив при этом член с $e_{\lambda\mu}^J$; поэтому при всех значениях α имеем простое реджевское поведение $t^{\alpha(s)}$.

Здесь уместно напомнить об одном важном исключении из полученного утверждения о справедливости во всех случаях при больших t реджевской асимптотики $t^{\alpha(s)}$, упоминавшемся в конце § 3. Оно относится к таким массам, для которых при высоких энергиях величина z_s не возрастает. В этом случае нужно использовать процедуру, описанную в гл. III, § 6, но применять ее следует к амплитуде \hat{A} (3.1), которая не содержит кинематических сингулярностей. Тогда из доказательства, приведенного в § 3, следует, что $\hat{A} \sim t^{\alpha-M}$. Кинематические множители, входящие в (3.1), при больших t в точке $s = 0$ ведут себя не как t^M (поскольку $z_s \equiv 1$), а как константы; поэтому в данном случае истинное поведение будет типа $t^{\alpha-M}$. Важность этого обстоятельства мы выясним в гл. VIII, § 7.

§ 6. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ ОГРАНИЧЕНИЯ НА ВЫЧЕТЫ

В § 3 было показано, что при значениях t , соответствующих $z_s = \pm 1$, спиральные амплитуды $A_H(s, t)$ имеют кинематические сингулярности. Было показано также, что эти кинематические сингулярности легко устранить. Аналогичные сингулярности возникают в s -плоскости при значениях s , соответствующих $z_t = \pm 1$ (z_t — косинус угла рассеяния в t -канале в системе центра масс). Очевидно, мы можем определить положение этих сингулярностей и устранить их способом, аналогичным предыдущему, но применять его следует к спиральным амплитудам t -канала, а не к спиральным амплитудам s -канала, которые рассматривались до сих пор.

Соответствующая процедура в принципе достаточно проста. Выразим сначала с помощью спиральной кроссинг-матрицы $M_{H_t H_s}$ спиральные амплитуды t -канала через спиральные амплитуды s -канала:

$$A_{H_t}^t(s, t) = M_{H_t H_s}(s, t) A_{H_s}^s(s, t), \quad (6.1)$$

где $A_{H_t}^t(s, t)$ — спиральная амплитуда в t -канале, причем теперь используется обозначение $A_{H_s}^s$, а не просто A_H , чтобы подчеркнуть, что эта величина соответствует спиральной амплитуде s -канала. Для обозначения совокупности $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ спиральностей s -канала используется символ H_s , а для обозначения совокупности $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ спиральностей t -канала — символ H_t . Матрица $M_{H_t H_s}(s, t)$ получена в работах [310, 393]; она имеет вид

$$M_{H_t H_s}(s, t) = d_{\lambda_1 \mu_1}(\chi_1) d_{\lambda_2 \mu_2}(\chi_2) d_{\lambda_3 \mu_3}(\chi_3) d_{\lambda_4 \mu_4}(\chi_4), \quad (6.2)$$

где углы χ_i определяются формулами

$$\cos \chi_1 = \frac{[-(s + m_1^2 - m_2^2)(t + m_1^2 + m_2^2) - 2m_1^2(m_3^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_4^2)]}{4 \sqrt{st} q_{s12} q_{t13}}, \quad (6.3a)$$

$$\cos \chi_2 = \frac{[(s + m_2^2 - m_1^2)(t + m_2^2 - m_1^2) - 2m_2^2(m_3^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_4^2)]}{4 \sqrt{st} q_{s12} q_{t24}}, \quad (6.3b)$$

$$\cos \chi_3 = \frac{[(s + m_3^2 - m_2^2)(t + m_3^2 - m_2^2) - 2m_3^2(m_3^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_2^2)]}{4\sqrt{st} q_{s34} q_{t13}}, \quad (6.3\text{В})$$

$$\cos \chi_4 = \frac{[-(s + m_4^2 - m_3^2)(t + m_4^2 - m_3^2) - 2m_4^2(m_3^2 - m_1^2 + m_2^2 - m_2^2)]}{4\sqrt{st} q_{s34} q_{t24}}. \quad (6.3\text{Г})$$

Здесь q_{t13} и q_{t24} — импульсы в t -канале в системе центра масс, аналогичные импульсам в s -канале, введенным в гл. I, § 6. Мы не будем приводить вывода этого выражения для кроссинг-матрицы; отметим лишь, что его вид следует из наших исходных постулатов — в частности, решающую роль играет лоренцевская инвариантность.

Кинематические сингулярности амплитуд $A_{H_s}^s$ в t -плоскости и амплитуд $A_{H_t}^t$ в s -плоскости можно выделить явно с помощью процедуры, описанной в § 3; таким образом, соотношение (6.1) позволяет определить положение и устранить кинематические сингулярности в s - и t -плоскостях.

Детали вычислений достаточно сложны [228, 399], поэтому мы приведем здесь лишь окончательные результаты. В дальнейшем амплитуды s -канала, не содержащие кинематических сингулярностей и нулей, мы будем обозначать $\hat{A}(s, t)$; задача состоит в том, чтобы установить их связь с амплитудами $\hat{A}(s, t)$, определяемыми формулой (3.1). За исключением особо оговоренных случаев мы будем считать, что спиральности всегда располагаются в последовательности $\lambda_3, \lambda_4, \lambda_1, \lambda_2$, и не будем их явно указывать. Отметим, что в случае, когда физическими значениями J являются полуцелые числа, амплитуды \hat{A} могут содержать кинематическую сингулярность при $s = 0$ в s -плоскости, но она устраняется переходом к ω -плоскости, где $\omega = \sqrt{s}$.

I. Все массы равны: $m_i = m$.

$$\hat{A}(s, t) = (s - 4m^2)^{\alpha/2} s^{-\beta/2} \hat{A}(s, t), \quad (6.4)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 v_i + \max_{\eta} \left\{ \sum_{i=1}^4 \left(\sigma_i - \frac{v_i}{2} \right) \right\} - |\lambda - \lambda'| - |\lambda + \lambda'|, \quad (6.5)$$

$$\beta = \max_{\delta} \{ (|\sigma_4 - \sigma_2| - |\sigma_3 - \sigma_1|) + 1 \}, \quad (6.6)$$

причем

$$v_i = 1 \quad \text{или} \quad 0, \quad (6.7)$$

в зависимости от того, является ли $2\sigma_i$ нечетным или четным,

$$\eta = \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2 \eta_4} (-1)^{2(\sigma_1 + \sigma_2)}, \quad (6.8)$$

$$\delta = \eta (-1)^{|\lambda - \lambda'|}, \quad (6.9)$$

а слагаемое $\max_{\eta} \{X\}$ обозначает наибольшее четное (нечетное) целое число, меньшее или равное X при $\eta = +1$ ($\eta = -1$). Наконец, η_i — внутренние четности соответствующих частиц.

$$II. m_1 = m_3, \quad m_2 = m_4.$$

$$\hat{A}(s, t) = \{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]\}^{\alpha/2} s^{1/2|\lambda - \lambda'|} \hat{A}(s, t). \quad (6.10)$$

$$III. m_1 = m_2, \quad m_3 = m_4.$$

$$\hat{A}(s, t) = (s - 4m_1^2)^{1/2\alpha \pm} (s - 4m_2^2)^{1/2\beta \pm} s^{-\nu/2} [\langle \lambda_3 \lambda_4 | \hat{A} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \pm \langle -\lambda_3 \lambda_4 | \hat{A} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle], \quad (6.11)$$

где

$$\alpha^{\pm} = -|\lambda - \lambda'| + \max_{\pm \eta_{12}} \left\{ \sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + \frac{1}{2}(|\lambda - \lambda'| - |\lambda + \lambda'|) \right\} + \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2), \quad (6.12)$$

$$\beta^{\pm} = -|\lambda - \lambda'| + \max_{\pm \eta_{34}} \left\{ \sigma_3 + \sigma_4 - \frac{1}{2}(\nu_3 + \nu_4) + \frac{1}{2}(|\lambda - \lambda'| - |\lambda - \lambda'|) \right\} + \frac{1}{2}(\nu_3 + \nu_4), \quad (6.13)$$

$$\gamma = \max_{\eta_s} \{ (|\sigma_4 - \sigma_2| - |\sigma_3 - \sigma_1|) \}, \quad (6.14)$$

$$\eta_s = \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2 \eta_4} (-1)^{2(\sigma_1 + \sigma_2)} (-1)^{\lambda - \lambda'}, \quad (6.15)$$

$$\eta_{12} = \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2 \eta_4} (-1)^{\sigma_1 + \sigma_2 + \lambda_1 + \lambda_2}, \quad (6.16)$$

$$\eta_{34} = \frac{\eta_1 \eta_3}{\eta_2 \eta_4} (-1)^{\sigma_3 + \sigma_4 + \lambda_3 + \lambda_4}. \quad (6.17)$$

IV. $m_1 = m_2$, $m_3 \neq m_4$ (включая случай, когда, скажем, $m_1 = m_3$).

$$\hat{A}(s, t) = (s - 4m_1^2)^{\alpha \pm / 2} [s - (m_3 + m_4)^2]^{\beta \pm / 2} \times \\ \times [s - (m_3 - m_4)^2]^{\bar{\beta} \pm / 2} s^{\nu \pm / 2} \times \\ \times [\langle \lambda_3 \lambda_4 | \hat{A} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle + \langle -\lambda_3, -\lambda_4 | \hat{A} | \lambda_1 \lambda_2 \rangle], \quad (6.18)$$

где

$$\bar{\beta}^{\pm} = \beta^{\pm} \quad \text{при} \quad \nu_3 = \nu_4 = 0, \quad (6.19a)$$

$$\bar{\beta}^{\pm} = \beta^{\mp} \quad \text{при} \quad \nu_3 = \nu_4 = 1, \quad (6.19b)$$

а

$$\gamma^{\pm} = \max_{\mp \eta_{12}} \{ \sigma_1 + \sigma_2 - 1 \} + 1 \quad \text{при} \quad \nu_1 = \nu_2 = 1, \quad (6.20a)$$

$$\gamma^{\pm} = \max_{\mp \eta_{12}} \{ \sigma_1 + \sigma_2 \} \quad \text{при} \quad \nu_1 = \nu_2 = 0. \quad (6.20b)$$

V. Все массы различны; физический спин целый.

$$\hat{A}(s, t) = [s - (m_1 + m_2)^2]^{\alpha \pm / 2} [s - (m_1 - m_2)^2]^{\bar{\alpha} \pm / 2} \times \\ \times [s - (m_3 + m_4)^2]^{\beta \pm / 2} [s - (m_3 - m_4)^2]^{\bar{\beta} \pm / 2} s^{\bar{\nu} / 2} \times \\ \times [(\lambda_3 \lambda_4 | \hat{A}(s, t) | \lambda_1 \lambda_2) \pm \langle -\lambda_3, -\lambda_4 | \hat{A}(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle], \quad (6.21)$$

где в дополнение к введенным выше величинам

$$\bar{\alpha} \pm = \alpha \pm \quad \text{при} \quad v_1 = v_2 = 0, \quad (6.22a)$$

$$\bar{\alpha} \pm = \alpha \mp \quad \text{при} \quad v_1 = v_2 = 1, \quad (6.22b)$$

и

$$\bar{\nu} = \max(|\lambda - \lambda'|, |\lambda + \lambda'|). \quad (6.23)$$

IV. Все массы различны; физические значения J полуцелые.

$$\hat{A}(s, t) = (4sq_{s12}^2)^{a \pm / 2} (4sq_{s34}^2)^{b \pm / 2} s^{\bar{\nu} / 2} \times \\ \times [(\lambda_3 \lambda_4 | \hat{A}(s, t) | \lambda_1 \lambda_2) \pm \langle -\lambda_3, -\lambda_4 | \hat{A}(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle], \quad (6.24)$$

где

$$a \pm = -|\lambda - \lambda'| + \max_{\pm \eta_{12}} \left\{ \sigma_1 + \sigma_2 + \frac{1}{2} (|\lambda - \lambda'| - |\lambda + \lambda'|) \right\}, \\ b \pm = -|\lambda - \lambda'| + \max_{\pm \eta_{34}} \left\{ \sigma_3 + \sigma_4 + \frac{1}{2} (|\lambda - \lambda'| - |\lambda + \lambda'|) \right\}. \quad (6.25)$$

Из выписанных соотношений следует, что кинематические сингулярности и (или) нули могут возникать при $s = 0$, $s = (m_1 \pm m_2)^2$ и $s = (m_3 \pm m_4)^2$. Точки $s = (m_1 \pm m_2)^2$ соответствуют физическому порогу и «псевдопорогу» канала $1 + 2$; то же справедливо и для канала $3 + 4$. Поведение на этих порогах, определяемое приведенными выше выражениями, соответствует обычному пороговому поведению парциальной амплитуды [см. (II.4.9)], орбитальный момент которой принимает наименьшее значение, допустимое для рассматриваемого спирального состояния.

Кинематические сингулярности и нули этих амплитуд будут возникать также в парциальных амплитудах, а значит (за некоторыми возможными исключениями, которые описываются ниже) и в вычетах полюсов Редже. Поэтому многие авторы выделяют их из вычетов в виде явных множителей. Однако за исключением, может быть, точки $s = 0$, эти сингулярности лежат вне физической области t -канала (где как раз используется реджевекая полюсная формула), и поэтому ясно, что без дальнейших предположений относительно свойств «приведенного вычета» (т. е. вычета с выделенным кинематическим множителем) подобная процедура является, хотя и небесполезным, но вовсе не обязательным упражнением. Тем не менее иногда при-

нимается, что по крайней мере в некоторой части физической области изменение вычета определяется в основном кинематическими эффектами, так что приведенный вычет остается приблизительно постоянным. Однако при этом необходимо проявлять осторожность, так как подобная процедура легко может ввести в заблуждение. В частности, следует отметить, что физические величины (которые зависят не только от самих спиральных амплитуд, но и от величин им комплексно сопряженных) не являются аналитическими функциями переменных s и t . Поэтому может случиться так, что определенная физическая величина, соответствующая t -каналу, будет оставаться конечной, если ее выразить через спиральные амплитуды t -канала и затем продолжить в нефизическую точку, и будет обращаться в бесконечность, если ее выразить через спиральные амплитуды s -канала с последующим аналогичным продолжением. В таком случае предположение о появлении соответствующего «пика» сечения может оказаться ложным. Подобный пример рассматривается в работе Лина [279], где указывается, что для процесса $p\bar{p} \rightarrow p\bar{N}^*$ при $s = 0$ в некоторых спиральных амплитудах s -канала возникают бесконечности. Но граница физической области t -канала этого процесса ($pp \rightarrow pN^*$) при $t \rightarrow \infty$ приближается к $s = 0$ (см. гл. VIII, § 3), поэтому можно было бы думать, что будет иметься пик физического сечения в окрестности направления вперед. Однако, как указывает Лин, эти физические бесконечности обусловлены кроссинг-матрицей, которая в действительности при всех физических s и t ограничена (в физической области углы χ_i являются физическими), так что они не могут определять поведение сечения, и было бы ошибкой включать их в явном виде в вычеты.

Точки ветвления по s играют важную роль, обеспечивая, в частности, равенство фаз вкладов определенного полюса Редже во все спиральные амплитуды в физической области кросс-канала. Это происходит потому, что фазовый множитель i^{M-N} , который входит, например, в (2.14), сокращается с аналогичными множителями, возникающими из-за разрезов по s при отрицательных значениях этой переменной. Проще всего в этом убедиться, работая со спиральными амплитудами t -канала, которые, очевидно, в физической области этого канала не имеют кинематических разрезов.

Выше, перед формулой (1.4), упоминалось, что сохранение углового момента приводит к появлению нуля амплитуды t -канала при $s = 0$, который входит явным образом в парциальное разложение в t -канале. Однако это не приводит, вообще говоря, к появлению нуля данной спиральной амплитуды s -канала (если он не принадлежит к корневому типу), а лишь к некоторому линейному соотношению между спиральными амплитудами s -канала. Следовательно, рассматривая такие нули, удобно иметь дело непосредственно со спиральными амплитудами t -канала, которые связаны с предыдущими кроссинг-матрицей (в физических приложениях фактически требуются, конечно,

как раз спиральные амплитуды t -канала). Для получения подобного нуля амплитуды естественно потребовать, чтобы вычет любой дающей в нее вклад траектории также имел необходимый нуль. Однако если нуль не соответствует точке ветвления, то по крайней мере в некоторых случаях эта процедура может оказаться неверной — нуль может возникать за счет взаимной компенсации при $s = 0$ вкладов в рассматриваемую амплитуду, даваемых двумя или большим числом траекторий, хотя каждый вклад в отдельности ни с чем не сокращается. Такая возможность в связи с проблемой NN -рассеяния впервые рассмотрена в работе Волкова и Грибова [397]; она подробно исследована Лидером [272] и носит название «конспирации». Эта идея мотивируется тем, что кинематический нуль в вычете, необходимый в отсутствие конспирации, через посредство теоремы факторизации оказывает воздействие на другие амплитуды, благодаря чему вклад данной траектории оказывается нулевым даже в том случае, если это не диктуется кинематическими причинами. Факторизуемость вычетов полюсов Редже s -канала, выраженных через спиральности t -канала, следует из известной их факторизуемости, когда они выражены через спиральности s -канала, и из явного вида кроссинг-матрицы (6.2).

В работе Лидера [272] подробно анализируется форма ограничений для произвольных спинов и масс; он различает следующие три возможных способа, посредством которых можно удовлетворить этим ограничениям: «уклонение», при котором вычеты обладают соответствующими нулями и компенсирующих траекторий не требуется; «конспирация», при которой конечная совокупность траекторий с различными квантовыми числами устроена так, что при одновременном их рассмотрении эти траектории удовлетворяют необходимым ограничениям; и, наконец, «дочерние траектории», образующие бесконечный набор траекторий с одинаковыми квантовыми числами. Лидер показал, что всегда возможно нетривиальное уклонение (т. е. уклонение, при котором связь не обращается тождественно в нуль). Таким образом, введение какого-либо рода конспираций не является совершенно необходимым, хотя, как будет видно из дальнейшего, их отсутствие в некоторых случаях приводит к весьма неприятным следствиям. Эти вопросы рассматриваются в § 9 данной главы и в отдельных пунктах гл. VIII, где выясняется, как можно экспериментально установить существование конспираций, а также приводятся дополнительные ссылки на литературу.

Парциальные амплитуды содержат пороговые множители полной амплитуды, т. е. степени величин $s - (m_1 \pm m_2)^2$ и $s - (m_3 \pm m_4)^2$, но, кроме того, в них входят и пороговые множители, имеющиеся в проекции (4.2). Из выражения для этой проекции видно, что в дополнение к пороговым множителям функции $A_H(s, t)$ амплитуды $A_{HJ}(s)$ содержат также множитель $(q_{s_{12}} q_{s_{34}})^{J-\lambda}$. В результате оказывается, что показатель степени, например у величины $q_{s_{12}}$, равен наименьшему

значению орбитального момента l , совместному с заданными значениями полного момента J и спиральностей начального (т. е. $l + 2$) состояния.

Отметим, что на физических порогах на парциальные амплитуды накладываются также некоторые дополнительные ограничения, обусловленные вкладом орбитального момента $l = 0$ и имеющие вид соотношений между пороговыми значениями различных амплитуд [256]. Поскольку эти ограничения справедливы в точке, лежащей вне области, где осуществляется интерполяция с помощью полюсов Редже (т. е. $s \leq 0$), не ясно, следует ли их учитывать при феноменологическом анализе. Они использовались лишь в одном случае, а именно в работе [184], в которой показано, что эти ограничения могут, по-видимому, оказывать некоторое влияние в физической области (см. гл. VIII, § 6, п. 8).

Еще одним источником возникновения кинематических множителей в вычетах является требование конечности полубесмысленной амплитуды, упоминавшееся в § 5. В гл. V, § 6 мы увидим, что на самом деле оно относится только к амплитудам с «правильной сигнатурой». Этот термин применяется для амплитуд с положительной (отрицательной) сигнатурой при четных (нечетных) J , если физические значения J являются целыми числами, и соответственно при $J - 1/2$, если физические значения J — полуцелые числа. Ниже используется также термин «неправильная сигнатура», смысл которого очевиден. Так как, согласно (4.8), при полубесмысленных значениях J имеется точка ветвления корневого типа, то при $J \approx J_0$, где J_0 — полубесмысленное значение J , соответствующее правильной сигнатуре, вычет будет вести себя как $(J - J_0)^{1/2}$. Чтобы описать поведение вблизи точки $J = -J_0 - 1$, к которому приводит свойство симметрии (5.3), некоторые авторы включают также множитель $(J + J_0 + 1)^{1/2}$. Следует заметить, однако, что это свойство симметрии устанавливает связь между амплитудами с противоположными сигнатурами, поэтому такой дополнительный множитель появляется лишь в том случае, когда полубесмысленная амплитуда с неправильной сигнатурой также обращается в нуль (в гл. V, § 6 мы увидим, что это, по-видимому, не так).

Наконец, отметим, что теорема \hat{o} факторизации (гл. V, § 1) также накладывает ограничения на вычеты. При всех допустимых значениях λ_i она позволяет написать

$$\beta_{\lambda_3 \lambda_4 \lambda_1 \lambda_2} = \gamma_{\lambda_3 \lambda_4} \gamma_{\lambda_1 \lambda_2}. \quad (6.26)$$

Объединим это соотношение с известным нам фактом, что полубесмысленная связь в случае правильной сигнатуры содержит множитель $(J - J_0)^{1/2}$. Тогда из аналитичности физической и бессмысленной амплитуд при $J = J_0$ получим, что одна из них должна содержать множитель $J - J_0$. Таким образом, если траектория Редже принимает значение J , соответствующее правильной сигнатуре, при кото-

ром имеются как физическое, так и бессмысленное состояния, то с одним из них она связана не будет, осуществляя тем самым определенный «выбор» между бессмысленной и физической ситуациями. В настоящее время вопрос о том или ином характере траектории должен решаться экспериментально (см. гл. VIII, § 6, п. 4).

§ 7. ЧЕТНОСТЬ

Поскольку четность сохраняется в сильных взаимодействиях, во многих приложениях теории полюсов Редже удобно вводить амплитуды с определенным значением этого квантового числа. С этой целью рассмотрим состояния

$$|JM\lambda_1\lambda_2\rangle_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ |JM\lambda_1\lambda_2\rangle \pm \eta_1\eta_2 (-1)^{\sigma_1+\sigma_2-\nu} |JM, -\lambda_1, -\lambda_2\rangle \}, \quad (7.1)$$

где η_1 и η_2 — внутренние четности частиц 1 и 2, а ν равно 0 или $1/2$, в зависимости от того, являются ли физические значения J целыми или полуцелыми. Эти состояния являются собственными состояниями оператора четности, удовлетворяющими уравнениям

$$P |JM\lambda_1\lambda_2\rangle_{\pm} = \pm (-1)^{J-\nu} |JM\lambda_1\lambda_2\rangle_{\pm}, \quad (7.2)$$

где использовано соотношение (41) из работы Якоба и Вика [247].

Матричные элементы сохраняющего четность оператора A между введенными состояниями с определенной четностью равны

$$\begin{aligned} \pm \langle JM\lambda_3\lambda_4 | A | JM\lambda_1\lambda_2 \rangle_{\pm} &= \langle JM\lambda_3\lambda_4 | A | JM\lambda_1\lambda_2 \rangle_{\pm} \\ &\pm \eta_3\eta_4 (-1)^{\sigma_3+\sigma_4-\nu} \langle JM, -\lambda_3, -\lambda_4 | A | JM\lambda_1\lambda_2 \rangle. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Знак плюс здесь соответствует положительной или отрицательной четности, в зависимости от того, является ли $J - \nu$ четным или нечетным числом, а знак минус соответствует в каждом случае противоположной четности. Напомним далее, что амплитуды с определенной сигнатурой являются физическими, если положительные (отрицательные) сигнатуры соответствуют четным (нечетным) значениям $J - \nu$ [см. замечания после формулы (4.2)]. Таким образом, можно ввести следующие амплитуды с определенной сигнатурой (S) и четностью (P):

$$\begin{aligned} \langle \lambda_3\lambda_4 | A_J^{SP} | \lambda_1\lambda_2 \rangle &= \langle \lambda_3\lambda_4 | A_J^S | \lambda_1\lambda_2 \rangle + PS (-1)^{\sigma_3+\sigma_4-\nu} \eta_3\eta_4 \times \\ &\times \langle -\lambda_3, -\lambda_4 | A_J^S | \lambda_1\lambda_2 \rangle, \end{aligned} \quad (7.4)$$

где, например, значения $S = +1$ и $P = +1$ соответствуют амплитуде с положительной сигнатурой и с положительной четностью.

Важным свойством амплитуд с определенной четностью в случае бозон-фермионного рассеяния является обобщенный принцип симметрии Мак-Дауэлла, установленный первоначально для πN -рас-

сеяния [287]. Из вида спиральной кроссинг-матрицы (рассматриваемой в предыдущем параграфе) следует, что спиральные амплитуды имеют точку ветвления корневого типа при $s = 0$. Поэтому удобно использовать переменную

$$\omega = \sqrt{s}, \quad (7.5)$$

причем характер точки ветвления таков, что *одна* из амплитуд, входящих в правую часть (7.4), при замене $\omega \rightarrow -\omega$ изменяет свой знак. Таким образом, это отражение связывает амплитуды с *противоположной* четностью. В частности, имеем [228]

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J^{SP}(\omega) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle = -(-1)^{\lambda - \lambda'} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A_J^{S, -P}(-\omega) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle. \quad (7.6)$$

Это соотношение приводит к интересным следствиям для фермионных траекторий Редже (т. е. для таких траекторий, которые являются физическими при полуцелых значениях J). Во-первых, поскольку разные четности соответствуют разным траекториям, для фермионной траектории $\alpha(\omega)$ не является четной функцией переменной ω , и поэтому обладает точкой ветвления при $s = 0$ (если ее рассматривать как функцию $s = \omega^2$). Во-вторых, если существуют физические состояния как с той, так и с другой четностью, то траектория принимает положительные значения J и при положительных и при отрицательных значениях ω и, следовательно, имеет вид, показанный, например, на фиг. VIII.7.

§ 8. ВКЛАД ТРАЕКТОРИИ ПОМЕРАНЧУКА

В соответствии с границей Фруассара, амплитуда упругого рассеяния частиц с нулевым спином с увеличением t не может расти быстрее, чем t^1 (с точностью до логарифмических множителей). Данные, согласно которым полные сечения стремятся к постоянным значениям, навели на мысль о существовании траектории, принимающей в точке $s = 0$ максимальное допустимое этим условием значение, т. е. $\alpha(0) = 1$, — так называемой траектории Померанчука, или померанчона. Чтобы не возникло противоречия с теоремой Померанчука, соответствующая частица должна обладать нулевыми квантовыми числами (кроме спина).

Было показано [228] при тех же по существу предположениях, что такая же граница справедлива и для частиц со спином, так что и в этом случае траектория Померанчука (если она вообще существует) преобладает в тех процессах высокоэнергетического рассеяния, для которых возможен обмен соответствующей частицей в кросс-канале.

Хара [229] предпринял попытку доказать независимость от спиральностей, т. е. от спина, вклада померанчона в полное сечение рассеяния двух частиц. Как будет видно из дальнейшего, в этой работе имеется одно недоказанное предположение, но тем не менее имеет

смысл изложить ход рассуждений. Мы приведем здесь его в упрощенной форме, следуя изложению статьи [307].

Мы хотим рассмотреть упругое рассеяние в t -канале, поэтому потребуем, чтобы частицы 1 и 2 и частицы 3 и 4 были одинаковыми. Для этих двух типов частиц мы используем символы 1 и 3 соответственно (фиг. IV.1).

Поскольку мы хотим проанализировать влияние обмена померанчоном в s -канале, необходимо рассматривать лишь амплитуды s -канала с $PC = +1$.

Для таких амплитуд имеем

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_1 \bar{\lambda}_1 | A(s, t) | \lambda_3 \bar{\lambda}_3 \rangle = \\ & = \langle \lambda_1 \bar{\lambda}_1 | A(s, t) | -\bar{\lambda}_3, -\lambda_3 \rangle. \end{aligned} \quad (8.1)$$

(В этом параграфе все равенства относятся только к вкладу померанчона, т. е. для полной амплитуды они справедливы лишь в пределе $t \rightarrow \infty$.)

Запишем кроссинг-соотношение амплитуд t -канала с амплитудами s -канала при $s = 0$:

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 \mu_3 | A^t(0, t) | \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_3 \rangle &= \sum_{\lambda_i} d_{\lambda_1 \mu_1}^{\sigma_1} \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{\lambda_1 \bar{\mu}_1}^{\sigma_1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times \\ & \times d_{\lambda_3 \mu_3}^{\sigma_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{\lambda_3 \bar{\mu}_3}^{\sigma_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) \langle \lambda_1 \bar{\lambda}_1 | A^s(0, t) | \lambda_3 \bar{\lambda}_3 \rangle, \end{aligned} \quad (8.2)$$

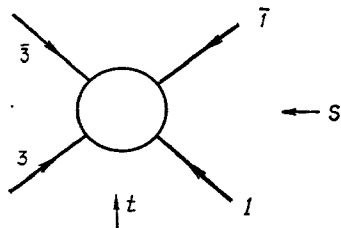
где, как и в § 6, для явного обозначения каналов используются индексы t и s , а для спиральностей t -канала — символ μ . Подставляя (8.1) в (8.2) и используя свойства симметрии функций $d_{\lambda \mu}^{\sigma}$, получаем

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 \mu_3 | A^t(0, t) | \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_3 \rangle &= \sum_{\lambda_i} d_{\lambda_1 \mu_1}^{\sigma_1} \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{\lambda_1 \bar{\mu}_1}^{\sigma_1} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times \\ & \times d_{-\bar{\lambda}_3 \mu_3}^{\sigma_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{-\bar{\lambda}_3 \bar{\mu}_3}^{\sigma_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) \langle \lambda_1 \bar{\lambda}_1 | A^s(0, t) | \lambda_3 \bar{\lambda}_3 \rangle = \\ & = \langle \mu_1 \bar{\mu}_3 | A^t(0, t) | \bar{\mu}_1 \mu_3 \rangle (-1)^{\bar{\mu}_3 - \mu_3}. \end{aligned} \quad (8.3)$$

Воспользуемся теперь сохранением углового момента [или аналогом формулы (3.1)] для амплитуд t -канала при $s = 0$. Благодаря (8.3) это приводит к двум условиям

$$\mu_1 - \mu_3 = \bar{\mu}_1 - \bar{\mu}_3, \quad (8.4a)$$

$$\mu_1 - \bar{\mu}_3 = \bar{\mu}_1 - \mu_3, \quad (8.4b)$$



Фиг. IV.1. Упругое рассеяние в t -канале.

откуда следует

$$\mu_1 = \bar{\mu}_1, \quad (8.5a)$$

$$\mu_3 = \bar{\mu}_3. \quad (8.5b)$$

Переходя теперь с помощью кроссинг-соотношения из t -канала в s -канал и воспользовавшись этими равенствами, получаем

$$\langle \lambda_1 \bar{\lambda}_1 | A^s(0, t) | \lambda_3 \bar{\lambda}_3 \rangle = \langle \lambda_1 \bar{\lambda}_1 | A^s(0, t) | \bar{\lambda}_3 \lambda_3 \rangle. \quad (8.6)$$

Однако если $|\lambda_1 - \bar{\lambda}_1|$ и $|\lambda_3 - \bar{\lambda}_3|$ не являются четными числами, то вклады померанчона в эти две амплитуды имеют противоположные знаки. Отсюда следует, что связь померанчона с состояниями, для которых хотя бы одна из этих величин нечетна, должна быть равна нулю. Единственной альтернативой является «конспирация», которая в данном случае требует, чтобы существовала еще одна траектория, принимающая при $s = 0$ значение $\alpha(s) = 1$. Эту возможность мы рассматривать не будем.

Введем теперь упоминавшееся выше недоказанное предположение, согласно которому с траекторией Померанчука в точке $s = 0$ связаны только состояния с $|\lambda_1 - \bar{\lambda}_1| \leq 1$ и $|\lambda_3 - \bar{\lambda}_3| \leq 1$. Поскольку $\alpha(s) = 1$ при $s = 0$, все другие состояния при этом значении s являются бессмысленными. На этой основе Хара [229] высказал свое предположение. Однако при $\alpha = 1$ померанчон имеет *неправильную сигнатуру*, и следовательно, нет оснований считать, что он не связан с бессмысленными состояниями (см. гл. V, § 6). Таким образом, это предположение не доказано, так что результат, который будет получен ниже, может оказаться неверным. Следует отметить, однако, что если спины рассматриваемых частиц не превышают $1/2$, то это предположение не требуется, поэтому, например, в случае NN -системы соответствующие результаты будут заведомо справедливыми.

Приняв, где это необходимо, сформулированное выше предположение, сразу же получим, что допустимы лишь значения спиральностей, удовлетворяющие равенствам

$$\lambda_1 = \bar{\lambda}_1, \quad (8.7a)$$

$$\lambda_3 = \bar{\lambda}_3. \quad (8.7b)$$

Как показал Хара [229], а также в более ранней работе Пайерлс и Трумен [327], эти соотношения приводят к независимости амплитуд при высоких энергиях от спиральностей. Чтобы доказать это, запишем (8.2) с учетом (8.5) и (8.7):

$$\begin{aligned} \langle \mu_1 \mu_3 | A^t(0, t) | \bar{\mu}_1 \bar{\mu}_3 \rangle &= \delta_{\mu_1 \bar{\mu}_1} \delta_{\mu_3 \bar{\mu}_3} \langle \mu_1 \mu_3 | A^t(0, t) | \mu_1 \mu_3 \rangle = \\ &= \sum_{\lambda_1 \lambda_3} d_{\lambda_1 \mu_1}^{\sigma_1} \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{\lambda_1 \bar{\mu}_1}^{\sigma_1} \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{\lambda_3 \mu_3}^{\sigma_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) d_{\lambda_3 \bar{\mu}_3}^{\sigma_3} \left(\frac{\pi}{2} \right) \times \\ &\quad \times \langle \lambda_1 \lambda_1 | A^s(0, t) | \lambda_3 \lambda_3 \rangle. \quad (8.8) \end{aligned}$$

Умножим обе части (8.8) на $d_{\lambda_1\mu_1}^{\sigma_1}(\pi/2) d_{\lambda_3\mu_3}^{\sigma_3}(\pi/2)$ и просуммируем по $\bar{\mu}_1$ и $\bar{\mu}_3$. Используя ортогональность функций d , сразу получим, что при всех μ и λ

$$\langle \mu_1\mu_3 | A^t(0, t) | \mu_1\mu_3 \rangle = \langle \lambda_1\lambda_1 | A^s(0, t) | \lambda_3\lambda_3 \rangle, \quad (8.9)$$

что и требовалось доказать.

§ 9. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ГРУППОВЫХ МЕТОДОВ К ТЕОРИИ РЕДЖЕ

Мы уже останавливались на двух, на первый взгляд совершенно различных, проблемах, касающихся поведения траекторий Редже при $s = 0$. Существуют определенные трудности, связанные с кинематикой неравных масс, которые обсуждались в гл. III. Там было намечено два разных пути их преодоления: можно потребовать, чтобы фоновый член обладал вполне определенными свойствами или чтобы существовали бесконечные последовательности дочерних траекторий, компенсирующие сингулярности своих родительских траекторий (а также сингулярности друг друга) при $s = 0$. Кроме того, как было показано в § 6, кинематические ограничения на амплитуды рассеяния частиц со спином требуют, чтобы для некоторых из них вычеты траекторий обращались в нуль при $s = 0$ (уклонение) или чтобы вклады траекторий взаимно компенсировались (конспирация).

Оба эти явления, по-видимому, можно связать с дополнительной симметрией, которой обладает связанная четыреххвостка при $s = 0$. В сравнительно недавних работах было предпринято несколько попыток сформулировать эти симметрии на соответствующем теоретико-групповом языке, чтобы проанализировать проблему в целом с некоторой единой точки зрения. Кроме того, ряд авторов полагает, что с точки зрения теории групп более естественным решением проблемы ограничений, возникающих в точке $s = 0$, является введение гипотез о существовании дочерних траекторий и конспираций, а не гипотез компенсации сингулярностей за счет фонового члена или уклонения, поскольку последние гипотезы явно не учитывают дополнительную симметрию в этой точке.

Как будет видно из дальнейшего, совершенно бесспорных аргументов в пользу такого подхода в настоящее время не существует, но ввиду чрезвычайного изящества теоретико-групповых методов, а также потому, что они могут оказаться весьма важными с точки зрения дальнейшего развития теории, мы здесь кратко на них остановимся. К сожалению, полное изложение аппарата теории представлений комплексной неоднородной группы Лоренца потребовало бы весьма много места и увело бы нас слишком далеко от основной темы, поэтому мы ограничимся лишь кратким описанием, но дадим ссылки на работы, в которых можно найти все необходимые подробности.

Ознакомиться со свойствами группы Лоренца можно по работам Вигнера [409] и Бриттина и Барута [70].

Постулат 3 из гл. I требует, чтобы S -матрица была инвариантна относительно преобразований Лоренца. Это должно быть справедливым прежде всего в физической области данного канала, но если воспользоваться аналитичностью (постулат 5) и теоремой Холла — Уайтмана [222], необходимое обобщение которой дано Стаппом [377], то мы увидим, что инвариантность должна иметь место и в нефизической области, причем для ее формулировки необходимо обратиться к комплексным преобразованиям Лоренца. Таким образом, S -матрица должна соответствовать некоторому представлению комплексной неоднородной группы Лоренца (или группы Пуанкаре) \mathfrak{P} .

Разложение по парциальным волнам в физической области s -канала, которое проводилось в гл. II, § 1 и в гл. IV, § 1, соответствует тому, что амплитуда представляется через базисные элементы неприводимого представления группы \mathfrak{P} с

$$P^2 \equiv (p_1 + p_2)^2 \equiv s > 0, \quad (9.1)$$

где P^2 — собственное значение одного из операторов Казимира этой группы. Матрицы вращений $d_{\lambda\lambda'}^J$ являются представлениями «малой группы» для $s > 0$, т. е. трехмерной группы вращений $SO(3)$ [или ее универсальной накрывающей $SU(2)$], причем под «малой группой» понимается группа преобразований, оставляющих инвариантным полный 4-импульс

$$P_\mu \equiv (p_{1\mu} + p_{2\mu}) \quad (9.2)$$

(в данном случае вращений). Согласно теореме Петера — Вейля, матричные элементы неприводимых представлений группы $SO(3)$ [точнее $SU(2)$] образуют полный базис, через элементы которого можно представить любую функцию, квадратично интегрируемую на групповом многообразии. Таким образом, в данном случае функции $d_{\lambda\lambda'}^J$ с $J = 0, 1, 2, \dots$ или $1/2, 3/2, \dots$, использованные в (1.2), образуют полный базис для разложения произвольной функции, для которой ряд по парциальным волнам сходится.

Основное преимущество разложения по парциальным волнам заключается в том, что амплитуда $A_H(s, t)$ при этом разбивается на две части, одна из которых определяется свойствами симметрии и содержится в $d_{\lambda\lambda'}^J$, а другая имеет динамическую природу и содержится в $A_H^J(s)$. Значение J определяется другим оператором Казимира группы \mathfrak{P} , собственные значения которого равны $sJ(J+1)$. Конечно, для разложения амплитуды можно использовать любой другой полный набор функций, но лишь при указанном выше разложении мы получаем преимущества, связанные с инвариантностью S -матрицы по отношению к группе $SO(3)$.

При реджезации амплитуды мы исходим из ее разложения в физической области s -канала по парциальным волнам, связанным с груп-

пой $SO(3)$; затем проводим преобразование Зоммерфельда — Ватсона, позволяющее выразить амплитуду через комплексные значения J , и наконец, используя аналитичность S -матрицы по s и t , продолжаем полученное выражение [например, (II.9.10) или (5.2)] в другую область этих переменных, в частности в физическую область t -канала, которая нас и интересует, если полюса s -канала определяют асимптотическое поведение в t -канале. Однако при $P^2 \equiv s < 0$ для группы Пуанкаре малой группой будет уже не $SO(3)$, а $SO(2, 1)$ [или ее универсальная накрывающая $SU(1, 1)$]. Вигнер [408] показал, что существует четыре различных класса представлений группы \mathfrak{K} , которые характеризуются разными собственными значениями оператора Казимира P^2 и имеют различные малые группы:

1. Времениподобное $P^2 > 0$; малая группа $SO(3)$.
2. Пространственно-подобное $P^2 < 0$; малая группа $SO(2, 1)$.
3. Изотропное $P^2 = 0$ и $P_\mu \neq 0$; малая группа $E(2)$.
4. Нулевое $P^2 = 0$ и $P_\mu = 0$; малая группа $SO(3, 1)$. [Здесь $E(2)$ — евклидова группа в пространстве двух измерений.]

Представления группы $SO(2, 1)$ были изучены Баргманом [54]; с точки зрения полюсов Редже они обсуждались в работах [21, 67, 68, 220, 259, 359]. Оказывается, что существует четыре семейства унитарных представлений:

- а) основная серия: $\text{Re } J = -1/2, -\infty < \text{Im } J < \infty$;
- б) дополнительная серия: $-1/2 < \text{Re } J < 0, \text{Im } J = 0$;
- в) скаляр: $J = 0$;
- г) дискретная серия: $J = 0, 1, 2, \dots$ или $-1/2, 1/2, 3/2, \dots$.

Согласно теореме 9 Баргмана, которая является аналогом использованной выше теоремы Петера — Вейля, любую функцию, квадратично интегрируемую на групповом многообразии, можно разложить по матричным элементам представлений из основной серии и по матричным элементам представлений с $\text{Re } J > -1/2$, принадлежащих дискретной серии. Дискретная серия дает слагаемые, соответствующие бессмысленному каналу и ограниченные условием

$$J < M \equiv \max(\lambda, \lambda'). \quad (9.3)$$

Если контур интегрирования сдвинуть от $\text{Re } J = -1/2$ к $\text{Re } J = M - 1/2$, то такие слагаемые с $J < M$ сократятся с членами основной серии. (Подробности см., например, в работе Бойса [67]. Отметим также, что мы не касаемся здесь вопросов, связанных с сигнатурой.) Таким образом, окончательно имеем

$$A_H(s, t) = -\frac{16\pi}{2i} \int_{M-1/2-i\infty}^{M-1/2+i\infty} dJ \frac{2J+1}{\sin \pi(J-\lambda)} A_H^J(s) d_{\lambda\lambda'}^J(z_s), \quad (9.4)$$

где z_s — косинус угла рассеяния в s -канале, который в области $s < 0$ является, конечно, нефизическим ($z_s > 1$). Амплитуда рассеяния квадратично интегрируема на групповом многообразии лишь в том

случае, если

$$A_H(s, t) = O(t^{-1/2}), \quad (9.5)$$

и очевидно, (9.4) есть не что иное, как преобразование Зоммерфельда — Ватсона (5.2) для амплитуды, у которой отсутствуют сингулярности при $\text{Re } J > -1/2$. Совершая обратное преобразование Зоммерфельда — Ватсона, мы вернемся к обычному разложению амплитуды по парциальным волнам (1.2). При достаточно больших по модулю отрицательных s условие (9.5), по-видимому, будет выполняться, но с ростом s должны появляться динамические сингулярности Редже. Соответствующие им функции уже не будут квадратично интегрируемыми на групповом многообразии, поэтому, прежде чем можно будет использовать теоретико-групповое представление, в них следует сделать вычитания. Принимая обычную связь между асимптотическим поведением амплитуды и ее сингулярностями в J -плоскости, в итоге мы получим выражение, в точности подобное формуле (5.2).

Таким образом, представление амплитуды в виде разложения по «парциальным волнам» группы $SO(2, 1)$ эквивалентно преобразованию Зоммерфельда — Ватсона. Такой способ его воспроизведения не лишен известного интереса, хотя ничего особенно нового он не дает.

Однако если s равно нулю, то в качестве малой группы нужно использовать третью или четвертую из перечисленных выше групп, в зависимости от значения импульса P_μ . Поскольку

$$\sum_{\mu} p_{1\mu}^2 = m_1^2 \quad \text{и} \quad \sum_{\mu} p_{2\mu}^2 = m_2^2, \quad (9.6)$$

условие

$$P^2 \equiv \sum_{\mu} (p_{1\mu} + p_{2\mu})^2 = 0 \quad (9.7)$$

означает, что равенство

$$P_\mu \equiv (p_{1\mu} + p_{2\mu}) = 0 \quad (9.8)$$

возможно лишь в том случае, когда $m_1 = m_2$. Вообще, если для какого-нибудь импульса P^2 лежит на массовой поверхности, то вектор P_μ может равняться нулю лишь при условии, что $m_1 = m_2$ и $m_3 = m_4$. Обычно связанная четыреххвостка имеет всего две степени свободы, которые обозначаются через s и t , но для того, чтобы удовлетворить условиям (9.6) и (9.8), когда $m_1 = m_2$ (и $m_3 = m_4$), необходимо ввести три степени свободы. Именно поэтому в данном случае в качестве малой группы и выступает группа $SO(3, 1)$ [или ее универсальная накрывающая $SL(2, C)$], которая соответствует более широкой симметрии. (Представления группы $SO(3, 1)$ даны в работах [68, 358, 391].)

Дополнительная степень свободы, возникающая при равных массах, проявляется в том, что унитарные представления основной серии группы $SO(3, 1)$ несут не одно квантовое число (как J , употребляв-

шееся выше), а нумеруются собственными значениями двух операторов Казимира: j_0 , принимающего дискретный ряд значений ($j_0 = 0, 1, 2, \dots$ или $1/2, 3/2, \dots$), и σ , который является чисто мнимым ($-i\infty < \sigma < i\infty$). Соответствующее разложение по парциальным волнам записывается в виде

$$A_H(s=0, t) = \delta_{\lambda\lambda'} \sum_{TT'} \sum_{j_0=-T_M}^{T_M} \left(-\frac{16\pi}{2i} \right) \int_{-M-i\infty}^{-M+i\infty} d\sigma (j_0^2 - \sigma^2) A_{TT'}^{j_0\sigma}(s) d_{T\lambda T'}^{j_0\sigma}, \quad (9.9)$$

где $d_{T\lambda T'}^{j_0\sigma}$ — матрицы вращений для группы $SO(3, 1)$, а $A_{TT'}^{j_0\sigma}$ — соответствующие «парциальные» амплитуды. Кроме того, $T_M = \min(T', T)$, причем $|\sigma_1 - \sigma_3| \leq T \leq \sigma_1 + \sigma_3$, $|\sigma_2 - \sigma_4| \leq T' \leq \sigma_2 + \sigma_4$ (здесь символы σ обозначают спины частиц, и их не следует смешивать с переменной интегрирования). Необходимые подробности можно найти в работах [68, 139, 140], обозначениям которых мы следовали, за исключением того, что мы использовали символ T вместо J , чтобы избежать путаницы с полным угловым моментом. Те же результаты получил Толлер [391], который вместо (j_0, σ) применял обозначения (M, λ) .

Выписанное выражение играет важную роль, если предположить, что σ является той естественной переменной, по которой следует вводить полюса и разрезы, соответствующие тем частям амплитуды, которые при $s=0$ не являются квадратично интегрируемыми по групповому многообразию. Правдоподобность этого предположения основана на аналогии с тем, как в (9.4) вводились полюса Редже и разрезы по J при $s < 0$. В результате получаем следующее выражение, соответствующее (5.2):

$$A_H(s=0, t) = (9.9) + \sum_{TT'} \sum_r g_r^{TT'}(t) [j_0^2 - a_r^2(j_0, 0)] d_{T\lambda T'}^{j_0 a_r}(z_s), \quad (9.10)$$

в которое входят вклады от полюсов при $\sigma = a_r(j_0, s=0)$ и где $g_r^{TT'}(t)$ — вычет в r -м полюсе с соответствующим множителем (мы не рассматриваем разрезы, но их, конечно, можно включить обычным способом). Между слагаемыми с разными T, T' имеются определенные соотношения, которые позволяют исключить это суммирование, а асимптотическая форма функций d не зависит от T и T' и имеет вид

$$d_{T\lambda T'}^{j_0\sigma} \sim z_s^{\sigma-1-|j_0-\lambda|}.$$

Такие полюса в σ -плоскости Толлер назвал «лоренцевскими полюсами», а в работах [139, 140] они именуется «полюсами Толлера», так что процесс продолжения по σ можно назвать «толлеризацией» (хотя вряд ли следует использовать эту терминологию). Толлер предположил, что именно эти лоренцевские полюса являются основными динами-

ческими сингулярностями. Чтобы установить их связь с полюсами в J -плоскости, необходимо разложить функции $d_{\Gamma\Lambda T}^{j_0\sigma}$ по матричным элементам $d_{\lambda\lambda}^J$ группы $SO(2, 1)$. Эта задача [которая, конечно, эквивалентна разложению представлений $SL(2, C)$ по представлениям $SU(1, 1)$] была решена в работах [14, 358]. Вычисления являются довольно сложными, но оказывается, что каждому лоренцевскому полюсу соответствует семейство траекторий, значения которых при $s = 0$ отличаются на единицу:

$$\alpha_n(0) = a(j_0, 0) - n - 1. \quad (9.11)$$

При этом, как и в случае дочерних траекторий и конспираций, вычеты в точке $s = 0$ при $n \neq 0$ сингулярны.

Таким образом, если принять, что имеется лишь один лоренцевский полюс, то это приводит к существованию дочерних траекторий и конспираций. Однако возникающие здесь конспирации относятся к более общему типу по сравнению с конспирациями, введенными Волковым и Грибовым [397], которые упоминались выше в § 6. В то время как эти авторы рассматривали лишь конечное число траекторий с несингулярными вычетами, здесь имеются бесконечные последовательности дочерних траекторий, и для данной амплитуды возможно существование бесконечного числа семейств траекторий, принимающих участие в конспирации. Следует отметить, однако, что появление подобных дочерних траекторий предсказывается только в случае $m_1 = m_2$, $m_3 = m_4$, тогда как соответствующие аргументы, основанные на использовании аналитичности (см. гл. III), требуют выполнения неравенства $m_1 \neq m_2$ (и $m_3 \neq m_4$, чтобы получить дочерние траектории всех порядков). В этом случае $SO(3, 1)$ уже не будет группой симметрии амплитуды, хотя никто не запрещает нам, конечно, постулировать, что в спектре траекторий проявляется более высокая симметрия, чем в самой амплитуде.

Наоборот, если взять один полюс Редже, то он будет соответствовать бесконечной последовательности лоренцевских полюсов, или, с точки зрения σ -плоскости, бесконечный набор лоренцевских полюсов может свернуться так, что останется всего один полюс Редже. Как было подчеркнуто в работе [170], это, конечно, не означает, что снимается требование равенства нулю вычетов отдельных (т. е. не участвующих в конспирации) траекторий Редже для некоторых амплитуд. Однако поскольку мы допускаем также возможность уклонения (компенсация фоном, а не за счет дочерних траекторий), мы не в состоянии опровергнуть точку зрения, противоположную Толлеру, согласно которой первичными являются полюса Редже, а наиболее естественным — объединение всех лоренцевских полюсов в отдельные полюса Редже. Так как физические частицы сопоставляются отдельным полюсам Редже, в отсутствие дополнительных аргументов наиболее правдоподобной представляется как раз эта точка зрения.

В случае неравных масс указанную симметрию можно обнаружить лишь за пределами массовой поверхности, так как только там P_μ может обращаться в нуль. Именно поэтому при анализе порождения дочерних траекторий столь полезным оказывается, как упоминалось в гл. III, уравнение Бете — Солпитера, представляющее собой модель, которая формулируется вне массовой поверхности. Дополнительная симметрия при $P_\mu = 0$ в действительности была замечена уже давно, а именно в 1954 г., Виком [407] и Каткоским [130]. При использовании уравнения Бете — Солпитера обычно осуществляется аналитическое продолжение на мнимые значения энергии, в результате чего симметрия $SO(3, 1)$ переходит в $SO(4)$. Многие более поздние работы изложены на языке группы $SO(4)$, который обладает тем преимуществом, что позволяет избежать трудностей, связанных с некомпактностью группы $SO(3, 1)$, хотя такое продолжение по энергии может приводить к некоторым трудностям.

Домокош и Шураньи [151] показали, что параметр n , характеризующий неприводимые представления $SO(4)$, можно использовать для нумерации семейств траекторий (дочерних последовательностей), причем дочери соответствуют так называемым «анормальным» решениям уравнения, открытым вновь в работе Фридмана и Вонга [188]. Хорошую библиографию по анормальным решениям уравнения Бете — Солпитера можно найти у Наканиши [311]. Дальнейшему анализу связи между лоренцевскими полюсами и реджевскими семействами посвящены работы Домокоша [150], Фридмана и Вонга [189] и Финкельштейна и Вонга [170], а естественный способ появления лоренцевских полюсов в инвариантных (а не в спиральных) амплитудах указали Дьюранд [159], Тейлор [381] и Джонс и Скадрон [257]. Уравнение Бете — Солпитера и некоторые другие модели рассматривались также в работах [121, 122, 379].

Конечно, даже в случае равных масс симметрия возникает только в одной точке ($s = 0$), так что возможны два разных подхода к вопросу о способе продолжения из этой точки. В одном из них [140, 316] принимается, что полюса обладают симметрией $SO(3, 1)$ при всех s , и поэтому данный лоренцевский полюс в σ -плоскости при $\sigma = a(j_0, s)$ будет приводить к бесконечной последовательности параллельных траекторий

$$\alpha_n(s) = a(j_0, s) - n - 1, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (9.12)$$

где n — номера разных дочерних траекторий. С другой стороны, так как симметрия «нарушается» при $s \neq 0$ (или всюду на массовой поверхности, когда $m_1 \neq m_2$), то можно ожидать, что при удалении от точки симметрии соответствующая инвариантность окажется потерянной. Домокош [150] применил методы теории возмущений для оценки отклонения (9.12) от точки симметрии. Вычисления, выполненные Каткоским [134] (см. также [135]) на основе уравнения Бете — Солпитера, показывают, что поведение дочерних траекторий

может резко отличаться от поведения родительской траектории.

Характер продолжения из точки $s = 0$ рассматривался также в работе Бали и др. [41]. В ней показано, что резкий переход при $P_\mu = 0$ от инвариантности $SO(2, 1)$ к $SO(3, 1)$ свойствен только связанной четыреххвостке, которая обладает аномально малым (в некотором смысле) числом степеней свободы. В случае же трех или большего числа частиц в начальном и конечном состояниях этих проблем не возникает, так как подобного изменения числа степеней свободы здесь не происходит. В других работах этих же авторов [42, 43] показано, кроме того, что использование методов Толлера, которые приводят сразу к преобразованию Зоммерфельда — Ватсона, т. е. не требуют аналитического продолжения парциальных амплитуд кросс-канала, придает однозначный смысл понятию реджевского поведения многочастичных амплитуд. До этих работ было неясно, как в подобных задачах наилучшим способом выбрать переменные. Весьма претенциозный подход, применяющий методы Толлера для «реджезации» внутренних симметрий, предложен в работе [357].

Чрезвычайно примечательным является следующее обстоятельство. Для релятивистского рассеяния описанные теоретико-групповые методы воспроизводят аналитически продолженное преобразование Зоммерфельда — Ватсона. В то же время аналогичных методов, пригодных в случае нерелятивистского рассеяния, не существует, хотя здесь прямо может быть доказано существование необходимого аналитического продолжения. В нерелятивистском рассеянии, конечно, не существует кросс-канала, но можно ожидать, что ему соответствует пространственно-подобная область изменения переменных. Во времениподобной области малой группой для группы Галилея по-прежнему является $SO(3)$, откуда и возникает обычное разложение по парциальным волнам, но в пространственно-подобной области малой группой будет $E(2)$ [245] (см. также [354]), которая не имеет представлений, соответствующих фоновому интегралу. Поэтому в данном случае теория групп не может дать те же результаты, что преобразование Зоммерфельда — Ватсона. В весьма полезном обзоре Леви — Леблона [278] высказывается мнение, что это набрасывает тень на уместность релятивистского анализа, основанного на $SO(2, 1)$ -симметрии, свойственной кросс-каналу.

Природа может либо стремиться к полному использованию симметрии при $s = 0$, прибегая к конспирациям и дочерним траекториям, либо пренебрегать этой свободой, компенсируя сингулярности за счет фонового члена и уклонения. Кажется вполне очевидным, что этот вопрос является динамическим вопросом и не может быть решен одними лишь теоретико-групповыми методами. В настоящее время наиболее серьезными представляются те теоретические аргументы в пользу симметрии, которые даются моделью траекторий, основанной на уравнении Бете — Солпитера, но и эти аргументы являются все же весьма слабыми. Домокош [150] показал, что обычные S -матри-

ные модели для траекторий, подобные N/D -методу (рассматриваемому в гл. VI), включающие продолжение двухчастичного условия унитарности на массовую поверхность ниже точки $s = 0$, исключают использование такого числа переменных, которого было бы достаточно для существования дополнительной симметрии. Чтобы получить симметрию в теории, сформулированной на массовой поверхности, необходимо учитывать связь с многочастичными каналами, которым не свойственно внезапное изменение числа степеней свободы. В уравнении Бете — Солпитера частично содержится связь с подобными каналами, чем, наверное, и объясняется его способность порождать дочерние траектории. Поэтому для пиона, являющегося скорее всего связанным состоянием трехчастичных (или более высоких) каналов, существование дочерних траекторий будет, возможно, более вероятным, чем для ρ -мезона, возникающего главным образом в двухчастичных каналах. При современном состоянии знаний динамики ни одну из этих возможностей предпочесть, по-видимому, нельзя.

После того как установлена такая теоретическая неопределенность, остается надеяться лишь на то, что в скором времени появятся решающие экспериментальные данные, которые помогут выяснить, существуют ли в действительности дочерние траектории и конспирации. К сожалению, однако, получение этих данных может оказаться очень сложным делом. Некоторые из способов, позволяющих отыскивать дочерние траектории, обсуждались в гл. III, § 8, а в гл. VIII будут рассмотрены и другие методы, с помощью которых можно проверить, имеются ли дочерние траектории и конспирации.

В работе [15] приводятся определенные данные, дающие отрицательный ответ на этот вопрос. В гл. VIII, § 6, п. 1 подробно рассматриваются причины, по которым обмен ρ -мезонной траекторией может объяснять ход дифференциального сечения πN -рассеяния с перезарядкой, имеющего минимум при $t = -0,6 (G\mu/c)^2$, интерпретируемый как исчезновение связи ρ со спиральной амплитудой $\langle 00 | A^t | + - \rangle$ при $\alpha_\rho(t) = 0$. В упомянутой работе установлено, что в случае полюса Толлера вида

$$\alpha_\rho(0, t) = \alpha_\rho(t) + 1 \quad (9.13)$$

[см. (9.12)] эта связь в нуль не обращается, и чтобы получить необходимый спад сечения, требуется взаимная компенсация двух полюсов Толлера. При этом другой полюс может или обладать значением $j_0 = 1$ [заметим, что полюс (9.13) имеет $j_0 = 0$], или соответствовать совершенно иной траектории ρ' . Предсказание указанного хода сечения является одним из основных достижений однополюсной модели Редже; в то же время этот результат не удается получить с помощью полюсов Толлера, что следует рассматривать как серьезную трудность основанной на них теории. Такой же по существу вывод сформулирован в работе [313], где анализируется процесс $\pi^- p \rightarrow \eta n$ с точки зрения обмена траекторией A_2 (ср. гл. VIII, § 6, п. 3).

ПРИРОДА СИНГУЛЯРНОСТЕЙ В J -ПЛОСКОСТИ

§ 1. АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ УНИТАРНОСТИ

В этой главе рассматривается характер сингулярностей парциальных амплитуд в J -плоскости и выясняется, какие мы можем наложить на них ограничения. Так, например, будет показано, почему в определенных моделях единственными движущимися сингулярностями являются полюса и отчего это не справедливо для общего случая. Будет показано также, что присутствие частиц с высшими спинами накладывает на скачки определенные интегральные ограничения (сверхсходящиеся соотношения). Кроме того, мы докажем, что в J -плоскости имеются разрезы, и увидим, что благодаря им у некоторых амплитуд возникают неподвижные полюса.

Многие из положений данной главы опираются на условие унитарности для канала, в котором совершается разложение по парциальным волнам, т. е. в нашем случае для s -канала. Мы начнем с доказательства справедливости условия унитарности, которое в своей первоначальной форме было сформулировано для физических значений J , также и для аналитически продолженной амплитуды. Рассмотрим сначала случай бесспиновых частиц и предположим, что существует одноканальная область упругого рассеяния $s_0 < s < s_1$, в которой, согласно (II.5.7), условие унитарности записывается в виде

$$\text{Im } B_l(s) = [q_{s_{12}} q_{s_{34}}]^l \rho(s) |B_{l\pm}^*(s)|^2 \quad (1.1)$$

при $s_0 < s < s_1$ и целых значениях $l \geq 0$. При этом мы исключили из амплитуды пороговый множитель $[q_{s_{12}} q_{s_{34}}]^l$, введя в соответствии с (II.5.7) функцию

$$B_l(s) = [q_{s_{12}} q_{s_{34}}]^{-l} A_l(s). \quad (1.2)$$

Запишем условие унитарности $s_0 < s < s_1$ в следующей эквивалентной форме:

$$B_l^\pm(s) - B_{l\mp}^\pm(s)^* = 2i [q_{s_{12}} q_{s_{34}}]^l \rho(s) B_{l\mp}^\pm(s)^* B_l^\pm(s). \quad (1.3)$$

Из (1.1) следует, что это соотношение справедливо при значениях l , равных чередующимся целым числам, т. е. четным числам в случае знака плюс и нечетным в случае знака минус. Видно также, что обе его части являются аналитическими функциями переменной l , которые могут иметь только изолированные сингулярности и удовлетворя-

ют условиям ограниченности, требуемым теоремой Карлсона. Из этой теоремы следует, что (1.3) справедливо при всех значениях l , на которые можно продолжить функцию.

Ясно, что подобное обобщение условия унитарности аналогичным способом можно получить и для задач, включающих несколько связанных каналов, а также для частиц с ненулевым спином. Во всех случаях соответствующее условие унитарности, записанное в виде аналитического соотношения по J , справедливо при любых значениях этой переменной, на которые можно продолжить парциальную амплитуду.

Из условия унитарности сразу же вытекает два важных результата. Во-первых, если в точке, где $\text{Im} \alpha = 0$, вычет траектории Редже не обращается в нуль, то она не может пересекать ось J при вещественных s , лежащих выше порога. Например, для одноканального случая частиц без спина это следует из (1.3), так как если бы на вещественной оси лежал полюс, то правая часть этого соотношения имела бы двойной полюс. Поскольку непосредственно за физическим порогом для траекторий Редже $\text{Im} \alpha > 0$ (это является по существу следствием отсутствия резонансных полюсов на физическом листе s -плоскости — см. гл. II), часто предполагается, что неравенство $\text{Im} \alpha > 0$ выполняется при всех s , лежащих выше порога. Такое предположение оправдывается во всех рассмотренных потенциальных моделях.

Другим следствием условия унитарности является «факторизация» вычетов полюсов Редже в многоканальной задаче [202, 216]. В общем виде этот результат был доказан Шарапом и Сквайрсом [89]. Рассмотрим S -матрицу для N взаимосвязанных каналов, которые открыты в некоторой энергетической области $s_N < s < s_{N+1}$. Обозначив ее через $S_N(J, s)$, будем иметь следующее условие унитарности:

$$S_N(J, s) S_N^\dagger(J^*, s) = 1, \quad s_N < s < s_{N+1}, \quad (1.4)$$

где знак \dagger означает эрмитово сопряжение. Перепишем (1.4) в виде

$$S_N(J, s) = \frac{\text{cof } S_N^\dagger(J^*, s)}{\det S_N^\dagger(J^*, s)}, \quad s_N < s < s_{N+1}, \quad (1.5)$$

где в числителе стоит матрица, образованная из алгебраических дополнений матрицы S_N^\dagger .

Далее, неравенство Сильвестра¹⁾ утверждает, что ранг произведения двух матриц не меньше суммы их рангов минус число строк. Применяя его к произведению S_N^\dagger и $\text{cof } S_N^\dagger$, получаем

$$r[S_N^\dagger] + r[\text{cof } S_N^\dagger] - N \leq r[\det S_N^\dagger \cdot 1], \quad (1.6)$$

¹⁾ См., например, Ф. Р. Гантмахер, Теория матриц, М., 1967, стр. 78.— *Прим. ред.*

где символ $r [\dots]$ обозначает ранг матрицы, стоящей в скобках. Если не рассматривать возможность полного совпадения двух траекторий Редже, то полюса у S_N будут простыми, так что, согласно (1.5), нули у $\det S_N^\dagger$ будут также простыми и S_N^\dagger будет иметь ранг $N - 1$. Таким образом, в полюсе (1.6) дает

$$r[\text{cof } S_N^\dagger] \leq 1. \quad (1.7)$$

Исключая тривиальный случай нулевых вычетов, из (1.7) и (1.6) получаем, что матрица вычетов имеет ранг 1, т. е. все ее миноры второго порядка равны нулю:

$$\beta_{ij}\beta_{kl} = \beta_{il}\beta_{jk}. \quad (1.8)$$

Это позволяет положить

$$\beta_{ij} = \gamma_i \gamma_j, \quad (1.9)$$

так как вследствие инвариантности по отношению к обращению времени S -матрица должна быть симметричной.

В работе [261] показано, что в области высоких энергий главные вклады от сингулярностей других типов в J -плоскости также факторизуются в указанном выше смысле. Тем самым экспериментальное подтверждение теоремы о факторизации еще не будет означать, что высокоэнергетическое поведение определяется полюсами.

§ 2. ДВИЖУЩИЕСЯ СИНГУЛЯРНОСТИ В J -ПЛОСКОСТИ

В этом параграфе выясняется, что можно сказать полезного о природе сингулярностей парциальных амплитуд, которые возникают, скажем, при $J = \alpha(s)$, где траектория $\alpha(s)$ отличается от константы. Из свойств аналитических функций двух переменных следует, что функция $\alpha(s)$ аналитична по s всюду, за исключением некоторых точек, в которых она может обладать изолированными сингулярностями.

Будем считать, что на физическом листе амплитуда рассеяния $A(s, t)$ равномерно ограничена при всех s некоторой степенью переменной t , допустим

$$|A(s, t)| = O(|t|^{J_M}). \quad (2.1)$$

Это предположение необходимо для того, чтобы было справедливо мандельштамовское представление. Из него следует, что входящий в проекцию Грибова — Фруассара интеграл будет сходиться при $\text{Re } J > J_M$, и поэтому на физическом листе при всех s

$$\text{Re } \alpha(s) \leq J_M. \quad (2.2)$$

Записывая «решение» уравнения $J = \alpha(s)$ в виде

$$s = s_\alpha(J) \quad (2.3)$$

и двигаясь вдоль решения, соответствующего физическому листу, от значения J с $\text{Re } J < J_M$ к значению J с $\text{Re } J > J_M$, получаем, что вследствие (2.2) оно покидает физический лист, т. е. должно проходить через один из разрезов по s .

Положение этих разрезов по s и их происхождение проанализированы в гл. II, § 4 и 11. Напомним, в частности, что скачки на левом разрезе задаются конечными интегралами от функций, аналитических по J (за исключением тех точек, где они имеют неподвижные сингулярности). Отсюда следует, что сингулярности не могут покидать физический лист переменной s , переходя через левые разрезы (мы не рассматриваем одно возможное исключение из этого правила, которое может существовать в том случае, если имеется точка ветвления, в процессе движения изменяющая свой характер и переставшая быть точкой ветвления как раз там, где она переходит через левый разрез).

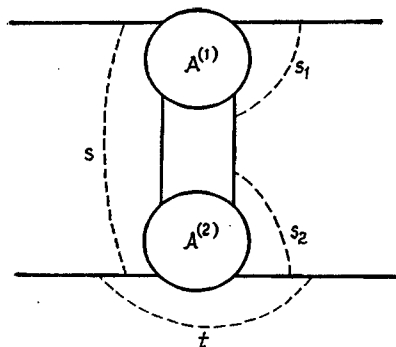
На том участке правого разреза, где справедлива упругая унитарность, можно воспользоваться соотношением (1.3) для установления связи между значениями амплитуды на нижнем и верхнем берегах разреза. При этом нетрудно показать, что сингулярность может покинуть физический лист только при условии, что она является полюсом. В противном случае из соотношения (1.3) вытекало бы, что любая сингулярность, лежащая на втором листе, должна существовать и на первом листе. Таким образом, получен чрезвычайно полезный результат: в той области, где при всех значениях энергии справедлива упругая унитарность, единственными движущимися сингулярностями в J -плоскости являются полюса. Такая ситуация имеет место, например, в потенциальном рассеянии.

Очевидно, этот результат можно распространить и на тот случай, когда некоторое конечное число двухчастичных каналов связано между собой (конечно, при условии, что в каждом канале амплитуда равномерно ограничена некоторым полиномом). При этом, однако, не удастся доказать невозможность такого движения точек ветвления, при котором они пересекают правый разрез в областях, где имеет место неупругая унитарность, включающая трехчастичные (или более высокие) промежуточные состояния. Наоборот, были построены определенные модели потенциального рассеяния с трехчастичными состояниями, в которых такие точки ветвления как раз появляются (см. работу Драммонда [157], где можно найти дальнейшие ссылки). Кроме того, как мы увидим ниже, можно показать, что они возникают и в релятивистских процессах рассеяния.

§ 3. РАЗРЕЗЫ В КОМПЛЕКСНОЙ ПЛОСКОСТИ УГЛОВОГО МОМЕНТА

Ввиду простоты вкладов от полюсов Редже в амплитуду при высоких энергиях по сравнению с вкладами от разрезов (см. гл. II, § 9), а также вследствие того, что большинство простых моделей не при-

водит ни к каким разрезам, естественно было надеяться, что разрезы отсутствуют, хотя бы в физически интересных областях J -плоскости. При феноменологическом анализе обычно используются только полюса (некоторые случаи, в которых принимались во внимание и разрезы, рассматриваются в гл. VIII, § 6, 7), и до сих пор не существует сколько-нибудь убедительных экспериментальных данных, подтверждающих существование разрезов. Однако, как показал Мандельстам [294], на самом деле разрезы должны присутствовать, появляясь и в физически интересных областях, по причинам, рассматриваемым в последнем параграфе данной главы. Здесь мы рассмотрим разрезы, возникающие в определенном приближении и являющиеся по существу ложными, так как они полностью компенсируются другими вкладом в точное выражение для амплитуды. Анализ этих ложных разрезов оправдывается тем, что их положение на J -плоскости тождественно положению истинных разрезов, и, кроме того, они появляются в некоторых проблемах, возникающих в приближенных динамических расчетах (например, гл. VI, § 7).



Ф и г. V.1. Диаграмма условия унитарности, приводящая к разрезам Амари — Фубини — Стангеллини.

Рассмотрим условие унитарности в t -канале для полной амплитуды $A(s, t)$, оставив в нем только вклад от двухчастичного промежуточного состояния (фиг. V.1). Мы вычислим вклад от такой диаграммы в двойную спектральную функцию, воспользовавшись унитарностью в t -канале. Этот расчет аналогичен вычислениям, проводившимся в гл. I, § 12, за исключением того, что теперь s - и t -каналы поменялись ролями. В результате получим

$$\rho_{st}^{t \text{ упр}}(s, t) = (16\pi^2 q_t \sqrt{t})^{-1} \int ds_1 ds_2 \frac{D_s^{(1)}(s_1, t) D_s^{(2)}(s_2, t)^*}{K^{1/2}(s, s_1, s_2, t)}, \quad (3.1)$$

где для упрощения записи оставлен только вклад от скачка по s .

Для амплитуд $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ предполагается реджевское полюсное поведение, поэтому оно должно быть справедливо также для скачков $D_s^{(1)}$ и $D_s^{(2)}$, т. е. при больших t

$$D_s^{(i)}(s_i, t) \sim \Gamma(s_i) t^{\alpha_i(s_i)}. \quad (3.2)$$

Тогда при больших t имеем

$$\rho_{st}^{t \text{ упр}}(s, t) \sim (16\pi^2)^{-1} \int ds_1 ds_2 \frac{\Gamma_1(s_1) \Gamma_2^*(s_2) t^{\alpha_1(s_1) + \alpha_2^*(s_2) - 1}}{K^{1/2}(s, s_1, s_2, t)}. \quad (3.3)$$

Из (3.3) видно, что при больших t поведение функции $\rho_{st}^{i \text{ упр}}(s, t)$ соответствует непрерывной суперпозиции полюсов Редже, т. е. разрезу. Положение правосторонней точки ветвления $\alpha_c(s)$ определяется формулой

$$\alpha_c(s) = \max [\alpha_1(s_1) + \alpha_2(s_2) - 1] \quad (3.4)$$

при условии, что $2ss_1 + 2ss_2 + 2s_1s_2 - s^2 - s_1^2 - s_2^2 \geq 0$.

Принимая, что при $s < 0$ выполняется неравенство $d\alpha_i(s)/ds \geq 0$ (см. гл. III, § 1), сразу же получаем определенные ограничения на функцию $\alpha_c(s)$. При $s < 0$ имеем

$$\alpha_c(s) \geq \alpha_1(s) + \alpha_2(0) - 1, \quad (3.5a)$$

$$\alpha_c(s) \geq \alpha_1(0) + \alpha_2(s) - 1. \quad (3.5b)$$

Кроме того,

$$\alpha_c(0) = \alpha_1(0) + \alpha_2(0) - 1. \quad (3.6)$$

Далее, если положить $A_1 \equiv A_2$ и воспользоваться для $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ линейной аппроксимацией, а именно

$$\alpha(s) = \alpha(0) + s\alpha'(0), \quad (3.7)$$

где

$$\alpha'(0) > 0, \quad (3.8)$$

то получим

$$\alpha_c(s) = 2\alpha\left(\frac{s}{4}\right) - 1. \quad (3.9)$$

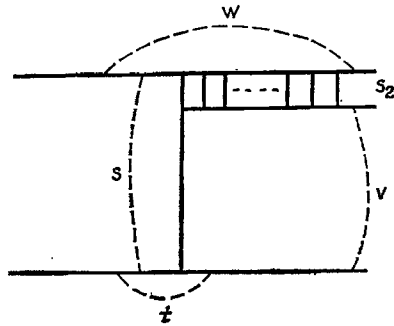
Из (3.6) видно, что если только одна из траекторий принимает значение $J = 1$ при $s = 0$ (вследствие существования границы Фруасара она не может иметь здесь более высокое значение — см. гл. II, § 7), то при этом s разрез будет начинаться в той точке, в которой лежит другой полюс. Далее, согласно (3.9), разрезы имеют тенденцию к менее крутому наклону, чем полюса. Это позволяет предположить, что в сечениях при высоких энергиях их вклад при больших углах будет, по-видимому, более существенным, чем вблизи направления вперед.

Описанное выше поведение итерации двухчастичного условия унитарности было замечено многими авторами. Оно приводит к определенным трудностям, например при использовании в динамических расчетах диаграмм с одночастичным обменом, в особенности если промежуточная частица имеет единичный или более высокий спин (см. гл. VI, § 7). На возникновение кажущихся разрезов в t -плоскости при такого рода итерации впервые указали Амати, Фубини и Стангеллини [19].

Совершенно ясно, что аргументы, которые привели нас к существованию разрезов в плоскости углового момента, являются скорее всего неверными, так как они основываются на использовании двухчастичного условия унитарности в t -канале в области больших t . Действи-

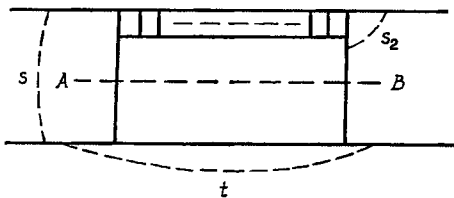
тельно, Мандельштаму [293] удалось доказать, что эти разрезы сокращаются с аналогичными членами, возникающими от многочастичных промежуточных состояний. Подробности весьма сложного доказательства можно найти в оригинальной работе [293], а также в гл. VII;

здесь же мы отметим лишь один существенный для дальнейшего пункт этого доказательства. Рассмотрим фейнмановскую диаграмму, показанную на фиг. V.2. При больших t и фиксированных значениях других инвариантов эта диаграмма ведет себя как t^{-1} (общий анализ высокоэнергетического поведения фейнмановских диаграмм дан в гл. VII). Этот результат не зависит от числа «перекладин» лестницы и остается справедливым даже в том случае, если суммирование лестницы дает связанное состояние или полюс Редже, т. е. вычет в полюсе

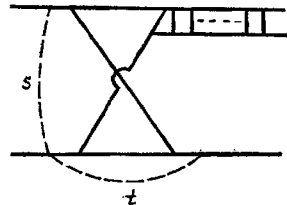


Ф и г. V.2. Фейнмановская диаграмма, ведущая себя как t^{-1} .

s_2 -плоскости при больших t также ведет себя как t^{-1} . Соединим теперь диаграмму фиг. V.2 с аналогичной диаграммой, используя трехчастичную унитарность в s -канале; в результате мы получим диаграмму фиг. V.3. Расписывая интеграл условия унитарности, получаем, что



Ф и г. V.3. Фейнмановская диаграмма, которая ведет себя как t^{-1} , хотя ее двухчастичный скачок в t -канале обладает поведением типа $t^{\sigma+\alpha-1}$.

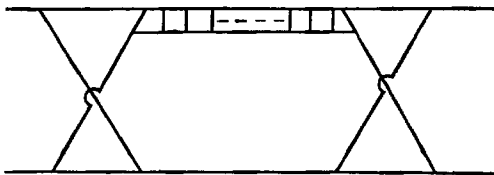


Ф и г. V.4. Фейнмановская диаграмма с третьей двойной спектральной функцией, ведущая себя как t^{-1} .

при больших t эта диаграмма также ведет себя как t^{-1} . Следовательно, она не имеет движущихся сингулярностей в J -плоскости. Однако из предыдущего анализа следует, что вклад в фиг. V.3 от двухчастичного условия унитарности в t -канале (которому соответствует сечение диаграммы вдоль линии AB) ведет себя как $t^{\sigma+\alpha(\hat{s}_2)-1}$, где σ — спин частицы, соответствующей фиг. V.3, а \hat{s}_2 — максимальное значение переменной s_2 в интеграле условия унитарности для t -канала, причем принимается, что в результате суммирования лестницы возникает траектория Редже $\alpha(s_2)$. Этот результат показывает, что в условии

унитарности для t -канала двухчастичный интеграл должен компенсироваться определенными вкладами от многочастичных состояний. Отметим, что здесь рассматривается случай, который несколько проще обсуждавшегося выше (фиг. V.1), так как мы считаем, что A_1 определяется обменом элементарной частицей, а не вкладом полюса Редже, как в формуле (3.2). Однако изложенное доказательство в той же степени применимо и к фиг. V.1.

Оказывается, что зависимостью типа t^{-1} при больших t обладает не только диаграмма фиг. V.2, но и более сложные диаграммы, одна



Ф и г. V.5. Фейнмановская диаграмма, которая приводит к мандельштамовским разрезам.

из которых изображена на фиг. V.4. Однако при объединении двух таких диаграмм в одну посредством унитарности для s -канала (фиг. V.5) асимптотическое поведение типа t^{-1} нарушается, причем имеются достаточно веские основания считать, что такие диаграммы приводят к разрезам в J -плоскости [294]. Как упоминалось выше, эти разрезы начинаются там же, где и разрезы, связанные с вкладами в диаграмму фиг. V.3 от двухчастичного условия унитарности для t -канала. Отметим, что решающим отличием диаграммы фиг. V.5 от диаграммы фиг. V.3 является то, что она дает вклады во все три спектральные функции.

В § 6 мы укажем причины, которые позволяют считать, что такие разрезы действительно существуют.

§ 4. НЕПОДВИЖНЫЕ ПОЛЮСА В J -ПЛОСКОСТИ

В этом параграфе мы попытаемся выяснить, при каких условиях из парциальной амплитуды можно исключить возможные неподвижные полюса в J -плоскости. Рассмотрим сначала случай частиц с нулевым спином, когда в некоторой области переменной s выполняется условие упругой унитарности, и *примем*, что разрезов нет. Воспользовавшись вещественной аналитичностью функции $B(l, s)$, положим

$$B^\pm(l^*, s + i\epsilon)^* = B^\pm(l, s - i\epsilon), \quad (4.1)$$

где s вещественно, причем из соображений удобства $B_l(s)$ записывается как $B(l, s)$. Подставляя это равенство в (1.3), получаем

$$B^\pm(l, s + i\epsilon) - B^\pm(l, s - i\epsilon) = 2i [q_{s13}q_{s24}]^l \rho(s) B^\pm(l, s - i\epsilon) B^\pm(l, s + i\epsilon) \quad (4.2)$$

при $s_0 < s < s_f$. Из этого соотношения сразу же следует, что $B(l, s)$ не может иметь в l -плоскости ни одного неподвижного полюса, так как иначе возникал бы двойной полюс в правой части равенства при всего лишь простом полюсе в его левой части.

Рассмотрим теперь случай, когда одноканальная упругая область отсутствует, а при $s_0 < s < s_f$ открыто конечное число (n) двухчастичных каналов с нулевым спином. Тогда (4.2) заменяется матричным соотношением (см. гл. II; более подробно формализм для многоканальных задач обсуждается в гл. VI)

$$\mathbf{B}^\pm(l, s + i\varepsilon) - \mathbf{B}^\pm(l, s - i\varepsilon) = 2i\mathbf{B}^\pm(l, s + i\varepsilon) \rho_l \mathbf{B}^\pm(l, s - i\varepsilon), \quad (4.3)$$

где \mathbf{B} — квадратная матрица порядка n , элемент B_{ij} которой представляет собой амплитуду рассеяния из канала i в канал j , а ρ_l — диагональная матрица, содержащая необходимые фазовые объемы.

Предположим, что \mathbf{B}^\pm имеет неподвижный полюс при некотором постоянном значении $l = \alpha$ с вычетом $\beta(s)$. Тогда из (4.3) следует равенство

$$\beta(s + i\varepsilon) \beta(s - i\varepsilon) = 0, \quad (4.4)$$

но при $n \geq 2$ отсюда нельзя заключить, что $\beta = 0$. Таким образом, в этом случае просто исключить неподвижные полюса не удастся.

Однако даже в многоканальной задаче неподвижные полюса не могут лежать на вещественной оси l . В этом легко убедиться, обращаясь непосредственно к условию унитарности, записанному в виде

$$\mathbf{B}^\pm(l, s) - \mathbf{B}^\pm(l^*, s)^\dagger = 2i\mathbf{B}^\pm(l^*, s)^\dagger \rho_l \mathbf{B}^\pm(l, s), \quad (4.5)$$

где \dagger обозначает эрмитово сопряжение. Если существует полюс при вещественном значении $l = \alpha$, то для его вычета это соотношение дает

$$\beta(s) \beta^\dagger(s) = 0, \quad (4.6)$$

откуда уже можно сделать вывод

$$\beta(s) \equiv 0. \quad (4.7)$$

В той области J -плоскости, где имеются разрезы, все предыдущие рассуждения теряют силу. Такие разрезы можно разделить на два класса. К первому из них относятся неподвижные разрезы в J -плоскости, которые возникают в случае частиц со спином (см. гл. IV, § 4). Они идут вдоль вещественной оси J от $J = -\sigma_T$ до $J = \sigma_T - 1$, где σ_T — максимальный полный спин в каком-либо из взаимосвязанных каналов. В этом случае вместо (4.6) имеем

$$\beta_1(s) \beta_2^\dagger(s) = 0, \quad (4.8)$$

где индексы 1 и 2 введены для того, чтобы различать, подходим ли мы к вещественной оси J сверху или снизу. Отсюда мы уже не можем получить тождество $\beta \equiv 0$, поэтому в области, где имеются разрезы,

мы не можем исключить существования неподвижных полюсов даже на вещественной оси J .

Хотя формальное доказательство отсутствия неподвижных полюсов в рассмотренных случаях становится непригодным, все же нет никаких оснований считать, что они действительно существуют. Крайне маловероятно, чтобы амплитуды рассеяния на самом деле имели неподвижные полюса в J -плоскости — как на вещественной оси J , где они связаны с неподвижными разрезами, так и при $\text{Im } J \neq 0$.

Перейдем теперь к последней причине, благодаря которой возможно появление неподвижных полюсов, а именно к движущимся точкам ветвления в J -плоскости. Оказывается, что в данном случае действительно имеются неподвижные полюса, связанные с движущимися точками ветвления. В возможности существования такого полюса в некоторой точке $J = J_0$ можно убедиться, считая, например, что при всех s , при которых справедливо условие унитарности, разрез проходит через $J = J_0$. С другой стороны, можно рассматривать такую точку ветвления в s -плоскости, так как доказательство, использующее, например, соотношение (4.2), неприменимо, если при определенном значении l движущийся разрез полностью перекрывает разрез, обусловленный другой унитарностью. Причины, по которым в некоторых случаях действительно может иметь место подобная ситуация, рассматриваются ниже.

§ 5. СИНГУЛЯРНОСТИ В ИНТЕГРАЛЕ ГРИБОВА — ФРУАССАРА И СВЕРХСХОДЯЩИЕСЯ СООТНОШЕНИЯ

Согласно (В1.3.3.3), вблизи значений l , равных отрицательным целым числам, справедливо равенство

$$Q_l(z) \approx \pi \frac{\cos \pi l}{\sin \pi l} P_{-l-1}(z), \quad (5.1)$$

т. е. функция $Q_l(z)$ имеет в l -плоскости полюса, расположенные при $l = -1, -2, -3$ и т. д. и имеющие полиномиальные вычеты. Таким образом, если интеграл Грибова — Фруассара (II.3.6), определяющий парциальную амплитуду $A(l, s)$ в случае рассеяния двух бесспиновых частиц, существует вплоть до $\text{Re } l = -1$, то $B(l, s)$ имеет неподвижный полюс при $l = -1$. Единственное исключение, к которому мы еще вернемся, связано с тем, что вычет в этом полюсе может обращаться в нуль.

С другой стороны, в предыдущем параграфе мы установили, что если в l -плоскости нет разрезов, то неподвижный полюс при $l = -1$ существовать не может. Отсюда мы делаем вывод, что где-то справа от линии $\text{Re } l = -1$ интеграл должен расходиться при всех s , т. е. должен существовать по крайней мере один полюс Редже в области $\text{Re } l > -1$ при всех значениях s . Этот результат хорошо известен в теории потенциального рассеяния (см., например, [315, 368]), где показано,

что если потенциал ведет себя в начале координат как $1/r$, то при стремлении энергии к бесконечности главная траектория Редже стремится к -1 , оставаясь все время в области $\operatorname{Re} l > -1$.

Если вычет в полюсе при $l = -1$ обращается в нуль, то приведенные выше рассуждения становятся неприменимыми. В теории потенциального рассеяния это происходит, когда в потенциале коэффициент члена $1/r$ равен нулю и потенциал ведет себя в начале координат как r^0 ; в этом случае при $s \rightarrow \infty$ главная траектория Редже удовлетворяет условию $\alpha(s) \rightarrow -2$. Общее условие, при выполнении которого вычет обращается в нуль, можно получить из (5.1) и (II.3.6); оно имеет вид

$$\int_{t_0}^{\infty} D_t^{\pm}(s, t) dz_s = 0. \quad (5.2)$$

Соотношение такого типа носит название «сверхсходящегося» соотношения. Оно должно выполняться для всех s из области сходимости интеграла.

Весьма поучителен другой вывод соотношения (5.2). Предположим, что при значениях s , лежащих в некоторой области, сингулярности при $\operatorname{Re} l \geq -1$ отсутствуют. Тогда амплитуда $A(s, t)$ удовлетворяет условию

$$t^{1+\varepsilon} A(s, t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0 \quad (5.3)$$

с некоторым положительным ε . Запишем теперь для $A(s, t)$ дисперсионное соотношение по t . Благодаря (5.3) вычитаний не требуется, поэтому имеем [ср. (I.10.5)]

$$A(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t(s, t')}{t' - t} dt' + \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} \frac{D_u(s, u')}{u' - u} du'. \quad (5.4)$$

Но асимптотика (5.3) должна быть справедливой также для D_t и D_u ; поэтому при больших t получаем

$$\begin{aligned} A(s, t) &\rightarrow -\frac{1}{t} \left[\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} D_t(s, t') dt' - \frac{1}{\pi} \int_{u_0}^{\infty} D_u(s, u') du' \right] \rightarrow \\ &\rightarrow -\frac{1}{t} \left[\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} D_t^-(s, t') dt' \right], \end{aligned} \quad (5.5)$$

если член, стоящий в квадратных скобках, не равен тождественно нулю. Сравнивая (5.3) и (5.5), мы видим, что именно этот последний случай и реализуется, и таким образом мы получаем

$$\frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} D_t^-(s, t') dt' = 0, \quad (5.6)$$

т. е. соотношение (5.2) для амплитуды с отрицательной сигнатурой.

Причина, по которой первый вывод дает некоторую дополнительную информацию, а именно свёрхсходящееся соотношение для обеих сигнатур, а не только для отрицательной сигнатуры, заключается в том, что при этом выводе используется условие унитарности, которое исключает возможность существования неподвижных полюсов. Если снять это условие (которое, как мы видели, не обязательно выполняется при наличии движущихся разрезов), то на выводе соотношения (5.6) из (5.3) это не скажется. Однако при этом мы не получим соотношения (5.2) для амплитуды с положительной сигнатурой, так как неподвижный полюс при $l = -1$ у амплитуды с положительной сигнатурой не дает вклада в полную амплитуду. Это связано с тем, что для интеграла по l с «неправильной» сигнатурой сигнатурный множитель равен нулю [под «неправильной» понимается положительная (отрицательная) сигнатура для нечетных (четных) значений l или соответствующее обобщение этого определения на случай частиц со спином].

Можно, конечно, пойти дальше и снять «барьер» при $\text{Re } l = -2$, потребовав, чтобы при интегрировании в формуле Грибова — Фруассара полюс при $l = -2$, возникающий благодаря функции Q_l , имел нулевой вычет. Вообще ясно, что если выполняется условие

$$t^{N+\epsilon} A(s, t) \xrightarrow{|t| \rightarrow \infty} 0 \quad (5.7)$$

при целом положительном N и произвольном положительном ϵ , то

$$\int_{t_0}^{\infty} t^n D^{\pm}(s, t) dt = 0, \quad (5.8)$$

где $n = 0, 1, \dots, N - 1$, а знак должен соответствовать «правильной» сигнатуре (положительный для четных n и отрицательный для нечетных n). Если имеются разрезы, то соотношения (5.8) с «неправильной» сигнатурой могут нарушаться.

Хотя в принципе возможно, что выполнение свёрхсходящихся соотношений (5.8) является всего лишь делом случая, Мандельстам [297] высказал предположение, что в действительности они могут удовлетворяться при всех значениях N . Обоснования (экспериментальные и теоретические) этой гипотезы рассматриваются в гл. VIII, а здесь мы обратимся к случаю частиц со спином, где удастся строго доказать применимость некоторых свёрхсходящихся соотношений.

Начнем анализ с аналога второго из методов, рассмотренных выше. Воспользуемся тем, что величина

$$\left(\frac{1-z}{2}\right)^{-(\lambda-\lambda')/2} \left(\frac{1+z}{2}\right)^{-(\lambda+\lambda')/2} \langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \quad (5.9)$$

удовлетворяет дисперсионному соотношению (IV.3.2) с фиксированным s . Таким образом, при больших t в отсутствие каких-либо свёрх-

сходящихся соотношений

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \sim t^{\lambda-1}. \quad (5.10)$$

Но теперь из существования границы Фруассара (гл. II, § 7) следует, что если $\lambda > 2$, то *должны* иметь место некоторые сверхсходящиеся соотношения. В более общем случае, если при больших $|t|$ постулируется реджевское поведение

$$\langle \lambda_3 \lambda_4 | A(s, t) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \sim t^{\alpha(s)}, \quad (5.11)$$

где $\alpha(s)$ — главная траектория Редже s -канала, то во всей области, в которой при любом s выполняется неравенство

$$\lambda - 1 > \alpha(s), \quad (5.12)$$

будет справедливо сверхсходящееся соотношение. На практике поведение $\alpha(s)$ обычно устанавливается путем использования информации об известных частицах и связанных с ними траекториях (см. гл. VIII).

Вид сверхсходящихся соотношений для частиц со спином очень близок к виду соотношений, записанных выше для случая частиц с нулевым спином, а именно

$$\int_{t_0}^{\infty} t^n D_{\mathbb{H}z}^{\pm}(s, t) dt = 0, \quad (5.13)$$

где n равно нулю или любому целому числу, меньшему $\lambda - 1 - \alpha(s)$. Знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, нечетно или четно n .

Другой вывод соотношения (5.13), использующий проекцию Грибова — Фруассара, требует некоторой осторожности. Отметим прежде всего, что если это соотношение можно продолжить до необходимого значения J , то в отсутствие сверхсходящегося соотношения полубесмысленная амплитуда будет вести себя как $(J - J_0)^{-1/2}$, а бессмысленная — как $(J - J_0)^{-1}$. Но корневые сингулярности в полубесмысленных точках на самом деле в точности компенсируются соответствующими множителями функции $d_{\lambda\lambda'}^J$, и поэтому в подынтегральном выражении (IV.5.1) сингулярностей нет. Однако, как указывалось в гл. IV, § 5, в полубесмысленных точках ($J = J_0$) амплитуды должны иметь *нули*, так как в противном случае они будут содержать степени t^{J_0} с постоянным показателем. Для амплитуды с неправильной сигнатурой существование такого нуля обеспечивается сигнатурным множителем, но для амплитуд с правильной сигнатурой снова требуется сверхсходящееся соотношение.

Мы закончим этот параграф следующим замечанием. Сверхсходящиеся соотношения, справедливые для определенных амплитуд рассеяния частиц со спином, вряд ли будут выполняться для некоторых их приближенных «выражений». Ситуация здесь полностью аналогич-

на той, которая встретилась нам в § 3 при обсуждении компенсации разрезов. Рассмотрим, например, диаграмму, изображенную на фиг. V.2. Как указано в § 3, при больших t она ведет себя как t^{-1} . Если предположить, что в лестнице имеется связанное состояние, и продолжить амплитуду как функцию s_2 до соответствующего ему полюса, то вычет, который является амплитудой рассеяния для этой частицы, будет стремиться по-прежнему к нулю при $|t| \rightarrow \infty$, причем по закону t^{-1} (или еще быстрее). С другой стороны, если записать дисперсионное соотношение по t и ограничиться в условии унитарности для t -канала только вкладом от одной частицы, то обычные фейнмановские правила дадут поведение типа $t^{\sigma-1}$ (см. гл. VII), где σ — спин связанного состояния (здесь принимается, что все линии диаграммы соответствуют частицам с нулевым спином). Такое поведение компенсируется вкладами от многочастичных промежуточных состояний.

§ 6. СИНГУЛЯРНОСТИ ГРИБОВА — ПОМЕРАНЧУКА

Обратимся теперь к одному явлению, которое тесно связано с содержанием предыдущего параграфа, а именно к сингулярностям Грибова — Померанчука [217]. Здесь мы также рассмотрим сначала простой случай бесспиновых частиц с равными массами. Скачок продолженной парциальной амплитуды на левом разрезе дается выражением (II.11.9), причем, как уже отмечалось выше, входящие в это выражение интегралы сходятся при всех значениях l . Отсюда следует, что сингулярности скачка $\text{Im}\{B(l, s)\}_{л.р}$ в l -плоскости совпадают с сингулярностями подынтегрального выражения, т. е. с сингулярностями Q_l (так как при всех конечных l функция P_l голоморфна по l). Согласно (5.1), это означает, что единственными сингулярностями являются полюса при целых отрицательных значениях переменной l . Сигнатурный множитель, имеющийся в (II.11.9), уничтожает эти полюса в амплитудах с правильной сигнатурой, так что они будут появляться только при целых отрицательных l , соответствующих неправильной сигнатуре. Далее, в противоположной ситуации, которая имела место в § 5, в данном случае вычеты в этих полюсах для некоторой области значений s можно точно вычислить. Это является следствием того факта, что при вычислении вычета интеграл от третьей двойной спектральной функции ρ_{tu} берется вдоль контура, на котором s постоянно. При подходящем выборе значения s интеграл можно выразить через ту часть упругой двойной спектральной функции, для которой известно точное выражение (см. гл. I, § 12). В частности, в этой области ρ_{tu} не меняет своего знака, и поэтому вычет в полюсе при $l = -1$ отличен от нуля. Аналогично можно убедиться, что и другие вычеты в общем случае не равны нулю.

В этом пункте мы сталкиваемся со следующей трудностью: скачок $\text{Im}\{B_l^\pm(s)\}_{л.р}$ среди прочих сингулярностей имеет неподвижный

полюс при $l = -1$, но если в l -плоскости нет разрезов, то функция $B_l^\pm(s)$ такой полюс содержать не может. Таким образом, существуют две возможности:

- 1) в l -плоскости имеются разрезы;
- 2) функция $B_l^\pm(s)$ содержит сингулярность некоторого сложного типа, не нарушающую условия унитарности и такую, что скачок на левом разрезе имеет необходимый полюс.

Природа сингулярности, которая требуется во втором случае, исследовалась в работах [369, 27]. Эта сингулярность представляет собой точку ветвления в l -плоскости, которая меняет свой характер с изменением s , т. е. имеет вид $(l+1)^{F(s)}$. Все подробности читатели могут найти в цитированных работах. (Отметим, что такая сингулярность относится обычно к «существенно» особым точкам, но обладая всеми их плохими качествами, она по существу является все же точкой ветвления, так что, строго говоря, эта терминология к ней неприменима; см. например, [388].) Далее подобными точками мы заниматься не будем, так как оказалось, что реализуется первая возможность.

Чтобы убедиться в этом, следует обобщить приведенное выше обсуждение на случай частиц со спином. Как и в предыдущем параграфе, неподвижные сингулярности $\text{Im} \{B(J, s)\}_{\text{л.р}}$ расположены теперь при значениях $J = \sigma_T - n$, где σ_T — большее из чисел $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$. В некоторых случаях эти сингулярности могут быть корневыми, т. е. могут иметь вид $(J - J_0)^{-1/2}$, а не $(J - J_0)^{-1}$, но это не меняет рассуждений, так что для простоты мы по-прежнему будем называть их полюсами. Они будут появляться также только в амплитудах с неправильной сигнатурой. Хотя для общего случая произвольного спина не существует основанного на условии унитарности доказательства равенства нулю вычетов в этих полюсах, но вероятнее всего это действительно так, что и было явно показано Шарапом [88] для случая рассеяния двух спинорных частиц.

Если теперь принять, что разрезы в J -плоскости отсутствуют, т. е. принять вторую из указанных выше возможностей, то наличие этих сингулярностей будет приводить к асимптотическому поведению типа t^{σ_T-1} . Это поведение несовместимо с границей Фруассара, если $\sigma_T > 1$, неприемлемо, по-видимому, при $\sigma_T = 1$ и заведомо не согласуется с достижениями реджевской феноменологии в остальных случаях. Отметим, что сингулярность такого типа не компенсируется нулем сигнатурного множителя. Подобное противоречие с существованием границы Фруассара впервые было замечено в работе Азимова [30].

Таким образом, остается лишь одно из возможных решений проблемы, а именно, что в плоскости углового момента существуют разрезы. Они должны быть такими, чтобы снимался запрет на появление у амплитуд с неправильной сигнатурой неподвижных полюсов при $J = \sigma_T - 1$, $\sigma_T - 2$ и т. д. Поскольку благодаря сигнатурному

множителю неподвижный полюс при значении J , соответствующем неправильной сигнатуре, не дает вклада в асимптотическое поведение полной амплитуды при высоких энергиях, никакого противоречия с существованием границы Фруассара здесь не возникает.

Как мы знаем из гл. IV, § 5, присутствие неподвижных полюсов приводит к тому, что полубессмысленная связь для амплитуд с неправильной сигнатурой не обязательно обращается в нуль. Следовательно, при прохождении данной траектории через значение J , отвечающее неправильной сигнатуре, она *не обязательно* осуществляет «выбор» между «физическим» и «бессмысленным» состояниями.

В заключение отметим, что приведенное доказательство существования разрывов является убедительным лишь в том случае, если справедливы постулаты об аналитичности. Другими словами, было показано, что если в J -плоскости нет разрывов, то эти постулаты внутренне противоречивы. Азимов [30] рассматривал это обстоятельство как доказательство того, что некоторые из исходных постулатов (в частности, предположение о равномерной степенной ограниченности амплитуды) являются неверными. Однако, как мы видели в § 3 данной главы, вполне возможно, что существуют необходимые разрывы; поэтому придерживаться столь пессимистической точки зрения не обязательно. Мандельстам [294] установил, что аргументы, запрещающие появление разрывов типа рассмотренных в § 3, становятся неприменимыми, когда рассматриваются более сложные диаграммы. Он доказал, что сингулярность Грибова — Померанчука, возникающую для определенного набора диаграмм, можно устранить, переходя на другой лист комплексной J -плоскости, т. е. доказал, что по крайней мере для этого класса диаграмм должен существовать разрыв. В гл. VII, где исследуются различные классы фейнмановских диаграмм, приведены дополнительные аргументы, подтверждающие существование разрывов. Поэтому вполне разумно предположить, что трудность, отмеченная Азимовым, снимается существованием разрывов, которые тем самым следует учитывать при феноменологическом анализе экспериментальных данных. К этим вопросам мы вернемся в гл. VIII.

Дальнейшие подробности, касающиеся связи между сингулярностями Грибова — Померанчука и разрезами в J -плоскости, а также природы сингулярностей на других листах J -плоскости, можно найти в работах [254, 299], к которым мы и отсылаем читателя.

ЗАШНУРОВКА

§ 1. ГИПОТЕЗА ЗАШНУРОВКИ

Если заданы полюса амплитуды, соответствующие связанным состояниям и резонансам, и их константы связи, то, используя максимальную аналитичность первой степени, которая рассматривалась в гл. I, с помощью условия унитарности можно найти все остальные сингулярности. В частности, для связанной четыреххвостки можно определить двойные спектральные функции. Однако никаких видимых ограничений на число и характер полюсов не имеется, хотя по аналогии с потенциальным рассеянием представляется вполне правдоподобным, что существование некоторых частиц, например нейтрона и протона, с необходимостью приводит к другим полюсам, типа дейтронного, являющимся связанными или резонансными состояниями исходных частиц. Такая неоднозначность проявляется в виде неопределенных вычитаний в мандельштамовском представлении, которое рассматривалось в гл. I, § II.

Определенные возможности для разрешения этой трудности открывает гипотеза о максимальной аналитичности второй степени, введенная в гл. II. Она требует, чтобы амплитуда при низких значениях углового момента, при которых могут возникать неоднозначные вычитания (как было показано, благодаря существованию границы Фруассара это может происходить только в S - и P -волнах), получалась в результате аналитического продолжения по l высших парциальных волн. Поскольку высшие парциальные волны полностью определяются двойными спектральными функциями, это означает, что ими определяются и все парциальные волны.

Таким образом, согласно максимальной аналитичности первой степени, задание полюсов полностью определяет двойные спектральные функции, а максимальная аналитичность второй степени утверждает, что по известным двойным спектральным функциям можно полностью определить все полюса. Совершенно ясно, что здесь имеется чрезвычайно сильное условие самосогласованности. Действительно, если в амплитуду добавить некоторый произвольный полюс, то через максимальную аналитичность первой степени он породит целую совокупность новых сингулярностей, т. е. новых вкладов в двойные спектральные функции. Благодаря максимальной аналитичности второй степени вероятнее всего эти вклады приведут к существованию еще одной совокупности полюсов, которые в свою очередь будут давать

новые вклады в двойные спектральные функции, и так далее до бесконечности. Этот процесс никогда не прекратится, если на каком-то этапе не будет достигнута самосогласованность и в амплитуду не будет входить истинный набор полюсов, приводящий к существованию этих и только этих полюсов.

Теперь возникает вопрос, какой набор (или какие наборы) частиц может удовлетворять этому условию самосогласованности. Если в реальном мире сильно взаимодействующих частиц справедлива максимальная аналитичность первой и второй степени, то ясно, что все уже открытые частицы должны принадлежать этому набору. Вероятнее всего он содержит бесконечное число частиц, хотя многие из них столь нестабильны, что обнаружить их невозможно. Но существуют ли другие наборы гипотетических частиц, которые удовлетворяли бы нашим постулатам? Наложённые ограничения являются столь жесткими, что такая возможность представляется невероятной, хотя в настоящее время нет никаких принципов, которые позволили бы исключить ее со всей строгостью. Таким образом, мы приходим к предположению (см., например, работу Чью [98]), которое составляет содержание гипотезы «зашнуровки».

Гипотеза зашнуровки. Единственным набором частиц (полюсов), который согласуется с принципами максимальной аналитичности первой и второй степени, является реально существующий набор сильно взаимодействующих частиц, обнаруженных в природе.

Происхождение термина «зашнуровка» связано, конечно, с общеизвестной истиной, согласно которой невозможно «вытащить себя за шнурки собственных ботинок», — истиной, которая представляет собой одно из проявлений требования самосогласованности. В своей первоначальной форме идея состояла в том, что в некоторой амплитуде может оказаться приближенно самосогласованной одна частица, которая будет тем самым зашнуровывать сама себя (например, ρ -мезон в $\pi - \pi$ -рассеянии). Но если говорить строго, то в глобальную процедуру зашнуровки необходимо включать все частицы.

Следует подчеркнуть, что здесь вводится не какой-то новый постулат, а лишь некоторая гипотеза, касающаяся следствий наших шести постулатов. К сожалению, решение соотношений унитарности требует решения бесконечной системы зацепляющихся нелинейных сингулярных интегральных уравнений, так что гипотезу в ее полной формулировке проверить невозможно. Для ее проверки следовало бы «одним махом» решить всю проблему сильных взаимодействий в целом. Вместо этого было предпринято множество попыток, в различной степени увенчавшихся успехом, целью которых было доказательство, что условию самосогласованности приближенно удовлетворяет некоторая малая совокупность частиц, конечная система уравнений для которой может считаться почти не связанной с остальными уравнениями полной системы. Эти попытки носят название «зашнуровочных вычис-

лений». При таком количестве приближений ни о какой решающей проверке гипотезы не может быть и речи. Однако на этом пути было получено довольно большое число определенных результатов, что позволяет встать на оптимистическую точку зрения, согласно которой гипотеза может оказаться правильной.

Эта глава посвящена обсуждению зашнуровочных вычислений, основанных на использовании двух главных методов: N/D -метода для парциальных амплитуд и мандельштамовской итерации. Соответствующая литература весьма обширна, и мы отсылаем читателя к другим обзорам (например, [395, 412]), где рассматриваются вопросы, не затронутые в этой книге.

Естественно, что при любой попытке расчета связанных или резонансных состояний на основе сил, которые, как считается, порождают их, необходимо вводить предположение, что эти частицы являются полюсами Редже. Однако подобных вычислений, подчеркивающих аспекты проблемы, связанные с полюсами Редже, имеется не так уж много. Здесь мы сконцентрируем внимание именно на таких вычислениях, которые выявляют важность полюсов Редже в динамике зашнуровки; в частности, будет рассмотрено полосное приближение.

Но прежде чем это делать, следует сказать несколько слов о взаимосвязи постулатов, на которых основывается наш анализ,— в частности, о соотношении между максимальной аналитичностью первой и второй степени. Как мы видели в гл. II, § 6, предполагая, что максимальная аналитичность первой степени приводит к мандельштамовскому представлению, можно доказать максимальную аналитичность второй степени всюду, где определена проекция Грибова—Фруассара, т. е. при $l > l_M(s)$. Указывалось также, что граница Фруассара, которую требует условие унитарности в кросс-канале, приводит к ограничению

$$l_M(s) \leq 1 \quad \text{при} \quad s \leq 0. \quad (1.1)$$

Это ограничение удается несколько продолжить в сторону положительной области s -канала, отвечающей упругим процессам [45, 342]. В действительности при некоторых разумных предположениях относительно области неупругих процессов Проспери [342] показал, что амплитуда мероморфна (имеет только полюса) при $l > 1$ для всех значений s . Кажется вполне правдоподобным, что этот результат удастся доказать строго. Таким образом, произвольные вычитания остаются только в S - и P -волнах.

Однако Мартен [300] продвинулся дальше. Он показал, что, привлекая кроссинг-симметрию, можно определить даже эти S - и P -волны. С помощью довольно длинных рассуждений он показал, что если две амплитуды $A(s, t)$ и $A'(s, t)$ в области переменной s , где выполняется упругая унитарность в s -канале, имеют одинаковые двойные спектральные функции, то они могут отличаться только вычитательными

членами по t . Таким образом,

$$A(s, t) - A'(s, t) = \sum_{n=0}^N \beta_n(s) t^n \quad (1.2)$$

при всех s . При $s < 0$ граница Фруассара приводит к тому, что $\beta_n(s) = 0$ для всех $n > 1$. Но $s < 0$ содержит конечную область полной области аналитичности разности $A(s, t) - A'(s, t)$ [так как имеется область $s < 0$, где ни $A(s, t)$ ни $A'(s, t)$ не могут иметь сингулярностей], поэтому функция $\beta_n(s)$ должна равняться нулю всюду. Итак,

$$A(s, t) - A'(s, t) = \beta_0(s) + \beta_1(s)t. \quad (1.3)$$

Аналогично, если мы имеем область, в которой справедливо условие упругой унитарности для t -канала, то могут существовать только произвольные вычитания по s , и поэтому

$$A(s, t) - A'(s, t) = \gamma_0(t) + \gamma_1(t)s. \quad (1.4)$$

Сравнивая (1.3) и (1.4), имеем

$$\begin{aligned} \beta_0(s) &= a + bs, \\ \beta_1(s) &= c + ds, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где a , b , c и d — некоторые константы. Но согласно условию унитарности для парциальных волн s -канала

$$|A'_0(s)| \text{ и } |A_0(s)| < 1, \quad |A'_1(s)| \text{ и } |A_1(s)| < 1 \quad (1.6)$$

даже при больших s , поэтому

$$\beta_0(s) < \text{const} \text{ и } \beta_1(s) < \frac{\text{const}}{s}. \quad (1.7)$$

Следовательно, в (1.5)

$$b = c = d = 0.$$

Поскольку ниже всех порогов амплитуды $A(s, t)$ и $A'(s, t)$ имеют вещественную область значений, a должно быть вещественным, так что

$$\text{Im} \{A_0(s)\} = \text{Im} \{A'_0(s)\} \text{ при всех } s, \quad (1.8)$$

но так как в упругой области s -канала $\text{Im} A$ определяет амплитуду A [см. (II.5.7)] (возникающая при этом неопределенность в знаке рассмотрена Мартеном [300]), то

$$a = 0.$$

Другими словами, если амплитуда рассеяния имеет чисто упругие области в обоих каналах и если известны точные выражения для двойных спектральных функций в сколь угодно малой полосе одной упругой области, то вычитания будут полностью определены и никакого произвола в амплитуде не будет. Отсюда, конечно, не следует возмож-

ность аналитического продолжения амплитуды в область $l \leq 1$, но зато мы знаем, что парциальные волны с $l = 0, 1$ полностью определяются высшими парциальными волнами.

Здесь еще предстоит большая работа, но вполне возможно, что максимальную аналитичность второй степени в конце концов удастся вывести из максимальной аналитичности первой степени. Если это подтвердится, то гипотеза зашнуровки будет иметь гораздо более сильную формулировку, а именно: единственным набором частиц, который согласуется с максимальной аналитичностью первой степени, является реально существующий набор сильно взаимодействующих частиц, обнаруживаемых в природе.

В следующем параграфе мы приступим к обсуждению аппарата, применяемого для решения уравнений, возникающих при зашнуровке.

§ 2. *N/D*-УРАВНЕНИЯ

N/D-уравнения, предложенные Чью и Мандельштамом [113], составляют основу метода, наиболее часто используемого при зашнуровочных вычислениях. По своей значимости они близки к уравнению Шредингера нерелятивистской квантовой механики.

Рассмотрим амплитуду рассеяния двух бесспиновых частиц $A(s, t)$, которая обсуждалась в гл. I и II. Как мы видели в гл. II, § 11, приведенная парциальная амплитуда s -канала, определяемая формулой (II.5.7)

$$B_l^\pm(s) = \frac{\exp[i\delta_l(s)] \sin \delta_l(s)}{\rho_l(s)}, \quad (2.1)$$

может быть представлена в виде

$$B_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{t_0}^{\infty} Q_l(z') D_l^\pm(s, t') \frac{dt'}{2q_s^{2l+2}}. \quad (2.2)$$

Эта амплитуда имеет разрезы двух типов: правые, к которым приводит условие унитарности в s -канале, и левые, которые возникают из-за сингулярностей в кросс-канале. Поэтому для нее можно записать следующее дисперсионное соотношение [ср. (II.4.5)]:

$$B_l^\pm(s) = \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\text{Im} \{B_l^\pm(s')\}}{s' - s} ds' + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_L} \frac{\text{Im} \{B_l^\pm(s')\}}{s' - s} ds', \quad (2.3)$$

где s_0 — ближайший порог, а s_L — начало левого разреза. Для простоты здесь принято, что l — вещественное (но не обязательно целое) число, так что скачок на разрезах равен просто удвоенной мнимой части. При комплексных l в (2.3) $\text{Im} \{B_l^\pm(s)\}$ следует заменить функцией $\Delta_s \{B_l^\pm(s)\}$, т. е. скачком на соответствующих разрезах по s (деленным на $2i$). Однако из соображений удобства мы будем по-преж-

нему записывать все соотношения так, словно рассматриваются только вещественные значения l .

Предположим, что на правом разрезе при $s_0 < s < s_I$ (s_I — порог неупругого канала) для амплитуды справедлива упругая унитарность, так что, согласно (II.5.18),

$$\text{Im} \{B_l^\pm(s)\} = \rho_l(s) |B_l^\pm(s)|^2 \text{ при } s_0 < s < s_I. \quad (2.4)$$

Основная суть принимаемого приближения заключается в пренебрежении всякой связью с неупругими каналами. Считая таким образом, что $s_I \rightarrow \infty$, запишем соотношение (2.3) в следующем виде:

$$B_l^\pm(s) = B_l^L(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \rho_l(s') |B_l^\pm(s')|^2, \quad (2.5)$$

где

$$B_l^L(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_I} \frac{\text{Im} \{B_l^\pm(s')\}}{s' - s} ds'. \quad (2.6)$$

Из соотношения (2.5) видно, что

$$B_l^\pm(s) \xrightarrow{l \rightarrow \infty} B_l^L(s), \quad (2.7)$$

так как, согласно (II.7.4),

$$B_l^\pm(s) \text{ и } B_l^L(s) \sim \frac{\exp[-l\xi(z_n)]}{\sqrt{l}} \text{ при } l \rightarrow \infty. \quad (2.8)$$

Предполагая, что скачок на левом разрезе известен, можно рассматривать (2.5) как интегральное уравнение для амплитуды $B_l^\pm(s)$ при заданной функции $B_l^L(s)$. Идея заключается в том, чтобы левый разрез рассматривать в качестве «силы» или «потенциала», причем, накладывая условие унитарности, мы как бы решаем задачу рассеяния на заданном потенциале. Действительно, в случае нерелятивистского рассеяния на юкавском потенциале ближайший участок левого разреза будет равен просто потенциалу (т. е. первому члену борновского приближения). Решая уравнение только с этим разрезом, мы не получим точного решения задачи, так как в более отдаленные участки левого разреза дает вклад и упругая двойная спектральная функция, которая содержит правосторонние сингулярности. Однако Люминг [286] показал, что решение будет достаточно точным, если для левого разреза воспользоваться вторым борновским приближением; в случае же слабой связи может оказаться пригодным и первое борновское приближение. Аналогия между рассеянием на юкавском потенциале и таким подходом к зашнурочным вычислениям подробно описана в монографиях [180, 322], а также в лекциях Чью [103]. Решение уравнения упростится, если предварительно его линеаризовать, произведя

разбиение

$$B_l^\pm(s) = \frac{N_l(s)}{D_l(s)}, \quad (2.9)$$

где числитель $N_l(s)$ имеет левые разрезы, а знаменатель $D_l(s)$ — правые разрезы амплитуды $B_l^\pm(s)$, т. е.

$$\text{Im}\{N_l(s)\} = \text{Im}\{B_l^\pm(s) D_l(s)\} = b_l(s) D_l(s), \quad s < s_L. \quad (2.10)$$

Здесь

$$b_l(s) \equiv \text{Im}\{B_l^\pm(s)\}, \quad s < s_L, \quad (2.11)$$

а

$$\text{Im}\{D_l(s)\} = N_l(s) \text{Im}\left\{\frac{1}{B_l^\pm(s)}\right\} = -N_l(s) \frac{\text{Im}\{B_l^\pm(s)\}}{|B_l^\pm(s)|^2}, \quad s > s_0,$$

или, согласно (2.4),

$$\text{Im}\{D_l(s)\} = -\rho_l(s) N_l(s), \quad s > s_0. \quad (2.12)$$

Отметим также, что, согласно (2.1) и (2.9),

$$\frac{1}{B_l(s)} = \frac{D_l(s)}{N_l(s)} = \frac{\exp[-i\delta_l(s)]}{\sin \delta_l(s)} \rho_l(s), \quad (2.13)$$

причем $N_l(s)$ вещественно при $s > s_0$; поэтому функция $D_l(s)$ должна иметь фазовый множитель $\exp\{-i\delta_l(s)\}$. Мы хотим написать для $N_l(s)$ и $D_l(s)$ дисперсионные соотношения с обычной нормировкой

$$N_l(s) \rightarrow 0 \text{ и } D_l(s) \rightarrow 1 \text{ при } s \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Воспользовавшись методом Винера—Хопфа (см. [387], стр. 429), выразим функцию $D_l(s)$ через ее фазу, P_l полюсов в точках s_{il} и M_l нулей в точках s_{jl} на физическом листе:

$$D_l(s) = D_l(s_0) \prod_{i=1}^{P_l} \frac{s_0 - s_{il}}{s - s_{il}} \prod_{j=1}^{M_l} \frac{s - s_{jl}}{s_0 - s_{jl}} \exp\left\{-\frac{s - s_0}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\delta_l(s') - \delta_l(s_0)}{(s' - s)(s' - s_0)} ds'\right\}. \quad (2.15)$$

Такая форма записи гарантирует, очевидно, что фазовый множитель у $D_l(s)$ равен $\exp\{-i\delta_l(s)\}$. Мы считаем, что $\delta_l(s) \rightarrow \text{const}$, так что в интеграле необходимо сделать одно вычитание. Если $N_l(s)$ не содержит полюсов, то все полюса амплитуды соответствуют нулям знаменателя $D_l(s)$ — либо связанным состояниям на физическом листе в точках $s = s_{jl}$, либо резонансам на нефизическом листе.

При $s \rightarrow \infty$

$$D_l(s) \sim s^{M_l - P_l + \pi^{-1}[\delta_l(\infty) - \delta_l(s_0)]}, \quad (2.16)$$

но так как мы выбрали нормировку (2.14), то разность фаз на пороге и на бесконечности должна быть равна

$$\delta_l(\infty) - \delta_l(s_0) = \pi(P_l - M_l). \quad (2.17)$$

Этот результат согласуется с теоремой Левинсона [277].

Поскольку фаза определена с точностью до слагаемого, кратного π мы вправе положить, как обычно,

$$\delta_l(s_0) = \pi M_l, \quad (2.18)$$

где M_l — число связанных состояний, и поэтому

$$D_l(s) \sim s^{\pi^{-1}\delta_l(\infty) - P_l} \quad (2.19)$$

и

$$\delta_l(\infty) = \pi P_l. \quad (2.20)$$

Учитывая, что функция $D_l(s)$ содержит полюса, входящие в (2.15), и что ее мнимая часть определяется формулой (2.12), можно написать следующее дисперсионное соотношение:

$$D_l(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_l(s') N_l(s')}{s' - s} ds' + \sum_{i=1}^{P_l} \frac{\gamma_{il}}{s - s_{il}}, \quad (2.21)$$

где через γ_{il} обозначены вычеты в полюсах. Так как в качестве γ_{il} и s_{il} можно взять произвольные числа, то очевидно, что функция $B_l^{\pm}(s)$ не определяет полностью знаменатель $D_l(s)$. Эта неоднозначность носит название КДД-неоднозначности (по начальным буквам фамилий Кастильехо, Далица и Дайсона [84]), а полюса называются КДД-полюсами. КДД-полюса являются нулями амплитуды, и вблизи каждого из них в точке, положение которой зависит от $N_l(s)$, а также от γ_{il} и s_{il} , лежит нуль знаменателя $D_l(s)$, соответствующий полюсу амплитуды (частице). Таким образом, КДД-полюса вводят в парциальные амплитуды частицы с произвольными массами и с произвольными константами связи.

Мы видели, что при достаточно больших l

$$B_l^{\pm}(s) \rightarrow B_l^L(s) \rightarrow 0 \quad (2.22)$$

[см. (2.8)], поэтому

$$\delta_l(\infty) \rightarrow \delta_l(s_0)$$

и связанные состояния отсутствуют ($M_l = 0$). Тем самым из теоремы Левинсона (2.17) следует, что при достаточно больших l

$$P_l \rightarrow 0$$

и КДД-неоднозначность не возникает. С другой стороны, мы требуем, чтобы выполнялась максимальная аналитичность второй степени, согласно которой низшие парциальные волны можно получить в результате аналитического продолжения высших парциальных волн. Ниже будет приведено доказательство Манделштама [293], согласно которому решение N/D -уравнений, не содержащее КДД-полюсов, допускает подобное продолжение, и поэтому можно сделать вывод, что в наших амплитудах КДД-полюса отсутствуют. Однако мы пользовались приближением упругой унитарности. В действительности

упругий канал связан с другими каналами, и ситуация с теоремой Левинсона является гораздо более сложной; в следующем параграфе будет показано, что даже максимальная аналитичность второй степени не запрещает появление в некоторых каналах КДД-полюсов. Однако если бы не было этих усложнений и если бы удалось экспериментально установить, что

$$\delta_l(\infty) - \delta_l(s_0) = M_l,$$

то это доказывало бы, что максимальная аналитичность второй степени справедлива и все частицы являются составными. КДД-полюса соответствуют элементарным частицам.

Принимая, что КДД-полюса отсутствуют и используя (2.10) и (2.12), получаем следующие дисперсионные соотношения для $N_l(s)$ и $D_l(s)$:

$$N_l(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_L} \frac{ds'}{s' - s} b_l(s') D_l(s'), \quad (2.23)$$

$$D_l(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{ds'}{s' - s} \rho_l(s') N_l(s'). \quad (2.24)$$

Эту систему двух интегральных уравнений можно решить подстановкой одного из них в другое. Подставив уравнение (2.23) для $N_l(s)$ в (2.24) [113], получим

$$D_l(s) = 1 - \frac{1}{\pi^2} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_l(s')}{s' - s} \int_{-\infty}^{s_L} \frac{D_l(s'') b_l(s'')}{s'' - s'} ds'' ds'. \quad (2.25)$$

Выполняя интегрирование по s' , будем иметь

$$D_l(s) = 1 + \frac{1}{\pi^2} \int_{-\infty}^{s_L} k_l(s, s'') b_l(s'') D_l(s'') ds'', \quad (2.26)$$

где

$$k_l(s, s'') = - \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_l(s')}{(s' - s)(s'' - s')} ds'. \quad (2.27)$$

Функцию $k_l(s, s'')$ легко вычислить при целых значениях l , но этот метод не приносит большой пользы при продолжении амплитуды по угловому моменту. Удобнее следовать процедуре, предложенной Урецким [396] и Мандельштамом [293]. Введем функцию

$$C_l(s) \equiv N_l(s) - B_l^L(s) D_l(s), \quad (2.28)$$

которая не имеет левого разреза, так как

$$\text{Im} \{B_l^L(s)\} = \frac{\text{Im} \{N_l(s)\}}{D_l(s)} \text{ при } s < s_L. \quad (2.29)$$

Далее, поскольку $B_l^L(s)$ не имеет правого разреза, имеем

$$\operatorname{Im}\{C_l(s)\} = -B_l^L(s) \operatorname{Im}\{D_l(s)\} \quad \text{при } s > s_0, \quad (2.30)$$

поэтому дисперсионное соотношение

$$C_l(s) = \int_{s_0}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{C_l(s')\}}{s' - s} ds' \quad (2.31)$$

дает

$$N_l(s) = B_l^L(s) D_l(s) - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{B_l^L(s') \operatorname{Im}\{D_l(s')\}}{s' - s} ds'. \quad (2.32)$$

Подставляя сюда выражения (2.24) для $D_l(s)$ и (2.12) для $\operatorname{Im}\{D_l(s)\}$, окончательно получаем

$$N_l(s) = B_l^L(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{B_l^L(s') - B_l^L(s)}{s' - s} \rho_l(s') N_l(s') ds'. \quad (2.33)$$

Уравнение (2.33) [или (2.26)] является интегральным уравнением Фредгольма (см., например, [364]), при условии, что его ядро квадратично интегрируемо, т. е. при условии, что

$$\int_{s_0}^{\infty} \int_{s_0}^{\infty} ds ds' \left| \frac{B_l^L(s') - B_l^L(s)}{s' - s} \right|^2 \rho_l(s') \rho_l(s) < \infty, \quad (2.34)$$

$$\int_{s_0}^{\infty} ds' \rho_l(s') |B_l^L(s')|^2 < \infty \quad (2.35)$$

(более полный анализ дан в работе Мандельштама [293]).

Как указывалось выше, вследствие конечности области интегрирования в (II.11.9) функцию $B_l^L(s)$ можно аналитически продолжить по l всюду, кроме целых отрицательных значений этой переменной, при которых имеются полюса. Нижняя граница по l определяется поведением кинематического множителя $\rho_l(s)$ вблизи порога, где функция $B_l^L(s)$ конечна, что приводит к условию $\operatorname{Re} l > -3/2$, но в большинстве случаев возникает более жесткое ограничение, обусловленное поведением $B_l^L(s)$. В частности, если $B_l^L(s) \sim s^{\beta-l-1}$, то (2.35) будет удовлетворяться только при $\operatorname{Re} l > 2\beta - 1$. Верхняя граница по l определяется асимптотическим поведением по s функции $\rho_l(s)$, которое накладывает требование $l < 1$; таким образом, необходимо, чтобы выполнялись неравенства

$$\max \left\{ 2\beta - 1, -\frac{3}{2} \right\} < \operatorname{Re} l < 1. \quad (2.36)$$

Решением несингулярного интегрального уравнения является функция, мероморфная по любому заданному параметру, если только ядро аналитично по этому параметру. Поэтому в области (2.36) решение

уравнения (2.33) будет мероморфной функцией по l . Эта область является весьма узкой, но Мандельштам показал также, что если решить аналогичные уравнения для

$$B_l^n(s) \equiv B_l^\pm(s) (q_s^2)^n,$$

то мы придем к области

$$n + \max \left\{ 2\beta - 1, -\frac{3}{2} \right\} < \operatorname{Re} l < n + 1,$$

причем различные функции $B_l^n(s)/(q_s^2)^n$ связаны друг с другом процедурой аналитического продолжения. Таким образом, N/D -уравнения дают решения, удовлетворяющие максимальной аналитичности второй степени.

Единственными полюсами функции $B_l(s)$ являются нули ее знаменателя $D_l(s)$. Решая (2.24) при всех значениях l , получаем в неявном виде траекторию Редже $\alpha(s)$, которая находится из уравнения

$$D_{\alpha(s_R)}(s_R) = 0, \quad (2.37)$$

где s_R — положение полюса.

Разлагая $D_l(s_R)$ в ряд в точке $l = \alpha(s_R)$, получаем

$$B_l(s) \approx \frac{N_{\alpha(s_R)}(s_R)}{\left. \frac{\partial D_l(s)}{\partial l} \right|_{\substack{l=\alpha(s_R) \\ s=s_R}} [l - \alpha(s_R)]} \quad \text{при } s \approx s_R. \quad (2.38)$$

Сравнивая это разложение с (II.9.15) и учитывая (III.1.7), находим

$$\gamma(s_R) = \frac{N_{\alpha(s_R)}(s_R)}{\left. \frac{\partial D_l(s)}{\partial l} \right|_{\substack{l=\alpha(s_R) \\ s=s_R}}}. \quad (2.39)$$

Разлагая $D_l(s)$ относительно $s = s_R$ и используя (2.12), получаем

$$B_l(s) \approx \frac{N_l(s)}{\left. \frac{\partial (\operatorname{Re} D)}{\partial s} \right|_{s=s_R} (s - s_R) + i \rho_l(s) N_l(s)} \approx \frac{N_l(s)/2ERD'_l(s)}{E - E_R + i \frac{\rho_l(s) N_l(s)}{2ERD'_l(s)}} \quad (2.40)$$

при $s \approx s_R$. Если $s > s_0$, то это дает обычную формулу Брейта—Вигнера для ширины резонансного полюса, расположенного в точке E_R :

$$\Gamma = - \frac{\rho_l(s) N_l(s)}{ERD'_l(s)} \quad (2.41)$$

$[D'_l(s)$ отрицательно, так что Γ положительно — ср. (II.10.7)]. Как и следовало ожидать, ниже порога s_0 , где $\rho_l(s) = 0$, имеется полюс связанного состояния. Сравнивая (2.41) с (II.10.7), получаем

$$\frac{\gamma(s_R)}{\alpha'(s_R)} = \frac{N_{\alpha(s_R)}}{D'_{\alpha}(s_R)} \quad (2.42)$$

(во всех случаях штрих означает производную $\partial/\partial s$).

Таким образом, определяя путем решения уравнения (2.33) числитель $N_l(s)$ и находя затем с помощью соотношения (2.24) знаменатель $D_l(s)$, мы получаем траекторию Редже и вычет, причем их аналитические свойства совпадают с теми, которые описаны в гл. III, § 1 [382].

При $s = \infty$ функция $D_l(s)$ нормирована на единицу, поэтому нуль, определяющий асимптотическое значение траектории $\alpha(\infty)$, можно получить только в том случае, если $D_l(s)$ имеет неподвижную сингулярность по l . В ядре интегрального уравнения (2.33) присутствуют неподвижные сингулярности, обусловленные полюсами функции Q_l по l при $l = -1, -2, \dots$. Они расположены при целых отрицательных l и порождают фредгольмовские полюса по l функции $N_l(s)$, положение которых определяется характером решения [112]. Таким образом, в отличие от потенциального рассеяния, где значениями траекторий на бесконечности должны быть целые числа [291], в данном случае траектории имеют следующее поведение [250]:

$$\alpha(s) = \alpha(\infty) + \frac{\text{const}}{s} + \dots \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \quad (2.43)$$

где $\alpha(\infty)$ определяется динамикой, [причем для высших траекторий $\alpha(\infty) > -1$.

Кроме того, из (2.24) и (2.33) с учетом $D_\alpha(s_R) = 0$ имеем

$$\frac{\gamma(s_R)}{\alpha'(s_R)} = \frac{N_\alpha(s_R)}{D'_\alpha(s_R)} = \frac{\int_{s_0}^{\infty} \rho_\alpha(s') N_\alpha(s') B_\alpha^L(s') \frac{ds'}{s' - s_R}}{\int_{s_0}^{\infty} \rho_\alpha(s') N_\alpha(s') \frac{ds'}{(s' - s_R)^2}}, \quad (2.44)$$

поэтому если только моменты подынтегральных выражений не удовлетворяют каким-то специальным условиям, можно ожидать, что

$$\gamma(s) \sim s\alpha'(s) \sim \frac{1}{s} \quad \text{при } s \rightarrow \infty, \quad (2.45)$$

где на последнем этапе использовано (2.43). Такое поведение и было обнаружено у решений рассматриваемых уравнений (см. § 6 данной главы).

Прежде чем решать уравнения, необходимо найти вклад левого скачка, а это можно сделать несколькими разными способами.

Одно из выражений можно получить из соотношения (II.11.9), которое приводит к следующему скачку на левом разрезе:

$$b_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{\alpha(s)}^{b(s)} Q_l(z') \rho_{tu}(t', u') [1 \mp e^{-i\pi l}] \frac{dt'}{2q_s^{2l+1}} + \\ + \frac{1}{32\pi} \int_{i_0}^{-iq_s^2} P_l(-z') D_l^\pm(s, t') \frac{dt'}{2(-q_s^2)^{l+1}} \quad (2.46)$$

и мы получаем

$$B_l^L(s) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{s_l} \frac{b_l^\pm(s')}{s' - s} ds'. \quad (2.47)$$

Другое выражение получается в результате подстановки выражения (II.2.8) для $D_l^\pm(s, t)$ в (II.11.7), что дает

$$B_l^\pm(s) = \frac{1}{16\pi^3} \iint \left[\frac{\rho_{st}(s', t'') \pm \rho_{su}(s', t'')}{s' - s} ds' + \frac{\rho_{tu}(t'', u') \pm \rho_{tu}(u', t'')}{u' - u''} du' \right] \times \\ \times Q_l[z_s(s, t'')] \frac{dt''}{2q_s^{2l+2}}. \quad (2.48)$$

Скачок амплитуды на правом разрезе $B_l^\pm(s)$, очевидно, равен

$$\frac{1}{16\pi^2} \int [\rho_{st}(s, t'') \pm \rho_{su}(s, t'')] Q_l[z_s(s, t'')] \frac{dt''}{2q_s^{2l+2}}, \quad s > s_0, \quad (2.49)$$

так что, вычитая его вклад из (2.48), находим

$$B_l^L(s) = \frac{1}{16\pi^3} \iint \left[\frac{\rho_{st}(s', t'') \pm \rho_{su}(s', t'')}{s' - s} \right] \times \\ \times \left[\frac{Q_l[z_s(s, t'')]}{2q_s^{2l+2}} - \frac{Q_l[z_s(s', t'')]}{2q_{s'}^{2l+2}} \right] ds' dt'' + \\ + \frac{1}{16\pi^3} \iint \left[\frac{\rho_{tu}(t'', u') \pm \rho_{tu}(u', t'')}{u' - u''} \right] \frac{Q_l[z_s(s, t'')]}{2q_s^{2l+2}} du' dt''. \quad (2.50)$$

Еще один из возможных способов заключается в том, чтобы, воспользовавшись формулой (II.11.3), записать

$$B_l^L(s) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^0 \text{Im} \{Q_l[z_s(s, t'')]\} V(s, t'') \frac{dt''}{2q_s^{2l+2}}, \quad (2.51)$$

где $V^\pm(s, t)$ — амплитуда $A^\pm(s, t)$ без той ее части, которая дает вклад в правый разрез. Этот вопрос рассматривается подробнее в § 6.

Все приведенные выражения являются, конечно, точными, и они предполагают, что двойные спектральные функции известны полностью. Наша цель состоит в том, чтобы с помощью N/D -уравнений вычислить вклад от одной части двойных спектральных функций (соответствующей упругому s -каналу) при условии, что их другие части заданы; при этом, очевидно, необходимо делать некоторые приближения. Нескольких примеров вычислений такого рода приведено в последних параграфах данной главы.

До сих пор мы принимали, что упругая унитарность справедлива при всех $s > s_0$. Не говоря уже о том, что для многих целей это приближение является довольно грубым, вследствие плохого поведения

$B_l^f(s)$ при больших s оно часто приводит к интегральным уравнениям, которые не являются уравнениями Фредгольма. Поэтому необходимо найти способ, который позволил бы включить в наши уравнения и неупругие каналы.

§ 3. НЕУПРУГИЕ КАНАЛЫ В N/D -УРАВНЕНИЯХ

Существует несколько методов включения в N/D -уравнения связи с неупругими каналами. Если все открытые при данной энергии каналы являются двухчастичными, то условие унитарности (II.5.7) просто заменяется на (II.5.12), и мы имеем

$$\text{Im} \{B_l^{ab}(s)\} = \sum_n \rho_l^n(s) B_l^{bn}(s_+) B_l^{na}(s_-). \quad (3.1)$$

Это условие можно записать в матричной форме [58]:

$$(\text{Im } \mathbf{B}_l)_{ab} = (\mathbf{B}_l^* \cdot \boldsymbol{\rho}_l \cdot \mathbf{B}_l)_{ab}, \quad (3.2)$$

где $\boldsymbol{\rho}_l(s)$ — диагональная матрица

$$\boldsymbol{\rho}_l = \begin{pmatrix} \rho_l^1 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \rho_l^2 & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \rho_l^3 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

а

$$\mathbf{B}_l = \begin{pmatrix} B_l^{11} & B_l^{12} & \dots \\ B_l^{21} & B_l^{22} & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$

В этих матрицах строки и столбцы соответствуют всевозможным каналам.

Далее,

$$(\text{Im } \mathbf{B}_l)_{ab}^{-1} = -\{\text{Im}(\mathbf{B}_l) \cdot (\mathbf{B}_l^* \cdot \mathbf{B}_l)^{-1}\}_{ab}, \quad (3.5)$$

или, используя (3.2),

$$(\text{Im } \mathbf{B}_l)_{ab}^{-1} = -\delta_{ab} \rho_l^a(s) \theta(s - s_a), \quad (3.6)$$

где s_a — порог в канале a [$\rho_l^a(s) = 0$ при $s < s_a$]. Тогда, записывая

$$\mathbf{B} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{D}^{-1}, \quad (3.7)$$

или

$$B_l^{ab}(s) = \sum_n N_l^{an} \{\mathbf{D}_l(s)^{-1}\}_{ab} = \sum_n \frac{N_l^{an}(s) \bar{D}_l^{nb}(s)}{\det \{\mathbf{D}_l(s)\}}, \quad (3.8)$$

где $\bar{D}_l(s)$ — матрица, составленная из алгебраических дополнений матрицы $D_l(s)$, т. е.

$$D \cdot \bar{D} = \det D,$$

и рассуждая так же, как в § 2, окончательно получаем

$$D_l^{ab}(s) = \delta_{ab} - \frac{1}{\pi} \int_{s_a}^{\infty} \frac{\rho_l^a(s') N_l^{qb}(s')}{s' - s} ds', \quad (3.9)$$

$$N_l^{ab}(s) = B_l^{Lab}(s) + \sum_n \frac{1}{\pi} \int_{s_a}^{\infty} \frac{B_l^{Lan}(s') - B_l^{Lan}(s)}{s' - s} \rho_l^a(s') N_l^{nb}(s') ds', \quad (3.10)$$

т. е. уравнения, соответствующие (2.24) и (2.33).

Из (3.8) видно, что траектория $\alpha(s)$ определяется уравнением

$$\det \{D_{\alpha(s_R)}(s_R)\} = 0. \quad (3.11)$$

Разделяя $\det D$ при вещественных s на вещественную и мнимую части

$$\det \{D_l\} = \Delta_{lR}(s) + i\Delta_{lI}(s), \quad (3.12)$$

получаем соотношение, соответствующее (2.40):

$$B_l^{ab}(s) \approx \frac{\sum_n N_l^{an}(s) \bar{D}_l^{nb}(s) / \Delta'_{lR}(s)}{(s - s_R) + i\Delta_{lI}(s) / \Delta'_{lR}(s)} \quad (3.13)$$

(штрих снова означает $\partial/\partial s$), так что полная ширина будет равна

$$\Gamma = -\frac{\Delta_I}{\Delta'_R} \frac{1}{E_R}, \quad (3.14)$$

а парциальные ширины различных каналов можно определить из выражения для числителя.

Как и следовало ожидать, траектория, задаваемая уравнением (3.11), появляется во всех взаимосвязанных каналах (имеющих одинаковые квантовые числа), но ее вычеты для разных каналов различны. Некоторые примеры вычислений, использующих этот формализм, приведены в § 5 данной главы. Общему анализу проблем, касающихся применимости многоканального формализма, посвящена работа Варнока [405].

Однако если неупругие каналы содержат более двух частиц, то использование условия унитарности становится чрезвычайно сложным (см. гл. I, § 4). Вместо этого мы пытаемся найти метод параметризации вкладов от неупругих процессов, позволяющий простым способом модифицировать одноканальные уравнения.

В одном из таких методов, предложенном Фруассаром [194], используются соотношения (II.5.15), (II.5.16), которые позволяют

ввести следующий параметр неупругости:

$$R_l(s) \equiv \frac{\sigma_l^{\text{полн}}(s)}{\sigma_l^{\text{уп}}(s)} = \frac{\text{Im} \{B_l^\pm(s)\}}{|B_l^\pm(s)|^2} \frac{1}{\rho_l(s)}. \quad (3.15)$$

Следовательно,

$$\text{Im} \left\{ \frac{1}{B_l(s)} \right\} = -\rho_l(s) R_l(s); \quad (3.16)$$

используя это выражение в формуле (2.12), приходим к следующим вариантам предыдущих уравнений:

$$D_l(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_l(s') R_l(s') N_l(s')}{s' - s} ds', \quad (3.17)$$

$$N_l(s) = B_l^L(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{B_l^L(s') - B_l^L(s)}{s' - s} \rho_l(s') R_l(s') N_l(s') ds'. \quad (3.18)$$

Поскольку при всех $s > s_0$ числитель $N_l(s)$ по-прежнему веществен, фаза $D_l(s)$ равна фазе амплитуды, но так как при $s > s_1$ сдвиг фазы $\delta_l(s)$ становится комплексным [см. (II.5.12) и далее], он уже не будет тождествен фазе амплитуды. Очевидно,

$$R_l(s) = 1 \quad \text{при } s_0 < s < s_1,$$

$$R_l(s) > 1 \quad \text{при } s > s_1.$$

Этот метод очень прост, но поскольку ожидается, что $R_l(s) \rightarrow \infty$ при $s \rightarrow \infty$, при высоких энергиях уравнения становятся неопределенными, и трудности с расходимостями, упомянутые в предыдущем параграфе, здесь только усугубляются.

Более изощренный метод предложили Фрей и Варнок [196] (см. также [129]). Положим

$$B_l^\pm(s) = \frac{\eta_l(s) \exp [2i\delta_l^R(s)] - 1}{2i\rho_l(s)}, \quad (3.19)$$

где сдвиг фазы разделен на вещественную и мнимую части (при вещественных s):

$$\delta_l(s) = \delta_l^R(s) + i\delta_l^I(s), \quad (3.20)$$

причем

$$\eta_l(s) = e^{-2\delta_l^I(s)}. \quad (3.21)$$

Таким образом,

$$\eta_l(s) = 1 \quad \text{при } s_0 < s < s_1,$$

а когда амплитуда становится чисто неупругой,

$$\eta_l(s) \rightarrow 0.$$

Снова положим

$$B_l(s) = \frac{N_l(s)}{D_l(s)},$$

но припишем знаменателю $D_l(s)$ фазу $\exp[-i\delta_l^R(s)]$, а не фазу амплитуды, так что $N_l(s)$ будет иметь разрез при $s > s_I$. Из (3.19) имеем

$$N_l(s) = B_l(s) D_l(s) = \frac{\eta_l(s) D_l^*(s)/D_l(s) - 1}{2i\rho_l(s)} D_l(s) = \frac{\eta_l(s) D_l^*(s) - D_l(s)}{2i\rho_l(s)}; \quad (3.22)$$

выделяя в этом выражении вещественную и мнимую части, получаем

$$\operatorname{Im}\{N_l(s)\} = \frac{1 - \eta_l(s)}{2\rho_l(s)} \operatorname{Re}\{D_l(s)\} \quad \text{при } s > s_I \quad (3.23)$$

и

$$\operatorname{Im}\{D_l(s)\} = \frac{-2\rho_l(s)}{1 + \eta_l(s)} \operatorname{Re}\{N_l(s)\} \quad \text{при } s > s_0. \quad (3.24)$$

Используя последнее соотношение, получаем уравнение, соответствующее (2.24):

$$D_l(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{2\rho_l(s')}{1 + \eta_l(s')} \frac{\operatorname{Re}\{N_l(s')\}}{s' - s} ds'. \quad (3.25)$$

По аналогии с (2.28) введем функцию

$$C_l(s) \equiv N_l(s) - B_l^L D_l(s) - \left[\frac{1}{\pi} \int_{s_I}^{\infty} \frac{\operatorname{Im}\{N_l(s')\}}{s' - s} ds' \right] D_l(s). \quad (3.26)$$

Эта функция не имеет левого разреза, в то время как для ее мнимой части на правом разрезе, используя (3.23), получаем

$$\operatorname{Im}\{C_l(s)\} = -\bar{B}_l(s) \operatorname{Im}\{D_l(s)\} \quad \text{при } s > s_0, \quad (3.27)$$

где

$$\bar{B}_l(s) = B_l^L(s) + \frac{P}{\pi} \int_{s_I}^{\infty} \frac{1 - \eta_l(s')}{2\rho_l(s')} \frac{ds'}{s' - s}, \quad (3.28)$$

а P — символ главного значения. Таким образом, из (3.26) имеем

$$C_l(s) = N_l(s) - \bar{B}_l(s) D_l(s) - i \frac{1 - \eta_l(s)_I}{2\rho_l(s)} D_l(s), \quad (3.29)$$

а из (3.27) совместно с (3.24) находим

$$C_l(s) \equiv \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\bar{B}_l(s') \operatorname{Re}\{N_l(s')\}}{s' - s} \frac{2\rho_l(s')}{1 + \eta_l(s')} ds'. \quad (3.30)$$

Подставляя (3.25) в правую часть (3.29) и сравнивая возникающее при этом соотношение с (3.30), после некоторых преобразований окончательно получаем

$$\bar{N}_l(s) = \bar{B}_l(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\bar{B}_l(s') - \bar{B}_l(s)}{s' - s} \frac{\rho_l(s')}{\eta_l(s')} \bar{N}_l(s') ds', \quad (3.31)$$

где

$$\bar{N}_l(s) \equiv \frac{2\eta_l(s)}{1 + \eta_l(s)} \operatorname{Re} \{N_l(s)\}. \quad (3.32)$$

Как и прежде, решая уравнения (3.31) и (3.25), можно определить траектории Редже и их вычеты, если функции $B_l^\pm(s)$ и $\eta_l(s)$ заданы в качестве исходных данных. Полезно выразить параметр $\eta_l(s)$ через скачок амплитуды $B_l^\pm(s)$, обусловленный неупругими процессами. Записывая (II.5.18) в виде

$$\operatorname{Im} \{B_l^\pm(s)\} = \rho_l(s) |B_l^\pm(s)|^2 + \operatorname{Im} \{B_l^I(s)\} \quad (3.33)$$

и подставляя выражение (3.19) для $\operatorname{Im} \{B_l^\pm(s)\}$ и $B_l^\pm(s)$, после некоторых вычислений получаем

$$\eta_l(s) = [1 - 4\rho_l(s) \operatorname{Im} \{B_l^I(s)\}]^{1/2}. \quad (3.34)$$

Однако если взаимодействие в неупругих каналах является интенсивным, то как метод Фруассара, так и метод Фрея — Варнока сталкиваются с определенными трудностями. Действительно, предположим, что рассматривается двухканальная задача, сформулированная на языке многоканального формализма (3.7), так что

$$B_{11} = \frac{N_{11}D_{22} - N_{12}D_{21}}{D_{11}D_{22} - D_{12}D_{21}}. \quad (3.35)$$

Если связь между двумя каналами полностью отсутствует, то мы будем иметь одноканальные решения, скажем

$$B_{11} = \frac{N_1}{D_1}, \quad B_{22} = \frac{N_2}{D_2}. \quad (3.36)$$

Предположим теперь, что между каналами существует слабая связь, которая характеризуется некоторым параметром λ , так что

$$\begin{aligned} N_{11} &= N_1 + O(\lambda^2), \\ D_{11} &= D_1 + O(\lambda^2), \end{aligned}$$

а недиагональные элементы N_{12} , D_{12} и т. д. порядка λ . Тогда в области, где D_1 или D_2 не обращается в нуль,

$$B_{11} = \frac{N_1}{D_1} + O(\lambda^2).$$

Если в случае $\lambda = 0$ функция D_2 имеет нуль при $s = s_p$, а функция D_1 нуля не имеет, то числитель и знаменатель выражения (3.35) в этой точке также имеют нули. Но в случае $\lambda \neq 0$ эти нули не совпадают, и для B_{11} в окрестности точки s_p мы получим расположенные вблизи друг от друга нуль и полюс, хотя достаточно интенсивных сил в канале 1, которые могли бы породить этот полюс, нет. Он соответствует фактически КДД-полюсу амплитуды B_{11} . Этот факт был замечен в работах [370, 27, 44]. Отсутствие КДД-полюсов является, конечно,

камнем преткновения для учета неупругих каналов с помощью методов Фруассара и Фрея — Варнока. В методе Фрея — Варнока указанный полюс соответствует обращению в нуль параметра $\eta_l(s)$. Это приводит к тому, что интегральное уравнение (3.31) перестает быть уравнением Фредгольма, причем можно показать, что решение сингулярного интегрального уравнения содержит КДД-полюс [26, 44, 252]. Аналогично при использовании метода Фруассара для такого полюса $R_l(s) \rightarrow \infty$.

Это не означает, однако, что мы не можем провести различия между элементарными частицами и частицами динамического происхождения. Утверждение, согласно которому ни в одном из каналов не может быть КДД-полюсов при больших l , остается в силе, и решение при малых l по-прежнему можно получить продолжением решения, соответствующего большим l . Джонс и Хартл [252] продемонстрировали, каким образом при уменьшении l в амплитуде возможно появление КДД-нуля из неупругого разреза. В этом случае теорема Левинсона непригодна в качестве критерия, позволяющего выяснить, являются ли частицы составными. Однако Аткинсон и др. [26] показали, что если диагонализировать амплитуду рассеяния с помощью подходящей матрицы преобразования O_l :

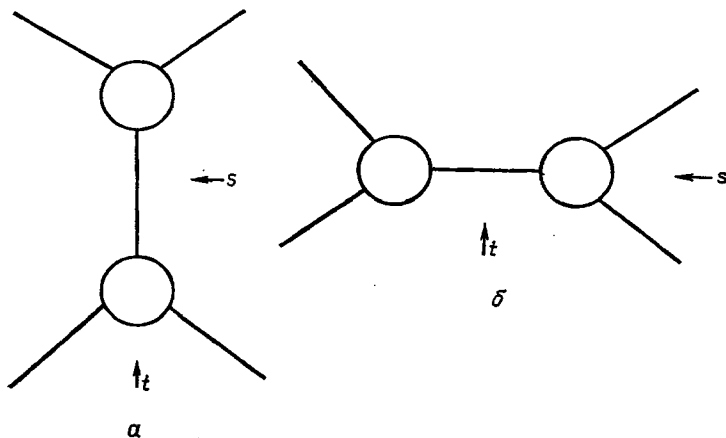
$$O_l \cdot \rho_l^{1/2} \cdot V_l \cdot \rho_l^{1/2} \cdot O_l^{-1} = V^D = \begin{pmatrix} B_{11}^D & \dots & 0 \\ \cdot & B_{22}^D & \\ \cdot & \cdot & \\ \cdot & & \\ 0 & & \cdot \end{pmatrix},$$

то при выполнении максимальной аналитичности второй степени собственные фазовые сдвиги (фазовые сдвиги диагональной амплитуды V^D) уже не будут удовлетворять критерию существования КДД-полюса. За его нарушение в случаях, упомянутых выше, ответственна исключительно матрица преобразования O_l . Однако поскольку при бесконечной энергии открыто бесконечное число каналов, теорема Левинсона не может служить достаточно удобным критерием для проверки максимальной аналитичности.

§ 4. ОБМЕННЫЕ СИЛЫ

Как указывалось выше, левый разрез, основной вклад в который обусловлен сингулярностями кросс-канала, соответствует «силе», или потенциалу, нерелятивистского рассеяния, а решение N/D -уравнений во многих отношениях аналогично решению уравнения Шредингера для задачи рассеяния. Таким образом, полюс в i -канале, соответствующий обмену одной частицей, как на фиг. VI.1, а, приводит к силе, которая может породить полюс в s -канале, как на фиг. VI.1, б. Здесь привлекается хорошо известная аналогия между юкавским потенциалом и обменом скалярным мезоном. Как было показано

в работе [61], амплитуда рассеяния на юкавском потенциале удовлетворяет мандельштамовскому представлению с одной двойной спектральной функцией (ρ_{st} , если s — канал рассеяния, а сингулярности по t задают потенциал), причем для решения можно воспользоваться N/D -методом [286]. Обсуждение этих вопросов увело бы нас слишком далеко в сторону; подробный анализ читатель может найти в монографиях [103, 180, 322]. Эта аналогия была расширена и послужила



Ф и г. VI.1. Полюс, обусловленный одночастичным обменом в t -канале (а), который обеспечивает часть взаимодействия, необходимого для порождения полюса в s -канале (б).

основой приближенной схемы для описания частиц [35, 36]; она получила дальнейшее развитие в работах [168, 169].

Однако для нас в этом параграфе важно прежде всего то, что одночастичный обмен в t -канале соответствует первому борновскому приближению, а процессы многочастичного обмена — высшим борновским приближениям. На основании анализа, проведенного в гл. II, § 7, можно ожидать, что более далекие многочастичные сингулярности в силу малости радиуса их действия играют сравнительно незначительную роль. В дальнейшем об одночастичном обмене мы не совсем точно будем часто говорить как о «потенциале». Более строгое определение «потенциала» дается в § 7 данной главы, где обсуждаются приближения, улучшенные по сравнению с одночастичным обменом. (Употребляемый здесь термин «обмен» не следует смешивать с «обменными потенциалами», которые соответствуют сингулярностям u -канала. Поскольку мы всегда имеем дело с амплитудами определенной сигнатуры, специально их рассматривать нет необходимости.)

Простейшей диаграмме с одночастичным обменом соответствует связанное состояние, скалярная (нулевой спин, положительная чет-

ность) частица в t -канале, что дает следующий вклад в амплитуду:

$$V^{\pm}(s, t) = \frac{g}{m^2 - t}, \quad (4.1)$$

где m — масса связанного состояния, g — вычет в полюсе. Очевидно, такой член не содержит сингулярностей по s , и поэтому не может давать вклада в первый разрез парциальной амплитуды. Однако поскольку он приводит к скачку по t вида

$$D_t^{V^{\pm}}(s, t) = \pi g \delta(m^2 - t), \quad (4.2)$$

его вклад в левый разрез отличается от нуля. Действительно, подставляя (4.2) в (2.46) и ограничиваясь для простоты кинематикой равных масс, получаем

$$b_l(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{g}{2q_s^{2l+2}} \frac{1}{2} P_l \left(1 + \frac{m^2}{2q_s^2} \right), \quad (4.3)$$

а подстановка в (II.11.7) дает

$$B_l^L(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{g}{2q_s^{2l+2}} Q_l \left(1 + \frac{m^2}{2q_s^2} \right). \quad (4.4)$$

Аналогично можно аппроксимировать резонанс со спином l_t (например, ρ со спином единица):

$$V^{\pm}(s, t) = \frac{(2l_t + 1) g (q_m^2)^{l_t}}{m^2 - t - i\Gamma} P_{l_t} \left(1 - \frac{s}{2q_m^2} \right); \quad (4.5)$$

в приближении малой ширины ($\Gamma \rightarrow 0$) это дает

$$D_t^{V^{\pm}}(s, t) = \pi (2l_t + 1) g (q_m^2)^{l_t} P_{l_t} \left(1 + \frac{s}{2q_m^2} \right) \delta(m^2 - t), \quad (4.6)$$

$$B_l^L(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{g (2l_t + 1)}{2q_s^{2l+2}} Q_l \left(1 + \frac{m^2}{2q_s^2} \right) P_{l_t} \left(1 + \frac{s}{2q_m^2} \right) (q_m^2)^{l_t}, \quad (4.7)$$

где q_m^2 — значение величины q^2 при $t = m^2$.

Решения N/D -уравнений с такими потенциалами рассматриваются в следующем параграфе, но здесь следует отметить следующее. Выше принималось, что обмен происходит посредством частицы с некоторым фиксированным спином, по крайней мере предполагалось, что при продолжении функции $V^{\pm}(s, t)$ из точки $t = m^2$ в достаточно хорошем приближении спин остается фиксированным. С точки зрения постулатов об аналитичности было бы более последовательным принять во внимание реджевскую природу промежуточных частиц и изменение спина с изменением t . Кроме того, необходимо отметить, что для частиц со спином может возникнуть некоторая неопределенность потенциалов. Действительно, воспользовавшись для определения $B_l^L(s)$ формулой (2.51), мы видим, что (4.1) дает по-прежнему (4.4), но (4.5) уже не при-

водит к (4.7), за исключением случая $l_t = 0$. Если положить в (4.5) $l_t = 1$ и $\Gamma = 0$, то

$$V^\pm(s, t) = \frac{3g}{m^2 - t} \frac{2q_t^2 + s}{2}. \quad (4.8)$$

Рассмотрим, например, амплитуду $\pi - \pi$ -рассеяния, для которого

$$q_t^2 = \frac{t - m_\pi^2}{4}. \quad (4.9)$$

Тогда (4.8) принимает вид

$$V^\pm(s, t) = \frac{3g}{4} \left(-1 + \frac{2s - 4m_\pi^2 + m^2}{m^2 - t} \right). \quad (4.10)$$

Слагаемое с -1 в (4.10), не зависящее от t , дает вклад только в S -волну, а остальная часть приводит к результату, совпадающему с (4.7). При этом чем выше спин промежуточной частицы, тем большим оказывается расхождение. Подобные аномалии рассмотрены в работах [4, 374]. Все различие состоит в том, что в (4.6) множитель $P_l(1 + s/q_t^2)$, зависящий от углового момента, вычисляется при фиксированном значении t , равном m^2 , а в (4.10) его функциональная зависимость от t сохраняется. Чью [104] показал, что использование реджевского представления из гл. III, § 4 позволяет устранить эту трудность.

Если исходить из (4.5), то одна частица с фиксированным спином l_t дает в t -канале вклад только в l_t -ю парциальную волну (снова принимаем $\Gamma = 0$):

$$V_{l_t}^\pm(t) = \frac{g}{16\pi} (q_t^2)^{l_t} \frac{1}{m^2 - t}, \quad (4.11)$$

тогда как представление Хури — Джонса (III.4.8) приводит к выражению (при замене s на t и наоборот)

$$V_{l_t}^\pm(t) = -\gamma(t) \frac{(-q_t^2)^{\alpha(t)} \exp\{-[l_t - \alpha(t)] \xi(t)\}}{\alpha(t) - l_t}. \quad (4.12)$$

Если для траектории $\alpha(t)$, принимающей при $t = m^2$ значение l_t , выбрать линейное приближение

$$\alpha(t) = l_t + \alpha' \cdot (t - m^2), \quad (4.13)$$

где α' — наклон траектории, то получим

$$V_{l_t}^\pm(t) = \frac{\gamma(t) (-q_t^2)^{\alpha(t)} \exp\{-[l_t - \alpha(t)] \xi(t)\}}{\alpha'(m^2 - t)}. \quad (4.14)$$

Если считать также, что в $\xi(t)$ [см. (III.4.5) со взаимной заменой s и t]

$$s_1 \gg |t|,$$

то приближенно можно положить

$$\xi(t) \approx \ln\left(\frac{s_1}{q_t^2}\right),$$

что дает

$$V_{l_t}^{\pm}(t) \approx \frac{\gamma(t) (q_t^2)^{\alpha(t)}}{\alpha' (m^2 - t)} \left(\frac{s_1}{q_t^2} \right)^{\alpha(t) - l_t}. \quad (4.15)$$

Функция $\gamma(t)$, определяемая формулой (III.2.6)

$$\gamma(t) (q_t^2)^{\alpha(t)} \equiv \beta(t),$$

может очень быстро изменяться, так как она содержит множитель, зависящий от t . Предпочтительнее ввести функцию, которая имела бы необходимую точку ветвления при $q_t^2 = 0$ и в то же время обладала бы поведением функции $\beta(t)$. Для этого положим

$$\bar{\gamma}(t) \left(\frac{q_t^2}{q_t^2} \right)^{\alpha(t)} \equiv \beta(t) \quad (4.16)$$

и подберем константу q_t^2 так, чтобы $\bar{\gamma}(t)$ была медленно меняющейся функцией. Тогда получим

$$V_{l_t}^{\pm}(t) \approx \frac{\bar{\gamma}(t)}{\alpha' (m^2 - t)} \left(\frac{q_t^2}{q_t^2} \right)^{l_t} \left(\frac{s_1}{q_t^2} \right)^{\alpha(t) - l_t}. \quad (4.17)$$

Сравнивая эту формулу с (4.11), видим, что различие между вкладом в l_t -ю парциальную волну от полюса Редже и от элементарной частицы заключается в том, что они содержат соответственно константу

$$\frac{g}{16\pi}$$

и выражение (которое Чью назвал «формфактором»)

$$\frac{\bar{\gamma}(t)}{\alpha'} \left(\frac{s_1}{q_t^2} \right)^{\alpha(t) - l_t}. \quad (4.18)$$

Если $\bar{\gamma}(t)$ — медленно меняющаяся функция переменной t , то различие сосредоточено в основном в множителе

$$\left(\frac{s_1}{q_t^2} \right)^{\alpha(t) - l_t}.$$

Чтобы оценить его, необходимо знать q_t^2 . В работе [115] приведены аргументы в пользу того, что

$$\bar{t} \approx \frac{1}{2} s_1$$

(напомним, что s_1 — значение переменной s , при котором устанавливается реджевское асимптотическое поведение). Согласно (I.6.12),

$$q_t^2 \approx \frac{\bar{t}}{4},$$

поэтому имеем

$$\frac{s_1}{q_i^2} \approx 8.$$

Потенциал можно найти, подставляя (4.17) в разложение по парциальным волнам

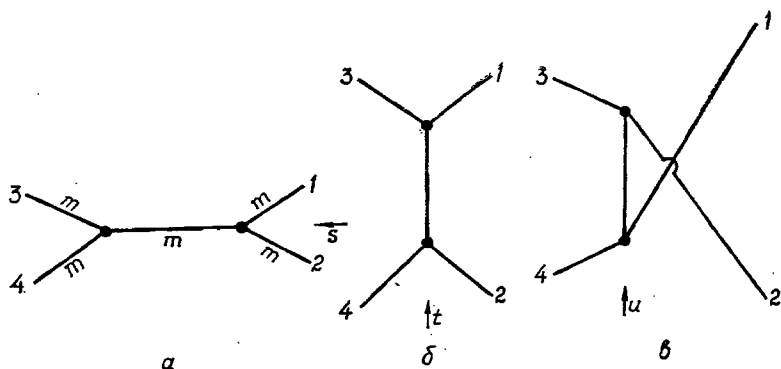
$$V^\pm(s, t) = 16\pi \sum (2l_i + 1) V_{l_i}^\pm(t) P_{l_i}[z_i(t, s)] \quad (4.19)$$

(которое сходится при $s < s_1$) и используя (2.51). Интегрирование в (2.51) проводится только по отрицательным t , а мы знаем, что при $t < 0$ для всех траекторий $\alpha(t) < 1$. Таким образом, каждое следующее физическое значение углового момента l_i (напомним, что физическими значениями являются чередующиеся целые числа — четные или нечетные, в зависимости от сигнатуры траектории), т. е. каждая следующая частица на траектории, дает вклад, примерно в $(8)^{-2}$ раз меньший, чем вклад предыдущего физического значения. Таким образом, обмен траекторией обычно более или менее эквивалентен обмену частицей с низшим спином, лежащей на этой траектории, а частицы с высшими спинами дают пренебрежимо малый вклад. Для p -траектории наименьшая физическая парциальная волна соответствует спину $l_i = 1$, причем сила оказывается очень близкой к силе, порождаемой обменом частицей с фиксированным спином и определяемой выражением (4.7) (см. [126]). Однако для высших спинов выражение (4.7) заведомо не справедливо. Теперь становится понятным, почему обмен π -мезоном обычно приводит к очень важной силе, несмотря на то, что траектория этой частицы расположена довольно низко. Выясняется также отмеченная выше неопределенность, заключающаяся в том, что потенциал, определяемый формулой (4.5), содержит слагаемые, которые в кросс-канале дают вклад в низшие парциальные волны, что не согласуется с (4.7). Когда происходит обмен траекторией, ее высшие спиновые компоненты также порождают аналогичные дополнительные вклады, но они практически гасятся формфактором (4.18) и обычно несущественны.

Интересно отметить также, что в случае обмена померанконом по крайней мере для верхнего участка области интегрирования в (2.51) можно ожидать, что $\alpha(t) > 0$. Так как низшей (и тем самым доминирующей) парциальной волной в (4.19) является при этом S -волна с $l_i = 0$, то $V_{l_i}^\pm(t)$ в (4.12) будет отрицательным, т. е. сила — отталкивательной. Это обстоятельство подчеркнул Чью [105], который показал, что «радиус» отталкивания для данного процесса, задаваемый величиной, обратной его логарифмической производной по t при $t = 0$, будет по существу равен ширине дифракционного пика для этого процесса при высоких энергиях. Такое отталкивание является гораздо более дальнедействующим, чем большинство обменных сил притяжения, и оно полностью подавляет участок P -траектории, соответствующий спину 2.

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРОСТЫЕ ПРИМЕРЫ ЗАШНУРОВОЧНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Удовлетворить всем требованиям, которые предъявляются полной зашнуровкой, чрезвычайно сложно. Реально можно рассчитывать лишь на создание каких-то приближенных методов, в рамках которых окажется возможным провести вычисления, не слишком исказив при этом физическую сущность проблемы. Но здесь возникает трудность, связанная с отсутствием всякой уверенности в качестве выбранного приближения, так как априори поправки могут оказаться гораздо



Ф и г. VI.2. Скалярный мезон массы m , порождаемый в s -канале в виде связанного состояния двумя другими такими же мезонами (*a*); «потенциал», создаваемый соответствующими полюсами в t - и u -каналах (*б* и *в*).

более значительными, чем учтенные эффекты. Но для начала мы попытаемся выяснить, чего можно достигнуть, используя некоторые заведомо грубые приближения.

В качестве совсем простого примера, иллюстрирующего, каким образом можно попытаться проверить гипотезу зашнуровки, представим себе простейший из всех мыслимых миров сильно взаимодействующих частиц, удовлетворяющих всем аксиомам, — мир, в котором имеются частицы только одного сорта. Эти частицы должны быть мезонами с нулевым спином, так как в случае высшего спина почти наверняка генерировались бы частицы с более низкими спинами. Кроме того, частица должна быть скалярной (а не псевдоскалярной, как пион), и ее барионное число, так же как и все остальные аддитивные квантовые числа, должно быть равно нулю. Все это приводит к тому, что разрешена трехчастичная вершина. В приближении упругой унитарности, которое обсуждалось в § 2, мезон можно рассматривать как связанное состояние двух других таких же мезонов, (фиг. VI.2, *a*). Как следует из результатов § 4, источниками силы, необходимой для порождения подобной частицы, в первом приближе-

нии являются соответствующие полюсные члены в t - и u -каналах (фиг. VI.2, б и в).

Тогда из (4.1) с учетом вкладов как t -, так и u -каналов с сигнатурой \pm получаем

$$V^{\pm}(s, t) = \frac{g}{m^2 - t} \pm \frac{g}{m^2 - t} = \frac{2g}{m^2 - t} \text{ или } 0, \quad (5.1)$$

где m — масса мезона, а g — вычет в полюсе. Для частиц рассматриваемого типа статистика Бозе запрещает состояния с нечетными значениями углового момента, поэтому амплитуда с отрицательной сигнатурой $A^-(s, t)$ тождественно равна нулю. С точностью до коэффициента 2 выражение (5.1) приводит к тем же функциям $b_l(s)$ и $B_l^{\pm}(s)$, что и формулы (4.3) и (4.4). Их можно подставить в N/D -уравнения (2.26) и (2.23) или (2.33) и (2.24), решить эти уравнения и посмотреть, имеет ли функция D для S -волны, т. е. $D_0(s)$, нуль при $s = m^2$, соответствующий диаграмме фиг. VI.2, а. Вычет g является свободным параметром, и его можно подгонять до тех пор, пока такой нуль не появится. Эта процедура фиксирует величину g , но если бы нам действительно удалось породить частицу, то вычет в возникающем таким образом полюсе (скажем, g'), определяемый формулой

$$\frac{g'}{16\pi} = \left. \frac{N_l(s)}{D_l'(s)} \right|_{s=m^2, l=0}, \quad (5.2)$$

был бы также равен g . В действительности численные расчеты [124] показали, что для выполнения условия $D_0(m^2) = 0$ необходимо положить $g/m^2 = 16,5$, но при этом $g'/m^2 = 105$. (Отметим, что константа g/m^2 безразмерна. Абсолютную шкалу масс, конечно, невозможно ввести — в теории S -матрицы имеют смысл только отношения масс.) Очевидно, в этом случае зашнуровка не работает.

Исходная связь довольно велика, поэтому можно было бы ожидать, что необходимую поправку будет давать член порядка g^2 , соответствующий двухчастичному обмену, но на самом деле этого не происходит [125]. Величина расхождения оказывается очень большой, поэтому можно с полной уверенностью сказать, что вселенная, состоящая только из скалярных мезонов (являющихся единственным сортом сильно взаимодействующих частиц; наряду с ними могут, конечно, существовать лептоны и т. д.), не может удовлетворять нашим постулатам об аналитичности. Соответствующая полевая теория с лагранжианом взаимодействия (см., например, [63], стр. 241)

$$\mathcal{L}_1 = \lambda \phi^3, \quad (5.3)$$

перенормируема, и ее решения, по-видимому, должны содержать КДД-полюс при $s = m^2$, соответствующий диаграмме фиг. VI.2, а. Доказательство невозможности существования такого гипотетического мира является одним из незначительных преимуществ зашнуровки по сравнению с теорией поля.

Рассмотрев ситуацию, в которой мы и не надеялись на успешное применение зашнуровки, попробуем теперь исследовать почти столь же простой случай, а именно ρ -мезон в $\pi - \pi$ -рассеянии. Поскольку $\pi - \pi$ -рассеяние кроссинг-симметрично, то можно думать, что в первом приближении амплитуда рассеяния представляет собой просто сумму ρ -полюсов в s -, t - и u -каналах. В свете аргументов, приведенных в предыдущем параграфе, вклад в силу от резонанса f спина 2 является, по-видимому, пренебрежимо малым. Возможные же резонансы σ и ε в S -волне, существование которых пока окончательно не доказано, вероятнее всего также приводят к незначительным эффектам, что связано с малостью их спина.

Одно из усложнений по сравнению с предыдущим расчетом связано с необходимостью работать с полным изотопическим триплетом (π^+ , π^0 , π^-), а не просто с отдельными пионами. Мы принимаем, что мультиплет вырожден по массе, т. е. имеет место изоспиновая инвариантность, поэтому более удобно рассматривать состояния с определенным значением изоспина, а не физические состояния. Однако такой процесс, как

$$\pi^+\pi^+ \rightarrow \pi^+\pi^+,$$

в котором участвуют чистые состояния с $I=2$, является кроссинг-процессом по отношению к рассеянию

$$\pi^+\pi^- \rightarrow \pi^+\pi^-,$$

описываемому комбинацией амплитуд с $I=0, 1, 2$. Это обстоятельство легко учесть, если использовать изоспиновую кроссинг-матрицу, которая для $\pi - \pi$ -рассеяния имеет вид [113]

$$\beta(I_s, I_t) = \begin{matrix} I_t & 0 & 1 & 2 & I_s \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 1 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & -\frac{5}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} & \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{matrix} \end{matrix} \quad (5.4)$$

где I_s — изоспин в s -канале и т. д. Поэтому, вспоминая, что ρ имеет спин 1, в приближении малой ширины для силы, обусловленной обменом ρ -мезоном в t - и u -каналах, из (4.7) получаем

$$B_i^{LI_s}(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{3\Gamma m_\rho}{q_s^{2I+2}} \beta(I_s, 1) Q_i^I \left(1 + \frac{m_\rho^2}{2q_s^2} \right) P_1 \left(1 + \frac{s}{2q_\rho^2} \right). \quad (5.5)$$

Здесь использовано соотношение Брейта — Вигнера между шириной и вычетом в упругом резонансном полюсе [см. (2.40)] и произведена замена gq_ρ^2 на Γm_ρ (Γ — ширина ρ).

Теперь можно использовать это выражение для решения N/D -уравнения. Однако здесь возникает трудность, связанная с тем, что

$$B_l^{Ls} \underset{s \rightarrow \infty}{\sim} \frac{s \ln s}{s^{l+1}} \quad (5.6)$$

и ядро уравнения (2.33) не является квадратично интегрируемым [см. (2.36)]. Источником этой трудности служит предположение о справедливости упругой унитарности при всех s , и один из способов избежать ее состоит в том, что интеграл просто обрезается на некотором значении s (скажем, s_1). Тогда получаем

$$N_l(s) = B_l^L(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{B_l^L(s') - B_l^L(s)}{s' - s} \rho_l(s') N_l(s') ds' \quad (5.7)$$

и аналогичное уравнение для $D_l(s)$.

Сделанное предположение заключается в том, что упругая унитарность справедлива приближенно вплоть до s_1 , но точный смысл обрезания, как эффекта, обусловленного неупругостью, совершенно неясен. Плохо также, что в уравнениях появляется новый параметр s_1 , и если его выбор сильно влияет на вид решения, то зашнуровка становится совершенно неубедительной.

На самом деле в первоначальных расчетах Захариазена [411] обрезание вводилось другим способом. При этом использовалось первое детерминантное приближение Бейкера [32], в котором просто полагается, что

$$N_l(s) = B_l^L(s), \quad (5.8)$$

и в уравнении (2.24) для $D_l(s)$ делается вычитание в некоторой точке s_a , причем принимается]

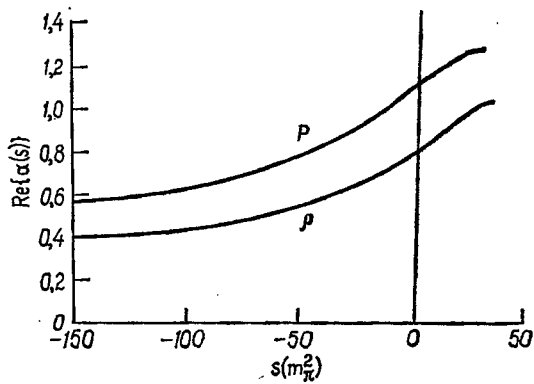
$$D_l(s_a) = 1,$$

так что уравнение принимает вид

$$D_l(s) = 1 - \frac{s - s_a}{\pi} \int_{s_0}^{\infty} \frac{\rho_l(s') N_l(s')}{(s' - s)(s' - s_a)} ds'. \quad (5.9)$$

Дополнительная степень по s в знаменателе обеспечивает сходимость интеграла, а точка s_a , в которой делается вычитание, является новым свободным параметром. В качестве s_a Захариазен выбрал начало левого разреза функции $B_l^{\pm}(s)$ (т. е. положил $s_a = s_L$); он исходил из того, что при таком выборе $B_l^{\pm}(s) = B_l^L(s)$ вблизи s_L , как это и должно быть в случае, когда доминирует ρ -мезон кросс-канала. В результате ρ оказывается самосогласованным, если его масса $m_\rho = 350 \text{ Мэв}$ (см. поправку к работе Захариазена [411]), а ширина $\Gamma = 300 \text{ Мэв}$, в то время как экспериментальные значения этих величин равны: $m_\rho = 750 \text{ Мэв}$, $\Gamma = 110 \text{ Мэв}$.

Было выполнено много других приближенных расчетов (например, [33, 34]), но точное решение N/D -уравнений с обрезанием не приводит к самосогласованным результатам. Если в качестве исходной массы промежуточного ρ -мезона взять ее экспериментальное значение и положить $s_1 = 200 m_\pi^2$, то чтобы получить правильное положение полюса ρ -мезона, необходимо в качестве исходной ширины взять $\Gamma = 2,25 m_\pi$ ($\approx 320 Mэв$), но тогда вычисленная ширина оказывается слишком большой [126, 390]. Из вида кроссинг-матрицы (5.4) сразу



Ф и г. VI.3. ρ - и P -траектории, порождаемые в результате обмена ρ -мезоном с физическим значением массы и с шириной $\Gamma = 2,25 m_\pi$ ($s_1 = 200 m_\pi^2$).

Эти значения выбраны так, чтобы вычисленная масса ρ -мезона была правильной, но тогда его ширина оказывается слишком большой.

следует, что сила, обусловленная обменом ρ -мезоном в канале с $I_s = 0$, вдвое больше силы, обусловленной обменом в канале с $I_s = 1$. Следовательно, в этом канале имеется траектория, расположенная выше ρ -мезонной, которую, по-видимому, можно отождествить с P . Однако P не входит в число исходных частиц, участвующих в зашнуровке, поэтому добиться самосогласованности невозможно. Траектории, полученные путем таких расчетов, показаны на фиг. VI.3.

Более претенциозные расчеты, по-прежнему учитывающие только обмен полюсом с фиксированным спином, но зато включающие несколько двухчастичных каналов, были выполнены в работах [413] (с использованием детерминантного приближения) и [199] [на основе уравнения (5.7)]. В последней работе включены каналы $\pi - \pi$, $\pi - \omega$ и $K\bar{K}$ и учтен обмен частицами ρ , K^* и ϕ . В качестве исходных ширин брались их экспериментальные значения, а параметр s_1 подгонялся так, чтобы получить правильное положение полюса ρ -мезона. Однако эта процедура приводит к слишком пологим траекториям и к большим значениям вычисленных ширин, причем соответствующие результаты почти совпадают с результатами одноканальных расчетов. Резюмируя, сле-

дует сказать, что хотя силы, обусловленные обменом ρ -мезоном, велики, но зашнуровать самого себя он не способен.

По-видимому, более удачным примером вычислений такого рода оказалась взаимная зашнуровка N и N^* , предложенная Чью [99] и подробно развитая в работах [6, 199]. Она заключается в том, что при π — N -рассеянии обмен нуклоном в кросс-канале $\pi\bar{N}$ приводит к силам, порождающим N^* , тогда как обмен резонансом N^* порождает нуклон N . При этом вычисленные ширины гораздо лучше, чем в случае ρ -мезона, однако результаты сильно зависят от обрезания, которое фиксируется тем, чтобы теоретическое положение полюса совпадало с экспериментальным значением массы. Решающим критерием успешности или несостоятельности такого рода вычислений является, очевидно, высокоэнергетическое поведение. Во всяком случае эти вычисления резко противоречат результатам более поздних работ, в которых определялись фазовые сдвиги π — N -рассеяния. Оказалось, что чуть выше порога фазовый сдвиг P_{11} -волны отрицателен, но примерно при 180 Мэв он обращается в нуль, при энергии около 600 Мэв принимает, вероятно, значение 90° (роперовский резонанс), а затем становится почти постоянным. Однако теорема Левинсона (2.17) в применении к описанным выше вычислениям утверждает

$$\delta_l(\infty) - \delta_l(s_0) = -\pi,$$

и фазовый сдвиг заведомо не будет изменять свой знак. Таким образом, представляется более вероятным, что нуклон в действительности является КДД-полюсом в π — N -канале, но связанным состоянием в каком-то другом канале или каналах. Эта проблема рассматривается в работе [28], где можно найти соответствующие ссылки.

§ 6. НОВАЯ ФОРМА ПОЛОСНОГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

Из результатов вычислений, описанных в предыдущем параграфе, совершенно ясно, что если рассматривать обмен полюсом с фиксированным спином при учете одного или небольшого числа двухчастичных каналов, то такая процедура является весьма неудовлетворительной даже в качестве приближенной схемы зашнуровки. Однако при этом делаются столь существенные упрощения, что подобный вывод не должен разочаровывать.

Имеются два основных способа улучшить расчеты, привлекая полученные выше сведения о полюсах Редже. Во-первых, на их основе можно более точно описать сами полюса, сопоставляемые частицам, и осуществить необходимое аналитическое продолжение из одной области изменения переменных в другую. В предыдущем параграфе полюса, полученные в результате вычислений, были полюсами Редже, чего нельзя сказать об исходных полюсах; однако было бы полезно так сформулировать проблему, чтобы кроссинг-симметрия выступала в более явной форме. Другая характерная особенность полюсов Ред-

же — тот факт, что в них определенным образом отражаются вычитания, необходимые в случае расходимости амплитуды, — дает способ, с помощью которого можно проанализировать неупругость. Действительно, следует ожидать, что высокоэнергетическое поведение амплитуды, например в s -канале, определяется самыми правыми полюсами Редже t - и u -каналов, благодаря чему эти полюса должны каким-то образом отражать появление все большего и большего числа открытых неупругих каналов.

Новая форма полосного приближения, развитая Чью и Джонсом [112] на основе более ранней работы Чью [100], представляет собой некоторую расчетную схему, которая была создана с учетом обоих указанных обстоятельств. Название «новая форма полосного приближения» указывает на его отличие от более ранней модели, основанной на использовании упругих двойных спектральных функций. Однако это более старое приближение совсем недавно получило новое развитие и в следующем параграфе мы его рассмотрим. Вычисления в рамках нового полосного приближения проводились для $\pi - \pi$ -рассеяния; при дальнейшем анализе мы будем использовать те упрощения, которые возникают в случае кинематики равных масс и в случае внешних частиц с нулевым спином.

Метод исходит из разбиения амплитуды на три слагаемых:

$$A(s, t) = A^s(s, t) + A^t(s, t) + A^u(s, t), \quad (6.1)$$

где вклады от полюсов и двухчастичных порогов s -канала содержатся в $A^s(s, t)$ и т. д. Таким образом, используя терминологию, введенную в § 4 данной главы, можно сказать, что величина

$$V^s(s, t) \equiv A^t(s, t) + A^u(s, t) \quad (6.2)$$

представляет собой «потенциал», порождающий полюса в s -канале. Приближение состоит в том, что каждое слагаемое записывается в виде

$$A^t(s, t) = \sum_j A_j^t(s, t), \quad (6.3)$$

где $A_j^t(s, t)$ — вклад j -го полюса t -канала, причем суммирование проводится по всем полюсам, которые выходят в правую полуплоскость переменной l_t . Таким образом, мы пренебрегаем возможностью существования в правой полуплоскости переменной l_t каких-либо других сингулярностей. Требуется, чтобы каждый из таких полюсных членов содержал только один полюс Редже и никаких других полюсов, хотя в него и входят пороговые точки ветвления t -канала. Кроме того, эти члены следует строить таким образом, чтобы

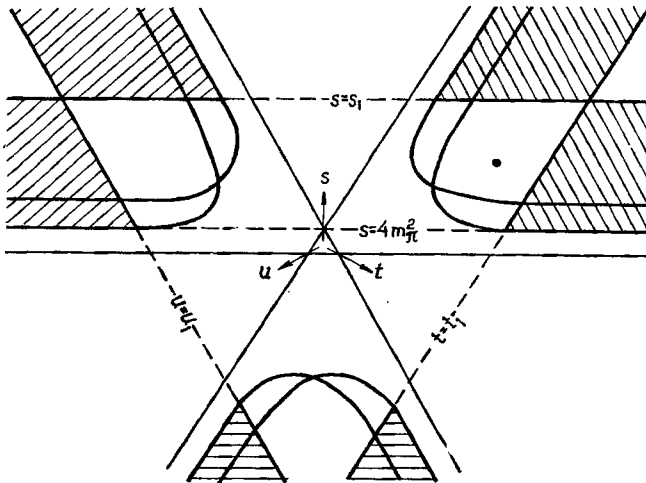
$$A_j^t(s, t) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad t \rightarrow \infty, \quad (6.4)$$

так как при больших t в них должны преобладать полюса s - и u -каналов, но не полюса t -канала. Мы требуем также, чтобы амплитуда удовлетворяла мандельштамовскому представлению, и поскольку при-

нято указанное выше разбиение, этому представлению должно удовлетворять и каждое слагаемое в отдельности. Подобные члены описаны в гл. III; примем для них представление Чью — Джонса, которое, согласно (III.3.7), для полюса t -канала имеет вид

$$R_j^{s_1}(s, t) = \frac{1}{2} G_j(t) (-q_i^2)^{\alpha_j(t)} \times \left[\frac{P_{\alpha_j(t)} \left(1 + \frac{s}{2q_i^2} \right)}{\sin \pi \alpha_j(t)} - \frac{1}{\pi} \int_{-4q_i^2}^{s_1} \frac{P_{\alpha_j(t)} \left(-1 - \frac{s'}{2q_i^2} \right)}{s' - s} ds' \right]. \quad (6.5)$$

Первое слагаемое в правой части соответствует полюсу Редже, а всевозможные пороги t -канала содержатся в функциях $\alpha(t)$ и $G(t)$.



Ф и г. VI.4. Мандельштамовская диаграмма для нового полосного приближения, на которой указаны полосы (заштрихованы) и правильные границы двойных спектральных функций.

Жирной точкой обозначена двойная спектральная функция, соответствующая упругому рассеянию в s -канале.

Если $G(t)$ убывает на бесконечности достаточно быстро, то это выражение стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$ и удовлетворяет мандельштамовскому представлению с двойной спектральной функцией, границами которой являются линии $s = s_1$ и $t = t_0$. Учитывая сигнатуру полюсов, получаем следующий полный вклад:

$$A_j^t(s, t) = R_j^{s_1}(s, t) + (-1)^t R_j^{u_1}(u, t), \quad (6.6)$$

где двойная спектральная функция второго члена имеет границы $t = t_0$ и $u = u_1$. Включая набор таких полюсов для каждого канала, мы приходим к мандельштамовскому представлению с границами спектральных функций, показанными на фиг. VI.4. Удобно (но не обяза-

тельно) положить $s_1 = t_1 = u_1$; тогда области, в которых различные двойные спектральные функции отличны от нуля, не перекрываются.

Описанное приближение имеет один очевидный дефект, связанный с тем, что мы пренебрегли «углами» двойных спектральных функций, такими, как $s < s_1$, $t < t_1$, а также внутренними областями, например $s > s_1$, $t > t_1$. Тем не менее это приближение, по-видимому, достаточно хорошо описывает наиболее существенные свойства амплитуд рассеяния, проявляющиеся в экспериментах. Речь идет о том, что наряду с ближайшими порогами в каждом канале существуют резонансные полюса. Кроме того, при высоких энергиях ($s > s_1$) пики вблизи направлений вперед и назад ($t = 0$ и $u = 0$ для s -канала) определяются полюсами кросс-канала. Любое представление, которое правильно отражает эти две характерные черты, является хорошим приближением к экспериментально измеряемой амплитуде. Это и может служить оправданием полосного приближения. Но, конечно, нет никакой уверенности, что это приближение будет справедливо и в соседних нефизических областях, где, согласно предположению, двойные спектральные функции имеют весьма специальный вид, причем это предположение совершенно необходимо с точки зрения возможности реальных вычислений.

Таким образом, получена амплитуда, которая по построению удовлетворяет принципам максимальной аналитичности первой и второй степени. Чтобы осуществить зашнуровку, нужно просто удовлетворить условию унитарности; для этого мы снова попытаемся использовать N/D -уравнения. Первый шаг заключается в построении из $A(s, t)$ амплитуд с определенной сигнатурой в s -канале. Как мы знаем, двойная спектральная функция, соответствующая вкладу (6.5), определяется выражением (III.3.4)

$$\rho_{st}(s, t) = \Delta_t \left\{ \frac{1}{2} G(t) (-q_i^2)^{\alpha(t)} P_{\alpha(t)} \left(-1 - \frac{s}{2q_i^2} \right) \right\} \theta(s - s_1) \theta(t - t_0). \quad (6.7)$$

Подставляя это выражение в (II.2.6) и производя некоторые преобразования, получаем

$$A^\pm(s, t) = A^{s\pm}(s, t) + V^{s\pm}(s, t), \quad (6.8)$$

где

$$A^{s\pm}(s, t) = \sum_i R_i^{t1}(s, t) \pm (-1)^{I_s} R_i^{u1}(s, t), \quad (6.9)$$

а

$$V^{s\pm}(s, t) = \sum_j \beta(I_s, I_j) G_j(t) (-q_i^2)^{\alpha_j(t)} \times \\ \times \left\{ \frac{1}{\pi} \int_{-4q_i^2}^{s_1} du' P_{\alpha_j(t)} \left(-1 - \frac{u'}{2q_i^2} \right) \left[\frac{1}{u' - s} + \frac{(-1)^{I_j}}{u' - u} \right] + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \left. \frac{(-1)^{I_j} P_{\alpha_j(t)} (-1 - s/2q_1^2) + P_{\alpha_j(t)} (1 + s/2q_1^2)}{\sin \pi \alpha_j(t)} \right\} + \\
 & + \sum_j (-1)^{I_j} \beta(I_s, I_j) \frac{1}{\pi} \int_{s_1}^{\infty} du' G_j(t') (-q_1^2)^{\alpha_j(t')} \times \\
 & \times P_{\alpha_j(t')} \left(-1 - \frac{u'}{2q_1^2} \right) \left[\frac{1}{u' - u} + \frac{(-1)^{I_j}}{u' - t} \right], \quad (6.10)
 \end{aligned}$$

причем

$$s + t + u = s' + t' + u' = 4m_\pi^2.$$

Выписывая эти формулы, мы включили изоспиновую кроссинг-матрицу для $\pi - \pi$ -рассеяния. Кроме того, вследствие кроссинг-симметрии каждый полюс в t -канале должен содержаться и в u -канале, что позволяет просто сложить вклады от этих полюсов.

Проекцию $B_i^V(s)$ функции $V^{s\pm}(s, t)$ на парциальную волну можно получить из (2.51). При этом легко убедиться, что она будет содержать не только ожидаемый левый разрез, но также и правые разрезы амплитуды при $s > s_1$. Правый разрез при $s_0 < s < s_1$ содержится в $A_i^{s\pm}(s)$ — проекции функции $A^{s\pm}(s, t)$ на парциальную волну. Однако $A^{s\pm}(s, t)$ будет давать вклад и в левый разрез при $s < -t_1 + 4m_\pi^2$, так как эта функция дает вклад в $D_i^\pm(s, t)$ при $t > t_1$. Воспользовавшись соотношением (III.3.5), будем иметь

$$D_i^{s\pm}(s, t) = \sum_i G_i(s) (-q_s^2)^{\alpha_i(s)} P_{\alpha_i(s)} \left(-1 - \frac{t}{2q_s^2} \right), \quad (6.11)$$

и из (2.46) получаем

$$B_i^{sL}(s) = \frac{1}{16\pi^2} \int_{-\infty}^{s_L^1} ds' \int_{t_1}^{-4q_s^2} dt' \frac{D_i^{s\pm}(s', t') P_l(-1 - t'/2q_s^2)}{(s' - s) 4(-q_s^2)^{l+1}}, \quad (6.12)$$

где

$$s_L^1 = -t_1 + 4m_\pi^2.$$

Таким образом, функция

$$B_i^L(s) = B_i^{sL}(s) + B_i^V(s) \quad (6.13)$$

содержит весь левый разрез амплитуды $B_i^\pm(s)$ (по крайней мере в полосном приближении), а также правый разрез при $s > s_1$.

Итак, мы хотим удовлетворить условию унитарности в области $s_0 < s < s_1$. В принципе можно включить сколь угодно много двухчастичных каналов, но мы временно сосредоточим все внимание только на одном, а именно на $\pi - \pi$ -канале, так что будет иметь место упру-

гая унитарность. Как и прежде, положим

$$B_l^\pm(s) = \frac{N_l(s)}{D_l(s)}, \quad (6.14)$$

но теперь $N_l(s)$ содержит все разрезы функции $B_l^L(s)$, в том числе и правый разрез при $s > s_1$, а $D_l(s)$ — только разрез при $s_0 < s < s_1$, связанный с условием унитарности. Таким образом, вместо (2.12) получаем соотношение

$$\text{Im}\{D_l(s)\} = -\rho_l(s) N_l(s) \quad \text{при} \quad s_0 < s < s_1. \quad (6.15)$$

Если справедлива максимальная аналитичность второй степени, причем существенным является только один канал, то можно показать, что КДД-полюсов по-прежнему не будет [251], и имеет место следующее дисперсионное соотношение [ср. (2.24)]:

$$D_l(s) = 1 - \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{\rho_l(s') N_l(s')}{s' - s} ds'. \quad (6.16)$$

Функция

$$C_l(s) \equiv N_l(s) - B_l^L(s) D_l(s), \quad (6.17)$$

соответствующая функции (2.28), имеет только правый разрез при $s_0 < s < s_1$, на котором

$$\text{Im}\{C_l(s)\} = -B_l^L(s) \text{Im}\{D_l(s)\}, \quad (6.18)$$

и мы получаем почти такое же уравнение, как (2.33):

$$N_l(s) = B_l^L(s) + \frac{1}{\pi} \int_{s_0}^{s_1} \frac{B_l^L(s') - B_l^L(s)}{s' - s} \rho_l(s') N_l(s') ds'. \quad (6.19)$$

Единственное его отличие состоит в том, что теперь область интегрирования конечна, и по виду уравнение полностью совпадает с (5.7). По сравнению с (2.33) оно обладает тем преимуществом, что теперь не возникает никаких проблем, связанных с квадратичной интегрируемостью ядра. В отличие от (5.7) уравнения (6.16) и (6.19) являются точными (при сделанных предположениях), причем s_1 теперь не параметр обрезания, а точка, в которой область упругой унитарности переходит в область реджевского поведения. Приближение состоит в том, что переход из одной области в другую осуществляется скачком. Однако мы платим за это преимущество тем, что функция $B_l^L(s)$ приобретает логарифмическую особенность при s_1 , которая содержится в первом члене выражения (6.10). Наличие такой сингулярности в граничной точке области интегрирования означает, что интегральное уравнение (6.19) не является уравнением Фредгольма. Сингулярность возникает благодаря тому, что мы сшиваем фазовые сдвиги при $s < s_1$, определяемые упругой унитарностью, с фазовыми сдвигами при $s > s_1$, задаваемыми асимптотическим поведением.

В области ниже s_1 мы имеем

$$\sin^2 \delta_l(s) = \rho_l(s) \operatorname{Im} \{B_l^\pm(s)\}, \quad (6.20)$$

а в точке s_1 на фазовый сдвиг накладывается условие

$$\sin^2 \delta_l(s_1) = \rho_l(s_1) \operatorname{Im} \{B_l^V(s_1)\}, \quad (6.21)$$

где $\operatorname{Im} \{B_l^V(s_1)\}$ задается формулой

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \{B_l^V(s_1)\} = & \sum_j \frac{\beta(I_s, I_j)}{16\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2q_{s_1}^{2l+2}} \operatorname{Im} \left\{ Q_l \left(1 + \frac{t}{2q_{s_1}^2} \right) \right\} \times \\ & \times G_j(t) (-q_1^2)^{\alpha_j(t)} P_{\alpha_j(t)} \left(-1 - \frac{s_1}{2q_1^2} \right), \end{aligned} \quad (6.22)$$

вытекающей из (6.10). Ясно, что для существования решения необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$\rho_l(s_1) \operatorname{Im} \{B_l^V(s_1)\} \leq 1, \quad (6.23)$$

которое играет роль ограничения, накладываемого условием унитарности в s -канале на вклады полюсов t -канала. При выполнении этого условия можно показать [101, 389], что интегральное уравнение может быть решено, если совершить определенное преобразование, устраняющее сингулярную часть. При этом как $N_l(s)$, так и $D_l(s)$ будут иметь сингулярность в точке s_1 , обладая в ее окрестности поведением

$$D_l(s), \quad N_l(s) \sim \frac{1}{(s_1 - s)^{\delta_l(s_1)/\pi}}, \quad (6.24)$$

но в отношении этих функций N/D сингулярность сокращается, и в амплитуде $B_l^\pm(s)$ она не содержится. Оказывается, что, несмотря на сингулярность, уравнение (6.19) может быть решено численными методами, используя обычные способы перехода к обратной матрице [255].

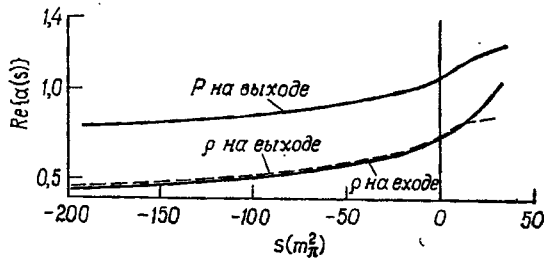
Эти уравнения были решены для случая, когда в каждом из каналов имеется только ρ -мезонная траектория [128]. При этом реджевские функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ соответствующим образом параметризовались и функция $B_l^\pm(s)$ определялась из (6.10), (6.12) и (6.13). Заметим, что в этих формулах интегрирование проводится только по отрицательным t , так что нам нужны значения функций $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ только при $t < 0$, где они вещественны (в предположении, что траектории не пересекаются). Затем решались уравнения (6.19) и (6.16), и из (2.37) и (2.42) находились теоретически вычисленные функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$. Параметры подгонялись до тех пор, пока входные и выходные данные не совпадали. Результаты оказались не очень чувствительными

по отношению к выбору s_1 , так как уменьшение s_1 увеличивает потенциал в (6.10) и сужает область интегрирования в (6.16) и (6.19), благодаря чему происходит определенная компенсация. Если взять s_1 очень большим, то траектории станут пологими, что приведет к большему теоретически вычисленным ширинам, а из-за расширения области интегрирования в (6.16) траектории сблизятся. [$N_l(s)$ положительно, поэтому увеличение s_1 уменьшает значение s , при котором функция $D_l(s)$ равна нулю.]

При $s_1 = 200 m_\pi^2$ ρ -траектория

$$\alpha_\rho(t) = 0,33 + \frac{0,42}{1-t/75} \quad (6.25)$$

оказывается самосогласованной (фиг. VI.5), но теоретически вычисленная траектория не проходит через точку $l = 1$, т. е. не порождает



Ф и г. VI.5. Самосогласованная ρ -траектория при $s_1 = 200m_\pi^2$ (порождается также P -траектория) [128].

ρ -частицу. [Напомним, что $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ можно сделать самосогласованными только при $t < 0$, так как $B_l^{\rho P}(s)$ не зависит от значений $t > 0$.] Сразу за порогом траектория $\alpha(t)$ изменяет свое направление; если учесть дисперсионное соотношение (III.1.30), то это означает, что выше порога $\text{Im} \{ \alpha(t) \}$ должно быть большим.

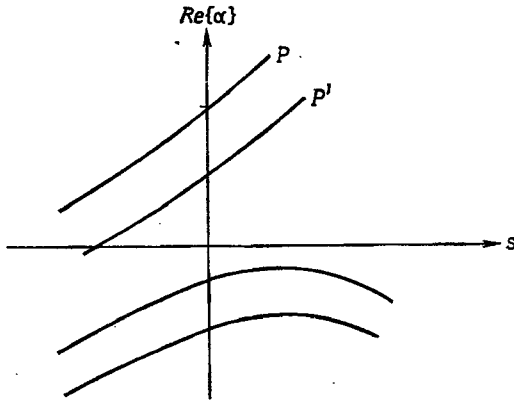
Как указывалось в предыдущем параграфе, силы, возникающие за счет обмена ρ -мезоном, приводят к существованию P -траектории, и было бы непоследовательным не включать в наши вычисления наряду с ρ также и P . Но если учесть P , то приходится иметь дело с дальнедействующим отталкиванием, которое создает эта частица. На первый взгляд кажется, что это отталкивание не может иметь места, или хотя бы, что оно должно компенсироваться каким-то другим вкладом в обмен с $I = 0$. Действительно, так как мы выбрали двойные спектральные функции, равные нулю вне полос, изображенных на фиг. VI.4, то $D_l^\pm(s, t)$ можно разложить в сходящийся при $s_0 < s < s_1$ ряд по парциальным волнам, и если воспользоваться проекцией

Грибова — Фруассара, то получим

$$B_l^V(s) = \frac{\beta(I_{s_l}, 0)}{16\pi} \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{2q_s^{2l+2}} Q_l \left(1 + \frac{t}{2q_s^2}\right) \times$$

$$\times \sum_{l_t} (2l_t + 1) \text{Im} \{A_{l_t}(t)\} P_{l_t} \left(1 + \frac{s}{2q_t^2}\right). \quad (6.26)$$

Поскольку в случае упругой унитарности в полосе t -канала функция $\text{Im} \{A_{l_t}(t)\}$ должна быть положительной, очевидно, $B_l^V(s)$ также будет положительно, по крайней мере при $s \approx 0$. Но в случае обмена



Ф и г. VI.6. Траектории с $l = 0$, включая две гипотетические траектории, не достигающие правой полуплоскости переменной l , но создающие силы притяжения.

померанчоном P это не так, и для корректности полосного приближения необходимо существование некоторого положительного вклада, отличающегося от вклада P (или аналогичного ему P'). Его могли бы давать траектории, которые не выходят в правую полуплоскость переменной l , подобные показанным на фиг. VI.6. Так как такие траектории не проявляются ни физически, ни при расчетах такого типа, вводить их непосредственно не имеет смысла, но Чью и Теплиц [116] показали, как можно включить их влияние посредством «нормировки» потенциала. Для этого нужно просто вычесть из P -потенциала $V^P(s, t)$ величину $V^P(0, t)$, а затем обратно добавить вклад $V^P(0, t)$ в каждую

получающуюся парциальную волну. Таким образом,

$$B_l^V(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 \frac{dt}{2q_s^{2l+2}} \operatorname{Im} \left\{ Q_l \left(1 + \frac{t}{2q_s^2} \right) \right\} [V^P(s, t) - V^P(0, t)] + \\ + \frac{\beta(I_s, 0)}{16\pi} \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{t_1} \frac{dt}{2q_s^{2l+2}} Q_l \left(1 + \frac{t}{2q_s^2} \right) \sum_{l_t} (2l_t + 1) \operatorname{Im} \{A_{l_t}(t)\}. \quad (6.27)$$

Значения $\operatorname{Im} \{A_{l_t}(t)\}$ можно сделать согласованными в s -, t - и u -каналах, что обеспечит положительность функции $B_l^V(s)$. Эта процедура использовалась [126] для обеспечения самосогласованности ρ - и P -траекторий, но полученные результаты лишь незначительно отличались от результатов, к которым приводит обмен только ρ -мезоном, так как нормированный вклад померанчона P очень мал. Никаких признаков появления вторичной P' -траектории обнаружено не было. Еще одна проблема состоит в том, что вследствие большого вклада померанчона P в амплитуду при больших s часто трудно удовлетворить при низших значениях l ограничению (6.23), которое накладывает условие унитарности. Это связано с большой величиной вычетов самосогласованных частиц ρ и P .

В другой работе [39] рассматривался $K\bar{K}$ -канал, причем учитывался обмен частицами K^* и ϕ , но результаты оказались очень похожими на одноканальный случай. Можно сделать общее заключение, что в рамках нового полосного приближения траектории, соответствующие физическим частицам ρ и P , не зашнуровываются сами по себе. Кроме того, хотя здесь и удастся получить самосогласованные траектории, но они обладают целым рядом дефектов: имеют малый наклон, не поднимаются до достаточно больших l и тем самым не порождают физических частиц, имеют большие вычеты, отвечающие частицам со слишком большими ширинами, и (в случае P) требуют весьма произвольной «нормировки».

Нормировка фактически может оказаться совершенно не правомерной, так как в приведенном выше доказательстве, согласно которому обменные силы с $l = 0$ должны быть положительными, предполагается справедливость упругой унитарности при $t_0 < t < t_1$, тогда как на самом деле она имеет место только при $t_0 < t < t_I$, где для π -рассеяния $t_I = 16m_\pi^2$. Двойные спектральные функции в действительности не равны нулю в пределах границ, указанных на фиг. VI.4, а именно они задают истинный предел области сходимости разложения по парциальным волнам функции $D_t^\pm(s, t)$, использованный в (6.26). Область, отмеченная на фиг. VI.4 точкой, содержит упругую двойную спектральную функцию s -канала, которая, по определению, не входит в потенциал, но дает вклад в $D_t^\pm(s, t)$, где она соответствует неупругим процессам в t -канале. Таким образом, нет никаких оснований считать, что знаки у $D_t^\pm(s, t)$ и $B_l^V(s)$ должны

быть одинаковыми (в потенциальном рассеянии в случае сильной связи они оказываются разными [125]).

С другой стороны, если серьезно отнестись к существованию отталкивания, то окажется, что комбинация ρ -траектории, дающей притяжение, с P -траекторией, дающей отталкивание, приводит к бессмысленным решениям N/D -уравнений, поскольку мы получаем резонансные полюса на физическом листе [126]. Это справедливо также в случае потенциального рассеяния, где комбинация потенциалов притяжения и отталкивания при использовании первого борновского приближения и N/D -метода приводит к столь же бессмысленным результатам. Поскольку полное решение задачи рассеяния гарантирует, что все резонансы лежат на нефизических листах, это может происходить только вследствие неприменимости первого борновского приближения для левого разреза. Борновский ряд является по существу разложением по константе взаимодействия, и очевидно, что в случае отталкивания знаки членов ряда будут чередоваться, в результате чего первое борновское приближение будет давать слишком сильное отталкивание.

Чью [105] показал, что помераншон, отражающий то обстоятельство, что при высоких энергиях открывается множество каналов, связанных с $\pi - \pi$ -системой, должен приводить к уменьшению теоретически вычисленных ширин, так как резонанс, сильно связанный с такими каналами, проводит меньшее время в своем распадном канале. На языке N/D -уравнений это означает, что дальнедействующее отталкивание, обусловленное помераншоном, уменьшает значение функции N вблизи порога, а следовательно, и ширину низкоэнергетических резонансов, но в то же время не очень значительно влияет на положение нуля функции D , которое определяется более короткодействующими силами; создаваемыми ρ -мезоном. Таким образом, очень важно правильно учитывать отталкивание, обусловленное помераншоном; кроме того, в релятивистском рассеянии необходимо иметь некоторый эквивалент борновского разложения, применяемого в нерелятивистских задачах. Все это обеспечивает итерационная процедура Мандельстама.

§ 7. ИТЕРАЦИОННАЯ ПРОЦЕДУРА МАНДЕЛЬСТАМА

«Старая» форма полосного приближения, предложенная Чью и Фраучи [108], использует для вычисления двойной спектральной функции соотношение (I.12.11), которое мы вывели в гл. I, § 12:

$$\rho^{\text{упр } s}(s, t) = \frac{1}{16\pi^2 q_s \sqrt{s}} \int_{i_0}^{K=0} \int dt_1 dt_2 \frac{D_i^{\pm}(s_+, t_1) D_i^{\pm}(s_-, t_2)}{K^{1/2}(t, t_1, t_2, s)}. \quad (7.1)$$

(Отметим, что в случае амплитуд с определенной сигнатурой скачка D_u не существует, поэтому соотношение (I.12.12) неприменимо.)

Производя разбиение амплитуды, аналогичное (6.8),

$$A^{\pm}(s, t) = A^{s\pm}(s, t) + V^{s\pm}(s, t), \quad (7.2)$$

где

$$A^{s\pm}(s, t) = \frac{1}{\pi^2} \int \int \frac{\rho^{y_{np}^s}(s', t'')}{(s' - s)(t'' - t)} ds' dt'', \quad (7.3)$$

а $V^{s\pm}(s, t)$ — оставшаяся часть амплитуды, и используя (II.2.8), мы можем записать

$$D_i^{\pm}(s, t) = \frac{1}{\pi} \int \frac{\rho^{y_{np}^s}(s', t)}{s' - s} ds' + D_i^Y(s, t), \quad (7.4)$$

где $D_i^Y(s, t)$ — скачок по t функции $V^{s\pm}(s, t)$. Уравнения (7.1) и (7.4) составляют основу итерационной процедуры для вычисления $\rho^{y_{np}^s}(s, t)$. Считая, что $D_i^Y(s, t)$ известно, из (7.1) мы можем определить функцию $\rho^{y_{np}^s}(s, t)$, подставляя которую в (7.4), получим новое значение $D_i^{\pm}(s, t)$ и т. д. Благодаря конкретному виду функции K и конечности области интегрирования в (7.1), для определения $\rho^{y_{np}^s}(s, t)$ при заданном значении t (например, t_x) нам необходимы только значения $D_i^{\pm}(s, t)$ при $t < t_x$, причем в (7.4) входит также только область $t < t_x$. Таким образом, зная скачок $D_i^{\pm}(s, t)$ для $\pi - \pi$ -рассеяния в области $t_0 < t < 16m_\pi^2$, где $\rho^{y_{np}^s}(s, t)$ обращается в нуль (см. фиг. VI.4), мы можем определить $\rho^{y_{np}^s}(s, t)$ при $t < 64m_\pi^2$. Подставляя эту функцию в (7.4), мы найдем $D_i^{\pm}(s, t)$ вплоть до значения $t = 64m_\pi^2$, что позволяет нам, используя (7.1), определить $\rho^{y_{np}^s}(s, t)$ до $t = 256m_\pi^2$ и т. д. В этом и состоит мандельштамовская итерация [288—290].

При указанных вычислениях возникает трудность, связанная с тем, что функция $A^{s\pm}(s, t)$, задаваемая формулой (7.3), в общем случае не становится малой с ростом s . Действительно, подставляя полюс Редже t -канала $\alpha(t)$ в $D_i^Y(s, t)$, получаем

$$D_i^Y(s, t) \sim s^{\alpha(t)}$$

для некоторого $t = t_1$, и подстановка этого выражения в (7.1) дает

$$\rho^{y_{np}^s}(s, t) \sim s^{2\alpha(t_1) - 1}.$$

После n итераций (при достаточно больших t) функция ρ будет вести себя, как

$$\rho^{y_{np}^s}(s, t) \sim s^{2^n \alpha(t_1) - n}.$$

Мы уже указывали на это явление в связи с разрезами Амати — Фубини — Стангеллини в гл. V, § 3, где было установлено, что проблема возникает из-за предположения о справедливости упругой унитарности при больших s . На самом деле должны происходить некоторые сокращения, обусловленные вкладами многочастичного условия унитарности, которые устраняют указанное поведение и приводят к тому, что $\rho^{y_{np}^s}(s, t)$ обращается в нуль при $s \rightarrow \infty$. Однако подобные сокращения весьма трудно включить в полосное приближение.

Чтобы обойти эту трудность, недавно была предложена следующая модификация условия унитарности (7.1):

$$\rho^{\text{упр } s}(s, t) = \frac{g(s)}{16\pi^2 q_s \sqrt{s}} \int_{t_0}^{K=0} \int dt_1 dt_2 \frac{D_i^\pm(s_+, t_1) D_i^\pm(s_-, t_2)}{K^{1/2}(t, t_1, t_2, s)}, \quad (7.5)$$

где
но

$$g(s) = 1 \quad \text{при } s < s_1,$$

$$g(s) \rightarrow 0 \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Было показано [295, 38], что итерационная процедура с таким обрезанием приводит к полиномиально ограниченной по t функции $\rho^{\text{упр } s}(s, t)$, поэтому можно надеяться получить в области полосы s -канала реджевское асимптотическое поведение по t . Вычисляя с помощью уравнений (7.5) и (7.4) функцию $D_i^\pm(s, t)$ при достаточном больших значениях t , получим

$$D_i^\pm(s, t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} \bar{G}(s) t^{\alpha(s)}, \quad (7.6)$$

где, согласно (6.11),

$$\bar{G}(s) = \pi^{-1/2} G(s) \frac{\Gamma[\alpha(s) + 1/2]}{\Gamma[\alpha(s) + 1]}. \quad (7.7)$$

Поэтому

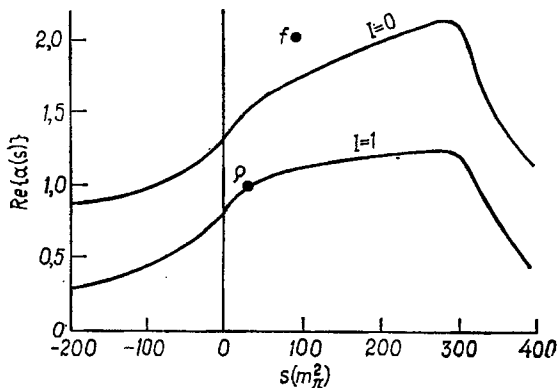
$$\ln |D_i^\pm(s, t)| = \ln |\bar{G}(s)| + \text{Re} \{ \alpha(s) \} \ln t, \quad (7.8)$$

$$\arg \{ D_i^\pm(s, t) \} = \arg \{ \bar{G}(s) \} + \text{Im} \{ \alpha(s) \} \ln t. \quad (7.9)$$

Таким образом, установление соответствия между функциями $\ln |D_i|$ и $\arg(D_i)$ и функцией $\ln t$, позволяет определить $\alpha(s)$ и $\gamma(s)$.

Подобные методы были использованы в работе [69] (где применялась другая процедура обрезания) и в более поздней работе [37] для вычисления ρ - и P -траекторий в $\pi - \pi$ -рассеянии. При этом использовался потенциал, создаваемый обменом ρ -мезоном с фиксированным спином (в работе [69] учитывался также обмен f -мезоном). Полученные траектории были гораздо лучше, чем при использовании N/D -метода и первого борновского приближения для левого разреза, а именно не требовалось больших исходных ширины для того, чтобы вычисленные траектории имели правильное положение и поднимались несколько более круто. Один из результатов работы [37] представлен на фиг. VI.7. Однако траектории все же слишком пологи, а теоретически вычисленные ширины слишком велики ($\sim 3m_\pi$ в работе [37]), хотя последний недостаток можно исправить, добавляя вклад от P . При вычислении траекторий этим способом требуется большая точность численных методов, и может оказаться более удобным использовать N/D -уравнения, но применить итерационный метод для вычисления «углов» двойных спектральных функций (т. е. области $s < s_1$ и $t < t_1$ на фиг. VI.4). При этом в левый разрез будет входить, например, третье или четвертое борновское приближение для обмена полюсом Редже. Зная эту часть двойной спектральной функции, благодаря кроссинг-симмет-

рии мы получаем сведения и о неупругих процессах в s -канале. Соответствующий вклад в парциальную амплитуду $B_l^\pm(s)$ можно ввести в уравнения, используя метод Фрея — Варнока и соотношение (3.34) (см. § 3). Однако осуществление такой программы потребует чрезвычайно большой затраты труда, особенно если включаются несколько каналов.



Ф и г. VI.7. ρ - и P -траектории, получающиеся в результате обмена ρ -мезоном с фиксированным спином и с шириной $1,1m_\pi$ ($s_1 = 400 m_\pi^2$) [37].

§ 8. НЕКОТОРЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Выше были описаны недостатки полосного приближения, связанные с тем, что оно приводит к плохим количественным результатам. Но в рамках полосного приближения остаются еще некоторые почти непреодолимые трудности, которые имеют совершенно иную природу. По-видимому, наиболее серьезная из них заключается в следующем. Если амплитуда удовлетворяет дисперсионному соотношению

$$A^\pm(s, t) = \frac{1}{\pi} \int_{t_0}^{\infty} \frac{D_t^\pm(s, t')}{t' - t} dt' \quad (8.1)$$

(при больших s , лежащих выше резонансов s -канала, где можно надеяться на сходимость интеграла), то можно ожидать, что при удалении от пика, соответствующего рассеянию вперед, она будет убывать как

$$A^\pm(s, t) \sim \frac{1}{t}. \quad (8.2)$$

Однако на самом деле, как мы увидим в гл. VIII, § 6, эксперименты с полной определенностью свидетельствуют о том, что ампли-

туда убывает значительно быстрее, а именно ее поведение лучше аппроксимируется выражением

$$A^{\pm}(s, t) \sim e^{bt} \quad \text{при} \quad 0 > t > -1 \quad (\Gamma_{\text{эв}}/c)^2, \quad (8.3)$$

которое переходит в

$$A^{\pm}(s, t) \sim e^{-aV^{-1}t} \quad \text{при} \quad t < -1 \quad (\Gamma_{\text{эв}}/c)^2. \quad (8.4)$$

Последнее выражение соответствует наиболее быстрому спаду, допускаемому аналитичностью и унитарностью [301]. Такое поведение требует, чтобы функция $D_i^{\pm}(s, t)$, фигурирующая в (8.1), удовлетворяла бесконечному числу условий, наложенных на ее моменты. Предпринимались попытки [127] объединить подобное поведение с полосным приближением, но при конкретных расчетах требуется гораздо более тонкий подход к этой проблеме.

Еще одна трудность, возможно связанная с предыдущей, заключается в следующем. Имеются довольно надежные экспериментальные данные (см. гл. VIII, § 1), свидетельствующие о том, что траектории поднимаются до весьма высоких значений $\text{Re } \alpha$, в случае барионов, по-видимому, даже до $19/2$, чему соответствует масса частицы $3230 M_{\text{эв}}$. Если траектория $\alpha(t)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению типа (III.1.30), то она может подниматься лишь до тех пор, пока $\text{Im} \{\alpha(t)\}$ не пройдет через свой максимум по t . Но так как двойная спектральная функция пропорциональна $\text{Im} \{\alpha(t)\}$ [см. (6.7)], то это означает, что двойная спектральная функция должна оставаться большой вплоть до некоторого значения $t > (3230)^2 M_{\text{эв}}^2$, которое лежит далеко за пределами ширины полосы, ожидаемой в наших уравнениях.

Одна из возможностей обеспечить столь высокий подъем траекторий состоит в том, что динамика определяется частицами с большими массами. Можно было бы предположить, что наблюдаемые частицы с малыми массами являются на самом деле связанными состояниями системы из двух или трех кварков, и поэтому, согласно соображениям, приведенным в § 3, в амплитудах содержатся КДД-полоса (см., например, [372], а также гл. VIII, § 9). Но тогда основной вклад в двойную спектральную функцию должна давать область $t \approx 4M_Q^2$ (M_Q — масса кварка), и очень трудно объяснить резкий спад пиков сечения, соответствующих рассеянию вперед и назад. В этом случае можно ожидать зависимости типа

$$A(s, t) \sim \frac{1}{t - 4M_Q^2}. \quad (8.5)$$

Другой механизм заключается в том, что траектория меняет свой характер, когда при увеличении энергии открывается еще один канал с более высоким порогом. Если во всех случаях $\alpha(s) \rightarrow -\infty$ при $s \rightarrow -\infty$, как это предположил Мандельштам [297], то при определении динамики траекторий очень важно учитывать связь с другими каналами (этот вопрос рассматривается также в гл. VIII, § 9). Асимп-

тотическое поведение (2.43) и (2.45) входит в одноканальные расчеты, а динамическая схема, включающая лишь весьма небольшое число каналов, может быть справедливой в лучшем случае только для ограниченного участка траектории.

В последних двух параграфах этой главы описаны модели зашнуровки траекторий, использующие полосное приближение. В литературе было высказано, конечно, множество других предположений, которые мы за отсутствием места не можем подробно рассмотреть. Интересный метод, опирающийся на более ранние исследования [94, 95], развит в работе [186]. Он позволяет, используя условие унитарности, получить интегральные уравнения непосредственно для реджевских параметров. Некоторые результаты для случая потенциального рассеяния приведены в работе [227]. В более поздних работах [1—3] предложены методы отыскания реджевских параметров, основанные на записи S -матрицы в виде суммы полюсов Редже, на которую затем накладывается требование кроссинг-симметрии.

Мы не затронули многие другие вопросы. В частности, возникают проблемы, связанные с существованием внутренней изоспиновой симметрии $SU(2)$, частичной симметрии $SU(3)$, которая включает странность и нарушается столь регулярным образом, а также предполагаемых динамических симметрий типа $SU(6)$. Всем этим вопросам посвящено много исследований, в которых, однако, динамика обычно детально не разрабатывается — просто пытаются выяснить, правдоподобно ли существование таких симметрий с точки зрения наблюдаемых мультиплетов и кроссинг-матриц соответствующих этим симметриям групп [87, 133]. Полюса Редже в этих расчетах обычно не вводятся, и мы ограничимся тем, что опять отошлем читателя к обзорам [395, 412], а также к более поздним работам по $SU(6)$ [80, 83] и к имеющейся там библиографии.

Несмотря на указанные выше трудности, гипотеза зашнуровки сохраняет свою привлекательность. Частично это связано с тем, что если наши постулаты об аналитичности правильны, то какая-то схема такого рода должна существовать, а частично с тем, что зашнуровка подтверждается множеством качественных результатов. Совершенно очевидно, что исследованные до сих пор простые динамические модели потребуют значительного усовершенствования и усложнения, прежде чем их многообещающие особенности смогут превратиться в твердо установленные факты. Но главные соображения, которые особенно подчеркнул Чью [103], заключаются в следующем. Поскольку теория S -матрицы тесно связана с экспериментально измеряемыми величинами, которые она должна объяснить, эта теория будет продолжать развиваться при условии, что мы по-прежнему будем вводить в нее всю доступную нам экспериментальную информацию. В гл. VIII мы увидим, что полюса Редже сводят воедино огромное количество такой информации; поэтому не приходится сомневаться, что их необходимо будет включать в любую будущую динамическую схему.

ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

§ 1. РОЛЬ ТЕОРИИ ВОЗМУЩЕНИЙ

В предыдущих разделах указывались причины, позволяющие считать, что свойства амплитуд рассеяния при высоких энергиях определяются полюсами Редже и разрезами Редже кросс-канала. Однако приведенные там аргументы имели косвенный характер, поскольку действительное существование таких полюсов и разрезов не было подтверждено никакими конкретными расчетами. Конечно, точные вычисления провести невозможно, поэтому приходится либо прибегать к определенным приближениям (как в гл. VI), либо рассматривать «модели», которые отражали бы хотя бы некоторые характерные особенности реальной ситуации. Мы уже ссылались на одну из таких моделей — на теорию нерелятивистского потенциального рассеяния, в рамках которой впервые появились многие идеи, рассматриваемые в этой книге. Здесь в качестве несколько более реалистической модели физики фундаментальных частиц мы рассмотрим разложение в ряд теории возмущений в лагранжевой теории поля. С формальной точки зрения (если пренебречь проблемами расходимостей) это разложение удовлетворяет аналитичности первой степени и постулату кроссинг-симметрии, а также релятивистски инвариантно. Вопрос о совместности теории возмущений с максимальной аналитичностью второй степени мы отложим до § 5 данной главы.

Общее введение в лагранжеву теорию поля и в методы формального решения ее задач по теории возмущений выходит за рамки этой книги, и мы будем считать (только в данной главе), что читатель знаком с основными понятиями, в частности с описанием отдельных членов ряда теории возмущений посредством фейнмановских диаграмм. Напомним, что лагранжева теория поля исходит из некоторого набора полевых операторов, которые описывают определенный набор «элементарных» частиц. В лагранжиан входят только эти операторы, и каждая линия фейнмановской диаграммы соответствует одной такой элементарной частице.

Как мы увидим, отдельные фейнмановские диаграммы обычно не обладают реджевской асимптотикой по t , а ведут себя как $t^N (\ln t)^M$, где N и M — некоторые *постоянные* (т. е. не зависят от s). Поэтому интересно выяснить, каким образом при суммировании бесконечных последовательностей подобных членов может возникнуть реджевское поведение [т. е. $\rho^{(s)}$]. Ниже будет показано, как в J -плоскости могут

появляться всевозможные сингулярности, упоминавшиеся выше, — полюса Редже, разрезы Редже и неподвижные сингулярности Грибова — Померанчука. Но даже если считать, что исходная модель справедлива, то результаты можно, конечно, рассматривать в лучшем случае лишь как некоторые наводящие соображения, так как мы ограничиваемся вполне определенными классами диаграмм и предполагаем, что можно менять порядок суммирования бесконечной последовательности членов и перехода к пределу при больших t . Тем не менее результаты служат полезным дополнением к прежней аргументации, основанной на использовании условия унитарности, так как в общем случае отдельная фейнмановская диаграмма содержит часть вклада от большого числа диаграмм условия унитарности и включает в явном виде некоторые из эффектов многочастичного условия унитарности. Нас интересует только предельный случай больших t , что, как будет видно из дальнейшего, приводит к значительному упрощению вкладов от отдельных фейнмановских диаграмм и позволяет провести множество формальных суммирований.

Высокоэнергетическое поведение ряда теории возмущений рассматривалось в работах [223, 224, 336—338, 385, 386]. Ранний обзор по этим вопросам можно найти в монографии [318], а более поздний и весьма исчерпывающий — в монографии [160].

В дальнейшем мы ограничимся обсуждением взаимодействия типа Φ^3 , т. е. взаимодействия, при котором в вершине сходятся только три частицы. Некоторые результаты, относящиеся к взаимодействию Φ^4 , приводятся в цитированных выше работах. В этом случае возникает, как правило, весьма аномальное поведение, что легко объяснить, так как взаимодействие Φ^4 соответствует нерелятивистскому сингулярному потенциалу.

§ 2. ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ФЕЙНМАНОВСКИХ ДИАГРАММ

Вклад в амплитуду $A(s, t)$, вносимый любой фейнмановской диаграммой, содержащей только частицы с нулевым спином, можно записать в виде

$$I = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int \frac{d^4 k_1 \dots d^4 k_l}{\prod_{r=1}^n (q_r^2 - m^2 + i\varepsilon)}, \quad (2.1)$$

где q_r — 4-импульсы внутренних линий, k_i — совокупность независимых импульсов петель (так что все q_r являются линейными комбинациями k_i и внешних импульсов), причем для простоты мы выбрали все массы равными. Удобно воспользоваться тождеством Фейнмана

$$\frac{1}{f_1 f_2 \dots f_n} = (N-1) \int_0^1 \frac{\prod d\alpha_i \delta(\sum \alpha_i - 1)}{[\sum \alpha_i f_i]^N} \quad (2.2)$$

и переписать (2.1) в виде

$$I = (n-1)! \int_0^1 \prod d\alpha_i \delta(\sum \alpha_i - 1) \int \frac{\prod d^4 k_j}{\sum \alpha_i (q_j^2 - m^2)} \quad (2.3)$$

(здесь и в дальнейшем слагаемое $i\epsilon$ опускается). Интегралы по k можно вычислить в явном виде [117], и в результате I примет вид интеграла по переменным α , причем подинтегральное выражение будет функцией всех α и скалярных инвариантов, которые можно образовать из внешних 4-импульсов. В частности, для четырехточечной функции (т. е. для амплитуды рассеяния двух частиц в две) результат можно записать в следующем виде:

$$I = \int_0^1 \frac{\prod d\alpha_i \delta(\sum \alpha_i - 1) N(\alpha)}{[g(\alpha) t + d(s, \alpha)]^m}, \quad (2.4)$$

где

$$m = n - 2l > 0. \quad (2.5)$$

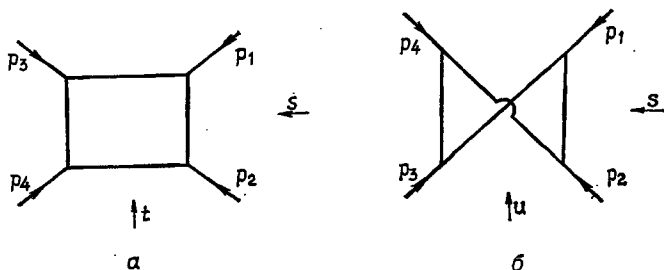
Если $g(\alpha) \neq 0$, то подинтегральное выражение в (2.4) при больших t ведет себя как t^{-m} . Следовательно, если в области интегрирования по α $g(\alpha) \neq 0$, то и сам интеграл будет обладать таким же поведением. Однако область интегрирования по α вблизи точки, в которой $g(\alpha) = 0$, может давать вклады, медленнее убывающие с ростом t . Ясно, что такие доминирующие при больших t вклады можно получить лишь в том случае, если контур интегрирования по α невозможно деформировать с целью избежать попадания на него точки, в которой $g(\alpha) = 0$. Это может происходить по двум причинам:

- 1) если $g(\alpha) = 0$ на границе области интегрирования по α ;
- 2) если $g(\alpha) = 0$ в некоторой внутренней точке контура интегрирования по α , которая при $t \rightarrow \infty$ соответствует пинчу, т. е. зажимается сингулярностями подинтегрального выражения, благодаря чему контур не удастся деформировать так, чтобы на нем не лежала эта точка.

Доминирующие асимптотические вклады, возникающие вследствие первой причины, носят название «граничных» вкладов, а обусловленные второй причиной — «пинчевых» вкладов. Граничные вклады появляются на всех листах амплитуды, тогда как для пинчей характерно то, что они возникают только на вполне определенных листах. Так, на одном листе амплитуды две сингулярности могут подходить к точке $g(\alpha) = 0$ с разных сторон контура, а на другом листе — с одной стороны. Во втором случае эти сингулярности не препятствуют такой деформации контура, при которой указанная точка на нем устраняется.

Как и следовало ожидать, граничные вклады легче поддаются анализу, поэтому полезно ввести определенный класс фейнмановских диаграмм, которые обладают тем свойством, что на физическом листе они не имеют пинчевых вкладов. С этой целью определим «планарные» диаграммы. Планарная диаграмма — это такая фейнмановская диаграмма, которую можно нарисовать на плоскости без каких-либо пере-

сечений внутренних и внешних линий, причем при обходе диаграммы по часовой стрелке внешние линии должны располагаться в последовательности p_1, p_2, p_4, p_3 (фиг. VII.1, а). Вследствие последнего ограничения диаграмма, которая планарна, когда мы рассматриваем большие $t = (p_1 + p_3)^2$ при фиксированном $s = (p_1 + p_2)^2$ (что мы



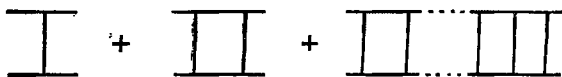
Ф и г. VII.1. Фейнмановская диаграмма, которая является планарной, если рассматривать фиксированное s и большие t , и «непланарной» при фиксированном s и больших u .

здесь и делаем), может стать непланарной, если нужно рассматривать большие u при фиксированном s , и наоборот (простой пример такого рода приведен на фиг. VII.1).

Можно показать [160], что для планарных диаграмм функция $g(\alpha)$, входящая в (2.4), является суммой произведений переменных α_i , каждый член которой имеет положительный коэффициент. Отсюда следует, что при положительных α нули $g(\alpha)$ отсутствуют, а так как на физическом листе не возникает необходимости в деформации контура, то пинчевые вклады в планарных диаграммах не появляются.

§ 3. ГРАНИЧНЫЕ ВКЛАДЫ

Рассмотрим сначала лестничные диаграммы для s -канала, показанные на фиг. VII.2. Эти диаграммы аналогичны случаю нерелятивистского рассеяния на юкавском потенциале [61] (см. также [322]),



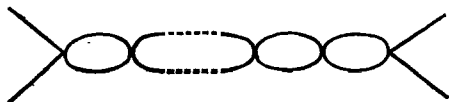
Ф и г. VII.2. Лестничные диаграммы в s -канале.

поэтому можно ожидать, что они будут приводить к похожему результату, т. е. будут обладать рендежским поведением. Это было доказано посредством прямого вычисления парциальной амплитуды в s -канале на основе уравнения Бете — Солпитера [274]. Здесь мы покажем, как возникает такое поведение, путем анализа высокоэнергетического поведения фейнмановских диаграмм.

Если фейнмановские параметры (которые мы выше записывали просто как α) обозначить для перекладин лестницы через α_i , а для ее сторон через β_i , то для диаграммы $2n$ -го порядка (2.4) примет вид

$$I_n = g^2 \left(\frac{-g^2}{16\pi} \right)^{n-1} (n-1)! \times \\ \times \int \frac{\prod d\alpha_i \prod d\beta_i \delta \left(\sum \alpha_i + \sum \beta_i - 1 \right) [C(\alpha, \beta)]^{n-2}}{\left[\left(\prod \alpha_i \right) t + d(\alpha, \beta, s) \right]^n}. \quad (3.1)$$

Ясно, что коэффициент при t обращается в нуль, если какое-либо из α_i является граничной точкой $\alpha_i = 0$; доминирующий вклад дает



Ф и г. VII.3. Приведенная диаграмма, которая дает такой же главный вклад, как и фиг. VII.2.

окрестность точки, в которой все α_i близки к нулю. Таким образом,

$$I_n \sim g^2 \left(\frac{-g^2}{16\pi} \right)^{n-1} (n-1)! \int_0^2 \prod d\alpha_i \int_0^1 \frac{\prod d\beta_i \delta \left(\sum \beta_i - 1 \right) [C(0, \beta)]^{n-2}}{\left[\left(\prod \alpha_i \right) t + d(0, \beta, s) \right]^n}. \quad (3.2)$$

Если при больших t оставлять только главный член, то интегрирования по α теперь можно выполнить в явном виде [336], и мы получаем

$$I_n \sim \frac{g^2 (\ln t)^{n-1}}{t (n-1)!} \left[\left(\frac{-g^2}{16\pi^2} \right)^{n-1} (n-2)! \times \right. \\ \left. \times \int_0^1 \frac{\prod d\beta_i \delta \left(\sum \beta_i - 1 \right) [C(0, \beta)]^{n-2}}{[d(0, \beta, s)]^{n-1}} \right]. \quad (3.3)$$

Выражение в квадратных скобках совпадает с выражением, которое получается для диаграммы фиг. VII.3, содержащей $n-1$ петель. Единственное отличие заключается в том, что степени d и C понижаются на единицу, и это выражение соответствует фактически свернутой диаграмме фиг. VII.3, вычисляемой с двумерными (а не с обычными четырехмерными) векторами q . Из формы диаграммы фиг. VII.3 или из прямых вычислений [336] следует, что квадратная скобка имеет вид $[K(s)]^{n-1}$, где $K(s)$ — фейнмановский интеграл для отдельной петли (вычисленной в двух измерениях), так что окончательно получаем

$$I_n \sim \frac{g^2 [K(s) \ln t]^{n-1}}{t (n-1)!}, \quad (3.4)$$

где

$$K(s) = -\frac{1}{16\pi^2} \int_0^1 \frac{d\beta_1 d\beta_2 \delta(\beta_1 + \beta_2 - 1)}{[\beta_1 \beta_2 s - (\beta_1 + \beta_2)^2]}. \quad (3.5)$$

Сложим теперь главные вклады всех лестниц; и будем считать, что при этом получается главный вклад суммы всех лестничных диаграмм. Тогда будем иметь

$$I_{\text{лестн}} \sim \frac{g^2}{t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[K(s) \ln t]^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (3.6)$$

$$I_{\text{лестн}} \sim g^2 t^{\alpha(s)}, \quad (3.7)$$

где

$$\alpha(s) = -1 + K(s). \quad (3.8)$$

Таким образом, мы получили реджевское поведение с траекторией, которая стремится к -1 при $|s| \rightarrow \infty$ или $g^2 \rightarrow 0$. Мы видим, что $\alpha(s)$ является вещественно аналитической функцией переменной s , имеющей правый разрез, который начинается на физическом пороге.

Для иллюстрации прямых методов вычисления траекторий путем суммирования диаграмм теории возмущений мы опишем метод Оме [318], который позволяет определить вид траектории в пределе слабой связи. Первая диаграмма на фиг. VII.2 (т. е. диаграмма с одночастичным обменом) дает в парциальную амплитуду s -канала следующий вклад [см. (II.1.1)]:

$$A_l^{(1)}(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} P_l \left(1 - \frac{t}{2q_s^2}\right) \frac{g^2 dt}{t - m^2} \frac{1}{2q_s^2}, \quad (3.9)$$

или

$$A_l^{(1)}(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{g^2}{2q_s^2} Q_l \left(1 + \frac{m^2}{2q_s^2}\right). \quad (3.10)$$

В окрестности точки $l = -1$ это дает

$$A_l^{(1)} \approx \frac{1}{16\pi} \frac{g^2}{2q_s^2} \frac{1}{l+1}. \quad (3.11)$$

Попытаемся теперь найти такую функцию $A_l(s)$, которая стремилась бы к $A_l^{(1)}(s)$ при $g^2 \sim 0$ и удовлетворяла бы условию унитарности

$$\text{Im } A_l(s) = \rho(s) A_l(s)^* A_l(s). \quad (3.12)$$

Такой функцией является

$$A_l(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{g^2}{2q_s^2} \left[\frac{-1}{\alpha(s) - l} + \frac{1}{l+1} \left\{ 1 + \frac{g^2 \alpha_l(s)}{16\pi(l+1)} + \dots \right\} \right], \quad (3.13)$$

где мы произвели разложение

$$\alpha(s) = -1 + \frac{g^2}{16\pi} \alpha_1(s) + \dots, \quad (3.14)$$

и где

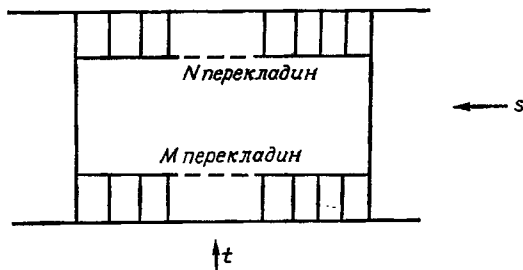
$$\text{Im } \alpha(s) = \frac{1}{16\pi} \frac{g^2}{2q^2} \rho(s). \quad (3.15)$$

Из последнего выражения получаем формулу

$$\alpha(s) = -1 + \frac{g^2}{16\pi} \int_{4m^2}^{\infty} \frac{2ds'}{[s'(s'-4m^2)]^{1/2}(s'-s)} + \dots, \quad (3.16)$$

которая, как легко видеть, совпадает с (3.8) и (3.5).

Из (3.16) или из (3.8) и (3.5) следует, что вблизи порога разложение $\alpha(s)$ по степеням константы связи непродукно. Но это не должно нас



Ф и г. VII.4. Фейнмановская диаграмма, которая ведет себя как $t^{-3} \ln t$ при больших t для всех значений M и N .

удивлять, так как в гл. III, § 1 мы видели, что на пороге функция $\alpha(s)$ не аналитична по s .

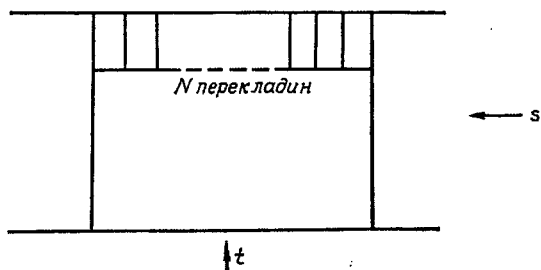
В литературе имеется целый ряд результатов, относящихся к более сложным диаграммам. Для вычисления главного вклада в зависимость от t были развиты специальные методы [59, 165, 166, 339]. Было показано [223, 385, 386], что все планарные диаграммы ведут себя как $t^{-n} (\ln t)^m$, где n и m — целые числа ($n \geq 1, m \geq 0$), и были сформулированы общие правила для определения n и m . Но эти правила очень сложны, причем целый ряд «исключений» требует большой осторожности, так что мы не будем их здесь приводить. Полезность этих правил ограничена тем, что обычно нас интересует суммирование бесконечного набора диаграмм, а для этого (см. выше) необходимо знать коэффициент у главного члена. Однако существует важный класс диаграмм, для которых такая информация не обязательна. Одна из диаграмм такого рода показана на фиг. VII.4 — для нее правила дают асимптотику, пропорциональную выражению $t^{-3} \ln t$. Поскольку выражение не зависит от M и N , такое поведение остается справедливым и после суммирования по M и N (даже если формальное:

суммирование лестниц приводит к резонансам). В частности, как указано в гл. V, из диаграмм такого рода мы не получаем реджевских разрезов на физическом листе.

Было показано (подробности можно найти в монографии [160]), что реджевское полюсное поведение, полученное выше для лестничных диаграмм, остается справедливым и в том случае, если в сумму включается гораздо более широкий класс диаграмм, так как другие диаграммы дают в вычет и в траекторию вклады более высокого порядка. Кроме того, в работах [224, 340] описанные методы использовались для анализа процессов рождения. И здесь для определенного класса диаграмм получено реджевское поведение. В этих работах рассматриваются также сингулярности функций $\alpha(s)$ и $\beta(s)$.

§ 4. ПИНЧЕВЫЕ ВКЛАДЫ

Как и следовало ожидать, анализ пинчевых вкладов оказывается гораздо более сложным, чем анализ граничных вкладов, и никаких



Ф и г. VII.5. Фейнмановская диаграмма с пинчевым вкладом на нефизическом листе.

общих правил, позволяющих определить поведение непланарных диаграмм при больших t , пока не сформулировано. Было показано, однако, что при суммировании определенного класса таких диаграмм возникают разрезы в плоскости углового момента.

Чтобы проиллюстрировать это положение, рассмотрим сначала диаграмму, показанную на фиг. VII.5. Так как эта диаграмма планарная, то она содержит только граничные вклады и ведет себя при больших t как $t^{-2} \ln t$. Однако в гл. V, § 3 мы видели, что если суммирование по N дает траекторию Редже, то скачок диаграммы фиг. VII.5 в двухчастичном t -канале, просуммированный по N , будет содержать вклад реджевского разреза. Было показано, что на физическом листе этот разрез отсутствует, поэтому он должен лежать на листе, на который можно попасть, переходя через разрез двухчастичного условия унитарности в t -канале. Здесь мы попытаемся выяснить, каким образом этот реджевский разрез возникает в теории возмущений.

Рассмотрим сначала диаграмму типа фиг. VII.5, соответствующую низшему порядку теории возмущений, т. е. диаграмму, изображенную на фиг. VII.6. Для этой диаграммы имеем

$$g(\alpha) = \beta_1 \beta_2 (\alpha_1 + \alpha_2 + \delta + \gamma) + \alpha_1 \alpha_2 (\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1) + \beta_1 \gamma \alpha_2 + \alpha_1 \gamma \beta_2. \quad (4.1)$$

Запишем эту функцию в виде

$$g(\alpha) = (\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1) \left[\alpha_1 + \frac{\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma}{\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1} \right] \left[\alpha_2 + \frac{\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \gamma}{\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1} \right] + \beta_1 \beta_2 (\delta + \gamma) - \frac{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 + \gamma) (\beta_1 + \gamma)}{\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta}. \quad (4.2)$$

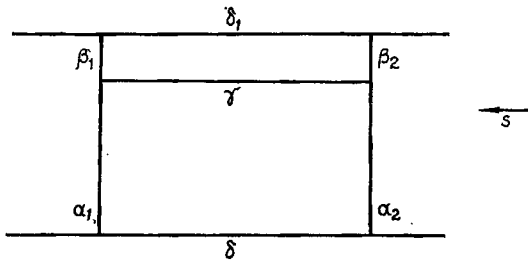
Мы видим, что $g(\alpha)$ обращается в нуль там, где β_1 или β_2 равно нулю (эти точки являются граничными), а также там, где либо

$$\alpha_1 = -\frac{\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma}{\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1}, \quad (4.3)$$

либо

$$\alpha_2 = -\frac{\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \gamma}{\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1}. \quad (4.4)$$

(эти точки граничными не являются). Однако из общего выражения (2.4) следует, что там, где $g(\alpha)$ обращается в нуль, в пределе $t \rightarrow \infty$



Ф и г. VII.6. Простейший пример диаграммы типа фиг. VII.5.

возникает сингулярность. Очевидно, она не может зажимать контур, если t лежит на физическом листе, так как в этом случае все фейнмановские параметры положительны (это пример общего правила, выполняющегося для планарных диаграмм). Но нормальный порог соответствует граничным сингулярностям по α_1 и α_2 ; поэтому, переходя через нормальный порог на второй лист, мы деформируем контуры переменных α . В результате на этом листе сингулярности будут зажимать контур. Чтобы вычислить главный вклад в поведение по t , запишем фейнмановский интеграл в виде

$$I = \text{const} \int dx \int dy \int dz_1 dz_2 \int_0^1 d\delta_1 d\delta d\gamma \times \times [(xy + z_1 z_2) t + d(s_1 \delta_1, \delta_1 \gamma)]^{-3}, \quad (4.5)$$

где

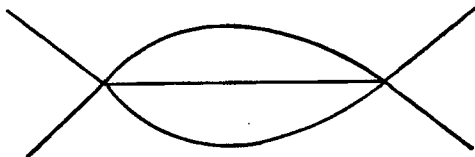
$$x = \alpha_1 + \frac{\beta_1 \beta_2 + \beta_1 \gamma}{\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1}, \quad (4.6)$$

$$y = \alpha_2 + \frac{\beta_1 \beta_2 + \beta_2 \gamma}{\beta_1 + \beta_2 + \gamma + \delta_1}, \quad (4.7)$$

$$z_{1,2} = \beta_{1,2} \left[\delta + \gamma - \frac{\gamma^2}{\gamma + \delta_1} \right], \quad (4.8)$$

причем мы воспользовались тем, что главный вклад обусловлен окрестностью точки, в которой β_1 и β_2 равны нулю.

Интегрирования по x и по y в (4.5) можно выполнить в явном виде, после чего мы получим логарифмическую функцию. Выбирая главное



Ф и г. VII.7. Приведенная диаграмма, соответствующая фиг. VII.6.

значение логарифма, будем иметь величину, соответствующую физическому листу, для которой интеграл ведет себя как t^{-3} . Другие ветви логарифма приводят к дополнительным членам вида

$$I \sim \text{const} \int_0^1 d\delta d\delta_1 d\gamma \int \frac{dz_1 dz_2}{[t(z_1 z_2 t + d)^2]}, \quad (4.9)$$

т. е.

$$I \sim \text{const} t^{-2} \ln t \int_0^1 \frac{d\delta d\delta_1 d\gamma}{d}. \quad (4.10)$$

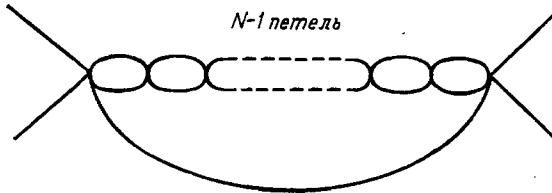
Ясно, что последний интеграл в (4.10) соответствует диаграмме фиг. VII.6 без линий, отвечающих фейнмановским параметрам α_1 , α_2 , β_1 , β_2 , т. е. диаграмме фиг. VII.7. Как и прежде, эту диаграмму следует вычислять в пространстве *двух измерений* [из-за степени d в знаменателе выражения (4.9)]. Вклад диаграммы фиг. VII.7 удобно переписать в виде интеграла по инвариантам [156]. В данном случае это легко сделать, и мы получим

$$\int \frac{ds_1 ds_2 K(s_1)}{K^{1/2}(s, s_1, s_2, t) (s_2 - m^2)}, \quad (4.11)$$

где $K(s)$ и $K(s, s_1, s_2, t)$ — функции, определяемые соответственно формулами (3.5) и (I.12.7).

Теперь этот анализ можно распространить на случай лестницы с произвольным числом перекладин. При этом возникнет важное отличие, связанное с тем, что в общем случае в знаменателе выражения (4.9)

мы получаем множитель $z_1 z_2 \dots z_N$, а не $z_1 z_2$. Это означает, что $\ln t$, входящий в (4.10), заменяется на $(\ln t)^{N-1}$, а коэффициент соответствует теперь фейнмановской диаграмме фиг. VII.8, вычисляемой



Ф и г. VII.8. Пример приведенной диаграммы высшего порядка, соответствующей фиг. VII.8.

в пространстве двух измерений. Очевидно, этот коэффициент, записанный в форме (4.11), имеет вид

$$\int \frac{ds_1 ds_2 [K(s_1)]^{N-1}}{K^{1/2}(s, s_1, s_2, t) (s_2 - m^2)}. \quad (4.12)$$

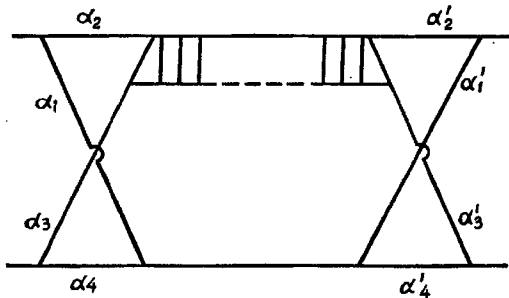
Численные множители таковы, что после суммирования по N мы получаем асимптотическое поведение типа

$$\text{const} \int \frac{ds_1 ds_2 t^{\alpha(s_1)-1}}{K^{1/2}(s, s_1, s_2, t) (s_2 - m^2)}, \quad (4.13)$$

где

$$\alpha(s) = 1 - K(s). \quad (4.14)$$

Этот результат полностью согласуется с вкладом от разреза Амари — Фубини — Стангеллини, рассмотренного в гл. V, § 3 (напомним, что все это происходит, естественно, не на физическом листе).



Ф и г. VII.9. Фейнмановская диаграмма, которая после суммирования лестницы дает реджевский разрез на физическом листе.

Чтобы получить разрезы на физическом листе, следует обратиться к непланарным диаграммам типа показанной на фиг. VII.9. Анализ

этих диаграмм очень похож на проведенный выше анализ, за тем исключением, что α_1 на фиг. VII.6 заменяется теперь выражением $(\alpha_1\alpha_3 - \alpha_2\alpha_4)$, которое *может иметь нуль* на физическом листе, т. е. при положительных α . Свернутая диаграмма оказывается точно такой же, как в предыдущем случае (а именно, совпадает с фиг. VII.8); таким образом, мы получаем вклад (4.13) и на физическом листе.

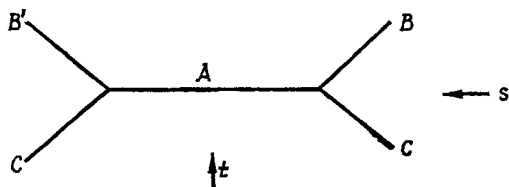
Отметим, что из нашего анализа не следует невозможность компенсации вкладов от разрезов аналогичными вкладами, обусловленными другими наборами диаграмм. Однако такая компенсация крайне маловероятна, и, как мы видели в гл. V, § 6, присутствие некоторых разрезов является обязательным, так как в противном случае существование сингулярностей Грибова — Померанчука вступает в противоречие с границей Фруассара.

§ 5. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ И РЕДЖЕЗАЦИЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ЧАСТИЦ

До сих пор при обсуждении теории возмущений мы считали, что все частицы имеют нулевой спин. Многие из полученных выше результатов допускают обобщение, но доказательно становится гораздо более сложным, так как числители фейнмановских интегралов теперь содержат степени переменной t , благодаря которым при рассеянии частиц со спином в отсутствие свёрхсходящихся соотношений, приводящих к компенсации, траектории стремятся к пределам, расположенным выше -1 .

Наиболее интересной особенностью, возникающей при рассмотрении теории возмущений для частиц со спином, является предположение, что истинная элементарная частица в результате учета некоторых дополнительных фейнмановских диаграмм может оказаться «реджезованной». Чтобы понять это утверждение, следует четко представлять себе, что в данном контексте понимается под «элементарной частицей». До сих пор мы принимали, что в физике сильных взаимодействий все частицы располагаются на траекториях Редже (это является частью постулируемого принципа максимальной аналитичности второй степени); поэтому в принципе их характеристики можно вычислить, зная двойные спектральные функции. Однако возможно, что некоторые из частиц *не* лежат на траекториях Редже, а соответствуют КДД-полюсам, которые содержатся в определенных парциальных амплитудах. Такие частицы не будут входить в двойные спектральные функции. Ясно, что существование частицы такого рода не влияет на аналитически продолженную парциальную амплитуду (так как она однозначно определяется амплитудами $A_J(s)$ с физическими значениями J , превышающими любое произвольное число); поэтому при значении J , соответствующем элементарной частице, продолженная амплитуда не будет совпадать с физической амплитудой. Таким образом, амплитуда в этой точке не аналитична — она содержит дельта-образный вклад.

Как указано в § 1 данной главы, в лагранжевой теории поля «элементарными» являются также частицы, которые входят в лагранжиан посредством соответствующих полевых операторов, а следовательно, которым отвечают линии фейнмановских диаграмм. Таким образом, если, например, частица A является элементарной и если она связана с двумя другими элементарными частицами B и C , то в разложение по теории возмущений будет входить диаграмма, показанная на фиг. VII.10, которая дает вклад только в парциальную волну



Ф и г. VII.10. Фейнмановская диаграмма, которая приводит к δ -образной сингулярности в парциальной амплитуде s -канала.

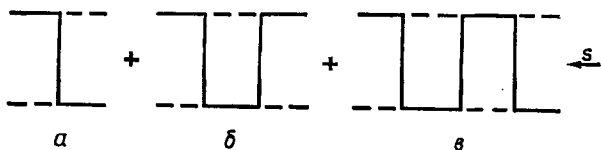
с $J = \sigma_A$, где σ_A — спин частицы. С другой стороны, если A не является элементарной частицей, а состоит из B и C и т. д., то такой фейнмановской диаграммы не существует, и полюс, сопоставляемый частице A , будет возникать из суммы диаграмм $BC \rightarrow BC$ -рассеяния, продолженной в точку, где лежит этот полюс.

Ясно, что в случае элементарной частицы диаграмма фиг. VII.10 дает в парциальную амплитуду неаналитический вклад вида $\delta_{J\sigma_A}$. Следовательно, существование такой частицы приводит, как правило, к нарушению условия максимальной аналитичности второй степени. Поскольку для лагранжевой теории поля характерно существование хотя бы одного *какого-то* элементарного поля, то, казалось бы, такая теория должна противоречить максимальной аналитичности; если бы амплитуды на самом деле обладали реджевским асимптотическим поведением, а все частицы располагались бы на траекториях Редже (см. гл. VIII), то это говорило бы о несогласии теории поля с экспериментом.

Согласно предположению Гелл-Манна и Голдбергера [204], возможно, что сумма некоторых других диаграмм дает дельта-образный член, в точности компенсирующий вышеупомянутый вклад типа $\delta_{J\sigma_A}$; в результате чего он заменяется траекторией Редже. Если это действительно так, то различить «элементарную» и «неэлементарную» частицы, используя асимптотическое поведение амплитуд, окажется невозможным.

Чтобы показать, как конкретно это может происходить, рассмотрим случай рассеяния векторной частицы на спинорной [204, 206]. Тогда диаграмма фиг. VII.10 при больших t будет вести себя как t^0 . Учтем теперь диаграммы, аналогичные диаграммам, приведенным в § 3, кото-

рые показаны на фиг. VII.11. Диаграмма фиг. VII.11, *a* при больших t ведет себя как t^{-1} , а диаграмма фиг. VII.11, *б* — как $t^0 \ln t$. Следовательно, мы видим, что разложение, которое после суммирования могло бы приводить к реджевскому поведению, не может начинаться с диаграмм фиг. VII.11, *a* и *б*. Однако диаграммы фиг. VII.10 и фиг. VII.11, *в* обладают подходящим поведением, позволяющим им быть первыми членами такого разложения. Если диаграммы более высоких порядков также обладают подходящим поведением, чтобы быть членами необходимого разложения, то кажущееся нереджевское



Ф и г. VII.11. Лестничная диаграмма для рассеяния векторной частицы на спинорной.

поведение фиг. VII.10 в точности компенсируется и заменяется поведением реджевского типа. Анализ членов высшего порядка весьма сложен, но исследование членов низшего порядка показало, что они обладают требуемым поведением. Однако этот метод является чрезвычайно громоздким, поэтому дальнейшие подробности мы здесь не приводим — читатель может найти их в цитированных работах. Мы обратимся теперь к более изящному методу, предложенному Мандельштамом [296].

§ 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

Как было показано в предыдущем параграфе, элементарная частица со спином σ дает в любую амплитуду, в которую она может входить, дельта-образный вклад $\delta_{J\sigma}$. Такие сингулярности могут возникать также следующим образом. Рассмотрим парциальную амплитуду при значении J , для которого некоторые из спиральных состояний могут оказаться «бессмысленными» (см. гл. IV). Очевидно, при вычислении физических амплитуд с таким значением J этими «бессмысленными» спиральными состояниями следует пренебречь. Однако для всех других значений J такие спиральные состояния нужно учитывать, и если их вклад не будет автоматически обращаться в нуль при рассматриваемом физическом J , то продолженная в эту точку амплитуда не будет совпадать с физической амплитудой. Следовательно, необходимо установить, воздействует ли полубессмысленная связь на амплитуду, соответствующую переходам между физическими состояниями.

Чтобы проанализировать этот вопрос, вспомним, что функция $e_{\lambda\lambda'}$, входящая в проекцию Грибова — Фруассара, при значениях J , близ-

ких к полубесмысленному значению J_0 , ведет себя как $(J - J_0)^{-1/2}$. Но таким поведением не может обладать амплитуда, на которую наложено условие унитарности, и оно заменяется поведением типа $(J - J_0)^{1/2}$ (см. гл. V, § 5). Отметим, что мы рассматриваем здесь только амплитуды с *правильной сигнатурой* (появление дельта-образного вклада в амплитуде с *неправильной сигнатурой* нас не интересует), поэтому полубесмысленная связь обращается в нуль так, как это описано в гл. IV и V. Предположим, однако, что продолженная парциальная амплитуда вычисляется с помощью разложения по теории возмущений, в которое входит эффективный «потенциал» (этот термин введен в гл. VI). Потенциал представляет собой проекцию на парциальную волну интеграла от скачка амплитуды $A(s, t)$ на левом разрезе, поэтому его вид не ограничивается условием унитарности. Таким образом, можно ожидать (из проекции Гривова — Фруассара), что *потенциал* будет вести себя как

$$\langle s | V_J | n \rangle \sim \frac{b}{(J - J_0)^{1/2}}, \quad (6.1a)$$

$$\langle n | V_J | n \rangle \sim \frac{c}{J - J_0}, \quad (6.1b)$$

$$\langle s | V_J | s \rangle \sim \text{const} \quad (6.1в)$$

для полубесмысленной, бессмысленной и физической амплитуд соответственно. В качестве примера потенциал можно аппроксимировать простейшей диаграммой с одночастичным обменом. В случае рассеяния векторной частицы (спин 1) на спинорной частице (спин $1/2$) такой диаграммой является диаграмма, показанная на фиг. VII.11, а. При больших t она ведет себя как $t^{1/2}$, что соответствует неподвижной сингулярности в (6.1) при $J = 1/2$ (при наибольшем в этом случае полубесмысленном значении).

Здесь следует подчеркнуть, что внешние частицы со спинами $1/2$ и 1 мы рассматриваем как *элементарные частицы*; в противном случае, как мы видели в гл. V, § 3, поведение $t^{1/2}$, а следовательно, и бесконечность в (6.1) при значении $J = 1/2$, компенсировались бы другими вкладами в потенциал. В случае элементарных частиц, однако, представляется невероятным, чтобы происходила какая-то компенсация такого рода, и в дальнейшем мы будем считать, что она не имеет места.

Запишем теперь формальное разложение в ряд теории возмущений (по V_J) для амплитуды, соответствующей переходу из физического в физическое состояние. Его можно представить в следующем виде [79]:

$$\langle s | A^J | s \rangle = \langle s | A^{Jnn} | s \rangle [1 + \sum_n \langle s | V_J | n \rangle \langle n | A^J | s \rangle], \quad (6.2)$$

где индекс nn обозначает «бесмысленное» состояние, т. е. в первом члене бессмысленные состояния не включаются в число промежуточных состояний, в соответствии с чем суммирование во втором члене в (6.2) проводится только по бессмысленным состояниям. В каждом

члене суммы в (6.2) множитель с V ведет себя как $(J - J_0)^{-1/2}$, а множитель с A — как $(J - J_0)^{1/2}$, и поэтому произведение является конечным, но оно *не равно нулю*. Таким образом, в случае элементарных частиц бессмысленные состояния оказывают влияние на продолженную амплитуду, соответствующую переходам из физического в физическое состояние; эта амплитуда не равна физической амплитуде, которая совпадает с $\langle s | A^{J^{nn}} | s \rangle$.

Теперь нужно выяснить, при каких условиях разность между физической амплитудой в точке $J = J_0$ и продолженными амплитудами может в точности соответствовать δ -функции элементарной частицы, т. е. когда имеет место равенство

$$\langle s | A^{J^{nn}} | s \rangle + „\delta_{JJ_0}“ = \langle s | A^J | s \rangle. \quad (6.3)$$

Такое поведение представляется невероятным; и действительно, оно, как правило, не возникает, но в некоторых случаях оказывается все же возможным.

Чтобы убедиться в этом, остановимся сначала на происхождении различия между $A^{J^{nn}}$ и A^J в обычных вычислениях N/D -типа. Ясно, что левые разрезы этих амплитуд тождественны, т. е. они имеют одинаковые «потенциалы». Для амплитуды A^J условие унитарности включает все спиральные состояния, но, как мы видели, при $J = J_0$ связь с бессмысленными состояниями в точности равна нулю. Таким образом, единственное различие между двумя амплитудами возникает из-за того, что при заданном левом разрезе и заданном условии унитарности решение неоднозначно — оно обладает КДД-неопределенностью, т. е. в функции D (или N) могут появиться дополнительные полюсы. Фактически происходит следующее. Если рассматриваются только физические состояния, то амплитуда A^J при произвольном значении J , являющаяся решением N/D -уравнений *без КДД-полюсов*, будучи продолженной в точку $J = J_0$, оказывается решением с КДД-полюсами. Здесь мы имеем пример проявления свойства, которое упоминалось в гл. VI, § 3: существование или отсутствие КДД-полюса в данной амплитуде определяется связью с другими каналами. КДД-полюса появляются потому, что в задаче со связанными каналами в бессмысленных каналах имеются полюса Редже, которые при слабом потенциале лежат в окрестности точки $J = J_0$, а при возрастании связи удаляются от $J = J_0$. Если бессмысленные каналы явно не учитываются, то такие полюса Редже отсутствуют, и их следует вводить в физические каналы в виде КДД-полюсов. Число необходимых КДД-полюсов равно числу бессмысленных каналов, имеющих при рассматриваемом значении J .

Заметим далее, что на физических порогах парциальные амплитуды должны удовлетворять различным пороговым условиям. Эти условия накладывают ограничения на параметры элементарных частиц или КДД-полюсов, которые можно ввести. Мандельстам [296] указал, что в определенных случаях эти параметры определяются однозначно,

т. е. при заданном левом разрезе существует единственная амплитуда, содержащая не более одного КДД-полюса (или элементарной частицы), которая удовлетворяет пороговым условиям. Тогда соотношение (6.3) выполняется и обе его части совпадают с этим единственным решением.

Подобная ситуация возникает, например, в задаче рассеяния частиц со спинами $1/2$ и 1 (см. выше), когда рассматривается рассеяние в s -канале, как это показано на фиг. VII.11. В этом случае нас интересует состояние с положительной четностью и с $J = 1/2$; таких состояний имеется три — два физических и одно бессмысленное. В (l, S) -представлении, где l — орбитальный момент, а S — полный спин, имеем:

физические состояния

$$l = 1, \quad S = \frac{3}{2};$$

$$l = 1, \quad S = \frac{1}{2};$$

бессмысленное состояние

$$l = -1, \quad S = \frac{3}{2}.$$

Чтобы исключить кинематическую сингулярность при $s = 0$, перейдем к переменной $\omega = \sqrt{s}$. Обобщенный принцип симметрии Мак-Дауэлла (гл. IV, § 7) устанавливает связь между значениями амплитуд при отрицательных ω и значениями амплитуд с противоположной четностью при положительных ω . Последних имеется также три:

физические состояния

$$l = 2, \quad S = \frac{3}{2};$$

$$l = 0, \quad S = \frac{1}{2};$$

бессмысленное состояние

$$l = 0, \quad S = \frac{3}{2}.$$

Пороговые условия должны удовлетворяться при $\omega = \pm 2m$ (здесь мы считаем, что обе частицы имеют массу m). Так как два физических состояния с положительной четностью имеют $l = 1$, то при $\omega = 2m$ амплитуды трех соответствующих переходов будут иметь простой нуль, т. е. будут обладать поведением $\omega - 2m$. Это дает три пороговых условия. В случае физических состояний с отрицательной четностью получаем: для амплитуды перехода между состояниями с $l = 2$ поведение $(\omega + 2m)^2$ вблизи $\omega = -2m$; для перекрестного члена поведение $\omega + 2m$; для амплитуды перехода между состояниями с $l = 0$ никаких условий не возникает. Таким образом, здесь также имеется три условия.

Если амплитуды нормированы так, что кинематические сингулярности при $\omega = 0$ отсутствуют, то на бесконечности они будут иметь постоянное асимптотическое поведение. Таким образом, в трех амплитудах, соответствующих переходам между физическими состояниями, будет содержаться три неизвестных вычитательных константы. Ясно, что при заданном левом разрезе удовлетворить шести пороговым условиям, имея только эти три параметра, в общем случае невозможно. Однако если добавить КДД-полюс, то мы получим три дополнительных параметра (положение полюса и факторизованный вычет), которые соответствуют массе и константам связи элементарной частицы. Тогда мы будем иметь шесть параметров на шесть условий и получим *единственное* решение. Отметим, что это утверждение *не зависит* от свойства левого разреза; значения шести параметров определяются, конечно, левым разрезом, но если он задан, то параметры находятся однозначно. Отсюда следует, что в рассматриваемом случае соотношение (6.3) выполняется; дельта-образные вклады сокращаются, и решение обладает реджевским поведением. Это подтверждает результаты, сформулированные на основе анализа низших порядков теории возмущений.

К счастью, такое поведение (которое сильно затрудняло бы решение вопроса о том, каким образом можно экспериментально установить, существуют ли элементарные частицы или нет) в общем случае не обнаружено. Оно несправедливо для рассеяния частицы спина 0 на частице спина 1, а также в кросс-канале рассмотренного выше процесса (т. е. в канале спин 1 + спин 1 \rightarrow спин $1/2$ + спин $1/2$). Конечно, неоднозначность амплитуд сама по себе еще не доказывает непригодность соотношения (6.3), но его нарушение в этих случаях можно доказать, просто посмотрев на ряд теории возмущений. Правда, утверждая это, мы считаем, что если соотношение (6.3) несправедливо в некотором порядке теории возмущений, то оно несправедливо и вообще; при этом отбрасывается возможность рассматривать (6.3) в качестве условия «самосогласованности» для констант связи. В работе [5] приведен анализ, аналогичный описанному выше, для случая частиц с произвольными спином и массой, и рассмотрены условия, при которых решение единственно, т. е. имеет место реджезация.

Итак, мы обнаружили, что если элементарные частицы действительно существуют, то для какой-то определенной амплитуды они могут не давать ожидаемого степенного поведения с постоянным показателем, но в других амплитудах они обязательно будут проявляться именно таким способом. Приводит или не приводит данная «элементарная» частица к подобному поведению определенной амплитуды, можно найти методом Мандельстама, обобщенным в работе [5]. Мы стоим на той позиции, что следует принять принцип «максимальной аналитичности», и поэтому считаем, что элементарных частиц не существует. До сих пор нет ни одного аргумента в пользу противоположной точки зрения, тогда как наша позиция, как будет видно в гл. VIII, подтверждается большим количеством экспериментальных данных.

ОБЗОР ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ СИТУАЦИИ

§ 1. ТРАЕКТОРИИ РЕДЖЕ

1. Введение

В этой главе дается обзор экспериментальной ситуации с точки зрения представлений о полюсах Редже и т. д., которые рассматривались в предыдущих главах книги. Нас будет интересовать главным образом, насколько хорошо можно описать существующие экспериментальные данные на основе предположения, что высокоэнергетическое поведение амплитуд рассеяния определяется полюсами Редже. Однако сначала мы должны рассмотреть имеющиеся в настоящее время сведения о свойствах траекторий Редже в области, где они проходят через физические значения J , проявляясь в виде связанных состояний или резонансных состояний. В дальнейшем мы будем использовать как термин «частица», так и термин «состояние» в применении к связанным состояниям или к резонансам.

Как мы видели в гл. II, § 10, траектория соответствует физической частице, когда она проходит через чередующиеся целые или в случае фермионов полуцелые значения J при положительных s . Таким образом, траектория Редже объединяет частицы, спины которых различаются на две единицы, но которые обладают одинаковыми остальными квантовыми числами. Энергетическое расстояние между двумя такими частицами зависит от наклона траектории; если воспользоваться аргументами, основанными на анализе потенциального рассеяния, согласно которым величина $d\alpha(s)/ds$ связана с «радиусом» состояния, и следовательно, с радиусом сильных взаимодействий (см. гл. III, § 1), то можно ожидать, что наклон по порядку величины равен 1 Гэв^{-2} , что соответствует радиусу около 10^{-13} см . По-видимому, это согласуется с экспериментальными данными, как в области $s > 0$, так и в области $s < 0$ (см. ниже).

Поскольку большинство полностью отождествленных резонансов (т. е. резонансов, для которых однозначно определены все квантовые числа) имеют массы самое большее в несколько Гэв , неудивительно, что многим траекториям сопоставлено лишь одно физическое значение J . Было обнаружено также несколько траекторий, которые проходят через два или даже большее число физических значений, причем предполагается, что некоторые из них поднимаются до весьма больших значений J . Конечно, нет никаких оснований считать, что данная траектория не может повернуть прежде, чем она пересечет более чем одно физическое значение, и действительно, как мы видели в гл. VI,

в некоторых распространенных моделях зашнуровки, например в теории потенциального рассеяния, траектории изменяют свое направление очень быстро. Однако в действительности труднее всего объяснить тот факт, что в широком интервале энергий траектории прямолинейны.

2. Мезонные траектории

Рассмотрим сначала хорошо установленные мезонные траектории. При этом удобно воспользоваться схемой классификации, основанной на группе симметрии $SU(3)$, согласно которой все надежно установленные мезоны можно объединить в «нонеты», каждый из которых

Таблица 1

МЕЗОННЫЕ НОНЕТЫ 1)

J^P	Частицы	G	C	I	Квадрат массы, Гэв ²	α (0)	α' (0)
0 ⁻	π	-	+	1	0,018		
	$K(\bar{K})$			1/2	0,248		
	η	+	+	0	0,301		
	η'	+	+	0	0,918		
1 ⁻	ρ	+	-	1	0,593	0,58 ²⁾	1,00 ²⁾
	$K^*(\bar{K}^*)$			1/2	0,796		
	ω	-	-	0	0,614	0,45 ³⁾	0,31 ³⁾
	ϕ	-	-	0	1,039		
2 ⁺	A_2	-	+	1	1,70	0,34 ⁴⁾	0,35 ⁴⁾
	$K_v(\bar{K}_v)$			1/2	1,99		
	f	+	+	0	1,57	1,0 (P)	0,12 ³⁾
	f'	+	+	0	2,29	0,73 ³⁾ (P')	1,50 ³⁾
0 ⁺	π_v	-	+	1	1,01		
	η_v	+	+	0	1,10		
1 ⁺	A_1	-	+	1	1,16		
	$K_A(\bar{K}_A)$			1/2	1,74		
	D	+	+	0	1,65		
	E	+	+	0	2,03		

1) Данные взяты из таблиц Розенфельда и др. [349]. Значения масс указаны для нейтральных членов изоспинных мультиплетов, а значения C — также для нейтральных членов мультиплетов с $I = 1$.

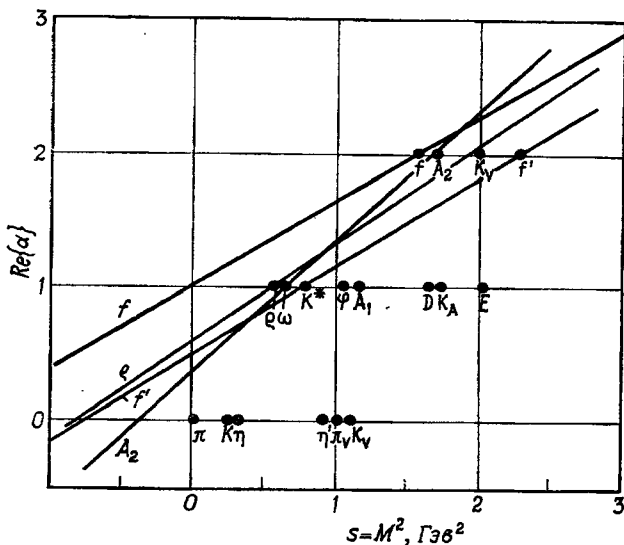
2) См. [237].

3) См. [345], решение 1.

4) См. [333], случай 2.

состоит из $SU(3)$ -октуплета и $SU(3)$ -синглета. Три наиболее достоверных нонета, которые соответствуют физическим частицам при значениях J^P , равных $0^-, 1^-, 2^+$, приведены в табл. 1; там же указаны два менее достоверных нонета 0^+ и 1^+ .

Было показано, что эти мезоны, по крайней мере $0^-, 1^-$ и 2^+ , достаточно хорошо размещаются по $SU(3)$ -октуплетам, но ситуация осложняется наличием смешивания между изосинглетным членом октуплета и синглетным $SU(3)$ -состоянием. Особенно важную роль



Ф и г. VIII.1. Диаграмма Чью — Фраучи для мезонов.

Значения масс частиц взяты из таблиц Розенфельда и др. [349], причем траектории проведены для тех случаев, в которых известна величина $\alpha(0)$ (см. табл. 1).

играет это смешивание для частиц ϕ и ω , а также для частиц f и f' . Экспериментальные основы $SU(3)$ обсуждаются в работах [276, 210], к которым мы и отсылаем читателя. Если частицы лежат на траекториях Редже, то можно построить так называемую «диаграмму Чью — Фраучи» [110], отражающую зависимость $\text{Re}\{\alpha(s)\}$ от s . Такая диаграмма приведена на фиг. VIII.1; соответствующие кривые построены с учетом значений $\alpha(0)$, указанных в табл. 1, которые будут обоснованы в последующих параграфах.

Если считать, что ниже порога наклон траекторий положителен, как это должно быть, когда траектории не пересекаются (см. гл. III, § 1), то при $s < 0$ для нонета 0^- будем иметь $\alpha(s) < 0$. Это означает, что для большинства процессов вклады таких траекторий в амплитуду

высокоэнергетического рассеяния в кросс-канале будут малыми по сравнению с вкладами от других, более высоко лежащих мезонных траекторий; поэтому при феноменологическом анализе они обычно играют незначительную роль. Но это не противоречит тому, что с точки зрения порождаемых сил такие траектории могут оказаться очень существенными (см. гл. VI, § 4). Кроме того, иногда имеются ограничения, благодаря которым, скажем, пион (имеющий $\alpha(0)$ лишь немного меньше нуля) не будет давать вклада в амплитуду данного процесса в направлении вперед. Эти ограничения имеют большое значение, и мы их подробно рассмотрим в § 6 и 7.

Траектории нонета 1^- , в особенности ρ -мезонная траектория, изучены очень хорошо, и при феноменологическом анализе во многих случаях, в частности для неупругих процессов, они весьма существенны. Но самые высокие траектории принадлежат нонету 2^+ , и во все те процессы, в которых они могут принимать участие, эти траектории дают обычно наиболее весомый вклад. В частности, траектории f и f' имеют квантовые числа вакуума, поэтому они оказывают влияние на высокоэнергетическое поведение всех упругих процессов. В § 3 будет показано, что если амплитуды рассеяния при высоких энергиях действительно определяются полюсами Редже кросс-канала, то траектории, которые являются ведущими при $s = 0$, должны обладать квантовыми числами вакуума, и именно по этой причине Чью и Фраучи [109] высказали предположение о существовании траектории такого типа. Обычно она называется траекторией Померанчука, или «померанчоном» (и иногда обозначается символом P), так как Померанчук [341] доказал несколько теорем о высокоэнергетическом поведении, для истолкования которых оказывается достаточным предположения о реджевских полюсных членах.

Как видно из фиг. VIII.1, очень правдоподобно, что траектория f является ведущей [т. е. имеет наибольшую величину $\alpha(0)$], поэтому естественно отождествить f с померанчоном. Этот вопрос рассматривается в § 3. Траектории 2^+ принимают значение $J = 0$, по-видимому, при отрицательных s , где они не могут соответствовать частицам, так что в этих точках вычеты должны равняться нулю.

Ближайшие «партнеры» трех достоверных нонетов будут возникать при значениях J^P , равных $2^-, 3^-$ и 4^+ соответственно, но полностью отождествленных частиц, которые могли бы играть роль этих членов реджевских семейств, не установлено. Однако в работе [172] построено распределение «недостающих масс» в реакции



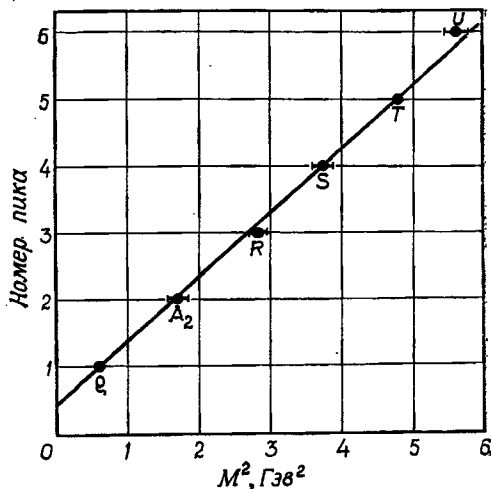
путем измерения энергии отдачи протона. Это распределение обнаруживает сложную структуру, и помимо ρ и A_2 , являющихся единственными из перечисленных выше частиц, которые могли бы породиться в этой реакции, обнаружено большое количество других пиков.

Полученные пики нумеровались в порядке возрастания массы, а затем строился график зависимости этих номеров от квадрата массы. Оказалось, что точки ложатся на прямую линию (фиг. VIII.2), поэтому весьма заманчиво рассматривать всю фигуру как диаграмму Чью — Фраучи, а прямую — как пару наложенных друг на друга траекторий Редже с противоположными сигнатурами, приписывая частицам спины, указанные на фигуре. Следует подчеркнуть, однако, что помимо случаев ρ и A_2 , никаких прямых данных в пользу принятого (или же какого-либо другого) сопоставления частицам спинов не существует, хотя гипотеза о больших значениях спинов позволяет объяснить малость ширины вышних состояний, наблюдавшихся в работе [172]. Пик R, несомненно, является не просто отдельным пиком, а вероятно, содержит три резонанса. Другие данные, подтверждающие существование нестранных частиц в области энергий, исследованной в работе [172], рассматриваются в работе [210].

Если прямая на фиг. VIII.2 действительно соответствует диаграмме Чью — Фраучи, то, как мы указывали в гл. VI, в рамках динамических теорий возникают определенные трудности. Основную особенность этого графика — отсутствие кривизны — трудно понять с точки зрения гипотезы зашнуровки, где «масштаб» энергий обычно принимается равным примерно 1 Гэв . Заметим, что экстраполяция прямой дает $\alpha(0) = 0,45$, и чтобы она проходила через значение $\alpha_\rho(0)$, указанное в табл. 1, необходимо приписать ей небольшую кривизну. Эта кривизна имеет требуемый знак, так как из гл. III, § 1 мы знаем, что

$$\frac{d^2\alpha(s)}{ds^2} > 0 \quad \text{при} \quad s < s_0,$$

если две траектории (с одинаковыми квантовыми числами) не пересекаются, а никаких признаков такого пересечения не обнаружено. Ниже будут приведены еще некоторые аргументы в пользу приближенной прямолинейности траекторий, проходящих через несколько физических значений J , а в § 9 будут указаны возможные причины такого поведения.



Ф и г. VIII.2. График зависимости номера пика от квадрата массы [172].

Прямую можно интерпретировать как траекторию $\alpha(s) = 0,45 + 1,05s$.

Другая замечательная особенность графика фиг. VIII.2 заключается в отсутствии какого-либо влияния сигнатуры — траектории с противоположными сигнатурами почти полностью совпадают. Напомним (см. гл. II, § 2 и 10), что силы, порождающие траектории с положительной сигнатурой, определяются суммой сингулярностей t - и u -каналов, а траектории с отрицательной сигнатурой — их разностью. Это означает, что в рассматриваемом случае значительных «обменных сил» не существует, т. е. в дисперсионное соотношение с фиксированным s существенный вклад дает только один скачок $D_t(s, t)$. Интересно, что модель кварков (см. § 9) может весьма просто объяснить обе эти особенности фиг. VIII.2.

Пять предполагаемых нонетов и более высокие нестранные члены соответствуют им реджевских семейств, обнаруженные в работе [172], исчерпывают почти все достаточно достоверные мезоны, которые помещены в таблицы Розенфельда и др. [349]. Остаются только частицы δ (965), B (1210), π (1640) и K_A (1800), но все они не вполне достоверны (свойства этих частиц рассматриваются в обзоре [210]). Особый интерес представляет δ -мезон, хотя ни одно из его квантовых чисел, кроме $J = 1$, в настоящее время не известно.

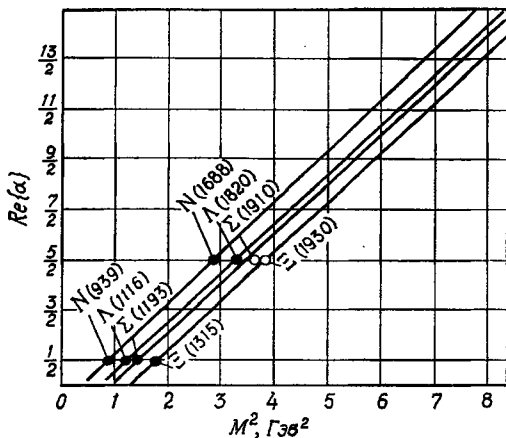
Как указывалось в гл. III, § 8, реальных доказательств, подтверждающих существование мезонных «дочерних» траекторий, не имеется. Первая дочерняя траектория должна иметь противоположную по отношению к родительской траектории сигнатуру, но те же квантовые числа, причем ее угловой момент при $s = 0$ на единицу меньше углового момента родительской траектории. Мезон δ , проявляющийся при энергии около 965 Мэв в виде небольшого горбика в спектре эффективных масс [172], в настоящее время является единственным претендентом на роль дочернего бозона. Приблизительно такое положение занимает первая дочерняя траектория ρ -мезона, которая должна иметь $J^P = 0^+$ и положительную G -четность [188]. Было бы очень интересно выяснить, проявляются ли дочерние траектории в виде частиц (а их, конечно, пытаются найти), но, как указывалось в гл. III, § 8, получение данных, подтверждающих их существование, по-видимому, связано с большими трудностями.

Конечно, отсутствие таких частиц еще не означает, что представление о дочерних траекториях является неверным, так как считать, что дочерние траектории должны быть похожими на родительские, вовсе не обязательно (см. гл. III, § 8). Они могут оказаться, например, очень пологими, и поэтому никогда не достигнут физических значений J , или, наоборот, они могут иметь практически тот же наклон, что и родительские траектории, но их вычеты при физических значениях J обращаются в нуль. И в том и в другом случае можно надеяться обнаружить дочерние траектории только в качестве полюсов кросс-канала, определяющих высокоэнергетическое поведение. Однако по причинам, упоминавшимся в гл. III, и таким способом обнаружить их далеко не просто.

3. Барионные траектории

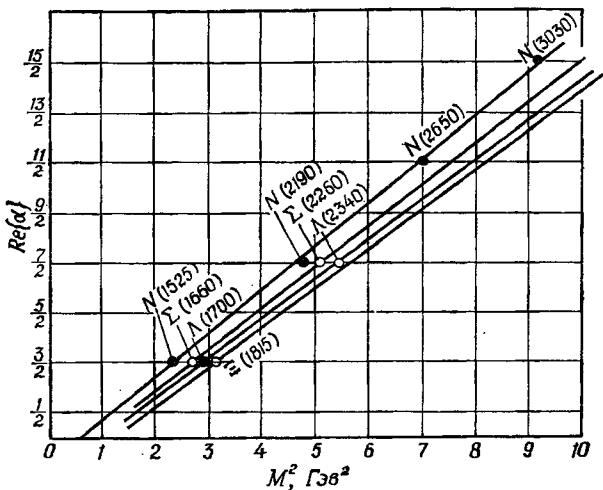
Обратимся теперь к барионным траекториям, причем сначала мы рассмотрим те из них, которые имеют нулевую странность. Такие траектории возникают в виде резонансов в $\pi - N$ -рассеянии и поэтому изучены весьма подробно. Имеются две достоверные траектории с $I = 1/2$, на одной из которых лежит частица с низшим спином $1/2^+$, а на другой — частица с низшим спином $3/2^-$. Существует еще одна траектория с $I = 3/2$, для которой ниже физическое значение спина равно $3/2^+$. На фиг. VIII.3—VIII.5 показаны эти траектории вместе со своими партнерами по группе $SU(3)$. Низшие состояния отождествлены однозначно, т. е. для них известны все необходимые квантовые числа, а высшие состояния наблюдались в виде пиков с правильными значениями изоспина, но их спины и четности не определены. Как и мезоны, барионы размещаются на диаграммах в точках, соответствующих их массам, в том случае, если принять, что траектории прямолинейны. При этом снова частицы удивительным образом располагаются как раз там, где прямолинейные траектории Редже принимают физические значения спина; поэтому кажется вполне вероятным, что сопоставляемые частицы, указанные на фиг. VIII.3—VIII.5, являются правильными. В § 8, где обсуждается работа [47], приводятся аргументы, подтверждающие в некоторых случаях такое сопоставление.

Хорошо известно, что нуклон является членом $SU(3)$ -октуплета, а $\Delta(3-3$ резонанс) — членом декуплета. Более проблематичным является сопоставление октуплету другой траектории с $I = 1/2$. Для траекторий странных частиц были обнаружены некоторые высшие члены семейств, но общая ситуация здесь далеко не ясна. $SU(3)$ -синглеты показаны на фиг. VIII.6. Дальнейшие подробности, касающиеся различных состояний, можно найти в обзорах [167, 309], а также в статье [349]. Если сопоставить частицам спины, указанные на



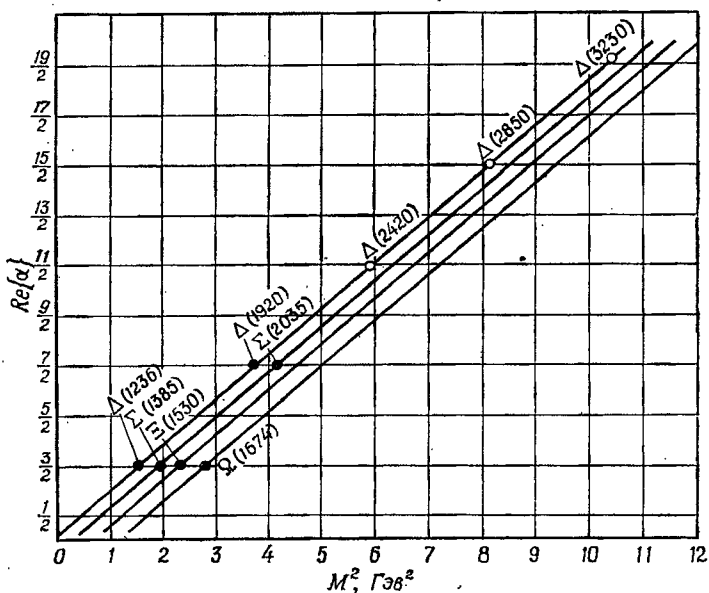
Ф и г. VIII.3. Траектории барионного октуплета α (положительные четность и сигнатура).

Черными кружками обозначены твердо установленные частицы, белыми кружками — состояния, для которых известен только изоспин I . Нулевая траектория приближенно описывается формулой $\alpha(s) = -0,39 + 1,01s$.



Ф и г. VIII.4. Траектории барионного октуплета γ (отрицательные четность и сигнатура).

Траектория N_γ приближенно описывается формулой $\alpha(s) = -0,46 + 0,88s$.



Ф и г. VIII.5. Траектории барионного декуплета δ (положительная четность, отрицательная сигнатура).

Траектория Δ приближенно описывается формулой $\alpha(s) = 0,15 + 0,90s$.

фиг. VIII.3—VIII.6, то окажутся охваченными почти все известные барионные резонансы. Единственными важными исключениями являются P_{11} - и некоторые S -волновые состояния $\pi - N$ -системы.

Наклоны всех этих траекторий примерно такие же, как и для мезонов, т. е. равны приблизительно 1 Гэв^{-2} , причем в весьма широком интервале энергий кривизна траекторий не обнаружена. Это тем более удивительно, что естественной переменной для фермионных траекторий является \sqrt{s} (см. гл. IV, § 7), тогда как на всех графиках изображена зависимость $\alpha(s)$ от s . Принцип симметрии Мак-Дауэлла [287] требует, чтобы существовали две траектории $\alpha_1(\sqrt{s})$ и $\alpha_2(\sqrt{s})$, которые встречаются в точке $\sqrt{s} = 0$. На траектории α_1 лежат физические частицы со спином J и с четностью $(-1)^{J-1/2}$, а на траектории α_2 — частицы со спином J и с четностью $(-1)^{J+1/2}$, причем эти траектории удовлетворяют соотношению

$$\alpha_1(\sqrt{s}) = \alpha_2(-\sqrt{s})$$

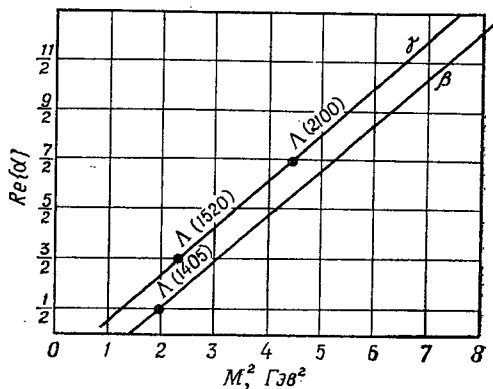
при $s > 0$.

Эта проблема рассматривалась в работе [356] и в более поздней работе [142], где было предложено записывать траекторию в виде

$$\alpha(\sqrt{s}) = A + B\sqrt{s} + Cs, \quad (1.1)$$

что связывает состояния $1/2^+$ с состояниями $1/2^-$ и т. д., как показано на фиг. VIII.7 (см. также [120] и § 6 данной главы). Однако большинство требуемых состояний не известно, причем нет ни одного состояния, которое соответствовало бы декуплетам. Возможно, конечно, что для всех физических значений при $\sqrt{s} < 0$ вычет обращается в нуль, и поэтому никаких частиц не возникает. Но если константа B в (1.1) не очень мала, то мы не получим прямолинейных траекторий, а если она мала, то минимум у $\alpha(\sqrt{s})$ будет очень резким. Эта проблема еще не решена.

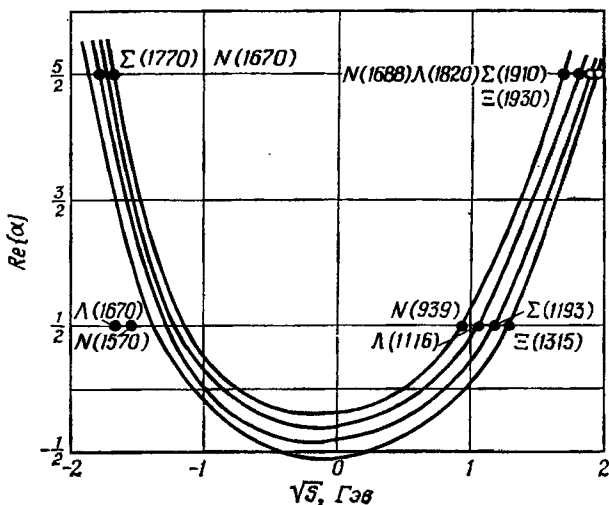
Основной вывод этого параграфа заключается в том, что по существу все известные частицы удаётся классифицировать, объединив $SU(3)$ с прямолинейными траекториями Редже. Ввиду огромного количества учитываемых таким образом состояний, подобная классификация представляется удивительно простой. Однако аргументы



Ф и г. VIII.6. Траектории барионных синглетов γ (отрицательные четность и сигнатура) и β (отрицательная четность, положительная сигнатура).

Траектория γ приближенно описывается формулой $\alpha(s) = -0,70 + 0,95s$.

все же не настолько убедительны, чтобы принимать ее безоговорочно, и, возможно, через несколько лет общая картина будет выглядеть совершенно иначе.



Ф и г. VIII.7. Одна из возможных форм траекторий барионного окуплета α , связывающих его с состояниями $1/2^-$ и $5/2^-$.

Известные состояния $1/2^-$ имеют слишком большие массы, чтобы их можно было поместить на какую-то простую кривую, связывающую две области переменных \sqrt{s} .

§ 2. ПОЛЮСА РЕДЖЕ И ВЫСОКИЕ ЭНЕРГИИ

В гл. II, § 9 было обнаружено, что существует непосредственная связь между сингулярностями амплитуды в J_s -плоскости и ее асимптотическим поведением по t , примером чему является соотношение (II.9.8). Это дает еще один способ отыскания сингулярностей в J_s -плоскости: исследовав поведение амплитуды при больших t в физической области t -канала, можно определить $\alpha(s)$ при $s \ll 0$. (В дальнейшем в этой главе мы будем считать, как это обычно принято в физике высоких энергий, что s — квадрат энергии, а $-t$ — квадрат передаваемого импульса.) Воспользовавшись кроссинг-симметрией, можно иначе сказать, что поведение амплитуды при больших s дает сведения о сингулярностях в J_t -плоскости при $t \ll 0$. Если рассмотреть еще рассеяние назад, т. е. при $u \ll 0$, то мы можем, конечно, определить и сингулярности по J_u .

В предыдущем параграфе мы видели, что имеется несколько траекторий Редже, которые лежат довольно высоко. С другой стороны, в гл. V было показано, что разрезы соответствуют обмену по крайней мере двумя полюсами (хотя это, конечно, не означает, что они лежат

в J_t -плоскости ниже указанных выше траекторий). Поэтому естественно сначала попытаться описать экспериментальные данные при высоких энергиях только с помощью полюсов. Если разрезы также играют существенную роль, то мы это, очевидно, обнаружим, так как тогда нам не удастся получить таким способом адекватное описание рассматриваемых явлений.

Прежде всего необходимо решить, обмен какими частицами может происходить в кросс-канале данного процесса при заданных ограничениях на квантовые числа. В результате будут определены допустимые траектории. После этого амплитуда представляется в виде суммы вкладов от этих траекторий, т. е. для бесспиновых частиц в виде

$$A(s, t) = \sum_i \Gamma_i(t) P_{\alpha_i(t)}(z_t), \quad (2.1)$$

где

$$\Gamma_i(t) = 16\pi^2 [2\alpha_i(t) + 1] \beta_i(t) \frac{1 \pm e^{-i\pi\alpha_i(t)}}{\sin \pi\alpha_i(t)}, \quad (2.2)$$

и делается предположение, что такое представление даст хорошее описание экспериментальных данных. В последующих параграфах мы рассмотрим возможные способы проверки этого предположения, имея в виду, естественно, что траектории и вычеты являются свободными параметрами, которые можно изменять для достижения необходимого согласия теории с экспериментом. Но как только мы определим траекторию Редже путем подгонки одной амплитуды, то эту же траекторию нужно будет использовать и при подгонке всех других амплитуд, так как она является общей для всех процессов. Аналогично на вид вычетов накладываются условия, вытекающие из теоремы о факторизации и кинематических ограничений, которые обсуждались в гл. IV, § 6.

Сначала мы сделаем наиболее простое предположение, а именно примем, что для всех полюсов Редже функции $\alpha(t)$ и $\gamma(t)$ ниже порога вещественны. Такое предположение согласуется с большим количеством экспериментальных данных, но при этом возникают некоторые противоречия, которые в дальнейшем могут нас вынудить отказаться от него или от какого-то другого из сделанных допущений.

Прежде чем перейти к сравнению теории для высоких энергий с экспериментом, важно постараться выяснить, что понимается под высокой энергией. Этот вопрос имеет два аспекта, один из которых тривиальный, а другой нетривиальный.

Тривиальный аспект состоит в том, что функция $P_\alpha(z_t)$, входящая в (2.1), обычно заменяется своим главным членом при больших z_t . Для этого, очевидно, необходимо, чтобы z_t было велико. Согласно формуле (B1, 3.2.23), можно записать следующее разложение:

$$P_\alpha(z_t) = z_t^\alpha [a + bz_t^2 + \dots], \quad (2.3)$$

и так как константы a и b одного порядка, указанную замену можно провести, если

$$z_t \gg 1. \quad (2.4)$$

В случае частиц с равными массами это приводит к требованию

$$s \gg |q_t^2|,$$

поэтому для направления вперед, где $t=0$ и $q_t^2 = -m^2$ (m — масса участвующих в данном процессе частиц), должно выполняться условие

$$s \gg m^2. \quad (2.5)$$

Аналогично в случае, когда массы частиц не равны, мы получаем условие

$$s \gg m_i^2, \quad (2.6)$$

где m_i — масса наиболее тяжелой частицы. Здесь имеется, конечно, одно осложнение, достаточно подробно рассмотренное в гл. III и связанное с тем, что вблизи точки $t=0$ вследствие расходимости q_t реджевский полюсный член сам по себе может не доминировать. Если для компенсации этой сингулярности используются дочерние траектории, то величина второго члена в разложении, соответствующем (2.3), будет определяться параметром, который характеризует несингулярную часть первой дочерней траектории. Кроме того, если наклоны родительской и дочерней траекторий не равны, то в разложении будут присутствовать некоторые логарифмические члены, как в (III.7.4).

С другой стороны, если компенсация достигается за счет фонового интеграла, как в выражении (III.6.9), то условие (2.6), которое справедливо для реджевского полюсного члена при $t=0$, будет, по-видимому, справедливо и для полной амплитуды в этой точке. В каждом из этих случаев сохраняется нормальное реджевское асимптотическое поведение.

Нетривиальная проблема заключается в том, чтобы решить, при какой энергии данный полюс Редже начинает преобладать над другими полюсами, которые лежат более низко, и над фоновым интегралом. Относительная роль двух траекторий (скажем, 1 и 2) приблизительно определяется величиной

$$\frac{\Gamma_1(t) (z_t)^{\alpha_1(t)}}{\Gamma_2(t) (z_t)^{\alpha_2(t)}}. \quad (2.7)$$

Поэтому очевидно, если Γ_1 и Γ_2 одного порядка, то соответствующее требование снова сведется к тому, чтобы z_t было большим, и мы получим условие (2.6). Но при этом принимается, что Γ характеризует величину связи. Мы знаем, что на самом деле $\Gamma(t)$ имеет точку ветвления на пороге, и в гл. VI, § 4 мы записали вычеты в виде

$$\beta(t) \equiv \gamma(t) (q_t^2)^{\alpha(t)} \equiv \bar{\gamma}(t) \left(\frac{q_t^2}{-q_t^2} \right)^{\alpha(t)} \quad (2.8)$$

Это было сделано потому, что $\bar{\gamma}(t)$ имеет только динамические сингулярности и является безразмерной величиной. Постоянный множи-

тель q_i^2 выбирается так, чтобы $\bar{\gamma}(t)$ не очень сильно зависело от t . Подставляя это выражение в (2.7), для отношения вкладов получаем

$$\frac{\bar{\Gamma}_1(t) (s/2q_{i1}^2)^{\alpha_1(t)}}{\bar{\Gamma}_2(t) (s/2q_{i2}^2)^{\alpha_2(t)}}, \quad (2.9)$$

где

$$\bar{\Gamma}_i(t) = \Gamma_i(t) \left(\frac{q_i^2}{q_{i_i}^2} \right)^{\alpha_i(t)}, \quad i = 1, 2. \quad (2.10)$$

Если принять, что $\bar{\Gamma}$ является разумной характеристикой связи, то данная траектория будет доминировать в том случае, если

$$s \gg q_{i_i}^2, \quad i = 1, 2. \quad (2.11)$$

Таким образом, это условие и является критерием, определяющим понятие высокой энергии. Следовательно, энергетический масштаб задается величиной $q_{i_i}^2$, а не массами, входящими в (2.6). Стало общепринятым, следуя работе [221], для всех траекторий полагать

$$q_{i_i}^2 \approx m_N^2 \approx 1 \text{ Гэв}^2, \quad (2.12)$$

где m_N — масса нуклона. Мы уже указывали, что это — энергетический масштаб в физике сильных взаимодействий, определяемый наклонами траекторий. Теперь же мы получаем дальнейшее подтверждение, основанное на скорости изменения вычетов. Поскольку наклоны траекторий определяют массы частиц с низшими спинами, между условиями (2.5) и (2.11), по-видимому, должна существовать какая-то более глубокая связь.

Поскольку траектория не доминирует над фоном до тех пор, пока не удовлетворяется условие (2.11), это дает грубый способ проверки правильности выбора (2.12). Как мы увидим ниже, экспериментальные данные свидетельствуют о том, что реджевское асимптотическое поведение устанавливается к моменту, когда энергия достигает значения в несколько Гэв, поэтому наша оценка приблизительно правильна. В § 8 мы рассмотрим попытки связать области низких и высоких энергий, записывая амплитуду в виде суммы резонансов прямого канала и реджевских полюсных членов кросс-канала.

§ 3. ПОЛНЫЕ СЕЧЕНИЯ ПРИ ВЫСОКИХ ЭНЕРГИЯХ

1. Полюса Редже и полные сечения

Полное сечение $\sigma^{\text{полн}}(s)$ рассеяния двух частиц 1 и 2, усредненное по спинам, связано с сечением упругого рассеяния вперед «оптической теоремой»

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{полн}}(s) &= (2q_{s12} s^{1/2})^{-1} (2\sigma_1 + 1)^{-1} (2\sigma_2 + 1)^{-1} \times \\ &\times \sum_{\lambda_1 \lambda_2} \text{Im} \{ \langle \lambda_1 \lambda_2 | A(s, 0) | \lambda_1 \lambda_2 \rangle \} \end{aligned} \quad (3.1)$$

[ср. (I.7.17)]. Таким образом, имеется линейное соотношение между полными сечениями и вычетами амплитуды t -канала в полюсах Редже, причем в него не входит никаких перекрестных членов. Благодаря этому, а также вследствие простоты кинематики и отсутствия затруднений, связанных со спином, полные сечения поддаются простому анализу на основе представления о полюсах Редже [394].

Из (2.1) и (II.9.17) имеем

$$\text{Im} \{A(s, t)\} \equiv D_s(s, t) = \sum_i 16\pi^2 [2\alpha_i(t) + 1] \beta_i(t) P_{\alpha_i(t)}(z_i), \quad (3.2)$$

что вместе с (2.8) дает

$$D_s(s, t) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sum_i \frac{16\pi^2 \Gamma[\alpha_i(t) + 1/2]}{\sqrt{\pi} \Gamma[\alpha_i(t) + 1]} \times \\ \times [2\alpha_i(t) + 1] \bar{\gamma}_i(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_i(t)}, \quad (3.3)$$

где мы положили $s_0 \equiv 2q_i^2$. Поэтому из (3.1) получаем

$$\sigma^{\text{полн}}(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \sum_i G_i(0) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_i(0)-1}, \quad (3.4)$$

где в $G_i(t)$ включены все множители, входящие в (3.1) и (3.3). Следует отметить, что так как в лабораторной системе импульс частицы 1 (частица 2 мишень) равен

$$|P_{\text{лаб}}|^2 = \frac{[s - (m_1 + m_2)^2][s - (m_1 - m_2)^2]}{4m_2^2},$$

то в хорошем приближении при высоких энергиях ($s \gg m_1^2, m_2^2$) в асимптотике (3.4) вместо s/s_0 можно использовать величину

$$|P_{\text{лаб}}| \approx \frac{s}{2m_2}.$$

Поскольку

$$E_{1 \text{ лаб}} = \frac{1}{2m_2} (s - m_1^2 - m_2^2),$$

вместо s/s_0 можно использовать также $E_{\text{лаб}}$. Во всех экспериментах, которые мы будем рассматривать, частицами мишени являются нуклоны, так что $m_2 \approx 1 \text{ Гэв}$, и если $P_{\text{лаб}}$ измеряется в $\text{Гэв}/c$ (или $E_{\text{лаб}}$ в Гэв), то такая замена соответствует выбору $s_0 \approx 2 \text{ Гэв}^2$, как в (2.12).

Имеются пять процессов, данные для которых поддаются анализу такого рода; это NN -, $\bar{N}N$ -, KN -, $\bar{K}N$ - и πN -рассеяние. Каждый из этих процессов может наблюдаться в двух изоспиновых состояниях, поэтому всего мы имеем десять экспериментально измеряемых полных сечений.

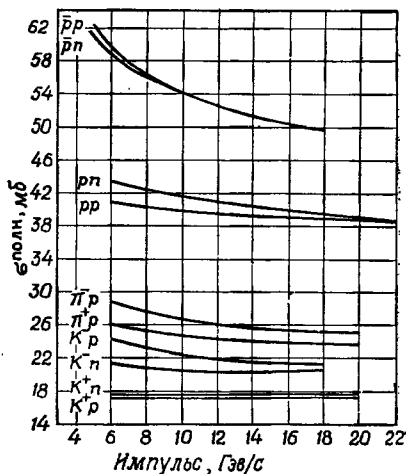
2. Предел Померанчука

Полные сечения обладают одним важным экспериментальным свойством: при $s \rightarrow \infty$ они становятся, по-видимому, постоянными. Такое поведение иллюстрирует фиг. VIII.8, на которой приведены имеющиеся

данные. Не исключено, конечно, что ход сечений в пределе высоких энергий носит степенной характер с небольшим показателем, т. е. сечение пропорционально s^ϵ , где $\epsilon \approx 0$ (из границы Фруассара следует, что $\epsilon \leq 0$), или же этот ход является логарифмическим. Данные для космических лучей, соответствующие более высоким энергиям, чем те, которые достигнуты в ускорителях, подтверждают почти полное постоянство сечений [328], и мы пока будем считать, что дело обстоит именно так.

Отсюда сразу следует, что главными сингулярностями в J -плоскости должны быть сингулярности при $\text{Re } J = 1$. Таким образом, если мы считаем, что высокоэнергетическое поведение определяется полюсом Редже, то, как это вытекает из (3.4), нужно потребовать, чтобы существовала траектория с $\alpha(0) = 1$. Далее, поскольку полные сечения, естественно, положительны, то эта траектория должна давать во все упругие амплитуды вклады одного знака. Следовательно, она должна иметь $C = P = +1$ (см. ниже) и $B = S = I = 0$. Кроме того, так как нет ни одной физической сильно взаимодействующей частицы с единичным спином и с нулевой массой, траектория должна иметь положительную сигнатуру. Как мы упоминали в § 1, именно к таким выводам пришли Чью и Фраучи [109] в 1961 г. Но в то время не было известно ни одной частицы, которая могла бы лежать на такой траектории, и они смело постулировали ее существование. Эта частица была названа «померанконом», так как еще в 1958 г. Померанчук [341] рассмотрел некоторые следствия (теоремы Померанчука), вытекающие из постоянства полных сечений при высоких энергиях. Теоремы Померанчука удовлетворяются автоматически, если считать, что все упругие процессы при высоких энергиях определяются траекторией, соответствующей померанкону. Вследствие квантовых чисел, свойственных траектории Померанчука, ее иногда называют «вакуумной» траекторией.

Одна из целей, которую преследует теория Редже, заключается в том, чтобы установить связь между состояниями частиц и высокоэнергетическим поведением в кросс-канале; поэтому не совсем хорошо начинать с того, что главный член просто «постулируется». Однако это предположение сразу же привело к некоторым важным следствиям



Ф и г. VIII.8. Графики зависимости полных сечений от импульса падающих частиц в лабораторной системе [280].

Имеющиеся более поздние данные по этим процессам при высоких энергиях подтверждают показанное на рисунке поведение.

(не все из которых, как мы увидим, подтвердились), и в частности, оно стимулировало поиски частиц со спином 2^+ и с квантовыми числами померанчона. Отметим, что $J^P = 2^+$ есть наименьшее значение J , при котором траектория Померанчука может проявляться в виде физической частицы, так как, принимая $d\alpha/dt > 0$ в области $t < 0$, получаем, что траектория принимает значение $J = 0$ при отрицательном t . Поиски быстро увенчались успехом, и был открыт резонанс f с массой $1254 \pm 12 Mэв$. Однако, как будет видно из дальнейшего, мы не можем с полной уверенностью считать, что f и P лежат на одной и той же траектории.

Выражая результаты через константы связи траектории Померанчука, получаем, что десять наблюдаемых полных сечений стремятся к одной из трех величин:

$$\sigma_{\text{полн}}(NN) = \sigma_{\text{полн}}(N\bar{N}) = (\gamma_{N\bar{N}}^P)^2, \quad (3.5)$$

$$\sigma_{\text{полн}}(\pi N) = \gamma_{N\bar{N}}^P \gamma_{\pi\pi}^P, \quad (3.6)$$

$$\sigma_{\text{полн}}(KN) = \bar{\sigma}_{\text{полн}}(KN) = \gamma_{N\bar{N}}^P \gamma_{K\bar{K}}^P, \quad (3.7)$$

причем каждое из соотношений выполняется для обоих значений изоспина. Здесь мы включили все появляющиеся множители в γ и воспользовались теоремой о факторизации.

Было предложено и несколько других объяснений постоянства асимптотического поведения полных сечений, основывающихся на представлении о неподвижных сингулярностях при $J = 1$. Так, например, Оме [318] предположил, что существует неподвижный разрез, начинающийся при $J = 1$ [это приводит к тому, что полное сечение ведет себя как $(\ln s)^{-1}$]; в другой его работе [319] предполагается, что у амплитуды с положительной сигнатурой имеется неподвижный полюс при $J = 1$ (как указывалось в гл. V, § 4, такой полюс может возникнуть в том случае, если в J -плоскости есть соответствующие разрезы). На данной стадии эти предположения представляются весьма произвольными, и их мотивировку мы откладываем до § 6, п. 7.

3. Вклады других траекторий

Прежде чем рассматривать отклонения от предела Померанчука, следует проанализировать ограничения, которые накладываются сохранением четности и инвариантностью по отношению к зарядовому сопряжению на вклады всевозможных полюсов Редже. Рассмотрим сначала инвариантность по отношению к зарядовому сопряжению для процесса $1 + 2 \rightarrow 1 + 2$. В t -канале мы выберем собственные состояния оператора C , т. е. состояния $|\bar{1}\bar{1}\rangle \pm |\bar{1}\bar{1}\rangle$ и $|\bar{2}\bar{2}\rangle \pm |\bar{2}\bar{2}\rangle$, с $C = \pm 1$ соответственно. Отсюда следует, что траектории с $C = +1$ дают одинаковые вклады в амплитуды рассеяния 12 и $\bar{1}\bar{2}$, тогда как траектории с $C = -1$ дают в эти амплитуды вклады противоположных знаков.

Для рассеяния 0^- мезонов на барионах два мезона имеют $C = P = = (-1)^J$, и поэтому будут давать вклад только траектории с $C = P = = \mathcal{P}$, где \mathcal{P} — сигнатура. Оказывается [12, 360, 398], что это свойство имеет место и для любой траектории, которая дает вклад в усредненную по спине амплитуду нуклон-нуклонного рассеяния вперед. Этот результат является, по-видимому, случайным и обусловлен свойствами нуклон-нуклонной кросс-синг-матрицы.

Таблица 2

Учитывая данные, приведенные в § 1, мы видим, что для подгонки десяти полных сечений с помощью высоколежащих нонетов 0^- , 1^- и 2^+ подходят только следующие траектории: f ($= P?$), f' , A_2 , ρ , ω , ϕ . Как указывалось выше, вклады этих траекторий в десять процессов зависят от их значений C , а также от значений их изоспинов. Используя изоспиновую кросс-синг-матрицу (общий анализ изоспиновых кросс-синг-матриц можно найти в работе [55]), легко получить вклады, приведенные в табл. 2. Заметим, что в действительности эта таблица представляет собой три отдельные таблицы. Поэтому не нужно думать, что из нее следует, например, что вклад ρ -мезона в πN -рассеяние связан каким-то простым образом с его вкладом в KN -рассеяние. Даже относительные знаки вкладов в процессы πN , KN и NN не обязательно являются правильными. Однако, что касается знака, то обычно считается (в качестве предварительного предположения), что вычеты имеют такой же знак, как и в физическом полюсе, т. е. при $t = m^2$, где m — масса соответствующей физической частицы. Этот знак определяется из условия унитарности, и знаки, приведенные в табл. 1, соответствуют такому соглашению.

Процесс	Вклады траекторий
$\pi^- p$	$f + f' + \rho$
$\pi^+ p$	$f + f' - \rho$
$K^- p, \bar{p} p$	$f + f' + \rho + \omega + \phi + A_2$
$K^- n, \bar{p} n$	$f + f' - \rho + \omega + \phi - A_2$
$K^+ p, p p$	$f + f' - \rho - \omega - \phi + A_2$
$K^+ n, p n$	$f + f' + \rho - \omega - \phi - A_2$

Относительные знаки вкладов известных траекторий Редже в десять доступных измерению полных сечений. Если P не совпадает с f , то он будет входить в таблицу точно так же, как f и f' .

4. Обработка экспериментальных данных

При обработке экспериментальных значений полных сечений в нашем распоряжении имеется 6 значений α (0), соответствующих траекториям f , f' , A_2 , ρ , ω , ϕ (даже если мы не отождествляем P с f), причем для каждой из них имеются три параметра связи, т. е. три константы связи траектории с состояниями NN , $K\bar{K}$ и $\pi\pi$. Неудивительно поэтому и, по-видимому, не так уж существенно, что значения полных сечений удастся подогнать так, чтобы они совпадали с экспериментальными данными. Однако эта процедура все же не совсем тривиальна, так как, образуя соответствующие комбинации из сече-

ний, можно выделить вклады некоторых отдельных траекторий. Отметим, в частности, что в следующие три комбинации

$$\Delta(\pi p) \equiv \sigma^{\text{полн}}(\pi^- p) - \sigma^{\text{полн}}(\pi^+ p), \quad (3.8)$$

$$\Delta(K^+ p) - \Delta(K^+ n) \equiv [\sigma^{\text{полн}}(K^+ p) - \sigma^{\text{полн}}(K^- p)] - \\ - [\sigma^{\text{полн}}(K^+ n) - \sigma^{\text{полн}}(K^- n)], \quad (3.9)$$

$$\Delta(pp) - \Delta(pn) \equiv [\sigma^{\text{полн}}(pp) - \sigma^{\text{полн}}(\bar{p}p)] - \\ - [\sigma^{\text{полн}}(pn) - \sigma^{\text{полн}}(\bar{p}n)] \quad (3.10)$$

входит только вклад p -мезона; поэтому энергетическая зависимость этих трех комбинаций должна определяться одним и тем же значением $\alpha_p(0)$. В действительности вторые разности, заключенные в квадратные скобки, в (3.9) и (3.10), экспериментально измерены не очень точно, но разность сечений $\pi^+ p$ - и $\pi^- p$ -рассеяния известна с достаточной точностью и она дает хороший способ проверки степенной зависимости, предсказываемой теорией Редже. Согласие является превосходным, причем обработка результатов по методу наименьших квадратов приводит к значению [281]

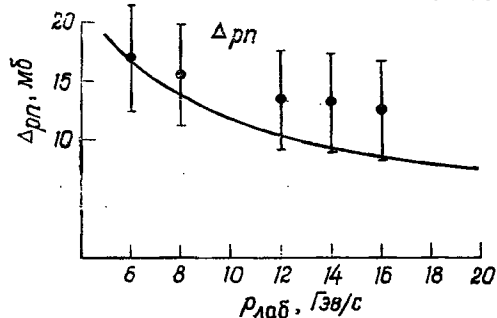
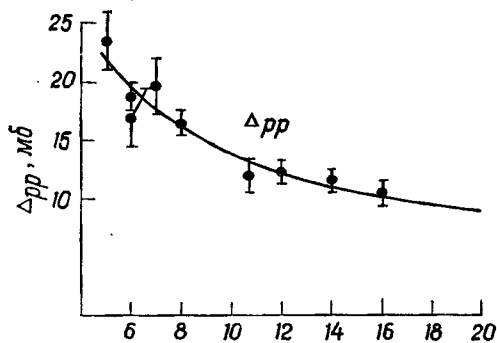
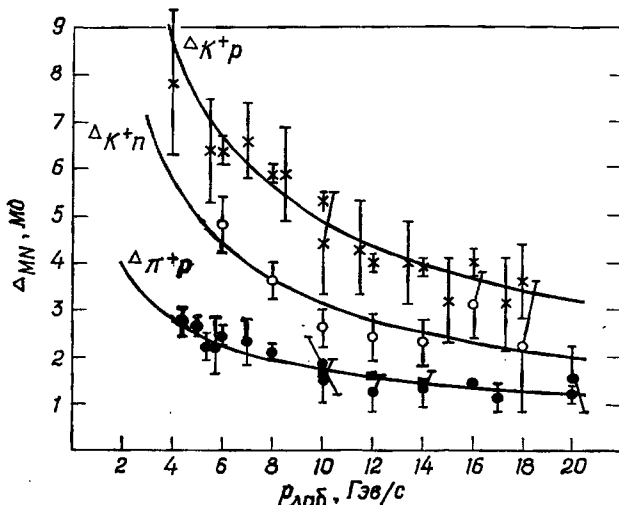
$$\alpha_p(0) \approx 0,56 \pm 0,15. \quad (3.11)$$

Чтобы уменьшить число параметров, некоторые авторы воспользовались предсказаниями $SU(3)$ -симметрии. Наиболее полный анализ такого рода был проведен Баргером и Олссоном [49]. В их работе использовались траектории нонетов 1^- и 2^+ , а также траектория померанчона P , который не отождествлялся с f . Нарушение $SU(3)$ -симметрии учитывалось путем предположения, что $\alpha_\varphi(0)$ отличается от $\alpha_p(0) = \alpha_\omega(0)$. Для констант связи использовались предсказания точной $SU(3)$ -симметрии; исключение составляли константы связи померанчона, которые брались в качестве свободных параметров. Экспериментальные данные по сечениям представлялись в виде сумм и разностей этих величин

$$\Delta_{AB} = \sigma^{\text{полн}}(AB) - \sigma^{\text{полн}}(\bar{A}B), \quad (3.12)$$

$$\Sigma_{AB} = \sigma^{\text{полн}}(AB) + \sigma^{\text{полн}}(\bar{A}B). \quad (3.13)$$

Согласно нашему предыдущему анализу, в Δ_{AB} дают вклад только p , ω и φ , так что имеются два значения $\alpha(0)$ и четыре константы связи, рассматриваемые в качестве параметров. Этими четырьмя константами связи являются одна константа связи с мезонами, константа связи мезонного октуплета с барионами, а также отношение f/d и некоторый параметр, который задает связь мезонного синглета с барионами. На фиг. VIII.9 приведены типичные кривые, подогнанные под экспериментальные данные при импульсах, превышающих примерно $5 \text{ ГэВ}/c$. Ясно, что эти кривые совпадают с экспериментальными данными в пре-



Ф и г. VIII.9. Экспериментальные данные и теоретические кривые для разностей полных сечений $\Delta(AB) = \sigma_{\text{полн}}(\bar{A}B) - \sigma_{\text{полн}}(AB)$ [49].

делах ошибок эксперимента. Найденные значения параметров равны

$$\alpha_p(0) = 0,48 \pm 0,05, \quad (3.14)$$

$$\frac{\dot{f}}{d} = -2,0 \pm 0,7, \quad (3.15)$$

$$0,2 \leq \alpha_\varphi(0) \leq 0,4. \quad (3.16)$$

Приведенное здесь отношение f/d соответствует «усредненной по спинам» связи, поэтому оно не поддается простому сравнению с другими предсказываемыми значениями. Неравенства $\alpha_\varphi(0) < \alpha_p(0)$ следовало ожидать, так как $m_\varphi > m_p$.

При теоретической обработке значений Σ нужно учитывать только вклады нонета 2^+ и померанчона P , так что всего имеется девять свободных параметров [$\alpha(0)$ нонета 2^+ , три константы связи померанчона и пять параметров, соответствующих связи нонета 2^+]. Варьируя эти параметры, можно добиться удовлетворительного согласия с экспериментальными данными. Для отношения f/d , отвечающего связи октуплета 2^+ с барионами, получено значение

$$\frac{\dot{f}}{d} = -0,20 \pm 0,06, \quad (3.17)$$

а величины $\alpha_f(0) = \alpha_{f'}(0) = \alpha_{A_2}(0)$ оказались равными

$$\alpha_{2^+}(0) \approx 0,39 \pm 0,24. \quad (3.18)$$

Эти значения в какой-то мере зависят от предположений, которые делаются относительно связей; дальнейшие подробности можно найти в работе Баргера и Олссона [49].

Комбинирование $SU(3)$ с обменом полюсом Редже приводит к некоторым соотношениям между полными сечениями, которые не удается вывести ни из одной из этих теорий, рассматриваемых в отдельности. Так, например, можно получить соотношения Джонсона — Траймана [249]

$$\Delta(K^+p) = 2\Delta(K^0p) = 2\Delta(\pi p) \quad (3.19)$$

и соотношения Фройнда [193]

$$\Delta(pp) = 5\Delta(\pi p) = \frac{5}{4}\Delta(pn). \quad (3.20)$$

Причина, по которой данная модель симметрии дает больше результатов, когда она используется совместно с теорией полюсов Редже, а не просто применяется непосредственно к амплитуде, заключается по существу в том, что в первом случае симметрия применяется к трехточечным функциям (т. е. вершинам), а не к четыреххвосткам. Таким образом, $SU(3)$ с чистой f -связью плюс модель полюсов Редже дает соотношения Джонсона — Траймана, для вывода которых другим способом приходится постулировать для амплитуд симметрию типа $SU(6)$ (см. монографии [82, 212], в которых дается обзор унитарных симметрий).

Мы не будем здесь рассматривать подробнее эти проблемы, так как на самом деле указанные соотношения выполняются не очень хорошо, и, вообще говоря, доказательства, подтверждающие справедливость $SU(3)$ -симметричных связей, почти отсутствуют. Анализ Баргера и Олссона, описанный выше, показал, что $SU(3)$ в комбинации с теорией Редже согласуется с экспериментальными данными, но эти данные не определяют однозначно величин, фигурирующих в $SU(3)$ -симметрии, — значения некоторых из параметров могут изменяться в довольно широкой области.

В качестве примера другого метода обработки данных по полным сечениям упомянем анализ, выполненный Хёгаасеном и Фриском¹⁾, которые использовали только траектории ρ , ω , A_2 , $f(=P)$ и f' и не прибегали ни к каким предсказаниям $SU(3)$ -симметрии. Для $\alpha(0)$ брались следующие значения:

$$\alpha_f(0) = 1,00, \quad (3.21)$$

$$\alpha_\rho(0) = 0,57, \quad (3.22)$$

$$\alpha_{A_2}(0) = 0,40, \quad (3.23)$$

$$\alpha_{f'}(0) = 0,50, \quad (3.24)$$

$$\alpha_\omega(0) = 0,52. \quad (3.25)$$

Последние четыре значения берутся из результатов обработки данных по другим процессам. Значения для ρ и A_2 надежно определяются из данных по процессам $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ и $\pi^-p \rightarrow \eta n$ соответственно (см. § 4 данной главы), но значения для f' и ω можно получить лишь весьма приблизительно. Используя эти значения, Хёгаасен и Фриск получили превосходное согласие со всеми имеющимися данными по полным сечениям в области импульсов налетающих частиц, превышающих 6 Гэв/с .

В работе [75] полные сечения обрабатывались в рамках модели полюсов Редже, в которой допускалось отклонение $\alpha_P(0)$ от единицы. К наилучшим результатам приводило значение

$$\alpha_P(0) = 0,925 \pm 0,008. \quad (3.26)$$

Обоснованием такого подхода служило стремление удовлетворить различным соотношениям между сечениями, которые следуют из модели алгебры токов для универсальной связи полюсов Редже [76], не требуя при этом, чтобы хотя бы некоторые из сечений были возрастающими функциями энергии. Указанное значение α_P гарантирует асимптотическое уменьшение всех полных сечений. Эта модель интересна тем, что она приводит к определенным соотношениям между мезон-барионными и барион-барионными процессами, но так как некоторые ее предсказания, например упоминавшиеся выше соотношения Фройнда,

1) Н. Н. Ø g a a s o n, Nercze Novi Lectures 1966 (не опубликовано).

резко противоречат эксперименту [53], мы здесь не будем рассматривать ее подробнее (см. по этим вопросам более позднюю работу [314]). Здесь уместно отметить, однако, что существующие данные, включая даже эксперименты с космическими лучами, не приводят однозначно к равенству $\alpha_P(0) = 1$ (см. также § 6, п. 8 данной главы).

5. Дисперсионные правила сумм для рассеяния вперед

До сих пор мы занимались обработкой экспериментальных данных по полным сечениям, соответствующих интервалу значений лабораторных импульсов примерно от 5 до 20 Гэв/с. Интересно также выяснить, насколько хорошо предсказываемые значения согласуются с экспериментом вне этой области. Если учитывать вклады резонансов прямого канала, то для более низких энергий согласие оказывается чрезвычайно хорошим вплоть до лабораторных импульсов 2—3 Гэв/с. Обсуждение этих очень интересных результатов мы отложим до § 8. При более высоких энергиях экспериментальные данные отсутствуют, но кое-что можно сделать, используя дисперсионные соотношения для рассеяния вперед. Они связывают амплитуду рассеяния с интегралом от ее мнимой части в направлении вперед, который в свою очередь можно связать с интегралом от полного сечения. Этот интеграл берется по всей физической области энергий вплоть до бесконечности, и его можно вычислить, воспользовавшись экспериментальными данными, имеющимися до определенного значения энергии, а дальше — реджевской полюсной формулой.

Впервые этот метод был предложен в работах Айджи [242, 243], где было показано, что кроме померанчона должна существовать по крайней мере еще одна траектория с $\alpha(0) > 0$ и с квантовыми числами вакуума (ни f , ни f' в то время не были известны). В цитированных работах используется амплитуда

$$f^+(\nu) = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi M^2} \left[\left\langle \frac{1}{2} \left| A(\pi^- p \rightarrow \pi^- p, s, t=0) \right| \frac{1}{2} \right\rangle + \left\langle \frac{1}{2} \left| A(\pi^+ p \rightarrow \pi^+ p, s, t=0) \right| \frac{1}{2} \right\rangle \right], \quad (3.27)$$

где ν — энергия пиона в лабораторной системе s -канала, которая связана с s соотношением

$$s = M^2 + 1 + 2M\nu$$

(M — масса нуклона), причем единицы выбраны так, что масса пиона равна единице. Тогда из оптической теоремы (3.1) имеем

$$\text{Im} \{f^+(\nu)\} = \frac{1}{2} \frac{(\nu^2 - 1)^{1/2}}{4\pi} [\sigma_{\text{полн}}(\pi^- p) + \sigma_{\text{полн}}(\pi^+ p)]. \quad (3.28)$$

Обозначив вклад померанчона в $f^+(\nu)$ через $f^{+P}(\nu)$, получим, что если кроме померанчона нет других траекторий с $\alpha(0) > 0$ и с кван-

товыми числами вакуума, то разность

$$f^{'+}(\nu) = f^+(\nu) - f^{+P}(\nu)$$

стремится к нулю как некоторая отрицательная степень ν . При этом мы не учитываем, что в J -плоскости возможны другие сингулярности. Таким образом, функция $f^{'+}(\nu)$ должна удовлетворять одномерному дисперсионному соотношению без вычитаний. Учитывая нуклонный полюс и используя тот факт, что s - и u -каналы связаны кроссинг-симметрией, получаем

$$f^{'+}(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_1^{\infty} d\nu' \operatorname{Im} \{f^{'+}(\nu')\} \left[\frac{1}{\nu' - \nu} + \frac{1}{\nu' + \nu} \right] + \frac{1}{4\pi} \frac{g^2}{2M} \left[\frac{1}{\nu_B - \nu} + \frac{1}{\nu_B + \nu} \right]. \quad (3.29)$$

Айджи положил в этом правиле сумм $\nu = 1$ и пришел к явному противоречию, которое он объяснил наличием второй траектории с квантовыми числами вакуума и с $\alpha(0) > 0$. В более поздней работе [243] он рассматривал также значения t , далекие от направления вперед, и при анализе учитывал две траектории (обозначаемые P и P') с квантовыми числами вакуума и с $\alpha(0) > 0$. Оказалось, что согласие с экспериментальными данными достигается в том случае, если

$$\alpha_{P'}(0) \approx 0,5. \quad (3.30)$$

Теперь, когда мы знаем о существовании 2^+ -мезонов f и f' , можно отождествить P' с f' (если P отождествляется с f). В противном случае предполагаемый мезон P' обуславливает эффекты как f , так и f' . Значение $\alpha_{P'}(0)$, полученное в работе [243], согласуется с рассмотренным выше значением, полученным в результате непосредственного анализа, но ни один из этих методов не является достаточно надежным, поэтому придавать особое значение такому совпадению скорее всего не следует.

В качестве второго применения этого метода рассмотрим разность амплитуд π^-p - и π^+p -рассеяния вперед, в которую, как мы видели, из всех принимаемых во внимание траекторий дает вклад только ρ -мезонная траектория. В работе [238] выписано дисперсионное соотношение для этой величины, причем ниже 20 Гэв используются экспериментальные данные для $\sigma_{\text{полн}}(\pi^-p)$ — $\sigma_{\text{полн}}(\pi^+p)$, а выше 20 Гэв — реджевское полное выражение с ρ -траекторией. Вкладом области интегрирования выше 20 Гэв пренебрегать нельзя, причем для него получается значение

$$\alpha_{\rho}(0) \approx 0,6, \quad (3.31)$$

которое согласуется с результатом, полученным из экспериментальных данных в области ниже 20 Гэв [см. (3.11) и (3.14)].

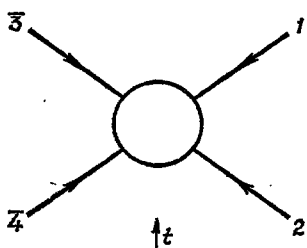
В работе [244] дисперсионное соотношение для разности амплитуд π^-p - и π^+p -рассеяния вперед проанализировано на основе предполо-

жения, что в области $-1 < \alpha(0) < \alpha_p(0)$ отсутствуют траектории, которые могли бы давать вклад в эту величину. Авторы использовали метод, аналогичный тому, который применялся выше при анализе амплитуды $f^+(\nu)$. Получающееся при этом правило сумм согласуется с имеющимися в настоящее время экспериментальными данными, но достигнутая точность не является достаточной для того, чтобы можно было говорить об окончательной проверке. В § 7 будет показано, что наличие поляризации в πN -рассеянии с перезарядкой свидетельствует о том, что в этой области существуют другие траектории (или сингулярности какого-то другого типа).

§ 4. СЕЧЕНИЯ НЕУПРУГОГО РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД

1. Введение

Если поведение амплитуд при высоких энергиях определяется полюсами Редже, то амплитуда рассеяния вперед для процесса, показанного на фиг. VIII.10, будет вести себя при больших s как $s^{\alpha_{13-24}(t_f)}$, где $\alpha_{13-24}(t)$ — главная траектория Редже, которая может взаимодействовать с частицами 1 и $\bar{3}$, а также с частицами 2 и $\bar{4}$, а t_f — значение t для рассеяния вперед ($z_s=1$). Согласно (I.6.14),



$$t_f = -\frac{(m_3^2 - m_1^2)(m_4^2 - m_2^2)}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right), \quad (4.1)$$

т. е.

$$t_f \xrightarrow{s \rightarrow \infty} 0. \quad (4.2)$$

Ф и г. VIII.10. Процесс $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$.

Аналогично этому, для рассеяния назад, которое является рассеянием вперед для процесса $1 + 2 \rightarrow 4 + 3$, при больших s

ожидается поведение $s^{\alpha_{14-32}(u_f)}$, где u_f — значение u при $z_s = -1$, т. е., как это следует из (I.6.14),

$$u_f = -\frac{(m_4^2 - m_2^2)(m_3^2 - m_1^2)}{s} + O\left(\frac{1}{s^2}\right). \quad (4.3)$$

Очевидно, неупругие процессы подразделяются согласно тому, какие из траекторий являются разрешенными, поэтому их удобно сгруппировать по этому признаку.

2. Возможен обмен померанконом

Простейшими примерами этого класса процессов являются процессы упругого рассеяния, которые мы рассматривали выше. Однако существуют и некоторые другие случаи, в которых разрешен обмен померанконом $P (= f?)$ и f' -мезоном, и для таких процессов амплитуда

рассеяния вперед по-прежнему будет вести себя как s^4 . Это предсказание теории Редже замечательно тем, что «дифракционное рассеяние» (т. е. результат перехода частиц из упругого канала в многочисленные неупругие каналы), которое обычно рассматривается в качестве доминирующего вклада в упругое рассеяние при высоких энергиях, не может иметь места в случае неупругого рассеяния, и с этой точки зрения следовало бы ожидать, что при возрастании энергии все амплитуды неупругого рассеяния вперед должны спадать по сравнению с амплитудами упругого рассеяния.

При сравнении с экспериментом мы не можем использовать амплитуду рассеяния вперед — приходится рассматривать полное сечение, так как оно является единственной величиной, которая измерена в интересующих нас случаях. Для неупругих процессов аналог оптической теоремы, который позволил бы установить связь их полного сечения с амплитудой рассеяния вперед, отсутствует. Однако, согласно модели полюсов Редже, дифференциальное сечение, выраженное не через угол, а через t , ведет себя при больших s как

$$\frac{d\sigma}{dt} \sim \text{const} \cdot s^{2\alpha(t)-2}. \quad (4.4)$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно подставить в (I.7.12) представление для амплитуды (2.1).

Далее, основной вклад в полное сечение вносит лишь малая область значений t вблизи $t = 0$, причем эта область почти не зависит от энергии (см. § 6). Поэтому полное сечение данного неупругого процесса имеет вид

$$\sigma \sim \text{const} \cdot s^{2\alpha(0)-2}. \quad (4.5)$$

Символ σ мы используем для обозначения полного сечения данного неупругого процесса; в предыдущем параграфе $\sigma^{\text{полн}}$ обозначает полное сечение *всех* процессов, которые могут происходить при заданном начальном состоянии.

Таким образом, если доминирует помераншон, то мы получаем

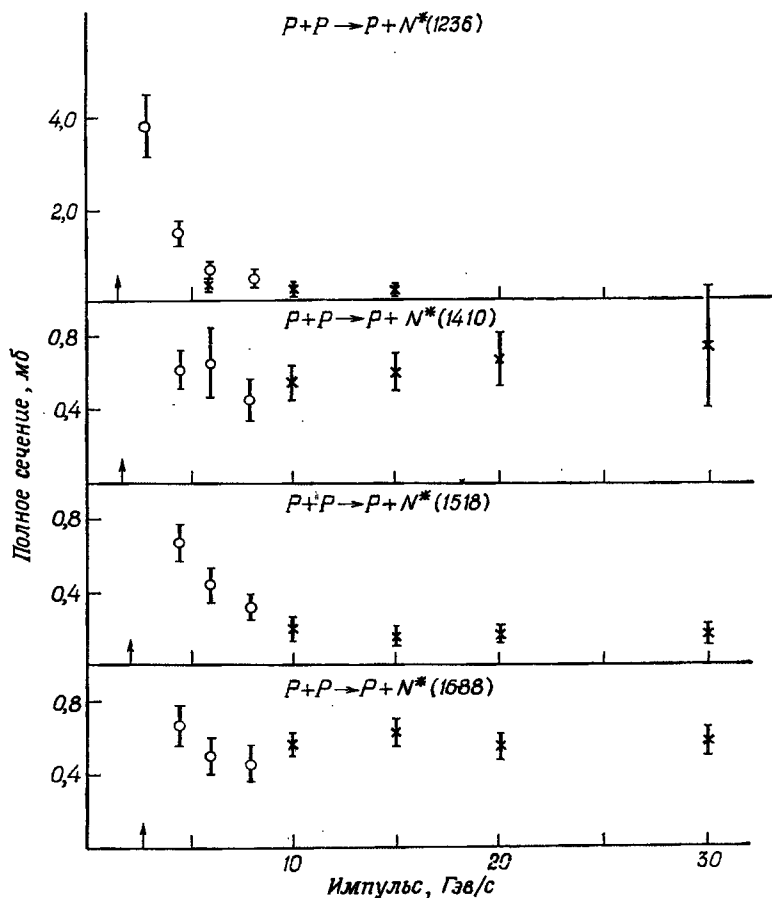
$$\sigma(s) \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \text{const}. \quad (4.6)$$

Этот результат великолепно подтверждается измерениями [20, 60], выполненными для реакций



где рассматривались изобары N^* с массами 1238, 1400, 1520, 1690 и 2190 $M\text{эв}$. Соответствующие результаты приведены на фиг. VIII.11. Мы видим, что сечение рождения N^* (1238) падает с ростом энергии, как этого и следовало ожидать, так как такой изобар имеет $I = 3/2$, и P не может давать вклада в процесс его рождения. В то же время сечения для других резонансов, которые все имеют квантовые числа нуклона (за исключением спина), оказываются постоянными.

Таким образом, ситуация здесь вполне удовлетворительна для реджевской модели, и следует надеяться, что дальнейшие эксперименты подтвердят ее. Заметим, что если бы, наоборот, такое поведение



Ф и г. VIII.11. Зависимость сечения рождения изобар в процессе $pp \rightarrow N^*p$ от импульса в лабораторной системе [240].

не имело места, то мы вынуждены были бы сделать один из двух, в равной мере неудовлетворительных, выводов. Либо по каким-то причинам связь P с состояниями $1 + 2$ отсутствует, хотя ни одно из известных квантовых чисел ее не запрещает, либо траектории Померанчука нет, и объяснить дифракционное рассеяние с помощью полюсов Редже вообще невозможно.

Довольно интересное, хотя и достаточно умозрительное применение идеям этого параграфа нашел Моррисон [305]. Он отметил, что зависимость от изменения начальной энергии для реакции $N\pi \rightarrow N + (\pi\rho)$ в окрестности резонанса A_2 ($\pi\rho$) свидетельствует о наличии некоторого вклада, обусловленного обменом померанчоном. Поскольку для A_2 такой обмен невозможен, Моррисон предложил считать, что вблизи A_2 существует также резонанс с $I = 1$ и с $J^P = 1^+$ или 2^- .

Грибов [215] указал, что очень интересно было бы получить информацию о зависимости от изменения энергии для процесса, подобного $\pi N \rightarrow O^+N$, где O^+ — мезон с $J^P = 0^+$ (если таковой существует). Померанчон не может взаимодействовать с состоянием πO^+ , но разрез, соответствующий двойному обмену померанчоном, связан с этим состоянием, и при высоких энергиях он должен давать основной вклад в сечение. В противоположность другим процессам такого типа (для которых при достаточно высоких энергиях должны доминировать вклады от разрезов), сечение этого процесса не должно резко убывать с ростом энергии (ср. п. 6 данного параграфа и § 6, п. 9).

3. Обмен нестранным мезоном возможен, обмен померанчоном запрещен

Для процессов этого класса главными являются траектории нонетов 1^- и 2^+ , так что в соответствии с (4.5) мы ожидаем, что при высоких энергиях полное сечение будет вести себя как s^{-n} , где n близко к единице или меньше единицы, если принять во внимание наклон траектории $|\alpha(t) < \alpha(0)$ при $t < 0$]. Моррисон [303, 304] проанализировал большое число полных сечений, которые попадают в этот класс, и в большинстве случаев значения n совпали с ожидаемыми.

Рассмотрим теперь более подробно конкретные примеры процессов этого класса, причем сначала мы остановимся на процессах рассеяния с перезарядкой. В действительности, если учесть изоспиновую инвариантность, они связаны с упругим рассеянием. Эту связь устанавливают следующие соотношения:

$$A(\pi^-p \rightarrow \pi^0n) = \frac{1}{\sqrt{2}} [A(\pi^+p \rightarrow \pi^+p) - A(\pi^-p \rightarrow \pi^-p)], \quad (4.8)$$

$$A(K^-p \rightarrow \bar{K}^0n) = [A(K^-p \rightarrow K^-p) - A(K^-n \rightarrow K^-n)], \quad (4.9)$$

$$A(K^+n \rightarrow K^0p) = [A(K^+p \rightarrow K^+p) - A(K^+n \rightarrow K^+n)], \quad (4.10)$$

$$A(\bar{p}p \rightarrow \bar{n}n) = [A(\bar{p}p \rightarrow \bar{p}p) - A(\bar{p}n \rightarrow \bar{p}n)], \quad (4.11)$$

$$A(pn \rightarrow np) = [A(pp \rightarrow pp) - A(pn \rightarrow pn)]. \quad (4.12)$$

Эти соотношения выполняются для каждой спиральной амплитуды при всех s и t . В случае мезон-барионного рассеяния при $t = 0$ имеется только амплитуда для рассеяния без переворота спина (слагаемое, соответствующее рассеянию вперед с переворотом спина, равно нулю

вследствие сохранения углового момента — см. гл. IV, § 3). Поэтому, воспользовавшись соотношениями (4.8) — (4.10), мы можем сразу же установить связь между мнимой частью амплитуды рассеяния вперед с перезарядкой и полными сечениями упругого рассеяния. Так, например, из (4.8) и (3.1) следует

$$\text{Im} \{A(\pi^- p \rightarrow \pi^0 n, s, t=0)\} = q_s \sqrt{2s} [\sigma^{\text{полн}}(\pi^+ p, s) - \sigma^{\text{полн}}(\pi^- p, s)]. \quad (4.13)$$

Отметим, однако, что в случае нуклон-нуклонного рассеяния вперед с перезарядкой амплитуда с двойным переворотом спина, т. е. амплитуда $\langle 1/2, -1/2 | A | -1/2, 1/2 \rangle$, не обязательно равна нулю; поэтому для такого процесса мы не можем установить связь между мнимой частью амплитуды рассеяния вперед с перезарядкой и полным сечением.

Благодаря соотношениям типа (4.13) измерение величины $\text{Im} A$ для амплитуды рассеяния с перезарядкой при $t=0$ не дает нового способа проверки теории Редже, независимого от методов, рассмотренных в предыдущем параграфе. Однако экспериментально измеряется дифференциальное сечение, которое является не просто некоторой функцией полного сечения, а пропорционально величине $|\text{Re} A|^2 + |\text{Im} A|^2$. Соответствующие данные проанализированы в работе [237] (см. также приведенную там библиографию), в которой осуществлялась подгонка с помощью простого обмена реджевской траекторией ρ -мезона (см. предыдущий параграф). Было получено хорошее согласие теории с экспериментом в интервале значений импульсов от 4 до 18 Гэв/с для значений $\alpha_\rho(0)$

$$\alpha_\rho(0) = 0,58 \text{ или } 0,57 \pm 0,01. \quad (4.14)$$

Эти различные результаты связаны с тем, что для линейной экстраполяции в точку $t=0$ использовались экспериментальные данные из области $0 < -t < 0,28$ (Гэв/с)² или из области $0 < -t < 1,0$ (Гэв/с)² соответственно. Такие значения превосходно согласуются со значениями (3.11), (3.22) и (3.31), полученными из анализа полных сечений, что говорит о совпадении (в пределах экспериментальных ошибок) энергетической зависимости вещественной и мнимой частей амплитуды, как это и предсказывается теорией Редже. Мы еще коснемся этого вопроса в следующем параграфе, при обсуждении фаз амплитуд. Между прочим, этот результат подтверждает изоспиновую инвариантность при высоких энергиях.

В качестве второго примера процессов данного класса рассмотрим реакцию

$$\pi^- p \rightarrow \eta n. \quad (4.15)$$

В этом случае квантовые числа таковы, что из известных нам траекторий (см. § 1) может давать вклад только A_2 . В работе [333] проанализированы соответствующие данные и показано, что для сечения,

экстраполированного в область рассеяния вперед, хорошее согласие достигается, если $\alpha_{A_2}(0)$ берется в пределах от 0,25 до 0,40. Этот и предыдущий процессы более подробно рассматриваются в § 6.

В рассматриваемый класс процессов входят также реакции типа

$$PN \rightarrow VB, \quad (4.16)$$

где P — псевдоскалярный мезон, V — векторный мезон и B — барион. Для таких процессов возникает явление, описанное в конце гл. IV, § 5, поэтому их анализ играет особенно важную роль. Для рассеяния вперед в s -канале угол z_i не пропорционален s , а равен единице. Поэтому ожидается, что при высоких энергиях амплитуды рассеяния вперед в t -канале ($z_s = 0$), включающие обмен спиральностью M , будут вести себя как $s^{\alpha-M}$, а не s^α . Легко показать [258], что для траекторий с $\mathcal{P} = P$ (\mathcal{P} — сигнатура) в t -канале возможны только амплитуды с $M > 0$, тогда как в случае $\mathcal{P} = -P$ имеются члены с $M = 0$. При этом может служить процесс

$$\pi N \rightarrow \rho N, \quad (4.17)$$

где этот механизм приводит к тому, что преобладает π -траектория, а не ω -траектория, хотя первая лежит ниже. В § 7 показано, что анализ распределения продуктов распада ρ -мезона уже в какой-то мере подтверждает такое поведение.

4. Возможен обмен странным мезоном

Типичными процессами этого класса являются

$$\pi^- p \rightarrow \Lambda K^0 \text{ или } \Sigma^0 K^0, \quad (4.18)$$

$$K^- p \rightarrow \Lambda \pi^0 \text{ или } \Sigma^+ \pi^- \text{ и т. д.}, \quad (4.19)$$

$$\bar{p} p \rightarrow \bar{\Lambda} \Lambda \text{ и т. д.} \quad (4.20)$$

Поскольку странные мезоны тяжелее самых легких нестранных мезонов, принадлежащих тому же октуплету, их траектории лежат более низко, и сечения процессов этого класса должны убывать с ростом энергии быстрее, чем сечения процессов класса 3. Это подтверждается данными, приведенными в докладе Моррисона [304]: сечения ведут себя как s^{-n} , где $n \approx 2$. Однако для большинства процессов этого класса имеющиеся данные являются недостаточно точными.

5. Возможен обмен барионом

Примерами процессов этого класса являются процессы мезон-барионного рассеяния назад, для которых ожидается, что в u -канале доминируют барионные траектории. Здесь сразу возникает вопрос, лежит ли нуклон на траектории Редже или он является «элементарной» частью (в смысле, указанном в гл. VII). Интуитивно чувствуется,

что если уж нуклон не «элементарен», то маловероятно, чтобы элементарной была какая-либо другая сильно взаимодействующая частица. Если бы нуклон был элементарной частицей, то в парциальную амплитуду входил бы член типа $\delta_{J1/2}$ и амплитуда рассеяния назад вела бы себя как $s^{1/2}$. В противном случае амплитуда должна обладать поведением $s^{\alpha_N(0)}$, где $\alpha_N(0) < 1/2$, как это можно заключить из наклона траектории.

В работе [120] проанализированы данные по $\pi^\pm p$ -рассеянию назад в интервале значений импульсов от 4 до 10 Гэв/с. Существование двух изоспиновых состояний позволяет разделить вклады нуклонной и Δ -траекторий, и в результате было получено

$$\alpha_N(0) \approx -0.34. \quad (4.21)$$

Это свидетельствует, по-видимому, о том, что нуклон лежит на траектории Редже. Попутно подтверждается вывод, сделанный в гл. III, § 8, что реджевская формула справедлива и в том случае, когда при больших s угол z_u стремится не к бесконечности, а к единице. Некоторые интересные особенности этого процесса рассматриваются в § 6.

6. Невозможен обмен никакими известными траекториями

Существуют некоторые процессы, которые в принципе возможны, но в которые не может вносить вклад ни одна из известных траекторий. Примером может служить реакция $K^- p \rightarrow K^0 \Xi^0$, для которой требуется траектория со странностью 2. Вполне возможно, что в таких процессах доминируют разрезы. Так, в упомянутом примере разрез, обусловленный двойным обменом K^* -мезонами и начинающийся при

$$\alpha_c(0) = 2\alpha_{K^*}(0) - 1, \quad (4.22)$$

возникал бы при значении $-0,4$ и давал бы, вероятно, главный вклад. Однако до сих пор во всех реакциях такого типа не было обнаружено ни одного случая, который соответствовал бы резкому убыванию сечения с ростом энергии. Когда будет набрана более хорошая статистика, окажется возможным установить верхние пределы для вкладов от разрезов.

§ 5. ФАЗА АМПЛИТУДЫ РАССЕЯНИЯ ВПЕРЕД

1. Предсказание теории полюсов Редже

Замечательное свойство теории Редже (которое, как будет показано ниже, является более общим, чем сама теория) заключается в том, что она предсказывает однозначное соотношение между фазой амплитуды и степенью ее энергетической зависимости. Так, если поведение некоторой амплитуды определяется траекторией $\alpha(t)$, и если $\alpha(t)$ вещественно при физических $t > 0$, то при высоких энергиях

амплитуда ведет себя как $s^{\alpha(t)}$, а фаза амплитуды определяется формулой

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{-\sin \pi \alpha(t)}{\cos \pi \alpha(t) \pm 1}, \quad (5.1)$$

где знак плюс или минус выбирается в зависимости от того, положительна или отрицательна сигнатура. Эта формула вытекает из реджевских формул (II.10.3) или (IV.5.2). В гл. IV, § 6 мы указывали, что в физической области s -канала кинематические разрезы не нарушают этих формул.

Для траектории Померанчука $\alpha(0) = 1$, поэтому предсказывается, что в пределе высоких энергий амплитуда рассеяния вперед является чисто мнимой. На самом деле измерения, выполненные для πN - и NN -рассеяния, говорят о том, что амплитуда не является чисто мнимой, но это и не удивительно, так как в § 3 мы видели, что при достижимых в настоящее время энергиях другие траектории дают в амплитуду вклады, соизмеримые с вкладом померанчона.

2. Экспериментальная проверка

Баргер и Олссон [49] использовали значения параметров, полученные ими при обработке данных по полным сечениям (см. § 3), и вычислили отношение вещественной части амплитуды упругого рассеяния вперед к ее мнимой части. Фиг. VIII.12 иллюстрирует, в какой степени их предсказания согласуются с экспериментальными значениями отношения для процессов $\pi^{\pm}p$ -, pp - и $p\bar{p}$ -рассеяния. Уточненные данные [176] указывают на небольшое расхождение в случае $p\bar{p}$ -рассеяния при высоких энергиях, но неопределенность, возникающая в процессе подгонки, такова, что этому расхождению вряд ли стоит придавать большое значение. Для других процессов экспериментальных данных не имеется.

Здесь стоит подробнее остановиться на различии между π^+p - и π^-p -рассеянием. Из табл. 2 и из формулы (5.1) следует неравенство

$$\operatorname{Re} A(\pi^+p \rightarrow \pi^+p, s, 0) < \operatorname{Re} A(\pi^-p \rightarrow \pi^-p, s, 0). \quad (5.2)$$

Так как экспериментально установлено [174], что обе эти величины отрицательны, то

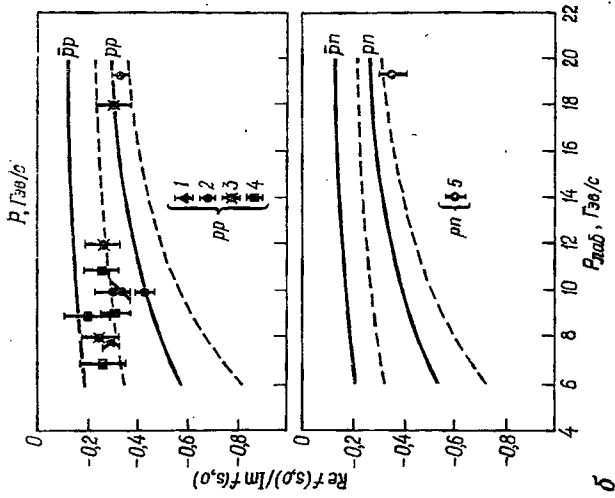
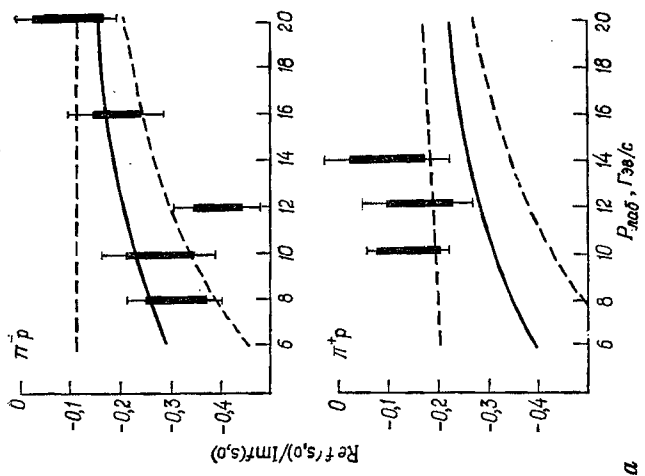
$$|\operatorname{Re} A(\pi^+p \rightarrow \pi^+p, s, 0)| > |\operatorname{Re} A(\pi^-p \rightarrow \pi^-p, s, 0)|. \quad (5.3)$$

Но для полных сечений (см. фиг. VIII.8) мы имеем

$$\sigma_{\text{полн}}(\pi^-p) > \sigma_{\text{полн}}(\pi^+p); \quad (5.4)$$

поэтому, объединяя (5.3) с (5.4), получаем

$$\frac{-\operatorname{Re} A(\pi^+p \rightarrow \pi^+p, s, 0)}{\operatorname{Im} A(\pi^+p \rightarrow \pi^+p, s, 0)} > \frac{-\operatorname{Re} A(\pi^-p \rightarrow \pi^-p, s, 0)}{\operatorname{Im} A(\pi^-p \rightarrow \pi^-p, s, 0)}. \quad (5.5)$$



а **б**

Ф и г. VIII.12. Экспериментальные данные и теоретические кривые для отношения вещественной и мнимой частей амплитуд рассеяния вперед для процессов: а — $\pi^+ p$ и б — $\pi^+ p, \pi^+ n, \pi^+ \bar{p}, \pi^+ n$. Пунктирные кривые соответствуют пределам ошибок, возникающих в процессе подгонки полных сечений. Экспериментальные данные: 1 — Гейлора и др., 2 — Беллеттини и др., 3 — Фолей и др. [176], 4 — Карлайлов и др.

Данные, приведенные на фиг. VIII.12, по-видимому, противоречат этому неравенству, но ошибки таковы, что в настоящее время нельзя говорить об этом с полной определенностью. Ясно, что более точные оценки вещественных частей этих амплитуд представляли бы огромный интерес.

По существу тот же вопрос можно изучить, рассматривая прямо амплитуду рассеяния с перезарядкой $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$. Считая, что ее поведение определяется ρ -мезонной траекторией, имеем

$$R \equiv \frac{\text{Re } A(\pi^-p \rightarrow \pi^0n, s, 0)}{\text{Im } A(\pi^-p \rightarrow \pi^0n, s, 0)} = \text{tg } \frac{\pi\alpha_\rho(0)}{2}, \quad (5.6)$$

или, воспользовавшись формулой (3.11),

$$R \approx 1,25. \quad (5.7)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & \frac{d\sigma}{d\Omega}(\pi^-p \rightarrow \pi^0n, s, t) |_{t=0} = \\ & = \frac{1}{(8\pi)^2 s} [1 + (1,25)^2] [\text{Im } A(\pi^-p \rightarrow \pi^0n, s, 0)]. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Правую часть этого равенства можно оценить с помощью формул (3.1), (4.8) и значений полных сечений π^-p - и π^+p -рассеяния. Полученное таким способом значение левой части (5.8) хорошо согласуется с экспериментальными данными [49].

Из эксперимента известно, что

$$\sigma_{\text{полн}}(K^-p) > \sigma_{\text{полн}}(K^-n) \text{ и } \sigma_{\text{полн}}(K^+p) > \sigma_{\text{полн}}(K^+n),$$

откуда следует, что вычеты траекторий ρ и A_2 должны иметь знаки, указанные в табл. 2. Далее, из (4.9), (4.10) и (5.1) следует, что вклады ρ и A_2 в вещественные части амплитуд рассеяния с перезарядкой для процесса $K^+n \rightarrow K^0p$ входят с одним знаком, а для процесса $K^-p \rightarrow K^0n$ они частично компенсируют друг друга. Поэтому можно ожидать, что вещественная часть амплитуды в первом случае будет больше, чем во втором. К сожалению, экспериментальные данные для процесса $K^+n \rightarrow K^0p$ отсутствуют; для процесса $K^-p \rightarrow K^0n$ имеется всего один результат, соответствующий импульсу $9,5 \text{ Гэв}/c$, который свидетельствует о том, что вещественная часть амплитуды мала, как это и должно быть [48].

Имеется один случай, а именно pp -рассеяние с перезарядкой, в котором возникает определенная трудность, связанная с предсказываемым значением фазы. Согласно изоспиновой инвариантности, амплитуда рассеяния вперед без переворота спина связана с разностью полных сечений pp - и pn -рассеяния соотношением (4.12). Далее, из эксперимента известно, что примерно при $3,7 \text{ Гэв}/c$ эта разность меняет знак, т. е.

$$\sigma_{\text{полн}}(pp) \geq \sigma_{\text{полн}}(pn) \quad (5.9)$$

для импульсов налетающих частиц $\leq 3,7 \text{ Гэв/с}$. Такое поведение нетрудно объяснить, используя данные табл. 2. Для этого требуется лишь, чтобы вклады ρ и A_2 при импульсе налетающих частиц, равном $3,7 \text{ Гэв/с}$, были равны. При более высоких импульсах будет доминировать ρ -мезон, так как его траектория расположена выше [см. (3.8) и текст ниже формулы (4.15)]. Вклад A_2 при более высокой энергии определен недостаточно точно, но он согласуется с таким поведением (см. [49]).

Благодаря тому, что ρ и A_2 имеют разные сигнатуры, их вклады в вещественную часть амплитуды np -рассеяния с перезарядкой входят с одинаковыми знаками, а в мнимую часть — с противоположными знаками. Таким образом, в области достаточно низких энергий амплитуда рассеяния с перезарядкой будет в основном вещественной. Поскольку мнимая часть уже известна из данных по полным сечениям, это позволяет получить нижний предел для сечения рассеяния вперед с перезарядкой. Этот предел является именно нижним, так как в случае процесса с перезарядкой может иметь место двойной перевернутый спин. В работе [233] указывается, что такой нижний предел примерно в 60 раз превышает экспериментальное значение сечения при 8 Гэв/с . В более поздней работе [234] кроме упоминавшихся траекторий была учтена также траектория ρ' с квантовыми числами ρ -мезона. В результате удалось согласовать все экспериментальные данные вплоть до 3 Гэв/с при выборе для $\alpha_{\rho'}(0)$ значения

$$\alpha_{\rho'}(0) \approx -0,63. \quad (5.10)$$

В этой работе отмечается также, что с равным успехом можно использовать и траекторию A'_2 (с квантовыми числами A_2 -мезона).

В этой связи уместно отметить, что на основе простых моделей ожидается существование нескольких различных траекторий с одними и теми же квантовыми числами. Однако вследствие влияния сигнатуры они должны быть удалены друг от друга на две единицы углового момента [а не на одну единицу, как это требуется для ρ' -мезона в (5.10)]. Например, в простой потенциальной модели мы получаем траектории, которые стремятся к чередующимся целым числам. Существует и другое решение проблемы — ρ' -траекторию можно рассматривать как проявление разреза в J -плоскости. Другие данные в пользу существования ρ' (в качестве траектории Редже или некоторого приближения к вкладу разреза) приведены в § 7 данной главы.

3. Другие способы вывода предсказаний теории Редже

Как отмечалось выше, предсказание теории полюсов Редже о существовании однозначной связи между фазой амплитуды и показателем степени ее энергетического поведения можно получить и не используя явно эту теорию. Чтобы убедиться в этом, допустим лишь, что амплитуда $A(s, t)$ удовлетворяет дисперсионному соотношению по s

и что

$$\frac{\operatorname{Im} A(s, t)}{|s|^\alpha} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} C, \quad (5.11)$$

$$\frac{\operatorname{Im} A(s, t)}{|s|^\alpha} \xrightarrow{s \rightarrow -\infty} \pm C \quad (5.12)$$

с некоторым вещественным α . Число вычитаний, которые необходимо делать в дисперсионном соотношении, зависит от α . Предположим, например, что $0 < \alpha < 1$; тогда можно ограничиться одним вычитанием и записать дисперсионное соотношение в виде (I.10.8)

$$\operatorname{Re} \{A(s, t)\} = \operatorname{Re} \{A(0, t)\} + \\ + s \frac{P}{\pi} \int_{\text{пр. разр.}} \frac{\operatorname{Im} \{A(s', t)\}}{(s' - s)s'} ds' + s \frac{P}{\pi} \int_{\text{лев. разр.}} \frac{\operatorname{Im} \{A(s', t)\}}{(s' - s)s'} ds', \quad (5.13)$$

где символ P означает, что берется главное значение следующего за ним интеграла. Подставляя (5.11) и (5.12) в (5.13) и используя формулы (T2, 15.2.28) и (T2, 14.2.5)

$$\frac{P}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds'}{s' - s} s'^{\alpha-1} = -s^{\alpha-1} \operatorname{ctg} \pi\alpha, \quad (5.14)$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{ds'}{s' + s} s'^{\alpha-1} = -s^{\alpha-1} \operatorname{cosec} \pi(\alpha - 1) \quad (5.15)$$

при $s > 0$, получаем

$$\frac{\operatorname{Re} \{A(s, t)\}}{s^\alpha} \xrightarrow{s \rightarrow \infty} -C [\operatorname{ctg} \pi\alpha \mp \operatorname{cosec} \pi\alpha]. \quad (5.16)$$

Объединяя эту асимптотику с (5.11), получаем соотношение (5.1). Очевидно, это доказательство можно воспроизвести и для других значений α .

Таким образом, мы видим, что согласие предсказываемого значения фазы с экспериментальными данными подтверждает степенное поведение (5.11) и (5.12) и дисперсионное соотношение для амплитуды, но не затрагивает другие аспекты теории Редже.

§ 6. УГЛОВАЯ ЗАВИСИМОСТЬ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СЕЧЕНИЙ

1. Полюса Редже и дифференциальные сечения

Вклад одиночного полюса Редже в амплитуду рассеяния имеет вид

$$A^R(s, t) = \Gamma(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha(t)}, \quad (6.1)$$

где $\Gamma(t)$ — произведение вычета $\beta(t)$ на кинематические множители. Зависимость $\beta(t)$ от t не известна и для каждой траектории имеется

много различных функций $\beta(t)$ (некоторую связь между ними устанавливает теорема о факторизации), поэтому подгонка дифференциальных сечений является гораздо более сложным процессом, чем в случае полных сечений.

Обычно из вычетов выделяются всевозможные кинематические множители, хотя мы и видели в гл. IV, § 6, что никаких серьезных оснований для такого выделения нет. При этом надеются, что в представляющей интерес области изменения инварианта t приведенный вычет будет приблизительно постоянным, но мы увидим, что эта надежда не всегда оправдывается. До сих пор не достигнуто общего соглашения о наилучшем способе параметризации функции $\beta(t)$, что затрудняет сравнение результатов, полученных в работах разных авторов.

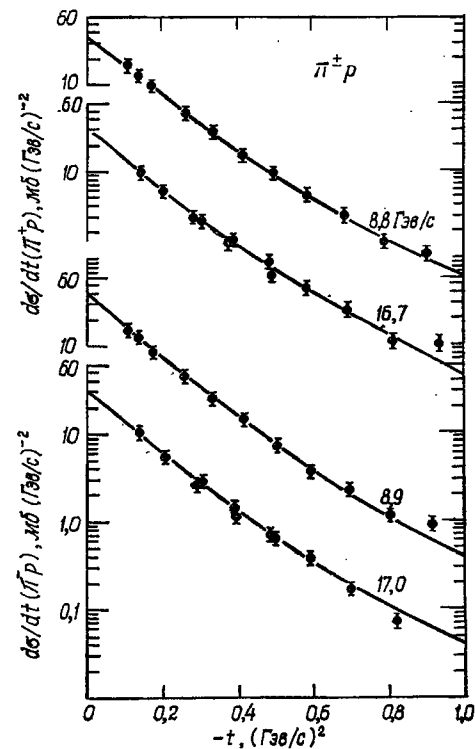
Имеет смысл указать на две характерные черты, присущие формуле (6.1). Во-первых, она предсказывает «стягивание» углового распределения при возрастании энергии, и во-вторых, вследствие нулей функции $\Gamma(t)$ в физической области в угловом распределении возникают «провалы». Чтобы разобраться в первой проблеме, рассмотрим область $t \approx 0$ и запишем

$$\alpha(t) \approx \alpha(0) + t\alpha'(0). \quad (6.2)$$

Тогда получим

$$A^R(s, t) = \Gamma(t) s^{\alpha(0)} e^{\alpha'(0)t \ln(s/s_0)}. \quad (6.3)$$

Мы видим, что если $\Gamma(t)$ изменяется медленно [это справедливо, конечно, лишь в том случае, если s_0 в (6.1) выбрано подходящим образом], то спад амплитуды в зависимости от квадрата переданного импульса (равного $-t$) будет экспоненциальным. Кроме того, независимо от поведения $\Gamma(t)$, скорость этого спада *увеличивается* по мере роста энергии, т. е. при возрастании энергии дифракционный пик рассеяния вперед сужается. Этот результат является весьма нежиз-



Ф и г. VIII.13. Экспериментальные данные по дифференциальным сечениям процессов $\pi^- p$ и $\pi^+ p$ при разных энергиях и подгоночные кривые [332, 345].

конечно, лишь в том случае, если s_0 в (6.1) выбрано подходящим образом], то спад амплитуды в зависимости от квадрата переданного импульса (равного $-t$) будет экспоненциальным. Кроме того, независимо от поведения $\Gamma(t)$, скорость этого спада *увеличивается* по мере роста энергии, т. е. при возрастании энергии дифракционный пик рассеяния вперед сужается. Этот результат является весьма нежиз-

данным. Он означает, что «размеры» области рассеяния при возрастании энергии неограниченно увеличиваются (по логарифмическому закону), но при этом она размазывается, так что сохраняется постоянно полное сечения. Такой вывод резко стимулировал развитие теории Редже после того, как экспериментально было замечено, что дифракционный пик pp -рассеяния, по-видимому, действительно сужается. Однако более поздние измерения [173] показали, что в высокоэнергетической области pp -рассеяния это поведение выражено не столь явно и что в случае других процессов доказательства подобного сужения отсутствуют. Самые последние из имеющихся экспериментальных данных приведены на фиг. VIII.13—VIII.136.

Отсутствие сужения для большинства процессов упругого рассеяния привело к тому, что многие физики вообще отказались от модели полюсов Редже. При этом они руководствовались скорее эмоциональными, чем рациональными соображениями, так как из изложенного в § 3 ясно, что при достигнутых в настоящее время энергиях в высокоэнергетическое рассеяние дают вклад несколько траекторий, тогда как аргументы, приводящие к сужению, справедливы лишь в той области, где рассеяние адекватно описывается одной траекторией. Таким образом, отсутствие сужения хотя и несколько уменьшает привлекательность модели, но не заставляет от нее отказываться. Для упругого рассеяния общая ситуация оказывается весьма сложной, поэтому прежде чем перейти к рассмотрению попыток более точного описания экспериментальных данных, мы сначала остановимся на тех случаях, в которых достаточно учесть только одну траекторию.

2. $\pi - N$ -рассеяние с перезарядкой и ρ -траектория

Простейшим из всех имеющихся процессов является рассеяние $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$. В t -канале этой амплитуды (процесс $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$) имеется два независимых вычета ρ -мезонной траектории, а именно ее вычеты в $\langle 00 | A^t | ++ \rangle$ и $\langle 00 | A^t | +- \rangle$. Для удобства сравнения мы будем пользоваться здесь обозначениями работы [237], записывая дифференциальное сечение рассеяния $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ в виде

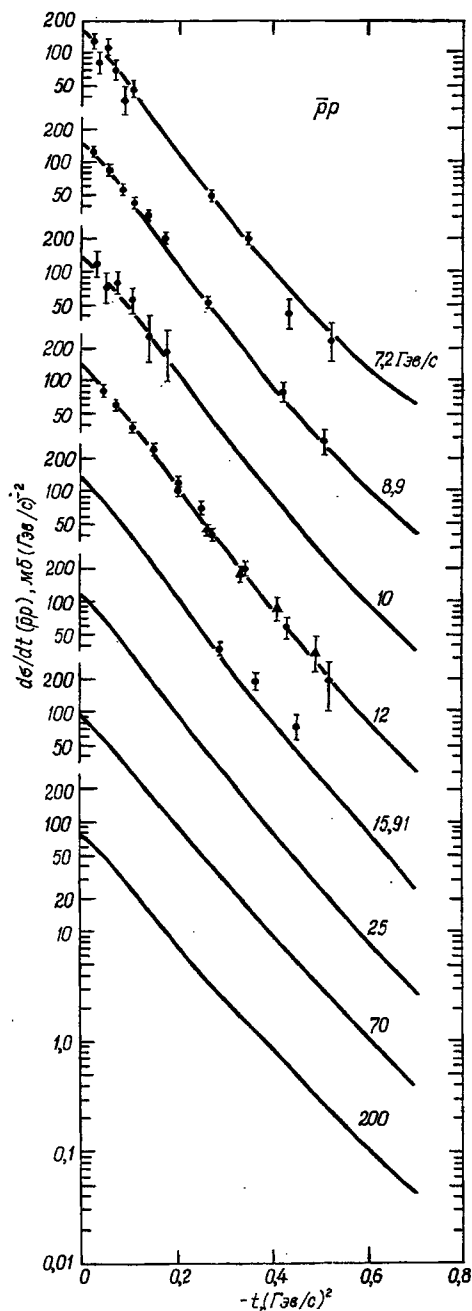
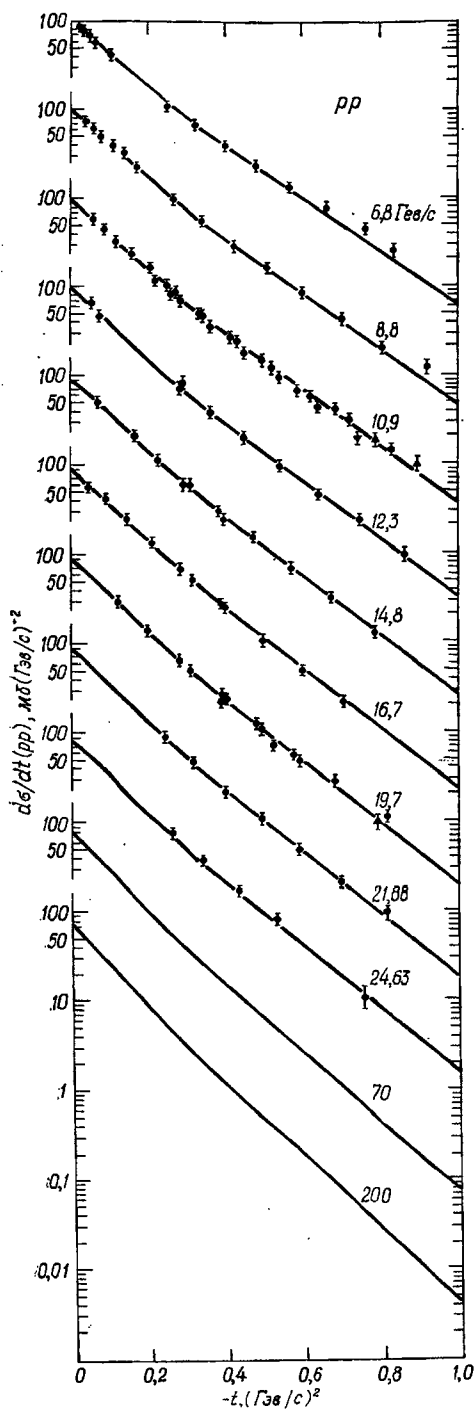
$$\frac{d\sigma}{dt} = \left(\frac{\omega}{M}\right)^{2\alpha-2} \left[1 + \frac{t}{4M\omega}\right]^{2\alpha} T(t), \quad (6.4)$$

где

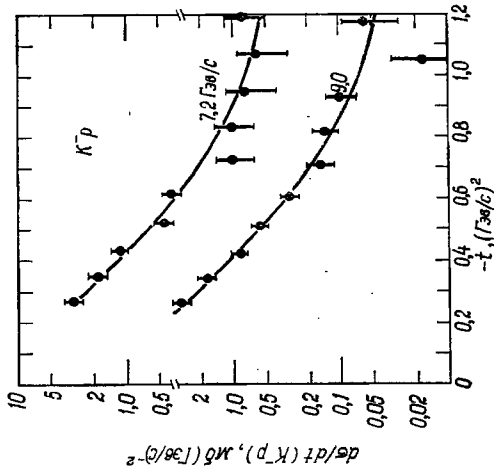
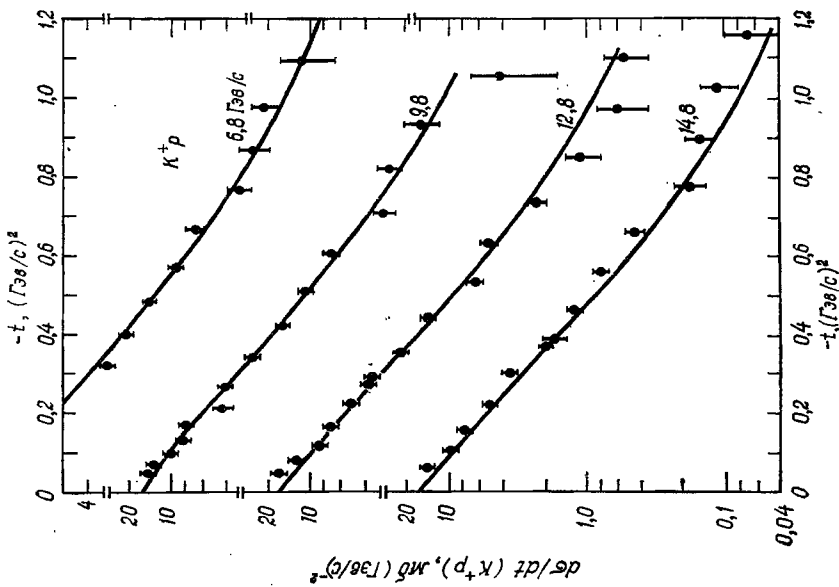
$$T(t) = \frac{1}{2M^4} \left(1 - \frac{t}{4M^2}\right)^{-1} \cos^{-2} \frac{\pi\alpha}{2} \left[\frac{2^\alpha (\alpha + 1/2)!}{\alpha!}\right]^2 V(t), \quad (6.5)$$

$$V(t) = b_+^2(t) - \frac{t\alpha^2(t)}{4M^2} b_-^2(t); \quad (6.6)$$

здесь ω — энергия пиона в лабораторной системе, $\alpha = \alpha(t)$ — траектория ρ -мезона и $b_\pm(t)$ — два независимых вычета с выделенными

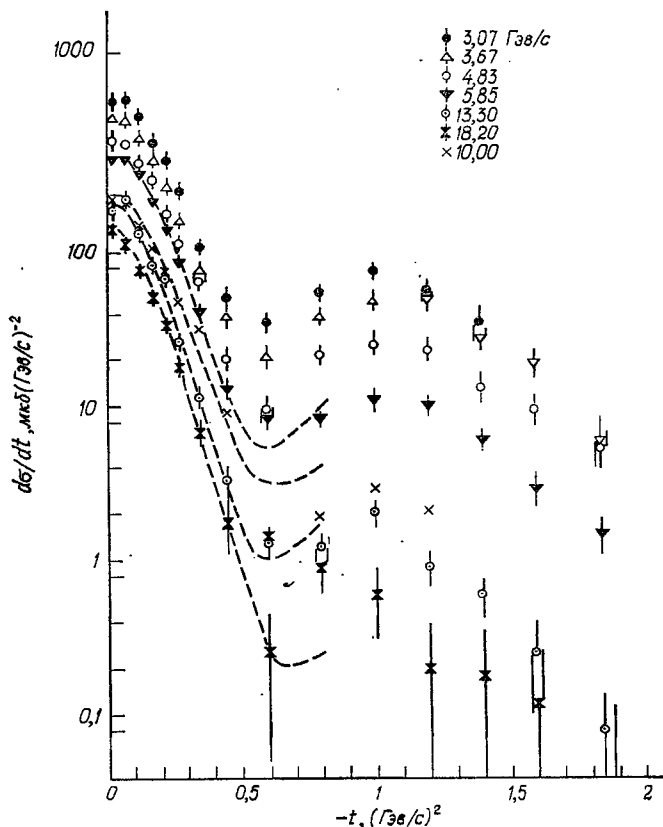


Ф и г. VIII.13а. Экспериментальные данные по дифференциальным сечениям процессов pp и $\bar{p}p$ при разных энергиях и подгоночные кривые [332, 345].



Ф и г. VIII.136. Экспериментальные данные по дифференциальным сечениям процессов K^+p и K^-p при разных энергиях и подгоночные кривые [332, 345].

кинематическими сингулярностями. Множитель $\alpha^2(t)$, стоящий в (6.6) перед $b_-^2(t)$, обусловлен тем, что $J=0$ является полубесмысленным значением для амплитуды $\langle 00 | A^t | + - \rangle$ (см. гл. IV, § 6). Ниже мы рассмотрим другое выражение для $V(t)$.

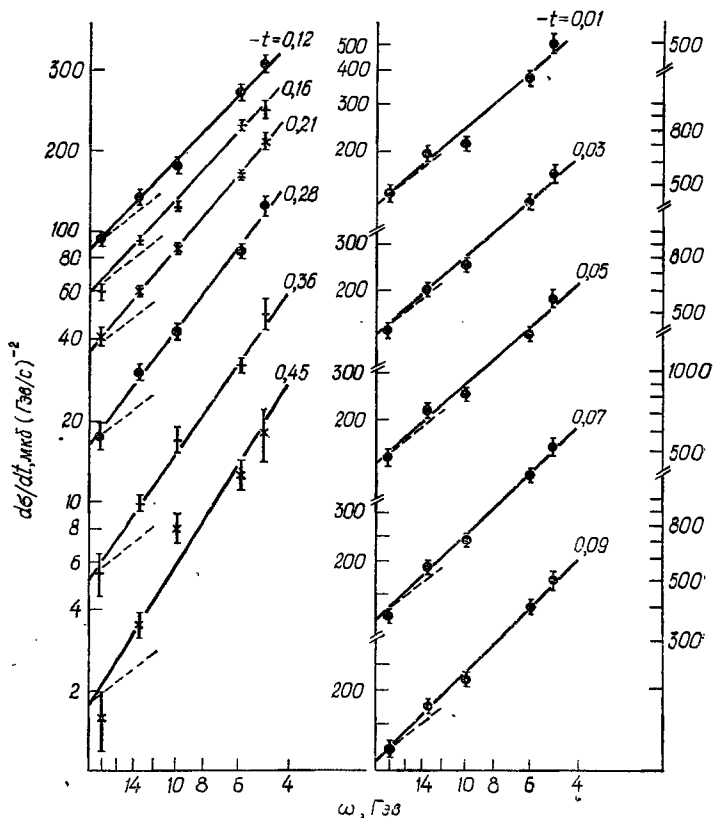


Ф и г. VIII.14. Дифференциальные сечения процесса $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ при различных значениях импульса налетающих пионов [366].

Пунктирные кривые проведены по данным более ранних работ для 5,9, 9,8, 13,3 и 18,2 Гэв/с.

На фиг. VIII.14 приведены имеющиеся в настоящее время экспериментальные данные [366]; ясно, что они содержат большое количество информации. На фиг. VIII.15 представлены графики функции $d\sigma/dt$ ($\pi^-p \rightarrow \pi^0n$) в зависимости от $\ln \omega$ при различных значениях t . В соответствии с (6.4) эти графики должны быть прямыми линиями с наклонами, равными $2\alpha(t) - 2$ [множитель, заключенный в (6.4) в квадратные скобки, при не очень больших t пренебрежимо мал;

в других случаях, рассматриваемых ниже, он учитывается]. Тот факт, что наклоны линий на фиг. VIII.15 при возрастании t становятся более крутыми, свидетельствует о наличии сужения. Пунктирные линии на фиг. VIII.15 дают наклоны, которые ожидаются в случае,



Фиг. VIII.15. Зависимость $\ln(d\sigma/dt)$ от $\ln \omega$ для процесса $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ [237]. Пунктирные линии соответствуют наклону $2\alpha(0) - 2$. Сплошные линии — подгоночные кривые для $\ln(d\sigma/dt)$, полученные с $\alpha(t) = 0,57 + 0,91t$.

когда наклон траектории равен нулю, т. е. $\alpha(t) = \alpha(0) = 0,57$. Для значений $\alpha(t)$ хорошее приближение дает линейная траектория

$$\alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0), \quad (6.7)$$

что иллюстрирует фиг. VIII.16, на которой значения $\alpha(t)$, вычисленные согласно (6.7), сравниваются со значениями $\alpha(t)$, полученными непосредственно из фиг. VIII.15. Наилучшие значения $\alpha(0)$ и $\alpha'(0)$

Таблица 3

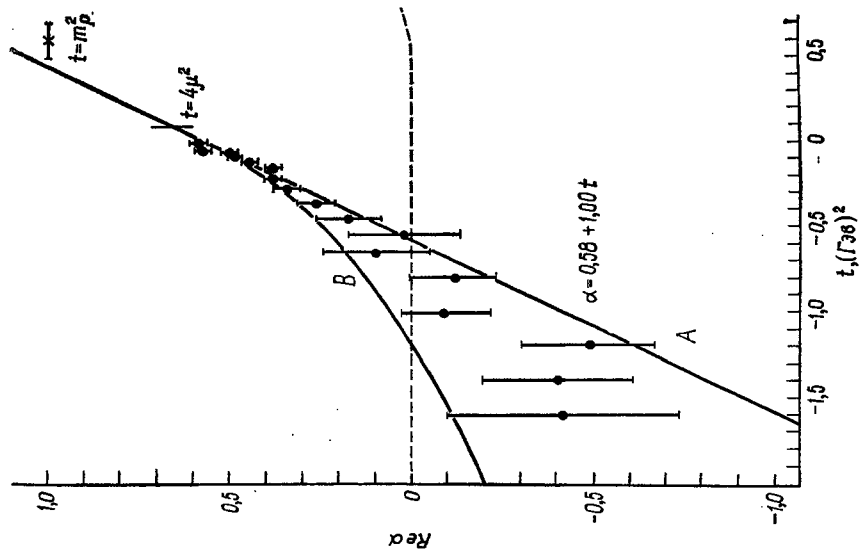
ЗНАЧЕНИЯ ПОДГОНОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ РАССЕЯНИЯ π - $p \rightarrow \pi^0 n$ [237]

Интервал значений ω , Гэв	Интервал значений $-t$ (Гэв/с) ²	$\alpha(0)$	$\alpha'(0)$, (Гэв/с) ⁻²	Rea (m_p^2) (линейная экстраполяция)
5,9—18,2	0—0,28	0,58±0,01	1,00±0,11	1,16±0,07
5,9—18,2	0—1,0	0,57±0,01	0,91±0,06	1,10±0,04

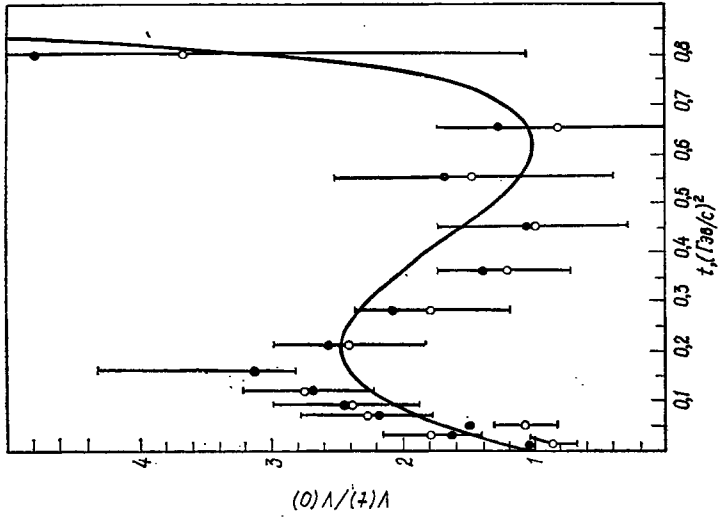
приведены в табл. 3; в рассматриваемой области они немного зависят от энергии и передаваемого импульса. На фиг. VIII.16 указаны также значения функции $\alpha(t)$, полученные в более ранней работе [334], где использовалась параметризация Пигнотти [335], при которой накладывается требование, чтобы траектория проходила через точку, соответствующую физическому ρ -мезону, и имела $\alpha(\infty) = -1$ (см. гл. V, § 7). В результате такой подгонки возникают траектории, более кривые, чем этого требуют экспериментальные данные.

Из табл. 3 и фиг. VIII.16 видно, что если интерполировать значения $\alpha(t)$ при $t < 0$ прямой линией и продолжить эту прямую до $J = 1$, то она пройдет вблизи массы ρ -мезона. Таким образом, имеется замечательная корреляция между физическим ρ -мезоном и экспериментальными данными, представленными на фиг. VIII.14. Эта корреляция едва ли является случайной, и она весьма убедительно подтверждает модель полюсов Редже. Отметим, что наличие незначительной кривизны траектории на фиг. VIII.16 и тот факт, что при $J = 1$ экстраполированная прямая не совсем точно проходит через точку $t = m_p^2$, ни в коей мере не являются недостатками теории Редже. Более того, как мы указывали выше, существование столь прямолинейных траекторий является довольно неожиданным (к этим вопросам мы еще вернемся в § 9).

Рассмотрим теперь зависимость дифференциального сечения от t . На фиг. VIII.16а приведена кривая $V(t)$, определяемая формулой (6.6), которая лучше всего соответствует экспериментальным данным. Она имеет две интересные особенности: провал для рассеяния вперед и еще один провал при $t \approx -0,6$ Гэв/с. Оба эти провала нетрудно объяснить на основе формулы (6.6), не учитывая зависимость вычетов $b_{\pm}(t)$ от t . Если предположить, что b_- больше, чем b_+ , то множитель $t\alpha^2(t)$ будет иметь в точности такой вид, который необходим для того, чтобы возник провал при $t = 0$, а также при $t \approx -0,6$ Гэв/с, где согласно приведенным выше результатам $\alpha(t) \approx 0$. Такое поведение является примером второй характерной особенности, которая свойственна теории Редже и которая упоминалась в начале этого параграфа. Впервые на нее указал Фраучи [181]. Отметим, что мы здесь привлекаем неза-



Ф и г. VIII.16. ρ -мезонная траектория, полученная в работе [237] (А), и траектория, полученная в результате подгонки [332] с применением формулы Пнгнотт (В).



Ф и г. VIII.16а. Значения $V(t)/V(0)$, полученные из экспериментальных данных [336], и подгоночная кривая [237], упомянутая в тексте.

висимую информацию; выше $\alpha(t)$ определялось исключительно по изменению энергии, а ее абсолютное значение при заданном t не использовалось. На фиг. VIII.16а представлены результаты обработки экспериментальных данных [237] для функции $V(t)$, полученные в предположении $b_{\pm}(t) = b_{\pm}(0)$ и $b_-/b_+ = 13$. Однако авторы работы [237] указывают, что если, как это обычно считается, основным вклад в электромагнитные формфакторы дает физический ρ -мезон, то на самом деле отношение b_-/b_+ не может оставаться постоянным, так как при $t = m_{\rho}^2$ оно должно принимать значение, приблизительно равное 3. Аналогичное объяснение существования провала дается в работах [23, 24].

В этом рассмотрении мы пока не учитывали одну возможность, упоминавшуюся в гл. V, § 4. Амплитуда рассеяния $N\bar{N} \rightarrow \pi\pi$ при полубессмысленном значении $J = 0$, соответствующем неправильной сигнатуре (т. е. амплитуда $\langle 00 | A^-(N\bar{N} \rightarrow \pi\pi) | 1/2, -1/2 \rangle$, где индекс минус у A^- отвечает сигнатуре), содержит неподвижный полюс; этот полюс может возникать и в вычете траектории ρ -мезона, в точке, где она принимает значение $\alpha_{\rho} = 0$. Если это действительно так, то полюс компенсирует нуль, обусловленный множителем α_{ρ} , поэтому приведенное выше объяснение провала в дифференциальном сечении становится непригодным. Анализ, проведенный в гл. V, не дает никаких указаний на то, содержит ли на самом деле в вычете этот полюс, или он отсутствует. Но даже если такой полюс возникает, то он, вероятно, в определенном смысле является «слабым», так как его происхождение связано с наличием третьей двойной спектральной функции. Таким образом, вполне правдоподобно, что в любом случае приведенное выше объяснение провала (и аналогичное объяснение других провалов, еще один пример которых рассматривается ниже) в основном является правильным.

Итак, мы видим, что экспериментальные данные, относящиеся к πN -рассеянию с перезарядкой, по-видимому, очень хорошо описываются полюсом Редже ρ -мезона с удивительно прямолинейной траекторией и с отношением функций b_+ и b_- , которое приближенно постоянно в области $0 > t > -0,7 \text{ Гэв}^2/c$. Однако когда мы перейдем к анализу поляризации в этом процессе, мы увидим, что такая подгонка удовлетворительна не во всех отношениях.

3. Рассеяние $\pi p \rightarrow \eta p$ и A_2 -траектория

Филлипс и Рарита [333] провели аналогичный анализ процесса $\pi p \rightarrow \eta p$, в который из всех известных мезонов может давать вклад только A_2 . В этом случае также наблюдается явное сужение дифракционного пика, причем экспериментальные данные в области импульсов, превышающих примерно $3 \text{ Гэв}^2/c$, хорошо описываются реджевской формулой. На фиг. VIII.17 приведена зависимость $\alpha(t)$ от t , получен-

ная экспериментально в работе [333], и кривые, соответствующие следующим четырем подгоночным формулам:

$$1. \alpha(t) = \alpha(0), \tag{6.8}$$

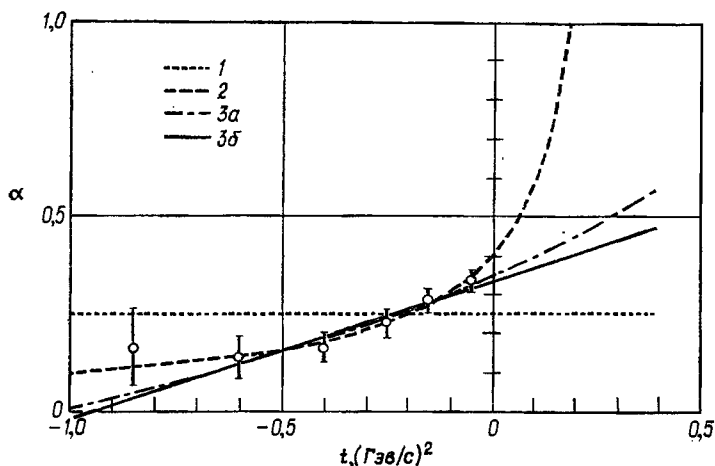
$$2. \alpha(t) = \alpha(0) + t\alpha'(0), \tag{6.9}$$

$$3. \alpha(t) = \alpha(\infty) + \frac{[\alpha(0) - \alpha(\infty)]^2}{\alpha(0) - \alpha(\infty) + t\alpha'(0)} \tag{6.10}$$

(формула, предложенная Пигнотти [335]), причем учитывались два разных варианта:

$$3а. \alpha(\infty) = 0, \quad 3б. \alpha(\infty) = -1.$$

Наилучшие значения параметров и соответствующие значения χ^2 ¹ приведены в табл. 4, где для сравнения указаны также ожидаемые значения $\chi_{\text{ожид}}^2$ (равные числу данных минус число параметров).



Ф и г. VIII.17. Кривые зависимости $\alpha(t)$ от t (A_2 -траектории), полученные в результате обработки данных по рассеянию $\pi^-p \rightarrow \eta^0 n$ [333].

Мы видим, что в случае линейной подгоночной формулы наклон A_2 -траектории гораздо меньше наклона p -траектории. Одной из причин этого является, по-видимому, отсутствие для рассматриваемого процесса провала в дифференциальном сечении, аналогичного провалу в сечении рассеяния $\pi^-p \rightarrow \pi^0 n$. Это означает, что траектория $\alpha_{A_2}(t)$ не должна проходить через нулевое значение, так как в противном

¹) Эта величина используется при обработке экспериментальных данных с помощью метода оценки достоверности гипотезы, носящего название критерия χ^2 . — Прим. ред.

случае существовал бы провал, обусловленный обращением в нуль амплитуды кросс-канала с переворотом спина при том значении t , для которого $\alpha_{A_2}(t) = 0$.

Таблица 4

ЗНАЧЕНИЯ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ ПРОЦЕССА $\pi^-p \rightarrow \eta^0n$ [333]

【Формула	$\alpha(0)$	$\alpha'(0)$	χ^2	$\chi^2_{\text{ожд}}$
1	$0,25 \pm 0,02$	—	39,9	28
2	$0,34 \pm 0,03$	$0,35 \pm 0,08$	21,4	27
3а	$0,40 \pm 0,04$	$1,19 \pm 0,56$	18,8	27
3б	$0,35 \pm 0,03$	$0,46 \pm 0,11$	20,4	27

В работе [24] предлагается способ, позволяющий получить более крутой наклон траектории за счет различия в свойствах вычетов. Чтобы понять этот способ, напомним, что амплитуда t -канала с переворотом спина $\langle + - | A^t | 00 \rangle$ имеет вычет, который обладает поведением типа $\sqrt{\alpha}$ в окрестности значения $\alpha = 0$, так как при этом значении α амплитуда является полубессмысленной. Используя теорему о факторизации, мы можем записать этот вычет в виде

$$\beta_{+-} = \gamma_{+-}^N \gamma^{\pi\eta},$$

а вычет, отвечающий амплитуде перехода из физического в физическое состояние, в виде

$$\beta_{++} = \gamma_{++}^N \gamma^{\pi\pi}.$$

Множитель $\sqrt{\alpha}$ естественно включить в γ_{+-}^N , чтобы амплитуда перехода из физического состояния в физическое $\langle ++ | A^t(\pi^-p \rightarrow \eta^0n) | 00 \rangle$ не обращалась в нуль при $\alpha = 0$. Это означает, что при $\alpha = 0$ траектория «выбирает» физическое состояние (тогда она не будет связана с бессмысленной амплитудой рассеяния $\bar{N}N \rightarrow \bar{N}N$, так как соответствующий ей вычет равен $\gamma_{+-}^N \gamma_{++}^N$). Другая возможность для траектории заключается в том, что при $\alpha = 0$ она «выбирает» бессмысленное состояние; при этом γ_{++}^N , $\gamma^{\pi\eta}$, $\gamma^{\pi\pi}$ и т. д. должны иметь множитель $\sqrt{\alpha}$. Отметим, что если бы для ρ -мезона была выбрана эта вторая возможность, то обе спиральные амплитуды рассеяния $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ при $\alpha = 0$ обращались бы в нуль. Это означало бы, что при учете только ρ -траектории провал в дифференциальном сечении доходил бы до нуля, и чтобы избежать противоречия с экспериментальными данными, пришлось бы привлечь дополнительный вклад, создаваемый фоном.

В случае A_2 ситуация несколько иная, так как этот мезон имеет положительную сигнатуру. Поэтому вычет A_2 -траектории во всех

амплитудах при $\alpha(t) = 0$ должен равняться нулю, так как не может существовать связанного состояния с $t < 0$ [нуль нужен для того, чтобы компенсировать полюс, возникающий благодаря множителю $(\sin \pi\alpha)^{-1}$ в реджевской формуле]. Состояние с отрицательным t носит название «призрака», а его устранение с помощью нулевого вычета называют «убийством призрака». Если A_2 «выбирает» физическое состояние при $\alpha(t) = 0$, то чтобы ввести в β_{++} множитель α , необходимо потребовать существования в каждой функции $\gamma(t)$ дополнительного множителя $\sqrt{\alpha}$. Тогда $\beta_{+-} \sim \alpha^{3/2}$, и тем самым предсказывается провал в сечении при $\alpha = 0$. Однако если траектория «выбирает» бессмысленное состояние, то мы сразу же получим $\beta_{++} \sim \alpha$ и $\beta_{+-} \sim \sqrt{\alpha}$, так что для компенсации полюса $(\sin \pi\alpha)^{-1}$ при $\alpha = 0$ не требуется никаких дополнительных множителей (как мы видели в гл. IV, § 2, функция $d_{\lambda\lambda}^J$ в полубесмысленном случае содержит множитель $\sqrt{\alpha}$). В этом случае не будет провалов даже в тех точках, где траектория $\alpha_{A_2}(t)$ проходит через нуль. Устраняя это ограничение, мы тем самым получаем большую свободу при описании экспериментальных данных.

4. Другие процессы мезон-нуклонного рассеяния с перезарядкой

Кроме $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$ и $\pi^-p \rightarrow \eta n$ имеется еще два процесса этого типа, при которых требуется обмен траекторией с $I = 1$ в t -канале, а именно, процессы $K^-p \rightarrow \bar{K}^0n$ и $K^+n \rightarrow K^0p$. Данные о втором из них можно получить лишь из рассеяния K -мезонов на дейтронах, и они имеются только в области низких энергий, но относительно первого процесса имеется довольно обширная экспериментальная информация. Арбаб и др. [24] проанализировали одновременно три процесса: $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, $\pi^-p \rightarrow \eta n$ и $K^-p \rightarrow \bar{K}^0n$ (в последний дают вклад как ρ -, так и A_2 -траектории), причем были рассмотрены три возможных варианта:

- 1) ρ и A_2 «выбирают» при $\alpha = 0$ физическое состояние;
- 2) ρ «выбирает» физическое состояние, а A_2 — бессмысленное состояние;
- 3) ρ и A_2 «выбирают» бессмысленное состояние.

Для всех трех вариантов достигнуто хорошее согласие с экспериментом (в 12 случаях) с помощью линейных траекторий. Оказалось, что параметры ρ -траектории не очень чувствительны по отношению к тому, какая из трех возможностей выбирается, причем во всех случаях их значения близки к значениям, полученным выше. Однако параметры A_2 -траектории, особенно ее наклон, изменяются в широких пределах. В частности, во втором и третьем случаях удается получить гораздо больший наклон, чем прежде. Показано, что если у некоторых вычетов допустимы некинематические нули (см. ниже в этом параграфе), то даже в первом случае допустим наклон

$$\alpha'_{A_2}(0) \approx 0,85 \text{ (Гэв/с)}^{-2}.$$

Дальнейшие подробности читатель может найти в работе [24]. Однако из этого анализа ясно, что необходимо проделать еще большую экспериментальную работу, прежде чем можно будет окончательно установить параметры A_2 -траектории (включая вопрос о том, какое состояние она «выбирает» — физическое или бессмысленное).

Рарита и Шварцшильд [344] показали, что ρ - и A_2 -траектории, полученные в результате анализа этих процессов, не могут объяснить экспериментальные данные по K^+n -рассеянию с перезарядкой при $2,3 \text{ Гэв/с}$, и, по-видимому, необходимо учитывать какой-то другой вклад (они использовали гипотетический ρ' -мезон).

5. $\pi^\pm p$ -рассеяние назад и фермионные траектории

Интересным процессом, в котором участвует фермионная траектория, является $\pi^\pm p$ -рассеяние назад. Предполагается, что здесь должны доминировать полюса Редже u -канала ($\pi N \rightarrow \pi N$). Превосходный анализ этой проблемы проведен в работе [120]. Экспериментальные данные имеют следующие две характерные особенности:

1) пик π^+p -рассеяния назад на порядок больше пика π^-p -рассеяния назад;

2) сечение π^+p -рассеяния имеет резкий провал при

$$u \approx -0,2 \text{ (Гэв/с)}^2. \quad (6.11)$$

Обе эти особенности нетрудно объяснить с помощью траекторий N и Δ . Поскольку связь нуклонной траектории является гораздо более сильной, то учитывая, что эта траектория не дает вклада в π^-p -рассеяние назад, мы сразу приходим к указанному соотношению между величинами пиков. Существование провала связывается с кинематическим множителем, возникающим, когда нуклонная траектория принимает значение $\alpha_N = -1/2$. Этот механизм полностью аналогичен упоминавшемуся выше механизму, который приводит к провалу в дифференциальном сечении πN -рассеяния с перезарядкой (за исключением того, что здесь участвует только одна связь), причем справедливы те же замечания относительно возможности компенсации нуля неподвижным полюсом, который содержится в амплитуде при $J = -1/2$ (это значение соответствует неправильной сигнатуре). Однако мы предполагаем, что такая компенсация или не происходит, или же она дает «почти нуль».

Вследствие принципа симметрии Мак-Дауэлла (см. гл. IV, § 7) нужно включать вклады траектории при обоих значениях $\pm \sqrt{u}$, и для возникновения провала необходимо, чтобы при $u = -0,2 \text{ (Гэв/с)}^2$

$$\alpha(+\sqrt{u}) \approx \alpha(-\sqrt{u}) \approx 0. \quad (6.12)$$

Это свидетельствует о том, что в каком-то приближении траекторию можно считать четной функцией по \sqrt{u} , что, по-видимому, подтвержда-

ется анализом расположенных на ней физических частиц (см. § 1 и фиг. VIII.7). Дальнейшие подробности, касающиеся обработки экспериментальных данных, см. в работе [120].

6. Обмен пионом при NN - и $\bar{N}N$ -рассеянии с перезарядкой

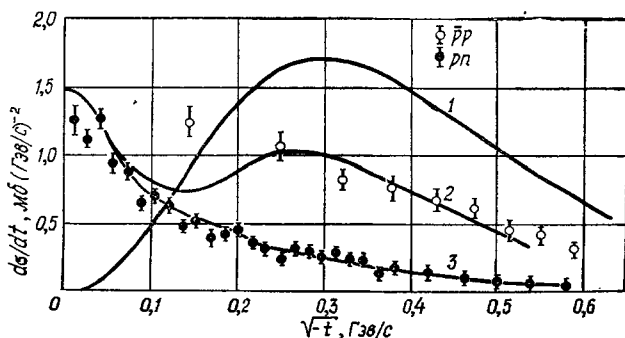
Имеются некоторые случаи, в которых угловая зависимость дифференциальных сечений не вполне понятна; к ним относятся процессы NN - и $\bar{N}N$ -рассеяния с перезарядкой, т. е.

$$p + n \rightarrow n + p \tag{6.13}$$

и

$$\bar{p} + p \rightarrow \bar{n} + n. \tag{6.14}$$

Модель полюсов Редже требует, чтобы при высоких энергиях эти процессы определялись обменом траекториями ρ и A_2 . Вполне вероятно, что это так и есть, но в то же время совершенно очевидно, что



Ф и г. VIII.18. Дифференциальные сечения $\bar{p}p$ - и pn -рассеяния с перезарядкой при $8 \text{ Гэв}/c$ в зависимости от $\sqrt{-t}$ (чтобы выделить область малых значений t). Кривая 1 соответствует вкладу обмена реджеваным пионом, а кривые 2 и 3 являются подгончными кривыми, полученными в работе [331] при использовании обмена пионом и ρ -траекторией при учете конспирации.

при доступных в настоящее время энергиях (до 8 Гэв) объяснить экспериментальные данные с помощью этих двух траекторий не удастся. Как мы видели, в случае πN -рассеяния с перезарядкой необходимы большие вклады с переворотом спина, которые действительно дают ρ и A_2 . Однако для рассеяния вперед амплитуды с переворотом спина должны, конечно, обращаться в нуль. Поэтому трудно объяснить наличие резкого пика дифференциального сечения для рассеяния вперед, экспериментально обнаруженного для процессов (6.13) и (6.14). Соответствующие данные при энергии 8 Гэв приведены на фиг. VIII.18.

Еще одной траекторией, которая может давать вклад в рассматриваемые процессы, является пионная траектория. Поскольку масса

пиона очень мала, отрезок траектории, получаемый в результате экстраполяции из точки $t = m_\pi^2$, соответствующей физической частице, в точку $t = 0$, является чрезвычайно коротким. Так как нам известна, кроме того, константа πN -связи, мы можем достаточно точно предсказать вклад. Этот вклад показан на фиг. VIII.18, где видно, что соответствующая кривая лежит гораздо выше экспериментальных точек (кроме значений t , близких к нулю, где благодаря кинематическим множителям вклад пионной траектории обращается в нуль). Таким образом, пион также не может объяснить поведение дифференциального сечения, а никаких других известных траекторий, которые могли бы подходящим образом интерферировать с вкладом пиона, не существует (B имеет неправильную фазу). Выход из этого положения указал Филлипс [331], который воспользовался представлением о конспирации (см. гл. IV, § 6 и 9). Если кинематические ограничения удовлетворяются за счет конспираций пионной и некоторой другой траектории, то вовсе не обязательно, чтобы при $t = 0$ весь вклад пиона обращался в нуль, и возникает возможность описания экспериментальных данных. Поскольку это один из немногих случаев, когда понятие конспирации, по-видимому, может оказаться действительно полезным, имеет смысл рассмотреть доказательство Филлипса несколько более подробно.

Процессы NN и $\bar{N}N$ описываются пятью независимыми спиральными амплитудами, которые удобно обозначать как

$$\begin{aligned} A_1 &= \langle + + | + + \rangle, \\ A_2 &= \langle + + | - - \rangle, \\ A_3 &= \langle + - | + - \rangle, \\ A_4 &= \langle + - | - + \rangle, \\ A_5 &= \langle + + | + - \rangle. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Эти амплитуды связаны с дифференциальным сечением соотношением

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{\pi}{2q^2} \{ |A_1|^2 + |A_2|^2 + |A_3|^2 + |A_4|^2 + 4|A_5|^2 \}. \quad (6.16)$$

Пион дает вклад только в A_2 и A_4 , причем этот вклад равен

$$A_2 = A_4 = \frac{\sqrt{s}}{4\pi} \frac{1 + e^{-i\pi\alpha_\pi(t)}}{2 \sin \pi\alpha_\pi(t)} \beta_\pi^2(t) \left(\frac{s}{s_0}\right)^{\alpha_\pi(t)-1}, \quad (6.17)$$

где s_0 — обычный масштабный множитель (который, как и в § 2, принимается равным $2 \Gamma\theta^2$), а β_π^2 — вычет. Так как константа πN -связи равна $g^2 \approx 14$, то

$$\beta_\pi^2(m_\pi^2) = \frac{4\pi^2}{s_0} m_\pi^2 g^2 \left(\frac{d\alpha_\pi(t)}{dt}\right)_{m_\pi^2} = m_\pi^2 b_\pi^2. \quad (6.18)$$

Эти вклады одинаковы для процессов NN и $\bar{N}N$.

Поскольку амплитуда A_4 описывает процесс с переворотом спиральности, то при $t=0$ она должна обращаться в нуль. Если конспирации нет, то этому условию можно удовлетворить, положив

$$\beta_{\pi}^2(t) = t b_{\pi}^2, \quad (6.19)$$

где b_{π}^2 — некоторая не равная нулю константа. Это, конечно, приводит к тому, что A_2 также обращается в нуль, и мы получаем вклад, показанный на фиг. VIII.18, который резко противоречит экспериментальным данным. Как мы знаем, при учете ρ и A_2 это противоречие может лишь усилиться.

Попытаемся теперь построить такую конспирацию, которая гарантировала бы обращение в нуль амплитуд A_4 и A_5 , описывающих процессы с переворотом спиральности, но которая разрешала бы амплитуде A_2 , не обязательно обращающейся в нуль, оставаться конечной. Дополнительная траектория, участвующая в конспирации, должна иметь квантовые числа пиона (за исключением четности); поэтому если эта траектория выходит в правую полуплоскость переменной J , то она должна порождать физические частицы при $J^{PG} = 0^{+-}, 2^{+-}$ и т. д., причем при $t=0$ она должна совпадать с пионной траекторией, т. е.

$$\alpha_{\pi}(0) = \alpha_c(0), \quad (6.20)$$

где индекс c обозначает траекторию, участвующую в конспирации. В действительности при полной конспирации требуется, чтобы существовали и более низко расположенные траектории, но при нашем анализе ими можно пренебречь. Филлипс показал, что если не учитывать вкладов, малых при $t=0$, то вклад в амплитуду от траектории, участвующей в конспирации, можно записать в виде

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{pmatrix} = -\frac{\sqrt{s}}{4\pi} \frac{1 + e^{-i\pi\alpha_c(t)}}{2 \sin \pi\alpha_c(t)} \left(\frac{s_0}{s}\right)^{\alpha_c(t)-1} \alpha_c(t) b_2^2(t) \begin{pmatrix} -\tau \\ 1 \\ -\tau \\ -1 \\ -\sqrt{\tau} \end{pmatrix}. \quad (6.21)$$

где $b_2^2(t)$ — вычет, а

$$\tau = -\frac{t}{4m^2}. \quad (6.22)$$

Поэтому при $t=0$ амплитуды A_1 , A_3 и A_5 автоматически обращаются в нуль. Конспирация между вкладами (6.17) и (6.21), необходимая для равенства нулю амплитуды A_4 при $t=0$, требует, чтобы выполнялось соотношение (6.20) и условие

$$\alpha_c(0) b_2^2(0) = -\beta_{\pi}^2(0). \quad (6.23)$$

Принимая, что траектории являются линейными, т. е.

$$\alpha_{\pi}(t) = \alpha_c(t) = (t - m_{\pi}^2) \alpha', \quad (6.24)$$

где $\alpha' = m_N^2$, полагая

$$\beta_\pi^2(t) = \frac{4\pi^2 m_\pi^2}{s_0} g^2 \alpha' \frac{1 + \lambda t/m_\pi^2}{1 + \lambda} e^{vt} \quad (6.25)$$

и принимая, что $b_2^2(t)$ — постоянная, значение которой определяется условием (6.23), мы можем достаточно хорошо описать экспериментальные данные. Поскольку траектории π и s дают одинаковые вклады в процессы $p\pi$ - и $\bar{p}\pi$ -рассеяния, чтобы получить две разные кривые, приведенные на фиг. VIII.18, необходимо учесть также ρ -мезон, параметры которого частично определяются в процессе обработки данных по πN -рассеянию с перезарядкой. Приведенные подгоночные формулы, которые получил Филлипс, содержат 4 свободных параметра: λ и ν , а также два параметра, определяющие вычет ρ -траектории. Можно учесть вклад и A_2 -мезона, но его параметры частично определяются в процессе обработки данных по рассеянию $\pi^+ p \rightarrow \eta p$, и результаты говорят о том, что вкладом этой траектории можно пренебречь. Ясно, что если бы параметризация была более гибкой, то подгоночные формулы можно было бы улучшить, но при таком большом количестве приближений и при столь малом числе экспериментальных данных эта процедура не имеет реального смысла. Существенно то, что конспирация позволяет успешно описать экспериментальные данные, а без ее включения добиться этого простыми средствами не удастся.

Описанная подгонка имеет две существенные особенности. Во-первых, вычет π -траектории вблизи точки $t = 0$ должен быстро изменяться [в формуле (6.25) $\lambda \approx 1$]. В результате вклад пиона в низшие парциальные волны s -канала уменьшается, что аналогично действию абсорбтивных поправок. Это обстоятельство чрезвычайно интересно, так как описание процессов, определяемых обменом пионом, является основным достижением абсорбтивной периферической модели (см. работу [246] и приведенную в ней библиографию); в то же время было не ясно, как связать это достижение с моделью полюсов Редже, так как вклад полюса Редже в амплитуду рассеяния вперед обращается в нуль. Однако, как мы увидим в п. 8 данного параграфа, представляется более естественным описывать абсорбтивные эффекты посредством реджевских разрезов.

Другая особенность, которую следует отметить, заключается в том, что траектория, участвующая в конспирации, не порождает легкого 0^{+-} -мезона, поскольку, как видно из (6.21), ее связь при $\alpha_c(t) = 0$ обращается в нуль, т. е. если применять терминологию гл. IV, § 5, эта траектория «выбирает» бессмысленное состояние. С другой стороны, подгонку можно обеспечить и в том случае, когда связь не обращается в нуль, но тогда траектория должна быть очень полой, поэтому она также не может породить физическую частицу, во всяком случае физическую частицу малой массы. Филлипс показал, что траектории, не обладающие этими особенностями и тем самым приводящие к существованию частицы 0^{+-} малой массы, не могут удовлетворительно

объяснить эксперимент. Таким образом, даже если рассмотренная конспирация правильно описывает экспериментальные данные по процессам NN - и $\bar{N}N$ -рассеяния, поиски подобных частиц являются безнадежным делом, и, естественно, что ни одна из них не обнаружена.

7. Упругое рассеяние

Помимо рассмотренных выше случаев, в которых мы стремились выделить вклады одной или двух траекторий, было предпринято несколько попыток описать различные процессы упругого рассеяния, для которых точные данные получены вплоть до весьма высоких энергий. Однако это преимущество почти полностью сводится на нет из-за того, что приходится учитывать большое число траекторий, поэтому в более поздних работах старались обрабатывать сразу несколько процессов.

Имеются данные, касающиеся $\pi^\pm p$ -, $\pi^\pm n$ -, $K^\pm p$ -, $K^\pm n$ -, pp -, pn -, $\bar{p}p$ - и $\bar{p}n$ -рассеяния, однако для процессов, в которых мишенью является нейтрон, необходимую информацию можно получить лишь путем вычитания результатов, соответствующих рассеянию на дейтронной и протонной мишенях, и учета необходимых поправок на многократное рассеяние (см., например, [200]), а это не всегда можно сделать с достаточной точностью. Таким образом, в основном обрабатываются данные по полным сечениям и упругим дифференциальным сечениям $\pi^\pm p$ -, $K^\pm p$ -, pp - и $\bar{p}p$ -рассеяния, а также по процессам с перезарядкой $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$ и $K^- p \rightarrow \bar{K}^0 n$. Для большей части этих процессов имеются данные по крайней мере до 29 Гэв/с.

Согласно табл. 2, должны использоваться следующие траектории:

$$\begin{array}{ll} \pi^\pm p: & f, f', \rho; \\ K^\pm p, pp, \bar{p}p: & f, f', \rho, \omega, \phi, A_2. \end{array}$$

Очевидно, здесь имеется большое число параметров, поэтому для каждого значения дифференциального сечения упругого рассеяния можно получить согласие множеством различных способов. Однако после того, как параметры ρ -траектории найдены из данных по πN -рассеянию с перезарядкой, а вклад A_2 -траектории в какой-то мере определен данными по Kp -рассеянию с перезарядкой, можно надеяться, что все остальные величины удастся определить с не очень большим произволом. Поскольку вклады ω и ϕ во всех случаях имеют одинаковую структуру, причем предполагается, что связь ϕ невелика, обычно ϕ не учитывают, включая в ω все малые эффекты, к которым она приводит. Кроме того, как показали Филлипс и Рарита [332], ρ и A_2 дают чрезвычайно малые вклады в процессы pp и $\bar{p}p$. Таким образом, основная задача, которая ставится при обработке данных по упругому рассеянию, заключается в том, чтобы попытаться определить вклады f, f'

и ω (в дальнейшем мы принимаем, что f и f' соответствуют P и P' соответственно).

Траектории обычно задаются с помощью простых выражений (6.9) или (6.10). Ввиду того, что определяемые экспериментально траектории являются почти прямолинейными, такие двух- или трехпараметрические выражения можно применять во всей области переменной t , в которой обычно обрабатываются данные, т. е. при $-1 < t < 0$ ($\Gamma_{эв/c}$)². Для всех процессов должен использоваться, конечно, один и тот же набор параметров траекторий.

С вычетами дело обстоит сложнее. Во-первых, в них необходимо ввести различные множители типа $\alpha(t)$, $\alpha(t) + 1$ и т. д., чтобы «убить признаки» и обеспечить равенство нулю полубесмысленной связи при разных отрицательных целых (и нулевом) значениях α . Как мы видели, это приводит к некоторой неопределенности, так как заранее не известно, «выбирает» ли траектория физическое или бессмысленное состояние. Во-вторых, экспериментальные данные, приведенные на фиг. VIII.13, свидетельствуют о том, что дифференциальные сечения упругих процессов убывают экспоненциально. На самом деле в указанной выше области переменной t (при заданном значении s) эти сечения обычно можно описать с помощью формулы

$$A(s, t) = A_0 e^{at}. \quad (6.26)$$

Выражение (6.3), соответствующее одиночному полюсу Редже, содержит экспоненциальный множитель, однако он зависит только от α' и связан с сужением дифракционного пика при возрастании энергии. Дифференциальное сечение, по крайней мере для pp -рассеяния, в доступной нам области энергий действительно несколько сужается. Однако ни в одном из случаев ни этим, ни каким-либо другим способом (например, потребовав, чтобы траектория проходила через связанные с ней физические частицы), не удастся получить такие значения α' , которые соответствовали бы значениям параметра a , необходимым для описания сечения с помощью формулы (6.26). Поэтому нужный нам экспоненциальный спад приходится приписывать вычетам. Поскольку подобный спад является наиболее существенной характеристикой кривых, приведенных на фиг. VIII.13, эта процедура, при которой за основное свойство амплитуды рассеяния становится ответственной наша параметризация, является, очевидно, совершенно произвольной, так как весь предшествующий анализ не содержал никаких указаний на возможность такого экспоненциального поведения вычета. В самом деле, на основе дисперсионного соотношения для $\gamma(t)$ (III.1.31) можно ожидать, что при больших отрицательных значениях t вычет изменяется как $1/t$. Таким образом, обычно используется следующая параметризация вычетов:

$$\Gamma(t) = C_0 e^{at} f[\alpha(t)],$$

где $f(\alpha)$ содержит различные множители, в которые входят указанные выше функции α .

Кроме того, теорема о факторизации накладывает определенные ограничения на параметры вычетов, соответствующих различным процессам, и учет этих ограничений может привести к ряду трудностей. Так, например, выше было показано, что в амплитуды pp - и $\bar{p}\bar{p}$ -рассеяния траектории f , f' и A_2 дают одинаковые вклады, а траектории ρ и ω — вклады противоположного знака. Поэтому разность дифференциальных сечений pp - и $\bar{p}\bar{p}$ -рассеяния обусловлена интерференцией между суммой вкладов от ρ и ω и суммой вкладов от f , f' и A_2 . Все подробности читатель может найти в превосходной статье Лидера и Сланского [273], посвященной полюсам Редже в NN - и $N\bar{N}$ -системах, а здесь мы просто выпишем один из результатов этой работы:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\bar{p}\bar{p}} - \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{pp} = \frac{1}{4s} \sum_{i=f, f', A_2} \sum_{j=\rho, \omega} \left(1 - \operatorname{ctg} \frac{1}{2} \pi \alpha_i \operatorname{tg} \frac{1}{2} \pi \alpha_j \right) \Gamma_i \Gamma_j R_{ij}^2 s^{\alpha_i + \alpha_j}. \quad (6.27)$$

В этой формуле выражение в скобках обусловлено сигнатурными множителями, а Γ_i — вычеты i -й траектории в данной амплитуде t -канала (все прочие несущественные множители включены в Γ_i). Величина R_{ij}^2 учитывает другие амплитуды t -канала; благодаря теореме о факторизации для спиральных амплитуд ее можно записать в такой форме с вещественным R_{ij} (если α_i и β_j вещественны при $t < 0$).

Далее, в экспериментах при высоких энергиях найдено, что примерно при $t = -0,15 (G\text{эв}/c)^2$ левая часть (6.27) изменяет свой знак, являясь отрицательной при $t \lesssim -0,15 (G\text{эв}/c)^2$. При таких значениях t сигнатурный множитель должен быть положительным (мы не рассматриваем возможность чрезвычайно резко изменяющихся траекторий, что полностью противоречило бы другим данным). Таким образом, при малых t один из вычетов должен изменять свой знак. Это происходит в той области, где преобладание вклада f над вкладами A_2 и f' достаточно велико, поэтому вполне допустимо считать, что изменить свой знак должно Γ_ρ или Γ_ω , или Γ_j . Далее, экспериментальные данные при высоких энергиях по каждому из сечений $d\sigma/d\Omega|_{pp}$ и $d\sigma/d\Omega|_{\bar{p}\bar{p}}$ в отдельности исключают возможность изменения знака Γ_j . Кроме того, как это следует из теоремы о факторизации, если Γ_ρ в процессе $\bar{N}N \rightarrow \bar{N}N$ принимает нулевое значение, то вычет ρ -траектории в процессе $\bar{N}N \rightarrow \pi\pi$ должен обращаться в нуль при этом значении t . Однако, как мы видели выше, такая возможность исключается данными по πN -рассеянию с перезарядкой. Следовательно, мы приходим к выводу, что изменение знака обусловлено вкладом ω -траектории и что Γ_ω проходит через нуль при некотором малом значении t .

Чрезвычайно важно попытаться получить какое-то подтверждение (или опровержение) этого результата. С этой целью Лидер и Сланский [273] предлагают исследовать определенные величины, характеризую-

ющие NN - и $N\bar{N}$ -системы, которые позволяли бы эффективно выделить ω -траекторию и поэтому вблизи $t = 0$ обращались бы в нуль. Для подобной проверки необходимо или измерять коэффициенты спиновой корреляции (параметры триплетного рассеяния), или же точно определять разности второго порядка, например величину

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{pp} + \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{pn} - \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\bar{p}p} - \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{\bar{p}n},$$

которая зависит только от ω -траектории. К сожалению, такие измерения пока не проведены. Однако этот результат в какой-то степени подтверждается тем, что аналогичный эффект наблюдается для $K^\pm p$ -рассеяния:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{K^-p} > \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{K^+p} \quad \text{при } t \approx 0,$$

но

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{K^-p} < \frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{K^+p} \quad \text{при } t < -0,2 \text{ (Гэв/с)}^2.$$

Он также объясняется тем, что вычет ω -траектории для этого процесса проходит через нуль, причем теорема о факторизации требует, чтобы $\Gamma_{\omega, KN}$ становилось равным нулю в той же точке, где и $\Gamma_{\omega, NN}$. Однако этот эффект может возникать и за счет того, что в случае, когда α_ω проходит через нуль, ее связи «выбирают» бессмысленное состояние. Аналогичное изменение знака свойственно также сечению $\pi^\pm p$ -рассеяния вблизи $t \approx -0,05 \text{ (Гэв/с)}^2$; его можно объяснить, считая, что вычет ρ -траектории обращается в нуль.

На первый взгляд кажется нежелательным постулировать обращение вычета в нуль, так как известно, что в простой одноканальной потенциальной модели вычет не может обращаться в нуль [315]. Однако в случае релятивистского рассеяния это ограничение, по-видимому, необязательно; кроме того, при наличии многих каналов вычеты могут проходить через нуль даже в потенциальных моделях [141].

Некоторые ограничения накладывает также теорема о факторизации, которая приводит к определенным соотношениям между амплитудами разных процессов. Обозначим, например, вычеты данного полюса Редже в амплитудах t -канала

$$\left\langle \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \left| A(N\bar{N} \rightarrow \pi\pi) \right| 0, 0 \right\rangle, \quad \left\langle \frac{1}{2}, -\frac{1}{2} \left| A(N\bar{N} \rightarrow \pi\pi) \right| 0, 0 \right\rangle$$

и в аналогичных амплитудах процесса $N\bar{N} \rightarrow K\bar{K}$ через $\beta_{+++}^{N\pi}$, $\beta_{+--}^{N\pi}$, β_{+++}^{NK} и β_{+--}^{NK} соответственно. Тогда, согласно теореме о факторизации,

будем иметь

$$\begin{aligned} \beta_{+++}^{N\pi} &= \gamma_{+++}^N \gamma^\pi, \\ \beta_{+-}^{N\pi} &= \gamma_{+-}^N \gamma^\pi, \\ \beta_{+++}^{NK} &= \gamma_{+++}^N \gamma^K, \\ \beta_{+-}^{NK} &= \gamma_{+-}^N \gamma^K, \end{aligned} \quad (6.28)$$

что приводит к соотношению

$$\frac{\beta_{+++}^{N\pi}}{\beta_{+-}^{N\pi}} = \frac{\beta_{+++}^{NK}}{\beta_{+-}^{NK}}. \quad (6.29)$$

Это ограничение было учтено при обработке соответствующих данных, и оказалось, что оно, по-видимому, не противоречит экспериментальным результатам.

После этих замечаний общего характера рассмотрим более подробно процедуру обработки данных. Наиболее исчерпывающий анализ проведен в работах Филлипса и Рариты [332] и Рариты и др. [345], результаты которых мы приводим ниже. В первой из этих работ проводится совместный анализ процессов $\pi^\pm p$ и $K^\pm p$ -рассеяния, а во второй — $\pi^\pm p$, pp - и $\bar{p}p$ -рассеяния. В этих работах имеется подробная библиография. Однако авторы не учитывали NN -рассеяния с перезарядкой, что было сделано в другой работе [171].

Для описания процессов $\pi^\pm p$ и $K^\pm p$ -рассеяния используются амплитуды A и B [362], которые связаны с экспериментально измеряемыми величинами соотношениями

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dt}(s, t) &= \frac{1}{\pi s} \left(\frac{M_N}{4q_s} \right)^2 \left[\left(1 - \frac{t}{4M_N^2} \right) |A|^2 - \frac{t}{4M_N^2} \left(\frac{4M_N^2 p + st}{4M_N^2 - t} \right) |B|^2 \right], \\ \sigma_{\text{полн}}(s) &= \frac{\text{Im } A(s, t=0)}{p}, \\ P(s, t) &= - \frac{\sin \theta}{16\pi \sqrt{s}} \frac{\text{Im}(AB^*)}{d\sigma/dt}, \end{aligned} \quad (6.30)$$

где M_N — масса нуклона, p — импульс мезона в лабораторной системе, а P — поляризация, которая определена в § 7 данной главы. Вклады траекторий параметризуются следующим образом:

$$\begin{aligned} A_i &= C_i \xi \left(\frac{E_L}{E_0} \right)^\alpha, \\ B_i &= D_i \xi \left(\frac{E_L}{E_0} \right)^\alpha, \end{aligned} \quad (6.31)$$

где ξ — сигнатурный множитель:

$$\xi = \frac{e^{-i\pi\alpha} \pm 1}{\sin \pi\alpha}, \quad (6.32)$$

E_L — энергия мезона в лабораторной системе, а E_0 — константа, задающая масштаб энергий, которая выбирается равной 1 Гэв. Вычеты записываются в виде

$$C_i = \begin{cases} C_0 e^{C_1 t} \alpha (2\alpha + 1) & \text{для } f, f', A_2, \\ C_0 [(1+G) e^{C_1 t} - G e^{C_3 t}] (2\alpha + 1) & \text{для } \rho, \omega; \end{cases} \quad (6.33a)$$

$$D_i = \begin{cases} D_0 e^{D_1 t} \alpha & \text{для } f, f', A_2, \\ D_0 [(1+H) e^{D_1 t} - H e^{D_3 t}] \alpha & \text{для } \rho, \omega. \end{cases} \quad (6.33b)$$

Поэтому в случае ρ и ω они могут изменять свой знак, что необходимо для объяснения описанного выше эффекта. Согласно (6.29), параметры, характеризующие вклады траекторий в πN - и $K N$ -рассеяние, связаны соотношением

$$\frac{A_i(KN)}{A_i(\pi N)} = \frac{B_i(KN)}{B_i(\pi N)} = F_0 e^{F_1 t}. \quad (6.34)$$

Поэтому в случае $F_1 = 0$ $SU(3)$ -симметрия предсказывает, что $\bar{F}_0 = 1$ для f и f' и $\bar{F}_0 = 0,5$ для ρ . Для траекторий используется параметризация Пигнотти, т. е. формула (6.10). В результате получается несколько различных решений, зависящих от способа объяснения изменения знака дифференциального сечения (см. выше). В табл. 5 приведено

Таблица 5

ЗНАЧЕНИЯ ПОДГОНОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ $\pi^\pm p$ - и $K^\pm p$ - РАССЕЙНИЯ
(РЕШЕНИЕ 1 ИЗ РАБОТЫ [332])

	α (0)	α' (0)	C_0 , мб·Гэв	C_1 , Гэв ⁻¹	C_3	D_0 , мб	D_1 , Гэв ⁻²	D_3	F_0	F_1 , Гэв ⁻²	G	H
f	1,00	0,34	6,55	2,51		-7,5	0,51		0,901	-0,23		
f'	0,50	0,34	19,6	4,04		-101	8,1		0,279	-1,61		
ρ	0,54	0,65	2,45	5,6	0,14	56,9	1,64	0,31	0,527	0,01	0,50	0,90
A_2	0,32	0,80	3,34	2,16		-31,2	1,76					
ω	0,52	0,60	5,99	10,5	0,17						0,86	

одно из таких решений, полученное в предположении, что A_ρ и A_ω в соответствующих точках изменяют свой знак. На фиг. VIII.13 видно, что получается достаточно хорошая подгонка. Предсказания $SU(3)$ -симметрии для f и ρ оправдываются чрезвычайно хорошо, но для f' согласие является менее удовлетворительным. Наклоны траекторий f и f' оказываются гораздо меньшими, чем наклоны других траекторий.

В более поздней работе [345] принимается несколько иная параметризация, а именно, такая, что при использовании прямолинейных

траекторий (6.9) их вклады при $\alpha = -1$ обращаются в нуль:

$$C_i = \begin{cases} C_0 e^{C_1 t} (\alpha + 1) & \text{для } f, f', \\ C_0 [(1 + C_2) e^{C_1 t} - C_2] (\alpha + 1) & \text{для } \rho; \end{cases} \quad (6.35a)$$

$$D_i = \begin{cases} D_0 e^{D_1 t} \alpha^2 (\alpha + 1) & \text{для } f, f' \\ D_0 e^{D_1 t} \alpha (\alpha + 1) & \text{для } \rho. \end{cases} \quad (6.35b)$$

Для pp и $\bar{p}p$ -рассеяния пять амплитуд (6.15) параметризуются следующим образом (такая параметризация была предложена в работе [360]):

$$A_k = \Gamma_k \xi \left(\frac{E_L}{E_0} \right)^\alpha, \quad k = 1, \dots, 5, \quad (6.36)$$

где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= \Gamma_3 = \frac{M_N E_0}{4\pi \sqrt{s}} \eta_N^2, \\ \Gamma_2 &= -\Gamma_4 = -\frac{M_N E_0}{4\pi \sqrt{s}} \varphi_N^2, \\ \Gamma_5 &= -\frac{M_N E_0}{4\pi \sqrt{s}} \varphi_N \eta_N. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Эти амплитуды связаны с физическими величинами соотношением (6.16), а также соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma^{\text{полн}}(s) &= \frac{2\pi}{q_s} \text{Im} (A_1 + A_3), \\ P(s, t) &= \frac{\pi}{2q_s^2} \frac{\text{Im} [A_5 (A_1 + A_2 + A_3 - A_4)^*]}{d\sigma/dt}. \end{aligned} \quad (6.38)$$

В вычеты Γ_k уже включены требования теоремы о факторизации, и их можно выразить через две функции b_1 и b_2 (что облегчает сравнение с параметрами πN -рассеяния):

$$\begin{aligned} \eta_N &= b_1 - \frac{\alpha t}{4M_N^2} b_2, \\ \varphi_N &= \left(\frac{-t}{4M_N^2} \right)^{1/2} (b_1 - \alpha b_2), \end{aligned} \quad (6.39)$$

которые в свою очередь параметризуются следующим образом:

$$\begin{aligned} b_1 &= \begin{cases} F_0 e^{F_1 t} [\alpha (\alpha + 1)]^{1/2} & \text{для } f, f', \\ F_0 e^{F_1 t} \left[\left(1 - \frac{t}{t_0} \right) (\alpha + 1) \right]^{1/2} & \text{для } \omega, \end{cases} \\ b_2 &= G_0 e^{G_1 t} \left[\left(1 - \frac{t}{t_0} \right) (\alpha + 1) \right]^{1/2} \left(1 - \frac{t}{4M_N^2} \right)^{-1} \text{ для } \omega. \end{cases} \quad (6.40)$$

Множитель $1 - t/t_0$ используется для того, чтобы обеспечить изменение знака у вычета ω -траектории. Тогда, согласно теореме о факторизации,

$$b_2 = G_0 e^{G_1 t} [\alpha(\alpha + 1)]^{1/2} \left(1 - \frac{t}{4MN}\right)^{-1} \quad \text{для } f, f' \quad (6.41)$$

где

$$G_0 = F_0 \left(\frac{D_0}{C_0}\right) \quad \text{и} \quad G_1 = F_1 + (D_1 - C_1).$$

Одно из решений приведено в табл. 6. Степень расхождения между

Таблица 6

ЗНАЧЕНИЯ ПОДГОНОЧНЫХ ПАРАМЕТРОВ ДЛЯ $\pi^\pm p$ -, $p p$ - и $p p$ -РАССЕЯНИЯ
ПРИ $t_0 = -0,13$ (решение 1 из работы [345])

	$\alpha(0)$	$\alpha'(0), \Gamma_{3e-2}$	$C_0, \text{мб} \cdot \Gamma_{3e}$	C_1, Γ_{3e-2}	C_2	$D_0/C_0, \Gamma_{3e-1}$	D_1, Γ_{3e-2}	$F_0, \text{мб}^2$	F_1, Γ_{3e-2}	G_0/F_0	$G_1 - F_1, \Gamma_{3e-2}$
f	1,0	0,12	7,23	2,36		-3,69	9,38	3,80	2,09		
f'	0,73	1,50	16,35	0,44		-3,52	3,86	5,04	1,06		
p	0,58	0,94	1,47	0,20	15,2	17,6	0,34				
ω	0,45	0,31						3,94	1,85	-16,4	4,47

данными этой таблицы и значениями, приведенными в табл. 5, дает некоторое представление о больших неопределенностях в определении параметров. Наклон f -траектории резко уменьшается, тогда как f' -траектория имеет большой наклон, что позволяет приписать провал и второй максимум в дифференциальных сечениях $\pi^\pm p$ -рассеяния нулю функции α' . Ограничения, накладываемые теоремой о факторизации, по-видимому, согласуются с существующими данными по поляризации, но эта проверка является не очень точной. Результаты находятся также в разумном согласии с правилами сумм, рассмотренными в § 4. То обстоятельство, что точка f' -траектории, отвечающая физической частице, лежит столь высоко, означает (если описанная подгонка правильна), что в рассматриваемой области энергий сечения еще очень далеки от своих асимптотических значений. В работе [345] предсказываются асимптотические значения

$$\sigma_{NN}^{\text{полн}} = 28,8 \text{ мб}, \quad \sigma_{\text{лN}}^{\text{полн}} = 14,5 \text{ мб}, \quad \sigma_{\text{лл}}^{\text{полн}} = 7,3 \text{ мб},$$

которые следует сравнить со значениями, приведенными на фиг. VIII.8. Этим объясняется также, почему сужение дифракционного пика является столь малым. Траектория f будет доминировать лишь тогда, когда будут достигнуты энергии, гораздо более высокие, чем те, которые имеются в настоящее время. Небольшое сужение, наблюдаемое

при pp -рассеянии, обусловлено частичной компенсацией вкладов от f' - и ω -траекторий. Как указано в § 3, п. 2, вследствие отсутствия этого сужения одно время считалось, что траектория Померанчука является очень пологой или что объяснить дифракционное рассеяние с помощью Редже невозможно.

Все эти результаты, очевидно, следует рассматривать с известной осторожностью, так как пока отсутствуют достаточно хорошие данные по поляризации, остается довольно большой произвол, причем мы знаем, что в случаях, когда возможен обмен только одним полюсом, имеются определенные трудности. Но тем не менее с помощью небольшого числа полюсов Редже удастся экономно описать огромное количество экспериментальной информации, что уже само по себе является весьма обнадеживающим.

8. Процессы рождения

Вообще говоря, имеющиеся экспериментальные данные по угловым распределениям в процессах рождения резонансов не настолько точны, чтобы их можно было использовать для проверки модели полюсов Редже или для проверки возможности конспираций. Тем не менее этот вопрос рассматривается в нескольких работах, и нет никакого сомнения, что в будущем их появится гораздо больше.

Вонг [401] составил весьма полезную таблицу вкладов полюсов Редже в различные процессы рождения (хотя, как мы указывали в гл. IV, § 6, явное включение всех кинематических сингулярностей в вычеты, как это сделал Вонг, является, по-видимому, ошибочным; кроме того в этой работе не учтены некоторые кинематические ограничения). Фраучи и Джонс [184] исследовали процессы

$$\pi N \rightarrow \rho N, \quad KN \rightarrow K^* \Delta, \quad \pi N \rightarrow f \Delta \text{ и } \pi N \rightarrow f N,$$

обращая особое внимание на природу кинематических ограничений на вычет пионной траектории, которая, согласно предположению, должна доминировать в этих процессах. Они получили хорошее согласие с экспериментальными данными и обнаружили, что поведение вычета можно полностью объяснить с помощью только «кинематических» эффектов. Этот последний результат противоречит выводам более ранней работы [384], в которой учитывались не все пороговые ограничения.

В ряде работ [57, 184, 235] рассматривается характер возможных конспираций в процессах рождения векторных мезонов. В частности, было отмечено [57], что если в NN -рассеянии имеет место пионная конспирация, то из теоремы о факторизации следует, что в процессах типа $\pi N \rightarrow \rho \Delta$, $\pi N \rightarrow f \Delta$ и $KN \rightarrow K^* \Delta$ существует провал, соответствующий рассеянию вперед. Экспериментальные данные не позволяют непосредственно проверить это утверждение, но параметризация, использованная в работе [184] для описания этих процессов (см. выше), по-видимому, подтверждает существование такого провала.

Имеется несколько неупругих процессов, которые можно удовлетворительно описать с помощью обмена только ρ -мезоном, используя полученную выше ρ -траекторию и постоянные приведенные вычеты. Эти процессы указаны в табл. 7. В каждом случае для подгонки изме-

Таблица 7

НЕКОТОРЫЕ НЕУПРУГИЕ ПРОЦЕССЫ, СЕЧЕНИЯ КОТОРЫХ ОБРАБАТЫВАЛИСЬ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ПОЛЮСОВ РЕДЖЕ

Процесс	Энергия, Гэв	$-t$, (Гэв/с) ²	Литература
$\pi^+p \rightarrow \pi^0\Delta^{++}$ (1238)	4; 8	$0 < -t < 0,8$	[269]
$\pi^+p \rightarrow \pi^0\Delta^{++}$ (1238)	4; 8	$0 < -t < 0,8$	[81]
$\pi^+p \rightarrow A_{\frac{3}{2}}^+p$	4; 6	$0 < -t < 1,0$	[380]
$K^+p \rightarrow K^0\Delta^{++}$ (1238)	3; 3,5; 5	$0 < -t < 1,0$	[351]
$\pi^+p \rightarrow \pi^0\Delta^{++}$ (1238)	2,8; 3,5; 4	$0 < -t < 1,0$	[351]
$\pi^+p \rightarrow \omega\Delta^{++}$ (1238)	2,4; 2,9; 4	$0 < -t < 1,0$	[351]

нения энергии и передаваемого импульса служит только один параметр. В работе [352] проанализированы также довольно скудные экспериментальные данные по процессам $\bar{p}p \rightarrow \bar{\Lambda}\Lambda$, $\bar{\Sigma}\Lambda$ и $\bar{\Sigma}\Sigma$; при их обработке учитывался обмен K^* -мезоном с траекторией $\alpha_{K^*}(t) \approx 0,4 + 0,7 t$.

9. Реджевские разрезы

Хотя имеются все основания считать, что в плоскости углового момента существуют разрезы (см. гл. V и VII), до сих пор большинство экспериментальных данных удавалось успешно описать с помощью одних только полюсов. Однако нет никаких причин считать, что полюса всегда должны преобладать, поэтому в тех случаях, когда простая подгонка с помощью полюсов Редже представляется неудовлетворительной, возникает искушение воспользоваться разрезами. К сожалению, при учете вклада от разреза вводится большое количество свободных параметров. Кроме того всегда можно, конечно, представить разрез в какой-то конечной области в виде некоторой суперпозиции полюсов, поэтому влияние разреза трудно отличить от эффектов, к которым приводит введение дополнительных полюсов.

Согласно (II.9.10), вклад разреза в амплитуду имеет вид

$$A^\pm(s, t) = \int_{\alpha_c(t)}^{\alpha_c(t)} g(l, s) \left(\frac{s}{s_0}\right)^l dl, \quad (6.42)$$

(фон)

где $g(l, s)$ определяется скачком на разрезе. Если принять, что при α_c функция $g(l, s)$ регулярна, то асимптотический вклад разреза будет

равен

$$A^{\pm}(s, t) \rightarrow \text{const} \left(\frac{s}{s_0} \right)^{\alpha_c(t)} \frac{1}{\ln(s/s_0)}. \quad (6.43)$$

Он отличается от вклада полюса логарифмическим множителем, но, конечно, разные модели для $g(l, s)$ приводят к разному поведению (см., например, [318]). Как было показано в гл. V, § 3 и в гл. VI, § 4, разрез, возникающий в результате обмена двумя траекториями $\alpha_1(t)$ и $\alpha_2(t)$, определяется выражением (V.3.4), т. е.

$$\alpha_c(t) = \max[\alpha_1(t_1) + \alpha_2(t_2) - 1], \quad (6.44)$$

а в случае n одинаковых траекторий $\alpha(t)$ в соответствии с (V.3.9) получаем

$$\alpha_c^n(t) = n\alpha \left(\frac{t}{n^2} \right) - n + 1. \quad (6.45)$$

Таким образом, если α — траектория Померанчука (f), причем, как обычно, принимается $\alpha_f(0) = 1$, то получаем

$$\alpha_c^n(0) = 1 \quad (6.46)$$

при всех n , а при $n \rightarrow \infty$ наклон вклада от разреза стремится к нулю: $\alpha_c^n(t) \rightarrow 0$. Из этих результатов следует, что хотя вследствие логарифмического множителя полюс Померанчука может еще преобладать над α_c^n при $t = 0$, но при $t < 0$ это утверждение уже не справедливо, причем при бесконечном числе разрезов совсем не очевидно, что f преобладает даже при $t = 0$. Аналогично этому, в случаях, подобных πN -рассеянию с перезарядкой, рассмотренному выше, где не может происходить обмен померанчоном и где должна преобладать ρ -траектория, также можно ожидать, что будут существовать разрезы, обусловленные обменом комбинацией $\rho + n f$, который приводит к такому же сгущению разрезов при $\alpha_\rho(0)$. Таким образом, возможно, что при обработке данных по сечениям, рассмотренной в § 3 и 4, в действительности использовалась зависимость $s^{\alpha_c(0)}$, характерная для таких разрезов. Кроме того, вполне возможно, что трудности, возникающие в процессе подгонки дифференциальных сечений, в частности аномально малый наклон P -траектории в табл. 1, указывает на то, что мы имеем дело с влиянием разрезов. Однако тогда очень трудно понять, почему наклоны ρ - и A_2 -траекторий оказываются столь большими, так что к подобной аргументации следует относиться с некоторой осторожностью.

Перси и Серторно [343] предприняли попытку выяснить, насколько хорошо можно описать данные по полным сечениям $\pi^\pm p$ -рассеяния, если привлечь разрезы. Рассматривалась разность

$$\Sigma(\pi p) = \sigma^{\text{полн}}(\pi^+ p) - \sigma^{\text{полн}}(\pi^- p),$$

что позволило исключить вклад ρ -мезона (см. табл. 2), причем, согласно моделям, описанным в § 3, значения величины Σ можно подогнать,

используя только f и f' . Было найдено, что удовлетворительное согласие с экспериментальными данными можно получить, объединяя разрез с f' -траекторией (что не вызывает особого удивления). Однако величина $\alpha_c(0)$ выступала в качестве произвольного параметра, и ее различными значениям невозможно сопоставить обмен каким-либо определенным набором траекторий. Отметим, что если бы f -траектории не было и преобладали бы подобные разрезы, то полное сечение асимптотически стремилось бы к нулю.

Один из способов, позволяющих избежать трудности, связанной с бесконечным числом разрезов, возникающих при $\alpha_r(0)$ (для любой траектории r), заключается в том, чтобы считать $\alpha_f(0)$ меньшим единицы. В § 3 мы заметили, что столь же приемлемым является, по-видимому, значение $\alpha_f(0) = 0,93$. Тогда, как было отмечено [373], если

$$\alpha_f(0) = 1 - \varepsilon, \quad (6.47)$$

то разрез, возникающий в результате обмена комбинацией $r + nf$, в линейном приближении начинается при

$$\alpha_c^n(t) = \alpha_r(0) - n\varepsilon + \frac{\alpha_f \alpha_r'}{\alpha_f' + n\alpha_r'} t. \quad (6.48)$$

При возрастании n мы получаем серию траекторий точек ветвления с уменьшающимися наклонами, пересекающих также ось углового момента все ниже и ниже, как это показано на фиг. VIII.19. Таким образом, при значениях t , близких к нулю, всегда доминирует полюс, но при достаточно больших $|t|$ существенными становятся разрезы. Этим можно объяснить, почему определяемые при $t < 0$ наклоны меньше наклонов, к которым приводит анализ семейств полюсов Редже, показанных на фиг. VIII.2—VIII.6 (см. табл. 1); в действительности при $t < 0$ наблюдается эффект излома траектории, показанный на фиг. VIII.19, который был отмечен в работе Сриваставы [373].

Еще одно возможное применение разрезов было обнаружено в работе [241]. В ней отмечается, что дифференциальному сечению pp -рассеяния на 90° свойственно разрывное поведение [13]:

$$\left. \frac{d\sigma}{dt} \right|_{90^\circ} = \begin{cases} C_1 \exp(-3,29q_s^2) & \text{при } q_s^2 < 3,40, \\ C_2 \exp(-1,51q_s^2) & \text{при } q_s^2 > 3,40. \end{cases} \quad (6.49)$$

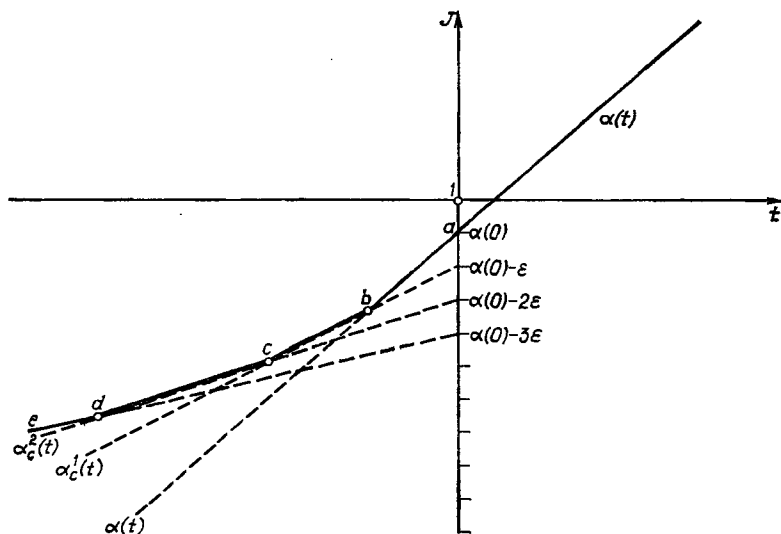
Здесь C_1 и C_2 — некоторые константы, а q_s — импульс в системе центра масс, измеряемый в $\Gamma\text{эв}/c$, причем предполагается, что в области малых значений q_s^2 основную роль может играть f -траектория, тогда как поведение в области $q_s^2 > 3,40$ ($\Gamma\text{эв}/c$)² определяется разрезом, который возникает в результате обмена двумя f' -мезонами. Отметим, что так как

$$\cos \theta_s = 1 + \frac{t}{2q_s^2}, \quad (6.50)$$

то угол $\theta = 90^\circ$ отвечает значению

$$q_s^2 = -\frac{t}{2}, \quad (6.51)$$

и, следовательно, большим значениям q_s^2 соответствуют более отрицательные значения t . В работе [241] предполагается, что разрывное поведение обусловлено тем, что из-за сигнатурного множителя (II.10.3) вклад f -траектории обращается в нуль при значении t , для которого $\alpha_f(t) = -1$; из (6.49) и (6.51) следует, что это должно происходить



Ф и г. VIII.19. Траектории полюса и разрывов в случае, когда для померанчона $\alpha_P(0) = 1 - \epsilon$ [337].

Ведущая сингулярность в области отрицательных t описывается кривой $abcde\dots$, тогда как при положительных t по-прежнему доминирует полюс.

при $t \approx -6,8 (\Gamma_{\text{эв}}/c)^2$. Подобное утверждение справедливо, конечно, лишь в том случае, когда при этом бессмысленном значении, отвечающем неправильной сигнатуре, вычет не содержит полюса. Полагая

$$\alpha_f = 1 + \alpha' t, \quad (6.52)$$

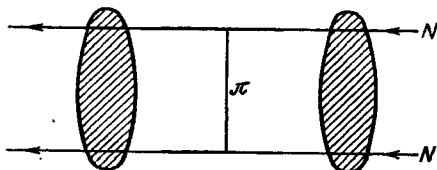
мы приходим к требованию $\alpha' = -0,29 (\Gamma_{\text{эв}}/c)^2$, которое находится в разумном согласии с другими значениями этой величины (см. табл. 1). В работе [241] удалось довольно хорошо описать экспериментальные данные в окрестности точки разрыва, однако при этом не принимались

во внимание усложнения, обусловленные спином и т. д. Эти вопросы авторы собираются рассмотреть в следующей своей работе ¹⁾.

Разрывное поведение дифференциального сечения является, по-видимому, одним из составных элементов более общего явления. Хотя формула

$$\frac{d\sigma}{dt} = A_0 e^{at} \quad (6.53)$$

справедлива для упругого πp - и pp -рассеяния [175, 230], а также для многих процессов рождения [20], примерно до $t = -1$ ($\text{Гэв}/c$)², но при



Ф и г. VIII.20. Абсорбтивные поправки к обмену пионом в NN -рассеянии.

более высоких передаваемых импульсах спад сечения становится менее резким [324, 325], и для его описания лучше подходит формула

$$\frac{d\sigma}{dt} = B_0 e^{-b(-t)^{1/2}}. \quad (6.54)$$

Она соответствует наиболее быстрому убыванию, которое допускается аналитическими свойствами амплитуды рассеяния и постоянством (или почти постоянством) полных сечений [301], и вполне вероятно, что удастся выяснить связь этого поведения с сингулярностями в J -плоскости. Максимумы амплитуды, соответствующие рассеянию вперед и назад, являются гораздо более резкими, чем этого можно было бы ожидать на основе простой периферичности, т. е. доминирования полюсов кросс-канала. Дальнейший анализ зависимости вкладов разрезов от t проведен в работе Ансельма и Дятлова [22], в которой предлагается также способ, позволяющий получить поведение типа (6.54).

Разрезы привлекались также [138] для объяснения поляризации в процессе πN -рассеяния с перезарядкой (этот вопрос мы рассмотрим в следующем разделе). Естественно прибегать к разрезам и во всех тех случаях, когда при объяснении процесса особенно успешным оказывается учет абсорбтивных поправок к одночастичному обмену [246]. Примером такого рода служит амплитуда NN -рассеяния с перезарядкой, поведение которой, как указывалось в п. 6 данного параграфа, можно было бы объяснить поглощением пиона, тогда как с помощью полюсов Редже его удастся описать, только прибегая к пионной конспирации. Обычную картину типа изображенной на фиг. VIII.20, соответствующую абсорбтивным поправкам, наиболее

¹⁾ См. Huang K., Pinsky S., Phys. Rev., 174, 1915 (1968).—
Прим. ред.

естественно интерпретировать как обмен комбинацией $\pi + n\bar{f}$ и т. д., поскольку f (и, конечно, другие траектории) определяет взаимодействие в начальном и в конечном состояниях. Однако пока не удалось облечь эту идею в более конкретную форму (см. [214]).

Маловероятно, чтобы в течение обозримого промежутка времени удалось получить достаточно хорошие экспериментальные данные, которые позволили бы провести надежное разделение вкладов полюсов и разрезов в тех случаях, когда возможны и те и другие. В связи с этим Филлипс [330] высказал предположение, что, вероятно, наиболее просто обнаружить разрезы в амплитудах таких процессов, для которых невозможен обмен ни одной из известных частиц (см. § 4, п. 6). Примерами служат процессы с двойной перезарядкой, такие как

$$\pi^- p \rightarrow K^+ \Sigma^- \quad \text{и} \quad K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-,$$

для которых наиболее высокими сингулярностями в J -плоскости являются, по-видимому, разрезы, обусловленные обменом $\rho + K^*$ и $K^* + K^*$ соответственно. Используя значения $\alpha_\rho(0) = 0,58$ и $\alpha_{K^*}(0) \approx 0,4$ и опуская логарифмические множители, получаем

$$\frac{d\sigma}{dt} (\pi^+ p \rightarrow K^+ \Sigma^-) \sim \frac{1}{s^2},$$

$$\frac{d\sigma}{dt} (K^- p \rightarrow K^+ \Xi^-) \sim \frac{1}{s^{2,4}}.$$

Интересно выяснить, можно ли проверить такие предсказания.

Таким образом, хотя мы и знаем, что разрезы должны присутствовать, но в настоящее время не имеется ни одного убедительного экспериментального доказательства их существования.

§ 7. ПОЛЯРИЗАЦИЯ И СПИНОВЫЕ МАТРИЦЫ ПЛОТНОСТИ

1. Поляризация и полюса Редже

Если в процессе двухчастичного рассеяния начальные частицы 1 и 2 не поляризованы, то поляризация частицы 3, перпендикулярная плоскости рассеяния, дается формулой [247]

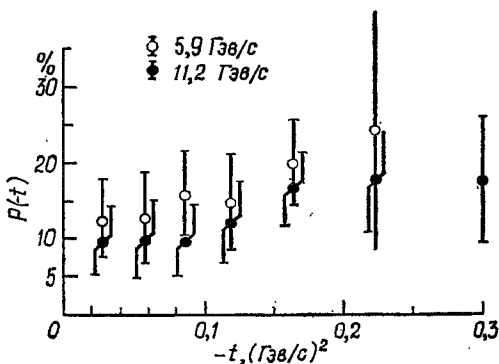
$$P = \frac{\sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} [(\sigma_3 + \lambda_3)(\sigma_3 - \lambda_3 + 1)]^{1/2} \text{Im} [(\lambda_3 - 1, \lambda_4 | A | \lambda_1 \lambda_2) \langle \lambda_3 \lambda_4 | A | \lambda_1 \lambda_2 \rangle^*]}{\sum_{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4} | \langle \lambda_3 \lambda_4 | A | \lambda_1 \lambda_2 \rangle |^2} \quad (7.1)$$

Из этой формулы следует, что поляризация может возникать лишь в том случае, если спиральные амплитуды обладают некоторой разностью фаз. Фаза вклада отдельного полюса Редже в физической области кросс-канала определяется исключительно сигнатурным множителем, так что она одинакова для всех спиральных амплитуд (см. гл. IV, § 6). Поэтому поляризация может возникать только за счет интерференции вкладов от двух полюсов Редже. Отсюда сразу следу-

ет, что в модели полюсов Редже при высоких энергиях все поляризации стремятся к нулю. Это утверждение сохраняет свою силу даже в том случае, когда включаются вклады разрезов, хотя при этом скорость, с которой поляризация стремится к нулю, может заметно уменьшаться.

2. Поляризация в процессе $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$

Чувствительный способ проверки предсказаний, касающихся поляризации, дает анализ процесса $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, поведение дифференциального сечения которого хорошо описывается, как мы видели, с помощью одной ρ -траектории. Из сказанного выше следует, что ρ -траектория дает нулевую поляризацию. Однако экспериментально измеренная поляризация заведомо не равна нулю, причем она не проявляет заметной тенденции к уменьшению с ростом энергии (хотя ошибки опытов довольно велики). Наилучшие из имеющихся экспериментальных данных приведены на фиг. VIII.21. Усредняя экспериментальные значения по области $0,04 \leq -t \leq 0,24$ ($\text{Гэв}/c$)², получаем



Ф и г. VIII.21. Экспериментальные значения коэффициента поляризации $P_0(t)$ при 5,9 и 11,2 $\text{Гэв}/c$ [64].

поляризации. В чисто полюсной реджевской модели в дополнение к ρ необходимо ввести еще хотя бы одну траекторию. Наиболее очевидным кандидатом на эту роль является траектория с квантовыми числами ρ -мезона, например ρ' -траектория, которую мы уже упоминали в § 5, п. 2. Если параметры этой траектории выбрать так, чтобы она как можно меньше искажала формулы для дифференциального сечения, полученные при учете только ρ -мезона, то поляризация будет иметь знак, наблюдаемый на опыте [234]. Вычет ρ' -траектории можно подобрать так, чтобы он согласовывался с экспериментом при какой-то одной энергии, но если считать, что в интересующей нас области траектории приблизительно параллельны, то значение $\alpha_{\rho'}(0)$, которое дается формулой (5.10), приводит к следующей зависимости поляризации от энергии:

$$P(s) \approx \text{const} \cdot s^{-\alpha_{\rho} + \alpha_{\rho'}} \quad (7.4)$$

с ростом энергии (хотя ошибки опытов довольно велики). Наилучшие из имеющихся экспериментальных данных приведены на фиг. VIII.21. Усредняя экспериментальные значения по области $0,04 \leq -t \leq 0,24$ ($\text{Гэв}/c$)², получаем

$$\langle P(t) \rangle = (16 \pm 3,5)\% \quad \text{при } 5,9 \text{ Гэв}/c, \quad (7.2)$$

$$\langle P(t) \rangle = (14 \pm 4,5)\% \quad \text{при } 11,2 \text{ Гэв}/c. \quad (7.3)$$

В настоящее время не ясно, чему следует приписать эту

т. е.

$$P(s) \approx \text{const} \cdot s^{-1,2}. \quad (7.5)$$

Экспериментальные данные, по-видимому, не подтверждают такое быстрое уменьшение поляризации с ростом энергии, хотя следует отметить, что вследствие больших ошибок они не исключают полностью подобное поведение. Заметим, что ρ' не может быть дочерней траекторией ρ -траектории, так как дочерняя траектория должна иметь противоположную сигнатуру, и поэтому при $t = 0$ (где $\alpha_{\rho'} = \alpha_{\rho} - 1$) ее вклад должен иметь ту же фазу.

Хотя предсказание (7.5) основывается на весьма сомнительном значении $\alpha_{\rho}(0)$, определяемом формулой (5.10), ясно, что никакой другой траектории, обладающей квантовыми числами ρ -мезона и лежащей гораздо выше его траектории, существовать не может, так как в противном случае она наблюдалась бы в виде физической частицы. Поэтому отсутствие быстрого уменьшения поляризации с ростом энергии, если оно действительно имеет место, требует учета каких-то других эффектов.

Некоторые возможности уже рассмотрены в литературе. В работе [138] предполагается, что ответственным за эти эффекты является вклад разреза, возникающего в результате обмена комбинацией $\rho + f$. Поскольку при $t < 0$ точка ветвления $\alpha_c(t)$ расположена выше полюса $\alpha_{\rho}(t)$, т. е.

$$\alpha_c(t) > \alpha_{\rho}(t) \quad \text{при} \quad t < 0 \quad (7.6)$$

(см. гл. V, § 3), множитель $s^{-\alpha_{\rho} + \alpha_c}$, входящий в выражение для поляризации, будет возрастать с энергией. Конечно, истинное поведение, получаемое в любой заданной области энергий, очень сильно зависит от того, какой «вес» имеет вклад разреза, т. е. от скачка на нем, который является функцией не только t , но и J . Ясно, что это дает большую свободу, и если учитывать вклад разреза, то при согласовании с экспериментальными данными не возникает никаких трудностей. Например, в работе [118] получены подгоночные формулы для всех данных по πN -рассеянию и для поляризации в процессе рассеяния с перезрядкой.

Третьим возможным источником наблюдаемой поляризации является то, что где-то ниже порога $\alpha(t)$ и (или) $\beta(t)$ становятся комплексными. Как мы видели в гл. III, § 1, для этого требуется совпадение двух траекторий. Если допустить такую возможность, то также можно осуществить хорошую подгонку к имеющимся в настоящее время экспериментальным данным [40]. Заметим, что любая поляризация, полученная с помощью этого метода, не должна зависеть от энергии.

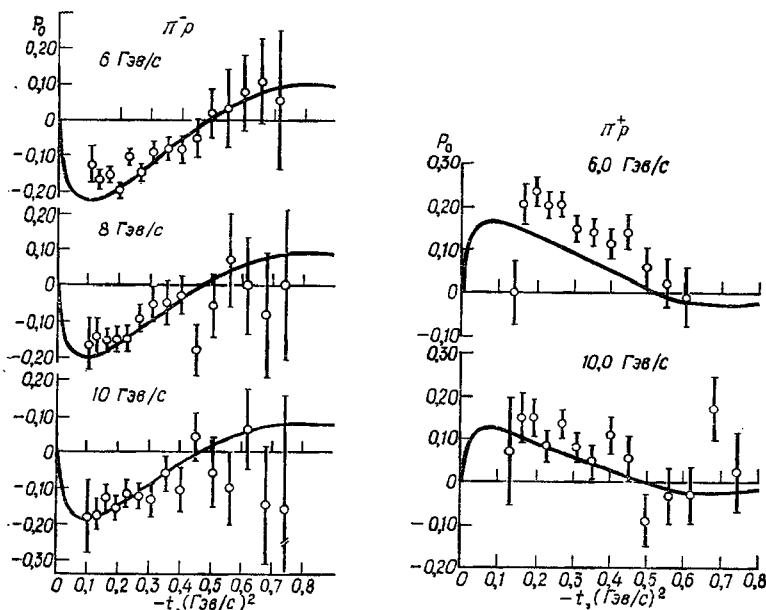
Отметим, наконец, что некоторые авторы, следуя Филлипсу [329], рассматривают возможность объяснения поляризации для данного

процесса на основе интерференции между резонансами прямого канала и вкладом ρ -траектории. К этому вопросу мы еще вернемся в § 8.

Итак, наличие поляризации в πN -рассеянии с перезарядкой можно объяснить множеством различных способов, не нарушая по существу согласие с другими экспериментальными данными для процесса πN . Чтобы выбрать одну из этих возможностей, потребуются точные измерения при высоких энергиях.

3. Поляризация в других процессах упругого πN -рассеяния

Другие имеющиеся данные по πN -рассеянию гораздо лучше описываются в рамках простой модели полюсов Редже. Как мы видели



Фиг. VIII.22. Поляризация в упругом π^-p - и π^+p -рассеянии при разных значениях импульса в лабораторной системе [158] и соответствующие подгонные кривые [119].

в § 6, п. 2, ρ -траектория дает большое слагаемое, соответствующее рассеянию с переворотом спина, а отсутствие провалов в дифференциальных сечениях $\pi^\pm p$ -рассеяния вперед исключает возможность большого вклада с переворотом спина от f и f' . Поэтому следует ожидать, что поляризация возникает в основном из-за интерференции между вкладом ρ с переворотом спина и вкладом $f + f'$ без переворота спина.

Тем самым предсказываются противоположные знаки поляризаций для процессов π^+p - и π^-p -рассеяния и изменение знака поляризации при значении t , близком к тому, для которого $\alpha_p(t) = 0$ (принимая, что именно это равенство является источником провала в дифференциальном сечении рассеяния с перезарядкой, см. § 6, п. 2). Обе эти характерные особенности наблюдаются в экспериментах. На фиг. VIII.22 теоретические кривые [119] сравниваются с наилучшими из имеющихся экспериментальных данных [65]. Некоторые из полученных в последнее время данных не были известны авторам и поэтому не учитывались при этом сравнении, так что, по-видимому, можно добиться лучшего согласия. Однако ввиду дополнительных эффектов, необходимых для объяснения поляризации в процессе рассеяния с перезарядкой, на данной стадии дальнейшая деятельность в этом направлении вряд ли имеет смысл.

4. Спиновая структура в NN -рассеянии

Поляризационные и спиновые свойства NN -системы чрезвычайно разнообразны, однако в настоящее время имеется лишь небольшое количество пригодных для анализа экспериментальных данных при высоких энергиях. Эти вопросы подробно рассмотрели Лидер и Сланский [273], которые высказали ряд предположений по проверке теории Редже. В частности, они указали, что соответствующие измерения позволили бы проверить теорему о факторизации.

Кроме того, было отмечено [272], что если объединить кинематические ограничения на амплитуды (в частности, равенство нулю амплитуд рассеяния вперед с переворотом спина) с теоремой о факторизации, то мы получим, что все возможные вклады полюсов Редже в амплитуды с двойным переворотом спина [A_5 в (6.15)] для рассеяния вперед должны быть равны нулю. Поскольку непосредственных кинематических причин, приводящих к такому поведению, не существует, этот результат является довольно странным и весьма неудовлетворительным; для его объяснения недавно было высказано предположение о существовании «конспираций» (хотя возможность удовлетворить кинематическим ограничениям с помощью конспирации впервые рассматривалась в гораздо более ранней работе Волкова и Грибова [397]). Как упоминалось в гл. IV, § 6 и 9, вместо того, чтобы удовлетворять кинематическим ограничениям при $t = 0$ посредством некоторых соотношений между значениями вычетов отдельных траекторий в этой точке, можно воспользоваться взаимной компенсацией нескольких траекторий. Так как эти траектории могут иметь разные квантовые числа, их вклады в амплитуду A_5 для рассеяния вперед не обязательно взаимно уничтожаются, поэтому указанная выше трудность устраняется. Лидер [272] рассмотрел возможные типы конспирации и подробно проанализировал несколько конкретных случаев, включая NN - и $\bar{N}N$ -рассеяние. Возможность π -конспирации мы рассмотрели в § 6, п. 6 данной главы.

5. Выражения для матриц плотности через спиральные амплитуды кросс-канала

Для процессов рождения мезонных и барионных резонансов теория полюсов Редже в значительной мере предсказывает форму спиновой матрицы плотности конечного состояния, а следовательно, корреляцию его продуктов распада. Якоб и Вик [247] получили формальные выражения для спиновой матрицы плотности s -канала через спиральности этого же канала. Практические расчеты значительно упрощаются благодаря работе [211], где спиновая матрица s -канала выражена через спиральные амплитуды t -канала. Если начальное состояние не поляризовано и конечный спин частицы 3 не известен, то спиновая матрица плотности частицы 4 дается выражением

$$\langle m | \rho_4 | m \rangle = N \sum_{\bar{\lambda}_2 \bar{\lambda}_3 \lambda_1} \langle m \bar{\lambda}_2 | A^t(s, t) | \bar{\lambda}_3 \lambda_1 \rangle \langle m \bar{\lambda}_2 | A^t(s, t) | \bar{\lambda}_3 \lambda_1 \rangle^*, \quad (7.7)$$

где $\langle | A^t(s, t) | \rangle$ — спиральная амплитуда t -канала, а N определяется так, что

$$\text{Sp} \rho_4 = 1. \quad (7.8)$$

С помощью выражения (7.7) можно перейти от реджевского выражения для спиральных амплитуд t -канала прямо к матрице плотности, а следовательно, к угловым корреляциям продуктов распада нестабильных частиц. Дальнейшие подробности читатель может найти в работе Готфрида и Джексона [211]. Результаты сильно зависят от четностей и сигнатур траекторий, дающих вклад в данный процесс, и предоставляют хороший способ проверки теории. Однако соответствующие данные в необходимой области энергий только начинают появляться.

6. Матрицы плотности для процессов $\pi N \rightarrow \rho N$ и $\pi N \rightarrow \rho \Delta$

В качестве иллюстрации рассмотрим пример [258], обладающий несколькими интересными особенностями, а именно, процессы

$$\pi N \rightarrow \rho N \quad (7.9)$$

и

$$\pi N \rightarrow \rho \Delta, \quad (7.10)$$

для которых выполнены измерения в области импульсов пиона от 2,5 до 8 Гэв/с [302].

В эти процессы могут давать вклады траектории ω , A_2 и π , причем так как ω и A_2 расположены более высоко, они должны преобладать над π . Однако экспериментально измеренная матрица плотности в области, близкой к $t = 0$, имеет свойства, к которым приводит π -траектория ($\rho_{00} = \rho_1$, $_{-1} = 0$ и $\text{Re} \rho_{10} = 0$), и лишь при больших t она принимает вид, который следовало ожидать в случае вкладов от ω и A_2 ($\rho_{00} = \text{Re} \rho_{10} = 0$). Чтобы объяснить это поведение, отметим прежде

всего, что оператор четности, действуя на начальное состояние ρ (в t -канале), дает

$$P |JM\lambda\rangle = (-1)^{J+1} |JM, -\lambda\rangle, \quad (7.11)$$

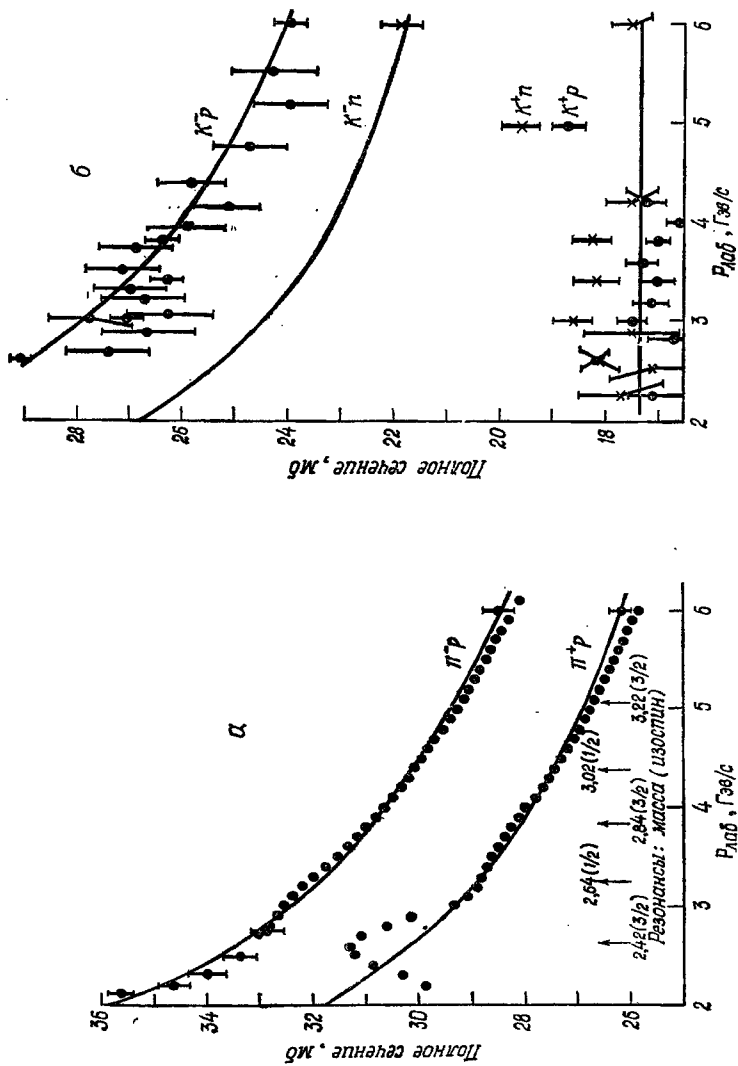
где λ — спиральность ρ -мезона. Отсюда следует, что состояние с $\lambda = 0$ является собственным состоянием оператора четности с собственным значением $(-1)^{J+1}$. Поэтому его связь с ω - и A_2 -траекториями равна нулю, и они дают вклад только в амплитуды с $\lambda = \pm 1$. Далее, для рассеяния вперед в s -канале ($t = 0$) имеет место эффект, рассмотренный в гл. III, § 6 и гл. IV, § 3 и связанный с тем, что при возрастании s величина z_t стремится не к бесконечности, а к единице. Поэтому, как указывалось в гл. IV, § 3, данная траектория Редже при $t = 0$ в области высоких энергий будет обладать поведением типа $s^{\alpha(0)-\lambda}$. Таким образом, при $t = 0$ вклады ω и A_2 ведут себя приблизительно как $s^{-0.5}$ а вклад π — как s^0 . Для любого значения энергии имеется некоторая переходная область значений t , в которой поведение $s^{\alpha(t)-\lambda}$ заменяется на $s^{\alpha(t)}$ (размеры этой области, уменьшающиеся с ростом s , оценены в работе [258]), так что мы получаем естественное объяснение наблюдаемого поведения матрицы плотности ρ -мезона.

Чтобы считать это объяснение убедительным, а доводы в пользу поведения амплитуды рассеяния вперед типа $s^{\alpha-\lambda}$ — решающими, необходимо получить дополнительные экспериментальные данные, особенно в области высоких энергий. Ситуация осложняется тем, что вероятно вклад π -траектории вблизи направления вперед усиливается в любом случае, так как реальная физическая частица лежит почти при $t = 0$, т. е. значение $\alpha_\pi(0)$ является очень близким к нулю, а в этой точке имеется полюс, обусловленный нулем функции $\sin \pi \alpha_\pi$ (в теории полюсов Редже так формулируется тот факт, что данная точка находится вблизи физического полюса, существующего при $t = m_\pi^2$). В вычете, соответствующем конечному состоянию ρN , имеется кинематический множитель t , который компенсирует этот полюс, однако, как показал Роджерс ¹⁾, если существует подходящая пионная конспирация, то этот множитель t не возникнет. В этом случае близость пионного полюса вполне может объяснить доминирующую роль π -траектории вблизи направления вперед при доступных в настоящее время энергиях.

В работе [326] проанализированы данные по процессу $\pi^- p \rightarrow \rho^- p$ при $8 \text{ Гэв}/c$ с использованием π - и ω -траекторий. При этом проведена подгонка параметров, описывающих вычеты, но кинематические множители в явном виде не выделялись, так что результаты работы не допускают простой интерпретации в описанной выше форме.

Совершенно ясно, что эта область исследований является весьма обширной, и здесь предстоит проделать большую теоретическую и экспериментальную работу.

¹⁾ T. W. Rogers, частное сообщение, 1967.



Ф и г. VIII.23. Сравнение экспериментальных данных по полным сечениям процессов π^+p , π^-p и $K^{\pm}n$, $K^{\pm}p$ (б) при низких энергиях с предсказаниями на основе подгоночной процедуры, проведенной в работе [49] при высоких энергиях с использованием $SU(3)$ -связей [50].

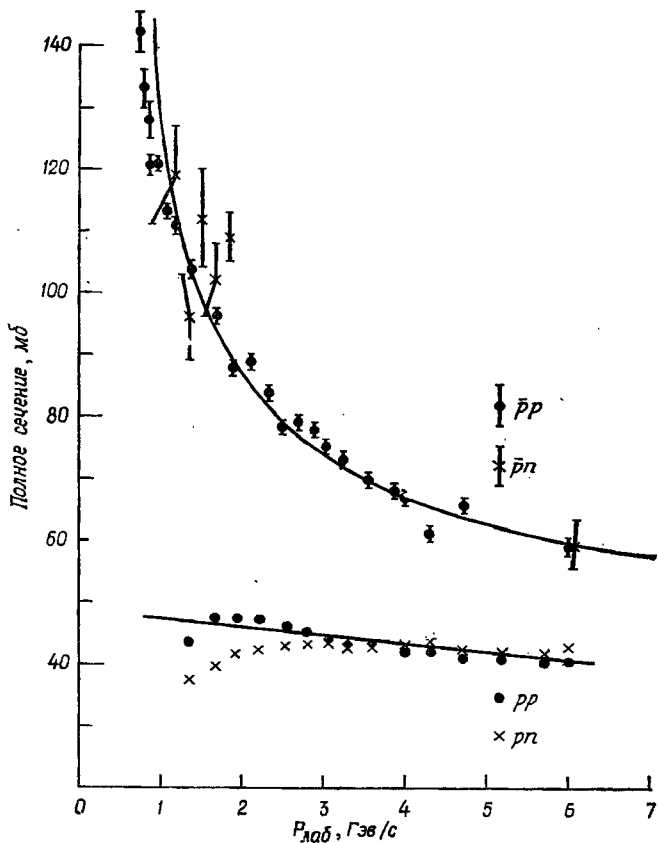
§ 8. НИЗКИЕ ЭНЕРГИИ И ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ С РЕЗОНАНСАМИ ПРЯМОГО КАНАЛА

Как мы выяснили в § 3—7, полюса Редже кросс-канала могут хорошо описывать амплитуды рассеяния при высоких энергиях вблизи направлений вперед и назад. Согласно сказанному в § 2, под «высокими энергиями» понимаются энергии, превышающие несколько гигаэлектронвольт, и типичные подгонки с помощью полюсов Редже используют данные из области примерно от 5 до 20 Гэв. Но что происходит в области более низких энергий? Очевидно, здесь нет основания пренебрегать фоновым членом и низколежащими траекториями по сравнению с высоколежащими траекториями. В действительности, как мы знаем, в низкоэнергетической области любого заданного канала имеется тенденция к доминированию резонансов с низшими массами, которые невозможно представить в виде суммы полюсов Редже кросс-канала.

Баргер и Олссон [50] использовали подгоночные параметры, полученные ими ранее [49] при обработке сечений в области $p_{\text{лаб}} = 6$ — 20 Гэв/с (см. § 3 данной главы), для экстраполяции сечений вплоть до импульсов около 1 Гэв/с. Соответствующие результаты приведены на фиг. VIII.23 и фиг. VIII.24, где видно, что достигнуто вполне удовлетворительное описание экспериментальных данных. В случае πN - и NN -рассеяния, когда сечения известны с высокой точностью, наблюдаются некоторые колебания экспериментальных точек относительно предсказываемой кривой, причем их можно скоррелировать с массами различных резонансов прямого канала.

Это наводит на мысль, что амплитуду следует записывать в виде суммы главных полюсов Редже кросс-канала и фона, состоящего только из резонансов прямого канала. Это представление соответствует тому представлению, которое мы использовали при динамических расчетах в гл. VI, § 6, где амплитуда записывалась в виде суммы полюсов Редже в каждом канале. Однако при образовании такой суммы необходимо соблюдать известную осторожность, так как на самом деле мы используем два эквивалентных способа представления амплитуды и имеется опасность учесть один и тот же вклад дважды. В одном из способов амплитуда разлагается в ряд по парциальным волнам s -канала, а затем это разложение выражается через резонансы плюс нерезонансный фон. В другом способе делается преобразование Зоммерфельда — Ватсона для разложения амплитуды по парциальным волнам t -канала, т. е. амплитуда представляется в виде суммы главных полюсов Редже в J_t -плоскости и реджевского фонового интеграла. Затем делается предположение, что если к главным реджевским сингулярностям добавить резонансы, то мы получим для амплитуды хорошую подгоночную формулу. Такая формула будет справедлива в том случае, если почти весь реджевский фон задается резонансами, или, другими словами, если почти вся нерезонансная часть амплитуды

обусловлена полюсами Редже. Заметим однако, что если бы мы перешли в левую полуплоскость переменной J_t , то при этом вошли бы и те сингулярности, которые возникают за счет резонансов s -канала. Но в правую полуплоскость J_t эти резонансы не дают вклада, поэтому



Ф и г. VIII.24. Сравнение экспериментальных данных по полным сечениям процессов pp , pn , $\bar{p}p$ и $\bar{p}n$ при низких энергиях с предсказаниями на основе подгоночной процедуры, проведенной в работе [49] при высоких энергиях с использованием $SU(3)$ -связей [50].

если мы включим только самые правые полюса Редже, то ни один из эффектов не будет учтен дважды.

Вклады резонансных полюсов интерферируют с реджевским членом, однако эта интерференция играет существенную роль лишь в тех случаях, когда вклады разных типов сравнимы по величине. Хейнц и Росс [231] предположили, что интерференция между вкладами пря-

мого и перекрестного каналов может оказаться полезной в качестве метода, позволяющего определять спины резонансов. Они использовали этот метод для исследования амплитуды упругого π^+p -рассеяния назад, которое описывалось посредством различных резонансов изоспина $3/2$, интерферирующих с нуковым полюсом фиксированного спина (т. е. не с полюсом Редже) кросс-канала.

Позднее Баргер и Клайн [46, 47] предприняли попытку проанализировать с помощью этого метода амплитуду π^-p -рассеяния назад, представляя ее в виде суммы вкладов реджевских семейств N_α , N_γ и Δ_6 в прямом канале и траектории Редже Δ_6 в кросс-канале. Как уже отмечалось в § 1, все резонансы очень хорошо ложатся на прямые траектории Редже. Для Δ_6 использовалась траектория

$$\operatorname{Re} \alpha(\sqrt{u}) = 0,15 + 0,9u, \quad (8.1)$$

которая была получена в результате анализа установленных членов семейства этого резонанса. Затем в соответствии с (I.7.10) сечение записывалось в виде

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(s, \theta_s = 180^\circ) = \frac{1}{(8\pi)^2 s} |A^{\text{рез}}(s, u=0) + A^{\text{реджк}}(s, u=0)|^2, \quad (8.2)$$

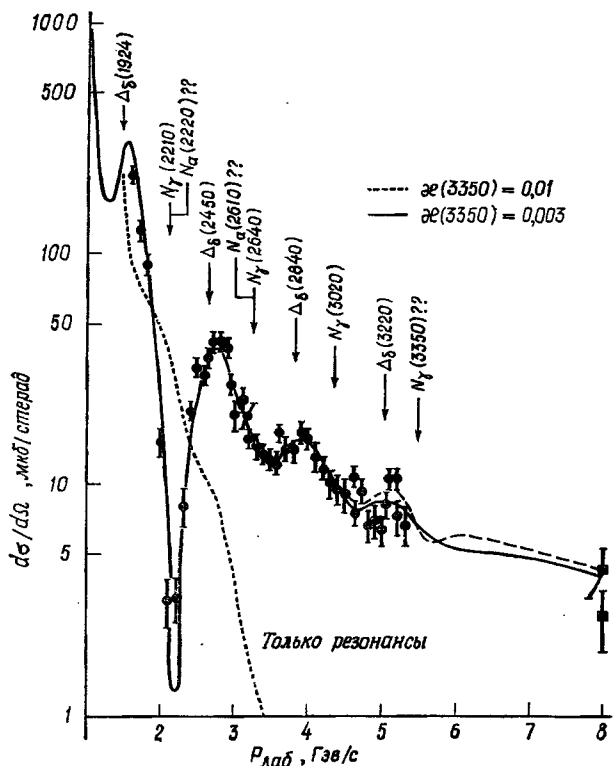
причем резонансы дают следующий вклад:

$$A^{\text{рез}}(s, u=0) = \sum_i \frac{\kappa_i M_i \Gamma_i (-1)^{l_i} (J_i + 1/2)}{M_i^2 - s - i M_i \Gamma_i} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \text{для } \Delta \\ \frac{2}{3} & \text{для } N \end{pmatrix}. \quad (8.3)$$

Суммирование здесь проводится по всем резонансам с массами M_i ; ширинами Γ_i , спинами J_i и четностями $(-1)^{l_i}$; κ_i — «упругость» резонанса, которая изменяется в пределах от 1 (чисто упругий резонанс) до 0 (полностью неупругий резонанс). В работе учитывались все известные резонансы вместе с некоторыми пиками более высоких масс в сечениях, которые интерпретировались так, как это показано на фиг. VIII.3—VIII.5. Где это возможно, использовались экспериментальные значения упругости; в тех случаях, когда эта величина не известна, она играла роль подгоночного параметра. Полученные результаты приведены на фиг. VIII.25, из которой видно, что интерференция между двумя вкладами в амплитуду может превосходно объяснять осцилляции экспериментальных данных. Наличие в формуле (8.3) множителя $(-1)^{l_i}$ означает, что знаки интерференционных членов зависят от четности состояний, поэтому в большинстве случаев четности резонансов определяются однозначно. Но значения J_i определить не удастся, так как подгонкой фиксируется только множитель $\kappa_i (J_i + 1/2)$, а упругости высших резонансов малы. Нет никакой гарантии, конечно, что сумма амплитуд в (8.2) будет удовлетворять условию унитарности, однако в действительности вследствие малой

упругости максимальные значения резонансных членов составляют лишь малую часть унитарного предела, и никаких трудностей не возникает.

Баргер и Клайн [47] обработали также экспериментальные данные по π^+p -рассеянию, но в этом случае изоспиновые множители приводят



Ф и г. VIII.25. Согласование теоретических кривых с экспериментальными данными по упругому π^+p -рассеянию назад [47].

Стрелки указывают положения резонансов прямого канала, принадлежащих реджевским семействам Δ_δ , N_α и N_γ .

к тому, что резонансы прямого канала доминируют над вкладом кросс-канала, по крайней мере при значениях импульсов примерно до 4 Гэв/с, хотя и возможен обмен каждой из траекторий N_α , N_γ и Δ_δ .

Позднее Дикмен [147] показал, что для дифференциального сечения π^+p -рассеяния назад можно получить такое же хорошее совпадение, как в описанном выше случае [46, 47], используя только резонансы и полностью пренебрегая траекторией Редже кросс-канала, если несколько изменить значения некоторых ширин и упругостей. Поэтому

исследование Баргера и Клайна [46, 47] следует рассматривать в качестве некоторого средства, позволяющего выяснить природу резонансов, а не как доказательство существования интерференции с реджевским членом, хотя мы знаем, конечно, что кросс-канал дает определенный вклад. Вероятно, существует опасность учесть некоторые эффекты дважды, так как при описании с помощью полюсов Редже экспериментальных данных при высоких энергиях, даже в области 6—20 Гэв/с, неизбежно в неявном виде включаются определенные эффекты, связанные с прямым каналом.

Интерференционный метод применялся также для анализа амплитуд πp -рассеяния вперед [51]. Как было показано в § 3 и 4, из всех известных полюсов кросс-канала только ρ -мезонный полюс дает вклад в величину

$$\Delta(\pi p) = \sigma^{\text{полн}}(\pi^- p) - \sigma^{\text{полн}}(\pi^+ p), \quad (8.4)$$

и в дифференциальное сечение $d\sigma^{\text{перезар}}/dt$ рассеяния $\pi^- p \rightarrow \pi^0 n$. В работе [51] использовалась та же модель и эти величины записывались в виде

$$\Delta(\pi p) = \frac{1}{2q_s \sqrt{s}} \text{Im} [A^{\text{рез}}(s, 0) + A^{\text{редж}}(s, 0)], \quad (8.5)$$

$$\frac{d\sigma^{\text{перезар}}}{dt}(s, 0) = \frac{1}{(8\pi)^2 s} |A^{\text{рез}}(s, 0) + A^{\text{редж}}(s, 0)|^2, \quad (8.6)$$

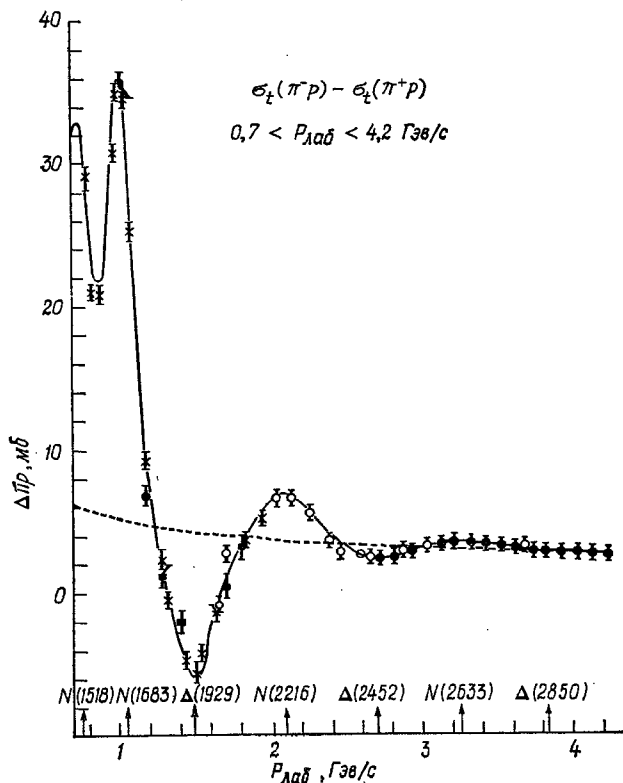
где в $A^{\text{редж}}$ входит вклад только ρ -траектории, а $A^{\text{рез}}$ содержит резонансы N_α , N_γ и Δ_δ , показанные на фиг. VIII.3—VIII.5. Соответствующие кривые, полученные при значении

$$\alpha_\rho(0) = 0,58 \pm 0,01,$$

приведены на фиг. VIII.26—VIII.28. Они хорошо описывают отклонения от результатов, к которым приводит только обмен ρ -траекторией. Однако Хофф [239] показал, что при таких низких энергиях ход сечения $d\sigma^{\text{перезар}}/dt$ столь же хорошо может быть описан и с помощью одной лишь суммы резонансов прямого канала. Этот способ пригоден при всех t , лежащих вне области провала дифференциального сечения при $t \approx -0,6$ (Гэв/с)², рассматриваемого в § 6, который Фраучи [181] объяснил тем, что в этой точке $\alpha_\rho(t)$ обращается в нуль. Неизвестно, можно ли таким же способом объяснить экспериментальные данные при гораздо более высоких энергиях [24], при которых по-прежнему имеется провал, однако в § 10 будет показано, что существуют определенные правила сумм, ограничивающие вклад нереджевского типа.

Как указывалось в § 7, поляризацию в процессе πp -рассеяния с перезарядкой невозможно объяснить одним лишь обменом ρ -траекторией, и Логан и Серторио [282] предприняли попытку описать ее на основе интерференции между ρ -траекторией и резонансами. Учитывая только состояния N_α , N_γ и Δ_δ , показанные на фиг. VIII.3—VIII.5,

авторы сумели получить формулы, хорошо описывающие данные по поляризации при 6 Гэв, но при более высоких энергиях они предсказали резкое уменьшение поляризации. Такое поведение связано с тем, что при этих энергиях ρ -траектория может интерферировать

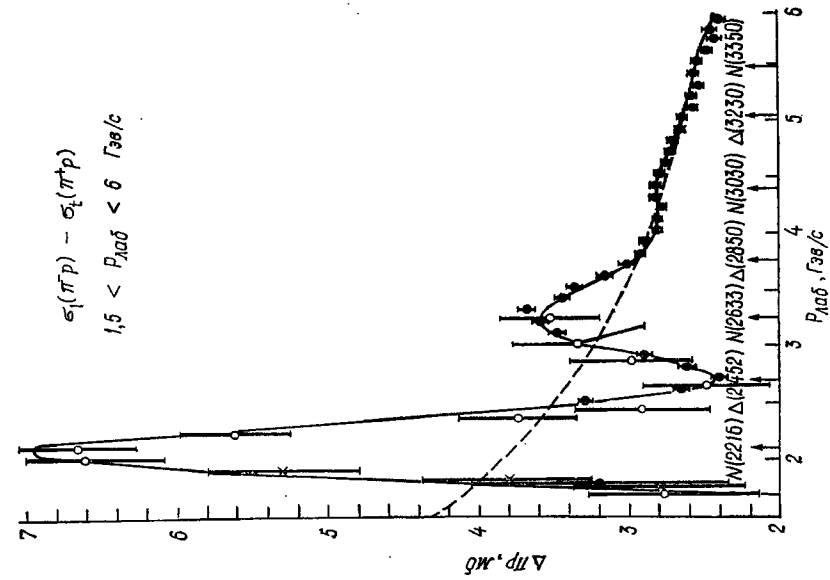


Ф и г. VIII.26. Зависимость разности полных сечений $\Delta(\pi p) = \sigma^{\text{полн}}(\pi^-p) - \sigma^{\text{полн}}(\pi^+p)$ от импульса в лабораторной системе для значений импульса от 0,7 до 4,2 Гэв/с [51].

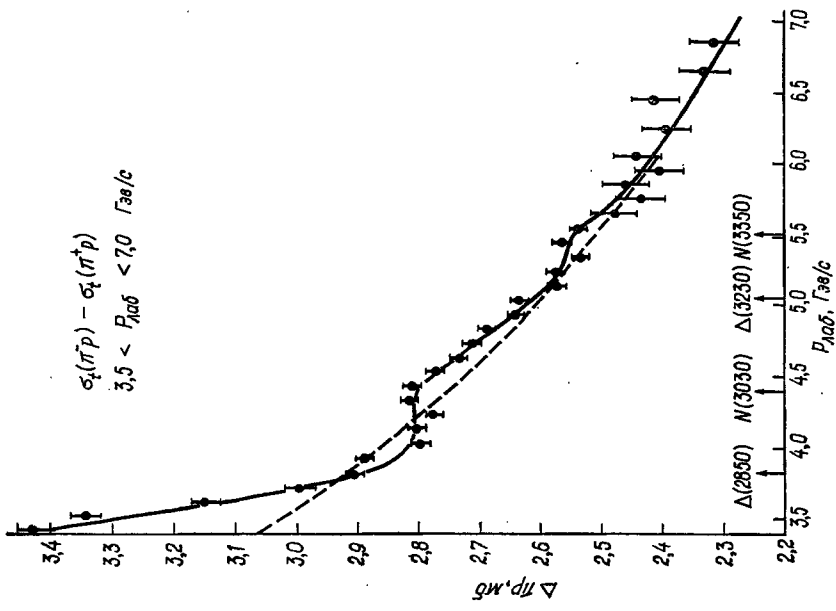
Сплошные линии — теоретические подгоночные кривые, пунктирные линии — вклад от обмена ρ -траекторией.

только с «хвостами» резонансов. В действительности вследствие малых упругостей высших резонансов наиболее существенный вклад дают резонансы средней энергии. Филлипс [329] также успешно использовал модель такого рода для описания экспериментальных данных при 6 Гэв.

Трудность, свойственная этим моделям, состоит в том, что при возрастании энергии экспериментально измеренная поляризация, по-види-

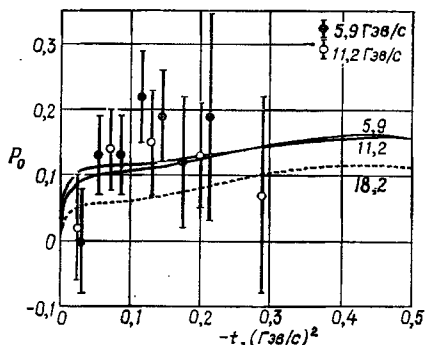


Ф и г. VIII.27. То же, что на фиг. VIII.26, но для значений импульса от 1,5 до 6 Гэв/с.



Ф и г. VIII.28. То же, что на фиг. VIII.26, но для значений импульса от 3,5 до 7,0 Гэв/с.

тому, не уменьшается, хотя ошибки слишком велики, чтобы об этом можно было говорить с полной уверенностью. Некоторые из возможных объяснений такого поведения рассматриваются в § 7. Здесь мы отметим работу [143], в которой предполагается, что траектории, приведенные на фиг. VIII.3—VIII.5, будучи продолженными в области более высоких значений J , порождают члены реджевских семейств с большими массами, так что даже при очень высоких энергиях ρ -траектория может интерферировать с близлежащим резонансом, давая



Ф и г. VIII.29. Зависимость поляризации P_0 от передаваемого импульса. Сплошные линии — наилучшие подгоночные кривые для экспериментальных данных при 5,9 и 11,2 Гэв/с, пунктирная линия — предсказываемая кривая при 18,2 Гэв/с [143].

не будет. Логан и Серторио [283] на основе своей модели, упоминавшейся выше, предсказали поляризацию. Эта поляризация вскоре будет измерена для проверки их предсказания.

§ 9. ПРЯМОЛИНЕЙНЫЕ ТРАЕКТОРИИ И ОБМЕННОЕ ВЫРОЖДЕНИЕ

1. Динамика прямолинейных траекторий

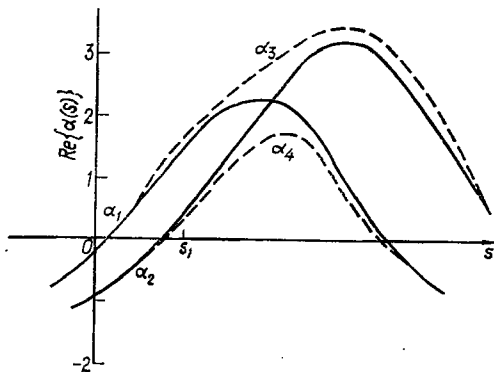
Мы уже несколько раз отмечали, что траектории Редже как при $t > 0$, так и при $t < 0$ оказываются более прямолинейными, чем этого можно было ожидать на основе простых моделей зашнуровки или вообще на основе любой динамической схемы, в которой масштаб массы равен примерно 1 Гэв.

Предлагаемое ниже объяснение такого поведения в области $t > 0$ связывает его с тем, что при возрастании энергии вмешиваются неупругие состояния. Идея заключается в том, что высшие резонансы более правильно рассматривать как связанные или резонансные состояния

тем самым поляризацию. В этом случае изменение поляризации с энергией очень сильно зависит от того, насколько меняются упругости резонансов по мере подъема вдоль траектории. Дисей и др. [143] приняли некоторую модифицированную форму экспоненциального спада упругости χ_i с ростом энергии, которая приводит к результатам, показанным на фиг. VIII.29. Однако путем выбора подходящей модификации этого спада, вероятно, можно объяснить почти любое поведение поляризации.

Процесс $\pi p \rightarrow \eta n$ при высоких энергиях определяется только полюсом Редже A_2 , поэтому в отсутствие интерференции с каким-то другим вкладом поляризации также

неупругих каналов. Чтобы выяснить, насколько оправдана такая точка зрения, представим себе одноканальную задачу с порогом в точке $s = s_1$ и с частицами нулевого спина и предположим, что силы приводят к траектории типа α_1 (фиг. VIII.30). Тогда будет существовать одно связанное состояние с $J = 0$ и два резонансных состояния при $J = 1$ и $J = 2$ (мы не учитываем здесь сигнатурный эффект, который приводит к усложнению, не затрагивающему существа рассматриваемого вопроса). Представим себе, кроме того, другую одноканальную задачу, в которой имеется частица спина 3 и частица спина 0, а порог лежит в точке $s = s_2 > s_1$. Пусть силы таковы, что в этой задаче возникает траектория α_2 , порождающая резонанс с $l = 0$, т. е. с $J = 3$, как это показано на фиг. VIII.30. Состояния с $J = 0, 1, 2$, лежащие на траектории α_2 , являются бессмысленными состояниями и никакой роли в дальнейшем анализе не играют. Пусть теперь между двумя этими одноканальными системами имеется связь, т. е. существует одна двухканальная система. В случае слабой связи траектории почти не изменяются, но при увеличении связи наступит такой момент, когда траектории обмениваются своими «хвостами» и перестают пересекаться (см. [315], стр. 88), в результате чего состояние с $J = 3$ оказывается лежащим на той же траектории, что и состояния с $J = 0, 1, 2$ (т. е. на пунктирной траектории α_3 на фиг. VIII.30). Исходная траектория α_2 превращается тогда в траекторию, подобную α_4 . Проводя траектории α_3 и α_4 , мы воспользовались результатом, который следует из вариационного принципа и согласно которому связь между дополнительными состояниями должна приводить к уменьшению энергии, по крайней мере энергии связанного состояния. Отметим, что строгого запрета на «пересечение» траекторий выше порога нет, так как они имеют разные мнимые части ($\text{Im } \alpha_1 \neq \text{Im } \alpha_2$) и поэтому в комплексной J -плоскости на самом деле не встречаются. Таким образом, при слабой связи траектории пересекаются, а их «переброс» происходит лишь в том случае, когда связь становится достаточно сильной.

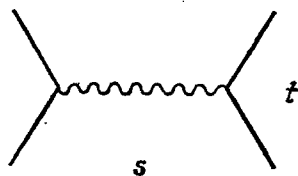


Фиг. VIII.30. Поведение траекторий Редже при включении связи между двумя каналами.

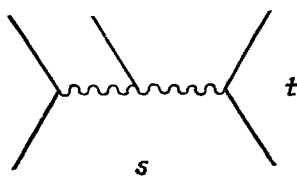
Очевидно, можно представить себе, что описанная выше ситуация повторяется бесконечное число раз со все более высокими порогами и приводит к отсутствию спада траектории. Так например, можно считать, что первым резонансом, лежащим на N -траектории, является

состояние $\pi - \Delta_{3/2}$, следующим — в основном состоянии $\pi - \Delta_{7/2}$ и т. д. Модель такого рода рассмотрел Каррудерс [82].

Наблюдаемое отсутствие кривизны траектории в области $t < 0$ должно быть связано с этим явлением, хотя с динамической точки зрения такая связь является довольно неясной (отметим, что отсутствие кривизны не следует из эксперимента, однако с помощью почти прямолинейных траекторий данные описываются гораздо лучше, чем в том случае, когда требуется, чтобы они на бесконечности стремились к -1 , — см., например, § 6, п. 2). Мандельстам [297] высказал



Ф и г. VIII.31. Борновская диаграмма, ведущая себя при больших t как t^{-1} .



Ф и г. VIII.32. Диаграмма, ведущая себя при больших t как t^{-2} .

предположение, что подобное поведение можно рассматривать в качестве естественного следствия отсутствия элементарных частиц. Чтобы убедиться в этом, напомним, что борновское приближение для двухчастичной амплитуды, соответствующее, например, диаграмме, показанной на фиг. VIII.31, при больших t ведет себя как $1/t$. Это является причиной, благодаря которой в отсутствие каких-либо «сокращений» ведущая траектория Редже стремится к -1 при $t \rightarrow \infty$. Однако если одну из внешних линий заменить двухчастичным состоянием, то борновское приближение (фиг. VIII.32) будет вести себя как t^{-2} , и для ведущей траектории мы получим $\alpha(-\infty) = -2$. Продолжая эту процедуру, мы естественным образом приходим к представлению о ведущей траектории, которая при $t \rightarrow \infty$ стремится к $-\infty$.

Облечь эту аргументацию в какую-то более приемлемую форму весьма непросто, однако недавно Стек [376] предложил чрезвычайно интересную модель, в рамках которой он предпринял попытку построить нуклон из пары $\pi - N$ и учесть, что внешний нуклон является также связанным состоянием системы $\pi - N$. Это приводит к нуклону, являющемуся состоянием πN , которое в свою очередь рассматривается в качестве внешнего нуклона, и т. д. Можно надеяться, что такая итерационная процедура приведет в конце концов к связанному состоянию N_∞ , которое будет очень близким к реальному нуклону. Точный смысл этой процедуры неясен, однако Стек показал, что формфактор состояния N_∞ спадает экспоненциально, т. е. удовлетворяет бесконечному числу сверхсходящихся соотношений. Ясно, что

такое поведение имеет непосредственное отношение к траекториям, для которых $\alpha(t) \rightarrow -\infty$ при $t \rightarrow -\infty$.

Были рассмотрены [253, 265] некоторые следствия, вытекающие из существования траекторий, которые при $t \rightarrow \pm\infty$ стремятся к бесконечности. Ясно, что такое поведение в принципе возможно, но ни один из механизмов, который мог бы привести к нему, не объясняет, почему траектории оказываются линейными функциями переменной t . Было отмечено [73], что благодаря центробежному барьеру, обусловленному орбитальным моментом, состояния, лежащие на линейных траекториях, по мере возрастания t распадаются на другие состояния со все большим трудом. Их динамика должна определяться каналами, в которых они являются скорее связанными состояниями, чем резонансами.

2. Кварковая модель для траекторий

Любая кривая является приближенно прямолинейной, если рассматривать достаточно малый ее участок. Поэтому кажущуюся прямолинейность естественно объяснять тем, что динамический масштаб энергий гораздо больше нескольких гигаэлектронвольт, т. е. размеров той области, в которой исследуются траектории. Очевидным, хотя и весьма умозрительным, примером теории такого рода является кварковая модель, в которой адроны считаются состоящими из «кварков» [203]¹⁾ (общий анализ кварковых моделей и подробную библиографию можно найти в обзорных работах [136, 371]). Для наших целей основное свойство кварков состоит в том, что они являются тяжелыми частицами ($M_q > 5 \text{ Гэв}$); в этой модели мезоны рассматриваются в качестве связанных состояний кварка и антикварка, а барионы — в качестве связанных состояний трех кварков. «Потенциальная энергия» взаимодействия между кварками, необходимая для того, чтобы получить нужные энергии связи, должна быть чрезвычайно большой (мы пользуемся языком теории потенциального рассеяния; предполагается [306], что эта теория может служить для приближенного описания связанных состояний, но для наших целей ее язык пригоден независимо от этого). При подходящем радиусе действия ($\sim 10^{-13} \text{ см}$) такой потенциал вполне может породить траекторию типа показанной на фиг. VIII.2. В конце концов подобные траектории загибаются, но можно ожидать, что до этого они пройдут через большое число связанных состояний (т. е. связанных по отношению к порогу канала $q\bar{q}$).

Еще одной характерной особенностью этой модели является то, что она объясняет отсутствие какого-либо «сигнатурного» эффекта, по крайней мере для мезонов. Чтобы убедиться в этом, заметим, что прямое взаимодействие между парой $q - \bar{q}$ может быть вызвано обме-

¹⁾ См. также Zweig G., Preprint CERN, Geneva, 8182/TH.401, 8419/TH.412, 1964.

ном мезонами (отметим, что при этом получается потенциал с правильным радиусом действия). Однако в результате обмена в u -канале возникают обменные силы, причем соответствующие частицы имеют квантовые числа пары qq (барионное число $\frac{2}{3}$). С другой стороны, известно, что такие частицы не могут иметь массу, меньшую, чем примерно 5 Гэв , поэтому обменные силы являются чрезвычайно короткодействующими, что объясняет их малое влияние. Отсутствие обменных сил, которое приводит к перекрытию траекторий с противоположными сигнатурами, называют иногда «обменным вырождением».

Отметим, что такое поведение в кварковой модели прямо противоположно ситуации, возникающей в обычных теориях зашнуровки, типа рассмотренных в гл. VI. В этих теориях принимается, что ρ -мезон является преимущественно состоянием системы $\pi\pi$, тогда как A_2 не может содержать никакого вклада $\pi\pi$ (распад $A_2 \rightarrow \pi\pi$ запрещен по G -четности). Поэтому A_2 - и ρ -траектории имеют здесь совершенно разное происхождение, и их вырождение представляется случайным.

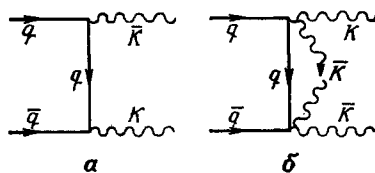
Однако в кварковой модели также имеются свои трудности. Кроме очевидного затруднения, связанного с тем, что кварки не наблюдались экспериментально (правда, если их масса значительно больше 5 Гэв , то непонятно, как их можно обнаружить даже в космических лучах), возникают некоторые проблемы с барионными состояниями и с отсутствием четырех- или пятикварковых состояний, которые должны быть связанными гораздо более сильно, чем трехкварковые состояния (по крайней мере в простых моделях). Возникают определенные трудности и на более глубоком уровне. Так, например, совершенно непонятно, почему простая кварковая модель адронов не нарушается полностью из-за влияния примесей низших пороговых состояний (эта проблема рассматривается в работе [372]). Однако эта модель имеет ряд достижений, в частности в объяснении разности масс, слабых и электромагнитных свойств адронов и данных по рассеянию при высоких энергиях (см. обзоры [136, 371], в которых приведена соответствующая библиография).

Отметим, что кварковая модель рассеяния при высоких энергиях не противоречит модели полюсов Редже; объединив их путем реджезации амплитуд qq - и $\bar{q}\bar{q}$ -рассеяния, по-видимому, можно получить определенную пользу. Проведены некоторые исследования в этом направлении [10, 248].

Некоторые авторы распространяют предположение об обменном вырождении также и на связи, принимая, что ρ - и A_2 -траектории имеют одинаковые вычеты (эта идея применена в работе [25], в которой можно найти библиографию по данному вопросу). Однако подобное равенство вычетов, имеющее некоторый смысл в качестве исходного предположения, никак не вытекает из рассмотренной выше кварковой модели. Чтобы убедиться в этом, оценим в рамках этой модели связь

ρ (и A_2) с каналом $K\bar{K}$. Это можно сделать, вводя взаимодействие, которое приводит к рассеянию $q\bar{q} \rightarrow \bar{K}K$ и $q\bar{q} \rightarrow K\bar{K}$ (фиг. VIII.33), проводя вычисления для двухканальной ($q\bar{q}$ и $K\bar{K}$) задачи и выделяя вычет ρ -полюса в амплитуде рассеяния $q\bar{q} \rightarrow K\bar{K}$ (подробности такого рода расчетов см. в работе [372]). Наиболее дальнедействующее взаимодействие в t -канале обусловлено обменом кварком (фиг. VIII.33, а), тогда как не известно таких частиц, которые приводили бы к одночастичному обмену в u -канале (фиг. VIII.33, б). Однако радиус действия сил, возникающих в результате возможного обмена системой

(кварк + мезон), не очень отличается от радиуса действия сил, обусловленных обменом одним кварком; поэтому маловероятно, чтобы силы t -канала в сколько-нибудь значительной степени доминировали над силами u -канала. Возможно, что силы, соответствующие диаграммам, показанным на фиг. VIII.33, почти не изменяют масс связанных состояний и поэтому не влияют на обменное вырождение траекторий, однако вычеты двух траекторий будут примерно совпадать лишь в том случае, когда одна из диаграмм на фиг. VIII.33 доминирует. Анализ процессов $\pi^-p \rightarrow \pi^0n$, ηn дает некоторые намеки на то, что предположение о наличии обменного вырождения в действительности неприменимо к вычетам (см. § 6, п. 4).



Ф и г. VIII.33. Силы наиболее далекого действия для процессов $q\bar{q} \rightarrow \bar{K}K$ (а) и $q\bar{q} \rightarrow K\bar{K}$ (б).

§ 10. ПРИМЕНЕНИЕ СВЕРХСХОДЯЩИХСЯ СООТНОШЕНИЙ

В гл. V, § 5 мы показали, что интегралы от определенных простых спектральных функций должны равняться нулю. Де Альфаро и др. [16] высказали предположение, что эти простые спектральные функции можно аппроксимировать вкладами от низколежащих частиц и резонансов, получая тем самым соотношения между массами и константами связи этих состояний. Никаких убедительных доводов, свидетельствующих о том, что при этом будет получено хорошее приближение, не существует. Наоборот, множество данных свидетельствует о несостоятельности этого метода, однако он прост и быстро приводит к результатам, поэтому естественно, что он привлек большое внимание. При соответствующих модификациях, которые будут упомянуты ниже, он может давать вполне разумные результаты, образуя в действительности фундамент определенной динамической модели, поэтому мы кратко рассмотрим его здесь.

Заметим прежде всего, что полученные выше сверхсходящиеся соотношения имеют вид интегралов от скачков амплитуд t -канала по переменным s и u . Чтобы выразить эти скачки с помощью связан-

ных состояний и резонансов s - и u -каналов, следует перейти в эти каналы. Для перехода к спиральным амплитудам кросс-канала в некоторых случаях удобнее применять не метод, использующий кроссинг-матрицу [393], а прямой метод, предложенный в работе [317]. Подставим после этого в скачки амплитуды набор связанных состояний и резонансов и будем считать, что всеми остальными вкладками можно пренебречь. Если для простоты заменить вклады резонансов δ -функциями (многие авторы предпочитают использовать формулу Брейта — Вигнера, что, по-видимому, предпочтительнее), то при всех t , меньших некоторого t_0 , мы получим соотношения вида

$$\sum_i C_i R_i d_{\lambda\lambda}^{\sigma_i} [z_i(t, s = m_i^2)] = 0, \quad (10.1)$$

где суммирование проводится по заданному набору состояний со спинами σ_i и массами m_i . Коэффициент R_i является вычетом в полюсе (произведением двух констант связи), а C_i — коэффициент, возникающий из кроссинг-матрицы. Хотя это явно и не указано, но подразумевается, что сумма в (10.1) наряду с состояниями s -канала содержит и состояния u -канала.

Отметим сразу же, что удовлетворить соотношению (10.1) в заданном интервале значений t с помощью конечного числа состояний невозможно, если только ему не удовлетворяют каждая в отдельности группы состояний с одинаковыми спинами и массами (исключение составляют состояния с $\sigma = 0$, которые не должны иметь одинаковые массы, так как $d_{00}^0(z)$ является константой, не зависящей от z). Эти выводы получены в работе [355], в которой постулируется, что каждая пара состояний с одинаковыми массами и спинами должна удовлетворять свёрхсходящимся соотношениям. Однако в природе такие пары, по-видимому, не встречаются.

Фубини [198] и Клейн [268] рассмотрели возможность насыщения свёрхсходящихся соотношений с помощью бесконечного числа состояний. В общем случае будут иметь место свёрхсходящиеся соотношения для всех возможных процессов рассеяния, в которых участвуют эти состояния, поэтому ясно, что данная проблема чрезвычайно сложна, и мы не будем здесь ее рассматривать.

Многие авторы сконцентрировали свои усилия на анализе свёрхсходящихся соотношений вблизи $t = 0$, принимая без каких-либо колебаний, что состояния с разными спинами и массами компенсируют друг друга. Одно из возможных оправданий этой процедуры предложили Фрамтон и Тейлор [179], которые отметили, что если вместо соотношений вида

$$\int_{s_0}^{\infty} \text{Im } A(s, t) ds = 0, \quad (10.2)$$

выполняющихся при всех t , рассматривать эквивалентную им бесконечную последовательность соотношений

$$\int_{s_0}^{\infty} \operatorname{Im} A(s, 0) ds = 0, \quad (10.3)$$

$$\int_{s_0}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{dA}{dt}(s, 0) ds = 0, \quad (10.4)$$

$$\int_{s_0}^{\infty} \operatorname{Im} \frac{d^2 A}{dt^2}(s, 0) ds = 0 \quad (10.5)$$

и т. д., то в первое соотношение будут давать вклады резонансы со спином $\sigma \geq 0$, во второе — резонансы с $\sigma \geq 1$, а следующее — с $\sigma \geq 2$ и т. д. Авторы доказывают, что в то время как для насыщения (10.3) может оказаться достаточным состояний с низшими массами (которые имеют небольшие спины), то для насыщения других соотношений будут требоваться, вероятно, также и состояния с более высокими массами. Заметим, что в приведенных соотношениях для простоты выписан вклад только от разреза по s ; в общем случае мы будем иметь сумму вкладов от разрезов по s и по u (см. гл. V, § 5).

Простым примером, впервые рассмотренным Де Альфаро и др. [16], является рл-рассеяние в s -канале. В t -канале спиральные амплитуды имеют $\lambda = 0, 1, 2$, и существуют три изоспиновых состояния с $I = 0, 1, 2$. В случае $I = 0$ доминирует помераншон, поэтому при $t = 0$ мы не имеем сверхсходящихся соотношений (хотя они и будут при $t < 0$). При $I = 1$ доминирует ρ -траектория, для которой $\alpha_\rho(0) \approx 0,5$, так что будет существовать сверхсходящееся соотношение для амплитуды с $\lambda = 2$ (поскольку $\alpha_\rho(0) - \lambda \approx -1,5 < -1$). При $I = 2$ не известно ни одной траектории с $\alpha(0) > 0$, но вклад двух ρ -полюсов приводит к разрезу, который при $t = 0$ начинается в точке $\alpha_c(t) \approx 0$. Принимая, что эта точка лежит несколько ниже нуля, мы будем иметь еще три сверхсходящихся соотношения: при $\lambda = 2$ соотношения для нулевого и первого моментов (так как $\alpha_c(0) - \lambda < -2$) и при $\lambda = 1$ соотношение для нулевого момента. Если даже $\alpha_c(0)$ не меньше нуля, то эти соотношения выполняются достаточно хорошо, поскольку выше значения $J = 0$ вклад от разреза, по-видимому, является малым.

В рассматриваемой задаче u -канал совпадает с s -каналом, причем из вида кроссинг-матрицы следует, что одно из четырех указанных выше сверхсходящихся соотношений тождественно удовлетворяется за счет взаимного уничтожения разрезов по s и по u . В остальных трех случаях вклад разреза по u в точности такой же, как вклад разреза по s . Отметим, что если не учитывать неподвижный полюс в амплитуде с неправильной сигнатурой, обусловленный третьей двойной спектральной функцией (см. гл. V, § 5), то разрезы по s и по u следует

рассматривать каждый в отдельности, и в данной задаче мы получим четыре сверхсходящихся соотношения.

Фрамтон и Тейлор [179] провели анализ насыщения трех сверхсходящихся соотношений, соответствующих правильной сигнатуре, посредством мезонов π , ω , A_1 и A_2 (они дали также список литературы по более ранним исследованиям). Для $\text{Im } A(s, 0)$, т. е. для соотношений типа (10.3), получены удовлетворительные результаты, но для высших производных они оказываются неудовлетворительными.

Были изучены [18, 31, 355] сверхсходящиеся соотношения для амплитуд рассеяния мезонного октуплета на барионном октуплете, возникающие из-за отсутствия высокой траектории Редже, которая соответствует представлению размерности 27 группы $SU(3)$. Джонс и Скадрон [257] изучили, кроме того, процессы

$$\begin{aligned} &(\text{барионный октуплет}) - (\text{мезонный октуплет}) \rightarrow \\ &\rightarrow (\text{барионный декуплет}) - (\text{мезонный октуплет}) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} &(\text{барионный декуплет}) - (\text{мезонный октуплет}) \rightarrow \\ &\rightarrow (\text{барионный декуплет}) - (\text{мезонный октуплет}). \end{aligned}$$

Упомянутая выше неадекватность подгоночной процедуры (в литературе имеется много других примеров такого рода) привела к различным предложениям с целью получения более приемлемых результатов. Так, например, была предпринята попытка [7] получить согласие с рассмотренными выше $\rho\pi$ -соотношениями путем разбиения области интегрирования на два интервала, причем при $s < s_N$ функция $\text{Im } A$ аппроксимируется состояниями прямого канала, а при $s > s_N$ — с помощью реджевской полюсной формулы. В результате сверхсходящиеся соотношения принимают вид

$$\int_{s_0}^{s_N} \text{Im } A^{\text{рез}}(s, t) ds + \int_{s_N}^{\infty} \text{Im } A^{\text{редж}}(s, t) ds = 0 \quad (10.6)$$

(здесь также не явно входят вклады от разреза по u). В $A^{\text{редж}}$ была учтена только ρ -траектория, и при правильном выборе s_N и параметров полюса Редже ρ -мезона было получено хорошее согласие для трех сверхсходящихся соотношений в широкой области значений t при использовании состояний π , ρ , A_1 и A_2 . Аналогичным образом удалось осуществить подгонку сверхсходящихся соотношений для родственных с точки зрения $SU(3)$ процессов

$$\pi K^* \rightarrow \pi K^* \quad (10.7)$$

и

$$K\rho \rightarrow K\rho. \quad (10.8)$$

Рубинштейн (частное сообщение) указал, что такой метод позволяет также получить удовлетворительное согласие для свёрхсходящихся соотношений таких процессов, соответствующих неправильной сигнатуре.

В аналогичном духе выполнены работы Долана и др. [148, 149], рассматривающих амплитуды, которые не удовлетворяют свёрхсходящимся соотношениям, но которые можно привести к виду, удовлетворяющему этим соотношениям, вычитая из них вклады ведущего полюса Редже (следуя методу, предложенному в работах [242—244], на которые мы ссылались в § 3, п. 5, а также в работе [284]). Другими словами, рассматривается величина $A(s, t) - A^{\text{редж}}(s, t)$, где $A^{\text{редж}}(s, t)$ — сумма вкладов ведущего полюса Редже, такая, что при подходящих предположениях относительно других сингулярностей в J -плоскости $A - A^{\text{редж}}$ удовлетворяет свёрхсходящемуся соотношению, т. е.

$$\int_{s_0}^{\infty} [\text{Im } A(s, t) - \text{Im } A^{\text{редж}}(s, t)] ds = 0. \quad (10.9)$$

Затем выбирается определенное значение $s = s_N$, такое, что при $s > s_N$ справедливо приближение $A = A^{\text{редж}}$, и следовательно,

$$\int_{s_N}^{\infty} \text{Im } A(s, t) ds = \int_{s_N}^{\infty} \text{Im } A^{\text{редж}}(s, t) ds, \quad (10.10)$$

а при $s < s_N$ амплитуду A можно записать в виде суммы небольшого числа состояний прямого канала, т. е.

$$\int_{s_0}^{s_N} \text{Im } A(s, t) ds = \int_{s_0}^{s_N} \text{Im } A^{\text{рез}}(s, t) ds. \quad (10.11)$$

Объединяя (10.9) — (10.11), получаем

$$\int_{s_0}^{s_N} \text{Im } A^{\text{рез}}(s, t) ds = \int_{s_N}^{\infty} \text{Im } A^{\text{редж}}(s, t) ds. \quad (10.12)$$

Заметим, что если сама амплитуда A удовлетворяет свёрхсходящемуся соотношению, то ему будет удовлетворять и величина $A^{\text{редж}}$, и (10.12) становится эквивалентным соотношению (10.6).

Долан и др. [148, 149] применили этот метод для анализа πN -рас-

сеяния с перезарядкой. Вычисляя интеграл

$$\int_{s_0}^{s_N} \operatorname{Im} A^{\text{редж}}(s, t) ds$$

при различных значениях t и выбирая в качестве $A^{\text{редж}}$ вклад ρ -траектории, авторы предсказали для нее параметры, находящиеся в превосходном согласии с параметрами, которые были получены путем обычного анализа процессов при высоких энергиях с помощью полюсов Редже. Применяя данный метод к амплитудам обеих сигнатур, авторы показали в явном виде, что соотношения, соответствующие неправильной сигнатуре, не выполняются. Этого можно избежать, предполагая, что в амплитуде с неправильной сигнатурой имеется неподвижный полюс при $J = 0$. Было показано, что этот неподвижный полюс не входит в вычет ρ -траектории, и следовательно, объяснение провала в дифференциальном сечении тем, что ρ -траектория принимает значение $\alpha_\rho = 0$, остается в силе. Вовсе не очевидно, что такое требование о существовании неподвижного полюса согласуется с упомянутым выше результатом Рубинштейна, но поскольку авторы рассматривают другие процессы, это обстоятельство не является серьезным противоречием.

Важно отметить, что в двух описанных выше методах приближение с помощью резонансов прямого канала и с помощью полюсов Редже используется в разных областях, поэтому трудностей, связанных с двойным учетом некоторых эффектов, не возникает. В этом состоит отличие данных методов от неправильной процедуры, использовавшейся в литературе, которая состояла в том, что амплитуду записывали в виде

$$A(s, t) = A^{\text{редж}}(s, t) + A^{\text{реджк}}(s, t), \quad (10.13)$$

делали предположение, что величина $A(s, t) - A^{\text{реджк}}(s, t)$ удовлетворяет свержсходящемуся соотношению, и в результате получали

$$\int_{s_0}^{\infty} \operatorname{Im} A^{\text{редж}}(s, t) ds = 0. \quad (10.14)$$

Очевидно, что это соотношение противоречит соотношению (10.12). Основным источником допускаемой здесь ошибки является то, что если для свержсходимости амплитуды $A(s, t)$ достаточно вычесть из нее реджевские члены, то значит они уже содержат большую часть величины $A^{\text{редж}}(s, t)$ (и наоборот), благодаря чему разбиение (10.13) оказывается несправедливым [52].

Мандельстам [298] высказал предположение, что можно развить динамическую схему для вычисления траекторий Редже, используя

для описания области низкоэнергетических резонансов (в прямом канале) и высокоэнергетического поведения (в кросс-канале) один и тот же класс траекторий. Потребовав затем, чтобы удовлетворялись сверхсходящиеся соотношения типа рассмотренных выше [148, 149], можно получить для траекторий и вычетов определенные условия самосогласованности. В настоящее время эти исследования находятся в предварительной стадии.

§ 11. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ И СЛАБЫЕ ПРОЦЕССЫ

До сих пор мы рассматривали исключительно адроны, но соответствующие идеи можно применить также и к частицам, участвующим только в слабых взаимодействиях (в число которых мы включаем здесь и электромагнитные взаимодействия). Хотя экспериментов пока очень немного, но эти процессы имеют некоторые интересные особенности, которые в последнее время привлекли внимание.

Рассмотрим прежде всего комптоновское рассеяние

$$\gamma A \rightarrow \gamma A \tag{11.1}$$

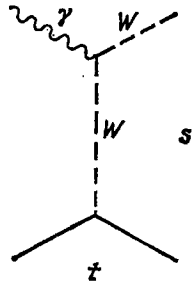
в *s*-канале, где *A* — какой-то адрон. Чтобы определить поведение амплитуды этого процесса при больших *s* (малых *t*), необходимо обратиться к реджевскому разложению в *t*-канале, т. е. в канале процесса

$$\gamma\gamma \rightarrow A\bar{A}. \tag{11.2}$$

Фотон имеет только два спиральных состояния ± 1 , так что существуют только два значения разности спиральностей фотона λ , а именно $\lambda = 2$ и $\lambda = 0$.

При $J = 1$ двухфотонное состояние с $\lambda = 2$ является бессмысленным состоянием, поэтому независимо от спиральностей *A* и \bar{A} для устранения неподвижного полюса (или квадратного корня из полюса), имеющегося при $J = 1$, необходимо, чтобы для амплитуды с правильной (т. е. с отрицательной) сигнатурой выполнялось сверхсходящееся соотношение. Примером такого сверхсходящегося соотношения является правило сумм Дрелла — Херна [154] для комптоновского рассеяния на протонах.

Важно отметить, что эти сверхсходящиеся соотношения не обязательно выполняются при приближенных расчетах. Так, например, необходимость компенсации неподвижного полюса вытекает из условия унитарности, поэтому если вычислять амплитуду в низшем порядке по e^2 , когда унитарность не выполняется, то неподвижный полюс может существовать. Такой неподвижный полюс рассматривался



Ф и г. VIII.34. Обмен *W*-мезоном в процессе $\gamma N \rightarrow \gamma N$.

в работах [71, 72, 363], в которых исследовался случай, когда фотон заменяется частицей, связанной с изовекторным током, например промежуточным векторным бозоном W (в предположении, что он существует). Если этот векторный бозон считать элементарной частицей, то обмен им (фиг. VIII.34) будет давать в амплитуду вклад, пропорциональный дельта-символу δ_{J1} . Тогда на основе алгебры токов можно заключить, что в амплитуде содержится неподвижный полюс при $J = 1$ [137, 197]. Если все частицы рассматривать как элементарные, то из аргументов, приведенных в гл. VII, следует, что неподвижный полюс при $J = 1$ входит в амплитуду, вычисленную в борновском приближении. Было показано [71, 72], что если слабое взаимодействие учитывается только в низшем порядке, то (по крайней мере в некоторых определенных моделях) неподвижный полюс остается и в том случае, когда сильные взаимодействия учитываются точно.

Если элементарный W -бозон заменить составной частицей (например ρ -мезоном), то дельта-символ исчезает, вместе с ним исчезает и неподвижный полюс [353]. Не совсем ясно, что будет с неподвижным полюсом, если W оставить элементарной частицей, но учесть неэлементарность адронов, однако маловероятно, чтобы такой полюс действительно входил в амплитуды рассеяния (даже в низшем порядке).

Если рассматривать амплитуду не в низшем порядке (по слабому взаимодействию), а брать ее точное выражение, то все неподвижные полюса должны превратиться в движущиеся, т. е. в полюса Редже. Из границы Фруассара следует, что при $t \leq 0$ они должны иметь

$$\operatorname{Re} \alpha \leq 1, \quad (11.3)$$

поэтому для точных амплитуд, по крайней мере в области $t < 0$, соответствующие сверхсходящиеся соотношения (например, упоминавшееся выше правило сумм Дрелла — Херна) будут заведомо выполняться. Траектория такого движущегося полюса будет иметь вид

$$\alpha(t) = 1 + f(t) \cdot O(g^2), \quad (11.4)$$

где g — константа слабого взаимодействия, так что в любом конечном порядке по g^2 амплитуда содержит неподвижный полюс при $J = 1$. Эти «слабые траектории», по-видимому, не проявляются в виде частиц, поэтому если они существуют, то являются непонятными объектами, заслуживающими дальнейшего исследования.

Добавочным следствием существования неподвижных полюсов в полубессмысленных амплитудах является то, что посредством механизма, описанного в гл. VII, § 6, они будут приводить к сингулярностям типа дельта-символа в физических амплитудах.

Отметим, что выше мы не рассматривали неподвижных полюсов, обусловленных третьей двойной спектральной функцией. Они соответствуют неправильным значениям сигнатуры и не влияют на асимптотическое поведение амплитуды.

Вернемся теперь к нашей физической задаче, т. е. к комптоновскому рассеянию обычных фотонов, в которой должна доминировать траектория Померанчука. Имеется некоторое сомнение, однако, относительно того, справедливо ли это и для рассеяния вперед (при $t = 0$). Чтобы проверить это, рассмотрим для простоты процесс

$$\gamma\pi \rightarrow \gamma\pi, \quad (11.5)$$

который описывается двумя спиральными амплитудами s -канала $\langle 1 | A^s | 1 \rangle$ и $\langle 1 | A^s | -1 \rangle$. Они связаны со спиральными амплитудами t -канала посредством спиральной кроссинг-матрицы, которая в данном случае имеет очень простой вид:

$$\langle 1 | A^s | 1 \rangle = \langle | A^t | 1 - 1 \rangle, \quad (11.6)$$

$$\langle 1 | A^s | -1 \rangle = \langle | A^t | 11 \rangle. \quad (11.7)$$

Для рассеяния вперед в s -канале амплитуда $\langle 1 | A^s | -1 \rangle$ равна нулю (вследствие сохранения углового момента, как это показано в гл. IV, § 3), так что в этом направлении дает вклад только амплитуда $\langle | A^t | 1 - 1 \rangle$. Однако для этой амплитуды $\lambda = 2$, и при $J = 1$ она является полубесмысленной. Поэтому, принимая, что полубесмысленная связь обращается в нуль (это действительно так, если мы пренебрегаем третьей двойной спектральной функцией), мы получаем, что при $J = 1$ эта амплитуда равна нулю. Отсюда следует, что вычет траектории Померанчука при $\alpha_f(t) = 1$, т. е. при $t = 0$ (в обычном предположении), также равен нулю. Таким образом, если не учитывать третью двойную спектральную функцию, то траектория Померанчука не дает вклада в рассеяние вперед, и полное сечение $\gamma\pi$ -рассеяния (связанное с амплитудой рассеяния вперед оптической теоремой) при возрастании энергии стремится к нулю. Этот результат справедлив и для комптоновского рассеяния на частицах со спином $1/2$ [361].

Как мы видели, третья двойная спектральная функция означает наличие в амплитуде с неправильной сигнатурой неподвижного полюса при $J = 1$ (который сам по себе из-за сигнатурного множителя вклада в асимптотическое поведение не дает). Однако этот полюс может содержаться в вычете траектории Померанчука, которая тем самым может доминировать в амплитуде рассеяния вперед, благодаря чему полное сечение будет стремиться к постоянному значению. Было бы весьма странно, однако, если бы столь простой процесс, как комптоновское рассеяние, определялся при высоких энергиях эффектами, обусловленными третьей двойной спектральной функцией. Дальнейший анализ этих вопросов проведен в работе [308].

Адер и др. [8] и Фраучи и Джонс [183] рассмотрели фоторождение π - и K -мезонов, которое, очевидно, сходно с процессом рассеяния $\pi N \rightarrow VB$, рассмотренным в § 6. Однако фотон не может иметь нуле-

вой спиральности, поэтому подавление рассеяния вперед, обусловленное кинематикой частиц с неравными массами, свойственно всем амплитудам фоторождения. Учитывая, кроме того, кинематические множители s -канала, которые содержат t , и теорему о факторизации (см. гл. VI, § 6), мы получим, что в отсутствие какой-либо конспирации это приводит к резким провалам в предсказываемых сечениях, соответствующим рассеянию вперед (впервые это отметили Дрелл и Саливан [155]). Очевидно, хорошие экспериментальные данные по этим процессам при гораздо более высоких энергиях, чем те, которые используются в настоящее время, могли бы подтвердить существование хотя бы некоторых конспираций. В упоминавшейся выше работе Фраучи и Джонса [183] подробно рассматриваются следствия, к которым приводят эти конспирации (см. в этой связи также [9, 225]). Если нет пионной конспирации, то наилучшие из имеющихся данных по процессу рассеяния $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, по-видимому, не согласуются с моделью полюсов Редже.

Было рассмотрено также фоторождение ω -мезонов [153] и фоторождение ω -, φ - и ρ^0 -мезонов [174].

ДОПОЛНЕНИЕ

После того, как была завершена рукопись этой книги, наше внимание привлекло довольно большое количество работ по теории Редже, на которых мы здесь очень кратко остановимся. Хорошие обзоры по последним достижениям этого направления сделали Берточчи и Онес на Международной конференции по физике высоких энергий (Гейдельберг, 1967); они опубликованы в Трудах этой конференции.

1. ДОЧЕРНИЕ ТРАЕКТОРИИ, КОНСПИРАЦИИ И $O(4)$

Аллисон и др. [415] привели некоторые данные, свидетельствующие о том, что резонанс $\delta(965 \text{ Мэв})$ не является частицей со спином 0^+ (как это требуется, если он является первой дочерней траекторией ρ -мезона, см. гл. VIII, § 1, п. 2).

Расчеты показывают [425], что природа дочерних траекторий, получаемых в результате решения уравнения Бете — Солпитера, сильно зависит от используемого потенциала и что они обладают весьма специфическими свойствами. Отклонение от симметрии при удалении t от нулевого значения может быть большим и нерегулярным.

Подтверждено [420] существование пика в сечении процесса $\gamma p \rightarrow \pi^+ n$, соответствующего рассеянию вперед, для объяснения которого требуется, по-видимому, пионная конспирация (см. гл. VIII, § 11, а также [420]). Был сделан обзор [428] множества процессов такого рода (включая рассеяние $np \rightarrow pn$, рассмотренное в гл. VIII, § 6, п. 6) с точки зрения пионной конспирации. Дана классификация подобных конспираций на основе $O(4)$ -симметрии [445]. Показано [417], что ρ' -траектория, которая вводится для объяснения поляризации в πN -рассеянии с перезарядкой (см. гл. VIII, § 7, п. 2), в амплитуде без переворота спина при $t = 0$ должна иметь нулевой (или очень малый) вычет, так как в противном случае будет нарушаться правило сумм для рассеяния вперед без переворота спина (гл. VIII, § 3, п. 5). Такое поведение было бы естественным, если бы ρ' -траектория была некоторой частью конспирации (связанной с B , но не с ρ). К сожалению, экспериментальные данные пока не настолько хороши, чтобы к этому выводу можно было относиться с полным доверием.

Проведены дальнейшие исследования [437, 441, 443] по использованию лоренцевских полюсов для описания амплитуд рассеяния при высоких энергиях. В результате было показано, что для объяснения эффектов, которые могут быть удовлетворительно описаны с помощью одного полюса Редже, требуется привлекать более одного лоренцевского полюса. Был сделан [429] полезный обзор, посвященный разложению «по малым группам», и рассмотрена [435] комплекс-

ная группа вращений. Проведен [436] анализ кинематических сингулярностей и пороговых условий.

Мандельстам [438] показал, что многие результаты, являющиеся следствием гипотезы частичного сохранения аксиального тока, вытекают из кинематических ограничений на пионный вычет при $t = 0$.

2. НУЛИ ВЫЧЕТОВ

Природа нулей у вычетов, которая связана с тем, «выбирает» ли траектория физическое или бессмысленное состояние, и соответствующие им провалы в сечениях (см. гл. VI, § 6 и гл. VIII, § 6) рассмотрены несколькими авторами [421, 422, 426]. Было показано [439], какую помощь при решении этих вопросов могут оказать правила сумм при конечных энергиях; в частности, была рассмотрена природа связи A_2 -траектории в процессе $\pi^-p \rightarrow \eta n$ (см. гл. VIII, § 6, п. 3).

Проанализирован [424] процесс $\pi^\pm N \rightarrow \rho^\pm N$ с точки зрения определенных комбинаций амплитуд, в которые из всех известных траекторий может давать вклад только ω -траектория. Было получено хорошее согласие с опытом, однако результаты не подтверждают предположение, что эффект «пересечения» дифференциальных сечений процессов $pp \rightarrow pp$ и $p\bar{p} \rightarrow p\bar{p}$ [см. текст ниже формулы (VIII.6.27)] обусловлен изменением знака у вычета ω -траектории. К аналогичным выводам приводит анализ процесса $\gamma p \rightarrow \pi^0 p$ [417]. В этом случае для объяснения пересечения используются более низкие траектории.

3. РАЗРЕЗЫ

Проведен общий анализ свойств реджевских разрезов [444]. Было рассмотрено [427] вычисление вкладов разрезов и даны ссылки на другие исследования по этому вопросу. Изучен [419] способ, позволяющий с помощью разрезов так экранировать действие неподвижных полюсов в J -плоскости, чтобы они не нарушали условие унитарности (см. гл. V, § 4); было показано, что основным при этом является то, чтобы скачки на разрезах были сингулярными и чтобы в граничных точках они обращались в нуль. Шварц [446] исследовал два типа двухчастичных реджевских разрезов: разрезы первого типа, возникающие в том случае, когда обе обмениваемые частицы реджезованы, и разрезы второго типа, возникающие, когда одна частица является полюсом Редже, а другая — обычным полюсом в t -плоскости. Он показал, что в задаче с частицами неравных масс для экранировки действия неподвижных полюсов в J -плоскости на разрез, соответствующий двухчастичному условию унитарности, требуется разрез второго типа. Было показано [431], что если померанчон рассматривать в качестве неподвижного полюса (см. гл. VIII, § 3, п. 2), то механизм экранировки для него работать не будет. Это делает крайне маловероятным, что померанчон на самом деле является неподвижным полюсом. Было

высказано [434] чрезвычайно интересное утверждение: если для амплитуд рассеяния с полюсами Редже в промежуточных состояниях справедливо обычное условие унитарности типа (V.1.3), то все траектории Редже должны иметь один и тот же наклон.

Сквайрс [448] привел доказательства в пользу того, что в упругом рассеянии разрезы могут доминировать, но в неупругом рассеянии, где их действие эквивалентно абсорбтивным поправкам к модели полюсов Редже, вклады разрезов малы.

4. БЕСКОНЕЧНО РАСТУЩИЕ ТРАЕКТОРИИ

Гольдберг [432] показал, что наблюдаемое поведение реджевских вычетов приближенно согласуется с экспоненциальной формой, требуемой [253] для траекторий, которые стремятся к бесконечности (см. гл. VIII, § 7, п. 1). Рассмотрено [422] влияние отсутствия степенной ограниченности амплитуды при $\alpha \xrightarrow{s \rightarrow \infty} \infty$ на теорему Мартена, которая устанавливает максимальную скорость убывания амплитуды рассеяния с ростом передаваемого импульса при фиксированной энергии (гл. VIII, § 6, п. 9). Баргер и Клайн [416] использовали новые данные по $\pi^\pm p$ -рассеянию назад и получили результаты, близкие к рассмотренным в гл. VIII, § 6, п. 3.

5. ПРАВИЛА СУММ

Многие авторы применяли правила сумм при конечных энергиях для определения различных реджевских параметров. В частности, были исследованы [418] f -, f' -, ρ -, ω - и A_2 -траектории в системе KN . Олссон показал [442], что если для определения параметров ρ -траектории воспользоваться значениями разности сечений Δ (πp) при низких энергиях, то результаты согласуются с теми, которые получаются при обработке этих же сечений при высоких энергиях.

6. ЗАШНУРОВКА

Рассматривались правила сумм при конечных энергиях в рамках полузашнурованных моделей [413, 433].

Коллинз и др. [423] подчеркивают трудности, возникающие при попытке примирить прямолинейность траекторий Редже с динамикой зашнуровки, рассмотренной в гл. VI. Авторы указывают, что если гипотеза зашнуровки верна, то ширины высших резонансов на мезонной диаграмме, представленной на фиг. VIII.2, являются, по-видимому, слишком малыми, чтобы эти резонансы могли лежать на ρ (A_2)-траектории.

П. Коллинз
Ю. Сквайрс

ЛИТЕРАТУРА

1. Abbe W. J., Kaus P., Nath P., Srivastava Y. N., Phys. Rev., **140B**, 1595 (1965).
2. Abbe W. J., Kaus P., Nath P., Srivastava Y. N., Phys. Rev., **141**, 1513 (1966).
3. Abbe W. J., Kaus P., Nath P., Srivastava Y. N., Phys. Rev. **154**, 1515 (1967).
4. Abers E., Teplitz V. L., Nuovo Cimento, **39**, 739 (1965).
5. Abers E., Teplitz V. L., Phys. Rev., **158**, 1365 (1967).
6. Abers E., Zemach C., Phys. Rev., **131**, 2305 (1963).
7. Ademollo M., Rubinstein H. R., Veneziano G., Virasoro M. A., Nuovo Cimento, **51**, 227 (1967).
8. Ader J. P., Capdeville M., Salin Ph., Nucl. Phys., **B3**, 407 (1967).
9. Adler S. L., Gilman F. J., Phys. Rev., **152**, 1460 (1966).
10. Ahmadzadeh A., Phys. Letters, **22**, 96 (1966).
11. Ahmadzadeh A., Burke P. G., Tate C., Phys. Rev., **131**, 1315 (1963).
12. Ahmadzadeh A., Leader E., Phys. Rev., **134B**, 1058 (1964).
13. Akerlof C. W. et al., Phys. Rev. Letters, **17**, 1105 (1966).
14. Акьеампонг Д. А., Бойсе J. F., Rashid M. A., Trieste preprint, IC/67/61, 1967.
15. Акьеампонг Д. А., Бойсе J. F., Rashid M. A., Phys. Letters, **25B**, 336 (1967).
16. de Alfaro V., Fubini S., Rossetti C., Furlan G., Phys. Letters, **21**, 576 (1966).
17. de Alfaro V., Regge T., Potential Scattering, Amsterdam, 1965 (см. перевод: де Альфаро В., Редже Т., Потенциальное рассеяние, изд-во «Мир», 1966).
18. Alfarelli G., Buccella F., Gatto R., Phys. Letters, **24B**, 57 (1967).
19. Amati D., Fubini S., Stanghellini A., Phys. Letters, **1**, 29 (1962).
20. Anderson E. W., et al., Phys. Rev. Letters, **16**, 855 (1966).
21. Andrews M., Gunson J., Journ. Math. Phys., **5**, 1391 (1964).
22. Ансельм А. А., Дятлов И. Т., Phys. Letters, **24B**, 479 (1967).
23. Arbab F., Chiu C. B., Phys. Rev., **147**, 1045 (1966).
24. Arbab F., Bali N. F., Dash J. W., Phys. Rev., **158**, 1515 (1967).
25. Arnold R. C., Talk at the Symposium on Regge Poles Held at Argonne National Laboratory (Dec. 1966), Argonne report 1966.
26. Atkinson D., Dietz K., Morgan D., Ann. Phys., **37**, 77 (1966).
27. Atkinson D., Contogouris A. P., Nuovo Cimento, **39**, 1082, 1102 (1965).
28. Atkinson D., Halpern M. B., Phys. Rev., **150**, 1377 (1966).
29. Азимов Я. И., Ансельм А. А., Шехтер В. М., ЖЭТФ, **44**, 1078 (1963).

30. Азимов Я. И., *Phys. Letters*, **3**, 195 (1963).
31. Babu P., Gilman F. T., Suzuki M., *Phys. Letters*, **24B**, 65 (1967).
32. Baker M., *Ann. Phys.*, **4**, 271 (1958).
33. Balazs L. A. P., *Phys. Rev.*, **128**, 1939 (1962).
34. Balazs L. A. P., *Phys. Rev.*, **129**, 872 (1963).
35. Balazs L. A. P., *Phys. Rev.*, **137B**, 1510 (1965).
36. Balazs L. A. P., *Phys. Rev.*, **139B**, 1646 (1965).
37. Bali N., *Phys. Rev.*, **150**, 1358 (1966).
38. Bali N. F., Chew G. F., Chiu S.-Y., *Phys. Rev.*, **150**, 1352 (1966).
39. Bali N. F., Chiu S.-Y., *Phys. Rev.*, **153**, 1579 (1967).
40. Bali N. F., Chiu S.-Y., Haymaker R. W., Tan C.-I., *Phys. Rev.*, **161**, 1450 (1967).
41. Bali N. F., Ball J. S., Chew G. F., Pignotti A., *Phys. Rev.*, **161**, 1459 (1967).
42. Bali N. F., Chew G. F., Pignotti A., *Phys. Rev.*, **163**, 1572 (1967).
43. Bali N. F., Chew G. F., Pignotti A., *Phys. Rev. Letters*, **19**, 614 (1967).
44. Bander M., Coulter P. W., Shaw G. L., *Phys. Rev. Letters*, **14**, 230 (1965).
45. Bardakci K., *Phys. Rev.*, **127**, 1832 (1962).
46. Barger V., Cline D., *Phys. Rev. Letters*, **16**, 913 (1966).
47. Barger V., Cline D., *Phys. Rev.*, **155**, 1792 (1967).
48. Barger V., Cline D., *Phys. Rev.*, **156**, 1522 (1967).
49. Barger V., Olsson M., *Phys. Rev.*, **146**, 1080 (1966).
50. Barger V., Olsson M., *Phys. Rev.*, **148**, 1428 (1966).
51. Barger V., Olsson M., *Phys. Rev.*, **151**, 11 (1966).
52. Barger V., Phillips J. N., *Phys. Letters*, **25B**, 351 (1967).
53. Barger V., Durand L., *Phys. Rev.*, **156**, 1525 (1967).
54. Bargmann V., *Ann. Math.*, **48**, 568 (1947).
55. Barut A. O., Unal B. C., *Nuovo Cimento*, **28**, 112 (1963).
56. Barut A. O., Zwanziger D. E., *Phys. Rev.*, **127**, 974 (1962) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
57. Le Bellac M., *Phys. Letters*, **25B**, 524 (1967).
58. Bjorken J. D., *Phys. Rev. Letters*, **4**, 473 (1960).
59. Bjorken J. D., Wu T. T., *Phys. Rev.*, **130**, 2566 (1963).
60. Blair I. M., et al., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 789 (1966).
61. Blankenbeckler R., Goldberger M. L., Khuri N. N., Trieman S. B., *Ann. Phys.*, **10**, 62 (1960) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
62. Blankenbeckler R., Goldberger M. L., *Phys. Rev.*, **126**, 766 (1962).
63. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В., Введение в теорию квантовых полей, М.—Л., 1957.
64. Vonamu P. et al., *Phys. Letters*, **23**, 501 (1966).
65. Borghini M. et al., *Phys. Letters*, **24B**, 77 (1967).
66. Bottino A., Longoni A. M., Regge T., *Nuovo Cimento*, **23**, 954 (1962) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
67. Boyse J. F., *Journ. Math. Phys.*, **8**, 675 (1967).
68. Boyse J. F., Delbourgo R., Salam A., Strathdee J. *Trieste preprint IC/67/9*, 1967.
69. Bransden B. H., Burke P. G., Moffat J. W., Moorhouse R. C., Morgan D., *Nuovo Cimento*, **30**, 207 (1963).

70. Brittin W. E., Barut A. O. (Eds.), Lectures in theoretical physics, VII A; Lorentz group. University of Colorado Press, 1965.
71. Bronzan J. B., Gerstein I. S., Lee B. W., Low F. F., Phys. Rev. Letters, **18**, 32 (1967).
72. Bronzan J. B., Gerstein I. S., Lee B. W., Low F. F., Phys. Rev., **157**, 1448 (1967).
73. Brower R. C., Harte J., Phys. Rev., **164**, 1841 (1967).
74. Buccella F., Colocci M., Phys. Letters, **24B**, 61 (1967).
75. Cabibbo N., Kokkedee J. J. J., Horwitz L., Ne'eman Y., Nuovo Cimento, **45**, 275 (1966).
76. Cabibbo N., Horwitz L., Ne'eman Y., Phys. Letters, **22**, 336 (1966).
77. Calogero F., Charap J. M., Ann. Phys., **26**, 44 (1964).
78. Calogero F., Charap J. M., Squires E. J., Ann. Phys., **25**, 325 (1963).
79. Calogero F., Charap J. M., Squires E. J., Proceedings of Sienna Conference, 1963.
80. Capps R. H., Phys. Rev., **150**, 1263 (1966).
81. Caprasse H., Stremnitzer H., Nuovo Cimento **44A**, 1245 (1966).
82. Carruthers P., Introduction to Unitary Symmetry, New York, 1966.
83. Carruthers P., Phys. Rev., **154**, 1399 (1967).
84. Castillejo L., Dalitz R. H., Dyson F. J., Phys. Rev., **101**, 453 (1956).
85. Challifour J. L., Eden R. J., Nuovo Cimento, **27**, 1104 (1963).
86. Challifour J. L., Eden R. J., Phys. Rev. **129**, 2349 (1963).
87. Chan, Hong-Mo, De Celles P. C., Paton J. E., Nuovo Cimento, **33**, 70 (1964).
88. Charap J. M., Nuovo Cimento, **31**, 452 (1963).
89. Charap J. M., Squires E. J., Phys. Rev., **127**, 1387 (1962).
90. Charap J. M., Squires E. J., Ann. Phys., **20**, 145 (1962).
91. Charap J. M., Squires E. J., Ann. Phys., **21**, 8 (1963).
92. Charap J. M., Squires E. J., Ann. Phys., **25**, 143 (1963).
93. Cheng H., Phys. Rev., **130**, 1283 (1963).
94. Cheng H., Sharp D., Ann. Phys., **22**, 481 (1963).
95. Cheng H., Sharp D., Phys. Rev., **132**, 1854 (1963).
96. Chew G. F., Rev. Mod. Phys., **33**, 467 (1961).
97. Chew G. F., S-matrix Theory of Strong Interactions, New York, 1962.
98. Chew G. F., Rev. Mod. Phys., **34**, 394 (1962).
99. Chew G. F., Phys. Rev. Letters, **9**, 233 (1962).
100. Chew G. F., Phys. Rev., **129**, 2363 (1963).
101. Chew G. F., Phys. Rev., **130**, 1264 (1963).
102. Chew G. F., в книге Jacob M., Chew G. F., Strong Interaction Physics, New York, 1964.
103. Chew G. F., в книге Strong Interaction Physics; the 1965 Les Houches Lectures, (eds. de Witt B. S., Jacob M.), New York, 1965.
104. Chew G. F., в книге Progress in Theoretical Physics. Supplement (Extra number); Commemoration issue for 30th anniversary of Meson Theory by Dr. H. Yukawa, 1965.
105. Chew G. F., Phys. Rev., **140B**, 1427 (1965).
106. Chew G. F., The analytic S-matrix, New York, 1966 (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
107. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev. Letters, **5**, 580 (1960).
108. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev., **123**, 1478 (1961) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).

109. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev. Letters, 7, 394 (1961).
110. Chew G. F., Frautschi S. C., Phys. Rev. Letters, 8, 41 (1962).
111. Chew G. F., Frautschi S. C., Mandelstam S., Phys. Rev., 126, 1202 (1962) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
112. Chew G. F., Jones C. E., Phys. Rev., 135B, 208 (1964).
113. Chew C. F., Mandelstam S., Phys. Rev., 119, 467 (1960). (см. перевод в сборнике «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
114. Chew G. F., Mandelstam S., Nuovo Cimento, 19, 752 (1961).
115. Chew G. F., Teplitz V. L., Phys. Rev., 136B, 1154 (1964).
116. Chew G. F., Teplitz V. L., Phys. Rev., 137B, 139 (1965).
117. Chisholm J. S. R., Proc. Cambridge Phil. Soc., 48, 300 (1952).
118. Chiu C. B., Finkelstein J., Nuovo Cimento, 48A, 820 (1967).
119. Chiu C. B., Phillips R. J. N., Rarita W., Phys. Rev., 153, 1485 (1967).
120. Chiu C. B., Stack J. D., Phys. Rev., 153, 1575 (1967).
121. Chung V., Snider D. R., Phys. Rev., 162, 1639 (1967).
122. Chung V., Wright J., Phys. Rev., 162, 1716 (1967).
123. Cohen-Tannoudji G., Morel A., Navelet H., Ann. Phys. (USA), 46, 239 (1968).
124. Collins P. D. B., Phys. Rev., 136B, 710 (1964).
125. Collins P. D. B., Phys. Rev., 139B, 696 (1965).
126. Collins P. D. B., Phys. Rev., 142, 1163 (1966).
127. Collins P. D. B., Phys. Rev., 157, 1432 (1967).
128. Collins P. D. B., Teplitz V. L., Phys. Rev., 140B, 663 (1965).
129. Coulter P. W., Scotti A., Shaw G. L., Phys. Rev., 136B, 1399 (1964).
130. Cutkosky R. E., Phys. Rev., 96, 1135 (1954).
131. Cutkosky R. E., Journ. Math. Phys., 1, 429 (1960).
132. Cutkosky R. E., Rev. Mod. Phys., 33, 446 (1961).
133. Cutkosky R. E., Phys. Rev., 131, 1888 (1963).
134. Cutkosky R. E., Proceedings of the Rochester Conference on Theoretical Physics, 1967.
135. Cutkosky R. E., Deo B. B., Phys. Rev. Letters, 19, 1256 (1967).
136. Dalitz R. H., в книге High Energy Physics, the 1965 Les Houches Lectures (eds. de Witt B. S., Jacob M.), New York, 1966.
137. Dashen R., Gell-Mann M., Phys. Rev. Letters, 17, 340 (1966).
138. DeLaney V. M., Gross D. J., Muzinich I. J., Teplitz V. L., Phys. Rev. Letters, 18, 149 (1967).
139. Delbourgo R., Salam A., Strathdee J., Phys. Rev., 164, 1981 (1967).
140. Delbourgo R., Salam A., Strathdee J., Phys. Rev. Letters, 25B, 230 (1967).
141. Desai B. R., Phys. Rev., 138B, 1174 (1965).
142. Desai B. R., Phys. Rev. Letters, 17, 498 (1966).
143. Desai B. R., Gregorich D. T., Ramachandran R., Phys. Rev. Letters, 18, 565 (1967).
144. Desai B. R., Newton R. G., Phys. Rev., 129, 1437 (1963).
145. Desai B. R., Newton R. G., Phys. Rev., 129, 1445 (1963).
146. Desai B. R., Sakita B., Phys. Rev., 136B, 226 (1964).
147. Dikmen F. N., Phys. Rev. Letters, 18, 798 (1967).
148. Dolen R., Horn D., Schmidt C., Phys. Rev. Letters, 19, 402 (1967).
149. Dolen R., Horn D., Schmidt C., Phys. Rev., 166, 1768 (1968).
150. Domokos G., Phys. Rev., 159, 1387 (1967).
151. Domokos G., Suranyi P., Nucl. Phys., 54, 529 (1964).

152. Drechsler W., *Nuovo Cimento*, **53A**, 115 (1968).
153. Drechsler W., *Phys. Letters*, **23**, 272 (1967).
154. Drell S. D., Hearn A. C., *Phys. Rev. Letters*, **16**, 908 (1966).
155. Drell S. D., Sullivan J. D., *Phys. Rev. Letters*, **19**, 268 (1967).
156. Drummond I. T., *Nuovo Cimento*, **29**, 720 (1963).
157. Drummond I. T., *Phys. Rev.*, **140**, 1368 (1965).
158. Durand L., Talk at the Symposium on Regge Poles Held at Argonne National Laboratory (Dec. 1966), Argonne report, 1966.
159. Durand L., *Phys. Rev. Letters*, **18**, 58 (1967).
160. Eden R. J., Landshoff P. V., Olive D. I., Polkinghorne J. C., *The Analytic S-matrix*, London, 1966.
161. Edmonds A. R., *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton, 1957 (см. перевод в сборнике «Деформация атомных ядер», ИЛ, 1958).
162. Erdelyi A. (Ed.), *The Bateman manuscript project, Higher transcendental functions*, 3 Volumes, New York, 1953 (см. перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А., *Высшие трансцендентные функции*, т. 1—3, М., 1965—1967).
163. Erdelyi A. (Ed.), *The Bateman manuscript project, Tables of integral transforms*, 2 Volumes, New York, 1953 (см. перевод: Бейтмен Г., Эрдейи А., *Таблицы интегральных преобразований*, т. 1, 2, изд-во «Наука», М., 1969—1970).
164. Fearing H. W., Stanford University preprint. Daugther trajectories and the Regge formula for the scattering of unequal mass particles, 1967.
165. Federbush P. G., Grisaru M. T., *Ann. Phys.*, **22**, 263 (1963).
166. Federbush P. G., Grisaru M. T., *Ann. Phys.*, **22**, 299 (1963).
167. Ferro-Luzzi M., Rapporteur's talk in Garnjost (Ed.). *Proceedings of the XIIIth International Conference on High Energy Physics*, 1967.
168. Finkelstein J., *Phys. Rev.*, **145**, 1185 (1966).
169. Finkelstein J., *Phys. Rev.*, **154**, 1596 (1967).
170. Finkelstein J., Wang J. M., Lawrence Radiation Laboratory report, UCRL-17500, 1967.
171. Flores-Maldonado V., *Phys. Rev.*, **155**, 1773 (1967).
172. Focacci M. N. et al., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 890 (1966).
173. Foley K. J. et al., *Phys. Rev. Letters*, **10**, 376 (1963).
174. Foley K. J., *Phys. Rev. Letters*, **14**, 862 (1965).
175. Foley K. J., *Phys. Rev. Letters*, **15**, 45 (1965).
176. Foley K. J. et al., *Phys. Rev. Letters*, **19**, 193 (1967).
177. Fox G. C., *Phys. Rev.*, **157**, 1493 (1967).
178. Fox G. C., Leader E., *Phys. Rev. Letters*, **18**, 628 (1967).
179. Frampton P. H., Taylor J. C., *Nuovo Cimento*, **A49**, 152 (1967).
180. Frautschi S. C., *Regge Poles and S-matrix Theory*, New York, 1963.
181. Frautschi S. C., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 722 (1966).
182. Frautschi S. C., Gell-Mann M., Zachariasen F., *Phys. Rev.*, **125**, 2204 (1962) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
183. Frautschi S. C., Jones L., *Phys. Rev.*, **163**, 1820 (1967).
184. Frautschi S. C., Jones L., *Phys. Rev.*, **164**, 1918 (1967).
185. Frautschi S. C., Jones L., *Phys. Rev.*, **167**, 1335 (1968).
186. Frautschi S. C., Kaus P., Zachariasen F., *Phys. Rev.*, **133B**, 1607 (1964).
187. Freedman D. Z., Wang J. M., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 569 (1966).
188. Freedman D. Z., Wang J. M., *Phys. Rev.*, **153**, 1596 (1967).
189. Freedman D. Z., Wang J. M., *Phys. Rev. Letters*, **18**, 863 (1967).
190. Freedman D. Z., Wang J. M., *Phys. Rev.*, **160**, 1560 (1967).
191. Freedman D. Z., Jones C. E., Wang J. M., *Phys. Rev.*, **155**, 1645 (1967).
192. Freund P. G. O., *Phys. Letters*, **3**, 123 (1962).
193. Freund P. G. O., *Phys. Rev. Letters*, **15**, 929 (1965).

- Froissart M., *Nuovo Cimento*, **22**, 191 (1961).
Froissart M., *Phys. Rev.*, **123**, 1053 (1961) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
Frye G., Warnock R. L., *Phys. Rev.*, **130**, 478 (1963).
Fubini S., *Nuovo Cimento*, **43**, 475 (1966).
Fubini S., Lectures on «Current algebra and sum rules», 1967.
Fulco J., Shaw G. L., Wong D., *Phys. Rev.*, **137B**, 1242 (1965).
Galdbraith W. et al., *Phys. Rev.*, **138B**, 913 (1965).
Gell-Mann M., Proceedings of the 1962 CERN Conference on High Energy Physics, 1962.
Gell-Mann M., *Phys. Rev. Letters*, **8**, 263 (1962).
Gell-Mann M., *Phys. Letters*, **8**, 214 (1964).
Gell-Mann M., Goldberger M. L., *Phys. Rev. Letters*, **9**, 275 (1962) см. также Erratum, *Phys. Rev. Letters*, **10**, 39 (1962).
Gell-Mann M., Goldberger M. L., Low F. E., Marx E., Zachariassen F., *Phys. Rev.*, **133B**, 145 (1964).
Gell-Mann M., Goldberger M. L., Low F. E., Singh V., Zachariassen F., *Phys. Rev.*, **133B**, 161 (1964).
Goldberger M. L., Grisaru M. T., MacDowell S. W., Wong D. Y., *Phys. Rev.*, **120**, 2250 (1960).
Goldberger M. L., Jones C. E., *Phys. Rev. Letters*, **17**, 105 (1966).
Goldberger M. L., Jones C. E., *Phys. Rev.*, **150**, 1269 (1966).
Goldhaber G., Rapporteur's talk in Garnjost (Ed.), Proceedings of XIIIth International Conference on High Energy Physics, 1967.
Gottfried K., Jackson J. D., *Nuovo Cimento*, **33**, 309 (1964).
Gourdin M., Unitary Symmetries, Amsterdam, 1967.
Грибов В. Н., ЖЭТФ, **41**, 677 (1961).
Грибов В. Н., Ядерная физика, **5**, 138 (1967).
Грибов В. Н., Proceedings of the Rochester Conference on Theoretical Physics, 1967.
Грибов В. Н., Померанчук И. Я., *Phys. Rev. Letters*, **8**, 343 (1962).
Грибов В. Н., Померанчук И. Я., Proceedings of the 1962 CERN Conference on High Energy Physics, p. 522, 1962.
Грибов В. Н., Померанчук И. Я., *Phys. Rev. Letters*, **9**, 238 (1962).
Gunson J., *Journ. Math. Phys.*, **6**, 827, 845, 852 (1965).
Hadjiioannou F. T., *Nuovo Cimento*, **44**, 185 (1966).
Hadjiioannou F. T., Phillips R. J. N., Rarita W., *Phys. Rev. Letters*, **9**, 183 (1962).
Hall D., Wightman A. S., *Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Mat.-Fys. Medd.*, **31**, No. 5 (1957).
Halliday I. G., *Nuovo Cimento*, **30**, 177 (1963).
Halliday I. G., Polkinghorne J. C., *Phys. Rev.*, **132**, 2741 (1963).
Halpern M. B., *Phys. Rev.*, **160**, 1441 (1967).
Hamilton J., в книге Strong Interactions and High Energy Physics (Ed. Moorehouse R. G.), London, 1964.
Hankins D., Kaus P., Pearson C. J., *Phys. Rev.*, **137B**, 1034 (1965).
Hara Y., *Phys. Rev.*, **136**, 507 (1964).
Hara Y., *Phys. Letters*, **23**, 696 (1966).
Harting D. et al., *Nuovo Cimento*, **38**, 60 (1965).
Heinz R. M., Ross M. H., *Phys. Rev. Letters*, **14**, 1091 (1965).
Herglotz A., *Ber. Verh. Sächs. Akad. Wiss. Leipzig, Math. Naturw. Kl.* **63** (1911).
Högaason H., Frisk A., *Phys. Letters*, **22**, 90 (1966).

234. Høgaason N., Frisk A., Phys. Letters, 22, 516 (1966).
235. Høgaason N., Salin Ph., Nucl. Phys., B2, 657 (1967).
236. Höhler G., Baacke J., Giesecke J., Zovko N., Proc. Roy. Soc., A289, 500 (1965).
237. Höhler G., Baacke J., Schaile H., Sonderegger P., Phys. Letters, 20, 79 (1966).
238. Höhler G., Ebel G., Giesecke J., Zs. f. Phys., 180, 430 (1964).
239. Hoff G. T., Phys. Rev. Letters, 18, 816 (1967).
240. Van Hove L., Rapporteur's talk in Garnjost (Ed.). Proceedings of the XIIIth International Conference on High Energy Physics, 1967.
241. Huang K., Jones C. E., Teplitz V. L., Phys. Rev. Letters, 18, 146 (1967).
242. Igi K., Phys. Rev. Letters, 9, 76 (1962).
243. Igi K., Phys. Rev., 130, 820 (1963).
244. Igi K., Matsuda S., Phys. Rev. Letters, 18, 625, 822 (E) (1967).
245. Inōnu E., Wigner E. P., Nuovo Cimento, 9, 707 (1952).
246. Jackson J. D., Rev. Mod. Phys., 37, 484 (1965).
247. Jacob M., Wick G. C., Ann. Phys., 7, 404 (1959).
248. James P. B., Logan R. K., Phys. Letters, 25 B, 38 (1967).
249. Johnson K., Trieman S. B., Phys. Rev. Letters, 14, 189 (1965).
250. Johnson K., Phys. Rev., 135 B, 214 (1964).
251. Johnson K., Nuovo Cimento, 40, 761 (1965).
252. Johnson K., Hartle J. B., Phys. Rev. 140 B, 90 (1965).
253. Johnson K., Teplitz V. L., Phys. Rev. Letters, 19, 135 (1967).
254. Johnson K., Teplitz V. L., Phys. Rev., 159, 1271 (1967).
255. Johnson K., Tiktopoulos G., Journ. Math. Phys., 7, 311 (1966).
256. Jones H. F., Nuovo Cimento, 50, 814 (1967).
257. Jones H. F., Scadron M. D., Nucl. Phys., B4, 267 (1967).
258. Jones H. F., Phys. Rev., 163, 1523 (1967).
259. Joos H., в книге Lectures in Theoretical Physics, Vol. 7A (Ed. Britten W. E. and Barut A. O.), University of Colorado, 1964.
260. Källén G., Elementary particle physics, Reading, Mass., 1964 (см. перевод: Челлен Г., Физика элементарных частиц, М., 1966).
261. Kawai T., Nuovo Cimento, A50, 176 (1967).
262. Khuri N. N., Phys. Rev., 130, 429 (1963).
263. Khuri N. N., Phys. Rev. Letters, 10, 420 (1963).
264. Khuri N. N., Phys. Rev., 132, 914 (1963).
265. Khuri N. N., Phys. Rev. Letters, 18, 1094 (1967).
266. Kibble T. W. B., Phys. Rev., 117, 1159 (1960).
267. Kibble T. W. B., Phys. Rev., 131, 2282 (1963).
268. Klein S., Phys. Rev. Letters, 18, 1074 (1967).
269. Grammer M., Maor U., Nuovo Cimento, 50A, 963 (1967).
270. Kretschmar M., Nuovo Cimento, 32, 1405 (1964).
271. Ландау Л. Д., ЖЭТФ, 37, 62 (1959).
272. Leader E., Phys. Rev., 166, 1599 (1968).
273. Leader E., Slansky R. C., Phys. Rev., 148, 1491 (1966).
274. Lee B. W., Sawyer R. F., Phys. Rev., 127, 2266 (1962).
275. Lehman H., Nuovo Cimento, 10, 579 (1958) (см. перевод в сборнике «Проблемы современной физики», вып. 3, 1959).
276. Leitner J., An Experimental Review of SU(3), Syracuse preprint, 1966.
277. Levinson N., Kgl. Danske Vidensk. Selsk., Mat.-Fys. Medd., 25, No. 9 (1949).
278. Lévy-Leblond J.-M., Nuovo Cimento, 45, 772 (1966).
279. Lin K. Y., Phys. Rev., 155, 1515 (1967).
280. Lindenbaum S. J., в книге Proceedings of the 1965 Oxford International Conference on Elementary Particles, (Rutherford Laboratory), 1966.
281. Logan R. K., Phys. Rev. Letters, 14, 414 (1965).

282. Logan R. K., Sertorio L., Phys. Rev. Letters, **17**, 834 (1966).
283. Logan R. K., Sertorio L., Nuovo Cimento, **A52**, 1022 (1967).
284. Логунов А. А., Соловьев Л. Д., Тавхелидзе А. Н., Phys. Letters, **24B**, 181 (1967).
285. Lovelace C., Masson D., Nuovo Cimento, **26**, 472 (1962).
286. Luming M., Phys. Rev., **136B**, 1120 (1964).
287. MacDowell S., Phys. Rev., **116**, 774 (1959).
288. Mandelstam S., Phys. Rev., **112**, 1344 (1958) (см. перевод в сборнике «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
289. Mandelstam S., Phys. Rev., **115**, 1741 (1959) (см. перевод в сборнике «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
290. Mandelstam S., Phys. Rev., **115**, 1752 (1959) (см. перевод в сборнике «Новый метод в теории сильных взаимодействий», ИЛ, 1960).
291. Mandelstam S., Ann. Phys., **19**, 254 (1962) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
292. Mandelstam S., Nuovo Cimento, **30**, 113 (1963).
293. Mandelstam S., Nuovo Cimento, **30**, 1127 (1963).
294. Mandelstam S., Nuovo Cimento, **30**, 1148 (1963).
295. Mandelstam S., Ann. Phys., **21**, 302 (1963) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1963).
296. Mandelstam S., Phys. Rev., **137B**, 949 (1965).
297. Mandelstam S., в книге 1966 Tokyo Summer Lectures in Theoretical Physics, Ed. Takeda G. and Fujii A.), Part II. New York, 1966.
298. Mandelstam S., Phys. Rev., **166**, 1539 (1968).
299. Mandelstam S., Wang L.-L., Phys. Rev., **160**, 1490 (1967).
300. Martin A., Phys. Rev. Letters, **9**, 410 (1962).
301. Martin A., Nuovo Cimento, **37**, 671 (1965).
302. Miller D. H. et al., Phys. Rev., **153**, 1423 (1967).
303. Morrison D. R. O., Phys. Letters, **22**, 528 (1966).
304. Morrison D. R. O., Review of Inelastic Two-body Reactions, Paper given to the Stony Brook Conference, April 1966, CERN preprint TC/Physics 66-20, 1966.
305. Morrison D. R. O., Phys. Letters, **25B**, 238 (1967).
306. Morpurgo G., Physics, **2**, 95 (1965).
307. Mueller A. H., Trueman T. L., Phys. Rev., **160**, 1296 (1967).
308. Mueller A. H., Trueman T. L., Phys. Rev., **160**, 1296 (1967).
309. Murphy P. G., Rapporteur's talk in Garnjost, Proceedings of the XIIth International Conference on High Energy Physics, 1967.
310. Muzinich I., Journ. Math. Phys., **5**, 1481 (1964).
311. Nakanishi N., Phys. Rev., **138B**, 1182 (1965).
312. Nakanishi N., Progr. Theor. Phys., **37**, 618 (1967).
313. Nath L. M., Nuovo Cimento, **52**, 944 (1967).
314. Neeman Y., Reichert J. D., Phys. Rev. Letters, **18**, 1226 (1967).
315. Newton R. G., The Complex j-plane, New York, 1964.
316. Oakes R. J., Phys. Letters, **24B**, 154 (1967).
317. Odorico R., Nuovo Cimento, **51A**, 1021 (1967).
318. Oehme R., в книге Strong Interactions and High Energy Physics (Ed. Moorhouse R. G.), London, 1964.
319. Oehme R., Phys. Rev. Letters, **18**, 1222 (1967).
320. Oehme R., Tiktopoulos, Phys. Letters, **2**, 86 (1962).
321. Olive D. I., Phys. Rev., **135B**, 745 (1964).
322. Omnès R., Froissart M., Mandelstam Theory and Regge Poles, New York, 1963.
323. Omnès R., Leader E., On the Removal of Singularities in the Regge Asymptotic Behaviour, Cambridge preprint, 1967.
324. Orear J., Phys. Rev. Letters, **12**, 113 (1964).
325. Orear J. et al., Phys. Rev. Letters, **15**, 309 (1965).

326. Paciello M. L., Pugliese A., Phys. Letters, **24B**, 431 (1967).
327. Peierls R. F., Trueman T. L., Phys. Rev., **134B**, 1365 (1964).
328. Perkins D. H., Proceedings of the International Conference of Theoretical Aspects of Very High Energy Phenomena (CERN, Geneva), 1961.
329. Phillips R. J. N., Nuovo Cimento, **45**, 245 (1966).
330. Phillips R. J. N., Phys. Letters, **24B**, 342 (1967).
331. Phillips R. J. N., Nucl. Phys., **B2**, 657 (1967).
332. Phillips R. J. N., Rarita W., Phys. Rev., **139B**, 1336 (1965).
333. Phillips R. J. N., Rarita W., Phys. Letters, **19**, 598 (1965).
334. Phillips R. J. N., Rarita W., Phys. Rev. Letters, **14**, 502 (1965).
335. Pignotti A., Phys. Rev. Letters, **10**, 416 (1963).
336. Polkinghorne J. C., Journ. Math. Phys., **4**, 503 (1963).
337. Polkinghorne J. C., Journ. Math. Phys., **4**, 1393 (1963).
338. Polkinghorne J. C., Journ. Math. Phys., **4**, 1396 (1963).
339. Polkinghorne J. C., Journ. Math. Phys., **5**, 431 (1964).
340. Polkinghorne J. C., Nuovo Cimento, **36**, 857 (1965).
341. Померанчук И. Я., ЖЭТФ, **34**, 499 (1958).
342. Proserpi G. M., Nuovo Cimento, **26**, 541 (1965).
343. Pursey D. L., Sertorio L., Phys. Rev., **155**, 1591 (1967).
344. Rarita W., Schwarzschild B. M., Phys. Rev., **162**, 1378 (1967).
345. Rarita W., Riddell Jr. R. J., Chiu C. B., Phillips R. J. N., Phys. Rev., **165**, 1615 (1968).
346. Regge T., Nuovo Cimento, **14**, 951 (1959).
347. Regge T., Nuovo Cimento, **18**, 947 (1960) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1960).
348. Rose M. E., Elementary Theory of Angular Momentum, New York, 1957.
349. Rosenfeld A. H. et al., Rev. Mod. Phys., **39**, 1 (1967).
350. Rodgers T. W., Cambridge thesis, 1967.
351. Roy D. P., Nuovo Cimento, **40A**, 513 (1965).
352. Roy D. P., Phys. Rev., **146B**, 1218 (1966).
353. Rubinstein H. R., Veneziano G., Virasoro M. A., Phys. Rev., **167**, 1441 (1968).
354. Ryder L. H., Nuovo Cimento, **52**, 879 (1967).
355. Sakita B., Wali W. C., Phys. Rev. Letters, **18**, 31 (1967).
356. Sakmar J. A., Phys. Rev., **135B**, 249 (1964).
357. Salam A., Strathdee J., Phys. Rev. Letters, **19**, 39 (1967).
358. Sciarrino H., Toller M., Journ. Math. Phys., **8**, 1252 (1967).
359. Sertorio L., Toller M., Nuovo Cimento, **33**, 413 (1964).
360. Sharp D. H., Wagner W. G., Phys. Rev., **131**, 2226 (1963).
361. Shepherd H. K., Phys. Rev., **159**, 1331 (1967).
362. Singh V., Phys. Rev., **129**, 1889 (1963).
363. Singh V., Phys. Rev. Letters, **18**, 36 (1967).
364. Smithies F., Integral Equations, London, 1962.
365. Sommerfeld A., Partial Differential Equations in Physics, New York, 1949, p. 282 (см. перевод: Зоммерфельд А., Дифференциальные уравнения в частных производных физики, ИЛ, 1960).
366. Sonderegger P. et al., Phys. Letters, **20**, 75 (1966).
367. Squires E. J., Nuovo Cimento, **25**, 242 (1962) (см. перевод в сборнике «Теория сильных взаимодействий при больших энергиях», ИЛ, 1960).
368. Squires E. J., Complex Angular Momentum and Particle Physics, New York, 1963.
369. Squires E. J., Phys. Letters, **7**, 363 (1963).
370. Squires E. J., Nuovo Cimento, **34**, 1751 (1964).
371. Squires E. J., Proceedings of the 1966 Universities Summer School in Physics (Ed. Priest T. W., and Vick L. L. J.), London, 1967.
372. Squires E. J., Watson P. J. S., Ann. Phys., **41**, 409 (1967).
373. Srivastava Y., Phys. Rev. Letters, **19**, 47 (1967).

374. Srivastava Y. N., Nath P., Phys. Rev., **142**, 982 (1966).
375. Stack J. D., Phys. Rev. Letters, **16**, 286 (1966).
376. Stack J. D., Phys. Rev., **164**, 1904 (1967).
377. Stapp H. P., Phys. Rev., **125**, 2139 (1962).
378. Stapp H. P., Phys. Rev., **160**, 1251 (1967).
379. Swift A. R., Phys. Rev. Letters, **18**, 813 (1967).
380. Sundaram A., Sridhar R., Nuovo Cimento, **50A**, 969 (1967).
381. Taylor J. C., Regge Poles in Invariant Amplitudes and Families of Trajectories, Oxford preprint, 1967.
382. Taylor J. R., Phys. Rev., **127**, 2257 (1962).
383. Taylor J. R., Journ. Math. Phys., **7**, 181 (1966).
384. Thews R. L., Phys., Rev., **155**, 1624 (1967).
385. Tiktopoulos G., Phys. Rev., **131**, 480 (1963).
386. Tiktopoulos G., Phys. Rev., **131**, 2373 (1963).
387. Titchmarsh E. C., Theory of Fourier Integrals, London, 1937 (см. перевод: Титчмарш Е. К., Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948).
388. Titchmarsh E. C., The Theory of Functions, 2nd Edition, London, 1939 (см. перевод: Титчмарш Е. К., Теория функций, М., 1951).
389. Teplitz V. L., Phys. Rev., **137B**, 136 (1965).
390. Teplitz D. C., Teplitz V. L., Phys. Rev., **137B**, 142 (1965).
391. Toller M., Nuovo Cimento, **37**, 631 (1965).
392. Toller M., Nuovo Cimento, **53A**, 671 (1968).
393. Trueman T. L., Wick G. C., Ann. Phys., **26**, 322 (1964).
394. Udgaonkar B. M., Phys. Rev. Letters, **8**, 142 (1962).
395. Udgaonkar B. M., в книге High Energy Physics and Elementary Particles, Vienna, 1965.
396. Uretsky J. L., Phys. Rev., **123**, 1459 (1961).
397. Волков Д. В. Грибов В. Н., ЖЭТФ, **44**, 1068 (1963).
398. Wagner W. G., Phys. Rev. Letters, **10**, 202 (1963).
399. Wang L.-L. C., Phys. Rev., **142**, 1187 (1966).
400. Wang L.-L. C., Phys. Rev. Letters, **16**, 756 (1966).
401. Wang L.-L. C., Phys. Rev., **153**, 1664 (1967).
402. Warburton A. E. A., Nuovo Cimento, **32**, 122 (1964).
403. Warburton A. E. A., Phys. Rev., **137B**, 993 (1964).
404. Warburton A. E., Nuovo Cimento, **37**, 266 (1965).
405. Warnock R. L., Nuovo Cimento, **50A**, 894 (1967).
406. Watson G. N., Proc. Roy. Soc., **95**, 83 (1918).
407. Wick G. C., Phys. Rev., **96**, 1124 (1954).
408. Wigner E. P., Ann. Math., **40**, 159 (1939).
409. Wigner E. P., в книге Group Theoretical Concepts and Methods in Elementary Particle Physics (Ed. Gursev F.), New York, 1964.
410. Wu T.-Y., Омтура Т., The Quantum Theory of Scattering, p. 6, New Jersey, 1962 (см. перевод: Ту-Ю Ву, Омтура Т., Квантовая теория рассеяния, М., 1969).
411. Zachariassen F., Phys. Rev. Letters, **7**, 112, 268 (E) (1961).
412. Zachariassen F., Lectures given at the Pacific International Summer School in Physics, Honolulu, Hawaii, 1965.
413. Zachariassen F., Zemanach C., Phys. Rev., **128**, 849 (1962).
414. Ademollo M., Rubinstein H. R., Veneziano G., Virasoro M. A., Phys. Rev. Letters, **19**, 1402 (1967).
415. Allison W. W. M. et al., Phys. Letters, **25B**, 619 (1967).
416. Barger V., Cline D., Phys. Rev. Letters, **19**, 1295 (1967).
417. Barger V., Durand L., Phys. Rev. Letters, **19**, 1295 (1967).
418. Borgese A., Colocci M., Lusignoli M., Restignoli M., Violini G., University of Rome preprint n. 130, 1967.
419. Brozan J. B., Jones C. E., Phys. Rev., **160**, 1494 (1967).
420. Buschhorn G. et al., Phys. Letters, **25B**, 622 (1967).

421. Chiu C. B., Chu S.-Y., Wang L. L., Phys. Rev., **161**, 1563 (1967).
422. Chiu C. B., Chung-I. Tan, Phys. Rev., **162**, 1701 (1967).
423. Collins P. D. B., Johnson R. C., Squires E. J., Phys. Letters, **26B**, 223 (1968).
424. Contigorous A. P., Tran Thanh Van J., Phys. Rev. Letters, **19**, 1353 (1967).
425. Cutkosky R. E., Deo B. B., Phys. Rev. Letters, **19**, 1345 (1967).
426. Drechsler W., CERN preprint Th. 841.
427. Dunne S. A., Phys. Rev. Letters, **19**, 1299 (1967).
428. Durand L., Phys. Rev. Letters, **19**, 1563 (1967).
429. Feldman G., Matthews P. T., Phys. Rev., **168**, 1587 (1968).
430. Filthuth H. (Ed.), Proceedings of the Heidelberg International Conference on Elementary Particles, Amsterdam, 1968.
431. Finkelstein J., Chung-I. Tan, Phys. Rev. Letters, **19**, 1061 (1967).
432. Goldberg H., Phys. Rev. Letters, **19**, 1391 (1967).
433. Gross J. D., Phys. Rev. Letters, **19**, 1303 (1967).
434. Hwa R., Phys. Rev., **162**, 1708 (1967).
435. Iverson G. I., Nuovo Cimento, **51**, 289 (1967).
436. Jackson J. D., Hite G. E., Phys. Rev., **168**, 1587 (1968).
437. Komy S. R., Samiullah M., Mahanta U., Nuovo Cimento, **55A**, 423 (1968).
438. Mandelstam S., Phys. Rev., **168**, 1884 (1968).
439. Matsuda S., Igi K., Phys. Rev. Letters, **19**, 928 (1967).
440. Mitter P. K., Phys. Rev., **162**, 1624 (1967).
441. Nwachuku C. O., Samiullah M., Shah K. T., Trieste internal report 24/1967; 15/1967.
442. Olsson M. G., Phys. Rev. Letters, **19**, 550 (1967).
443. Rashid M. A., Samiullah M., Trieste preprint IC/67/65, 1967.
444. Rothe H., Phys. Rev., **159**, 1471 (1967).
445. Sawyer W., Phys. Rev. Letters, **19**, 137 (1967).
446. Schwarz J., Phys. Rev., **162**, 1671 (1967).
447. Sertorio L., Toller M., Phys. Rev. Letters, **19**, 1146 (1967).
448. Squires E. J., Phys. Rev. Letters, **26B**, 461 (1968).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амати — Фубини — Стангеллини раз-
резы 160, 161, 212
Аналитическое продолжение по l 72
Аномальные пороги 39
Аномальные решения 153
Асимптотическое поведение амплитуд
48, 68, 77, 99, 108
— — парциальных амплитуд 70, 73
- Барийные траектории 241, 263
Бессмысленные состояния 129, 146,
168, 171, 230, 233, 286, 290
Бете — Солпитера уравнение 121, 153,
154, 155, 220, 331
Борновское приближение 177, 191,
211, 213, 318
Брейта — Вигнера формула 39, 82,
182, 186, 198
- Вниера — Хопфа метод 178
Возмущений теория 217
Времени обращение 31, 126, 158
Вычеты в полюсах Редже 76, 271,
286, 331
— — — аналитические свойства
90, 96, 183, 303
— — — приведенные 91, 139,
270
— — — факторизация, 141, 142,
157, 280, 289, 290, 305
Вычитания 44, 47, 68, 79, 96, 172, 174
- Герглотца функции 97
Грибова — Фруассара проекция 59,
68, 165
— — — для спиральных амплитуд
132
- Двойная спектральная функция 47,
49, 97, 102, 172, 203
— — — граница 49, 54, 203
- Двухчастичный скачок 40
Дейтронный полюс 48
Детерминантное приближение 199
Джонсона — Траймана соотношения
254
Дисперсионные соотношения для α (s)
и β (s) 96
— — — парциальных амплитуд 63,
68
— — — спиральных амплитуд 131
— — по двум переменным 45
— — по одной переменной 42
Дифракционное рассеяние 259, 270,
255
Дочерние траектории 119, 121, 141,
147, 152, 154, 155, 240, 303, 331
— — сигнатура 122, 303
- Зарядовое сопряжение 250
Вашнуровка 172, 196, 204, 216, 333
Зоммерфельда — Ватсона преобразова-
ние 74, 99, 149, 154
— — — для спиральных амплитуд
134
- Инварианты 25, 29
— для четыреххвостки 31
Интерференция траекторий с резонан-
сами прямого канала 303, 309
- Канал 26
Карлсона теорема 73, 80
Катковского правила 27, 40, 45
Кварковая модель 215, 240, 319
КДД-полюса 179, 189, 190, 197, 201,
206, 215, 228, 232, 234
Кинематика частиц с неравными мас-
сами 111
Кинематические ограничения 136, 289,
290, 305, 332
— сингулярности и их устранение
131, 136, 233

- Клебша — Гордана коэффициенты 128
 — — ряд 127
- Комптоновское рассеяние 327
- Конспирации 121, 141, 146, 147, 152, 154, 284, 295, 305, 307, 330, 331
- Кроссинг 30, 71, 174
- Кроссинг-матрица изоспиновая 198, 200, 205, 251
 — — спиральная 124, 136
- Лаандау правила 28, 40, 45
- Левинсона теорема 178, 179, 180, 190, 201
- Лежандра функции второго рода 60
 — — — — асимптотическое поведение по l 69
 — — — — — по z 64, 89
 — — — — при $l = -n$ 72, 165
 — — — — скачок на разрезе 60, 84
 — — — — первого рода 57, 81
 — — — — асимптотическое поведение по l 71, 72, 76
 — — — — — по z 47
 — — — — скачок на разрезе 78
- Лемана эллипс 72
- Лоренца группа 147
 — — малые группы 148
 — — операторы Казимира 148, 151
- Лоренцевская инвариантность 18, 21, 25, 137, 148
- Лоренцевские полюса 151, 331
- Мак-Дауэлла симметрия 143, 233, 243, 282
- Максимальная аналитичность второй степени 18, 79, 172, 174, 190
 — — первой степени 18, 28, 172, 174
- Мандельштама — Зоммерфельда — Ватсона преобразование 86, 135
- Мандельштамовская итерация 174, 211
 — плоскость 33
- Мандельштамовское представление 45, 97, 113
- Массовая поверхность 20, 150, 155
- Мезонные траектории 236
- Мезон скалярный 190, 191, 196
- Неупругость в N/D -уравнениях 185
- Нормировка 20
- N/D -метод 154, 174, 176, 197, 199, 200, 204, 206
- Обмен барионом 263
- Обменное вырождение 240, 320
- Обменный потенциал 190, 208, 240, 320
- Оптическая теорема 37, 67, 247
- Парциальные амплитуды 56
 — — дисперсионные соотношения 63
 — — для малых групп 148, 331
 — — пороговое поведение 64, 141, 232
 — — приведенные 67, 85, 176
 — — при наличии спина 125, 133
 — — сингулярности 61, 84, 139, 158
 — — соотношение симметрии 88, 135
 — — с определенной сигнатурой 60, 133
- Планирные диаграммы 219
- Полиота 19, 20
- Полосное приближение «новое» 201
 — — «старое» 211
- Полубесмысленные амплитуды 128, 133, 135, 142, 168, 171, 230, 274, 278, 280, 328, 332
- Полюса в s -плоскости 26, 39, 172
 — — факторизация вычетов 27
 — — лоренцевские 151, 331
 — — неподвижные 156, 163, 169, 278, 326, 327, 329
 — — нестабильных частиц 30, 39, 82
 — — Редже 10, 78, 80, 97, 159
 — — сопутствующие 110
- Поляризация 291, 300, 301
- Померанчон 10, 117, 122, 123, 195, 209, 211, 249, 256, 258, 292, 294, 328
 — вклад в амплитуду 144, 248, 254
- Пороги 27, 40, 139
- Пороговое поведение $\alpha(s)$ 94
 — — амплитуд 64, 139, 141, 142, 332
- Потенциал в динамических вычислениях 177, 190, 202, 231, 319
- Призраки 281, 288
- Провалы в дифференциальных сечениях 270, 276, 279, 282, 332
- Псевдопороги 139
- Пуанкаре группа 148
- Радиус взаимодействия 70, 97, 195, 235, 319
- Разложимость 18, 22
- Разрезы в l -плоскости 78, 156, 159, 170, 224, 264, 296, 303, 332
- Сверхсходящиеся соотношения 156, 166, 321, 333
- Связность 23
- Сечение дифференциальное 36, 269
 — парциальное 67

- Сечение полное 37, 71, 247, 291
 — при наличии спина 125, 284, 291
 — связь с амплитудами 35, 36, 125, 247, 284, 291
- Сигнатура 58, 240
 — дочерних траекторий 122
 — неправильная 123, 135, 142, 167, 278, 282, 326, 328, 329
 — правильная 135, 142, 167
- Сигнатурный множитель 81
- Силы в зашнуровочных вычислениях 177, 190
- Симметрия $O(4)$ 121, 153, 331
 — $SU(3)$ 216, 236, 252, 254, 255
 — $SU(6)$ 216, 254
- Сингулярности в s -плоскости 26
 — граничные 219, 220
 — Грибова — Померанчука 169
 — левосторонние 62
 — пинчевые 219, 220
- Система центра масс 32
 — — — угол рассеяния 34, 50, 65
- Скалярный мезон 190, 191, 196
- Скачки на левом разрезе 63, 85, 169, 177, 181, 183, 190, 192
- Спин 124, 305
- Спиновая матрица плотности 306
- Спиральность 19, 125
- Спиральные амплитуды 124
 — — кинематические сингулярности 124, 131, 332
- Сужение пика в рассеянии вперед 9, 270, 271, 275, 288, 295
- Теорема *CPT* 30
- Точки ветвления в s -плоскости 27, 38
- Траектории барионные 241, 263
 — мезонные 236
 — Редже 10, 78, 80, 157, 235, 316, 333
 — — аналитические свойства 90, 95, 183, 303
 — — асимптотическое поведение 166, 183, 216
 — — наклон 95, 97, 233
 — — пороговое поведение 94
 — — — сгущение 96
 — — прямолнейные 193, 236, 239, 241, 316, 333
- Уклонение 141, 147, 152, 154
- Условие унитарности 20
 — — аналитическое продолжение 156
 — — для парциальных амплитуд 65, 156, 163, 177, 185
- Условие унитарности для упругого рассеяния 40, 49, 156, 160, 163, 177
 — — символическая запись 21
- Фаза амплитуды рассеяния вперед 264
- Фазовый сдвиг 66, 187, 201, 206
- Факторизация реджевских вычетов 141, 142, 157, 280, 289, 290, 305
- Фейнмановские диаграммы 162, 169, 217
 — — высокоэнергетическое поведение 218
- Физический лист 29, 38
- Фоновый интеграл 78, 86, 100, 103, 109, 114, 135
 — — и компенсация сингулярностей 100, 118, 119, 121, 147, 152, 154
- Формфакторы 194, 278, 318
- Фоторождение 329
- Фруассара граница 69, 144, 168, 172, 174, 328
- Функции $d_{\lambda\mu}^J$ 126
 — $e_{\lambda\mu}^J$ 126
- Хури — Джонса представление 106, 193
- Хури полюса 110
 — степенное разложение 108
- Частицы составные 11, 48, 83, 180
 — элементарные 11, 48, 83, 180, 228, 230, 234, 263, 328
- Четность 126
 — спиральных амплитуд 126, 143
- Четыреххвостка связанная 31
 — — сингулярности 37
- Чью — Джонса представление 101, 203
- Чью — Фраучи кривые 11, 237, 239
- Эрмитова аналитичность 38
- Юкавский потенциал 177, 190
- Якоби полиномы второго рода 129
 — — первого рода 127