

Новости фундаментальной физики

Выпуск

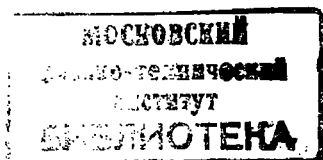
8

Б. 20.1
К 32

КВАНТОВАЯ
ТЕОРИЯ
КАЛИБРОВОЧНЫХ
ПОЛЕЙ

сборник статей

*Перевод с английского
под редакцией
Н. П. КОНОПЛЕВОЙ*



433929

ИЗДАТЕЛЬСТВО
"МИР"

МОСКВА · 1977

Сборник посвящен теории калибровочных полей, с созданием которой в значительной мере связаны успехи на пути построения единой теории взаимодействий элементарных частиц, достигнутые в последние годы. Он составлен из обзорных статей известных зарубежных ученых, внесших крупный вклад в развитие данного направления.

Книга рассчитана на специалистов в области теории поля и физики элементарных частиц, а также на студентов старших курсов и аспирантов, изучающих эту область физики.

Редакция литературы по физике

Вступительная статья редактора перевода

Калибровочные поля и физика элементарных частиц

Последние 15–20 лет теория элементарных частиц напоминала калейдоскоп. Новые направления, теории, модели, технические приемы внезапно появлялись, давали несколько ярких результатов и так же внезапно уходили в тень. Дисперсионные соотношения, реджистика, высшие симметрии, кварки и партоны, алгебра токов, черные дыры, расслоенные пространства, очарованные частицы, струны, солитоны, вильсоновские разложения, асимптотическая свобода и тюрьма для кварков, "заговор полюсов" и гидродинамика — что между ними общего? Стоит ли за этими "деревьями" какой-нибудь "лес" или все эти дороги ведут в разные стороны? Долгое время это было неясно. Сейчас, однако, можно сказать, что есть по крайней мере одна теория, где все пути сходятся. Это теория калибровочных полей. Она использует новые физические идеи и математический аппарат для единого описания всех видов взаимодействий элементарных частиц: сильных, слабых, электромагнитных и гравитационных. В то же время она допускает чисто геометрическую интерпретацию и в своем классическом аспекте может рассматриваться как теория сплошной среды. Поэтому она естественно смыкается со статистической физикой и физикой твердого тела, заимствуя у них некоторые методы и передавая свои.

Экспериментальные и теоретические открытия последних лет [11–12] показывают, что, возможно, традиционное разделение видов взаимодействий по силе имеет смысл только при невысоких энергиях. С ростом энергии слабые взаимодействия растут и могут стать сильнее электромагнитных, а сильные взаимодействия ослабевают и могут по порядку величины приблизиться к слабым и электромагнитным

[3, 7]. Тогда сильные, слабые и электромагнитные взаимодействия, которые мы привыкли различать, станут проявлениями одного и того же универсального взаимодействия. Если под универсальностью понимать наличие одной константы связи, то произойти это может, по-видимому, при энергиях $\sim 10^{18}$ ГэВ, когда необходимо учитывать и гравитацию. Но и в любом другом случае истинно единая теория всех взаимодействий должна включать в себя теорию тяготения. Таким образом, возможно, в ближайшие годы в физике элементарных частиц будет сделан шаг, подобный созданию в прошлом веке электродинамики Максвелла, когда было понято, что свет, электрические и магнитные явления — это разновидности одного и того же электромагнитного взаимодействия. Теория Максвелла позволила предсказать и открыть радиоволны и механическое действие света [13], и благодаря ей механическая картина мира сменилась электромагнитной. Современные единые перенормируемые модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий явились результатом почти 40-летних попыток построить лагранжеву теорию слабых и сильных взаимодействий по образу и подобию электродинамики [4, 11].

Основу теории калибровочных полей составляют принципы симметрии, главный из которых — принцип локальной калибровочной инвариантности. Этот принцип впервые был использован Вейлем [14], который показал, что теорию Дирака можно сделать инвариантной относительно локальной группы фазовых преобразований волновых функций (градиентных преобразований второго рода), если в лагранжиане обычные производные заменить ковариантными по правилу $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$, где A_μ — вектор-потенциал электромагнитного поля, e — электрический заряд. Возможность такой замены говорит об универсальности электромагнитного поля и соответствующей константы связи e . В то же время она означает, что взаимодействие, введенное с ее помощью, допускает чисто геометрическую трактовку на языке коэффициентов связности пространства-времени. Последнее было продемонстрировано самим Вейлем, который показал, что электромагнитное поле можно отождествить с дополнительными неметрическими коэффициентами связности пространства-времени, а локальные калибровочные преобразования — с растяжениями 4-мерного интервала, зависящими от точки. В пространстве Вейля имеется любопытный геометрический аналог квантования орбит по Бору. Именно, если рассматривать кулоновское центральное-симметричное электромагнитное по-

ле (атом водорода) в пространстве Вейля, то оказывается, что боровские орбиты (орбиты электрона) — это те траектории, вдоль которых параллельный перенос вектора не меняет его длины [15, 16]. Любые другие траектории в пространстве Вейля этому требованию не удовлетворяют. Основные черты вейлевской трактовки электромагнитного поля (универсальность, геометризуемость, наличие классических аналогов квантования) сохранились и в современной теории калибровочных полей.

Понятие калибровочного поля было введено в 1954 г. Янгом и Миллсом в связи с попыткой построить теорию сильных взаимодействий исходя из требования инвариантности относительно локальной группы изотопических преобразований [17]. Янг и Миллс обобщили метод Вейля и предложили ввести триплет векторных полей, связанных с сохраняющимся током изоспина и ответственных за сильные взаимодействия между нуклонами. Группой симметрии теории стала группа $SU(2)$. Требование локальности калибровочных преобразований приобрело в их работе ясный физический смысл. Янг и Миллс обратили внимание на то, что в отсутствие электромагнитного поля ориентация изотопического спина не имеет физического значения. Поэтому различие протона и нейтрона становится чисто условным. Если же в какой-либо области пространства-времени включено электромагнитное поле и тем самым установлено, какая из частиц протон, а какая — нейтрон, то в других областях это различие будет устанавливаться лишь по мере того, как электромагнитное поле достигнет этих областей. Обычное предположение о том, что мы можем совершить фазовый поворот одновременно во всех точках пространства, даже отделенных друг от друга пространственноподобным интервалом, противоречит гипотезе близкодействия. Изменение фазы должно распространяться в пространстве и времени, что на языке квантовой теории поля описывается как обмен неккими векторными частицами, а на геометрическом языке — как параллельный перенос с помощью коэффициентов связности расслоенного пространства [11, 18]. Таким образом, в отличие от теории тяготения Эйнштейна геометрическая теория калибровочных полей использует не метрику, а связность.

В 1960 г., опираясь на идеи о калибровочной инвариантности, Сакураи [19] предложил универсальную теорию сильных взаимодействий. В теории Сакураи векторные поля связывались с законами со-

хранения барионного числа, изоспина и гиперзаряда. В том же 1960 г. Онуки и Икеда и в 1961 г. Нееман, Гелл-Манн и Глэшоу [20], исходя из идей Сакураи, предложили 8-мерную симметрию для сильных взаимодействий, известную под названием $SU(3)$ -симметрии. Эта симметрия позволила классифицировать все сильно взаимодействующие частицы, привела к открытию новых частиц (в частности, Ω^- -гиперона и октета векторных мезонов ρ , ω , ϕ) и появлению новых моделей адронов, получивших название кварковых моделей. Кварки были введены Гелл-Манном и Цвейгом в 1964 г. как гипотетические "составные части" нуклонов и мезонов, образующие наинизшее возможное представление группы $SU(3)$ – триплет [10, 21]. Введение кварков было вызвано стремлением уменьшить число необходимых "кирпичей мироздания", поскольку число известных частиц, считавшихся по традиции элементарными, слишком быстро росло. Кварки долгое время не принимались всерьез, так как казались слишком экзотическими объектами. Они должны были обладать дробными электрическими зарядами и двигаться внутри адронов почти свободно, но никогда не появляться вне адронов. Несмотря на то что "кварковый счет" давал предсказания, согласующиеся с экспериментом [1–3], кварки (и позднее их обобщение – партоны, т.е. любые "части" адронов) считались до недавнего времени вспомогательными, а не реальными объектами. Ситуация изменилась после того, как в ноябре 1974 г. были открыты таинственные ψ - (или j -) частицы, принадлежащие к новому семейству частиц [1, 5, 6, 76]. Свойства ψ -частиц удалось объяснить путем введения четвертого "шармированного" (или "очарованного") S -кварка. Это позволило представить ψ -частицы как "шармонии", т.е. систему из шармированных кварка и антикварка, аналогичную позитронию (системе e^+e^-), и предсказать его возбужденные уровни, которые также были открыты [1, 5, 6]. Силы, удерживающие кварки внутри адронов, были объяснены наличием неабелева калибровочного векторного поля глюонов, переносящего новое квантовое число "цвет". Теория неабелевых (т.е. связанных с неабелевой группой калибровок) калибровочных полей оказалась единственной [22] асимптотически свободной теорией, т.е. такой теорией, которая в области больших импульсов (или на малых расстояниях) предсказывает исчезновение взаимодействия, но при малых импульсах (или на

больших расстояниях) приводит к росту взаимодействия. Большинство предложенных до сих пор механизмов удержания кварков (кварковой "тюрьмы") так или иначе используют свойства неабелевых калибровочных полей. Однако вопрос о том, могут ли все-таки кварки вылетать, окончательно не решен, так как он связан со сложной проблемой инфракрасных расходимостей в калибровочных моделях. В настоящее время эта проблема интенсивно исследуется [1—3].

Удивительное свойство асимптотической свободы теории неабелевых калибровочных полей, кроме всего прочего, означает, что в этой теории нет знаменитой проблемы "нуля заряда", от которой страдает квантовая электродинамика. Эта проблема в свое время вызвала такой пессимизм среди теоретиков, что некоторые из них решили строить теорию элементарных частиц, не прибегая к квантовой теории поля, а используя только свойства S -матрицы [23]. Так появилась реджистика. Однако реджистика не смогла развиваться в последовательную теорию элементарных частиц, хотя в качестве феноменологической модели остается полезной при описании экспериментов. Она дала весьма ценное для классификации элементарных частиц представление о траекториях Редже, на которые "ложатся" частицы. Траектории Редже, как и кварки, позволяют уменьшить число "кирпичей мироздания", поскольку одна траектория может охватывать бесконечное число частиц, несмотря на то что сама описывается лишь двумя параметрами: наклоном и интерсептом. Сейчас имеется сильная тенденция к сближению между реджистикой и квантовой теорией поля, что проявилось, например, в создании "исчисления реджевских полей", использующего элементы лагранжева квантовополевого подхода. Еще сильнее эта тенденция проявляется в дуальных моделях — другом варианте S -матричного подхода, тесно связанном с реджистикой [24, 26]. В последние годы интенсивно исследуются так называемые дуальные модели "струн". Струна — одномерная протяженная (и в этом смысле классическая) система с бесконечным числом степеней свободы. Если в дуальных моделях устремить наклон траектории ($\alpha(t)$) к нулю и зафиксировать некоторые массы, то можно воспроизвести результаты некоторых теоретико-полевых моделей: $\lambda\phi^3$, безмассовой теории Янга—Миллса, массивной теории Янга—Миллса со спонтанным нарушением симметрии. Дуальные и тео-

ретику-полевые модели различаются обычно тем, что в древесном приближении первые дают реджевское поведение, а вторые — нет. Однако если просуммировать ряд теории возмущений в теории поля, то при некоторых условиях может появиться реджевское поведение. Как было показано в работах [27, 28], необходимые условия реджеизации выполняются в теориях с неабелевыми калибровочными полями. Может оказаться, что неабелевы калибровочные теории являются единственным классом теорий поля, которые способны "объединиться" с дуальными моделями. В случае такого объединения теория сильных взаимодействий приобретет те качества геометрической электродинамики Вейля, о которых говорилось выше. Именно, струны и их возбуждения можно отождествить с решениями типа вихрей, дислокаций, солитонов, кинков классических нелинейных уравнений [29–35]. В то же время струны можно отождествить с нейтральным полем глюонов, а их концы — с кварками [36, 37], которые в свою очередь можно рассматривать как магнитные монополи [38, 39]. Таким образом, мы получим геометрическую и топологическую интерпретацию некоторых квантовых соотношений [34] и обеспечим универсальность сильных взаимодействий.

Классические нелинейные уравнения неабелевых калибровочных полей естественным образом обобщают уравнения Максвелла. Ковариантная производная, посредством которой в лагранжиан вводится взаимодействие с калибровочным полем, имеет смысл ковариантной производной в расслоенном пространстве, базой которого является 4-мерное пространство-время, а слоем — групповое пространство калибровочной группы. Если 4-мерное пространство-время искривлено, то в схему естественно включается и гравитация [11, 18]. Интересно отметить, что дуальные модели не содержат нефизических состояний (духов) только в пространствах размерности 26 (без спиноров) и 10 (со спинорами). Поэтому представление о расслоенном пространстве возникает в этих моделях как разумная интерпретация дополнительных пространственных размерностей [40]. Дуальные модели с калибровочными полями могут привести к единой перенормируемой квантовой теории всех взаимодействий, включая гравитацию [26].

В физике элементарных частиц в настоящее время используются два типа симметрий: алгебраические и динамические. Алгебраи-

ческие симметрии соответствуют группам преобразований с постоянными (т.е. не зависящими от пространственно-временной точки) параметрами. Динамические симметрии задаются либо локальными калибровочными группами, либо нелинейными и неоднородными реализациями алгебраических симметрий. Алгебраические симметрии позволяют классифицировать частицы в соответствии с их квантовыми числами по мультиплетам, образующим различные представления выбранной группы симметрии. Динамические симметрии позволяют классифицировать взаимодействия между частицами, накладывая ограничения на форму лагранжианов, приводя к полезным правилам сумм, низкоэнергетическим теоремам и счастливым взаимным сокращениям расходящихся диаграмм Фейнмана в теории возмущений. Благодаря локальной калибровочной инвариантности и ее следствиям единые модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий оказались унитарными и перенормируемыми. Основным инструментом, используемым при доказательстве перенормируемости, — тождества Уорда, [41, 42], которые являются квантовым аналогом тождеств, вытекающих из второй теоремы Нётер при наличии локальной симметрии [11, 48] в классической теории.

Динамические симметрии не только определяют форму лагранжиана, но и обуславливают универсальность взаимодействия в том смысле, что первые порядки разложения по константе связи начинают совпадать с первыми порядками разложения по степеням энергии [44]. Это позволяет независимо от величины константы связи использовать соответствующую теорию поля для получения разумных результатов в области низких энергий.

Ранее для описания адронной физики при низких энергиях с успехом использовался аппарат дисперсионных соотношений [45]. Однако необходимость введения ряда произвольных параметров придавала ему феноменологический характер. Привлечение динамического принципа киральной симметрии $SU(3) \times SU(3)$ позволило значительно сократить число неопределенных параметров, налагая дополнительные граничные условия на низкоэнергетические решения дисперсионных уравнений. В настоящее время общепризнано, что киральная симметрия хорошо описывает низкоэнергетическую физику π -мезонов [24, 44]. Чаще всего при этом используется так называемая нелиней-

ная σ -модель, которая обнаруживает многие свойства теорий с локальной калибровочной инвариантностью.

Алгебраические симметрии предсказывают равенство масс частиц, относящихся к одному мультиплету. Но эксперимент показывает, что массы протона и нейтрона, образующих изотопический дублет, а также массы других частиц, образующих мультиплеты, несколько различаются. Поэтому алгебраические внутренние симметрии элементарных частиц, как правило, приходится нарушать, добавляя в лагранжиан члены, обладающие меньшей степенью симметрии, чем исходный лагранжиан. Эти нарушающие симметрию члены должны объяснять небольшое расщепление масс, экспериментально наблюдающееся в мультиплетах частиц. Идея постепенного нарушения исходной высокой симметрии до полного ее исчезновения связывалась обычно с идеей об иерархии видов взаимодействий, различающихся по силе. Самое сильное взаимодействие наделялось наивысшей симметрией и сохраняло наибольшее число свойств элементарных частиц. Поэтому ядерным силам сопоставлялась группа $SU(3)$ или более высокие симметрии. Нарушение симметрии до $SU(2)$ соответствовало переходу к слабым взаимодействиям, а переход к симметрии $U(1)$ или $O(2)$ описывал включение электромагнитного поля. Гравитационное взаимодействие разрушало всякую внутреннюю симметрию.

В 1964 г. Хиггсом был предложен другой способ нарушения симметрии, который позволил получать произвольное конечное расщепление масс в мультиплетах. Этот способ получил название спонтанного нарушения симметрии. При спонтанном нарушении никакого нарушения симметрии исходного лагранжиана \mathcal{L} на самом деле не происходит. К \mathcal{L} добавляется нелинейный лагранжиан скалярных полей (лагранжиан Хиггса), обладающий той же симметрией, что и \mathcal{L} . Но некоторые компоненты скалярных полей наделяются ненулевыми вакуумными средними, в результате чего симметрия вакуума оказывается более низкой, нежели симметрия исходного лагранжиана. Затем поля в лагранжиане переопределяются так, чтобы все они имели нулевые вакуумные средние. При этом симметрия между компонентами полей как будто теряется. На самом же деле она просто становится скрытой симметрией.

При спонтанном нарушении непрерывной алгебраической симметрии в соответствии с теоремой Голдстоуна появляются нефизические

безмассовые бозоны. При спонтанном нарушении локальной калибровочной симметрии вместо нефизических бозонов появляются массы у векторных калибровочных полей. Величина возникающих масс выражается через константу связи скалярных полей λ и может быть сделана произвольной, так как λ обычно теорией не фиксируется. Механизм Хиггса дает возможность приписать массы векторным полям, сохранив локальную калибровочную инвариантность теории. В свою очередь локальная калибровочная инвариантность теории обеспечивает перенормируемость.

Важность этого обстоятельства трудно переоценить. После создания квантовой электродинамики впервые появилась теория поля, в которой вычисления в любом порядке теории возмущений можно провести до конца (по крайней мере, в принципе), и эта теория — теория калибровочных полей. В основном, теория калибровочных полей была сформулирована к 1967—1969 гг. Классическая лагранжева формулировка и геометрическая интерпретация калибровочных полей приняли современный вид в работах Н.П. Коноплевой [11, 46]. Метод квантования калибровочных полей с помощью функционального интеграла и диаграммная техника были развиты в работах Л.Д. Фаддеева и В.Н. Попова [11, 31, 47], а также де Витта [48]. Однако для построения реалистических моделей элементарных частиц и сопоставления теории с экспериментом необходимо было решить вопросы о массе калибровочных полей и перенормируемости теории. Первый вопрос возник потому, что все взаимодействия элементарных частиц, кроме электромагнитных и гравитационных, короткодействующие, т.е. должны переноситься массивными частицами. Положительное решение второго вопроса делало теорию разумной в любой области энергий. Инвариантная процедура перенормировок для безмассового калибровочного поля была сформулирована в 1971 г. А.Д. Славновым и Тейлором [41, 42]. Затем 'т Офт [49] в 1971 г. распространил процедуру квантования на калибровочные теории со спонтанным нарушением симметрии, а Б. Ли и Зинн-Жустен, а также 'т Офт и Велтман обобщили на этот случай процедуру перенормировки. В результате калибровочные теории и особенно единые калибровочные модели оказались в центре внимания теоретиков, а еще через полтора-два года — и экспериментаторов, особенно после открытия в конце 1973 г. нейтральных токов,

предсказываемых этими моделями [5, 7а, 50, 51]. Проблема перенормируемости калибровочных моделей осложняется обычно тем, что может не существовать калибровки, в которой модель одновременно перенормируема и унитарна. Детально соответствующие вопросы обсуждаются в работе [52].

При всей своей привлекательности механизм Хиггса имеет один недостаток: он вводит в теорию произвольный параметр λ , что снижает предсказательную силу теории. Этот параметр можно зафиксировать, если потребовать, например, чтобы теория была суперсимметричной, т.е. обладала симметрией между бозонами и фермионами [53, 54]. Другой способ понять смысл λ и определить его из каких-либо физических соображений — придать конкретный смысл скалярному хиггсовскому полю. Такой подход предполагает обычно интерпретацию скалярного поля Хиггса как поля, описывающего конденсат (типа конденсата куперовских пар в сверхпроводнике). Тогда спонтанное нарушение симметрии становится динамическим, а масса у векторных полей возникает как результат фазового перехода [44, 45]. Эта идея восходит к классическим работам Бардина—Купера—Шриффера [56], Боголюбова [57] и Гинзбурга—Ландау [58] по сверхпроводимости.

Другой свободный параметр, возникающий в единых калибровочных моделях — угол смешивания. Он появляется из-за того, что с экспериментально наблюдаемыми частицами сопоставляются не поля, входящие в лагранжиан, а их линейные комбинации. Так, в единой модели слабых и электромагнитных взаимодействий Вейнберга—Салама 1967 г. физическому фотону ставится в соответствие комбинация $(a - b_3)$, где b_3 — нейтральная компонента $SU(2)$ -триплета векторных полей, ответственных за слабые взаимодействия, a — электромагнитное поле, связанное с $U(1)$ -инвариантностью лагранжиана. Комбинация полей $(a + b_3)$ отождествляется с Z -мезоном, ответственным за нейтральные слабые токи. Угол θ_W смешивания полей a , b_3 называется углом Вейнберга. Его значение определяется экспериментально. По последним данным, $\sin^2 \theta_W \approx 0,3$ [1].

Слабые и электромагнитные взаимодействия адронов описываются едиными калибровочными моделями, использующими группу $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ или ее обобщения. Очевидно, что здесь больше возможных комбинаций полей и может быть несколько углов смешивания.

Современные калибровочные модели сильных, слабых и электромагнитных взаимодействий можно разделить на три группы [4] в зависимости от способа смешивания сильных и слабых взаимодействий.

Цель такого смешивания — подавить нейтральные токи, меняющие странность. Первую группу составляют модели, в которых расщепляется нейтральная компонента мультиплетта спинорных полей. Например, вместо дублета кварков (ψ) вводится дублет $(\lambda \cos \theta_c + \lambda' \sin \theta_c)$, где λ — странный кварк, θ_c — угол Кабиббо. Это приводит к необходимости ввести дополнительный дублет с новым кварком ψ' (или C): $(-\lambda' \sin \theta_c + \lambda \cos \theta_c)$. Таким образом, в теории появляется новый кварк с новым квантовым числом — "шармом".

Другую группу моделей составляют "псевдокабиббовские" модели. В них дублеты (ψ) и (λ) считаются представлениями двух разных, коммутирующих между собой групп $SU(2)$. В каждой из групп $SU(2)$ промежуточный векторный бозон взаимодействует либо с током $\bar{\psi}\psi$, либо с $\bar{\lambda}\lambda$, но нет частиц, взаимодействующих с $\bar{\psi}\lambda$. Такую схему невозможно осуществить, если полагать ψ -кварк в обоих дублетах одним и тем же. Поэтому Джорджи и Глэшоу предложили считать один из дублетов левосторонним, а другой — правосторонним. Тогда полулептонные слабые взаимодействия с $\Delta S = 0$ будут иметь обычную $(V - A)$ -форму, а взаимодействия с $\Delta S = 1$ будут иметь $(V + A)$ -форму.

В третьей группе моделей сильные и слабые взаимодействия разделены в том смысле, что промежуточный бозон не взаимодействует непосредственно с кварками, но вначале превращается в какой-либо сильно взаимодействующий векторный мезон. При работе с моделями этого типа оказывается полезной гипотеза о векторной доминантности, которая успешно использовалась в первых калибровочных моделях сильных взаимодействий [20]. Структура таких моделей оставляет достаточно свободы для того, чтобы успешно описать эксперимент.

Несколько слов необходимо сказать о поисках той высокой симметрии, которая должна характеризовать гипотетическое универсальное взаимодействие, проявляющееся при невысоких энергиях как сильные, слабые, электромагнитные и гравитационные силы. Такие поиски вызваны в основном двумя причинами. Первая из них — необходимость объяснить происхождение углов смешивания и зафиксировать их теоретически. Вторая — желание иметь одну константу свя-

зи для всех видов взаимодействий и тем самым уменьшить число фундаментальных физических констант. Однако расширение симметрии вызывает катастрофический рост числа новых предсказываемых частиц, не наблюдающихся в эксперименте, и приводит к нестабильности известных стабильных частиц [1]. Чтобы избежать этих неприятностей, нужно придумать сложный механизм удержания лишних частиц и спонтанно нарушить высокую симметрию до наблюдаемых $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ или $SU(2) \times U(1)$.

Резюмируем сказанное. История попыток построения единой теории слабых и электромагнитных взаимодействий по образу и подобию электродинамики насчитывает уже более 40 лет [4], но лишь сейчас, по-видимому, найден приемлемый вариант такой теории. Особенностью всех калибровочных моделей слабых и электромагнитных взаимодействий является предсказание существования нейтральных токов. Нейтринные процессы, связанные с нейтральными токами, могут играть важную роль в энергетике звезд. Эти нейтральные токи были экспериментально открыты в 1973–1974 гг. и в настоящее время интенсивно изучаются [1].

До сих пор не открыт промежуточный векторный бозон, осуществляющий слабые взаимодействия в калибровочных моделях. Однако это нельзя считать аргументом против калибровочных моделей. По всем оценкам W -бозон должен быть очень тяжелым (≥ 50 ГэВ) и недоступным для прямого эксперимента. Тем не менее в ряде стран готовятся эксперименты по обнаружению W . Основание для оптимизма — наблюдение прямых лептонов (пар μ , ϵ), вылетающих из одной точки. До конференции в Тбилиси [1] происхождение их было неясно. Сейчас предполагается, что их источником может быть W -бозон.

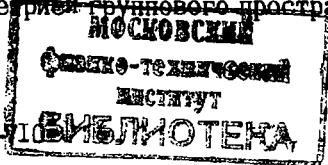
Многие перенормируемые калибровочные модели электромагнитных и слабых взаимодействий предсказывают существование тяжелых лептонов, не наблюдавшихся ранее. Но результаты экспериментов 1976 г. в *SLAC* и *DESY* показывают, что тяжелый лептон с массой $\sim 1,8$ ГэВ действительно существует [1]. Однако в отличие от нейтральных токов тяжелые лептоны не являются обязательными для единых калибровочных моделей. Простая модель Вейнберга—Салама не требует новых лептонов.

Очень интересную возможность для нейтринных экспериментов дают калибровочные модели с малой, не равной нулю массой нейтри-

но. Оказывается, что в этом случае возможны осцилляции нейтрино, а именно попеременные превращения электронных нейтрино в мюонные и наоборот. Эта идея впервые была высказана в 1957 г. Понтекорво [30] и может служить объяснением недостатка солнечных нейтрино, обнаруженного в опытах Девиса. Эксперимент по обнаружению осцилляций нейтрино планируется в Батавии.

432929
 В области электромагнитных и слабых взаимодействий адронов к достижениям калибровочных моделей следует отнести объяснение поведения ψ -частиц и предсказание их спектроскопии, которая подтвердилась экспериментально. В настоящее время теоретически и экспериментально изучаются сильные взаимодействия ψ -частиц и делаются попытки объяснить правило Цвейга. Интенсивно ведется экспериментальный поиск и изучение распадов шармированных частиц (D-мезонов и др.) [1]. Весьма интересно было бы проверить предсказание отклонений от бёркеновского скейлинга в глубоко-неупругих процессах, вытекающее из асимптотически свободной кварк-глюонной модели сильных взаимодействий. Но ошибки в соответствующих экспериментах еще слишком велики, чтобы можно было отличить константу (предсказание партонной модели) от слабо меняющейся степени логарифма [1 - 3].

Таким образом, с точки зрения теории калибровочных полей картина такова. Все элементарные частицы делятся на два класса: основные частицы (нуклоны, лептоны) и частицы-переносчики (мезоны). Мезоны осуществляют взаимодействие между основными полями. В кварковой модели основные частицы состоят из трех кварков, а мезоны — из двух. Кварки соединены между собой "клеем" (глюонами). Этот клей обладает особыми свойствами. Он может стягиваться в шнуры (струны), упругость которых при растяжении растет линейно с расстоянием. Поэтому кварки не могут вылетать, и наблюдаемы только связанные бесцветные состояния кварков. Квантовополевая картина имеет геометрический аналог в расслоенном пространстве-времени. Поля, описывающие основные частицы, соответствуют сечениям расслоенного пространства-времени. Мезонам соответствуют коэффициенты связности расслоенного пространства. Внутренняя симметрия элементарных частиц (изоспин, цвет) является симметрией группового пространства калибровочной группы (слоя).



Геометрическая картина соответствует передаче взаимодействия через среду. Поэтому калибровочные модели естественно привели к представлению о вакууме как о среде, т.е. системе с бесконечным числом степеней свободы. В таком вакууме могут рождаться пары частиц в таком количестве, что образуется конденсат, а эффекты поляризации столь сильны, что могут полностью экранировать внесенный извне заряд. Явление асимптотической свободы может рассматриваться как антиэкранировка, вызванная дисперсией вакуума. Разумеется, в теории калибровочных полей много Больших Вопросов, но красота самой теории вместе с интереснейшими экспериментальными открытиями последних лет позволяет надеяться, что с ними удастся справиться. В этом случае появился бы мост между физикой элементарных частиц, статистикой и физикой твердого тела [31]. Общая теория относительности Эйнштейна естественно включается в схему калибровочных полей, если перейти к ее реперной формулировке [11, 60]. Вопрос о перенормируемости ОТО будет решен, по-видимому, в ближайшее время.

Данный сборник по квантовой теории калибровочных полей содержит три обзора; они написаны на основе лекций, прочитанных ранее известными физиками-теоретиками С. Коулменом (Международная школа по физике "Эttore Майорана" 1973 г.), Дж. Бернштейном (Оксфордский университет, 1972) и Б. Ли (Университет штата Нью-Йорк, 1972). Время не обесценило их, так как они посвящены в основном двум проблемам, от решения которых зависела судьба теории калибровочных полей: перенормируемости теории и происхождению массы векторных бозонов. Спонтанное нарушение локальной калибровочной инвариантности и механизм Хиггса стали теперь неотъемлемой частью всех изложений квантовой теории калибровочных полей и всех модельных построений. Модели, рассмотренные в данных лекциях, более просты, чем многие современные. Но они составляют основу современных моделей и согласуются с экспериментом. Экспериментальные данные последних лет лучше соответствуют предсказаниям калибровочных моделей, чем представленные в тексте.

Перевод статей С. Коулмена, а также Е. Аберса и Б. Ли выполнен И.В. Тютиным. Статья Дж. Бернштейна переведена Н.Н. Некрасовым. Ссылки даны преимущественно на работы обзорного характера и монографии, в которых указана оригинальная литература.

Н.П. Коноплева

ЛИТЕРАТУРА

1. Труды XVIII Международной конференции по физике высоких энергий, Тбилиси, 1976; *Miller D.*, *Nature*, **264**, № 5585 (1976).
2. *The Trends in Elementary Particle Theory*, eds. H. Rollnik, K. Dietz (Lecture Notes in Physics, 37), Berlin-Heidelberg-New York, 1975.
3. Труды XVII Международной конференции по физике высоких энергий, Лондон, 1974.
4. *Weinberg S.*, *Rev. Mod. Phys.*, **46**, 255 (1974). (См. перевод: *Вейнберг С.*, УФН, **118**, 505 (1976)).
5. *Захаров В.И.*, *Иоффе Б.Л.*, *Ожунь Л.Б.*, УФН, **117**, 227 (1975).
6. *Боголюбов П.Н.*, *Красников Н.В.*, *Кузьмин В.А.*, *Четыркин К.Г.*, ЭЧАЯ, **7**, вып. 3, 816 (1976).
7. *Клайн Д.*, *Манн А.*, *Руббиа К.*, а) УФН, **120**, 97 (1976); б) УФН, **120**, 113 (1976).
8. *Шехтер В.М.*, УФН, **119**, 593 (1976).
9. *Фейнман Р.*, УФН, **119**, 689 (1976).
10. *Глэшоу Ш.*, УФН, **119**, 715 (1976).
11. *Конopleва Н.П.*, *Попов В.Н.*, Калибровочные поля, Атомиздат, М., 1972.
12. "Элементарные частицы", вып. III, Атомиздат, М., 1973.
13. *Максвелл Д.К.*, сб. "Речи и статьи", ГИТТЛ, М.-Л., 1940.
14. *Weyl H.*, *Gravitation und Electricizitat*, Sitzber. Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1918.
15. *Schrödinger E.*, *Zs. f. Phys.*, **12**, 13 (1922).
16. *London E.*, *Phys. Zs.*, **42**, 375 (1927).
17. *Yang C.N.*, *Mills R.L.*, *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954) (имеется перевод в сб. "Элементарные частицы и компенсирующие поля", под ред. Д.Д. Иваненко, изд-во "Мир", М., 1964).
18. *Конopleва Н.П.*, Геометрическое описание калибровочных полей, в Трудах международного семинара "Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия", ОИЯИ, Дубна, 1969.
19. *Sakurai J.J.*, *Ann. of Phys.*, **11**, 1 (1960) (имеется перевод в сб.: "Элементарные частицы и компенсирующие поля", изд-во "Мир", М., 1964).
20. Сб. "Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц", под ред. А.М. Балдина, изд-во "Наука", М., 1969.
21. *Gell-Mann M.*, *Phys. Lett.*, **8**, 214 (1964).

22. *Coleman S., Gross D.J.*, Phys. Rev. Lett., **31**, 851 (1973).
23. *Берестецкий В.Б.*, УФН, **120**, 439 (1976).
24. *Де Альфаро В., Фубини С., Фурлан Г., Росетти К.*, Токи в физике адронов, изд-во "Мир", М., 1976.
25. *Scherk J.*, Rev. Mod. Phys., **47**, 123 (1975).
26. *Scherk J.*, в сб.: "Нелокальные, нелинейные и перенормируемые теории поля", препринт ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
27. *Cornwall J.M., Levin D.N., Tiktopoulos G.*, Phys. Rev. Lett., **30**, 1268 (1973).
28. *Grisaru M.T., Schnitzer H.J., Tsao H.S.*, Phys. Rev. Lett., **30**, 811 (1973).
29. *Goddard P., Goldstoun J., Rebbi C., Thorn C.B.*, Nucl. Phys., **B56**, 109 (1973).
30. Сб. "Нелокальные, нелинейные и перенормируемые теории поля", препринт ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976.
31. *Попов В.Н.*, Континуальные интегралы в квантовой теории поля и статистической физике, Атомиздат, М., 1976.
32. *Nielsen H., Olesen P.*, Nucl. Phys., **B57**, 367 (1973).
33. *Тюпкин Ю.С., Фатеев В.А., Шварц А.С.*, ТМФ, **26**, 397 (1976), в сб. "Элементарные частицы", вып. 1, Атомиздат, М., 1975, стр. 66.
34. *Фаддеев Л.Д., Гахстаджиан Л.А.*, УМН, **29**, 249 (1974); ТМФ, **21**, 160 (1974).
35. *Rajaraman R.*, Phys. Rep., **21**, 228 (1975).
36. *Narari H.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 562 (1969).
37. *Rosner J.L.*, Phys. Rev. Lett., **22**, 689 (1969).
38. *'t Hooft G.*, Nucl. Phys., **B79**, 276 (1974).
39. *Поляков А.М.*, Письма в ЖЭТФ, **20** (1974).
40. *Cremmer E., Scherk J.*, Nucl. Phys., **B108**, 409 (1976).
41. *Славнов А.А.*, ТМФ, **10**, 153 (1972); **13**, 174 (1972).
42. *Taylor J.C.*, Nucl. Phys., **B33**, 435 (1971).
43. *Коноплева Н.П.*, в сб. "Гравитация и теория относительности", вып. 4-5, КГУ, Казань, 1968.
44. *Волков М.К., Первушин В.Н.*, УФН, **120**, 363 (1976).
45. *Ширков Д.В., Серебряков В.В., Мещеряков В.А.*, Дисперсионные теории при низких энергиях, изд-во "Наука", М., 1967. *Бартон Г.*, Дисперсионные методы в теории поля, Атомиздат, М., 1968.
46. *Коноплева Н.П.*, Геометрическое описание взаимодействий, канд. дисс., М., 1969.

47. *Фаддеев Л.Д., Попов В.Н.*, Phys. Lett., **В26**, 29 (1967); препринт ИТФ 67-36, Киев, 1967.
48. *DeWitt B.*, Phys. Rev., **162**, 1195, 1239 (1967).
49. *'t Hooft G.*, Nucl. Phys., **В35**, 173 (1971).
50. *Hasert F.J. et al.*, Phys. Lett., **В46**, 138 (1973); **В73**, 1 (1974).
51. *Varish B.C. et al.*, Phys. Rev. Lett., **34**, 538 (1975).
52. *Фрадкин Е.С., Тютин И.В.*, Revista Nuovo Cim., **4**, 1 (1974).
53. *Огиевецкий В.И., Мезинческу Л.*, УФН, **117**, 637 (1975).
54. *Славнов А.А.*, в сб.: "Нелокальные, нелинейные и перенормируемые теории поля", препринт ОИЯИ, Д2-9788, Дубна, 1976, стр. 165
55. *Киржниц Д.А., Линде А.Д.*, УФН, **115**, 534 (1975); препринт ФИАН СССР, № 101, М., 1974.
56. *Бардин Т., Купер Л.Н., Шриффер Д.Р.*, Теория сверхпроводимости, ИЛ, М., 1960.
57. *Боголюбов Н.Н.*, Квазисредние в задачах статистической механики, препринт ОИЯИ Д-781, 1961; К вопросу о гидродинамике сверхтекучей жидкости, препринт ОИЯИ, Р-1395, Дубна, 1963.
58. *Гинзбург В.Л., Ландау Л.Д.*, ЖЭТФ, **20**, 1064 (1950).
59. *Кнарр et al.*, Phys. Rev. Lett., **37**, 882 (1976).
60. *Бродский А.М., Иваненко Д.Д., Соколик Г.А.*, ЖЭТФ, **41**, 1307 (1961).

Тайная симметрия: введение в теорию спонтанного нарушения симметрии и калибровочных полей *

С. Коулмен

*Coleman S. ***, из книги "Laws of Hadronic Matter" (Proceedings of the 11th Course of the "Ettore Majorana" International School of Subnuclear Physics), ed. A. Zichichi, Academic Press, 1975.

§1. ВВЕДЕНИЕ

Вот некоторые давнишние проблемы теории элементарных частиц:

1. Как объяснить иерархическую структуру фундаментальных взаимодействий? Являются ли сильные, полусильные [т.е. нарушающие $SU(3)$ -симметрию], электромагнитные и слабые взаимодействия действительно независимыми или существует некий принцип, который устанавливает связь между ними?

2. Как построить перенормируемую теорию слабых взаимодействий — теорию, которая при низких энергиях была бы столь же хороша, как и теория Ферми, но давала бы конечные поправки высших порядков?

3. Как построить теорию электромагнитных взаимодействий, в которой электромагнитные разности масс внутри изотопических мультиплетов были бы конечны?

4. Как примирить бьёркеновский скейлинг в глубоко-неупругом электророждении с квантовой теорией поля? Результаты экспериментов *SLAC - MIT* говорят, по-видимому, о том, что сингулярности на световом конусе в произведении двух токов являются каноническими по своей структуре; обычная же теория возмущений говорит нам, что эта каноническая структура испорчена логарифмическими множителями, причем ситуация становится все хуже и хуже при переходе ко все более высоким порядкам в разложении по теории возмущений. Существуют

* Работа частично субсидировалась Национальным научным фондом: субсидия № GP 30819 X.

** Lyman Laboratory of Physics, Harvard University, Cambridge, Massachusetts, USA.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1977.

ли какие-нибудь теории сильных взаимодействий, в которых мы могли бы справиться с логарифмами, просуммировать их и показать, что они безвредны?

За последние несколько лет в решении всех этих проблем были достигнуты огромные успехи. В настоящее время существует обширное семейство моделей слабых и электромагнитных взаимодействий, которые решают вторую и третью проблемы, и обнаружено несколько меньшее семейство моделей сильных взаимодействий, которые решают четвертую проблему. Как мы увидим, структура этих моделей такова, что мы начинаем догадываться, как решать первую (очень глубокую) проблему; в неожиданных местах начинают появляться связи, и оптимист мог бы сказать, что мы уже на пути к первой по-настоящему единой теории фундаментальных взаимодействий. Все эти изумительные результаты основываются на понятиях спонтанного нарушения симметрии и калибровочных полей, которые и будут темой данных лекций.

Честность заставляет меня умерить рекламный тон последнего абзаца, указав на пятую давнишнюю проблему, которой эти теории еще не касались:

5. Как объяснить эксперименты?

Почему так смущает нас этот пробел, будет понятно, если более отчетливо представить себе вторую проблему — построение перенормируемой теории слабых взаимодействий. Подобные теории сейчас имеются в избытке; все они предсказывают, что вклады высших порядков в слабых взаимодействиях должны быть конечны, и все они предсказывают, что эти вклады должны быть малы. Чтобы определить, какая же из упомянутых теорий правильна, если такая среди них имеется, требуются точные измерения вкладов высших порядков в слабых взаимодействиях (желательно чисто лептонных, чтобы сильные взаимодействия не исказили наших предсказаний); но к ним трудно подобраться. Другими словами, дело обстоит так: теория Ферми, очевидно, совершенно неверна, поскольку она дает бесконечные поправки высших порядков, но с точки зрения эксперимента она почти идеальна, ибо мало таких экспериментов, которые не описывались бы низшим порядком теории Ферми. Примерно так же обстоит дело и с электромагнитными разностями масс внутри изотопических мультиплетов: чтобы сделать эти разности конечными, нам достаточно справиться с высокоэнергетическим поведением интегралов собственной массы, но чтобы действительно вычислить разности масс, нам нужно знать

соответствующие интегралы при всех энергиях, в том числе и в области низких энергий, где сильные взаимодействия доминируют (и не поддаются учету).

Эти лекции задуманы как введение, знакомящее с основными представлениями о спонтанном нарушении симметрии и калибровочных полях, а не как обзор всего сделанного к настоящему времени, и ряд важных тем я совсем не буду затрагивать. В частности, я не буду касаться важного вопроса о построении моделей, и чтобы, насколько это возможно, упростить примеры, я лишь слегка упомяну о теориях, содержащих фермионы. Этот пробел будет восполнен лекциями Ш. Глэшоу¹⁾ по единым моделям слабых и электромагнитных взаимодействий. Кроме того, хотя я и постараюсь, чтобы перенормируемость тех теорий, о которых мы будем говорить, выглядела правдоподобно, у меня не будет времени углубляться в проблему перенормировок, и поэтому я ничего не буду говорить ни о красивом приеме размерной регуляризации Вельтмана и Тофта, ни о неабелевом обобщении тождеств Уорда квантовой электродинамики — тождествах Славнова.

План лекций таков. В § 2 мы будем говорить о спонтанном нарушении симметрии, голдстоуновских бозонах, калибровочных полях и явлении Хиггса в простейшем случае — в классической теории поля. В § 3 мы покажем, как эти представления можно применить в квантовой теории поля, чтобы при этом классические результаты предыдущего параграфа стали первым членом в систематическом квантовом разложении. Здесь впервые появится важное понятие эффективного потенциала, и мы подробно остановимся на его свойствах. Но мы отложим одну важную часть программы квантования, а именно квантование калибровочных полей. Эта брешь в содержании § 3 будет заполнена в следующих двух параграфах. Параграф 4 будет введением в функциональное интегрирование как метод квантования, а § 5 — применением этого метода к калибровочным полям в соответствии с идеями Фаддеева и Попова. Я постарался сделать § 4 по возможности самостоятельным, так что он поможет познакомиться с функциональным интегрированием даже тому, кого не интересуют другие темы этих лекций. В § 6 мы займемся новым вопросом и ис-

¹⁾ Имеются в виду лекции Ш. Глэшоу, прочитанные в той же школе Этторе Майорана 1973 г. В данном сборнике этот пробел восполняется двумя следующими статьями. — *Прим. ред.*

следуем асимптотические свойства теорий калибровочных полей. Этот параграф включает в себя краткий обзор группы перенормировок.

Я многое узнал из личных бесед с Л. Фаддеевым, Г. Джорджи, Ш. Глэшоу, Дж. Голдстоуном, Д. Гроссом, Б. Ли, Д. Политцером, Д. Тофтом, Т. Вельтманом, Э. Вейнбергом, С. Вейнбергом и Ф. Вильчеком. Многие из тех, кто внес крупный вклад в предмет нашего обсуждения (в том числе и многие из перечисленных), неадекватно представлены в литературе, помещенной в конце данных лекций, из-за моего эксцентричного выбора тем и подхода к ним; им я приношу извинения, так же, как и тем, кого я пропустил по неведению¹⁾

§ 2. ТАЙНЫЕ СИММЕТРИИ В КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ

1. ИДЕЯ СПОНТАННОГО НАРУШЕНИЯ СИММЕТРИИ

Вообще говоря, нет причин, по которым группа инвариантности гамильтониана квантовомеханической системы должна бы быть и группой инвариантности основного состояния этой системы. Так, например, ядерные силы инвариантны относительно вращений, но отсюда не следует, что основное состояние ядра обязательно вращательно-инвариантно (т.е. с нулевым спином). В случае ядер это тривиально, но это далеко не тривиально, если мы рассматриваем систему, которая, в отличие от ядер, обладает бесконечной пространственной протяженностью. Обычный пример подобной системы — гейзенберговский ферромагнетик, т.е. бесконечная кристаллическая решетка из магнитных диполей со спином $\frac{1}{2}$ и с таким спин-спиновым взаимодействием между ближайшими соседями, что соседние диполи стремятся выстроиться в одном направлении. Хотя рассматриваемый гамильтониан вращательно-инвариантен, основное состояние системы не инвариантно. Это состояние, в котором все диполи выстроены в некотором произвольном направлении, и оно бесконечно вырождено, если ферромагнетик бесконечен. Маленькому человечку, живущему внутри такого ферромагнетика, было бы крайне трудно обнаружить инвариантность законов природы относительно вращений: результаты всех его опытов искажались бы фоновым магнитным полем. Ес-

¹⁾ Прекрасные обзоры [1 — 5] помогут восполнить пробелы. В обзоре [5] подробно излагается история вопроса.

ли бы его экспериментальная аппаратура лишь слабо взаимодействовала с фоновым полем, то он мог бы обнаружить вращательную инвариантность как приближенную симметрию. Если бы это взаимодействие было сильным, то он мог бы совсем не заметить инвариантности; во всяком случае, у него не было бы оснований полагать, что в действительности это точная симметрия. К тому же маленький человек не мог бы и надеяться непосредственно обнаружить, что то основное состояние, в котором ему случилось оказаться, на самом деле часть некоторого бесконечно вырожденного мультиплетта. Поскольку он конечной величины (это и означает слово "маленький" в данной ситуации), человек может одновременно изменить направление только конечного числа диполей. Но чтобы перейти от одного основного состояния рассматриваемого ферромагнетика к другому, ему нужно изменить направление бесконечного числа диполей, а это для него непосильная задача.

По крайней мере на первый взгляд, в подобной картине нет ничего такого, что нельзя было бы обобщить на случай релятивистской квантовой механики. Гамильтониан ферромагнетика мы можем заменить гамильтонианом квантовой теории поля, вращательную инвариантность — некоторой внутренней симметрией, основное состояние ферромагнетика — вакуумным состоянием соответствующей теории поля, а маленького человека — самими собой. Иначе говоря, мы допускаем, что законы природы могут обладать и такими симметриями, которые для нас никак не проявляются, поскольку наше вакуумное состояние не инвариантно относительно них¹⁾. Подобная ситуация обычно называется "спонтанным нарушением симметрии". Данный термин не совсем правилен, так как рассматриваемая симметрия в действительности не нарушена, а всего лишь скрыта; но все же придется им пользоваться.

Мы начнем с исследования спонтанного нарушения симметрии в случае классической теории поля. Для простоты ограничимся теориями, содержащими набор n действительных скалярных полей, которые мы соберем в некоторый действительный n -вектор ϕ , и введем лагранжеву плотность²⁾

¹⁾ Эта идея восходит к классическим работам Голдстоуна [6], Намбу и Иона-Ласинио [7].

²⁾ Сигнатура метрики такова: (+ - - -); $\partial_\mu = \partial / \partial x^\mu$; всегда подразумевается суммирование по повторяющимся индексам.

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) \cdot (\partial^\mu \varphi) - U(\varphi), \quad (2.1)$$

где U — некоторая функция полей φ , но не их производных. Мы будем рассматривать эти теории чисто классически, пользуясь при этом, однако, квантовомеханической терминологией. Так, мы будем называть "вакуумом" состояние с наименьшей энергией и именовать "массами частиц" те величины, которые характеризуют спектры малых осцилляций в окрестности этого вакуума. Для любой из таких теорий соответствующая плотность энергии есть

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + U(\varphi). \quad (2.2)$$

Таким образом, состояние с наименьшей энергией — это состояние, для которого величина φ есть некоторая константа, которую мы обозначим через $\langle \varphi \rangle$. Величина $\langle \varphi \rangle$ определяется особенностями динамики рассматриваемой теории, т.е. положением минимума (или минимумов) потенциала U . По-прежнему, пользуясь квантовой терминологией, мы будем называть $\langle \varphi \rangle$ "вакуумным средним величины φ ".

В рамках данного класса теорий легко найти примеры либо явных, либо спонтанно нарушенных симметрий. Простейший пример — теория с единственным полем, потенциал которого имеет вид

$$U = \frac{\lambda}{4!} \varphi^4 + \frac{\mu^2}{2} \varphi^2, \quad (2.3)$$

где λ — положительное число, а величина μ^2 (несмотря на ее обозначение) может быть как положительной, так и отрицательной. Такая теория допускает преобразование симметрии

$$\varphi \rightarrow -\varphi. \quad (2.4)$$

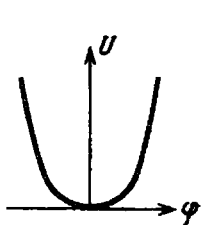
Если величина μ^2 положительна, то потенциал выглядит так, как показано на фиг. 1. Вакууму соответствует значение $\langle \varphi \rangle = 0$, симметрия явная, и μ^2 — масса скалярного мезона. Если же величина μ^2 отрицательна, то ситуация совсем другая: потенциал ведет себя так, как показано на фиг. 2. В этом случае удобно ввести величину

$$a^2 = -6\mu^2/\lambda \quad (2.5)$$

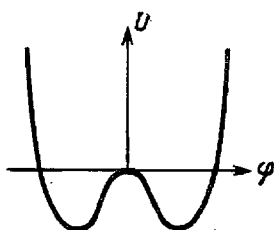
и переписать потенциал в виде

$$U = \frac{\lambda}{4!} (\varphi^2 - a^2)^2 \quad (2.6)$$

плюс некоторая (несущественная) константа. Из этой формулы, а также из фиг. 2 видно, что потенциал теперь имеет два минимума: при $\varphi = \pm a$. Вследствие симметрии выражения (2.4) с точки зрения



Ф и г. 1



Ф и г. 2

физики несущественно, какой из них мы выберем в качестве вакуума. Но какой бы минимум мы ни выбрали, симметрия спонтанно нарушена. Выберем $\langle \varphi \rangle = a$. Чтобы исследовать физику вблизи асимметричного вакуума, введем новое поле

$$\varphi' = \varphi - a. \quad (2.7)$$

Перейдя к этому новому ("сдвинутому") полю, получим

$$\begin{aligned} U &= \frac{\lambda}{4!} (\varphi'^2 + 2a\varphi')^2 = \\ &= \frac{\lambda}{4!} \varphi'^4 + \frac{\lambda a}{6} \varphi'^3 + \frac{\lambda a^2}{6} \varphi'^2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Мы видим, что истинная масса мезона равна $\lambda a^2/3$. Заметим, что в результате проведенного сдвига появились кубическое самодействие мезона, которое затруднило бы непосредственное обнаружение скрытой симметрии (2.4).

2. ГОЛДСТОУНОВСКИЕ БОЗОНЫ В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ

С неким новым явлением мы столкнемся, если рассмотрим спонтанное нарушение непрерывных симметрий. Возьмем теорию с двумя скалярными полями A и B , в которой

$$U = \frac{\lambda}{4!} [A^2 + B^2 - a^2]^2. \quad (2.9)$$

Такая теория допускает непрерывную группу симметрии, изоморфную двумерной группе вращений $SO(2)$:

$$\begin{aligned} A &\rightarrow A \cos \omega + B \sin \omega, \\ B &\rightarrow -A \sin \omega + B \cos \omega. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Минимумы потенциала лежат на окружности

$$A^2 + B^2 = a^2. \quad (2.11)$$

Как и раньше, несущественно, какой из этих минимумов мы выберем в качестве вакуума. Но, какой бы минимум мы ни выбрали, внутренняя $SO(2)$ -симметрия спонтанно нарушается. Выберем

$$\langle A \rangle = a, \quad \langle B \rangle = 0. \quad (2.12)$$

Как и прежде, сдвигаем поля

$$\varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle \quad (2.13)$$

и находим

$$U = \frac{\lambda}{4!} (A'^2 + B'^2 + 2aA')^2. \quad (2.14)$$

Раскрыв это выражение, мы видим, что A -мезон имеет такую же массу, как и в предыдущем случае, а B -мезон — безмассовый. Такой безмассовый и бесспиновый мезон называется голдстоуновским бозоном [8]. Для того класса теорий, который мы рассматриваем, его появление вообще не зависит от конкретного вида потенциала U , а является следствием только спонтанного нарушения непрерывной группы $SO(2)$ -симметрии (2.10).

Чтобы показать это, введем "угловые переменные":

$$\begin{aligned} A &= \rho \cos \theta, \\ B &= \rho \sin \theta. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Тогда преобразования (2.10) принимают вид

$$\begin{aligned} \rho &\rightarrow \rho, \\ \theta &\rightarrow \theta + \omega, \end{aligned} \quad (2.16)$$

а плотность лагранжиана переходит в

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho)^2 + \frac{1}{2} \rho^2 (\partial_\mu \theta)^2 - U(\rho) \quad (2.17)$$

После перехода к угловым переменным $SO(2)$ -инвариантность сводится просто к утверждению, что U не зависит от θ . Конечно, преобразование к угловым переменным плохо определено в начале координат, что отражается в сингулярной форме дифференциальной части лагранжевой плотности (2.17). Но это нас не интересует, поскольку мы собираемся строить ряды теории возмущений не близ начала координат, а в окрестности некоего вакуума, который предполагается асимметричным. Без потери общности можно принять за вакуум точку $\langle \rho \rangle = a$, $\langle \theta \rangle = 0$. Вводя, как и ранее, сдвинутые поля

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho - a, \\ \theta' &= \theta, \end{aligned} \quad (2.18)$$

мы находим

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \rho')^2 + \frac{1}{2} (\rho' + a)^2 (\partial_\mu \theta')^2 - U(\rho' + a). \quad (2.19)$$

Из данного выражения ясно, что θ -мезон безмассовый, так как лагранжиан содержит только производные от θ -поля.

Это можно показать и чисто геометрически, без каких-либо формул. Если вакуум не инвариантен относительно $SO(2)$ -вращений, то существует кривая, проходящая через него, вдоль которой потенциал постоянен. Точки кривой получаются из выбранного вакуума путем $SO(2)$ -вращений. В наших угловых переменных это кривая постоянно ρ . При разложении потенциала в окрестности вакуума не может возникнуть никаких членов, содержащих ту переменную, которая служит мерой смещения вдоль указанной кривой, т.е. переменную θ . Следовательно, мы всегда получаем безмассовый мезон.

3. ГОЛДСТОУНОВСКИЕ БОЗОНЫ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Это доказательство нетрудно обобщить на случай спонтанного нарушения произвольной непрерывной группы внутренней симметрии. Чтобы ввести обозначения, которые понадобятся нам в дальнейшем, я проведу такое обобщение, привлекая несколько больше математики, чем нужно на самом деле. Предположим, что имеется набор n действительных полей φ , такой, что соответствующий потенциал инвариантен относительно группы преобразований вида

$$\varphi \rightarrow e^{\mathbf{T}_a \omega^a} \varphi, \quad (2.20)$$

где \mathbf{T}_a ($a = 1, \dots, N$) – набор N действительных антисимметричных матриц, являющихся генераторами группы, а ω^a – произвольные действительные параметры, причем по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. Соответствующие инфинитезимальные преобразования имеют вид

$$\delta\varphi = \mathbf{T}_a \delta\omega^a \varphi. \quad (2.21)$$

Поскольку матрицы \mathbf{T}_a – генераторы группы, они удовлетворяют соотношениям

$$[\mathbf{T}_a, \mathbf{T}_b] = c_{abc} \mathbf{T}_c, \quad (2.22)$$

где c – структурные константы рассматриваемой группы. Если мы выберем матрицы \mathbf{T} ортонормированными (с нормированным следом), то c^{abc} будут полностью антисимметричными. Инвариантность лагранжиановой плотности (2.1) означает, что

$$U(\varphi) = U(e^{\mathbf{T}_a \omega^a} \varphi). \quad (2.23)$$

Теперь рассмотрим ту подгруппу группы (2.20), которая оставляет инвариантным $\langle \varphi \rangle$, точку минимума потенциала U . В зависимости от структуры потенциала U это может быть любая подгруппа, от тривиальной тождественной подгруппы (все симметрии спонтанно нарушены) до полной группы (ни одна симметрия не нарушена спонтанно). Тем не менее в любом случае мы можем выбрать генераторы нашей группы так, чтобы указанная подгруппа порождалась первыми M ге-

нераторами, где $N \geq M \geq 0$. Соответствующие уравнения таковы:

$$T_a \langle \varphi \rangle = 0, \quad a \leq M. \quad (2.24)$$

Тогда по определению величина $\langle \varphi \rangle$ не инвариантна относительно действия остальных $(N - M)$ генераторов; следовательно, мы получаем некоторую $(N - M)$ -мерную поверхность постоянного U , проходящую через точку $\langle \varphi \rangle$. Таким образом, по тем же причинам, что и прежде, данная теория должна содержать $(N - M)$ безмассовых бесспиновых мезонов, по одному для каждой из спонтанно нарушенных инфинитезимальных симметрий. (Заметьте, что я говорю "бесспиновый", а не "скалярный" или "псевдоскалярный". Эти мезоны могут быть либо скалярными, либо псевдоскалярными в зависимости от свойств спонтанно нарушенных генераторов по отношению к преобразованию четности; они могут даже совсем не иметь определенной четности, если четность сама спонтанно нарушена или если исходный лагранжиан не сохраняет четность.)

Такие мезоны называются голдстоуновскими бозонами, и то, что мы доказали в предыдущем абзаце, есть частный случай теоремы Голдстоуна [8]. Эту теорему можно доказать и в гораздо более общей формулировке. Пусть дана некоторая теория поля, подчиняющаяся обычным аксиомам (лоренц-инвариантность, локальность, гильбертово пространство с положительно определенным скалярным произведением и т.д.). Если существует локальный сохраняющийся ток (это аксиоматизированный вариант утверждения о том, что соответствующий лагранжиан инвариантен относительно некоторой группы непрерывных преобразований), такой, что пространственный интеграл от его временной компоненты не обращает в нуль вакуумное состояние, то в данной теории обязательно должен быть безмассовый бесспиновый мезон с теми же самыми свойствами относительно преобразований внутренней симметрии и четности, что и у временной компоненты тока [9].

На первый взгляд кажется, что теорема Голдстоуна наносит смертельный удар представлению о том, что спонтанное нарушение (по крайней мере непрерывных симметрий) присутствует в реальном мире, так как нет никаких экспериментальных доказательств существования безмассовых бесспиновых мезонов. Но тут есть одна лазейка: существуют вполне уважаемые теории поля, которые не

подчиняются обычным аксиомам. Это теории калибровочных полей, из которых наиболее известна квантовая электродинамика. Не существует такой калибровки, в которой квантовая электродинамика удовлетворяла бы сразу всем перечисленным выше аксиомам: если мы квантуем в ковариантной калибровке, то эта теория содержит состояния с отрицательной нормой; если мы квантуем в калибровке, в которой теория содержит только состояния с положительной нормой, такой, как радиационная калибровка, то теория не ковариантна. Исследуем теперь эту лазейку более подробно.

4. ЯВЛЕНИЕ ХИГГСА В АБЕЛЕВОЙ МОДЕЛИ

Вначале я напомним процедуру введения минимального взаимодействия в обычной квантовой электродинамике и ее связь с калибровочной инвариантностью. Пусть φ — набор полей (не обязательно действительных и бесспиновых), динамика которых определяется некоторой лагранжевой плотностью $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$. Пусть величина \mathcal{L} инвариантна относительно некоторой однопараметрической группы преобразований

$$\varphi \rightarrow e^{i\mathbf{Q}\omega} \varphi, \quad (2.25)$$

где \mathbf{Q} — эрмитова матрица, называемая зарядовой матрицей. [В качестве базиса обычно выбирают набор комплексных полей с определенным зарядом, так что матрица \mathbf{Q} диагональна. Но нам удобнее взять набор действительных полей, так чтобы матрица $i\mathbf{Q}$ была действительной антисимметричной, подобно матрицам \mathbf{T} в формуле (2.20).] Соответствующее инфинитезимальное преобразование имеет вид

$$\delta \varphi = i\mathbf{Q}\varphi \delta \omega. \quad (2.26)$$

Теперь рассмотрим преобразования того же вида, что и (2.26), но предположим, что $\delta \omega$ в них зависит от пространственно-временной точки (калибровочные преобразования). Наша теория не инвариантна относительно таких преобразований, поскольку

$$\delta(\partial_\mu \varphi) = i\mathbf{Q}(\partial_\mu \varphi) \delta \omega + i\mathbf{Q}_\mu \partial_\mu (\delta \omega) \quad (2.27)$$

и второй член в этом выражении нарушает инвариантность. Но мы можем обеспечить такую инвариантность, если расширим рассматри-

ваемую теорию и введем новое поле A_μ — калибровочное поле, которое преобразуется по закону

$$\delta A_\mu = -\frac{1}{e} \partial_\mu (\delta \omega), \quad (2.28)$$

где e — свободный параметр, называемый электрическим зарядом. Если мы теперь положим

$$D_\mu \varphi = \partial_\mu \varphi + ie \mathbf{Q} A_\mu \varphi, \quad (2.29)$$

то получим

$$\delta D_\mu \varphi = i \mathbf{Q} (D_\mu \varphi) \delta \omega, \quad (2.30)$$

и, следовательно, лагранжева плотность

$$\mathcal{L}(\varphi, D_\mu \varphi) \quad (2.31)$$

будет калибровочно-инвариантна. Величина $D_\mu \varphi$ называется калибровочно-ковариантной производной или иногда просто ковариантной производной. Разумеется, величина (2.31) сама по себе не может служить полной лагранжевой плотностью в какой-либо интересной с точки зрения физики теории. В выражении (2.31) нет членов, пропорциональных производным A_μ , так что, если мы варьируем его по отношению к A_μ , мы получаем не настоящие уравнения движения, а лишь уравнения связи. Чтобы сделать рассматриваемое калибровочное поле настоящей динамической переменной, мы должны добавить некоторый член, содержащий производные; простейший калибровочно-инвариантный член — это член, пропорциональный $(F_{\mu\nu})^2$, где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.32)$$

Обычно A_μ нормируется так, что в окончательном виде лагранжева плотность есть

$$-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu})^2 + \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi). \quad (2.33)$$

Это просто обычная лагранжева плотность электродинамики с минимальными взаимодействием, и она допускает обычную физическую интерпретацию (заряженные частицы, безмассовые фотоны и т.д.), если динамика φ -полей такова, что симметрия (2.25) не претерпева-

ет спонтанного нарушения. Но что происходит, когда симметрия спонтанно нарушена, как в случае симметрии (2.10)?

На этот вопрос легче всего ответить, если перейти к угловым переменным, определяемым равенствами (2.15). Мы сможем избежать утомительных алгебраических выкладок, если перепишем соотношение (2.29) в виде

$$D_{\mu} \varphi = \partial_{\mu} \varphi + e A_{\mu} \frac{\delta \varphi}{\delta \omega}. \quad (2.34)$$

В такой форме его можно непосредственно применить к угловым переменным. Из формул (2.16) следует, что

$$\begin{aligned} D_{\mu} \rho' &= \partial_{\mu} \rho', \\ D_{\mu} \theta' &= \partial_{\mu} \theta' + e A_{\mu}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Подставив это в (2.19), получим

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu})^2 + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \rho')^2 + \\ &+ \frac{1}{2} (\rho' - a)^2 (\partial_{\mu} \theta' + e A_{\mu})^2 - U(\rho' - a). \end{aligned} \quad (2.36)$$

Трудно сразу увидеть, что предсказывает это выражение для малых осцилляций в окрестности вакуума, поскольку в формуле (2.36) имеются перекрестные квадратичные члены, т.е. члены, пропорциональные $A_{\mu} \partial^{\mu} \theta'$. Но их можно устранить, если ввести новую переменную

$$C_{\mu} = A_{\mu} + e^{-1} \partial_{\mu} \theta'. \quad (2.37)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= -\frac{1}{4} (\partial_{\mu} C_{\nu} - \partial_{\nu} C_{\mu})^2 + \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \rho')^2 + \\ &+ \frac{e^2}{2} (\rho' - a)^2 (C_{\mu})^2 - U(\rho' - a). \end{aligned} \quad (2.38)$$

Так как квадратичная часть лагранжиана имеет теперь диагональный вид, мы можем сразу сказать, каковы собственные моды малых колебаний в окрестности основного состояния, или — на том кванто-

вом языке, которым мы пользовались ранее, — каков спектр частиц. Мы видим, что имеется массивный скалярный мезон, соответствующий ρ' -полю, масса которого зависит от формы потенциала U . Имеется также массивный векторный мезон, соответствующий C -полю, масса которого дается соотношением

$$m_C^2 = e^2 a^2. \quad (2.39)$$

Но голдстоуновский бозон — θ -поле — полностью исчез! Это будет выглядеть не так уж невероятно, если сосчитать степени свободы. У массивного векторного мезона три степени свободы — три спиновых состояния частицы со спином 1, а у безмассового векторного мезона только две — два значения спиральности фотона. Здесь произошло следующее: две степени свободы безмассового калибровочного поля и одна степень свободы голдстоуновского бозона объединились и образовали три степени свободы C -поля. Векторный мезон съел голдстоуновский бозон и приобрел вес.

Это волшебное превращение было открыто Питером Хиггсом и называется явлением Хиггса (на самом деле это не справедливо, так как данное явление обнаружили независимо от Хиггса и ряд других исследователей [8 — 14], но мы сохраним такое название просто потому, что было бы неудобно каждый раз говорить: "явление Браута — Энглерта — Гуральника — Хагена — Хиггса — Киббла"). Мы сможем глубже проникнуть в суть явления Хиггса, если вспомним об основе принципа минимального взаимодействия — калибровочной инвариантности.

Калибровочная инвариантность говорит нам, что наша теория инвариантна относительно преобразований вида

$$\theta \rightarrow \theta + \omega, \quad (2.40)$$

где ω — некая произвольная функция точки в пространстве и времени. В частности, это значит, что мы можем выбрать ω равным "минус θ ", т.е. подобрать нашу калибровку так, чтобы θ -поле тождественно равнялось нулю. Итак, голдстоуновский бозон исчезает в калибровочно-инвариантной теории главным образом по той причине, что его там никогда и не было: та степень свободы, которая соответствует голдстоуновскому бозону, — это лишь некий калибровочный фантом, т.е. объект, который, подобно продольному фотону, можно устранить выбором калибровки.

Теперь ясно, как обобщить явление Хиггса на случай произвольной группы внутренней симметрии, подобной (2.20). Нам нужно просто добавить дополнительные степени свободы (калибровочные поля), чтобы превратить данную глобальную группу внутренней симметрии в калибровочную группу. Если мы сможем это сделать, то всегда сможем подходящим выбором калибровки устранить те степени свободы, которые соответствуют голдстоуновским бозонам, и убить голдстоуновские бозоны до того, как они родятся. Но чтобы осуществить задуманное, нужно сначала построить теорию калибровочных полей для произвольных групп внутренней симметрии.

5. ПОЛЯ ЯНГА – МИЛЛСА И ЯВЛЕНИЕ ХИГГСА В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

Как сделать некую произвольную группу внутренней симметрии калибровочной группой? Будем рассуждать по возможности так же, как мы делали это в случае электромагнетизма. Начнем с какой-либо теории, которая инвариантна относительно преобразований вида (2.21)

$$\delta \phi = T_a \delta \omega^a \phi.$$

Рассмотрим преобразования той же структуры, но в случае, когда $\delta \omega^a$ зависит от пространственно-временных координат. Наша теория не инвариантна относительно таких преобразований, поскольку

$$\delta (\partial_\mu \phi) = T_a \delta \omega^a \partial_\mu \phi + T_a (\partial_\mu \delta \omega^a) \phi \quad (2.41)$$

и второй член этого выражения нарушает инвариантность. Постараемся ее восстановить с помощью набора N калибровочных полей A_μ^a , по одному для каждого генератора группы, и введем ковариантные производные

$$D_\mu \phi = \partial_\mu \phi + g T_a A_\mu^a \phi, \quad (2.42)$$

где g , подобно e , – свободный параметр. Отложим временно вопрос о том, можно ли выбрать разные параметры g для различных калибровочных полей. Мы хотим определить трансформационные свойства полей так, чтобы выполнялось равенство

$$\delta (D_\mu \phi) = T_a \delta \omega^a D_\mu \phi. \quad (2.43)$$

Как нетрудно видеть, это означает, что

$$\delta A_{\mu}^{\alpha} = c^{abc} \delta \omega^b A_{\mu}^c - \frac{1}{g} \partial_{\mu} \delta \omega^{\alpha}, \quad (2.44)$$

где c — структурные константы рассматриваемой группы, определенные формулой (2.22). Оба члена данного выражения легко истолковать. Второй член — это тривиальное обобщение электромагнитного калибровочного преобразования (2.28). Первый член необходим для того, чтобы обеспечить инвариантность взаимодействий с калибровочным полем относительно преобразований, не зависящих от точки пространства-времени. Его наличие говорит о том, что при таких преобразованиях калибровочные поля ведут себя подобно генераторам данной группы. (Например, если калибровочная группа соответствует изоспину, то калибровочные поля должны образовывать изовектор.)

Из соотношения (2.43) следует, что лагранжева плотность

$$\mathcal{L}(\varphi, D_{\mu} \varphi) \quad (2.45)$$

калибровочно-инвариантна.

Несколько труднее увидеть, что же является обобщением лагранжевой плотности свободного электромагнитного поля $(F_{\mu\nu})^2$. Хитрость состоит в том, чтобы заметить, что для электромагнетизма

$$(D_{\mu} D_{\nu} - D_{\nu} D_{\mu}) \varphi = i \mathbf{Q} F_{\mu\nu} \varphi. \quad (2.46)$$

Из этого равенства калибровочная инвариантность $F_{\mu\nu}$ следует непосредственно. В нашем случае

$$(D_{\mu} D_{\nu} - D_{\nu} D_{\mu}) \varphi = \mathbf{T}_a F_{\mu\nu}^a \varphi, \quad (2.47)$$

где

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_{\mu} A_{\nu}^a - \partial_{\nu} A_{\mu}^a + g c^{abc} A_{\mu}^b A_{\nu}^c. \quad (2.48)$$

Из равенства (2.47) прямо следует, что $F_{\mu\nu}^a$ не инвариант, а ковариант относительно преобразований калибровочной группы:

$$\delta F_{\mu\nu}^a = c^{abc} \delta \omega^b F_{\mu\nu}^c. \quad (2.49)$$

Тем не менее квадратичная форма $(F_{\mu\nu}^a)^2$ — калибровочный инвариант, и потому обобщением электромагнитной лагранжевой плотности (2.33) служит выражение

$$-\frac{1}{4} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \mathcal{L}(\varphi, D_\mu \varphi). \quad (2.50)$$

Впервые лагранжева плотность подобного типа (для частного случая группы изоспина) была построена Янгом и Миллсом [15 — 17]; по этой причине неабелевы калибровочные поля часто называют полями Янга — Миллса.

Заметим, что для неабелевых калибровочных полей, в отличие от электромагнетизма, из-за нелинейного вида $F_{\mu\nu}^a$ даже в отсутствие φ -полей имеется нетривиальное взаимодействие. Это можно объяснить с физической точки зрения, взяв для простоты конкретный пример. Предположим, что калибровочная группа — изоспиновая. Подобно тому как фотон взаимодействует со всяким полем, несущим ненулевой заряд, калибровочный I_2 -мезон, например, должен взаимодействовать со всяким полем, которое несет ненулевое I_2 . Но среди таких полей есть и два других члена изотриплета калибровочных полей. (По той же самой причине нелинейность присуща и гравитации: гравитационное поле взаимодействует со всеми полями, которые переносят плотность энергии, включая и само гравитационное поле.)

Вернемся к отложенному нами вопросу: могут ли различаться константы связи для разных калибровочных полей? Если калибровочная группа простая [подобно $SU(2)$ или $SU(3)$], то генераторы группы и, следовательно, калибровочные поля преобразуются под действием этой группы по неприводимому представлению. Следовательно, все они должны иметь одну и ту же константу связи. Но если калибровочная группа есть прямое произведение простых групп [подобно $SU(2) \otimes SU(2)$], то генераторы разных сомножителей никогда не смешиваются друг с другом под действием данной группы, и константы связи соответствующих калибровочных полей могут быть разными. Таким образом, существует столько независимых констант связи, сколько простых сомножителей в рассматриваемой калибровочной группе, и равенство (2.44), например, следует записывать так:

$$\delta A_\mu^a = c^{abc} \delta \omega^b A_\mu^c - \frac{1}{g_a} \partial_\mu \delta \omega^a$$

(по a нет суммирования), где g_a может принимать разные значения для калибровочных полей, соответствующих разным группам-сомножителям.

Применим теперь изложенную классическую теорию неабелевых калибровочных полей к спонтанному нарушению симметрии. Поскольку глобальная группа внутренней симметрии была превращена в калибровочную группу, мы всегда можем выбрать нашу калибровку так, чтобы те степени свободы, которые могли бы стать голдстоуновскими бозонами, исчезли. На основании нашего опыта обращения с абелевой моделью мы, естественно, ожидаем, что калибровочные поля, связанные со спонтанно нарушенными симметриями, приобретут массы. Легко видеть, что единственная, имеющая к этому отношение часть лагранжевой плотности (2.1) — член с производными

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi) \cdot (\partial^\mu \varphi) + \dots \quad (2.51)$$

В присутствии калибровочных полей он принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi + g_a A_\mu^a T_a \varphi) \cdot (\partial^\mu \varphi + \\ + g_b A^{\mu b} T_b \varphi) + \dots \end{aligned} \quad (2.52)$$

Когда мы сдвигаем поля, появляется массовый член:

$$\mathcal{L} = (g_a A_\mu^a T_a \langle \varphi \rangle) \cdot (g_b A^{\mu b} T_b \langle \varphi \rangle) + \dots, \quad (2.53)$$

Заметим, что калибровочные поля, соответствующие симметриям, не являющимся спонтанно нарушенными, или, иначе говоря, те поля, для которых

$$T_a \langle \varphi \rangle = 0, \quad (2.54)$$

остаются безмассовыми. Таким образом, если мы хотим, чтобы в теории подобного типа спектр частиц соответствовал действительности, должна быть спонтанно нарушена вся калибровочная группа, кроме некоторой однопараметрической подгруппы. Инварианты этой подгруппы мы отождествим с электрическим зарядом, а соответствующее калибровочное поле — с единственным наблюдаемым безмассовым векторным мезоном, фотоном.

6. ВЫВОДЫ И ЗАМЕЧАНИЯ

1. Мы обнаружили обширное семейство теорий поля, в которых проявляет себя спонтанное нарушение внутренних симметрий. Если спонтанно нарушенная симметрия дискретная, то не возникает никаких проблем. Если же исходная симметрия непрерывная, то нарушение симметрии сопровождается появлением голдстоуновских бозонов. Это можно исправить, если ввести в систему взаимодействие с калибровочными полями и превратить группу внутренней симметрии в калибровочную группу. Тогда голдстоуновские бозоны исчезают, а калибровочные мезоны приобретают массы. Сейчас вызывает улыбку воспоминание о том, что во времена их создания обе теории (теория неабелевых калибровочных полей и теория спонтанного нарушения симметрии) считались забавными в теоретическом отношении, но несостоятельными в физическом, потому что обе они предсказывали безмассовые частицы – калибровочные мезоны и голдстоуновские бозоны. И лишь гораздо позже было обнаружено, что одна из этих болезней есть лекарство от другой.

2. Все, что было сказано нами, относится к классической теории поля. Теперь одна из главных наших задач – выяснить, в какой мере аппарат данного параграфа можно распространить на квантовую область. Мы увидим, что, по крайней мере при малых константах связи, он почти не изменяется и в частности, все выражения, которые мы вывели, можно заново интерпретировать как первые члены систематического квантового разложения.

3. Мы совсем не касались теорий с фермионами. Если мы свяжем фермионы с системой скалярных мезонов, которую мы уже рассматривали, либо непосредственно (через юкавские взаимодействия), либо косвенно (через взаимодействие с калибровочными полями), то сдвиг в скалярных полях будет порождать некий, явно нарушающий симметрию член в фермионной части лагранжиана. И это тривиально.

Более интересный вопрос заключается в том, возможно ли спонтанное нарушение симметрии в теории без фундаментальных скалярных полей. Например, можно ли с помощью одних только билинейных по ферми-полям комбинаций построить нарушающие симметрию вакуумные средние. Я ничего не буду говорить об этой возможности, и не потому, что она не важна, а потому, что о ней слишком мало

известно¹⁾. (Существует единственная точно решаемая модель без фундаментальных скаляров, в которой явление Голдстоуна – Хиггса обнаруживается в полной мере. Это модель Швингера [21 – 23] – квантовая электродинамика безмассовых фермионов в двумерном пространстве-времени²⁾.)

4. Важно четко представлять себе, что эффекты спонтанного нарушения симметрии мы можем сделать сколь угодно большими или сколь угодно малыми, подогнав соответствующим образом параметры в своих моделях. В реальном мире одни из спонтанно нарушенных симметрий природы могут наблюдаться как приближенные симметрии в обычном смысле, а другие, возможно, полностью недоступны прямому наблюдению. Конечно, ничто не мешает наряду со спонтанно нарушенными симметриями существовать и точным или приближенным симметриям обычного типа. К ним, вероятно, относятся симметрии, подобные сохранению числа нуклонов, не являющиеся нарушенными или связанными с каким-либо безмассовым калибровочным мезоном.

5. Все это очень мило, но что нам это дает? Какова практическая польза идеи спонтанного нарушения симметрии, даже по тем великодушным критериям практичности, которые в ходу среди теоретиков, занимающихся высокими энергиями? Ответ на этот вопрос будет дан в следующем параграфе, когда мы покинем классическую физику и обратимся к квантовой теории поля.

§ 3. ТАЙНАЯ ПЕРЕНОРМИРУЕМОСТЬ

1. ПЛАН ИЗЛОЖЕНИЯ

Мы собираемся сразу же окунуться в изучение спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории поля, несмотря на то что ничего не знаем о свойствах квантованных неабелевых калибровочных полей даже в отсутствие спонтанного нарушения симметрии. С

¹⁾ О некоторых интригующих исследованиях последнего времени см. в работах [18 – 20].

²⁾ У этой модели есть еще одна занятая особенность: она обладает непрерывной (некалибровочной) симметрией (киральной), которая из-за аномалии не связана с локальным сохраняющимся током. Эта симметрия спонтанно нарушена, но голдстоуновские бозоны отсутствуют, поскольку нет сохраняющегося локального тока.

точки зрения логики не годилось бы действовать в такой последовательности, но мне хотелось бы как можно скорее добраться до сути дела. Поэтому, если вы настроены критически, то считайте, что в этом параграфе я рассказываю самое большое о нарушении симметрии при наличии нескольких абелевых калибровочных полей, и не обращайтесь внимания на мои случайные замечания о неабелевом случае. Во всяком случае, квантовать неабелевы калибровочные поля мы будем позднее.

В данном параграфе мы сначала напомним элементы теории перенормировок, не заботясь о спонтанном нарушении симметрии. Затем мы, не думая о перенормировках, изложим метод работы со спонтанным нарушением симметрии. И в заключение мы сведем воедино две ветви рассуждений.

2. ЕЩЕ РАЗ О ПЕРЕНОРМИРОВКАХ¹⁾

В любой нетривиальной квантовой теории поля в рядах теории возмущений для функций Грина появляются расходящиеся интегралы. Перенормировкой называется процедура устранения подобных расходимостей последовательно в каждом порядке теории возмущений. При этом к лагранжиану, которым определяется данная теория, прибавляются дополнительные члены, называемые контрчленами. В качестве примера рассмотрим разложение собственной четырехточечной функции (т.е. амплитуды рассеяния вне массовой оболочки) в теории с плотностью лагранжиана

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4. \quad (3.1)$$

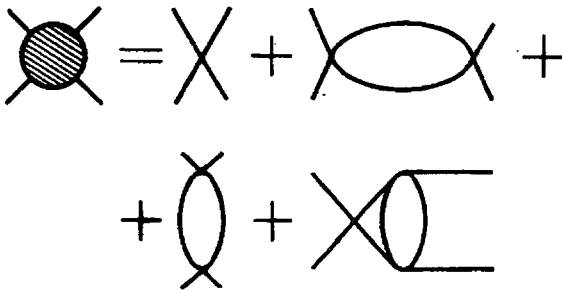
Несколько первых членов этого разложения показаны на фиг. 3. Всем диаграммам, кроме первой, соответствуют расходящиеся фейнмановские интегралы. Если мы обрежем интегрирование на некотором большом импульсе Λ , то получим

$$\Gamma^4 = -\lambda + \alpha \lambda^2 \ln \Lambda + \lambda^2 f, \quad (3.2)$$

¹⁾ Подробности (и литературу) см. в моих лекциях [24], которые (как мне сказали) будут опубликованы.

где α — некоторая конечная (т.е. не зависящая от обрезания в пределе большого импульса обрезания) константа, а f — некоторая конечная функция внешних импульсов. Теперь изменим теорию, прибавив к \mathcal{L} дополнительный член (контрчлен);

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} - \frac{\alpha \lambda^2}{4!} \ln \Lambda \varphi^4. \quad (3.3)$$



Ф и г. 3

Расходящийся член в выражении (3.2) исчезает, и функция Грина становится конечной. Разумеется, когда мы проводим вычисления в более высоких порядках, такой дополнительный член в лагранжиане нужно учитывать как внутреннюю вершину, но по крайней мере в данном порядке все нормально.

Оказывается, что очевидное обобщение этого до глупости простого приема избавляет нас от всех бесконечностей в любой теории поля с полиномиальными взаимодействиями и в любом порядке теории возмущений. (Я прошу вас принять на веру это утверждение и другие, которые последуют за ним; они правильны, но их очень трудно доказать.) Кроме того, можно сформулировать общее правило для выбора контрчленов, которые возникают в каждом порядке теории возмущений. Для простоты я сначала приведу это правило и объясню его следствия для теорий, содержащих только скалярные поля (или псевдоскалярные, так как сохранения четности не предполагается) и дираковские биспиноры. Запишем лагранжеву плотность нашей теории в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \sum \mathcal{L}_i, \quad (3.4)$$

где \mathcal{L}_0 — стандартная свободная лагранжева плотность, а каждое \mathcal{L}_i линейно по полям и их производным. Припишем каждому из этих членов размерность d_i по следующему правилу: размерность скалярного поля равна 1, дираковского поля — $3/2$ и оператора дифференцирования — 1. Следовательно, размерности членов в выражении (3.1) таковы: 4, 2 и 4. (Заметим, что при подсчете этих размерностей мы не учитываем размерные параметры типа μ^2 .) Тогда в любом данном порядке теории возмущений все расходимости можно уничтожить с помощью таких контрчленов, которые сами полиномиальны по полям и их производным и размерности которых удовлетворяют неравенству

$$(d - 4) \leq \sum n_i (d_i - 4), \quad (3.5)$$

где n_i — число появлений \mathcal{L}_i в рассматриваемом порядке.

Конечно, необходимы не все контрчлены, разрешенные неравенством (3.5). Например, лагранжева плотность (3.1) лоренц-инвариантна и инвариантна относительно четности и внутренней симметрии $\phi \rightarrow -\phi$. Поэтому, если мы не столь безрассудны, чтобы выбирать процедуру обрезания, нарушающую эти симметрии, то нет необходимости думать о контрчленах, которые относительно них не инвариантны.

Проверим (3.5) на нашем примере. В случае лагранжевой плотности (3.1) есть только один член, описывающий взаимодействие, и его размерность равна 4. Таким образом, в порядке λ^2 (порядок, в котором мы работаем) правая часть неравенства равна нулю. Поэтому существуют только три контрчлена с подходящими размерностями и свойствами симметрии:

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L} + \frac{1}{2} A (\partial_\mu \phi)^2 - \frac{1}{2} B \phi^2 - \frac{1}{4!} C \phi^4, \quad (3.6)$$

где A , B и C не зависят от обрезания. В нашем примере мы видели только последний из этих контрчленов, но в рассматриваемом порядке необходимы и два других, чтобы уничтожить бесконечности в собственно энергетической диаграмме второго порядка (фиг. 4).

Но все эти контрчлены — не только единственные контрчлены второго порядка, они же являются единственными контрчленами и в любом порядке, ибо независимо от того, сколько раз мы учитываем взаимодей-

ствие, правая часть неравенства (3.5) остается равной нулю. (Новые взаимодействия, которые порождаются самими контрчленами, не влияют на наше рассуждение: их размерность также не превышает четырех.) Но рассматриваемые три контрчлена имеют ту же самую форму, что и три члена в исходном лагранжиане, а поэтому их появление можно трактовать как простое переопределение параметров первоначальной теории. (Точнее говоря, член A можно включить в изменение масштаба поля ϕ , тогда члены B и C будут поправками к массе и константе связи.)



Фиг. 4.

Теория с подобными свойствами, для которой все контрчлены, индуцируемые перенормировкой, имеют ту же форму, что и члены в исходном лагранжиане, называется перенормируемой. Другими словами, перенормируемая теория — это такая теория, для которой всю зависимость от обрезания в функциях Грина можно устранить, если изменить масштабы полей и выбрать параметры теории подходящим зависящим от обрезания образом. Перенормируемые теории составляют очень небольшое подмножество множества всех квантовых теорий поля, которые можно придумать (хотя ими, возможно, и исчерпывается множество тех теорий, которые имеют смысл). Например, из нашего неравенства (или из прямого вычисления) ясно, что любая теория, которая содержит некоторое взаимодействие с размерностью больше четырех, неперенормируема. Однако не все теории, содержащие взаимодействия с размерностью не больше четырех, перенормируемы. Например, неперенормируема теория с мезонами и нуклонами, которые взаимодействуют посредством юкавской связи $\bar{\psi}\psi\phi$, поскольку такое взаимодействие приводит к контрчлену γ^4 , не присутствующему в первоначальной теории. В то же время та же теория с юкавским взаимодействием и взаимодействием γ^4 *перенормируема*. (Приведенное определение перенормируемости несколько более узкое, чем то, которое обычно используется. Чаще всего перенормируемость определяют как существование только конечного числа индуцированных контрчленов вне зависимости от того, присутствуют они в исходном лагранжиане или нет.)

Я сказал только одно: контрчлены следует выбирать так, чтобы уничтожить бесконечности. Это требование, очевидно, оставляет их

неопределенными в каждом порядке с точностью до конечных добавок. В случае перенормируемых теорий подобную неоднозначность обычно снимают путем решения системы уравнений, называемой условиями перенормировки. Ими определяются масштабы полей и величины перенормированных масс и констант связи через значения функций Грина в некоторой условно выбранной точке импульсного пространства. Для наших конкретных целей не имеет значения, как именно мы выбираем эту точку. В обычных перенормируемых теориях (т.е. теориях с бесконечным числом контрчленов) существует бесконечное число свободных параметров. По этой-то причине перенормируемые теории обычно (и, я думаю, правильно) считаются непривлекательными.

Я ничего не сказал до сих пор о векторных полях. Те правила приписывания размерностей полям, которые я привел, были на самом деле получены в результате анализа высокоэнергетического поведения свободных пропагаторов (как и можно было ожидать), ибо, очевидно, именно их свойствами обусловлены расходимости фейнмановских интегралов. Поэтому, хотя размерность массивного векторного поля равна 1 (с точки зрения анализа размерностей в обычном смысле), его пропагатор имеет вид

$$-i \frac{g_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu} / \mu^2}{k^2 - \mu^2} . \quad (3.7)$$

Из-за наличия второго члена это выражение растет при большом импульсе как пропагатор градиента некоего скалярного поля (объекта с размерностью 2), и наше условие (3.5) для размерностей нарушается. Фактически большинство взаимодействий массивного векторного поля перенормируемо. Но если массивное векторное поле взаимодействует с некоторым сохраняющимся током так, как если бы оно было абелевым калибровочным полем, то можно переопределить переменные и переписать теорию таким образом, чтобы пропагатор равнялся

$$-i \frac{g_{\mu\nu} - k_{\mu} k_{\nu} / k^2}{k^2 - \mu^2} . \quad (3.8)$$

Это выражение растет как некий скалярный пропагатор, и с размерностями все снова хорошо. В случае настоящего (безмассового) абелевого калибровочного поля теорию можно проквантовать таким образом, чтобы его пропагатор имел вид (3.8) (где μ^2 равно, конечно, нулю). Следовательно, в данном случае с размерностями тоже все хорошо, что, я надеюсь, вы знаете из своего опыта обращения с квантовой электродинамикой. В § 5 мы увидим, что все это можно сделать также (с некоторыми усложнениями) и для неабелевых калибровочных полей (но здесь только в безмассовом случае).

Однако даже для квантовой электродинамики подсчета размерностей недостаточно, чтобы установить перенормируемость. Например, соотношением (3.5), без сомнения, допускается контрчлен $(A_\mu)^4$ (с размерностью 4), но, если бы мы действительно ввели в рассматриваемый лагранжиан такой член, это было бы несчастьем: это разрушило бы калибровочную инвариантность. То, что подобный член не может иметь места в квантовой электродинамике, показывается путем сложной цепи рассуждений: 1) рассматриваемую теорию искусно обрезают так, чтобы при этом не разрушилась калибровочная инвариантность; 2) исходя из калибровочной инвариантности устанавливают соотношения между функциями Грина (тождества Уорда); 3) исходя из тождеств Уорда, показывают отсутствие возможных калибровочно-неинвариантных контрчленов. Такую же последовательность шагов можно провести и для неабелевых калибровочных теорий, но доказательства будут гораздо более сложные. У меня нет времени охватить их в данных лекциях, и я вынужден отослать вас к литературе [25 – 29].

3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ И ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ¹⁾

Теперь мне хотелось бы отложить на время перенормировки и пойти по другому пути построения теории, который (после оргии формальных выкладок) покажет, как нужно подходить к спонтанному нарушению симметрии в квантовой теории поля. Для простоты при из-

¹⁾ Содержание данного пункта и многое из дальнейшего в этом параграфе заимствовано из работы [30], где можно найти всякие подробности, ссылки и приложения. Эффективный потенциал был введен Голдстоуном, Саламом и Вейнбергом [8], а также Иона-Ласинио [31].

ложении данного подхода я ограничусь теорией с единственным скалярным полем φ , динамика которого описывается некоторой лагранжевой плотностью $\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi)$. Обобщение на более сложные случаи тривиально. Посмотрим, что произойдет, если к лагранжевой плотности добавить линейный член взаимодействия φ с некоторым внешним источником $J(x)$, который будем считать c -числовой функцией пространства и времени:

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi) \rightarrow \mathcal{L} + J(x)\varphi(x). \quad (3.9)$$

При наличии источника $J(x)$ производящий функционал $W(J)$ для связанных функций Грина определяется через амплитуду перехода из вакуумного состояния в далеком прошлом в вакуумное состояние в далеком будущем следующим образом:

$$e^{iW(J)} = \langle 0^+ | 0^- \rangle_J. \quad (3.10)$$

Функционал W можно разложить в функциональный ряд Тейлора

$$W = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) J(x_1) \dots J(x_n). \quad (3.11)$$

Хорошо известно, что коэффициенты этого ряда представляют собой связанные функции Грина; $G^{(n)}$ — это сумма всех связанных фейнмановских диаграмм с n внешними линиями.

Классическое поле φ_c определяется соотношением

$$\varphi_c(x) = \frac{\delta W}{\delta J(x)} = \left[\frac{\langle 0^+ | \varphi(x) | 0^- \rangle}{\langle 0^+ | 0^- \rangle} \right]_J. \quad (3.12)$$

Эффективное действие $\Gamma(\varphi_c)$ определяется как результат функционального преобразования Лежандра:

$$\Gamma(\varphi_c) = W(J) - \int d^4x J(x)\varphi_c(x). \quad (3.13)$$

Из этого определения сразу следует, что

$$\frac{\delta \Gamma}{\delta \varphi_c(x)} = -J(x). \quad (3.14)$$

Данное уравнение окажется вскоре крайне важным при изучении спонтанного нарушения симметрии. Для эффективного действия можно написать разложение, аналогичное разложению (3.11):

$$\Gamma = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1 \dots x_n) \varphi_c(x_1) \dots \varphi_c(x_n). \quad (3.15)$$

Можно показать, что коэффициенты данного ряда представляют собой ОЧН-функции Грина¹⁾ (иногда они называются собственными вершинами). Величина $\Gamma^{(n)}$ есть сумма всех ОЧН-фейнмановских диаграмм с n внешними линиями. [ОЧН (одночастично неприводимая) фейнмановская диаграмма — это связанная диаграмма, которую нельзя разделить на две, разрезав лишь одну внутреннюю линию. По определению при вычислении ОЧН-диаграмм обычно не учитываются пропагаторы, соответствующие внешним линиям.] Существует и другой способ разложения эффективного действия: не по степеням φ_c , а по степеням импульса (относительно точки, в которой все внешние импульсы обращаются в нуль). В координатном пространстве разложение выглядит так:

$$\Gamma = \int d^4x \left[-V(\varphi_c) + \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_c)^2 Z(\varphi_c) + \dots \right], \quad (3.16)$$

где $V(\varphi_c)$ — эффективный потенциал (обычная функция, а не функционал). Сравнивая разложения (3.15) и (3.16), нетрудно заметить, что n -я производная потенциала V есть сумма всех ОЧН-диаграмм с нулевыми внешними импульсами. В древесном приближении (т.е. в пренебрежении всеми диаграммами с замкнутыми петлями) V — просто обычный потенциал, тот объект, который в § 2 мы обозначали через U .

Обычные условия перенормировки в теории возмущений можно выразить через функции, которые входят в формулу (3.15). Например, если определить квадрат массы мезона как обратное значение пропагатора при нулевом импульсе, то

$$\mu^2 = \left. \frac{d^2 V}{d\varphi_c^2} \right|_0. \quad (3.17a)$$

¹⁾ Проще всего это сделать путем функционального интегрирования (§ 4).

Аналогично если мы назовем константой связи λ четырехвершинную функцию при нулевых внешних импульсах, то

$$\lambda = \left. \frac{d^4 V}{d\varphi_c^4} \right|_0. \quad (3.176)$$

Точно так же стандартное условие нормировки поля принимает вид

$$Z(0) = 1. \quad (3.17)$$

Теперь мы готовы применить этот аппарат к изучению спонтанного нарушения симметрии. Предположим, что наша лагранжева плотность обладает некоторой внутренней симметрией, подобно классическим теориям поля § 2. Тогда при появлении у квантового поля φ ненулевого вакуумного среднего в отсутствие источника $J(x)$ происходит спонтанное нарушение симметрии. Из уравнений (3.12) и (3.14) следует, что это имеет место, если

$$\frac{\delta\Gamma}{\delta\varphi_c} = 0 \quad (3.18)$$

при некотором ненулевом значении φ_c . Кроме того, поскольку нас, как правило, интересуют только случаи, когда вакуумное среднее трансляционно-инвариантно (иначе говоря, нас не интересует спонтанное нарушение закона сохранения импульса), мы можем упростить это выражение и получить

$$\frac{dV}{d\varphi_c} = 0 \quad (3.19)$$

при некотором ненулевом значении φ_c . То значение φ_c , при котором мы имеем минимум и которое мы обозначили через $\langle\varphi\rangle$, есть среднее значение поля φ по новому (асимметричному) вакууму.

Чтобы исследовать свойства теории со спонтанным нарушением симметрии, мы введем новое квантовое поле с обращаемся в нуль вакуумным средним:

$$\varphi' = \varphi - \langle\varphi\rangle. \quad (3.20)$$

Это вызывает соответствующее переопределение классического поля

$$\varphi_c^i = \varphi_c - \langle \varphi \rangle, \quad (3.21)$$

откуда сразу же следует, что фактическую массу, константу связи и т.д. можно вычислять из уравнений, подобных (3.17), с той лишь разницей, что производные нужно брать в точке $\langle \varphi \rangle$, а не в нуле. Таким образом, мы воссоздаем всю схему нашего исследования спонтанного нарушения симметрии в классической теории поля. Единственное отличие состоит в том, что мы работаем не с классическим потенциалом U , а с эффективным потенциалом V .

4. РАЗЛОЖЕНИЕ ПО ПЕТЛЯМ

К сожалению, эффективный потенциал известен только для тривиальных моделей: чтобы вычислить его, требуется просуммировать бесконечное число фейнмановских диаграмм — задача, превышающая наши вычислительные возможности. Поэтому желательно найти некий разумный способ приближенного вычисления V . Я попытаюсь показать, что одним из таких разумных способов является разложение по петлям: нужно сначала просуммировать все диаграммы без замкнутых петель (древесные графы), затем — диаграммы с одной замкнутой петлей и т.д. Конечно, каждый этап в подобном разложении тоже включает в себя бесконечное суммирование, но, как мы увидим, это суммирование тривиально.

Введем некий параметр α в нашу лагранжеву плотность, положив по определению

$$\mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi, \alpha) = \alpha^{-1} \mathcal{L}(\varphi, \partial_\mu \varphi), \quad (3.22)$$

и покажем, что разложение по петлям эквивалентно разложению в ряд по степеням α . Пусть P — степень параметра α , связанная с какой-либо диаграммой. Тогда легко видеть, что

$$P = I - V, \quad (3.23)$$

где I — число внутренних линий в данной диаграмме, а V — число вершин. Так происходит потому, что пропагатор, равный единице, деленной на дифференциальный оператор, входящий в квадратичные члены лагранжиана \mathcal{L} , пропорционален α , тогда как каждая верши-

на содержит множитель α^{-1} . (Следует иметь в виду, что здесь мы имеем дело с ОЧН-диаграммами, в которых нет пропагаторов, соответствующих внешним линиям.) Число же петель L дается выражением

$$L = I - V + 1. \quad (3.24)$$

Это объясняется тем, что число петель в диаграмме равно числу независимых импульсов, по которым производится интегрирование. Каждая внутренняя линия вносит один импульс интегрирования, а каждая вершина дает δ -функцию, которая уменьшает число независимых импульсов на единицу; единственное исключение — δ -функция, обеспечивающая сохранение полной энергии и полного импульса. Объединяя (3.23) и (3.24), находим, что

$$P = L - 1. \quad (3.25)$$

Это результат, к которому мы стремились.

Главное в данном анализе не то, что разложение по петлям дает хорошее приближение благодаря малости параметра α (на самом деле $\alpha = 1$). (Хотя оно, конечно, не хуже обычной теории возмущений для малых констант связи, так как множество диаграмм с n или менее петлями несомненно включает в себя как подмножество все диаграммы n -го или меньшего порядков по константе связи.) Главное здесь в том, что поскольку разложение по петлям соответствует разложению по параметру, на который умножается полная лагранжева плотность, на него не влияют ни сдвиги полей, ни переопределение разбиения лагранжиана на свободную и взаимодействующую части, связанное с такими сдвигами¹⁾.

Итак, мы получаем некий способ разложения, в любом порядке которого мы в состоянии применить методы § 2. Кроме того, первый член в разложении V — это классический потенциал U , т.е. взятая с обратным знаком сумма всех членов в лагранжевой плотности, не содержащих производных. Таким образом, мы не только подтвердили применимость в квантовом мире многих классических методов

¹⁾ Имеется один параметр, который был положен равным 1 при нашем выборе единиц измерения и который входит в теорию так же, как и α : это \hbar . Поэтому иногда говорят, что разложение по петлям есть разложение по степеням \hbar [32].

в § 2, но и показали целесообразность многих вычислений, проведенных в § 2. Они должны заслуживать доверия в соответствующих квантовых теориях поля при обычных условиях, когда, по нашим предположениям, диаграммами с замкнутыми петлями можно пренебречь или, иначе говоря, когда константы связи малы.

5. ПРИМЕР ВЫЧИСЛЕНИЙ

Чтобы немного оживить этот сухой формализм, вычислим эффективный потенциал для теории с единственным скалярным полем и лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - U(\varphi), \quad (3.26)$$

где U — полином и не обязательно перенормируемого типа. Как мы видели, в древесном приближении

$$V = U(\varphi_c). \quad (3.27)$$

Построим однопетлевое приближение. Поскольку оно не зависит от способа разбиения лагранжиана на свободную и взаимодействующую части, в качестве свободной лагранжевой плотности возьмем только первый член в формуле (3.26), а все U (в том числе и возможные массовые члены) будем рассматривать как взаимодействие. Все однопетлевые диаграммы, возникающие в этом случае, показаны на фиг. 5. Черные точки обозначают сумму членов с нулем, одной, двумя и т.д. внешними линиями, которые возникают из членов в U 2-го, 3-го, 4-го и т.д. порядка по φ . (Линейные по φ члены не вносят вклад в однопетлевые ОЧН-диаграммы.) Каждая из этих внешних линий несет нулевой внешний импульс и множитель φ_c . Таким образом, вершине на фиг. 5 соответствует выражение

$$i \left. \frac{d^2 U}{d\varphi^2} \right|_{\varphi=\varphi_c} = i U''(\varphi_c). \quad (3.28)$$

(Здесь i — обычное i , входящее в формулу Дайсона.) Например, если взять U из нашей старой абелевой модели [формула (2.6)], то

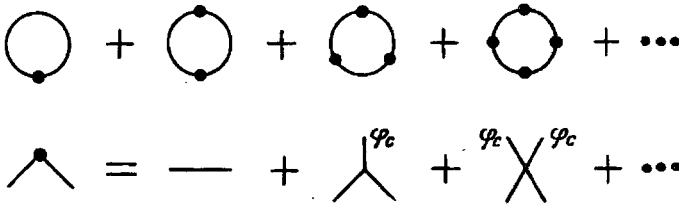
$$U''(\varphi_c) = \frac{\lambda}{6} (3\varphi_c^2 - a^2). \quad (3.29)$$

Каждой линии соответствует обычный безмассовый пропагатор

$$\frac{i}{k^2 + i\epsilon}, \quad (3.30)$$

где k — импульс, идущий вдоль петли. Поэтому при учете поправок от суммы диаграмм фиг. 5 выражение (3.27) заменяется выражением

$$V = U + i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} \left(\frac{U''(\varphi_c)}{k^2 + i\epsilon} \right)^n. \quad (3.31)$$



Ф и г. 5

Два множителя в этом выражении требуют дополнительного объяснения: 1) i стоит перед интегралом, потому что i входит в определение W [формула (3.10)]; 2) $1/2n$ — это комбинаторный множитель: вращение или отражение n -точечной диаграммы не приводит к новому спариванию в разложении Вика, и потому множитель $1/n!$ в формуле Дайсона сокращается не полностью.

Бесконечный ряд под знаком интеграла в формуле (3.31) легко просуммировать. Если не считать несущественной (расходящейся) константы, то ответ таков:

$$V = U + \frac{1}{2} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \ln [k^2 + U''(\varphi_c) - i\epsilon]; \quad (3.32)$$

здесь я при вычислении интеграла обычным образом перешел от интегрирования по псевдоевклидову пространству к интегрированию по евклидову пространству, но в противоположность общепринятому со-

хранил $i\epsilon$. (Причина подобной эксцентричности вскоре станет ясной.) Этот интеграл расходится. Если обрезать интегрирование на некотором большом импульсе Λ , то мы получим

$$V = U + \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} U'' + \frac{(U'')^2}{64\pi^2} \ln \left(\frac{U'' - i\epsilon}{\Lambda^2} - \frac{1}{2} \right) \quad (3.33)$$

плюс не существенная константа.

На примере данных вычислений отчетливо видно, в чем состоит отличие перенормируемых взаимодействий от перенормируемых. Если U — полином четвертой степени (перенормируемый случай), то мы можем устранить из выражения (3.33) всю зависимость от обрезания, добавив к лагранжиану контрчлены, которые представляют собой полиномы не выше четвертой степени и которые поэтому можно интегрировать как поправки к параметрам исходного лагранжиана. Например, для нашей старой абелевой модели мы таким способом получим

$$V = \frac{\lambda}{4!} (\varphi_c^2 - a^2)^2 + \frac{\lambda^2}{2304\pi^2} (3\varphi_c^2 - a^2)^2 \ln (3\varphi_c^2 - a^2 - i\epsilon) + b\varphi_c^4 + c\varphi_c^2, \quad (3.34)$$

где b и c — конечные константы, не определенные до тех пор, пока мы не сформулировали наши условия перенормировки — те условия, которые определяют перенормированные параметры данной теории и фиксируют конечные части контрчленов¹⁾. (Видите, хорошо, что мы сохранили $i\epsilon$. Аргумент логарифма может стать отрицательным, и величина $i\epsilon$ необходима нам, чтобы сказать, каков знак мнимой части потенциала V . Позднее мы еще вернемся к этому вопросу.)

¹⁾ Вычисление эффективного потенциала в однопетлевом приближении может быть выполнено таким же образом для перенормируемой теории общего вида, содержащей произвольное число бесспиновых мезонов, фермионов и калибровочных полей, причем почти без дополнительной работы. Для интересующегося читателя такие вычисления проведены в приложении. Вычисления можно также провести методом функционального интегрирования; при этом мы обходимся без суммирования бесконечного числа диаграмм [28, 33].

Если же U — полином пятой или более высокой степени (неперенормируемый случай), то контрчлены, которые мы должны добавить, имеют еще более высокую степень и мы попадаем в то бесконечное наращивание неоднозначностей, которое характеризует неперенормируемые теории. [*Технический момент*. Как и во всякой схеме перенормировок, те контрчлены, которые мы добавляем в первом порядке, следует рассматривать как величины первого порядка по используемому параметру разложения. В нашем случае это параметр α в равенстве (3.22), учитывающий число петель (который мы опускаем). Поэтому, если мы переходим к более высоким порядкам разложения по петлям, контрчлены, введенные на данном этапе, следует считать однопетлевыми внутренними частями диаграмм, несмотря на то что графически они представлены простыми точечными вершинами.

6. САМАЯ ВАЖНАЯ ЧАСТЬ ЭТОЙ ЛЕКЦИИ

Важной особенностью вычислений, которые мы только что провели, является то, что нам не нужно привлекать большее число контрчленов, чем это требовалось бы в отсутствие спонтанного нарушения симметрии. Ультрафиолетовые расходимости теории остаются верны симметрии ее лагранжиана, даже если этого нельзя сказать о вакуумном состоянии. Так произошло в наших конкретных вычислениях, и это не должно нас удивлять. Весь наш метод был построен таким образом, чтобы это происходило при любых вычислениях. Действительно, лагранжева плотность \mathcal{L} в формуле (3.9) есть *полная* лагранжева плотность рассматриваемой теории, а отсюда, в частности, следует, что \mathcal{L} содержит *все* те контрчлены, которые необходимы, чтобы устранить *все* ультрафиолетовые расходимости. Ни один из дальнейших шагов в п. 3 не включает какого-либо интегрирования по внутренним импульсам, и потому ни один из них не может добавить новых ультрафиолетовых расходимостей.

Данный момент настолько важен, что имеет смысл повторить все еще раз другими словами. Мы построили теорию спонтанного нарушения симметрии в квантовой теории поля таким образом, что все ультрафиолетовые расходимости устраняются из теории *до того*, как сдвигаются поля. До того как мы сдвинем поля, вся картина явным образом симметрична по отношению к полной группе симметрии

теории. Поэтому асимметричные контрчлены не могут возникнуть ни-
 каким образом.

Подчеркнем еще раз: *наличие спонтанного нарушения симметрии не влияет на структуру расходимостей перенормируемой теории поля.* Это простое замечание – самое важное в данной лекции. В нем заключается секрет построения перенормируемых теорий слабых взаимодействий. Такие теории выглядят неперенормируемыми, поскольку они содержат массивные векторные мезоны (W -бозоны), взаимодействующие с несохраняющимися токами. Но это только видимость. В действительности лагранжианы таких теорий содержат лишь без-массовые калибровочные поля, взаимодействующие с сохраняющимися токами минимальным образом, и являются вполне перенормируемыми. И масса векторных мезонов и несохранение токов возникают в результате спонтанного нарушения симметрии.

Теперь мы понимаем, как строить теории, в которых разности масс внутри изотопического мультиплета конечны. Возьмем вначале теорию, в которой фотон является частью мультиплета калибровочных мезонов, чье взаимодействие симметрично относительно группы изотопических вращений. В такой теории нужны только изосинглетные массовые контрчлены. И вот происходит спонтанное нарушение симметрии. Друзья фотона становятся массивными, но потребность в каком-либо массовом контрчлене, нарушающем изоспиновую симметрию, все равно не возникает.

В конце § 2 я спрашивал: что нам это дает? Теперь у нас есть замечательный ответ: тайная симметрия дает нам тайную перенормируемость.

Строго говоря, теперь мне следовало бы перейти к подробным примерам, иллюстрирующим данный принцип на конкретных моделях, но эту задачу я оставляю для лекций Глэшоу.

7. ФИЗИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЭФФЕКТИВНОГО ПОТЕНЦИАЛА

В классической теории поля обычный потенциал $U(\phi)$ – это плотность энергии (отнесенная к единице объема энергия такого состояния, в котором поле принимает значение ϕ). Я теперь покажу, что в квантовой теории поля эффективный потенциал $V(\phi_c)$ – тоже плотность энергии. Другими словами, $V(\phi_c)$ представляет собой отнесенное к единице объема среднее значение энергии в таком

состоянии, в котором среднее значение поля равно ϕ_c^1). Отсюда сразу же следует, что если V имеет несколько локальных минимумов, то только абсолютному минимуму соответствует истинное основное состояние рассматриваемой теории — состояние с наименьшей энергией. Попутно мы получим весьма важную информацию о смысле таинственной мнимой части V , которая появилась в примере в п. 5.

Мы начнем доказательство с разложения функционала $W(J)$, определенного равенством (3.10), действуя так же, как при разложении Γ в формуле (3.16):

$$W = \int d^4x \left\{ -\mathcal{E}(J) + \frac{1}{2} (\partial_\mu J)^2 X(J) + \dots \right\}. \quad (3.35)$$

Рассмотрим источник $J(x)$, который принимает постоянное значение J в области протяженностью L в течение времени T и плавно спадает до нуля вне этой пространственно-временной области. В таких условиях при очень больших L и T первый член в выражении (3.35) доминирует и

$$e^{iW} = \langle 0^+ | 0^- \rangle \approx e^{-iL^3 T \mathcal{E}(J)}. \quad (3.36)$$

С физической точки зрения произошло следующее. По всему объему мы плавно изменили плотность гамильтониана рассматриваемой теории:

$$\mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} - J\phi. \quad (3.37)$$

Поэтому мы, как всегда, ожидаем, что внутри объема основное состояние этой теории адиабатически перейдет в основное состояние теории с дополнительным членом в плотности гамильтониана. Такое состояние будет эволюционировать во времени согласно уравнению Шредингера. Поскольку рассматриваемое состояние является основным состоянием системы, его эволюция означает просто эволюцию фазы. Когда мы выключаем возмущение, данное состояние адиабатически переходит обратно в основное состояние невозмущенной теории, но его фаза сохраняется. Поэтому $\mathcal{E}(J)$ есть отнесенная к единице объема энергия основного состояния возмущенного гамильтониана. (Разумеется, могло бы произойти пересечение уровней. Чтобы быть точными, нам следует говорить не "основное состояние", а "стационарное состояние возмущенной теории, которое получено из ос-

¹⁾ Данный результат принадлежит Симанзику [34].

нового состояния невозмущенной теории путем адиабатического включения возмущения".)

Я проведу теперь совсем другую цепь рассуждений, которая с учетом сделанного выше замечания приведет нас к желаемому результату. Чтобы упростить обозначения, я построю доказательство для случая обычной квантовой механики, а не для теории поля, так что мы будем говорить не о плотности энергии, а об энергии. Соответствующее обобщение будет очевидным. Вспомним давно известную вариационную задачу Релея – Ритца о построении состояния $|a\rangle$, которое являлось бы стационарным состоянием квадратичной формы

$$\langle a | H | a \rangle, \quad (3.38)$$

при условии, что его норма равна единице:

$$\langle a | a \rangle = 1. \quad (3.39)$$

Эту задачу обычно решают методом множителей Лагранжа: вводят лагранжев множитель, который мы обозначим через E , и варьируют уже без каких-либо ограничений форму

$$\langle a | H - E | a \rangle. \quad (3.40)$$

Таким способом получают уравнение

$$(H - E) | a \rangle = 0. \quad (3.41)$$

Следовательно, $|a\rangle$ – некоторое собственное состояние гамильтониана H с энергией E .

Теперь рассмотрим несколько измененную задачу. Добавим еще одно уравнение связи

$$\langle a | A | a \rangle = A_c, \quad (3.42)$$

где A – некоторый эрмитов оператор и A_c – некоторое число. Теперь мы должны ввести два множителя Лагранжа, которые я обозначу через E и J , и варьировать без ограничений форму

$$\langle a | (H - E - JA) | a \rangle. \quad (3.43)$$

Получаем

$$(H - E - JA) | a \rangle = 0. \quad (3.44)$$

Отсюда следует, что $|a\rangle$ – некоторое собственное состояние возмущенного гамильтониана $H - JA$, а E – его энергия. Разумеется, это

соотношение дает нам E как функцию величины J , тогда как нас интересует зависимость E от A_c , а не от J . Связь между последними двумя величинами легко получается из стандартной формулы первого порядка теории возмущений:

$$A_c = \langle a | A | a \rangle = - \frac{dE}{dJ}. \quad (3.45)$$

Отсюда следует, что та величина, которую мы первоначально намеревались сделать стационарной, дается соотношением

$$\langle a | H | a \rangle = E + J A_c = E - J \frac{dE}{dJ}. \quad (3.46)$$

Едва ли могло от вас ускользнуть, что (с точностью до очевидной замены энергии плотностью энергии и величины A величиной φ) мы сейчас повторили тот же ряд действий, который ранее привел нас к определению эффективного потенциала.

Таким образом, мы установили физический смысл эффективного потенциала:

$$V(\varphi_c) = \langle a | \mathcal{H} | a \rangle, \quad (3.47)$$

где $|a\rangle$ — состояние, для которого

$$\delta \langle a | \mathcal{H} | a \rangle = 0 \quad (3.48)$$

при условиях

$$\langle a | a \rangle = 1, \quad (3.49a)$$

$$\langle a | \varphi | a \rangle = \varphi_c. \quad (3.49b)$$

Правильность такой интерпретации мы можем проверить и иначе — уменьшив размерность пространства-времени с четырех до единицы. Тогда лагранжева плотность превращается в лагранжиан для некой частицы с единичной массой, φ становится координатой x частицы, а $U(\varphi)$ превращается в $U(x)$ — тот потенциал, в котором частица движется. Формула (3.32) принимает вид

$$\begin{aligned} V &= U + \frac{1}{2} \int \frac{d\omega}{2\pi} \ln(\omega^2 + U'' - i\epsilon) = \\ &= U + \frac{1}{2} (U'' - i\epsilon)^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Данное выражение допускает прямую физическую интерпретацию. С точки зрения классической теории частица находится в одном из минимумов потенциала и ее энергия равна значению потенциала в этом минимуме. Чтобы получить первую квантовую поправку к такой картине, мы аппроксимируем рассматриваемый потенциал вблизи минимума потенциалом некоторого гармонического осциллятора и учитываем энергию нулевых колебаний этого осциллятора; она-то и дает второй член в выражении (3.50)¹⁾.

Коль скоро мы уже знаем, что V есть плотность энергии, мы в состоянии понять и смысл его мнимой части. Когда мы следим за каким-либо энергетическим уровнем, изменяя параметры теории, часто оказывается, что в определенной точке данный энергетический уровень становится неустойчивым; в этот момент у энергии появляется отрицательная мнимая часть, равная половине вероятности распада в единицу времени. То же самое можно увидеть и из того, что говорилось о физическом смысле величины $\mathcal{E}(J)$ с точки зрения адиабатического включения возмущения. Если основное состояние невозмущенной системы адиабатически переходит в некоторое нестабильное состояние возмущенной системы, то оно будет распадаться и величина

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle = \exp[-iL^3 T \mathcal{E}(J)] \quad (3.51)$$

¹⁾ Это точно соответствует тому, что разложение по петлям является разложением по степеням \hbar (см. примечание на стр. 54). Здесь не следует упускать из виду одно существенное различие между квантовой механикой и теорией поля: в квантовой механике спонтанное нарушение симметрии отсутствует даже в случае потенциала с двумя ямами типа, показанного на фиг. 2. Различие легко увидеть на примере квадратичного приближения, о котором шла речь выше. Если в квантовой механике аппроксимировать два предполагаемых вырожденных основных состояния волновыми функциями гармонического осциллятора, то они будут иметь отличное от нуля скалярное произведение. Это приводит к смешиванию, которое нарушает вырождение; только одна линейная комбинация двух состояний является истинным основным состоянием. Соответствующее приближение в теории поля мы получим, поместив систему в ящик объемом V . Тогда простое вычисление показывает, что скалярное произведение экспоненциально стремится к нулю, когда объем стремится к бесконечности, и (по крайней мере, в этом приближении) вырождение остается.

будет некоторым числом, по модулю меньшим единицы. Разумеется, для системы с бесконечной пространственной протяженностью выражение "вероятность распада в единицу времени" имеет не больше, смысла, чем выражение "энергия". Вместо этого говорят о "вероятности распада в единицу времени в единичном объеме", точно так же, как пользуются понятием "плотности энергии". Поэтому мнимую часть эффективного потенциала нужно интерпретировать как половину вероятности распада за единицу времени в единичном объеме. [Наличие члена $i\epsilon$ в выражении (3.32) гарантирует, что мнимая часть последнего отрицательна, как и должно быть, если мы хотим, чтобы такая интерпретация была последовательной¹⁾.]

8. СЛУЧАЙНАЯ СИММЕТРИЯ И СВЯЗАННЫЕ С НЕЙ ЯВЛЕНИЯ

Как и всякое разложение теории возмущений, разложение по петлям заслуживает доверия только в случае малых безразмерных констант связи. Обычно предполагают, что при малых константах связи члены высших порядков в каком-либо разложении по теории возмущений малы по сравнению с членами низших порядков. Именно так обстоит дело в вычисленном нами примере; например, для абелевой модели эффективный потенциал без учета петель имеет порядок λ , однопетлевая поправка — порядок λ^2 . Тем не менее существуют важные случаи, когда однопетлевые поправки превышают вклад древесных диаграмм и играют основную роль в определении структуры спонтанного нарушения симметрии.

Это объясняется тем, что наша теория может содержать взаимодействия, которые вообще не появляются в древесном приближении для эффективного потенциала: такие, как юкавские взаимодействия или взаимодействия с калибровочными полями. Мы еще не вычислили явно ни одной диаграммы, содержащей замкнутые петли виртуальных фермионов или калибровочных частиц, но очевидно, что их значения

¹⁾ Данное обстоятельство хорошо известно. То же самое мы имеем в классическом случае эффективного действия для электрона, взаимодействующего с постоянным внешним электромагнитным полем [35, 36]. Выражение действительно для магнитного поля, но комплексно для электрического поля; дело в том, что при наличии постоянного электрического поля вакуум нестабилен и распадается в электрон-позитронные пары.

зависят только от величины юкавской или калибровочной константы связи. А так как последние являются независимыми параметрами теории, их всегда можно выбрать так, чтобы вклад однопетлевых диаграмм был больше вклада диаграмм без петель, даже если все константы связи малы. Так, например, в абелевой калибровочной модели § 2, п. 4, оказывается, что замкнутые петли виртуальных фотонов дают вклад в V порядка e^4 (вычисления см. в приложении). И этот вклад больше эффективного потенциала в древесном приближении, если e^4 намного превышает λ , что может случиться даже тогда, когда и e и λ намного меньше единицы.

Возможны даже случаи, когда однопетлевой эффективный потенциал важен независимо от относительной величины безразмерных констант связи. Это легче всего объяснить на частном примере. Рассмотрим $SO(3)$ -мультиплет из пяти скалярных мезонов, который мы обозначим через φ^a , где a пробегает значения от 1 до 5. Трансформационные свойства этих полей легче всего описать, составив из них некую действительную симметричную $(3 \cdot 3)$ -матрицу с нулевым следом, которую мы обозначим через φ . При $SO(3)$ -преобразовании, характеризуемом матрицей вращения R , φ преобразуется по закону

$$\varphi \rightarrow R \varphi R^T. \quad (3.52)$$

Кроме того, допустим, что имеется инвариантность относительно преобразования дискретной симметрии

$$\varphi \rightarrow -\varphi. \quad (3.53)$$

В таком случае мы можем получить самодействие только второй и четвертой степени по полям φ . Единственная инвариантная квадратичная форма — это

$$\text{Sp} \varphi^2 = \sum (\varphi^a)^2. \quad (3.54)$$

Очевидно, что возможны два члена четвертой степени: $\text{Sp} \varphi^4$ и $(\text{Sp} \varphi^2)^2$. Но благодаря тому, что след φ равен нулю, они связаны соотношением

$$\text{Sp} \varphi^4 = \frac{1}{2} (\text{Sp} \varphi^2)^2 = \frac{1}{2} [\sum (\varphi^a)^2]^2. \quad (3.55)$$

Из правых частей этих уравнений ясно видно, что оба члена инвариантны относительно более широкой, чем $SO(3)$, группы симметрии,

а именно $SO(5)$. Таким образом, ограничения, вытекающие из требования перенормируемости (отсутствие взаимодействий выше четвертой степени), заставили самодействие скалярных мезонов и, следовательно, эффективный потенциал в древесном приближении быть инвариантными относительно некой более широкой группы симметрии, чем та, с которой мы начали. Такое явление Вейнберг назвал случайной симметрией [37]. Правда, если рассматриваемые скалярные мезоны взаимодействуют с триплетом калибровочных полей, то калибровочное взаимодействие не обязано быть (в действительности и не может быть) $SO(5)$ -инвариантным; но оно и не появляется в древесном приближении для V .

Таким образом, если бы мы попытались анализировать данную модель в древесном приближении, то оказались бы в затруднительном положении по двум причинам: 1) мы имели бы слишком богатый набор вакуумов — не $SO(3)$ - , а $SO(5)$ - семейство; 2) даже если бы мы и выбрали каким-то чудом правильный вакуум из этого чересчур богатого набора, мы обнаружили бы некие безмассовые скаляры, которые были бы голдстоуновскими бозонами по отношению только к группе $SO(5)$, но не группе $SO(3)$. (Вейнберг называет их псевдоголдстоуновскими бозонами.) Чтобы найти правильный вакуум и придать массу псевдоголдстоуновским бозонам, необходимо вычислить вклады петель, содержащих калибровочные поля.

9. ДРУГОЙ ВОЗМОЖНЫЙ СПОСОБ ВЫЧИСЛЕНИЙ

В данных лекциях я сделал упор на метод вычислений, при котором мы сначала вычисляем поправки высших порядков, а затем сдвигаем поля. Откровенно говоря, я должен сказать вам, что большинство работающих в данной области предпочитают действовать в другом порядке. Они переписывают лагранжиан рассматриваемой теории, выражая его через сдвинутые поля

$$\varphi = \varphi' + \langle \varphi \rangle. \quad (3.56)$$

Тем самым они получают лагранжиан, в котором для каждого бесспинового поля имеется дополнительный свободный параметр (величина сдвига). Такие параметры можно зафиксировать на некотором этапе вычислений, потребовав, чтобы вакуумные средние сдвинутых полей обращались в нуль:

$$\langle 0 | \varphi' | 0 \rangle = 0. \quad (3.57)$$

Другими словами, все ОЧН-диаграммы с одной лишь внешней линией (диаграммы-головастики) в сумме должны давать нуль.

Это столь же хороший способ действий, как и тот, который я изложил ранее. Он эквивалентен тому, что мы прямо вычисляем производную от потенциала V и требуем, чтобы она обращалась в нуль, не заботясь о вычислении самого потенциала V . Единственная причина, по которой я строил теорию тем способом, каким я это делал, — педагогическая. При другом методе построения не так легко увидеть, что спонтанное нарушение симметрии не приводит к асимметричным членам. (Насколько я могу себе представить, наш способ был бы, безусловно, лучше только в одном случае, а именно в случае теории, в которой V имеет два локальных минимума. Тогда нам нужно было бы знать сам потенциал V , чтобы определить, какой из них является абсолютным минимумом, т.е. истинным вакуумом.)

§ 4. ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ (В ПОПУЛЯРНОМ ИЗЛОЖЕНИИ)

1. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ПО БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫМ ПРОСТРАНСТВАМ

Функциональное интегрирование — это метод, аналогичный обычному интегральному исчислению, но имеющий дело с интегралами, определенными не на конечномерных пространствах, а на пространствах функций, т.е. на бесконечномерных пространствах. Для теоретической физики он ценен тем, что дает возможность представить производящий функционал квантовой теории поля в виде функционального интеграла. Такое представление дает много преимуществ; главное из них, с нашей точки зрения, в том, что оно позволяет особенно легко увидеть, как изменится теория, если выполнить нелинейные преобразования ее фундаментальных динамических переменных. Чем больше набор интересных с физической точки зрения нелинейных преобразований, тем более ценным оказывается представление в виде функционального интеграла. Таким образом, метод функционального интегрирования в высшей степени полезен при изучении неабелевых калибровочных теорий.

В данном параграфе мы изложим суть метода функционального интегрирования и остановимся на его связи с теорией поля. Наш подход будет жалким с математической точки зрения. Мы не будем

ничего доказывать, все будем делать по аналогии, будем формально манипулировать плохо определенными (а иногда и расходящимися) величинами и убеждать жестами. Я надеюсь, что при таком подходе вы по крайней мере поймете, о чем идет речь, и научитесь обращаться с функциональными интегралами. Если же вы стремитесь к более глубокому пониманию, то следует обратиться к другим источникам¹⁾.

Мы начнем с очень простого одномерного интеграла, гауссова интеграла:

$$\int dx e^{-\frac{1}{2} a x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}, \quad (4.1)$$

где a — положительное действительное число. После аналитического продолжения формула (4.1) справедлива и при комплексных a в тех случаях, когда интеграл определен, т.е. когда действительная часть величины a положительна. Формулу (4.1) легко обобщить на случай n -мерного пространства. Обозначим через x вектор в n -мерном пространстве. Обычное внутреннее произведение двух таких векторов x и y будем обозначать через (x, y) . Тогда, если A — действительная симметричная положительно-определенная матрица, имеем

$$\int d^n x e^{-\frac{1}{2} (x, Ax)} = (2\pi)^{n/2} (\det A)^{-1/2}, \quad (4.2)$$

в чем нетрудно убедиться путем диагонализации матрицы A . Как и ранее, аналитическое продолжение показывает, что формула (4.2) справедлива также в том случае, если A — комплексная симметричная матрица с положительно-определенной действительной частью.

Чтобы каждый раз не писать π и n , введем обозначение

$$(d^n x) = d^n x (2\pi)^{-n/2}. \quad (4.3)$$

¹⁾ Функциональные интегралы были введены в квантовой механике Фейнманом. Учебником по функциональному интегрированию может служить книга [38]. Ее авторы исходят из первоначального фейнмановского определения функционального интеграла. Оно выглядит иначе, нежели определение, которое даю я, но можно показать, что оба определения эквивалентны. Хорошим математическим пособием может служить книга [39].

Тогда формула (4.2) примет вид

$$\int (d\mathbf{x}) e^{-\frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})} = (\det \mathbf{A})^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.4)$$

Если мы умеем интегрировать гауссовы интегралы, то мы можем интегрировать также экспоненты от произвольной квадратичной формы. Пусть

$$Q(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x}) + (\mathbf{b}, \mathbf{x}) + c, \quad (4.5)$$

где \mathbf{b} — некоторый вектор, а c — число. Пусть $\bar{\mathbf{x}}$ — минимум величины Q :

$$\bar{\mathbf{x}} = -\mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}. \quad (4.6)$$

Тогда

$$Q(\mathbf{x}) = Q(\bar{\mathbf{x}}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}, \mathbf{A}[\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}]) \quad (4.7)$$

и

$$Q(\bar{\mathbf{x}}) = -\frac{1}{2}(\mathbf{b}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b}) + c, \quad (4.8)$$

откуда

$$\int (d\mathbf{x}) e^{-Q(\mathbf{x})} = e^{-Q(\bar{\mathbf{x}})} (\det \mathbf{A})^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.9)$$

Имея (4.9), мы можем вычислить интеграл от любого полинома, умноженного на экспоненту от квадратичной формы, просто продифференцировав по \mathbf{b} :

$$\int (d\mathbf{x}) P(\mathbf{x}) e^{-Q(\mathbf{x})} = P\left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{b}}\right) \int (d\mathbf{x}) e^{-Q(\mathbf{x})}. \quad (4.10)$$

В дальнейшем будет удобно иметь также формулы для интегрирования по n -мерному комплексному векторному пространству не в смысле какого-либо контурного интеграла, а просто в смысле интегрирования по мнимой и действительной частям отдельно. Обозначим обычное эрмитово скалярное произведение в таком пространстве через $(\mathbf{z}^*, \mathbf{w})$, а $2n$ -мерное вещественное интегрирование (с учетом соответствующих множителей π) — через $(d\mathbf{z}^*)(d\mathbf{z})$. Тогда, если \mathbf{A} — положительно-определенная эрмитова матрица, имеем

$$\int (d\mathbf{z}^*)(d\mathbf{z}) e^{-(\mathbf{z}^*, \mathbf{A}\mathbf{z})} = (\det \mathbf{A})^{-1}, \quad (4.11)$$

что легко показать путем диагонализации матрицы \mathbf{A} . Теперь степень детерминанта иная. Это объясняется тем, что каждое собствен-

ное значение матрицы \mathbf{A} дает вклад в интеграл дважды, один раз при интегрировании по действительной части вектора \mathbf{z} , а другой — при интегрировании по его мнимой части. Отсутствие множителя $\frac{1}{2}$ в показателе экспоненты — чистая условность; его влияние учитывается в определении интеграла $(dz^*)(dz)$. Из равенства (4.11) прямо следуют формулы, аналогичные тем, которые мы вывели ранее; я не буду тратить время на выписывание их.

Теперь нам нужно сделать "большой скачок", основанный на вере. В наших формулах интегрирования нет ничего такого, что было бы явным образом связано с размерностью векторного пространства; поэтому мы смело распространяем их на бесконечномерные векторные пространства. Разрешите мне на примере интеграла (4.4) пояснить несколько более точно, как это делается. Задавая квадратичную форму $(\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$, определяемую линейным оператором \mathbf{A} , на бесконечномерном действительном гильбертовом пространстве, мы вначале ограничим форму, взяв некоторое конечномерное подпространство. На этом конечномерном подпространстве обе части равенства (4.4), интеграл и детерминант, хорошо определены. Затем мы позволим конечномерному подпространству расти до тех пор, пока в пределе оно не совпадет со всем пространством. Точнее, мы рассмотрим возрастающую последовательность конечномерных подпространств, объединение которых содержит плотный набор векторов. В соответствующем пределе мы и получим как бесконечномерный интеграл, так и бесконечный детерминант. Вопрос о том, для каких операторов \mathbf{A} предел существует и не зависит от последовательности подпространств, представляет собой большую проблему, но здесь она меня не будет интересовать. В наших выкладках всякий раз, когда нам нужны выражения типа (4.4), мы будем предполагать, что они хорошо определены.

Бесконечномерные пространства, с которыми мы будем иметь дело в большинстве случаев, будут пространствами функций, например пространством функций одной действительной переменной. В этом частном случае имеется необязательное, но традиционное специальное обозначение. Векторы в таком пространстве обычно обозначают не через \mathbf{x} , как мы это делали, а некоторым символом, который показывает, что это функция, например $\mathbf{q}(t)$, где t — действительная переменная. Скалярное произведение записывается в виде

$$(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \int dt [\mathbf{q}(t)]^2. \quad (4.12)$$

Далее, функция, отображающая векторное пространство в действительные или комплексные числа, называется функционалом, а производные, аналогичные тем, которые входят в равенство (4.10), называются вариационными производными и обозначаются символами типа $\delta/\delta q(t)$, а не $\partial/\partial x$. В теоретико-полевых приложениях мы будем рассматривать пространства функций четырехмерных пространственно-временных координат, обычно обозначаемых символами типа $\varphi(x)$, где x теперь — не элемент векторного пространства, а просто обычная пространственно-временная точка. В таком случае

$$(\delta\varphi)^2 = \int d^4x [\delta\varphi(x)]^2, \quad (4.13)$$

а формулу (4.4) следует записать в виде

$$\int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2}(\varphi, A\varphi)} = (\det A)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

В случаях, с которыми мы будем сталкиваться чаще всего, A будет интегральным или дифференциальным оператором.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Имеется большое число случаев, когда производящие функционалы квантовых теорий могут быть записаны в виде функциональных интегралов. Я начну с особенно простого случая одного скалярного поля с самодействием без производных. Как и в § 3, п. 3, запишем лагранжеву плотность для такой теории в присутствии внешнего c -числового источника $J(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \mathcal{L}'(\varphi) + J(x)\varphi. \quad (4.15)$$

Здесь \mathcal{L}' — взаимодействие, имеющее вид некоторого полинома от φ . Рассмотрим \mathcal{L} как классическую лагранжеву плотность для c -числового поля и построим классический интеграл действия

$$S(\varphi, J) = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (4.16)$$

Величина S есть функционал двух c -числовых полей φ и J . В § 3, п. 3, мы ввели также производящий функционал квантовой теории $\exp[iW(J)]$, определив его как сумму всех диаграмм перехода вакуум — вакуум в присутствии источника J . Теперь я продемонстрирую следующую замечательную связь между квантовым производящим функцио-

ное значение матрицы \mathbf{A} дает вклад в интеграл дважды, один раз при интегрировании по действительной части вектора \mathbf{z} , а другой — при интегрировании по его мнимой части. Отсутствие множителя $\frac{1}{2}$ в показателе экспоненты — чистая условность; его влияние учитывается в определении интеграла $(dz^*)(dz)$. Из равенства (4.11) прямо следуют формулы, аналогичные тем, которые мы вывели ранее; я не буду тратить время на выписывание их.

Теперь нам нужно сделать "большой скачок", основанный на вере. В наших формулах интегрирования нет ничего такого, что было бы явным образом связано с размерностью векторного пространства; поэтому мы смело распространяем их на бесконечномерные векторные пространства. Разрешите мне на примере интеграла (4.4) пояснить несколько более точно, как это делается. Задавая квадратичную форму $(\mathbf{x}, \mathbf{A}\mathbf{x})$, определяемую линейным оператором \mathbf{A} , на бесконечномерном действительном гильбертовом пространстве, мы вначале ограничим форму, взяв некоторое конечномерное подпространство. На этом конечномерном подпространстве обе части равенства (4.4), интеграл и детерминант, хорошо определены. Затем мы позволим конечномерному подпространству расти до тех пор, пока в пределе оно не совпадет со всем пространством. Точнее, мы рассмотрим возрастающую последовательность конечномерных подпространств, объединение которых содержит плотный набор векторов. В соответствующем пределе мы и получим как бесконечномерный интеграл, так и бесконечный детерминант. Вопрос о том, для каких операторов \mathbf{A} предел существует и не зависит от последовательности подпространств, представляет собой большую проблему, но здесь она меня не будет интересовать. В наших выкладках всякий раз, когда нам нужны выражения типа (4.4), мы будем предполагать, что они хорошо определены.

Бесконечномерные пространства, с которыми мы будем иметь дело в большинстве случаев, будут пространствами функций, например пространством функций одной действительной переменной. В этом частном случае имеется необязательное, но традиционное специальное обозначение. Векторы в таком пространстве обычно обозначают не через \mathbf{x} , как мы это делали, а некоторым символом, который показывает, что это функция, например $\mathbf{q}(t)$, где t — действительная переменная. Скалярное произведение записывается в виде

$$(\mathbf{q}, \mathbf{q}) = \int dt [\mathbf{q}(t)]^2. \quad (4.12)$$

Далее, функция, отображающая векторное пространство в действительные или комплексные числа, называется функционалом, а производные, аналогичные тем, которые входят в равенство (4,10), называются вариационными производными и обозначаются символами типа $\delta/\delta q(t)$, а не $\partial/\partial x$. В теоретико-полевых приложениях мы будем рассматривать пространства функций четырехмерных пространственно-временных координат, обычно обозначаемых символами типа $\varphi(x)$, где x теперь — не элемент векторного пространства, а просто обычная пространственно-временная точка. В таком случае

$$(\varphi, \varphi) = \int d^4x [\varphi(x)]^2, \quad (4.13)$$

а формулу (4.4) следует записать в виде

$$\int (d\varphi) e^{-\frac{1}{2}(\varphi, A\varphi)} = (\det A)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.14)$$

В случаях, с которыми мы будем сталкиваться чаще всего, A будет интегральным или дифференциальным оператором.

2. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ

Имеется большое число случаев, когда производящие функционалы квантовых теорий могут быть записаны в виде функциональных интегралов. Я начну с особенно простого случая одного скалярного поля с самодействием без производных. Как и в § 3, п. 3, запишем лагранжеву плотность для такой теории в присутствии внешнего c -числового источника $J(x)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + \mathcal{L}'(\varphi) + J(x)\varphi. \quad (4.15)$$

Здесь \mathcal{L}' — взаимодействие, имеющее вид некоторого полинома от φ . Рассмотрим \mathcal{L} как классическую лагранжеву плотность для c -числового поля и построим классический интеграл действия

$$S(\varphi, J) = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (4.16)$$

Величина S есть функционал двух c -числовых полей φ и J . В § 3, п. 3, мы ввели также производящий функционал квантовой теории $\exp[iW(J)]$, определив его как сумму всех диаграмм перехода вакуум — вакуум в присутствии источника J . Теперь я продемонстрирую следующую замечательную связь между квантовым производящим функцио-

налом и классическим интегралом действия:

$$e^{iW(J)} = N \int (d\varphi) e^{iS(\varphi, J)}, \quad (4.17)$$

где N — нормировочный множитель, выбранный таким образом, что W обращается в нуль при $J = 0$. Формула (4.17) представляет собой некоторый вариант фейнмановского интеграла по путям: квантовая амплитуда перехода получается путем суммирования по всем возможным классическим траекториям системы. Так, как оно написано, выражение (4.17) плохо определено даже при наших широких допущениях: подинтегральное выражение — сильно осциллирующий объект, совершенно непохожий на прекрасно затухающие гауссианы п. 1. Эта проблема отпадает, если договориться о том, что производящий функционал в левой части равенства (4.17) есть производящий функционал *евклидовых* функций Грина, а функциональный интеграл следует вычислять для полей в *евклидовом* пространстве, которые убывают до нуля на бесконечности.

Такое условие требует некоторого пояснения: фейнмановские амплитуды с самого начала определены при действительных внешних 3-импульсах и действительных энергиях. Но мы можем продолжить их аналитически в область мнимых энергий, поворачивая одновременно все энергии (как внутренние, так и внешние) на $\pi/2$ в комплексной плоскости энергии. Нетрудно убедиться, что при таком вращении в фейнмановских интегралах не возникает никаких сингулярностей (возможность аналитического продолжения можно доказать, не обращаясь к теории возмущений, но с теорией возмущений это проще всего). Таким образом, мы переходим в евклидово импульсное пространство, где 3-импульсы действительные и энергии мнимые. Для любого евклидова импульса k_μ мы определим действительную переменную k_4 соотношением

$$k_0 = ik_4. \quad (4.18)$$

Таким образом,

$$k^2 = -k_E^2, \quad (4.19)$$

где

$$k_E^2 = \mathbf{k}^2 + k_4^2 \quad (4.20)$$

есть обычный евклидов квадрат вектора. Аналогично

$$d^4k = id^4k_E. \quad (4.21)$$

Евклидовы функции Грина в координатном пространстве определяют как аналитическое продолжение преобразований Фурье функций Грина в импульсном пространстве. Чтобы экспоненциальный множитель Фурье $\exp(ikx)$ не рос и не лишил нас возможности осуществить аналитическое продолжение, мы должны повернуть x_0 на $-\pi/2$ одновременно с поворотом k_0 на $+\pi/2$. Таким образом, получаем

$$x_0 = -ix_4, \quad (4.22)$$

$$k_4 = -id^4 k_E \quad (4.23)$$

и т.д. Поэтому, например, фейнмановский пропагатор свободного скалярного поля с массой μ

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{i}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (4.24)$$

в евклидовом пространстве переходит в

$$\Delta_E(x) = - \int \frac{d^4 k_E}{(2\pi)^4} e^{-ikx} \frac{1}{k_E^2 + \mu^2}. \quad (4.25)$$

Отметим, что в евклидовом пространстве нет необходимости сохранять $i\epsilon$. Нам вскоре очень пригодится то обстоятельство, что эта функция удовлетворяет уравнению

$$(\square_E^2 - \mu^2) \Delta_E(x) = \delta^{(4)}(x), \quad (4.26)$$

где

$$\square_E^2 = \nabla^2 + \partial_4^2. \quad (4.27)$$

Так как подынтегральное выражение в формуле (4.25) не имеет полюсов, Δ_E — единственное решение уравнения (4.26) в противоположность тому, что мы имеем в пространстве Минковского, где у соответствующего уравнения много решений и добавление $i\epsilon$ необходимо для устранения неоднозначности.

Вернемся теперь к проверке функционально-интегральной формулы (4.17). Я начну со случая свободного поля, $\mathcal{L}' = 0$. Производящий функционал в пространстве Минковского таков:

$$e^{iW} = \exp\left[-\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right]. \quad (4.28)$$

Следовательно, евклидовский производящий функционал равен

$$\exp \left[\frac{1}{2} \int d^4 x_E d^4 y_E J(x) \Delta_E(x-y) J(y) \right]. \quad (4.29)$$

С левой частью равенства (4.17) у нас благополучно. Что же касается правой части, то мы имеем

$$\begin{aligned} iS &= i \int d^4 x \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_0 \phi)^2 - (\nabla \phi)^2 - \mu^2 \phi^2] + J\phi \right\} = \\ &= - \int d^4 x_E \left\{ \frac{1}{2} [(\partial_4 \phi)^2 + (\nabla \phi)^2 + \mu^2 \phi^2] - J\phi \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

(Подчеркиваю — это не аналитическое продолжение, а просто формальная подстановка. Мы не доказываем сейчас, что один хорошо определенный объект является аналитическим продолжением другого; мы определяем подынтегральное выражение функционала.) Таким образом, функциональный интеграл имеет вид (4.9), где

$$A = -\square_E^2 + \mu^2, \quad b = -J, \quad c = 0. \quad (4.31)$$

Поэтому

$$N \int (d\phi) e^{iS} = N (\det A)^{-1/2} e^{-1/2(J, A^{-1}J)} \quad (4.32)$$

Теперь нормировочный множитель N можно определить как

$$N = (\det A)^{1/2}. \quad (4.33)$$

Определение (4.33) спасает нас от хлопот по вычислению детерминанта. (Это хорошо, поскольку в суровой действительности детерминант расходится.) Таким образом, получаем окончательный ответ для интеграла:

$$\exp \left[-\frac{1}{2} (J, A^{-1}J) \right] = \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4 x_E d^4 y_E J(x) \Delta_E(x-y) J(y) \right]. \quad (4.34)$$

Выражение (4.34) согласуется с (4.29). По крайней мере в данном случае функциональный интеграл воспроизводит производящий функционал, как и обещалось.

Если бы мы попытались вычислить интеграл непосредственно в пространстве Минковского, используя (ошибочно) интегральные формулы п. 1, то получили бы такой же результат, но только A был бы теперь оператором Клейна — Гордона. Затем мы оказались бы в тупике, так как мы не знали бы, какую функцию Грина использовать для A^{-1} . При вычислениях в евклидовом пространстве нет такой неопределенности; правильный ответ (правило Фейнмана относитель-

но $i\epsilon$) получается почти автоматически как следствие нашего условия о том, что аналитическое продолжение обратно в пространство Минковского производится *после* того, как интегрирование выполнено. Таким образом, интегрирование в евклидовом пространстве не просто изящный математический прием, но необходимая процедура, если нам нужно получить однозначный ответ. Далее я не буду в явной форме выполнять продолжение в евклидово пространство и обратно, а буду просто записывать интегралы так, как если бы они вычислялись в пространстве Минковского [как в формуле (4.17)]. Но нужно постоянно помнить, что это просто условная запись; реально интегрирование выполняется всегда по полям в евклидовом пространстве.

Перейдем теперь к случаю взаимодействия. Игнорируя, как и прежде, все вопросы расходимостей, обрезания и перенормировок, я просто выпишу формулу Дайсона для производящего функционала:

$$e^{iW} = N' T \langle 0 | \exp [i \int (\mathcal{L}'(\varphi_I) + J\varphi_I) d^4x] | 0 \rangle, \quad (4.35)$$

где $|0\rangle$ — голый вакуум, φ_I — поле в представлении взаимодействия, T — символ T -упорядочивания и N' — нормировочный множитель, выбранный так же, как и ранее. Выражение (4.35) можно записать в виде

$$\begin{aligned} N' \exp \left[i \int d^4y \mathcal{L}' \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right] \langle 0 | T \exp [i \int J\varphi_I d^4x] | 0 \rangle = \\ = N' \exp \left[i \int d^4y \mathcal{L}' \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right] \exp [iW_0(J)], \end{aligned} \quad (4.36)$$

где W_0 — производящий функционал для свободного поля. Рассмотрим теперь функциональный интеграл. Разобьем действие на 2 части:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}'(\varphi) + S_0(\varphi, J), \quad (4.37)$$

где S_0 — действие для свободного поля (включая член с источником), которое обозначено в формуле (4.17) через S . В духе уравнения (4.10) получаем с учетом предыдущих вычислений

$$\begin{aligned} N \int (d\varphi) e^{iS} = N \exp \left[i \int d^4y \mathcal{L}' \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right] \int (d\varphi) e^{iS_0} = \\ = N \exp \left[i \int d^4y \mathcal{L}' \left(-i \frac{\delta}{\delta J(y)} \right) \right] e^{iW_0}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

Величины, равные порознь одной и той же величине, равны друг другу. Ч.Т.Д.

Этот результат сразу же можно обобщить на теорию, в которой несколько скалярных полей:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi^a) (\partial^\mu \varphi^a) - U + J_a \varphi^a, \quad (4.39)$$

где U зависит от полей, но не от их производных, и подразумевает суммирование по повторяющимся индексам. В данном случае (4.17) принимает вид

$$e^{iW} = N \int \prod_a (d\varphi^a) e^{iS}. \quad (4.40)$$

Точно так же, переходя от четырех измерений к одному, видим, что для соответствующей системы в механике частиц:

$$L = \frac{1}{2} (\dot{q}^a)^2 - U(q^a) + J_a(t) q^a, \quad (4.41)$$

применима такая же формула:

$$e^{iW} = N \int_a (dq^a) e^{iS}. \quad (4.42)$$

Конечно, в случае частиц действие есть просто однократный, а не четырехкратный интеграл:

$$S = \int dt L. \quad (4.43)$$

Мы можем также пойти обратно, от "частиц" к полям, полагая, что индекс a пробегает бесконечную область значений, и идентифицируя q^a с фурье-компонентами полей в фиксированный момент времени. Таким образом, формула (4.42) носит даже более общий характер, нежели формула (4.40). Она налагает условия не на лоренцевские трансформационные свойства динамических переменных, а только на форму, в которой их производные по времени входят в лагранжиан. По этой причине в дальнейшем я буду говорить о "частицах", когда разбираются общие вопросы, и возвращаться к полям только в частных случаях.

3. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА

Вернемся временно к случаю единственного скалярного поля с взаимодействием без производных. В этом случае соотношение (4.38) дает формальное выражение для функционального интеграла, но ес-

ли взаимодействие нетривиально, это выражение невозможно преобразовать к явному аналитическому виду. Однако его вполне можно вычислить методом теории возмущений, разлагая по степеням взаимодействия. Такое разложение приводит к обычным правилам Фейнмана.

Легче всего это можно показать, пользуясь некоторым функциональным тождеством. Вначале я сформулирую и докажу это тождество для конечномерных вещественных векторных пространств, а затем, как обычно, распространю его на пространства функций. Пусть $F(x)$ и $G(x)$ — две любые c -числовые функции на векторном пространстве; тогда

$$F\left(-i \frac{\partial}{\partial x}\right) G(x) = G\left(-i \frac{\partial}{\partial y}\right) F(y) e^{i(x, y)} \Big|_{y=0}. \quad (4.44)$$

Данное тождество проще всего доказать, перейдя к представлению Фурье, т.е. выбрав F и G в виде плоских волн:

$$F = e^{i(a, x)}, \quad G = e^{i(b, x)}, \quad (4.45)$$

где a и b — фиксированные векторы. Тогда

$$e^{(a, \partial/\partial x)} e^{i(b, x)} = e^{i(b, x+a)}, \quad (4.46)$$

$$e^{(b, \partial/\partial y)} e^{i(x+a, y)} = e^{i(x+a, y+b)}. \quad (4.47)$$

Тем самым равенство (4.44) доказано.

Распространяя тождество (4.44) на пространство функций и применяя его к (4.38), получаем

$$e^{iW} = N \exp \left[\frac{1}{2} \int d^4 x d^4 y \Delta_F(x-y) \frac{\delta}{\delta \varphi(x)} \frac{\delta}{\delta \varphi(y)} \right] \times \\ \times \exp [i \int d^4 x (\mathcal{L}'(\varphi) + J\varphi)] \Big|_{\varphi=0}. \quad (4.48)$$

Здесь произведена очевидная подстановка J вместо x , φ вместо y и вариационной производной вместо обычной производной. Легко видеть, что соотношение (4.48) представляет собой правила Фейнмана для матричного элемента перехода вакуум — вакуум. (Если это не ясно, то предлагаю вычислить несколько первых членов разложения для φ^4 -взаимодействия.) Отметим, что в разложении появляются

ся диаграммы, в которых спариваются два поля из одной и той же вершины взаимодействия; функциональный интеграл не дает нам нормально упорядоченного взаимодействия. Если мы хотим иметь дело с нормально упорядоченными взаимодействиями, то должны обеспечить нормальное упорядочение, искусственно вставив явным образом контрчлены во взаимодействие.

Наше доказательство можно сразу же перенести на общий случай, что дает "правила Фейнмана" для вычисления по теорий возмущений функционального интеграла вида

$$\int \prod_a (dq^a) e^{iS}, \quad (4.49)$$

где

$$S = S_0 + S', \quad (4.50)$$

причем

$$S_0 = -\frac{1}{2} (q^a, A_{ab} q^b). \quad (4.51)$$

Здесь A — линейный оператор (не зависящий от q) с положительно определенной действительной частью (после того, как выполнен поворот к мнимому времени), а S' — произвольный полиномиальный функционал переменной q , который может содержать члены с источником. Тогда, точно так же, как и выше, можно построить диаграммное разложение интеграла по степеням S' , точно соответствующее правилам Фейнмана. Каждая степень величины S' представляется вершиной, а пропагатор $D_F^{ab}(t, t')$ есть решение уравнения

$$A_{ab} D_F^{bc}(t; t') = -i \delta_a^c \delta(t - t'). \quad (4.52)$$

Всякая неоднозначность в решении этого уравнения должна разрешаться переходом к мнимому времени.

Отметим, что если S' содержит производные величин q , то они просто станут производными пропагаторов в разложении. Известная проблема протаскивания временной производной квантовых полей через оператор T -упорядочивания, которая превращает теорию возмущений для взаимодействия с производными в настоящий комбинаторный кошмар, не имеет здесь никакого аналога, так как у нас

нет ни оператора упорядочивания во времени, ни квантовых полей, а просто интеграл по c -числовым полям.

Итак, для любой теории, если мы сможем записать производящий функционал в форме (4.49), мы по S^1 сразу же построим правила Фейнмана, причем очень просто, заменяя каждую производную поля соответствующим импульсом и т.д., и не сделаем при этом никаких ошибок. К сожалению, в настоящий момент единственные теории, для которых производящий функционал можно записать в форме (4.49), это теории без производных во взаимодействии, так что данный рецепт не может быть немедленно использован. Но вскоре он станет очень полезным.

4. ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ С ПРОИЗВОДНЫМИ

Существует большой класс теорий, в которых взаимодействие содержит производные и для которых производящий функционал можно представить в виде функционального интеграла. К ним относятся теории, в которых лагранжиан не более чем квадратичен по временным производным:

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^a K_{ab} \dot{q}^b + L_a \dot{q}^a - U, \quad (4.53)$$

где K , L и U — функции переменной q . Единственное ограничение, которое будет наложено на эти функции, состоит в том, чтобы матрица K была обратима. Тогда можно решить уравнение для канонических импульсов¹⁾

$$p_a = K_{ab} \dot{q}^b + L_a \quad (4.54)$$

и построить гамильтониан

$$H = \frac{1}{2} p_a (K^{-1})^{ab} p_b + \dots, \quad (4.55)$$

где многоточием обозначены члены первого и нулевого порядка по p .

Для таких теорий соответствующим обобщением нашего предыдущего результата (4.42) оказывается выражение

$$e^{iW} = N \int \prod_a (dq^a) [\det K]^{1/2} e^{iS}. \quad (4.56)$$

¹⁾Точнее говоря, можно решить уравнение (4.54), рассматриваемое как уравнение для скоростей. — *Прим. перев.*

В этом выражении K следует рассматривать как линейный оператор на пространстве функций, а интеграл следует понимать в том же смысле, как и раньше при интерпретации наших (гауссовых) интегралов. Вначале нужно рассматривать лишь конечномерное подпространство, вычислить интеграл по такому подпространству, а затем перейти к пределу. Я не знаю простого способа вывода этой формулы и за доказательством отсылаю вас к литературе ¹⁾. Но я постараюсь придать ей правдоподобность, показав, что она удовлетворяет некоторым простым критериям непротиворечивости.

1. Если K не зависит от q и взаимодействие L равно нулю, то все сводится к предыдущему случаю. Тогда детерминант можно вынести за знак интеграла и включить в нормировочный множитель, что дает формулу (4.42).

2. Если K не зависит от q , но взаимодействие L не равно нулю, то в соответствии со сказанным ранее правилами Фейнмана оказываются предельно простыми, причем производная во взаимодействии становится соответствующим импульсом в вершине. Возможно, что этот результат вам известен, если вы когда-либо выводили правила Фейнмана для $PS - PV$ -мезон-нуклонной теории или для электродинамики заряженных скалярных бозонов.

3. Если K зависит от q , все уже не так просто. Может быть, это вам хорошо знакомо, если вы несколько лет назад следили за обсуждением в литературе правил Фейнмана для киральных лагранжианов.

4. Наконец, лагранжиан вида (4.53) сохраняет свою форму при изменении координат. Заменим q новыми переменными, которые мы обозначим через \bar{q}^a . Тогда

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^a K_{ab} \dot{q}^b + \dots = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}}^a \bar{K}_{ab} \dot{\bar{q}}^b + \dots, \quad (4.57)$$

где

$$\bar{K}_{ab} = \frac{\partial q^c}{\partial \bar{q}^a} K_{cd} \frac{\partial q^d}{\partial \bar{q}^b}. \quad (4.58)$$

¹⁾Самый простой вывод, который мне известен, приведен Ченгом [40]. Ченг вычисляет функциональный интеграл по Фейнману [38] и показывает, что интегралом определяется такая же динамика, как и уравнением Шредингера с подходящим упорядочением p и q .

Формулы (4.57) и (4.58) описывают преобразование лагранжиана, но мы должны еще изменить переменные в функциональном интеграле. Мы покажем, как это делается, снова вернувшись к конечномерному случаю. Предположим, что в конечномерном пространстве координаты x заменяются координатами \bar{x} . Даже если \bar{x} — нелинейная функция переменной x , величина $\partial x / \partial \bar{x}$ будет линейным оператором (матрица $n \times n$; n -размерность пространства) и будет иметь детерминант. Формула замены переменных — это обычная формула с якобианом:

$$(dx) = (d\bar{x}) \det \left(\frac{\partial x}{\partial \bar{x}} \right). \quad (4.59)$$

Как всегда, мы просто распространим (4.59) на бесконечномерный случай и тогда получим

$$\begin{aligned} [\det K]^{1/2} \prod_a (dq^a) &= [\det K]^{1/2} \prod_a (d\bar{q}^a) \det \left(\frac{\partial q}{\partial \bar{q}} \right) = \\ &= \prod_a (d\bar{q}^a) [\det \bar{K}]^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Таким образом, выражение (4.56) не зависит от выбора координат. Иногда оно записывается в "гамильтоновой форме"¹⁾

$$e^{iW} = N \int \prod_a (dp_a) (dq^a) e^{iS}, \quad (4.61)$$

где S , как обычно, интеграл от лагранжиана, но лагранжиан записан в виде функции величин p и q , рассматриваемых как незави-

¹⁾ Гамильтонова форма впервые появляется в дополнении В работы [41]. Затем она была переоткрыта много раз многими авторами, но я не могу найти какую-либо ссылку, где бы анализировались опасные неопределенности этой формы. Действительно, обычно в литературе находят неправильное утверждение о том, что гамильтонова форма представляет собой метод квантования, который инвариантен относительно произвольных классических канонических преобразований (возможное исключение — работа [42]; по моему, то, что мне удалось понять в этой статье, правильно). Замечания, высказываемые в тексте, — результат бесед с Гроссом, Калланом и Трейманом.

симые переменные:

$$L = p_a \dot{q}^a - H. \quad (4.62)$$

Формально путем интегрирования в явном виде по p легко показать, что это эквивалентно нашей формуле, полученной ранее. Интеграл по p берется от экспоненты от квадратичной формы, значит, его можно вычислить по формуле (4.9). Мы видим, что впереди возникает детерминант, который как раз нам и нужен. Кроме того, в экспоненте величины p заменяются теми их значениями, при которых действие S стационарно относительно вариаций по p . Это означает, что мы должны решить уравнения

$$\dot{q}^a = \frac{\partial H}{\partial p_a}. \quad (4.63)$$

Но формула (4.63) просто обращает обычную процедуру перехода от лагранжиана к гамильтониану и воссоздает лагранжиан в его первоначальной форме как функцию переменных q и \dot{q} .

К гамильтоновой форме функционального интеграла нужно относиться скептически. В отличие от лагранжевой формы в ней члены с производной после перехода к мнимому времени не становятся хорошо убывающими экспонентами. Они остаются осциллирующими. Стало быть, гамильтонов интеграл далеко не так хорошо определен, как лагранжев. Больше того, можно показать, что даже самый изощренный математик не в силах сделать его хорошо определенным. Можно найти примеры, когда значение выражения (4.61) зависит от того, по какой переменной мы интегрируем вначале: по p или по q . (Простой пример $H = p^2 + q^2 + \lambda p^2 q^2$; различие возникает в порядке λ^2 теории возмущений.) Но если помнить, что с формулой (4.61) всегда связано правило: вначале формально интегрируем по p , а затем переходим к мнимому времени – никаких ошибок не возникает

5. ФЕРМИ-ПОЛЯ

Все, что говорилось выше, относилось к бозе-полям. Что же можно сказать о ферми-полях? В случае бозе-полей мы нашли, что производящий функционал можно представить в виде интеграла по обычным c -числовым полям, которые являются классическими пре-

делами бозе-полей. По аналогии мы можем полагать, что производящий функционал для теории, содержащей ферми-поля, можно записать как интеграл по классическим пределам ферми-полей, т.е. *антикоммутирующим* c -числовым полям. Как всем известно, перед антикоммутирующими c -числами пасуют даже сильные мужчины. К счастью, мы сможем обойти проблему определения функционального интеграла, включающего их.

Предположим, что мы смогли бы определить функциональный интеграл по ферми-полям. Какого типа интегралы мы хотели бы вычислять? В любой теории, которая представляет для нас интерес, ферми-поля входят в лагранжиан самое большее квадратично. Таким образом, если обозначить ферми-поле (или ферми-поля) через η , а сопряженное поле (поля) через η^* , то часть интеграла действия, включающая фермионы, будет иметь вид

$$S_F = (\eta^*, A\eta), \quad (4.64)$$

где A обычно равно сумме двух членов: постоянного члена, возникающего из свободного лагранжиана фермионов, и члена, включающего бозе-поля, из лагранжиана взаимодействия с бесспиновыми мезонами или калибровочными полями. Предположим временно, что S_F — полное действие, а бозе-поля, упоминавшиеся выше, — это внешние поля. (Позже мы всегда сможем по ним проинтегрировать — мы знаем, как интегрировать по бозе-полям.) Если бы мы могли определить интеграл по ферми-полям, то нам желательно было бы доказать, что

$$\langle 0^+ | 0^- \rangle = e^{iW} = N \int (d\eta^*) (d\eta) e^{iS_F}. \quad (4.65)$$

Рассмотрим точно такой же интеграл, но с η — комплексным бозе-полем. В этом случае мы знаем, как взять функциональный интеграл — по формуле (4.11):

$$\int (d\eta^*) (d\eta) e^{i(\eta^*, A\eta)} = [\det(iA)]^{-1}. \quad (4.66)$$

Мы знаем также, как непосредственно вычислить W — методом теории возмущений. Величина W равна сумме всех связанных фейнмановских диаграмм. В случае действия вида (4.64) они представляют собой просто диаграммы с одной замкнутой петлей — типа диаграмм, показанных на фиг. 5 (но только линии на них должны быть снабже-

ны стрелками, поскольку поля комплексные). Что случится с разложением теории возмущений, если заменить бозоны фермионами? Единственным отличием будет множитель -1 для каждой замкнутой фермионной петли. Каждая диаграмма, которая дает вклад в W , имеет одну и только одну замкнутую петлю. Следовательно, величина W заменяется величиной $-W$, или, что эквивалентно, детерминант в степени -1 в формуле (4.66) заменяется детерминантом в степени $+1$.

Таким образом, мы получили бы правильный ответ, если бы выполнялось соотношение

$$\int (d\eta^*) (d\eta) e^{i(\eta^*, A\eta)} = \det (iA) \quad (4.67)$$

с точностью до постоянного множителя, который всегда можно включить в нормировочный множитель N . Поэтому мы положим *по определению* левую часть этого соотношения равной правой части. Это плохая замена истинной теории интегрирования по антикоммутирующим c -числам; но она дает нам компактное выражение (детерминант) для суммы по замкнутым фермиевским петлям, а это, как окажется, все, что необходимо для наших целей.

6. ПОЛЯ-ДУХИ

Мы оставили теорию, содержащую взаимодействия с производными, в плохом виде. Правда, у нас было выражение для производящего функционала [формула (4.56)], но оно не имело вида интеграла от экспоненты; впереди находился детерминант. Поэтому мы не могли применить формулу (4.56) для построения диаграммного разложения теории возмущений для нашего интеграла. Теперь для преобразования детерминанта в экспоненту можно воспользоваться тем, что нам известны ферми-поля.

Так, если ввести набор комплексных фермиевских переменных η^a и обозначить через $K^{1/2}$ квадратный корень из матрицы K , то

$$[\det K]^{1/2} = \int (d\eta^*) (d\eta) e^{i(\eta^{a*}, K^{1/2}_{ab} \eta^b)} \quad (4.68)$$

с точностью до постоянного множителя, который всегда можно объединить с нормировочным множителем N . Величины η называются духовыми переменными (в теоретико-полевого случае — полями-

духами). Это не настоящие динамические переменные системы, а просто вспомогательные величины для преобразования детерминанта в экспоненту.

Таким образом, правила Фейнмана для теории могут быть извлечены из "эффективного лагранжиана"

$$L_{\text{эфф}} = L + L_{\text{дух}}, \quad (4.69)$$

где $L_{\text{дух}}$ — лагранжиан духов, который дается выражением

$$L_{\text{дух}} = \eta^a * K_{ab}^{1/2} \eta^b. \quad (4.70)$$

Здесь полезно будет подробно разобрать один теоретико-полевой пример. Рассмотрим теорию свободного поля, взаимодействующего с внешним источником:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} \varphi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + J\varphi. \quad (4.71)$$

Произведем замену переменных и перейдем к новому полю A , определенному соотношением

$$\varphi = A + \frac{1}{2} gA^2, \quad (4.72)$$

где g — константа. [Преобразование (4.72) необратимо, но это не должно нас беспокоить; мы будем работать только в рамках теории возмущений, а вблизи $\varphi = 0$ преобразование (4.72) обратимо.] Через A лагранжева плотность выражается следующим образом:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_{\mu} A)^2 (1 + gA)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 A^2 (1 + \frac{1}{2} gA)^2 + JA(1 + \frac{1}{2} gA). \quad (4.73)$$

Итак, мы имеем, несомненно, очень сложное взаимодействие, в котором величина g играет роль некой константы связи. Конечно, подобное взаимодействие — фикция; матричный элемент перехода вакуум — вакуум должен быть таким же, как и в первоначальной теории. Но вы получите не такой ответ, если построите правила Фейнмана просто по формуле (4.47). Истинные правила Фейнмана получаются из эффективной лагранжевой плотности

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{дух}}, \quad (4.74)$$

где

$$\mathcal{L}_{\text{дух}} = \eta^* \eta (1 + gA). \quad (4.75)$$

Отсюда видна нефизическая природа полей-духов: 1) духи – это бесспиновые поля, удовлетворяющие статистике Ферми; 2) пропагатор духа не зависит от импульсов и равен константе i .

Рекомендую вам вычислить несколько величин в низших порядках теории возмущений, исходя из такой эффективной лагранжевой плотности, и самим убедиться, что все обстоит так, как и должно быть. Хорошим отправным пунктом может служить одноточечная функция (головастик) в порядке g . Она должна обращаться в нуль. Так ли это?

§ 5. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА ДЛЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

1. ТРУДНОСТИ С КАЛИБРОВОЧНОЙ ИНВАРИАНТНОСТЬЮ

Квантовая теория калибровочных полей довольно-таки хитрая штука. Смысл проблемы можно понять, если взглянуть на простейшую калибровочно-инвариантную теорию поля, электродинамику:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \mathcal{L}' . \quad (5.1)$$

Попытаемся вывести фейнмановский пропагатор для A_μ , прямо применяя методы § 4 и не думая о том, относится ли в действительности электродинамика к классу теорий, о которых там шла речь. Для упрощения вычислений расщепим поле на (четырёхмерные) поперечную и продольную-части:

$$A_\mu = A_\mu^T + A_\mu^L = (P_{\mu\nu}^T + P_{\mu\nu}^L) A^\nu . \quad (5.2)$$

Здесь P^T – поперечный, а P^L – продольный проекционные операторы; в представлении Фурье они таковы:

$$P_{\mu\nu}^T = g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2}, \quad P_{\mu\nu}^L = \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} . \quad (5.3)$$

(Напомним, что мы тайно выполняем все наши вычисления в евклидовом пространстве и поэтому неоднозначность при делении на k^2 отсутствует.) Тогда, как нетрудно видеть,

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu A_\nu^T)^2 + \mathcal{L}' \right] . \quad (5.4)$$

Пропагаторы для поперечной и продольной частей поля мы строим по обычным формулам. Таким образом,

$$D_{\mu\nu}^F = \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \left(-\frac{i}{k^2} \right) + \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Второй член, очевидно, нас не устраивает; что-то здесь не так.

Неудачу можно объяснить двояко: исходя либо из фейнмановской суммы по путям, либо из обычного канонического квантования.

1. *Объяснение на основе суммы по путям.* Фейнман говорит, что для вычисления амплитуды перехода нужно просуммировать по всем возможным траекториям системы. Именно это обычно и делает функциональный интеграл. Но в калибровочной теории, суммируя по всем калибровочным полям $A(x)$, мы суммируем каждую траекторию бесконечное число раз, поскольку поля, связанные калибровочным преобразованием, представляют собой не разные траектории, а одну. Не удивительно, что получается расходящаяся чепуха.

2. *Каноническое объяснение.* Чтобы канонически проквантовать динамическую систему, нужно найти полный набор переменных p и q , для которых будут задаваться начальные данные, полный в том смысле, что их значениями в нулевой момент времени определяются значения динамических переменных для всех других моментов времени. Только в этом случае заданием канонических коммутаторов в нулевой момент времени будут определяться коммутаторы при всех временах и, стало быть, квантовая теория. В калибровочной теории этого нельзя сделать, поскольку всегда можно выполнить калибровочное преобразование, равное нулю в нулевой момент времени, но отличное от нуля в некоторый другой момент; поэтому вы никогда не сможете найти полный набор переменных для задания начальных данных. Чтобы проквантовать теорию, вы вначале должны выбрать калибровку, наложить некоторое условие, которое исключает свободу калибровочных преобразований. Тогда, если вы умело или удачно выбрали калибровку, вы, может быть, проквантуете теорию канонически. Конечно, физические величины калибровочно-инвариантны и поэтому не должны зависеть от калибровки, выбранной для квантования, но это всегда нужно явным образом проверять в каждом частном случае. Ни о чем подобном мы не позаботились. Не удивительно, что мы получили расходящуюся чепуху!

В том и другом объяснении подчеркивается важная роль калибровочной инвариантности. Лично я предпочитаю второе из них: рецепт суммы по путям кажется мне неполным, ибо он не говорит нам, какую меру нужно брать, когда сумма непрерывна, а, как мы видели, когда речь шла о взаимодействиях с производными, это не тривиальный вопрос. И все же в первой части нашего исследования я приму метод квантования, предложенный Фаддеевым и Поповым и основанный на первой точке зрения. Позже я обосную метод Фаддеева — Попова, обратившись к каноническому квантованию. (Пожалуйста, не подумайте, что все это мое собственное, каноническому обоснованию я научился у Фаддеева.)

2. АНЗАЦ ФАДДЕЕВА — ПОПОВА

Как обычно, я начну с конечномерных интегралов, а затем перенесу результаты на пространства функций. Наша модель пространства функций калибровочной теории будет пространством $n + m$ действительных переменных, которые мы обозначим в совокупности через z . Кроме того, первые n переменных обозначим через x , а последние m переменных — через y . Переменные x будут нашей конечномерной моделью калибровочно-инвариантных переменных (в электродинамике — A^T), а переменные y — моделью переменных, зависящих от калибровки ^{μ} (в электродинамике — A^L_μ). У нас также будет модель калибровочно-инвариантного действия, функция $S(z)$, которая не зависит от переменных y :

$$\frac{\partial S}{\partial y} = 0. \quad (5.6)$$

Мы хотим определить производящий функционал (его конечномерную модель) так, чтобы не было проблем расходимости при интегрировании по всем z . Это легко сделать: мы просто интегрируем только по x и принимаем

$$e^{iW} = \int (dx) e^{iS}. \quad (5.7)$$

(Нормировочный множитель пока что опущен.) Выражение (5.7) можно также переписать в виде

$$e^{iW} = \int (dz) e^{iS} \delta(y). \quad (5.8)$$

Здесь $\delta(y)$ есть m -мерная δ -функция, нормированная, так, что

$$\int g(y) (dy) \delta(y) = g(0) \quad (5.9)$$

для любой функции g . Выражение (5.8) означает, что мы интегрируем вдоль поверхности $y = 0$. Конечно, так как от y ничто не зависит, можно было бы точно так же интегрировать вдоль произвольной поверхности

$$y = f(x), \quad (5.10)$$

где f есть m -вектор, т.е. набор m функций переменной x . Тогда получаем

$$e^{iW} = \int (dz) e^{iS} \delta(y - f(x)). \quad (5.11)$$

Поверхность можно задавать не уравнением (5.10), а системой уравнений

$$F(z) = 0, \quad (5.12)$$

где F — снова m -вектор, т.е. набор m функций переменной z . Перепишем интеграл в форме, соответствующей такому заданию поверхности:

$$e^{iW} = \int (dz) e^{iS} \det(\partial F / \partial y) \delta(F(z)). \quad (5.13)$$

Благодаря наличию δ -функции детерминант можно вычислять только на поверхности. Подчеркиваю, формулой (5.13) определяется то же самое выражение, что и формулой (5.7), и оно совершенно не зависит от выбора функций F .

Теперь я сформулирую процедуру квантования Фаддеева — Попова [43]. Пусть S — интеграл действия для теории с m полями $\varphi^a(x)$ (из которых не все обязательно скаляры). Пусть S инвариантно относительно некоторой группы преобразований, параметризованной набором n действительных функций $\omega^b(x)$. Для такой теории "калибровка" определяется системой n уравнений

$$F^b(x) = 0, \quad (5.14)$$

где F — функции полей φ , возможно дифференциальные или даже нелокальные, такие, что для любого данного поля $\varphi^a(x)$ существует одно и только одно калибровочное преобразование, которое приводит к выполнению условий (5.14). В случае электродинамики приме-

ром калибровки может служить кулоновская калибровка $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$. Другой пример — лоренцевская калибровка $\partial_\mu A^\mu = 0$. (Вы можете возразить, что в этом случае калибровочное преобразование неоднозначно. Это верно в пространстве Минковского, но, как вы помните, мы всегда тайно работаем в евклидовом пространстве.) Фаддеев и Попов предложили квантовать теорию следующим образом:

$$e^{iW} = N \int \prod_a (d\varphi^a) e^{iS} \det \left(\frac{\partial F^b}{\partial \omega^c} \right)_b \prod \delta(F^b), \quad (5.15)$$

причем равенство $F^a = 0$ представляет собой некоторую калибровку. Соотношение (5.15) есть функциональный аналог соотношения (5.13). В нем δ -функция — это δ -функция на пространстве функций, δ -функционал, если хотите; он удовлетворяет уравнению

$$\int (d\varphi) G(\varphi) \delta(\varphi) = G(0) \quad (5.16)$$

для любого функционала G . Мы будем называть условие (5.15) анзацем Фаддеева — Попова.

Замечания. 1. Выбор калибровки в анзаце Фаддеева — Попова эквивалентен выбору поверхности в конечномерном интеграле (см. обсуждение выше). Стало быть, независимо от того, справедлив анзац или нет, он по крайней мере самосогласован: он не зависит от выбора калибровки. 2. Таким образом, чтобы убедиться в выполнении анзаца, достаточно проверить его только для одной калибровки. Если он выполняется в одной калибровке, то он выполняется и в любой другой. 3. Калибровочная инвариантность анзаца зависит от калибровочной инвариантности действия. Следовательно, действие не может содержать источника, линейно связанного с калибровочными полями. Но оно может содержать источник, связанный с калибровочно-инвариантным объектом, например с $(F_{\mu\nu}^a)^2$. Другими словами, анзац дает калибровочно-инвариантные выражения только для функций Грина калибровочно-инвариантных величин. Но так как принято считать, что в калибровочной теории физическими наблюдаемыми являются только калибровочно-инвариантные величины, это не сильное ограничение. К тому же, раз мы обосновались в некоторой фиксированной калибровке, ничто не мешает нам вычислять калибровочно-неинвариантные величины типа пропагаторов калибровочных полей в качестве предварительного шага при вычислении калибровоч-

но-инвариантных величин¹⁾. 4. Напомню, все, что мы делаем, носит чисто формальный характер; мы игнорируем осложнения, которые могут возникнуть из-за ультрафиолетовых расходимостей. Поэтому все наши рассуждения следует считать чисто эвристическими, требующими проверки путем более тщательного анализа. Метод функциональных интегралов более эффективен при работе с калибровочными теориями, чем другие формальные методы, но его нельзя называть более строгим.

3. ПРИМЕНЕНИЕ АНЗАЦА

Мы начнем с простейшей калибровочной теории, электродинамики. Так как калибровочные преобразования в этой теории параметризуются только одной функцией, для фиксирования калибровки необходимо только одно уравнение. Мы выберем небольшое обобщение лоренцевской калибровки:

$$F = \partial^\mu A_\mu - f(x), \quad (5.17)$$

где $f(x)$ — произвольная функция. При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях [формула (2.28)] имеем

$$\delta F = -\frac{1}{e} \square^2 \delta \omega. \quad (5.18)$$

Таким образом,

$$\det \left(\frac{\delta F}{\delta \omega} \right) = \det \left(-\frac{1}{e} \square^2 \right). \quad (5.19)$$

Величина (5.19) есть константа, которую можно вынести из-под знака интеграла и включить в нормировку. Поэтому получаем

$$e^{iW} = N \int (dA) (d\psi) e^{iS} \delta(\partial^\mu A_\mu - f(x)), \quad (5.20)$$

¹⁾ К сказанному в замечании 3 необходимо добавить следующее. Для вычисления S -матричных элементов к действию нужно добавить член с источником, линейно связанным с полями (в частности, с калибровочными). Хотя этот член не является калибровочно-инвариантным, можно показать, что после перенормировки и перехода на массовую оболочку этот член эффективно является калибровочно-инвариантным в физическом подпространстве (т.е. физическая S -матрица калибровочно-инвариантна). — *Прим перев.*

где для упрощения записи через (dA) обозначены интегралы по всем четырем компонентам калибровочного поля, а через $(d\psi)$ — интегралы по всем остальным полям теории.

Мы пока не имеем интеграла от экспоненты, так что величину (5.20) трудно вычислять методом теории возмущений. Это легко поправить. Поскольку интеграл не зависит от функции f , его можно проинтегрировать с любым функционалом $G(f)$ без изменения значения интеграла (с точностью до нормировки, которую всегда можно включить в N). Таким образом,

$$\begin{aligned} e^{iW} &= N \int (dA) (d\psi) (df) e^{iS} \delta(\partial^\mu A_\mu - f) G(f) = \\ &= N \int (dA) (d\psi) e^{iS} G(\partial^\mu A_\mu). \end{aligned} \quad (5.21)$$

В частности, если выбрать

$$G(f) = e^{-(i/2\alpha) \int d^4x f^2}, \quad (5.22)$$

где α — некоторое действительное число, то получим

$$e^{iW} = N \int (dA) (d\psi) e^{i[S - (1/2\alpha) \int d^4x (\partial^\mu A_\mu)^2]}. \quad (5.23)$$

Итак, в результате применения анзаца лагранжева плотность теории заменяется эффективной лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu)^2. \quad (5.24)$$

Отсюда легко вычислить электромагнитный пропагатор, так как

$$\int d^4x (\partial^\mu A_\mu)^2 = \int d^4x (\partial^\mu A_\nu^L)^2. \quad (5.25)$$

Поэтому абсурдное выражение (5.5) заменяется выражением

$$D_{\mu\nu}^F = -\frac{i}{k^2} \left[g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} + \alpha \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right]. \quad (5.26)$$

Любой из этих пропагаторов должен давать один и тот же результат при вычислении калибровочно-инвариантных величин. (Я надеюсь, что вы достаточно знакомы с электродинамикой из других источ-

ников и вам ясна правильность этого утверждения.) Выбор $\alpha = 1$ приводит к пропагатору, который обычно называется пропагатором в фейнмановской калибровке, и т.д. При любом α пропагатор ведет себя в пределе высоких энергий так же, как и пропагатор скалярного поля, а поэтому формулы для подсчета индекса расходимости из § 3, п. 1, применимы здесь при вычислении контрчленов.

Вернемся к неабелевым калибровочным полям. Для простоты ограничимся случаем, когда имеется только одна константа связи калибровочного поля. Определим калибровку так же, как в формуле (5.17):

$$F^a = \partial^\mu A_\mu^a - f^a, \quad (5.27)$$

где f — произвольные функции. При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях (2.44) имеем

$$\delta F^a = \frac{1}{g} [-\square^2 \delta \omega^a + g c^{abc} \partial^\mu (\delta \omega^b A_\mu^c)]. \quad (5.28)$$

В противоположность абелеву случаю здесь детерминант не равен константе. Но так же, как и в § 4, п. 6, его можно записать в виде интеграла по набору полей-духов, т.е. скалярных полей со статистикой Ферми:

$$\det \frac{\delta F^a}{\delta \omega^b} = \int (d\eta^*) (d\eta) e^{iS_{\text{дух}}}, \quad (5.29)$$

где

$$\begin{aligned} S_{\text{дух}} &= \int d^4x \mathcal{L}_{\text{дух}} = \int d^4x (\partial^\mu \eta^{a*}) \times \\ &\times (\partial_\mu \eta^a - g c^{abc} \eta^b A_\mu^c), \end{aligned} \quad (5.30)$$

а общий множитель $\det g^{-1}$ мы включили в N . Лагранжеву плотность духов можно записать компактно, если считать духи набором полей, преобразующихся по присоединенному представлению группы:

$$\mathcal{L}_{\text{дух}} = \partial_\mu \eta^{a*} D^\mu \eta^a. \quad (5.31)$$

Из этой записи ясно видно, что величина $\mathcal{L}_{\text{дух}}$ калибровочно-неинвариантна; конечно, нет никаких причин, почему должно быть иначе, ибо она выведена из (преднамеренно выбранного) калибровочно-неинвариантного выражения (5.27). В противоположность примеру § 4, п. 6, здесь пропагатор духов зависит от импульса и равен пропагатору набора безмассовых заряженных скалярных полей $i\delta^{ab}/k^2$. Но они снова обнаруживают свою нефизическую природу, будучи бесспиновыми частицами с фермиевской статистикой.

Оставшееся построение в неабелевом случае полностью аналогично абелеву случаю. Таким образом мы приходим к эффективной лагранжевой плотности

$$\mathcal{L}_{\text{эфф}} = \mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{дух}} - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a)^2, \quad (5.32)$$

где α — произвольное действительное число. Отметим, что если \mathcal{L} — лагранжева плотность перенормируемой теории поля с минимальным взаимодействием с калибровочными полями, то каждый член в этом выражении представляет собой взаимодействие перенормируемого типа (размерность не больше 4). Как объяснялось в конце § 3, п. 1, это лишь первый шаг в установлении перенормируемости, но для дальнейшего у нас здесь нет времени.

4. ОБОСНОВАНИЕ АНЗАЦА

Теперь я обосную анзац Фаддеева — Попова, показав, что в специальной калибровке он эквивалентен каноническому квантованию. Это калибровка Арновитта — Фиклера [44] (иногда называемая аксиальной калибровкой); она определяется условием

$$F^a_3 = A^a_3 = 0, \quad (5.33)$$

где индекс 3 означает третью пространственную компоненту. В отличие от калибровки (5.27) она лоренц-нековариантна и потому страшно неудобна для выполнения фейнмановских вычислений; но наша цель иная. Для простоты я построю доказательство только в случае полей Янга — Миллса, не взаимодействующих с другими полями; обобщение очевидно.

Вначале нужно построить анзац Фаддеева – Попова:

$$\delta F^a = -\frac{1}{g} \partial_3 \delta \omega^a + c^{abc} \delta \omega^b A_3^c = -\frac{1}{g} \partial_3 \delta \omega^a. \quad (5.34)$$

Второе равенство следует из (5.33). Таким образом, детерминант есть константа и его можно включить в нормировочный множитель; в этой калибровке духи отсутствуют даже в неабелевом случае. Поэтому анзац принимает вид

$$e^{iW} = N \int (dA) e^{iS} \prod_a \delta(A_3^a), \quad (5.35)$$

где (dA) означает интегрирование по всем A . В более явной форме:

$$(dA) \prod_a \delta(A_3^a) = \prod_a (dA_1^a)(dA_2^a)(dA_0^a). \quad (5.36)$$

Напомню, что

$$S = -\frac{1}{4} \int d^4x (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g c^{abc} A_\mu^b A_\nu^c)^2 \quad (5.37)$$

плюс член с источником, который я не стану выписывать. (Это лежит в стороне от основной темы, но имеется момент, который может вас беспокоить: духи – фиктивные частицы, но им соответствуют настоящие полюса в пропагаторах. Поэтому в принципе состояния, содержащие духи, могли бы давать вклад в абсорбтивную часть калибровочно-инвариантных функций Грина. Если бы это случилось, было бы плохо; но существование калибровки без духов показывает, что это не так.)

Для удобства перепишем анзац в так называемой форме 1-го порядка:

$$e^{iW} = \int (dF)(dA) \prod_a \delta(A_3^a) e^{iS'}, \quad (5.38)$$

где

$$S' = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} (F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{4} F^{\mu\nu a} (\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g c^{abc} A_\mu^b A_\nu^c) \right] \quad (5.39)$$

и (dF) означает интегрирование по всем F . Интеграл по F тривиален и, очевидно, воспроизводит формулу (5.35). Действие S' эквивалентно S также в обычном смысле лагранжевой динамики: если мы проварьируем S' по F и A независимо, то получим те же уравнения движения, что и при варьировании S , только по A . То обстоятельство, что S' — хорошее действие, не случайность: это следствие формулы интегрирования (4.9). Если динамические переменные входят в действие не более чем в квадрате и коэффициент в квадратичном члене равен константе, то интегрирование по этим переменным дает тот же результат, что и исключение их из действия посредством уравнений Эйлера — Лагранжа.

С анзацем все; вернемся теперь к каноническому квантованию. Снова возьмем форму 1-го порядка S' и будем работать в калибровке Арновитта — Фиклера, полагая $A_3^a = 0$. Перепишем (5.39) в таком виде, чтобы стала явной зависимость от различных компонент тензора:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}' = & -\frac{1}{2}(F_{\mu\nu}^a)^2 + \frac{1}{2}F^{ija}(\partial_i A_j^a - \partial_j A_i^a + gc^{abc}A_i^b A_j^c)^2 + \\ & + F^{0ia}(\partial_0 A_i^a - \partial_i A_0^a + gc^{abc}A_0^b A_i^c) + \\ & + F^{03a}(-\partial_3 A_0^a) + F^{i3a}(-\partial_3 A_i^a), \end{aligned} \quad (5.40)$$

где i и j принимают значения 1, 2. Отметим значительное упрощение последних двух членов, обусловленное калибровочным условием. Теперь видно, что каноническое квантование выражения (5.40) проще охоты на рыбу в бочке: A_0^a , F^{ija} , F^{03a} , F^{i3a} — зависимые переменные; уравнения Эйлера — Лагранжа для них не содержат производных по времени и потому это не настоящие уравнения движения, а уравнения связи, которыми зависимые переменные на поверхности начальных данных определяются через остальные переменные A_i^a и F^{0ia} .

Обозначим действие, получающееся после исключения зависимых переменных, через S'' ; это функционал только от A_i^a и F^{0ia} . Кроме того, оно имеет гамильтонову форму, где A — канонические поля и F — сопряженные плотности импульсов. Поэтому можно написать функциональный интеграл, пользуясь выражением (4.61):

$$e^{iW} = N \prod_a \int (dF^{01a})(dF^{02a})(dA_1^a)(dA_2^a) e^{iS''}. \quad (5.41)$$

Но так как переменные связи входят в формулу (5.40) самое большее квадратично и коэффициенты в квадратичных членах — константы, выражение (5.41) можно представить в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} e^{iW} &= N \int (dF) \prod_a (dA_0^a)(dA_1^a)(dA_2^a) e^{iS^I} = \\ &= N \int (dF)(dA) \prod_a \delta(A_3^a) e^{iS^I}. \end{aligned} \quad (5.42)$$

А это и есть анзац Фаддеева — Попова [выражение (5.38)]. Ч. Т. Д.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Цепь рассуждений, которые мы изложили, показывает как силу, так и ограниченность функционально-интегральных методов. Функциональное интегрирование служит дополнением к каноническому квантованию, но не заменой ему. Например, при записи анзаца подынтегральное выражение можно было бы также и умножить на некоторую функцию величины $(F_{\mu\nu}^a)^2$. Результат был бы точно так же калибровочно-инвариантен и точно так же допустим априори, как и исходный анзац. Он был бы неправилен, но это нельзя было бы обнаружить, не обращаясь к каноническому квантованию. В то же время, коль скоро анзац подтвержден каноническим квантованием, с его помощью необычайно легко переходить от одной калибровки к другой. В частности, его можно использовать для перехода от калибровки, в которой несложно каноническое квантование, к калибровке, в которой просты правила Фейнмана.

2. Хотя об этом уже говорилось ранее, подчеркнем еще раз: все, что делалось в данном параграфе, носит чисто эвристический характер; мы не обращали никакого внимания на проблемы, связанные с ультрафиолетовыми расходимостями. Строго говоря, все следовало бы переделать заново, тщательно обращая внимание на обрезания, перенормировки и т.д. Такое строгое исследование было выполнено [25 — 29]; в результате оказалось, что эвристические аргументы не подвели нас: эти теории являются перенормируемыми; перенормировка не нарушает калибровочную инвариантность; духовые состояния не дают вклада в абсорбтивные части калибровочно-инвариантных функций Грина и т.п. Есть одно исключение: в теориях, в

которых некоторые из калибровочных преобразований являются киральными, наши рассуждения могут оказаться неверными из-за хорошо известных аномалий Адлера – Белла – Джакива. Но если трансформационные свойства фермиевских полей выбраны таким образом, что отсутствуют аномалии в треугольных диаграммах низшего порядка с калибровочными токами в вершинах, то аномалии отсутствуют вообще и все правильно¹⁾.

3. Некоторых беспокоит то, что формальный аппарат рассмотрения спонтанного нарушения симметрии, изложенный в § 3, не является калибровочно-инвариантным. Это верно: вакуумное среднее скалярного поля, эффективный потенциал, даже сами фейнмановские пропагаторы действительно являются калибровочно-неинвариантными величинами. Но это к делу не относится. В квантовой электродинамике мы постоянно проводим вычисления с использованием калибровочно-неинвариантных объектов типа пропагаторов в промежуточных состояниях. При этом мы не сделаем ошибок, если будем достаточно осторожны и выразим окончательные результаты через калибровочно-инвариантные величины типа масс и сечений. Возникновение спонтанного нарушения симметрии ничего не меняет в этом отношении; форма эффективного потенциала и положение его минимума действительно зависят от калибровки, но значения масс и сечений, вычисленных с помощью этих величин, от калибровки не зависят.

4. В конце § 3 указывалось, что многие предпочитают работать со сдвинутыми полями, определенными условием

$$\varphi' = \varphi - \langle \varphi \rangle, \quad (5.43)$$

и определять параметры $\langle \varphi \rangle$ в конце вычислений из условия самосогласованности. При таком способе есть одно неудобство – сдвиг генерирует билинейную скалярно-векторную связь, возникающую из лагранжевой плотности скаляров:

$$\frac{1}{2} D^\mu \varphi \cdot D_\mu \varphi + \dots = g d^\mu \varphi' \cdot A_\mu^a T_a \langle \varphi \rangle + \dots \quad (5.44)$$

Такая связь приводит к появлению смешанного скалярно-векторного пропагатора в фейнмановских правилах теории; в этом нет принци-

¹⁾ Хороший обзор по проблеме аномалий имеется в работе [45]. Следствия для калибровочных теорий обсуждаются в работах [46, 47].

пильных трудностей, но это неудобно на практике. Данный член можно устранить путем разумного выбора калибровки [48]. Выберем в качестве калибровочного условия равенство

$$F^a = \partial^\mu A_\mu^a - f^a(x) - \xi \varphi' \cdot T_a \langle \varphi \rangle, \quad (5.45)$$

где ξ — величина, которая будет определена позже. Если мы выполним теперь уже знакомую нам процедуру, то получим эффективную лагранжеву плотность вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{эфф}} = & \mathcal{L} + \partial_\mu \eta^a * D^\mu \eta^a - g \xi \eta^a * \eta^b (T_b \langle \varphi \rangle \cdot T_a \langle \varphi \rangle + \\ & + T_b \varphi' \cdot T_a \langle \varphi \rangle) - \frac{1}{2\alpha} (\partial^\mu A_\mu^a - \xi \varphi' \cdot T_a \langle \varphi \rangle)^2. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Поэтому, если выбрать

$$\xi = \alpha g, \quad (5.47)$$

то можно устранить неприятные перекрестные члены. Отметим, что взаимодействия в этой лагранжевой плотности все еще перенормируемого типа, т.е. размерности, не превышающей 4.

§ 6. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СВОБОДА

1. ПРОИЗВЕДЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ И ГЛУБОКО-НЕУПРУГОЕ ЭЛЕКТРОРОЖДЕНИЕ

Вопрос, к которому мы переходим, на первый взгляд не имеет прямого отношения к содержанию предыдущих лекций. Он связан с физикой сильных взаимодействий и представляет собой вопрос согласования скейлинга, наблюдаемого в экспериментах *SLAC - MIT* по электроррождению, с предсказаниями квантовой теории поля. Сначала я кратко напомним основные сведения по данной проблеме¹⁾.

1. В экспериментах по электроррождению в Стэнфорде измеряется полное сечение процесса

$$\text{электрон} + \text{нуклон} \rightarrow \text{электрон} + \text{все остальное},$$

¹⁾ Важный вклад в эту проблему внесло так много людей, что полный перечень ссылок на литературу занял бы больше места, чем весь п. 1. Хороший краткий обзор был сделан Калланом [49].

который, конечно, эквивалентен процессу

виртуальный фотон + нуклон \rightarrow все остальное.

Поэтому процесс описывается двумя кинематическими переменными: массой виртуального фотона q^2 , отрицательной величиной, и энергией E виртуального фотона в лабораторной системе отсчета. Величину E удобно заменить безразмерной переменной

$$x = -\frac{q^2}{2mE}, \quad (6.1)$$

где m — масса нуклона. Элементарная кинематика ограничивает значения x интервалом от 0 до 1. Нуклоны в эксперименте не поляризованы, а виртуальные фотоны могут быть либо поперечными, либо продольными; поэтому сечение можно характеризовать двумя безразмерными инвариантами $F_i(q^2, x)$, где i равно 1 или 2. Величины F_i называются структурными функциями; детали их определения для нас здесь несущественны.

Когда $-q^2$ растет, величины F_i очень быстро перестают зависеть от q^2 ; выше $q^2 = -(2 \text{ ГэВ})^2$ величины F_i оказываются функциями только x , в пределах экспериментальной ошибки. Данное явление называется бьёркеновским скейлингом. Имеются два подхода к объяснению бьёркеновского скейлинга.

1. Бьёркеновский скейлинг — это истинно асимптотическое явление. Он сохранится, даже если интервал значений q^2 сильно увеличится.

2. Энергии ускорителя SLAC слишком малы, так что вряд ли мы действительно достигли асимптотической области. Бьёркеновский скейлинг представляет собой некоторый тип низкоэнергетического поведения и ничего общего не имеет с истинным пределом высоких энергий.

В нашей лекции будет принята первая точка зрения, но вы должны понимать, что это просто "мнение". Вполне может быть, что верна вторая точка зрения: только эксперименты смогут решить этот вопрос.

Для удобства выразим все через моменты структурных функций:

$$F_i^n(q^2) = \int_0^1 dx x^n F_i(q^2, x). \quad (6.2)$$

Вопрос состоит в следующем: почему эти моменты становятся константами (в пределах экспериментальной ошибки), когда q^2 становится большим и пространственно-подобным?

2. Вилсон предложил разложение произведения операторов, которое было проверено во всех порядках перенормированной теории Калланом и Циммерманом. Это асимптотическое разложение произведения двух локальных операторов в случае, когда расстояние между ними мало, но нам удобнее представить разложение в импульсном пространстве. Пусть A и B — два любых локальных оператора (перенормированные полиномиальные функции канонических полей и их производных), и пусть $|a\rangle$ и $|b\rangle$ — два любые состояния. Тогда

$$\int a^{iqx} d^4x \langle a | A(x) B(-x) | b \rangle = \sum_c f_{ABC}(q) \langle a | C(0) | b \rangle, \quad (6.3)$$

если q стремится к евклидовой бесконечности. Сумма берется по полному набору локальных операторов (по всем перенормированным мономам от канонических полей и их производных). Данное разложение ценно тем, что скорость роста коэффициентов f в нем определяется путем простого анализа размерностей (с точностью до полиномиальной функции величины $\ln q^2$). (Это справедливо в любом конечном порядке теории возмущений; позже мы исследуем вопрос о том, могут ли эти полиномы накопиться и изменить асимптотическое поведение, если просуммировать ряд теории возмущений.) Поэтому при любых заданных A и B в любой конкретной теории поля главное асимптотическое поведение определяется вкладом только конечного набора операторов; высшие мономы дают меньшую степень q^2 .

Подчеркиваю, что коэффициенты f не зависят от $|a\rangle$ и $|b\rangle$. В частности, это означает, что разложение произведения операторов не меняется при возникновении спонтанного нарушения симметрии. Позже это окажется для нас существенным.

Если A , B и C отличны от лоренцевских скаляров, то величина f_{ABC} будет иметь нетривиальную тензорную структуру. Так как f является функцией только одного 4-вектора q , она имеет вид известной тензорной функции от q , умноженной на неизвестную скалярную функцию от q^2 . Для удобства умножим эту скалярную функцию на такую степень q^2 , чтобы она стала безразмерной. Получившуюся безразмерную скалярную функцию обозначим символом f_{ABC} .

3. Выбрав в качестве $|a\rangle$ и $|b\rangle$ однонуклонные состояния, а в качестве A и B — электромагнитные токи, можно, исходя из разложения произведения операторов, вывести выражения для моментов структурных функций. Выкладки просты, и я не буду проводить их; результат таков:

$$F_i^n(q^2) = \sum_C d_{iC}^n \bar{f}_{ABC}(q^2) \langle a | C(0) | b \rangle_R. \quad (6.4)$$

Здесь d — постоянные коэффициенты, члены меньшей степени по q^2 , нежели оставленные, опущены, индекс R означает редуцированный (скалярный) матричный элемент, и (в любой конкретной теории при фиксированных i и n) сумма распространяется только на конечный набор операторов C .

Итак, проблема теперь состоит в следующем: почему величины \bar{f} становятся константами (в пределах экспериментальной ошибки) при больших и отрицательных q^2 ?

При наличии логарифмических полиномов, о которых говорилось ранее, не очевидно, что теория поля предскажет такое поведение. Для конкретности рассмотрим теорию только с одной константой связи типа стандартной кварк-векторно-глюонной модели. Тогда теория возмущений для одной из величин \bar{f} дает, как правило, выражение вида

$$\bar{f} = a_0 + a_{11} g^2 \ln q^2 + a_{10} g^2 + a_{22} g^4 (\ln q^2)^2 + \dots \quad (6.5)$$

где a — постоянные коэффициенты. Поскольку нас интересует случай, когда велики и g (сильные взаимодействия), и q^2 (асимптотическое поведение), это выражение более чем бесполезно. Даже в (нереальном) случае малых g оно ничего не говорит об асимптотическом поведении, так как возрастание логарифма в конечном счете пересиливает малость g . Единственный случай, в котором можно предсказать асимптотическое поведение, — это свободная теория ($g = 0$); в этом случае величины f действительно оказываются константами. Поэтому иногда говорят, что при больших отрицательных g^2 эффекты взаимодействий как бы исчезают и теория ведет себя так, как если бы она была свободной. В данный момент этот способ описания бьёркеновского скейлинга может показаться вам слишком искусственным. Тем не менее мы покажем, что для некоторого клас-

са теорий все именно так и происходит. Но сначала необходимо развить определенную процедуру выхода за рамки теории возмущений и суммирования логарифмов в выражении (6.5).

2. БЕЗМАССОВЫЕ ТЕОРИИ ПОЛЯ И ГРУППА ПЕРЕНОРМИРОВОК¹⁾

В любой перенормируемой теории поля и во всех порядках теории возмущений можно показать, что асимптотическое поведение коэффициентных функций в разложении произведения операторов такое же, каким оно было бы в безмассовой теории. Под безмассовой я понимаю теорию, лагранжиан которой содержит только безразмерные константы связи; отсутствуют не только массы, но и взаимодействия с размерными константами связи типа кубичного самодействия мезонов. Высказанное утверждение нетрудно принять на веру: коэффициентные функции зависят только от одного импульса, а он стремится к евклидовой бесконечности, уходя, насколько это возможно, с массовой оболочки и потому утрачивая всякое "воспоминание" о массах. [Это не означает, что сами структурные функции такие же, какими они были бы в безмассовой теории. В выражении (6.4) мы имеем не просто \bar{f} , но и множитель $\langle a | C | b \rangle$, который остается на массовой оболочке.]

Итак, достаточно только проанализировать поведение \bar{f} в безмассовой теории. Безмассовая перенормируемая теория поля параметризуется набором перенормированных безразмерных констант связи, которые мы будем обозначать через g^a . Это могут быть либо константы связи Юкавы, либо константы четвертного самодействия мезонов, либо константы связи калибровочного поля. Кроме того, для полного описания требуется еще один параметр — масса M . Этот дополнительный параметр необходим для *определения* остальных (и является масштабом перенормированных полей).

Разрешите объяснить, почему это так, на примере простейшей перенормируемой теории поля $\lambda\phi^4$. В массивном варианте этой теории перенормированная константа связи λ обычно определяется как значение величины $\Gamma^{(4)}$ на массовой оболочке в симметричной точке $s = t = u$. [Иногда константу связи λ определяют как значение

¹⁾ Подробнее, со ссылками на литературу, вопрос излагается в моих лекциях [50] (которые со временем будут опубликованы).

величины $\Gamma^{(4)}$ при нулевых внешних импульсах аналогично формуле (3.17 б), но это то же самое в случае нулевой массы.] Перенормированное поле определяют как поле, масштаб которого выбран так, что производная величины $\Gamma^{(2)}$ на массовой оболочке (или иногда при нулевом импульсе) равна 1. В безмассовой теории, однако, эти определения непригодны; все пороги собираются в точку перенормировки, и, очевидно, неразумно определять λ как значение функции Грина в точке локализации бесконечного числа сингулярностей. Средство от этой болезни простое: мы определим λ как значение величины $\Gamma^{(4)}$ в некоторой точке в евклидовой области, где отсутствуют сингулярности даже в безмассовой теории. Например, можно было бы определить λ как значение величины $\Gamma^{(4)}$ в точке $s = t = u$ с квадратами всех внешних импульсов, равными $-M^2$. Величина M может быть выбрана произвольно. Любое ее значение одинаково хорошо, коль скоро оно отлично от нуля. Точно так же можно было бы определить масштаб поля, потребовав, чтобы производная величины $\Gamma^{(2)}$ равнялась единице при $p^2 = -M^2$. Эти определения очевидным образом можно обобщить на случай более сложных теорий с другими типами связей.

Итак, параметризация безмассовой теории поля требует введения массы M . Но величина M произвольна; если изменить величину M в данной физической теории, то это всегда можно компенсировать подходящим изменением g и масштаба перенормированных полей, поскольку роль M сводится лишь к определению этих величин. В математической записи, если мы немного изменим M :

$$M \rightarrow M(1 + \epsilon), \quad (6.6a)$$

где ϵ — бесконечно малая величина, то это всегда можно компенсировать путем малого изменения констант связи

$$g^a \rightarrow g^a + \beta^a \epsilon \quad (6.6b)$$

и соответствующего малого изменения масштаба перенормированных операторов, например

$$A(x) \rightarrow (1 + \gamma_A \epsilon) A(x). \quad (6.6b)$$

Из соображений размерности β и γ могут зависеть только от g :

$$\beta^a = \beta^a(g), \quad \gamma_A = \gamma_A(g), \quad (6.7)$$

где для простоты записи одной буквой g в аргументе функции мы обозначили все g^a . Если A — один из операторов из набора операторов, которые могут смешиваться друг с другом в результате перенормировки (как в случае, например, φ^4 и $\partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi$), соотношение (6.6в) следует заменить матричным соотношением. Но для простоты здесь мы игнорируем эти возможные осложнения.

Инфинитезимальными преобразованиями (6.6) определяется однопараметрическая группа, которую называют группой перенормировок. Все физические величины должны быть инвариантны относительно этой группы. В частности, должны быть инвариантны величины \tilde{f} , а поэтому

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta^a(g) \frac{\partial}{\partial g^a} + \gamma_{ABC}(g) \right] \tilde{f}_{ABC} = 0, \quad (6.8)$$

где

$$\gamma_{ABC} = \gamma_A + \gamma_B - \gamma_C. \quad (6.9)$$

Само собой разумеется, аналогичные уравнения могут быть выведены для любых других величин теории, в частности для функций Грина. Только γ -члены зависят от рассматриваемой величины.

Поскольку эти уравнения группы перенормировок абсолютно точные, они должны выполняться в каждом порядке перенормированной теории возмущений. Поэтому из разложения теории возмущений для функций Грина можно вывести такие разложения для β и γ . Если это проделать, например, в случае кварк-векторно-глюонной модели, то получим, что для β степенной ряд начинается с членов порядка g^3 , а для кваркового или глюонного γ — с членов порядка g^2 . Это естественно, так как β отражает эффекты перенормировки констант связи, которые начинаются в порядке g^3 , тогда как γ отражает перенормировку волновой функции, начинающуюся в порядке g^2 .

3. ТОЧНЫЕ И ПРИБЛИЖЕННЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ГРУППЫ ПЕРЕНОРМИРОВОК

Дифференциальные уравнения группы перенормировок — это математическое выражение того тривиального физического факта, что роль массы M сводится лишь к определению перенормированных кон-

стант связи и масштаба перенормированных полей. Тем не менее при благоприятных условиях с их помощью можно получить весьма нетривиальную информацию об асимптотическом поведении теории. Тут дело в основном в простых соображениях размерности; так как \bar{f} — безразмерная величина, мы имеем

$$\bar{f}_{ABC} = \bar{f}_{ABC} \left(\frac{Q}{M}, \varepsilon \right), \quad (6.10)$$

где $Q = \sqrt{-q^2}$. Поэтому, зная тривиальную зависимость от M , мы тем самым знаем нетривиальную зависимость от Q .

Разберем это подробно. Предположим, что мы знаем β и γ точно. Имеется стандартный метод [50] решения линейного дифференциального уравнения в частных производных

$$\left[M \frac{\partial}{\partial M} + \beta^a(g) \frac{\partial}{\partial g^a} + \gamma(g) \right] \bar{f} \left(\frac{Q}{M}, \varepsilon \right) = 0, \quad (6.11)$$

где для простоты опущен индекс ABC . Уравнение решается в два этапа: вначале строятся $g'^a(g, t)$, набор функций переменных g и одной дополнительной переменной t , определенных как решения обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{d}{dt} g'^a = \beta^a(g') \quad (6.12a)$$

с начальными условиями

$$g'^a(g, t) = g^a. \quad (6.12b)$$

После этого общее решение уравнения (6.11) находят как

$$\bar{f} = F \left(g' \left(g, \ln \left[\frac{Q}{M} \right] \right) \right) \exp \int_0^{\ln Q/M} \gamma(g'(g, t)) dt, \quad (6.13)$$

где F — произвольная функция. Таким образом, мы видим мощь группы перенормировок; если нам все известно при всех g в случае, когда $Q = M$, то нам все известно при всех g и в случае любого Q .

К сожалению, нам неизвестно все при всех g . Как правило, известны только несколько первых членов разложения в ряд по степеням g . Но даже в этом случае группа перенормировок позволяет вы-

жать дополнительную информацию. Чтобы показать, как это делается, вернемся к кварк-векторно-глюонной модели. Я уже объяснял, почему

$$\beta(g) = bg^3 + O(g^5), \quad (6.14)$$

где b — численный коэффициент. Прошу вас поверить на слово только в одном: если вы действительно проделаете соответствующие фейнмановские вычисления, то обнаружите, что β — положительная величина. Уравнение (6.12) принимает вид

$$\frac{d}{dt}g' = bg'^3 + O(g'^5). \quad (6.15)$$

Попытаемся теперь построить приближенное решение этого уравнения при малых g , пренебрегая членами порядка g^5 . Решение тривиально получается в квадратурах:

$$\frac{1}{g'^2} = \frac{1}{g^2} - 2bt, \quad (6.16)$$

или

$$g'^2 = \frac{g^2}{1 - 2bg^2t}. \quad (6.17)$$

Когда можно доверять этому приближенному решению? При больших положительных t приближенное g' становится большим и члены, которыми мы пренебрегли, становятся сравнимыми с оставленными членами. Для этой области t приближение никуда не годится. Когда же t велико и отрицательно, приближенное g' становится все меньше и меньше и поэтому члены, которыми мы пренебрегли, становятся все меньше и меньше по сравнению с оставленными членами. В этой области значений t приближение оказывается прекрасным.

Далее, когда мы подставляем g' в формулу (6.13), t превращается в $\ln(Q/M)$. Поэтому наше приближение становится все лучше и лучше с уменьшением Q . Кроме того, его можно улучшить, насколько мы этого пожелаем, просто путем дальнейшего вычисления по теории возмущений высших членов разложения β , γ и F .

В более общей форме можно сказать так. Обычное разложение по теории возмущений типа (6.5) применимо при двух условиях: при

$|g| \ll 1$ и $|\ln(Q/M)| \ll 1$. Изложенная приближенная схема заменяет их одним условием: $|g'| \ll 1$. Это единственное условие может выполняться в той области, где логарифм велик; в рассматриваемом случае она включает в себя область произвольно больших отрицательных значений $\ln(Q/M)$.

Произошло нечто замечательное: группа перенормировок приручила логарифмы в выражении (6.5). К сожалению, это не представляет физического интереса по двум причинам.

1. Чтобы можно было говорить о приближении, величина g должна быть мала. Нас же интересуют сильные взаимодействия.

2. Логарифмы можно усмирить в области малых Q — инфракрасной области. Нас же интересуют большие Q — ультрафиолетовая область. В области малых Q наш метод вообще не имеет смысла, так как при малых Q уже нельзя пренебрегать массами частиц.

Рассмотрим теперь другой пример: теорию чистого поля Янга — Милса для некоторой простой группы Ли. Здесь снова имеется только одна константа связи, и перенормировка константы связи начинается с порядка g^3 , так что едва ли это новый пример. Все будет точно так же, как и в кварк-векторно-глюонной модели. Различие может быть только в значении константы в формуле (6.15). А теперь я объявлю о замечательном открытии последнего года: величина b отрицательна [51, 52]¹⁾. (Это справедливо для любой простой группы Ли.)

Таким образом, предыдущий анализ встает с ног на голову: большие отрицательные t заменяются большими положительными t , инфракрасная область — ультрафиолетовой. Существует класс перенормируемых теорий поля, в которых логарифмы можно усмирить в ультрафиолетовой области! В этой области мы получаем с помощью низшего порядка теории возмущений и группы перенормировок приближение, которое становится все лучше и лучше, когда Q становится больше и больше. Кроме того, приближение можно улучшить, насколько мы захотим, просто вычисляя по теории возмущений высшие члены в разложении β , γ и F .

¹⁾ Для чисто янг-милсовской теории этот результат был известен 'т Офту летом 1972 г., но 'т Офт не опубликовал его.

4. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СВОБОДА

Обнаруженное свойство теории чистого поля Янга – Миллса представляет собой специальный случай явления, называемого асимптотической свободой. Говорят, что произвольная перенормируемая теория поля асимптотически свободна, если при малых g^a

$$\lim_{t \rightarrow \infty} g^{1^a}(g, t) = 0. \quad (6.18)$$

Все сказанное относительно чисто янг-миллсовской теории без изменения переносится на общую асимптотически свободную теорию, в частности асимптотическое поведение при больших Q вычисляется точно с помощью теории возмущений и группы перенормировок. В принципе легко проверить, является ли любая данная теория поля асимптотически свободной; единственное, что нужно сделать для этого, это вычислить β -функции в низшем неисчезающем порядке и затем решить дифференциальные уравнения (6.12). На практике проверку выполнить трудно: β -функции вычислить легко, но, как правило, дифференциальные уравнения не могут быть решены аналитически и необходимо в каждом конкретном случае обращаться к утомительному численному интегрированию. Таким образом, хотя были открыты многие асимптотически свободные теории и было доказано несколько общих теорем, что-либо типа полной классификации асимптотически свободных теорий отсутствует. Я сообщу вскоре, что известно о проблеме классификации; но вначале я хотел бы убедить вас, что асимптотическая свобода дает возможность объяснения бьёркеновского скейлинга.

На первый взгляд это нелепая идея. Асимптотическая свобода является свойством теорий поля с малыми константами связи, а бьёркеновский скейлинг представляет собой эффект сильных взаимодействий. Тем не менее, допустив небольшую вольность, связь можно найти. Для простоты рассмотрим асимптотически свободную теорию поля только с одной константой связи g . По предположению величина β отрицательна при малых положительных g . Обозначим первый положительный нуль величины β через g_1 . Несомненно, g_1 нельзя вычислять по теории возмущений; если бы нас попросили прикинуть порядок величины g_1 , то мы, вероятно, сказали бы, что g_1 — порядка 1 или π , а может быть, даже бесконечность (если β

не имеет нулей). Во всяком случае, g_1 определенно не может быть малым числом; при малых значениях констант связи мы доверяем теории возмущений, а теория возмущений говорит нам, что величина β отрицательна. Каково бы ни было значение g_1 , при любом g , меньшем g_1 , величина β отрицательна. Поэтому, если мы интегрируем уравнение

$$\frac{d}{dt}g' = \beta(g'), \quad (6.19)$$

начиная с такого g , то g' будет убывать. Когда мы продолжаем интегрировать уравнение, g' будет продолжать убывать, пока наконец не будет достигнута область малых g' , где справедлива формула типа (6.17). Поэтому асимптотические выражения, выведенные с помощью теории возмущений, улучшенной группой перенормировок, справедливы для теорий с большими константами связи так же, как и с малыми константами связи. Если нам очень повезет и β не имеет положительных нулей, то асимптотические выражения будут справедливы при всех значениях g .

Убывание от больших значений g' к малым может быть очень быстрым. Возьмем, например, результат низшего порядка теории возмущений, формулу (6.16), и предположим, что она справедлива не только при малых, а и при больших значениях константы связи. (Конечно, это предположение неверно; я принимаю его лишь для того, чтобы получить простую модель быстрого убывания.) Для чисто янг-миллсовской теории с калибровочной группой $SU(3)$ имеем

$$b = -\frac{11}{16\pi^2}. \quad (6.20)$$

Поэтому формула (6.16) принимает вид

$$\left(\frac{g'^2}{4\pi}\right)^{-1} = \left(\frac{g^2}{4\pi}\right)^{-1} + \frac{11t}{2\pi}. \quad (6.21)$$

Предположим теперь, что мы начинаем с некоторого очень большого значения величины $g^2/4\pi$ при $t = 0$, скажем 10^3 . Тогда, переходя к $t = 1$ (т.е. увеличивая Q в e раз), мы получаем $g'^2/4\pi = 2\pi/11$. Дальнейшее изменение происходит очень медленно; умножение Q на e снова приводит только к уменьшению g'^2 в 2 раза, а чтобы уменьшить g'^2 еще в 2 раза, нужно умножить Q на e^2 . Следовательно,

качественная картина такова: очень большая величина g' при малых импульсах мгновенно падает до малого значения и затем медленно идет к нулю.

Какой же тип асимптотического поведения мы предскажем для области малых g' ? Чтобы оценить выражение (6.13), нужно знать не только g' , но и γ . При малых g'

$$\gamma(g') = cg'^2 + O(g'^4), \quad (6.22)$$

где c — численный коэффициент. Из выражения (6.17) при больших t имеем

$$g'^2 \approx -\frac{1}{2bt}, \quad (6.23)$$

откуда

$$\gamma \approx -\frac{c}{2bt}. \quad (6.24)$$

Поэтому главный член в формуле (6.13) возникает от верхнего предела в интеграле; при больших t

$$\bar{f} \approx K \left[\ln \frac{Q}{M} \right]^{-c/2b}, \quad (6.25)$$

где K — константа. Это не бёркеновский скейлинг; моменты структурных функций являются не константами, а степенями логарифмов. Однако степень логарифма представляет собой очень медленно меняющуюся функцию. Я сам не изучал данные эксперимента *SLAC — MIT*, но те, кто видел их (оптимистическими глазами), сообщили мне, что их можно аппроксимировать степенями логарифма столь же хорошо, как и константами.

Отметим, что в любой конкретной модели эти степени можно вычислить, используя низший порядок теории возмущений¹⁾. Например, "популярная" модель цветных кварков с октетом цветных векторных глюонов является асимптотически свободной теорией с одной константой связи. В этой модели изотопически нечетные (протонные минус нейтронные) поперечные структурные функции имеют асимптотическую форму

$$F^{(n)} \sim (\ln Q)^{[-0.296 \ln(n+2) + 0.051]}. \quad (6.26)$$

¹⁾ Подробные вычисления см. в работах [53, 54].

Это очень малые степени при малых моментах ($-0,2$ при $n = 0$), которые медленно растут с n , достигая -1 только при $n = 27$. Конечно, так как мы не знаем постоянных коэффициентов моментов, мы не можем восстановить структурные функции из формул типа (6.26). Но легко построить функции, моменты которых удовлетворяют (6.26) и которые очень мало отклоняются от скейлинга при всех значениях x , кроме очень близких к 1. [Очень высокие моменты, очевидно, чувствительны к поведению $F(q^2, x)$ только в этой области.]

Если принять в качестве объяснения бьёркеновского скейлинга асимптотическую свободу, то любая теория поля сильных взаимодействий должна быть асимптотически свободной. (Бьёркеновский скейлинг не налагает никаких ограничений на слабые и электромагнитные взаимодействия; ими можно пренебречь в относящейся сюда области энергий.) Поэтому важно знать, какие теории поля являются асимптотически свободными. Сейчас нам известно следующее:

1. Все чисто янг-милсовские теории с группами, не содержащими инвариантных абелевых подгрупп, асимптотически свободны [51, 52].

2. Теории с неабелевыми калибровочными полями и мультиплетами фермионов иногда асимптотически свободны, а иногда нет. Фермионы дают положительный вклад в β -функцию; если в теории слишком много фермионов, знак β -функции меняется и асимптотическая свобода пропадает. "Слишком много" — это, как правило, большое число. Например, в случае калибровочной группы $SU(3)$ 16 триплетов фермионов не слишком много [51, 52].

3. Гораздо меньше известно о теориях с неабелевыми калибровочными полями и скалярными мультиплетами; как правило, эти теории включают большое число констант четверной связи мезонов, и это затрудняет исследование дифференциальных уравнений. Существуют некоторые теории, включающие скалярные поля, о которых известно, что они асимптотически свободны [51, 53]. В настоящее время неизвестны асимптотически свободные теории, в которых все калибровочные мезоны приобрели бы массу с помощью вакуумных средних скалярных полей¹⁾. Я не считаю это серьезной трудностью по двум причинам: 1) исследование находится пока на ранней стадии; такая

¹⁾ В последнее время примеры таких теорий были найдены [56, 58]. — *Прим. перев.*

теория может быть найдена на следующей неделе; 2) даже если никакой такой теории не найдено, мы все же говорим о моделях сильных взаимодействий; хотя связи могут стать слабыми при больших импульсах, они определенно сильные при малых импульсах и в этом случае может произойти спонтанное нарушение симметрии. Поэтому спонтанное нарушение симметрии может вполне произойти вне рамок теории возмущений, как говорилось в § 2, п. 6.

4. Любая перенормируемая теория поля без неабелевых калибровочных полей не является асимптотически свободной [55].

Последний результат имеет далеко идущие следствия. Если мы принимаем в качестве объяснения бёркеновского скейлинга асимптотическую свободу, то теория поля сильных взаимодействий должна быть асимптотически свободной. Если она должна быть асимптотически свободной, то она должна включать неабелевы калибровочные поля. Так как никто никогда не видел безмассовых адронов, эти калибровочные поля должны приобрести массы. Единственный известный механизм, с помощью которого калибровочные поля могут приобрести массы, — спонтанное нарушение симметрии. Поэтому *теория поля сильных взаимодействий должна быть спонтанно нарушенной калибровочной теорией поля.*

Мы получили замечательный результат, указывающий на глубокие связи между сильными и слабыми взаимодействиями. Он приводит к перевороту в наших обычных представлениях, существовавших всего лишь несколько лет назад. Раньше мы считали, что слабые взаимодействия становятся сильными при высоких (евклидовских) энергиях; теперь мы полагаем, что сильные взаимодействия становятся слабыми.

5. БЕЗ ЗАКЛЮЧЕНИЙ

Я не вижу способа сделать подходящее заключение этим лекциям, поскольку не знаю способа оценки справедливости изложенных идей. Это, несомненно, идеи замечательной красоты и они, конечно, решают многие старые теоретические проблемы. Но столь же несомненно и то, что они пока еще не сопоставлялись количественно с экспериментом. Спонтанно нарушенные калибровочные теории находятся в таком же неудобном положении, как, скажем, $SU(3)$ без формулы Гелл-Манна — Окубо или алгебра токов без соотношения

Адлера — Вайсбергера. Для этого имеются веские причины, которые разъяснялись во введении, но все же мы не можем не волноваться. Не исключено, что вся эта красивая и сложная структура будет свалена в мусорный ящик истории ударом молнии из Батавии. Все, что можно сказать, это подождем и посмотрим.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ОДНОПЕТЛЕВОЙ ЭФФЕКТИВНЫЙ ПОТЕНЦИАЛ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ

В этом дополнении вычисляется эффективный потенциал V в однопетлевом приближении для общей перенормируемой теории поля. Такая теория содержит три типа взаимодействий: самодействие бесспиновых мезонов, юкавскую связь мезонов и фермионов и взаимодействия калибровочных полей. Мы увидим, что в подходящей калибровке (калибровке Ландау) эти три типа взаимодействий дают аддитивный вклад в эффективный потенциал в однопетлевом приближении; поэтому

$$V = U + V_{\text{мез}} + V_{\text{ферм}} + V_{\text{калибр}} + V_{\text{контрчл}}, \quad (\text{П.1})$$

где первый член равен эффективному потенциалу в приближении без петель, следующие три члена — вклады трех указанных типов взаимодействий и последний член — полином 4-го порядка по ϕ_c , конечный остаток от перенормировочных контрчленов, определяемый после того, как сформулированы условия нормировки. Метод вычисления является прямым обобщением метода суммирования диаграмм из § 3¹⁾.

1. *Вклад бесспиновых мезонов.* В этом случае анализ почти тождественен рассуждениям § 3; единственное отличие в том, что мезонных полей может быть много. Поэтому каждая внутренняя линия диаграмм фиг. 5 должна быть снабжена индексом a , b и т.д., нумерующим мезонное поле, а черные точки представляют собой матрицы перехода мезона типа a в мезон одного из типов b :

$$i[U''(\phi_c)]_{ab} = i \frac{\partial^2 U}{\partial \phi^a \partial \phi^b} \Big|_{\phi = \phi_c}. \quad (\text{П.2})$$

¹⁾ Вычисления можно выполнить также методом функционального интегрирования [28, 33].

При вычислении диаграмм следует не только интегрировать по внутренним импульсам, но и суммировать по внутренним индексам. Это эквивалентно перемножению матриц вдоль петли и последующему взятию следа. Поэтому из формулы (3.33) получаем

$$V_M = \frac{1}{64\pi^2} \text{Sp} ([U''(\varphi_c)]^2 \ln U''(\varphi_c)) . \quad (\text{П.3})$$

2. *Вклад фермионов.* В этом случае диаграммы тоже почти такие же, как и на фиг. 5; единственное отличие состоит в том, что внутренние линии являются фермионными. (Поэтому нужно считать, что они снабжены стрелкой.) Соответствующий член в лагранжиане таков:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}^a \not{\partial} \psi^a + \bar{\psi}^a m_{ab}(\varphi) \psi^b + \dots . \quad (\text{П.4})$$

Здесь величина m равна сумме двух членов: постоянного члена (массы фермионов) и члена, линейного по φ (связь Юкавы). Ее можно разбить на две части и другим способом:

$$m = A + iB\gamma_5 . \quad (\text{П.5})$$

(Я использую эрмитову матрицу γ_5 .) Из эрмитовости лагранжиана следует эрмитовость матриц A и B . Обозначение m для этой матрицы выбрано потому, что $m(\langle\varphi\rangle)$ есть массовая матрица фермионов в приближении без петель.

Можно добиться, чтобы вычисление выглядело аналогично предыдущему, сгруппировав члены парами:

$$\dots m \frac{1}{\not{p}} m \frac{1}{\not{p}} \dots = \dots m m^+ \frac{1}{p^2} \dots . \quad (\text{П.6})$$

Теперь различие в вычислениях в случаях фермионов и бозонов состоит только в следующем: 1) отсутствует комбинаторный множитель $\frac{1}{2}$, так как линии имеют стрелки, вследствие чего диаграммы неинвариантны относительно отражений; 2) это компенсируется тем, что нечетные члены в бесконечном ряду исчезают после взятия следа по дираковским матрицам; 3) имеется общий фермиевский знак минус. Поэтому получаем

$$V_{\text{ферм}} = -\frac{1}{64\pi^2} \text{Sp} ([m m^+(\varphi_c)]^2 \ln m m^+(\varphi_c)) . \quad (\text{П.7})$$

Здесь берется след не только по внутренним, а и по дираковским индексам.

3. *Вклад калибровочного поля.* В калибровке общего вида трилинейная связь калибровочных и бесспиновых мезонов может привести к сложным диаграммам типа показанных на фиг. 6. (Здесь прямой линией обозначен бесспиновый мезон, а волнистой — калибровочное поле.) Но в калибровке Ландау

$$D_{\mu\nu} = -\frac{i}{k^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \right) \quad (\text{П.8})$$

эти диаграммы исчезают. Это связано с тем, что импульс внешнего мезона равен нулю, а сумма импульсов мезонов равна импульсу калибровочного поля, что дает нуль после умножения на них пропагатора (П.8). Поэтому нужно беспокоиться только о четверной связи



Ф и г. 6.

$$\mathcal{L} = \dots + \frac{1}{2} A_{\mu a} A_b^\mu M_{ab}^2 (\varphi) + \dots, \quad (\text{П.9})$$

где

$$M_{ab}^2 = g_a g_b (\Gamma_a \varphi) \cdot (\Gamma_b \varphi) \quad (\text{П.10})$$

и g_a есть константа связи с a -м калибровочным полем.

Величина $M^2(\langle \varphi \rangle)$ — это массовая матрица калибровочного поля в приближении без петель, вследствие чего она была так обозначена.

Вычисление теперь во всем тождественно предыдущему случаю, кроме того, что в этом случае петля образована калибровочными полями. Имеем

$$V_{\text{калибр}} = \frac{3}{64\pi^2} \text{Sp}([M^2(\varphi_c)]^2 \ln M^2(\varphi_c)). \quad (\text{П.11})$$

Множитель 3 возникает от следа пропагатора (П.8).

ЛИТЕРАТУРА¹⁾

1. *De Rujula A.*, в книге: *Proceedings of the First International Meeting on Fundamental Physics.*
2. *Abers E.S., Lee B.W.* (см. стр. 241 настоящего сборника).
3. *Primack J.R., Quinn H.R.* (в печати).
4. *Llewellyn-Smith C.H.*, CERN preprint TH-1710.
5. *Veltman M.* (в печати).
6. *Goldstone J.*, *Nuovo Cimento*, **19**, 15 (1961).
7. *Nambu Y., Jona-Lasinio G.*, *Phys. Rev.*, **122**, 345 (1961); **124**, 246 (1961).
8. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.*, *Phys. Rev.*, **127**, 965 (1962).
9. *Kastler D., Robinson D., Swieca J.*, *Comm. Math. Phys.*, **3**, 151 (1966).
10. *Englert F., Brout R.*, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 321 (1964).
11. *Higgs P.*, *Phys. Lett.*, **12**, 132 (1964).
12. *Guralnik G., Hagen C., Kibble T.*, *Phys. Rev. Lett.*, **13**, 585 (1964).
13. *Higgs P.*, *Phys. Rev.*, **145**, 1156 (1966).
14. *Kibble T.*, *Phys. Rev.*, **155**, 1554 (1967).
15. *Yang C.N., Mills R.*, *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954) (имеется перевод в сб.: "Элементарные частицы и компенсирующие поля", изд-во "Мир", М., 1964).
16. *Utiyama R.*, *Phys. Rev.*, **101**, 1597 (1956) (имеется перевод в сб.: "Элементарные частицы и компенсирующие поля", изд-во "Мир", М., 1964).
17. *Glashow S., Gell-Mann M.*, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **15**, 437 (1961) (имеется перевод в сб.: "Элементарные частицы и компенсирующие поля", изд-во "Мир", М., 1964).
18. *Jackiw R., Johnson K.*, MIT preprint; *Phys. Rev.* **D8**, 2386 (1973).
19. *Cornwall J., Norton R.*, UCLA preprint; *Phys. Rev.*, **D 8**, 3338 (1973).
20. *Jackiw R.*, в книге: *Proceedings of the 1973 International School of Physics "Ettore Majorana"*.
21. *Schwinger J.*, *Phys. Rev.*, **128**, 2425 (1962).
22. *Thirring W., Wess J.*, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **27**, 331 (1964).

¹⁾ Литература, помеченная звездочкой, добавлена при переводе. —
Прим. ред.

23. *Lowenstein J., Swieca J.*, Ann. Phys. (N. Y.), **68**, 172 (1971).
24. *Coleman S.*, в книге: Proceedings of the 1971 International School of Physics "Ettore Majorana".
25. *Славнов А.*, ТМФ, **10**, 153 (1972).
26. *'t Hooft G., Veltman M.*, Nucl. Phys., **44B**, 189 (1973).
27. *'t Hooft G.*, Nucl. Phys., **B33**, 173 (1971); **B35**, 167 (1971).
28. *Lee B., Zinn-Justin J.*, Phys. Rev., **D 5**, 3121, 3137, 3155 (1972).
29. *Abers E.S., Lee B.*, в книге: Proceedings of the First International Meeting on Fundamental Physics.
30. *Coleman S., Weinberg E.*, Phys. Rev., **D 7**, 1888 (1973).
31. *Jona-Lasinio G.*, Nuovo Cimento, **34**, 1790 (1964).
32. *Nambu Y.*, Phys. Lett., **26B**, 626 (1966).
33. *Jackiw R.*, MIT preprint.
34. *Symanzik K.*, Comm. Math. Phys., **16**, 48 (1970).
35. *Heizenberg W., Euler H.*, Zs. Physik, **98**, 714 (1936).
36. *Schwinger J.*, Phys. Rev., **82**, 664 (1951) (имеется перевод в сб.: "Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, М., 1954, стр. 254).
37. *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett., **29**, 1698 (1972).
38. *Feynman R., Hibbs A.*, Quantum mechanics and Path Integrals, McGraw-Hill, 1965 (имеется перевод: *Фейнман Р., Хибс А.*, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд-во "Мир", М., 1968).
39. *Гельфанд И.М., Виленкин Н.Я.*, Обобщенные функции, вып. 4, ФМ, 1961.
40. *Cheng K.S.*, Journ. Math. Phys., **13**, 1723 (1972).
41. *Feynman R.P.*, Phys. Rev., **84**, 108 (1951).
42. *DeWitt B.S.*, Rev. Mod. Phys., **29**, 377 (1957).
43. *Faddeev L., Popov V.*, Phys. Lett., **25B**, 29 (1969).
- 43а. *Попов В.Н., Фаддеев Л.Д.*, Теория возмущений для калибровочных полей, ИТФ-67-36, Киев, 1967.
44. *Arnowitz R., Fickler S.*, Phys. Rev., **127**, 1821 (1962).
45. *Jackiw R.*, в книге: Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton U.Press, 1970.
46. *Gross D., Jackiw R.*, Phys. Rev., **D6**, 477 (1972).
47. *Bardeen W.A.*, в книге: Proceedings of the XVI International Conference on High Energy Physics, Vol. 2, NAL, 1972.
48. *Fujikawa K., Lee B., Sanda A.*, Phys. Rev., **D6**, 2923 (1972).
49. *Callan C.G.*, в книге: Proceedings of the International School of Physics "E. Fermi", Course LIV, Academic Press, 1972.

50. *Coleman S.*, в книге: *Proceedings of the 1971 International School of Physics "Ettore Majorana"* (в печати).
51. *Gross D., Wilczek F.*, *Phys. Rev. Letters*, **30**, 1343 (1973).
52. *Politzer H.D.*, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 1346 (1973).
53. *Gross D., Wilczek F.*, *Phys. Rev.*, **10D**, 3633 (1974).
54. *Georgi H., Politzer H.D.*, *Phys. Rev.*, **9D**, 416 (1974).
55. *Coleman S., Gross D.*, *Phys. Rev. Lett.*, **31**, 851 (1973).
- 56* *Chang N.-P.*, *Phys. Rev.*, **D10**, 2706 (1974).
- 57* *Воронов Б.А., Тютин И.В.*, *Письма ЖЭТФ*, **21**, 369 (1975); лекция на VIII Всесоюзной школе по физике элементарных частиц (Ереван, 8 – 19 апреля 1975 г.).
- 58* *Fradkin E.S., Kalashnikov O.K.*, *Journ. Phys.*, **A 8**, 1814 (1975).

Спонтанное нарушение симметрии, калибровочные теории, механизм Хиггса и т.п.

Дж. Бернстейн

*Jeremy Bernstein**, *Review of Modern Physics*, **46**, 7 (1974)

Представлен более или менее самостоятельный вводный обзор литературы по так называемому явлению Хиггса. Явление Хиггса — это механизм, который позволяет фотону и гипотетическим голдстоуновским скалярным мезонам совместно образовать массивные векторные мезоны за счет спонтанного нарушения калибровочной инвариантности в определенном классе калибровочных теорий. Возможно, что именно так природа предпочла объединить слабые и электромагнитные взаимодействия. Надеемся, что прочитавшему наш обзор станет понятен смысл первых трех фраз аннотации и он тогда сможет противостоять быстро растущему потоку литературы по калибровочным теориям.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Создается впечатление, что в теории элементарных частиц мода меняется каждые два-три года. Достаточно перечислить несколько названий, ставших хорошо известными в последние годы: перенормируемые теории поля, дисперсионные соотношения, сохраняющиеся и частично сохраняющиеся токи, алгебры токов, полюса Редже и т.д. и т.п. Когда какие-либо разделы теории усиленно развиваются, у большинства работающих над ними ученых нет ни времени, ни желания возвращаться назад и читать самую раннюю литературу по рассматриваемому вопросу. В результате вырабатывается набор стандартных ссылок, а работы, относящиеся к ним, часто цитируются и редко читаются. Если же действительно вернуться назад, чтобы прочитать

*Stevens Institute of Technology, Hoboken, New Jersey.

© 1974 by the American Physical Society.

© Перевод на русский язык, "Мир", 1977.

эти ранние статьи, то часто удивляешься тому, как много их авторы понимали или предугадывали, и приходишь к заключению, что такие статьи, если их привести в порядок и объединить, окажутся, вероятно, наилучшим введением в интересующий нас предмет. Таковы и будут дух и методология данного обзора. Добавлять от себя что-либо новое автор не собирается.

План наступления таков. Мы начинаем (в § 2) с 1960 г., когда Намбу [45, 46] заметил, что в слабых взаимодействиях в предельном случае мира, в котором масса π -мезона равна нулю, оказывается возможной естественная интерпретация сохраняющегося аксиального векторного тока с $\Delta S = 0$. Почти в то же время Гелл-Манн и Леви [19] построили несколько теоретико-полевых моделей, в которых, как было показано, подобная ситуация возникает как следствие уравнений поля рассматриваемой модели. Для нас в данном обзоре наибольший интерес из этих моделей представляет так называемая σ -модель. В ее простейшем варианте в лагранжиан входят три основных поля: пионный изотопический вектор, нуклонный изотопический дублет и изотопический синглет, являющийся лоренцевским скаляром, σ -мезон. Последний из них имеет квантовые числа "некоего вакуумного состояния" по отношению к сильным взаимодействиям. Мы намеренно говорим "некое вакуумное состояние", так как в этом классе теорий существует, вообще говоря, бесконечный набор ортогональных состояний, обладающих тем свойством, что

$$H | 0 \rangle = 0, \quad (11)$$

где H — гамильтониан рассматриваемой теории, а $| 0 \rangle$ — один из вакуумов. Поскольку σ имеет квантовые числа вакуума, никакой принцип симметрии не требует обращения в нуль его вакуумного среднего, т.е. возможно, что

$$\langle 0 | \sigma(x) | 0 \rangle = \langle 0 | \sigma(0) | 0 \rangle = \lambda \neq 0, \quad (1.2)$$

где λ — действительное число, а σ — эрмитов оператор с размерностью массы. Мы предполагаем, что

$$\sigma(x) = \exp[-i(Px)] \sigma(0) \exp[i(Px)], \quad (1.3)$$

где

$$(Px) = P \cdot x - P_0 t, \quad (1.4)$$

а P_μ — генераторы пространственно-временных сдвигов (заметим, что здесь и всюду далее сигнатура метрики такова: + + + -. Мы всегда считаем, что

$$P_\mu |0\rangle = 0. \quad (1.5)$$

Если же мы хотим интерпретировать σ -поле в терминах частиц, то мы должны переопределить его таким образом, чтобы выполнялось соотношение

$$\langle 0 | \sigma^\dagger(0) | 0 \rangle = 0, \quad (1.6)$$

где

$$\sigma^\dagger(x) = \sigma(x) - \lambda, \quad (1.7)$$

иначе "вакуум" и одночастичное состояние не будут ортогональны. Как мы увидим далее, лагранжиан σ -модели можно выбрать таким образом, чтобы вначале пион и σ -мезон имели ненулевую "голую" массу. Нуклоны при этом кажутся безмассовыми, но в действительности приобретают массу, которая пропорциональна λ — вакуумному среднему поля σ . Чтобы в такой теории добиться точного сохранения аксиального векторного тока A_μ , необходимо голую массу пиона положить равной нулю. Это, как оказывается, соответствует пределу, в котором теория инвариантна по отношению к группе $SU(2) \times SU(2)$, т.е. точной киральной инвариантности теории. Следовательно, при подобном способе реализации симметрии появляются бозоны с нулевой массой, в данном случае — пионы. В 1961 г. Голдстоун [22] высказал предположение, что бозоны с нулевой массой будут появляться неизбежно, если, как и в σ -модели, симметрия реализуется в теории так, что лагранжиан полностью инвариантен относительно некоторой непрерывной группы, а вакуум неинвариантен при действии этой группы. (В σ -модели, как мы увидим, аксиальные заряды не обращают в нуль вакуум, и поэтому возможно соотношение $\langle 0 | \sigma(0) | 0 \rangle \neq 0$, так что нуклоны приобретают массу.) Такая гипотеза выглядела полностью доказанной в статье Голдстоуна, Салама и Вейнберга [23]¹⁾, которые представили несколько ее "доказательств". В следующем параграфе мы приведем доказательство Гильберта [21], в котором особенно ясно видны используемые при этом предположения.

¹⁾См. также [9].

Таким оставалось положение дел до 1964 г., когда Хиггс [27] в ответ на доказательство Гильберта показал, что в нем есть лазейка¹⁾. Как мы увидим, в рассуждениях Гильберта, которые, по существу, были переформулировкой одного из доказательств, изложенных в статье Голдстоуна и др. [23], используется "явная ковариантность" некоторых матричных элементов. В сущности это значит, что если мы рассматриваем матричный элемент оператора J_μ , представляющего собой лоренцевский 4-вектор, то матричные элементы этого оператора должны строиться только из уже имеющихся под рукой ковариантов, которые в данном случае преобразуются как 4-векторы. Известный пример — матричный элемент тока между состояниями $|P\rangle$ и $|P'\rangle$ с нулевым спином и 4-импульсами P и P' , когда вследствие ковариантности

$$\langle P' | J_\mu(0) | P \rangle = (P + P')_\mu F_+(q^2) + (P - P')_\mu F_-(q^2), \quad (1.8)$$

где $F_\pm(q^2)$ — произвольные "формфакторные" функции переменной $q^2 = (P - P')^2$.

Не существует никаких других 4-векторов, которые можно построить из 4-импульсов P и P' .

Приводя такие аргументы, следовало бы быть уверенным в том, что рассматриваемый оператор J_μ действительно представляет собой 4-вектор, а не какой-нибудь другой объект тоже с четырьмя компонентами, но обладающий более сложными трансформационными свойствами. На самом деле, как подчеркнул Хиггс, фотонное поле $A_\mu(x)$ является как раз таким объектом, а не 4-вектором. Подробнее мы займемся этим в § 3, а здесь напомним читателю, что условие "радиационной калибровки"

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0 \quad (1.10)$$

явно нековариантно. Это значит, что если мы хотим сохранить поперечность фотона во всех лоренцевских системах отсчета, то фотон-

¹⁾Некоторое указание на роль ковариантности содержится в работе Клейна и Б.В. Ли [36]. Проф. Салам указал автору, что истинным праотцем здесь следовало бы считать Андерсона [2], поскольку он отметил, что в модели БКШ для электронов можно было бы избежать появления голдстоуновских частиц, если включить дальнедействующее кулоновское взаимодействие. Это и есть преобраз механизма Хиггса.

ное поле $A_\mu(x)$ не может преобразовываться как 4-вектор¹⁾. В этом нет катастрофы, так как фотонное поле не наблюдаемо, и можно легко сказать, что элементы S -матрицы, которые являются наблюдаемыми, имеют ковариантную структуру. В своей заметке 1964 г. Хиггс [27] показал, что в калибровочных теориях можно все устроить таким образом, чтобы симметрия нарушалась вследствие неинвариантности вакуума, но, поскольку доказательство Голдстоуна и др. [23] при этом не проходит, голдстоуновские бозоны не обязаны появляться.

В последующей заметке Хиггс [28] построил лагранжеву модель калибровочной теории (в сущности заряженную скалярную электродинамику, в которой скалярное поле не имеет голой массы, но зато имеет самодействие заданного типа). На примере этой модели можно было видеть, как гипотетические голдстоуновские бозоны перестают фигурировать в теории в качестве наблюдаемых частиц. Более того — происходит нечто поистине замечательное: из теории исчезает и фотон с нулевой массой! Говоря конкретнее, дело обстоит так. Мы начинаем с лагранжиана Хиггса²⁾, описывающего фотон $A_\mu(x)$ и эрмитовы поля $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$, которые комбинируются таким образом, чтобы получились заряженные поля $\varphi^\pm(x) = [\varphi_1(x) \pm i\varphi_2(x)]/\sqrt{2}$. Голые массы всех этих объектов выбираются равными нулю, так что лагранжиан инвариантен относительно преобразований вида (подробности см. в § 4)

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + (1/e_0)(\partial/\partial x^\mu) \Lambda(x), \quad (1.11)$$

$$\varphi_1(x) \rightarrow \varphi_1(x) \cos \Lambda(x) + \varphi_2(x) \sin \Lambda(x), \quad (1.12)$$

$$\varphi_2(x) \rightarrow -\varphi_1(x) \sin \Lambda(x) + \varphi_2(x) \cos \Lambda(x), \quad (1.13)$$

где e_0 — затравочный электрический заряд, а $\Lambda(x)$ — произвольная "калибровочная функция" пространственно-временных координат. Ка-

¹⁾ Можно использовать ковариантную "лоренцевскую калибровку" $(\partial/\partial x_\mu) A_\mu(x) = 0$. Но тогда появляются нежелательные степени свободы и возникают свои трудности в доказательстве Голдстоуна и др. [23]. Эти трудности были проанализированы Кибблом [35], и мы остановимся на них в § 4.

²⁾ Рассматриваемый в этой статье лагранжиан является калибровочно-инвариантным обобщением первоначального лагранжиана Голдстоуна [22].

либровку можно выбрать так, чтобы выполнялись равенства

$$\langle 0 | \varphi_1(0) | 0 \rangle = 0, \quad (1.14)$$

$$\langle 0 | \varphi_2(0) | 0 \rangle = \eta. \quad (1.15)$$

Тогда оказывается, что $\varphi_2(x)$ приобретает массу, а $\varphi_1(x)$, объединившись с $A_\mu(x)$, образует векторное поле

$$B_\mu(x) = A_\mu(x) - (1/e_0\eta)(\partial/\partial x^\mu) \varphi_1(x), \quad (1.16)$$

которое фактически удовлетворяет уравнениям движения массивного векторного поля с массой $e_0\eta$. И действительно, как показал Хиггс в последующей публикации [29], коль скоро мы поняли, что именно к этому идет дело, мы можем переписать первоначальный лагранжиан таким образом, чтобы единственными входящими в него полями были массивное скалярное поле и массивное векторное поле со сложным нелинейным взаимодействием между ними. Теория, записанная в таком виде, не обнаруживает никаких следов своего калибровочно-инвариантного электромагнитного происхождения. Подобная процедура, в результате которой векторный мезон приобретает массу, в современной литературе называется "механизмом Хиггса", а скалярные поля с исчезающими вакуумными средними в таких теориях в настоящее время известны под названием "хиггсовских полей".

Между 1964 и 1967 гг. был получен ряд интересных результатов технического характера. В 1964 г. Энглерт и Браут [14] открыли механизм Хиггса независимо, идя другим путем, о котором будет сказано в § 5. Они тоже изучали скалярную электродинамику, в которой калибровочная симметрия нарушается ненулевыми вакуумными средними скалярного поля. Но вместо того, чтобы иметь дело с уравнениями движения, они проквантовали теорию, используя правила, аналогичные правилам Фейнмана. Новым интересным моментом здесь оказалось то, что существуют диаграммы, в которых испущенный скалярный мезон просто исчезает в вакууме. Такие диаграммы дают вклад в вакуумный поляризационный оператор фотона, которым, как хорошо известно, определяется пропагатор взаимодействующего фотона. Энглерт и Браут показали в низшем нетривиальном порядке, что такие диаграммы сдвигают полюс "фотонного" пропагатора из точки $q^2 = 0$ в точку $q^2 = -e_0^2\eta^2$ (здесь используются те же обозначения, что и выше). Это, конечно, явление Хиггса. Кроме того, они

обобщили этот результат на случай, когда группа калибровочной симметрии является не просто абелевой группой фазовых преобразований $U(1)$, а некоторой произвольной компактной группой Ли. В этом случае любой генератор, который не обращает вакуум в нуль, будет благодаря механизму Хиггса индуцировать появление массы у соответствующего "фотона" при условии, что одновременно вводятся и хиггсовские скаляры. В реальном мире существует только один безмассовый векторный мезон — фотон, и с хиггсовской точки зрения он остается безмассовым потому, что вакуум не обладает собственным электрическим зарядом¹⁾. Электрический заряд Q_γ должен обращать вакуум в нуль, т.е.

$$Q_\gamma |0\rangle = 0. \quad (1.17)$$

В том же 1964 г. Гуральник, Хаген и Киббл [25] исследовали электродинамические модели Энглерта и Браута и Хиггса и отметили одно важное обстоятельство: в этих моделях условие локальной симметрии

$$(\partial/\partial x^\mu) J_\mu(x) = 0 \quad (1.18)$$

не означает, что величина

$$Q = \int d^3x J_0(x, t) \quad (1.19)$$

не зависит от времени. В действительности в этих теориях даже математическое существование такого рода глобальных зарядов является весьма деликатным вопросом²⁾. Наконец, в 1967 г. Киббл [35] представил элегантную математическую трактовку различных моделей, рассмотренных ранее, и, в частности, показал, что нарушение теоремы Голдстоуна в калибровочных теориях можно, как и следовало ожидать, продемонстрировать и в лоренцевской калибровке, характеризуемой явно ковариантным условием

$$(\partial/\partial x_\mu) A_\mu(x) = 0. \quad (1.20)$$

Дело здесь обстоит так: доказательство Голдстоуна и др. проходит, поэтому голдстоуновские частицы, очевидно, существуют. Но они,

¹⁾Если бы это было не так, то никакое одночастичное состояние не обладало бы определенным электрическим зарядом.

²⁾Эти и многие другие, связанные с ними вопросы рассматриваются в прекрасной обзорной статье Гуральника и др. [25].

оказывается, отщепляются от всех остальных полей, и их можно просто отфакторизовать из теории.

Справедливости ради следует, вероятно, отметить, что хотя никто и не сомневался в правильности этих доказательств, никто и не верил до конца, что природа так дьявольски хитра, чтобы воспользоваться ими. Фактически и сейчас, когда пишутся эти строки, никто не может быть уверен в том, что природа действительно воспользовалась ими. Но в 1967 г. Вейнберг [52] предложил способ применения этих идей в теории слабых и электромагнитных взаимодействий, который впоследствии убедил многих теоретиков в том, что природа *должна была бы* воспользоваться возможностями, открывающимися в калибровочных теориях с калибровочно-неинвариантными вакуумами. Мы рассмотрим обстоятельно эту модель и ее обобщения в § 7 и 8, а здесь хотим дать о ней лишь некоторое представление. Хорошо известно, что когда Ферми [16] построил первую теоретико-полевую модель β -распада, он выбрал взаимодействие, по возможности более похожее на взаимодействие в квантовой электродинамике. В теории Ферми лептоны взаимодействуют с нейтронами и протонами слабым образом через "токи" вида

$$J_{\mu}(x) = i \bar{\psi}_e(x) \gamma_{\mu} \psi_{\nu}(x), \quad (1.21)$$

а заряженные частицы взаимодействуют с адронами через сохраняющиеся токи вида

$$J_{\mu}(x) = i \bar{\psi}_e(x) \gamma_{\mu} \psi_e(x). \quad (1.22)$$

Имеется, конечно, ряд очевидных различий между электромагнетизмом и β -распадом, и только о некоторых из них Ферми мог знать в 1934 г. Мы перечислим несколько таких различий.

1. Как известно, фотон существует. Таким образом, электромагнитное взаимодействие действительно имеет вид (в низшем нетривиальном порядке)¹⁾

$$H_{em} = e_0^2 \iint J_{\mu}^{(em)}(x) D^{\mu\nu}(x-y) J_{\nu}^{(em)}(y) d^4x d^4y, \quad (1.23)$$

где $J_{\mu}^{(em)}(x)$ — сохраняющийся электромагнитный ток, а $D^{\mu\nu}(x-y)$ — фотонный пропагатор. Все данные по электромагнитным взаимодействиям

¹⁾ Это эффективные безразмерные элементы S-матрицы.

ям, согласуются с тем, что масса фотона равна нулю, а это означает, что в низкоэнергетическом, статическом пределе потенциал взаимодействия двух заряженных частиц имеет вид кулоновского потенциала $1/|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$.

О существовании же слабого фотона, по крайней мере в тот момент, когда пишутся эти строки, ничего не известно. В то же время известно, что эффективное слабое взаимодействие вида

$$H_{\text{сл}} = G \int J^{(\text{сл})\mu}(x) J_{\mu}^{(\text{сл})}(x) d^4 x \quad (1.24)$$

хорошо согласуется со всеми экспериментальными данными по слабым взаимодействиям при сравнительно низких энергиях. Если его считать точным, то оно соответствует взаимодействию "ток \times ток", переносимому слабым фотоном с бесконечной массой. Несомненно, что по крайней мере некоторые из слабых фотонов, если они существуют, должны быть заряженными. Ток $J_{\mu}(x)$, например, изменяет заряд на единицу, и все имеющиеся в настоящее время данные вполне согласуются с гипотезой о существовании заряженного слабого фотона с массой не менее 5 ГэВ. Следовательно, электромагнитное взаимодействие очень сильно отличается от слабого массой носителя.

2. Слабые взаимодействия "слабы", а электромагнитные — нет. С первого взгляда может показаться, что это-то и наносит смертельный удар по всем надеждам на объединение двух типов связи. Но именно разница в массах между слабым и электромагнитным фотонами может спасти положение. Величина $H_{\text{ем}}$ определенная выше, безразмерна, хотя $J^{(em)}$ имеет размерность E^3 , а $D^{\mu\nu}(x)$ имеет размерность E^2 . (Здесь через E обозначена размерность энергии, или обратной длины.) Поэтому величина e_0^2 безразмерна. Однако таким же путем мы устанавливаем, что G имеет размерность $(1/E^2)$. В теории со слабым фотоном оказывается, что

$$G = c (g^2/m_w^2), \quad (1.25)$$

где g — слабый безразмерный заряд, m_w — масса слабого фотона и c — числовая константа, зависящая от рассматриваемой теории. (В теории Вейнберга [52]¹⁾ $c = 1/4\sqrt{2}$.) Так как величина m_w не из-

¹⁾См. также работу Салама [47]. И Вейнберг и Салам высказали предположение, что теория будет перенормируемой.

вестна, мы всегда можем представить себе, что она выбрана в соответствии с равенством $g^2 \approx e_0^2$. Все, что нам известно к настоящему времени из экспериментов по слабым взаимодействиям при низких энергиях, — это величина G , экспериментальное значение которой дается соотношением

$$Gm_p^2 \approx 10^{-5}. \quad (1.26)$$

Здесь m_p — масса протона. Как правило, для того, чтобы это соотношение выполнялось, нам требуется $m_w \gtrsim 40$ ГэВ.

3. И наконец, в слабых взаимодействиях мы сталкиваемся с несохранением четности¹⁾, которое означает, что слабый фотон должен взаимодействовать как с аксиально-векторным, так и с векторным токами. И это, как мы увидим, действительно можно осуществить.

На первый взгляд может показаться, что огромная разница в массах слабого и электромагнитного фотонов сильно мешает объединению. В случае обычной нарушенной симметрии мы начинали бы с гамильтониана, который коммутирует со всеми операторами, порождающими симметрию. Решения такой "невозмущенной" задачи классифицировались бы по вырожденным мультиплетам, обладающим квантовыми числами группы симметрии. Следовательно, обнаружив такие вырожденные или почти вырожденные (по массе) мультиплеты, мы убедились бы в существовании подобной симметрии в природе. Отсутствие полного вырождения мы объяснили бы, добавив к гамильтониану "малый" член, не коммутирующий с генераторами симметрии. Ясно, что фотон с нулевой массой и слабый фотон с массой 40 ГэВ не похожи на частицы, относящиеся к какому-либо приблизительно вырожденному мультиплету. И как раз здесь механизм Хиггса может спасти нас и сделать возможным объединение, хотя и в некоем новом и необычном смысле. В калибровочных теориях *все* фотоны имеют нулевую массу при условии, что вакуум инвариантен относительно калибровочной группы²⁾. Стоит отбросить это требование, как у хиггсовских скалярных полей смогут появиться отличные от нуля вакуумные средние и все фотоны, кроме электромагнитного, приобретут

¹⁾ А также с нарушением C - и CP -инвариантности.

²⁾ В этих теориях мы всегда предполагаем, что лагранжиан калибровочно-инвариантен и, следовательно, ни один из "фотонов" не имеет вначале голой массы.

массу. Нет никаких причин, по которым какая-нибудь из этих масс обязана быть малой. Эти массы, как мы увидим, зависят от констант связи, характеризующих самодействие хиггсовских полей, а они могут быть большими. Если бы вместо того, чтобы искать зависимость между константами связи и сечениями рассеяния, мы попытались найти почти вырожденные мультиплеты, то обнаружить калибровочную симметрию нам не удалось бы. Объединяя же слабые и электромагнитные взаимодействия и используя при этом механизм Хиггса так, как говорилось выше, мы в виде премии за изящность идеи получаем возможность построить такие теории, что получившаяся в результате смесь будет "перенормируемой". Это означает, что сходимость отдельных членов в разложении S -матрицы не хуже, чем в квантовой электродинамике, которая, как мы знаем, несмотря на проблему бесконечностей, представляет собой самую точную физическую теорию из изобретенных к настоящему времени. Стало быть, впервые найдена полевая теория слабых взаимодействий, в которой слабые взаимодействия остаются истинно "слабыми" и в высших порядках теории возмущений. В прежних вариантах теорий матричные элементы низшего порядка характеризовались слабой константой G , но все высшие порядки расходились и должны были обрезаться произвольным образом. В калибровочных теориях не требуется никакого обрезания, и можно в принципе найти ответы на все вопросы, связанные со слабыми и электромагнитными взаимодействиями в произвольном порядке. Даже если ни одна из моделей, построенных к настоящему времени, не выдержит экспериментальной проверки, калибровочные теории — это новый и удивительно изящный класс конечных (после перенормировки) теорий поля. Все эти вопросы будут рассмотрены подробнее в конце нашего обзора. Но может быть, нам уже удалось убедить читателя в том, что хотя калибровочные теории с нарушенными симметриями вакуума могут быть, а могут и не быть, по выражению Эйнштейна¹⁾, "тем самым Иаковом"²⁾, они требуют "серьезного внимания".

¹⁾Взято из письма, написанного Эйнштейном Максу Борну в 1926 г. и касающегося открытия квантовой механики. Письмо цитировано в работе Клейна [37].

²⁾Библейское выражение, в котором имеется в виду Иаков (или Яков), ставший родоначальником еврейского народа. — *Прим. ред.*

§ 2. ТЕОРЕМА ГОЛДСТОУНА

Допустим, что некая теория характеризуется гамильтонианом H и что существует один или несколько "токов" (операторов, преобразующихся как 4-векторы при собственных преобразованиях Лоренца), которые сохраняются в силу уравнений движения¹⁾, т.е.

$$(\partial/\partial x_\mu) J_\mu(x) = 0. \quad (2.1)$$

Назовем "формальным зарядом", связанным с током $J_\mu(x)$, величину

$$Q(t) = \int d^3 \mathbf{x} J_0(\mathbf{x}, t), \quad (2.2)$$

"формальным" в том смысле, что этот интеграл, взятый по всему пространству, может и не существовать. Даже в таком случае объекты вида

$$\int d^3 \mathbf{x} [J_0(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{y}, t)],$$

где φ — некоторый оператор поля, могут существовать при условии, что мы сначала вычисляем коммутатор, а потом берем интеграл. Там, где это существенно, мы будем следить за порядком выполнения операций. Для сохраняющегося тока мы можем формально написать соотношение

$$-\int d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = (\partial/\partial t) Q(t). \quad (2.3)$$

Следовательно, возможны два случая: либо

$$\int d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0, \quad (2.4)$$

либо

$$\int d^3 \mathbf{x} \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \neq 0. \quad (2.5)$$

¹⁾ В нашей метрике $(\partial/\partial x_\mu) J_\mu(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + (\partial/\partial t) J_0(\mathbf{x}, t) = \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) + \dot{J}_0(\mathbf{x}, t)$.

Второй случай возможен при условии, что существуют два состояния $|P\rangle$ и $|P'\rangle$, для которых

$$\begin{aligned} \langle P' | \int d^3 x \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) | P \rangle &= i^{-1} \int d^3 x \langle P' | [\mathbf{P}, \mathbf{J}(\mathbf{x}, t)] | P \rangle = \\ &= i^{-1} (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \cdot \int \langle P' | \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) | P \rangle d^3 x = \\ &= i^{-1} (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \cdot \int \langle P' | \exp[-i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})] \mathbf{J}(0) \times \\ &\times \exp[i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})] | P \rangle d^3 x = \\ &= (2\pi)^3 i^{-1} \delta^3(\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \exp[i(E_{P'} - E_P)t] \times \\ &\times (\mathbf{P}' - \mathbf{P}) \cdot \langle P' | \mathbf{J}(0) | P \rangle \neq 0. \quad (2.6) \end{aligned}$$

Последнее возможно только, если

$$\lim_{P' \rightarrow P} \langle P' | \mathbf{J}(0) | P \rangle = \infty, \quad (2.7)$$

что могло бы иметь место в теории, в которой безмассовый бозон взаимодействует с $J_\mu(0)^1$. Позднее мы вернемся к этому случаю, а пока предположим, что

$$\dot{Q} = i[H, Q] = 0. \quad (2.8)$$

Обозначим собственные состояния гамильтониана H через $|E_n\rangle$. Тогда формально

$$HQ | E_n \rangle = E_n Q | E_n \rangle, \quad (2.9)$$

так что $Q | E_n \rangle$ — собственное состояние гамильтониана H с энергией E_n . Если $|E_n\rangle$ — собственное состояние оператора Q с собственным значением q , то имеется тривиальное вырождение. В противном случае $|E_n\rangle$ и $Q | E_n \rangle$ могут представлять собой ортогональные состояния с разными квантовыми числами. Рассмотрим в свете сказанного "вакуумное" состояние, которое характеризуется требованием

$$P_\mu | 0 \rangle = 0, \quad (2.10)$$

¹) В такой теории у матричного элемента появляется полюс при $q^2 = (\mathbf{P}' - \mathbf{P})^2 = \mathbf{P}'^2 - \mathbf{P}^2 - (E_{P'} - E_P)^2 = 0$, а это равенство может выполняться при $\mathbf{P} = \mathbf{P}'$. Я признателен М. Бэгу за обсуждение данного вопроса.

где P_μ — операторы энергии-импульса в данной теории. Мы всегда предполагаем, что для обычного вакуума это выполняется. В обычных теориях оператор

$$U = \exp(i\alpha Q). \quad (2.11)$$

где Q — эрмитов оператор, а α — действительная величина, есть унитарный оператор, генерирующий ту (произвольную) симметрию лагранжиана, которая приводит к сохранению тока J_μ . Следовательно, если состояния должны отражать ту же симметрию, необходимо, чтобы выполнялось соотношение

$$\exp(i\alpha Q)|0\rangle = |0\rangle, \quad (2.12)$$

т.е.

$$Q|0\rangle = 0. \quad (2.13)$$

В качестве конкретного примера рассмотрим следующее утверждение: электрон — собственное состояние оператора электрического заряда с собственным значением $+1$. Это утверждение вытекает из калибровочного условия

$$[Q, \psi^\dagger(\mathbf{x}, t)] = +\psi^\dagger(\mathbf{x}, t), \quad (2.14)$$

если

$$Q|0\rangle = 0 \quad (2.15)$$

(где Q — сохраняющийся электрический заряд¹⁾, а ψ — оператор электронного поля), что можно увидеть из цепочки равенств

$$\begin{aligned} Q|P\rangle &= Q \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \frac{\exp[i(Px)]}{(2\pi)^{3/2}} U(P)|0\rangle = \\ &= \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3\mathbf{x} [Q, \psi^\dagger(\mathbf{x}, t)] \frac{\exp[i(Px)]}{(2\pi)^{3/2}} U(P)|0\rangle + \\ &+ \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3\mathbf{x} \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \frac{\exp[i(Px)]}{(2\pi)^{3/2}} U(P)Q|0\rangle = |P\rangle. \end{aligned} \quad (2.16)$$

¹⁾На самом деле мы имеем здесь один из тех случаев, когда соотношение $(\partial/\partial x_\mu)J_\mu(x) = 0$ не означает, что $Q(t) = 0$ при учете высших радиационных поправок. "Голый" заряд одевается. Но все это не имеет отношения к тому, что мы пытаемся здесь проиллюстрировать.

Здесь $U(P)$ – решение уравнения Дирака, а выражение, включающее предельный переход, описывает рождение одноэлектронного состояния с энергией-импульсом P_μ из вакуума.

В теориях, которые мы собираемся рассматривать, иногда

$$\dot{Q} = 0, \quad (2.17)$$

а

$$Q|0\rangle \neq 0. \quad (2.18)$$

В таком случае могло бы появиться искушение отождествить $Q|0\rangle$ с неким другим вакуумным состоянием. Такую интерпретацию можно принять, но только с осторожностью. Чтобы понять, в чем тут дело¹⁾, рассмотрим

$$\langle 0|QQ|0\rangle = \int d^3x \langle 0|J_0(\mathbf{x}, t) Q(t)|0\rangle. \quad (2.19)$$

Так как

$$\exp[i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})] Q(t) \exp[-i(\mathbf{P} \cdot \mathbf{x})] = Q(t), \quad (2.20)$$

получаем

$$\langle 0|QQ|0\rangle = \int d^3x \langle 0|J_0(0) Q(t)|0\rangle. \quad (2.21)$$

Поскольку

$$Q|0\rangle \neq 0 \quad (2.22)$$

и

$$\int d^3x = \infty, \quad (2.23)$$

состояние $Q|0\rangle$ не нормируемо. С этим жить трудно, но все-таки можно, так как во всех приложениях мы будем сначала вычислять коммутаторы, включающие $J_0(\mathbf{x}, t)$, а затем спокойно интегрировать. Однако ненормируемость $Q|0\rangle$ означает, что оператор

$$U = \exp(i\alpha Q) \quad (2.24)$$

не унитарен в буквальном смысле этого слова (другое проявление нарушенной симметрии). Тем не менее выражения типа UAU^\dagger могут иметь смысл, так как если разложить экспоненты, то получающиеся

¹⁾Здесь мы следуем работам Фабри и Пикассо [15] и Гуральника и др. [25].

в результате коммутаторы могут быть хорошо определены. Очевидно, что в этом вопросе нам придется руководствоваться здравым смыслом, чтобы пройти между Сциллой математического талмудизма и Харибдой математического абсурда.

Чтобы познакомиться с теоремой Голдстоуна, представим себе, что у нас имеется теория с n сохраняющимися токами $J^1(x), \dots, J^n(x)$, n формальными эрмитовыми зарядами $Q_1(t) = \int d^3x J_0^1(x, t), \dots, Q_n(t) = \int d^3x J_0^n(x, t)$ и n эрмитовыми скалярными полями $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$, удовлетворяющими одновременным коммутационным соотношениям вида

$$[Q_i(t), \phi_j(x, t)] = \tau_{ijk} \phi_k(x, t), \quad (2.25)$$

где τ_{ijk} — чисто мнимая и полностью антисимметричная по трем индексам функция¹⁾. Предположим, что

$$\langle 0 | [Q_i(t), \phi_j(x, t)] | 0 \rangle = \tau_{ijk} \langle 0 | \phi_k(x, t) | 0 \rangle \neq 0, \quad (2.26)$$

по крайней мере при некоторых значениях индексов. Это означает, что по крайней мере один заряд не сможет обратить вакуум в нуль и по крайней мере у одного скалярного поля появится отличное от нуля вакуумное среднее. Имея это в виду, мы выберем как раз такие i и j и рассмотрим величину²⁾

$$M_{\mu}^{ij}(k) = \int d^4x \langle 0 | [j_{\mu}^i(x, 0), \phi_j(0)] | 0 \rangle \exp[i(kx)]. \quad (2.27)$$

Мы будем предполагать, что собственные состояния оператора P_{μ} (оператора энергии-импульса) образуют полную систему и имеют *положительно определенную норму*³⁾. Обозначим эти состояния симво-

¹⁾Мы допускаем здесь, что заряды могут быть функциями времени. Соответствующие примеры будут приводиться по мере изложения.

²⁾Мы следуем здесь рассуждениям Гильберта [21].

³⁾В электродинамике в лоренцевской калибровке существует бесконечное число состояний с неположительной нормой, т.е. равенство $\langle A | A \rangle = 0$ не обязательно означает, что $|A\rangle = 0$. См., например, работы Ауа и Рорлиха [34] и Киббла [35].

лом $|n\rangle$. Следовательно,

$$\begin{aligned}
 M_{\mu}^{ij}(k) = \sum_n \int d^4x \exp[i(kx)] \{ & \langle 0 | J_{\mu}^i(x) | n \rangle \langle n | \varphi_j(0) | 0 \rangle - \\
 & - \langle 0 | \varphi_j(0) | n \rangle \langle n | J_{\mu}^i(x) | 0 \rangle \} = (2\pi)^4 \sum_n \{ \delta^4(P_n + k) \times \\
 & \times \langle 0 | J_{\mu}^i(0) | n \rangle \langle n | \varphi_j(0) | 0 \rangle - \delta^4(P_n - k) \langle 0 | \varphi_j(0) | n \rangle \times \\
 & \times \langle n | J_{\mu}^i(0) | 0 \rangle \}. \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

Так как $\varphi_j(0)$ — скалярный оператор по отношению к собственным преобразованиям Лоренца, вклад в эту сумму могут вносить только состояния $|n\rangle$, не имеющие внутреннего спина. Это не противоречит утверждению, что J_{μ} — 4-вектор, так как J_{μ} может связывать два бесспиновых состояния, т.е. J_{μ} может связывать $|n\rangle$ и $|0\rangle$. Однако здесь подразумевается следующее¹⁾:

$$\langle 0 | J_{\mu}(0) | P, E_p \rangle = a(P^2, (P\eta)) P_{\mu} + b(P^2, (P\eta)) \eta_{\mu}, \quad (2.29)$$

где η_{μ} — постоянный времениподобный 4-вектор, который в подходящей лоренцевской системе отсчета можно записать как

$$\eta = (0, 0, 0, 1), \quad (2.30)$$

а a и b — произвольные функции переменных, указанных в скобках. Это — следствие ковариантности теории по отношению к трехмерным вращениям. Мы всегда предполагаем, что вакуум является скаляром по отношению к полной группе Лоренца. Следовательно, из равенства нулю спина состояния $|P, E_p\rangle$ следует, что для любого 3-векторного оператора $\mathbf{V}(0)$

$$\langle 0 | \mathbf{V}(0) | P, E_p \rangle = P \mathbf{a}(P^2, E_p), \quad (2.31)$$

где $\mathbf{a}(P^2, E_p)$ — произвольная функция своих переменных. Не существует никакого другого направления, в котором мог бы указывать вектор $\langle 0 | \mathbf{V}(0) | P, E_p \rangle$. Можно, конечно, дать и формальное доказательство, используя генератор вращений. В нашем случае $\mathbf{J}(0)$ есть 3-вектор, и такое доказательство проходит. Но чтобы фиксировать $\langle 0 | J_0(0) | P, E_p \rangle$, требуются, как мы увидим ниже, дополнительные предположения.

¹⁾ Это не самая общая форма. Может существовать дополнительное слагаемое вида $c \eta_{\mu} \delta^4(P)$, которое фигурирует в следующем параграфе.

Однако, чтобы завершить свое доказательство теоремы Голдстоуна, Гильберт [21] сделал некое дополнительное предположение, которое мы можем назвать условием "явной ковариантности". Он предположил, что

$$\langle 0 | J_\mu(0) | \mathbf{P}, E_p \rangle = P_\mu \alpha(P^2). \quad (2.32)$$

Условие (2.32) согласуется, конечно, с общей формой, но не всегда справедливо. В тех случаях, когда это предположение выполняется, добавляя его к другим, перечисленным выше, мы получаем, как сейчас будет видно, теорему Голдстоуна. А тот факт, что равенство (2.32) перестает быть справедливым в калибровочных теориях, подобных электродинамике, и есть та самая лазейка, сквозь которую прокладывает себе дорогу механизм Хиггса.

Вследствие явной ковариантности можно написать

$$M_\mu^{ij} = \epsilon(k_0) k_\mu \rho_1^{ij}(k^2) + k_\mu \rho_2^{ij}(k^2), \quad (2.33)$$

где $\rho_{1,2}^{ij}(k^2)$ — пока еще произвольные функции переменной k^2 , а

$$\epsilon(k_0) = \begin{cases} 1 & \text{при } k_0 \geq 0, \\ -1 & \text{при } k_0 < 0. \end{cases} \quad (2.34)$$

Основанием для такой формы записи служит то, что $M_\mu(k)$ состоит из двух сумм, одна из которых, из-за наличия δ -функции, вносит вклад при $k_0 > 0$, а другая — при $k_0 < 0$. В компактной записи это отражается функцией $\epsilon(k_0)$. Согласно гипотезе Голдстоуна,

$$(\partial/\partial x_\mu) J_\mu^i(x) = 0. \quad (2.35)$$

Таким образом,

$$\epsilon(k_0) k^2 \rho_1^{ij}(k^2) + k^2 \rho_2^{ij}(k^2) = 0. \quad (2.36)$$

Вычислив (2.36) при $k_0 > 0$ и $k_0 < 0$ ¹⁾, получим

$$k^2[\rho_1^{ij}(k^2) + \rho_2^{ij}(k^2)] = 0, \quad (2.37)$$

$$k^2[\rho_2^{ij}(k^2) - \rho_1^{ij}(k^2)] = 0. \quad (2.38)$$

Ковариантные решения этих функциональных уравнений таковы:

$$\rho_1(k^2) = c_1 \delta(k^2), \quad (2.39)$$

¹⁾Поскольку $k^2 = \mathbf{k}^2 - k_0^2$, оба знака величины k_0 соответствуют одному и тому же k^2 , почему и верны следующие далее уравнения.

$$\rho_2(k^2) = c_2 \delta(k^2), \quad (2.40)$$

где c_1 и c_2 — пока еще неопределенные константы. Если бы нам удалось установить, что хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля, мы доказали бы теорему Голдстоуна. Ибо, возвращаясь к сумме по состояниям $|n\rangle$, которая приводит к $M_{\mu}^{ij}(k)$, мы тогда обнаружили бы, что существует по крайней мере одно такое состояние с нулевым спиносом и $P^2 = 0$: тот самый ужасный¹⁾ голдстоуновский бозон с нулевой массой!

Мы не использовали пока еще условие

$$\langle 0 | [Q_i(t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle_{t=0} = \tau_{ijk} \langle 0 | \varphi_k(0) | 0 \rangle \neq 0. \quad (2.41)$$

Оно-то, как мы сейчас покажем, и гарантирует, что c_1 не обращается в нуль. Так как $Q_i(t)$ может не существовать, нам лучше записать коммутационное соотношение (2.41) в виде

$$\int d^3x \langle 0 | [J_0^i(x, t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle_{t=0} = \tau_{ijk} \langle 0 | \varphi_k(0) | 0 \rangle \neq 0. \quad (2.42)$$

Соотношение (2.42), конечно, эквивалентно предыдущему равенству при условии, что $J_0^i(x, t)$ — "локальный" оператор, так что

$$[J_0^i(x, 0), \varphi_j(0)] = \delta^3(x) \tau_{ijk} \varphi_k(0). \quad (2.43)$$

Как мы увидим, это свойство сохраняется даже в калибровочных теориях²⁾. Теперь, используя приведенные выше равенства, напомним

$$\begin{aligned} M_0^{ij}(k) &= \varepsilon(k_0) k_0 c_1 \delta(k^2) + k_0 c_2 \delta(k^2) = \\ &= \int d^4x \exp[i(kx)] \langle 0 | [J_0^i(x, t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (2.44)$$

и, замечая, что

$$\delta(k^2) = \delta(|\mathbf{k}| - k_0)/2|\mathbf{k}| + \delta(|\mathbf{k}| + k_0)/2|\mathbf{k}|, \quad (2.45)$$

¹⁾ "Ужасный", потому что, как показывает эксперимент, такой объект не существует, хотя, как мы увидим, пион, кажется, изо всех сил старается вести себя подобно голдстоуновской частице.

²⁾ Оно должно быть согласовано с лоренц-ковариантностью J_{μ} , которая требует, чтобы нулевая компонента тока J_0 была функцией полей и сопряженных им импульсов и не зависела от калибровочных полей, если только они не появляются в сопряженных импульсах. См., например, работу Брауна [11].

получаем¹⁾

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 M_0^{ij}(k)_{\mathbf{k}=\mathbf{0}} = \int d^4x \, 2\pi\delta(t) \langle 0 | [J_0^i(\mathbf{x}, t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle = \\ = 2\pi i t_{ijk} \langle 0 | \varphi_k(0) | 0 \rangle = c_1 \neq 0. \quad (2.46)$$

Поскольку в $M_0^{ij}(k)$ входит $\epsilon(k_0)$, член, содержащий c_1 , не может взаимно уничтожиться с членом, содержащим c_2 , при всех k_0 . Следовательно, доказательство завершено.

В дальнейшем мы сможем оценить то, что в доказательстве использовались лишь одновременные коммутационные соотношения между $J_0^i(\mathbf{x})$ и $\varphi_j(0)$. Но интересно следующее. Рассмотрим

$$M_0^{ij}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0 t) M_0^{ij}(k) dk_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(ik_0 t) \{ \epsilon(k_0) k_0 c_1 \delta(k^2) + \\ + k_0 c_2 \delta(k^2) \} dk_0 = c_1 \cos(|\mathbf{k}|t) + i c_2 \sin(|\mathbf{k}|t) = \\ = 2\pi \int d^3\mathbf{x} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] [0 | J_0^i(\mathbf{x}, t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle. \quad (2.47)$$

Если $\mathbf{k} = 0$, то мы приходим к заключению, что

$$\int d^3\mathbf{x} \langle 0 | [J_0^i(\mathbf{x}, t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle = c_1 / 2\pi. \quad (2.48)$$

Это вытекало бы, конечно, и из сохранения тока. Здесь c_1 не зависит от t при условии, что

$$\int d^3\mathbf{x} \langle 0 | [\nabla \cdot \mathbf{J}^i(\mathbf{x}, t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle = 0. \quad (2.49)$$

Следовательно, предположением о явной ковариантности исключается появление полюсов при $P = 0$ в матричном элементе $\langle 0 | \mathbf{J}(0) | P \rangle$, несмотря на наличие в теории частиц с нулевой массой²⁾. Выразим это в несколько иной форме, предполагая явную ковариантность

$$\langle 0 | J_\mu(0) | P \rangle = P_\mu F(P^2). \quad (2.50)$$

Так как здесь $|P\rangle$ — состояние с $P^2 = 0$, а ток J_μ сохраняется, мы получаем

$$P^2 F(0) = 0 \quad (2.51)$$

¹⁾ С учетом того, что k_0 — нечетная функция величины k_0 , а $\epsilon(k_0)k_0$ — четная.

²⁾ На данное обстоятельство впервые указал мне М. Бэг. Фактически, обратив ход рассуждений, можно дать другое доказательство теоремы Голдстоуна.

и, следовательно, $F(P)^2$ не может иметь в нуле полюс. В общем случае, например в калибровочных теориях, этот результат, как мы увидим, коренным образом меняется.

Чтобы завершить этот параграф, мы приведем пример, в котором все условия теоремы, по-видимому, применимы и голдстоуновские бозоны являются желанным следствием. Пример, который мы имеем в виду, — это так называемая "σ-модель" Гелл-Манна и Леви [19]. Сначала мы запишем лагранжиан только для пионов и σ, а затем присоединим нуклоны. Рассмотрим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi(x) + \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sigma(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sigma(x) \right] - \\ &\quad - \alpha^2 [\varphi(x) \cdot \varphi(x) + \sigma(x)^2 - \beta]^2 = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi(x) - 4\beta \alpha^2 \varphi(x) \cdot \varphi(x) \right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} \sigma(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sigma(x) - 4\beta \alpha^2 \sigma(x)^2 \right] - \\ &\quad - \alpha^2 [\sigma(x)^2 + \varphi(x) \cdot \varphi(x)]^2 - \alpha^2 \beta^2. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Здесь $\varphi(x)$ — пионное поле, причем

$$\varphi(x) \cdot \varphi(x) = \sum_{i=1}^3 \varphi_i^2(x), \quad (2.53)$$

где φ — эрмитовы операторы, как и $\sigma(x)$, а α и β — действительные числа, которые могут иметь любой знак. Заметим, что величина α безразмерна, а β имеет размерность квадрата массы. Лагранжиан (2.52) инвариантен относительно следующих инфинитезимальных преобразований:

1) *изотопический спин*

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi + \Lambda \times \varphi, \\ \sigma &\rightarrow \sigma, \end{aligned} \quad (2.54)$$

где Λ — инфинитезимальный постоянный вектор, и

2) *киральность*

$$\begin{aligned} \varphi &\rightarrow \varphi - \Lambda \sigma, \\ \sigma &\rightarrow \sigma + \Lambda \cdot \varphi, \end{aligned} \quad (2.55)$$

что приводит к сохраняющимся токам

$$\mathbf{V}_\mu(x) = -\varphi(x) \times (\partial/\partial x^\mu) \varphi(x), \quad (2.56)$$

$$\mathbf{A}_\mu(x) = -\sigma(x)(\partial/\partial x^\mu) \varphi(x) + (\partial/\partial x^\mu) \sigma(x) \varphi(x). \quad (2.57)$$

Из \mathbf{V}_μ и \mathbf{A}_μ мы можем построить формальные заряды Q_i и Q_{5i} . В дальнейшем для нас будут представлять интерес следующие коммутационные соотношения, включающие заряды и поля (они вытекают из канонических коммутационных соотношений для бозонов)¹⁾:

$$[\varphi_i(\mathbf{x}, t), \dot{\varphi}_j(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta_{ij}, \quad (2.58)$$

$$\int d^3 \mathbf{x}' [A_0^i(\mathbf{x}', t), \varphi_j(\mathbf{x}, t)] = -i\delta_{ij} \sigma(\mathbf{x}, t), \quad (2.59)$$

$$\int d^3 \mathbf{x}' [A_0^i(\mathbf{x}', t), \sigma(\mathbf{x}, t)] = i\varphi_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.60)$$

Коммутационные соотношения между зарядами²⁾

$$[Q_i, Q_j] = i\epsilon_{ijk} Q_k, \quad (2.61)$$

$$[Q_{5i}, Q_{5j}] = i\epsilon_{ijk} Q_k, \quad (2.62)$$

$$[Q_i, Q_{5j}] = i\epsilon_{ijk} Q_{5k} \quad (2.63)$$

выражают инвариантность лагранжиана относительно группы преобразований $SU(2) \times SU(2)$, которая генерируется такой алгеброй зарядов. Эта инвариантность приводит, как мы сейчас докажем, к двум совершенно разным типам π - σ -вселенных в зависимости от знака константы β в $\mathcal{L}(x)$.

1. Обычный тип: $\beta < 0$. Исследование лагранжиана $\mathcal{L}(x)$ в этом случае показывает, что

$$m_\pi^2 = m_\sigma^2 = -4\beta\alpha^2, \quad (2.64)$$

т.е. π и σ -вырожденные состояния с разными квантовыми числами. В реальном мире π и σ предстали бы перед нами как частицы с противоположными четностями, т.е. если \mathbf{P} — оператор четности, то мож-

¹⁾ Нужно иметь в виду, что φ_i и φ_j — независимые поля, если $i \neq j$, и что $A_0^i(x) = -\varphi_i(x) \sigma(x) + \sigma(x) \varphi_i(x)$.

²⁾ ϵ_{ijk} — полностью антисимметричная по трем индексам функция, определенная условием $\epsilon_{123} = 1$. К этим результатам приведут одновременные коммутационные соотношения между полями, если их применить аккуратно. В выражениях (2.61) — (2.63), там, где необходимо, мы рассматриваем заряды при равных временах и, если заряды оказываются плохо определенными, сначала коммутируем плотности токов, а затем интегрируем.

но выбрать

$$P\varphi(0)P^{-1} = -\varphi(0), \quad (2.65)$$

$$P\sigma(0)P^{-1} = \sigma(0). \quad (2.66)$$

Так как поля $\varphi(x)$ и $\sigma(x)$ входят в $\mathcal{L}(x)$ квадратично, четность в такой теории сохраняется. Но оператор $A_{\mu}(x)$, определенный выше, — это псевдовектор. Если бы подобная реализация симметрии проявлялась в природе, то можно было бы ожидать, что мы увидим π - и σ -мезоны, имеющие противоположные четности и почти вырожденные по массе. В литературе были сообщения о скалярных резонансах, но резонансы имели массы порядка 700 МэВ и выше, тогда как масса пиона всего лишь 140 МэВ. К тому же если добавить сюда нуклоны (как мы сделаем ниже), то при выбранной нами точке зрения они должны будут иметь нулевые массы в пределе точной симметрии и образовывать четностные дублеты. Все это делает обычную схему с $SU(2) \times SU(2)$ -симметрией довольно непривлекательной. Следовательно, нам нужно попробовать что-нибудь еще.

2. Голдстоуновский тип: $\beta > 0$. Такой выбор знака не влияет на свойства симметрии $\mathcal{L}(x)$ по отношению к группе $SU(2) \times SU(2)$. Но параметр $\beta\alpha^2$ уже не играет роль массы. Фактически члены

$$2\beta\alpha^2[\sigma(x)^2 + \varphi(x) \cdot \varphi(x)] - \alpha^2[\sigma(x)^2 + \varphi(x) \cdot \varphi(x)]^2 - \alpha^2\beta^2 \quad (2.67)$$

ведут себя подобно некоторому мезонному потенциалу взаимодействия. Мы можем найти классические поля σ и φ , минимизирующие этот потенциал. Решением будут любые поля σ и φ из бесконечного набора полей, удовлетворяющих соотношению

$$\sigma(x)^2 + \varphi(x) \cdot \varphi(x) = \beta, \quad (2.68)$$

тогда как в случае $\beta < 0$ существует единственное решение

$$\sigma(x) = \varphi(x) = 0. \quad (2.69)$$

В квантовой теории этот результат можно рассматривать как утверждение о средних значениях гамильтониана и, в частности, если обозначить состояние с наименьшей энергией через $|0\rangle$, то следовало бы ожидать, что такое состояние удовлетворяет соотношению

$$\langle 0 | \sigma(0)^2 + \varphi(0) \cdot \varphi(0) | 0 \rangle = \beta. \quad (2.70)$$

Данное соотношение будет выполняться в главном порядке, если вы-

братъ¹⁾

$$\langle 0 | \sigma(0) | 0 \rangle = \sqrt{\beta} \neq 0, \quad (2.71)$$

$$\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = 0. \quad (2.72)$$

Правда, тогда невозможно интерпретировать поле σ в терминах частиц. Но если мы введем обозначение

$$\chi(x) = \sigma(x) - \sqrt{\beta}, \quad (2.73)$$

то можно написать некий эффективный лагранжиан, в котором все поля допускают такую интерпретацию.

В высших порядках мы приняли бы

$$\chi(x) = \sigma(x) - \langle 0 | \sigma(0) | 0 \rangle, \quad (2.74)$$

где $\langle 0 | \sigma(0) | 0 \rangle$ следовало бы вычислять вплоть до заданного порядка. Фактически

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{эфф}}(x) = & -\frac{1}{2} (\partial/\partial x_\mu) \varphi(x) \cdot (\partial/\partial x^\mu) \varphi(x) - \\ & -\frac{1}{2} [(\partial/\partial x_\mu) \chi(x) (\partial/\partial x^\mu) \chi(x) + 8 \alpha^2 \beta \chi^2(x)] - \\ & - \alpha^2 [\varphi(x) \cdot \varphi(x) + \chi^2(x)]^2 + 4 \sqrt{\beta} \chi(x) \times \\ & \times [\varphi(x) \cdot \varphi(x) + \chi^2(x)] - \alpha^2 \beta^2. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Теория остается инвариантной относительно группы симметрии, генерируемой преобразованными токами и зарядами, но заметим, что в рассматриваемом порядке

$$m_\chi^2 = 8 \alpha^2 \beta, \quad (2.76)$$

$$m_\pi^2 = 0. \quad (2.77)$$

Поправки высшего порядка будут изменять m_χ , но соотношение $m_\pi = 0$ сохранится, так как все условия теоремы Голдстоуна выполняются, а доказательство не зависит от теории возмущений. С голдстоунов-

¹⁾Условие $\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle \neq 0$ нарушало бы сохранение четности.

ской точки зрения именно то обстоятельство, что

$$\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = 0, \quad (2.78)$$

позволяет полю χ стать массивным¹⁾.

Такая картина, по-видимому, лучше соответствует наблюдаемому мезонному спектру, а "малую" наблюдаемую массу пиона, если необходимо, можно ввести руками, чтобы нарушить киральную симметрию. Кроме того, в получившуюся смесь довольно просто добавить и нуклоны. С этой целью мы присоединим

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{нукл}}(x) = & -\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} (\partial/\partial x_{\mu}) \psi(x) - g\bar{\psi}(x) [\sigma(x) + \\ & + i\tau \cdot \varphi(x) \gamma_5] \psi(x). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Здесь

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_P(x) \\ \psi_N(x) \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

τ — матрицы изотопического спина, а матрица γ_5 вставлена из-за псевдоскалярности поля φ . Теперь мы должны расширить $SU(2) \times SU(2)$ -преобразования, включив в них

$$\psi(x) \rightarrow [1 + i(\tau/2) \cdot \Lambda] \psi(x) \quad (2.81)$$

и

$$\psi(x) \rightarrow [1 + i(\tau/2) \cdot \Lambda \gamma_5] \psi(x). \quad (2.82)$$

Полный лагранжиан теперь инвариантен относительно полной группы изотопических и киральных преобразований, что приводит к сохраняющимся токам

$$V_{\mu}(x) = i\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} (\tau/2) \psi(x) - \varphi(x) \times (\partial/\partial x^{\mu}) \varphi(x) \quad (2.83)$$

и

$$\begin{aligned} A_{\mu}(x) = & i\bar{\psi}(x) \gamma_{\mu} \gamma_5 (\tau/2) \psi(x) - [\sigma(x) (\partial/\partial x^{\mu}) \varphi(x) - \\ & - \varphi(x) (\partial/\partial x^{\mu}) \sigma(x)]. \end{aligned} \quad (2.84)$$

У нас опять возможны два случая.

1. $\beta < 0$. В главном порядке, как и ранее, это приводит к

$$m_{\sigma}^2 = m_{\pi}^2 = -4\beta\alpha^2, \quad (2.85)$$

¹⁾В другой форме: $Q_i |0\rangle = 0$, тогда как $Q_{5i} |0\rangle \neq 0$.

НО

$$m_N = 0, \quad (2.86)$$

так что голая нуклонная масса в $\mathcal{L}(x)$ не появляется.

2. $\beta > 0$. В этом случае, как и ранее,

$$m_\pi^2 = 0, \quad (2.87)$$

$$m_\chi^2 = 8\beta\alpha^2, \quad (2.88)$$

тогда как

$$m_N = g\sqrt{\beta}. \quad (2.89)$$

Хотя лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ инвариантен относительно соответствующим образом переопределенных генераторов симметрии, после сдвига σ в $\mathcal{L}(x)$ исчезли все следы мультиплетов частиц. В следующем параграфе мы обратимся к хиггсовской лазейке, которая открывается, когда в игру вступает электромагнетизм.

§ 3. ХИГГСОВСКАЯ ЛАЗЕЙКА

Прежде чем вернуться к вакууму с нарушенной симметрией, мы остановимся на вопросе о том, каким образом лоренц-ковариантная теория может не быть "явно" лоренц-ковариантной¹⁾.

Поскольку в этом и есть ключ к хиггсовской лазейке, имеет смысл тщательно разобрать один пример. Рассмотрим свободную электродинамику, заданную лагранжианом

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial A_\mu(x)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu(x)}{\partial x^\mu} \right) \frac{\partial A^\mu(x)}{\partial x_\nu}, \quad (3.1)$$

где

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu}. \quad (3.2)$$

¹⁾При обсуждении этого вопроса для нас очень ценной оказалась книга Бьёркена и Дрелла [7]. Заметим, однако, что их определение метрики отличается от нашего.

Уравнения движения

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\mu(x) = 0 \quad (3.3)$$

не имеют однозначного решения до тех пор, пока для потенциалов не выбрана какая-либо "калибровка". Мы будем, как правило, работать в "радиационной калибровке", определенной условием

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0, \quad (3.4)$$

которое, конечно, представляет собой условие поперечности свободного физического фотона. Именно здесь и вкралась нековариантность. Этот момент заслуживает самого тщательного исследования. В матричных обозначениях уравнение для инфинитезимального лоренцевского преобразования координат можно записать в виде

$$x' = (I + \epsilon) x, \quad (3.5)$$

где

$$\epsilon^T = -\epsilon. \quad (3.6)$$

Например, если это преобразование к движущейся в направлении оси 1 системе отсчета, то

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i\beta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -i\beta & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

где

$$\beta^2 \approx 0. \quad (3.8)$$

Таким образом, некоторое 4-векторное поле $V_\mu(0)$ будет преобразовываться как

$$V'(0) = (I + \epsilon) V(0). \quad (3.9)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} V'(x) &= \{ \exp[-i(Px)] V(0) \exp[i(Px)] \}' = \\ &= \exp[-i(P'x')] V'(0) \exp[i(P'x')] = \\ &= V(x') + \epsilon V(x'). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Здесь использована лоренц-инвариантность скалярного произведения (Px) . Если выполнить фурье-преобразование этого соотношения, то

мы получим в импульсном пространстве

$$V'(k') = V(k) + \epsilon V(k), \quad (3.11)$$

где

$$k' = (1 + \epsilon) k. \quad (3.12)$$

Таким образом,

$$(k' V'(k')) = (k(1 - \epsilon)(1 + \epsilon) V(k)) = (k V(k)), \quad (3.13)$$

где, как обычно,

$$(k V(k)) = \mathbf{k} \cdot \mathbf{V}(k) - k_0 V_0(k). \quad (3.14)$$

Теперь ясно, что если бы фотонное поле $A(k)$ преобразовывалось как $V(k)$, то мы никогда не смогли бы сохранить условие

$$\mathbf{k}' \cdot \mathbf{A}'(k') = \mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(k) = 0. \quad (3.15)$$

Поэтому предположим, что $A(k)$ имеет какие-то другие трансформационные свойства, позволяющие сохранить поперечность. В дальнейшем мы увидим, как такое преобразование появляется из теории поля. Итак, предположим, что

$$A'(k') = (1 + \epsilon) A(k) + E(k), \quad (3.16)$$

где $E(k)$ — дополнительный член порядка β . В качестве примера мы возьмем случай свободного фотона, когда

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{A}(k) = 0, \quad (3.17)$$

$$A_0(k) = 0 \quad (3.18)$$

и

$$k^2 = k_0^2. \quad (3.19)$$

Таким образом,

$$A'_0(k') = \epsilon_{0i} A^i(k) + E_0(k). \quad (3.20)$$

Следовательно, чтобы получить условие

$$A'_0(k') = 0, \quad (3.21)$$

мы должны иметь

$$E_0(k) = -\epsilon_{0i} A^i(k). \quad (3.22)$$

Далее,

$$0 = k'^i A_i(k') = k_\nu (\delta^{\nu i} + \epsilon^{\nu i}) (\delta_{ie} + \epsilon_{ie}) A^e(k) + k^i E_i(k) \quad (3.23)$$

или

$$k^i E_i(k) + k_0 \epsilon^{0i} A_i(k) = 0. \quad (3.24)$$

Таким образом, все требования выполняются, если

$$E_{\nu}(k) = -(k_{\nu}k_0/|k|^2) \epsilon_{0i} A^i(k), \quad (3.25)$$

что приводит к противоречию между калибровочным и лоренцевским преобразованиями.

Но как возникает такое преобразование в канонической теории поля? Чтобы выяснить это, мы должны сначала сформулировать корректные канонические коммутационные соотношения. Единственный не обращающийся в нуль коммутатор векторных потенциалов — это

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \dot{A}_j(\mathbf{x}', t)] = i\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{x} - \mathbf{x}'), \quad (3.26)$$

где поперечная δ -функция δ_{ij}^{\perp} определена условием

$$\delta_{ij}^{\perp}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3\mathbf{k} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})][\delta_{ij} - (k_i k_j/|k|^2)] \quad (3.27)$$

и введена для того, чтобы сохранилась поперечность векторного потенциала $A_i(\mathbf{x}, t)$. Теперь, если $|P\rangle$ и $|q\rangle$ — любые два собственных состояния оператора P_{μ} , а $|P'\rangle$ и $|q'\rangle$ — лоренц-преобразованные состояния $U|P\rangle$ и $U|q\rangle$; то квантовомеханическое условие ковариантности запишется так:

$$\langle P' | A_{\mu}(0) | q' \rangle = \langle P | U A_{\mu}(0) U^{-1} | q \rangle, \quad (3.28)$$

причем¹⁾

$$U = 1 + (i/2) \epsilon M. \quad (3.29)$$

Здесь ϵ — то же, что и выше, а для лоренцевских преобразований

$$M^{0k} = \int d^3\mathbf{x} \left\{ t \dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{A}(\mathbf{x}, t) - (x_k/2) [\dot{\mathbf{A}}(\mathbf{x}, t)^2 + (\nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{x}, t))^2] \right\}. \quad (3.30)$$

Таким образом,

$$U A_i(0) U^{-1} = A_i(0) + i \epsilon_{0k} [M^{0k}, A_i(0)]. \quad (3.31)$$

Так как M^{0k} не зависит от времени, можно положить $t = 0$ и на-

¹⁾Чтобы упростить преобразование, мы положили пространственно-временные переменные в $A_{\mu}(x)$ равными нулю.

писать

$$\begin{aligned}
 [M^{0k}, A_i(0)] &= - \int d^3 x [(x_k/2) \dot{A}^2(x, 0), A_i(0)] = \\
 &= i \int d^3 x x_k \delta_{ij}^{\perp}(x) \dot{A}_j(x, 0) = -i \int d^3 x \times \\
 &\times \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} x_k \frac{k_i k_j}{|\mathbf{k}|^2} \dot{A}_j(x, 0), \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

что приводит, если выполнить фурье-преобразование и учесть поперечность вектор-потенциала $A(k)$, к написанному выше выражению (3.25) для $E_i(k)$. Если бы компоненты $A_i(0)$ преобразовывались как пространственные компоненты 4-вектора, то мы получили бы просто соотношение

$$U A_i(0) U^{-1} = A_i(0), \quad (3.33)$$

так как

$$A_0(0) = 0. \quad (3.34)$$

Выполнение условия калибровки во всех лоренцевских системах отсчета обеспечивается дополнительным членом.

Если A_i имеет такие сложные трансформационные свойства, то спрашивается: как же удастся S -матрице в электродинамике с кулоновской калибровкой быть лоренц-ковариантной в обычном смысле? Ответ, как хорошо известно, в общих чертах сводится к следующему.

Предположим, что кулоновское калибровочное условие в некоторой заданной лоренцевской системе отсчета мы формулируем в импульсном пространстве как равенство

$$(kA(k)) + (\eta k)(\eta A(k)) = 0, \quad (3.35)$$

причем в той же системе отсчета можно выбрать

$$\eta = (0, 0, 0, 1). \quad (3.36)$$

Записывая кулоновское условие калибровки таким образом, мы можем учесть и то обстоятельство, что для взаимодействующих полей

$$A_0(k) \neq 0. \quad (3.37)$$

При любом заданном k можно построить четыре ортонормированных 4-вектора: две поляризации ϵ_1 и ϵ_2 , вектор η и некий вектор \hat{k}_μ , определяемый как

$$\hat{k}_\mu = [k_\mu + (k\eta)\eta_\mu] / |\mathbf{k}|^2. \quad (3.38)$$

Следовательно, у нас есть условие полноты

$$\sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\mu}^{\lambda} \epsilon_{\nu}^{\lambda} = g_{\mu\nu} + \eta_{\mu} \eta_{\nu} - \hat{k}_{\mu} \hat{k}_{\nu} \quad (3.39)$$

(в котором знак последнего члена определен тем, что векторы \hat{k} и η ортогональны вектору ϵ). Отсюда следует, что функция Грина свободного фотона в кулоновской калибровке такова:

$$\begin{aligned} iD_F^{\lambda}(x', x)_{\nu\mu} &= \langle 0 | T (A_{\nu}(x') A_{\mu}(x)) | 0 \rangle = \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\exp[-ik(x' - x)]}{k^2 + i\epsilon} \sum_{\lambda=1}^2 \epsilon_{\nu}^{\lambda}(k) \epsilon_{\mu}^{\lambda}(k) = \\ &= i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\exp[-ik(x' - x)]}{k^2 + i\epsilon} \{ g_{\mu\nu} + \\ &+ [k^2 \eta_{\mu} \eta_{\nu} - k_{\mu} k_{\nu} - (k\eta)(k_{\mu} \eta_{\nu} + k_{\nu} \eta_{\mu})] / |k|^2 \}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Можно показать, что если при вычислении S -матрицы эта функция Грина берется между вершинами, соответствующими некоторому сохраняющемуся току, то члены, пропорциональные k_{μ} или k_{ν} , не дают вклада. Остающийся нековариантный член, пропорциональный $\eta_{\mu} \eta_{\nu}$, — это просто фурье-образ статического кулоновского потенциала, и он устраняется путем явного введения кулоновского потенциала в гамильтониан в кулоновской калибровке. Следовательно, эффективно функция Грина ведет себя как ковариантный объект $g_{\mu\nu} / (k^2 + i\epsilon)$: это и есть ключ к восстановлению ковариантности.

Мы подняли данный вопрос потому, что, следуя Хиггсу [27], хотим разобраться в том, что происходит с теоремой Голдстоуна в теории, в которой имеется n калибровочных полей $A_{\mu}^1(x), \dots, A_{\mu}^n(x)$ и n эрмитовых скалярных полей $\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)$, а калибровочные поля похожи на фотоны, но подчиняются условию

$$M_{\mu}^{ij}(k)_A = \int d^4 x \langle 0 | [A_{\mu}^i(x), \phi_j(0)] | 0 \rangle \exp[i(kx)] \neq 0 \quad (3.41)$$

при некоторых i и j . Система обозначений та же, что и прежде, только $A_{\mu}^i(x)$ и ток $J_{\mu}^i(x)$ связаны уравнением Максвелла

$$J_{\mu}^i(x) = \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{\nu}^i(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A_{\mu}^i(x) \right), \quad (3.42)$$

а потому

$$(\partial/\partial x_\mu) J_\mu^i(x) = 0. \quad (3.43)$$

Мы предположим, что поля $A_\mu^i(x)$ не имеют голой массы и поэтому входят в соответствующую им часть лагранжиана так же, как в выражении (3.1). Следовательно, чтобы уравнение Максвелла имело решение, нам нужно наложить некое калибровочное условие. Мы возьмем условие, заданное уравнением (3.35), и, таким образом, лишимся явной ковариантности. Итак, мы напомним

$$(kA^i(k)) + (\eta k)(\eta A^i(k)) = 0, \quad (3.44)$$

где

$$\eta = (0, 0, 0, 1). \quad (3.45)$$

Теперь нет никаких причин, по которым вектор η_μ не мог бы войти наряду с k_μ в выражение для $M_\mu^{ij}(k)_A$. Фактически в силу ковариантности по отношению к трехмерным вращениям и в отсутствие явной лоренц-ковариантности мы имеем

$$M_\mu^{ij}(k)_A = a(k^2, (\eta k)) k_\mu + b(k^2, (\eta k)) \eta_\mu + c \eta_\mu \delta^4(k), \quad (3.46)$$

где можно обойтись без $\epsilon(k_0)$, так как величины $a(k^2, (\eta k))$ и т.п. являются произвольными функциями переменных k_0 и k^2 ¹⁾. Поэтому

$$\begin{aligned} M_\mu^{ij}(k)_J &= \int d^4x \langle 0 | [J_\mu^i(x), \varphi_j(0)] | 0 \rangle \exp[i(kx)] = \\ &= k^2 M_\mu^{ij}(k)_A - k_\mu k^\nu M_\nu^{ij}(k)_A = b(k^2, (\eta k)) [k^2 \eta_\mu - \\ &- k_\mu (\eta k)], \end{aligned} \quad (3.47)$$

если считать, что каждое в отдельности интегрирование по частям законно. Отметим два важных обстоятельства в связи с этим выражением

1. Соотношение

$$k^\mu M_\mu^{ij}(k)_J = 0 \quad (3.48)$$

выполняется *тождественно*. Поэтому в противоположность тому, что было в случае соотношений (2.39) и (2.40) предыдущего параграфа,

¹⁾ Последний член в формуле (3.46) мог бы возникнуть, если бы в матричном элементе в формуле (3.41) было постоянное слагаемое. В любом случае в дальнейшем он выпадает. Дополнительное обсуждение см. в работах Гильберта [21] и Клейна и Ли [36].

из сохранения величины $M_{\nu}^{ij}(k)_J$, нельзя сделать *никаких* заключений относительно функции $b(k^2, (\eta k))$. Другими словами, ничто не заставляет нас выбирать формфактор в виде $\delta(k^2)$, и, следовательно, *доказательство теоремы Голдстоуна рушится*. Заметим, кстати, что из калибровочного условия

$$\nabla \cdot A(x) = 0 \quad (3.49)$$

вытекает соотношение

$$a(k^2, (\eta k)) = c \delta(k^2). \quad (3.50)$$

Это *вовсе не* голдстоуновский мезон, так как для частицы с *конечной* массой тоже может выполняться равенство $k^2 = 0$. Это означает лишь, что

$$M_l^{ij}(k)_A = 0 \quad (3.51)$$

при $l = 1, 2, 3$, тогда как

$$M_0^{ij}(k)_A \neq 0. \quad (3.52)$$

А это просто перефразировка теоремы о том, что при переходе вакуум — вакуум не может быть испущен один фотон.

2. Поскольку зависимость величины $b(k^2, (\eta k))$ от k_0 может быть любой, интеграл

$$\int d^3 x \langle 0 | [U_0^i(x, t), \varphi_j(0)] | 0 \rangle, \quad (3.53)$$

уже нельзя считать константой, не зависящей от t . Действительно, вернемся снова к формуле (2.48). Это как раз тот случай, когда из равенства

$$(\partial/\partial x_{\mu}) J_{\mu}(x) = 0 \quad (3.54)$$

не следует, что

$$\dot{Q}_J(t) = 0. \quad (3.55)$$

Более обстоятельно мы рассмотрим этот вопрос позднее. А пока перейдем от нарушений теоремы Голдстоуна (хиггсовской лазейки) к "механизму Хиггса", который заменяет собой теорему Голдстоуна в калибровочных теориях.

§ 4. МЕХАНИЗМ ХИГГСА, ИЛИ КУДА ДЕЛИСЬ ВСЕ ГОЛДСТОУНОВСКИЕ ЧАСТИЦЫ?

В предыдущем параграфе было воспроизведено в основном содержание заметки Хиггса 1964 г. [27]. В ней не было ни конкретной калибровочной модели, ни каких-либо указаний на то, что произойдет

в теории, когда все условия, изложенные в предыдущем параграфе нашего обзора, будут выполнены. Ясность в этот вопрос была внесена Хиггсом же в 1964 г. [28] на примере модели, которую можно охарактеризовать как электродинамику скалярных бозонов, где бозон наделен *чисто мнимой* массой и самодействием φ^4 . Большинство моделей, в которых обнаруживается механизм Хиггса, — это фактически вариации на ту же тему, только в них добавлено больше "фотонов", бозонов и фермионов. Разобравшись с исходной моделью, нетрудно схватить суть и в обобщениях на более сложные модели, такие, как модель Вейнберга 1967 г. [52], поскольку основные идеи весьма близки. Отправным пунктом для нас будет лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \frac{1}{4} F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x) - \frac{1}{2} E_{\mu\nu}(x) \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) \right] + \\ & + \varphi_\mu(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x) + \varphi^\mu(x) \cdot \varphi_\mu(x) - \varphi^\mu(x) \cdot i e_0 q \varphi(x) A_\mu(x) + \\ & + \frac{1}{2} m_0^2 \varphi(x) \cdot \varphi(x) - \frac{1}{8} f^2 (\varphi(x) \cdot \varphi(x))^2 + \dots \end{aligned} \quad (4.1)$$

(для специалистов мы обозначили символом $+$... "контрчлены", которые делают теорию конечной; к нам эти контрчлены не имеют отношения, поскольку мы не будем рассматривать поправки, вносимые "замкнутыми петлями"). Надеемся, что читателя не смутит его несколько странный вид, который мы сейчас поясним. Мы использовали такую швингеровскую форму записи, которая удобна тем, что позволяет избежать появления в лагранжиане производных более высокого порядка, чем первый¹⁾. Чтобы снова получить известные уравнения поля, нужно независимо варьировать по $F_{\mu\nu}(x)$, $A_\mu(x)$, $(\partial/\partial x^\nu) \times A_\mu(x)$, $\varphi_\mu(x)$, $\varphi(x)$ и $(\partial/\partial x_\mu) \varphi(x)$. Заканчивая с обозначениями, заметим, что под $\varphi(x)$ мы понимаем

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1(x) \\ \varphi_2(x) \end{pmatrix}, \quad (4.2)$$

¹⁾ Автор впервые познакомился с таким методом на лекциях Швингера по теории поля в 1952 г. Он до сих пор помнит, как его охватило чувство утопающего, когда Швингер сказал, что "естественным" представлением поля с нулевым спином является пятикомпонентный объект $(\varphi_\mu(x), \varphi(x))$. В последующие годы он понял, что Швингер был прав: вычисления с лагранжианом Швингера значительно проще.

а

$$q = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

Первое, на что мы хотим обратить внимание, прежде чем рассмотреть общие уравнения, — это то, что величина $\frac{1}{2} m_0^2 \varphi(x) \cdot \varphi(x)$, не смотря на свой внешний вид, *не является* массовым членом. Чтобы показать это, положим

$$e_0 = f = 0 \quad (4.4)$$

и проварьируем по $\varphi_\mu(x)$ и $\varphi(x)$. Таким образом

$$\varphi^\mu(x) = -(\partial/\partial x_\mu) \varphi(x) \quad (4.5)$$

и

$$(\partial/\partial x_\mu) \varphi_\mu(x) = m_0^2 \varphi(x), \quad (4.6)$$

т.е.

$$[\nabla^2 - (\partial^2/\partial t^2)] \varphi(x) = -m_0^2 \varphi(x), \quad (4.7)$$

или, в символической записи,

$$-P^2 + E^2 = -m_0^2. \quad (4.8)$$

Равенство (4.8) означает, что m_0 ведет себя как *мнимая* масса. Это напоминает случай σ -модели с $\beta > 0$, о котором говорилось в § 2. Имея в виду этот случай, мы собираемся найти приближенное решение уравнений движения, удовлетворяющее условию

$$i e_0 \langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = e_0 \langle 0 | \begin{matrix} \varphi_2(0) \\ -\varphi_1(0) \end{matrix} | 0 \rangle \neq 0. \quad (4.9)$$

Следствия будут видны из дальнейшего. Мы можем вывести уравнения движения. Ниже мы приводим их, указывая в каждом случае, по какому полю производилось варьирование:

$$\delta F_{\mu\nu}: F^{\mu\nu}(x) = (\partial/\partial x_\mu) A^\nu(x) - (\partial/\partial x_\nu) A^\mu(x), \quad (4.10a)$$

$$\delta \varphi^\mu: (\partial/\partial x^\mu) \varphi(x) + \varphi_\mu(x) - i e_0 q \varphi(x) A_\mu(x) = 0, \quad (4.10б)$$

$$\begin{aligned} \delta \varphi: (\partial/\partial x^\mu) \varphi^\mu(x) &= i e_0 q \varphi^\mu(x) A_\mu(x) + m_0^2 \varphi(x) - \\ &- \frac{1}{2} f^2 \varphi(x) (\varphi(x) \cdot \varphi(x)), \end{aligned} \quad (4.10в)$$

$$\delta A_\mu: (\partial/\partial x^\nu) F^{\mu\nu}(x) = -i e_0 \varphi^\mu(x) \cdot q \varphi(x). \quad (4.10г)$$

Прежде чем говорить о свойствах приближенных решений этих уравнений, рассмотрим основную калибровочную симметрию лагранжиана. Очевидно, что, в силу последнего уравнения, величина

$$J^\mu(x) = i\varphi^\mu(x) \cdot q\varphi(x) = -i \{[(\partial/\partial x_\mu) \varphi(x) - ie_0 q \varphi(x) A^\mu(x)] \cdot q \varphi(x)\} = \\ = -i [(\partial/\partial x_\mu) \varphi(x) \cdot q \varphi(x) + e_0 \varphi(x) \cdot \varphi(x) A^\mu(x)] \quad (4.11)$$

есть сохраняющийся ток¹⁾. Чтобы выяснить роль заряда, связанного с этим током, как генератора группы симметрии, найдем "импульс", сопряженный полю $\varphi(x)$:

$$\Pi_\mu(x) = \delta \mathcal{L}(x) / \frac{\delta \varphi(x)}{\delta x^\mu} = \varphi_\mu(x). \quad (4.12)$$

Таким образом, можно написать

$$Q_J(t) = i \int \Pi_0(\mathbf{x}, t) \cdot q \varphi(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x}, \quad (4.13)$$

где

$$[\varphi_i(\mathbf{x}', t), \Pi_{j0}(\mathbf{x}, t)] = i \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x}' - \mathbf{x}). \quad (4.14)$$

Следовательно,

$$[J_0(\mathbf{x}, t), \varphi(\mathbf{x}', t)] = \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') q \varphi(\mathbf{x}', t), \quad (4.15)$$

или, вводя формально при $\Lambda \ll 1$ оператор

$$U(\Lambda)_t \approx (1 + i \Lambda Q_J(t)), \quad (4.16)$$

получаем

$$U(\Lambda)_t \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}, t) \\ \varphi_2(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} U(\Lambda)_t^{-1} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\mathbf{x}, t) & \varphi_2(\mathbf{x}, t) \\ \varphi_2(\mathbf{x}, t) & -\varphi_1(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} + \Lambda \begin{pmatrix} \varphi_2(\mathbf{x}, t) & \varphi_1(\mathbf{x}, t) \\ \varphi_1(\mathbf{x}, t) & -\varphi_2(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \approx \\ \approx \begin{pmatrix} \cos \Lambda \varphi_1(\mathbf{x}, t) + \sin \Lambda \varphi_2(\mathbf{x}, t) \\ \cos \Lambda \varphi_2(\mathbf{x}, t) - \sin \Lambda \varphi_1(\mathbf{x}, t) \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

То, что лагранжиан инвариантен относительно таких вращений полей φ , явствует из его формы. Но существует некая более широкая инвариантность относительно "локальных" вращений, характеризуемых локальным "углом" $\Lambda(x)$, где $\Lambda(x)$ — некая, по существу произ-

¹⁾ Несмотря на то что $A_\mu(x)$ входит в $J_\mu(x)$ явно, J_μ — истинный 4-вектор во всех калибровках. См., например, работу Брауна [11] или Зумино [57].

вольная функция пространства-времени. Пусть

$$\varphi_1(x) \rightarrow \varphi_1(x) \cos \Lambda(x) + \varphi_2(x) \sin \Lambda(x), \quad (4.18)$$

$$\varphi_2(x) \rightarrow -\varphi_1(x) \sin \Lambda(x) + \varphi_2(x) \cos \Lambda(x) \quad (4.19)$$

и

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + (1/e_0) (\partial/\partial x^\mu) \Lambda(x). \quad (4.20)$$

Без этого последнего преобразования лагранжиан *не был бы* инвариантен, так как производная $\partial/\partial x_\mu$ не имеет простых трансформационных свойств, если Λ — функция пространства-времени. Величина же

$$\varphi_\mu(x) = -(\partial/\partial x^\mu) \varphi(x) + ie_0 q \varphi(x) A_\mu(x) \quad (4.21)$$

"ковариантна" при таких преобразованиях, т.е.

$$\varphi_{1\mu}(x) \rightarrow \varphi_{1\mu}(x) \cos \Lambda(x) + \varphi_{2\mu}(x) \sin \Lambda(x), \quad (4.22)$$

$$\varphi_{2\mu}(x) \rightarrow \varphi_{2\mu}(x) \cos \Lambda(x) - \varphi_{1\mu}(x) \sin \Lambda(x), \quad (4.23)$$

тогда как

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F_{\mu\nu}(x), \quad (4.24)$$

что делает очевидной инвариантность лагранжиана $\mathcal{L}(x)$.

Далее можно двигаться в разных направлениях, но, чтобы сохранить связь с предыдущим, мы последуем вначале за Хиггсом [29].

Мы сможем минимизировать энергию, потребовав, чтобы для вакуума выполнялось соотношение

$$0 = \langle 0 | m_0^2 \varphi(x) \cdot \varphi(x) - \frac{1}{2} f^2 (\varphi(x) \cdot \varphi(x))^2 | 0 \rangle. \quad (4.25)$$

В главном порядке в качестве одной из бесконечного набора эквивалентных возможностей, которые допускаются локальной $U(1)$ -инвариантностью, рассмотренной выше¹⁾, можно выбрать

$$\langle 0 | \varphi_1(0) | 0 \rangle = 0, \quad (4.26)$$

$$\langle 0 | \varphi_2(0) | 0 \rangle = \sqrt{2} (m_0/f). \quad (4.27)$$

¹⁾Вращения декартовых "координат" $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ эквивалентны фазовым преобразованиям комплексных полей $\varphi_\pm(x) = [\varphi_1(x) \pm i\varphi_2(x)]/\sqrt{2}$.

Позже мы фактически получим то же самое, выбрав $\Lambda(x)$ так, чтобы после поворота выполнялись соотношения

$$\varphi'_1(x) = 0 \quad (4.28)$$

и

$$\varphi'_2(x) = \sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)}, \quad (4.29)$$

или

$$\operatorname{tg} \Lambda(x) = -[\varphi_1(x)/\varphi_2(x)]. \quad (4.30)$$

Это дает возможность обойти некоторые вычисления ценой введения некоторого преобразования, внешне довольно формального, что могло бы заслонить физику. Следуя Хиггсу [28] и Гуральнику и др. [24], будем иметь дело непосредственно с уравнениями движения, линеаризовав их. Пусть

$$\varphi(x) = \eta + \varphi'(x), \quad (4.31)$$

где

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} m_0/f \end{pmatrix} \quad (4.32)$$

и $\varphi'(x)$ — "квантовые флуктуации", которые будем считать "малыми". Затем мы напишем уравнения для $\varphi'(x)$, отбросив члены порядка φ'^2 и $e_0 \varphi'$. Таким образом, мы имеем систему приближенных уравнений:

$$F^{\mu\nu}(x) = (\partial/\partial x_\mu) A^\nu(x) - (\partial/\partial x_\nu) A^\mu(x), \quad (4.33)$$

$$\varphi_\mu(x) = -(\partial/\partial x^\mu) \varphi'(x) + i e_0 q \eta A_\mu(x), \quad (4.34)$$

$$[(\partial/\partial x^\mu) - i e_0 q A_\mu(x)] \varphi^\mu(x) = -f^2 \eta(\varphi'(x) \cdot \eta), \quad (4.35)$$

$$\begin{aligned} (\partial/\partial x^\nu) F^{\mu\nu}(x) &= -i e_0 \varphi^\mu(x) \cdot q \eta = -m \varphi_1^\mu(x) = \\ &= m^2 [(1/m)(\partial/\partial x_\mu) \varphi'_1(x) - A^\mu(x)], \end{aligned} \quad (4.36)$$

где мы ввели обозначение

$$m = e_0 \sqrt{2} (m_0/f). \quad (4.37)$$

Вскоре мы вернемся к уравнению (4.36), но сначала посмотрим на уравнение (4.35) в предельном случае, когда $e_0 = 0$. В покомпонентной записи оно имеет вид уравнений

$$(\partial/\partial x_\mu)(\partial/\partial x^\mu) \varphi'_1(x) = 0. \quad (4.38)$$

и

$$(\partial/\partial x^\mu)(\partial/\partial x_\mu) \varphi_2'(x) = 2 m_0^2 \varphi_2'(x). \quad (4.39)$$

Во втором из этих уравнений величина $+2 m_0^2$ имеет правильный знак и может играть роль массы. Следовательно, $\varphi_2'(x)$ — бозон с массой $\sqrt{2} m_0$. Но что такое $\varphi_1'(x)$? Не есть ли это голдстоуновский бозон? Мы сможем в этом разобраться, если, используя формулу (4.36), рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} F^{\mu\nu}(x) = 0 = \left(\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi_1'(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\mu(x) \right). \quad (4.40)$$

Это уравнение не полно, пока мы не задали $(\partial/\partial x^\mu) A^\mu(x)$. Рассмотрим сначала такую возможность¹⁾:

$$(\partial/\partial x^\mu) A^\mu(x) = 0, \quad (4.41)$$

т.е. лоренцевскую калибровку. В этой калибровке

$$(\partial/\partial x^\mu)(\partial/\partial x_\mu) \varphi_1'(x) = 0. \quad (4.42)$$

Другими словами, в лоренцевской калибровке $\varphi_1'(x)$ — голдстоуновский бозон, но он *отщеплен от всей остальной системы*. Такое отщепление будет сохраняться во всех порядках, так что в лоренцевской калибровке существует некий безвредный голдстоуновский бозон. Итак, анализируя уравнения движения, мы обнаружили голдстоуновскую частицу в линеаризованной теории. Теперь мы, естественно, надеемся, что если все было последовательно, то мы сможем доказать и Теорему Голдстоуна в лоренцевской калибровке. Для этого рассмотрим ток $J_\mu(x)$, определенный соотношением

$$J_\mu(x) = \lambda [m A_\mu(x) - (\partial/\partial x^\mu) \varphi_1'(x)]. \quad (4.43)$$

Мы включили в определение тока множитель

$$\lambda = \sqrt{2} (m_0/f), \quad (4.44)$$

так что $J_\mu(x)$ будет иметь размерность L^{-3} . Тогда

$$J_0(x) = \lambda [m A_0(x) + \varphi_1'(x)], \quad (4.45)$$

что дает

$$[J_0(\mathbf{x}, t), \varphi_1'(\mathbf{x}', t)] = -i \lambda \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (4.46)$$

¹⁾Более полно данный вопрос излагается в работе Киббла [35].

и, конечно,

$$(\partial/\partial x_\mu) J_\mu(x, t) = 0, \quad (4.47)$$

так что условия теоремы Голдстоуна выполняются.

Действительно, если мы посмотрим на выражение для $M_\mu(k)$ в линеаризованной теории, то обнаружим, что

$$\begin{aligned} M_\mu(k) &= \int d^4x \exp[i(kx)] \lambda \langle 0 | [mA_\mu(x) - (\partial/\partial x^\mu) \varphi'_1(x), \varphi'_1(0)] | 0 \rangle = \\ &= i v k_\mu \int d^4x \exp[i(kx)] \langle 0 | [\varphi'_1(x), \varphi'_1(0)] | 0 \rangle = 2 \pi i \lambda k_\mu \times \\ &\times \delta(k^2 + \mu^2) \varepsilon(k_0), \end{aligned} \quad (4.48)$$

если воспользуемся выражением для свободного бозонного коммутатора

$$\begin{aligned} i \Delta(x, \mu^2) \equiv [\varphi'_1(x), \varphi'_1(0)] &= \int \frac{d^4k}{(2\pi)^3} \exp[-i(kx)] \times \\ &\times \varepsilon(k_0) \delta(k^2 + \mu^2) \end{aligned} \quad (4.49)$$

и учтем, что $\varphi'_1(x)$ может обладать массой μ . Мы видим, что выражение (4.48) согласуется с уравнением

$$k^\mu M_\mu(k) = 0 \quad (4.50)$$

только в том случае, если

$$\mu^2 = 0. \quad (4.51)$$

Это и есть теорема Голдстоуна.

Итак, мы, по-видимому, справились с $\varphi'_1(x)$ и $\varphi'_2(x)$, но что нам делать с $A_\mu(x)$? Чтобы выяснить это, посмотрим на уравнение поля

$$\frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) \right] = m^2 \left[\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'_1(x) - A^\mu(x) \right], \quad (4.52)$$

которое в лоренцевской калибровке принимает вид

$$-\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) = m^2 \left[\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'_1(x) - A^\mu(x) \right]. \quad (4.53)$$

Ясно, что это *не есть* уравнение безмассового фотона. Действительно, если мы, предвидя дальнейшее, введем величину

$$B^\mu(x) \equiv A^\mu(x) - (1/m)(\partial/\partial x_\mu) \varphi'_1(x), \quad (4.54)$$

то, в силу уравнений, которым удовлетворяет $\varphi_1^i(x)$, можно написать

$$(\partial/\partial x^\nu)(\partial/\partial x_\nu) B^\mu(x) = m^2 B^\mu(x). \quad (4.55)$$

Это означает, что $B^\mu(x)$ удовлетворяет уравнению свободного векторного мезона массы m с дополнительным условием

$$(\partial/\partial x^\mu) B^\mu(x) = 0. \quad (4.56)$$

Итак, линеаризованная теория с лагранжианом Хиггса в лоренцевской калибровке дает:

- 1) теорему Голдстоуна,
- 2) невзаимодействующий голдстоуновский мезон,
- 3) массивный скалярный мезон,
- 4) массивный векторный мезон.

При этом отношение масс двух последних объектов дается формулой

$$\sqrt{2} m_0/m = e_0 f, \quad (4.57)$$

что представляет собой замечательный результат: отношение этих масс есть функция двух безразмерных констант связи рассматриваемой теории. Не остается и следа какой-либо мультиплетной структуры. Все, что осталось от калибровочной симметрии, выражено в массовой формуле (4.57).

Если мы хотим, чтобы наша теория имела смысл, то наблюдаемая физика не должна зависеть от калибровки $A_\mu(x)$. Чтобы увидеть, как это получается, повторим все в радиационной калибровке

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x, t) = 0. \quad (4.58)$$

Здесь отсутствует явная ковариантность, и мы ожидаем, что теорема Голдстоуна нарушится. В пределе $e_0 = 0$ уравнение для поля $\varphi_2^i(x)$ не изменяется, так что этому полю по-прежнему соответствует бозон с массой $\sqrt{2} m_0$. Ток

$$e_0 J_\mu(x) = m [m A_\mu(x) - (\partial/\partial x^\mu) \varphi_1^i(x)] \quad (4.59)$$

все еще сохраняется вследствие антисимметрии $F^{\mu\nu}(x)$. Но теперь мы имеем нетривиальную связь между $A_\mu(x)$ и $\varphi_1(x)$, а именно

$$(\partial/\partial x_\mu) (\partial/\partial x^\mu) \varphi_1^i(x) = m \dot{A}_0(x), \quad (4.60)$$

так что $\varphi_1^i(x)$ уже не является свободным бозоном с нулевой массой.

К этому уравнению можно присоединить уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \dot{A}_0(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) = m^2 \left[\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'_1(x) - A^\mu(x) \right], \quad (4.61)$$

или

$$\nabla \dot{A}_0(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathbf{A}(x) = m^2 \left[\frac{1}{m} \nabla \varphi'_1(x) - \mathbf{A}(x) \right] \quad (4.62)$$

и

$$\ddot{A}_0(x) + \frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_0(x) = -m^2 \left[\frac{1}{m} \dot{\varphi}'_1(x) - A_0(x) \right]. \quad (4.63)$$

Эту странную на вид систему уравнений можно решить следующим образом. Поскольку

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0, \quad (4.64)$$

мы имеем

$$\nabla^2 \dot{A}_0(x) = m \nabla^2 \varphi'_1(x), \quad (4.65)$$

или

$$\dot{A}_0(x) = m \varphi'_1(x) + F(x), \quad (4.66)$$

где

$$\nabla^2 F(x) = 0 \quad (4.67)$$

при всех \mathbf{x} . Так как A_0 — несингулярная функция переменной \mathbf{x} , величина $F(x)$ — константа, которую мы положим равной нулю. Стало быть,

$$\dot{A}_0(x) = m \varphi'_1(x). \quad (4.68)$$

Следовательно, в кулоновской калибровке $\varphi'_1(x)$ оказывается не лоренцевским скаляром, а производной по времени от $A_0(x)$. Но в предыдущем параграфе мы уже видели, что в кулоновской калибровке $A_\mu(x)$ не есть 4-вектор. Это было показано для свободного фотона, а в более общем случае при лоренц-преобразовании, генерируемом $U(\epsilon)$, величина $A_\mu(x)$ ведет себя так:

$$U(\epsilon) A^\mu(x) U^{-1}(\epsilon) = A^\mu(x') - \epsilon^{\mu\nu} A_\nu(x') + (\partial/\partial x'_\mu) \Lambda(x', \epsilon), \quad (4.69)$$

где $\Lambda(x', \epsilon)$ — некая сложная функция полей, которую мы вычислили

в явном виде только для случая свободного поля¹⁾. Таким образом, если мы, как и раньше, введем величину

$$B^\mu(x) = -\frac{1}{m} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'_1(x) + A^\mu(x) = \frac{1}{m^2} \left[\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \right] A^\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \dot{A}_0(x), =$$

$$= \frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[\frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu(x) \right], \quad (4.70)$$

то эта величина *будет* 4-вектором, так как член, содержащий $\Lambda(x', \epsilon)$, при лоренц-преобразовании сократится. Очевидно, что

$$(\partial/\partial x^\mu) B_\mu(x) = 0; \quad (4.71)$$

это следует непосредственно из антисимметрии $F^{\mu\nu}(x)$ или из уравнения

$$(\partial/\partial x_\mu) (\partial/\partial x^\mu) \varphi'_1(x) = m \dot{A}_0(x) = m^2 \varphi'_1(x). \quad (4.72)$$

Последнее уравнение означает, кроме всего прочего, что в такой калибровке поле $\varphi'_1(x)$ уже не выступает в качестве голдстоуновского бозона. Мы вскоре вернемся к вопросу о том, как нарушается здесь теорема Голдстоуна. Из уравнения (4.72) и сопутствующего ему уравнения

$$(\partial/\partial x^\nu) (\partial/\partial x_\nu) A^\mu(x) = m^2 A^\mu(x) \quad (4.73)$$

мы сразу делаем вывод, что

$$(\partial/\partial x^\nu) (\partial/\partial x_\nu) B_\mu(x) = m^2 B_\mu(x). \quad (4.74)$$

Следовательно, в кулоновской калибровке у нас:

- 1) нет теоремы Голдстоуна,
- 2) нет голдстоуновского мезона,

¹⁾См., например, книгу Бьёркена и Дрелла [7, стр. 89]. В случае свободного поля мы написали дополнительный член в импульсном пространстве в виде

$$E_\nu(k) = -(k_\nu k_0 / |k|^2) E_{0i} A^i(k),$$

что в координатном пространстве переходит в

$$(\partial/\partial x'_\mu) \Lambda(x', \epsilon) = -\epsilon_{0i} (\partial/\partial x'_\mu) \int \frac{d^3x}{4\pi|x-x'|} \dot{A}^i(x, t').$$

Это и есть последнее слагаемое в формуле (4.69).

3) есть массивный скалярный мезон,

4) есть массивный векторный мезон,

а отношения масс остаются теми же самыми. Есть еще некоторые пункты, на которых стоит остановиться. Прежде всего, что случилось с теоремой Голдстоуна? Чтобы выяснить это, исследуем, как обычно,

$$[J_\mu(x), \varphi'_1(0)] = (m/e_0)[mA_\mu(x) - (\partial/\partial x^\mu) \varphi'_1(x), \varphi'_1(0)]. \quad (4.75)$$

Как мы уже видели, в линейризованной теории

$$J_\mu(x) = (m^2/e_0) B_\mu(x), \quad (4.76)$$

причем в рассматриваемом приближении $B_\mu(x)$ — свободный векторный мезон с массой m . Следовательно, именно поле $B_\mu(x)$ должно квантоваться в соответствии с формулой

$$[B_\mu(x), B_\nu(y)] = -i \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \Delta(x-y, m^2), \quad (4.77)$$

где $\Delta(x-y, m^2)$ определено так же, как и ранее. Таким образом, в линейризованной теории вклад в сумму по всем состояниям

$$\begin{aligned} M_\mu(k) &= \int d^4x \exp[i(kx)] \langle 0 | [J_\mu(x), \varphi'_1(0)] | 0 \rangle = \\ &= \int d^4x \exp[i(kx)] (m^2/e_0) \langle 0 | [B_\mu(x), \varphi'_1(0)] | 0 \rangle \end{aligned} \quad (4.78)$$

дает только одно состояние $|B(k)\rangle$, состояние с одним векторным B -мезоном¹⁾. Если бы поле $\varphi'_1(0)$ было истинным лоренцевским скаляром, то мы получили бы

$$\langle 0 | \varphi'_1(0) | B(k) \rangle = 0, \quad (4.79)$$

так как B_μ — частица со спином 1. Следовательно, величина $M_\mu(k)$ должна была бы равняться нулю, что противоречит основной гипотезе о нарушении симметрии вакуума. Но, как отмечалось выше, $\varphi'_1(0)$ не есть скаляр. В действительности, так как

$$B_\mu(x) = A_\mu(x) - (1/m)(\partial/\partial x^\mu) \varphi'_1(x) \quad (4.80)$$

и

$$\nabla \cdot \mathbf{A}(x) = 0, \quad (4.81)$$

мы получаем

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(x) = -(1/m) \nabla^2 \varphi'_1(x), \quad (4.82)$$

¹⁾ Я признателен д-ру Осборну из Кембриджского университета за разъяснение данного вопроса в нашей переписке.

или, в символической записи,

$$\varphi'_1(x) = -m(1/\nabla^2)\nabla \cdot \mathbf{B}(x). \quad (4.83)$$

Такое поле $\varphi'_1(0)$ может связывать вакуум с B -состоянием со спином 1, т.е.

$$\langle 0 | \varphi'_1(0) | B(k) \rangle \sim \epsilon \cdot \mathbf{k} / |\mathbf{k}|^2, \quad (4.84)$$

где $\epsilon_\mu(k)$ — вектор поляризации B_μ -бозона, удовлетворяющий соотношению

$$(k\epsilon(k)) = 0. \quad (4.85)$$

Именно здесь в нашу модель и вкрадывается та нековариантность, которая разрушает доказательство теоремы Голдстоуна.

Нашим рассуждениям можно придать больше точности, если вычислить

$$\begin{aligned} [B_\mu(x), \varphi'_1(y)] &= -m[B_\mu(x), (1/\nabla^2)\nabla \cdot \mathbf{B}(y)] = \frac{i}{m} \left(m^2 \frac{\epsilon_{\mu i}}{\nabla_y^2} \frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right) \times \\ &\times \Delta(x-y, m^2) = \frac{i}{m} \left[\eta_\mu \frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} - \left(\eta \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{\partial}{\partial y^\mu} \right] / \\ &/ \left[\frac{\partial}{\partial y^\nu} \frac{\partial}{\partial y_\nu} + \left(\eta \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\eta \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \left(\eta \frac{\partial}{\partial y} \right) \Delta(x-y, m^2), \end{aligned} \quad (4.86)$$

где

$$\eta = (0, 0, 0, 1) \quad (4.87)$$

и где

$$[\nabla_y^2 - (\partial^2/\partial t^2)] \Delta(x-y, m^2) = m^2 \Delta(x-y, m^2). \quad (4.88)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} M_\mu(k) &= \frac{m^2}{e_0} \frac{1}{m} \left(\frac{\eta_\mu k^2 - (\eta k) k_\mu}{k^2 + (\eta k)(\eta k)} \right) (\eta k) \int d^4x \exp[i(kx)] \Delta(x, m^2) = \\ &= -2\pi i \frac{m}{e_0} \left(\frac{\eta_\mu k^2 - (\eta k) k_\mu}{k^2 + (\eta k)(\eta k)} \right) (\eta k) \delta(k^2 + m^2) \epsilon(k_0), \end{aligned} \quad (4.89)$$

т.е. $M_\mu(k)$ имеет хиггсовскую форму, полученную нами в предыдущем параграфе [выражение (3.47)] как спасение от теоремы Голдстоуна.

Заметим, что, так как

$$m = \sqrt{2} (e_0 m_0 / f), \quad (4.90)$$

если положить

$$e_0 = 0, \quad (4.91)$$

то

$$M_\mu(k) \rightarrow (\sqrt{2} m_0 / f) 2\pi i k_\mu \delta(k^2) \varepsilon(k_0), \quad (4.92)$$

т.е. $M_\mu(k)$ приобретает тот самый ковариантный вид, который приводит к теореме Голдстоуна. Тем самым иллюстрируется важная роль калибровочных полей в избавлении от голдстоуновского бозона. При $e_0 \neq 0$ мы видим, что

$$M_0(k) = 2\pi i (m/e_0) k_0 \varepsilon(k_0) \delta(k^2 + m^2). \quad (4.93)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \exp(ik_0 t) M_0(k) &= 2\pi i (m/e_0) \cos(\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2} t) = \\ &= 2\pi \int d^3\mathbf{x} \exp[i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x})] \times \\ &\times \langle 0 | [J_0(\mathbf{x}, t), \varphi_1'(0)] | 0 \rangle. \end{aligned} \quad (4.94)$$

Если в этом выражении мы положим $\mathbf{k} = 0$, то оно примет вид

$$\int d^3\mathbf{x} \langle 0 | [J_0(\mathbf{x}, t), \varphi_1'(0)] | 0 \rangle = (im/e_0) \cos(mt). \quad (4.95)$$

Другими словами, даже если и

$$(\partial/\partial x^\mu) J_\mu(\mathbf{x}) = 0, \quad (4.96)$$

"заряд" не является интегралом движения. Когда же $e_0 \rightarrow 0$,

$$\int d^3\mathbf{x} \langle 0 | [J_0(\mathbf{x}, t), \varphi_1'(0)] | 0 \rangle = i\sqrt{2} (m_0/f) \quad (4.97)$$

и эта величина не зависит от t .

Из уравнения движения в кулоновской калибровке

$$B_\mu(x) = \frac{1}{m^2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_0(x) \right) \quad (4.98)$$

мы получаем

$$B_0(x) = \frac{1}{m^2} \nabla^2 A_0(\mathbf{x}, t). \quad (4.99)$$

При наивном подходе мы могли бы предположить, что

$$\int d^3x [B_0(x, t), \varphi_1'(0)] = \frac{1}{m^2} \int d^3x \nabla^2 [A_0(x, t), \varphi_1'(0)] = 0. \quad (4.100)$$

Но легко показать, что

$$[A_0(x, t), \varphi_1'(0)] = im(1/\nabla^2)(\partial/\partial t)\Delta(x, m^2). \quad (4.101)$$

Поэтому поверхностными членами пренебречь *нельзя* и написанный выше интеграл не равен нулю. Это, конечно, обычное свойство теории Максвелла, в которой уравнение

$$(\partial/\partial x^\nu) F^{\mu\nu}(x) = -eJ^\mu(x) \quad (4.102)$$

не означает, что электрический заряд равен нулю. И здесь поверхностные члены играют существенную роль из-за нулевой массы фотона.

Пока что изложение ограничивалось низшим нетривиальным порядком теории возмущений. Понять же, каким образом полученные результаты обобщаются на произвольные порядки, не так просто¹⁾. Но если вы способны переварить не совсем ясные формальные преобразования, то можете получить некоторое представление о том, как это получается. Для этого мы просто воспользуемся локальной $U(1)$ -инвариантностью, чтобы исключить $\varphi_1(x)$ путем поворота. Так как

$$\varphi_1'(x) = \varphi_1(x) \cos \Lambda(x) + \varphi_2(x) \sin \Lambda(x), \quad (4.103)$$

$$\varphi_2'(x) = -\varphi_1(x) \sin \Lambda(x) + \varphi_2(x) \cos \Lambda(x), \quad (4.104)$$

от $\varphi_1(x)$ можно избавиться, выбрав

$$\Lambda(x) = -\text{arctg} [\varphi_1(x)/\varphi_2(x)]. \quad (4.105)$$

Тогда

$$\varphi_1'(x) = 0 \quad (4.106)$$

и

$$\varphi_2'(x) = \sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)}. \quad (4.107)$$

¹⁾Относительно полной S -матрицы см., например, работу Ли [38].

Кроме того, при таком преобразовании

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \frac{1}{e_0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Lambda(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e_0} \frac{1}{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)} \times \\ \times \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_1(x) \varphi_2(x) - \varphi_1(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi_2(x) \right), \quad (4.108)$$

$$F'_{\mu\nu}(x) = F_{\mu\nu}(x), \quad (4.109)$$

$$\varphi'_1(x)_\mu = -e_0 \sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)} A'_\mu(x), \quad (4.110)$$

$$\varphi'_2(x)_\mu = -(\partial/\partial x^\mu) \sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)}. \quad (4.111)$$

Поскольку лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ инвариантен относительно локальной группы $U(1)$, уравнения поля *ковариантны* и принимают следующий вид

$$G^{\mu\nu}(x) = (\partial/\partial x_\mu) A'^\nu(x) - (\partial/\partial x_\nu) A'^\mu(x), \quad (4.112)$$

$$(\partial/\partial x^\nu) G^{\mu\nu}(x) = e_0^2 \varphi'_2(x) A'^\mu(x), \quad (4.113)$$

тогда как оставшиеся два уравнения сводятся к тождеству

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (e_0 \varphi'_2(x) A'_\mu(x)) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (e_0 \varphi'_1(x) A'_\mu(x)) \quad (4.114)$$

и

$$-\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'_2(x) = m_0^2 \varphi'_2(x) - \frac{1}{2} f^2 \varphi_2'^3(x) + e_0 \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi'_2(x) A'_\mu(x). \quad (4.115)$$

Пока что локальная $U(1)$ -симметрия не была еще явно нарушена. Мы добьемся такого нарушения, потребовав, как и прежде, чтобы выполнялось соотношение

$$\langle 0 | \varphi'_2(0) | 0 \rangle = \eta \neq 0. \quad (4.116)$$

Сейчас мы увидим, каким образом условие (4.116) в общем случае фиксирует калибровку и нарушает симметрию. С этой целью введем величину

$$\chi(x) = \varphi'_2(x) - \eta, \quad (4.117)$$

где η в каждом порядке по константе связи подбирается заново так,

чтобы в этом порядке выполнялось равенство

$$\langle 0 | \chi(0) | 0 \rangle = 0. \quad (4.118)$$

Чтобы не было расхождений с обозначениями линеаризованной теории, положим

$$A'_\mu(x) \equiv B_\mu(x). \quad (4.119)$$

Тогда точные уравнения принимают вид

$$G^{\mu\nu} = (\partial/\partial x_\mu) B^\nu(x) - (\partial/\partial x_\nu) B^\mu(x), \quad (4.120)$$

$$(\partial/\partial x^\nu) G^{\mu\nu}(x) = -e_0^2 [\eta^2 + 2\chi(x)\eta + \chi^2(x)] B^\mu(x), \quad (4.121)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi(x) &= m_0^2 [\eta + \chi(x)] - \frac{1}{2} f^2 [\eta^3 + 3\eta^2\chi(x) + 3\eta\chi^2(x) + \\ &+ \chi^3(x)] + e_0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi(x) B_\mu(x). \end{aligned} \quad (4.122)$$

Мы приходим к линеаризованной теории, если положим

$$\eta = \sqrt{2} (m_0/f), \quad (4.123)$$

$$m = \sqrt{2} (e_0 m_0/f) \quad (4.124)$$

и отбросим перекрестные члены. Разложение теории возмущений нужно производить по степеням e_0 и f , а e_0/f считать величиной порядка единицы. Следовательно, в низшем нетривиальном порядке

$$(\partial/\partial x^\nu) G^{\mu\nu}(x) = -m^2 B^\mu(x) \quad (4.125)$$

и

$$(\partial/\partial x^\mu) (\partial/\partial x_\mu) \chi(x) = - \left[m_0^2 - (3/2) f^2 \left(\frac{2m_0^2}{f^2} \right) \right] \chi(x) = 2m_0^2 \chi(x). \quad (4.126)$$

Затем мы, как всегда, проквантуем эти свободные поля, наложив условия

$$[B_\mu(x), B_\nu(y)] = -i \left(g_{\mu\nu} - \frac{1}{m^2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right) \Delta(x-y, m^2), \quad (4.127)$$

$$[B_\mu(x), \chi(y)] = 0, \quad (4.128)$$

$$[\chi(x), \chi(y)] = -i \Delta(x-y, 2m_0^2). \quad (4.129)$$

В рассматриваемой калибровке исчезли все следы безмассовых полей, с которых мы начали. Мы можем теперь проверить, выполняется ли в низшем порядке равенство

$$\int d^3 \mathbf{x} (\partial/\partial x^j) G^{j0}(\mathbf{x}) = -m^2 \int d^3 \mathbf{x} B^0(\mathbf{x}, t) = 0. \quad (4.130)$$

Чтобы убедиться в этом, заметим, что вследствие квантования

$$B_\mu(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_k} \varepsilon_{\mu\lambda}(\mathbf{k}, \lambda) [A(\mathbf{k}, \lambda) \exp[-i(\mathbf{k}\mathbf{x})] + A^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \exp[i(\mathbf{k}\mathbf{x})]], \quad (4.131)$$

где

$$(\mathbf{k}\varepsilon(\mathbf{k}, \lambda)) = 0 \quad (4.132)$$

и

$$\omega_k = \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + m^2}. \quad (4.133)$$

Поэтому мы имеем

$$\int d^3 \mathbf{x} B_0(\mathbf{x}, t) = \sum_{\lambda=1}^3 (2\pi)^{3/2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\omega_k} \delta^3(\mathbf{k}) \varepsilon_0(\mathbf{k}, \lambda) [A(\mathbf{k}, \lambda) \exp(i\omega_k t) + A^\dagger(\mathbf{k}, \lambda) \exp(-i\omega_k t)]. \quad (4.134)$$

Но

$$\varepsilon_0(0, \lambda) = 0. \quad (4.135)$$

Таким образом, в этом порядке, а фактически и во всех порядках

$$\int d^3 \mathbf{x} (\partial/\partial x^j) G^{j0}(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.136)$$

Вывод таков: хотя спектр физических частиц во всех трех исследованных нами калибровках получается один и тот же, математическая структура их совершенно различна. Последнюю из калибровок, которые мы исследовали, называют "унитарной", или U -калибровкой, так как S -матрица, построенная из полей χ и B , будет явно унитарной. Показать же, что все S -матрицы, соответствующие разным калибровкам, приводят к одной и той же физике, чрезвычайно сложно. Представление о том, как это делается, мы дадим в следующем параграфе.

В заключение данного параграфа мы (на предварительном уровне) добавим в нашу смесь частицы со спином $\frac{1}{2}$ и далее будем рассматривать $\psi(x)$ — поле со спином $\frac{1}{2}$, векторное поле $A_\mu(x)$ и хиггсов-

ские мезоны $\varphi(x)$ и $\varphi^\dagger(x)$, которые в старых обозначениях определяются так:

$$\varphi(x) = [\varphi_1(x) + i\varphi_2(x)]/\sqrt{2}, \quad (4.137)$$

$$\varphi^\dagger(x) = [\varphi_1(x) - i\varphi_2(x)]/\sqrt{2}. \quad (4.138)$$

При переходе к новым полям локальная $U(1)$ -инвариантность становится фазовой инвариантностью. Удобство такого перехода в том, что тогда унифицируется трактовка частиц со спином $\frac{1}{2}$ и хиггсовских мезонов. Поэтому мы напомним¹⁾

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ie_0 A_\mu(x) \right) \times \\ & \times \varphi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie_0 A^\mu(x) \right) \varphi(x) + m_0^2 \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \\ & - \frac{1}{2} f^2 \left[\varphi^\dagger(x) \varphi(x) \right]^2 + \bar{\psi}(x) \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_f \right) \psi(x) - \\ & - ie_0 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x). \end{aligned} \quad (4.139)$$

Первая часть лагранжиана — наша старая знакомая, а последние два слагаемых — "барионная" добавка. Заметим, что лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ обладает следующей инвариантностью:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \psi(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \psi(x), \\ & \varphi(x) \rightarrow \varphi(x), \\ & A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x), \end{aligned} \quad (4.140)$$

где Λ — действительное число. Отсюда следует равенство

$$(\partial/\partial x_\mu) \mathcal{J}_\mu(x) \equiv (\partial/\partial x_\mu) (i\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)) = 0; \quad (4.141)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \psi(x) \rightarrow \psi(x), \\ & \varphi(x) \rightarrow e^{i\Lambda} \varphi(x), \\ & A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x), \end{aligned} \quad (4.142)$$

¹⁾ Это некая модель, показывающая, как обеспечить, скажем, сохранение барионного числа в хиггсовской ситуации. Такая форма лагранжиана дана Вейнбергом в неопубликованной лекции в январе 1972 г.

что ведет к закону сохранения

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} S_\mu(x) = i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i e_0 A_\mu(x) \right) \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \varphi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i e_0 A_\mu(x) \right) \varphi(x) \right] = 0; \quad (4.143)$$

наконец, имеется локальная инвариантность

$$\begin{aligned} 3) \quad \Psi(x) &\rightarrow e^{i\Lambda(x)} \Psi(x), \\ \varphi(x) &\rightarrow e^{i\Lambda(x)} \varphi(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A_\mu(x) + (1/e_0)(\partial/\partial x^\mu) \Lambda(x), \end{aligned} \quad (4.144)$$

которая отражается в сохранении комбинированных генераторов

$$J_\mu(x) = \mathcal{J}_\mu(x) + S_\mu(x). \quad (4.145)$$

Если мы хотим интерпретировать

$$B = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{J}_0(\mathbf{x}, t) \quad (4.146)$$

как сохраняющееся барионное число, то мы должны потребовать, чтобы выполнялись условия

$$B \neq 0, \quad (4.147)$$

$$\dot{B} = 0, \quad (4.148)$$

$$B |0\rangle = 0. \quad (4.149)$$

Без последнего условия никакое состояние не обладало бы хорошо определенным "барионным числом" и само понятие барионного числа потеряло бы смысл. Ясно, что мы имеем также равенство

$$[B, \varphi(x)] = 0, \quad (4.150)$$

т.е. *никакой мезон* не обладает барионным числом.

Но мы можем формально ввести

$$S(t) = \int d^3 \mathbf{x} S_0(\mathbf{x}, t), \quad (4.151)$$

так что, в силу канонических коммутационных соотношений,

$$[S_0(\mathbf{x}', t), \varphi(\mathbf{x}, t)] d^3 \mathbf{x}' = \varphi(\mathbf{x}, t). \quad (4.152)$$

Итак, мы можем сказать, что φ имеет $S = 1$. В то же время

$$[S, B] = 0, \quad (4.153)$$

$$[S(t), \varphi(x, t)] = 0. \quad (4.154)$$

Теперь можно провести хиггсовский анализ для S -токов и φ -полей. Мы ищем решение в теории, в которой

$$\langle 0 | \int d^3 x' [S_0(x', t), \varphi(0)] | 0 \rangle \neq 0, \quad (4.155)$$

так что

$$\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = \eta \neq 0. \quad (4.156)$$

Здесь можно ввести в наши рассуждения обращение времени. Основное утверждение, на котором будет все построено, вытекает из инвариантности относительно обращения времени и представляет собой условие на ток

$$TJ(x, t)T^{-1} = -J(x, -t), \quad (4.157)$$

$$TJ_0(x, t)T^{-1} = J_0(x, -t), \quad (4.158)$$

где T — оператор обращения времени. Это условие можно выполнить, если выбрать фазы при обращении времени следующим образом:

$$T\varphi_1(x, t)T^{-1} = \varphi_1(x, -t), \quad (4.159)$$

$$T\varphi_2(x, t)T^{-1} = -\varphi_2(x, -t), \quad (4.160)$$

так что для комплексных полей $\varphi(x)$

$$T\varphi(x, t)T^{-1} = \varphi(x, -t). \quad (4.161)$$

Следовательно,

$$\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = \langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle^*. \quad (4.162)$$

Так как по предположению

$$T|0\rangle = |0\rangle, \quad (4.163)$$

мы приходим к заключению, что

$$\eta = \eta^*. \quad (4.164)$$

Все это согласуется с результатом, который мы получили бы, выполнив вычисления в U -калибровке. Заметим, что поворот в U -калибровку

$$\varphi_1'(x) = 0, \quad (4.165)$$

$$\varphi_2'(x) = \sqrt{\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)} = \sqrt{2\varphi^\dagger(x)\varphi(x)} \quad (4.166)$$

не изменит свойств нашей теории относительно обращения времени. Следовательно, если мы произведем поворот в U -калибровку и по-

строим

$$\langle 0 | \varphi'_2(0) | 0 \rangle = \eta, \quad (4.167)$$

то величина η будет действительной. Выраженный через поля с нулевыми вакуумными средними лагранжиан в U -калибровке записывается следующим образом [константа в $\mathcal{L}(x)$ отброшена, и мы ввели обозначение $\psi'(x) = e^{i\Lambda(x)} \psi(x)$, поскольку ψ -поля также должны преобразовываться]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & \bar{\psi}'(x) \left(\gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} + m_f \right) \psi'(x) + \frac{1}{2} G^{\mu\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} B_\nu(x) - \right. \\ & \left. - \frac{\partial}{\partial x^\nu} B_\mu(x) \right) + \frac{1}{4} G^{\mu\nu}(x) G_{\mu\nu}(x) - \frac{m^2}{2} B_\mu^2(x) - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \chi(x) - \frac{e_0^2}{2} \chi^2(x) B_\mu^2(x) - e_0 m \chi(x) B_\mu^2(x) + \\ & + [m_0^2 - \frac{3}{2} f^2 \eta^2] \frac{\chi^2(x)}{2} - \frac{1}{8} f^2 \chi(x)^4 + \eta \chi(x) \left(m_0^2 - \frac{1}{2} f^2 \eta^2 \right) - \\ & - \frac{\eta f^2}{2} \chi^3(x) - i e_0 \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \psi'(x) B^\mu(x), \end{aligned} \quad (4.168)$$

где обозначения те же, что и раньше. Ток

$$\begin{aligned} J_\mu(x) = & i e_0 \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \psi'(x) + m^2 B_\mu(x) + e_0^2 \chi^2(x) B_\mu(x) + \\ & + 2 e_0 m B_\mu(x) \chi(x) \end{aligned} \quad (4.169)$$

сохраняется и обладает нулевым зарядом. Но "барионный" ток

$$\mathcal{J}_\mu(x) = i e_0 \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \psi'(x) \quad (4.170)$$

сохраняется и сам по себе, что следует из инвариантности лагранжиана $\mathcal{L}(x)$ при замене

$$\begin{aligned} \psi(x) & \rightarrow e^{i\Lambda} \psi(x), \\ \chi(x) & \rightarrow \chi(x), \end{aligned} \quad (4.171)$$

$$B_\mu(x) \rightarrow B_\mu(x).$$

Мы, конечно, не хотим, чтобы выполнялось равенство

$$\int d^3x \mathcal{J}_0(x, t) = 0. \quad (4.172)$$

Следовательно, два заряда, составляющие $\int d^3x J_0(\mathbf{x}, t)$, должны сокращаться. Интересно в общих чертах посмотреть, как такое сокращение происходит в низшем нетривиальном порядке¹⁾. В этом порядке мы должны получить

$$m^2 \int B_0(\mathbf{x}, t) d^3x + i e_0 \int \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) d^3x = 0.$$

Это следует из явного вида функции Грина для уравнения гейзенберговских полей $B_\mu(x)$

$$(\partial/\partial x_\lambda)(\partial/\partial x^\lambda) B_\mu(x) = m^2 B_\mu(x) + i e_0 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x)$$

(справедливого в первом порядке по e_0), где $\psi(x)$ — свободный спинор.

§ 5. S-МАТРИЦА

В данном параграфе мы переходим к обсуждению механизма Хиггса с точки зрения S-матрицы, т.е. на основе фейнмановских диаграмм. В большинстве работ на эту тему²⁾ обычно начинают с невозмущенного лагранжиана, которым в конечном счете определяется представление взаимодействия и который уже содержит эффекты механизма Хиггса в низшем нетривиальном порядке. В таком лагранжиане "фотон" уже имеет массу. Затем изучаются поправки высших порядков. Но мы можем, следуя Энглерту и Брауту [14], начать на один шаг раньше и прежде всего проследить, пользуясь диаграммами Фейнмана, каким образом "фотон" приобретает массу. Это позволяет взглянуть с другой стороны на механизм Хиггса, который Энглерт и Браут открыли независимо.

Для начала мы можем спросить: как обычная теория поля приспособляется к тому, что фотон (реальный фотон) имеет нулевую мас-

¹⁾Читатель (или читательница), который действительно повторит эти выкладки, найдет, что в них существенным образом используется условие

$$\frac{d}{dt} \int d^3x \psi^\dagger(\mathbf{x}, t) \psi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Ему (или ей) следует также помнить, что для свободного поля $B_\mu(x)$ выполняется соотношение

$$\int d^3x B_0(\mathbf{x}, t) = 0.$$

²⁾См., например, работу Ли [38].

су? Отсутствие у фотона "голой массы" следует из калибровочной инвариантности, так как массовый член в лагранжиане

$$m_0^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \quad (5.1)$$

не может быть инвариантным относительно преобразования

$$A_\mu(x) \rightarrow A_\mu(x) + \frac{1}{e_0} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Lambda(x). \quad (5.2)$$

Если бы этим все было сказано, механизм Хиггса не смог бы работать, поскольку лагранжиан Хиггса тоже калибровочно-инвариантен.

Конечно, это еще не все. На самом деле мы должны еще изучить свойства фотонного пропагатора, чтобы выяснить, не может ли масса фотона появиться каким-либо образом за счет фотонных взаимодействий. Пропагатор фотона определяется следующим образом (вначале мы имеем дело с неперенормированным пропагатором):

$$D_f(k)_{\mu\nu} = \frac{1}{(2\pi)^4} \int D_f(x)_{\mu\nu} \exp(ikx) d^4x = -i \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4x \times \\ \times \langle 0 | T(A_\mu(x) A_\nu(0)) | 0 \rangle \exp(ikx), \quad (5.3)$$

где

$$T(A_\mu(x) A_\nu(0)) = \theta(t) A_\mu(x, t) A_\nu(0) + \theta(-t) A_\nu(0) A_\mu(x, t) \quad (5.4)$$

и $A_\mu(x)$ — неперенормированные фотонные поля. Пропагатор $D_f^0(k)_{\mu\nu}$ свободного фотона (если пренебречь калибровочными членами) есть просто

$$D_f^0(k)_{\mu\nu} = \frac{\delta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}. \quad (5.5)$$

В пределе $\epsilon \rightarrow 0$ выражение (5.5) имеет полюс в точке $k^2 = 0$, соответствующей массе фотона. Если бы точная функция Грина имела полюс в какой-то другой точке, то фотон приобрел бы массу за счет взаимодействий. Это проявилось бы, например, в том, что в статическом пределе взаимодействие двух заряженных частиц описывалось бы не кулоновским потенциалом, а потенциалом Юкавы с экспоненциальным убыванием, радиус которого обратно пропорционален положению нового полюса¹⁾. Следовательно, полная теория должна быть

¹⁾Точнее говоря, не радиус, а квадрат радиуса потенциала обратно пропорционален положению полюса. — *Прим. перев.*

устроена таким образом, чтобы в ней полюс не сдвигался, а в теории Хиггса данное требование должно как-то нарушаться.

Чтобы выяснить, как это происходит, мы должны исследовать структуру *точного* пропагатора фотона. Он равен сумме, по крайней мере символической, полного набора диаграмм Фейнмана¹⁾. Точный



Фиг. 1. Слева – точный фотонный пропагатор, справа – вакуумный поляризационный оператор $\Pi_{\mu\nu}$.

Здесь и далее на диаграммах волнистыми линиями обозначены фотоны, а сплошными "ровными" – заряженные частицы.

пропагатор фотона будем изображать "каплей", как на фиг. 1. В теории возмущений эту каплю можно представить следующим образом:

а. Определим собственный вклад в каплю как любую диаграмму, которую нельзя разделить на несвязные части, удалив одну фотонную линию. Примеры "собственных" и "несобственных" вкладов приведены на фиг. 2.



Фиг. 2. Слева – типичная "собственная" диаграмма, а справа – "несобственная".

б. Удалим внешние фотонные линии и обозначим через $\Pi'_{\mu\nu}(q)$ сумму всех "собственных" диаграмм произвольного порядка по перенормированному заряду e_0 . (Принято впереди писать множитель ie_0^2 .)

в. Таким образом, точный пропагатор фотона, если пренебречь в свободном пропагаторе калибровочными членами и отбросить величину $i\epsilon$, которой определяется фейнмановский контур (фиг. 3),

¹⁾ Мы снова следуем книге Бьёркена и Дрелла [7], хотя и не придерживаемся выбранной ими метрики.

имеет вид

$$iD_f(q)_{\mu\nu} = i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} + \frac{i}{q^2} (i e_0^2 \Pi_{\mu\nu}(q)) \frac{i}{q^2} + \frac{i}{q^2} (i e_0^2 \Pi_{\mu\lambda}(q^2)) \times \\ \times \frac{i}{q^2} (i e_0^2 \Pi_{\nu}^{\lambda}(q^2)) \frac{i}{q^2} + \dots \quad (5.6)$$



Ф и г. 3. Типичное слагаемое в "капельной сумме" для точного фотонного пропагатора.

Чтобы сделать следующий шаг, мы должны напомнить читателю один из результатов теории поля, а именно

$$q^\mu \Pi_{\mu\nu}(q) = 0, \quad (5.7)$$

т.е. $\Pi_{\mu\nu}(q)$ есть *сохраняющийся* тензор.

Данный результат оказывается следствием того, что A_μ взаимодействует с *сохраняющимся током*¹⁾. Поэтому он справедлив и в теориях хиггсовского типа, в которых калибровочная инвариантность нарушена, но фотон во всех калибровках взаимодействует с сохраняющимся током. Таким образом, поскольку $\Pi_{\mu\nu}(q)$ — тензор и его тензорными структурами могут быть только $q_\mu q_\nu$ и $g_{\mu\nu}$, у нас должно выполняться равенство

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \Pi(q^2). \quad (5.8)$$

¹⁾Бьёркен и Дрелл [7] доказывают его в квантовой электродинамике, пользуясь тождеством Уорда. Тождество Уорда в КЭД следует только из сохранения тока, как это явствует из доказательства Такахаши [51]. Можно привести другие доказательства, основанные на калибровочной инвариантности, но сохранения тока достаточно.

Функциональная форма пропагатора $D_f(q)_{\mu\nu}$ и, в частности, положение его полюсов определяются свойствами¹⁾ величины $\Pi(q^2)$. Поэтому, опуская члены, пропорциональные $q_\mu q_\nu$, так как они не дают вклада в S -матрицу, имеем

$$iD_f(q^2)_{\mu\nu} = i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} - \frac{i}{q^2} e_0^2 g_{\mu\nu} \Pi(q^2) + \frac{i}{q^2} e_0^4 g_{\mu\nu} \Pi^2(q^2) + \dots =$$

$$= i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 + e_0^2 \Pi(q^2)}. \quad (5.9)$$

Все эти рассуждения проходят и в теории Хиггса. Почему же тогда обычно фотон не имеет массы, а в теории Хиггса приобретает ее? Так получается из-за *аналитической структуры* функции $\Pi(q^2)$ в этих двух теориях. Пока величина $\Pi(0)$ *конечна*, т.е. пока $\Pi(q^2)$ не имеет полюса при $q^2 = 0$, фотон остается безмассовым. Но если при $q^2 \rightarrow 0$ мы имеем

$$\Pi(q^2) \rightarrow \frac{\eta^2}{q^2}, \quad (5.10)$$

то фотон приобретает массу $e_0 \eta$. В обычной квантовой электродинамике полюс функции $\Pi(q^2)$ в точке $q^2 = 0$ нельзя получить никаким способом. Это могло бы случиться только тогда, когда в одной из собственных диаграмм имеется промежуточное состояние с нулевой массой. Но так как по определению $\Pi(q^2)$ включает только собственные фотонные диаграммы, а все другие безмассовые частицы (нейтрино) не несут электрического заряда, все одночастичные промежуточные состояния в обычных теориях имеют ненулевую массу покоя. Теории же типа Хиггса — это, как мы сейчас увидим, нечто другое. Вернемся к лагранжиану Хиггса, который мы запишем с использованием комплексной формы для скалярного поля:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_1(x), \quad (5.11)$$

¹⁾Мы очень небрежно обращаемся с перенормированными и неперенормированными величинами. Вообще говоря, неперенормированная величина $\Pi(q^2)$ будет бесконечна при всех q^2 . Чтобы она стала конечной, нужно произвести вычитание, скажем, в точке, соответствующей физической массе "фотона". Подобные тонкости не будут беспокоить нас в дальнейшем, так как мы не будем выходить за рамки древесного приближения. Анализ роли сингулярностей в $\Pi(q^2)$ и "массы" фотона впервые был проведен Швингером [50].

где

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(x) \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x); \quad (5.12)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x) = & -ie_0 \left[A_\mu(x) \left(\varphi^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi^\dagger(x) \varphi(x) \right) \right] - e_0^2 A_\mu(x) \times \\ & \times A^\mu(x) \varphi^\dagger(x) \varphi(x) + m_0^2 \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \frac{1}{2} f^2 \left(\varphi^\dagger(x) \varphi(x) \right)^2 + \\ & + \text{контрчлены.} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Если бы эта теория квантовалась обычным образом при

$$\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = 0, \quad (5.14)$$

то она не существовала бы, так как из-за нулевой массы скалярных мезонов все безнадежно расходится в инфракрасной области. Предположим, однако, что есть спонтанное нарушение симметрии вакуума, и сдвинем $\varphi(x)$ так, чтобы выполнялись соотношения

$$\varphi'(x) = \varphi(x) - \frac{1}{\sqrt{2}} \eta, \quad (5.15)$$

$$\langle 0 | \varphi'(0) | 0 \rangle = 0, \quad (5.16)$$

где η — действительная величина. Величину $A_\mu(x)$ мы не трогаем. Итак, перейдя к сдвинутым переменным, имеем

$$\mathcal{L}_0(x) = -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(x) \right)^2 - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi'^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'(x). \quad (5.17)$$

тогда как

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1(x) = & -ie_0 \frac{\eta}{\sqrt{2}} A_\mu(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'^\dagger(x) \right) - e_0^2 \frac{\eta^2}{2} A_\mu(x) \times \\ & \times A^\mu(x) - ie_0 A_\mu(x) \left(\varphi'^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi'^\dagger(x) \varphi'(x) \right) - e_0^2 \left(\varphi'^\dagger(x) \varphi'(x) + \right. \\ & \left. + \frac{\eta}{\sqrt{2}} (\varphi'^\dagger(x) + \varphi(x)) \right) A_\mu(x) A^\mu(x) + m_0^2 \left(\varphi'^\dagger(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \times \\ & \times \left(\varphi'(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) - \frac{f^2}{2} \left[\left(\varphi'^\dagger(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \left(\varphi'(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right]^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Теперь можно, следуя Энглерту и Брауту [14], проквантовать теорию и вывести правила Фейнмана. Представление взаимодействия содержит фотон и φ' с нулевыми массами. Главный вклад в пропагатор "фотона" дают две диаграммы, показанные на фиг. 4. Таким образом, в данном приближении

$$\Pi_{\mu\nu}(q) = (q^2 g_{\mu\nu} - q_\mu q_\nu) \frac{1}{q^2}, \quad (5.19)$$



Ф и г. 4. Диаграммы, соответствующие поправкам главного порядка к свободному фотонному пропагатору в теории Хиггса.

Волнистые линии — фотоны, а штриховые — $\varphi'(0)$. Вершина левой диаграммы равна $e_0^2(\eta^2/2)$, а каждая вершина правой равна $i q_\mu(\eta e_0/\sqrt{2})$, где q_μ — 4-импульс "фотона".

причем мы учли, что в представлении взаимодействия пропагатор поля φ' равен $1/q^2$. Поэтому эффективный пропагатор "фотона" после суммирования по таким точечным связям (диаграммам фиг. 4) принимает вид

$$iD_f(q)_{\mu\nu} = i \frac{g_{\mu\nu}}{q^2} \frac{1}{1 + (e_0^2 \eta^2/q^2)}. \quad (5.20)$$

Формула (5.20) означает, что "фотон" приобрел массу за счет механизма Хиггса. Полюс возник здесь из-за появления скалярного бозона с нулевой массой в промежуточном состоянии.

Если выбрать калибровку Ландау для свободного фотонного пропагатора, т.е.

$$iD_f^0(q)_{\mu\nu} = i \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \frac{1}{q^2}, \quad (5.21)$$

то можно получить изящный пропагатор, содержащий калибровочные члены.

Тензор

$$P_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \quad (5.22)$$

является идемпотентным, т.е.

$$P_{\mu\nu} P_{\lambda}^{\nu} = P_{\mu\lambda} . \quad (5.23)$$

Поэтому, как и раньше, можно выполнить суммирование и получить

$$i D_f(q)_{\mu\nu} = i \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{q^2} \right) \frac{1}{q^2} \frac{1}{1 + \Pi(q^2)} \quad (5.24)$$

с тем же самым $\Pi(q^2)$, что и в формуле (5.8). Отметим, что $D_f(q)_{\mu\nu}$ не является пропагатором свободного массивного векторного мезона даже в низшем нетривиальном порядке. Последний должен быть таким:

$$V_{\mu\nu}(q) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_{\mu} q_{\nu}}{m^2} \right) \frac{1}{q^2 + m^2} . \quad (5.25)$$

Он не поперечен, а наличие фактора $q_{\mu} q_{\nu} / m^2$ приводит к серьезным ультрафиолетовым проблемам.

Выводя выражение для пропагатора (5.24) в случае спонтанного нарушения симметрии в исходной электродинамической модели, мы обнаруживаем удивительное обстоятельство: теория в такой степени помнит свое электродинамическое происхождение, что дает калибровочный член в виде $q_{\mu} q_{\nu} / q^2$, который хорошо ведет себя в области высоких энергий. Тот замечательный факт, что "фотон" в подобной теории приобретает массу столь специфическим образом, позволяет теории избежать неприятностей как с инфракрасной, так и с ультрафиолетовой расходимостями. В конечном счете, она, по крайней мере в этом аспекте, не хуже квантовой электродинамики¹⁾.

¹⁾Оговорка, которую мы здесь имеем в виду, связана с так называемыми "аномалиями Адлера". См. работы Адлера [1], а также Белла и Джакива [5]. "Аномалии Адлера" — это "аномальные" члены в тождествах Уорда, содержащих два векторных тока и один аксиально-векторный. Их присутствие есть в некотором смысле та цена, которую мы платим за объединение слабых и электромагнитных взаимодействий, поскольку тогда неизбежно существует связь с несохраняющимся аксиальным током. В калибровочных теориях эти аномалии могут нарушить программу перенормировки. В большом классе моделей, не включаящем, кстати, модель Вейнберга [52] в ее первоначальной форме, аномалии можно устранить, и это иногда рассматривается как важный критерий для отбора калибровочных моделей. Краткое изложение вопросов, связанных с аномалиями Адлера, см. в работе Зумино [58]. В то же время в S-матрицу аномальные члены входят в порядке g^6 , так что с практической точки зрения они не влияют на согласие с экспериментом при низких и средних энергиях.

Проанализируем в таком же духе свойства пропагатора поля φ' . Точный неперенормированный пропагатор φ' можно записать в виде ряда (фиг. 5)

$$iD_{\varphi}(q^2) = \frac{i}{q^2} - \frac{i}{q^2} P(q^2) + \frac{i}{q^2} P^2(q^2) + \dots = \frac{i}{q^2} \frac{1}{1 + P(q^2)}. \quad (5.26)$$

Здесь по аналогии со случаем фотона мы записали "капельную" функцию, обозначив ее через $F(q^2)$, в виде

$$iF(q^2) \equiv q^2 P(q^2), \quad (5.27)$$



Ф и г. 5. Типичное слагаемое из "капельной суммы", дающей полный неперенормированный пропагатор поля φ' .

Каждая капля — это сумма всех "собственных диаграмм". Штриховые линии обозначают свободные пропагаторы поля φ' .

так что φ' приобретает массу, если $P(q^2)$ имеет полюс при $q^2 = 0$. Чтобы увидеть, как появляется этот полюс, можно рассмотреть член самодействия φ' в $\mathcal{L}_1(x)$, т.е.

$$\begin{aligned} m_0^2 \left(\varphi'^{\dagger}(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \left(\varphi'(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) - \frac{1}{2} f^2 \left(\left(\varphi'^{\dagger}(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \left(\varphi'(x) + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \right) \right)^2 = \\ = m_0^2 \left[\frac{\eta^2}{2} + \frac{\eta}{\sqrt{2}} \left(\varphi'(x) + \varphi'^{\dagger}(x) \right) + \varphi'^{\dagger}(x) \varphi'(x) \right] - \\ - \frac{f^2}{2} \left[\frac{\eta^4}{4} + \frac{\eta^2}{2} \left(\varphi'(x) + \varphi'^{\dagger}(x) \right)^2 + \varphi'^{\dagger}(x)^2 \varphi'^2(x) + \right. \\ \left. + \frac{\eta^3}{\sqrt{2}} \left(\varphi'^{\dagger}(x) + \varphi'(x) \right) + \eta^2 \varphi'^{\dagger}(x) \varphi'(x) + \sqrt{2} \eta \left(\varphi'(x) + \right. \right. \\ \left. \left. + \varphi'^{\dagger}(x) \right) \varphi'^{\dagger}(x) \varphi'(x) \right]. \quad (5.28) \end{aligned}$$

Члены, линейные по $\varphi'(x)$ и $\varphi'^{\dagger}(x)$, представляют собой "шпуринные" взаимодействия, в результате которых φ' может исчезать в вакууме.

Это недопустимо, поскольку поле ϕ' было выбрано так, чтобы оно имело нулевое вакуумное среднее. Следовательно, в главном порядке условие совместности имеет вид

$$m_0^2 \frac{\eta}{\sqrt{2}} = \frac{f^2 \eta^3}{2 \sqrt{2}}. \quad (5.29)$$

Это уравнение имеет два решения. Первое из них,

$$\eta = 0, \quad (5.30)$$

возвращает нас к случаю ненарушенной симметрии с неразрешимыми инфракрасными трудностями и поэтому неприемлемо. Второе,

$$\eta = \sqrt{2} \frac{m_0}{f}, \quad (5.31)$$

приводит к линеаризованной теории предыдущего параграфа, и поэтому мы примем его на вооружение.

Главный вклад в подправленный пропагатор ϕ' дается членами $\phi'^{\dagger}(x) \phi'(x)$ в лагранжиане $\mathcal{L}_1(x)$ (фиг. 6).



Ф и г. 6. Главный вклад в поправку к ϕ' -пропагатору.

Они пропорциональны разности

$$m_0^2 - f^2 \eta^2 = -m_0^2. \quad (5.32)$$

Следовательно,

$$P(q^2) = \frac{2m_0^2}{q^2}, \quad (5.33)$$

и мы снова приходим к результатам линеаризованной теории.

Выход за это беспетлевое (древесное) приближение ставит перед нами проблему инфракрасной катастрофы во всей ее славе. Ясно, что тут требуется некая итерационная процедура, которая позволила бы вначале просуммировать древесные диаграммы и получить массы частицы ϕ' и "фотона" в низшем порядке, а затем добавить радиационные поправки. Один из подходов к этой проблеме развивает-

ся в работе Коулмена и Е. Вейнберга [12]¹⁾. Замечательный результат их работы состоит в том, что даже при $m_0 = 0$, т.е. в промежуточном случае между ситуациями с действительной и мнимой массой, φ' все равно приобретает массу из-за обычных электромагнитных радиационных поправок, если наложено условие спонтанного нарушения симметрии вакуума. Этот результат, по-видимому, дает ответ на вопрос о том, какой смысл следует придавать понятию заряженной частицы с нулевой массой. В частности, во что перейдет в пределе электродинамика со скалярными бозонами, если предположить, что затравочная масса бозона стремится к нулю? При $m_0^2 > 0$ мы имеем обычную квантовую электродинамику, которая представляет собой перенормируемую теорию. При $m_0^2 < 0$ теория должна интерпретироваться по Хиггсу. Мы имеем уже не электродинамику, а теорию массивного векторного мезона, взаимодействующего с хиггсовским скаляром конечной массы. Как показали Коулмен и Вейнберг, если $m_0^2 \rightarrow 0$ сверху или снизу, теория сохраняет хиггсовскую форму при условии, что учтены поправки по крайней мере порядка α . "Электродинамика" при нулевой затравочной массе бозона — это ни теория частиц с нулевой массой, ни электродинамика, но все же она, по-видимому, вполне разумна. За подробностями интересующемуся читателю следует обратиться к работе [12]. Мы же далее кратко изложим схему рассуждений, которые приведут нас к единым теориям слабых и электромагнитных взаимодействий.

§ 6. НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

До сих пор мы имели дело с калибровочными преобразованиями, которые приводили к c -числовому (т.е. численному) изменению фазы "заряженных" полей. Такие изменения фазы могут быть либо "глобальными":

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha)\psi(x), \quad (6.1)$$

где α — число, не зависящее от x , либо "локальными":

$$\psi(x) \rightarrow \exp[i\alpha(x)]\psi(x). \quad (6.2)$$

¹⁾ В указанной работе проводится полный анализ данного вопроса на современном уровне с точки зрения механизма Хиггса.

Взяв один очень простой пример, который вскоре будет обобщен, "повторим" все, что мы "прошли" и теперь знаем об инвариантности соответствующих лагранжианов относительно преобразований (6.1) и (6.2). Рассмотрим лагранжиан свободного безмассового фермионного поля

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x). \quad (6.3)$$

Он, очевидно, инвариантен относительно *глобальных* калибровочных преобразований (6.1), и нетрудно показать, что отсюда следует сохранение тока¹⁾

$$J_\mu(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (6.4)$$

Лагранжиан (6.3) *неинвариантен* относительно *локальных* калибровочных преобразований. Действительно, если ввести обозначение

$$\psi'(x) = \exp[i\alpha(x)] \psi(x), \quad (6.5)$$

то

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) = \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \alpha(x) \right) \psi'(x) \quad (6.6)$$

и отсутствие инвариантности становится явным. Однако инвариантность можно восстановить, если обычным образом включить взаимодействие $\psi(x)$ с фотоном, т.е. с векторным полем с нулевой затравочной массой:

$$\mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_\gamma(x) + \mathcal{L}_I(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) + \dot{F}(A_\mu(x)) - i e_0 A^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (6.7)$$

¹⁾ Это частный случай следующего утверждения, которое можно обобщить на неабелевы преобразования: пусть $\psi(x) \rightarrow (1 + \Lambda(x)) \psi(x)$, где $\Lambda(x)$ — действительная с-числовая функция, причем $\Lambda(x) \ll 1$. Тогда, если лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ инвариантен относительно преобразования $\psi(x) \rightarrow (1 + \Lambda) \psi(x)$, где Λ — *константа*, то величина

$$J_\mu(x) \equiv \left. \frac{\delta \mathcal{L}'(x)}{\delta(\partial \Lambda(x) / \partial x^\mu)} \right|_{\Lambda(x) = 0},$$

где $\mathcal{L}'(x)$ — преобразованный лагранжиан, вследствие уравнений Эйлера — Лагранжа есть *сохраняющийся* ток. Подробнее см., например, в работе Гелл-Манна и Леви [19].

ся в работе Коулмена и Е. Вейнберга [12]¹⁾. Замечательный результат их работы состоит в том, что даже при $m_0 = 0$, т.е. в промежуточном случае между ситуациями с действительной и мнимой массой, φ' все равно приобретает массу из-за обычных электромагнитных радиационных поправок, если наложено условие спонтанного нарушения симметрии вакуума. Этот результат, по-видимому, дает ответ на вопрос о том, какой смысл следует придавать понятию заряженной частицы с нулевой массой. В частности, во что перейдет в пределе электродинамика со скалярными бозонами, если предположить, что затравочная масса бозона стремится к нулю? При $m_0^2 > 0$ мы имеем обычную квантовую электродинамику, которая представляет собой перенормируемую теорию. При $m_0^2 < 0$ теория должна интерпретироваться по Хиггсу. Мы имеем уже не электродинамику, а теорию массивного векторного мезона, взаимодействующего с хиггсовским скаляром конечной массы. Как показали Коулмен и Вейнберг, если $m_0^2 \rightarrow 0$ сверху или снизу, теория сохраняет хиггсовскую форму при условии, что учтены поправки по крайней мере порядка α . "Электродинамика" при нулевой затравочной массе бозона — это ни теория частиц с нулевой массой, ни электродинамика, но все же она, по-видимому, вполне разумна. За подробностями интересующемуся читателю следует обратиться к работе [12]. Мы же далее кратко изложим схему рассуждений, которые приведут нас к единым теориям слабых и электромагнитных взаимодействий.

§ 6. НЕАБЕЛЕВЫ КАЛИБРОВОЧНЫЕ СИММЕТРИИ

До сих пор мы имели дело с калибровочными преобразованиями, которые приводили к c -числовому (т.е. численному) изменению фазы "заряженных" полей. Такие изменения фазы могут быть либо "глобальными":

$$\psi(x) \rightarrow \exp(i\alpha)\psi(x), \quad (6.1)$$

где α — число, не зависящее от x , либо "локальными":

$$\psi(x) \rightarrow \exp[i\alpha(x)]\psi(x). \quad (6.2)$$

¹⁾ В указанной работе проводится полный анализ данного вопроса на современном уровне с точки зрения механизма Хиггса.

Взяв один очень простой пример, который вскоре будет обобщен, "повторим" все, что мы "прошли" и теперь знаем об инвариантности соответствующих лагранжианов относительно преобразований (6.1) и (6.2). Рассмотрим лагранжиан свободного безмассового фермионного поля

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x). \quad (6.3)$$

Он, очевидно, инвариантен относительно *глобальных* калибровочных преобразований (6.1), и нетрудно показать, что отсюда следует сохранение тока¹⁾

$$J_\mu(x) = i \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \quad (6.4)$$

Лагранжиан (6.3) *неинвариантен* относительно *локальных* калибровочных преобразований. Действительно, если ввести обозначение

$$\psi'(x) = \exp[i\alpha(x)] \psi(x), \quad (6.5)$$

то

$$\mathcal{L}_0(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) = \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \alpha(x) \right) \psi'(x) \quad (6.6)$$

и отсутствие инвариантности становится явным. Однако инвариантность можно восстановить, если обычным образом включить взаимодействие $\psi(x)$ с фотоном, т.е. с векторным полем с нулевой затравочной массой:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = \mathcal{L}_0(x) + \mathcal{L}_\gamma(x) + \mathcal{L}_I(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) + \dot{F}(A_\mu(x)) - \\ - i e_0 A^\mu(x) \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (6.7)$$

¹⁾ Это частный случай следующего утверждения, которое можно обобщить на неабелевы преобразования: пусть $\psi(x) \rightarrow (1 + \Lambda(x)) \psi(x)$, где $\Lambda(x)$ — действительная скалярная функция, причем $\Lambda(x) \ll 1$. Тогда, если лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ инвариантен относительно преобразования $\psi(x) \rightarrow (1 + \Lambda) \psi(x)$, где Λ — константа, то величина

$$J_\mu(x) \equiv \frac{\delta \mathcal{L}'(x)}{\delta(\partial \Lambda(x) / \partial x^\mu)} \Big|_{\Lambda(x) = 0},$$

где $\mathcal{L}'(x)$ — преобразованный лагранжиан, вследствие уравнений Эйлера — Лагранжа есть *сохраняющийся* ток. Подробнее см., например, в работе Гелл-Манна и Леви [19].

При этом требуется, чтобы локальное фазовое преобразование $\psi(x)$ сопровождалось преобразованием

$$A^\mu(x) = A^\mu(x) + \frac{1}{e_0} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \alpha(x). \quad (6.8)$$

Предположим также, что функция $F(A_\mu(x))$ инвариантна относительно преобразований (6.8), т.е.

$$F(A_\mu(x)) = F(A_\mu(x)). \quad (6.9)$$

Условие (6.9) будет выполняться, если, как и ранее, F есть функция разности

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu(x). \quad (6.10)$$

Поэтому можно сказать, что если бы фотона не существовало, то его следовало бы изобрести для восстановления локальной калибровочной симметрии.

Теперь мы, следуя Янгу и Миллсу [56], обобщим сказанное выше на операторные фазовые преобразования, которые, вообще говоря, не обязаны коммутировать друг с другом. В данном обзоре мы ограничимся сравнительно простым обобщением, главным образом группой $SU(2)$. Но основные принципы будут изложены достаточно подробно, так что встреча с растущим изобилием групп в литературе не вызовет у читателя особого затруднения. Затем мы нарушим обобщенную симметрию при помощи механизма Хиггса, тоже соответствующим образом обобщенного.

Итак, предположим, что у нас имеются два безмассовых спинорных поля $\psi_1(x)$ и $\psi_2(x)$, которые комбинируются в спинорный "дублет"

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Свободный лагранжиан подобной системы таков:

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x). \quad (6.12)$$

Пусть теперь S — произвольная эрмитова (2×2) -матрица. Ясно, что лагранжиан $\mathcal{L}(x)$ инвариантен относительно всех глобальных фазовых

преобразований вида

$$\psi(x) \rightarrow \exp[i\lambda S] \psi(x), \quad (6.13)$$

где λ — действительное число. Однако *любую* эрмитову (2×2) -матрицу можно представить в форме

$$S = \alpha \left(\frac{\tau}{2} \right) + I \alpha_0, \quad (6.14)$$

где $\alpha_0, \dots, \alpha_3$ — действительные числа, τ — спиновые (2×2) -матрицы Паули, а I — единичная (2×2) -матрица. Далее, введем матрицы

$$T = \frac{1}{2} \tau, \quad (6.15)$$

такие, что

$$[T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k. \quad (6.16)$$

Теперь ясно, что часть матрицы S , пропорциональная матрице I , коммутирует со всеми остальными матрицами и ее можно отфакторизовать из экспоненты:

$$\exp(i\lambda S) = \exp(i\lambda \alpha_0 I) \exp(i\lambda \alpha \cdot T). \quad (6.17)$$

Первый множитель представляет собой просто абелево калибровочное преобразование группы $U(1)$ изученного ранее типа. Новое содержится в сомножителе $\exp(i\lambda \alpha \cdot T)$. Это $SU(2)$ -преобразования, представленные бесследовыми (2×2) -матрицами T . Для упрощения дальнейшего изложения рассмотрим величину

$$\alpha = \alpha(x), \quad (6.18)$$

каждая из компонент которой считается *бесконечно малой*. Включив λ в определение величины α , напомним

$$S \approx I + i \alpha(x) \cdot T. \quad (6.19)$$

При

$$\psi'(x) = (I + i \alpha(x) \cdot T) \psi(x) \quad (6.20)$$

имеем

$$\bar{\psi}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) = \bar{\psi}'(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{\partial}{\partial x_\mu} \alpha(x) \cdot T \right) \psi'(x). \quad (6.21)$$

Как мог бы подсказать вам предыдущий пример, для восстановления инвариантности мы должны ввести триплет "фотонов" $\mathbf{b}_\mu(x)$, т.е.

полей Янга — Миллса, в соответствии с правилом

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i g \mathbf{b}^\mu(x) \cdot \mathbf{T} \right) \psi(x). \quad (6.22)$$

Теперь нужно найти трансформационные свойства полей $\mathbf{b}_\mu(x)$, сохраняющие инвариантность вновь построенного лагранжиана. Как и выше, определим локальное унитарное $SU(2)$ -преобразование $S(x)$ с помощью уравнения

$$\psi'(x) = S(x) \psi(x). \quad (6.23)$$

Далее, назовем "ковариантной производной" оператор

$$D_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i g \mathbf{b}_\mu(x) \cdot \mathbf{T} \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu} - i g B_\mu(x), \quad (6.24)$$

где для упрощения записи введено обозначение

$$B_\mu(x) \equiv \mathbf{b}_\mu(x) \cdot \mathbf{T}. \quad (6.25)$$

Условие ковариантности оператора D_μ , полученное из требования

$$\bar{\Psi}(x) D_\mu \psi(x) = \bar{\Psi}'(x) D'_\mu \psi'(x), \quad (6.26)$$

таково:

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i g B_\mu(x) = S^{-1}(x) \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i g B'_\mu(x) \right] S(x), \quad (6.27)$$

или

$$i g S^{-1}(x) B'_\mu(x) S(x) = i g B_\mu(x) + S^{-1}(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} S(x), \quad (6.28)$$

т.е.

$$B'_\mu(x) = S(x) B_\mu(x) S^{-1}(x) + \frac{1}{i g} \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} S(x) \right] S^{-1}(x). \quad (6.29)$$

Локальный характер преобразования отражается в последнем члене правой части этого соотношения. Вывод трансформационных свойств различных функций величины $B_\mu(x)$ сводится теперь к алгебраическим выкладкам.

В этой связи очень важное значение имеет то, что величина $(\partial/\partial x^\mu) B_\nu(x) - (\partial/\partial x^\nu) B_\mu(x)$ в отличие от абелева случая *нековари-*

антна. Действительно, простые выкладки показывают, что вместо нее ковариантным будет тензор¹⁾

$$F_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} B_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} B_\mu(x) - ig(B_\mu(x) B_\nu(x) - B_\nu(x) B_\mu(x)), \quad (6.30)$$

который обладает свойством

$$F'_{\mu\nu}(x) = S(x) F_{\mu\nu}(x) S^{-1}(x). \quad (6.31)$$

Кроме того, исходя из определения величины $B_\mu(x)$ и известных свойств спиновых 2×2 -матриц, можно показать, что

$$F_{\mu\nu}(x) = \mathbf{T} \cdot \mathbf{f}_{\mu\nu}(x), \quad (6.32)$$

где

$$\mathbf{f}_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathbf{b}_\mu(x) + g \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x). \quad (6.33)$$

Наконец, зная трансформационные свойства $B_\mu(x)$, мы можем теперь непосредственно из них вывести трансформационные свойства $\mathbf{b}_\mu(x)$. Для инфинитезимальных преобразований вида

$$S(x) \approx 1 + i \alpha(x) \left(\frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \right) \quad (6.34)$$

имеем

$$\mathbf{b}'_\mu(x) = \mathbf{b}_\mu(x) + \mathbf{b}_\mu(x) \times \alpha(x) + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \alpha(x). \quad (6.35)$$

Другими словами, при глобальных калибровочных преобразованиях величина \mathbf{b}_μ преобразуется как обычный изовектор, но локальные калибровочные преобразования добавляют еще один член, пропорциональный $(\partial/\partial x^\mu) \alpha(x)$. Тензор же $\mathbf{f}_{\mu\nu}(x)$, определенный формулой (6.33), преобразуется как изовектор, ибо дополнительный член выпадает, т.е.

$$\mathbf{f}'_{\mu\nu}(x) = \mathbf{f}_{\mu\nu}(x) + \mathbf{f}_{\mu\nu}(x) \times \alpha(x). \quad (6.36)$$

С учетом всех этих замечаний мы можем построить полный инвариантный [относительно локальных $SU(2)$ -преобразований] лагран-

¹⁾ Напомним, что, поскольку матрицы \mathbf{T} не коммутируют, мы имеем

$$B_\mu(x) B_\nu(x) \neq B_\nu(x) B_\mu(x).$$

жиан, содержащий фермионы и поля Янга – Миллса:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathbf{b}_\mu(x) + g \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x) \right)^2 - \\ & - \bar{\Psi}(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \right) \Psi(x). \end{aligned} \quad (6.37)$$

Можно было бы включить в лагранжиан $\mathcal{L}(x)$, не нарушая его инвариантности, массовый член $\bar{\Psi}(x)\Psi(x)$, но по причинам, которые вскоре станут ясными, мы предпочитаем этого не делать. Член же вида $\mathbf{b}_\mu(x) \cdot \mathbf{b}^\mu(x)$, будучи инвариантным относительно глобальных $SU(2)$ -преобразований, неинвариантен относительно *локальных* $SU(2)$ -преобразований и потому исключен из $\mathcal{L}(x)$.

Эту симметрию можно нарушить по Хиггсу, добавив по аналогии с абелевым случаем хиггсовские поля. Но здесь мы добавим $SU(2)$ -дублет

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^+(x) \\ \varphi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (6.38)$$

Смысл индексов "+" и "0" таков. Если мы добавляем хиггсовский лагранжиан вида

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H(x) = & - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i g \frac{\boldsymbol{\tau}^T}{2} \cdot \mathbf{b}_\mu(x) \right) \varphi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \right) \varphi(x) + \\ & + m_0^2 \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \frac{1}{2} f^2 (\varphi^\dagger(x) \dot{\varphi}(x))^2, \end{aligned} \quad (6.39)$$

где

$$\varphi^\dagger(x) \varphi(x) = \varphi^+(x)^\dagger \varphi^+(x) + \varphi^0(x)^\dagger \varphi^0(x), \quad (6.40)$$

то локальная $SU(2)$ -инвариантность полного лагранжиана сохраняется. Однако, как мы видели в конце § 4, существует также глобальная фазовая инвариантность относительно преобразований

$$\Psi(x) \rightarrow \exp(i\lambda) \Psi(x), \quad (6.41a)$$

$$\varphi(x) \rightarrow \exp(i\lambda) \varphi(x), \quad (6.41b)$$

$$\mathbf{b}_\mu(x) \rightarrow \mathbf{b}_\mu(x). \quad (6.41в)$$

Это приводит к сохранению тока

$$Y_{\mu}(x) = i \left[\bar{\Psi}(x) \gamma_{\mu} \Psi(x) + \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + i g \frac{\tau^T}{2} \cdot \mathbf{b}_{\mu}(x) \right) \varphi^{\dagger}(x) \varphi(x) - \varphi^{\dagger}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - i g \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{b}_{\mu}(x) \right) \varphi(x) \right]. \quad (6.42)$$

Кроме того, имеется сохраняющийся изоспиновый ток, существование которого следует из инвариантности относительно преобразований

$$\psi'(x) = \left[1 + i \alpha \cdot \frac{\tau}{2} \right] \psi(x), \quad (6.43a)$$

$$\varphi'(x) = \left[1 + i \alpha \cdot \frac{\tau}{2} \right] \varphi(x), \quad (6.43б)$$

$$\mathbf{b}'_{\mu}(x) = \mathbf{b}_{\mu}(x) + \mathbf{b}_{\mu}(x) \times \alpha. \quad (6.43в)$$

Таким образом, мы находим следующее выражение для изоспинного тока:

$$\begin{aligned} T_{\mu}(x) = & i \bar{\Psi}(x) \gamma_{\mu} \frac{\tau}{2} \Psi(x) + i \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + i g \frac{\tau^T}{2} \cdot \mathbf{b}_{\mu}(x) \right) \varphi^{\dagger}(x) \frac{\tau}{2} \varphi(x) - \right. \\ & \left. - \varphi^{\dagger}(x) \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - i \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{b}_{\mu}(x) \right) \varphi(x) \right] + \mathbf{f}_{\mu\nu}(x) \times \mathbf{b}^{\nu}(x). \end{aligned} \quad (6.44)$$

Второй член в формуле (6.44) для $T_{\mu}(x)$ обобщает известное выражение для кляйн-гордоновского электромагнитного тока скалярных частиц, содержащее электромагнитное поле, а последний член показывает, что поле Янга - Миллса $\mathbf{b}_{\mu}(x)$ само переносит изоспин и должно входить в изоспиновый ток. Если мы назовем "электрическим зарядом" величину

$$Q = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} Y_0(\mathbf{x}, t) + \int d^3 \mathbf{x} T_0(\mathbf{x}, t)_3 = \frac{1}{2} Y + T_3, \quad (6.45)$$

то $\varphi^{\dagger}(x)$ будет нести заряд +1, а $\varphi^0(x)$ - заряд нуль. Так как импульс, сопряженный полю $\varphi(x)$, равен

$$\Pi(x) = \left[\frac{\partial}{\partial t} + i g \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{b}_0(\mathbf{x}, t) \right] \varphi^{\dagger}(\mathbf{x}, t), \quad (6.46)$$

мы имеем

$$\int d^3x [T(\mathbf{x}, 0), \varphi(0)] = \frac{1}{2} \mathbf{t} \varphi(0). \quad (6.47)$$

Следовательно, если нужно получить спонтанно нарушенную $SU(2)$ -симметрию, у нас должно выполняться условие

$$\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = \eta \neq 0, \quad (6.48)$$

где η — вообще говоря, комплексный двухкомпонентный вектор-столбец. Поэтому можно, как обычно, сдвинуть поля и написать

$$\chi(x) = \varphi(x) - \eta. \quad (6.49)$$

Но прежде чем это сделать, имеет смысл посредством поворота исключить из игры, скажем, поле $\varphi^+(x)$. Тем самым мы по определению перейдем к U -калибровке. При $SU(2)$ -преобразовании получаем

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = \exp \left[i \boldsymbol{\alpha}(x) \cdot \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \right] \varphi(x) = & \left[\cos \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) + \right. \\ & \left. + i \hat{\boldsymbol{\eta}} \cdot \boldsymbol{\tau} \sin \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) \right] \varphi(x), \end{aligned} \quad (6.50)$$

где

$$\boldsymbol{\alpha}(x) = |\boldsymbol{\alpha}(x)| \hat{\boldsymbol{\eta}} \quad (6.51)$$

и $|\boldsymbol{\alpha}(x)|$ мы обозначили просто через $\alpha(x)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi^{+1}(x) = & \left[\cos \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) + i \sin \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) \eta_z \right] \varphi^+(x) + \\ & + i (\eta_x - i \eta_y) \sin \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) \varphi^0(x) \end{aligned} \quad (6.52a)$$

и

$$\begin{aligned} \varphi^{01}(x) = & \left[\cos \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) - i \sin \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) \eta_z \right] \varphi^0(x) + \\ & + i (\eta_x + i \eta_y) \sin \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) \varphi^+(x). \end{aligned} \quad (6.52b)$$

Поэтому, выполнив поворот вокруг оси y , можно получить

$$\varphi^{+1}(x) = 0 \quad (6.53)$$

при условии

$$\operatorname{tg} \left(\frac{\alpha(x)}{2} \right) = - \frac{\varphi^+(x) \varphi^0(x)^\dagger + \varphi^0(x) \varphi^+(x)^\dagger \pm i(\varphi^+(x) \varphi^0(x)^\dagger - \varphi^0(x) \varphi^+(x)^\dagger)}{2 |\varphi^0(x)|^2}, \quad (6.54)$$

которое сводится к выражению (4.105) из § 4, если поля φ^+ и φ^0 эрмитовы. После поворота можно положить

$$\langle 0 | \varphi^{0j}(0) | 0 \rangle = \eta \neq 0. \quad (6.55)$$

Тогда из свойств поля φ^{0j} относительно обращения времени

$$T \varphi^{0j}(0) T^{-1} = \varphi^{0j}(0), \quad (6.56)$$

как и выше, делаем вывод, что

$$\eta = \eta^*. \quad (6.57)$$

Можно ввести поля¹⁾

$$\chi(x) = \varphi^{0j}(x) - \eta \quad (6.58)$$

и выразить $\mathcal{L}_H(x)$ через эти поля в нашей калибровке. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H(x) = & - \frac{\partial}{\partial x^\mu} \chi^\dagger(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi(x) + i \frac{g}{2} \left[\left(\chi^\dagger(x) + \eta b'_z(x)_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi(x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \chi^\dagger(x) b'_z(x)_\mu \chi(x) + \eta \right) \right] - \frac{g^2}{4} b'_\mu(x) \cdot b^{\mu'}(x) [\chi(x) \chi^\dagger(x) + \\ & + (\chi(x) + \chi^\dagger(x)) \eta + \eta^2] + m_0^2 (\chi^\dagger(x) + \eta) (\chi(x) + \eta) - \frac{1}{2} f^2 \times \\ & \times [(\chi(x) + \eta) (\chi^\dagger(x) + \eta)]^2. \end{aligned} \quad (6.59)$$

Из этого выражения для $\mathcal{L}_H(x)$ ясно, что и "фотоны", и χ -поля приобретают массу. Из соотношения

$$b_\mu(x) \cdot b^\mu(x) = 2 \frac{(b_{\mu 1}(x) + i b_{\mu 2}(x)) (b^{\mu 1}(x) - i b^{\mu 2}(x))}{\sqrt{2}} + b_{\mu 3}^2(x) \quad (6.60)$$

¹⁾ Читатель заметит, что поле $\chi(x)$ не эрмитово. Тот, кто изучил работу Вейнберга [52], может удивиться, почему там выжившее хиггсовское поле эрмитово, а здесь нет. Как будет показано в следующем параграфе, дело в том, что Вейнберг использует группу $SU(2) \times U(1)$, т.е. он имеет дополнительную *локальную* абелеву калибровочную симметрию, соответствующую сохранению гиперзаряда. Поэтому Вейнберг с ее помощью может, не нарушая уравнений движения, менять фазу поля $\varphi^0(x)$ после того, как выполнен $SU(2)$ -поворот.

видно, что "заряженные" поля Янга — Милса

$$b_{\mu}^{+}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_{\mu 1}(x) + b_{\mu 2}(x)], \quad (6.61)$$

$$b_{\mu}^{-}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [b_{\mu 1}(x) - i b_{\mu 2}(x)] \quad (6.62)$$

приобретают ту же самую голую массу $g\eta/\sqrt{2}$, что и $b_{\mu 3}$ — "нейтральное" поле.

Читатель, следивший за рассуждениями § 5, без труда обобщит все сказанное там и вычислит по Энглерту и Брауту тензор поляризации вакуума в древесном приближении. В результате должны получиться те же самые массы, что и в U -калибровке. Энглерт и Браут действительно сделали это в случае произвольной компактной группы Ли в своей заметке 1964 г. [14]. В этом случае рассуждения данного параграфа остаются почти без изменений, если в выражении

$$(\mathbf{b}_{\mu} \times \mathbf{b}_{\nu})_i = \epsilon_{ijk} b_{\mu j} b_{\nu k} \quad (6.63)$$

заменить ϵ_{ijk} произвольными "структурными функциями" f_{ijk} группы Ли, а вместо изотопических матриц

$$\mathbf{T} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\tau} \quad (6.64)$$

взять матрицы соответствующей алгебры "обобщенного изотопического спина". Не стоит и говорить, что "фотоны" и хиггсовские поля будут размножаться, как кролики, но в основном математика останется прежней.

В следующем параграфе мы перейдем к слабым взаимодействиям и модели Вейнберга 1967 г.

§ 7. МОДЕЛЬ ВЕЙНБЕРГА 1967 Г.

Все теории слабых взаимодействий должны учитывать два основных свойства нейтрино: оно безмассовое и левостороннее¹⁾. Мы не

¹⁾Излишне говорить, что эти утверждения справедливы только в пределах экспериментальных ошибок. Нужно быть достаточно непредубежденным и допускать в принципе возможность (хотя и малопривлекательную) того, что нейтрино имеет некую малую массу и не является точно левосторонним.

делаем различия между электронным и мюонным нейтрино, так как, по-видимому, они оба безмассовые и левосторонние. Если $v(x)$ — свободное нейтринное поле, то эти свойства можно выразить двумя уравнениями:

$$\gamma_{\mu} \frac{\partial}{\partial x_{\mu}} v(x) = 0, \quad (7.1)$$

$$\gamma_5 v(x) = v(x). \quad (7.2)$$

(Мы будем всегда использовать эрмитовы γ -матрицы.) Второе уравнение в импульсном пространстве эквивалентно соотношению¹⁾

$$\sigma \cdot \hat{P} v(P) = -v(P). \quad (7.3)$$

Любое решение $\psi(x)$ уравнения Дирака можно записать в виде

$$\psi(x) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \psi(x) + \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \psi(x) \equiv \psi^L(x) + \psi^R(x). \quad (7.4)$$

Очевидно, что $\psi^L(x)$ и $\psi^R(x)$ — собственные функции матрицы γ_5 с собственными значениями ± 1 . Но только в том случае, если частицы являются точно безмассовыми, эти состояния являются собственными и для $\sigma \cdot \hat{P}$, т.е. имеют определенную спиральность²⁾.

Нет никакой надежды объединить описание электронов и нейтрино, если не начать со случая, когда обе частицы безмассовые. Затем нужно все устроить так, чтобы нейтрино осталось безмассовым, а электрон приобрел массу. Построение таких моделей в настоящее время сильно затруднено из-за недостатка сведений о спектре лептонов. Существуют ли тяжелые лептоны — частицы с квантовыми числами электронов, мюонов и нейтрино, но с массами порядка адронных — 1 ГэВ или более? Мы просто не знаем. Во всяком случае, модель Вейнберга 1967 г. имеет то преимущество, что она принадлежит к таким единым калибровочным моделям слабых и электромагнитных взаимодействий, которым не нужны *никакие* новые лептоны.

¹⁾Здесь \hat{P} — единичный вектор в направлении 3-импульса.

²⁾Свободная дираковская частица с массой m и импульсом p удовлетворяет, конечно, уравнению $(i\gamma \cdot p + m)\psi(p) = 0$. Утверждение в тексте следует из тождества (в эрмитовом представлении) $i\gamma_4\gamma_5\gamma =$
 $= \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}.$

Ее можно обобщить, оставаясь по-прежнему в области известных лептонов, если добавить в фундаментальный мультиплет μ -мезон и, возможно, его нейтрино, например, так:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \mu^+(x) \\ \nu(x) \\ e^-(x) \end{pmatrix}, \quad (7.5)$$

где $\nu(x)$ составлено из

$$\nu_L(x) \equiv \nu_e(x) \quad (7.6)$$

и

$$\nu_R(x) \equiv \nu_\mu^C(x), \quad (7.7)$$

мюонного антинейтрино. В результате получается $SU(3) \times SU(3)$ -калибровочная модель с шестнадцатью действительными калибровочными полями вместо $SU(2) \times U(1)$ -модели с четырьмя действительными калибровочными полями. Следствия такой схемы проанализированы Вейнбергом [54], и читатель может узнать подробности в его работе. Теоретико-групповые аспекты подобной модели были разработаны уже в ранней статье Салама и Уорда [49]. (Это было сделано до введения механизма Хиггса, так что различные массы вставлялись руками и перенормируемость модели была неясна. Фактически, без хиггсовских мезонов, теория *не может* быть сделана конечной.)

Следуя Вейнбергу [52], рассмотрим объект

$$L(x) = \frac{1}{2} (1 + \gamma_5) \begin{pmatrix} \nu(x) \\ e(x) \end{pmatrix}, \quad (7.8)$$

где $e(x)$ и $\nu(x)$ — четырехкомпонентные дираковские поля с нулевой затравочной массой. Теперь, следуя сказанному в предыдущем параграфе, можно написать лагранжиан, инвариантный относительно локальных $SU(2)$ -преобразований:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathbf{b}_\mu(x) + g \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x) \right)^2 - \\ & - \bar{L}(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \right) L(x). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Тогда сохраняющийся "изоспиновый" ток имеет вид

$$\mathbf{T}_\mu(x) = i \bar{L}(x) \gamma_\mu \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} L(x) + \mathbf{f}_{\mu\nu}(x) \times \mathbf{b}^\nu(x). \quad (7.10)$$

Поскольку такое выражение может показаться необычным, исследуем его несколько более тщательно. Рассмотрим вначале

$$\mathcal{G}_\mu(x) = f_{\mu\nu}(x) \times b^\nu(x) = \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} b_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} b_\mu(x) + g b_\mu(x) \times b_\nu(x) \right] \times b^\nu(x). \quad (7.11)$$

Особый интерес представляет $\mathcal{G}_0(x)$, т.е. величина

$$\mathcal{G}_0(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0} b_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} b_0(x) + g b_0(x) \times b_\nu(x) \right) \times b^\nu(x). \quad (7.12)$$

Если мы квантуем в радиационной калибровке, где

$$\frac{\partial}{\partial x^i} b^i(x) = 0, \quad (7.13)$$

то, замечая, что канонический импульс $\Pi_\mu(x)$, сопряженный полю $b_\mu(x)$, имеет вид

$$\Pi_0(x) = 0, \quad (7.14)$$

$$\Pi_i(x) = b_i(x) - g b_i(x) \times b_0(x) - \frac{\partial}{\partial x_i} b_0(x),$$

мы можем написать одновременные коммутационные соотношения

$$[b_s(x, t)_i, \Pi_t(x', t)_j] = i \delta_{ij} \delta_{st}^\perp(x - x'). \quad (7.15)$$

Здесь $\delta_{st}^\perp(x - x')$ — поперечная δ -функция, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial}{\partial x_s} \delta_{st}^\perp(x - x') = 0. \quad (7.16)$$

Поэтому

$$\tau(t) = \int d^3x \mathcal{G}_0(x, t) = \int d^3x \Pi_i(x, t) \times b^i(x, t) - \int d^3x \left(\frac{\partial}{\partial x_i} b_0(x, t) \times b^i(x, t) \right). \quad (7.17)$$

Последний член можно проинтегрировать по частям и исключить, пользуясь условием радиационной калибровки. Таким образом, имеем просто

$$\tau(t) = \int d^3x \Pi_i(x, t) \times b^i(x, t). \quad (7.18)$$

Поскольку при наличии взаимодействия

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathcal{G}_\mu(x) \neq 0,$$

$\tau(t)$ будет зависеть от времени. Из канонических коммутационных соотношений получаем

$$[\tau(t)_i, \tau(t)_j] = i \varepsilon_{ijk} \tau(t)_k. \quad (7.19)$$

В качестве следующего шага можно исследовать величину

$$\mathcal{G}'_\mu(x) = i \bar{L}(x) \gamma_\mu \frac{\tau}{2} L(x) = i (\bar{v}(x) \bar{e}(x)) \gamma_\mu \frac{\tau}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} v(x) \\ e(x) \end{pmatrix}. \quad (7.20)$$

Мы хотим рассмотреть

$$\tau'(t) = \int d^3x \mathcal{G}'_0(x, t) = \int d^3x (v^\dagger(x, t) e^\dagger(x, t)) \frac{\tau}{2} \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} v(x, t) \\ e(x, t) \end{pmatrix}. \quad (7.21)$$

Для этого нам пригодится следующее тождество. Пусть Γ и Γ' — любые две 4×4 -матрицы (каждая представляет собой некоторую линейную комбинацию шестнадцати независимых матриц алгебры Дирака), и пусть $\psi(x)$ и $\psi'(x)$ — любые 4-компонентные дираковские поля. Тогда, используя одновременные антикоммутационные соотношения¹⁾, в случае одинаковых ψ и ψ' имеем

$$[\psi_\alpha^\dagger(x, t) \Gamma_{\alpha\beta} \psi_\beta(x, t), \psi_{\alpha'}^\dagger(x', t) \Gamma'_{\alpha'\beta'} \psi_{\beta'}(x', t)] = \delta(x - x') \times \\ \times \left[\psi_\alpha^\dagger(x, t) \psi_{\beta'}(x', t) \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma'_{\beta\beta'} - \psi_{\alpha'}^\dagger(x', t) \psi_\beta(x, t) \Gamma_{\alpha\beta} \Gamma'_{\alpha'\alpha'} \right]. \quad (7.22)$$

В случае разных полей ψ и ψ' коммутатор равен нулю. Если предположить, что $\psi(x)$ — восьмикомпонентное поле

$$\psi(x) = \begin{bmatrix} v(x) \\ e(x) \end{bmatrix}, \quad (7.23)$$

то очевидно, что

$$\left[\psi^\dagger(x, t) \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\tau_i}{2} \psi(x, t), \psi^\dagger(x', t) \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\tau_j}{2} \psi(x', t) \right] = \\ = \delta(x' - x) \left[\psi^\dagger(x, t) \frac{1 + \gamma_5}{2} \frac{\tau_i \tau_j - \tau_j \tau_i}{2} \psi(x', t) \right], \quad (7.24)$$

¹⁾То есть $[\psi(x, t), \psi'^\dagger(x', t)]_+ = \delta(x - x')$, если ψ и ψ' — одинаковые поля, и $[\psi(x, t), \psi'^\dagger(x', t)]_+ = 0$, если ψ и ψ' — разные поля.

или

$$[\tau^i(t)_j, \tau^i(t)_k] = i \varepsilon_{ijk} \tau^i(t)_k. \quad (7.25)$$

Следовательно, для оператора

$$\Gamma = \tau(t) + \tau^i(t), \quad (7.26)$$

(помня о том, что он не зависит от времени) получаем

$$[T_i, T_j] = i \varepsilon_{ijk} T_k. \quad (7.27)$$

Кроме того, состояние¹⁾

$$|L(p)\rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3x \psi^\dagger(x, t) \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \begin{pmatrix} \frac{1 + \gamma_5}{2} v(p) \\ \frac{1 + \gamma_5}{2} e(p) \end{pmatrix} |0\rangle \quad (7.28)$$

обладает свойством

$$T_i |L(p)\rangle = \frac{\tau_i}{2} |L(p)\rangle \quad (7.29)$$

при условии, что

$$T_i |0\rangle = 0. \quad (7.30)$$

Отсюда мы видим, что $|L(p)\rangle$ — дублетное представление группы $SU(2)$, а T_i — генераторы группы $SU(2)$.

Даже если бы мы хотели ограничиться только слабыми взаимодействиями, мы не могли бы поставить здесь точку. Во-первых, наш $SU(2)$ -инвариантный лагранжиан является γ_5 -инвариантным и сохраняет четность, так что, в частности, электрон никогда не смог бы приобрести массу. Поэтому мы должны ввести правостороннюю компоненту электрона в дополнение к его левосторонней компоненте. Итак, определим состояние

$$|R(p)\rangle = \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \int d^3x e^\dagger(x, t) \frac{e^{ipx}}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1 - \gamma_5}{2} e(p) |0\rangle \quad (7.31)$$

¹⁾Здесь $v(p)$ и $e(p)$ — решения свободного уравнения Дирака для безмассовых частиц.

Используя развитую технику вместе с тождеством

$$(1 + \gamma_5)(1 - \gamma_5) = 0, \quad (7.32)$$

легко показать, что $|R(p) \rangle$ является $SU(2)$ -синглетом, т.е.

$$T_i |R(p) \rangle = 0. \quad (7.33)$$

Поэтому лагранжиан

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathbf{b}_\mu(x) + g \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x) \right)^2 - \\ & - \bar{L}(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \right) L(x) - \bar{R}(x) \gamma_\mu \frac{\partial}{\partial x_\mu} R(x), \end{aligned} \quad (7.34)$$

где $\bar{R}(x) \equiv [(1 - \gamma_5)/2] e(x)$, также инвариантен относительно локальных $SU(2)$ -преобразований. Конечно, можно было бы нарушить эту симметрию по Хиггсу, но мы не получили бы тогда электромагнетизма. Дело в том, что все поля $\mathbf{b}^\mu(x)$ приобрели бы одинаковую массу и безмассовый фотон не существовал бы. Отсюда следует, что физический фотон не является членом $SU(2)$ -триплета. Или, несколько иначе, электрический заряд в общем случае не просто пропорционален третьей компоненте изоспина, а представляет собой линейную комбинацию изоспина и гиперзаряда. Следовательно, нам нужно расширить группу локальной инвариантности, включив в нее локальную $U(1)$ -инвариантность, связанную с гиперзарядом. Это будет означать введение дополнительного "фотона", который мы обозначим через $a_\mu(x)$. Его не следует путать с настоящим фотоном $A_\mu(x)$, который появится в свое время из этой мешанины. Таким образом, новый лагранжиан, инвариантный относительно локальных $SU(2) \times U(1)$ -преобразований, имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathbf{b}_\mu(x) + g \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x) \right)^2 - \\ & - \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} a_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} a_\mu(x) \right)^2 - \bar{R}(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \right. \\ & - i g' a^\mu(x) \left. \right) R(x) - \bar{L}(x) \gamma_\mu \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - i \frac{g'}{2} a^\mu(x) - \right. \\ & \left. - i g \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \right) L(x). \end{aligned} \quad (7.35)$$

По поводу этого лагранжиана следует сделать ряд замечаний. В частности, мы хотим выяснить происхождение множителя $g^i/2$ в последнем члене.

Введем обозначения¹⁾

$$N_L = \int d^3x L^\dagger(\mathbf{x}, t) L(\mathbf{x}, t) = \int d^3x \left\{ e^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 + \gamma_5}{2} e(\mathbf{x}) + v^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 + \gamma_5}{2} v(\mathbf{x}) \right\} \quad (7.36)$$

$$N_R = \int d^3x R^\dagger(\mathbf{x}, t) R(\mathbf{x}, t) = \int d^3x e^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 - \gamma_5}{2} e(\mathbf{x}). \quad (7.37)$$

Заметим, что в отсутствие взаимодействия с полем Янга – Миллса оператор

$$\tau'_3 - N_R - \frac{1}{2} N_L = \int d^3x \left[v^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 + \gamma_5}{4} v(\mathbf{x}) - e^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 + \gamma_5}{4} e(\mathbf{x}) - e^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 - \gamma_5}{2} e(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} e^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 + \gamma_5}{2} e(\mathbf{x}) - \frac{1}{2} v^\dagger(\mathbf{x}) \frac{1 + \gamma_5}{2} v(\mathbf{x}) \right] \quad (7.38)$$

есть оператор полного электрического заряда Q . Если лептонный гиперзаряд мы обозначим через Y , то для согласования с обозначениями предыдущего параграфа нужно принять

$$Q = \tau'_3 + \frac{1}{2} Y, \quad (7.39)$$

где²⁾

$$Y = -2 N_R - N_L. \quad (7.40)$$

¹⁾Заметим, кстати, что $[R(\mathbf{x}, t), L^\dagger(\mathbf{x}', t)]_+ = 0$.

²⁾Наши обозначения несколько отличаются от обозначений Вейнберга [52]. Куда относить знаки и общие множители – это дело выбора. Мы предпочитаем, чтобы гиперзаряд был целочисленным, а другие авторы называют гиперзарядом средний заряд мультиплетта и для дублетов это $\pm \frac{1}{2}$. Если внутренних противоречий нет, то окончательная физика будет той же самой. Наши константы связи g и g' выбраны так, чтобы наш лагранжиан совпадал с лагранжианом Вейнберга [52].

Таким образом, если константа связи гиперзарядового фотона $a_\mu(x)$ с $R(x)$ равна $|g'|$, то константа связи его с $L(x)$ должна равняться $|g'|/2$. Знаки и масштаб всех полей выбраны так, чтобы они согласовались с обозначениями Вейнберга [52]. Между прочим, нетрудно показать, что

$$[Y(t), \tau'(t)] = 0 \quad (7.41)$$

и, следовательно, группы $SU(2)$ и $U(1)$ независимы и коммутируют. Прежде чем переходить к нарушению $SU(2) \times U(1)$ -симметрии, мы хотели бы выловить из этого супа настоящий фотон, чтобы можно было следить за тем, как ему удается оставаться безмассовым и почему его взаимодействия продолжают сохранять четность. С этой целью напишем в развернутом виде взаимодействие $a_\mu(x)$ и $b_\mu^3(x)$ с $R(x)$ и $L(x)$:

$$\begin{aligned} & i g' \bar{R}(x) \gamma_\mu a^\mu(x) R(x) + i \bar{L}(x) \gamma_\mu \left(\frac{g'}{2} a^\mu(x) + g \frac{\tau_3}{2} b_3^\mu(x) \right) L(x) = \\ & = i \bar{e}(x) \gamma_\mu \left(g' a^\mu(x) \frac{1 - \gamma_5}{2} + \frac{g'}{2} a^\mu(x) \frac{1 + \gamma_5}{2} - \right. \\ & \quad \left. - \frac{g}{2} b_3^\mu(x) \frac{1 + \gamma_5}{2} \right) e(x) + i \bar{\nu}(x) \gamma_\mu \left(\frac{g'}{2} a^\mu(x) + \right. \\ & \quad \left. + \frac{g}{2} b_3^\mu(x) \right) \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu(x). \end{aligned} \quad (7.42)$$

Чтобы выловить настоящий фотон, мы потребуем, чтобы с нейтрино взаимодействовал *только* его нейтральный партнер, который, вслед за Вейнбергом [52], мы обозначим через $Z_\mu(x)$. Тем самым мы сохраним как его электромагнитную нейтральность, так и $[(1 + \gamma_5)/2]$ -характер слабых взаимодействий. Иначе говоря, поскольку мы исключаем прямое взаимодействие нейтрино - фотон, должно быть

$$Z^\mu(x) = \frac{c}{2} \left(g' a^\mu(x) + g b_3^\mu(x) \right), \quad (7.43)$$

где c - общий нормировочный множитель. Его можно определить исходя из требования, чтобы поле $Z^\mu(x)$ было каноническим полем, удовлетворяющим коммутационному соотношению при равных време-

нах (скажем, в кулоновской калибровке)

$$[Z_g(x, t), \Pi_t(x', t)] = i\delta_{3t}^1(x - x'). \quad (7.44)$$

Поэтому, используя каноническую независимость a_μ и b_μ , получаем

$$\frac{c^2}{4}(g'^2 + g^2) = 1. \quad (7.45)$$

Таким образом,

$$Z^\mu(x) = \frac{1}{(g'^2 + g^2)^{1/2}} [g'a^\mu(x) + gb_3^\mu(x)]. \quad (7.46)$$

Назовем фотоном (настоящим) поле

$$A^\mu(x) = a a^\mu(x) + b b_3^\mu(x). \quad (7.47)$$

В силу канонических требований, включая каноническую независимость A^μ и Z^μ , имеем

$$a^2 + b^2 = 1, \quad (7.48)$$

$$g'a + b g = 0. \quad (7.49)$$

Решая эти уравнения, получаем

$$A^\mu(x) = \frac{1}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} (g a^\mu(x) - g' b_3^\mu(x)) \quad (7.50)$$

или, обращая соотношения (7.46) и (7.50), получаем

$$\frac{1}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} [g' Z^\mu(x) + g A^\mu(x)] = a^\mu(x) \quad (7.51)$$

и

$$\frac{1}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} (g Z^\mu(x) - g' A^\mu(x)) = b_3^\mu(x). \quad (7.52)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} & i g' \bar{R}(x) \gamma_\mu a^\mu(x) R(x) + i \bar{L}(x) \gamma_\mu \left(\frac{g'}{2} a^\mu(x) + g \frac{\tau_3}{2} b_3^\mu(x) \right) L(x) = \\ & = \frac{(g^2 + g'^2)^{1/2}}{2} i \bar{\nu}(x) \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \nu(x) Z^\mu(x) + \frac{g g'}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} i \bar{e}(x) \gamma_\mu \times \\ & \times e(x) A^\mu(x) + i \bar{e}(x) \left[\gamma_\mu \frac{3 g'^2 - g^2}{4 (g^2 + g'^2)^{1/2}} - \gamma_\mu \gamma_5 \frac{(g^2 + g'^2)^{1/2}}{4} \right] \times \\ & \times e(x) Z^\mu(x) \equiv -\mathcal{L}_f^0(x). \end{aligned} \quad (7.53)$$

Очень интересно, что в этой модели требования электрической нейтральности нейтрино и динамической независимости A_μ и Z_μ привели к тому, что взаимодействие фотона зависит только от γ_μ , т.е. оно C - и P -инвариантно. Правильный затравочный электрический заряд равен тогда

$$e = \frac{g g^1}{(g^2 + g^{12})^{1/2}}. \quad (7.54)$$

В дополнение к $\mathcal{L}_I^0(x)$ имеется также лагранжиан $\mathcal{L}_I^+(x)$, определенный соотношением

$$-\mathcal{L}_I^+(x) \equiv i \frac{g}{2} \bar{L}(x) \gamma_\mu [\tau_1 b_1^\mu(x) + \tau_2 b_2^\mu(x)] L(x) = i \frac{g}{2} \bar{L}(x) \gamma_\mu \times \\ \times [\tau_+(b_1^\mu(x) - i b_2^\mu(x)) + \tau_-(b_1^\mu(x) + i b_2^\mu(x))] L(x), \quad (7.55)$$

где

$$\tau_+ = \tau_-^\dagger = \frac{\tau_1 + i \tau_2}{2}, \quad (7.56)$$

или

$$-\mathcal{L}_I^+(x) = i \frac{g}{2} \left(\bar{\nu}(x) \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} e(x) (b_1^\mu(x) - i b_2^\mu(x)) + \bar{e}(x) \gamma_\mu \frac{1 + \gamma_5}{2} \times \right. \\ \left. \times \nu(x) (b_1^\mu(x) + i b_2^\mu(x)) \right). \quad (7.57)$$

Если мы введем обозначение

$$W_\mu^+(x) = (W_\mu^-(x))^\dagger \equiv \frac{1}{\sqrt{2}} [b_{1\mu}(x) + i b_{2\mu}(x)], \quad (7.58)$$

то окончательно получим

$$-\mathcal{L}_I^+(x) = \frac{i g}{2 \sqrt{2}} [\bar{\nu}(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) e(x) W^{-\mu}(x) + \\ + \bar{e}(x) \gamma_\mu (1 + \gamma_5) \nu(x) W^{+\mu}(x)]. \quad (7.59)$$

Мы проделывали все так подробно потому, что иначе коэффициенты перед константами связи у Вейнберга [52] покажутся совершенно не-постижимыми. В частности, определение коэффициента g , данное выше, в конечном счете связано с локальной калибровочной $SU(2)$ -инва-

риантностью модели. В самом деле, если обратиться к более ранней литературе по этому вопросу¹⁾, то можно встретить константу связи g_{CT} ("CT" означает "старая"), введенную соответственно выражению

$$g_{CT} W^{+\mu}(x) \bar{e}(x) \gamma_{\mu} (1 + \gamma_5) v(x) + \text{эрмит. сопр.}, \quad (7.60)$$

так что

$$g_{CT} = \frac{g}{2\sqrt{2}}. \quad (7.61)$$

При сравнении формул это нужно иметь в виду.

Теперь мы хотим выразить через Z_{μ} , A_{μ} и W^{\pm} ту часть лагранжиана, которая описывает векторные мезоны. Тем самым будут зафиксированы свойства слабых и электромагнитных взаимодействий самих векторных мезонов. Введем обозначения

$$a_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} a_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} a_{\mu}(x), \quad (7.62)$$

$$A_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} A_{\mu}(x), \quad (7.63)$$

$$Z_{\mu\nu}(x) \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} Z_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} Z_{\mu}(x), \quad (7.64)$$

$$b_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} b_{\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} b_{\mu}(x). \quad (7.65)$$

Величина $b_{\mu\nu}(x)$, даваемая формулой (7.65), — это, конечно, не полный тензор напряженности поля Янга — Миллса, а лишь его часть, которая совпадает с ним при $g = 0$. Остальная часть будет выписана позже. Таким образом, находим

$$(a_{\mu\nu}(x))^2 = \frac{1}{g^2 + g'^2} [g'^2 (Z_{\mu\nu}(x))^2 + g^2 (A_{\mu\nu}(x))^2 + 2gg' Z_{\mu\nu}(x) A^{\mu\nu}(x)], \quad (7.66)$$

тогда как

$$(b_{\mu\nu}(x))^2 = 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} W_{\nu}^{+}(x) - \frac{\partial}{\partial x^{\nu}} W_{\mu}^{+}(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_{\mu}} W^{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_{\nu}} W^{-\mu}(x) \right) + \frac{1}{g^2 + g'^2} [g^2 (Z_{\mu\nu}(x))^2 + g'^2 (A_{\mu\nu}(x))^2 - 2gg' Z_{\mu\nu}(x) A^{\mu\nu}(x)]. \quad (7.67)$$

¹⁾ См., например, работы Фейнмана и Гелл-Манна [17] или Ли и Янга [43].

Поэтому кинетическая часть лагранжиана векторных мезонов $\mathcal{L}_0^v(x)$ дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0^v(x) = & -\frac{1}{4} [(a_{\mu\nu}(x))^2 + (b_{\mu\nu}(x))^2] = -\frac{1}{4} \left[(Z_{\mu\nu}(x))^2 + (A_{\mu\nu}(x))^2 + \right. \\ & + 2 \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^+(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^+(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-\nu}(x) - \right. \\ & \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W^{-\mu}(x) \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.68)$$

В то же время прямое вычисление численных коэффициентов с использованием антисимметрии тензоров $A_{\mu\nu}$ и т.п. дает

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_I^v(x) = & -\frac{g}{4} \{ 2 \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x) \cdot \mathbf{b}^{\mu\nu}(x) + g \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x) \cdot \mathbf{b}^\mu(x) \times \mathbf{b}^\nu(x) \} = \\ = & -\frac{ig}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} \left\{ g' A^\mu(x) \left[W^{-\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^+(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^+(x) \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - W^{+\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^-(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^-(x) \right) \right] - g' A^{\mu\nu}(x) W_\mu^+(x) W_\nu^-(x) + \right. \\ & + g Z^\mu(x) \left[W^{+\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^-(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^-(x) \right) - \right. \\ & \left. \left. - W^{-\nu}(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^+(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^+(x) \right) \right] + g Z^{\mu\nu}(x) W_\mu^+(x) W_\nu^-(x) \right\} - \\ & - \frac{g^2}{g^2 + g'^2} \left\{ g^2 [(Z_\mu(x))^2 W_\nu^+(x) W^{-\nu}(x) - Z_\mu(x) W^{-\mu}(x) Z_\nu(x) \times \right. \\ & \times W^{+\nu}(x)] + g'^2 [(A_\mu(x))^2 W_\nu^+(x) W^{-\nu}(x) + A_\mu(x) W^{-\mu}(x) A_\nu(x) W^{+\nu}(x)] \\ & + g' g [A_\mu(x) W^{-\mu}(x) Z_\nu(x) W^{+\nu}(x) + Z_\mu(x) W^{-\mu}(x) A_\nu(x) W^{+\nu}(x) - \\ & \left. - 2 A_\mu(x) Z^\mu(x) W_\nu^+(x) W^{-\nu}(x)] \right\} - \frac{g^2}{2} [(W_\mu^-(x) W^{+\mu}(x))^2 - \\ & - (W_\mu^-(x))^2 (W_\nu^+(x))^2]. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Конечно, нужно быть "истинно верующим", чтобы взяться за подробные выкладки (особенно в высших порядках) с таким сложным лагранжианом¹⁾. Некоторые из достоинств последнего выяснятся после того, как симметрия [$SU(2) \times U(1)$ -симметрия] будет нарушена с помощью механизма Хиггса. Поэтому мы добавим ко всему прочему лагранжиан Хиггса

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H(x) = & \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i g \frac{\tau^T}{2} \cdot \mathbf{b}_\mu(x) - i \frac{g'}{2} a_\mu(x) \right) \varphi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - \right. \\ & \left. - i g \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) + i \frac{g'}{2} a^\mu(x) \right) \varphi(x) + m_0^2 \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \\ & - \frac{1}{2} f^2 (\varphi^\dagger(x) \varphi(x))^2, \end{aligned} \quad (7.70)$$

где

$$\varphi(x) = \begin{pmatrix} \varphi^+(x) \\ \varphi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (7.71)$$

Здесь снова нужно пояснить происхождение новых членов в лагранжиане $\mathcal{L}_H(x)$, пропорциональных g' . Пусть, как и прежде,

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y, \quad (7.72)$$

¹⁾ В самом деле, насколько известно автору, никто не пытался проводить такие вычисления до 1971 г., когда 'т Офт [30] вывел правила Фейнмана для целого ряда калибровочных теорий, в том числе и для теорий со спонтанным нарушением $SU(2) \times U(1)$ -симметрии. Он пытался доказать с помощью тождеств Уорда, что эта модель перенормируема. В своем первоначальном доказательстве он пренебрегал проблемой аномалий (см. примечание на стр. 181), ясность в которую была внесена позже рядом авторов. Обзор по данному вопросу и полную библиографию см. в работе Зумино [58]. Проф. Салам ([47], стр. 367) был, без сомнения, одним из первых истинно верующих, но, насколько известно автору, он не опубликовал подробного доказательства перенормируемости. Вслед за 'т Офтом, поднявшим снова вопрос о перенормируемости, Вейнберг [53] на нескольких физически интересных примерах показал, каким образом его модель 1967 г. разрешает многие из проблем сходимости и унитарности, которые досаждали предшествующим теориям слабых взаимодействий, основанным на промежуточных векторных мезонах. Перенормируемость теории теперь доказана, ко всеобщему удовлетворению, во всех порядках теории возмущений (см., например, работу Б.В. Ли [38] и ссылки на литературу в ней). Эти теории, по-видимому, *непротиворечивы*. Остается выяснить, *правильны ли* они.

так что гиперзаряды φ^+ и φ^0 равны +1. (Оба члена изотопического дублета имеют *одинаковый* гиперзаряд, так как $SU(2)$ - и $U(1)$ -генераторы коммутируют.) В то же время $SU(2)$ -дублет L имеет гиперзаряд -1. В этом отражается то обстоятельство, что электрон с отрицательным электрическим зарядом есть "частица", а положительно заряженный позитрон - античастица. Далее $SU(2)$ -синглет R имеет гиперзаряд -2. Гиперзаряд векторных мезонов равен нулю, что отражено в отсутствии константы связи g' в лагранжиане Янга - Миллса. Следовательно, в этих трех случаях ковариантная производная, соответствующая калибровочной группе $U(1)$, принимает вид

$$D_{\mu} R(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - i g' a_{\mu}(x) \right) R(x), \quad (7.73)$$

$$D_{\mu} L(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - i \frac{g'}{2} a_{\mu}(x) \right) L(x), \quad (7.74)$$

$$D_{\mu} \varphi(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} + i \frac{g'}{2} a_{\mu}(x) \right) \varphi(x) \quad (7.75)$$

(константа связи g' выбрана так, чтобы результаты согласовались с работой Вейнберга [52]¹).

Причина, по которой мы выписывали все так подробно, станет ясной на следующем шаге, когда мы спросим, какой из двух нейтральных векторных мезонов приобретает массу в U -калибровке при спонтанном нарушении $SU(2) \times U(1)$ -симметрии. Чтобы выяснить это, выделим из структуры лагранжиана $\mathcal{L}_H(x)$ полную ковариантную производную

$$\left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - i g \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{b}_{\mu}(x) + i \frac{g'}{2} a_{\mu}(x) \right] \begin{pmatrix} \varphi^+(x) \\ \varphi^0(x) \end{pmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu}} - \frac{i g}{\sqrt{2}} (\tau_+ W_{\mu}^-(x) + \tau_- W_{\mu}^+(x)) + \frac{i}{2} (g' a_{\mu}(x) - g \tau_3 b_{\mu 3}(x)) \right] \begin{pmatrix} \varphi^+(x) \\ \varphi^0(x) \end{pmatrix}. \quad (7.76)$$

Следуя методу предыдущего параграфа, можно избавиться от $\varphi^+(x)$ посредством $SU(2)$ -преобразования, параметры которого определяются соотношением

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha(x)}{2} = - \frac{\varphi^+(x) \varphi^0(x)^{\dagger} + \varphi^0(x) \varphi^+(x)^{\dagger} \pm i (\varphi^+(x) \varphi^0(x)^{\dagger} - \varphi^0(x) \varphi^+(x)^{\dagger})}{2 |\varphi^0(x)|^2} \quad (7.77)$$

¹См. примечание на стр. 201. - *Прим. ред.*

Таким образом,

$$\begin{pmatrix} \varphi^+(x) \\ \varphi^0(x) \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi^0(x) \end{pmatrix} \quad (7.78)$$

Однако получившееся поле $\varphi^{01}(x)$ не эрмитово. Можно написать

$$\varphi^{01}(x) = \exp[i\theta(x)]\rho(x), \quad (7.79)$$

где $\theta(x)$ и $\rho(x)$ — эрмитовы операторы. Чтобы избавиться от $\theta(x)$, можно выполнить локальное калибровочное $U(1)$ -преобразование, допускаемое локальной гиперзарядовой калибровочной инвариантностью. Теперь следует считать, что все остальные поля L, R, a_μ и b_μ взяты в новой калибровке. Это будет подразумеваться, и мы в дальнейшем не будем загрязнять обозначения полевых переменных гирляндами штрихов. Поэтому выписанная выше ковариантная производная в U -калибровке принимает вид [отметим отсутствие $A_\mu(x)$]

$$D_\mu \varphi(x) \rightarrow \left[\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i \left(\frac{g}{\sqrt{2}} W_\mu^-(x) - \frac{(g^2 + g'^2)^{1/2}}{2} Z_\mu(x) \right) \right] \rho(x), \quad (7.80)$$

так что $\mathcal{L}_H(x)$ дается выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_H(x) = & - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \rho(x) \frac{\partial}{\partial x^\mu} \rho(x) + \frac{g(g^2 + g'^2)^{1/2}}{2\sqrt{2}} (W_\mu^+(x) Z^\mu(x) + \\ & + W_\mu^-(x) Z^\mu(x)) \rho^2(x) - \left(\frac{g^2}{2} W_\mu^+(x) W^{-\mu}(x) + \frac{g^2 + g'^2}{4} \times \right. \\ & \left. \times Z_\mu(x) Z^\mu(x) \right) \rho^2(x) + m_0^2 \rho^2(x) - \frac{1}{2} f^2 \rho^4(x). \end{aligned} \quad (7.81)$$

Итак, в U -калибровке мы получили очень важный результат: электромагнитный фотон не взаимодействует с хиггсовским полем. Очень скоро это нам пригодится. Пока что мы не приписывали лептонам никакого взаимодействия, которое могло бы генерировать массу. Это явствует из формы исходного лагранжиана, в котором правосторонние лептоны связаны только с правосторонними лептонами, а левосторонние лептоны — только с левосторонними. Таким образом, лептонные члены пока обладают инвариантностью относительно глобальных киральных фазовых преобразований вида $\exp(i\lambda\gamma_5)$, которая, если бы она сохранилась, помешала бы появлению какого-либо массового чле-

на¹⁾. Исправить положение можно путем введения кирально-*неинвариантного* взаимодействия вида (до перехода к U -калибровке)

$$\mathcal{L}_H^I(x) = -GL(x) \varphi(x) R(x) + \bar{R}(x) \varphi^\dagger(x) L(x), \quad (7.82)$$

где G — новая константа связи, не имеющая, вообще говоря, отношения к g или g' . В этом смысле несохранение четности и, как мы увидим, масса электрона введены руками с самого начала. Возможно, что в окончательной калибровочной теории (если такая существует) их можно будет вывести из чего-то более фундаментального. Так как $\bar{L}(x)$ и $\varphi(x)$ относятся к сопряженным представлениям группы $SU(2)$, а $R(x)$ есть $SU(2)$ -синглет, лагранжиан $\mathcal{L}_H^I(x)$ локально инвариантен относительно $SU(2)$. Кроме того, поскольку гиперзаряды $\bar{L}(x)$ и $\varphi(x)$ равны $+1$, а гиперзаряд $R(x)$ равен -2 , лагранжиан $\mathcal{L}_H^I(x)$ инвариантен также относительно локальной группы $U(1)$. Поэтому можно перенести всю игру в U -калибровку, где

$$\mathcal{L}_H^I(x) = -G\bar{e}(x) e(x) \rho(x), \quad (7.83)$$

и $\rho(x)$ следует теперь понимать как хиггсовское поле в U -калибровке. Полный лагранжиан (несмотря на то, что он записан в U -калибровке) все еще инвариантен относительно локальных калибровочных $SU(2) \times U(1)$ -преобразований. Нарушим теперь инвариантность, положив, как и ранее,

$$\rho(x) = \chi(x) + \eta, \quad (7.84)$$

где

$$\langle 0 | \chi(0) | 0 \rangle = 0. \quad (7.85)$$

Что при этом происходит?

Разберем все по порядку.

1. Электрон приобретает голую массу $m_e = G\eta$, величина которой нашей теорией не определяется, так как константа G произвольна. Здесь следует отметить, что о мюоне и его нейтрино пока не было ре-

¹⁾ Это давно известное обстоятельство можно продемонстрировать, заметив, что выражения вида $(A + B\gamma_5)$ и $(A' + B'\gamma_5) \gamma \cdot p$ под действием $\exp(i\lambda\gamma_5)$ изменяются противоположным образом. Поэтому в кирально-инвариантной теории эти две формы не могут одновременно присутствовать в функции Грина (или в обратной ей). Значит, масса не может появиться. Голая масса исключается из лагранжиана по тем же самым причинам.

чи. Их можно включить совершенно аналогично электронным членам. Однако в модели Вейнберга 1967 г. отношение масс мюона и электрона фиксируется руками путем соответствующего выбора констант связи. Нужно надеяться, что со временем будет найдена такая калибровочная теория, в которой это отношение вытекало бы из структуры модели.

2. Поле χ приобретает массу, поскольку, как и в абелевом случае,

$$m_0^2 \rho^2(x) - \frac{1}{2} f^2 \rho^4(x) = \left(m_0^2 - \frac{1}{2} f^2 \eta^4 \right) + \chi(x) 2 \eta (m_0^2 - f^2 \eta^2) + \chi^2(x) (m_0^2 - 3 f^2 \eta^2) - 2 f \eta \chi^3(x) - \frac{1}{2} f^2 \chi^4(x). \quad (7.86)$$

Как и прежде, постоянное слагаемое можно отбросить, ибо оно приводит к безвредному единственному изменению фазы во всех матричных элементах переходов [55]. В главном порядке мы должны иметь

$$\eta = \frac{m_0}{f}, \quad (7.87)$$

чтобы исключить члены, которые могли бы привести к возможности перехода $\chi(x)$ в вакуум, в противоречии с условием

$$\langle 0 | \chi(0) | 0 \rangle = 0. \quad (7.88)$$

Следовательно, как и прежде, в этом порядке

$$m_\chi = \sqrt{2} m_0. \quad (7.89)$$

Остающиеся члены описывают сложное самодействие поля χ .

3. Имеем

$$\left(\frac{g^2}{2} W_\mu^+(x) W^{-\mu}(x) + \frac{g^2 + g'^2}{4} Z_\mu(x) Z^\mu(x) \right) \rho^2(x) = \left(\frac{g^2}{2} W_\mu^+(x) W^{-\mu}(x) + \frac{g^2 + g'^2}{4} Z_\mu(x) Z^\mu(x) \right) (\eta^2 + 2 \eta \chi(x) + \chi^2(x)). \quad (7.90)$$

Отсюда видно, что голые массы W и Z таковы:

$$m_W^2 = m_{W^-}^2 = \frac{1}{2} g^2 \eta^2, \quad (7.91)$$

$$m_Z^2 = \frac{g^2 + g'^2}{2} \eta^2. \quad (7.92)$$

Поэтому

$$\frac{m_z^2}{m_W^2} = 1 + \frac{g'^2}{g^2} \equiv \frac{1}{\cos^2 \theta}, \quad (7.93)$$

где θ – вейнберговский угол смешивания [55], который определяется соотношением

$$\operatorname{tg} \theta \equiv \frac{g'}{g}. \quad (7.94)$$

Угол θ нужно находить эмпирически. В тех же обозначениях электрический заряд дается выражением

$$e = \frac{g'}{[1 + (g'^2/g^2)]^{1/2}} = g \sin \theta. \quad (7.95)$$

Иначе говоря, все три константы g , g' и e – одного порядка величины.

4. Голая масса фотона

$$A_\mu(x) = \frac{1}{(g^2 + g'^2)^{1/2}} (g a_\mu(x) - g' b_{\mu 3}(x)) \quad (7.96)$$

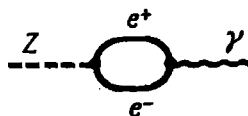
равна нулю, так как в U -калибровке фотон не взаимодействует с хиггсовским полем и механизм Хиггса не работает. Поскольку в U -калибровке не остается никаких заряженных частиц с нулевой массой, можно думать, что, следуя обычному методу доказательства и рассматривая свойства тензора поляризации вакуума, мы сможем показать, что фотон будет безмассовым во всех порядках по всем константам связи. Однако в таком доказательстве имеется ряд темных мест. Поскольку трудности, которые мы имеем в виду, одинаковы для всех калибровочных теорий, где и фотоны и тяжелые нейтральные векторные мезоны взаимодействуют с электронами (как в модели Вейнберга 1967 г.), остановимся на них несколько подробнее¹⁾.

Основная проблема состоит в том, что в подобных теориях фотон и массивные нейтральные векторные мезоны могут *смешиваться* за

¹⁾ На соображения, излагаемые ниже, внимание автора обратил проф. Тейлор весной 1972 г. Эти соображения были высказаны в связи с (неопубликованными) вычислениями радиационных поправок к упругому рассеянию электрона и нейтрино, выполнявшимися вместе с автором данного обзора на основе модели Вейнберга 1967 г.

счет слабых и электромагнитных взаимодействий. Как выглядел бы такой смешивающий член в модели Вейнберга 1967 г., показано на фиг. 7. Следовательно, нужно придумать схему перенормировки, которая определила бы физические несмешанные поля нейтральных векторных мезонов. Эти поля должны иметь правильные физические мас-

Фиг. 7. Смешивание Z и γ в $SU(2) \times U(1)$ -модели. Взаимодействие электрон-позитронной пары с Z -мезоном — "слабое", а с фотоном (γ) — электромагнитное.



сы, т.е. фотон должен быть безмассовым. Поэтому перенормированные Z -поле ($Z'_\mu(x)$) и фотонное поле ($A'_\mu(x)$) в $SU(2) \times U(1)$ -модели мы определяем так, чтобы получить для физического Z -состояния $|Zk\epsilon\rangle$ и физического γ -состояния $|\gamma k\epsilon\rangle$ (k — импульс, ϵ — поляризация) соотношения

$$\langle 0 | A'_\mu(x) | \gamma k \epsilon \rangle = \epsilon_\mu^\gamma \exp(i k x), \quad (7.97)$$

$$\langle 0 | Z'_\mu(x) | Z k \epsilon \rangle = \epsilon_\mu^Z \exp(i k x), \quad (7.98)$$

тогда как

$$\langle 0 | Z'_\mu(x) | \gamma k \epsilon \rangle = 0, \quad (7.99)$$

$$\langle 0 | A'_\mu(x) | Z k \epsilon \rangle = 0. \quad (7.100)$$

Тензор поляризации вакуума для $Z\gamma$ -системы представляет собой (2×2) -матрицу, диагональные члены которой описывают $\gamma\gamma$ - и ZZ -переходы, а недиагональный член (тензор симметричен) — $Z\gamma$ -переход. Выписывая это выражение, мы должны помнить, что фотон взаимодействует с сохраняющимся током, а нейтральный векторный мезон с ним не взаимодействует. Если обозначить перенормированную, т.е. физическую, массу Z -мезона через m_Z , то перенормированный тензор поляризации вакуума в фейнмановской калибровке¹⁾ принимает вид

$$M_{\mu\nu}(k) = \begin{pmatrix} (k^2 g_{\mu\nu} + (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi_1(k^2)) & (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi_2(k^2) \\ (k^2 g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu) \Pi_2(k^2) & (k^2 + m_Z^2) g_{\mu\nu} + \Pi_3(k)_{\mu\nu} \end{pmatrix} \quad (7.101)$$

¹⁾ В такой калибровке свободный пропагатор фотона $D_{f\mu\nu}^0(k)$ принимает вид $D_{f\mu\nu}^0(k) = g_{\mu\nu}/(k^2 + i\epsilon)$. В дальнейшем член $i\epsilon$ не выписывается в явном виде.

Читатель заметит, что имеются три независимые поляризационные функции: $\Pi_1(k^2)$, $\Pi_2(k^2)$ и $\Pi_3(k)_{\mu\nu}$. Ковариантные тензоры перед ними фиксируются условием сохранения тока (когда оно применимо). В сохранении недиагонального матричного элемента отражается то обстоятельство, что γ взаимодействует с сохраняющимся током, хотя Z и не связан с таким током. Перенормировка фиксируется требованиями

$$\Pi_1(k^2) \sim O(k^2), \quad (7.102)$$

$$\Pi_2(k^2) \sim O(k^2 + m_Z^2), \quad (7.103)$$

$$\Pi_3(k^2)_{\mu\nu} \sim O((k^2 + m_Z^2)^2). \quad (7.104)$$

Эти условия дают

$$M_{\mu\nu}^{-1}(k) = \varepsilon_{\mu\nu} \begin{pmatrix} \frac{1}{k^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{k^2 + m_Z^2} \end{pmatrix} + \text{несингулярные члены} \quad (7.105)$$

Следовательно, полюса будут расположены правильно. Поэтому, чтобы перейти от перенормированных пропагаторов к перенормированным, вычитание для $\Pi_1(k^2)$ нужно выполнить в точке $k^2 = 0$, а для $\Pi_2(k^2)$ и $\Pi_3(k)_{\mu\nu}$ — в точке $k^2 = -m_Z^2$. Такой способ вычитаний весьма существен для того, чтобы в калибровочных теориях, включающих и фотоны, и массивные нейтральные векторные мезоны, физические фотоны оставались безмассовыми.

Хотя в U -калибровке равенство нулю массы фотона довольно просто доказывается, такое доказательство не может служить хорошей иллюстрацией при общем анализе механизма Хиггса и нарушения теоремы Голдстоуна, с которого мы начали. Поэтому мы хотели бы заново разобрать данный вопрос в произвольной калибровке, используя линеаризованную теорию. Забудем о лептонных взаимодействиях и рассмотрим систему, описываемую упрощенным лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(x) = & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \mathbf{b}_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} \mathbf{b}_\mu(x) + g \mathbf{b}_\mu(x) \times \mathbf{b}_\nu(x) \right)^2 - \\ & -\frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} a_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} a_\mu(x) \right)^2 - \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ig \frac{\boldsymbol{\tau}^T}{2} \right. \\ & \cdot \mathbf{b}_\mu(x) - i \frac{g'}{2} a_\mu(x) \left. \right) \varphi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \frac{\boldsymbol{\tau}}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) + \right. \\ & \left. + i \frac{g'}{2} a^\mu(x) \right) \varphi(x) + m_0^2 \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \frac{1}{2} f^2 \left(\varphi^\dagger(x) \varphi(x) \right)^2, \end{aligned} \quad (7.106)$$

где

$$\varphi(x) = \begin{bmatrix} \varphi^+(x) \\ \varphi^0(x) \end{bmatrix} \quad (7.107)$$

Мы имеем локальную $SU(2) \times U(1)$ -инвариантность и, следовательно, сохраняющиеся токи. Обозначения те же самые, что и в предыдущем разделе:

$$\begin{aligned} T_\mu(x) = & f_{\mu\nu}(x) \times b^\nu(x) + i \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ig \frac{\tau^T}{2} \cdot b_\mu(x) - i \frac{g'}{2} a_\mu(x) \right) \times \right. \\ & \times \varphi^\dagger(x) \frac{\tau}{2} \varphi(x) - \varphi^\dagger(x) \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ig \frac{\tau}{2} \cdot b_\mu(x) + \right. \\ & \left. \left. + i \frac{g'}{2} a_\mu(x) \right) \varphi(x) \right], \end{aligned} \quad (7.108)$$

где

$$\int d^3x [T_0(x, 0), \varphi(0)] = \frac{\tau}{2} \varphi(0). \quad (7.109)$$

Кроме того, $U(1)$ -инвариантность приводит к сохранению тока

$$\begin{aligned} Y_\mu(x) = & i \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} + ig \frac{\tau^T}{2} \cdot b_\mu(x) - i \frac{g'}{2} a_\mu(x) \right) \varphi^\dagger(x) \varphi(x) - \right. \\ & \left. - \varphi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - ig \frac{\tau}{2} \cdot b_\mu(x) + i \frac{g'}{2} a_\mu(x) \right) \varphi(x) \right], \end{aligned} \quad (7.110)$$

и мы имеем

$$\int d^3x [Y_0(x, 0), \varphi(0)] = \varphi(0). \quad (7.111)$$

Если построить электрический заряд

$$Q = T_3 + \frac{1}{2} Y, \quad (7.112)$$

то мы получим два уравнения

$$\int d^3x \left[T_{03}(x, 0) + \frac{1}{2} Y_0(x, 0), \varphi^+(0) \right] = \varphi^+(0), \quad (7.113)$$

$$\int d^3x \left[T_{03}(x, 0) + \frac{1}{2} Y_0(x, 0), \varphi^0(0) \right] = 0. \quad (7.114)$$

Чтобы ни случилось в дальнейшем, *электрический* заряд должен сохраняться и все состояния должны обладать хорошо определенным

электрическим зарядом. Поэтому мы должны потребовать, чтобы выполнялось условие

$$Q|0\rangle = 0. \quad (7.115)$$

Как мы сейчас увидим, именно этим требованием обеспечивается безмассовость фотона. В частности, во *всех* калибровках

$$\langle 0|\varphi^+(0)|0\rangle = \langle 0|[Q, \varphi^+(0)]|0\rangle = 0. \quad (7.116)$$

Равенство (7.116), конечно, не противоречит условию *U*-калибровки

$$\varphi^{+\prime} = 0, \quad (7.117)$$

но носит более общий характер. Так как *Q* коммутирует с $\varphi^0(x)$, аналогичное условие для $\langle 0|\varphi^0(0)|0\rangle$ не возникает и симметрию можно нарушить, потребовав, чтобы выполнялось соотношение

$$\langle 0|\varphi^0(0)|0\rangle = \eta \neq 0. \quad (7.118)$$

Снова призвав на помощь обращение времени, можно убедиться, что

$$\eta = \eta^*. \quad (7.119)$$

Теперь, чтобы найти различные массы, можно решить теорию в линеаризованном приближении в произвольной калибровке. Уравнения движения векторных полей имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} a^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^\mu(x) \right) = & i \frac{g'}{2} \left[\varphi^\dagger(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \frac{g'}{2} a^\mu(x) \right) \varphi(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \frac{\tau^T}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) - \right. \right. \\ & \left. \left. - i \frac{g'}{2} a^\mu(x) \right) \varphi^\dagger(x) \varphi(x) \right] \end{aligned} \quad (7.120)$$

и, если опустить члены самодействия полей Янга - Миллса¹⁾,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \mathbf{b}^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \mathbf{b}^\mu(x) \right) = & -i \frac{g}{2} \left[\varphi^\dagger(x) \tau \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} - ig \frac{\tau}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) + \right. \right. \\ & \left. \left. + i \frac{g'}{2} a^\mu(x) \right) \varphi(x) - \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + ig \frac{\tau^T}{2} \cdot \mathbf{b}^\mu(x) - i \frac{g'}{2} a^\mu(x) \right) \right. \\ & \left. \times \varphi^\dagger(x) \cdot \tau \varphi(x) \right]. \end{aligned} \quad (7.121)$$

¹⁾В низшем порядке они не дают вклада в массы.

Решим эту систему приближенно, положив

$$\varphi(x) = \eta + \varphi'(x), \quad (7.122)$$

где

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (7.123)$$

$$\varphi'(x) = \begin{pmatrix} \varphi'^1(x) \\ \varphi'^0(x) \end{pmatrix}, \quad (7.124)$$

причем φ' рассматривается как "малая" величина. Таким образом, для нейтральных полей приближенно имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} a^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^\mu(x) \right) &= \frac{g^1 \eta}{2} i \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\varphi^{01}(x) - \varphi^{01}(x)^\dagger) - \\ &- \frac{\eta^2}{2} (g'^2 a^\mu(x) + g g'_3 b_3^\mu(x)), \end{aligned} \quad (7.125)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} b_3^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} b_3^\mu(x) \right) &= \frac{g \eta}{2} i \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\varphi^{01}(x) - \varphi^{01}(x)^\dagger) - \\ &- \frac{\eta^2}{2} (g g'_1 a^\mu(x) + g^2 b_3^\mu(x)). \end{aligned} \quad (7.126)$$

Чтобы найти нейтральные векторные поля, обладающие определенной массой [очевидно, что это не $a^\mu(x)$ и $b_3^\mu(x)$], умножим вначале обе части уравнения (7.125) на g^1 , а уравнения (7.126) на g и введем эрмитово поле

$$\theta(x) \equiv i (\varphi^{01}(x) - \varphi^{01}(x)^\dagger). \quad (7.127)$$

Тогда получим

$$\begin{aligned} g^1 \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} a^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^\mu(x) \right) &= \frac{\eta g'^2}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x) - \\ &- \frac{\eta^2 g'^2}{2} (g^1 a^\mu(x) + g b_3^\mu(x)), \end{aligned} \quad (7.128)$$

$$\begin{aligned} g \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} b_3^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} b_3^\mu(x) \right) &= \frac{g^2 \eta}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x) - \\ &- \frac{g^2 \eta^2}{2} (g^1 a^\mu(x) + g b_3^\mu(x)), \end{aligned} \quad (7.129)$$

или, сложив их,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[g' \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} a^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^\mu(x) \right) + g \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} b_3^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} b_3^\mu(x) \right) \right] = \\ = \frac{g^2 + g'^2}{2} \eta \frac{\partial}{\partial x_\mu} \theta(x) - \frac{\eta^2}{2} (g^2 + g'^2) (g' a^\mu(x) + \\ + g b_3^\mu(x)) \end{aligned} \quad (7.130)$$

Аналогичные вычисления показывают, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left[g \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} a^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} a^\mu(x) \right) - g' \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} b_3^\nu(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x_\nu} b_3^\mu(x) \right) \right] = 0. \end{aligned} \quad (7.131)$$

В свете сказанного выше ясно, как мы собираемся интерпретировать полученные уравнения. Но прежде чем перейти к этому, сделаем систему уравнений полной. Из приближенного уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} b^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} b^\mu(x) \right) = - \frac{ig}{2} \left[\varphi^\dagger(x) \tau \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi(x) - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi^\dagger(x) \tau \varphi(x) \right] - \frac{g^2}{2} \varphi^\dagger(x) b^\mu(x) \varphi(x) \end{aligned} \quad (7.132)$$

имеем уравнение

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{b_1^\nu(x) + i b_2^\nu(x)}{\sqrt{2}} - \frac{\partial}{\partial x_\nu} \frac{b_1^\mu(x) + i b_2^\mu(x)}{\sqrt{2}} \right) = i \frac{g\eta}{\sqrt{2}} \times \\ \times \frac{\partial}{\partial x_\mu} \varphi^\dagger(x) - \frac{g^2 \eta^2}{2} \frac{b_1^\mu(x) + i b_2^\mu(x)}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad (7.133)$$

и соответствующее сопряженное уравнение.

Итак, здесь, очевидно, происходит следующее. Аналогично тому, как это было в предыдущих параграфах, три скалярные степени свободы $\varphi^+(x)$, $\varphi^\dagger(x)$ и $\theta(x) = i(\varphi^{0\dagger}(x) - \varphi^{0\dagger}(x)^\dagger)$ комбинируются с векторными полями $a_\mu(x)$ и $b_\mu(x)$ и образуют массивные мезоны W_μ^+ , W_μ^- и Z_μ и безмассовый фотон A_μ . Но прежде чем окончательно

принять такую интерпретацию, мы должны взглянуть на приближенные уравнения движения для $\varphi^\dagger(x)$ и $\varphi^0(x)$, чтобы установить, все ли самосогласованно и где спрятана физическая хиггсовская частица. Если наложить условие совместности в главном порядке

$$f^2 \eta^2 = m_0^2, \quad (7.134)$$

которым обеспечивается равенство

$$\langle 0 | \varphi^{01}(0) | 0 \rangle = 0, \quad (7.135)$$

то после некоторых выкладок получим приближенные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \begin{pmatrix} \varphi^{+1}(x) \\ \varphi^{01}(x) \end{pmatrix} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \left(g^1 a_\mu(x) - g \tau \cdot \mathbf{b}_\mu(x) \right) \begin{pmatrix} 0 \\ \eta \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 0 \\ m_0^2 (\varphi^{01}(x)^\dagger + \varphi^{01}(x)) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7.136)$$

и соответствующие сопряженные. Их можно переписать в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi^{+1}(x) - i \frac{g \eta}{\sqrt{2}} \frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\mu^-(x) = 0 \quad (7.137)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \varphi^{01}(x) + \frac{i}{2} (g^2 + g^{12})^{1/2} \eta \frac{\partial}{\partial x_\mu} Z_\mu(x) = \\ = m_0^2 (\varphi^{01}(x)^\dagger + \varphi^{01}(x)) \end{aligned} \quad (7.138)$$

плюс их сопряженные. Уравнение (7.138) лучше записать, используя сопряженное уравнение, в виде

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\varphi^{01}(x) - \varphi^{01}(x)^\dagger) + \frac{i}{2} (g^2 + g^{12})^{1/2} \eta \frac{\partial}{\partial x_\mu} Z_\mu(x) = 0, \quad (7.139)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\varphi^{01}(x) + \varphi^{01}(x)^\dagger) = 2 m_0^2 (\varphi^{01}(x) + \varphi^{01}(x)^\dagger). \quad (7.140)$$

Смысл последнего уравнения очевиден. Именно, во *всех* калибровках частица

$$\chi(x) = \frac{1}{2} [\varphi^{01}(x) + \varphi^{01}(x)^\dagger] \quad (7.141)$$

представляет собой *физическую* (т.е. "наблюдаемую") хиггсовскую частицу с голой массой $\sqrt{2} m_0$, что, как и должно быть, полностью

согласуется с результатом, полученным в U -калибровке. Смысл остальных уравнений, очевидно, зависит от калибровки, так как в них входят дивергенции векторных полей $a_\mu(x)$ и $b_\mu(x)$. Эти уравнения полностью совместны (как и должно быть) с уравнениями, которые нетрудно вывести, исходя из того, что такие векторы, как

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} a_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial}{\partial x_\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} a_\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} a_\mu(x) \right) \quad (7.142)$$

сохраняются. Как мы видели ранее, спектр *наблюдаемых* частиц теории не зависит от калибровки. В лоренцевской калибровке $\phi^{+1}(x)$, $\phi^{+1}(x)^\dagger$ и $i(\phi^{01}(x) - \phi^{01}(x)^\dagger)$ — это голдстоуновские мезоны, которые исключаются из физического спектра частиц, тогда как в кулоновской калибровке эти объекты взаимодействуют с пространственными дивергенциями векторных полей и вообще не являются лоренцевскими скалярами, нарушая тем самым теорему Голдстоуна. Во *всех* калибровках W_μ^+ , W_μ^- и Z_μ — наблюдаемые массивные векторные мезоны с голыми массами, совпадающими по величине с найденными в U -калибровке, тогда как A^μ — безмассовый фотон.

В следующем, и последнем, параграфе мы кратко обсудим обобщения модели Вейнберга 1967 г., ее перенормируемость и экспериментальные следствия. В качестве предварительной подготовки к такому подвигу мы остановимся на вопросе о статических электромагнитных свойствах заряженных векторных мезонов в теории типа модели Вейнберга 1967 г. или в последовавших за нею теориях. Мы хотим пояснить два момента.

1. Иногда утверждают, что "принцип" *минимального* электромагнитного взаимодействия несовместим с *внутренним* паулиевским магнитным моментом элементарной частицы. Это справедливо в случае заряженной частицы со спином $\frac{1}{2}$, когда, как мы видели, электромагнитный лагранжиан получается из свободного лагранжиана в результате подстановки

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} \rightarrow \frac{\partial}{\partial x_\mu} - ie_0 A^\mu(x), \quad (7.143)$$

что приводит к обычному электромагнитному взаимодействию

$$\mathcal{L}_I = -ie_0 \bar{\psi}(x) \gamma_\mu \psi(x) A^\mu(x) \quad (7.144)$$

без моментного взаимодействия Паули. В случае же заряженной частицы со спином 1 "принцип" минимального взаимодействия допускает некий произвол. Пусть свободные уравнения движения определяются лагранжианом

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) = & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^+(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^+(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W^{-\mu}(x) \right) - \\ & - m^2 W_\mu^+(x) W^{-\mu}(x). \end{aligned} \quad (7.145)$$

Добавив к лагранжиану $\mathcal{L}_0(x)$ полную дивергенцию, можно вывести из него те же самые уравнения движения. Добавим $(\partial/\partial x_\nu) \Lambda_\nu(x)$, где $\Lambda_\nu(x)$ дается выражением

$$\begin{aligned} \Lambda_\nu(x) = & \frac{\kappa}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\mu^+(x) W_\nu^-(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\nu^+(x) W_\mu^-(x) + \frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\mu^-(x) \times \right. \\ & \left. \times W_\nu^+(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\nu^-(x) W_\mu^+(x) \right), \end{aligned} \quad (7.146)$$

в котором κ — свободный (т.е. произвольный) параметр. Таким образом,

$$\frac{\partial}{\partial x_\nu} \Lambda_\nu(x) = \kappa \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\mu^+(x) \frac{\partial}{\partial x_\nu} W_\nu^-(x) - \frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\nu^+(x) \frac{\partial}{\partial x_\nu} W_\mu^-(x) \right). \quad (7.147)$$

Теперь можно произвести калибровочную подстановку

$$\frac{\partial}{\partial x_\mu} W_\mu^+(x) \rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} + i e_0 A^\mu(x) \right) W_\mu^+(x) \quad (7.148)$$

и т.д., что дает

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Lambda_\nu(x) \rightarrow & \frac{\partial}{\partial x_\nu} \Lambda_\nu(x) + i e_0 \kappa A_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x^\nu} (W^{+\mu}(x) W^{-\nu}(x) - \\ & - W^{+\nu}(x) W^{-\mu}(x)). \end{aligned} \quad (7.149)$$

Величина

$$M^\mu(x) = i \frac{\partial}{\partial x^\nu} (W^{+\mu}(x) W^{-\nu}(x) - W^{+\nu}(x) W^{-\mu}(x)) \quad (7.150)$$

есть, очевидно, сохраняющийся ток и взаимодействие

$$\mathcal{L}_I^M(x) = -e_0 \kappa A_\mu(x) M^\mu(x), \quad (7.151)$$

очевидно, "минимально" в той же степени, что и взаимодействие при $\kappa = 0$.

С точностью до полной дивергенции, которая не меняет уравнений движения, лагранжиан (7.151) можно также записать в виде

$$\mathcal{L}_I^M(x) = i e_0 \kappa \left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} A_\mu(x) - \frac{\partial}{\partial x^\mu} A_\nu(x) \right) W^{+\mu}(x) W^{-\nu}(x). \quad (7.152)$$

Вскоре мы увидим, каков физический смысл этого выражения. Для сравнения произведем калибровочную подстановку в $\mathcal{L}_0(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(x) \rightarrow & -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W_\nu^+(x) - \frac{\partial}{\partial x^\nu} W_\mu^+(x) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W^{-\mu}(x) \right) - \\ & - m_W^2 W_\mu^+(x) W^{-\mu}(x) - i e_0 A_\mu(x) \left[W_\nu^+(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W^{-\mu}(x) \right) - \right. \\ & - \left. W_\nu^-(x) \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{+\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W^{+\mu}(x) \right) \right] - e_0^2 [A^\mu(x) A_\mu(x) W^{+\nu}(x) \times \\ & \times W_\nu^-(x) - A_\mu(x) W^{+\mu}(x) A_\nu(x) W^{-\nu}(x)] \end{aligned} \quad (7.153)$$

Взглянув на лагранжиан Вейнберга 1967 г., мы видим, что в него входят как члены типа $\mathcal{L}_I^M(x)$, так и типа $\mathcal{L}_0(x)$ в форме (7.153).

2. В связи с этим мы приходим ко второму пункту, требующему пояснений: каков физический смысл таких членов? В частности, каков смысл лагранжиана $\mathcal{L}_I^M(x)$ и что такое κ в модели Вейнберга 1967 г.? Чтобы ответить на эти вопросы, исследуем нерелятивистский предел уравнений движения полей $W_\mu^\pm(x)$ в классическом внешнем поле. Члены порядка e_0^2 отбросим. В рассматриваемом приближении уравнения движения, например, для $W^{-\nu}(x)$ принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} W^{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W^{-\mu}(x) \right) - m_W^2 W^{-\nu}(x) = \\ = i e_0 \frac{\partial}{\partial x_\mu} (A_\mu(x) W^{-\nu}(x) - A_\nu(x) W^{-\mu}(x)) + \\ + i e_0 \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-\nu}(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} W^{-\mu}(x) \right) A_\mu(x) - \\ - i e_0 \kappa \left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) \right) W_\mu^-(x). \end{aligned} \quad (7.154)$$

Выберем в качестве $A_\mu(x)$ потенциал постоянного однородного магнитного поля, для которого

$$A_\nu(x) = \dot{\mathbf{A}}(x) = \frac{\partial}{\partial x_\mu} A_\mu(x) = 0. \quad (7.155)$$

Имеются также дополнительные условия (члены порядка e_0^2 отброшены

$$\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu} - i e_0 A_\nu(x) \right) W^{-\nu}(x) = \frac{i e_0 \kappa}{m_W^2} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} A^\nu(x) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A^\mu(x) \right) W_\mu^-(x) \right). \quad (7.156)$$

При переходе к статическому пределу с внешним магнитным полем мы пренебрежем членами порядка $1/m_W^2$ по сравнению с членами порядка $1/m_W$. Используя дополнительное условие, получаем приближенное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-\nu}(x) - m_W^2 W^{-\nu}(x) = i e_0 (2 A_\mu(x) \frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-\nu}(x) - \\ - (1 + \kappa) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu(x) - \frac{\partial}{\partial x_\nu} A_\mu(x) \right) W^{-\mu}(x)). \quad (7.157)$$

В случае однородного магнитного поля

$$A_j = \frac{1}{2} \varepsilon_{jkl} x_k H_l \quad (7.158)$$

имеем ($\nu, s = 1, 2, 3$)

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} W^{-s}(x) - m_W^2 W^{-s}(x) = -i e_0 (\mathbf{H} \cdot \mathbf{r} \times \nabla \cdot W^{-s}(x) + \\ + (1 + \kappa) (W^-(x) \times \mathbf{H})^s) \quad (7.159)$$

Ясно, что первый член в правой части описывает "орбитальное" взаимодействие с \mathbf{H} ; в то же время легко показать, что спиновый магнитный момент таков:

$$\mu = \frac{e_0 (1 + \kappa)}{2 m_W}. \quad (7.160)$$

Взглянув на лагранжиан Вейнберга 1967 г., мы видим, что в его теории $\kappa = 1^1$). Можно показать, что это связано с групповыми свойствами лежащего в основе теории лагранжиана Янга — Миллса. От группы к группе коэффициент κ будет меняться.

Аналогичные (хотя и несколько более сложные) вычисления можно провести, чтобы выяснить реакцию W^- -мезона на внешнее электрическое поле. В этом случае нужно найти коэффициент перед величиной

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} A_0(x, 0) \Big|_{x=0},$$

который дает квадрупольный момент. Поскольку квадрупольный момент ведет себя, как $1/m_W^2$, членами такого порядка в уравнениях движения пренебрегать нельзя. Если пробиться сквозь дебри вычислений, то мы получим (κ определено, как и выше)

$$Q = -\frac{e_0 \kappa}{m_W^2}, \quad (7.161)$$

так что Q тоже определяется группой.

§ 8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Давая оценку калибровочным теориям, Бьёркен [8] разделил их на "правдоподобные" и на такие, которые просто "не противоречат экспериментам". К первому типу Бьёркен относит те теории, которые углубляют наше понимание "Больших Вопросов". Сюда, согласно Бьёркену, относятся вопрос о происхождении лептонной массы (в частности, о том, почему отношение электронной и мюонной масс есть величина порядка постоянной тонкой структуры), объяснение величины угла Кабиббо²⁾, и т.д. К бьёркеновскому списку мы могли

¹⁾Эта особенность $SU(2) \times U(1)$ -лагранжиана Янга — Миллса была установлена в важной работе Салама и Уорда [49], в которой массы частиц вставлялись руками, а не получались с помощью механизма Хиггса.

²⁾Пояснение для непосвященных: этим "углом" измеряется степень подавления слабых процессов с $\Delta S = 1$ по отношению к процессам с $\Delta S = 0$, которые мы рассматривали. Экспериментальное значение таково: $\sin \theta \approx 0,2$. Происхождение этого числа становится Большим Вопросом только тогда, когда калибровочные теории обобщаются с лептонов на адроны. А как это сделать — тоже Большой Вопрос.

бы добавить причину CP -нарушения¹⁾ и, возможно, даже величину самой постоянной тонкой структуры. Бьёркен пришел к выводу (и в этом мы с ним согласны), что ни одну из построенных до сих пор моделей нельзя считать "правдоподобной". Большие Вопросы остались Большими Вопросами, но теперь мы можем размышлять над ними в несколько ином плане.

В то же время ни одна из калибровочных моделей (должным образом подлеченных) пока еще, насколько автору известно, не противоречит эксперименту. Как мы указали в начале предыдущего параграфа, наиболее значительным препятствием в построении моделей является то, что мы просто не знаем спектра физических частиц. Мы не знаем, где (по массе) кончается лептонный спектр, и мы не знаем, сколько существует слабо взаимодействующих векторных мезонов — *и существуют ли они вообще*. Даже существование "классического" заряженного слабого векторного W^\pm -мезона до сих пор (т.е. к моменту, когда пишутся эти строки) не установлено. А ведь подобный или даже более досадный вопрос возникает, когда мы пытаемся обобщить калибровочные модели, чтобы включить в них адроны. Такие обобщения содержат "кварковые" токи, которые строятся так, чтобы сохранились приближенные симметрии сильных взаимодействий: $SU(3)$, или $SU(3) \times SU(3)$, или, возможно, другие группы.

Сколько существует кварков и если их можно наблюдать как физические частицы, то где именно? Мы просто не знаем. Размышляя над этими вопросами, проникаешься сочувствием к физикам и химикам конца девятнадцатого столетия, которые ясно сознавали, что атомная гипотеза навела удивительный порядок среди явлений, но сомневались, существует ли атом в действительности.

Не вдаваясь в детали теории калибровочных групп, мы можем сказать, что все модели, предложенные к настоящему времени, раз-

¹⁾Т.Д. Ли [44] предложил недавно модель спонтанно нарушенной калибровочной теории, особенностью которой является спонтанное, т.е. вакуумное, CP -нарушение, имеющее правильный порядок величины. Причиной CP -нарушения в модели Ли служит наличие, так сказать, двух разных хиггсовских полей, связанных друг с другом, вакуумные средние которых комплексно сопряжены. Читатель, вероятно, помнит, каким образом в § 4 мы использовали T -инвариантность [формула (4.157) и далее], чтобы показать, что $\langle 0 | \varphi(0) | 0 \rangle = \eta$, где η — действительная величина. В модели Ли от этого предположения отказываются. За подробностями отсылаем читателя к статье Ли [44].

деляются, по-видимому, на два класса, которые, возможно, перекрываются:

1. Модели с нейтральными векторными мезонами (массивными) в дополнение к фотону; каноническим примером может служить модель Вейнберга 1967 г.

2. Модели, в которых единственным нейтральным векторным мезоном, связанным с лептонами, является электромагнитный фотон. Для всех таких моделей характерно наличие тяжелых лептонов.

В качестве иллюстрации мы приведем один пример модели класса 2. Это модель, принадлежащая Джорджи и Глэшоу [20]. Особенность ее в том, что *единственный* нейтральный векторный мезон в теории — электромагнитный фотон. Заряженные массивные векторные мезоны — только W^\pm . Джорджи и Глэшоу используют в качестве калибровочной группы только группу $SU(2)$. В предыдущем параграфе мы видели, что *одни лишь* $SU(2)$ -дублеты, как в модели Вейнберга 1967 г., не дают электромагнетизма и слабых взаимодействий; мы вынуждены были присоединить независимую группу $U(1)$. Однако Джорджи и Глэшоу предложили использовать *триплетные* представления группы $SU(2)$. Здесь-то и появились тяжелые лептоны. В частности, Джорджи и Глэшоу ввели для электронных лептонов E^+ , E^0 , e^- и ν_e (где E^+ и E^0 — гипотетические тяжелые лептоны) триплеты

$$\psi_L = \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} E^+ \\ \nu_e \sin \beta + E^0 \cos \beta \\ e^- \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

$$\psi_R = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} E^+ \\ E^0 \\ e^- \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

и соответствующие синглеты

$$S_R = [(1 - \gamma_5)/2](E^0 \sin \beta - \nu_e \cos \beta) \quad (8.3)$$

Здесь β — некий произвольный угол смешивания, который, как оказывается, можно было бы в принципе определить из соотношения, справедливого в их модели,

$$m_W = 53,0 \text{ ГэВ} \cdot \sin \beta. \quad (8.4)$$

Отсюда следует, что верхний предел для массы W^\pm -мезона равен 53 ГэВ. Можно не повторять, что эта масса порождается механизмом

Хиггса. Действительно, в своей модели они вводят хиггсовский $SU(2)$ -триплет

$$\varphi = \begin{pmatrix} \varphi^+ \\ \varphi^0 \\ \varphi^- \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Так как электрический заряд сохраняется, только нейтральное хиггсовское поле φ^0 приобретает действительное неисчезающее вакуумное среднее, которое можно обозначить через η . Таким образом, инвариантный относительно преобразований группы $SU(2)$ массовый член векторного мезона примет форму

$$\varphi(x) \cdot (W_\mu(x) \times W^\mu(x)), \quad (8.6)$$

где

$$W_\mu = \begin{pmatrix} W_\mu^+ \\ W_\mu^0 \\ W_\mu^- \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Это значит, что только W^\pm приобретают массу по Хиггсу. Мы отождествим W_μ^0 с электромагнитным фотоном. Он взаимодействует с полем

$$\Psi = \Psi_L + \Psi_R \quad (8.8)$$

обычным образом, с сохранением четности и заряда. Такая схема очень изящна, но, как заметил Бьёркен [8], "степень правдоподобности модели стремительно падает до нуля, когда мы замечаем, что масса m_e равна разности двух членов, один из которых — голый массовый член $\sim (m_E/2)$ (m_E — масса тяжелого электронного лептона), а другой возникает из-за спонтанного нарушения симметрии, вызванного $\bar{\Psi} \times \Psi \cdot \langle \varphi \rangle$ (обозначения такие же, как и выше). Никакого разумного объяснения для столь чудесного сокращения не дается". Справедливости ради отметим, что если бы таким же чудом у всех частиц Джорджи — Глэшоу вдруг появились правильные значения масс, то, вероятно, сразу же появилось бы и правильное "разумное объяснение".

Все без исключения модели класса I предсказывают существование нейтральных *слабых* токов, которые индуцируются массивными Z^0 -мезонами модели Вейнберга 1967 г. или других эквивалент-

ных моделей. Эти токи изменяют все предсказания обычных теорий слабых взаимодействий. Например¹⁾, модель Вейнберга 1967 г. дает определенные предсказания для "диагонального" процесса $\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$, зависящие от вейнберговского угла смешивания θ [определение см. в формуле (7.96)]. Такой процесс появляется в низшем порядке теории возмущений и в обычных теориях слабых взаимодействий благодаря диаграмме

$$\bar{\nu}_e + e^- \rightarrow W^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-.$$

Однако в теориях класса I в том же порядке теории возмущений существует дополнительная диаграмма, которая соответствует последовательности

$$\bar{\nu}_e + \nu_e \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+ + e^-.$$

Чтобы получить отсюда упругое рассеяние, можно поменять местами $\bar{\nu}_e$ и e^+ , заменив их античастицами. Имеется сообщение [40] о том, что весьма трудные эксперименты Гурра и др. [26] установили следующий верхний предел для угла Вейнберга:

$$\sin^2 \theta \lesssim 0,4.$$

(Не наблюдалось событий такого упругого электрон-нейтринного рассеяния.)

Более характерно для теорий класса I предсказание о том, что процесс

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-$$

($\bar{\nu}_\mu$ — мюнное нейтрино), который в обычных теориях слабых взаимодействий "запрещен", т.е. появляется только в высших порядках ($\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow W^-$ нарушает сохранение "мюнного числа"), в теориях класса I должен быть "разрешенным". Соответствующая диаграмма в низшем порядке теории возмущений такова:

$$\bar{\nu}_\mu + \nu_\mu \rightarrow Z^0 \rightarrow e^+ + e^-.$$

Ее можно "перелицевать", и мы получим

$$\bar{\nu}_\mu + e^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu + e^-.$$

¹⁾Относительно таких предсказаний см., например, работу Вейнберга [55], а современный обзор экспериментальных данных можно найти в работе Б.В. Ли [40].

К тому моменту, когда пишутся эти строки, такие события не наблюдались (см. работу Б.В. Ли [40] и цитируемую в ней литературу). Существует также класс процессов с участием адронов, например

$$\nu + P \rightarrow \nu + P,$$

$$\nu + P \rightarrow \nu + P + \pi^+,$$

в которых нейтральные токи (процессы, индуцированные Z^0 -мезонами) играют некую роль. Но их интерпретация зависит от деталей сильных взаимодействий, и до сих пор не обнаружено ни одного эффекта, вызванного, несомненно, нейтральными токами. Если так пойдет и дальше, то рано или поздно модели класса 1 будут окончательно исключены из рассмотрения¹⁾. Это не относится к калибровочным теориям, поскольку остается изобилие моделей класса 2.

Отсутствие до сих пор "правдоподобных" калибровочных моделей, объединяющих слабые и электромагнитные процессы, не должно заслонять собой то, что уже дали, даже несмотря на свое несовершенство, имеющиеся модели. Поэтому в заключение обзора уместно привести несколько примеров, показывающих, каким образом некоторые из давнишних трудностей физики лептонных слабых взаимодействий наводят, по-видимому, свое разрешение в калибровочных теориях. Мы будем пользоваться моделью Вейнберга 1967 г. Сходные результаты дают и другие модели. Мы начнем с обсуждения реакции, которая, хотя и не наблюдается непосредственно, в течение ряда лет служила полезной теоретической лабораторией [18], а именно с процесса

$$\nu + \bar{\nu} \rightarrow W^+ + W^-.$$

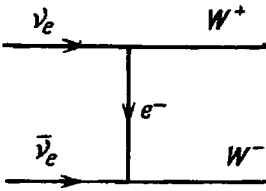
В обычных теориях этому процессу соответствует диаграмма, представленная на фиг. 8. Суть физических трудностей, связанных с этим процессом, такова. Массивный W -мезон в отличие от фотона имеет три состояния поляризации, представленных нормированными орто-

¹⁾Остроумный вариант модели Вейнберга 1967 г. был построен Бэгом и Зи [4]. Эта модель, основанная на симметрии $SU(2) \times U(1)$, содержит и Z^0 , и тяжелый лептон, а также бесчисленное количество кварков — девять, если быть точным. В их модели оказывается возможным так выбрать угол смешивания, что Z^0 будет взаимодействовать *только* с нейтрино. Не приходится и говорить, что при таком выборе нет никакого противоречия с любым из современных экспериментов. За подробностями читателю рекомендуем обратиться к их заметке [4].

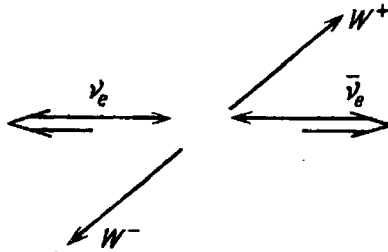
гональными 4-векторами

$$\epsilon^{(+)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

$$\epsilon^{(-)} = \epsilon^{(+)*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.10)$$



Ф и г. 8. Фейнмановская диаграмма, соответствующая процессу $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow W^+ + W^-$ в обычной теории слабых взаимодействий.



Ф и г. 9. Кинематическая схема процесса $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow W^+ + W^-$ в барицентрической системе координат.

Вторыми стрелками на нейтринных линиях показаны направления нейтринных спинов относительно их импульсов. Нейтрино — "левостороннее", а антинейтрино — "правостороннее".

$$\epsilon^{(0)} = \frac{\sqrt{|\mathbf{P}|^2 + m_W^2}}{m_W} \frac{\mathbf{P}}{|\mathbf{P}|} \quad (8.11)$$

$$i|\mathbf{P}|/m_W$$

Если вектор \mathbf{P} направлен вдоль оси z , то этим трем поляризациям отвечают спины в z -направлении (т.е. спиральности) $+1$, -1 и 0 :

Рассмотрим несколько странный, но вполне допустимый процесс, в котором W^+ и W^- продольно поляризованы, т.е. имеют нулевую спиральность. Спиральности нейтрино и антинейтрино противоположны (см. фиг. 9, где данная реакция изображена в барицентрической системе).

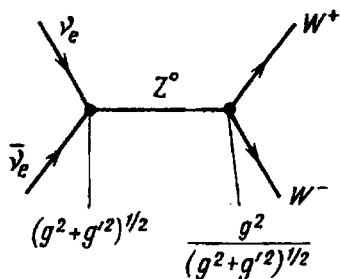
Данный процесс интересен тем, что в пределе, когда импульсы нейтрино стремятся к бесконечности, полный угловой момент (W^+ , W^-)-системы в конечном состоянии *фиксирован*. Так происходит потому, что спиральности нейтрино и антинейтрино равны и противоположны. Поэтому в случае продольно поляризованных W -мезонов рассеяние вперед для данного процесса должно отсутствовать. Это значит, что если θ — угол рассеяния, то угловое распределение должно содержать $\sin \theta$ в качестве множителя, обеспечивающего сохранение углового момента. При конечных энергиях в угловом распределении имеются дополнительные члены, пропорциональные $\cos \theta$, но они стремятся к единице, когда энергия нейтрино P стремится к бесконечности. Следуя Вейнбергу [53], можно записать амплитуду рассеяния в виде

$$f_e(\theta, \varphi) = -\frac{ig^2}{m_W^2} \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \frac{P^{3/2} \sin \theta e^{-i\varphi}}{(2E)^{1/2}} \times \\ \times \left\{ \left[2E^2 \left(1 - \frac{E}{P} \cos \theta \right) - m_W^2 \right] / \left[2E^2 \left(1 - \frac{P}{E} \cos \theta \right) - m_W^2 + m_e^2 \right] \right\} \xrightarrow{P \rightarrow \infty} \frac{-ig^2}{m_W^2} \frac{1}{16\pi} P \sin \theta e^{-i\varphi}, \quad (8.12)$$

где E, P, θ, φ относятся к W^+ -мезону.

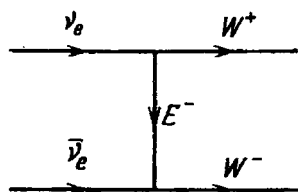
Амплитуда (8.12), и, следовательно, дифференциальное сечение стремятся к бесконечности с ростом энергии. Это недопустимо, поскольку тогда нарушается унитарный предел для P -волны. В рамках обычной теории единственный выход из такого положения — произвольно обрезать теорию при некоторой конечной энергии. В моделях же класса 1, таких, как модель Вейнберга 1967 г., существуют дополнительные диаграммы, содержащие нейтральные векторные мезоны (фиг. 10; на фиг. 11 изображены имеющиеся в моделях класса 2 дополнительные диаграммы с тяжелыми лептонами, за счет которых эти модели остаются конечными и унитарными). Но само по себе наличие таких дополнительных диаграмм *не гарантирует*, что будет

урегулирована проблема унитарности. Решающим моментом является то, что в калибровочных теориях эти диаграммы сцеплены друг с другом групповой структурой, как ясно видно на примере лагранжиана Вейнберга, продемонстрированного в предыдущем параграфе. (См. фиг. 10, где указаны константы связи.) Если бы эти взаимодействия



Фиг. 10. Вклад Z^0 -мезона в процесс $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow W^+ + W^-$.

Вид указанных констант связи определяется структурой рассматриваемой группы.



Фиг. 11. Вклад тяжелого электрона в процесс $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow W^+ + W^-$ в теориях класса 2.

вводились с произвольными константами связи, никакого сокращения не произошло бы, а если наложить условия, обеспечивающие такое сокращение, то мы вернулись бы снова к исходной группе. Как и прежде, следуя Вейнбергу [53], получим, что диаграмма фиг. 10 приводит к дополнительному вкладу в процесс $\nu_e + \bar{\nu}_e \rightarrow W^+ + W^-$ вида

$$f_Z(\theta, \varphi) = \frac{ig^2}{m_W^2} \frac{1}{8\pi\sqrt{2}} \frac{P^{3/2} \sin \theta \exp(-i\varphi)}{(2E)^{1/2}} \times \{ [4E^2 + 2m_e^2] / [4E^2 - m_e^2] \}. \quad (8.13)$$

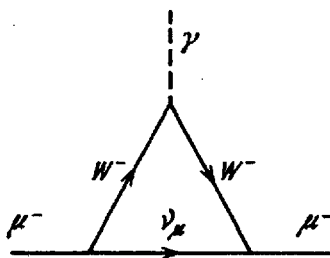
Если перейти к пределу, в котором E намного больше всех участвующих в игре масс, то мы получим

$$f_e(\theta, \varphi) + f_Z(\theta, \varphi) \rightarrow \frac{ig^2}{16\pi} \sin \theta \cos \theta \exp(-i\varphi) / \left[E \left(1 - \frac{P}{E} \cos \theta \right) \right] \quad (8.14)$$

Это замечательное выражение не только согласуется с унитарностью (оно убывает как $1/E$), но и приводит к угловому распределению, естественному с физической точки зрения: при $P/E \rightarrow 1$ оно вытягивается вдоль направления вперед.

Пример, который мы только что привели, очень хорошо показывает, как с помощью калибровочных теорий лечатся те недуги, которыми на "беспетлевом" уровне страдают слабые взаимодействия. На этом уровне нет бесконечностей, так как ни одна из диаграмм не содержит интегрирований, которые могли бы привести к расходимостям. Трудности здесь, как мы видели, связаны с унитарностью, а в калибровочных теориях они исчезают. Нам хотелось бы завершить этот обзор иллюстрацией того, как калибровочные теории обходятся с бесконечностями, возникающими из интегрирований по петлям. Остановим внимание на диаграмме фиг. 12, которая имеет длительную

Ф и г. 12. Вклад W -мезона в электромагнитную структуру мюона. Линии частиц обозначены соответствующими символами. Такая же диаграмма соответствует и нейтринному рассеянию, но в ней нейтрино и мюон меняются местами.



историю, начиная с Бернштейна и Ли [6]. Эти авторы работали в калибровке, соответствующей нынешней унитарной, используя калибровочно-инвариантную процедуру регуляризации, которую стоит вкратце обсудить. Мы нарисовали диаграмму фиг. 12 с внешними мюонными линиями — вклад в электромагнитную структуру мюона. Если на фиг. 12 поменять местами мюоны и нейтрино, то мы получим вклад в электромагнитную структуру нейтрино, который интересовал фактически Бернштейна и Ли. Позже мы поговорим об этой величине в связи с моделью Вейнберга 1967 г.

Еще до введения какой-либо регуляризации W -пропагатор в U -калибровке принимает вид

$$iW_{\mu\nu}(q) = \left(g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right) / (q^2 + m_W^2). \quad (8.15)$$

Вершину $W - W - \gamma$ при произвольном κ ("аномальный" момент) для перехода

$$W_{\alpha}^{-}(P) + \gamma_{\mu}(q) \rightarrow W_{\beta}^{-}(P'),$$

где

$$P + q = P', \quad (8.16)$$

можно записать [42] в виде

$$V_{\beta\mu\alpha} = ie_0 [g_{\alpha\beta} (P + P')_{\mu} + \kappa (g_{\alpha\mu} P_{\beta} + P'_{\alpha} g_{\mu\beta}) - (1 + \kappa)(g_{\alpha\mu} P'_{\beta} + P_{\alpha} g_{\beta\mu})]. \quad (8.17)$$

Мы не собираемся ничего вычислять с помощью этой вершины, а только подсчитаем степень расходимости диаграммы фиг. 12. Наивный подсчет показателей степеней привел бы к выводу, что эта диаграмма расходится как

$$\int d^4 k \sim \Lambda^4,$$

где Λ — некое обрезание. Но оказывается, что аккуратное применение калибровочной инвариантности уменьшает степень расходимости на 2. Диаграмма расходится "только" квадратично. Это значит, что даже для того, чтобы придать диаграмме однозначный смысл, нужно ввести какую-нибудь регуляризацию. В противном случае различные способы выбора импульсов интегрирования при интегрировании по петлям окажутся неэквивалентными. Можно выбрать регуляризацию по Т.Д. Ли [42], определив следующим образом регуляризованные пропагаторы и вершину:

$$iW_{\mu\nu}(q)_{\xi} = \frac{1}{q^2 + m_W^2} \left(g_{\mu\nu} + \frac{(1 - \xi) q_{\mu} q_{\nu}}{\xi q^2 + m_W^2} \right), \quad (8.18)$$

$$V_{\beta\mu\alpha}^{\xi} = ie_0 [g_{\alpha\beta} (P + P')_{\mu} + (\xi + \kappa)(g_{\alpha\mu} P_{\beta} + P'_{\alpha} g_{\mu\beta}) - (1 + \kappa)(g_{\alpha\mu} P'_{\beta} + P_{\alpha} g_{\beta\mu})]. \quad (8.19)$$

Они удовлетворяют тождеству Уорда и, следовательно, сохраняют обычную калибровочную инвариантность.

Очевидно, что при $\xi \rightarrow 0$ эти выражения сводятся к нерегуляризованным. Теперь, по крайней мере при $\xi \neq 0$, диаграммы имеют смысл. Определим электромагнитную вершину мюона с помощью форм-

факторов $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ так¹⁾:

$$\mathcal{J}_\mu(q) = i e_0 \bar{u}(p') [F_1(q^2) \gamma_\mu + (1/2 m_\mu) \sigma_{\mu\nu} q^\nu F_2(q^2)] u(p), \quad (8.20)$$

где $u(p)$ – спинор, описывающий свободный мюон, $\sigma_{\mu\nu} = (1/2 i)(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ и $q = p' - p$. При таком способе записи $F_1(0)$ – перенормировка заряда, а

$$F_2(0) = (g_\mu - 2)/2 \quad (8.21)$$

– аномальный магнитный момент мюона. Оказывается, что диаграмма фиг. 12 приводит к квадратичной и логарифмической расходимостям в $F_1(0)$, которые в теории Вейнберга (и в любой другой) должны исчезнуть при перенормировке заряда. Если e в выражении (8.20) – наблюдаемый электрический заряд, то перенормировку следует определить так, чтобы выполнялось условие

$$F_1(0) = 1. \quad (8.22)$$

Величина же $F_2(0)$, вычисленная из диаграммы фиг. 12, расходится только логарифмически. Можно показать, что это обусловлено наличием дополнительного множителя q^ν перед $F_2(q^2)$, который уменьшает степень расходимости на единицу. [Если говорить не очень строго, мы дифференцируем $\mathcal{J}_\mu(q)$, чтобы получить $F_2(0)$, и это дает дополнительную степень в знаменателе пропагатора на фиг. 12, улучшая, таким образом, сходимость.] После ряда попыток, предпринятых разными авторами, приводивших к взаимно исключающим результатам, выражение для вклада W -мезона в $F_2(0)$ было окончательно установлено Бродски и Сулливаном [10], которые запрограммировали довольно сложную алгебру шпуров на ЭВМ. Они нашли, используя описанную выше технику регуляризации, что

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{G_F m_\mu^2}{8\sqrt{2} \pi^2} \{ 2(1 - \kappa) \ln \xi + 10/3 \}_{\xi=0} = \\ &\approx 1,16 \cdot 10^{-9} \{ 2(1 - \kappa) \ln \xi + 10/3 \}_{\xi=0} \end{aligned} \quad (8.23)$$

¹⁾ Существует еще один нарушающий четность член, пропорциональный $\gamma_5 [\gamma_\mu q^2 - (\gamma q) q_\mu]$, который может возникнуть потому, что мы рассматриваем слабые поправки к такой электромагнитной вершине. Это не имеет отношения к нашим рассуждениям.

(мы переписали их результат, пользуясь современным определением g [формула (7.61)]). Самое важное в этом выражении, конечно, то, что оно расходится при всех значениях κ , кроме $\kappa = 1$. Последнее представляет собой именно то значение κ , которое фиксируется структурой группы $SU(2) \times U(1)$ в теории Вейнберга [см. выражение (7.160) и предшествующий ему текст]. Это еще один прекрасный пример того, как калибровочные модели излечивают патологии в слабых взаимодействиях. Отметим также два других свойства выражения (8.23).

1. $F_2(0) \rightarrow 0$ при $m_\mu \rightarrow 0$. Это — частный случай теоремы (см. ниже) о том, что сохраняющие спиральность слабые и электромагнитные взаимодействия не могут создать магнитного момента у некоего "нейтрино", являющегося собственным состоянием спиральности.

2. Теория Вейнберга дает конечные поправки к $F_2(0)$ для мюона, по порядку величины не превышающие 10^{-8} . Кроме диаграммы фиг. 12 существуют и другие *конечные* диаграммы, содержащие хиггсовские поля или Z^0 -мезоны. Вычисления таких диаграмм (см., например, работу Джакива и Вейнберга [33]) дают численные результаты, зависящие от неизвестных хиггсовских масс и отношений констант связи, но, по-видимому, они того же порядка величины, что и диаграмма фиг. 12. Современное экспериментальное значение $F_2(0)$ для мюона таково [10]:

$$F_2(0) = (11661,6 \pm 3,1) \cdot 10^{-7};$$

следовательно, поправки, вносимые слабыми взаимодействиями, лежат ниже уровня как экспериментальных ошибок, так и трудных для оценки поправок со стороны сильных взаимодействий. Их экспериментальное значение согласуется в настоящее время с обычной квантовой электродинамикой. Как было отмечено Примаком [48], в теориях класса 2 при подходящем выборе масс тяжелых лептонов и т.д. поправки, вносимые слабыми взаимодействиями, могут оказаться достаточно большими и приблизиться к уровню современных экспериментальных ошибок. Усовершенствование техники эксперимента по измерению магнитного момента мюона позволило бы отсеять некоторые из таких моделей.

И наконец, мы перейдем к "электромагнитным свойствам" нейтрино (диаграмма фиг. 12, на которой мюон и нейтрино нужно поменять местами). В ранних моделях, таких, как у Бернштейна и Ли [6], рассматривался только обычный спектр частиц: заряженные W -мезо-

ны и наблюдаемые лептоны. В таких теориях величина

$$\langle v' | J_{\mu}^Y(0) | v \rangle = i \bar{u}(v') \gamma_{\mu} F_1(q^2) u(v) \quad (8.24)$$

является наблюдаемой. Здесь J_{μ} — электрический ток, а $u(v)$ — нейтринный спинор, удовлетворяющий уравнению

$$\gamma_5 u(v) = u(v). \quad (8.25)$$

Как отмечалось выше, в силу уравнения (8.25), в выражении (8.24) уничтожается член, соответствующий магнитному моменту. Поскольку нейтрино не заряжено, должно выполняться условие

$$F_1(0) = 0. \quad (8.26)$$

В таких теориях $F_1(q^2)$ можно было бы в принципе определить из реакции типа

$$\nu + e \rightarrow \nu + e \quad (8.27)$$

Следовательно, если мы хотим, чтобы эти теории были последовательными, величина $F_1(q^2)$ должна быть *конечной*. В действительности же, как ранее упоминалось, диаграмма фиг. 12 приводит к квадратичным и логарифмическим расходимостям в $F_1(q^2)$, и было потрачено много сил, чтобы придать смысл этому выражению. В моделях класса 1, однако, к каждой диаграмме с фотонным обменом следует добавить аналогичную диаграмму с Z^0 -обменом. Обе они оказываются одного порядка по e (заряду электрона), так как все заряды и массы связаны друг с другом через калибровочную группу. Следовательно, диаграммы с фотонным обменом сами по себе *не наблюдаемы*, а потому они не обязаны быть и действительно не являются конечными, даже после перенормировки. Конечной должна быть S -матрица для электрон-нейтринного рассеяния, в которой учтены *все* радиационные поправки. Чтобы показать это в U -калибровке в модели Вейнберга, нужно провести подробные вычисления (которые были выполнены Бернштейном и Тейлором в 1972 г., но не опубликованы, а в особенности С.Я. Ли [41]). Оказывается, что если учесть достаточное число диаграмм, то бесконечности обязательно исчезнут и останутся лишь малые конечные радиационные поправки, которые, возможно, когда-нибудь станут измеримыми.

Из всего, что было сказано в данном обзоре, ясно, что калибровочные теории ведут нас в новую область больших масс и малых расстояний. Чего не хватает нам на этом пути, так это эксперименталь-

ных ориентиров, чтобы увидеть, настолько ли верна вся идея в целом, насколько она красива. А теоретических построений существует множество.

БЛАГОДАРНОСТИ

Первые параграфы этого обзора появились в виде лекций, прочитанных в Оксфордском университете весной 1972 г. Я благодарен сэру Рудольфу Пейерлсу и проф. Р. Далицу за гостеприимство, оказанное мне в Оксфорде, Национальному научному фонду — за материальную поддержку и моим оксфордским коллегам, в особенности Тейлору, за обсуждение и критику. При подготовке последних параграфов я постоянно прибегал к советам и поддержке Треймана и не мог обойтись без многочисленных ценных бесед с Бэгом, которого мне очень приятно поблагодарить. Рукопись была завершена летом 1973 г. в Аспенском физическом центре. Я благодарен Сэлли Мэнсимер и всем сотрудникам центра за гостеприимство, Национальному научному фонду — за финансовую поддержку и А. Али и Д. Файвелу — за критическое чтение рукописи. Наконец, я счастлив поблагодарить Бэрб Клейн за помощь в изготовлении рисунков, а Кендис Коу и Барбару Радеке (обе из Аспенского физического центра) — за печатание очень длинной рукописи.

ЛИТЕРАТУРА

1. Adler S.L., Phys. Rev., **197**, 2426 (1969).
2. Anderson P.W., Phys. Rev., **112**, 1900 (1958).
3. Appelquist T.W., Quinn H.R., Phys. Lett., **B 39**, 229 (1972).
4. Beg M.A.B., Zee A., Phys. Rev. Lett., **30**, 675 (1973).
5. Bell J.S., Jackiw R., Nuovo Chim., **51**, 470 (1969).
6. Bernstein J., Lee T.D., Phys. Rev. Lett., **11**, 512 (1963).
7. Bjorken J.D., Drell S.D., Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, New York, 1965.
8. Bjorken J.D., Drell S.D., в книге: Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics, Vol. 2, Interscience, New York, 1972, p. 299.
9. Bludman S., Klein A., Phys. Rev., **131**, 2363 (1963).
10. Brodsky S.J., Sullivan J.D., Phys. Rev., **156**, 1644 (1967).
11. Brown L.S., Phys. Rev., **150**, 1338 (1966).

12. *Coleman S., Weinberg E.*, Phys. Rev., **D7**, 1888 (1973).
13. *Durand L.*, Phys. Rev., **128**, 444 (1962).
14. *Englert F., Brout R.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 321 (1964).
15. *Fabri E., Picasso L.E.*, Phys. Rev. Lett., **16**, 408 (1966).
16. *Fermi E.*, Z. Phys., **88**, 161 (1934).
17. *Feynmann R.P., Gell-Mann M.*, Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
18. *Gell-Mann M., Goldberger M., Kroll N., Low F.E.*, Phys. Rev., **179**, 1518 (1969).
19. *Gell-Mann M., Lévy M.*, Nuovo Cimento, **16**, 705 (1960).
20. *Georgi H., Glashow S.L.*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1494 (1972).
21. *Gilbert W.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 713 (1964).
22. *Goldstone J.*, Nuovo Cimento, **19**, 154 (1961).
23. *Goldstone J., Salam A., Weinberg S.*, Phys. Rev., **127**, 965 (1962).
24. *Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.B.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 585 (1964).
25. *Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.B.*, в книге: *Advances in Particle Physics*, Vol. 2; eds. R.L. Cool, R.E. Marshak, Interscience Publishers, New York, 1968, p. 567.
26. *Gurr H.S., Reines F., Sobel H.W.*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1406 (1972).
27. *Higgs P.W.*, Phys. Lett., **12**, 132 (1964).
28. *Higgs P.W.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 508 (1964).
29. *Higgs P.W.*, Phys. Rev., **145**, 1156 (1966).
30. *'t Hooft G.*, Nucl. Phys., **B 35**, 167 (1971).
31. Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics, vol. 2, 1972. Interscience, New York.
32. Proceedings of the International Symposium on Electron and Photon Interactions of High Energy (Cornell University, 1971), Cornell University, Ithaca, 1972.
33. *Jackiw R., Weinberg S.*, Phys. Rev., **D 5**, 2396 (1972).
34. *Jauch J.M., Rohrlich F.*, The Theory of Photons and Electrons, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1955.
35. *Kibble T.W.B.*, Phys. Rev., **155**, 1554 (1967).
36. *Klein A., Lee B.W.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 266 (1964).
37. *Klein M.J.*, Science, **169**, 360 (1970).
38. *Lee B.W.*, Phys. Rev., **D 5**, 823 (1972).
39. *Lee B.W., Zinn-Justin J.*, Phys. Rev., **D 5**, 3121 (1972).
40. *Lee B.W.*, в книге: Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics, vol. 2, Interscience, New York, 1972, p. 190 B.

41. *Lee S.Y.*, *Phys. Rev.*, **D 6**, 1701 (1972).
42. *Lee T.D.*, *Phys. Rev.*, **128**, 899 (1962).
43. *Lee T.D.*, *Yang C.N.*, *Phys. Rev.*, **119**, 1410 (1960).
44. *Lee T.D.*, *Phys. Rev.*, **D 8**, 1226 (1973).
45. *Nambu Y.*, *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 380 (1960).
46. *Nambu Y.*, *Jona-Lasinio G.*, *Phys. Rev.*, **122**, 345 (1961).
47. *Salam A.*, в книге: *Proceedings of the Eighth Nobel Symposium on Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Lerum, Socken, 1968, p. 367.
48. *Primack J.*, в книге: *Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics*, vol. 2, Interscience, New York, 1972, p. 307.
49. *Salam A.*, *Ward J.C.*, *Phys. Lett.*, **13**, 168 (1964).
50. *Schwinger J.*, *Phys. Rev.*, **125**, 397 (1962).
51. *Takahashi T.*, *Nuovo Cimento*, **6**, 371 (1957).
52. *Weinberg S.*, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264 (1967).
53. *Weinberg S.*, *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 1688 (1971).
54. *Weinberg S.*, *Phys. Rev.*, **D 5**, 1962 (1972).
55. *Weinberg S.*, *Phys. Rev.*, **D 6**, 1412 (1972).
56. *Yang C.N.*, *Mills R.L.*, *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954).
57. *Zumino B.*, *Journ. Math. Phys.*, **1**, 1 (1960).
58. *Zumino B.*, в книге: *Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics*, vol. 2, Interscience, New York, 1972, p. 307.

Калибровочные теории

Е.С. Аберс, Б.В. Ли

Abers E.S., Lee B.W., * Phys. Reports (Section C of Phys. Lett.),
9, 1(1973)

ВВЕДЕНИЕ

В течение длительного времени теория слабых взаимодействий, основанная на модели Ферми четырехчастичного взаимодействия и гипотезе сохраняющегося векторного тока, считалась незамкнутой теорией. Хотя она и описывала μ - и β -распады, она все же была перенормируемой теорией, в которой эффекты высших порядков невозможно было вычислить. Физики давно уже чувствовали, что проблема была бы решена с помощью взаимодействия, обусловленного обменом векторным мезоном, однако вплоть до последних нескольких лет решить ее не удавалось.

Вероятно, за последние годы наиболее значительным достижением в теории слабых взаимодействий как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения влияния на будущие эксперименты было построение перенормируемых моделей слабых взаимодействий, основанных на идее спонтанно нарушенных калибровочных симметрий. Основную стратегию при построении таких теорий сформулировали в своих статьях Вейнберг и Салам в 1967 и 1968 гг. Они объединили слабые и электромагнитные взаимодействия в янг-миллсовскую калибровочную теорию, в которой промежуточные векторные бозоны W^\pm и фотоны выступали в качестве калибровочных бозонов. Сама по себе идея не была новой. Новым в стратегии Вейнберга – Салама было то, что различие между слабыми и электромагнитными взаимодействиями связывалось со спонтанным нарушением калибровочной симметрии.

* Institute for Theoretical Physics, State University of New York,
Stony Brook, N.Y. 11790, USA.

© North-Holland Publishing Company, 1973

© Перевод на русский язык, "Мир", 1977

41. *Lee S.Y.*, *Phys. Rev.*, **D 6**, 1701 (1972).
42. *Lee T.D.*, *Phys. Rev.*, **128**, 899 (1962).
43. *Lee T.D.*, *Yang C.N.*, *Phys. Rev.*, **119**, 1410 (1960).
44. *Lee T.D.*, *Phys. Rev.*, **D 8**, 1226 (1973).
45. *Nambu Y.*, *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 380 (1960).
46. *Nambu Y.*, *Jona-Lasinio G.*, *Phys. Rev.*, **122**, 345 (1961).
47. *Salam A.*, в книге: *Proceedings of the Eighth Nobel Symposium on Elementary Particle Theory*, ed. N. Svartholm, Lerum, Socken, 1968, p. 367.
48. *Primack J.*, в книге: *Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics*, vol. 2, Interscience, New York, 1972, p. 307.
49. *Salam A.*, *Ward J.C.*, *Phys. Lett.*, **13**, 168 (1964).
50. *Schwinger J.*, *Phys. Rev.*, **125**, 397 (1962).
51. *Takahashi T.*, *Nuovo Cimento*, **6**, 371 (1957).
52. *Weinberg S.*, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264 (1967).
53. *Weinberg S.*, *Phys. Rev. Lett.*, **27**, 1688 (1971).
54. *Weinberg S.*, *Phys. Rev.*, **D 5**, 1962 (1972).
55. *Weinberg S.*, *Phys. Rev.*, **D 6**, 1412 (1972).
56. *Yang C.N.*, *Mills R.L.*, *Phys. Rev.*, **96**, 191 (1954).
57. *Zumino B.*, *Journ. Math. Phys.*, **1**, 1 (1960).
58. *Zumino B.*, в книге: *Proceedings of the 16th International Conference on High Energy Physics*, vol. 2, Interscience, New York, 1972, p. 307.

Калибровочные теории

Е.С. Аберс, Б.В. Ли

Abers E.S., Lee B.W., * Phys. Reports (Section C of Phys. Lett.),
9, 1(1973)

ВВЕДЕНИЕ

В течение длительного времени теория слабых взаимодействий, основанная на модели Ферми четырехчастичного взаимодействия и гипотезе сохраняющегося векторного тока, считалась незамкнутой теорией. Хотя она и описывала μ - и β -распады, она все же была перенормируемой теорией, в которой эффекты выших порядков невозможно было вычислить. Физики давно уже чувствовали, что проблема была бы решена с помощью взаимодействия, обусловленного обменом векторным мезоном, однако вплоть до последних нескольких лет решить ее не удавалось.

Вероятно, за последние годы наиболее значительным достижением в теории слабых взаимодействий как с теоретической точки зрения, так и с точки зрения влияния на будущие эксперименты было построение перенормируемых моделей слабых взаимодействий, основанных на идее спонтанно нарушенных калибровочных симметрий. Основную стратегию при построении таких теорий сформулировали в своих статьях Вейнберг и Салам в 1967 и 1968 гг. Они объединили слабые и электромагнитные взаимодействия в янг-миллсовскую калибровочную теорию, в которой промежуточные векторные бозоны W^\pm и фотоны выступали в качестве калибровочных бозонов. Сама по себе идея не была новой. Новым в стратегии Вейнберга – Салама было то, что различие между слабыми и электромагнитными взаимодействиями связывалось со спонтанным нарушением калибровочной симметрии.

* Institute for Theoretical Physics, State University of New York,
Stony Brook, N.Y. 11790, USA.

© North-Holland Publishing Company, 1973

© Перевод на русский язык, "Мир", 1977

С 1964 г. этот механизм изучали Хиггс, Браут, Энглерт, Киббл, Гуральник, Хаген и др. Он возникает в калибровочной теории, в которой стабильный вакуум неинвариантен относительно калибровочных преобразований. В отсутствие калибровочных бозонов неинвариантность вакуума относительно непрерывной симметрии приводит, согласно теореме Голдстоуна, к появлению безмассовых скалярных бозонов. В калибровочной теории гипотетические голдстоуновские бозоны и векторные бозоны (с двумя поляризациями комбинируются и образуют набор массивных векторных бозонов (с тремя поляризациями). Фактически число векторных бозонов, которые приобретают массу, точно равно числу голдстоуновских скалярных мезонов, которые исчезают.

Модель Вейнберга – Салама обладает двумя положительными свойствами. Первое – элегантное объединение электромагнитных и слабых взаимодействий. Второе – гипотеза, подчеркнутая самими этими авторами, о том, что теория такого типа может быть перенормируемой, поскольку уравнения движения тождественны с уравнениями движения ненарушенной теории. В то время о перенормируемости этих теорий было известно немного, и поэтому модель Вейнберга – Салама несколько лет практически не развивалась.

Возобновление интереса к этим моделям в 1971 г. обусловлено двумя обстоятельствами. Во-первых, было выполнено квантование и перенормировка теории Янга – Миллса. После пионерских работ Фейнмана, де Витта, Манделстама, Фаддеева и Попова перенормируемость и связь между массивными и безмассовыми калибровочными теориями подробно изучили наряду с другими Бульвэр, Фаддеев, Фрадкин, Славнов, Тейлор, Тютин, Ван Дам и Велтман. Во-вторых, была детально изучена σ -модель, которая представляет собой простейшую теорию поля со спонтанным нарушением симметрии. Это изучение привело нас к пониманию того факта, что расходимости теории не меняются при спонтанном нарушении симметрии, так что расходимости устраняются одними и теми же контрчленами независимо от того, нарушена симметрия спонтанно или нет.

В 1971 г. появилась очень важная статья 'т Офта о явно перенормируемой формулировке теорий массивных янг-миллсовских полей, в которых массы калибровочных бозонов возникали из-за спонтанного нарушения калибровочной симметрии. Формулировка 'т Офта явно демонстрирует пользу калибровочной свободы, заложенной в таких теориях.

С тех пор вспыхнул интерес к проблеме перенормируемости, и на изучение спонтанно нарушенных калибровочных теорий теперь на-

правлены главные силы теоретиков. Было предложено много моделей, и изучены их следствия. Все такие модели предсказывают новые тяжелые векторные мезоны или тяжелые лептоны и имеют интересные экспериментальные следствия. То, что каждая модель приводит к специфическим предсказаниям о свойствах слабых нейтральных токов, стимулировало интерес к экспериментам по их обнаружению.

Одной из наиболее трудных проблем является включение адронов в схему теории поля со спонтанно нарушенной калибровочной симметрией. Существует много предложений, причем некоторые из них очень сложны. Несомненно, включение адронов – важная область для дальнейших исследований.

С другой стороны, все высшие поправки теперь вычислимы, поскольку модели перенормируемы. Уже проведено большое число вычислений радиационных поправок к аномальному магнитному моменту мюона и ширинам слабых распадов и, в некоторых случаях, электромагнитных разностей масс. Возможность проведения таких вычислений сделала ненужными старые методы с "обрезанием".

Осенью 1972 г. Б.В. Ли прочел серию лекций на эту тему в Нью-Йоркском университете в Стони-Бруке. Эти лекции, расширенные и исправленные, легли в основу нашего изложения. Обзор состоит из двух частей. В части I описывается построение моделей со спонтанным нарушением калибровочных симметрий и некоторые феноменологические применения их. В части II описаны формулировка квантовой теории поля с помощью интеграла по путям и ее применение к проблеме перенормируемости этих теорий.

Часть I начинается с обзора теоретических положений, необходимых для построения моделей. В разд. 1 описывается локальная калибровочная инвариантность и ее применение к неабелевым калибровочным группам. В разд. 2 рассмотрены механизм спонтанного нарушения симметрии и появление голдстоуновских бозонов. В разд. 3 эта идея применяется к локально калибровочно-инвариантным теориям, в которых вместо безмассовых голдстоуновских бозонов автоматически возникают массивные векторные калибровочные мезоны, без введения в лагранжиан массового члена, явно нарушающего симметрию.

Следующие три раздела содержат краткий обзор феноменологии слабых взаимодействий и обычные теоретические идеи, относящиеся к ним. Обзор темы здесь далеко не полный: эти разделы были вклю-

чены с целью сделать серию лекций замкнутой по своему содержанию. Рассмотренные вопросы включают несколько основных процессов, $(V-A)$ -теорию, промежуточные векторные бозоны, теорию Кабиббо и несколько специальных вопросов, которые будут нужны в дальнейших лекциях.

В разд. 7 подробно описана первоначальная модель Вейнберга — Салама. В разд. 8 обсуждены некоторые экспериментальные следствия модели Вейнберга — Салама, включение адронов и вопрос о нейтральных токах. В разд. 9 обсуждается класс моделей с тяжелыми лептонами и описана модель Джорджи — Глэшоу. В разд. 10 кратко описаны некоторые другие модели.

Часть II более математическая. В ней развивается техника вычисления поправок высших порядков к амплитудам рассеяния в теориях со спонтанным нарушением и, в конечном счете, показывается, почему эти теории перенормируемы. Используется формализм квантования с помощью интеграла по путям. Так как метод интегрирования по путям малоизвестен, сначала мы напомним детали данного метода.

В разд. 11 выведено, по Фейнману, представление оператора эволюции в виде интеграла по путям. В разд. 12 метод обобщается на квантовую теорию поля и выводится общее выражение для функций Грина. С использованием этого принципа в разд. 13 получены правила вычисления функций Грина теории Янга — Миллса в кулоновской калибровке. Кулоновская калибровка является простейшей для квантования из первых принципов; в действительности, однако, нужны правила для вычисления функций Грина и S -матрицы в любой калибровке. В разд. 14 описаны такие правила, основанные на изящном, хотя и несколько интуитивном, методе, развитом главным образом Фаддеевым и Поповым. Разд. 15 содержит формальное доказательство того факта, что перенормированные S -матрицы, вычисленные в кулоновской калибровке и в калибровке Ландау, совпадают.

В разд. 16 получены производящие функционалы вершинных функций и вводится понятие эффективного потенциала. Для примера, иллюстрирующего преимущества данного подхода к перенормировке теорий со спонтанным нарушением симметрии, в разд. 17 рассмотрена σ -модель. В разд. 18 описана схема перенормировки Боголюбова — Парасюка — Хэппа — Циммермана; соответствующий топологический анализ является основой перенормировки калибровочных теорий. В

разд. 19 описана схема перенормировки 'т Офта и Велтмана и в разд. 20 обсуждается применение всех этих методов к перенормировке спонтанно нарушенных калибровочных теорий. Перенормировка выполнена в калибровке Ландау; выведены также соответствующие правила Фейнмана. В разд. 21 вводится более общий класс калибровок, названных R_ξ -калибровками. В разд. 22 доказывается, что во всех калибровках S -матрицы совпадают и что голдстоуновские бозоны не проявляются в физических матричных элементах. Для иллюстрации в последнем разд. 23 вычислен аномальный магнитный момент мюона и явно показано, что он не зависит от калибровки.

Мы не смогли дать полный обзор (во второй половине части II) всех работ других авторов, особенно это касается работ т Ффта и Велтмана, Росса и Д.К. Тейлора, по доказательству перенормируемости и физической непротиворечивости спонтанно нарушенных калибровочных теорий. В настоящее время мы недостаточно подготовлены, чтобы сделать это. Мы приносим извинения нашим коллегам и читателю за то, что изложили только наши взгляды и стратегию. Мы не беремся утверждать, что перенормируемость нами полностью доказана здесь или в другой работе¹⁾. Наши рассуждения все еще отчасти некорректны. Однако мы надеемся, что представили достаточно сильные аргументы в пользу перенормируемости, так что те, кто серьезно изучает спонтанно нарушенные калибровочные теории, могут считать их перенормируемость за нечно большее, чем просто за рабочую гипотезу.

Эти разделы не являются последним словом по обсуждаемому кругу вопросов, скорее они представляют собой замкнутое введение в изучение замечательной идеи. В самом деле, математическая элегантность и эстетическая привлекательность этой схемы построения моделей слабых взаимодействий убеждают многих физиков в том, что она может содержать зерно истины. Очень привлекательным является тот факт, что некоторые из феноменологических следствий различных моделей можно проверить уже в ближайшем будущем.

При знакомстве с данным кругом вопросов для нас оказались весьма полезны обсуждения и переписка со многими нашими колле-

¹⁾ См., однако, сноску на стр. 418 и литературу к разд. 22. — *Прим. перев.*

гами, прежде всего это: К. Олбрайт, Т. Аппельквист, В.А. Бардин, Й.Д. Бьёркен, С. Коулмен, К.Г. Каллан, Х.Х. Чен, Р.Р. Дашен, Л.Д. Фаддеев, Д.З. Фридман, П. Фройнд, Д. Фуджикава, Х. Джорджи, С. Глэшоу, Д.Д. Гросс, Р. Джакив, В. Ли, Й. Намбу, А. Пайс, Е. Пашос, Д. Примак, Х. Квинн, А.И. Санда, Г. т Офт, С.Б. Трейман, М. Велтман, С. Вейнберг, М. Вайнштейн, Л. Вольфенштейн, Ц.Н. Янг, Д. Зинн-Жустен и Б.Зумино. Мы хотим поблагодарить их. Один из нас (Е.С.А.) благодарит проф. Ц.Н. Янга за гостеприимство в Институте теоретической физики. Мы хотели бы поблагодарить м-с Дороти де Харт и м-с Ханну Шкловски за печатание трудного текста.

Часть I

КАЛИБРОВОЧНЫЕ МОДЕЛИ СЛАБЫХ И ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

1. КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ В КЛАССИЧЕСКИХ ТЕОРИЯХ ПОЛЯ

Если мы теперь решим устанавливать это произвольное соглашение независимо в каждой точке пространства-времени, то естественно придем к концепции калибровочных полей.

Ц.Н. Янг

Основным объектом в теориях поля является лагранжева плотность \mathcal{L} ¹⁾, которая есть функция всех полей теории $\varphi_i(x)$ и их производных $\partial_\mu \varphi_i(x)$. Сам лагранжиан L есть пространственный интеграл от \mathcal{L} , а интеграл от \mathcal{L} по всему пространству-времени называется действием S , где

$$S = \int_{-\infty}^{+\infty} L(t) dt = \int d^4x \mathcal{L}(\varphi_i(x), \partial_\mu \varphi_i(x)). \quad (1.1)$$

Уравнения движения следуют из принципа Гамильтона, именно

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(t) dt = 0 \quad (1.2)$$

для любого t_1 и t_2 , где вариация полей должна исчезать в моменты времени t_1 и t_2 . Из принципа Гамильтона следует, что поля удовлетворяют уравнениям Эйлера:

$$\delta \mathcal{L} / \delta \varphi_i = (\partial / \partial x^\mu) \delta \mathcal{L} / \delta (\partial \varphi_i / \partial x^\mu). \quad (1.3)$$

Идея калибровочных преобразований возникает из давнего наблюдения, что каждой непрерывной симметрии лагранжиана соответствует

¹⁾ В дальнейшем авторы часто лагранжеву плотность \mathcal{L} называют просто лагранжианом. — *Прим. ред.*

закон сохранения¹⁾). Например, предположим, что \mathcal{L} не содержит явной зависимости от времени: форма \mathcal{L} не зависит от времени x^0 . При бесконечно малом сдвиге времени каждое поле φ_i изменяется на

$$\delta\varphi_i(x^0, \mathbf{x}) = \varphi_i(x^0 + \varepsilon, \mathbf{x}) - \varphi_i(x) = \varepsilon(\partial/\partial x^0)\varphi_i \quad (1.4a)$$

и

$$\delta(\partial_\mu\varphi_i) = \varepsilon\partial_\mu(\partial/\partial x^0)\varphi_i. \quad (1.4b)$$

Аналогично $\delta\mathcal{L} = \varepsilon\partial\mathcal{L}/\partial x^0$:

$$\varepsilon(\partial/\partial x^0)\mathcal{L} = \sum_i [(\delta\mathcal{L}/\delta\varphi_i)\delta\varphi_i + (\delta\mathcal{L}/\delta(\partial_\mu\varphi_i))\delta(\partial_\mu\varphi_i)]. \quad (1.5)$$

Используя уравнение движения в первом члене, получаем

$$\begin{aligned} \varepsilon(\partial\mathcal{L}/\partial x^0) = \varepsilon \sum_i [& \partial_\mu(\delta\mathcal{L}/\delta(\partial_\mu\varphi_i)) \partial\varphi_i/\partial x^0 + \\ & + (\delta\mathcal{L}/\delta(\partial_\mu\varphi_i)) \partial_\mu(\partial\varphi_i/\partial x^0)] \end{aligned} \quad (1.6)$$

или

$$\partial\mathcal{L}/\partial x^0 = \partial_\mu \sum_i (\delta\mathcal{L}/\delta(\partial_\mu\varphi_i)) \partial\varphi_i/\partial x^0, \quad (1.7)$$

что можно переписать в виде

$$(\partial/\partial x^0)\mathcal{L} - (\delta\mathcal{L}/\delta(\partial\varphi_i/\partial x^0))\partial\varphi_i/\partial x^0 = \nabla \cdot \sum_i (\delta\mathcal{L}/\delta(\nabla\varphi_i))\partial\varphi_i/\partial x^0. \quad (1.8)$$

Выражение в скобках в левой части есть гамильтонова плотность $\mathcal{H}(x)$. Так как требуется, чтобы все поля исчезали достаточно быстро при больших $|\mathbf{x}|$, имеем

$$(\partial/\partial t)H = 0, \quad (1.9)$$

где $H = Sd^3x\mathcal{H}(x)$ есть гамильтониан.

Продолжая действовать аналогичным образом, нетрудно увидеть, что в лоренц-инвариантной теории можно построить сохраняющиеся

¹⁾ Это утверждение известно как теорема Нетер. Формулировку и доказательство теоремы Нетер в калибровочных теориях см. в книге: *Комплева Н.П., Попов В.Н.*, Калибровочные поля, Атомиздат, М., 1972. — *Прим. ред.*

энергию, импульс и угловой момент. Для того чтобы уравнения движения были ковариантны, лагранжиан должен быть лоренц-скалярной плотностью. Это есть одна из причин, почему в релятивистской теории поля полезнее работать с \mathcal{L} , а не с H .

Теперь мы будем интересоваться законами сохранения, которые *не являются* следствиями классических пространственно-временных симметрий. Для каждого сохраняющегося квантового числа можно *построить* преобразование полей, которое оставляет \mathcal{L} инвариантным. Простейший пример дает электрический заряд. Предположим, что каждое поле ϕ_i имеет электрический заряд q_i (в единицах e). Определим следующую группу преобразования полей:

$$\phi_i(x) \rightarrow \exp(-iq_i\theta)\phi_i(x). \quad (1.10)$$

Эта группа есть группа одномерных унитарных преобразований $U(1)$. Нетрудно видеть, что \mathcal{L} должна быть инвариантна относительно этих преобразований. Каждый член в \mathcal{L} есть произведение полей $\phi_1 \dots \phi_n$, которое преобразуется так:

$$\phi_1(x) \dots \phi_n(x) \rightarrow \exp\{-i(q_1 + q_2 + \dots + q_n)\theta\} \phi_1(x) \dots \phi_n(x).$$

Сохранение заряда требует, чтобы \mathcal{L} была нейтральной, поэтому сумма $q_1 + q_2 + \dots + q_n$ должна равняться нулю.

Некоторые члены в \mathcal{L} содержат наряду с полями производные полей. Эти члены также инвариантны, поскольку θ не зависит от x и, кроме того, $\partial_\mu \phi_i \rightarrow \exp(-iq_i\theta) \partial_\mu \phi_i$. Преобразование типа (1.10) называется калибровочным преобразованием или, точнее, калибровочным преобразованием 1-го рода. Инвариантность \mathcal{L} относительно такой калибровочной группы называется калибровочной инвариантностью 1-го рода или, иногда, глобальной калибровочной инвариантностью (поскольку θ не зависит от x).

Инфинитезимальная форма (1.10) есть

$$\delta\phi_i = -i\epsilon q_i \phi_i, \quad (1.1.1)$$

где ϵ — бесконечно малый параметр. Глобальная инвариантность кратко записывается следующим образом:

$$\delta\mathcal{L} = 0. \quad (1.12)$$

Если \mathcal{L} зависит только от φ_i и $\partial_\mu \varphi_i$, то уравнение (1.12) дает

$$\begin{aligned} 0 &= \delta \mathcal{L} = (\delta \mathcal{L} / \delta \varphi_i) \delta \varphi_i + (\delta \mathcal{L} / \delta (\partial_\mu \varphi_i)) \delta (\partial_\mu \varphi_i) = \\ &= -i \varepsilon (\partial / \partial x_\mu) [(\delta \mathcal{L} / \delta (\partial_\mu \varphi_i)) q_i \varphi_i]. \end{aligned}$$

Таким образом, преобразованиям (1.11), которые оставляют \mathcal{L} инвариантным, соответствует сохраняющийся ток J^μ :

$$(\partial / \partial x^\mu) J^\mu(x; q) = 0,$$

где

$$J^\mu = i (\delta \mathcal{L} / \delta (\partial_\mu \varphi_i)) q_i \varphi_i.$$

Калибровочная группа имеет генератор Q . q_i являются его собственными значениями, и $\exp(-iq_i \theta)$ есть одномерное представление группы преобразований $U(1)$, генерируемой Q . В квантовой теории оператор

$$Q = \int d^3 x J_0(\mathbf{x}, t)$$

есть оператор заряда, причем имеют место соотношения

$$\delta \varphi_i = -i \varepsilon [Q, \varphi_i] = -i \varepsilon q_i \varphi_i.$$

Теория может содержать более чем одну сохраняющуюся величину и может быть инвариантной относительно более сложной группы преобразований, чем $U(1)$. Простейшим неабелевым примером является группа изоспина. В теории с изоспиновой симметрией поля будут входить в мультиплеты, которые образуют базис представлений изоспиновой группы $SU(2)$. Калибровочные преобразования можно определить следующим образом:

$$\varphi \rightarrow \exp(-i \mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\theta}) \varphi, \quad (1.13)$$

где φ есть векторный столбец и \mathbf{L} — соответствующее матричное представление $SU(2)$. Например, для дублета $-\mathbf{L} = (\tau/2)$ (τ — матрицы Паули), а для триплета

$$L_{jk}^i = -i \varepsilon^{ijk}.$$

Так как генераторы группы T_i удовлетворяют алгебре

$$[T_i, T_j] = i \varepsilon^{ijk} T_k,$$

матрицы представления удовлетворяют тому же самому правилу: $[L^i, L^j] = i \epsilon^{ijk} L^k$. Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно любых преобразований группы.

Инфинитезимальные преобразования имеют вид

$$\delta\varphi = -i\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\varphi, \quad (1.14)$$

где $\boldsymbol{\epsilon}$ можно рассматривать как три независимых параметра.

Таким образом, если φ есть 2-компонентный изоспинор, то

$$\delta\varphi = -(i/2)\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\varphi,$$

и если φ_i есть компоненты изовектора, то

$$\delta\varphi_i = \epsilon^{ijk}\epsilon^j\varphi_k.$$

Изоспиновая инвариантность требует $\delta\mathcal{L} = 0$ для всех ϵ^j .

Эта идея легко обобщается на случай любой группы Ли внутренней симметрии G . Пусть T_i — генераторы группы и c_{ijk} — структурные константы, тогда

$$[T_i, T_j] = ic_{ijk}T_k. \quad (1.15)$$

Поля φ_i будут преобразовываться по некоторому (вообще говоря, приводимому) представлению группы G . T_i выражаются через матрицы L_i . Конечное калибровочное преобразование есть

$$\varphi \rightarrow \exp(-i\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\theta})\varphi, \quad (1.16)$$

соответствующее инфинитезимальное преобразование —

$$\delta\varphi = -i\mathbf{L} \cdot \boldsymbol{\epsilon}\varphi, \quad (1.17)$$

где число независимых параметров θ^j есть размерность группы.

Лагранжиан \mathcal{L} инвариантен относительно действия группы: $\delta\mathcal{L} = 0$.

Известно, что электродинамика обладает формальной симметрией, большей, чем калибровочные преобразования 1-го рода. Калибровочные преобразования могут зависеть от пространственно-временной точки, которая является аргументом поля:

$$\varphi_i(x) \rightarrow \varphi_i'(x) = \exp\{-iq_i\theta(x)\}\varphi_i(x). \quad (1.18)$$

Такие преобразования называются калибровочными преобразованиями 2-го рода, или *локальными* калибровочными преобразованиями.

ми. Инфинитезимальная форма (1.18) есть

$$\delta\varphi_i(x) = -iq_i\theta(x)\varphi_i(x). \quad (1.19)$$

Здесь $\theta(x)$ — произвольная бесконечно малая функция x . Члены в лагранжиане, зависящие только от полей, очевидно, инвариантны относительно (1.18). Члены с производными полей, такие, как член кинетической энергии, требуют некоторой осторожности. Причина состоит в том, что из (1.18) следует

$$\partial_\mu\varphi_i \rightarrow \exp\{-iq_i\theta(x)\}\partial_\mu\varphi_i(x) - iq_i[\partial_\mu\theta(x)]\exp\{-iq_i\theta(x)\}\varphi_i(x). \quad (1.20)$$

Второй член описывает различие в законах преобразования $\partial_\mu\varphi_i$ и φ_i ; однако лагранжиан будет инвариантным только в том случае, если он представляет собой произведение выражений, каждое из которых преобразуется по закону, аналогичному (1.10), с равной нулю суммой q_i .

Инвариантность электродинамики достигается с помощью введения фотонного поля, согласно следующему правилу, обычно называемому минимальной связью¹⁾: градиент заряженного поля $\partial_\mu\varphi_i$ может появиться в лагранжиане только вместе с фотонным полем A_μ в комбинации $(\partial_\mu - ieq_i A_\mu)\varphi_i$. A_μ есть поле мезона со спином 1 (фотона), которое представляет собой первый пример калибровочного поля. Потребуем, чтобы оно преобразовывалось относительно локальных калибровочных преобразований специальным образом, а именно так, чтобы комбинация $(\partial_\mu - ieq_i A_\mu)\varphi_i(x)$ преобразовывалась так же, как $\varphi_i(x)$ в (1.10), т.е.

$$(\partial_\mu - ieq_i A'_\mu)\varphi_i'(x) = \exp\{-iq_i\theta(x)\}(\partial_\mu - ieq_i A_\mu)\varphi_i(x). \quad (1.21)$$

Тогда \mathcal{L} будет инвариантна и относительно локальных калибровочных преобразований. Используя известное выражение для $\partial_\mu\varphi_i'(x)$, получаем

$$\begin{aligned} & \exp\{-iq_i\theta(x)\}\partial_\mu\varphi_i(x) - iq_i[\partial_\mu\theta(x)]\exp\{-iq_i\theta(x)\}\varphi_i(x) - \\ & - ieq_i A'_\mu(x)\exp\{-iq_i\theta(x)\}\varphi_i(x) = \exp\{-iq_i\theta(x)\}\partial_\mu\varphi_i(x) - \\ & - ieq_i A_\mu(x)\exp\{-iq_i\theta(x)\}\varphi_i(x). \end{aligned} \quad (1.22)$$

¹⁾ Или принципом минимального взаимодействия. — *Прим. ред.*

Решение (1.22) есть

$$A_{\mu}^{\prime}(x) = -e^{-1} \partial_{\mu} \theta(x) + A_{\mu}(x) \quad (1.23)$$

или

$$\delta A_{\mu}(x) = -e^{-1} \partial_{\mu} \theta(x). \quad (1.24)$$

Кроме членов, описывающих взаимодействие фотона с полями заряженных частиц, необходимы квадратичные члены (кинетическая энергия и масса), описывающие самодействие поля A_{μ} . Решение хорошо известно. Определим тензор напряженности $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}. \quad (1.25)$$

Тогда преобразование (1.23) приводит к $\delta F_{\mu\nu} = 0$, и член кинетической энергии фотона будет калибровочно-инвариантен, если он построен из $F_{\mu\nu}$:

$$\mathcal{L}_{EM} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (1.26)$$

Коэффициент $-1/4$ определяется из условия, чтобы уравнения Эйлера-Лагранжа приводили к уравнениям Максвелла с обычной нормировкой электрического заряда e . Массовый член фотона имел бы вид $-\frac{1}{2} m^2 A_{\mu} A^{\mu}$, что, очевидно, нарушает локальную калибровочную инвариантность. Отсюда следует, что локальная калибровочная инвариантность возможна только в том случае, если фотон является безмассовым.

Фотон, конечно, не был открыт из требования локальной калибровочной инвариантности. Наоборот, калибровочные преобразования были найдены как полезные свойства уравнений Максвелла. Однако в квантовой электродинамике калибровочная инвариантность позволяет вывести тождества Уорда - Такахаси¹⁾, которые позволяют доказать многие теоремы, включая (что, как мы увидим, наиболее важно) перенормируемость теории.

Обобщение локальной калибровочной инвариантности на случай неабелевых групп было впервые изучено Янгом и Миллсом на приме-

¹⁾ Полные следствия калибровочной инвариантности для функций Грина в квантовой электродинамике были впервые выведены Фрадкным; см. *Фрадкин Е.С., ЖЭТФ, 29, 258 (1955)*. — *Прим. перев.*

ре группы изотопического спина $SU(2)$. Их идея легко обобщается на случай произвольной группы внутренней симметрии.

Пусть, как и выше, группа имеет генераторы T_i :

$$[T_i, T_j] = ic_{ijk} T_k \quad (1.27)$$

Набор полей преобразуется по правилу

$$\varphi(x) \rightarrow \varphi'(x) = \exp \{-i\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\theta}(x)\} \varphi(x) \equiv U(\boldsymbol{\theta})\varphi(x), \quad (1.28)$$

где $\varphi(x)$ есть векторный столбец и L^j — матричное представление генераторов группы. Лагранжиан \mathcal{L} считается инвариантным относительно преобразований с постоянными θ^j . Проблема теперь состоит в построении теории, которая была бы также инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований $\theta^j(x)$, с помощью введения векторных полей $A_\mu^j(x)$ по аналогии с электродинамикой.

При локальных преобразованиях

$$\varphi(x) \rightarrow U(\boldsymbol{\theta})\varphi(x), \quad (1.29)$$

и поэтому

$$\partial_\mu \varphi(x) \rightarrow U(\boldsymbol{\theta})\partial_\mu \varphi(x) + (\partial_\mu U(\boldsymbol{\theta}))\varphi(x). \quad (1.30)$$

Идея состоит в построении ковариантной производной $D_\mu \varphi(x)$, которая преобразуется так же, как $\varphi(x)$:

$$D_\mu \varphi(x) \rightarrow U(\boldsymbol{\theta})D_\mu \varphi(x). \quad (1.31)$$

Тогда, если $\partial_\mu \varphi(x)$ появляется в \mathcal{L} только как часть $D_\mu \varphi(x)$, \mathcal{L} будет инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований.

Ковариантная производная $D_\mu \varphi(x)$ строится с помощью введения векторного поля $A_\mu^j(x)$ для каждой образующей алгебры Ли и определяется как

$$D_\mu \varphi(x) = (\partial_\mu - ig\mathbf{l} \cdot \mathbf{A}_\mu)\varphi(x). \quad (1.32)$$

Константа связи g , аналог e , произвольна. Как должна преобразовываться A_μ^j , чтобы выполнялось (1.31)? A_μ^j должно быть определено так, чтобы величина

$$D'_\mu \varphi' = \partial_\mu \varphi' - igA_\mu^j L^j \varphi' = (\partial_\mu U(\boldsymbol{\theta}))\varphi(x) + U(\boldsymbol{\theta})\partial_\mu \varphi - ig\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{L}U(\boldsymbol{\theta})\varphi \quad (1.33)$$

равнялась

$$U(\theta) (\partial_\mu - ig\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{L}) \varphi. \quad (1.34)$$

Решение имеет вид

$$-ig\mathbf{A}'_\mu \cdot \mathbf{L} U(\theta)\varphi = -igU(\theta)\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{L}\varphi - (\partial_\mu U(\theta))\varphi, \quad (1.35)$$

или, так как (1.35) должно быть справедливо для всех φ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}'_\mu \cdot \mathbf{L} &= U(\theta)\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{L}U^{-1}(\theta) - i/g(\partial_\mu U(\theta)U^{-1}(\theta)) = \\ &= U(\theta)[\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{L} - i/gU^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)]U^{-1}(\theta). \end{aligned} \quad (1.36)$$

Доказательство того, что преобразования образуют группу, в качестве упражнения мы оставляем читателю; в частности, если

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}'_\mu \equiv U(\theta) [\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{L} - i/g U^{-1}(\theta)\partial_\mu U(\theta)] U^{-1}(\theta)$$

и

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}''_\mu = U(\theta') [\mathbf{A}'_\mu \cdot \mathbf{L} - i/g U^{-1}(\theta')\partial_\mu U(\theta')] U^{-1}(\theta'),$$

тогда

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{A}''_\mu = U(\theta'') [\mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{L} - i/g U^{-1}(\theta'')\partial_\mu U(\theta'')] U^{-1}(\theta''),$$

где

$$U(\theta'') = U(\theta') U(\theta).$$

Закон преобразования поля A^i_μ кажется зависящим от представления, по которому преобразуется поле φ , однако на самом деле он зависит только от коммутатора $[L^i, L^j]$, структура которого не зависит от представления.

Этот факт становится очевидным при рассмотрении инфинитезимальных преобразований:

$$\begin{aligned} L^j \delta A^i_\mu &= -g^{-1} L^j \partial_\mu \theta^j + i L^i A^i_\mu \theta^j L^j - i \theta^j L^j A^i_\mu L^i = \\ &= -g^{-1} L^j \partial_\mu \theta^j + i \theta^j A^i_\mu [L^i, L^j] = \\ &= -g^{-1} L^j \partial_\mu \theta^j - \theta^j A^i_\mu c_{ijk} L^k. \end{aligned} \quad (1.37)$$

Так как L' линейно независимы, имеем

$$\delta A_{\mu}^i = -1/g \partial_{\mu} \theta^i + c_{ijk} \theta^j A_{\mu}^k. \quad (1.38)$$

Затем следует построить аналог члена, описывающего кинетическую энергию, т.е. члена \mathcal{L}_0 , который зависит только от полей A_{μ}^i и их производных. Поскольку не все из этих полей обладают нулевыми квантовыми числами относительно всех T_i (в отличие от фотона, который электрически нейтрален), \mathcal{L}_0 не может иметь простую форму, как в электродинамике. В самом деле, из (1.38) легко видеть, что

$$\delta[\partial_{\mu} A_{\nu}^i - \partial_{\nu} A_{\mu}^i] = c_{ijk} \theta^j (\partial_{\mu} A_{\nu}^k - \partial_{\nu} A_{\mu}^k) + c_{ijk} [(\partial_{\mu} \theta^j) A_{\nu}^k - (\partial_{\nu} \theta^j) A_{\mu}^k]. \quad (1.39)$$

\mathcal{L}_0 будет инвариантен, если он построен из тензоров $F_{\mu\nu}^i$ по правилу

$$\mathcal{L}_0 = -1/4 F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i} \quad (1.40)$$

при условии, что $F_{\mu\nu}^i$ преобразуются ковариантно как набор полей из регулярного (присоединенного) представления G . Поэтому необходимо что-то добавить к разности $\partial_{\mu} A_{\nu}^i - \partial_{\nu} A_{\mu}^i$, чтобы сократить нежелательные члены в (1.39). Из (1.38) следует

$$\begin{aligned} c_{ijk} \delta[A_{\mu}^j A_{\nu}^k] &= -(c_{ijk}/g) [(\partial_{\mu} \theta^j) A_{\nu}^k] + c_{ijk} c_{jlm} \theta^l A_{\mu}^m A_{\nu}^k + \\ &+ c_{ijk} c_{klm} \theta^l A_{\nu}^m A_{\mu}^j. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Первые члены (умноженные на g) как раз сокращают нежелательные члены в (1.39). Последние два члена можно переписать с использованием антисимметрии структурных констант в виде

$$[c_{imk} c_{kjl} - c_{ijk} c_{kml}] \theta^l A_{\mu}^j A_{\nu}^m. \quad (1.42)$$

Пусть T^i являются также матрицами регулярного представления. Тогда $(T^i)_{jk} = -ic_{ijk}$ и скобка в (1.42) есть

$$c_{imk} c_{lkj} - c_{lmk} c_{ikj} = [T^l, T^i]_{mj} = ic_{lik} (T^k)_{mj} = c_{ilk} c_{kjm}.$$

Поэтому

$$c_{ijk} \delta[A_{\mu}^j A_{\nu}^k] = -(c_{ijk}/g) [\partial_{\mu} \theta^j A_{\nu}^k - \partial_{\nu} \theta^j A_{\mu}^k] + c_{ilk} \theta^l c_{kjm} A_{\mu}^j A_{\nu}^m.$$

Итак, определим

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g c_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k; \quad (1.43)$$

тогда

$$\delta F_{\mu\nu}^i = c_{ijk} \theta^j F_{\mu\nu}^k \quad (1.44)$$

и $\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^i F^{\mu\nu i}$ инвариантна. Относительно конечных калибровочных преобразований $U(\theta) = \exp(-iL^i \theta^i)$ $F_{\mu\nu}^i$ преобразуется по закону $F_{\mu\nu} \cdot L \rightarrow U(\theta) F_{\mu\nu} \cdot L U^{-1}(\theta)$, так что $\text{Sp}(F_{\mu\nu} \cdot L)^2 \sim F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}$ инвариантен.

Как и прежде, массовый член вида $(1/2) m^2 A_\mu \cdot A^\mu$ нарушил бы локальную калибровочную инвариантность.

В заключение кратко повторим схему построения локально калибровочно-инвариантных теорий с неабелевыми симметриями. Берем лагранжиан $\mathcal{L}_1(\varphi_i, \partial_\mu \varphi_i)$, инвариантный относительно глобальной группы G с генераторами T_i и структурными константами c_{ijk} ; поля φ_i преобразуем по некоторому представлению группы $\exp(-iL \cdot \theta)$ с постоянными θ^i . В теорию добавляем набор векторных полей A_μ^i , по одному на каждый T^i . Полный лагранжиан есть

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1(\varphi_i, (\partial_\mu - ig A_\mu \cdot L) \varphi_i). \quad (1.45)$$

Первый член имеет вид

$$\mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}, \quad (1.46)$$

где

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g c_{ijk} A_\mu^j A_\nu^k. \quad (1.47)$$

Закон преобразования для калибровочных бозонов

$$L \cdot A'_\mu = U(\theta) L \cdot A_\mu U^{-1}(\theta) - \frac{1}{g} (\partial_\mu U(\theta)) U^{-1}(\theta), \quad (1.48)$$

где θ^j являются функциями x .

И последнее замечание. Если G — прямое произведение двух или более подгрупп, константы связи g , соответствующие каждой подгруппе, могут быть разными.

ЛИТЕРАТУРА

Стандартные ссылки по неабелевой калибровочной теории:

1. *Yang C.N., Mills R., Phys. Rev., 96, 191 (1954).*
 2. *Utiyama R., Phys. Rev., 101, 1597 (1956).*
 3. *Gell-Mann M., Glashow S., Ann. Phys. (N.Y.), 15, 437 (1961).*
- Тождества Уорда — Такахаши впервые обсуждаются в статьях:
4. *Ward J.C., Phys. Rev., 78, 1824 (1950).*
 5. *Takahashi Y., Nuovo Cimento, 6, 370 (1957).*

Использование тождеств Уорда — Такахаши широко обсуждается в части II. В обобщенном смысле они представляют собой точные математические утверждения о следствиях калибровочной инвариантности (или других симметрий) лагранжиана для функций Грина.

2. СПОНТАННО-НАРУШЕННЫЕ СИММЕТРИИ

Если моя точка зрения правильна, Вселенная может иметь нечто вроде доменной структуры. В одной части Вселенной может быть одно выделенное направление оси, в другой части направление оси может быть другим.

Й. Намбу

По-видимому, природа допускает полезные симметрии, которые, в отличие от сохранения электрического заряда, не являются точными симметриями S -матрицы. Обычными примерами являются изоспин, странность и $SU(3)$. Традиционно такие симметрии описывались лагранжианом, одна часть которого обладала точной симметрией, а другая часть, в некотором смысле "малая", нарушала симметрию. На этой идее основана существовавшая до настоящего времени картина "иерархии" взаимодействий — сильных, слабых и электромагнитных, в которой более сильное взаимодействие обладает большей симметрией. РСАС представляет собой другой тип симметрии, которая даже в пределе точной симметрии не является симметрией физического спектра, т.е. частицы не образуют мультиплетов состояний с равными массами, которые можно было бы рассматривать как представление группы (в данном случае $SU(2) \otimes SU(2)$). Несмотря на это, пред-

сказания $SU(2) \otimes SU(2)$ - тождеств Уорда — Такахаша и алгебры токов физически полезны.

В настоящее время хорошо известно, что второй тип симметрии можно получить из лагранжиана с точной симметрией в предположении, что вакуум неинвариантен относительно группы симметрии. Такие симметрии имеют широко известное название "спонтанно нарушенные симметрии". В данном разделе описывается механизм их появления. Затем мы непременно пойдем дальше и увидим, какие удивительные вещи случаются, когда симметрия лагранжиана становится локальной калибровочной симметрией типа описанной в первом разделе.

Прежде всего полезно понять, до какой степени теория поля похожа на совокупность ангармонических осцилляторов. Простая лагранжева плотность одного скалярного поля имеет вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4. \quad (2.1)$$

Для простоты ограничимся случаем одного пространственного измерения. Тогда лагранжиан равен:

$$L = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{L}(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} (\partial \phi / \partial t)^2 - \frac{1}{2} (\partial \phi / \partial x)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \phi^4 \right]. \quad (2.2)$$

Будем считать $\phi(x, t)$ канонической координатой для каждого x . Разделим пространство на ячейки длиной ϵ , которые будут обозначаться координатой x_i : $x_i - x_{i-1} = \epsilon$. Тогда можно интеграл в определении L заменить дискретной суммой. Дискретными координатами являются $q_i(t) = \phi(x_i, t)$, и L становится

$$L = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (dq_i/dt)^2 - \frac{1}{2} \epsilon^{-2} (q_i - q_{i-1})^2 - \frac{1}{2} \mu^2 q_i^2 - \frac{1}{4} \lambda q_i^4 \right]. \quad (2.3)$$

Здесь второй член описывает взаимодействие между координатами q_i в соседних точках, а последний член делает потенциал ангармоническим. Канонический импульс

$$p_i = dq_i/dt,$$

и если мы определим

$$V(z) = \frac{1}{2} \mu^2 z^2 + \frac{1}{4} \lambda z^4,$$

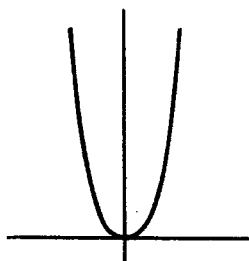
то гамильтониан примет вид

$$H = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} p_i^2 + \frac{1}{2} \epsilon^{-2} (q_i - q_{i-1})^2 + V(q_i) \right]. \quad (2.4)$$

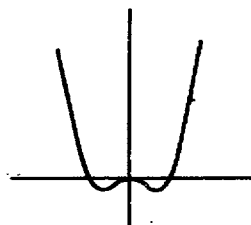
Осцилляции поля ограничены только в том случае, если $\lambda \geq 0$; выполнения этого условия мы и потребуем. В обычном случае также и $\mu^2 > 0$. Для того чтобы провести какие-либо вычисления по теории возмущений, вначале следует найти минимум потенциала

$$\sum_i \left[\frac{1}{2} \epsilon^{-2} (q_i - q_{i-1})^2 + V(q_i) \right]$$

и рассматривать решения невозмущенного гармонического осциллятора как нулевое приближение (что соответствует решениям в форме "свободных полей" в теории поля). Для любого V в минимуме



Фиг. 2.1. Потенциальная функция при положительных μ^2 .



Фиг. 2.2. Потенциальная функция при отрицательных μ^2 .

потенциала $q_i = q_{i-1}$, т.е. все q_i равны между собой¹⁾. Если $\mu^2 > 0$, функция V выглядит, как показано на фиг. 2.1, и минимум находится в точке $q_i = 0$. С другой стороны, если $\mu^2 < 0$, потенциал выглядит,

¹⁾ Фактически это условие является дополнительным требованием трансляционной инвариантности вакуума. — *Прим. перев.*

как показано на фиг. 2.2. В этом случае при $q = 0$ минимум не наблюдается. Имеются два симметричных минимума при $q = \pm(-\mu^2/\lambda)^{1/2}$.

В теории поля основное состояние есть вакуум. Несколько эвристическим способом мы показали, что в случае $\mu^2 < 0$ вакуумное среднее поля отлично от нуля; точнее, оно не зависит от $x(q_i = q_i - 1)$ и равно $\pm(-\mu^2/\lambda)^{1/2}$ в нулевом порядке теории возмущений.

Пусть вакуумное среднее поля равно v :

$$\langle \phi \rangle_0 = v = \pm(-\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Можно выбрать любое из этих двух значений v , но не оба одновременно. Поскольку L инвариантен относительно замены $\phi \rightarrow -\phi$, мы можем условиться о выборе знака "+". Единственная симметрия, которой обладает рассматриваемый простой лагранжиан, — симметрия отражения $\phi \rightarrow -\phi$. Ясно, что новый вакуум не является собственным состоянием этой операции, так как $v \neq -v$. В этом случае симметрия "спонтанно" нарушена. Определим новое поле ϕ' с помощью соотношения

$$\phi' = \phi - v;$$

тогда

$$\langle \phi' \rangle = 0,$$

так что в терминах поля ϕ' можно построить обычную теорию возмущений. Тогда с точностью до константы имеем

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi' \partial_\mu \phi' + \mu^2 \phi'^2 - \lambda v \phi'^3 - \frac{1}{4} \lambda \phi'^4. \quad (2.6)$$

Голые состояния имеют положительную массу $-2\mu^2$, но не проявляют симметрии лагранжиана очевидным образом.

Несколько более сложная модель описывает два поля, которые можно обозначить через σ и π :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu \sigma \partial_\mu \sigma + \partial_\mu \pi \partial_\mu \pi] - V(\sigma^2 + \pi^2), \quad (2.7)$$

где

$$V = \frac{1}{2} \mu^2 (\sigma^2 + \pi^2) + \frac{1}{4} \lambda (\sigma^2 + \pi^2)^2. \quad (2.8)$$

\mathcal{L} , очевидно, инвариантна относительно $O(2) [= U(1)]$:

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}. \quad (2.9)$$

Положение минимума определяется условиями

$$\partial V / \partial \sigma = 0 = \sigma [\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)], \quad (2.10a)$$

$$\partial V / \partial \pi = 0 = \pi [\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)]. \quad (2.10b)$$

Очевидно, что при $\mu^2 < 0$ минимум достигается на окружности $\sqrt{\sigma^2 + \pi^2} = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}$. Оси в плоскости $\sigma - \pi$ всегда можно определить так, что

$$\langle \sigma \rangle_0 = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}, \quad \langle \pi \rangle_0 = 0.$$

[Другой подход состоит в том, что к V добавляется малый, нарушающий симметрию член $c\sigma$, как это делается в модели Гелл-Манна и Леви. Тогда минимум появляется в точке

$$\sigma [\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)] = c, \quad \pi [\mu^2 + \lambda(\sigma^2 + \pi^2)] = 0.$$

Член $c\sigma$ выделяет определенное направление в (σ, π) -пространстве.

Единственными решениями этих уравнений являются $\pi = 0$, $\sigma [\mu^2 + \lambda\sigma^2] = c$; в пределе $c \rightarrow 0$ имеем либо $\sigma = 0$, либо $\sigma = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}$. Первое решение является минимумом при $\mu^2 > 0$, второе — при $\mu^2 < 0$.]

Как и выше, при $\mu^2 < 0$ определим

$$s = \sigma - \langle \sigma \rangle_0$$

и перепишем \mathcal{L} через s и π вместо σ и π :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [\partial_\mu s \partial^\mu s + \partial_\mu \pi \partial^\mu \pi] + \mu^2 s^2 - \lambda \langle \sigma \rangle_0 s (s^2 + \pi^2) - \frac{1}{4} \lambda (s^2 + \pi^2)^2. \quad (2.11)$$

Очевидно, что s является полем частицы с положительной массой $-2\mu^2$, в то время как π -поле безмассовое. Это — первый пример теоремы Голдстоуна: если в теории симметрия лагранжиана не является симметрией вакуума, должны присутствовать безмассовые бозоны.

Имеется более общий пример. Пусть φ — n -компонентное действительное поле с лагранжевой плотностью

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi^i \partial^\mu \varphi^i - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^i \varphi^i - \frac{1}{4} \lambda (\varphi^i \varphi^i)^2. \quad (2.12)$$

Очевидно, что \mathcal{L} инвариантна относительно ортогональной группы в n -мерном пространстве $O(n)$. Если $\mu^2 < 0$, тогда потенциал имеет кольцо минимумов при $v = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}$, т.е. минимум достигается всякий раз, когда $\varphi^i \varphi^i = -\mu^2/\lambda$. Выберем n -ю компоненту φ в качестве поля с отличным от нуля вакуумным средним. Иначе говоря, рассмотрим φ как n -компонентный векторный столбец, так что

$$\langle \varphi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ v \end{pmatrix}.$$

Исходная группа симметрии $O(n)$ имеет $n(n-1)/2$ генераторов. Новое в этом примере состоит в том, что имеется еще некоторая нетривиальная группа симметрии, оставляющая вакуум инвариантным, это подгруппа $O(n)$, которая не смешивает n -ю компоненту φ с другими компонентами, именно группа $O(n-1)$ с $(n-1)(n-2)/2$ генераторами.

Пусть L_{ij} представляет собой $n(n-1)/2$ независимых матриц, генерирующих $O(n)$, и пусть l_{ij} — поднабор, который генерирует выживающую симметрию $O(n-1)$ [$l_{ij} = L_{ij}$ при $i, j \neq n$]. Остальные генераторы обозначим через k_i [$k_i = L_{in}$]. Имеется $n-1$ независимых k_i . Вместо простого вычитания вакуумного среднего, как делалось ранее для определения нового поля, можно параметризовать φ -поле способом, который окажется гораздо более полезным. Опре-

делим η и ξ_i , $1 \leq i \leq n-1$, как

$$\varphi = \exp(i \xi_i k_i / v) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ v + \eta \end{pmatrix}$$

Поскольку в общем случае $(L_{ij})_{kl} = -i[\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}]$, k_i имеют следующие матричные элементы:

$$(k_i)_{kl} = (L_{in})_{kl} = -i[\delta_{ik}\delta_{nl} - \delta_{il}\delta_{nk}];$$

тогда действие k_i на векторный столбец $v_i = v\delta_{in}$ дает вектор

$$(k_i v)_j = \nu(k_i)_{jl} \delta_{ln} = v(k_i)_{jn} = -iv\delta_{ij}.$$

Таким образом, в низшем порядке новое определение эквивалентно старой процедуре; с точностью до членов, квадратичных по полям, имеем $\varphi_i = \xi_i$ ($i < n$) и $\varphi_n = v + \eta$. [Мы покажем в части II, что такое переопределение оставляет S -матрицу (но не функции Грина) инвариантной.]

В терминах новых полей ξ_i и η лагранжиан имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [\partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \partial^\mu \xi_i \partial_\mu \xi_i] + \\ & + \text{члены высшего порядка со связью с производными} \\ & - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \eta)^2 - \frac{1}{4} \lambda (v + \eta)^4. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Поле η имеет затравочную массу $-2\mu^2 (> 0)$, и $n-1$ полей ξ_i безмассовые. Таким образом, каждому генератору исходной группы, нарушающему инвариантность вакуума, соответствует голдстоуновское поле.

Из-за выбора n -мерного представления $O(n)$ тот факт, что число безмассовых бозонов совпадает с числом нарушенных генераторов, в рассмотренном примере кажется случайным. Однако это общий результат. Перепишем произвольный лагранжиан через n действительных скалярных полей φ_i , которые образуют n -компонентный вектор φ , удвоив число базисных полей (комплексное представление всегда можно сделать действительным):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \varphi \partial^\mu \varphi - V(\varphi). \quad (2.14)$$

Конечно, \mathcal{L} может содержать другие поля (например, спинорные), которые взаимодействуют друг с другом и с φ , но эти члены в данном случае несущественны. $V(\varphi)$ — полином по φ , инвариантный относительно некоторой группы G (но не относительно большей группы, содержащей G). G имеет N генераторов T_α , и φ преобразуется по n -мерному (вообще говоря, приводимому) представлению L^α : $\delta\varphi = -i\theta^\alpha L^\alpha \varphi$.

Поскольку выбранное представление вещественно, iL^α должны быть вещественными матрицами; таким образом, L^α — чисто мнимые матрицы и из-за эрмитовости они антисимметричны. Поскольку V инвариантен относительно G , его реакция на инфинитезимальное групповое преобразование (с параметрами θ^α) есть

$$0 = \delta V = (\partial V / \partial \varphi_i) \delta \varphi_i = -i (\partial V / \partial \varphi_i) \theta^\alpha L_{ij}^\alpha \varphi_j. \quad (2.15)$$

Так как θ^α произвольны, получается N уравнений

$$(\partial V / \partial \varphi_i) L_{ij}^\alpha \varphi_j = 0 \quad (2.16)$$

для всех α . Дифференцируя уравнения (2.16), получаем

$$(\partial^2 V / \partial \varphi_i \partial \varphi_k) L_{ij}^\alpha \varphi_j + (\partial V / \partial \varphi_i) L_{ik}^\alpha = 0. \quad (2.17)$$

Рассмотрим (2.17) при значении $\varphi = v$, которое минимизирует V :

$$(\partial V / \partial \varphi_i) |_{\varphi = v} = 0.$$

Имеем

$$(\partial^2 V / \partial \varphi_i \partial \varphi_k) |_{\varphi = v} L_{ij}^\alpha v_j = 0. \quad (2.18)$$

В разложении V в окрестности v линейные члены отсутствуют, а константа несущественна:

$$V = \frac{1}{2} M_{ij}^2 (\varphi - v)_i (\varphi - v)_j + \text{члены высшего порядка}. \quad (2.19)$$

Поэтому $\partial^2 V / \partial \varphi_i \partial \varphi_j$ в точке $\varphi = v$ равно M_{ij}^2 , где M_{ij}^2 — массовая матрица, и, таким образом,

$$M_{ij}^2 L_{jk}^\alpha v_k = 0 \quad (2.20)$$

для каждого α .

Пусть S есть M -мерная подгруппа G , сохраняющая симметрию вакуума. Если L^α — генераторы S , тогда $L^\alpha v = 0$ и (2.20) не содержит никакой информации относительно M^2 . Из (2.20) следует, что для каждого из $N-M$ векторов $L_{jk}^\alpha v_k$, которые отличны от нуля, M^2 имеет собственное значение нуль. Если векторы $L^\alpha v$ действительно образуют $(N-M)$ -мерное пространство, то мы тем самым продемонстрировали, что в теории существует $N-M$ безмассовых (голдстоуновских) бозонов.

Этот факт почти очевиден из вышеприведенных примеров. Чтобы дать формальное доказательство, определим $A^{\alpha\beta} = (L^{\alpha}v, L^{\beta}v)$. [(a, b) означает $\sum_i a_i^* b_i$, хотя мы работаем в вещественном векторном пространстве.] Так как L^{α} эрмитовы, $A^{\alpha\beta} = (v, L^{\alpha}L^{\beta}v)$. Тогда

$$A^{\alpha\beta} - A^{\beta\alpha} = (v, [L^{\alpha}, L^{\beta}]v) = ic_{\alpha\beta\gamma}(v, L^{\gamma}v) = 0. \quad (2.21)$$

Последнее равенство следует из антисимметрии L . Определим \tilde{A} как $(N - M) \times (N - M)$ -матрицу с теми значениями α и β , для которых $L^{\alpha}v \neq 0$. \tilde{A} симметрична и может быть диагонализирована. Пусть O есть $(N - M) \times (N - M)$ -ортогональная матрица, которая диагонализует \tilde{A} :

$$\tilde{A}'^{\alpha\beta} = (O\tilde{A}O^T)^{\alpha\beta} = (O^{\alpha\gamma}L^{\gamma}v, O^{\beta\delta}L^{\delta}v). \quad (2.22)$$

Далее, $O^{\alpha\gamma}L^{\gamma}v$ не могут обращать v в нуль, поскольку в этом случае они принадлежали бы S , что, очевидно, не так. Таким образом, $O^{\alpha\gamma}L^{\gamma}v \neq 0$, все диагональные элементы \tilde{A}' положительны и пространство, образованное $O^{\alpha\gamma}L^{\gamma}v$ или, эквивалентно, $L^{\alpha}v$, $(N - M)$ -мерно, что и завершает доказательство наличия у $M^2(N - M)$ нулевых собственных значений. Матрица $A^{\alpha\beta}$ будет играть фундаментальную роль в следующем разделе.

ЛИТЕРАТУРА

Использование тождеств Уорда — Такахаша для вывода физических следствий иллюстрируется на примере моделей со спонтанно нарушенной киральной симметрией $SU(2)$ о $SU(2)$, которые известны как алгебра токов и киральная динамика; см.:

1. Adler S. L., Dashen R. F., Current Algebras, W. A. Benjamin Inc., 1968 (Имеется перевод: С. Адлер, Р. Дашен, Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во "Мир", М., 1970).
2. Weinberg S., Dynamics and Algebraic Symmetries" в сборнике Lectures in Elementary Particles and Quantum Field Theory, Vol. I (eds. Deser S., Grisaru M., Pendleton H.), The MIT Press, 1970.
3. Lee B. W., Chiral Dynamics, Gordon and Breach, 1972.
Обсуждение σ -модели см. в работах:
4. Schwinger J., Ann. Phys. (N.Y.), 2, 407 (1958),
5. Polkinghorne J. C., Nuovo Cimento, 8, 179 (1958),
6. Gell-Mann M., Levy M., Nuovo Cimento, 16, 705 (1960).

Теорема Голдстоуна и фактически голдстоуновская мода симметрии в квантовой теории поля (т.е. спонтанно нарушенная симметрия) впервые обсуждались в статье:

7. *Goldstone J.*, *Nuovo Cimento*, **19**, 15 (1961)
и позже были рассмотрены детально в работах:
8. *Nambu Y.*, *Jona-Lasinio G.*, *Phys. Rev.*, **122**, 485 (1961); **124**, 246 (1961).
9. *Goldstone J.*, *Salam A.*, *Weinberg S.*, *Phys. Rev.* **127**, 965 (1962).
10. *Bludman S.*, *Klein A.*, *Phys. Rev.*, **131**, 2263 (1962).

На важность теоремы Голдстоуна в физическом контексте впервые указал Намбу:

11. *Nambu Y.*, *Phys. Rev. Lett.*, **4**, 380 (1960).

3. МЕХАНИЗМ ХИГГСА

Здесь будут рассмотрены лагранжианы со спонтанно нарушенными симметриями, которые обладают также локальной калибровочной инвариантностью типа описанной в первом разделе. Эта комбинация приводит к исключению из теоремы Голдстоуна, которое является основой класса перенормируемых моделей слабых и электромагнитных взаимодействий.

В качестве простейшего примера рассмотрим одно самодействующее заряженное поле с лагранжианом

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi) - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2. \quad (3.1)$$

Лагранжиан инвариантен относительно преобразований группы $U(1)$:

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{-i\theta} \phi. \quad (3.2)$$

Затем мы вводим калибровочное поле A_μ и строим лагранжиан, инвариантный относительно локальных калибровочных преобразований. Следуя рецептам, полученным в разд. 1, получаем

$$\mathcal{L} = [(\partial_\mu + ieA_\mu)\phi^*(\partial^\mu - ieA^\mu)\phi] - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (3.3)$$

где $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$. Относительно локальных калибровочных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \exp\{-i\theta(x)\} \phi(x), \\ \phi^*(x) &\rightarrow \phi'^*(x) = \exp\{i\theta(x)\} \phi^*(x), \\ A_\mu(x) &\rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x). \end{aligned} \quad (3.4)$$

\mathcal{L} инвариантна относительно преобразований (3.4).

Если $\mu^2 > 0$, (3.3) есть лагранжиан заряженной скалярной электродинамики. Если $\mu^2 < 0$, поля следует сдвинуть, чтобы выразить лагранжиан через поля с нулевыми вакуумными средними.

Лагранжиан (3.3) обладает той же $O(2)$ -симметрией, что и модель (σ, π) -частиц, описываемая выражением (2.7) и преобразованиями (2.9). Соответствие устанавливается соотношениями $\sigma/\sqrt{2} \leftrightarrow \text{Re } \phi$, $\pi/\sqrt{2} \leftrightarrow \text{Im } \phi$. Поскольку всегда можно считать, что ненулевым вакуумным средним обладает поле σ , мы предположим без потери общности, что

$$\langle \phi \rangle_0 = v/\sqrt{2},$$

где v действительно.

Вместо сдвига ϕ с помощью вычитания из него $\langle \phi \rangle_0$ параметризуем ϕ экспоненциально, как это было сделано с действительными n -векторами в разд. 2. Новые действительные поля ξ и η определяют следующим образом:

$$\phi = \exp(i\xi/v) (v + \eta) (1/\sqrt{2}) = (1/\sqrt{2}) [v + \eta + i\xi + \text{квадратичные и высшего порядка члены}]. \quad (3.5)$$

Поле ξ связано со спонтанно нарушенной $U(1)$ -симметрией. В отсутствие калибровочного поля A_μ мы могли бы заключить, что ξ — безмассовое поле, поскольку (3.3), переписанное через ξ и η , не содержит члена, квадратичного по ξ . Но теперь этот аргумент не имеет силы. Перепишем (3.3) через A_μ , ξ и η :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \partial_\mu \xi \partial^\mu \xi + \frac{1}{2} e^2 v^2 A_\mu A^\mu - \\ & - \sqrt{2} e v A_\mu \partial^\mu \xi + \mu^2 \eta^2 + \\ & + \text{члены кубичные и более высокого порядка,} \end{aligned} \quad (3.6)$$

где $v^2 = -\mu^2/\eta$. Поле η имеет массу $-2\mu^2$, но поля A_μ и ξ смешались так, что результат трудно сразу интерпретировать. Без члена $-\sqrt{2} e v A_\mu \partial^\mu \xi$ в (3.6) можно было бы сделать вывод, что векторное поле имеет массу $\mu^2 = e^2 v^2$ и что ξ — безмассовое поле. Корректная процедура состоит в том, чтобы вычислить комбинированный пропагатор для полей A_μ и ξ , построить правила Фейнмана и найти полюса S -матрицы. Частично мы выполним эту процедуру в дальнейших лекциях; существует и более простой способ получения спектра частиц. Напомним, что лагранжиан (3.3) инвариантен относительно ло-

кальных калибровочных преобразований (3.4). Выберем функцию, определяющую калибровочное преобразование в виде $\xi(x)/v$. Тогда

$$\varphi \rightarrow \varphi' = \exp \{-i\xi(x)/v\} \varphi = (v + \eta)/\sqrt{2}, \quad (3.7a)$$

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \xi / ev. \quad (3.7b)$$

Поскольку \mathcal{L} инвариантна относительно этих преобразований, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu + ieA'_\mu)(v + \eta)] [(\partial^\mu - ieA'^\mu)(v + \eta)] - \frac{1}{2} \mu^2 (v + \eta)^2 - \\ & - \frac{1}{4} \lambda (v + \eta)^4 - \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $F'_{\mu\nu} = \partial_\mu A'_\nu - \partial_\nu A'_\mu$.

Выражение (3.8) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{4} F'_{\mu\nu} F'^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} e^2 v^2 A'_\mu A'^\mu + \frac{1}{2} e^2 A'^2_\mu \eta (2v + \eta) - \\ & - \frac{1}{2} \eta^2 (3\lambda v^2 + \mu^2) - \lambda v \eta^3 - \frac{1}{4} \lambda \eta^4. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В этой калибровке отсутствуют билинейные члены взаимодействия разных частиц, так что (затравочный) спектр находится просто из рассмотрения квадратичных членов. Имеется скалярный η -мезон с массой¹⁾ $3\lambda^2 v^2 + \mu^2$ (которая в нулевом порядке равна $-2\mu^2$), *массивный* векторный мезон A'_μ с массой ev и *нет* никакой частицы, соответствующей ξ . Действительно, ξ -поле вообще исчезло! Его "откалибровали".

Куда делось ξ ? Из (3.7b) видно, что ξ ответственно за продольную компоненту векторного поля в новой калибровке. Ясно, что число фактических состояний частиц осталось тем же самым, что было до переопределения полей по (3.5). Первоначально были два действительных скалярных поля и безмассовый фотон с двумя возможными поляризациями — это и есть корректный набор частиц для положительных μ^2 . Когда $\mu^2 < 0$, теория, как мы только что увидели, описывает одну скалярную частицу (одно состояние спиральности) и одну массивную векторную частицу (три состояния спиральности), так что полное число степеней свободы (в смысле частиц с определенной поляризацией) одинаково в обоих случаях.

В калибровке (3.9) \mathcal{L} имеет вид обычного лагранжиана теории, в котором отсутствуют билинейные члены взаимодействия разных

¹⁾ В квантовой теории поля масса η -мезона отличается, вообще говоря, от выражения $3\lambda^2 v^2 + \mu^2$ за счет радиационных поправок. — *Прим. перев.*

частиц, так что теория явно унитарна в каждом порядке теории возмущений. Эта калибровка часто называется унитарной калибровкой, или U-калибровкой. (U-калибровка "явно унитарна" в том смысле, что фиктивные частицы, чьи функции Грина имеют сингулярности, явно нарушающие унитарность, отсутствуют. Мы не имеем в виду, что унитарность S-матрицы или даже корректные правила Фейнмана очевидны в данной калибровке). Однако, поскольку в U-калибровке имеется массивный векторный мезон, пропагатор которого растет при больших k как $k_\mu k_\nu / m^2 k^2$, вместо того чтобы вести себя как $-(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2) / k^2$ (что характерно для безмассовых векторных полей), перенормируемость рассматриваемой модели в U-калибровке не очевидна.

В исходном лагранжиане (3.3) допустимы калибровочные преобразования полей (3.4), и необходимо выбрать условие типа $\partial^\mu A_\mu = 0$, которое фиксировало бы калибровку. В части II будет показано, что теория перенормируема в такой калибровке, которую мы назовем перенормируемой калибровкой, или R-калибровкой. В R-калибровке пропагаторы векторного и ξ -полей содержат нефизические полюса, которые должны сократиться во всех S-матричных элементах, поскольку они отсутствуют в U-калибровке. В R-калибровке нет явной унитарности модели.

В качестве неабелева примера рассмотрим группу $SU(2)$ со скалярными мезонами из триплетного представления. Поля преобразуются по правилу

$$\delta\varphi_i = -i \epsilon^j L_{jk}^i \varphi_k = \epsilon^j \epsilon^{ijk} \varphi_k.$$

Часть лагранжиана, содержащая φ , есть

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi_i + g \epsilon^{ijk} A_\mu^j \varphi_k) (\partial^\mu \varphi_i + g \epsilon^{ij'k'} A^{\mu j'} \varphi_{k'}) - V(\varphi^2), \quad (3.10)$$

где V представляет собой $SU(2)$ -инвариантный полином 4-й степени по φ .

Если минимум V находится в точке $\varphi = 0$, (3.10) представляет собой обычную, сохраняющую изоспин калибровочно-инвариантную теорию янг-миллсовского типа. Нас интересует случай спонтанного нарушения симметрии: если V имеет минимум в ненулевой точке, всегда можно выполнить изоспиновое вращение так, чтобы отличным от нуля вакуумным средним обладала третья компонента φ :

$$\langle \varphi \rangle_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v \end{pmatrix}.$$

Вакуум больше инвариантен относительно T_1 и T_2 , но T_3 остается хорошей симметрией: существует одно сохраняющееся квантовое число T_3 — электрический заряд.

Параметризуем φ , как в предыдущем разделе, именно

$$\varphi = \exp \left\{ (i/v) (\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2) \right\} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix} = \langle \varphi \rangle_0 + \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_1 \\ \eta \end{pmatrix} + \quad (3.11)$$

+ члены высших порядков.

Поля ξ_1 и ξ_2 — предполагаемые голдстоуновские бозоны, связанные с двумя нарушенными степенями свободы. Так как лагранжиан (3.10) инвариантен относительно локальных $SU(2)$ -преобразований, можно сделать следующее калибровочное преобразование:

$$\varphi' = \exp \left\{ -(i/v) (\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2) \right\} \varphi,$$

$$\begin{aligned} L \cdot A'_\mu &= \exp \left\{ -(i/v) (\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2) \right\} L \cdot A_\mu \exp \left\{ (i/v) (\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2) \right\} - \\ &- (i/g) \left[\partial_\mu \exp \left\{ -(i/v) (\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2) \right\} \right] \exp \left\{ (i/v) (\xi_1 L^1 + \xi_2 L^2) \right\}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Снова, поскольку $\varphi' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}$, поля ξ_1 и ξ_2 полностью исчезают из лагранжиана, когда он записан в новой калибровке:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \eta \partial^\mu \eta + \frac{1}{2} e^2 v^2 \varepsilon^{ij3} \varepsilon^{ij3} A^i_\mu A^\mu j^j - V[(v + \eta)^2] + \\ &+ \text{члены высших порядков} + \text{члены, не зависящие от } \varphi. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Член в (3.13), квадратичный по векторным полям, это

$$\frac{1}{2} M^2 [A^2_\mu A^{2\mu} + A^1_\mu A^{1\mu}], \quad (3.14)$$

где $M^2 = g^2 v^2$. Векторные мезоны, соответствующие генераторам нарушенной симметрии, приобрели массу $M = gv$. Так как симметрия, генерируемая T_3 , выживает, остается один безмассовый векторный мезон A^3_μ .

Общая структура спонтанно нарушенной калибровочной модели становится теперь ясной. Мы начинаем с лагранжиана \mathcal{L} , инвариантного относительно локальных калибровочных преобразований некоторой группы G . Имеется n скалярных полей, которые преобразуются по n -мерному представлению. Имеется N калибровочных мезонов A^α_μ .

Лагранжиан дается выражением

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^{\alpha}F^{\mu\nu\alpha} + \frac{1}{2}[(\partial_{\mu} - ig^{\alpha}L^{\alpha}A_{\mu}^{\alpha})\varphi \cdot (\partial^{\mu} - ig^{\beta}L^{\beta}A^{\mu\beta})\varphi] - V(\varphi) + \text{члены с другими полями.} \quad (3.15)$$

Здесь $F_{\mu\nu}^{\alpha}$ определены по (1.44), g^{α} не зависят от α для любой простой подгруппы G , $V(\varphi)$ — G -инвариантный полином по φ 4-го порядка с минимумом в точке $\varphi = v$.

Предположим, что нарушение симметрии оставляет вакуум инвариантным относительно M -мерной подгруппы S группы G . Имеется M генераторов L^{α} , удовлетворяющих условию $L^{\alpha}v = 0$, и $N - M$ генераторов L^{α} , для которых $L^{\alpha}v \neq 0$. В разд. 2 было показано, что $L^{\alpha}v$ образуют $(N - M)$ -мерное пространство и что в отсутствие калибровочных мезонов должно быть $N - M$ безмассовых скалярных частиц.

Мы можем параметризовать φ следующим образом:

$$\varphi = \exp[(i/v) \sum \xi_{\alpha} L^{\alpha}] (v + \eta). \quad (3.16)$$

Сумма берется по тем $N - M$ генераторам L^{α} , которые не обращают v в нуль. Вектор η содержит такое число независимых полей, которое совпадает с размерностью части n -мерного пространства представления, ортогональной ко всем $L^{\alpha}v$.

Теперь выполним следующее калибровочное преобразование:

$$\varphi' = \exp[-(i/v) \xi^{\alpha} L^{\alpha}] \varphi,$$

$$A_{\mu}^{\prime\gamma} L^{\gamma} = \exp[-(i/v) L^{\alpha} \xi^{\alpha}] \{ A_{\mu}^{\gamma} L^{\gamma} - \exp[(i/v) L^{\beta} \xi^{\beta}] (i/g) \partial_{\mu} \exp[-(i/v) L^{\beta} \xi^{\beta}] \} \exp[(i/v) L^{\alpha} \xi^{\alpha}]. \quad (3.17)$$

В новой калибровке \mathcal{L} зависит только от η_i и калибровочных полей $A_{\mu}^{\prime\alpha}$, $N - M$ из которых массивны.

Член в \mathcal{L} , описывающий массу векторных мезонов, имеет вид

$$\frac{1}{2} (g^{\alpha} L^{\alpha} v, g^{\beta} L^{\beta} v) A_{\mu}^{\alpha} A^{\mu\beta}. \quad (3.18)$$

Поскольку мы всегда можем ограничиться представлениями G в пространстве действительных функций (так что L , будучи эрмитовыми, антисимметричны), массовая матрица векторных мезонов

$$(M^2)^{\alpha,\beta} = g^{\alpha} g^{\beta} (L^{\alpha} v, L^{\beta} v) \quad (3.19)$$

(суммирование по α, β нет)

симметрична и положительно определена (α и β ограничены значениями, для которых $L^\alpha v \neq 0$). С точностью до констант связи g^α матрица $(M^2)^{\alpha\beta}$ совпадает с $A^{\alpha\beta}$, определенной в разд. 2.

Таким образом, $N - M$ голдстоуновских бозонов не являются физическими безмассовыми частицами, а поглощаются продольными компонентами $N - M$ массивных векторных бозонов. Действительно, как можно видеть из (3.17),

$$A'_\mu{}^\alpha = A_\mu{}^\alpha - (gv)^{-1} \partial_\mu \xi^\alpha + O(\xi^2).$$

Число независимых степеней свободы для данного импульса не меняется. Массы физических векторных мезонов даются собственными значениями (M^2) . M векторных мезонов остаются безмассовыми соответственно тому, что выживает M -мерная группа симметрии S .

Вейнберг предложил элегантное доказательство существования U -калибровки во всех случаях. В такой калибровке $\varphi'(x)$ не имеет компонент в подпространстве, образованном голдстоуновскими бозонами, которое, как мы уже знаем, образовано векторами $L^\alpha v$. Поэтому U -калибровка определяется условиями

$$(L^\alpha v, \varphi'(x)) = 0. \quad (3.20)$$

(Такое определение калибровки допустимо в той же степени, что и обычное определение калибровки с помощью наложения условий на векторные поля.) Следовательно, если $\varphi(x)$ — скалярное поле в любой калибровке, существует U -калибровка при условии, что существует локальное калибровочное преобразование $O(x) = \exp \{-i\xi^\alpha(x)L^\alpha\}$, так что

$$(L^\alpha v, O(x)\varphi(x)) = 0 \quad (3.21)$$

для всех α и всех x . Для любого x O может быть произвольным элементом представления группы G , определенной в x . Поскольку мы ограничились случаем представлений на вещественных функциях, O — ортогональная матрица. Рассмотрим скалярное произведение

$$(v, O\varphi). \quad (3.22)$$

Для фиксированного φ скалярное произведение (3.22) — действительное число, зависящее от O . Если группа Ли G (в n -мерном действительном представлении которой находится O) компактна, (3.22) отображает группу в компактную часть действительной прямой и поэтому имеет максимум и минимум. Пусть O_φ есть матрица O , дающая

экстремум (3.22). Для любого O малая вариация есть

$$\delta O = O - \exp \{-i\epsilon^\alpha L^\alpha\} O = -i\epsilon^\alpha L^\alpha O.$$

Поскольку O_φ дает экстремум (3.22), имеем

$$0 = \delta(v, O_\varphi)_{O=O_\varphi} = (v, \delta O_\varphi)_{O=O_\varphi} = -i\epsilon^\alpha (v, L^\alpha O_\varphi) = -i\epsilon^\alpha (L^\alpha v, O_\varphi). \quad (3.23)$$

Так как ϵ^α произвольны, получаем

$$(L^\alpha v, O_\varphi) = 0$$

для всех α , поэтому $\varphi' = O_\varphi$ удовлетворяет унитарному калибровочному условию. Таким образом, U-калибровка всегда существует. Она может быть получена из произвольного φ с помощью калибровочного преобразования O , отвечающего экстремуму выражения (v, O_φ) в каждой точке x . Если G односвязна, действительные числа (v, O_φ) образуют компактный сегмент действительной прямой и поэтому имеют два экстремума — максимум и минимум. В общем случае, если (φ', v) — один экстремум, то $(-\varphi', v)$ — другой экстремум, и физика в обеих калибровках одна и та же.

Природа, вероятно, выбирает $M=1$; единственный закон сохранения, связанный с безмассовым векторным мезоном, есть закон сохранения заряда. Тем не менее поучительно рассмотреть более общий случай.

В следующем разделе будет рассмотрено применение этих идей к моделям слабых и электромагнитных взаимодействий.

ЛИТЕРАТУРА

Механизм Хиггса в рамках релятивистской теории поля был впервые обсужден в работах:

1. *Higgs P.W.*, Phys. Rev. Lett., **12**, 132 (1964).
2. *Englert F., Brout R.*, Phys. Rev. Lett. **13**, 321 (1964).
3. *Higgs P.W.*, Phys. Rev. Lett., **13**, 508 (1964).
4. *Guralnik G.S., Hagen C.R., Kibble T.W.B.*, Phys. Rev. Lett. **13**, 585 (1964).
5. *Higgs P.W.*, Phys. Rev., **145**, 1156 (1966).

Теоретико-групповое описание этого явления впервые обсуждалось в работе:

6. *Kibble T.W.*, Phys. Rev., **155**, 1554 (1967).

Доказательство существования U-калибровки близко следует работе:
7. Weinberg S., General Theory of Broken Local Symmetries, Phys. Rev., D7, 1068 (1973).

4. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В последующих разделах мы обсудим класс моделей слабых и электромагнитных взаимодействий, в котором используется идея спонтанно нарушенной симметрии. Некоторое ограничение на эти модели состоит в том, что они должны воспроизводить известную феноменологию слабых взаимодействий. В настоящем разделе мы дадим обзор некоторых важных особенностей моделей.

Мы используем обозначения, принятые в книге Бьёркена и Дрелла. Дираковские γ -матрицы есть

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \gamma = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma \\ \sigma & 0 \end{pmatrix}, \gamma_5 = i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

γ^μ антикоммутируют по правилу $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$ и $\{\gamma^\mu, \gamma_5\} = 0$. Спинорная матрица $\sigma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & \sigma \end{pmatrix}$. Нетрудно видеть, что $\sigma^i = (i/2)\epsilon^{ijk}\gamma^j\gamma^k$.

Лагранжиан свободного дираковского поля массы m таков:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(x) (i\gamma \cdot \partial - m) \psi(x), \quad (4.1)$$

он приводит к уравнению движения [см. (1.3)]

$$[i\gamma \cdot \partial - m] \psi = 0. \quad (4.2)$$

Большую часть информации о слабых взаимодействиях дает изучение процессов спонтанного распада, в которых передаваемые энергии и импульсы малы по сравнению с теми высокими энергиями, которые используются для изучения сильных и электромагнитных взаимодействий в ускорителях частиц. Поэтому нет причин ожидать, что феноменологическое описание известных распадов будет корректно в области более высоких энергий; однако более полная теория должна согласовываться с тем, что мы знаем в случае низких энергий. Единственными известными лептонами являются мюон, электрон и нейтрино. Все известные экспериментальные результаты совместны с сохранением лептонного числа, если приписать "лептонное число" +1 частицам μ^-, e^- и ν и -1 частицам μ^+, e^+ и $\bar{\nu}$. Кроме того, мы знаем, что отсутствуют распады $\mu^- \rightarrow e^- + \gamma$ или $\mu^- \rightarrow e^- + e^- + e^+$,

хотя лептонное число в них сохраняется. Вероятно, существует также сохраняющееся "мюонное число", что запрещает эти процессы. Нейтрино, соответствующее мюону, отличается от нейтрино, соответствующего электрону. Экспериментально не наблюдалось, чтобы нейтрино, родившиеся при распаде $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}$, рождали электроны в процессе обратного β -распада $\nu + p \rightarrow p + e^-$. Поэтому мы полагаем, что существуют два дублета лептонов (μ^-, ν_μ) и (e^-, ν_e), которые различаются неким квантовым числом. Возможно, что мюонное квантовое число мультипликативно (т.е. типа четности), однако в настоящее время нет каких-либо особых свидетельств в пользу этой непривлекательной идеи.

Масса мюона равна $105,6594 \pm 0,0004$ МэВ. Время его жизни $(2,994 \pm 0,0006) \cdot 10^{-6}$ с, и мюон почти всегда распадается на $e^- + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$. Другие моды, если они существуют, очень редки. Масса электрона равна $(0,511004 \pm 0,000002)$ МэВ, и его время жизни составляет по крайней мере $6 \cdot 10^{28}$ с. Насколько известно, мюон и электрон тождественны во всех своих свойствах, кроме масс, и большая разность их масс является главной загадкой. Вероятно, ключ к разгадке дает эмпирическое соотношение

$$m_e = \frac{1}{2} \alpha m_\mu, \quad (4.3)$$

которое выполняется с точностью лучше одного процента.

Нейтрино выглядят как безмассовые частицы, хотя экспериментально невозможно получить такие же фантастические верхние пределы на их массы, какой известен для фотона. Электронное нейтрино определено легче $6 \cdot 10^{-5}$ МэВ, но мюонное нейтрино может иметь массу порядка 1 МэВ или более. Тем не менее, как мы увидим ниже, предположение о том, что оба нейтрино точно безмассовые, весьма привлекательно и согласуется с экспериментом.

Важно, что в калибровочных теориях фотон является строго безмассовым. Из того факта, что магнитное поле Земли было обнаружено на расстоянии в десятки тысяч миль от нее, следует вывод, что комптоновская длина волны фотона должна быть такого же порядка, что соответствует массе, меньшей 10^{-21} МэВ.

Если нейтрино имеет конечную массу, оно должно появляться в обоих состояниях спиральности, поскольку состояние с положительной спиральностью может быть преобразовано в состояние с отрицательной спиральностью с помощью преобразования Лоренца. Если

нейтрино строго безмассовое, любое из двух состояний спиральности само по себе является представлением группы Пуанкаре, и только сохранение четности приводит к необходимости обеих спиральностей. Формально легко видеть, что относительно преобразования $\psi \rightarrow -\gamma_5 \psi$ кинетический член в (4.1) инвариантен, чего нельзя сказать о массовом члене. Если масса равна нулю, свободный лагранжиан инвариантен относительно этого преобразования. Член со взаимодействием в лагранжиане будет инвариантным при условии, что нейтрино появляется только в комбинации $(1 - \gamma_5)\psi$.

Введем обозначения, которые будут полезны позже. При действии на любое спинорное поле $P_L = (1 - \gamma_5)/2$ и $P_R = (1 + \gamma_5)/2$. P_L и P_R являются проекционными операторами в том смысле, что $P_L^2 = P_L$, $P_R^2 = P_R$, $P_L P_R = P_R P_L = 0$, $P_L + P_R = 1$. Любое спинорное поле ψ можно разложить с помощью P_L и P_R :

$$\psi = \psi_L + \psi_R = P_L \psi + P_R \psi = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\psi + \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\psi. \quad (4.4)$$

Тогда свободный лагранжиан принимает вид

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}_L \gamma \cdot \partial \psi_L + i\bar{\psi}_R \gamma \cdot \partial \psi_R - m [\bar{\psi}_L \psi_R + \bar{\psi}_R \psi_L]. \quad (4.5)$$

Если $m \neq 0$, разложение (4.4) лоренц-неинвариантно. Если $m = 0$, ψ_R — решение (4.2) для частицы со спином, направленным вдоль импульса, ψ_L — решение для частицы с противоположным направлением спина. Оба решения имеют соответственно положительную и отрицательную спиральности. Эти результаты легко получаются из безмассового уравнения Дирака

$$(\gamma^0 - \gamma \cdot \hat{n})\psi = 0,$$

где \hat{n} есть единичный вектор в направлении импульса нейтрино, а также из определения γ_5 и спинового оператора σ .

Спектры слабых распадов, для которых имеется большая часть экспериментальных данных, именно $p \rightarrow p + \bar{e} + \bar{\nu}_e$, $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$ и $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$, плюс большое число ядерных распадов не дают никаких указаний на существование правосторонних (положительной спиральности) нейтрино или левосторонних (отрицательной спиральности) антинейтрино, что возможно только в том случае, если нейтрино строго безмассовое.

Наконец, нетрудно показать, что если в лагранжиане появляется только левостороннее поле нейтрино $\psi_L(\nu)$, нейтрино остается без-

массовым во всех порядках теории возмущений. Относительно операции $\psi(x) \rightarrow -\gamma_5 \psi(x)$ имеем $\psi^\dagger(x) \rightarrow -\psi^\dagger(x) \gamma_5$, и поэтому $\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x) \gamma_5$. Эти правила справедливы для взаимодействующих полей. Поэтому пропагатор нейтрино (с учетом взаимодействия) имеет вид

$$\begin{aligned} S(p) &= \int d^4x \exp(ipx) \langle | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | \rangle = \\ &= -\int d^4x \exp(ipx) \gamma_5 \langle | T(\psi(x) \bar{\psi}(0)) | \rangle \gamma_5. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Следовательно,

$$S(p) \gamma_5 = -\gamma_5 S(p)$$

и

$$\gamma_5 S^{-1}(p) = -S^{-1}(p) \gamma_5. \quad (4.7)$$

В общем случае $S^{-1}(p) = \gamma \cdot p + \delta m + O(\gamma \cdot p)^2$. Из (4.7) следует, что член δm равен нулю, и поэтому $S^{-1}(0) = 0$; точный пропагатор $S(p)$ имеет полюс при $\gamma \cdot p = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

Вид γ -матриц Дирака и спиноров, который мы используем, взят из книги:

1. *Bjorken J. D., Drell S. D., Relativistic Quantum Mechanics, McGraw-Hill, New York, 1964, Appendix A, p. 281.*

Параметры частиц, приведенные в тексте, взяты из:

2. *Particle Data Group, Reviews of Particle Properties, Phys. Lett., 39, 1 (1972).*

Оценку верхней границы массы фотона см.:

3. *Goldhaber A. S., Nieto M. M., Phys. Rev. Lett., 21, 567 (1968).*

По вопросам, обсуждающимся в лекции, см. также прекрасный обзор:

4. *Lee T. D., Wu C. S., Weak Interactions, Ann. Rev. Nucl. Sci., 15, 381 (1965).*

5. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ СЛАБЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ (ПРОДОЛЖЕНИЕ)

Идея о том, что все известные слабые распады можно описать локальным четырехфермионным взаимодействием, принадлежит Ферми, и такое взаимодействие называется взаимодействием Ферми.

После открытия несохранения четности в слабых распадах Фейнман и Гелл-Манн предположили, что корректная форма записи взаимодействия Ферми такова:

$$G J_{\mu}(x) J^{\mu \dagger}(x) / \sqrt{2}. \quad (5.1)$$

Здесь $J_{\mu}(x)$ — заряженный ток, имеющий лептонную и адронную части:

$$J_{\mu}(x) = L_{\mu}(x) + h_{\mu}(x). \quad (5.2)$$

Лептонная часть тока

$$L_{\mu}(x) = \bar{\psi}_e(x) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_e}(x) + \bar{\psi}_{\mu}(x) \gamma_{\mu} (1 - \gamma_5) \psi_{\nu_{\mu}}(x). \quad (5.3)$$

С помощью (5.2) и (5.3) можно вычислить спектр μ -распада, который, по-видимому, согласуется с экспериментом. Ширина μ -распада равна

$$\Gamma(\mu^{-} \rightarrow e^{-} + \bar{\nu}_e + \nu_{\mu}) = G^2 m_{\mu}^5 / 192 \pi^3. \quad (5.4)$$

Из (5.4) и известной ширины μ -распада можно вычислить фермиевскую константу связи G , которая появляется в (5.1). Напомним простое выражение

$$G = 1,01 \cdot 10^{-5} m_p^{-2}, \quad (5.5)$$

где m_p — масса протона.

Лептонный ток можно переписать в виде

$$L^{\mu} = 2 \bar{\psi}_L(e) \gamma^{\mu} \psi_L(\nu_e) + 2 \bar{\psi}_L(\mu) \gamma^{\mu} \psi_L(\nu_{\mu}) \quad (5.6)$$

Это есть чисто левосторонний ток. Определим лептонный левосторонний изоспин, группируя $(\nu_e)_L$ в дублет $\chi_L(e)$ и $(\nu_{\mu})_L$ — в дублет $\chi_L(\mu)$. Тогда

$$L^{\mu} = 2 [\chi_L^{\dagger}(e) \gamma^0 \gamma^{\mu} \tau^{-} \chi_L(e) + \chi_L^{\dagger}(\mu) \gamma^0 \gamma^{\mu} \tau^{-} \chi_L(\mu)], \quad (5.7)$$

где

$$\tau^{-} = \frac{1}{2} [\tau^1 - i \tau^2] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Определим "левосторонний ток изоспина" лептонов

$$j^i_{L\mu}(x) = \frac{1}{2} [\chi_L^{\dagger}(e) \gamma^0 \gamma^{\mu} \tau^i \chi_L(e) + \chi_L^{\dagger}(\mu) \gamma^0 \gamma^{\mu} \tau^i \chi_L(\mu)] \quad (5.8)$$

и соответствующие заряды

$$T^i_L = \int j^i_{L0}(x) d^3x. \quad (5.9)$$

T_L^i генерируют алгебру $SU(2)_L$:

$$[T_L^i, T_L^j] = i\epsilon^{ijk} T_L^k. \quad (5.10)$$

Удобно ввести величины

$$T_L^\pm = [T_L^1 \pm iT_L^2] / \sqrt{2}. \quad (5.11)$$

Тогда

$$[T_L^3, T_L^\pm] = \pm T_L^\pm, [T_L^+ T_L^-] = T_L^3. \quad (5.12)$$

Аналогичным образом определяются токи $j_L^{\mu\pm}$. Очевидно, что

$$l^\mu = 2\sqrt{2} j_L^{\mu-}.$$

Лептонная часть слабых взаимодействий в (5.1) инвариантна относительно $SU(2)_L$, поскольку отсутствует член $j_L^3 j_L^3$. Вопрос о существовании и амплитуде нейтрального лептонного тока с точки зрения эксперимента остается открытым.

Распад нейтрона $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ хорошо описывается на основе предположения о том, что адронный ток h_μ в (5.2) имеет член

$$\bar{\Psi}(n) \gamma_\mu (g_V - g_A \gamma_5) \Psi(p). \quad (5.13)$$

Векторная константа удивительно близка к 1, тогда как g_A примерно равна 1,24. Объяснение того, что $g_V \approx 1$, впервые предложили Фейнман и Гелл-Манн, а также Герштейн и Зельдович. Они высказали гипотезу, что сохраняющая странность часть h_μ имеет вид

$$(V_\mu^1 - iV_\mu^2) - (A_\mu^1 - iA_\mu^2), \quad (5.14)$$

где V_μ^i — векторный ток и A_μ^i — аксиальный ток, и что V_μ^1 и V_μ^2 являются первой и второй компонентами изоспинового тока. То есть, что величины

$$T^i = \int V_0^i(x) d^3x$$

есть изоспиновые генераторы, сохраняемые сильными взаимодействиями. Это правило называется гипотезой сохраняющегося векторного тока (CVC). Так как T^i генерируют группу Ли, для которой протон и нейтрон образуют базис неприводимого представления, их матричные элементы равны соответствующим коэффициентам Клебша — Гордана, причем значение g_V предсказывается равным 1.

Важно знать, действительно ли g_V равно точно 1. Измеренные ширины распадов как нейтрона, так и мюона включают электромагнитные поправки к членам, полученным простой заменой полей в (5.13) свободными волновыми функциями. Радиационные поправки к μ -распаду были вычислены давно, и они оказались конечными. Поправки к ширине распада равны около 4%. Радиационные поправки к β -распаду логарифмически расходятся. Полагая импульсы обрезания равными нескольким гигаэлектронвольтам, можно заключить, что даже с учетом упомянутых поправок остается расхождение с простым предсказанием CVC, где $g_V = 1$.

Вычисления неудовлетворительны, поскольку радиационные поправки к распаду нейтрона включают поправки из-за сильных взаимодействий и поскольку векторную часть и аксиально-векторную трудно отличить экспериментально. Последняя трудность преодолевается с помощью изучения β -распадов частиц спина 0, в которые дает вклад только векторный ток. Ширина распада, предсказанная для процесса $\pi^+ \rightarrow \pi^0 + e^+ + \nu$, находится в хорошем согласии с гипотезой CVC, но так как парциальная ширина этой моды распада относительно главной моды $\pi^+ \rightarrow \mu^+ + \nu$, равна 10^{-8} , то ошибки составляют около 7%. Они слишком велики, чтобы начинать беспокоиться о радиационных поправках. Распады ядер спина 0 являются более подходящими тестами, поскольку их ширины можно точно измерить, однако соответствующие расчеты затруднены из-за усложнений, связанных с физикой ядра. Аккуратно оценки были выполнены для девяти ядер малой массы и спина 0. Результаты выражаются только через два параметра: импульс обрезания Λ и зависящее от выбранной модели число \bar{Q} (в модели кварков $\bar{Q} = 1/6$). В широкой области Λ и \bar{Q} в пределах экспериментальной неопределенности g_V одинаково для всех девяти ядер. При $\bar{Q} = 1/6$ и $\Lambda = 30$ ГэВ сравнение с μ -распадом дает

$$g_V = 0,976 = \cos(0,22). \quad (5.15)$$

$g_V = 1$ не получается ни при каких правдоподобных значениях параметров. Таким образом, все, что мы знаем о нестранных β -распадах, согласуется с формой h_{μ} , содержащей член

$$g_V[(V_{\mu}^1 - iV_{\mu}^2) - (A_{\mu}^1 - iA_{\mu}^2)] \quad (5.16)$$

с $(1 - g_V) \sim 0,02$. Так как $g_V \neq 1$, эти векторные токи сами по себе не генерируют $SU(2)$ подобно лептонным токам.

Распады странных адронов совместны с гипотезой о том, что выражение для h_μ содержит член, в который входят изменяющие странность векторный и аксиальный токи. Поскольку распады типа $\Xi^0 \rightarrow p + e + \bar{\nu}$ не наблюдались, следует сделать вывод, что данный член изменяет гиперзаряд не более чем на 1. Из-за отсутствия распадов типа $\Sigma^+ \rightarrow p + e^+ + \nu$ или $\Xi^0 \rightarrow \Sigma^- + e^+ + \nu$ мы заключаем, что меняющий странность ток изменяет гиперзаряд (странность) и электрический заряд на одну и ту же величину, что известно как правило $\Delta S = \Delta Q$. Отсюда следует, что T^3 меняется всегда на $\pm 1/2$, и можно думать, что этот ток имеет $T = 1/2$.

Запишем h_μ как сумму $\Delta S = 0$ и $\Delta S = 1$ частей:

$$h_\mu = g_V h_\mu^{(0)} + g_S h_\mu^{(1)} \quad (5.17)$$

$h_\mu^{(0)}$ имеет форму (5.14) и является компонентой изотопического триплета. Естественно обобщить эту идею и на случай $SU(3)$ и предположить, что $h_\mu^{(1)}$ есть заряженный ($\Delta S = \Delta Q$, $T = 1/2$) член октета токов, т.е. он преобразуется, как K^- . Сравнение большого числа распадов дает удивительное подтверждение справедливости этой гипотезы. Следовательно, можно предположить (не входя в противоречие с экспериментом), что

$$h_\mu^{(1)} = (V_\mu^4 - iV_\mu^5) - (A_\mu^4 - iA_\mu^5), \quad (5.18)$$

где

$$F^i = \int V_0^i(x) d^3x \quad (5.19)$$

есть генераторы группы $SU(3)$ и $A_\mu^i(x)$ — октет аксиальных токов.

Хотя $SU(3)$ не является точной симметрией, матричные элементы токов тем не менее можно оценить. Результаты оценки показывают, что (5.18) не противоречит эксперименту, но g_S безнадежно далеко от 1. Наилучшая подгонка дает

$$g_S/g_V \sim 0,25. \quad (5.20)$$

В 1963 г. Кабиббо заметил, что в пределах ошибки эксперимента

$$g_S^2 + g_V^2 = 1. \quad (5.21)$$

Следовательно,

$$h_\mu = \cos \theta h_\mu^{(0)} + \sin \theta h_\mu^{(1)} = \exp(2i\theta F^7) h_\mu^{(0)} \exp(-2i\theta F^7), \quad (5.22)$$

где F^7 — седьмой генератор группы $SU(3)$.

Этим способом можно восстановить универсальность и понять причину отличия g_V от 1. То есть, если (5.22) правильно, тогда h_μ есть правильно нормированная компонента мультиплетта токов, которые генерируют группу $SU(2)$. θ называется углом Кабиббо; он примерно равен 0,22–0,25. Его происхождение не известно, и было бы очень интересно иметь правдоподобное объяснение.

Существуют ли какие-либо нейтральные токи? Нейтральный лептонный ток обсуждался в разд. 4. Существование заряженных токов, не меняющих странность [см. (5.22)], естественным образом наводит на мысль о существовании также и нейтральных токов с сохранением странности. С точки зрения эксперимента вопрос о существовании таких токов пока открыт; к нему мы вернемся в разд. 8.

Вычисляя коммутатор $h_\mu^{(1)}$ с T_L^+ (который представляет собой заряд, соответствующий $h_\mu^{(0)\dagger}$), получаем нейтральный ток с изменением странности, преобразующийся относительно $SU(3)$ как K^0 . Участие этих токов в лептонных слабых взаимодействиях экспериментально не подтверждено. Распады типа $\Sigma^+ \rightarrow p + e^+ + e^-$ никогда не наблюдались. Кроме того, экспериментальные верхние пределы на парциальные ширины распадов $K^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$ или $K^+ \rightarrow \pi^+ + \nu + \bar{\nu}$ порядка 10^{-8} . Любая модель слабых распадов должна объяснять подавление или отсутствие изменяющих странность нейтральных токов.

Отметим, что в (5.18) молчаливо предполагалось, что $h_\mu^{(1)}$ — левосторонний ток типа $h_\mu^{(0)}$. Если бы на самом деле этот ток был правосторонним ($V + A$ вместо $V - A$), его нужно было бы коммутировать с T_L^+ и никакого изменяющего странность нейтрального тока не существовало бы. Эта идея время от времени предлагалась, но, по-видимому, она противоречит эксперименту.

ЛИТЕРАТУРА

- Идеи CVC- и $V - A$ -взаимодействий были высказаны в статьях:
1. Feynman R.P., Gell-Mann M., Phys. Rev., **109**, 193 (1958).
 2. Герштейн С.С., Зельдович Я.Б., ЖЭТФ, **29**, 698 (1955).
 3. Sudarshan E. C. G., Marshak R. E., в сборнике: Proc. Padua Conf. on Mesons and Recently Discovered Particles, 1957.

Ссылки [1] и [3], а также ссылки на другие важные работы по слабым взаимодействиям, опубликованные в период 1956–1962 гг., содержатся в сборнике:

4. *Kabir P. K. (ed.)*, *The Development of Weak Interaction Theory*, Gordon and Breach, New York, 1963.

Для быстрого изучения слабых взаимодействий см., например:

5. *Bjorken J. D., Drell S. D.*, *Relativistic Quantum Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1964, secs. 10.10–10.17.

6. *Gasiorowicz S.*, *Elementary Particle Physics*, John Wiley and Sons, New-York, 1966, ch. 29–34. (Имеется перевод: *С. Газиорович*, Физика элементарных частиц, изд-во "Наука", М., 1969.) Радиационные поправки к μ -распаду обсуждались в статье:

7. *Behrends R. E., Finkelstein R. J., Sirlin A.*, *Phys. Rev.*, **101**, 866 (1956).

Радиационные поправки к β -распаду рассмотрены в работах:

8. *Kinoshita T., Sirlin A.*, *Phys. Rev.*, **113**, 1452 (1959).

9. *Berman S. M., Sirlin A.*, *Ann. Phys. (N.Y.)*, **20**, 20 (1962); в [9] также в цитированных ссылках.

О теории радиационных поправок к β -распадам пионов и ядер спина 0 см.:

10. *Abers E., Dicus D., Norton R., Quinn H. R.*, *Phys. Rev.*, **167**, 1461 (1968).

11. *Dicus D., Norton R.*, *Phys. Rev.*, **D 1**, 1360 (1970).

12. *Beg M. A. B., Bernstein J., Sirlin A.*, *Phys. Rev.* **6**, 2597 (1972).
Теория Кабиббо предложена в статье:

13. *Cabibbo N.*, *Phys. Rev. Lett.*, **10**, 531 (1963).

Последний обзор по теории Кабиббо как с теоретической, так и с экспериментальной точки зрения опубликован в:

14. *Chounet L.-M., Gaillard J.-M., Gaillard M. K.*, *Leptonic Decays of Hadrons, Physics Reports*, **4C**, 199 (1972).

Эти авторы приходят к выводу, что имеющиеся данные о β -распаде Λ говорят скорее в пользу $V-A$, чем $V+A$ -варианта для тока с изменением странности.

6. УНИТАРНЫЕ ПРЕДЕЛЫ, W-МЕЗОНЫ, РСАС

В заключение нашего обзора слабых взаимодействий рассмотрим следующие вопросы: унитарный предел, W-мезоны, РСАС.

Хотя (5.1) адекватно описывает распады, оно не может привести к полной теории. При описании рассеяния через взаимодействие Ферми (5.1) справедливость борновского приближения должна нарушиться при некоторой энергии, поскольку амплитуда не может быть строго

вещественной. В отличие от электродинамики взаимодействие Ферми приводит к неперенормируемой теории, поэтому соответствующие поправки высших порядков вычислить невозможно.

Для любого процесса рассеяния лептонов сечение не пропорционально массе лептона. Единственный другой подходящий размерный параметр есть G . Поскольку сечение пропорционально G^2 , по соображениям размерности в пренебрежении массой лептонов оно растет как

$$\sigma \sim G^2 s. \quad (6.1)$$

Из-за локальности взаимодействия (5.1) сечение содержит одну парциальную волну, поэтому имеется унитарный предел

$$\sigma \sim 1/s, \quad (6.2)$$

который нарушается вследствие (6.1) при $Gs \sim 1$.

Например, рассмотрим процесс $\nu_e + e^- \rightarrow \bar{\nu}_e + e^-$. В пренебрежении массой электрона усредненное по спинам сечение равно

$$\bar{\sigma} = G^2 s / 3\pi. \quad (6.3)$$

Поскольку электрон, взаимодействующий с нейтрино, в рассматриваемом пределе левосторонний, а $\bar{\nu}_e$ правостороннее, полный угловой момент вдоль направления движения в системе центра масс равен 1, так что спин должен быть 1, а не 0. Следовательно, если можно пренебречь массой электрона m_e , рассеяние происходит в состоянии со спином 1. Из разложения Якоба – Вика амплитуды рассеяния в представлении спиральности имеем

$$T_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1}(s, \theta) = \pi^{-1} \sum_j (2j+1) t_{\mu_4 \mu_3, \mu_2 \mu_1}^j(s) d_{(\mu_1 - \mu_2), (\mu_3 - \mu_4)}^j(\theta), \quad (6.4)$$

где μ_i – спиральности четырех частиц, d^j есть j -мерное представление группы вращений около оси y и t^j – парциальная волна, нормированная условием $\text{Im } t^j = (q/W) |t^j|^2$ (q и W соответственно есть импульс и \sqrt{s} в системе центра масс; $W \approx 2q$). Поскольку (5.1) представляет точечное взаимодействие, орбитальный момент равен нулю и спин равен 1, так что в сумму (6.4) дает вклад только член с $j = 1$. Для каждой частицы существует только одно состояние спиральности, поэтому

$$T_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}} = 3\pi^{-1} t_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^1 d^1(\theta) = \frac{1}{2} \pi^{-1} t_{\frac{1}{2} - \frac{1}{2}; \frac{1}{2} - \frac{1}{2}}^1 (1 + \cos \theta).$$

Из требования унитарности следует, что $|t^1|^2$ ограничен значением 2.

Поэтому в направлении вперед имеем

$$|\operatorname{Im} T(s, 0)| < 6\pi^{-1},$$

и из оптической теоремы

$$\sigma = (4\pi^2/gW) \operatorname{Im} T(s, 0) \leq 48\pi/s.$$

Усредненное по спинам сечение включает оба состояния спиральности электрона, так что

$$\bar{\sigma} = \frac{1}{2}\sigma \leq 24\pi/s. \quad (6.5)$$

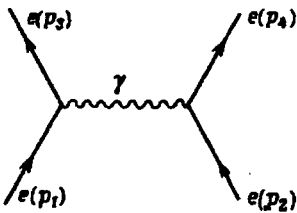
Сравнение (6.3) с (6.5) показывает, что (6.3) нарушает унитарность при

$$G^2 s^2 = 72\pi^2 \text{ или } s = (\pi/G)\sqrt{72} = 2,7 \cdot 10^6 m_p^2 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ ГэВ}^2. \quad (6.6)$$

Наименьший из таких пределов получается из рассмотрения процесса $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$. $(V - A)$ -спиновая волновая функция антисимметрична, так что в этом процессе имеется только $j = 0$. Так как t^0 для этой амплитуды является недиагональным матричным элементом $(W/g)\{\exp(2i\delta) - 1\}/2i$, то $|t^0| < 1$. Полное сечение процесса $\nu_\mu + e^- \rightarrow \nu_e + \mu^-$ равно

$$\sigma = (\pi^2/s) \int |T|^2 d\Omega < 4\pi/s, \quad (6.7)$$

и усредненное по спинам сечение есть $\bar{\sigma} = 2\pi/s$. Прямое вычисление дает $\bar{\sigma} = G^2 s/\pi$, так что результат, полученный в борновском приближении, становится равным унитарному пределу при $s = \pi\sqrt{2/G} = 4,2 \cdot 10^5 \text{ ГэВ}^2$.



Фиг. 6.1. Диаграмма обмена фотоном в электрон-электронном рассеянии.

Из всего сказанного следует, что выбор описания слабых распадов лептонов в форме (5.1) приводит к нарушению унитарного предела при полной энергии в системе центра масс около 700 ГэВ.

Известная модификация (5.1) получается на основе аналогии между (5.1) и вторым порядком электромагнитного взаимодействия. Амплитуда электрон-электронного рассеяния вычисляется с помощью фейнмановской диаграммы (фиг. 6.1).

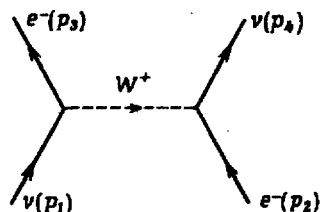
Вклад диаграммы на фиг. 6.1 в амплитуду T составляет

$$-(ie^2/2\pi^2) \bar{u}(p_3)\gamma^\mu u(p_1)g_{\mu\nu}\bar{u}(p_4)\gamma^\nu u(p_2)k^2; \quad (6.8)$$

здесь спиноры нормированы условием $u^\dagger u = E$, k — переданный импульс. Так же как и в (5.1), числитель имеет форму ток \times ток. Введем заряженный векторный мезон W_μ , взаимодействие которого со слабым током (5.2) имеет вид

$$\mathcal{L}_I = g_W [J_\mu W^\mu + \text{э.с.}] \quad (6.9)$$

Фиг. 6.2. Диаграмма W -обмена в упругом $e\nu$ -рассеянии.



W^μ отрицательно заряжен. Тогда реакция $\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$ описывается диаграммой на фиг. 6.2:

$$(ig_W^2/2\pi^2)\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma^\nu(1-\gamma_5)u(p_2)[g_{\mu\nu}-(k_\mu k_\nu/M_W^2)]/(k^2-M_W^2). \quad (6.10)$$

В теории Ферми (5.1) амплитуда реакции $\nu + e^- \rightarrow \nu + e^-$ равна

$$(iG/2\sqrt{2\pi^2})\bar{u}(p_3)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(p_1)\bar{u}(p_4)\gamma^\nu(1-\gamma_5)u(p_2)g_{\mu\nu}. \quad (6.11)$$

При малых k (6.11) и (6.10) совпадают при условии

$$g_W^2/M_W^2 = G/\sqrt{2}. \quad (6.12)$$

С помощью уравнения Дирака $\gamma \cdot k$ в (6.10) можно заменить на m_e , так что второй член в пропагаторе растет не быстрее первого. По сравнению с теорией Ферми амплитуда содержит множитель $1/k^2$, который обеспечивает подавление процесса и устраняет явное противоречие с унитарностью. Тем не менее теория неперенормируема, что легко увидеть, вычислив амплитуду реакции $\nu + \bar{\nu} \rightarrow W^+ + W^-$. В самом деле, если перенормируемая теория построена с помощью связи W -мезонов с заряженными токами, теория должна содержать также дополнительные частицы, которые сокращали бы расходимости в диаграммах, содержащих только W^\pm -мезоны.

Все модели, о которых мы будем говорить, содержат заряженные W -мезоны, генерирующие слабые взаимодействия. Из (6.12) следует, что G — положительное число. В принципе знак G можно найти, рассматривая нарушающую четность интерференцию слабого и электромагнитного или сильного взаимодействий, например в процессах $p + p \rightarrow p + n$ или $e^+ + e^- \rightarrow \mu^+ + \mu^-$.

Радиационные поправки к μ - и β -распадам в W -мезонных теориях неопределенны и зависят от метода вычислений. Если принять ξ -предельную процедуру Ли и Янга, тогда отношение ширины μ - и β -распадов конечно. Для массы W больше 2 ГэВ получается $1 - g_V > 0,024$.

В заключение упомянем об успехе идеи о приближенной $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ -инвариантности сильных взаимодействий. Генераторами группы являются T_L^i (см. выше), заряженные компоненты которых выражаются через слабые токи, и T_R^i , построенные по типу T_L^i с заменой $V - A$ на $V + A$. Таким образом, для нуклонов

$$\begin{aligned} T_L^i &= \int d^3x \bar{\psi}(x) (\tau^i/2) [(1 - \gamma_5)/2] \psi(x), \\ T_R^i &= \int d^3x \bar{\psi}(x) (\tau^i/2) [(1 + \gamma_5)/2] \psi(x). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Из T_L^i и T_R^i можно построить генераторы изотопического спина

$$T^i = T_L^i + T_R^i \quad (6.14)$$

и аксиальные заряды

$$T_5^i = T_R^i - T_L^i. \quad (6.15)$$

Групповая алгебра:

$$[T_{L,R}^i, T_{L,R}^j] = i\epsilon^{ijk} T_{L,R}^k, \quad (6.16)$$

$$[T_L^i, T_R^j] = 0$$

или

$$\begin{aligned} [T^i, T^j] &= i\epsilon^{ijk} T^k, \\ [T^i, T_5^j] &= i\epsilon^{ijk} T_5^k, \\ [T_5^i, T_5^j] &= i\epsilon^{ijk} T^k. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Заряды T_5^i являются пространственными интегралами временных компонент аксиальных токов.

Гипотеза РСАС (гипотеза частично сохраняющегося аксиального тока) состоит в том, что группа $SU(2)_L \otimes SU(2)_R$ описывает при-

ближенную симметрию сильных взаимодействий, реализованную в голдстоуновской моде, и в том, что пионы представляют собой голдстоуновские бозоны в пределе точной симметрии, а их массы — меру нарушения симметрии. Таким образом, лагранжева плотность имеет вид

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{СИМ}} + \epsilon \mathcal{L}', \quad (6.18)$$

где ϵ "мало", порядка m_π^2/m_p^2 , и $\mathcal{L}_{\text{СИМ}}$ инвариантна относительно группы симметрии.

Матричный элемент аксиального тока $A_\mu^i (= j_{R\mu}^i - j_{L\mu}^i)$ между вакуумом и однопионным состоянием

$$\langle | A_\mu^i(x) | \pi^j(p) \rangle = i F_\pi (2\pi)^{-3/2} p_\mu \delta_{ij} \frac{\exp(-ipx)}{\sqrt{2p^0}}. \quad (6.19)$$

Форма (6.19) следует с точностью до нормировочной константы F_π из лоренц-инвариантности. Значение F_π можно найти из распада $\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu$. Вычисленная с помощью (5.1), (5.14) и (6.19) полная ширина π^- -распада

$$\Gamma(\pi \rightarrow \mu + \nu) = G^2 m_\mu^2 F_\pi^2 (m_\mu^2 - m_\pi^2)^2 / 4\pi m_\pi^3. \quad (6.20)$$

Из измеренного времени жизни пиона, $2,60 \cdot 10^{-8}$ с, и из значения G , найденного по распаду $\mu \rightarrow e + \nu + \bar{\nu}$, величина F_π получается равной

$$F_\pi = 93 \text{ МэВ}. \quad (6.21)$$

Как следствие (6.19) имеем

$$\begin{aligned} \langle | \partial^\mu A_\mu^i(x) | \pi^j(p) \rangle &= i F_\pi m_\pi^2 / [(2\pi)^{3/2} \sqrt{2E_\pi}] \delta_{ij} \exp(-ipx) = \\ &= F_\pi m_\pi^2 \langle | \varphi^i(x) | \pi^j(p) \rangle, \end{aligned} \quad (6.22)$$

где $\varphi^i(x)$ — перенормированное поле пиона. В пределе точной симметрии ($\epsilon \rightarrow 0$) $m_\pi^2 = 0$ и $\partial^\mu A_\mu^i = 0$. В этом пределе любой матричный элемент $A_\mu^i(x)$

$$M_{ab} = \langle b | A_\mu^i(0) | a \rangle \quad (6.23)$$

имеет полюс в точке $j^2 = 0$ ($q = p_a - p_b$) вида

$$M_{ab} = i F_\pi q_\mu q^{-2} \langle b | j_\pi^i(0) | a \rangle, \quad (6.24)$$

где $j_\pi^i(x) = \square \varphi^i(x)$ — источник пионного поля.

Из (6.24) и его обобщений можно получить низкоэнергетические теоремы в нефизическом мире с точно сохраняющимся аксиальным

током. Содержание гипотезы РСАС состоит в том, что эти теоремы приближенно справедливы в реальном мире. Приведем некоторые примеры.

пусть a и b — нуклоны. Тогда наиболее общая форма (6.23) такова:

$$(2\pi)^{-3} \bar{u}(p_b) [g_A(q^2) \gamma_\mu \gamma_5 - q_\lambda \gamma_5 h(q^2)] (\tau^i/2) u(p_a) \quad (6.25)$$

Сохранение аксиального тока означает, что умножение (6.25) на q^μ дает нуль, поэтому

$$2M g_A(q^2) = q^2 h(q^2). \quad (6.26)$$

Из (6.24) и структуры матричного элемента

$$\langle \bar{N}_b | j_\pi^i(0) | N_a \rangle = g(2\pi)^{-3/2} \bar{u}(p_b) \tau^i \gamma_5 u(p_a) \quad (6.27)$$

(где g пион-нуклонная константа связи) вытекает соотношение Голдбергера — Треймана:

$$F_\pi = M g_A(0) / g, \quad (6.28)$$

где $g_A(0) = g_A$.

Экспериментально установлено $g^2/4\pi^2 \sim 14,6$, так что $M g_A / g \approx 83$ МэВ; сравнивая это значение со значением 93 МэВ, найденным из π -распада, мы получаем информацию о точности РСАС.

Из (6.24) можно вывести много других мягкопионных теорем. Эффективность метода наглядно проявляется в случае, когда одновременно имеются два или более мягких пиона, поскольку тогда в вычислениях фигурируют коммутаторы (6.17) группы $SU(2) \otimes SU(2)$.

Например, пусть

$$T^{\mu\nu}(q) = \int \langle b | T(A_\pi^\mu(x) A_\pi^\nu(0)) | a \rangle \exp(-iqx) d^4x \quad (6.29)$$

где a и b — состояния нуклонов с импульсом p и изоспиновыми индексами a и b . M имеет двойной полюс в точке $q^2 = 0$, вычет в котором пропорционален амплитуде πN -рассеяния вперед $T_{\pi N}(q)$:

$$\begin{aligned} T^{\mu\nu} &= F_\pi^2 q^\mu q^\nu (q^2)^{-2} \int \langle b | T(j_\pi^i(x) j_\pi^j(0)) | a \rangle \exp(-iqx) d^4x + \\ &+ \text{менее сингулярные члены} = (F_\pi^2/2\pi i p^0) q^\mu q^\nu (q^2)^{-2} T_{\pi N}(q) + \\ &+ \text{менее сингулярные члены при } q \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (6.30)$$

где $T_{\pi N}$ нормирована, как в (6.4). Умножим в (6.30) $T^{\mu\nu}$ на q_μ :

$$q_\mu T^{\mu\nu} = (F_\pi^2/2\pi i p^0) (q^\nu/q^2) T_{\pi N} \text{ при } q \rightarrow 0. \quad (6.31)$$

С другой стороны, из (6.29) следует, что

$$q_{\mu} T^{\mu\nu} = i \int [\partial / \partial x^{\mu} < b | T(A_i^{\mu}(x) A_j^{\nu}(0)) | a > \exp(-iqx) d^4x.$$

Поскольку $\partial_{\mu} A_i^{\mu} = 0$, остается только член с коммутатором при равных временах

$$\begin{aligned} q_{\mu} T^{\mu\nu} &= i \int < b | [A_i^0(x), A_j^{\nu}(0)] | a > \delta(x^0) \exp(-iqx) d^4x = \\ &= -i\epsilon^{ijk} \int < b | V_j^{\nu}(0) | a > \exp(-iqx) \delta^4(x) d^4x; \end{aligned}$$

здесь мы использовали локальную форму второго из уравнений (6.17)

$$[A_i^0(x), A_j^{\nu}(0)] \delta(x^0) = i\epsilon^{ijk} V_k^{\nu}(0) \delta^4(x). \quad (6.32)$$

Так как векторный ток сохраняется, имеем

$$< b | V_k^{\nu}(0) | a > = (2\pi)^{-3} (p^{\nu} / p^0) (\tau_k)_{ab} / 2. \quad (6.33)$$

Комбинируя (6.33) и (6.31), получаем

$$T_{\pi N} = 8\pi^{-2} F_{\pi}^{-2} p q T_{\pi} \cdot \tau_{ab}, \quad (6.34)$$

где $(T_{\pi}^i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk}$ — изоспиновые матрицы пионов. Уравнение (6.34) представляет собой пороговую теорему для πN -рассеяния в пределе точной симметрии. Это уравнение можно использовать и в случае реального мира на пороге для реальных частиц ($v = pq = Mm_{\pi}$), так как нуклонный полюсный член, будучи P -волновым, не дает здесь вклада. Существенные поправки к соотношению (6.34) для реального мира симметричны по i и j , поэтому мы ограничимся только антисимметричной частью. В результате получается формула для разности между длинами рассеяния с $I = \frac{1}{2}$ и $I = \frac{3}{2}$. С использованием соотношения Голдбергера — Треймана (6.28) для F_{π} имеем

$$a_{I=\frac{1}{2}} - a_{I=\frac{3}{2}} = -(3g^2/8\pi) (Mg_A)^{-2} Mm_{\pi} / (M + m_{\pi}). \quad (6.35)$$

Это есть, с одной стороны, выражение для g_A в терминах измеряемых величин, а с другой стороны, связь между $a_{\frac{1}{2}}$ и $a_{\frac{3}{2}}$. В обоих случаях согласие с экспериментом хорошее.

В предположении, что $T_{\pi N}(q)$ удовлетворяет безвычитательному дисперсионному соотношению, для g_A выводится правило сумм

(пренебрегаем членами порядка m_π^2/M_N^2):

$$1 - g_A^{-2} = 2M^2 g^{-2} \pi^{-1} \int_0^\infty \frac{ds}{(M + m_\pi)^2 s^2 - M^2} [\sigma^+(s) - \sigma^-(s)]; \quad (6.36)$$

впервые оно было получено Адлером и Вейсбергером. В (6.36) $s = (p + q)^2$ и σ^\pm — полные π^+ -сечения.

Используя аналогичные методы, можно вывести много других мягкопионных теорем. Более полное изложение можно найти в книге Адлера и Дашена. Наконец, приведем пример класса утверждений, которые не справедливы. Пусть

$$\epsilon_\mu^{(1)} \epsilon_\mu^{(2)} T^{\mu\nu\lambda} = \langle \gamma(\epsilon^{(1)}, k_1) \gamma(\epsilon^{(2)}, k_2) | A^\lambda(0) | \rangle \quad (6.37)$$

есть матричный элемент нейтрального аксиального тока между 2-фотонным состоянием и вакуумом. Выражение (6.37) должно содержать полюс вида

$$F_\pi q^\lambda q^{-2} \langle \gamma\gamma | j_\pi^0(0) | \rangle, \quad (6.38)$$

где $q = k_1 + k_2$ и матричный элемент $\langle \gamma\gamma | j_\pi^0(0) | \rangle$ пропорционален $\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma$ амплитуде:

$$T(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) = -(2\pi)^5 \sqrt{k_1^0 k_2^0} \langle \gamma\gamma | j_\pi^0(0) | \rangle. \quad (6.39)$$

По кинематическим соображениям амплитуда $T(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma)$ должна иметь вид

$$T = \epsilon_\mu^{(1)} \epsilon_\nu^{(2)} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} f(q^2). \quad (6.40)$$

Физически $f(m_\pi^2)$ определяет время жизни π^0 . Мы предположим, что $f(m_\pi^2) \sim f(0)$, чтобы связать физические величины с предсказаниями PCAC.

Неполюсной член в $T^{\mu\nu\lambda}$ должен быть 3-индексным псевдотензором. Единственный член первого порядка по импульсам и симметричный по двум фотонам есть

$$\epsilon^{\mu\nu\lambda\alpha} (k_1 - k_2)_\alpha,$$

но этот член нарушает электромагнитную калибровочную инвариантность, которая требует, чтобы $k_{1\mu} T^{\mu\nu\lambda} = k_{2\nu} T^{\mu\nu\lambda} = 0$. Поэтому

$$\epsilon_\mu^{(1)} \epsilon_\nu^{(2)} T^{\mu\nu\lambda} = -i F_\pi q^\lambda q^{-2} T(\pi^0 \rightarrow \gamma\gamma) [(2\pi)^{1/2} \sqrt{k_1^0 k_2^0}]^{-1} + \epsilon_\mu^{(1)} \epsilon_\nu^{(2)} T^{\mu\nu\lambda}, \quad (6.41)$$

где $T^{\mu\nu\lambda}$ по крайней мере второго порядка по импульсам.

Умножим (6.41) на q^λ и, используя сохранение A^λ , получим

$$0 = -iF_\pi [(2\pi)^{5/2} \sqrt{k_1^0 k_2^0}]^{-1} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} k_{1\alpha} k_{2\beta} f(q^2) + q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}. \quad (6.42)$$

Член $q_\lambda T^{\mu\nu\lambda}$ по крайней мере третьего порядка по импульсам, отсюда следует $f(0) = 0$.

Было показано, что в рамках теории возмущений нельзя получить $f(0) = 0$, поскольку формальные аргументы нарушаются сингулярными свойствами теории поля. Если $f(m_\pi^2) = O(m_\pi^2/M^2)$, то предсказывается величина ширины распада пиона, слишком малая по сравнению с экспериментальными данными. Корректное выражение в теории возмущений получается, если положить

$$\partial_\mu A^\mu(x) = (2\bar{Q}\alpha/4\pi) F_{\mu\nu}(x) F^{\mu\nu}(x), \quad (6.43)$$

где F — электромагнитный тензор и \bar{Q} — обычно то же зависящее от модели число, которое фигурировало при обсуждении радиационных поправок в теории β -распада. Значение $\bar{Q} = 1/2$, характерное для простой теории с одним элементарным заряженным фермионом типа протона, хорошо согласуется с экспериментом. Первоначальное тождество Уорда $\partial_\mu A^\mu = 0$ восстанавливается в моделях с равным числом положительно и отрицательно заряженных фермионных полей. Основанные на (6.43) тождества, которые выполняются в теории возмущений, называются аномальными тождествами Уорда.

ЛИТЕРАТУРА

Унитарные пределы на слабые процессы получены с использованием неопубликованных результатов одного из авторов (Е.С.А.). См. также:

1. *Dolgov A.D., Okun L.B., Zakharov V.I.*, Nucl. Phys., **B37**, 493 (1972).
2. *Appelquist T.W., Bjorken J.D.*, Phys. Rev., **D4**, 3726 (1972).

Обсуждение радиационных поправок к μ - и β -распадам в теории промежуточного векторного мезона см.:

3. *Lee T.D.*, Phys. Rev., **128**, 899 (1962).
Lee T.D., Wu C.S., Weak Interactions, Ann. Rev. Nucl. Sci., **15**, 381 (1965).
4. *Shaffer R.A.*, Phys. Rev., **128**, 1452 (1962).

О соотношениях Голдбергера — Треймана и Адлера — Вейсбергера см.:

5. *Goldberger M.L., Treiman S.B.*, Phys. Rev., **110**, 1178 (1958).
6. *Adler S.L.*, Phys. Rev., **140B**, 1302 (1965).
7. *Weisberger W.I.*, Phys. Rev., **143**, 1302 (1965).
8. *Weinberg S.*, Phys. Rev. Lett. **17**, 616 (1966).
9. *Dashen R.F., Weinstein M.*, Phys. Rev., **183**, 126 (1969).

Прекрасный обзор этих вопросов дан в книге: *Adler S.L., Dashen R.F.*, Current Algebras, W.A. Benjamin Inc., 1968. (Имеется перевод: С. Адлер, Р. Дашен. Алгебры токов и их применение в физике частиц, изд-во "Мир", 1970).

Об аномальных тождествах Уорда см.:

10. *Bell J.S., Jackiw R.*, Nuovo Cimento, **51**, 47 (1969).
11. *Adler S.L.*, Phys. Rev., **177**, 2426 (1969).

По этой теме см. обзоры:

12. *Adler S.L.*, в сборнике Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory (eds. Deser S. et al.), MIT Press, Cambridge, 1970.
13. *Jackiw R.*, в сборнике: Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton, 1970.

Неабелево обобщение уравнения (6.43) получено в работах:

14. *Bardeen W.A.*, Phys. Rev., **184**, 1848 (1969).
15. *Wess J., Zumino B.*, Phys. Lett. **37B**, 95 (1971).

7. МОДЕЛЬ ВЕЙНБЕРГА — САЛАМА

В этом разделе мы опишем первую модель, объединяющую слабые и электромагнитные взаимодействия с помощью механизма Хиггса. Модель была предложена около пяти лет назад Вейнбергом и Саламом.

Идея заключается в том, чтобы вложить группу $SU(2)_L$, обсуждавшуюся в разд. 5, вместе с электромагнитной калибровочной группой в более широкую калибровочную симметрию. Тогда заряженные калибровочные мезоны становятся W^\pm -промежуточными векторными бозонами. Кроме того, имеются тяжелый нейтральный векторный мезон, фотон и один хиггсовский скаляр. Если не возникнет недоразумений, мы будем под частицами подразумевать соответствующие поля. В общем случае мы следуем обозначениям Вейнберга.

В простейшей версии единственными лептонами являются электрон e и его нейтрино ν (индекс у ν_e мы пока опускаем). Их можно сгруппировать в левосторонний $SU(2)_L$ -дублет

$$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}, \quad (7.1)$$

где $e_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)e$ и $SU(2)_L$ -синглет

$$R = e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e.$$

Дублету присписывается "гиперзаряд" $Y = -1$ и синглету e_R — "гиперзаряд" $Y = -2$, так что для всех частиц справедливо правило

$$Q = T_L^3 + \frac{1}{2}Y. \quad (7.2)$$

Поскольку все члены каждого неприводимого представления $SU(2)_L$ имеют одинаковый гиперзаряд, то

$$[T_L^i, Y] = 0. \quad (7.3)$$

T_L^i и Y генерируют группу $SU(2)_L \otimes U(1)$. Симметрия становится калибровочной, если ввести три калибровочных мезона A_μ^i , связанных с $SU(2)_L$, и четвертый B_μ , связанный с подгруппой $U(1)$. Лагранжиан модели состоит из двух частей:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{калибр}} + \mathcal{L}_{\text{лепт}}, \quad (7.4)$$

где, согласно предписанию разд. 1,

$$\mathcal{L}_{\text{калибр}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^i F^{i\mu\nu} - \frac{1}{4}B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (7.5)$$

В (7.5)

$$F_{\mu\nu}^i = \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i + g\epsilon^{ijk}A_\mu^j A_\nu^k, \quad (7.6)$$

$$B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu.$$

Лептонная часть \mathcal{L} имеет вид

$$\mathcal{L}_{\text{лепт}} = \bar{R}i\gamma^\mu(\partial_\mu + ig' B_\mu)R + \bar{L}i\gamma^\mu[\partial_\mu + (i/2)g t B_\mu - ig(\tau^i/2)A_\mu^i]L. \quad (7.7)$$

Напомним, что в случае, когда группа симметрии представляет собой прямое произведение, константы связи могут быть разными для разных подгрупп. Мы обозначили через g константу, связанную с $SU(2)_L$, и через $\frac{1}{2}g'$ константу, связанную с $U(1)$. Отметим, что

$SU(2)_L$ -инвариантность запрещает появление массового члена электрона в (7.7).

Мы хотим, чтобы в итоге только три из четырех векторных мезонов стали массивными, поскольку окончательная теория должна иметь только одну сохраняющуюся величину — электрический заряд Q и один безмассовый мезон — фотон.

Для этой цели введем дублет комплексных хиггсовских скаляров

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \quad (7.8)$$

Дублет ϕ преобразуется относительно $SU(2)_L$ как L в (7.1) и имеет $Y = +1$, чтобы выполнялось (7.2). Соответствующий дополнительный член в лагранжиане есть

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{скал}} = & [\partial_\mu \phi^\dagger + i(g'/2) B_\mu \phi^\dagger + i(g/2) \tau^i A_\mu^i \phi^\dagger] \times \\ & \times [\partial^\mu \phi - i(g'/2) B^\mu \phi - i(g/2) \tau^i A^{\mu i} \phi] - V(\phi^\dagger \phi). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Наиболее общая формула V равна

$$V = \mu^2 \phi^\dagger \phi + \lambda (\phi^\dagger \phi)^2. \quad (7.10)$$

Возможен также член взаимодействия

$$\mathcal{L}_{\text{вз}} = -G_e [\bar{R} \phi^\dagger L + \bar{L} \phi R], \quad (7.11)$$

который симметричен относительно полной группы и лоренц-инвариантен.

Далее мы положим μ^2 отрицательным; тогда у одной из компонент, в качестве которой мы выберем нейтральную компоненту ϕ , появляется отличное от нуля вакуумное среднее

$$\langle \phi \rangle = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}. \quad (7.12)$$

Отметим, что это нарушает как $SU(2)_L$, так и гиперзарядовую $U(1)$ -симметрии. Выживающий оператор симметрии есть комбинация Q [см. (7.2)]. v выбрано действительным, как в примере, приведенном в разд. 3. Из (7.10) следует

$$v = (-\mu^2/\lambda)^{1/2}. \quad (7.13)$$

Далее переопределим скалярные поля, связывая с каждым нарушенным генератором новое поле. На самом деле нет необходимости искать генераторы, ортогональные Q ; подходят любые три независимых генератора, удовлетворяющие условию

$$T \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поэтому определяем

$$U(\xi) = \exp [-(i/2v)\xi \cdot \tau]$$

и записываем

$$\varphi = U^{-1}(\xi) (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}, \quad (7.14)$$

заменяя четыре действительные компоненты φ полями η и ξ^i .

Далее мы сделаем калибровочное преобразование и перейдем в U -калибровку; тогда состав частиц, присутствующих в теории, станет явным

$$\begin{aligned} \varphi \rightarrow \varphi' &= U(\xi)\varphi = (1/\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 0 \\ v + \eta \end{pmatrix}, \\ L \rightarrow L' &= U(\xi)L, \\ \mathbf{A}_\mu &\rightarrow \mathbf{A}'_\mu, \end{aligned} \quad (7.15)$$

где

$$\tau \cdot \mathbf{A}'_\mu = U(\xi) [\tau \cdot \mathbf{A}_\mu - (i/g)U^{-1}(\xi) \partial_\mu U(\xi)] U^{-1}(\xi); \quad (7.16)$$

B_μ и R не меняются. Штрихи у L' и A'_μ далее опустим. Новые поля так же хороши, как и старые, поскольку калибровочное преобразование несингулярно.

Теперь в $\mathcal{L}_{\text{вз}}$ и $\mathcal{L}_{\text{скал}}$ появляются новые члены, квадратичные по новым полям. (7.11) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{вз}} &= -(G_e v/\sqrt{2}) [\bar{R}L + \bar{L}R] + \text{кубичные и более высокого порядка члены} = \\ &= -(G_e v/\sqrt{2}) \bar{e}e + \dots \end{aligned} \quad (7.17)$$

Электрон приобретает массу

$$m_e = G_e v/\sqrt{2}. \quad (7.18)$$

Нейтрино остается безмассовым, поскольку правосторонние поля нейтрино по-прежнему отсутствуют. Часть лагранжиана (7.9), опи-

сывающего ϕ -поле, принимает вид

$$\mathcal{L}_{\text{скал}} = \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + [(v + \eta)^2 / 8] \chi_-^\dagger [(g^i B_\mu + g^i A_\mu^i) (g^i B^\mu + g^i A^{\mu i})] \chi_- - \\ - V [(v + \eta)^2 / 2], \quad (7.19)$$

где $\chi_- = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Остающееся скалярное поле η имеет массу $-2\mu^2$. Член, квадратичный по полям векторных мезонов, представляет собой

$$\frac{1}{2} v^2 [(g^i B_\mu - g A_\mu^3) (g^i B^\mu - g A^{\mu 3}) + g^2 ((A^{\mu 1})^2 + (A_\mu^2)^2)]. \quad (7.20)$$

Определим

$$W_\mu^\pm = (A_\mu^1 \mp i A_\mu^2) / \sqrt{2}. \quad (7.21)$$

Очевидно, что массы заряженных полей W_μ^\pm равны

$$M_W = \frac{1}{2} g v. \quad (7.22)$$

Определим два нейтральных поля

$$Z_\mu = (g A_\mu^3 + g^i B_\mu) / \sqrt{g^2 + g^{i2}}, \quad A_\mu = (g B_\mu + g^i A_\mu^i) / \sqrt{g^2 + g^{i2}}. \quad (7.23)$$

Z_μ и A_μ представляют собой собственные состояния массовой матрицы с массами

$$M_Z = \frac{1}{2} v \sqrt{g^2 + g^{i2}}, \quad M_A = 0. \quad (7.24)$$

Единственный безмассовый векторный мезон есть фотон, который соответствует выживающей $U(1)$ -симметрии $\exp(-i\theta Q)$.

Почувительно переписать $\mathcal{L}_{\text{лепт}}$ [см. (7.7)] через W^\pm , Z и фотон. Из (7.21) следует

$$A_\mu^{(1)} = (1/\sqrt{2}) (W_\mu^- + W_\mu^+), \quad A_\mu^{(2)} = (i/\sqrt{2}) (W_\mu^- - W_\mu^+), \quad (7.21')$$

поэтому члены в (7.7), содержащие W^\pm , таковы:

$$(g/2) \bar{L} \gamma^\mu (\tau^1 A_\mu^1 + \tau^2 A_\mu^2) L = (g/2) (\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) (W_\mu^- + W_\mu^+) / \sqrt{2} - \\ - i(\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L - \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L) (W_\mu^- - W_\mu^+) / i\sqrt{2} = \\ = (g/\sqrt{2}) [\bar{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L \gamma^\mu \nu_L W_\mu^-] \quad (7.25)$$

Сравнивая с (6.12), получаем

$$G/\sqrt{2} = g^2/8M_W^2 = 1/2v^2. \quad (7.26)$$

Далее рассмотрим члены в (7.7), содержащие A_μ^2 и B_μ . Определим угол θ_W

$$g'/g \pm \operatorname{tg} \theta_W. \quad (7.27)$$

Тогда, согласно (7.23),

$$A_\mu = \cos \theta_W B_\mu + \sin \theta_W A_\mu^3, \quad Z_\mu = \sin \theta_W B_\mu - \cos \theta_W A_\mu^3. \quad (7.28)$$

Обращая (7.28), получаем

$$B_\mu = \cos \theta_W A_\mu + \sin \theta_W Z_\mu, \quad A_\mu^3 = \sin \theta_W A_\mu - \cos \theta_W Z_\mu. \quad (7.29)$$

В $\mathcal{L}_{\text{лепт}}$ члены взаимодействия A_μ^3 и B_μ с лептонами таковы:

$$\begin{aligned} & -(g'^2)[2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L][\cos \theta_W A_\mu + \sin \theta_W Z_\mu] + \\ & + (g/2)[\bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L][\sin \theta_W A_\mu - \cos \theta_W Z_\mu] = \\ & = (Z_\mu/2\sqrt{g^2 + g'^2})[g'^2(2\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L + \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L) - \\ & - g^2(\bar{e}_L \gamma^\mu e_L - \bar{\nu}_L \gamma^\mu \nu_L)] + gg'/\sqrt{g^2 + g'^2} A_\mu \times \\ & \times [\bar{e}_R \gamma^\mu e_R + \bar{e}_L \gamma^\mu e_L]. \end{aligned} \quad (7.30)$$

Таким образом, безмассовый векторный мезон A_μ действительно взаимодействует с электромагнитным током $\bar{e}\gamma^\mu e$, и мы можем идентифицировать заряд электрона $-e$:

$$e = gg'/\sqrt{g^2 + g'^2}. \quad (7.31)$$

Наконец, проверим, не нарушилась ли локальная калибровочная инвариантность относительно локальной группы $U(1)$, генерируемой Q , где фотон A_μ является калибровочным мезоном. При инфинитезимальных калибровочных преобразованиях, генерируемых $Q = \frac{1}{2}Y + T_L^3$,

$$\delta A_\mu^3 = (1/g)\partial_\mu \varepsilon(x),$$

$$\delta B_\mu = (2/g')\partial_\mu \frac{1}{2}\varepsilon(x) = (1/g')\partial_\mu \varepsilon(x),$$

так что, согласно (7.28),

$$\delta Z_\mu = [(1/g')\sin \theta_W - (1/g)\cos \theta_W]\partial_\mu \varepsilon(x) = 0,$$

$$\delta A_{\mu} = [(1/g') \cos \theta_W + (1/g) \sin \theta_W] \partial_{\mu} \varepsilon(x) = (1/gg') [g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W] \partial_{\mu} \varepsilon(x) = (\sqrt{g^2 + g'^2} / gg') \partial_{\mu} \varepsilon(x) = (1/e) \partial_{\mu} \varepsilon(x). \quad (7.32)$$

ЛИТЕРАТУРА

Модель, описанная в данном разделе, предложена в статье:

1. *Weinberg S.*, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264 (1967).

Модель, основанная на той же калибровочной группе, предложена в работе:

2. *Salam A.* в сборнике: *Elementary Particle Theory* (ed. *Svartholm N.*), *Almqvist and Forlag, Stockholm*, 1968.

8. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МОДЕЛИ. ВКЛЮЧЕНИЕ АДРОНОВ

Поскольку и $g/\sqrt{g^2 + g'^2}$ и $g'/\sqrt{g^2 + g'^2}$ меньше 1, из (7.31) можно вывести, что

$$g \sin \theta = e, \quad g' \cos \theta = e, \quad (8.1)$$

так что и g , и g' больше e .

Из (7.22) следует, что масса W равна $M_W^2 = g^2 v^2 / 4$, а из (7.26) имеем $v^2 = 1/G\sqrt{2}$. Поэтому

$$M_W^2 = g^2 v^2 / 4 = (e^2 / \sin^2 \theta_W) / 4\sqrt{2}G. \quad (8.2)$$

Масса W должна быть очень большой, действительно

$$M_W = [\pi\alpha / \sqrt{2}G]^{1/2} / \sin \theta_W \approx 38 / \sin \theta_W \text{ ГэВ}. \quad (8.3)$$

Очевидно, что в этой модели минимальное значение M_W слишком велико, чтобы W можно было бы получать на современных ускорителях; тем не менее она не находится вблизи унитарного предела, который порядка сотен гигаэлектронвольт.

Z -мезон еще тяжелее. Из (7.24)

$$M_Z = vg/2 \cos \theta_W = M_W / \cos \theta_W = 38 / (\frac{1}{2} \sin 2\theta_W) \text{ ГэВ}. \quad (8.4)$$

Так как $g' \neq 0$, $\cos \theta_W < 1$,

$$M_Z > M_W, \quad M_Z > 76 \text{ ГэВ}. \quad (8.5)$$

Из (7.18) и (7.26) можно получить значение безразмерной $e\eta$ -константы связи G_e , именно

$$G_e = \sqrt{2}m_e / v = \sqrt{2}m_e \sqrt[4]{2} \sqrt{G} - 2 \cdot 10^{-6}; \quad (8.6)$$

константа оказывается малой, что указывает на то, что диаграммы с $e\eta$ -вершинами часто можно пренебречь по сравнению с диаграммами с фотонной или Z -вершинами.

Каково влияние W на спектр распада $\mu^- \rightarrow \bar{e} + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$? (μ^- , ν_μ)-дублет легко включается в схему в точной аналогии с (e^- , ν_e)-дублетом, и масса μ генерируется $\mu - \nu_\mu - \phi$ -связью. Константа связи G_μ должна иметь значение

$$G_\mu = (m_\mu / m_e) G_e,$$

что больше, чем (8.6), но по-прежнему очень мало. Амплитуда μ -распада равна

$$-(ig^2/16\pi^2)\bar{u}(\nu_\mu)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\mu)\bar{u}(e)\gamma^\nu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu}_e)(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu M_W^{-2})/(k^2-M_W^2), \quad (8.7)$$

где $k = p(\mu) - p(\nu_\mu) = p(e) + p(\bar{\nu}_e)$. В (8.7) член с $g_{\mu\nu}$ воспроизводит спектр точечного взаимодействия с точностью до членов порядка k^2/M_W^2 . Второй член имеет порядок $m_e m_\mu / M_W^2$. Таким образом, влияние W на спектр очень мало.

Проверка модели наиболее доступна, по-видимому, в процессе $\bar{\nu} - e$ -упругого рассеяния. Вклад W дается диаграммой (фиг. 8.1, а).

При низких энергиях вклад W неотличим от амплитуды, вычисляемой по теории Ферми:

$$T^a = (iG/2\sqrt{2}\pi^2)\bar{u}(\bar{\nu}')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu})\bar{u}(e')\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(e); \quad (8.8)$$

здесь к $(V-A)(V-A)$ -связи было применено преобразование Фирца. Знак в (8.8) получается из произведения знака минус из-за статистики Ферми и знака минус из-за преобразования Фирца. Z -обменный вклад можно получить из (7.30). При малых энергиях он равен

$$(iG/2\sqrt{2}\pi^2)\bar{u}(\bar{\nu}')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu})\bar{u}(e)\gamma_\mu[2\sin^2\theta_W - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_5]u(e). \quad (8.9)$$

В общем амплитуду процесса $\bar{\nu} + e^- \rightarrow \bar{\nu} + e^-$ можно записать как

$$(iG/2\sqrt{2}\pi^2)\bar{u}(\bar{\nu}')\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu})\bar{u}(e^-)\gamma_\mu[C_V - \gamma_5 C_A]u(e^-). \quad (8.10)$$

Тогда обмен только W (или взаимодействие Ферми) предсказывает

$$C_V = C_A = 1, \quad (8.11)$$

$$\delta A_{\mu} = [(1/g') \cos \theta_W + (1/g) \sin \theta_W] \partial_{\mu} \varepsilon(x) = (1/gg') [g \cos \theta_W + g' \sin \theta_W] \partial_{\mu} \varepsilon(x) = (\sqrt{g^2 + g'^2} / gg') \partial_{\mu} \varepsilon(x) = (1/e) \partial_{\mu} \varepsilon(x). \quad (7.32)$$

ЛИТЕРАТУРА

Модель, описанная в данном разделе, предложена в статье:

1. *Weinberg S.*, *Phys. Rev. Lett.*, **19**, 1264 (1967).

Модель, основанная на той же калибровочной группе, предложена в работе:

2. *Salam A.* в сборнике: *Elementary Particle Theory* (ed. Svartholm N.), Almqvist and Forlag, Stockholm, 1968.

8. ФЕНОМЕНОЛОГИЯ МОДЕЛИ. ВКЛЮЧЕНИЕ АДРОНОВ

Поскольку и $g/\sqrt{g^2 + g'^2}$ и $g'/\sqrt{g^2 + g'^2}$ меньше 1, из (7.31) можно вывести, что

$$g \sin \theta = e, \quad g' \cos \theta = e, \quad (8.1)$$

так что и g , и g' больше e .

Из (7.22) следует, что масса W равна $M_W^2 = g^2 v^2 / 4$, а из (7.26) имеем $v^2 = 1/G\sqrt{2}$. Поэтому

$$M_W^2 = g^2 v^2 / 4 = (e^2 / \sin^2 \theta_W) / 4\sqrt{2}G. \quad (8.2)$$

Масса W должна быть очень большой, действительно

$$M_W = [\pi\alpha / \sqrt{2}G]^{1/2} / \sin \theta_W \approx 38 / \sin \theta_W \text{ ГэВ}. \quad (8.3)$$

Очевидно, что в этой модели минимальное значение M_W слишком велико, чтобы W можно было бы получать на современных ускорителях; тем не менее она не находится вблизи унитарного предела, который порядка сотен гигаэлектронвольт.

Z -мезон еще тяжелее. Из (7.24)

$$M_Z = vg/2 \cos \theta_W = M_W / \cos \theta_W = 38 / (\frac{1}{2} \sin 2\theta_W) \text{ ГэВ}. \quad (8.4)$$

Так как $g' \neq 0$, $\cos \theta_W < 1$,

$$M_Z > M_W, \quad M_Z > 76 \text{ ГэВ}. \quad (8.5)$$

Из (7.18) и (7.26) можно получить значение безразмерной $e\epsilon\eta$ -константы связи G_e , именно

$$G_e = \sqrt{2}m_e / v = \sqrt{2}m_e \sqrt[4]{2} \sqrt{G} - 2 \cdot 10^{-6}; \quad (8.6)$$

константа оказывается малой, что указывает на то, что диаграммами с $e\epsilon\eta$ -вершинами часто можно пренебречь по сравнению с диаграммами с фотонной или Z -вершинами.

Каково влияние W на спектр распада $\mu^- \rightarrow \bar{e} + \bar{\nu}_e + \nu_\mu$? (μ^- , ν_μ)-дублет легко включается в схему в точной аналогии с (e^- , ν_e)-дублетом, и масса μ генерируется $\mu - \nu_\mu - \phi$ -связью. Константа связи G_μ должна иметь значение

$$G_\mu = (m_\mu / m_e) G_e,$$

что больше, чем (8.6), но по-прежнему очень мало. Амплитуда μ -распада равна

$$-(ig^2/16\pi^2)\bar{u}(\nu_\mu)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\mu)\bar{u}(e)\gamma^\nu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu}_e)(g_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M_W^2)/(k^2-M_W^2), \quad (8.7)$$

где $k = p(\mu) - p(\nu_\mu) = p(e) + p(\bar{\nu}_e)$. В (8.7)-член с $g_{\mu\nu}$ воспроизводит спектр точечного взаимодействия с точностью до членов порядка k^2/M_W^2 . Второй член имеет порядок $m_e m_\mu / M_W^2$. Таким образом, влияние W на спектр очень мало.

Проверка модели наиболее доступна, по-видимому, в процессе $\bar{\nu} - \epsilon$ -упругого рассеяния. Вклад W дается диаграммой (фиг. 8.1, а).

При низких энергиях вклад W неотличим от амплитуды, вычисляемой по теории Ферми:

$$T^a = (iG/2\sqrt{2}\pi^2)\bar{u}(\bar{\nu}^*)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu})\bar{u}(e^*)\gamma_\mu(1-\gamma_5)u(\bar{e}); \quad (8.8)$$

здесь к $(V-A)(V-A)$ -связи было применено преобразование Фирца. Знак в (8.8) получается из произведения знака минус из-за статистики Ферми и знака минус из-за преобразования Фирца. Z -обменный вклад можно получить из (7.30). При малых энергиях он равен

$$(iG/2\sqrt{2}\pi^2)\bar{u}(\bar{\nu}^*)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu})\bar{u}(e)\gamma_\mu[2\sin^2\theta_W - 1/2 + 1/2\gamma_5]u(e). \quad (8.9)$$

В общем амплитуду процесса $\bar{\nu} + e^- \rightarrow \bar{\nu} + e^-$ можно записать как

$$(iG/2\sqrt{2}\pi^2)\bar{u}(\bar{\nu}^*)\gamma^\mu(1-\gamma_5)u(\bar{\nu})\bar{u}(e^-)\gamma_\mu[C_V - \gamma_5 C_A]u(e^-). \quad (8.10)$$

Тогда обмен только W (или взаимодействие Ферми) предсказывает

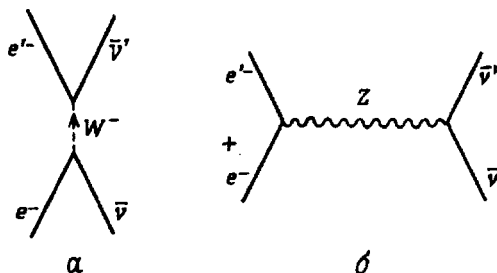
$$C_V = C_A = 1, \quad (8.11)$$

в то время как рассматриваемая модель предсказывает

$$C_V = 2 \sin^2 \theta_W + \frac{1}{2}, \quad C_A = \frac{1}{2}. \quad (8.12)$$

Из (8.10) можно вычислить усредненное по спинам дифференциальное сечение. Сечение в телесном угле $d\Omega$ (в системе центра масс) равно

$$d\sigma/d\Omega = (G^2/4\pi^2 s) [(C_V - C_A)^2 (pq)^2 + (C_V + C_A)^2 (pq')^2 - m_e^2 (C_V^2 - C_A^2) (pp')], \quad (8.13)$$



Фиг. 8.1. Диаграммы для упругого $\bar{\nu}e$ -рассеяния в модели Вейнберга Салама.

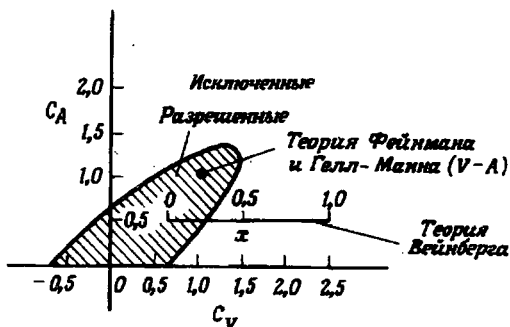
где p и p' есть начальный и конечный импульсы антинейтрино, q и q' — начальный и конечный импульсы электрона и $s = (p + q)^2$. В терминах энергии отдачи электрона в лабораторной системе T из (8.13) получаем

$$d\sigma/dT = (G^2/2\pi) m_e [(C_V - C_A)^2 + (C_V + C_A)^2 [1 - (T/\omega)]^2 - (C_V^2 - C_A^2) m_e T/\omega^2], \quad (8.14)$$

где ω — энергия антинейтрино в системе покоя начального электрона (в лабораторной системе). Последний член мал при $\omega \gg m_e$. В $V-A$ модели ($C_V = C_A = 1$) второй член уменьшается при $T \rightarrow \omega$. Кроме того, в $d\sigma/dT$ присутствует постоянный член. При $C_V = -C_A$ [что невозможно в модели Вейнберга — Салама (ВС)] $d\sigma/dT$ вообще не зависело бы от ω .

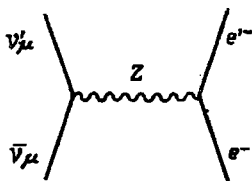
Гурр, Рейнес и Собель искали $\bar{\nu}e$ -события от антинейтрино, образованных в заводском реакторе в Саванна-Ривер. Они измерили величину (8.14), проинтегрированную от минимального до максимального значения T и по спектру антинейтрино. $T_{\text{макс}}$ как раз равно энер-

гии антинейтрино $\bar{\nu}$, $T_{\text{мин}}$ определяется экспериментальными условиями. Эти авторы нашли, что сечение составляет меньше половины от величины, предсказываемой условием $C_V = C_A = 1$. Фиг. 8.2 взята из этой работы. На фигуре показана плоскость $C_V - C_A$, причем заштрихованная область включает значения, разрешенные



Фиг. 8.2. Область значений C_V и C_A , согласующихся с экспериментом Гурра, Рейнеса и Собеля.

Фиг. 8.3. Диаграмма Z-обмена для $\nu_\mu e$ -рассеяния.



экспериментом. $(V-A)$ -теория не исключается и модель ВС разрешена экспериментом при $\sin^2 \theta_W < 0,35$, что соответствует массе W , большей 60 ГэВ.

Аналогичным образом можно параметризовать амплитуду процесса $\nu_\mu + e \rightarrow \nu_\mu + e$. Этот процесс особенно интересен, поскольку он запрещен, если существуют только заряженные токи, так как система $\nu_\mu - e$ не взаимодействует с W . Если существует нейтральный Z , упругое $\nu_\mu e$ -рассеяние будет происходить за счет Z -обмена, как на фиг. 8.3.

Эффективное взаимодействие имеет вид

$$-(iG/\sqrt{2})\bar{\nu}_\mu\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu_\mu[\bar{e}\gamma_\mu(C'_V - C'_A\gamma_5)e]. \quad (8.17)$$

В модели ВС

$$C'_A = \frac{1}{2}, C'_V = \frac{1}{2} - 2 \sin^2 \theta_W. \quad (8.18)$$

В чистой (V - A)-теории $C'_V = C'_A = 0$.

Недавние эксперименты в ЦЕРНе дали ограничения как на $\nu_\mu e^-$, так и на $\bar{\nu}_\mu e^-$ -упругие сечения. Так же, как и в случае $\nu_e + e$, оба сечения линейно растут с энергией (анти)нейтрино ω при $\omega \ll M_Z$. Если ω измеряется в гигаэлектронвольтах, сечения соответственно меньше $0,7 \cdot 10^{-41} \omega$ и $1,1 \cdot 10^{-41} \omega$ см². Как функция θ_W , эти сечения описываются формулами типа (8.14). Экспериментальные данные приводят к ограничению $\sin^2 \theta_W < 0,6$, что значительно слабее ограничения, полученного из упругого $e^- \nu_e$ -рассеяния.

Имеется много попыток включить в модель ВС адроны. Одна из главных трудностей состоит в том, что реалистическая теория должна содержать токи с $\Delta S = 1$, $\Delta Q = 1$, но любые нейтральные токи с изменением странности должны отсутствовать. Экспериментального подтверждения существования нейтральных нестранных адронных токов пока еще не получено.

Простой способ включить адроны в модель без изменения ее основной структуры состоит в добавлении трех фундаментальных "кварковых" полей, которые мы назовем p , n , λ . Мы не будем беспокоиться здесь о приближенной $SU(3)$ -симметрии, но предположим, что лагранжиан содержит некий симметричный член, описывающий некое очень сильное взаимодействие типа векторного глюонного, который не сказывается на последующем обсуждении.

Далее мы сгруппируем левосторонние кварки в $SU(2)_L$ -дублет

$$N_L = \begin{pmatrix} p_L \\ n_L \cos \theta + \lambda_L \sin \theta \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} p_L \\ n_{cL} \end{pmatrix}, \quad (8.19)$$

где θ - угол Кабиббо, введенный в (5.22). Оставшиеся синглеты представляют собой правосторонние кварки n_R , p_R и λ_R и комбинацию, ортогональную нижней линии в (8.19), а именно

$$\lambda_c = \lambda_L \cos \theta - n_L \sin \theta. \quad (8.20)$$

Так как здесь нас не интересуют преобразования $SU(3)$, припишем $Y = 1$ полю n_L , $Y = 2$ полю p_R и остальным полям $Y = 0$. Тогда p имеет единичный положительный заряд и λ и n — нейтральны. (Обычные кварковые заряды можно получить с помощью сдвига предписанных значений Y .)

Лагранжиан \mathcal{L} должен быть симметричен относительно $SU(2) \otimes U(1)$. Уже имеются лептонная часть и часть, соответствующая калибровочному полю, и, следовательно, может присутствовать член, описывающий очень сильное векторное глюонное взаимодействие. Массовый член кварков вида

$$m_p [\bar{p}_R p_L + \bar{p}_L p_R]$$

запрещен симметрией и поэтому не может появиться в \mathcal{L} . Масса у кварков возникает из-за взаимодействия со скалярным дублетом ϕ .

Чтобы написать наиболее общее взаимодействие, необходимо ввести поле $\tilde{\phi}$

$$\tilde{\phi} = i\sigma_2 \phi^* = \begin{pmatrix} \phi^0 \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad (8.21)$$

которое также преобразуется относительно $SU(2)$ как дублет, но имеет $Y = -1$. Общее кварк-скалярное взаимодействие имеет вид

$$G_1 [\bar{N}_L \tilde{\phi} p_R + \text{з.с.}] + G_2 [\bar{N}_L \phi n_R + \text{з.с.}] + G_3 [\bar{N}_L \phi \lambda_R + \text{з.с.}] + \\ + G_4 [\bar{n}_R \lambda_c + \text{з.с.}] + G_5 [\bar{\lambda}_R \lambda_c + \text{з.с.}]. \quad (8.22)$$

Массовая матрица кварков получается заменой ϕ его вакуумным средним:

$$\langle \phi^+ \rangle = 0, \quad \langle \phi^0 \rangle = v/\sqrt{2}.$$

Член, квадратичный по фермионным полям, в (8.22) принимает вид

$$(v/\sqrt{2}) [G_1 \bar{p} p + G_2 (\bar{n} \cos \theta + \bar{\lambda} \sin \theta) n + \\ + G_3 (\bar{n} \cos \theta + \bar{\lambda} \sin \theta) \lambda + G_4 \bar{n} (\lambda \cos \theta - n \sin \theta) + \\ + G_5 \bar{\lambda} (\lambda \cos \theta - n \sin \theta)]. \quad (8.23)$$

Очевидно, что $G_1 \dots G_5$ должны быть выбраны таким образом, чтобы p -кварк имел массу m_p и т.д. и чтобы физические n - и λ -кварки были собственными состояниями массовой матрицы. Эти условия однозначно определяют $G_1 \dots G_5$. В терминах масс кварков и угла

Кабиббо выражения (8.22) переписывается в следующем виде:

$$(\sqrt{2}/v) \{ m_p (\bar{N}_L \tilde{\varphi}_R + \text{з.с.}) + m_n [\bar{n}_R (\varphi^\dagger N_L \cos \theta - (v/\sqrt{2}) \lambda_c \sin \theta) + \text{з.с.}] + m_\lambda [\bar{\lambda}_R (\varphi^\dagger N_L \sin \theta + (v/\sqrt{2}) \lambda_c \cos \theta) + \text{з.с.}] \}. \quad (8.24)$$

Так как v выражается через константу Ферми G формулой (7.26), отсюда следует, что константы связи G_i в (8.23) очень малы, порядка $\sim 10^{-2}$, и поэтому хиггсовские скаляры связаны с кварками очень слабо.

Рассмотрим нейтральные токи кварков. Взаимодействие с B_μ и A_μ^3 имеет вид

$$g' B_\mu [\bar{p}_R \gamma^\mu p_R + \frac{1}{2} (\bar{n}_L \gamma^\mu n_L \cos^2 \theta + \bar{\lambda}_L \gamma^\mu \lambda_L \sin^2 \theta + \cos \theta \sin \theta (\bar{n}_L \gamma^\mu \lambda_L + \bar{\lambda}_L \gamma^\mu n_L))] + g A_\mu^3 j^{3\mu}, \quad (8.25)$$

где

$$j^{(3)\mu} = \bar{p}_L \gamma^\mu p_L - \bar{n}_L \gamma^\mu n_L \cos^2 \theta - \bar{\lambda}_L \gamma^\mu \lambda_L \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta (\bar{n}_L \gamma^\mu \lambda_L + \bar{\lambda}_L \gamma^\mu n_L). \quad (8.26)$$

Члены, пропорциональные $\cos \theta \sin \theta$, являются нейтральными токами с изменением странности. В терминах векторных нейтральных собственных состояний A_μ и Z_μ , которые выражаются через A_μ^3 и B_μ согласно (7.23), взаимодействие (8.25) принимает вид

$$(gg'/\sqrt{g^2 + g'^2}) A_\mu j^{\mu(\text{ЭМ})} + \sqrt{g^2 + g'^2} Z_\mu [j^{\mu(3)} - \sin^2 \theta_W j^{\mu(\text{ЭМ})}], \quad (8.27)$$

где $j_\mu^{(3)}$ дается формулой (8.26) и

$$j_\mu^{(\text{ЭМ})} = \bar{p} \gamma_\mu p.$$

Если приписать кваркам другие заряды, выражение (8.27) останется справедливым с соответствующим $j_\mu^{(\text{ЭМ})}$. Так как $j_\mu^{(\text{ЭМ})}$ не содержит членов с λ или n , Z_μ взаимодействует с изменяющим странность нейтральным током.

Этого результата невозможно избежать, если использовать только три кварка, независимо от того, какие заряды приписаны кваркам. Из-за экспериментальных ограничений, налагаемых на токи отсутствием распадов $K^+ \rightarrow \pi^+ + e^+ + e^-$ или $K_L^0 \rightarrow \mu^+ + \mu^-$, желательно исключить нейтральные токи с изменением странности. Модель, обладающую этим свойством, предложили Глэшоу, Илиопулос и Майяни. Они добавляют четвертый кварк q^+ и группируют кварки в два

$SU(2)_L$ -дублета:

$$\begin{pmatrix} p \\ n_c \end{pmatrix}_L \text{ и } \begin{pmatrix} q^+ \\ \lambda_c \end{pmatrix}_L. \quad (8.28)$$

Если масса q^+ очень большая, никаких нежелательных эффектов не возникает. Вместо (8.26) нейтральный ток теперь имеет вид

$$j_{\mu}^{(3)} = \frac{1}{2} [\bar{p}_L \gamma_{\mu} p_L - \bar{n}_{cL} \gamma_{\mu} n_{cL} + \bar{q}_L \gamma_{\mu} q_L - \bar{\lambda}_{cL} \gamma_{\mu} \lambda_{cL}]. \quad (8.29)$$

Так как (n_c, λ_c) получен из (n, λ) с помощью унитарного преобразования (5.22), комбинация $\bar{n}_{cL} \gamma^{\mu} n_{cL} + \bar{\lambda}_{cL} \gamma^{\mu} \lambda_{cL}$ в (8.29) равна $\bar{n}_L \gamma^{\mu} n_L + \bar{\lambda}_L \gamma^{\mu} \lambda_L$. Перекрестные члены, пропорциональные $\cos \theta \sin \theta$, сокращаются и нежелательные токи исключаются.

В этой модели взаимодействие Z с адронами снова описывается выражением (8.27) с $j_{\mu}^{(3)}$ по (8.29) и связь Z с лептонами не меняется [см. (7.30) или (8.9)]. В частности, связь Z с адронами и нейтрино принимает вид

$$\sqrt{g^2 + g'^2} Z^{\mu} [j_{\mu}^{(3)} - \sin^2 \theta_W j_{\mu}^{(EM)}] + \frac{1}{2} \bar{\nu} \gamma_{\mu} \frac{1}{2} (1 - \gamma_5) \nu.$$

При низких энергиях амплитуда процесса $\nu + a \rightarrow \nu' + b$, где a и b — состояния адронов, пропорциональна выражению

$$(g^2 + g'^2)/4M_Z^2 < b | j_{\mu}^{(3)} - \sin^2 \theta_W j_{\mu}^{(EM)} | a > \bar{\nu}' \gamma^{\mu} (1 - \gamma_5) \nu. \quad (8.30)$$

Используя (7.24) для M_Z , получаем

$$(g^2 + g'^2)/4M_Z^2 = 1/v^2 = \sqrt{2} G. \quad (8.31)$$

Поэтому при низких энергиях амплитуды не зависят от массы Z , если пропагатор Z можно аппроксимировать величиной $-g_{\mu\nu}/M_Z^2$.

Например, измеренная амплитуда упругого νp -рассеяния составляет $0,12 \pm 0,06$ амплитуды $\nu + n \rightarrow e^- + p$. Для теоретических предсказаний матричный элемент в (8.30) можно получить следующим образом. Матричный элемент $j_{\mu}^{(EM)}$ хорошо известен из электромагнитных формфакторов. Ток $j_{\mu}^{(3)}$ есть нейтральная компонента триплета, заряженная компонента которого измеряется в процессе $\nu + n \rightarrow \mu^- + p$. Таким образом, амплитуду в (8.30) получаем из эксперимента. Пайс и Трейман предсказывают парциальную ширину

$$0,15 \leq \sigma(\nu + p \rightarrow \nu + p) / \sigma(\nu + n \rightarrow \mu^- + p) \leq 0,25 \quad (8.32)$$

при условии $\theta_W < 0,35$, как это требуется на основании экспериментов по упругому $e^- \nu$ -рассеянию.

Более сильные ограничения можно получить из рассмотрения экспериментов по слабому рождению пионов. Мы скажем об этом только несколько слов, а за деталями отсылаем читателя к литературе. Рассмотрим процесс $\nu + p \rightarrow \nu + p + \pi^0$. Нам нужен матричный элемент

$$\langle p\pi^0 | j_{\mu}^{(3)} - \sin^2 \theta_w j_{\mu}^{(эм)} | p \rangle. \quad (8.33)$$

Электромагнитный ток может быть измерен в электророждении π^0 . Заряженный аналог $j_{\mu}^{(3)}$, $\langle p\pi^0 | j_{\mu}^{+} | p \rangle$, можно измерить в процессе $\nu + p \rightarrow p + \pi^0 + \mu^{-}$. Фактически этот матричный элемент не связан простым образом с $\langle p\pi^0 | j_{\mu}^{(3)} | p \rangle$ через изоспин, поскольку $p\pi^0$ могут иметь или $I = \frac{1}{2}$ или $I = \frac{3}{2}$. Однако можно вывести неравенства, можно усреднить π^{+} - и π^{-} -амплитуды, можно использовать в качестве мишени ядра с нулевым изоспином, или можно отбирать такие события, относительно которых известно, что в них доминирует резонанс Σ^{-} . Один из наиболее сильных результатов есть

$$R = (\sigma(\nu + p \rightarrow \nu + p + \pi^0) + \sigma(\nu + p \rightarrow \nu + p + \pi^0)) / 2\sigma(\nu + p \rightarrow \mu^{-} + p + \pi^0) \leq 0,14.$$

Если использовать результаты других экспериментов, то на основании теоретических соображений можно предсказать $R \geq 0,2$. Хотя для этих чисел имеется большая теоретическая и экспериментальная неопределенность, они все же наводят на мысль, что адронных токов, связанных с нейтрино, может и не существовать. Однако только более детальные эксперименты могут разрешить этот вопрос.

ЛИТЕРАТУРА

Эксперименты по $\bar{\nu}e$ -рассеянию на реакторе в Саванна-Ривер описаны в работах:

1. *Reines F., Gurr H. S.*, Phys. Rev. Lett., **24**, 1448 (1970);
Gurr H. S., Reines F., Sobel H. W., Phys. Rev. Lett., **28**, 1406 (1972).

Анализ этих экспериментов содержится в статье:

2. *Chen H., Lee B. W.*, Phys. Rev. **D5**, 1874 (1972).

Модель адронов без нейтральных токов с изменением странности предложена в статье

3. *Glashow S., Illipoulos J., Maiani L.*, Phys. Rev., **D2**, 1285 (1970).

Об экспериментах по неупругому νp -рассеянию сообщается в работах:

4. *Cundy D., Myatt G., Nezirick F., Pattison J.B.M., Perkins D.H., Ramm C.A., Venus V., Wachsmuth H.W.*, Phys. Lett., **31B**, 478 (1970).
5. *Lee W.*, Phys. Lett., **40B**, 423 (1972).
6. *Perkins D.H.* XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Batavia, Illinois, 1972.
Анализ экспериментов см.:
7. *Pais A., Treiman S.B.*, Phys. Rev., **D6**, 2700 (1972).
8. *Albright C., Lee B.W., Paschos E.A., Wolfenstein L.*, Phys. Rev., **D7**, 2220 (1973).

9. МОДЕЛИ С ТЯЖЕЛЫМИ ЛЕПТОНАМИ

В этом разделе будут описаны модели, в которых отсутствует связь нейтральных векторных мезонов с нейтрино. В таких моделях амплитуды всех нейтринных процессов, описанных в разд. 8, исчезают в порядке G^2 .

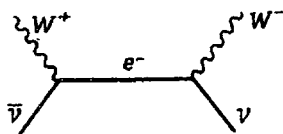
Все эти модели включают тяжелые лептоны. Причина состоит в том, что диаграмма на фиг. 9.1 для процесса $\bar{\nu} + \nu \rightarrow W^+ + W^-$ существует во всех моделях.

Амплитуда, вычисленная по этой диаграмме, линейно растет с s и поэтому нарушает унитарный предел. Это поведение приводит к неперенормируемой теории, поскольку соответствующая диаграмма (квадрат), появляющаяся в чет-

вертом порядке амплитуды $\bar{\nu}\nu$ -упругого рассеяния, квадратично расходится. В модели ВС главная асимптотика диаграммы, показанной на фиг. 9.1, сокращалась диаграммой фиг. 9.2. Читатель может проверить это сокращение, вычислив ZWW-вершину.

Если $\nu\bar{\nu}Z$ -вершины запрещены, линейный рост диаграммы на фиг. 9.1 должен быть сокращен каким-то иным образом. Единственная альтернатива — дополнительные лептоны, как на фиг. 9.3.

Линейный член в диаграмме на фиг. 9.3 по знаку противоположен линейному члену на фиг. 9.1, и, следовательно, при соответствующих константах связи эти члены могут сократиться, что приведет к теории, которая может быть перенормируемой. Гипотетический E^+

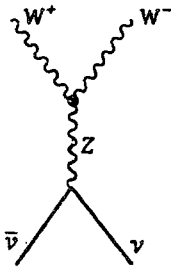


Фиг. 9.1. Диаграмма обмена электроном для $\bar{\nu} + \nu \rightarrow W^+ + W^-$.

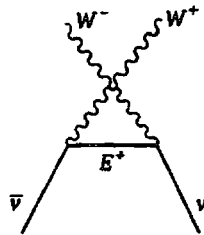
является "тяжелым" лептоном, поскольку, если бы он был легче K^+ -мезона, он должен был бы наблюдаться в распаде $K^+ \rightarrow E^+ + \bar{\nu}$.

Тяжелые лептоны можно ввести в $SU(2) \otimes U(1)$ -модель, где одна из их функций — исключать νZ -связи. Например, можно ввести левосторонний триплет

$$\begin{pmatrix} E^+ \\ \nu \\ e^- \end{pmatrix}_L. \quad (9.1)$$



Фиг. 9.2. Диаграмма аннигиляции Z для $\nu + \bar{\nu} \rightarrow W^+ + W^-$.



Фиг. 9.3. Диаграмма обмена тяжелым лептоном для $\nu + \bar{\nu} \rightarrow W^+ + W^-$.

Кроме того, такая модель содержит правосторонние $SU(2)_L$ -синглеты e^-_R и E^+_R . Триплету можно приписать $Y = 0$. Правосторонние электрон и E^+ соответственно имеют $Y = -2$ и $Y = +2$. Тогда нейтральный ток равен

$$j_\mu^{(3)} = \bar{E}_L^+ \gamma_\mu E_L^+ - \bar{e}_L^- \gamma_\mu e_L^- \quad (9.2)$$

и не содержит $\bar{\nu} \gamma^\mu \nu$ -члена. Ни $A_\mu^{(3)}$, ни B_μ и никакая их линейная комбинация с нейтрино не взаимодействуют.

Другая возможность состоит в добавлении нейтрального E^0 к только что описанной схеме и группировке лептонов в два дублета

$$\begin{pmatrix} (\nu + E^0) \sqrt{2} \\ e^- \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} E^+ \\ (\nu - E^0) / \sqrt{2} \end{pmatrix}_L \quad (9.3)$$

с $Y = -1$ и $Y = +1$ соответственно. Гиперзарядовый ток

$$\frac{1}{2} [(\bar{\nu}_L + \bar{E}_L^0) \gamma^\mu (\nu_L + E_L^0) - (\bar{\nu}_L - \bar{E}_L^0) \gamma^\mu (\nu_L - E_L^0)]$$

и $j_{\mu}^{(3)}$ не содержат членов вида $\bar{\nu}\gamma^{\mu}\nu$. В такой модели разрешена реакция $\nu + e^{-} \rightarrow E^0 + e^{-}$ при достаточно высоких энергиях, но отсутствует упругое νe -рассеяние. Первая известна как ЛПЗ-модель, вторая — как ПЗ-модель II.

Совершенно другая идея была предложена Джорджи и Глэшоу. В их модели вместо $SU(2) \otimes U(1)$ роль базисной калибровочной группы играет $O(3)$. Тогда имеется только один нейтральный ток, и он должен быть $j^{(3M)}$. В этой модели вообще отсутствуют другие нейтральные токи, так что отсутствует нарушение четности в электромагнитных процессах типа $e^{-} + e^{-} \rightarrow e^{-} + e^{-}$ или $e^{-} + p \rightarrow e^{-} + p$.

Простейший способ реализовать эту идею состоит в добавлении нейтрального лептона E^0 и объединении его вместе с E^{+} , ν и e^{-} в триплет:

$$L = \begin{pmatrix} E^{+} \\ \nu \sin \beta + E^0 \cos \beta \\ e^{-} \end{pmatrix}_L. \quad (9.4)$$

E^0 должен иметь массу, так что можно образовать и правосторонний триплет:

$$R = \begin{pmatrix} E^{+} \\ E^0 \\ e^{-} \end{pmatrix}_R. \quad (9.5)$$

Имеется также левосторонний синглет

$$(E^0 \sin \beta - \nu \cos \beta)_L.$$

Взаимодействие лептонов с калибровочными полями A_{μ}^i , согласно общему предписанию, имеет вид

$$g A_{\mu}^i j^{\mu i} = A_{\mu}^{(0)} j^{\mu(0)} + A_{\mu}^{+} j^{\mu+} + A_{\mu}^{-} j^{\mu-}, \quad (9.6)$$

где

$$A_{\mu}^{\pm} = (A_{\mu}^{(1)} \mp i A_{\mu}^{(2)}) / \sqrt{2}, \quad (9.7)$$

$$j_{\mu}^{\pm} = (j_{\mu}^{(1)} \pm i j_{\mu}^{(2)}) / \sqrt{2},$$

и поэтому

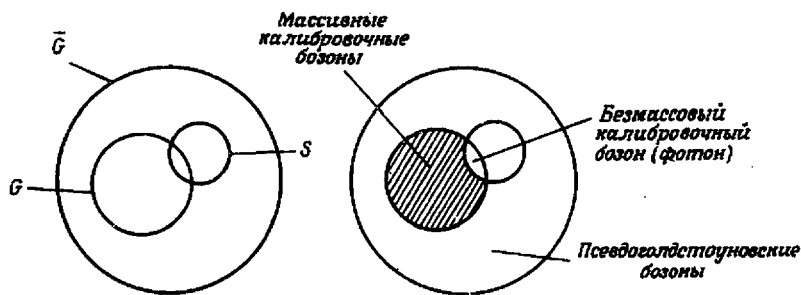
$$j_{\mu}^{\pm} = \bar{L}_{\alpha} \gamma_{\mu} T_{\alpha\beta}^{\pm} L_{\beta} + \bar{R}_{\alpha} \gamma_{\mu} T_{\alpha\beta}^{\pm} R_{\beta}, \quad (9.8)$$

$$j_{\mu}^{(0)} = \bar{L}_{\alpha} \gamma_{\mu} T_{\alpha\beta}^0 L_{\beta} + \bar{R}_{\alpha} \gamma_{\mu} T_{\alpha\beta}^0 R_{\beta}.$$

24. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., **28**, 1968 (1972).

25. Weinberg S., Phys. Rev., **D7**, 2887 (1973).

Рассмотренная здесь идея состоит в том, что \bar{G} включает некоторую приближенную симметрию адронов и обсуждаемые псевдоголдстоуновские бозоны являются предполагаемыми голдстоуновскими



Фиг. 10.1. Схематическое представление алгебр G , G и S и их соответствие массивным и безмассовым калибровочным бозонам и псевдоголдстоуновским бозонам.

бозонами (типа пионов), наблюдающимися в природе. Такой подход позволяет делать далеко идущие выводы относительно симметрий адронов и их нарушения. Но на его основе не построено никакой реалистической модели.

Часть II

КВАНТОВАНИЕ И ПЕРЕНОРМИРОВКА КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

11. КВАНТОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ

Каждый представляет себе, что должен был испытывать Кавальери, когда он вычислял объем пирамиды до изобретения интегрального исчисления.

Р.П. Фейнман

В этом разделе мы развиваем процедуру квантования, основанную на понятии интегрирования по путям. Первый намек на эту процедуру появился в статье Дирака в 1933 г., законченный вид метод приобрел в работе Фейнмана в 1948 г. Вначале будет рассмотрена квантовомеханическая система с одной степенью свободы; обобщение на квантовую теорию поля будет дано в следующем разделе.

Пусть $|q, t\rangle_{\text{H}}$ — вектор состояния в представлении Гейзенберга, описывающий состояние, которое в момент t является собственным для координаты Q_{H} с собственным значением q :

$$\begin{aligned} Q_{\text{H}}(t) |q, t\rangle_{\text{H}} &= q |q, t\rangle_{\text{H}}, \\ Q_{\text{H}}(t) &= e^{iHt} Q_{\text{S}} e^{-iHt}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где Q_{S} — не зависящий от времени оператор положения в представлении Шредингера, а H в экспоненте — гамильтониан.

Состояние

$$|q\rangle = e^{-iHt} |q, t\rangle_{\text{H}}$$

является собственным для Q_{S} с собственным значением q .

$$Q_{\text{S}} |q\rangle = q |q\rangle$$

и

$$|q, t\rangle_{\text{H}} = e^{iHt} |q\rangle. \quad (11.2)$$

Матричный элемент преобразования

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) &= {}_{\text{H}} \langle q', t' | q, t \rangle_{\text{H}} = \\ &= \langle q' | \exp\{-iH(t' - t)\} | q \rangle \end{aligned} \quad (11.3)$$

где $\phi \cdot R$ означает $s^+ e_R^- + s^- E_R^+ + \phi^0 E_R^0$. Заменяя ϕ^0 на ν , мы видим, что (9.22) дает еще один массовый член в лагранжиане. Он равен

$$G_1 \nu [\bar{E}^+ E^+ - \bar{R}^- e^-] + \sin \beta G_2 \nu \bar{E}^0 E^0 - \frac{1}{2} \cos \beta G_2 \nu [(1 + \gamma_5) E^0 + \bar{E}^0 (1 - \gamma_5) \nu] \quad (9.23)$$

Из (9.21) и (9.23) получается массовая матрица, которую нам следует диагонализировать и затем наложить условие, чтобы поле, обозначенное через ν , действительно было безмассовым. (Так как левосторонних нейтральных фермионов на один больше, чем правосторонних, должно существовать по крайней мере одно безмассовое левостороннее поле.) Это условие дает [согласно (9.21) и (9.23)]

$$m_0 \sin \beta + G_2 \nu \cos \beta = 0. \quad (9.24)$$

Тяжелые лептоны, которые появляются в обсуждаемых моделях, на самом деле могут быть достаточно легкими, и если они существуют, то их можно открыть гораздо раньше тяжелых векторных мезонов. Все, что мы реально знаем, это то, что все тяжелые лептоны тяжелее K -мезона. Вероятно, наиболее легко они могут рождаться на встречных $e^+ e^-$ -пучках, что может дать нижнюю границу на их массы, близкую к энергии пучка. Были изучены также реакции типа $\nu + p \rightarrow E^+ +$ адроны; оказалось, что они возможны при энергиях ускорителя NAL . Все моды распада типа $E^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_e$, $E^+ \rightarrow \nu_e + \mu^+ + \nu_\mu$, $E^+ \rightarrow E^0 +$ адроны или $E^+ \rightarrow \nu_e +$ адроны можно было бы легко идентифицировать по кажущемуся нарушению сохранения импульса. Некоторые ссылки на недавние работы перечислены в библиографии.

Массы фермионов можно выразить через m_0 , G_1 , G_2 и ν :

$$\begin{aligned} m_{E^+} &= m_0 - G_1 \nu, \\ m_{E^0} &= \cos \beta m_0 - \sin \beta G_2 \nu, \\ m_{e^-} &= m_0 + G_1 \nu. \end{aligned} \quad (9.25)$$

Из первого и третьего выражений в (9.25) получаем

$$m_0 = \frac{1}{2} (m_{E^+} + m_{e^-}), \quad (9.26)$$

а из остающегося выражения и (9.24) —

$$m_{E^+} + m_{e^-} = 2 \cos \beta m_{E^0}, \quad (9.27)$$

что представляет собой общее ограничение на массы лептонов в этой модели. Далее, из (9.19), (9.25) — (9.27) следуют

$$G_2 = -(e/\mu) \sin \beta m_{E^0} \quad (9.28)$$

и

$$G_1 = (e/\mu) (m_{e^-} - m_{E^+})/2 = (e/\mu) (m_{e^-} - \cos \beta m_{E^0}). \quad (9.29)$$

Таким образом, все константы взаимодействия между фермионами и скалярами выражены через β и массы e^- и E^0 . В другом варианте β можно выразить через три массы с помощью (9.27). Эти результаты мы используем в части II при вычислении аномального магнитного мюона в этой модели.

ЛИТЕРАТУРА

Модели, описанные здесь, предложены в работах:

1. *Georgi H., Glashow S.L.*, Phys. Rev. Lett., **28**, 1494 (1972).
2. *Lee B.W.*, Phys. Rev., **D6**, 1188 (1972).
3. *Prentki J., Zumino B.*, Nucl. Phys., **B47**, 99 (1972).

В этих статьях обсуждается также включение адронов в модели.

Обзор феноменологии тяжелых лептонов, включая вычисления сечений рождения и парциальных ширин в различных моделях см. в:

4. *Perl M.L.*, Searches for Heavy Leptons and Anomalous Leptonic Behavior — The Past and the Future, SLAC report SLAC-PUB-1062. (1972), не опубликовано.
5. *Bjorken J.D., Llewellyn-Smith L.H.*, Phys. Rev. **D7**, 1997 (1973).

10. ЕЩЕ О ПОСТРОЕНИИ МОДЕЛЕЙ

Искусству совсем не надо копировать Вселенную — хватит и ее одной.

Ребекка Вест

В этом разделе мы попытаемся описать различные варианты калибровочных моделей слабых и электромагнитных взаимодействий, основанных на $O(3)$ и $U(2)$, дефекты этих вариантов и другие возможные способы моделирования. Мы не будем подробно останавливаться ни на какой идее, а попробуем дать их панорамный обзор. Длинный

исчерпывающий список недавних статей и препринтов мы давать не будем, процитируем лишь наиболее характерные работы, которые мы хотя бы отчасти продумали.

Мы знаем несколько моделей, основанных на $SU(2)$ - или $U(2)$ -калибровочных симметриях. Основная схема моделирования такова:

- 1) выбираем калибровочную группу;
- 2) выбираем представление хиггсовских скаляров и приписываем им заряды;
- 3) выбираем представление киральных фермионов спина $\frac{1}{2}$;
- 4) связываем инвариантно калибровочные поля с хиггсовскими скалярами и фермионами;
- 5) вводим инвариантное и перенормируемое самодействие хиггсовских полей таким образом, чтобы потенциал достигал минимума при ненулевом вакуумном среднем нейтрального хиггсовского поля;
- 6) вводим инвариантное взаимодействие хиггсовских полей с фермионами.

Когда все это выполнено, то оказывается, что

- а) некоторые калибровочные бозоны приобретают массу:

$$\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi + g W_\mu \phi)^2 \rightarrow \frac{1}{2} g^2 \langle \phi \rangle^2 W_\mu^2;$$

- б) некоторые фермионы приобретают массу:

$$f (\Psi_R \Psi_L \phi + \text{э.с.}) \rightarrow f \langle \phi \rangle \bar{\Psi} \Psi;$$

в) по крайней мере один векторный бозон остается безмассовым, поскольку сохранение электрического заряда не нарушено;

г) некоторые из хиггсовских полей подвергаются превращению: они преобразуются в продольные компоненты массивных векторных бозонов.

В этой схеме левосторонний лептон (e_L или μ_L) и его нейтрино помещаются в один мультиплет группы $SU(2)$, правосторонняя компонента — в другой, причем, когда это необходимо, изобретаются тяжелые лептоны. Если мультиплеты выбраны так, что $Q = T_3$, то нет необходимости в нейтральном массивном векторном бозоне, и объединение достигается в рамках $O(3)$. В противном случае необходима $SU(2) \otimes U(1)$. Бьёркен и Ллевеллин-Смит рассмотрели много схем этого типа; см.:

1. *Bjorken J. D., Llewellyn-Smith C. H., Phys. Rev., D7. 887, (1973), Appendix A.*

До сих пор мы закрывали глаза на нарушение CP в слабых взаимодействиях. Было несколько попыток включить его в единую калибровочную модель; см.:

2. *Mohapatra R. N.*, *Phys. Rev.*, **D6**, 2023 (1972).

3. *Pais A.*, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 1712 (1973).

Последняя схема основана на группе $O(4)$, что само по себе заслуживает внимания.

Механизм Хиггса дает также другой, совершенно отличный от изложенных идей способ построения перенормируемых моделей сильных взаимодействий, основанный на понятии "алгебры полей"; см.:

4. *Lee T. D.*, *Weinberg S.*, *Zumino B.*, *Phys. Rev. Lett.*, **18**, 1029 (1967).

Алгебра полей есть теоретико-полевое выражение векторной доминантности с помощью приравнивания адронных токов массивным калибровочным бозонам. Ранее массовый член для калибровочных бозонов вставлялся руками, и такая процедура нарушала перенормируемость теории. Механизм Хиггса позволяет наделить калибровочные мезоны массами. Это впервые было отмечено 'тОфтом:

5. 't *Hoofst G.*, *Nucl. Phys.*, **B35**, 167 (1971), и затем изучено и обобщено:

6. *Lee B. W.*, *Zinn-Justin J.*, *Phys. Rev.*, **D5**, 3137 (1972).

7. *Bardakci K.*, *Halpern M. B.*, *Phys. Rev.*, **D6**, 696 (1972).

Число применений этой идеи к физике велико, например 'тОфт рассмотрел с этой точки зрения π^+ - π^0 -разность масс. Другие применения см. в работах:

8. *Bardakci K.*, *Nucl. Phys.*, **B51**, 174 (1973).

9. *Georgi H.*, *Goldman T.*, *Phys. Rev. Lett.*, **30**, 514 (1973).

10. *Freedman D. Z.*, *Kummer W.*, *Phys. Rev.*, **D7**, 1829 (1973).

11. *Duncan A.*, *Schatter P.*, *Phys. Rev.*, **D7**, 1861 (1973).

Было много попыток включить три триплета строительных блоков адронов (такие, как схемы Хана-Намбу или схемы кварков трех цветов), что, по-видимому, более удобно для согласования различных аспектов физики адронов. См.:

12. *Lipkin H.*, *Phys. Rev. Lett.* **28**, 63 (1972).

13. *Georgi H.*, *Glashow S. L.*, *Phys. Rev.*, **D7**, 561 (1973).

14. *Tonin M.*, препринт.

15. *Achiman Y.*, *Weinberg's Gauge Model for Weak and Electromagnetic Interactions with Han-Nambu Quarks*, Heidelberg, препринт.

16. *Beg M. A. B., Zee A., Phys. Rev. Lett.* **30**, 675 (1973).

Дефектом рассмотренных в предыдущих разделах моделей является их неспособность описывать адроны реалистическим и "естественным" образом. Проиллюстрируем это замечание на схеме, обсуждавшейся в разд. 8, в которой в модель Вейнберга—Салама включен квартет фундаментальных строительных блоков адронов спина $\frac{1}{2}$. Необходимость включения четырех, а не трех таких объектов возникла из-за отсутствия нейтрального тока с $\Delta S = \pm 1$, и этот факт не следует рассматривать как дефект. Скорее, его следует рассматривать как предвестие, возможно, нового измерения в спектроскопии адронов с новым квантовым числом, связанным с "четвертым кварком". Дефект же состоит в том, что приближенные симметрии адронов, такие, как $SU(2)$, $SU(3)$ или киральная $SU(2) \otimes SU(2)$ чисто случайны в этой схеме. Например, изоспиновая симметрия адронов $SU(2)$ должна объясняться в этой схеме как следствие приближенного равенства m_p и m_n , чего не требуют калибровочная или другие симметрии лагранжиана. Долгое время у физиков, занимающихся частицами, существовало убеждение (предубеждение?), что протон-нейтронная разность масс обусловлена электромагнитным, а также, возможно, слабым взаимодействием, так что в окончательной теории разность масс должна быть вычислима. В обсуждаемой модели разность масс не только не нуль (даже в низшем порядке), но является свободным параметром.

В следующих статьях обсуждаются различные условия, при которых внутримюльтиплетные разности масс вычислимы, а также определение вычислимости:

17. *Weinberg S., Phys. Rev. Lett.*, **29**, 388 (1972).

18. *Georgi H., Glashow S.L., Phys. Rev.*, **D6**, 2977 (1972).

19. *Hagiwara T., Lee B.W., Phys. Rev.*, **D7**, 459 (1973).

20. *Georgi H., Glashow S.L., Phys. Rev.*, **D8**, 2457 (1973).

Основное соображение, лежащее в основе этих работ, состоит в том, что любое соотношение, справедливое в низшем порядке в присутствии всех калибровочно-инвариантных контрчленов перенормировки, также справедливо (с точностью до вычисляемых поправок) и в высших порядках.

Таким образом, если мы хотим, чтобы разность масс внутри мультиплета адронов была вычислима, соответствующую симметрию адронов не должен нарушать никакой перенормировочный контрчлен

в лагранжиане. Дальнейшее развитие в моделировании должно было бы идти в направлении построения таких моделей, в которые адронные симметрии включались бы естественным образом. В этом направлении достигнуты два важных результата. Первый представлен в работах Барса, Халперна, Йошимуры и де Вита:

21. *Bars I., Halpern M. B., Yoshimura M.*, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 969 (1972).

22. *de Wit B.*, *Nucl. Phys.*, **851**, 237 (1973).

В моделях, предложенных этими авторами, адронные и лептонные миры рассматриваются как разделенные всюду, кроме одной точки; каждый из них имеет свой собственный набор калибровочных бозонов; два мира сообщаются друг с другом только через посредство хиггсовских мезонов нового типа, которые переносят как лептонные, так и адронные квантовые числа и ненулевое вакуумное среднее которых приводит к связи двух типов калибровочных бозонов во многом тем же способом, что и в алгебре полей. Следующая работа очень похожа в этом отношении на две вышеуказанные:

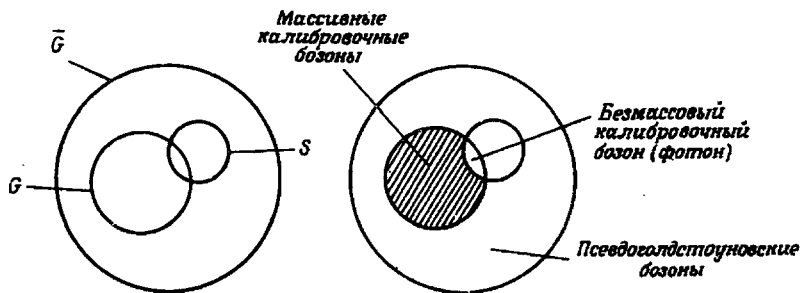
23. *Pati J. C., Salam A.*, *Phys. Rev.*, **D8**, 1240 (1973).

Второй результат, вероятно, более глубок по своей идее. Вейнберг отмечает, что при определенных условиях потенциал хиггсовских скалярных полей обязательно имеет симметрию \bar{G} , большую, чем калибровочная симметрия слабых и электромагнитных взаимодействий. Если симметрия \bar{G} спонтанно нарушена таким образом, что вакуумное среднее скалярных полей, определяемое из условия минимума потенциала, оставляет ненарушенной подгруппу S , $S \subset \bar{G}$, тогда в *низшем порядке* имеются голдстоуновские бозоны, соответствующие генераторам смежных классов \bar{G}/S . Предположительно в реалистическом мире пересечение $G \subset S$ должно давать $U(1)$, что соответствует сохранению электрического заряда. Голдстоуновские бозоны, отвечающие остающимся генераторам калибровочной группы G , являются нефизическими хиггсовскими скалярами, которые становятся продольными компонентами массивных векторных бозонов. Остающиеся голдстоуновские бозоны, которые не соответствуют никаким генераторам группы G полного лагранжиана, приобретают вычисляемую массу в высших порядках из-за того, что псевдосимметрия \bar{G} нарушается слабыми и электромагнитными взаимодействиями, и называются псевдоголдстоуновскими бозонами (фиг. 10.1).

24. Weinberg S., Phys. Rev. Lett., **28**, 1968 (1972).

25. Weinberg S., Phys. Rev., **D7**, 2887 (1973).

Рассмотренная здесь идея состоит в том, что \bar{G} включает некоторую приближенную симметрию адронов и обсуждаемые псевдоголдстоуновские бозоны являются предполагаемыми голдстоуновскими



Фиг. 10.1. Схематическое представление алгебр G , G и S и их соответствие массивным и безмассовым калибровочным бозонам и псевдоголдстоуновским бозонам.

бозонами (типа пионов), наблюдающимися в природе. Такой подход позволяет делать далеко идущие выводы относительно симметрий адронов и их нарушения. Но на его основе не построено никакой реалистической модели.

Часть II

КВАНТОВАНИЕ И ПЕРЕНОРМИРОВКА КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ

11. КВАНТОВАНИЕ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ

Каждый представляет себе, что должен был испытывать Кавальери, когда он вычислял объем пирамиды до изобретения интегрального исчисления.

Р.П. Фейнман

В этом разделе мы развиваем процедуру квантования, основанную на понятии интегрирования по путям. Первый намек на эту процедуру появился в статье Дирака в 1933 г., законченный вид метод приобрел в работе Фейнмана в 1948 г. Вначале будет рассмотрена квантовомеханическая система с одной степенью свободы; обобщение на квантовую теорию поля будет дано в следующем разделе.

Пусть $|q, t\rangle_H$ — вектор состояния в представлении Гейзенберга, описывающий состояние, которое в момент t является собственным для координаты Q_H с собственным значением q :

$$\begin{aligned} Q_H(t) |q, t\rangle_H &= q |q, t\rangle_H, \\ Q_H(t) &= e^{iHt} Q_S e^{-iHt}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

где Q_S — не зависящий от времени оператор положения в представлении Шредингера, а H в экспоненте — гамильтониан.

Состояние

$$|q\rangle = e^{-iHt} |q, t\rangle_H$$

является собственным для Q_S с собственным значением q .

$$Q_S |q\rangle = q |q\rangle$$

и

$$|q, t\rangle_H = e^{iHt} |q\rangle. \quad (11.2)$$

Матричный элемент преобразования

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) &= {}_H \langle q', t' | q, t \rangle_H = \\ &= \langle q' | \exp\{-iH(t'-t)\} | q \rangle \end{aligned} \quad (11.3)$$

играет фундаментальную роль в квантовой механике. Перейдем к представлению $F(q', t'; q, t)$ в виде интеграла по путям. Разделим временной интервал на $n + 1$ равных отрезков и определим

$$t_l = l\epsilon + t, \quad t' = (n + 1)\epsilon + t. \quad (11.4)$$

Используя полноту векторов состояния $|q_l, t_l\rangle$, запишем

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) &= \int dq_1(t_1) \int dq_2(t_2) \dots \int dq_n(t_n) \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \\ &\quad \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \\ &\quad \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Здесь и в дальнейшем мы опускаем индекс H и подразумеваем, что $|q, t\rangle$ означает состояние в картине Гейзенберга. При достаточно больших n временной интервал $t_l - t_{l-1}$ можно сделать как угодно малым, поэтому можно написать

$$\begin{aligned} \langle q', \epsilon | q, 0 \rangle &= \langle q' | e^{-i\epsilon H} | q \rangle = \\ &= \delta(q - q') - i\epsilon \langle q' | H | q \rangle + \\ &\quad + O(\epsilon^2), \end{aligned} \quad (11.6)$$

где первое равенство следует из (11.3).

Гамильтониан $H = H(P, Q)$ является функцией операторов P и Q . Рассмотрим случай, когда H имеет вид

$$H = \frac{1}{2} P^2 + V(Q). \quad (11.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle q' | H(P, Q) | q \rangle &= \int (dp/2\pi) \exp\{ip(q' - q)\} [\frac{1}{2} p^2 + V(q)] = \\ &= \int (dp/2\pi) \exp\{ip(q' - q)\} H(p, \frac{1}{2}(q + q')), \end{aligned} \quad (11.8)$$

где $H(p, q)$ есть классический гамильтониан. С точностью до членов первого порядка по ϵ (11.6) можно представить в виде

$$\begin{aligned} \langle q_l, t_l | q_{l-1}, t_{l-1} \rangle &\approx \int (dp/2\pi) \exp\{i\{p(q_l - q_{l-1}) - \\ &\quad - \epsilon H(p, \frac{1}{2}(q_l + q_{l-1}))\}\}. \end{aligned} \quad (11.9)$$

Подставляя (11.9) в (11.5), мы получаем следующее выражение для амплитуды вероятности того, что в момент t' значение координаты будет q' для состояния, которое в более раннее время t было собственным состоянием оператора координаты с собственным значением q :

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^{n+1} dq_j \prod_{j=1}^{n+1} (dp_j/2\pi) \exp\{i \sum_{j=1}^{n+1} \\ &\quad [p_j(q_j - q_{j-1}) - H(p_j, \frac{1}{2}(q_j + q_{j-1}))(t_j - t_{j-1})]\}, \end{aligned} \quad (11.10)$$

где $q_0 = q$, $q_{n+1} = q'$.

Несколько упростим обозначения. Запишем (11.10) в виде

$$F(q', t'; q, t) = \int [dq dp / 2\pi\hbar] \exp \left\{ (i/\hbar) \int_t^{t'} (p\dot{q} - H(p, q)) dt \right\}, \quad (11.11)$$

что представляет собой наводящую на размышление краткую запись операции, подразумеваемой в правой части соотношения (11.10). В выражении (11.11)

$$\int [dq dp / 2\pi\hbar] = \int \prod_{\tau} dq(\tau) dp(\tau) / 2\pi\hbar. \quad (11.12)$$

Мы восстановили \hbar (которое равнялось 1 в выбранной нами системе единиц), чтобы указать, что функциональное интегрирование идет по всему фазовому объему $\int (\Delta q \Delta p / h)$ для всех времен между t и t' .

Если гамильтониан имеет вид (11.7), p -интегрирование в правой части (11.10) можно выполнить явно с помощью формулы

$$\int_{-\infty}^{\infty} (dp / 2\pi) \exp \left\{ i \left(pq - \frac{1}{2} p^2 \epsilon \right) \right\} = [2\pi i \epsilon]^{-1/2} \exp(iq^2 / 2\epsilon). \quad (11.13)$$

Результат имеет вид

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n \frac{dq_j}{[2\pi i \epsilon]^{1/2}} \\ &\exp \left\{ i \sum_{j=1}^{n+1} \epsilon \left[\frac{1}{2} \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{\epsilon} \right)^2 - V \left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) \right] \right\} = \\ &= \int \left[\frac{dq}{[2\pi i \epsilon]^{1/2}} \exp \left\{ i \int_t^{t'} L(q, \dot{q}) dt \right\} \right], \end{aligned} \quad (11.14)$$

где лагранжиан

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 - V(q) \quad (11.15)$$

и

$$q_0 = q(t), \quad q_{n+1} = q'(t').$$

Величина

$$S = \int L(q, \dot{q}) dt \quad (11.16)$$

представляет собой действие, которое генерирует развитие во времени квантовомеханической системы, описываемой лагранжианом (11.15).

(11.14) выведено в рамках обычного формализма квантовой механики. Напротив, можно начать с (11.14) и вывести уравнение Шре-

дингера. Все эти и многие другие, относящиеся сюда вопросы, обсуждены в оригинальной статье Фейнмана. В ческольких простых случаях функциональное интегрирование в (11.14) может быть выполнено явно.

Если гамильтониан не имеет вида (11.7), следует указывать способ упорядочения операторов P и Q . Мы *предположим*, что существует способ упорядочения операторов в квантовомеханическом гамильтониане $H(P, Q)$, так что матрица преобразования $F(q', t'; q, t)$ корректно определяется выражением (11.10) для этого гамильтониана, причем подразумевается, что в случаях, когда существует произвол, интегрирование по p_j должно быть выполнено до q -интегрирования. Если гамильтониан не имеет вида (11.7), выражение (11.10) следует использовать для построения "эффективного действия" $S_{\text{эфф}}$, т.е. величины, которая заменяет действие в (11.14) после того, как выполнено p_j -интегрирование. В общем случае $S_{\text{эфф}}$ не совпадает с выражением (11.16).

В качестве иллюстрации применим это предписание к нелинейному лагранжиану

$$L = \frac{1}{2} \dot{q}^2 f(q), \quad (11.17)$$

где $f(q)$ — несингулярная функция q . (11.17) описывает частный класс систем с потенциалом, зависящим от скорости. Импульс p , канонически сопряженный q , равен

$$p = \partial L / \partial \dot{q} = \dot{q} f(q),$$

и гамильтониан есть

$$H(p, q) = p\dot{q} - L = \frac{1}{2} p^2 [f(q)]^{-1}.$$

Из выражения (11.10) матричный элемент преобразования

$$\begin{aligned} F(q', t'; q, t) = & \int \prod_{j=1}^n dq_j \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_j}{2\pi} \exp - \\ & - [i \sum_{j=1}^{n+1} \{ p_j (q_j - q_{j-1}) - \\ & - \varepsilon p_j^2 [f(\frac{q_j + q_{j-1}}{2})]^{-1} \}]. \quad (11.18) \end{aligned}$$

Как и ранее, p -интегрирование можно выполнить:

$$F(q^*, t^*; q, t) = \int \prod_{j=1}^n \frac{dq_j}{[2\pi i \epsilon]^{1/2}} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{n+1} \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{\epsilon} \right)^2 \right. \\ \left. f \left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) \right\} \prod_{j=1}^{n+1} \left[f \left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) \right]^{1/2}. \quad (11.19)$$

Последний множитель можно представить в виде

$$\prod_i \left[f \left(\frac{q_i + q_{i-1}}{2} \right) \right]^{1/2} = \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_i \ln f \left(\frac{q_i + q_{i-1}}{2} \right) \right\} = \\ = \exp \left\{ \frac{1}{2\epsilon} \sum \epsilon \ln f \left(\frac{q_i + q_{i-1}}{2} \right) \right\} \rightarrow \\ \rightarrow \exp \left\{ \frac{1}{2} \delta(0) \int dt \ln f(q) \right\}, \quad (11.20)$$

где использованы пределы

$$\sum_i \epsilon \rightarrow \int dt, \quad (1/\epsilon) \delta_{ij} \rightarrow \delta(t_i - t_j). \quad (11.21)$$

Окончательно (11.19) можно представить в виде

$$F(q^*, t^*; q, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{j=1}^n \frac{dq_j}{[2\pi i \epsilon]^{1/2}} \exp \left[i \sum_{j=1}^n \epsilon \right. \\ \left. \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{q_j - q_{j-1}}{2} \right)^2 f \left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{i}{2\epsilon} \ln f \left(\frac{q_j + q_{j-1}}{2} \right) \right\} \right] = \\ = \int \left[\frac{dq}{[2\pi i \epsilon]^{1/2}} \exp(i S_{\text{эфф}}) \right], \quad (11.22)$$

где

$$S_{\text{эфф}} = \int dt [L(q, \dot{q}) - (i/2) \delta(0) \ln f(q)] = \int dt L_{\text{эфф}}(q, \dot{q}) \quad (11.23)$$

Этот результат впервые получили Ли и Янг.

Если $S_{\text{эфф}}$ используется для вычисления функции преобразования $F(q^*, t^*; q, t)$ или матрицы рассеяния, для частицы с этим лагранжианом $L_{\text{эфф}}$ будут возникать бесконечные члены, которые сократят яв-

но выписанный в символическом виде член $\delta(0)$. Чтобы провести вычисления, можно вернуться назад к явному виду в (11.22) до перехода к пределу $n \rightarrow \infty$, выполнить q_i -интегрирование и затем взять предел $n \rightarrow \infty$.

Преимущество, или даже разумность следования предписанию, которое приводит к (11.23), состоит в том, что результат, переписанный в виде

$$F(QT; qt) = \int [f^{1/2}(q) dq / \sqrt{2\pi i \epsilon}] \exp \{ i S(q, \dot{q}) \},$$

явно инвариантен относительно точечных преобразований координат. В общем случае представление функции преобразования как интеграла по путям позволяет выразить квантовомеханические величины через классический лагранжиан, так что появляется возможность изучить влияние различных симметрий классического лагранжиана на квантовомеханические величины.

Выведем некоторые свойства интеграла по путям, которые будут полезны при обобщении метода на квантовую теорию поля.

Прежде всего очевидно обобщение (11.11) на случай систем с более чем одной степенью свободы. Для системы с N степенями свободы (11.11) принимает вид

$$\begin{aligned} & \langle q'_1, q'_2, \dots, q'_N, t' | q_1, q_2, \dots, q_N, t \rangle = \\ & = \int \prod_{n=1}^N [dq_n dp_n / 2\pi\hbar] \exp \{ (i/\hbar) \int_t^{t'} [\sum_{n=1}^N p_n \dot{q}_n - H(p_i, q_i)] d\tau \}, \end{aligned} \quad (11.24)$$

где $q_n(t) = q_n$, $q_n(t') = q'_n$.

В остальной части этого раздела мы ограничимся случаем $N=1$; выражение (11.24) будет использовано при обобщении на теорию поля.

Далее вместо простой функции преобразования $\langle q', t' | q, t \rangle$ рассмотрим матричный элемент между $\langle q', t' |$ и $| q, t \rangle$ оператора координаты Q , взятого в момент времени t_0 . Значение t_0 ограничено интервалом $t' > t_0 > t$.

Запишем теперь $\langle q', t' | Q(t_0) | q, t \rangle$ так же, как и (11.15), полагая t_0 одним из t_i , например t_{i_0} . Тогда

$$\begin{aligned} \langle q', t' | Q(t_0) | q, t \rangle &= \int \prod_i dq_i \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \times \\ & \quad \times \langle q_n, t_n | q_{n-2}, t_{n-1} \rangle \dots \\ & \quad \langle q_{i_0+1}, t_{i_0+1} | q_{i_0}, t_{i_0} \rangle \times \langle q_{i_0}, t_{i_0} | Q(t_0) | q_{i_0-1}, t_{i_0-1} \rangle \dots \\ & \quad \langle q_1, t_1 | q, t \rangle. \end{aligned}$$

В этом выражении оператор $Q(t_0)$ стоит вслед за одним из его собственных состояний, так что $\langle q_0, t_0 | Q(t_0) | q_{i_0-1}, t_{i_0-1} \rangle$ становится $q_{i_0} \langle q_{i_0}, t_{i_0} | q_{i_0-1}, t_{i_0-1} \rangle$. Теперь можно использовать аргументы, приводящие к (11.10); при этом все останется без изменения, кроме того, что под знаком интеграла в правой части появится лишний множитель q_{i_0} . Вместо (11.11) получаем

$$\langle q', t' | Q(t_0) | q, t \rangle = \int [dq dp / 2\pi] q(t_0) \exp \left\{ i \int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p, q)] d\tau \right\}. \quad (11.25)$$

Далее выразим

$$\langle q', t' | Q(t_1) Q(t_2) | q, t \rangle$$

в виде интеграла по путям. Действуем, как и выше, выбирая t_1 и t_2 границами двух малых интервалов, на которые разбивается интервал $t' - t$. Если $t_1 > t_2$, можно написать

$$\begin{aligned} \langle q', t' | Q(t_1) Q(t_2) | q, t \rangle &= \int \prod_i dq_i \langle q', t' | q_n, t_n \rangle \times \\ &\times \langle q_n, t_n | q_{n-1}, t_{n-1} \rangle \dots \langle q_{i_1}, t_{i_1} | Q(t_1) | q_{i_1-1}, t_{i_1-1} \rangle \dots \\ &\dots \langle q_{i_2}, t_{i_2} | Q(t_2) | q_{i_2-1}, t_{i_2-1} \rangle \dots \langle q_1, t_1 | q, t \rangle. \end{aligned} \quad (11.26)$$

После проведения ряда преобразований, аналогичных тем, которые привели к (11.25), получим

$$\langle q', t' | Q(t_1) Q(t_2) | q, t \rangle = \int [dq dp / 2\pi] q(t_1) q(t_2) \exp \left\{ i \int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p, q)] d\tau \right\}. \quad (11.27)$$

(11.27) справедливо только в том случае, если $t_1 > t_2$. Если же было бы $t_2 > t_1$, мы не смогли бы вывести (11.26) и (11.27) методом, который мы использовали. И в самом деле, нетрудно видеть, что если $t_2 > t_1$, то правая сторона (11.27) равна

$$\langle q', t' | Q(t_2) Q(t_1) | q, t \rangle.$$

Поэтому интеграл по путям в (11.27) есть матричный элемент T -произведения

$$T[Q(t_1) Q(t_2)].$$

Полученный результат немедленно обобщается на произведение произвольного числа операторов Q :

$$\begin{aligned} \langle q', t' | T[Q(t_1) Q(t_2) \dots Q(t_N)] | q, t \rangle &= \\ &= \int [dp dq / 2\pi] q(t_1) q(t_2) \dots q(t_N) \exp \\ &\left\{ i \int_t^{t'} [p\dot{q} - H(p, q)] d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (11.28)$$

Далее выведем решающую теорему. Пусть L — лагранжиан, не зависящий явно от времени, и пусть $\varphi_n(q) = \langle q | n \rangle$ есть волновая функция собственного состояния энергии $|n\rangle$. В частности, $\varphi_0(q)$ будет основным состоянием. Вычислим амплитуду вероятности того, что система во время T' в отдаленном будущем будет находиться в основном состоянии, если в некоторый момент T в отдаленном прошлом она находилась в основном состоянии, а в промежутке между временами T и T' к лагранжиану L добавлялся член с произвольным внешним источником $J(t)q(t)$. Для этой цели рассмотрим

$$\langle Q', T' | Q, T \rangle^J = \int [dpdq/2\pi] \exp \left\{ i \int_T^{T'} [p\dot{q} - H(p, q) + Jq] dt \right\}, \quad (11.29)$$

где J — произвольная функция, за исключением того, что она отлична от нуля только между t и t' , где $T' > t' > t > T$. Тогда (11.29) можно переписать в виде

$$\langle Q', T' | Q, T \rangle^J = \int dq' \int dq \langle Q', T' | q', t' \rangle \langle q', t' | q, t \rangle^J \langle q, t | Q, T \rangle. \quad (11.30)$$

Далее $\langle q, t | Q, T \rangle$ и $\langle Q', T' | q', t' \rangle$ даются формулами типа (11.29) без члена $J(\tau)q(\tau)$. Вставим полный набор собственных состояний энергии в $\langle q, t | Q, T \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle q, t | Q, T \rangle &= \langle q | \exp \{ -iH(t-T) \} | Q \rangle = \\ &= \sum_n \varphi_n(q) \varphi_n^*(Q) \exp \{ -iE_n(t-T) \}. \end{aligned} \quad (11.31)$$

Зависимость от T в (11.31) известна явно, так как мы потребовали, чтобы $J(\tau) = 0$ для τ между t и T . Поэтому T можно продолжить на верхнюю половину мнимой оси. В пределе $T \rightarrow i\infty$ все члены с $n > 0$ выпадают и получается

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow i\infty} \exp(-iE_0 T) \langle q, t | Q, T \rangle &= \varphi_0(q, t) \varphi_0^*(Q), \\ \varphi_0(q, t) &= \varphi_0(q) \exp(-iE_0 t). \end{aligned} \quad (11.32)$$

Тот же анализ можно проделать для $\langle Q', T' | q', t' \rangle$. Поэтому при условии, что в пределе Q и Q' стремятся к некоторым константам, мы имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{T' \rightarrow -i\infty \\ T \rightarrow i\infty}} [\langle Q', T' | Q, T \rangle^J / \exp \{ -iE_0(T' - T) \} \varphi_0^*(Q) \varphi_0(Q')] &= \\ = \int dq' \int dq \varphi_0^*(q', t') \langle q', t' | q, t \rangle^J \varphi_0(q, t), \end{aligned} \quad (11.33)$$

что является теоремой, которую мы хотели доказать. Правая сторона (11.33) есть именно интересующая нас амплитуда перехода из основного состояния в основное состояние, так как t' и $-t$ можно взять сколько угодно большими. Обозначим ее символически через $W[J]$. Тогда (11.33) дает способ вычисления $W[J]$.

Почему амплитуда $W[J]$ интересна? В (11.33) $\langle q', t' | q, t \rangle^J$ дается выражением типа (11.29) с заменой T и T' на t и t' . Вариация W по $J(t_0)$ приводит к появлению множителя $i q(t_0)$ перед экспонентой. Прделаем это n раз и положим затем $J = 0$:

$$\lim_{J \rightarrow 0} \{\delta^n W[J] / \delta J(t_1) \delta J(t_2) \dots \delta J(t_n)\} =$$

$$= i^n \int dq \int dq' \varphi_0^*(q', t') \varphi_0(q, t) \int [dp dq / 2\pi] \exp \left\{ i \int_{t'}^{t} [p \dot{q} - H(p, q)] d\tau \right\} q(t_1) q(t_2) \dots q(t_n),$$

$$t' > t_1, t_2, \dots, t_n > t_n. \quad (11.34)$$

Сравнивая с (11.23), мы видим, что это выражение точно есть матричный элемент T -произведения $T(Q(t_1)Q(t_2)\dots Q(t_n))$ между основным состоянием в момент t и основным состоянием в момент t' . Поэтому (11.34) есть среднее значение в основном состоянии T -произведения координат. В теории поля это будут функции Грина.

Покажем, как $W[J]$ можно вычислить с помощью (11.33). С точностью до множителя, не зависящего от J , имеем

$$W[J] \sim \lim_{\substack{T' \rightarrow -i\infty \\ T \rightarrow i\infty}} \langle Q', T' | Q, T \rangle^J,$$

или

$$W[J] \sim \lim_{\substack{T' \rightarrow -i\infty \\ T \rightarrow i\infty}} \int [dq] \exp \left\{ i \int_T^{T'} dt [L_{\text{эфф}}(q, \dot{q}) + J(t)q(t)] \right\}. \quad (11.35)$$

В приложениях теории поля множители, не зависящие от J , несущественны, и мы не будем с ними церемониться.

Из (11.34) и следующего за ним замечания имеем

$$\langle T(Q(t_1)\dots Q(t_n)) \rangle_0 \sim \lim_{\substack{T' \rightarrow -i\infty \\ T \rightarrow i\infty}} \int dq_1 \dots dq_n \langle Q', T' | q_1, t_1 \rangle q_1$$

$$\langle q_1, t_1 | q_2, t_2 \rangle q_2 \dots q_n \langle q_n, t_n | Q, T \rangle,$$

где $t_1 > t_2 \dots > t_n$ и $\langle \dots \rangle_0$ означает среднее значение по основному состоянию. Продолжим $\langle T(Q(t_1) \dots Q(t_n)) \rangle_0$ аналитически по t_i от действительных значений к мнимым $t_i = -i\tau_i$. Так как

$$\langle q', t' | q, t \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_i (dq_i / \sqrt{2\pi i \epsilon}) \exp \{ i \sum_i \epsilon L_{\text{эфф}} \times \\ \times \left(\frac{q_i + q_{i-1}}{2}, \frac{q_i - q_{i-1}}{\epsilon} \right) \}$$

зависит от $t - t'$ только через ϵ

$$\epsilon = (t' - t)/(n + 1),$$

аналитическое продолжение достигается, если написать

$$\langle q', t' | q, t \rangle \Big|_{\substack{t = -i\tau \\ t' = -i\tau'}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_i \frac{dq_i}{\sqrt{2\pi \epsilon^*}} \\ \exp \left\{ \sum_i \epsilon^* L_{\text{эфф}} \left(\frac{q_i + q_{i-1}}{2}, \frac{q_i - q_{i-1}}{-i\epsilon^*} \right) \right\},$$

где

$$\epsilon^* = (\tau' - \tau)/(n + 1).$$

Таким образом, аналитическое продолжение $\langle T(Q(t_1) \dots Q(t_n)) \rangle_0$ можно представить в виде

$$\langle T(Q(t_1) \dots Q(t_n)) \rangle_0 \Big|_{t_k = -i\tau_k} \sim \lim_{\substack{\tau' \rightarrow \infty \\ \tau \rightarrow -\infty}} \int [dq] q(\tau_1) q(\tau_2) \dots \\ q(\tau_n) \exp \left\{ \int_{\tau}^{\tau'} L_{\text{эфф}}(q, i dq/d\tau) \right\}.$$

Это наводит на мысль перейти к формулировке с мнимым временем, или, иначе, к евклидовой формулировке, и определить

$$W_E[J] = \int [dq] \exp \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} d\tau [L_{\text{эфф}}(q, i dq/d\tau) + J(\tau) q(\tau)] \right\}. \quad (11.36)$$

Граничное условие, которое следует наложить на (11.36), таково: q стремится к некоторым константам при $\tau \rightarrow \pm \infty$. Удобно, но не необходимо выбрать эти константы равными нулю. Связь между $W[J]$ и $W_E[J]$ такова, что

$$\frac{1}{W[J]} \frac{\delta^n W[J]}{\delta J(t_1) \dots \delta J(t_n)} \Big|_{J=0} \\ = -i^n \frac{1}{W_E[J]} \frac{\delta^n W_E[J]}{\delta J(\tau_1) \dots \delta J(\tau_n)} \Big|_{J=0, \tau_k = it_k}, \quad (11.37)$$

где в правой части выполнено аналитическое продолжение. (11.37) явно не зависит от общих нормировок $W[J]$ и $W_F[J]$, которые не зависят от J .

Наконец, для иллюстрации формальных рассуждений, и в частности евклидовой формулировки, обсудим простой пример. Рассмотрим простой одномерный гармонический осциллятор, описываемый лагранжианом

$$L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2} (\dot{q}^2 - \omega^2 q^2). \quad (11.38)$$

Матрицу преобразования в присутствии внешнего источника J можно вычислить с помощью (11.29):

$$\langle q', t' | q, t \rangle^J = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{i=1}^n \frac{dq(t_i)}{\sqrt{2\pi i \epsilon}} \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau [L(q(\tau), \dot{q}(\tau)) + J(\tau)q(\tau)] \right\}, \quad (11.39)$$

где граничные условия есть $q(t') = q'$, $q(t) = q$. Интеграл можно вычислить явно. Проведение вычислений предложено в качестве задачи (с достаточным количеством указаний) в книге Фейнмана и Хиббса "Квантовая механика и интеграл по путям", стр. 77. Ответ сводится к

$$\langle q', t' | q, t \rangle^J = [\omega/2\pi i \sin \omega T]^{1/2} \exp \{ iQ(q', t', q, t) \}, \quad (11.40)$$

где

$$T = t' - t$$

и

$$Q(q', t', q, t) = \frac{\omega}{2 \sin \omega T} [(q^2 + q'^2) \cos \omega T - 2qq'] + \\ + \frac{q'}{\sin \omega T} \int_t^{t'} J(\tau) \sin \omega(\tau - t) d\tau + \frac{q}{\sin \omega T} - \frac{q'}{\sin \omega T} \int_t^{t'} J(\tau) \sin \omega(t' - \tau) d\tau - \\ - \frac{1}{\omega \sin \omega T} \int_t^{t'} d\sigma \int_t^\sigma J(\sigma) J(\tau) \sin \omega(t' - \tau) \sin \omega(\sigma - t) d\tau. \quad (11.41)$$

Вывод (11.41) оставляется читателю в качестве примера.

Величина $W[J]$, определенная в замечании после формулы (11.33), равна

$$W[J] = \langle 0, t' | 0, t \rangle^J = \int dq' \Phi_0^*(q', t') \int dq \Phi_0(q, t) \langle q', t' | q, t \rangle^J, \quad (11.42)$$

где "0" означает основное состояние, но не состояние с нулевым собственным значением координаты; φ_0 есть волновая функция основного состояния простого гармонического осциллятора

$$\varphi_0(q, \tau) = (\omega/\pi)^{1/4} \exp\left(-\frac{1}{2}\omega q^2\right) \exp\left(-i/2\omega\tau\right), \quad (11.43)$$

так что интеграл по q и q^* является гауссовым. Результат вычисления:

$$\langle 0, t^* | 0, t \rangle^J = \exp\left\{i \int_t^{t^*} d\gamma \int_t^\sigma d\tau J(\sigma) [(i/2\omega) \exp\{-i\omega(\sigma - \tau)\}] J(\tau)\right\}. \quad (11.44)$$

Обобщим результат, расширяя пределы интегрирования от $-\infty$ до $+\infty$. Если мы интересуемся эффектом действия на осциллятор внешней силы в период между t и t^* , мы можем считать, что $J(\tau)$ равен нулю вне этого интервала. Окончательно перепишем (11.44) в виде [см. Feynman R.P., Phys. Rev. **80**, 440 (1950)]

$$W[J] = \exp\left\{-i/2 \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma J(\tau) D_+(\tau - \sigma) J(\sigma)\right\}, \quad (11.45)$$

где

$$D_+(t) = (1/2i\omega) [\theta(t) e^{-i\omega t} + \theta(-t) e^{i\omega t}]. \quad (11.46)$$

Отметим, что

$$\begin{aligned} D_+(t - t^*) &= \frac{1}{W[J]} \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J(t) \delta J(t^*)} \Big|_{J=0}^* \\ &= \frac{\delta^2}{\delta J(t) \delta J(t^*)} \ln W[J] \Big|_{J=0}. \end{aligned} \quad (11.47)$$

В евклидовой формулировке (11.36) имеем

$$W_E[J] = \int [dq] \exp\{-S_E[J]\}, \quad (11.48)$$

где

$$\begin{aligned} S_E[J] &= \int_{-\infty}^{\infty} d\tau L_E(\tau), \\ L_E &= \frac{1}{2} (dq/d\tau)^2 + \frac{1}{2} \omega^2 q^2 - J(\tau)q(\tau). \end{aligned} \quad (11.49)$$

Разложим $q(\tau)$ около $q_0(\tau)$: $q(\tau) = q_0(\tau) + y(\tau)$, и затем S_E по степеням y :

$$S_E(q) = S_E(q_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\delta L_E}{\delta \dot{q}} \frac{dy}{d\tau} + \frac{\delta L_E}{\delta q} y \right\} \Big|_{q=q_0} + \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 + \frac{\omega^2}{2} q^2 \right\} d\tau. \quad (11.50)$$

Мы хотим выбрать $q_0(\tau)$ таким образом, чтобы в (11.50) исчезал член, линейный по y . Если граничные условия взяты в виде $q(\tau = \pm \infty) = 0$, потребуем также, чтобы $q_0(\tau = \pm \infty) = 0$. Тогда поверхностный член, возникающий при интегрировании по частям члена $(\delta L_E / \delta \dot{q})(dy/d\tau)$, исчезает, и мы потребуем, чтобы $q_0(\tau)$ удовлетворяла классическому уравнению движения:

$$\left\{ \frac{d}{d\tau} \frac{\delta L_E}{\delta \dot{q}(\tau)} - \frac{\delta L_E}{\delta q(\tau)} \right\} \Big|_{q=q_0(\tau)} = 0. \quad (11.51)$$

[Если q стремится к ненулевым константам q_{\pm} в пределах $\tau \rightarrow \pm \infty$, можно потребовать, чтобы $q_0 \rightarrow 0$ и $y \rightarrow q_{\pm}$. Тогда в (11.50) останутся поверхностные члены $\dot{q}_0(\pm \infty) q_{\pm}$. Однако из общего решения, полученного ниже, видно, что $\dot{q}_0(\pm \infty) = 0$, если $q_0(\pm \infty) = 0$.]

Подставим (11.50) в (11.48) и выполним интегрирование по путям. Член, линейный по y , отсутствует, так что мы имеем

$$W_E[J] \sim \exp\{-S_E(q_0)\} \int \prod_i dy(\tau_i) \exp\left\{-\int_{-\infty}^{\infty} [\dot{y}^2/2 + \omega^2 y^2/2] d\tau\right\}.$$

Интеграл по $y(\tau_i)$ есть просто число, не зависящее от J^2 , так что

$$W_E[J] \sim \exp\{-S_E(q_0)\}. \quad (11.52)$$

Вычислим $q_0(\tau)$. Из (11.51)

$$[d^2/d\tau^2 - \omega^2] q_0(\tau) = -J(\tau). \quad (11.53)$$

Определим евклидову функцию Грина $D_E(\tau)$ уравнением

$$[d^2/d\tau^2 - \omega^2] D_E(\tau) = \delta(\tau) \quad (11.54)$$

и граничными условиями $\lim_{\tau \rightarrow \pm \infty} D_E(\tau) = 0$.

Решение имеет вид

$$\begin{aligned} D_E(\tau) &= - \int_{-\infty}^{\infty} (d\nu/2\pi) e^{-i\nu\tau} / (\nu^2 + \omega^2) = \\ &= - e^{-\omega|\tau|} / 2\omega, \end{aligned} \quad (11.55)$$

и поэтому

$$q_0(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} D_E(\tau - \sigma) J(\sigma) d\sigma. \quad (11.56)$$

[При других граничных условиях общее решение равно (11.56) плюс общее решение однородного уравнения, именно $Ae^{-\omega t} + Be^{\omega t}$. Если q_0 стремится к константам как на $+\infty$, так и на $-\infty$, тогда $A = B = 0$, и из (11.56) следует, что $\dot{q}_0(\pm\infty)$ также равно нулю.]

Подставим $\omega^2 q_0(\tau)$ из (11.53) в определение (11.49) для S_E , проинтегрируем по частям и в результате с помощью (11.56) получим

$$\begin{aligned} S_E(q_0) &= - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} J(\tau) q_0(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} d\sigma J(\tau) D_E(\tau - \sigma) J(\sigma), \end{aligned} \quad (11.57)$$

так что из (11.52) следует

$$W_E[J] = \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau d\sigma J(\tau) D_E(\tau - \sigma) J(\sigma) \right\} \quad (11.58)$$

или

$$D_E(\tau - \tau') = - \frac{1}{W_E[J]} \left. \frac{\delta^2 W_E[J]}{\delta J(\tau) \delta J(\tau')} \right|_{J=0}.$$

Пропагатор $D_+(t)$ можно получить аналитическим продолжением по τ , переходя против часовой стрелки от действительных τ к мнимым τ :

$$D_+(t) = i D_E(it), \quad (11.59)$$

что дает выражение (11.46).

Отметим, что функциональный интеграл в (11.36) является хорошо определенным гауссовым интегралом (или, более точно, интегралом Винера — Хопфа).

Выкладки можно упростить, если амплитуду перехода из основного состояния в основное состояние для действительного времени записать в виде

$$\begin{aligned} W[J] &\sim \int [dq(t)] \exp \left\{ i \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2} (dq(t)/dt)^2 - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} (\omega^2 - i\epsilon) q^2(t) + J(t) q(t) \right] dt \right\}. \end{aligned} \quad (11.60)$$

Тогда можно повторить анализ, проведенный в евклидовой формулировке, используя непосредственно (11.60), и получить (11.45) и (11.46). Добавка $i\epsilon$ в (11.60) служит для выделения корректных граничных условий для пропагатора:

$$D_+(t) = \int_{-\infty}^{\infty} (dv/2\pi) \exp(-ivt) / (v^2 - \omega^2 + i\epsilon).$$

ЛИТЕРАТУРА

Основополагающими работами по формулировке квантовой теории с помощью интеграла по путям являются:

1. *Dirac P.A.M.*, *Physik. Z. Sowjetunion*, **3**, 64 (1933).
2. *Feynman R.P.*, *Rev. Mod. Phys.*, **20**, 267 (1948). (Имеется перевод в сб. "Новейшее развитие квантовой электродинамики", ИЛ, 1954.)
3. *Feynman R.P.*, *Phys. Rev.*, **80**, 440 (1950).

Эти статьи перепечатаны в:

4. *Schwinger J.* (ed.), *Quantum Electrodynamics* (Dover Publications, New York, 1958).

Учебником по этой теме является:

5. *Feynman R.P., Hibbs A.R.*, *Quantum Mechanics and Path Integrals*, McGraw-Hill, New York, 1965. (Имеется перевод: *Р. Фейнман, А. Хиббс*, Квантовая механика и интегралы по траекториям, изд-во "Мир", М., 1968).

О представлении выражения (11.11) в виде интеграла по путям см.:

6. *Garrod C.*, *Rev. Mod. Phys.*, **38**, 483 (1966).

См. также прекрасный обзор по этой теме:

7. *Finkelstein R.J., Kvitsky J.S., Mouton J.O.*, *Phys. Rev.*, **D4**, 2220 (1971).

Эффективное действие для потенциала, зависящего от скорости, было впервые получено Ли и Янгом:

8. *Lee T.D., Yang C.N.*, *Phys. Rev.*, **128**, 885 (1962).

Канонические преобразования обсуждаются в любой хорошей книге по классической механике. Например, см.:

9. *Goldstein H.*, *Classical Mechanics*, Addison Wesley, Reading, Mass., 1959, ch. 8 (Имеется перевод: *Г. Голдстейн*, Классическая механика, изд-во "Наука", М., 1975).

Проблема упорядочения операторов в потенциале, зависящем от скорости, обсуждалась в:

10. *Kawai T.*, *Progr. Theor. Phys.*, **48**, 2082 (1970).

11. *Kato H., Kawai T., Progr. Theor. Phys.*, **50**, 680 (1973) и цитированных здесь работах.

Вывод уравнения Шредингера для зависящего от скорости потенциала, что эквивалентно построению операторно-упорядоченного гамильтониана, соответствующего формулировке с помощью интеграла по путям, см. также в:

12. *DeWitt B. S., Rev. Mod. Phys.*, **29**, 377 (1957).

13. *Cheng K. S., Journ. Math. Phys.*, **13**, 1723 (1972).

Этот раздел включает несколько полезных замечаний Коулмена, Гросса, Треймана.

12. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ

Физика там, где есть Действие.

Неизвестный автор

Уже отмечалось, что обобщение метода, изложенного в разд. 11, на случай многих степеней свободы очевидно. Функция преобразования, определенная выражением (11.24), есть краткая запись формулы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{\alpha=1}^N \prod_{j=1}^n dq_{\alpha}(t_j) \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_{\alpha}(t_j)}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{n+1} \left\{ \sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha}(t_j) [q_{\alpha}(t_j) - q_{\alpha}(t_{j-1})] - \epsilon H(p(t_j), \frac{q(t_j) + q(t_{j-1}))}{2}) \right\} \right\} \quad (12.1)$$

Выражение (12.1) можно применить к теории поля. Рассмотрим нейтральное скалярное поле $\varphi(x)$. Разделим пространство на кубы объемом ϵ^3 и перенумеруем их целыми α . Определим α -ю координату $q_{\alpha}(t) = \varphi_{\alpha}(t)$ соотношением

$$\varphi_{\alpha}(t) \equiv (1/\epsilon^3) \int_{V_{\alpha}} d^3x \varphi(x, t).$$

где интегрирование проводится по α -й ячейке объемом ϵ^3 . Лагранжиан тоже можно переписать в виде¹⁾

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \rightarrow \sum_{\alpha} \epsilon^3 \mathcal{L}_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha}(t), \varphi_{\alpha}(t), \varphi_{\alpha \pm s}(t)),$$

1) Индекс s нумерует ячейки, соседние с данной. — *Прим. перев.*

где $\dot{\phi}_\alpha(t)$ есть среднее $\partial\phi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ по α -й ячейке и $\varphi_{\alpha \pm s}$ есть среднее значение поля в соседних ($\alpha \pm s$)-х ячейках.

Канонический импульс p_α , сопряженный φ_α , равен

$$p_\alpha(t) = \partial L / \partial \dot{\phi}_\alpha(t) = \varepsilon^3 \partial \mathcal{L}_\alpha / \partial \dot{\phi}_\alpha(t) \equiv \varepsilon^3 \pi_\alpha(t).$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{\phi}_\alpha - L = \sum_\alpha \varepsilon^2 \mathcal{H}_\alpha,$$

$$\mathcal{H}_\alpha = \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha(\pi_\alpha, \varphi_\alpha, \varphi_{\alpha \pm s}).$$

Выражение (12.1) можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int \prod_\alpha \prod_{j=1}^n d\varphi_\alpha(t_j) \prod_{j=1}^{n+1} (\varepsilon^3 / 2\pi) d\pi_\alpha(t_j) \exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon \sum_\alpha \varepsilon^3 \{ \pi_\alpha(t_j) [\varphi_\alpha(t_j) - \right. \\ & \left. - \varphi_\alpha(t_{j-1})] / \varepsilon - \mathcal{H}_\alpha(\pi_\alpha(t_j), [\varphi_\alpha(t_j) + \varphi_\alpha(t_{j-1})] / 2, [\varphi_{\alpha \pm s}(t_j) + \varphi_{\alpha \pm s}(t_{j-1})] / 2) \} \right] \equiv \\ & \equiv \int [d\varphi] [(\varepsilon^3 / 2\pi) d\pi] \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \int d^3x [\pi(\mathbf{x}, \tau) \dot{\varphi}(\mathbf{x}, \tau) - \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tau)] \right\}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

где

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \partial \mathcal{L} / \partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t),$$

по определению, плотность импульса, сопряженная $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Ее среднее по ячейке совпадает с $\pi_\alpha(t)$, определенным выше. В теории поля все физические величины можно получить из амплитуды перехода вакуум-вакуум в присутствии внешних источников. Физический вакуум есть основное состояние, и он играет ту же самую роль, что и состояние с волновой функцией $\varphi_0(q)$ в (11.33).

Эту амплитуду, которую мы обозначим через $W[J]$, можно вычислить из (12.2) с добавленным к лагранжиану членом $\int d^3x J(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t)$ в пределе $t' \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$. То есть

$$\begin{aligned} W[J] = & \int [d\varphi] [(\varepsilon^3 / 2\pi) d\pi] \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \{ \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{H}(x) + \right. \\ & \left. + (i\varepsilon/2) \varphi^2(x) + J(x) \varphi(x) \} \right]. \end{aligned} \quad (12.3)$$

11. *Kato H., Kawai T., Progr. Theor. Phys., 50, 680 (1973)* и цитированных здесь работах.

Вывод уравнения Шредингера для зависящего от скорости потенциала, что эквивалентно построению операторно-упорядоченного гамильтониана, соответствующего формулировке с помощью интеграла по путям, см. также в:

12. *DeWitt B. S., Rev. Mod. Phys., 29, 377 (1957)*.

13. *Cheng K. S., Journ. Math. Phys., 13, 1723 (1972)*.

Этот раздел включает несколько полезных замечаний Коулмена, Гросса, Треймана.

12. ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ПОЛЯ С ПОМОЩЬЮ ИНТЕГРАЛА ПО ПУТЯМ

Физика там, где есть Действие.

Неизвестный автор

Уже отмечалось, что обобщение метода, изложенного в разд. 11, на случай многих степеней свободы очевидно. Функция преобразования, определенная выражением (11.24), есть краткая запись формулы

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \prod_{\alpha=1}^N \prod_{j=1}^n dq_{\alpha}(t_j) \prod_{j=1}^{n+1} \frac{dp_{\alpha}(t_j)}{2\pi} \exp \left\{ i \sum_{j=1}^{n+1} \left[\sum_{\alpha=1}^N p_{\alpha}(t_j) [q_{\alpha}(t_j) - q_{\alpha}(t_{j-1})] - \epsilon H(p(t_j), \frac{q(t_j) + q(t_{j-1}))}{2}] \right] \right\} \quad (12.1)$$

Выражение (12.1) можно применить к теории поля. Рассмотрим нейтральное скалярное поле $\varphi(x)$. Разделим пространство на кубы объемом ϵ^3 и перенумеруем их целыми α . Определим α -ю координату $q_{\alpha}(t) = \varphi_{\alpha}(t)$ соотношением

$$\varphi_{\alpha}(t) \equiv (1/\epsilon^3) \int_{V_{\alpha}} d^3x \varphi(x, t).$$

где интегрирование проводится по α -й ячейке объемом ϵ^3 . Лагранжиан тоже можно переписать в виде¹⁾

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \rightarrow \sum_{\alpha} \epsilon^3 \mathcal{L}_{\alpha}(\dot{\varphi}_{\alpha}(t), \varphi_{\alpha}(t), \varphi_{\alpha \pm s}(t)),$$

¹⁾ Индекс s нумерует ячейки, соседние с данной. — *Прим. перев.*

где $\dot{\phi}_\alpha(t)$ есть среднее $\partial\phi(\mathbf{x}, t)/\partial t$ по α -й ячейке и $\varphi_{\alpha \pm s}$ есть среднее значение поля в соседних ($\alpha \pm s$)-х ячейках.

Канонический импульс p_α , сопряженный φ_α , равен

$$p_\alpha(t) = \partial L / \partial \dot{\phi}_\alpha(t) = \varepsilon^3 \partial \mathcal{L}_\alpha^0 / \partial \dot{\phi}_\alpha(t) \equiv \varepsilon^3 \pi_\alpha(t).$$

Гамильтониан имеет вид

$$H = \sum_\alpha p_\alpha \dot{\phi}_\alpha - L = \sum_\alpha \varepsilon^2 \mathcal{H}_\alpha,$$

$$\mathcal{H}_\alpha = \pi_\alpha \dot{\phi}_\alpha - \mathcal{L}_\alpha = \mathcal{H}_\alpha(\pi_\alpha, \varphi_\alpha, \varphi_{\alpha \pm s}).$$

Выражение (12.1) можно теперь записать в виде

$$\begin{aligned} & \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int \prod_\alpha \prod_{j=1}^n d\varphi_\alpha(t_j) \prod_{j=1}^{n+1} (\varepsilon^3 / 2\pi) d\pi_\alpha(t_j) \exp \left[i \sum_{j=1}^{n+1} \varepsilon \sum_\alpha \varepsilon^3 \{ \pi_\alpha(t_j) [\varphi_\alpha(t_j) - \right. \\ & \left. - \varphi_\alpha(t_{j-1})] / \varepsilon - \mathcal{H}_\alpha(\pi_\alpha(t_j), [\varphi_\alpha(t_j) + \varphi_\alpha(t_{j-1})] / 2, [\varphi_{\alpha \pm s}(t_j) + \varphi_{\alpha \pm s}(t_{j-1})] / 2) \} \right] \equiv \\ & \equiv \int [d\varphi] [(\varepsilon^3 / 2\pi) d\pi] \exp \left\{ i \int_t^{t'} d\tau \int d^3x \{ \pi(\mathbf{x}, \tau) \dot{\varphi}(\mathbf{x}, \tau) - \mathcal{H}(\mathbf{x}, \tau) \} \right\}, \end{aligned} \quad (12.2)$$

где

$$\pi(\mathbf{x}, t) = \partial \mathcal{L}^0 / \partial \dot{\phi}(\mathbf{x}, t),$$

по определению, плотность импульса, сопряженная $\varphi(\mathbf{x}, t)$. Ее среднее по ячейке совпадает с $\pi_\alpha(t)$, определенным выше. В теории поля все физические величины можно получить из амплитуды перехода вакуум—вакуум в присутствии внешних источников. Физический вакуум есть основное состояние, и он играет ту же самую роль, что и состояние с волновой функцией $\varphi_0(q)$ в (11.33).

Эту амплитуду, которую мы обозначим через $W[J]$, можно вычислить из (12.2) с добавленным к лагранжиану членом $\int d^3x J(\mathbf{x}, t) \varphi(\mathbf{x}, t)$ в пределе $t' \rightarrow \infty$, $t \rightarrow -\infty$. То есть

$$\begin{aligned} W[J] = & \int [d\varphi] [(\varepsilon^3 / 2\pi) d\pi] \exp \left[i \int_{-\infty}^{\infty} d^4x \{ \pi(x) \dot{\varphi}(x) - \mathcal{H}(x) + \right. \\ & \left. + (i\varepsilon/2) \varphi^2(x) + J(x) \varphi(x) \} \right]. \end{aligned} \quad (12.3)$$

Дополнительный член $i\epsilon\varphi^2/2$ символически указывает правило вращения контура интегрирования по времени для корректного перехода к пределу, указанного в левой части (11.33). Ниже мы еще остановимся на этом.

Из (11.34) и следующего за ним обсуждения вытекает

$$\begin{aligned} \delta^n W[J] / \delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n) \Big|_{J=0} &= i^n \langle | T(\varphi(x_1) \varphi(x_2) \dots \varphi(x_n)) | \rangle = \\ &= i^n G(x_1 \dots x_n), \end{aligned} \quad (12.4)$$

где G есть n -точечная функция Грина (вакуумное среднее T -произведения n полей). На возможность определения функций Грина с помощью (12.4) впервые указал Швингер; она не зависит от представления $W[J]$ в виде интеграла по путям (12.3). Однако (12.3) представляет собой не только простой способ доказательства (12.4), но и явную формулу для вычисления $W[J]$.

(12.4) дает полные функции Грина. Они включают в себя вклады несвязных вакуумных диаграмм, которые есть просто произведения функций Грина с меньшим числом точек.

Связные диаграммы даются выражением

$$G_c(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-i)^n \delta^n \ln W[J] / \delta J(x_1) \delta J(x_2) \dots \delta J(x_n) \quad (12.5)$$

или, с обозначением

$$W[J] = \exp \{ iZ[J] \}, \quad (12.6)$$

выражением

$$G_c(x_1, \dots, x_n) = (-i)^{n-1} \delta^n Z[J] / \delta J(x_1) \dots \delta J(x_n). \quad (12.7)$$

Доказательство того, что связная часть n -точечной функции дается выражением (12.7), мы оставляем в качестве упражнения.

Если гамильтонова плотность имеет вид

$$H(x) = \frac{1}{2} \pi^2(x) + f[\varphi(x), \nabla \varphi(x)], \quad (12.8)$$

n -интегрирование выполняется явно и мы получаем

$$W[J] \sim \int [d\varphi] \exp \{ i \int [\mathcal{L}(x) + J(x)\varphi(x)] d^4x \}, \quad (12.9)$$

где $\mathcal{L}(x)$ — лагранжева плотность:

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{2} (\partial_0 \varphi(x))^2 - f[\varphi(x), \nabla \varphi(x)].$$

В случае теорий с векторными мезонами выражение (12.9) некорректно и следует использовать исходную форму (12.3). В качестве примера рассмотрим, однако, случай, когда (12.9) применимо.

Для определенности ограничимся следующей формой лагранжиана.

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_0 = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - \mu^2 \phi^2] \\ \mathcal{L}_1 &= \mathcal{L}_1(\phi). \end{aligned} \quad (12.10)$$

Функционал $W[J]$ в выражении (12.9) — плохо определенный интеграл даже в "решеточном" приближении. Недавние достижения аксиоматической теории поля указывают, что если возможно построить хорошо определенную теорию поля в евклидовом пространстве (x, τ) , удовлетворяющую некоторым подходящим аксиомам, тогда существует соответствующая теория поля в пространстве Минковского (x_0, \mathbf{x}) , являющаяся аналитическим продолжением первой при $\tau = ix_0$ и удовлетворяющая аксиомам Вайтмана. Таким образом, любую неопределенность можно разрешить, апеллируя к *постулату евклидовости*, именно, что функции Грина (12.5) являются аналитическим продолжением функций Грина, построенных с помощью хорошо определенного¹⁾ функционального интеграла в евклидовой теории поля:

$$W_E[J] = \int [d\phi] \exp \left\{ - \int d^3x d\tau \left[(\partial\phi/\partial\tau)^2 + (\nabla\phi)^2 + \mu^2 \phi^2 - \mathcal{L}_1(\phi) - J\phi \right] \right\}.$$

Отметим, что так как $-\mathcal{L}_1$ ограничена снизу, величина в квадратных скобках в экспоненте также ограничена снизу. Как мы предугадываем, постулат евклидовости определяет граничные условия, которые следует наложить на пропагаторы. Для рассматриваемой проблемы это означает, что в функциональный интеграл можно ввести режущий фактор с помощью добавления члена в \mathcal{L}_0 :

$$\mathcal{L}_0 \rightarrow \frac{1}{2} [(\partial_\mu \phi)^2 - \mu^2 \phi^2 + i\epsilon \phi^2],$$

как это было сделано в (12.3).

¹⁾ Следует, конечно, помнить, что интеграл все еще является функциональным, и в настоящее время его можно понимать не иначе, как удобную запись диаграммной теории возмущений. В этом смысле функциональные интегралы в евклидовом и минковском пространствах определены одинаково строго. — *Прим. перев.*

Рассмотрим вначале случай свободного поля:

$$W_0[J] = \int [d\varphi] \exp \{ i \int d^4x \{ \frac{1}{2} (\partial_\mu \varphi)^2 - \frac{1}{2} \mu^2 \varphi^2 + i \varepsilon \varphi^2 + J\varphi \} \} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \prod_{\alpha} d\varphi_{\alpha} \exp [i \{ \sum_{\alpha} \varepsilon^4 \sum_{\beta} \varepsilon^4 \varphi_{\alpha} K_{\alpha\beta} \varphi_{\beta} / 2 + \sum_{\alpha} \varepsilon^4 J_{\alpha} \varphi_{\alpha} \}]. \quad (12.11)$$

Здесь α указывает пространственно-временную ячейку объемом ε^4 и матрица $K_{\alpha\beta}$ такова, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} K_{\alpha\beta} = (-\partial^2 - \mu^2 + i\varepsilon) \delta^4(x - y),$$

где $\alpha \rightarrow x$ и $\beta \rightarrow y$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. φ -интегрирование в (12.11) выполняется явно. Мы получаем

$$W_0[J] = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\det K_{\alpha\beta})^{-1/2} \prod_{\alpha} \sqrt{2\pi/i\varepsilon^8} \exp \{ -(i/2) \sum_{\alpha} \varepsilon^4 \sum_{\beta} \varepsilon^4 J_{\alpha} \varepsilon^{-8} (K^{-1})_{\alpha\beta} J_{\beta} \},$$

где, разумеется, K^{-1} есть матрица, обратная K :

$$\sum_{\gamma} K_{\alpha\gamma} (K^{-1})_{\gamma\beta} = \delta_{\alpha,\beta}$$

или

$$\sum_{\gamma} \varepsilon^4 K_{\alpha\gamma} (\varepsilon^{-8} K^{-1})_{\gamma\beta} = (1/\varepsilon^4) \delta_{\alpha,\beta}. \quad (12.12)$$

При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$(1/\varepsilon^4) \delta_{\alpha,\beta} \rightarrow \delta^4(x - y), \quad \sum_{\alpha} \varepsilon^4 \rightarrow \int d^4x,$$

так что, определяя

$$\varepsilon^{-8} (K^{-1})_{\alpha\beta} \rightarrow \Delta_F(x - y),$$

уравнение (12.12) можно переписать в непрерывном пределе $\varepsilon \rightarrow 0$ в виде

$$(-\partial^2 - \mu^2 + i\varepsilon) \Delta_F(x - y) = \delta^4(x - y). \quad (12.13)$$

Поэтому, пренебрегая несущественным общим множителем, можно написать

$$W_0[J] = \exp [-(i/2) \int d^4x \int d^4y J(x) \Delta_F(x - y) J(y)], \quad (12.14)$$

где

$$\Delta_F(x-y) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\exp\{-ik(x-y)\}}{k^2 - \mu^2 + i\epsilon} \quad (12.15)$$

есть фейнмановский пропагатор.

Теперь мы в состоянии обсудить случай взаимодействующего поля. Возвращаясь к (12.10) и (12.11), запишем

$$\begin{aligned} W[J] &\sim \int [d\phi] \exp\{i \int d^4 x [\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I(\phi) + J\phi]\} = \\ &= \exp\left[i \int d^4 x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] \int [d\phi] \exp\{i \int d^4 x [\mathcal{L}_0 + J\phi]\} \sim \\ &\sim \exp\left[i \int d^4 x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J(x)}\right)\right] \exp\left[-(i/2) \int d^4 x \int d^4 y J(x) \Delta_F(x-y) J(y)\right]. \end{aligned} \quad (12.16)$$

(12.16) является базисом для разложения Фейнмана—Дайсона функций Грина этой теории, и после подстановки (12.16) в (12.4) мы получаем формулу для вычисления функций Грина. $W[J]$ можно разложить по степеням \mathcal{L}_I , просто разлагая, например, экспоненту:

$$\begin{aligned} &\exp\left\{i \int d^4 x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right)\right\} = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^n / n! \left[\int d^4 x \mathcal{L}_I \left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta J}\right)\right]^n. \end{aligned}$$

Теореме Вика соответствует простое правило функционального дифференцирования:

$$\frac{\delta}{\delta J(x)} J(y) = \delta^4(x-y).$$

Студенту следует самому убедиться, что выведенные здесь правила являются фактически правилами Фейнмана, обсуждаемыми во втором томе книги Бьёркена и Дрелла. Фактически настоятельно рекомендуется параллельное чтение первых шести разделов гл. 17 этой книги.

Для того чтобы квантовать фермионные поля с помощью метода интеграла по путям, необходимо ввести понятие антикоммутирующих

s -чисел. Мы, однако, воздержимся от этого, поскольку включение фермионных полей не представляет специальной проблемы при квантовании калибровочных теорий.

В общем случае \mathcal{L}_1 является функцией как ϕ , так и $\dot{\phi}$, и (12.4) некорректно. Так же как и в одномерном примере, обсуждавшемся в предыдущем разделе, будет видно, что действие в (12.16) должно быть заменено "эффективным действием", которое содержит поправки к интегралу от лагранжиана. В таком случае корректные правила Фейнмана модифицируются и не могут быть выведены непосредственно по лагранжиану.

ЛИТЕРАТУРА

Об евклидовой теории поля и ее связи с теорией поля в пространстве Минковского см.:

1. *Schwinger J.*, Proc. Nat. Acad. Sci., **44**, 956 (1958).
2. *Symansik K.*, в сб. Proc. Int. School of Physics "Enrico Fermi" Course XLV, ed. Jost R., Academic Press, N.Y. 1969.
3. *Nelson E.*, Construction of Quantum Fields from Markov Fields, Journ. Funct. Anal., **12**, 97 (1973); The Free Markov Fields, Journ. Funct. Anal., **12**, 211 (1973).
4. *Osterwalder K., Schrader R.*, Phys. Rev. Lett., **29**, 1423 (1972).

Предложение использовать (12.1) вместо (12.9) в качестве базиса при квантовании было впервые изложено в:

5. *Фаддеев Л.Д.*, ТМФ, **1** (1969) 3.

Идея о том, что функции Грина могут быть получены с помощью вариации амплитуды перехода вакуум—вакуум в присутствии внешнего источника, принадлежит Швингеру. Смотри, например:

6. *Schwinger J.*, Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452 (1951). (Имеется перевод: *Ю. Швингер*, ПСФ, № 3, 28 (1955)).
7. *Lurie D.*, Particles and Fields, Interscience, New York, 1968, ch. 10,

и цитированные здесь работы.

13. ПОЛЕ ЯНГА—МИЛЛСА В КУЛОНОВСКОЙ КАЛИБРОВКЕ

Мы хотим применить методы интеграла по путям к теориям с калибровочными векторными мезонами. Действительно, в этом случае метод становится мощным инструментом для построения корректных

правил Фейнмана и изучения перенормировки, в то время как канонические методы теоремы Вика становятся неудобными.

Мы рассмотрим трехкомпонентное поле Янга—Миллса, хотя обобщение на другие компактные неабелевы группы проводится непосредственно. В этом разделе будет использован канонический формализм в кулоновской калибровке и с помощью основного уравнения (12.3) построена функция $\mathcal{W}[J]$. В следующих разделах будет изучена калибровочная инвариантность и построены правила Фейнмана в явно ковариантных калибровках.

Удобно переписать лагранжиан Янга—Миллса в формализме первого порядка, в котором \mathbf{A}_μ и $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ рассматриваются как независимые координаты

$$\mathcal{L}_f = \frac{1}{4} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot \mathbf{F}^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \mathbf{F}_{\mu\nu} \cdot (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu + g \mathbf{A}^\mu \times \mathbf{A}^\nu). \quad (13.1)$$

(Жирный шрифт, точки и кресты означают изовекторы и операции с ними; пространственно-временные векторные индексы выписаны явно.)

Лагранжиан (13.1) инвариантен относительно инфинитезимальных калибровочных преобразований

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu(x) &\rightarrow \mathbf{A}_\mu(x) + \mathbf{u}(x) \times \mathbf{A}_\mu(x) - (1/g) \partial_\mu \mathbf{u}(x), \\ \mathbf{F}_{\mu\nu} &\rightarrow \mathbf{F}_{\mu\nu} + \mathbf{u} \times \mathbf{F}_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (13.2)$$

Уравнения Лагранжа—Эйлера

$$\frac{\delta \mathcal{L}_f}{\delta F_{\mu\nu}^a} = 0, \quad \partial_\mu \left(\frac{\delta \mathcal{L}_f}{\delta (\partial_\mu A_\nu^a)} \right) = \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta A_\nu^a}$$

дают

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu + g \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu \quad (13.3)$$

и

$$\partial^\mu \mathbf{F}_{\mu\nu} + g \mathbf{A}^\mu \times \mathbf{F}_{\mu\nu} = 0. \quad (13.4)$$

Совокупность уравнений (13.3) и (13.4) эквивалентна уравнениям Лагранжа—Эйлера формулировки второго порядка, в которой \mathcal{L}_g записывается только через A^μ и $\partial^\mu A^\nu$.

В классической теории задают начальную конфигурацию полей на пространственно подобной гиперплоскости и затем пытаются опре-

делить поля в более поздние времена. Уравнения (13.3) и (13.4) можно разделить на два класса: одни задают эволюцию полей во времени и называются уравнениями движения; другие являются уравнениями связи. Из (13.3) и (13.4) получаем уравнения движения для \mathbf{A}_i и \mathbf{F}_{0i} :

$$\partial_0 \mathbf{A}_i = \mathbf{F}_{0i} + (\nabla_i + g\mathbf{A}_i \times) \mathbf{A}_0, \quad (13.5)$$

$$\partial_0 \mathbf{F}_{0i} = (\nabla_j + g\mathbf{A}_j \times) \mathbf{F}_{ji} - g\mathbf{A}_0 \times \mathbf{F}_{0i}. \quad (13.6)$$

Далее определим независимые переменные. Так как

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta(\partial_0 \mathbf{A}_\mu)} = -\mathbf{F}^{0\mu}, \quad (13.7)$$

то $\mathbf{F}_{0i} = -\mathbf{F}^{0i}$ суть импульсы, канонически сопряженные \mathbf{A}_i . Так как \mathcal{L} не зависит от $\partial_0 \mathbf{A}^0$, \mathbf{A}^0 не имеют сопряженного импульса и должны рассматриваться как зависимые переменные. Уравнения связи:

$$\mathbf{F}_{ij} = \nabla_i \mathbf{A}_j - \nabla_j \mathbf{A}_i + g\mathbf{A}_i \times \mathbf{A}_j, \quad (13.8)$$

что определяет выражение \mathbf{F}_{ij} через \mathbf{A}_i в совпадающие времена, и

$$(\nabla_k + g\mathbf{A}_k \times) \mathbf{F}_{k0} = 0, \quad (13.9)$$

которое показывает, что не все сопряженные импульсы \mathbf{F}_{0k} независимы [(13.9) аналогично уравнению $\nabla \mathbf{E} = 0$ в обычной электродинамике]. Отсюда следует, что не все \mathbf{A}_k можно рассматривать как независимые, и мы приходим к необходимости наложения калибровочного условия. Выберем кулоновскую калибровку:

$$\nabla_k \mathbf{A}_k = 0. \quad (13.10)$$

Это всегда возможно из-за локальной калибровочной инвариантности лагранжиана.

(13.10) означает, что \mathbf{A} должно быть поперечно. Поэтому продольная компонента \mathbf{F}_{0i}^L канонического импульса \mathbf{F}_{0i} не является независимой, но зависит от других степеней свободы через уравнение связи (13.9). \mathbf{F}_{0i}^L и поперечные компоненты \mathbf{F}_{0i}^T можно определить следующим образом:

$$\mathbf{F}_{0i} = \mathbf{F}_{0i}^T + \mathbf{F}_{0i}^L, \quad \nabla_i \mathbf{F}_{0i} = \nabla_i \mathbf{F}_{0i}^L, \quad \varepsilon^{ijk} \nabla_j \mathbf{F}_{0k}^L = 0. \quad (13.11)$$

Наша задача теперь — выразить \mathbf{A}_0 и \mathbf{F}_{0i}^L через независимые переменные и построить гамильтониан. Напишем

$$\mathbf{F}_{0i}^L = -\nabla_i f, \quad \mathbf{F}_{0i}^T = \mathbf{E}_i, \quad \nabla_i \mathbf{F}_{0i} = -\nabla^2 f, \quad (13.12)$$

где \mathbf{E}_i чисто-поперечные. Поэтому E_i и поперечные компоненты \mathbf{A}_i являются независимыми переменными, сопряженными друг другу. Из уравнения связи (13.9) находим

$$(\nabla^2 + g\mathbf{A}_k \times \nabla_k) \cdot \mathbf{f} = g\mathbf{A}_i \times E_i. \quad (13.13)$$

(13.13) можно формально решить с помощью введения функции Грина \mathcal{D}_C , определяемой как решение уравнения

$$(\nabla^2 \delta^{ab} + g\epsilon^{acb} A_k^c \nabla_k) \mathcal{D}_C^{bd}(x, y; \mathbf{A}) = \delta^{ad} \delta^3(x - y). \quad (13.14)$$

Тогда \mathbf{f} есть решение (13.13), если

$$f^a(\mathbf{x}, t) = g \int d^3y \mathcal{D}_C^{cb}(\mathbf{x}, y; \mathbf{A}) \epsilon^{bcd} A_k^c(\mathbf{y}, t) E_k^d(\mathbf{y}, t). \quad (13.15)$$

Рассматривая \mathcal{D}_C как интегральный оператор, можно записать (13.15) в виде

$$\mathbf{f} = g\mathcal{D}_C \cdot \mathbf{A}_k \times \mathbf{E}_k.$$

\mathcal{D}_C не выражается в замкнутом виде, но может быть разложена в ряд по степеням g . Первое приближение оказывается функцией Грина для лагранжиана [см. (3.19)]¹⁾ и

$$\mathcal{D}_C^{ab}(\mathbf{x}, y; \mathbf{A}) = \frac{\delta^{ab}}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + g \int d^3z \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{z}|} \epsilon^{acb} A_k^c \nabla_k \frac{1}{4\pi|\mathbf{y} - \mathbf{z}|} + \dots \quad (13.16)$$

по аналогии с методом построения функции Грина для $H_0 + H'$, где H' мал и функция Грина для H_0 известна.

Дивергенция уравнения (13.5) дает с использованием (13.10) и (13.11) уравнение для \mathbf{A}_0

$$(\nabla^2 + g\mathbf{A}_i \times \nabla_i) \mathbf{A}_0 = \nabla^2 \mathbf{f}, \quad (13.17)$$

которое можно решить с помощью D_C , так как оператор в скобках тот же, что и в (13.13):

$$A_0^a(\mathbf{x}, t) = \int d^3y D_C^{ab}(\mathbf{x}, y; \mathbf{A}) \nabla^2 f^b(\mathbf{y}, t)$$

или

$$\mathbf{A}_0 = D_C \cdot \nabla^2 \mathbf{f}. \quad (13.17a)$$

¹⁾ Имеется в виду, что первое приближение совпадает с пропагатором $\langle A_0 A_0 \rangle$, определяемым по свободному лагранжиану в кулоновской калибровке. — *Прим. перев.*

Построим гамильтонову плотность \mathcal{H} :

$$\mathcal{H} = \mathbf{E}_i \cdot \partial \mathbf{A}_i / \partial t - \mathcal{L}. \quad (13.18)$$

Из (13.5), (13.11), (13.12) и (13.17а) находим, что

$$\partial \mathbf{A}_i / \partial t = \mathbf{E}_i - \nabla_i f + (\nabla_i + g \mathbf{A}_i \times) \mathcal{D}_C \nabla^2 f = \mathbf{E}_i - [\nabla_i - (\nabla_i + g \mathbf{A}_i \times) \mathcal{D}_C \cdot \nabla^2] f. \quad (13.18a)$$

Из-за (13.14) оператор в квадратных скобках, действующий на f , явно поперечен. Из (13.18а) и (13.13) или (13.15) имеем

$$\begin{aligned} \int d^3 x \mathbf{E}_i \partial \mathbf{A}_i / \partial t &= \int d^3 x [\mathbf{E}_i^2 + g(\mathbf{E}_i \times \mathbf{A}_i) \cdot D_C \nabla^2 f] = \\ &= \int d^3 x [\mathbf{E}_i^2 - \mathbf{f} \cdot \nabla^2 f] = \int d^3 x [\mathbf{E}_i^2 + (\nabla_i f)^2] \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} \cdot (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + g \mathbf{A}^\mu \times \mathbf{A}^\nu) = \\ &= \frac{1}{2} (\mathbf{F}_{0k})^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_i)^2 = \frac{1}{2} (\mathbf{E}_k - \nabla_k f)^2 - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_k)^2, \end{aligned} \quad (13.19)$$

где

$$\mathbf{B}_i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}.$$

Таким образом, гамильтониан равен

$$H = \frac{1}{2} \int d^3 x [\mathbf{E}_i^2 + \mathbf{B}_i^2 + (\nabla_i f)^2]. \quad (13.20)$$

Последний член аналогичен обычному мгновенному кулоновскому взаимодействию, которое возникает в электродинамике, квантованной в этой калибровке.

Теперь по формуле (12.3) можно написать производящий функционал $W_C[J]$ в кулоновской калибровке через независимые координаты и импульсы \mathbf{A}_i и \mathbf{E}_i (индекс T означает "поперечный"):

$$\begin{aligned} W_C[J] &= \int [d\mathbf{E}_i^T] [d\mathbf{A}_i^T] \exp \{ i \int d^4 x [\mathbf{E}_k \cdot \dot{\mathbf{A}}_k - \frac{1}{2} \mathbf{E}_k^2 - \frac{1}{2} \mathbf{B}_k^2 - \\ &\quad - \frac{1}{2} (\nabla_i f)^2 - \mathbf{A}_k \mathbf{J}_k] \}, \end{aligned} \quad (13.21)$$

где f выражается через \mathbf{E}_i и \mathbf{A}_i , согласно (13.15). [Член с источником записан с отрицательным знаком, поэтому в дальнейшем в ковариантной версии будет $(+\mathbf{A}^\mu \mathbf{J}_\mu)$.]

Проводить вычисления при наличии поперечного поля \mathbf{E}_i^T трудно. Поэтому введем фиктивную переменную \mathbf{E}_i^L

$$\int [d\mathbf{E}_i^T] = \int [d\mathbf{E}_i^T] [d\mathbf{E}_i^L] \prod_x \delta(\mathbf{E}_i^L) \quad (13.22)$$

и определим три независимые компоненты E_i соотношением

$$E_i = (\delta_{ij} - \nabla_i \frac{1}{\nabla^2} \nabla_j) E_j^T + \nabla_i \frac{1}{\nabla^2} E^L \quad (13.23)$$

с очевидными обозначениями. Из (13.23) следует

$$E^L = \nabla_i E_i,$$

и поэтому

$$\int [dE_i^T] = \int [dE_i] \int_x \prod \delta(\nabla_j E_j),$$

где \int — якобиан преобразования от трех переменных E_i к трем переменным E_i^T , E^L и

$$[dE_i] \equiv \prod_x \prod_{i=1}^3 \prod_{\alpha=1}^3 dE_i^\alpha(x).$$

Чтобы придать смысл \int , нужно вернуться к определению $[dE_i]$ как предела приближения с конечным числом точек решетки. В этом пределе $\int \rightarrow \infty$, но способом, не зависящим от полей, так что он представляет собой несущественный общий множитель в $W_C[J]$. Та же самая процедура проделывается для A_i^T . Поэтому

$$W_C[J] = \int [dE_i] [dA_i] \prod_x \delta(\nabla_k E_k) \delta(\nabla_k A_k) \exp \{ i \int d^4x [E_k \cdot \dot{A}_k - \frac{1}{2} E_k^2 - \frac{1}{2} B_k^2 - \frac{1}{2} (\nabla_k f)^2 - A_k J_k] \}. \quad (13.24)$$

Теперь можно было бы рассмотреть (13.24) и получить правила Фейнмана в кулоновской калибровке. Но они были бы нековариантны, и в процессе вычислений лоренц-инвариантность S -матрицы не была бы очевидной. Проводить вычисления в кулоновской калибровке неудобно; кулоновская калибровка представляет лишь одну из калибровок, в которой $W[J]$ наиболее легко строится из первых принципов.

S -матрица, конечно, должна быть ковариантна и калибровочно-инвариантна, так что должна существовать возможность представления $W_C[J]$ в более ковариантной форме, чем (13.24). В (13.24) f есть функция E и A , согласно (13.15). Введем фиктивную переменную f , умножая (13.24) на константу

$$\int [df] \delta(f - g \mathcal{D}_C \cdot A_i \times E_i), \quad (13.25)$$

где под \mathcal{D}_C подразумевается операция в (13.15). Так как (13.15) эк-

вивалентно (13.13), запишем (13.25) в виде

$$\int [df] \det M_C \delta((\nabla^2 + gA_i \times \nabla_i)f - gA_i \times E_i), \quad (13.26)$$

где $\det M_C$ есть якобиан преобразования от f к $(\nabla^2 + gA_i \times \nabla_i)f$.
 M_C есть матрица в x, y -пространстве, а также в изопространстве:

$$\begin{aligned} M_C^{ab}(x, y) &= (\nabla^2 \delta^{ab} + g\epsilon^{abc} A_i^c(y) \nabla_i) \delta^4(x - y) = \\ &= \nabla^2 [\delta^{ab} \delta^3(x - y) + g\epsilon^{abc} \nabla_i G(x, y) A_i^c(y)] \delta(x_0 - y_0), \end{aligned} \quad (13.27)$$

где $\nabla^2 G(x, y) = \delta^3(x - y)$. (13.24) принимает вид

$$\begin{aligned} W_C[J] &= \int [dA_i] [dE_i] [df] \prod_x \delta(\nabla_i A_i) \prod_x \delta(\nabla_i E_i) \delta[(\nabla^2 + gA_i \times \nabla_i)f - gA_i \times E_i] \times \\ &\times \det M_C \exp \{ i \int \{ E_k \cdot A_k - \frac{1}{2} (E_k^2 + B_k^2 + (\nabla_k f)^2 - J A_i) \} d^4 x \}. \end{aligned} \quad (13.28)$$

Перейдем от переменных E_i к F_{0i} , определяемым соотношением

$$F_{0i} = E_i - \nabla_i f. \quad (13.29)$$

Тогда в (13.28) имеем

$$\begin{aligned} [dE] [df] \prod_x \delta(\nabla_i E_i) \delta[(\nabla^2 + gA_i \times \nabla_i)f - gA_i \times E_i] &= \\ = [dF_{0i}] [df] \prod_x \delta(\nabla_i F_{0i} + \nabla^2 f) \delta(\nabla^2 f - gA_i \times F_{0i}) &= \\ = [dF_{0i}] [df] \delta(\nabla_i F_{0i} + gA_i \times F_{0i}) \delta(\nabla^2 f - gA_i \times F_{0i}). \end{aligned} \quad (13.30)$$

Выполним интегрирование $[df]$ с использованием последней δ -функции в (13.30). Якобиан перехода равен $\det \nabla^2$ — бесконечной константе, которую мы опустим (или учтем при определении M_C). Таким образом,

$$\begin{aligned} W_C[J] &= \int [dA_i] [dF_{0i}] \det M_C \prod_x \delta(\nabla_i A_i) \delta(\nabla_i F_{0i} + gA_i \times F_{0i}) \times \\ &\times \exp \{ i \int d^4 x [F_{0i} \cdot \partial_0 A_i - \frac{1}{2} F_{0i}^2 - \frac{1}{4} (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i + gA_i \times A_j)^2 - \\ &- J_i \cdot A_i] \}. \end{aligned} \quad (13.31)$$

Для получения экспоненты в (13.31) в экспоненте (13.28) мы написали

$$E_k^2 + (\nabla_k f)^2 = (E_k - \nabla_k f)^2 = F_{0i}^2.$$

опуская перекрестный член, который равен нулю после интегрирования по x .

Представим δ -функцию в виде интеграла, используя A_0 в качестве фиктивной переменной:

$$\begin{aligned} \prod_x \delta(\nabla_i F_{0i} + gA_i \times F_{0i}) = \int_x \frac{dA_0}{2\pi} \exp \{ i A_0 \cdot (\nabla_i F_{0i} - gA_i \times F_{0i}) \} - \\ - \int [dA_0] \exp \{ i \int d^4 x F_{0i} \cdot (gA_0 \times A_i - \nabla_i A_0) \}. \end{aligned} \quad (13.32)$$

Окончательно член $\frac{1}{4} (\nabla_i A_j - \nabla_j A_i + gA_i \times A_j)^2$ в экспоненте в (13.31) запишем в форме

$$\int [dF_{ij}] \exp \{ i \int d^4 x [\frac{1}{2} F_{ij} \cdot F_{ij} - \frac{1}{2} F_{ij} \cdot (\nabla_j A_i - \nabla_i A_j + gA_i \times A_j)] \}, \quad (13.33)$$

которая имеет вид стандартного гауссова интеграла. Подставляя (13.33) и (13.32) в (13.31) и считая J_0 равным нулю, получаем

$$\begin{aligned} W_C[J] = \int [dA_\mu] [dF_{\mu\nu}] \det M_C \prod_x \delta(\nabla_i A_i) \exp \{ i \int d^4 x \{ -\frac{1}{2} F_{0i} \cdot F_{0i} + \frac{1}{2} F_{ij} \cdot F_{ij} - \\ - \frac{1}{2} F_{ij} \cdot (\nabla_j A_i - \nabla_i A_j + gA_i \times A_j) + F_{0i} (\partial_0 A_i - \nabla_i A_0 + gA_0 \times A_i) + J^\mu \cdot A_\mu \} \} = \\ = \int [dA_\mu] [dF_{\mu\nu}] \det M_0 \prod_x \delta(\nabla_i A_i) \exp \{ i \int d^4 x [L + J^\mu \cdot A_\mu] \}. \end{aligned} \quad (13.34)$$

Если бы не фактор $\det M_C$, выражение (13.34) приводило бы к тому, что правила Фейнмана можно было бы строить прямо по \mathcal{L} . Дополнительный множитель аналогичен поправкам, полученным в разд. 11 для потенциала, зависящего от скорости.

Как интерпретировать $\det M_C$? Из (13.27) следует

$$\det M_C = \det \nabla^2 \det [I + L], \quad (13.35)$$

где

$$L = g \epsilon^{abc} \nabla_i G(x, y) A_i^c(y) \delta(x_0 - y_0), \quad I = \delta^{ab} \delta^4(x - y). \quad (13.36)$$

$\det \nabla^2$ является бесконечной константой, и

$$\det (I + L) = \exp \text{Sp} \ln (I + L) =$$

$$= \exp \sum \frac{(-1)^{n-1}}{n} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \text{Sp} L(x_1, x_2) L(x_2, x_3) \dots L(x_n, x_1). \quad (13.37)$$

След под знаком интеграла берется только по изоспиновым индексам.

В нескольких следующих разделах мы столкнемся с якобианами типа $\det M_C$. (13.37) представляет собой общую формулу для их вычисления. В рассматриваемом случае

$$\det (I + L) = \exp \left[\delta(0) \left\{ -\sum_n \frac{g^n}{n} \int d^3 x_1 \dots d^3 x_n \int dt \operatorname{Sp} \left[T \cdot A_{i_1}(x_1, t) \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \nabla_{i_1} G(x_1, x_2) T \cdot A_{i_2}(x_2, t) \nabla_{i_2} G(x_2, x_3) \dots \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. \dots T \cdot A_{i_n}(x_n, t) \nabla_{i_n} G(x_n, x_1) \right] \right\} \right], \quad (13.38)$$

где $(T^a)_{bc} = \varepsilon^{abc}$ и Sp означает след по изоспиновым индексам.

Так как (13.38) есть степенной ряд в экспоненте, он приводит к эффективным поправкам в каждом порядке к правилам Фейнмана, полученным только из \mathcal{L} .

ЛИТЕРАТУРА

Содержание этого раздела аналогично и инспирировано:

1. Попов В.Н./, Фаддеев Л.Д., Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей, препринт ИТФ, 67-36, Киев, 1967.
2. Faddeev L. D., Popov V. N., Phys. Lett., **25B**, 29 (1967).

14. ИНТУИТИВНЫЙ ПОДХОД К КВАНТОВАНИЮ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Выражение (13.34) можно еще упростить. Выполним функциональное интегрирование по $F_{\mu\nu}^a$; получим

$$W_C[J] = \int [dA_\mu] \det M_C \Pi \delta(\nabla_i A_i(x)) \exp \{ i \int d^4 x [\mathcal{L}(x) + J_\mu(x) A^\mu(x)] \}, \quad (14.1)$$

где $\mathcal{L}(x)$ есть лагранжиан в формализме второго порядка:

$$\mathcal{L}(x) = -\frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + g A_\mu \times A_\nu)^2.$$

За исключением фактора $\det M_C \Pi \delta(\nabla_i A_i(x))$, выражение (14.1) является стандартным для простых x теорий поля:

$$W[J] \sim \int [d\varphi] \exp \{ i \int d^4 x [\mathcal{L}(x) + J(x)\varphi(x)] \}. \quad (14.2)$$

Следующие интуитивные аргументы, приведенные Фаддеевым и Поповым, совершенно ясно показывают причину появления этого дополнительного множителя.

Неприменимость (14.2) к калибровочной теории связана с тем, что квадратичная часть лагранжиана

$$L_0 = -\frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 = \frac{1}{2} \int d^4x d^4y A_\mu(x) \cdot K^{\mu\nu}(x, y) \cdot A_\nu(y),$$

$$K^{\mu\nu}(x, y) = (\partial^2 g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu) \delta^4(x - y)$$

сингулярна в том смысле, что оператор $K^{\mu\nu}$, определяющий квадратичную форму, сингулярен и не имеет обратного. На самом деле $K^{\mu\nu}$ является оператором проектирования на поперечные компоненты A_μ . Это означает, в частности, что евклидов вариант функционального интеграла (12.2) [см. обсуждение, следующее за (12.10)] не имеет гауссова режущего фактора относительно изменения продольных компонент A_μ и (14.2) лишен смысла на таком элементарном уровне даже в евклидовой формулировке. С более общей точки зрения действие инвариантно относительно калибровочных преобразований $A_\mu \rightarrow A_\mu^g$, где A_μ^g есть результат применения к полю A_μ элемента g калибровочной группы G :

$$A_\mu^g \cdot L = U(g) [A_\mu \cdot L + (1/ig)U^{-1}(g)\partial_\mu U(g)]U^{-1}(g). \quad (14.3)$$

Иначе говоря, действие есть константа на орбитах калибровочной группы, которые образованы всеми полями A_μ^g для фиксированного A_μ и элементов g , пробегающих всю группу G . Таким образом, интеграл по путям для амплитуды перехода вакуум-вакуум $W[J]$ расходится¹ даже в евклидовой формулировке, так как действие не содержит необходимого режущего фактора для изменения A_μ вдоль орбиты. Фаддеев и Попов указывают, что поэтому амплитуда $W[J=0]$ пропорциональна "объему" орбит $\int dg(x)$, и этот фактор следует выделить до определения $W[J]$. Другими словами, интеграл по путям для калибровочных полей следует брать не по всем вариациям калибровочных полей, но по различным орбитам A_μ относительно действия калибровочной группы.

¹ В силу компактности калибровочной группы, интеграл (14.2) определен на том же самом уровне строгости, на котором вообще определен функциональный интеграл вне рамок теории возмущений. Подробнее см.: Фрадкин Е.С., Тютин И.В., ЯФ, 13, 433 (1971). — Прим перев.

Чтобы реализовать эту идею, выберем "гиперповерхность" в многообразии всех полей, которая пересекает каждую орбиту только один раз. Это означает, что если

$$f_a(\mathbf{A}_\mu) = 0, \quad a = 1, 2, \dots, N, \quad (14.4)$$

является уравнением гиперповерхности, N — размерность группы, то уравнение

$$f_a(\mathbf{A}_\mu^g) = 0$$

должно иметь единственное решение g для данного \mathbf{A}_μ . Мы будем интегрировать по этой гиперповерхности вместо интегрирования по всем полям. Условия $f_a(\mathbf{A}_\mu) = 0$ определяют калибровку; например, кулоновская калибровка имеет вид $f_a(\mathbf{A}_\mu) = \nabla_i A_i^a$. Прежде чем идти дальше, вкратце рассмотрим некоторые простые факты о представлениях групп. Пусть $g, g' \in G$. Тогда $gg' \in G$ и

$$U(g)U(g') = U(gg').$$

Инвариантная мера Гурвица на группе есть мера интегрирования на групповом пространстве, которая инвариантна в следующем смысле¹⁾

$$dg' = d(gg'). \quad (14.5)$$

Если $U(g)$ параметризовать в окрестности единицы как

$$U(g) = 1 + iu \cdot \mathbf{L} + O(u^2),$$

тогда в окрестности единицы всегда можно выбрать

$$dg = \prod_a du_a, \quad g \approx 1. \quad (14.6)$$

Определим величину $\Delta_f[\mathbf{A}_\mu]$ соотношением

$$\Delta_f[\mathbf{A}_\mu] \int_x \prod dg(x) \prod_{x,a} \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^g(x))] = 1. \quad (14.7)$$

"Наивное" выражение для амплитуды перехода вакуум—вакуум есть

$$\int [d\mathbf{A}_\mu] \exp \{ i \int d^4x \mathcal{L}(x) \}. \quad (14.8)$$

¹⁾ Существенно, что имеет место также равенство $dg' = d(g'g) = d(g'^{-1})$. Инвариантная мера на группах Ли впервые была введена Гурвицем в 1896 г.; см. *Бурбаки II*, Группы и алгебры Ли, Главы I—III, изд-во "Мир", 1976, стр. 453. В настоящее время она чаще называется мерой Хаара. — *Прим. ред.*

В подынтегральное выражение (14.8) можно подставить левую часть (14.7), что не приведет ни к каким изменениям

$$\int_x \prod d\mathbf{g}(x) [d\mathbf{A}_\mu] \Delta_f[\mathbf{A}_\mu] \prod_{x, a} \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^g(x))] \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}[\mathbf{A}_\mu(x)]\}. \quad (14.9)$$

В подынтегральном выражении (14.9) можно выполнить калибровочное преобразование $\mathbf{A}_\mu(x): \mathbf{A}'_\mu(x) \rightarrow [\mathbf{A}_\mu(x)]g^{-1}$. Относительно калибровочного преобразования (14.3) действие и мера $[d\mathbf{A}_\mu]$ инвариантны, а из (14.5) и (14.7), очевидно, следует, что $\Delta_f[\mathbf{A}_\mu]$ также калибровочно-инвариантна:

$$\begin{aligned} \Delta_f^{-1}[\mathbf{A}_\mu^g] &= \int_x \prod d\mathbf{g}'(x) \prod_{x, a} \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^{g'g'}(x))] = \\ &= \int_x \prod d(\mathbf{g}(x)g'(x)) \prod_{x, a} \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^{g'g'}(x))] = \\ &= \int_x \prod d\mathbf{g}''(x) \prod_{x, a} \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^{g''}(x))] = \Delta_f^{-1}[\mathbf{A}_\mu], \end{aligned}$$

или

$$\Delta_f[\mathbf{A}_\mu^g] = \Delta_f[\mathbf{A}_\mu]. \quad (14.10)$$

Таким образом, (14.9) равно

$$\int_x \prod d\mathbf{g}(x) [d\mathbf{A}_\mu] \Delta_f[\mathbf{A}_\mu] \prod_{x, a} \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu)] \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}[\mathbf{A}_\mu(x)]\},$$

и мы видим, что подынтегральное выражение интегрирования по группе не зависит от $\mathbf{g}(x)$. Это и есть наблюдение, сделанное Фаддеевым и Поповым, именно, что $\int_x \prod d\mathbf{g}(x)$ — просто бесконечный фактор, не зависящий от полей. Поэтому на него можно разделить и определить $\mathcal{W}[\mathbf{J}]$ следующим образом:

$$\mathcal{W}_f[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu] \Delta_f[\mathbf{A}_\mu] \prod_{x, a} \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu)] \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}(x) + \mathbf{J}^\mu(x) \cdot \mathbf{A}_\mu(x)\}. \quad (14.11)$$

Заслугой Фаддеева и Попова является также вывод (13.34) в рамках канонического формализма, как это обсуждалось в предыдущем разделе, а кроме того, и сами эти элегантные аргументы. Прежде чем продемонстрировать связь между (14.1) и (14.11), вычислим $\Delta_f[\mathbf{A}_\mu]$.

1) У авторов эта величина названа метрикой. — *Прим. перев.*

Так как $\Delta_f[\mathbf{A}_\mu]$ умножается в (14.11) на $\prod \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu(x))]$, достаточно вычислить его только для полей \mathbf{A}_μ , которые удовлетворяют (14.4). Определим M_f :

$$f_a(\mathbf{A}_\mu^g(x)) = f_a(\mathbf{A}_\mu(x)) + \int d^4y \sum_b [M_f(x, y)_{ab} u_b(y) + O(u^2)]. \quad (14.12)$$

Тогда из (14.7) находим

$$\Delta_f^{-1}[\mathbf{A}_\mu] = \int \prod_x \prod_a \{ du_a(x) \delta[f_a(\mathbf{A}_\mu^g(x))] \} = \int \prod_x \prod_a \{ du_a(x) \delta(M_f u) \}$$

при \mathbf{A}_μ , удовлетворяющих $f_a(\mathbf{A}_\mu) = 0$, так что

$$\Delta_f[\mathbf{A}_\mu] = \det M_f = \exp \{ \text{Sp} \ln M_f \}. \quad (14.13)$$

Уравнение гиперповерхности $f_a = 0$ как раз и есть калибровочное условие, причем для кулоновской калибровки, принятой в предыдущем разделе, имеем

$$f_a(\mathbf{A}_\mu) = \nabla_i A_i^a = 0$$

и

$$f_a(\mathbf{A}_\mu^g) = \nabla_i A_i^a + (1/g) (\nabla^2 \delta^{ab} - g \epsilon^{abc} A_i^c \nabla_i) u_b + O(u^2),$$

так что

$$[M_f(x, y)]_{ab} \sim (1/g) \nabla^2 (\delta^{ab} - g \epsilon^{abc} \frac{1}{\nabla^2} A_i^c \nabla_i) \delta^4(x-y) \sim [M_G(x, y)]_{ab}. \quad (14.14)$$

Это показывает, что (14.1) действительно есть частный случай (14.11) при $f_a = \nabla_i A_i^a$.

Форма (14.11) позволяет использовать широкий класс калибровок, отличных от кулоновской. Пока мы не будем интересоваться, какова связь между функциями Грина в таких калибровках и функциями Грина в кулоновской калибровке, но только выпишем явный вид Δ_f для случая явно ковариантной калибровки Ландау:

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu(x) = 0.$$

(14.12) принимает вид

$$\partial^\mu \mathbf{A}_\mu^g(x) = \partial^\mu \mathbf{A}_\mu(x) + (1/g) [\partial^2 \mathbf{u}(x) + g \partial^\mu (\mathbf{A}_\mu(x) \times \mathbf{u}(x)) + O(u^2)],$$

так что M_f равно

$$[M_L(x, y)]_{ab} = (1/g) (\partial^2 \delta_{ab} - g \epsilon^{abc} A_\mu^c \partial^\mu) \delta^4(x-y), \quad (14.15)$$

где A_μ удовлетворяет $\partial^\mu A_\mu = 0$. Поэтому, опуская тривиальный множитель $(1/g)\partial^2$, имеем

$$\Delta_L \equiv \det M_L^{-1} \exp \{ \text{Sp} \ln (1 + L) \}, \quad (14.16)$$

где

$$\langle x, a | L | y, b \rangle = g \epsilon^{abc} \int D_F(x-z) A_\mu^c(z) \frac{\partial}{\partial z_\mu} \delta^4(z-y) d^4 z.$$

Более явно можно написать

$$\begin{aligned} \Delta_L = \exp \left\{ -\sum \frac{(-g)^n}{n} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_n \text{Sp} [\partial^\lambda D_F(x_1 - x_2) \Gamma \cdot A_\mu(x_2) \partial^\mu D_F(x_2 - x_3) \dots \right. \\ \left. \dots D_F(x_n - x_1) \Gamma \cdot A_\lambda(x_1)] \right\}. \end{aligned} \quad (14.17)$$

Здесь мы использовали обычное определение

$$(-\partial^2 + i\epsilon) D_F(x-y) = \delta^4(x-y);$$

$i\epsilon$, $\epsilon > 0$, добавлены согласно постулату евклидовости. На необходимость дополнительного множителя $\Delta_f \prod_{x,a} \delta[f_a(A_\mu(x))]$ впервые указал Фейнман. Выражение (14.11) можно записать в виде

$$W_L[J] = \int [dA_\mu] \prod_{x,a} \delta[f_a(A_\mu(x))] \exp \{ i[S_{\text{эфф}} + \int d^4 x J^\mu(x) \cdot A_\mu(x)] \}, \quad (14.18)$$

где

$$S_{\text{эфф}} = \int d^4 x \mathcal{L}(x) - i \text{Sp} \ln M_f.$$

В случае калибровки Ландау было замечено, что дополнительный член в эффективном действии $-i \text{Sp} \ln M_f$ можно рассматривать как возникающий из петель, образованных изотриплетом фиктивных комплексных скалярных полей \mathbf{c} , удовлетворяющих статистике Ферми, присутствие и взаимодействие которых можно описать действием

$$\begin{aligned} S_c = -\int d^4 x [\partial^\mu \mathbf{c}^\dagger(x) \cdot \partial_\mu \mathbf{c}(x) + g \partial^\mu \mathbf{c}^\dagger(x) \cdot \mathbf{A}_\mu(x) \times \mathbf{c}(x)] \sim \\ \sim \int d^4 x d^4 y \sum_{a,b} c_a^\dagger(x) [M_L(x,y)]_{ab} c_b(y). \end{aligned}$$

То есть (14.18) можно представить в виде

$$W_L[J] = \int [dA_\mu] \prod_{x,a} \delta[f_a(A_\mu(x))] \int [d\mathbf{c}^\dagger][d\mathbf{c}] \exp \{ i[S + S_c + \int d^4 x J^\mu(x) \mathbf{A}_\mu(x)] \}. \quad (14.19)$$

На самом деле, нетрудно показать, что интегрирование по полям c и c^\dagger легко выполнялось бы, если бы эти поля были коммутирующими c -числами. Тогда результат имел бы следующий вид

$$\int [dc^\dagger] [dc] \exp(iS_c) \sim (\det M_L)^{-1} = \exp\{-\text{Sp} \ln M_L\}$$

и

$$\exp\{-\text{Sp} \ln M_L\} \sim \exp[-\text{Sp} \ln(1+L)] = \exp\{-\text{Sp} L + \frac{1}{2} \text{Sp} L^2 + \dots + (-)^n \frac{1}{n} \text{Sp} L^n + \dots\}$$

где члены в экспоненте можно рассматривать как возникающие от петель комплексных бозонных полей c . Если c — фермионные поля, то члены $\text{Sp} L^n$ должны умножаться на дополнительный знак минус, так что мы имеем¹⁾

$$\begin{aligned} \int [dc^\dagger] [dc] &\sim \exp\{+\text{Sp} L - \frac{1}{2} \text{Sp} L^2 + \dots + \frac{(-)^{n+1}}{n} \text{Sp} L^n + \dots\} = \\ &= \exp\{\text{Sp} \ln(1+L)\} \sim \det M_L. \end{aligned}$$

Фейнмановские правила для $W_L[\mathbf{J}]$, даваемого уравнением (14.19), можно построить совершенно тем же самым способом, как это было сделано для скалярных полей в разд. 12. Пропагатор калибровочных бозонов определяется из

$$W_L^0[\mathbf{J}] = \int [d\mathbf{A}_\mu] \prod_x \delta[\partial^\mu \mathbf{A}_\mu(x)] \exp\{i \int d^4x \{-\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2 + \mathbf{J}^\mu \cdot \mathbf{A}_\mu\}\}. \quad (14.20)$$

Для вычисления (14.20) удобно написать

$$\prod_x \delta[\partial^\mu \mathbf{A}_\mu(x)] \sim \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp\left\{-\frac{i}{\alpha} \int d^4x [\partial^\mu \mathbf{A}_\mu(x)]^2\right\}.$$

(Бесконечная константа $\prod_x \sqrt{2\pi\alpha}$ опущена.) Тогда имеем

$$\begin{aligned} W_L^0[\mathbf{J}] &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int [d\mathbf{A}_\mu] \exp\{i \int d^4x \mathbf{A}_\mu(x) \cdot [-\partial^2 g^{\mu\nu} + \\ &+ \partial^\mu \partial^\nu (1 - \frac{1}{\alpha})] \mathbf{A}_\nu(x) + \int d^4x \mathbf{J}^\mu(x) \cdot \mathbf{A}_\mu(x)\} = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \exp\left\{-\frac{i}{2} \int d^4x d^4y \mathbf{J}_\mu(x) D_F^{\mu\nu}(x-y; \alpha) \mathbf{J}_\nu(y)\right\}, \quad (14.21) \end{aligned}$$

¹⁾ Для строгого определения интеграла по антикоммутирующим переменным см.: Березин Ф.А., Метод вторичного квантования, изд-во "Наука", М., 1965. — Прим. перев.

где пропагатор векторного бозона $D_F^{\mu\nu}$ в этой калибровке равен

$$D_F^{\mu\nu}(x-y; \alpha) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp \{ ik \cdot (x-y) \} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} [-g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{k^2} (1-\alpha)] \overset{\alpha \rightarrow 0}{\rightarrow} -$$

$$\overset{\alpha \rightarrow 0}{\rightarrow} D_F^{\mu\nu}(x-y) = - \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \exp \{ ik \cdot (x-y) \} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} (\partial^{\mu\nu} - \frac{k^\mu k^\nu}{k^2}) \quad (14.22)$$

	Вершины	Голые вершины
	$-i\delta^{ab}\Delta_{\mu\nu}(p)$	$-i\delta^{ab}[(g_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu/p^2)/(p^2 + \alpha p_\mu p_\nu/p^2)^{-2}]$
	$i\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{abc}(p, q, r)$ $p+q+r=0$	$\epsilon^{abc}[(p-q)_\nu g_{\lambda\mu} + (q-r)_\lambda g_{\mu\nu} + (r-p)_\mu g_{\nu\lambda}]$
	$i\Gamma_{\lambda\mu\nu\zeta}^{abcd}(p, q, r, s)$ $p+q+r+s=0$	$-i\epsilon^{abf}\epsilon^{cdf}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\zeta} - g_{\lambda\zeta}g_{\mu\nu})$ $-i\epsilon^{acf}\epsilon^{bdf}(g_{\lambda\mu}g_{\nu\zeta} - g_{\lambda\zeta}g_{\mu\nu})$ $-i\epsilon^{adf}\epsilon^{bcf}(g_{\lambda\nu}g_{\mu\zeta} - g_{\lambda\mu}g_{\zeta\nu})$
	$-\delta^{ab}iG(p)$	$-i\delta^{ab}/p^2$
	$i\gamma_{\lambda}^{abc}(p, q, r)$	$\epsilon^{abc}p_{\lambda}$

Фиг. 14.1. Правила Фейнмана в теории Янга — Миллса.

Сплошные линии означают векторные мезоны, штриховые линии — скалярные дуэты.

и является четырехмерно поперечным. Остальная часть правил Фейнмана может быть выведена, как и в скалярном случае. Они воспроизведены на фиг. 14.1. Кроме того, следует помнить следующие правила: вершина дух — дух — вектор является "крапленой", причем точка указывает, линию какого духа следует дифференцировать; линия духа не может быть крапленой с обоих концов; петли линий духов содержат дополнительный знак минус.

ЛИТЕРАТУРА

Ссылка на работу Фаддеева и Попова была дана в предыдущем разделе; дополнительно см.:

1. *Коноплева Н.П., Попов В.Н.*, Калибровочные поля, Атомиздат, М., 1972.

Квантование калибровочных полей обсуждалось также в:

2. *Feynman R.P.*, *Acta Phys. Polonica*, **26**, 697 (1963).

3. *DeWitt B.*, *Phys. Rev.*, **162**, 1195, 1239 (1967).

4. *Mandelstam S.*, *Phys. Rev.*, **175**, 1580 (1968).

5. *Fradkin E.S., Tuytin I.V.*, *Phys. Lett.*, **30B**, 562 (1969); *Phys. Rev.*, **D2**, 2841 (1970).

6. *Veltman M.T.*, *Nucl. Phys.*, **B21**, 288 (1970).

7. *'t Hooft G.*, *Nucl. Phys.*, **B33**, 173 (1971).

15. ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ КАЛИБРОВКИ ЛАНДАУ И КУЛОНОВСКОЙ КАЛИБРОВКИ

Формально S -матрица, вычисленная в калибровке Ландау, совпадает с S -матрицей, вычисленной в кулоновской калибровке. Элемент неперенормированной S -матрицы получается из соответствующей функции Грина удалением одночастичных пропагаторов, соответствующих внешним линиям, затем преобразованием Фурье получившейся "урезанной" функции Грина и переходом на массовую оболочку по внешним импульсам. Доказательство, которое будет приведено ниже, строгое, за исключением того факта, что S -матрица в калибровочных теориях поражена инфракрасными расходимостями и ее даже нельзя определить. В самом деле, как раз это и может быть причиной, из-за которой безмассовые поля Янга — Миллса не наблюдаются в природе. Доказательство совпадения S -матриц в двух калибровках приводится только в педагогических целях: идея и метод, примененные здесь,

будут полезны при обсуждении калибровочных теорий со спонтанным нарушением симметрии.

Найдем вначале связь между W_C и $W_L [J]$. Напомним, что [см. (14.1)]

$$W_C[J] = \int [dA_\mu] \Delta_C[A_\mu] \prod_x \delta(\nabla_i A_i(x) \exp\{iS[A_\mu] + i \int d^4x J^\mu \cdot A_\mu\}, \quad (15.1)$$

где $\Delta_C = \det M_C$, и что

$$\Delta_L[A_\mu] \int_x \prod dg(x) \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu^\xi(x)) = 1. \quad (15.2)$$

Подставим левую часть (15.2) под знак функционального интеграла (15.1):

$$W_C[J] = \int_x \prod dg(x) \int [dA_\mu] \Delta_C[A_\mu] \Delta_L[A_\mu] \prod_x \delta(\nabla_i A_i(x)) \times \\ \times \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu^\xi(x) \exp\{iS[A_\mu] + i \int d^4x J^\mu \cdot A_\mu\}).$$

Проведем калибровочное преобразование переменных интегрирования $A_\mu(x): A_\mu(x) \rightarrow [A_\mu(x)]^{\xi^{-1}}$. С учетом калибровочной инвариантности действия S , Δ_f и меры $[dA_\mu(x)]$ получаем

$$W_C[J] = \int [dA_\mu] \Delta_L[A_\mu] \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu(x)) \exp(iS[A_\mu]) \times \\ \times \Delta_C[A_\mu] \int_x \prod dg(x) \prod_x \delta(\nabla_i A_i^{\xi^{-1}}) \exp\{i \int d^4x J^\mu \cdot A_\mu^{\xi^{-1}}\} = \\ = \int [dA_\mu] \Delta_L[A_\mu] \prod_x \delta(\partial^\mu A_\mu(x)) \exp\{iS[A_\mu] + \\ + i \int d^4x J^\mu \cdot A_\mu^{\xi_0}\}, \quad (15.3)$$

где $A_\mu^{\xi_0}$ есть калибровочное преобразование поля A_μ , удовлетворяющего условию $\partial^\mu A_\mu = 0$, к полю, удовлетворяющему условию

$$L \cdot \nabla_i A_i^{\xi_0} = \nabla_i \{U(g_0)[L \cdot A_i + \frac{1}{ig} U^{-1}(g_0) \nabla_i U(g_0)] U^{-1}(g_0)\} = 0. \quad (15.4)$$

При выводе (15.3) было также использовано равенство

$$\Delta_C[A_\mu] \int_x \prod dg(x) \prod_x \delta(\nabla_i A_i^{\xi^{-1}}) = \Delta_C[A_\mu] \int_x \prod_a du_a(x) \prod_x \delta(\nabla_i A_i^{\xi_0} - \\ - \frac{1}{g} M_C[A_\mu^{\xi_0}] u) \sim \Delta_C[A_\mu] \Delta_C^{-1}[A_\mu^{\xi_0}] = 1.$$

Далее следует найти $\mathbf{A}_\mu^{g_0}$ как решение (15.4). $\mathbf{A}_\mu^{g_0}$ можно представить в виде ряда по степеням \mathbf{A}_μ . Построение нескольких первых членов этого разложения мы оставляем в качестве примера. Для наших целей достаточно заметить, что

$$\mathbf{A}_i^{g_0} = (\delta_{ij} - \nabla_i \frac{1}{\nabla^2} \nabla_j) \mathbf{A}_j + O(\mathbf{A}_\mu^2).$$

Источник \mathbf{J}_μ в кулоновской калибровке должен удовлетворять условиям

$$\mathbf{J}_0 = 0, \quad \nabla_i \mathbf{J}_i = 0. \quad (15.4')$$

Поэтому можно написать

$$\int d^4x \mathbf{J}^\mu \cdot \mathbf{A}_\mu^{g_0} = \int d^4x \mathbf{J}^\mu(x) \cdot \mathbf{F}_\mu(x; \mathbf{A}_\lambda),$$

где

$$\mathbf{F}_\mu(x; \mathbf{A}_\lambda) = \mathbf{A}_\mu(x) + O(\mathbf{A}_\lambda^2). \quad (15.5)$$

И наконец, напомним выражение для W_C через W_L . Оно имеет вид

$$W_C[J] = \left[\exp \left\{ i \int d^4x \mathbf{J}^\mu(x) \cdot \mathbf{F}_\mu \left(x; \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \mathbf{J}_\lambda} \right) \right\} \right] W_L[J] \Big|_{j=0}. \quad (15.6)$$

Полезно представить (15.3) или (15.6) через диаграммы Фейнмана. Эти соотношения показывают, что функции Грина в кулоновской калибровке совпадают с функциями Грина в калибровке Ландау при соответствующих ограничениях на источник [см. (15.4')] кроме того, что при построении функций Грина в кулоновской калибровке с помощью правил Фейнмана в калибровке Ландау нужно учесть дополнительные вершины между источником и полями, описываемые членом

$$\int d^4x \mathbf{J}^\mu \cdot (\mathbf{F}_\mu - \mathbf{A}_\mu). \quad (15.7)$$

Связь становится гораздо проще при переходе на массовую оболочку. В этом случае следует только сравнить члены, имеющие полюса по каждому внешнему импульсу p_i при $p_i^2 \rightarrow 0$. Из всех диаграмм, порождаемых дополнительными вершинами (15.7), выживают в этом пределе только те, в которых вклад дополнительных вершин сводится к диаграммам типа собственно-энергетической вставки в соответствующую внешнюю линию. Другие поправки, индуцируемые дополнительными вершинами (15.7), не будут давать вклад в полюса функций Грина

на при $p_i^2 \rightarrow 0$ и поэтому S -матрицу. В пределе $p_i^2 \rightarrow 0$ (неперенормированные) S -матричные элементы в кулоновской калибровке и калибровке Ландау будут отличаться множителем σ^n , где n — число внешних линий и σ не зависит от n . Сравнивая двухточечные функции Грина в двух калибровках C и L :

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} D'_{\mu\nu}(p; L) = \frac{Z_L}{p^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} + \dots)$$

$$\lim_{p^2 \rightarrow 0} D'_{\mu\nu}(p; C) = \frac{Z_C}{p^2 + i\epsilon} (g_{\mu\nu} + \dots),$$

получаем

$$\sigma^2 = \frac{Z_C}{Z_L}.$$

В общем неперенормированные S -матричные элементы в двух калибровках C и L связаны соотношением

$$S_C = \sigma^n S_L = \left(\frac{Z_C}{Z_L} \right)^{n/2} S_L,$$

так что перенормированные S -матричные элементы

$$S_{\text{перенорм}} \equiv Z_C^{-n/2} S_C = Z_L^{-n/2} S_L$$

не зависят от калибровки¹⁾, использованной для их вычисления.

Резюмируем. Показано, что $W_C [J]$ равно (15.3), которое совпадает с $W_L [J]$, за исключением того, что коэффициент перед J^μ есть $A_\mu^{\xi_0}$ вместо A_μ . Единственное следствие этого различия для S -матрицы состоит в том, что константы перенормировок внешних линий зависят от калибровки.

¹⁾Строго говоря, доказана калибровочная инвариантность перенормированной S -матрицы при фиксированных *неперенормированных* параметрах. Следует еще проверить, сохранится ли калибровочная инвариантность после перехода к *перенормированным* параметрам и *физическим* массам. Отметим также, что калибровочная инвариантность имеет место только в *физическом* секторе, а в нефизическом секторе S -матрица зависит от калибровки. Подробнее см.: *Fradkin E.S., Tyutin I.V.*, *Revista Nuovo Cimento*, **4**, 1 (1974). — *Прим. перев.*

Таким образом, тот факт, что S -матрицу можно вычислять из $W_L[J]$, доказан не только с помощью интуитивных аргументов разд. 14, но и более формально, с помощью построения $W_C[J]$ из первых принципов и доказательства эквивалентности S_C и S_L .

Как было отмечено ранее, единственная брешь в приведенном выше доказательстве связана с тем, что сингулярность при $p_i^2 = 0$ не является, вообще говоря, простым полюсом.

ЛИТЕРАТУРА

Этот раздел представляет собой развитие обсуждения по тому же самому вопросу, проведенного в:

1. Попов В.Н., Фаддеев Л.Д., Теория возмущений для калибровочно-инвариантных полей, препринт ИТФ-67-36, Киев, 1967.

Аналогичное обсуждение на языке операторной теории поля для случая квантовой электродинамики было дано:

2. Zumino B., Journ. Math. Phys., 1, 1 (1960).

16. ПРОИЗВОДЯЩИЕ ФУНКЦИОНАЛЫ ДЛЯ ФУНКЦИЙ ГРИНА И ВЕРШИННЫХ ФУНКЦИЙ

В этом разделе будет развит формализм производящих функционалов связанных функций Грина и вершинных функций. Эти вопросы лежат несколько в стороне от главной линии этого обзора. Однако многие статьи последнего времени по спонтанно нарушенной симметрии используют эту элегантную формулировку по следующим веским соображениям: этот формализм позволяет обсуждать условия для спонтанного нарушения симметрии, выходящие за рамки классического лагранжиана и справедливые во всех порядках теории возмущений.

Вернемся к обсуждению скалярных полей, рассматривавшихся в разд. 12. Определим производящий функционал связанных функций Грина $Z[J]$ соотношением

$$W[J] = \exp \{iZ[J]\} = \int [d\phi] \exp \{i \int d^4x [\mathcal{L}[\phi(x)] + J(x) \cdot \phi(x)]\}, \quad (16.1)$$

где ϕ и J соответственно суть многокомпонентные поля и источники.

Первая производная $Z[J]$ по J_i есть

$$\delta Z[J] / \delta J_i(x) = (1/W[J]) \int [d\phi] \phi_i(x) \exp \{i \int d^4x [\mathcal{L}(x) + J(x) \cdot \phi(x)]\}. \quad (16.2)$$

Введем для нее специальное обозначение $\Phi(x)$:

$$\delta Z[\mathbf{J}]/\delta J_i(x) = \Phi_i(x). \quad (16.3)$$

$\Phi_i(x)$ есть вакуумное среднее $\varphi_i(x)$ в присутствии $J(x)$, т.е. классическое поле.

Значение (16.2) при выключенных источниках ($\mathbf{J}(x) = 0$) есть вакуумное среднее поля φ :

$$\delta Z[\mathbf{J}]/\delta J_i(x)|_{\mathbf{J}=0} = v_i. \quad (16.4)$$

Отметим, что v не зависит от координат, так как в пределе $\mathbf{J} = 0$ левая сторона (16.4) трансляционно-инвариантна. Оказывается, что высшие производные $Z[J]$ при $\mathbf{J} = 0$ являются *функциями Грина поля* $\varphi = \varphi - v$, вакуумное среднее которого равно нулю.

Например,

$$\begin{aligned} \delta^2 Z[\mathbf{J}]/\delta J_i(x)\delta J_j(y)|_{\mathbf{J}=0} &= (i/W[0])\int [d\varphi] [\varphi(x) - v]_i \\ &[\varphi(y) - v]_j \exp(i\int d^4x \mathcal{L}) = (i/W[0])\int [d\varphi] \\ &\bar{\varphi}_i(x)\bar{\varphi}_j(y) \exp\{i\int d^4x \mathcal{L}(x)\}, \end{aligned} \quad (16.5)$$

как можно убедиться, дифференцируя (16.2) по J_i при $\mathbf{J} = 0$. В общем случае имеем

$$\delta^n Z[J]/\delta J_{i_1}(x_1)\dots\delta J_{i_n}(x_n)|_{\mathbf{J}=0} = (i)^{n-1} < T(\bar{\varphi}_{i_1}(x_1)\dots\bar{\varphi}_{i_n}(x_n)) >^c \quad (16.6)$$

(индекс c означает связную часть функций Грина), что можно доказать методом индукции.

Введем $\Gamma[\Phi]$ — преобразование Лежандра для $Z[\mathbf{J}]$. Оно определяется следующим образом:

$$\Gamma[\Phi] = Z[\mathbf{J}] - \int d^4x \mathbf{J}(x) \cdot \Phi(x), \quad \delta Z[\mathbf{J}]/\delta J_i = \Phi_i. \quad (16.7)$$

Смысл (16.7) следующий: Γ есть функционал $\Phi(x)$, определяемый правой стороной первого из равенств. \mathbf{J} в нем должно быть выражено через Φ с помощью обращения (16.3), которое определяет Φ как функцию \mathbf{J} . Преобразование (16.7) есть функциональный вариант хорошо известного преобразования в классической механике и термодинамике.

Дифференцируя (16.7) по Φ_i , получаем

$$\begin{aligned} \delta\Gamma[\Phi]/\delta\Phi_i(x) &= \sum_j \int d^4y (\delta Z[\mathbf{J}]/\delta J_j(y)) \delta J_j(y) / \delta\Phi_i(x) - \\ &- J_i(x) - \sum_j \int d^4y \Phi_j(y) \delta J_j(y) / \delta\Phi_i(x) \end{aligned}$$

или

$$\delta\Gamma[\Phi]/\delta\Phi_i(x) = -J_i(x). \quad (16.8)$$

(16.8) дуально к (16.3); под этим мы понимаем, что соотношение (16.3), выражающее Φ через \mathbf{J} , обратно к (16.8), которое выражает \mathbf{J} через Φ . В частности, это означает, что (16.4) можно представить в виде

$$\delta\Gamma[\Phi]/\delta\Phi_i(x) |_{\Phi=\mathbf{v}} = 0, \quad (16.9)$$

т.е. при $\mathbf{J} = 0$ Φ равно \mathbf{v} и обратно. Уравнение (16.9) очень важно. Оно выражает вакуумное среднее \mathbf{v} поля ϕ как решение вариационной задачи: \mathbf{v} есть значение Φ , при котором $\Gamma[\Phi]$ имеет экстремум.

Каков физический смысл Γ ? Для упрощения обсуждения примем следующее соглашение: индексы i, j, \dots будут означать всю совокупность индексов J или Φ , включая пространственно-временную переменную x ; по повторяющимся индексам всегда будет подразумеваться суммирование и интегрирование. Дифференцируя (16.3) по Φ , получаем

$$(\delta^2 Z[\mathbf{J}]/\delta J_i \delta J_j) \delta J_j \delta\Phi_k = \delta_{ik}. \quad (16.10)$$

Из (16.8) следует

$$\delta J_i / \delta\Phi_j = -\delta^2 \Gamma[\Phi] / \delta\Phi_i \delta\Phi_j. \quad (16.11)$$

Определим

$$\{X^{-1}[\mathbf{J}]\}_{ij} = -\delta^2 Z[\mathbf{J}] / \delta J_i \delta J_j \quad (16.12)$$

и

$$\{X[\Phi]\}_{ij} = \delta^2 \Gamma[\Phi] / \delta\Phi_i \delta\Phi_j \quad (16.13)$$

Из (16.10) и (16.11) следует

$$(X^{-1})_{ij} X_{jk} = \delta_{ik}. \quad (16.14)$$

Так как

$$\{X^{-1}[\mathbf{J} = 0]\}_{ij} = -\delta Z[\mathbf{J}] / \delta J_i \delta J_j |_{\mathbf{J}=0} = +[\Delta_F']_{ij}$$

есть полный пропагатор поля $\bar{\phi}$ и $\mathbf{J} = 0$ приводит к $\Phi = \mathbf{v}$, то величина

$$\{X[\Phi = \mathbf{v}]\}_{ij} = \delta\Gamma[\Phi] / \delta\Phi_i \delta\Phi_j |_{\Phi=\mathbf{v}}$$

является полным обратным пропагатором.

Продифференцируем далее (16.10) по J_i . Получаем

$$+(\delta^3 Z[\mathbf{J}]/\delta J_i \delta J_j \delta J_e) X_{jk} + (X^{-1})_{ij} (\delta^3 \Gamma/\delta \Phi_i \delta \Phi_j \delta \Phi_k \delta \Phi_m)(X^{-1})_{lm} = 0$$

или

$$(1/i^2)(\delta^3 Z[\mathbf{J}]/\delta J_i \delta J_j \delta J_k) = (iX^{-1})_{il}(iX^{-1})_{jm}(iX^{-1})_{kn} \times \\ \times [i(\delta^3 \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_l \delta \Phi_m \delta \Phi_n)]. \quad (16.15)$$

Перейдем теперь к пределу $\mathbf{J} = 0$, $\Phi = \mathbf{v}$. В этом пределе $X^{-1}[\mathbf{J} = 0]$ есть полный пропагатор, так что

$$\delta^3 \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_i \delta \Phi_j \delta \Phi_k \equiv \Gamma_{ijk}^{(3)} \quad (16.16)$$

есть трехточечная вершинная функция. Вершинная функция (или одночастично-неприводимая вершина) есть функция Грина, которую нельзя сделать несвязной разрезанием только одной внутренней линии и из которой (по определению) удалены все полные пропагаторы, соответствующие внешним линиям. Трехточечная функция не имеет несвязных диаграмм, исключая поправки к пропагаторам, которые в (16.15) выделены явно.

В общем n -я производная Γ при $\Phi = \mathbf{v}$ есть n -точечная вершинная функция:

$$\delta^n \Gamma/\delta \Phi_i \delta \Phi_j \dots = \Gamma_{ij\dots}^{(n)}.$$

Это утверждение доказывается по индукции. Предположим, что $\delta^n Z[\mathbf{J}]/\delta J_i \delta J_j \dots$ можно представить как сумму древесных диаграмм, каждая из которых состоит из вершинных функций (соответствующих $\delta^n \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_i \delta \Phi_j \dots$), внутренних линий (соответствующих Δ_F^2), связывающих пары вершинных функций, и внешних линий. В частности,

$$(1/i^{n-1})(\delta^n Z[\mathbf{J}]/\delta J_i \delta J_j \dots) = (iX^{-1})_{il}(iX^{-1})_{jm\dots} \times \\ \times [i(\delta^n \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_e \delta \Phi_m \dots)] + \text{одночастично-приводимые члены.} \quad (16.17)$$

Продифференцируем (16.17) по J_k . Напомним, что

$$\delta/\delta J_k = (\delta \Phi_r/\delta J_k)(\delta/\delta \Phi_r) = (\delta^2 Z/\delta J_k \delta J_r) \cdot (\delta/\delta \Phi_r) = \\ = -(X^{-1})_{kr}(\delta/\delta \Phi_r). \quad (16.18)$$

Дифференциальный оператор $\delta/\delta \Phi_r$, примененный к правой части (16.17), может действовать или на некоторый X^{-1} , или на некоторую $\delta^n \Gamma/\delta \Phi_i \delta \Phi_j \dots$. В первом случае имеем

$$(1/i)(\delta/\delta J_i)(iX^{-1})_{kl} = (iX^{-1})_{km}(iX^{-1})_{ln}(iX^{-1})_{ij} \times \\ \times i(\delta^3 \Gamma/\delta \Phi_m \delta \Phi_n \delta \Phi_j),$$

что сводится к добавлению новой внешней линии к вновь образованной трехточечной вершинной функции, и в последнем случае

$$(1/i)(\delta/\delta J_i)(\delta^m \Gamma/\delta \Phi_k \delta \Phi_l \dots) = (iX^{-1})_{ij} i(\delta^{m+1} \Gamma/\delta \Phi_j \delta \Phi_k \delta \Phi_l \dots),$$

что сводится к добавлению новой внешней линии к тому, что было m -точечной вершинной функцией. В общем случае, когда дифференциальный оператор (16.18) применяется к правой стороне (16.17), воспроизводятся все древесные диаграммы для $(n+1)$ -точечной функции Грина и

$$(1/i^n)(\delta^{n+1} Z[\mathbf{J}]/\delta J_i \delta J_j \dots) = (iX^{-1})_{it}(iX^{-1})_{jm} \dots \\ \dots [i(\delta^{n+1} \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_i \delta \Phi_m \dots)] + \text{одночастично-приводимые члены.} \quad (16.19)$$

Поэтому в пределе $\mathbf{J} = 0$, $\Phi = \mathbf{v}$ величина

$$\delta^{n+1} \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_i \delta \Phi_m \dots |_{\Phi = \mathbf{v}} = \Gamma_{im \dots}^{(n+1)}$$

есть $(n+1)$ -точечная вершинная функция. Поскольку, как показывает (16.15), гипотеза индукции справедлива для $n=3$, утверждение доказано.

Производящий функционал вершинных функций $\Gamma[\Phi]$ имеет представление

$$\Gamma[\Phi] = \sum_{n=2}^{\infty} (1/n!) \Gamma_{i_1, i_2, i_3, \dots, i_n}^{(n)} (\Phi - v)_{i_1} (\Phi - v)_{i_2} \dots (\Phi - v)_{i_n}, \quad (16.20)$$

где

$$\Gamma_{ij}^{(2)} = [\Delta_F^{-1}]_{ij}. \quad (16.21)$$

Вернемся к стандартным обозначениям:

$$\Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)} = \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Из-за трансляционной инвариантности $\Gamma^{(n)}$ зависит только от $n-1$ разностей $x_i - x_j$, поэтому ее фурье-образ определяется следующим выражением:

$$\tilde{\Gamma}_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(p_1, \dots, p_n) (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + \dots + p_n) = \\ = \int d^4 x \prod_{i=1}^n \exp(ip_i x_i) \Gamma_{i_1, \dots, i_n}^{(n)}(x_1, \dots, x_n). \quad (16.22)$$

Это означает, что в вершинах 4-импульс сохраняется.

При обсуждении следствий условия (16.9) удобно рассмотреть случай, когда Φ равна константе φ , не зависящей от координат. Определим эффективный потенциал \mathcal{U} :

$$\Gamma[\Phi = \varphi] = -(2\pi)^4 \delta^4(0) \mathcal{U}(\varphi),$$

$$\begin{aligned} \mathcal{U}(\varphi) = & -\sum_{n=2}^{\infty} (1/n!) \tilde{\Gamma}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(0, 0, \dots, 0) (\varphi - v)_{i_1} \times \\ & \times (\varphi - v)_{i_2} \dots (\varphi - v)_{i_n}, \end{aligned} \quad (16.23)$$

так что

$$\delta^n \mathcal{U}(\varphi) / \delta \varphi_{i_1} \delta \varphi_{i_2} \dots \delta \varphi_{i_n} |_{\varphi=v} = -\tilde{\Gamma}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(0, 0, \dots, 0)$$

равна n -точечной вершинной функции со знаком минус, взятой при нулевых внешних импульсах. Условие (16.9) переходит в

$$\partial \mathcal{U}(\varphi) / \partial \varphi_i |_{\varphi=v} = 0. \quad (16.24)$$

Далее величина

$$\partial^2 \mathcal{U}(\varphi) / \partial \varphi_i \partial \varphi_j |_{\varphi=v} = -[\tilde{\Delta}_{\mathbf{F}}^{-1}(0)]_{ij} \quad (16.25)$$

положительно полуопределена, так как $\Delta_{\mathbf{F}}^{-1}$ ведет себя как $(p^2 - m^2)$ вблизи $p^2 \approx m^2$ и не может иметь других нулей при $p^2 < m^2$. Поэтому вакуумное среднее $\varphi = v$ есть значение φ , минимизирующее $\mathcal{U}(\varphi)$. Обсуждение, проведенное в разд. 2, указывает, что $\varphi = v$ должно быть абсолютным минимумом \mathcal{U} , но это здесь не будет доказываться.

Если \mathcal{L} инвариантна относительно преобразований

$$\varphi_i \rightarrow \varphi_i - i\theta^\alpha L_{ij}^\alpha \varphi_j,$$

из структуры (16.1) следует, что $Z[J]$ инвариантен относительно преобразований

$$J_i \rightarrow J_i - i\theta^\alpha L_{ij}^\alpha J_j.$$

И окончательно эффективный потенциал $\mathcal{U}(\varphi)$ есть инвариантная функция φ относительно указанных выше преобразований. Анализ потенциала V в разд. 2 можно теперь дословно перенести на эффективный потенциал \mathcal{U} с использованием $-[\tilde{\Delta}_{\mathbf{F}}^{-1}]_{ij}$ в (16.25) вместо M_{ij}^2 в (2.19). Мы получаем поэтому, что факт появления и число голдстоуновских бозонов, обсуждавшиеся там, справедливы во всех порядках теории возмущений.

$Z[\mathbf{J}]$, $\Gamma[\Phi]$ и $\mathcal{U}(\varphi)$ можно построить по теории возмущений. Для простоты рассмотрим случай однокомпонентного поля. Эффективный способ разложения этих величин в ряды состоит во введении в (16.1) фиктивного параметра a :

$$\begin{aligned} \exp\{iZ[\mathbf{J}]\} &= \int [d\varphi] \exp\{i\int d^4x \{ (1/a) \mathcal{L}(x) + \mathbf{J}(x) \cdot \varphi(x) \}\} \sim \\ &\sim \exp\{i\int d^4x (1/a) \mathcal{L}_I[-i(\delta/\delta\mathbf{J}(x))]\} \exp\{\frac{1}{2}\int d^4x d^4y a \mathbf{J}(x) \Delta_F(x-y) \mathbf{J}(y)\}, \end{aligned} \quad (16.26)$$

и разложении $Z[\mathbf{J}]$ по степеням a (в конце концов полагается $a = 1$). Каждый пропагатор умножается на a и каждая вершина — на a^{-1} , когда для определения Z используется (16.26); отсюда следует, что диаграмма Фейнмана с E внешними линиями, I внутренними линиями и V вершинами умножается на a^{E+I-V} . Имеется топологическое соотношение, справедливое для любой диаграммы Фейнмана

$$L = I - V + 1,$$

где L — число петель (т.е. число независимых 4-импульсов интегрирования) в диаграмме. Поэтому разложение по этому фиктивному параметру a соответствует разложению функций Грина по числу петель в диаграммах Фейнмана. Преимущество этого разложения перед разложением по степеням какой-либо константы связи состоит в том, что в первом случае симметрия лагранжиана сохраняется в каждом порядке теории возмущений по a , так как эффективно a умножает полный лагранжиан. В противоположность этому если, например, для построения теории возмущений разделить лагранжиан Янга — Миллса на свободную часть и часть, описывающую возмущение, то каждая часть в отдельности не будет калибровочно-инвариантна и следствия калибровочной инвариантности не будут явными сами по себе в каждом порядке теории возмущений. (Напомним, что неабелевы калибровочные преобразования зависят от константы связи.)

Далее мы обсудим явное построение Z , Γ и \mathcal{U} в двух первых порядках разложения по петлям в простой модели

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial\mu\varphi)^2 - \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda_0\varphi^4. \quad (16.27)$$

Метод легко обобщается на другие модели. Из приводимого обсуждения не видно, что полученная конструкция является на самом деле разложением по числу петель, но любознательный студент может вывести это сам, посмотрев вначале статью Намбу, в которой показано,

что разложение по петлям есть также разложение по постоянной Планка \hbar , и замечая затем, что предлагаемый метод есть асимптотическое разложение этих величин по \hbar .

Представим себе, что (16.1) записано в евклидовом пространстве, как это объяснялось в разд. 12. Так как в этом случае экспонента в правой части ограничена сверху, возникает соблазн вычислять функциональный интеграл методом наискорейшего спуска. Для простоты мы оставим обозначения пространства Минковского, но строгое обоснование этого метода основано на постулате евклидовости. Разложим экспоненту в правой части (16.1):

$$S[\varphi] + \int d^4x J(x) \varphi(x) = \int d^4x \{ \mathcal{L}(x) + J(x) \varphi(x) \}$$

около точки $\varphi(x) = \varphi_0(x)$:

$$\begin{aligned} S[\varphi] + \int d^4x J(x) \varphi(x) &= S[\varphi_0] + \int d^4x J(x) \varphi_0(x) + \int d^4x \{ (\delta S[\varphi_0] / \delta \varphi_0(x)) + \\ &+ J(x) \} [\varphi(x) - \varphi_0(x)] + (1/2!) \int d^4x d^4y \{ (\delta^2 S[\varphi_0] / \delta \varphi_0(x) \delta \varphi_0(y)) + \dots \} \\ &+ \dots \end{aligned} \quad (16.28)$$

и выберем φ_0 так, чтобы член, линейный по $\varphi - \varphi_0$, отсутствовал в разложении (16.28). Это выполняется при условии

$$\delta S[\varphi_0] / \delta \varphi_0(x) = -J(x), \quad (16.29)$$

которое означает, что φ_0 есть решение классического (неквантованного) полевого уравнения в присутствии внешнего источника $J(x)$.

Для лагранжиана (16.27) уравнение (16.29) есть

$$(\partial^2 + \mu^2) \varphi_0(x) + \lambda \varphi_0^3(x) = J(x). \quad (16.30)$$

В любом случае φ_0 получается из (16.29) как функционал внешнего источника J .

После подстановки (16.28) в (16.1) получаем

$$\begin{aligned} \exp(iZ[J]) &= \exp\{iS[\varphi_0] + i\int d^4x J(x) \varphi_0(x)\} \times \\ &\times \int [d\varphi] \exp\{i[\int d^4x d^4y (1/2!) \delta^2 S[\varphi_0] / \delta \varphi_0(x) \delta \varphi_0(y) \\ &+ \dots] (\varphi(x) - \varphi_0(x)) (\varphi(y) - \varphi_0(y)) + \dots\}. \end{aligned} \quad (16.31)$$

Приближение низшего порядка (которое на один порядок ниже приближения наискорейшего спуска) получается, если вообще пренебречь интегралом по $\varphi(x)$ и положить

$$Z[J] \approx S[\varphi_0] + \int d^4x J(x) \varphi_0(x) \equiv Z^0[J]. \quad (16.32)$$

Здесь Z является функционалом только J , поскольку φ_0 есть функционал J . Z^0 можно найти явно, решая вначале (16.30) для φ_0 и затем подставляя это решение в (16.32). (16.30) можно решить разложением по степеням λ :

$$\varphi_0(x) = -\int d^4y \Delta_F(x-y; \mu^2) J(y) + \lambda [\int d^4y \Delta_F(x-y; \mu^2) J(y)]^3, \quad (16.33)$$

где использование Δ_F обусловлено постулатом евклидовости. После подстановки (16.33) в (16.32) мы находим, что $Z^0[J]$ есть производящий функционал функций Грина в древесном (т.е. без петель) приближении:

$$Z^0[J] = -\frac{1}{2} \int d^4x d^4y J(x) \Delta_F(x-y; \mu^2) J(y) - \\ - (\lambda/4) \int d^4u \prod_{i=1}^4 \int d^4x_i J(x_i) \Delta_F(x_i - u; \mu^2) + \dots \quad (16.34)$$

То, что Z^0 есть древесное приближение Z , видно более ясно, если в этом приближении вычислить $\Gamma[\Phi]$. Так как

$$\Phi(x) = \delta Z / \delta J(x) \approx \delta Z^0 / \delta J(x) = \int d^4y \{ (\delta S[\varphi_0] / \delta \varphi_0(y)) \delta \varphi_0(y) / \delta J(x) + \\ + J(y) \delta \varphi_0(y) / \delta J(x) \} + \varphi_0(x),$$

в этом порядке получаем

$$\Phi(x) = \varphi_0(x). \quad (16.35)$$

Поэтому $\Gamma(\Phi)$ в этом порядке равен

$$\Gamma^0[\Phi] = Z^0[J] - \int d^4x J(x) \Phi(x) = \\ = \{ S[\Phi] + \int d^4x J(x) \Phi(x) \} - \int d^4x J(x) \Phi(x) = S[\Phi]. \quad (16.36)$$

Таким образом, в этом приближении вершинные функции генерируются лагранжианом и функции Грина строятся из этих необросших вершин по правилам древесных диаграмм. Эффективный потенциал \mathcal{U} [см. (16.23)] равен

$$\mathcal{U}(\varphi) = -S(\varphi) = V(\varphi),$$

где φ не зависит от координат и V равен части лагранжиана (со знаком минус), не зависящей от производных полей. Иными словами, $V(\varphi)$ есть потенциал поля φ . Это оправдывает название "эффективный потенциал" для \mathcal{U} . В качестве дальнейшего шага мы можем применить метод наискорейшего спуска к функциональному интегралу в (16.31). Для этого следует пренебречь более чем квадратичными по $(\varphi - \varphi_0)$ членами в экспоненте подынтегрального выражения и вы-

полнить гауссово интегрирование. Получаем

$$\int [d\varphi] \exp\{i \int d^4x d^4y (1/2!) (\delta^2 S[\varphi_0] / \delta\varphi_0(x) \delta\varphi_0(y)) [\varphi(x) - \varphi_0(x)] [\varphi(y) - \varphi_0(y)]\} \approx 1 / \sqrt{\det (\delta^2 S[\varphi_0] / \delta\varphi_0(x) \delta\varphi_0(y))} = \\ = \exp\{-1/2 \text{Sp} \ln (\delta^2 S[\varphi_0] / \delta\varphi_0(x) \delta\varphi_0(y))\}.$$

так что

$$Z[J] \approx Z^0[J] + (i/2) \text{Sp} \ln \{\delta^2 S[\varphi_0] / \delta\varphi_0(x) \delta\varphi_0(y)\} \equiv Z^1[J]. \quad (16.37)$$

Например, для лагранжиана (16.27)

$$\delta^2 S / \delta\varphi(x) \delta\varphi(y) = (-\partial^2 - \mu^2 - 3\lambda\varphi^2(x)) \delta^4(x - y),$$

так что

$$(i/2) \text{Sp} \ln (\delta^2 S / \delta\varphi(x) \delta\varphi(y)) \approx (i/2) \text{Sp} \ln [1 - 3\lambda\varphi^2 / (-\partial^2 - \mu^2 + i\epsilon)] = \\ = -(i/2) \sum_{n=1}^{\infty} ((-3\lambda)^n / n) \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Delta_F(x_1 - x_2) \varphi^2(x_2) \Delta_F(x_2 - x_3) \dots \\ \dots \Delta_F(x_n - x_1) \varphi^2(x_1). \quad (16.38)$$

Построим теперь $\Gamma[\Phi]$ в этом порядке:

$$\Gamma^1[\Phi] \equiv Z^1[J] - \int d^4x J(x) \Phi(x), \quad (16.39)$$

где

$$\Phi(x) = \delta Z^1[J] / \delta J(x) \equiv \varphi_0(x) + \epsilon(x) \quad (16.40)$$

и $\epsilon(x)$ дается выражением

$$\epsilon(x) = (\delta / \delta J(x)) (i/2) \text{Sp}_{\xi, \eta} (\delta^2 S[\varphi_0] / \delta\varphi_0(\xi) \delta\varphi_0(\eta)).$$

К счастью, для построения $\Gamma[\Phi]$ в первом порядке по $\epsilon(x)$ нет необходимости явно знать формулу $\epsilon(x)$, как это сейчас будет продемонстрировано. Вначале отметим, что из-за (16.29)

$$Z^0[J] = S[\varphi_0] + \int d^4x J(x) \varphi_0(x) = S[\Phi] + \int d^4x J(x) \Phi(x) - \\ - \int d^4y \{(\delta S[\varphi_0] / \delta\varphi_0(y)) + J(y)\} \epsilon(y) + O(\epsilon^2) = \\ = S[\Phi] + \int d^4x J(x) \Phi(x) + O(\epsilon^2). \quad (16.41)$$

Поэтому в порядке ϵ из (16.37), (16.39) и (16.41) следует

$$\Gamma^1[\Phi] = S[\Phi] + (i/2) \text{Sp}_{\xi, \eta} (\delta^2 S[\Phi] / \delta\Phi(\xi) \delta\Phi(\eta)). \quad (16.42)$$

Второй член является однопетлевой поправкой к производящему функционалу вершинных функций.

С помощью (16.38) и (16.42) можно явно вычислить эффективный потенциал \mathcal{U} . Вспоминая определение \mathcal{U} с помощью (16.23), находим

$$\mathcal{U}(\varphi) = (\mu_0^2/2)\varphi^2 + (\lambda_0/4)\varphi^4 + (i/2)f(d^4k/(2\pi)^4) \sum_{N=1} - \\ - 3\lambda_0\varphi^2/(k^2 - \mu_0^2 + i\epsilon)^{N/N}. \quad (16.43)$$

Члены для $N = 1$ и $N = 2$ расходятся. Однако эти члены пропорциональны φ^2 и φ^4 , и их расходимости можно включить в определение μ_0^2 и λ_0^2 .

Итак, можно написать

$$\mathcal{U}(\varphi) = \frac{1}{2}\mu^2\varphi^2 + \frac{1}{4}\lambda\varphi^4 + J(\varphi^2),$$

где

$$J(\varphi^2) = (i/2)f(d^4k/(2\pi)^4) \sum_{N=3} - 3\lambda\varphi^2/(k^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{N/N} \quad (16.44)$$

и μ^2 и λ^2 определены как значения двух- и четырехточечных вершинных функций в точке, где все внешние импульсы равны нулю.

ЛИТЕРАТУРА

Идея использовать производящие функционалы функций Грина и вершинных функций принадлежит Швингеру:

1. Schwinger J., Proc. Nat. Acad. Sci., **37**, 452, 455 (1951)
(Имеется перевод: Ю. Швингер, ПСФ, № 3, 28, 33 (1955)).

Впервые явное построение производящего функционала вершинных функций с помощью преобразования Лежандра дано в следующей статье:

2. Jona-Lasinio G., Nuovo Cimento, **34**, 1790 (1964).

Эта статья содержит также вывод теоремы Голдстоуна таким методом. Последние обзоры метода производящих функционалов можно найти в:

3. Lee B.W., Chiral Dynamics, Gordon and Breach, New York, 1972.
4. Fried H.M., Functional Methods and Models in Quantum Field Theory, MIT Press, Cambridge, 1972.
5. Zumino B., в книге: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, eds. Deser S., Grisaru M., Pendleton H., Vol. 2, MIT Press, Cambridge, 1970, p. 439.

Эквивалентность разложения по числу петель и по степеням \hbar показана в.

6. *Nambu Y.*, *Phys. Lett.*, **258**, 626 (1966).

7. *Brown L.S.*, *Boulware D.*, *Phys. Rev.*, **172**, 1628 (1968).

Вычисление однопетлевых поправок методом наибыстрейшего спуска обсуждается в:

8. *Lee B.W.*, *Zinn-Justin J.*, *Phys. Rev.*, **D5**, 3121 (1972), Appendix B.

О существенном использовании этого метода в недавней литературе см., например:

9. *Coleman S.*, *Weinberg E.*, *Phys. Rev.*, **D7**, 1888 (1973).

17. ПЕРЕНОРМИРОВКА В σ -МОДЕЛИ

Формализм, развитый в предыдущем разделе, полезен при обсуждении перенормировки моделей со спонтанным нарушением симметрии и, в частности, σ -модели. В обобщенном смысле σ -модель есть модель, в которой симметрия нарушается членом размерности I , т.е. членом, пропорциональным бозонному полю.

Приводим простой пример модели такого типа

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}[(\partial_\mu \pi)^2 + (\partial_\mu \sigma)^2] - \frac{1}{2}\mu_0^2(\sigma^2 + \pi^2) - \\ & - \frac{1}{4}\lambda_0(\sigma^2 + \pi^2)^2 + c\sigma \equiv \mathcal{L}_{\text{сим}} + c\sigma, \end{aligned} \quad (17.1)$$

которая является двумерным обобщением модели, обсуждавшейся в предыдущем разделе. За исключением члена $c\sigma$, лагранжиан (17.1) совпадает с лагранжианом, рассмотренным в разд. 2, где было указано, что он инвариантен относительно $U(1)$ -преобразований полей σ и π . Интересными чертами модели являются существование "почти" сохраняющегося тока

$$A_\mu = \pi \partial_\mu \sigma - \sigma \partial_\mu \pi, \quad (17.2)$$

дивергенция которого пропорциональна π -полю

$$\partial^\mu A_\mu = c\pi, \quad (17.3)$$

и ненулевое вакуумное среднее σ -поля, обусловленное последним членом в (17.1). (17.3) представляет собой вариант гипотезы PCAC, и поэтому модель представляет некоторый физический интерес.

Изучим вначале классическое решение лагранжиана (17.1). Потенциал равен

$$V(\sigma, \pi) = \frac{1}{4}\lambda(\sigma^2 + \pi^2)^2 + \frac{1}{2}\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) - c\sigma. \quad (17.4)$$

(на время индекс "0" у λ и μ^2 опущен). Минимум потенциала находим

ся в точке $\pi = 0$ и $\sigma = u$, где

$$u(\mu^2 + \lambda u^2) = c, \quad (17.5)$$

u является вакуумным средним σ -поля в этом приближении. Сделаем сдвиг поля σ на u , определяя s : $s = \sigma - u$; тогда (17.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial_\mu s)^2 + (\partial_\mu \pi)^2] - \frac{1}{2} \mu_\sigma^2 s^2 - \frac{1}{2} \mu_\pi^2 \pi^2 - \\ & - \frac{1}{4} \lambda (s^2 + \pi^2)^2 - \lambda u (s^2 + \pi^2) s, \end{aligned} \quad (17.6)$$

так что в этом приближении s -поле описывает частицу массы μ_σ :

$$\mu_\sigma^2 = \mu^2 + 3\lambda u^2, \quad (17.7)$$

а π -поле — частицу массы μ_π :

$$\mu_\pi^2 = \mu^2 + \lambda u^2. \quad (17.8)$$

В этом приближении при $c = 0$, т.е. в случае, когда лагранжиан инвариантен относительно $U(1)$ -преобразований, должно выполняться, согласно (17.5), либо $u = 0$, либо $\mu_\pi^2 = \mu^2 + \lambda u^2 = 0$. Если $u^2 = 0$, тогда $\mu^2 \geq 0$ из-за условия $\mu_\sigma^2 = \mu_\pi^2 = \mu^2 \geq 0$. Это — "обычное" проявление симметрии лагранжиана: частицы, соответствующие σ - и π -полям, вырождены. С другой стороны, если $\mu_\pi^2 = 0$, то должно быть $\mu^2 < 0$, поскольку $\lambda u^2 > 0$. Второй случай — голдстоуновская реализация симметрии с полем π в качестве голдстоуновского бозона. В этом случае $\mu^2 = -\lambda u^2$ и $\mu_\sigma^2 = -2\mu^2 > 0$. Для более подробного обсуждения σ -модели см. монографию одного из авторов "Киральной динамики".

Вернемся к обсуждению точного решения с учетом радиационных поправок. Важным свойством σ -модели является то, что функции Грина этой модели генерируются производящим функционалом функций Грина симметричной теории. Последний равен

$$\begin{aligned} \exp\{iZ[\mathbf{J}]\} = & \int [d\sigma][d\pi] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\text{сим}}(x) + J_\sigma(x)\sigma(x) + J_\pi(x)\pi(x)]\}, \\ \mathbf{J} = & (J_\sigma, J_\pi). \end{aligned} \quad (17.9)$$

Разложим $Z[\mathbf{J}]$ по \mathbf{J} около $J_\sigma = c$, $J_\pi = 0$. Получаем

$$\begin{aligned} & (1/i^{n+m} - 1) \delta^{n+m} Z / \delta J_\sigma(x_1) \dots \delta J_\sigma(x_n) \delta J_\pi(y_1) \dots \\ & \dots \delta J_\pi(y_m) |_{J_\sigma=c, J_\pi=0} = (1/W[c, 0]) \int [d\sigma][d\pi] s(x_1) \dots \\ & \dots s(x_n) \pi(y_1) \dots \pi(y_m) \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}(x)\} + \text{несвязные части}, \end{aligned} \quad (17.10)$$

где $s = \sigma - u$; u равно вакуумному среднему σ , так что

$$\begin{aligned} & \int [d\sigma][d\pi] s(x) \exp\{i \int d^4y \mathcal{L}(y)\} = 0, \\ & s(x) \equiv \sigma(x) - u. \end{aligned} \quad (17.11)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} W[c, 0] &= \int [d\sigma][d\pi] \exp\{i \int d^4x [\mathcal{L}_{\text{сим}}(x) + c\sigma(x)]\} = \\ &= \int [d\sigma][d\pi] \exp\{i \int d^4x \mathcal{L}(x)\} \end{aligned} \quad (17.12)$$

есть амплитуда перехода вакуум – вакуум в σ -модели. Делаем вывод: если мы разложим $Z[\mathbf{J}]$ около $\mathbf{J} = 0$, то в качестве коэффициентов разложения получим функции Грина симметричной теории (т.е. теории с лагранжианом $\mathcal{L}_{\text{сим}}$); если же разложим $Z[\mathbf{J}]$ около $\mathbf{J} = (c, 0)$ – в качестве коэффициентов разложения получим функции Грина σ -модели.

Результат основан на том простом факте, что нарушающий симметрию член $c\sigma$ имеет форму члена с внешним источником $J\sigma$ при постоянном $J = c$. Эта важная теорема имеет аналог и в терминах Γ . Поскольку

$$\delta\Gamma[\Phi]/\delta\Phi_i(x) = -J_i(x), \quad \Gamma[\Phi] = Z[\mathbf{J}] - \int d^4x \mathbf{J}(x) \cdot \Phi(x), \quad (17.13)$$

где

$$\delta Z[\mathbf{J}]/\delta J_i(x) = \Phi_i(x), \quad (17.14)$$

то из (17.13) следует

$$\delta\Gamma[\Phi]/\delta\Phi_i(x)|_{\Phi=\mathbf{u}} = -c_i, \quad (17.15)$$

что является аналогом уравнения (16.9). (17.5) представляет собой приближение первого порядка к уравнению (17.15). Далее можно повторить анализ, который привел к (16.17), но на этот раз в пределе $\mathbf{J} = \mathbf{c}$ и $\Phi = \mathbf{u}$, в результате чего обнаружим, что величины

$$\delta^n \bar{\Gamma}[\bar{\Phi}]/\delta\Phi_{i_1} \delta\Phi_{i_2} \dots \delta\Phi_{i_n} |_{\Phi=\mathbf{u}} \equiv \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(\mathbf{u}) \quad (17.16)$$

являются n -точечными вершинными функциями σ -модели. [В (17.16) мы вернулись к соглашению об обозначении индекса внутренней симметрии и пространственно-временной координаты x коллективным индексом i .] *Вывод*: производящий функционал вершинных функций симметричной теории генерирует вершинные функции σ -модели, если его разлагать около $\Phi = \mathbf{u}(\mathbf{c})$, где $\mathbf{u}(\mathbf{c})$ определяется из (17.15). Как было показано в предыдущем разделе, в низшем порядке $\Gamma[\Phi] \sim S[\Phi]$, так что (17.5) следует из (17.15).

Рассмотрим теперь предел $\mathbf{c} \rightarrow 0$ в (17.15). (17.15) на самом деле является уравнением, которое определяет вакуумное среднее \mathbf{u} как функцию \mathbf{c} . Чтобы изучить различные типы решения (17.15), достаточно рассмотреть эффективный потенциал, определенный со-

гласно (16.23):

$$\Gamma[\Phi = \varphi] = -(2\pi)^4 \delta^4(0) \mathcal{O}(\varphi),$$

где φ не зависит от координат. (17.15) эквивалентно следующему уравнению:

$$\partial \mathcal{O}[\varphi] / \partial \varphi_i |_{\varphi = u} = c_i, \quad (17.17)$$

$u(c)$ в пределе $c \rightarrow 0$ может равняться нулю или быть отличным от нуля в зависимости от параметров симметричного лагранжиана. Если $u(0) = v = 0$, тогда симметрия лагранжиана спонтанно нарушена.

Рассмотрим, однако, случай, когда параметры симметричного лагранжиана таковы, что $u(0) = 0$, т.е. случай, когда симметрия реализована обычным образом. Из (17.16) следует, что

$$\Gamma[\varphi] = \sum_{n=2} (1/n!) (\Phi - u)_{i_1} (\Phi - u)_{i_2} \dots (\Phi - u)_{i_n} \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(u). \quad (17.18)$$

Далее, аналог соотношения

$$(d/dx)^n f(x) |_{x=a} = \sum_{m=0} (a^m/m!) (d/dx)^{n+m} f(x) |_{x=0}$$

дает

$$\begin{aligned} \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(u) &= \sum_{m=0} (1/m!) u_{j_1} u_{j_2} \dots u_{j_m} \\ \Gamma_{i_1, i_2, \dots, i_n, j_1, j_2, \dots, j_m}^{(n+m)}(u=0) \end{aligned}$$

или, в импульсном пространстве,

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{i_1, i_2, \dots, i_n}^{(n)}(p_1, p_2, \dots, p_n; u) &= \sum_{m=0} (1/m!) u^m \\ \tilde{\Gamma}_{i_1, i_2, \dots, i_n, \underbrace{1, 1, \dots, 1}_m}^{(n+m)}(p_1, p_2, \dots, p_m, \underbrace{0, 0, \dots, 0}_m). \end{aligned} \quad (17.19)$$

В (17.19) индексы i и j означают σ или π и $\tilde{\Gamma}_{ij\dots}(p, q, \dots) \equiv \tilde{\Gamma}_{ij\dots}(p, q, \dots; u=0)$ есть вершинная функция симметричной теории в импульсном пространстве.

(17.19) важно по той причине, что позволяет устранить расходимости σ -модели, если известно, как перенормировать симметричную модель, поскольку (17.19) выражает вершинные функции σ -модели через вершинные функции симметричной теории. Краткий обзор теории перенормировок будет дан в следующем разделе, однако в настоящий момент достаточно сказать, что если лагранжиан симметричной тео-

при записать в виде

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} [(\partial\sigma)^2 + (\partial\pi)^2] - \mu^2(\sigma^2 + \pi^2) - \frac{1}{4}\lambda(\sigma^2 + \pi^2)^2 + \\ & + \frac{1}{2}(Z_3 - 1)[(\partial\sigma)^2 + (\partial\pi)^2 - \mu^2(\sigma^2 + \pi^2)] - \frac{1}{2}\delta\mu^2(\sigma^2 + \pi^2) - \\ & - \frac{1}{4}\delta\lambda(\sigma^2 + \pi^2)^2, \end{aligned} \quad (17.20)$$

где μ^2 и λ — конечные константы, и соответствующим образом выбрать Z_3 , $\delta\mu^2$, $\delta\lambda$, тогда будут устранены все бесконечности. Таким образом, исходя из лагранжиана (17.20), можно построить *конечный* производящий функционал $\Gamma[\Phi]$ для $u = 0$. Если мы имеем перенормированное (т.е. конечное) выражение для $\Gamma[\Phi]$, его можно разложить около $\Phi = u$, где u определяется согласно (17.15), в результате чего мы получим вершинные функции σ -модели, характеризующейся параметрами λ , μ^2 и c .

Вернемся теперь к тождествам Уорда — Такахаши данной модели. $\mathcal{U}(\varphi)$ есть производящий функционал вершинных функций при нулевых импульсах симметричной теории (если его разлагать около $\varphi = 0$), поэтому \mathcal{U} есть функция инварианта φ , т.е. $\varphi^2 = \varphi_\sigma^2 + \varphi_\pi^2$. Таким образом, (17.17) принимает вид

$$2\varphi_\sigma \partial\mathcal{U}(\varphi^2)/\partial(\varphi^2)|_{\varphi_\sigma=u, \varphi_\pi=0} = c. \quad (17.21)$$

Поскольку обратный π -пропагатор при нулевом импульсе равен [см. (16.25)]

$$-\Delta_\pi^{-1}(0) = \partial^2\mathcal{U}(\varphi)/\partial\varphi_\pi\partial\varphi_\pi|_{\varphi_\sigma=u, \varphi_\pi=0} = 2\partial\mathcal{U}(\varphi)/\partial(\varphi^2)|_{\varphi=u}, \quad (17.22)$$

выполняется равенство

$$-u\Delta_\pi^{-1}(0) = c, \quad (17.23)$$

откуда можно найти u , если $\Delta_\pi^{-1}(0)$ известен как функция λ , μ^2 и u .

Полученное выше предписание для построения перенормированных вершинных функций σ -модели работает для $\mu^2 > 0$, так как только в этом случае имеет смысл сравнение с симметричной теорией. Однако, как только выражение для $\Gamma[\Phi]$ в зависимости от λ , μ^2 и c построено, ничто не мешает выразить $\Gamma[\Phi]$ через λ , u , m_π , где m_π^2 определено с помощью соотношения

$$m_\pi^2 = -\Delta_\pi^{-1}(0) = 2\partial\mathcal{U}(\varphi)/\partial(\varphi^2)|_{\varphi=u},$$

и затем взять предел $m_\pi^2 \rightarrow 0$. (17.23) при этом имеет вид

$$um_\pi^2 = c. \quad (17.24)$$

(17.24) есть перенормированная теорема Голдстоуна: если $c = 0$, то либо $u = 0$, либо $m_\pi^2 = 0$. Последнее соответствует голдстоуновской моде. В этом случае в качестве базисных параметров теории можно взять λ и $u = 0$ вместо λ и $-\mu^2$.

"Мораль" проведенного обсуждения состоит в том, что перенормируемость σ -модели при голдстоуновской реализации зависит только от перенормируемости симметричной теории. Процесс перенормировки не индуцирует дополнительного нарушения симметрии в том смысле, что симметричные контрчлены, указанные в (17.20), достаточны для устранения расходимостей из теории независимо от того, как нарушена симметрия: внешним ($c \neq 0$) или внутренним ($v \neq 0$) образом.

Позже мы обсудим способ перенормировки σ -модели без явного обращения к симметричной теории. Этот метод использует тождества Уорда – Такахаши. Выведем их. Производящий функционал $Z[\mathbf{J}]$ в (17.9) инвариантен относительно $U(1)$ -преобразований внешних источников:

$$\begin{pmatrix} J_\sigma \\ J_\pi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_\sigma \\ J_\pi \end{pmatrix}, \quad (17.25)$$

как можно видеть с помощью замены переменных интегрирования

$$\begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma \\ \pi \end{pmatrix}, \quad (17.26)$$

которая оставляет инвариантным скалярное произведение $J_\sigma \sigma + J_\pi \pi$. Поэтому

$$dZ/d\theta = 0$$

или

$$\int d^4x \{ (\delta Z[\mathbf{J}]/\delta J_\sigma(x)) J_\pi(x) - (\delta Z[\mathbf{J}]/\delta J_\pi(x)) J_\sigma(x) \} = 0. \quad (17.27)$$

Подставляя (17.13) и (17.14) в (17.27), получаем соотношение

$$\int d^4x \{ \Phi_\sigma(x) \delta \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_\pi(x) - \Phi_\pi(x) \delta \Gamma[\Phi]/\delta \Phi_\sigma(x) \} = 0; \quad (17.28)$$

оно показывает, что Γ есть функционал Φ , инвариантный относительно $U(1)$ -преобразований:

$$\begin{pmatrix} \Phi_\sigma \\ \Phi_\pi \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Phi_\sigma \\ \Phi_\pi \end{pmatrix}. \quad (17.29)$$

Отметим, что инвариантность Γ относительно преобразований (17.29) имеет место как для $\mu^2 > 0$, так и для $\mu^2 < 0$. Перенормиро-

ванное Γ , построенное по указанным выше предписаниям, удовлетворяет, таким образом, уравнению (17.28) и в пределе $m_\pi^2 \rightarrow 0$.

Уравнение (17.28) есть тождество Уорда – Такахаша для производящего функционала вершинных функций. Дифференцируя (17.28) многократно по Φ_π и Φ_σ и полагая затем $\Phi_\pi = 0$, $\Phi_\sigma = u$, можно получить бесконечный набор тождеств Уорда – Такахаша. Дифференцируя (17.28) по Φ_π и полагая $\Phi_\pi = 0$, $\Phi_\sigma = u$, мы получаем уравнение на "собственные значения" для u (17.23). Дифференцируя по Φ_π и Φ_σ и переходя к этому пределу, получаем

$$\Delta_\sigma^{-1}(p^2) - \Delta_\pi^{-1}(p^2) = u \Gamma_{\sigma\pi\pi}(p; 0, -p). \quad (17.30)$$

Важный урок, который следует выучить, состоит в том, что тождество Уорда – Такахаша для производящего функционала вершинных функций выглядит одинаково независимо от того, нарушена симметрия спонтанно или не нарушена. Оно удовлетворяется производящим функционалом, построенным вначале для симметричной теории, затем продолженным к голдстоуновской реализации с помощью вариации соответствующих параметров теории.

ЛИТЕРАТУРА

Содержание этого раздела основано на следующих работах:

1. Lee B.W., Nucl. Phys., **В9**, 649 (1969).
2. Gervais J.L., Lee B.W., Nucl. Phys., **В12**, 627 (1969).
3. Lee B.W., Chiral Dynamics, Gordon and Breach, N.Y., 1972.
4. Symanzik K., Lett. Nuovo Cimento, **1**, 10 (1969).
5. Symanzik K., Comm. Math. Phys., **16**, 48 (1970).

См. также различные работы в:

6. Bessis D. (ed.), Cargèse Lectures in Physics, Vol. 5, Gordon and Breach, New York, 1972.

18. БПХЦ-ПЕРЕНОРМИРОВКА

В этом разделе будет дан краткий обзор теории перенормировок, развитой и усовершенствованной в последние годы Боголюбовым, Парасюком, Хеппом и Циммерманом (БПХЦ). Ничего не будет доказываться, однако мы попытаемся сформулировать точные определения и теоремы.

Вначале дадим некоторые определения. Лагранжиан взаимодействия есть сумма членов \mathcal{L}_i , которые представляют собой произведение бозонных полей b_i и фермионных полей f_i с производными d_i . Вершина типа i , появляющаяся из-за \mathcal{L}_i , имеет индекс δ_i , определяемый следующим образом:

$$\delta_i = b_i + \frac{1}{2}f_i + d_i - 4 = \dim \mathcal{L}_i - 4. \quad (18.1)$$

Пусть Γ — одночастично-неприводимая (ОЧН) диаграмма (т.е. диаграмма, которую нельзя сделать несвязной с помощью разрезания только одной линии). Пусть E_B и E_F — числа внешних бозонных и фермионных линий, I_B и I_F — числа внутренних бозонных и фермионных линий, n_i — число вершин типа i . Тогда

$$E_B + 2I_B = \sum_i n_i b_i, \quad (18.2)$$

$$E_F + 2I_F = \sum_i n_i f_i. \quad (18.3)$$

Индексом расходимости Γ называется степень расходимости, которая получается наивным образом при подсчете степени импульсов в числителе и знаменателе фейнмановского интеграла. Она равна

$$D(\Gamma) = \sum_i n_i d_i + 2I_B + 3I_F - 4V + 4; \quad (18.4)$$

последние два числа возникают из-за того, что в каждой вершине имеется четырехмерная δ -функция, позволяющая выразить один из 4-импульсов через другие импульсы, за исключением того, что одна из δ -функций выражает закон сохранения внешних импульсов. Используя (18.1) — (18.3), можно (18.4) записать в виде

$$D = \sum_i n_i \sigma_i - E_B - \frac{1}{2}E_F + 4 \quad (18.5)$$

или

$$D + E_B + \frac{1}{2}E_F - 4 = \sum_i n_i \delta_i. \quad (18.6)$$

Цель теории перенормировок состоит в определении *конечной части* фейнмановского интеграла, соответствующего Γ ,

$$F_\Gamma = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int dk_1 \dots dk_L I_\Gamma, \quad (18.7)$$

где I_Γ есть произведение пропагаторов Δ_F и вершин P^{δ_i} :

$$I_\Gamma = \prod_{a,b,\sigma} \Delta_F^{a,b,\sigma} \prod_a P_a. \quad (18.8)$$

¹⁾ Индекс σ нумерует линии, соединяющие одинаковые вершины. — *Прим. перев.*

Конечная часть F_Γ будет обозначаться через j_Γ ; она имеет вид

$$J_\Gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int dk_1 \dots dk_L R_\Gamma. \quad (18.9)$$

Мы опишем предписание Боголюбова для построения R_Γ из I_Γ .

Рассмотрим вначале простой случай, когда Γ примитивно расходится. Диаграмма Γ называется примитивно расходящейся, если она собственная (т.е. ОЧН), расходится согласно оценке по индексу (т.е. $D(\Gamma) \geq 0$) и становится сходящейся при разрезании любой из линий. В этом случае можно использовать первоначальное предписание Дайсона. Запишем

$$J_\Gamma = \int dk_1 \dots dk_L (1 - t^\Gamma) I_\Gamma,$$

т.е.

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma) I_\Gamma.$$

Операцию t^Γ следует определить так, чтобы сократить расходимость в J_Γ . J_Γ есть функция $E_F + E_B - 1 = E - 1$ внешних импульсов p_1, \dots, p_{E-1} :

$$I_\Gamma = f(p_1, \dots, p_{E-1}).$$

Операция $(1 - t^\Gamma)$ на f определяется как вычитание из f первых $D(\Gamma) + 1$ членов разложения Тейлора в точке $p_i = 0$:

$$\begin{aligned} t^\Gamma f(p_1, \dots, p_{E-1}) = f(0, \dots, 0) + \dots + (1/d!) \sum_{j_1, \dots, j_d=1}^{E-1} (p_{j_1})_\lambda (p_{j_2})_\mu \dots \\ \dots (p_{j_d})_\nu \partial^{d-1} f / \partial (p_{j_1})_\lambda \partial (p_{j_2})_\mu \dots \partial (p_{j_d})_\nu, \end{aligned} \quad (18.10)$$

где $d = D(\Gamma)$. Операция $(1 - t^\Gamma)$ сводится к выполнению вычитаний в подынтегральном выражении I_Γ , число которых определяется индексом расходимости интеграла.

Еще несколько определений. *Перенормировочной частью* называется собственная диаграмма, которая по индексу расходится ($D \geq 0$). Две диаграммы (поддиаграммы) γ_1 и γ_2 называются *несвязными*:

$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset$, если они не имеют общих вершин или линий. Пусть $\{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}$ — набор взаимно несвязных поддиаграмм Γ , каждая из ко-

торых связна. Тогда диаграмма

$$F \equiv \Gamma / \{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}$$

определяется с помощью сведения каждой γ в точку и приписывания соответствующей вершине значения 1.

Теперь мы готовы к описанию *R-операции Боголюбова*: 1) если Γ не есть перенормировочная часть (т.е. $D(\Gamma) \leq -1$), то

$$R_\Gamma = \bar{R}_\Gamma; \quad (18.11)$$

2) если Γ — перенормировочная часть ($D(\Gamma) \geq 0$), то

$$R_\Gamma = (1 - t^\Gamma) \bar{R}_\Gamma, \quad (18.12)$$

где \bar{R}_Γ определено следующим образом:

$$\bar{R}_\Gamma = I_\Gamma + \sum_{\{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}} I_{\Gamma/\{\gamma_1, \dots, \gamma_c\}} \prod_{\tau=1}^c O_{\gamma_\tau}, \quad (18.13)$$

($O_\gamma = -t\gamma\bar{R}_\gamma$ и сумма берется по всем возможным различным наборам $\{\gamma_i\}$). Это определение \bar{R}_Γ через \bar{R}_γ является рекуррентным; по теории возмущений никаких проблем не возникает, поскольку \bar{R}_γ , появляющиеся в определении \bar{R}_Γ , обязательно более низкого порядка.

Уравнение (18.13) можно "решить". Отсылая любознательного читателя к лекциям Шиммермана, мы приведем только результат. Прежде чем это сделать, нам опять нужны некоторые определения. Две диаграммы γ_1 и γ_2 называются *перекрывающимися*, если не выполняется ни одно из следующих условий:

$$\gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset, \quad \gamma_1 \supset \gamma_2, \quad \gamma_2 \supset \gamma_1.$$

Γ -лес U есть совокупность диаграмм, удовлетворяющая следующим свойствам: а) элементы U являются перенормировочными частями; б) любые два элемента U , γ^a или γ^b , не перекрываются; в) U может быть пустым. Γ -лес U называется полным или нормальным соответственно тому, содержит U диаграмму Γ или нет. *Теорема Шиммермана* состоит в следующем:

$$R_\Gamma = \sum_{\text{все } U} \prod_{\lambda \in U} (-t^\lambda) I_\Gamma, \quad (18.14)$$

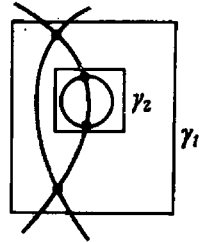
где \sum распространяется на все возможные (полные, нормальные и пустой) Γ -леса и в произведении $\prod(-t^\lambda)$ множители упорядочены так,

что t^λ стоит слева от t^σ , если $\lambda > \sigma$. Если $\lambda \wedge \sigma = \emptyset$, тогда порядок неважен. В качестве простого примера рассмотрим диаграмму на фиг. 18.1. Леса есть \emptyset (пустой), γ_1 (полный), γ_2 (нормальный), γ_1, γ_2 (полный).

(18.14) в этом случае записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} R_\Gamma &= (1 - t^{\gamma_1} - t^{\gamma_2} + t^{\gamma_1} t^{\gamma_2}) I_\Gamma = \\ &= (1 - t^{\gamma_1})(1 - t^{\gamma_2}) I_\Gamma. \end{aligned}$$

Отметим, что в БПХ-процедуре R -операция выполняется относительно поддиаграмм, которые состоят из вершин и *всех* пропагаторов, которые связывают эти вершины. По БПХ-определению поддиаграмма γ_2 не содержит перенормировочных частей, отличных от нее самой, и в этом смысле обсуждаемая схема отличается от схемы Салама.



Фиг. 18.1. Пример БПХ-определения поддиаграмм в частной диаграмме — поправке к 4-точечной функции в теории $\lambda\phi^4$.

При формулировке БПХ-теоремы необходимо вначале каким-либо образом регуляризовать пропагаторы в (18.9), например так:

$$\Delta_F(p) \xrightarrow{\text{рег}} \Delta_F(p; r, \epsilon) = -i \int_r^\infty d\alpha \exp \{ i\alpha (p^2 - m^2 + i\epsilon) \},$$

и определить $I_\Gamma(r, \epsilon)$, как в (18.9), с помощью $\Delta_F(r, \epsilon)$, а затем построить $R_\Gamma(r, \epsilon)$ с помощью R -операции. БПХ-теорема утверждает, что R_Γ существует как предел $r \rightarrow 0$ и $\epsilon \rightarrow +0$ и является граничным значением аналитической по внешним импульсам функции. Другая теорема, доказательство которой можно найти в § 26 книги Боголюбова и Ширкова и которая является комбинаторной, утверждает, что вычитания, обусловленные $(1 - t^\Gamma)$ -предписанием R -операции, могут формально рассматриваться как добавление контрчленов в лагранжиан.

Теория, которая имеет конечное число перенормировочных частей, называется перенормируемой. Перенормируемой является теория, в которой все δ_i меньше или равны нулю. В этом случае индекс вычитательного члена в R -операции ограничен величиной $D + E_B + (\frac{1}{2})E_F - 4$, которая самое большее, согласно (18.5), равна нулю. В такой теории для реализации R -операции достаточно добавить к лаг-

ранжиану конечное число контрчленов. В σ -модели, которая была рассмотрена в предыдущем разделе, расходятся по индексу все двух-, трех- и четырехточечные вершинные функции. Двухточечные вершины (собственно-энергетические части) расходятся квадратично, так что в R -операции следует делать два вычитания по p^2 в интегралах Фейнмана. Остальные вершины расходятся только логарифмически.

БПХЦ-перенормировку можно использовать совместно с тождествами Уорда, обсуждавшимися в предыдущем разделе, что позволяет развить систематическую схему перенормировки σ -модели без явной ссылки на симметричную теорию. Впервые это сделал Симанзик. Построение перенормированного ряда теории возмущений, согласно БПХЦ-предписаниям, требует задания значений перенормировочных частей в вычитательных точках. Предположим, что эти значения заданы в $(n - 1)$ -петлевом приближении таким образом, что удовлетворяются тождества Уорда — Такахаши, и нам нужно построить вершинные функции в n -петлевом приближении. Предположим далее, что существует схема регуляризации, при которой для регуляризованных вершин выполняются тождества Уорда — Такахаши. Например, из (17.30) имеем

$$\Delta_{\sigma}^{-1}(p^2; r) - \Delta_{\pi}^{-1}(p^2; r) = u \overline{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}(p; 0, -p; r), \quad (18.15)$$

где r есть параметр обрезания, который в конце следует положить равным нулю. Применим R -операцию к соответствующим вершинам и запишем

$$\begin{aligned} \Delta_{\sigma}^{-1}(p^2; r) &= p^2 Z - m_{\sigma}^2 + (1 - t^{\Gamma_1}) \overline{[\Delta_{\sigma}^{-1}(p^2; r)]}, \\ \Delta_{\pi}^{-1}(p^2; r) &= p^2 - m_{\pi}^2 + (1 - t^{\Gamma_2}) \overline{[\Delta_{\pi}^{-1}(p^2; r)]}, \\ \overline{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}(p; q, k; r) &= -2\lambda u + (1 - t^{\Gamma_3}) \overline{[\overline{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}(p; q, k; r)]}, \end{aligned} \quad (18.16)$$

где $D(\Gamma_1) = 2$, $D(\Gamma_2) = 2$, $D(\Gamma_3) = 0$, символ $\overline{[\]}$ означает величину, построенную согласно правилам R -операции (18.13), причем вершины P_a в (18.8) принимают значения, соответствующие перенормировочным частям в точках вычитаний, заданных в $(n - 1)$ -петлевом приближении. В (18.16) степень вычитательного полинома определяется индексом расходимости соответствующей вершинной функции. Коэффициент перед $p^2 b \Delta_{\pi}^{-1}$ выбран равным 1 с помощью соответствующей перенормировки полей π и σ . Аналогично значение $\overline{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}(0; 0, 0; r)$ выбрано равным $-2\lambda u$ по определению. Подставляя выражения (18.16)

в (18.15) и сравнивая коэффициенты перед $(p^2)^0$ и p^2 , получаем

$$Z = 1 + u \{ (d_i / \partial p^2) \tilde{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}(p; 0, -p; r) \}_{p^2=0}, \quad (18.17)$$

$$m_\sigma^2 = m_\pi^2 + 2\lambda u^2.$$

БПХ-теорема утверждает, что величины в (18.16), а также Z в (18.17) не зависят от обрезания, т.е. имеют хорошо определенный предел $r \rightarrow 0$; более того, эта процедура определяет значения Z , m_σ^2 перенормировочной части Δ_σ^{-1} в n -петлевом приближении. Фактически, как впервые показал Симанзик, можно последовательно использовать тождества Уорда – Такахаши и полностью определить значения трех- и четырехточечных перенормировочных частей в точках вычитания как функции m_π^2 , $-2\lambda u$ и $\tilde{\Gamma}_{\pi\pi\pi\pi}(0, 0, 0, 0) = -6\lambda$.

Индуктивная процедура, описанная выше, становится полной, если мы учтем, что в "древесном" (0-петлевом) приближении значения перенормировочных частей в точках вычитания определяются лагранжианом (они, конечно, удовлетворяют тождествам Уорда – Такахаши). Таким образом, значения перенормировочных частей в точках вычитания имеют разложение

$$Z = 1 + z_1 \lambda + z_2 \lambda^2 + \dots,$$

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma\sigma}(0, 0, 0) = -6\lambda u [1 + \alpha_1 \lambda + \alpha_2 \lambda^2 + \dots],$$

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma\sigma\sigma}(0, 0, 0, 0) = -6\lambda [1 + \beta_1 \lambda + \beta_2 \lambda^2 + \dots],$$

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma\sigma\pi\pi}(0, 0; 0, 0) = -2\lambda [1 + \gamma_1 \lambda + \gamma_2 \lambda^2 + \dots].$$

Параметр нарушения симметрии c дается уравнением (17.23) или (17.24).

Проведенное обсуждение имеет смысл только тогда, когда существует схема регуляризации, сохраняющая тождества Уорда – Такахаши, и это является предметом следующего раздела.

Описанная выше процедура Симанзика эквивалентна процедуре перенормировки, обсуждавшейся в разд. 17. Это утверждение, очевидно, справедливо в "древесном" приближении. Напомним, что вначале лагранжиан записывается через затравочные величины

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} [(\partial_\mu \sigma_0)^2 + (\partial_\mu \pi_0)^2] - \frac{1}{2} \mu_0^2 (\sigma_0^2 + \pi_0^2) - \frac{1}{4} \lambda_0 (\sigma_0^2 + \pi_0^2)^2 + c_0 \sigma_0. \quad (18.18)$$

После преобразования перенормировки

$$\sigma_0 = Z^{1/2} (u + s), \quad \pi_0 = Z^{1/2} \pi, \quad c_0 = Z^{1/2} c,$$

$$\lambda_0 = (\lambda + \delta\lambda) Z_3^{-2}, \quad \mu_0^2 = Z_3^{-1} [m_\pi^2 + \delta m_\pi^2 - u^2 (\lambda + \delta\lambda)] \quad (18.19)$$

лагранжиан можно представить в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu s)^2 - \frac{1}{2}(m_\pi^2 + 2\lambda u^2)s^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \pi)^2 - \frac{1}{2}m_\pi^2 \pi^2 - \lambda u s(s^2 + \pi^2) - \frac{1}{4}\lambda(s^2 + \pi^2)^2 + \mathcal{L}_k, \quad (18.20)$$

где \mathcal{L}_k есть сумма перенормировочных контрчленов

$$\mathcal{L}_k = \frac{1}{2}(Z_3 - 1)[(\partial_\mu s)^2 + (\partial_\mu \pi)^2] - \frac{1}{2}\delta m_\pi^2 \pi^2 - \frac{1}{2}(\delta m_\pi^2 + 2u^2\delta\lambda)s^2 - \alpha\delta\lambda s(s^2 + \pi^2) - \frac{1}{4}\delta\lambda(s^2 + \pi^2)^2 + [c - u(m_\pi^2 + \delta m_\pi^2)]s. \quad (18.21)$$

Предположим теперь, что процедура Симанзика эквивалентна вычитанию бесконечностей указанными выше контрчленами в $(n - 1)$ -петлевом приближении. Тогда в n -петлевом приближении имеем

$$\begin{aligned} \Delta_\pi^{-1}(p^2; r) &= [1 + A(r) + (Z_3 - 1)]p^2 - (m_\pi^2 + B(r) + \delta m_\pi^2) + \\ &\quad + (1 - t^{\Gamma_1})[\overline{\Delta_\pi^{-1}(p^2; r)}], \\ \Delta_\sigma^{-1}(p^2; r) &= [1 + C(r) + (Z_3 - 1)]p^2 - (m_\pi^2 + 2\lambda u^2 + D(r) + \\ &\quad + \delta m_\pi^2 + 2u^2\delta\lambda) + (1 - t^{\Gamma_2})[\overline{\Delta_\pi^{-1}(p^2; r)}], \\ \overline{\Gamma}_{\sigma\pi\pi} &= -2\lambda u[1 + E(r)] - 2u\delta\lambda + (1 - t^{\Gamma_3})[\overline{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}], \end{aligned} \quad (18.22)$$

где $A(r)$, ..., $E(r)$ есть бесконечные (т.е. зависящие от r) величины. Выберем Z_3 , δm_π^2 и $\delta\lambda$ следующим образом:

$$Z_3 = 1 - A(r), \quad \delta m_\pi^2 = -B(r), \quad \delta\lambda = \lambda E(r). \quad (18.23)$$

Тогда тождество Уорда - Такахаши (18.16) приводит к соотношению

$$C(r) - A(r) = u \left\{ (\partial/\partial p^2) [\overline{\Gamma}_{\sigma\pi\pi}(p; 0, -p; r)] \right\}_{p^2=0}, \quad (18.24)$$

которое имеет предел при $r \rightarrow 0$, и

$$D(r) + \delta m_\pi^2 + 2u^2\delta\lambda = 0. \quad (18.25)$$

Очевидно, что совокупность соотношений (18.22), (18.24) и (18.25) эквивалентна соотношениям (18.16) и (18.17).

ЛИТЕРАТУРА

О теории перенормировок см.:

1. Dyson F. J., Phys. Rev., **75**, 486, 1736 (1949).
2. Salam A., Phys. Rev., **82**, 217 (1951); **84**, 426 (1951).
3. Weinberg S., Phys., Rev., **118**, 838 (1960).

4. Боголюбов Н.Н., Ширков Д.В., Введение в теорию квантованных полей, изд-во "Наука", М., 1973, гл. IV и работы, цитированные в ней на стр. 220.
5. Hepp K., Comm. Math. Phys., 1, 95 (1965); Théorie de la renormalization, Springer, Berlin, 1969. (Имеется перевод: К. Хепп, Теория перенормировок, Наука, М., 1974.)
6. Zimmermann W., в книге: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, eds. Deser S., Grisaru M., Pendleton H., MIT Press, Cambridge, 1970, p. 395.

Перенормировку σ -модели, обсуждавшуюся здесь, см. в работах Симанзика, цитированных в предыдущем разделе.

19. СХЕМА РЕГУЛЯРИЗАЦИИ 'т ОФТА И ВЕЛТМАНА

Недавно 'т Офт и Велтман предложили схему регуляризации, которая сохраняет симметрии исходного лагранжиана. Этот метод применим к σ -модели, электродинамике и неабелевым калибровочным теориям и основан на идее аналитического продолжения фейнмановских интегралов по размерности пространства-времени. В этом пункте очень важным является тот факт, что глобальные или локальные симметрии этих теорий не зависят от размерности пространства-времени и что фейнмановские интегралы сходятся для достаточно малых или комплексных N , где N есть "комплексная размерность" пространства-времени.

Вначале рассмотрим природу ультрафиолетовых расходимостей фейнмановских диаграмм. Для этой цели удобно представить пропагаторы в виде

$$\Delta_F(p^2) = -i \int_0^\infty d\alpha \exp\{i\alpha(p^2 - m^2 + i\epsilon)\}. \quad (19.1)$$

С использованием этого представления типичный фейнмановский интеграл можно записать как

$$F_\Gamma \sim \left(\prod_{i=1}^I \int_0^\infty d\alpha_i \right) \left(\prod_{j=1}^L \int d^4 k_j \right) (k_{l_1})_\lambda (k_{l_2})_\mu \dots (k_{l_n})_\nu \exp\{i \sum_i \alpha_i (q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon)\}, \quad (19.2)$$

где I есть число внутренних пропагаторов в Γ ; L — число петель; l_1, \dots, l_n принимают значения от 1 до L . Импульс q_i , относящийся

к j -му пропагатору, есть линейная функция импульсов интегрирования k_j и внешних импульсов p_m . Поэтому аргумент экспоненты в правой части (19.2) можно представить в виде¹⁾

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^l \alpha_i (q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} k_i A_{ij}(\alpha) k_j + \sum_{i,m} k_i B_{im}(\alpha) p_m - \sum_{i=1}^l \alpha_i (m_i^2 - \epsilon) = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{k}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{k} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{p} - \sum_i \alpha_i (m_i^2 - i\epsilon), \end{aligned}$$

где \mathbf{k} — столбец, компонентами которого являются 4-векторы. Матрицы \mathbf{A} и \mathbf{B} являются однородными функциями α_i первой степени, причем матрица \mathbf{A} симметрична. Интегрирование по k_j в (19.2) можно выполнить с помощью сдвига переменной интегрирования

$$\mathbf{k} \rightarrow \mathbf{k}' = \mathbf{k} + \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{p}$$

и диагонализации матрицы \mathbf{A} ортогональным преобразованием \mathbf{k}' . Результат представляет собой сумму членов, каждый из которых имеет вид

$$\begin{aligned} F_{\Gamma} - T_{\lambda\mu \dots \nu} \left(\prod_{i=1}^l \int_0^{\infty} d\alpha_i \right) & \left(1 / \prod_i [A_i(\alpha) s_i] \exp \{ -i \{ \frac{1}{2} \mathbf{p} \cdot \mathbf{C}(\alpha) \cdot \mathbf{p} + \right. \\ & \left. + \sum_i \alpha_i (m_i^2 - i\epsilon) \} \} \right), \end{aligned} \quad (19.3)$$

где $T_{\lambda\mu \dots \nu}$ — тензор, составленный из $g_{\rho\sigma}$ и внешних импульсов p_m ; $A_i(\alpha)$ — i -е собственное значение матрицы \mathbf{A} и s_i — положительные числа, определяемые тензорной структурой F_{Γ} . Отметим, что $A_i(\alpha)$ являются однородными функциями α_i первой степени. Матрица \mathbf{C} равна

$$\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{B}$$

и также является однородной функцией α_i первой степени. В этой параметризации ультрафиолетовые расходимости интеграла проявляются как сингулярности подынтегрального выражения в правой части (19.3), возникающие из-за обращения в нуль некоторых множителей в $\prod_i [A_i(\alpha)]^{s_i}$, когда все или некоторые из α_i стремятся к нулю в определенном порядке, например

$$\alpha_{r_1} < \alpha_{r_2} < \dots < \alpha_{r_l},$$

¹⁾В средней и последней частях этой системы равенств опущено слагаемое $\frac{1}{2} \mathbf{p} \mathbf{D}(\alpha) \mathbf{p}$. Соответственно выражение для матрицы \mathbf{C} в формуле (19.3) равно $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{D}$. — *Прим. перев.*

где (r_1, r_2, \dots, r_l) — перестановка $(1, 2, \dots, l)$. Для более детального и строгого обсуждения см., например, книгу Хешпа.

Регуляризация 'т Офта и Велтмана состоит в определении интеграла F_Γ в n измерениях, $n > 4$ (одно временное и $n - 1$ пространственных измерений), при оставлении внешних импульсов и векторов поляризации в первых четырех измерениях (т.е. в физическом пространстве), взятии $(n - 4)$ - мерных интегралов в пространстве, ортогональном физическому, и аналитическом продолжении полученного выражения по n (для однопетлевых диаграмм можно сразу выполнить все n интегрирований). Для достаточно малых или комплексных n последующие четырехмерные интегрирования сходятся

Чтобы видеть, как это работает, рассмотрим интеграл

$$F_\Gamma(n) \sim \left(\prod_i \int d\alpha_i \right) \left(\prod_{j=1}^L \int d^n k_j \right) \prod (k_a \cdot k_b) \prod (k_c \cdot p_m) \prod (k_d \cdot e_l) \exp\{i \sum_i \alpha_i (q_i^2 - m_i^2 + i\epsilon)\}, \quad (19.4)$$

где теперь k_j являются n -мерными векторами. Как и прежде, q_i выражаются как линейные функции k_i и внешних импульсов p_i , где у p_i отличны от нуля только первые четыре компоненты. Представим n -мерный вектор как (\hat{k}, K) , где \hat{k} есть проекция k в физическое пространство-время и $K = k - \hat{k}$. Таким образом, $p = (\hat{p}, 0)$. (19.4) можно переписать в виде суммы членов типа¹⁾

$$F_\Gamma(n) \sim \left(\prod_{i=1}^L \int d\alpha_i \right) \left(\prod_{j=1}^L \int d^4 \hat{k}_j \right) \left(\prod_{j=1}^L \int d^{n-4} K_j \right) \left(\prod_{a,b} K_a \cdot K_b \right) \left(\prod_{c,m} \hat{k}_c \cdot \hat{p}_m \right) \left(\prod_{d,l} \hat{k}_d \cdot l_l \right) \times \left(\prod_{l,f} \hat{k}_e \cdot \hat{k}_f \right) \exp\{i[\hat{k}^T \cdot A \hat{k} + \hat{k} \cdot B p - K^T \cdot A k - i \sum_i \alpha_i (m_i^2 - i\epsilon)]\}. \quad (19.5)$$

С использованием формулы

$$\begin{aligned} & \int d^{n-4} K K_{\alpha_1} K_{\alpha_2} \dots K_{\alpha_{2r}} \exp(-iAK^2) = \\ & = (\pi^{n/2} / 2^r r!) \sum_{\sigma \in S_{2r}} \delta_\sigma(\alpha_1) \sigma(\alpha_2) \delta_\sigma(\alpha_3) \sigma(\alpha_4) \dots \\ & \dots \delta_\sigma(\alpha_{2r-1}) \sigma(\alpha_{2r}) \cdot (iA)^{-n/2+2-r}, \end{aligned}$$

¹⁾ См. примечание на стр. 388 — Прим. перев.

где сумма распространяется на все элементы симметричной группы на $2r$ объектах $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2r})$ и

$$\delta_{\alpha\beta} \delta_{\beta\alpha} = n - 4,$$

интегрирование по K_j легко выполняется. F_Γ в (19.5) будет иметь вид

$$\begin{aligned} F_\Gamma(n) \sim & \left(\prod_{i=1}^L \int d\alpha_i \right) f(n) / \prod_i [A_i(\alpha)]^{n/2 - 2 + r_i} \times \\ & \times \left(\prod_{j=1}^L \int d^4 \hat{k}_j \right) \prod_{e,f} (\hat{k}_e \cdot \hat{k}_f) \prod_{c,m} (\hat{k}_c \cdot \hat{p}_m) \times \\ & \times \prod_{d,l} (\hat{k}_d \cdot \hat{e}_l) \exp \{ i \sum_i \alpha_i (\hat{q}_i^2 - m_i^2 + i\epsilon) \}, \end{aligned}$$

где $f(n)$ — полином по n и r_i — неотрицательные целые числа, зависящие от структуры $\Gamma K_a \cdot K_b$ в (19.5). Для достаточно малых $n < 4$, когда некоторые или все α_i стремятся к нулю, сингулярности подынтегрального выражения отсутствуют.

Причина, по которой эта регуляризация сохраняет тождества Уорда — Такахаши того же типа, что и в предыдущем разделе, состоит в том, что 1) манипуляции с векторами типа

$$k^\mu (2p + k)_\mu = [(p + k)^2 - m^2] - (p^2 - m^2)$$

или специальное разбиение произведения двух пропагаторов в сумму, которые необходимы для проверки этих тождеств руками, справедливы для любой размерности; 2) сдвиги переменных интегрирования, опасные, когда интегралы расходятся, оправданы для достаточно малых или комплексных n , так как тогда интеграл сходится.

Расходимости в исходном интеграле проявляются как полюса в $F_\Gamma(n)$ при $n = 4$. Эти полюса устраняются R -операцией, так что выражение $J_\Gamma(n)$, определенное с помощью R -операции, конечно и хорошо определено при $n \rightarrow 4$. Фактически, насколько нам известно, доказательство этого факта отсутствует в литературе, исключая обсуждение в оригинальной работе 'т Офта и Велтмана. Доказательств Хеппа, например, неприменимо в этом случае, так как аналитическое обсуждение Хеппа неприменимо к этому типу регуляризации. Однако аргументы 'т Офта и Велтмана достаточно убедительны, и нет никаких причин сомневаться в том, что соответствующая модификация

доказательства Хеппа, например БПХЦ-теоремы, будет работать и в случае размерной регуляризации.

Проведенное выше суждение справедливо для теорий, содержащих только бозоны. В теориях с фермионами могут возникать осложнения. Это связано с существованием так называемых аномалий Адлера – Белла – Джакива. Аномалии в тождествах Уорда – Такахашии подробно обсуждаются в двух прекрасных лекциях Адлера и Джакива, и здесь мы не будем входить в детали. Кратко: аномалии Адлера – Белла – Джакива могут появляться в случае, когда проверка некоторых тождеств Уорда – Такахашии зависит от алгебры γ -матриц Дирака с γ_5 типа $\gamma_\mu \gamma_5 + \gamma_5 \gamma_\mu = 0$. Это случается, когда вершинную функцию с нечетным числом аксиальных векторных токов нельзя регуляризовать так, чтобы сохранялись все тождества Уорда – Такахашии для такой вершины, и, как следствие, некоторые из тождеств Уорда – Такахашии должны быть нарушены. Появление аномалий не связано с тем, что схема регуляризации недостаточно хороша: для некоторых моделей такие схемы невозможно построить. В таких случаях не помогает и размерная регуляризация из-за того, что γ_5 и полностью антисимметричная тензорная плотность $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho}$ являются однозначными до размерности 4, но не допускают логически совместного обобщения до размерности n . Как только аномалии появляются в спонтанно нарушенных калибровочных теориях, унитарность S -матрицы оказывается в опасности, поскольку, как это будет видно в следующих разделах, унитарность S -матрицы, т.е. сокращение нефизических сингулярностей, появляющихся при выборе частной калибровки, следует из тождеств Уорда. Гросс и Джакив показали, что появление аномалий в абелевой калибровочной теории вступает в противоречие с требованиями унитарности и перенормируемости теории.

Таким образом, удовлетворительная теория должна быть свободна от аномалий. К счастью, с помощью благоразумного выбора фермионов, включаемых в теорию, можно построить модели, свободные от аномалий. Имеются две "леммы", которые делают это возможным. Одна из них состоит в том, что аномалии не "перенормируются". Это, в частности, означает, что если аномалии отсутствуют в низшем порядке, то они отсутствуют во всех порядках, как показали Адлер и Бардин на примере $SU(3)$ -варианта σ -модели и Бардин в более общем

случае, который включает неабелевы калибровочные теории. Вторая "лемма" состоит в том, что между аномалиями имеется связь; в частности, если простейшие аномалии для вершин из трех токов отсутствуют в модели, то отсутствуют и все другие аномалии. Это можно усмотреть из явного вида аномалий, построенного Бардином, или из более общих и элегантных аргументов Бесса и Зумино.

Чтобы убедиться, что неабелева калибровочная теория свободна от аномалий, достаточно проверить, не содержит ли аномалий вклад диаграмм с одной петлей фермионов в вершину трех калибровочных бозонов. Пусть

$$\bar{\Psi} \gamma^\mu \Gamma_a \Psi A_\mu^a$$

описывает связь калибровочных бозонов A_μ^a с фермионами. Здесь Ψ — столбец всех фермионных полей теории и Γ_a — матрицы, которые могут зависеть от γ_5 . Однопетлевой вклад фермионов в трехточечную вершину калибровочных бозонов равен

$$\Gamma_{\lambda\mu\nu}^{abc}(p, q, r) \sim \int (d^4k/(2\pi)^4) \text{Sp} \{ \gamma_\lambda \Gamma_a (\gamma \cdot (k+p) - M)^{-1} \gamma_\mu \Gamma_b \times \\ \times (\gamma \cdot (k-2) - M^{-1} \gamma_\nu \Gamma_c (\gamma \cdot k - M)^{-1} + (\overset{b}{\mu} \leftrightarrow \overset{c}{\nu}) \}. \quad (19.6)$$

где M есть массовая матрица фермионов и $p + q + r = 0$. Как можно видеть, например, из обсуждения Гросса и Джакива, вершина (19.6) свободна от аномалий, если часть этой вершины, пропорциональная $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} p^\rho$ или $\epsilon_{\lambda\mu\nu\rho} q^\rho$, сходится. Для этого требуется выполнение равенства

$$\text{Sp} \gamma_5 \Gamma_a \{ \Gamma_b, \Gamma_c \} = 0. \quad (19.7)$$

Уравнение (19.7) является достаточным условием отсутствия аномалий в калибровочных теориях.

Джорджи и Глэшоу обсудили различные варианты этого условия. Физический смысл (19.7) таков, что аномалии, вызываемые одним типом фермионов, сокращаются аномалиями, возникающими из-за других фермионов. В некоторых моделях это сокращение происходит для лептонов и адронов в отдельности, в других моделях сокращаются аномалии лептонов и адронов. В любом случае теории, свободные от аномалий, имеют тенденцию к включению большего числа лептонов и адронов (кварков), чем может гарантировать феноменология.

Довольно сильные ограничения, которые налагают на структуру модели требования отсутствия аномалий, фактически могут оказаться тем худом, без которого не было бы добра. Интригует и, вероятно, возбуждает интерес возможность некоторого соответствия между лептонными и адронными структурными блоками или возможность

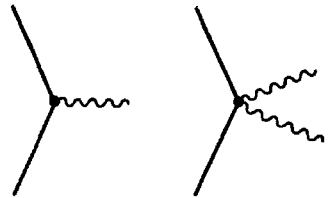
существования новых квантовых чисел или новых измерений в спектроскопии адронов.

В заключение рассмотрим простой пример применения размерной регуляризации: поляризацию вакуума в скалярной электродинамике. Лагранжиан равен

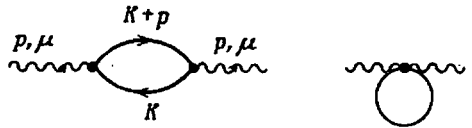
$$\mathcal{L} = (\partial^\mu \phi^* - ieA^\mu \phi^*)(\partial_\mu \phi + ieA_\mu \phi) - \frac{1}{4}(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 - V(\phi)$$

и соответствующие вершины показаны на фиг. 19.1. Изменяются две диаграммы, дающие вклад в поляризацию вакуума, которые показаны на фиг. 19.2.

Ф и г. 19.1. Вершины фотон — скалярный мезон в электродинамике заряженного скаляра.



Ф и г. 19.2. Диаграммы поляризации вакуума во 2-м порядке в электродинамике заряженного скаляра.



Сумма этих вкладов равна

$$I = e^2 \int (d^n k / (2\pi)^n) (k+p)^2 - \mu^2)^{-1} (k^2 - \mu^2)^{-1} [(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu - 2((k+p)^2 - \mu^2) g_{\mu\nu}]. \quad (19.8)$$

С использованием экспоненциальной параметризации пропагаторов получаем

$$I = -e^2 \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta \int (d^4 k / (2\pi)^n) \exp\{i[\alpha(k+p)^2 + \beta k^2 - (\alpha + \beta)(\mu^2 - i\epsilon)]\} \times \\ \times [(2k+p)_\mu (2k+p)_\nu - 2((k+p)^2 - \mu^2) g_{\mu\nu}]. \quad (19.9)$$

Аргумент компоненты пропорционален

$$(\alpha + \beta)k^2 + 2k \cdot p\alpha + \alpha p^2 - (\alpha + \beta)(\mu^2 - i\epsilon) = \\ = (\alpha + \beta)(k + (\alpha/\alpha + \beta)p)^2 + (\alpha\beta/(\alpha + \beta))p^2 - (\alpha + \beta)(\mu^2 - i\epsilon),$$

так что можно написать

$$\begin{aligned}
 I = & -e^2 \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta f(d^n k / (2\pi)^n) \exp\{i(\alpha + \beta)k^2 + i[(\alpha\beta/(\alpha + \beta))]p^2 - \\
 & - (\alpha + \beta)(\mu^2 - i\epsilon)\} \{4k_\mu k_\nu + ((\alpha - \beta)/(\alpha + \beta))^2 p_\mu p_\nu - g_{\mu\nu}[2(k^2 - \mu^2) + \\
 & + ((\alpha^2 + \beta^2)/(\alpha + \beta)^2)p^2]\} = e^2 (p_\mu p_\nu - p^2 g_{\mu\nu}) \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta (\alpha - \beta)^2 / (\alpha + \beta)^2 \\
 & f(d^n k / (2\pi)^n) \exp\{i(\alpha + \beta)k^2 + i[(\alpha\beta/(\alpha + \beta))]p^2 - (\alpha + \beta)(\mu^2 - i\epsilon)\} - \\
 & - e^2 \int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta f(d^n k / (2\pi)^n) \exp\{i(\alpha + \beta)k^2 + i[(\alpha\beta/(\alpha + \beta))]p^2 - \\
 & - (\alpha + \beta)(\mu^2 - i\epsilon)\} \{4k_\mu k_\nu - 2g_{\mu\nu}(k^2 - \mu^2) - g_{\mu\nu}(\alpha\beta/(\alpha + \beta)^2)p^2\}.
 \end{aligned}
 \tag{19.10}$$

Первый член явно калибровочно-инвариантен и расходится только логарифмически, так что вычитание делает его конечным. Второй член требует более тщательного рассмотрения. Нам нужны следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 f(d^n k) / (2\pi)^n \exp(i\lambda k^2) &= \exp(i\pi n/4) / (2\sqrt{\pi\lambda})^n, \\
 f(d^n k / (2\pi)^n k^2 \exp(i\lambda k^2)) &= (in/2\lambda) \times \\
 &\times \exp(i\pi n/4) / (2\sqrt{\pi\lambda})^n,
 \end{aligned}
 \tag{19.11}$$

$$\begin{aligned}
 f((d^n k) / (2\pi)^n k_\mu k_\nu \exp(i\lambda k^2)) &= (g_{\mu\nu}/n) f(d^n k / (2\pi)^n k^2 \exp(i\lambda k^2)) = \\
 &= (ig_{\mu\nu}/2\lambda) \exp(i\pi n/4) / (2\sqrt{\pi\lambda})^n,
 \end{aligned}$$

так что второй член I_2 равен

$$\begin{aligned}
 I_2 = & -2e^2 g_{\mu\nu} (\exp(i\pi n/4) / (2\sqrt{\pi})^n) (\int_0^\infty d\alpha \int_0^\infty d\beta (1/(\alpha + \beta)^{n/2}) \exp \times \\
 & \times \{i[(\alpha\beta/(\alpha + \beta))]p^2 - (\alpha + \beta)(\mu^2 - i\epsilon)\} \{i(1 - (n/2)) - \\
 & - [(\alpha\beta/\alpha + \beta)p^2 - (\alpha + \beta)\mu^2]\} / (\alpha + \beta) = -2ie^2 g_{\mu\nu} \times \\
 & \times (\exp(i\pi n/4) / (2\sqrt{\pi})^n) \int d\alpha d\beta \delta(1 - \alpha - \beta) \int_0^\infty (d\lambda/\lambda^{n/2-1}) \exp \times \\
 & \times \{i\lambda(\alpha\beta p^2 - \mu^2 + i\epsilon)\} [(1 - n/2)/\lambda + i(\alpha\beta p^2 - \mu^2)].
 \end{aligned}
 \tag{19.12}$$

Для достаточно малых n , $n < 2$, λ -интегрирование сходится и

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} (d\lambda/\lambda^{n/2-1}) \exp\{i\lambda(A+i\epsilon)\} \{ (1-n/2)/\lambda + iA \} = \\ = \int_0^{\infty} d\lambda (d/d\lambda) \{ \lambda^{1-(n/2)} \exp[i\lambda(A+i\epsilon)] \} = 0. \end{aligned} \quad (19.13)$$

Таким образом, размерная регуляризация дает калибровочно-инвариантный результат:

$$I_2 = 0.$$

ЛИТЕРАТУРА

В обсуждавшейся здесь форме размерная регуляризация предложена

1. 't Hooft G., Veltman M.T., Nucl. Phys., **44B**, 189 (1973).

См. также:

2. Bollini C.G., Giambiagi J.-J., Gonzales Dominiguez A., Nuovo Cimento, **31**, 550 (1964).
3. Cicuta G., Montaldi E., Lett. Nuovo Cimento, **4**, 329 (1972).

Близкий метод регуляризации — аналитическая регуляризация обсуждается в:

4. Speer E.R., Generalized Feynman Amplitudes, Princeton University Press, Princeton, 1969.

Прекрасные обзоры по аномалиям Адлера — Белла — Джакива см.:

5. Adler S.L., в книге: Lectures on Elementary Particles and Quantum Field Theory, eds. Deser S., Grisaru M., Pendleton H., MIT Press, Cambridge 1970.
6. Jackiw R., в книге: Lectures on Current Algebra and its Applications, Princeton University Press, Princeton, N.Y., 1970.

Полный перечень аномальных вершин, включающих только токи (но не пионы), приведен в следующих работах:

7. Bardeen W.A., Phys. Rev., **184**, 1848 (1969).
8. Wess J., Zumino B., Phys. Lett., **37B**, 95 (1971).

Проблема аномалий в калибровочных теориях обсуждается в следующих статьях:

9. Gross D.J., Jackiw R., Phys. Rev., **D6**, 477 (1972).
10. Georgi H., Glashow S.L., Phys. Rev., **D6**, 429 (1972).
11. Bouchiat C., Iliopoulos J., Meyer P., Phys. Lett., **38B**, 519 (1972).

12. Bardeen W.A., в сб. Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Vol. 2, National Accelerator, 1972, p. 295.

В последней ссылке приведен четкий алгоритм для размерной регуляризации, справедливой для петель скаляров. Для этого случая наше предписание согласуется с ним.

20. ПРАВИЛА ФЕЙНМАНА И ПЕРЕНОРМИРОВКА СПОНТАННО НАРУШЕННЫХ КАЛИБРОВОЧНЫХ ТЕОРИЙ: КАЛИБРОВКА ЛАНДАУ

Для читателя, который до сих пор следил за изложением материала, последний указатель литературы по различным перенормируемым формулировкам спонтанно нарушенных калибровочных симметрий не должен представлять никакой трудности для понимания. В следующих разделах мы попытаемся изложить общие идеи, основываясь на обсуждении этих вопросов Ли и Зинн-Жустеном и не слишком увлекаясь математическими манипуляциями.

Для определенности рассмотрим $O(3)$ -калибровочную теорию, в которой триплет калибровочных бозонов взаимодействует с триплетом действительных скалярных полей φ . Как объяснялось в разд. 14, производящий функционал функций Грина W_L в калибровке Ландау равен (индекс 0 означает неперенормированные величины)

$$W_L [J_\mu, J] = \int [dA_{0\mu}] [dc_0] [dc_0^\dagger] [d\varphi_0] \exp [i\{S + S_c + \int d^4x [-(1/2\alpha_0)(\partial^\mu A_{0\mu}(x))^2 + J_{0\mu}(x) \cdot A_0^\mu(x) + J_0(x) \cdot \varphi_0(x)]\}], \quad (20.1)$$

где, напомним, c_0 — триплет фиктивных комплексных скалярных полей неправильной статистики и подразумевается предел $\alpha_0 \rightarrow 0$. Действия S и S_c равны

$$S = \int d^4x [-\frac{1}{4}(\partial_\mu A_{0\nu} - \partial_\nu A_{0\mu} + g_0 A_{0\mu} \times A_{0\nu})^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi_0 + g_0 A_{0\mu} \times \varphi_0)^2 - \frac{1}{2}\mu_0^2 \varphi_0^2 - \frac{1}{4}\lambda_0(\varphi_0^2)^2], \quad (20.2)$$

$$S_c = \int d^4x \{ -\partial^\mu c_0^\dagger(x) \cdot \partial_\mu c_0(x) - g_0 \partial^\mu c_0^\dagger(x) \cdot A_{0\mu}(x) \times c_0(x) \}. \quad (20.3)$$

Если $\mu_0^2 > 0$, тогда это обычная теория безмассовых калибровочных бозонов, взаимодействующих с мультиплетом скалярных полей массы μ_0 . Рассмотрим перенормировку теории в этом случае. Все трех- и четырехточечные вершины логарифмически расходятся (т.е. индекс расходимости $D = 0$), все собственно-энергетические части для $A_{0\mu}$, φ_0 и c_0 имеют $D = 2$, т.е. квадратично расходятся, согласно правилу подсчета индекса расходимости, обсуждавшемуся в разд. 18.

Тождество Уорда – Такахаша для W_L в (20.1) получается при рассмотрении влияния на W_L преобразования

$$\begin{aligned} A_{0\mu}(x) &\rightarrow A_{0\mu}(x) - \omega(x) \times A_{0\mu}(x) + (1/g) \partial_\mu \omega(x), \\ \varphi_0(x) &\rightarrow \varphi_0(x) - \omega(x) \times \varphi_0(x) \end{aligned} \quad (20.4)$$

(которое оставляет S инвариантным) после исключения c_0 - и c_0^\dagger -полей. Так как в дальнейшем тождество Уорда – Такахаша для W будет выведено в более общем классе калибровок, мы не будем выписывать его здесь. Если функции Грина в импульсном пространстве размерно регуляризованы, они автоматически удовлетворяют тождествам Уорда – Такахаша. После выделения перенормировочных контрчленов, как это описано ниже (или масштабного преобразования полей и параметров указанным ниже способом), перенормированные функции Грина конечны при $n \rightarrow 4$ и удовлетворяют перенормированной форме тождеств Уорда – Такахаша (см. (2.8) работы П Ли и Зинн-Жустэна). Необходимо, чтобы перенормированные функции Грина удовлетворяли перенормированным тождествам Уорда – Такахаша, поскольку они будут использованы для доказательства того, что перенормированная S -матрица свободна от нефизических сингулярностей.

Простой способ построения всех необходимых перенормировочных контрчленов в эффективном действии состоит в выполнении следующего масштабного преобразования величин, появляющихся в (20.1):

$$\begin{aligned} A_{0\mu} &= Z_3^{1/2} A_\mu, \quad J_{0\mu} = Z_3^{-1/2} J_\mu, \quad \varphi_0 = Z_2^{1/2} \varphi, \quad J_0 = Z_2^{-1/2} J, \quad c_0 = Z_3^{1/2} c, \\ g_0 &= g(Z_1/Z_3^{3/2}) = g(\bar{Z}_1/Z_3 Z_3^{1/2}), \quad \mu_0^2 = \mu^2 + \delta\mu^2/Z_2, \quad \lambda_0 = \lambda(Z_4/Z_2^2), \\ \alpha_0 &= Z_3 \alpha, \end{aligned} \quad (20.5)$$

где индекс 0 обозначает величины, появляющиеся в (20.1). В терминах новых (перенормированных) величин производящий функционал W_L имеет ту же самую форму, как и (20.1), за исключением того, что S и S_c приобретают добавки ΔS и ΔS_c :

$$\begin{aligned} \Delta S = & \int d^4x \{ -\frac{1}{4}(Z_3 - 1)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 + \frac{1}{2}g(Z_1 - 1)A_\mu \times A_\nu \cdot (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\ & - \frac{1}{4}g((Z_1^2/Z_3) - 1)(A_\mu \times A_\nu)^2 + \frac{1}{2}(Z_2 - 1)[(\partial_\mu \varphi)^2 - \mu^2 \varphi^2] - \\ & - g((Z_1 Z_2/Z_3) - 1)A_\mu \cdot (\varphi \times \partial^\mu \varphi) + \\ & + \frac{1}{2}g^2(Z_1^2/Z_3)(Z_2 Z_3) - 1)(A_\mu \times \varphi)^2 - \frac{1}{2}\delta\mu^2 \varphi^2 - \frac{1}{4}\lambda(Z_4 - 1)(\varphi^2)^2 \} \end{aligned} \quad (20.6)$$

и

$$\Delta S_c = \int d^4x \{ -(\tilde{Z}_3 - 1)\partial^\mu c^\dagger \cdot \partial_\mu c - g(\tilde{Z}_1 - 1)\partial^\mu c^\dagger \cdot A_\mu \times c \}. \quad (20.7)$$

Собственно-энергетические части A_μ и c , регуляризованные соответствующим образом, расходятся только логарифмически и если выбрать Z_3 , \tilde{Z}_3 , Z_2 и $\delta\mu^2$ так, чтобы сделать конечными пропагаторы A_μ , c и φ , а Z_1 , \tilde{Z}_1 и Z_4 так, чтобы сделать конечными $A_\mu \varphi^2$, $A_\mu c^\dagger c$ и φ^4 -вершинные функции, тогда контрчлены, выписанные в (20.6) и (20.7), делают конечными все перенормировочные части теории. В частности, константы перенормировок Z_1 , Z_3 , Z_1 и Z_3 можно выбрать так, чтобы удовлетворялось условие

$$Z_1/Z_3 = \tilde{Z}_1/\tilde{Z}_3. \quad (20.8)$$

Впервые это показали Славнов и Тейлор. Кроме того, если перенормировочные контрчлены выбрать указанным выше способом, тогда контрчлены для A_μ^4 - и $A_\mu^2 \varphi^2$ -вершин, выписанные в (20.6) и (20.7), устраняют расходимости в этих вершинах. Доказательство этого факта значительно усложняется тем, что мы не можем выполнять вычитания в перенормировочных частях при нулевых внешних импульсах, так как в этих точках перенормировочные части имеют неконтролируемые инфракрасные расходимости. По этой причине R -операция БПХД-перенормировки должна выполняться в некоторых точках, где все внешние импульсы p_m евклидовы, $p_m^2 < 0$. В любом случае калибровочно-инвариантная перенормируемость функций Грина в ка-

либровке Ландау, т.е. возможность перенормировки функций Грина с помощью масштабного преобразования (20.5), была проверена в работах I и II, разд. 2 Ли и Зинн-Жустэна¹⁾.

Рассмотрим теперь случай $\mu^2 < 0$. Будем поступать по аналогии с σ -моделью, рассмотренной в разд. 17. С помощью производящей функции $Z[\mathbf{J}_\mu, \mathbf{J}]$ связанных \langle функций Грина

$$W(\mathbf{J}_\mu, \mathbf{J}) = \exp\{i Z[\mathbf{J}_\mu, \mathbf{J}]\} \quad (20.9)$$

определим производящий функционал вершинных функций

$$\Gamma[\mathbf{A}_\mu, \Phi] = Z[\mathbf{J}_\mu, \mathbf{J}] - \int d^4x [\mathbf{A}_\mu(x) \cdot \mathbf{J}^\mu(x) + \mathbf{J}(x) \cdot \Phi(x)], \quad (20.10)$$

где

$$\mathbf{A}_\mu(x) = \delta Z / \delta \mathbf{J}^\mu(x) \quad (20.11)$$

и

$$\Phi(x) = \delta Z / \delta \mathbf{J}(x). \quad (20.12)$$

Уравнения Максвелла, двойственные к (20.11) и (20.12), имеют вид

$$-\mathbf{J}^\mu(x) = \delta \Gamma / \delta \mathbf{A}_\mu(x), \quad (20.13)$$

$$-\mathbf{J}(x) = \delta \Gamma / \delta \Phi(x). \quad (20.14)$$

Разложение Γ около $\Phi = 0$ и $\mathbf{A} = 0$ генерирует вершинные функции симметричной теории, $\mu^2 > 0$, и наоборот, знание перенормированных вершинных функций симметричной теории позволяет построить перенормированную форму Γ . Рассмотрим теперь уравнение

$$-\gamma = \delta \Gamma / \delta \Phi(x) \Big|_{\Phi=0, \mathbf{A}_\mu=0}, \quad (20.15)$$

которое определяет вакуумное среднее скалярного поля, когда на систему действует не зависящий от координат внешний источник γ :

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\gamma). \quad (20.16)$$

¹⁾ Следует иметь в виду, что калибровочные преобразования для перенормированных калибровочных полей есть

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_\mu \rightarrow \mathbf{A}_\mu - \omega \times \mathbf{A}_\mu + (1/g)(Z_3/Z_1) \partial_\mu \omega = \mathbf{A}_\mu - \omega \times \mathbf{A}_\mu + \\ + (1/g)(\tilde{Z}_3/\tilde{Z}_1) \partial_\mu \omega. \end{aligned}$$

Направление γ можно считать z -направлением в изоспиновом пространстве. Изоспиновая инвариантность Γ приводит к тому, что u направлено вдоль оси Z . Так же как и для (17.22) разд. 17, из (20.15) получаем

$$-u\Delta_X^{-1}(0) = \gamma, \quad (20.17)$$

где Δ_X представляет собой пропагатор в импульсном пространстве компонент скалярного поля, перпендикулярных γ . Вводя обозначения

$$-\Delta_X^{-1}(0) = m_X^2,$$

мы видим, что (20.17) можно переписать в форме

$$um_X^2 = \gamma. \quad (20.18)$$

Таким образом, спонтанное нарушение калибровочной симметрии приводит к ¹⁾

$$m_X^2 = 0 \quad (20.19)$$

и

$$V \equiv u(\gamma=0) \neq 0, \quad (20.20)$$

где v есть спонтанное вакуумное среднее скалярного поля. Мы можем выбрать $\delta\mu^2$ так ²⁾, чтобы $m_X^2 \rightarrow 0$, тогда коэффициенты разложения Γ около $A_\mu = 0$, $\Phi = v$ будут вершинными функциями спонтанно нарушенной калибровочной теории. Производящий функционал $Z[J_\mu, J]$ удовлетворяет тем же самым тождествам Уорда – Такахаши в пределе $m_X^2 \rightarrow 0$, поскольку его отклик на калибровочное преобразование (20.4) не зависит от значения μ^2 .

¹⁾ Следует отметить, что существуют перенормируемые калибровки, в которых безмассовые голдстоуны отсутствуют. В калибровке, рассмотренной в этом разделе, наличие безмассовых скаляров есть *следствие* теоремы Голдстоуна. — *Прим. перев.*

²⁾ Изменение в $\delta\mu^2$ приводит к изменению в Z только на конечные множители; см., например, *Symanzik K., Comm. Math. Phys., 23, 49 (1971)*.

В случае спонтанно нарушенной симметрии скалярное поле Φ_0 удобно переписать в виде

$$\Phi_0 = (\mathbf{v}_0 + \Psi_0) + \chi_0, \quad (20.21)$$

где $\mathbf{v}_0 \cdot \chi_0 = 0$, $\Psi_0 \cdot \chi_0 = 0$ ¹⁾. Действие (20.2) принимает форму

$$\begin{aligned} S[\mathbf{A}_{0\mu}, \Psi_0, \chi_0] = \int d^4x \{ & -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_{0\nu} - \partial_\nu \mathbf{A}_{0\mu} + g_0 \mathbf{A}_{0\mu} \times \mathbf{A}_{0\nu})^2 + \frac{1}{2}g_0^2 (\mathbf{v}_0 \times \mathbf{A}_{0\mu})^2 + \\ & + \frac{1}{2}[(\partial_\mu \Psi_0)^2 - (2\lambda_0 v_0^2) \Psi_0^2] + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi_0)^2 - g_0 \mathbf{v}_0 \cdot (\mathbf{A}_{0\mu} \times \partial^\mu \chi_0) - \\ & - g_0 \Psi_0 \cdot (\mathbf{A}_{0\mu} \times \partial^\mu \chi_0) - g_0 \chi_0 \cdot (\mathbf{A}_{0\mu} \times \partial^\mu \Psi_0) - g_0 \chi_0 \times \\ & \times (\mathbf{A}_{0\mu} \times \partial^\mu \chi_0) + \frac{1}{2}g_0^2 [(\Psi_0 \times \mathbf{A}_{0\mu})^2 + 2(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{A}_{0\mu}^\mu) \cdot (\chi_0 \times \mathbf{A}_{0\mu}) + \\ & + 2(\mathbf{v}_0 \times \mathbf{A}_{0\mu}^\mu) \cdot (\Psi_0 \times \mathbf{A}_{0\mu}) + 2(\Psi_0 \times \mathbf{A}_{0\mu}^\mu) \cdot (\chi_0 \times \mathbf{A}_{0\mu}) + \\ & + (\chi_0 \times \mathbf{A}_{0\mu}^\mu)^2] - \lambda_0 v_0 \Psi_0 (\Psi_0^2 + \chi_0^2) - \frac{1}{4} \lambda_0 (\Psi_0^2 + \chi_0^2)^2 - \\ & - \frac{1}{2} \Delta \mu^2 (\Psi_0^2 + \chi_0^2) - v_0 \Delta \mu^2 \Psi_0 \}, \quad (20.22) \end{aligned}$$

где

$$\Delta \mu^2 = \mu^2 + \lambda_0 v_0^2.$$

Так как вакуумное среднее Φ_0 равно \mathbf{v}_0 , вакуумное среднее Ψ_0 должно равняться нулю. Это приводит к условию

$$v_0 [\Delta \mu^2 + S] = 0, \quad (20.23)$$

где $v_0 \Delta \mu^2$ есть вклад последнего члена в правой части (20.22) в вакуумное среднее Ψ_0 и $v_0 S$ — вклад высших порядков в процесс $\Psi_0 \rightarrow$ вакуум. Фактически можно показать, что $\Delta \mu^2 + S = -[\Delta_X^{-1}(0)]$ неперенорм, так что (20.23) есть не что иное, как (20.18) в пределе $\gamma = 0$, и из него вытекает, что $\Delta \mu^2$ следует выбрать таким образом, чтобы $m_X^2 \equiv -\Delta_X^{-1}(0)$ исчезал. Можно выполнить преобразование перенормировки (20.5) полей $\mathbf{A}_{0\mu}$, $\Phi_0 = \mathbf{v}_0 + \Psi_0 + \chi_0$ и констант g_0 и λ_0 в (20.22) (отметим, что все величины \mathbf{v}_0 , Ψ_0 и χ_0 должны преобразовываться как Φ_0 ²⁾). Тогда обсуждение, проведенное в разд. 17, показывает, что выбор констант перенормировок

¹⁾ Вектор Ψ_0 имеет компоненты $(0, 0, \Psi_0)$.

²⁾ Этот факт зависит от калибровки. Вообще говоря, \mathbf{v}_0 и (Ψ_0, χ_0) имеют разные константы перенормировки. — *Прим. перев.*

$Z_1, Z_2, Z_3, Z_4, \tilde{Z}_1$ и \tilde{Z}_2 , таких же, что и в симметричной теории, приведет к полному сокращению расходимостей в теории со спонтанным нарушением симметрии.

Для построения правил Фейнмана запишем

$$S[A_{0\mu}, \varphi_0] + S_c[A_{0\mu}, c_0, c_0^\dagger] = S_0[A_\mu, \psi, \chi, c, c^\dagger] + S_I[A_\mu, \psi, \chi, c, c^\dagger], \quad (20.24)$$

где

$$S_0 = \int d^4x \{ -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^2 + \frac{1}{2}g^2(\mathbf{v} \times \mathbf{A}_\mu)^2 + \frac{1}{2}(\partial_\mu \chi)^2 + \frac{1}{2}[(\partial_\mu \psi)^2 - (2\lambda v^2)\psi^2] - g\mathbf{v} \cdot (\mathbf{A}_\mu \times \partial^\mu \chi) - \partial^\mu c^\dagger \partial_\mu c \} \quad (20.25)$$

и все величины в S_0 являются перенормированными, а S_I определяется как остаток, включающий перенормировочные контрчлены. Производящий функционал $W_L[J_\mu, \mathbf{J}]$ можно представить в виде

$$W_L[J_\mu, \mathbf{J}] = \exp\{i\nu \int d^4x J_3(x)\} \exp\{iS_I[\delta/i\delta J^\mu, \delta/i\delta J_3, \delta/i\delta J_{1,2}, \delta/i\delta K^\dagger, \delta/i\delta K]\} \times W_{L0}[J^\mu, \mathbf{J}, \mathbf{K}, K^\dagger] |_{\mathbf{K}=K^\dagger=0}, \quad (20.26)$$

где

$$W_{L0} = \int [d\mathbf{A}_\mu][d\psi][d\chi][dc^\dagger][dc] \exp\{i[S_0 + \int d^4x \{-\frac{1}{2}\alpha(\partial^\mu \mathbf{A}_\mu(x))^2 + \mathbf{J}^\mu(x) \cdot \mathbf{A}_\mu(x) + J_3(x)\psi(x) + \mathbf{J}(x) \cdot \chi(x) + \mathbf{K}^\dagger(x) \cdot \mathbf{c}(x) + \mathbf{c}^\dagger(x)\mathbf{K}(x)\}\}], \quad (20.27)$$

\mathbf{K} и \mathbf{K}^\dagger — антикоммутирующие c -числа. Пропагаторы теории легко получаются из (20.27), а теория возмущений строится на основе (20.26) и идеи разложения по петлям, как это объяснялось в разд. 16. Пропагаторы равны (при $\alpha \rightarrow 0$)

$$A_{\mu}^{1,2}: -i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / (k^2 + i\epsilon))(k^2 - M^2 + i\epsilon)^{-1}, \quad M = gv,$$

$$\chi^{1,2}: i/(k^2 + i\epsilon),$$

$$A_{\mu}^3: -i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / (k^2 + i\epsilon))(k^2 + i\epsilon)^{-1},$$

$$\psi: i/(k^2 - (2\lambda v^2) + i\epsilon),$$

$$c^{1,2,3}: i/(k^2 + i\epsilon).$$

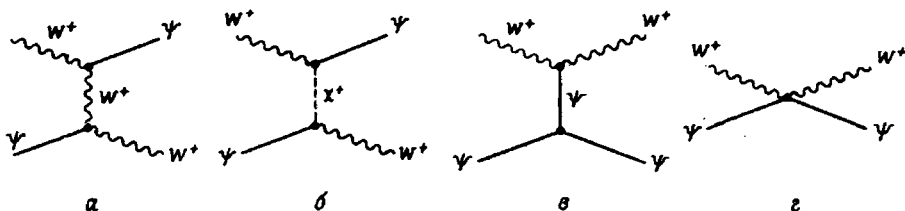
Эту модель можно рассматривать как модель Джорджи — Глэшоу, обсуждавшуюся в части I, без фермионов. A_μ^3 есть фотон, ψ — физический нейтральный хиггсовский бозон, $(A_\mu^\pm \pm iA_\mu^2)/\sqrt{2}$ — поля W^\pm -бозонов. Пропагатор W -бозона в этой калибровке можно записать в виде:

$$\begin{aligned} -i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / (k^2 + i\epsilon))(k^2 - M^2 + i\epsilon)^{-1} &= -i(g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / M^2) / (k^2 - M^2 + i\epsilon)^{-1} - \\ &- i(k_\mu k_\nu / M^2)(k^2 + i\epsilon)^{-1}. \end{aligned} \quad (20.28)$$

Первый член в правой части представляет собой канонический пропагатор массивного векторного бозона с тремя поляризационными степенями свободы. Второй член соответствует безмассовому скалярному бозону, который градиентно взаимодействует с источником векторного поля. Беда в том, что это скалярное поле связано с отрицательной вероятностью. Таким образом, функции Грина теории полны духов.

Однако в S -матричных элементах, которые получаются из функций Грина удалением внешних линий, переходом на массовую оболочку по внешним импульсам и спариванием тензорных индексов с соответствующими физическими векторами поляризации, полюса при $k^2 = 0$, связанные с проекционным оператором $g_{\mu\nu} - k_\mu k_\nu / k^2$ в пропагаторе векторного бозона и пропагаторами нефизических хиггсовских скаляров $\chi^{1,2}$ и скаляров $c^{1,2,3}$ неправильной статистики, сокращаются, так что ни одна из безмассовых скалярных частиц теории не является физической. Физическими частицами являются безмассовый фотон (A_μ^3) с двумя поляризациями, нейтральный массивный скалярный мезон (ψ) и пара массивных заряженных векторных бозонов с тремя поляризациями. Это точно согласуется с предсказанием теоремы Хиггса — Киббла, обсуждавшейся в части I. Читателю предлагается проверить этот факт на простом процессе типа $W^+ + \psi \rightarrow W^+ + \psi$ в низшем порядке. В этом случае имеются четыре диаграммы, дающие вклад низшего порядка (см. фиг. 20.1). Когда все внешние частицы физические, полюс в t -канале при $t = 0$ отсутствует.

Доказательство отсутствия фиктивных полюсов при $k^2=0$ в S -матрице основано на использовании тождеств Уорда – Такахаша для *перенормированных* функций Грина. Эти соотношения используются для доказательства того, что при вычислении мнимой части S -матричного элемента с помощью соотношения унитарности сумма



Ф и г. 20.1. Диаграммы низшего порядка для упругого ψW^+ -рассеяния.

вкладов безмассовых частиц, соответствующих трем типам полюсов при $k^2=0$, равна нулю. Это доказательство очень громоздко и было проделано явно для промежуточных состояний с одним, двумя и тремя нефизическими квантами в работе П Ли и Зинн-Жустэна.

Обсуждение, проведенное в следующих разделах, делает лишней проверку сокращения фиктивных сингулярностей таким способом.

ЛИТЕРАТУРА

Впервые предложено и выполнено квантование спонтанно нарушенных калибровочных теорий в перенормируемой калибровке в :

1. 't Hooft G., Nucl. Phys., **В35**, 167 (1971).

Этот раздел в значительной степени основан на работах:

2. Lee B.W., Zinn-Justin J., Phys. Rev., **D5**, 3121, 3137 (1972),

Тождество Славнова – Тейлора выведено в:

3. Taylor J.C., Nucl. Phys., **В33**, 436 (1971).

4. Славнов А., ТМФ; **10**, 153 (1972).

В этом разделе, так же как и в ссылке 2, перенормировка сначала обсуждается для случая $0(3)$ -калибровочной теории. Метод рассмотрения, применимый к произвольной калибровочной теории, см. в:

5. Lee B.W., Phys. Rev., **D9**, 933 (1974); он основан на тождествах

Уорда – Такахаша для вершинных функций, выведенных в:

6. Lee B.W., Phys. Lett., **46B**, 214 (1973).

21. R-КАЛИБРОВКИ

В этом разделе обсуждается формулировка спонтанно нарушенных калибровочных теорий в классе калибровок, в которых очень просто доказывается унитарность S -матрицы. Вначале, однако, опишем спонтанно нарушенные калибровочные теории в общем виде, без ограничений на используемые группы или представление скалярных полей.

Пусть φ_i ($i = 1, 2, \dots, K$) — набор скалярных полей, преобразующихся, вообще говоря, по приводимому представлению группы G размерности N :

$$\varphi \rightarrow (1 + i u^\alpha \mathbf{L}_\alpha) \varphi, \quad \alpha = 1, 2, \dots, N, \quad (21.1)$$

где u^α — бесконечно малые параметры группы и \mathbf{L}_α — представление генераторов группы G . В \mathbf{L} включены константы связи калибровочной теории, так что структурные константы $C_{\alpha\beta\gamma}$, определяемые соотношением

$$[\mathbf{L}_\alpha, \mathbf{L}_\beta] = i c_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{L}_\gamma, \quad (21.2)$$

зависят от констант связи. Выберем φ действительными, так что \mathbf{L} могут быть сделаны мнимыми и антисимметричными, $C_{\alpha\beta\gamma}$ действительны и полностью антисимметричны. С этим соглашением калибровочно-инвариантный перенормируемый лагранжиан записывается в виде

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^\alpha F^{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} (\partial^\mu \varphi^\dagger + i \varphi^\dagger \mathbf{L}_\alpha A^{\alpha\mu}) (\partial_\mu \varphi - i \mathbf{L}_\beta A_\mu^\beta \varphi) - V(\varphi), \quad (21.3)$$

где $V(\varphi)$ — инвариантный полином по φ четвертой степени и

$$F_{\mu\nu}^\alpha = \partial_\mu A_\nu^\alpha - \partial_\nu A_\mu^\alpha + c_{\alpha\beta\gamma} A_\mu^\beta A_\nu^\gamma. \quad (21.4)$$

Пусть v — вакуумное среднее φ в калибровке Ландау; определим φ' с помощью соотношения

$$\varphi = v + \varphi'. \quad (21.5)$$

[Как подчеркнули Appelquist и др. (см. [7]), вакуумное среднее скалярного поля v зависит, вообще говоря, от калибровки. В окончательных результатах всегда можно вместо v использовать в качестве дополнительного параметра теории массу выживающего хиггсовского

скалярного мезона, которая калибровочно-инвариантна.] Как функция φ' лагранжиан (21.3) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^{\alpha} F^{\alpha\mu\nu} + \frac{1}{2} (\mathbf{v}, \mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{L}_{\beta} \mathbf{v}) A_{\mu}^{\alpha} A^{\beta\mu} + \frac{1}{2} (\partial^{\mu} \varphi'^T + i \varphi'^T A^{\alpha\mu} \mathbf{L}_{\alpha}) \times \\ & \times (\partial_{\mu} \varphi' - i A_{\mu}^{\alpha} \mathbf{L}_{\alpha} \varphi') + i (\mathbf{v}, \mathbf{L}_{\alpha} \partial_{\mu} \varphi') A^{\alpha\mu} + (\mathbf{v}, \mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{L}_{\beta} \varphi') A_{\mu}^{\alpha} A^{\beta\mu} - \\ & - V(\varphi' + \mathbf{v}). \end{aligned} \quad (21.6)$$

Калибровочно-инвариантный потенциал можно записать в виде

$$\begin{aligned} V(\varphi) = & V(\mathbf{v}) + \varphi'_i \partial V(v)/\partial v_i + (\varphi'_i \varphi'_j / 2!) \partial^2 V(\mathbf{v}) / \partial v_i \partial v_j + \\ & + (\varphi'_i \varphi'_j \varphi'_k / 3!) \partial^3 V(\mathbf{v}) / \partial v_i \partial v_j \partial v_k + \\ & + (\varphi'_i \varphi'_j \varphi'_k \varphi'_e / 4!) \partial^4 V(\mathbf{v}) / \partial v_i \partial v_j \partial v_k \partial v_l. \end{aligned} \quad (21.7)$$

Напомним обсуждение разд. 2. Массовая матрица векторных бозонов

$$(\mu^2)_{\alpha\beta} \equiv (\mathbf{v}, \mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{L}_{\beta} \mathbf{v}), \quad \mu^2 = (\mu^2)^T \quad (21.8)$$

имеет ранг $N-M$, где M — размерность малой группы \mathbf{v} . Пространство представления φ можно разложить с помощью проекционных операторов P и $1 - P$:

$$\delta_{ij} = P_{ij} + (1 - P)_{ij}, \quad P_{ij} = \sum_{\alpha, \beta} (\mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{v})_i (1/\mu^2)_{\alpha\beta} (\mathbf{v}^T \mathbf{L}_{\beta})_j. \quad (21.9)$$

P — проекционный оператор в пространстве голдстоуновских бозонов, которое $(N-M)$ -мерно. Отметим, что сумма по α и β в (21.9) берется фактически по $N-M$ генераторам, которые находятся вне малой группы \mathbf{v} . Квадратичные по φ' члены (21.7) можно разложить на два члена:

$$\begin{aligned} \partial^2 V(\mathbf{v}) / \partial v_i \partial v_j = & (M^2)_{ij} + P_{ik} \partial^2 V(\mathbf{v}) / \partial v_k \partial v_j, \\ (M^2)_{ij} = & (1 - P)_{ik} \partial^2 V(\mathbf{v}) / \partial v_k \partial v_j. \end{aligned} \quad (21.10)$$

в потенциале $V(\varphi)$ квадратичный член $\frac{1}{2} \varphi^T \mathbf{A}_{\varphi} [\mathbf{A}, \mathbf{L}_{\alpha}] = 0$ всег-

¹⁾ Следует иметь в виду, что матрица $(1/\mu^2)_{\alpha\beta}$ определена только для тех индексов α, β , для которых $\mathbf{L}_{\alpha} \mathbf{v} \neq 0$. — Прим. перев.

да можно выбрать таким образом, чтобы M^2 была положительно полуопределенной матрицей.

В низшем порядке \mathbf{v} определяется условием

$$\partial V(\mathbf{v})/\partial v_i = 0, \quad \mathbf{v} \neq 0, \quad (21.11)$$

из которого следует [см. (2.18)]

$$P_{ik} \partial^2 V(\mathbf{v})/\partial v_k \partial v_i = 0. \quad (21.12)$$

В высших порядках, в калибровке Ландау, v определяется из условия

$$P_{ik} [\Delta^{-1}(0)]_{kj} = 0, \quad (21.13)$$

которое является обобщением (20.17) (при $\gamma = 0$). $\Delta(0)$ в (21.13) — матрица-пропагатор скалярных мезонов при нулевом импульсе, который является функцией v .

Запишем лагранжиан \mathcal{L} в виде

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1,$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 = & -\frac{1}{4}(\partial_\mu \mathbf{A}_\nu - \partial_\nu \mathbf{A}_\mu)^T (\partial^\mu \mathbf{A}^\nu - \partial^\nu \mathbf{A}^\mu) + \frac{1}{2} \mathbf{A}_\lambda^T \mu^2 \mathbf{A}^\lambda + \frac{1}{2} (\partial^\mu \Phi')^T (\partial_\mu \Phi) - \\ & - \frac{1}{2} \Phi'^T M^2 \Phi + i A_\mu^\alpha (\mathbf{v}, L_\alpha \partial^\mu \Phi') \end{aligned} \quad (21.14)$$

и \mathcal{L}_1 — остаток [сумма членов взаимодействия и контрчленов $\Phi'_i \partial V(\mathbf{v})/\partial v_i + \frac{1}{2} \Phi'_i P_{ik} \Phi'_j \partial^2 V(\mathbf{v})/\partial v_k \partial v_j$]. В (21.14) A_μ^α записаны как столбец. Очевидно, что лагранжиан (21.14) является свободным лагранжианом M безмассовых векторных бозонов, $N - M$ массивных векторных бозонов и мультиплетта скалярных мезонов, кроме последнего члена, который связывает продольные компоненты массивных векторных бозонов с некоторыми из скалярных мезонов.

Результаты разд. 14 позволяют рассмотреть более широкий класс калибровочных условий, чем калибровка Ландау. Обобщим проведенное обсуждение и рассмотрим калибровочные условия вида

$$F_\alpha (\mathbf{A}_\mu, \Phi) - a_\alpha = 0, \quad (21.15)$$

где a_α — произвольная функция пространства-времени, так что уравнение

$$F_\alpha (\mathbf{A}_\mu^g, \Phi^g) - a_\alpha = 0 \quad (21.16)$$

имеет единственное решение для g при заданных \mathbf{A}_μ и φ . Следуя рассуждениям разд. 14, определим детерминант Δ_F^μ :

$$\Delta_F^{-1}[\mathbf{A}_\mu, \varphi] = \int \prod_x dg(x) \prod_{x, \alpha} \delta[F_\alpha(\mathbf{A}_\mu^g, \varphi^g) - a_\alpha]. \quad (21.17)$$

Аналогами (14.12) и (14.13) являются

$$\Delta_F[\mathbf{A}_\mu, \varphi] = \det \mathbf{M}_F, \quad (21.18)$$

где

$$[M_F(x, y)]_{\alpha\beta} = \delta F_\alpha(\mathbf{A}_\mu^g(x), \varphi^g(x)) / \delta u^\beta(y) |_{u=0} \quad (21.19)$$

и для g в окрестности единицы

$$F_\alpha(\mathbf{A}_\mu^g(x), \varphi^g(x)) = F_\alpha(\mathbf{A}_\mu(x), \varphi(x)) + \int d^4 y \sum_\beta [M_F(x, y)]_{\alpha\beta} u^\beta(y) + O(u^2).$$

Производящий функционал функций Грина в этой калибровке равен

$$W_{F, a} [J_\mu^\alpha, J_i] = \int [dA_\mu^\alpha] [d\varphi_i] \Delta_F[\mathbf{A}_\mu, \varphi] \prod_{x, \alpha} \delta[F_\alpha(\mathbf{A}_\mu, \varphi) - a_\alpha] \exp\{i \int d^4 x [\mathcal{L}(x) + \mathbf{J}_\mu^T \mathbf{A}^\mu + \mathbf{J}^T \varphi]\}. \quad (21.20)$$

(Здесь Δ_F — якобиан полевых переменных.) Повторяя аргументы разд. 16, где было проверено совпадение перенормированных S -матриц в калибровке Ландау и кулоновской калибровке, можно показать, что перенормированная S -матрица не зависит от произвольной функции a_α в калибровочном условии (21.15). Поэтому правую часть (21.20) можно проинтегрировать по $a_\alpha(x)$ (с произвольным весом) без изменения перенормированной S -матрицы:

$$W_F \equiv \int \prod_{x, \alpha} da_\alpha(x) \exp\{-i/2 \int a_\alpha^2(x) d^4 x\} W_{F, a}, \quad (21.21)$$

где мы произвольно вставили гауссов вес. В окончательном виде получаем

$$W_F \sim \int [dA_\mu^\alpha] [d\varphi_i] \det \mathbf{M}_F \exp\{i \int d^4 x [\mathcal{L}(x) - \frac{1}{2} \mathbf{F}^T \mathbf{F} + \mathbf{J}_\mu^T \mathbf{A}^\mu + \mathbf{J}^T \varphi]\}. \quad (21.22)$$

Соотношение (21.22) является основой формулировки, использующей калибровочное условие общего вида (21.15).

Идея состоит в выборе F_α таким образом, чтобы квадратичная по A_μ и φ' часть $\mathcal{L}_0(x) - \frac{1}{2}F^T F$ была несингулярной. Выберем F_α в виде

$$F_\alpha = \sqrt{\xi} [\partial^\mu A_\mu^\alpha - (i/\xi)(v, L^\alpha \varphi')] \quad (21.23)$$

с действительным неотрицательным ξ . Тогда сумма \mathcal{L}_0 в (21.14) и $-\frac{1}{2}F^T F$ равна

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0 - \frac{1}{2}F^T F = & -\frac{1}{2}A_\mu^T [-g^{\mu\nu} \partial^2 + \partial^\mu \partial^\nu (1 - \xi) - g^{\mu\nu} \mu^2] A_\nu + \\ & + \frac{1}{2} \varphi'^T [-\partial^2 - M^2 - (1/\xi) \sum_\alpha L_\alpha v] (v^T L_\alpha) \varphi', \end{aligned} \quad (21.24)$$

где опущены члены вида 4-дивергенции. Перекрестный член в квадрате F_α сократил член, который связывал продольные компоненты массивных векторных бозонов с некоторыми из скалярных бозонов. Пропагаторы в этой калибровке получаются с помощью выражения

$$\begin{aligned} W_{F0} \sim & \int [dA_\mu^\alpha] [d\varphi_i] \exp[i \int d^4x \{ \mathcal{L}_0(x) - \frac{1}{2}F^T F + J_\mu^T A^\mu + J^T \varphi \}] \sim \\ \sim & \exp(-i/2) \int d^4x d^4y [J_\mu^T(x) \Delta_F^{\mu\nu}(x-y) J_\nu(y) + \\ & + J^T(x) \Delta_F(x-y) J(y)]. \end{aligned} \quad (21.25)$$

(Здесь Δ_F означает фейнмановский пропагатор.) Пропагаторы удовлетворяют уравнениям

$$[(\partial^2 + M^2 - i\varepsilon) g^{\mu\nu} - \partial^\mu \partial^\nu (1 - \xi)] \Delta_{F\nu}^\lambda(x-y; \xi) = +g^{\mu\lambda} \delta^4(x-y), \quad (21.26)$$

$$[-\partial^2 - M^2 - (1/\xi) \sum_\alpha L_\alpha v] (v^T L_\alpha + i\varepsilon) \Delta_F(x-y; \xi) = \delta^4(x-y),$$

которые включают граничные условия, обусловленные постулатом евклидовости. В импульсном пространстве пропагаторы равны

$$\Delta_F^{\mu\nu}(k; \xi) = - \left[g^{\mu\nu} - (1 - \frac{1}{\xi}) \frac{k^\mu k^\nu}{k^2 - \frac{\mu^2}{\xi} + i\varepsilon} \right] \frac{1}{k^2 - \mu^2 + i\varepsilon}, \quad (21.27)$$

и

$$\Delta_F(k^2, \xi) = \frac{1}{(k^2 - M^4 - \frac{1}{\xi} \sum_{\alpha} L_{\alpha} v)(v^T L_{\alpha} + i\epsilon)} = P \frac{1}{k^2 - \frac{\mu^2}{\xi} + i\epsilon} + (1 - P) \frac{1}{k^2 - M^2 + i\epsilon}, \quad (21.28)$$

где проекционный оператор P определен в (21.9). (Вывод второго равенства в (21.28) из первого оставляем для посвященного читателя).

Рассмотрим теперь $\det M_F$. Для бесконечно малых u_{α} имеем

$$\varphi^{\xi} = \varphi - i u^{\alpha} L_{\alpha} \varphi, \quad (21.29)$$

$$[A_{\mu}^{\xi}]^{\alpha} = A_{\mu}^{\alpha} + u^{\beta} c_{\alpha\beta\gamma} A_{\mu}^{\gamma} - \partial_{\mu} u^{\alpha}, \quad (21.30)$$

так что

$$F_{\alpha}(A_{\mu}^{\xi}, \varphi^{\xi}) - F_{\alpha}(A_{\mu}, \varphi) = [-\partial^2 u^{\alpha} + c_{\alpha\beta\gamma} \partial^{\mu} (A_{\mu}^{\gamma} u^{\beta}) + (i/\xi)(v, L^{\alpha} L^{\beta} \varphi) i u^{\beta}] \sqrt{\xi} + O(u^2). \quad (21.31)$$

Используя (21.18) и (21.19) и обсуждение разд. 14, можно написать

$$\det M_F = \det \{ \delta F_{\alpha}(A_{\mu}^{\xi}(x), \varphi^{\xi}(x)) / \delta u_{\beta}(y) \} |_{u=0} \sim - \int [dc_{\alpha}] [dc_{\alpha}^{\dagger}] \exp \{ i \int d^4 x \{ \partial^{\mu} c_{\alpha}^{\dagger} \partial_{\mu} c_{\alpha} - c_{\alpha}^{\dagger} (1/\xi) (\mu^2)_{\alpha\beta} c_{\beta} - c_{\alpha\beta\gamma} \partial^{\mu} c_{\alpha}^{\dagger} A_{\mu}^{\gamma} c_{\beta} - (1/\xi) c_{\alpha}^{\dagger} (v, L^{\alpha} L^{\beta} \varphi') c_{\beta} \} \}, \quad (21.32)$$

где c и c^{\dagger} — N -компонентные комплексные антикоммутирующие c -числовые поля. Пропагатор для c равен

$$\Delta^c(k^2; \xi) = i(k^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon)^{-1}. \quad (21.33)$$

Пропагаторы (21.27), (21.28) и (21.33) переходят в пропагаторы в калибровке Ландау при $\xi \rightarrow \infty$. На самом деле в этом пределе правила Фейнмана для ξ -калибровки совпадают с правилами Фейнмана калибровки Ландау. К слову сказать, векторный пропагатор вида (21.27)

точно совпадает с пропагатором, предложенным Ли и Янгом около десяти лет назад, когда они пытались построить перенормируемую теорию слабых взаимодействий, названную ими ξ -предельной процедурой. В этой калибровке фиктивные сингулярности при $k^2 = 0$ в векторных и скалярных пропагаторах и пропагаторах фиктивных скаляров неправильной статистики сдвинуты в точку $k^2 = \mu^2/\xi$. В следующем разделе будет доказано, что *перенормированная S-матрица не зависит от параметра ξ* . Это может означать только то, что *полюса при $k^2 = \mu^2/\xi$ в S-матрице полностью отсутствуют*.

Отметим, что пропагатор векторного бозона (21.27) ведет себя как $1/k^2$ при больших k^2 и все взаимодействия теории относятся к перенормируемому типу, так что индекс расходимости любой собственной (т.е. одночастично-неприводимой) диаграммы в этой калибровке самое большее равен 2. Ничто не мешает рассмотреть предел $\xi \rightarrow 0$ *после* выполнения фейнмановского интегрирования. Перейти к этому пределу в подынтегральном выражении опасно, так как интеграл может стать тогда плохо определенным (в рамках размерной регуляризации, однако, однопетлевые диаграммы для S-матрицы контролируемы даже в этой калибровке). В любом случае этот предел можно выполнить в пропагаторах, чтобы увидеть, какие частицы содержит теория. В пределе $\xi \rightarrow 0$ имеется M безмассовых и $N-M$ массивных векторных бозонов, $K - N + M$ массивных скалярных бозонов и никаких других фиктивных частиц. Таким образом, в этом пределе мы переходим в унитарную калибровку, рассмотренную в разд. 3. В этом пределе

$$\begin{aligned} \det M_F = & \int [dc_\alpha] [dc_\alpha^\dagger] \exp [i \int d^4x e_\alpha^\dagger(x) \times \\ & \times \{-\mu_\alpha^2/\xi - (v^T L^\alpha L^\beta \varphi'(x))/\xi\} c_\beta(x)] \cdot \\ & \cdot \exp [\delta^4(0) \int d^4x \sum_\alpha [\ln(1+J(x))]_{\alpha\alpha}], \end{aligned}$$

где

$$[J(x)]_{\alpha\beta} = (1/\mu^2)_{\alpha\gamma} (v_\gamma L^\gamma L^\beta \varphi'(x))$$

есть результат, полученный Вейнбергом.

ЛИТЕРАТУРА

Случай $\xi = 1$ был использован 'т Офтом в его работе:

1. 't Hooft G., Nucl. Phys., **B35**, 167 (1971).
Формулировка в R_ξ -калибровке обсуждается в:
2. Fujikawa K., Lee B.W., Sanda A.I., Phys. Rev., **D6**, 2923 (1972).
3. Yao Y.P., Phys. Rev., **D7**, 1647 (1973).
 ξ -предельная процедура была развита в:
4. Lee T.D., Yang C.N., Phys. Rev., **128**, 885 (1962).
Квантование в U -калибровке разработано в деталях в:
5. Weinberg S., General Theory of Broken Local Symmetries, Phys. Rev., **D7**, 1068 (1973).
Формальная эквивалентность формулировок в ландаувской и U -калибровках доказана в:
6. Lee B.W., Zinn-Justin J., Phys. Rev., **D5**, 3155 (1972).
Очень тщательное обсуждение перенормировки в R_ξ -калибровке в однопетлевом приближении приведено в:
7. Appelquist T., Carazzone J., Goldman T., Quinn H.R., Harvard University preprint; Phys. Rev., **D8**, 1747 (1973).

22. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕЗАВИСИМОСТИ ПЕРЕНОРМИРОВАННОЙ S -МАТРИЦЫ ОТ ξ

В этом разделе будут выведены тождества Уорда – Такахаши для W_F и показано, что перенормированная S -матрица не зависит от ξ . Отсюда будет следовать, в частности, что полюса в пропагаторах при $k^2 = \mu^2/\xi$ фиктивны. Затем мы прокомментируем практический способ выполнения перенормировки в этой схеме. В следующем ниже обсуждении все поля перенормированные и все диаграммы Фейнмана размерно регуляризованы.

Тождества Уорда – Такахаши для W_F настолько сложны, что их почти невозможно напечатать без использования компактных обозначений. Пусть ϕ_a означает набор всех полей, включая калибровочные поля, так что a пробегает значения $\alpha = 1, 2, \dots, N$ и $i = 1, 2, 3, \dots, K$ в обозначениях предыдущего раздела. Как и ранее, α нумерует генераторы группы G . Будем считать, что индексы a и α включают пространственно-временные координаты и тензорные

индексы, а также индексы внутренней симметрии, и в данном разделе по повторяющимся индексам всегда будет подразумеваться суммирование и интегрирование. Приняв это соглашение, закон инфинитезимального преобразования поля φ_a можно представить в виде

$$\varphi_a^\varepsilon = \varphi_a + [\Gamma_{ab}^\alpha \varphi_b + \Lambda_a^\alpha] u_\alpha + O(u^2), \quad (22.1)$$

где Γ_{ab}^α — приводимое представление генераторов, нумеруемых индексом α , так что, например,

$$\Gamma_{bc}^\alpha = c_{b\alpha c} \delta^4(x_b - x_c),$$

если b и c относятся к одному из α , и

$$\Lambda_b^\alpha = -\delta_{\alpha b} (\partial/\partial x_b) \delta^4(x_b - x_\alpha),$$

так что

$$\Lambda_\beta^\alpha u_\alpha = \partial_{\mu(\beta)} u_\beta(x_\beta).$$

Согласно обсуждению предыдущего раздела, производящий функционал функций Грина в общей калибровке F можно записать в виде

$$W_F[\mathbf{J}] \sim \int [d\varphi] \Delta_F[\varphi] \exp\{i[S[\varphi] - \frac{1}{2} F_\alpha^2 + J_a \varphi_a]\}, \quad (22.2)$$

где

$$\Delta_F[\varphi] = \det M_F, \quad (22.3)$$

$$(M_F)_{\alpha\beta} = \delta F_\alpha(\varphi^\varepsilon)/\delta u_\beta \Big|_{u=0} = (\delta F_\alpha/\delta \varphi_a)(\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta),$$

так что

$$F_\alpha(\varphi^\varepsilon) = F_\alpha(\varphi) + (M_F)_{\alpha\beta} u_\beta + O(u^2). \quad (22.4)$$

Тождества Уорда — Такахаши для $W_F[\mathbf{J}]$ получаются, если рассмотреть замену переменных интегрирования $\varphi \rightarrow \varphi^\varepsilon$, где

$$\varphi_a \rightarrow \varphi_a^\varepsilon \equiv \varphi_a' = \varphi_a + (\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta) u_\beta; \quad (22.5)$$

u_β выбрано в виде

$$(M_F)_{\alpha\beta} u_\beta = \lambda_\alpha, \quad (22.6)$$

причем λ_α — некоторая константа, не зависящая от φ . Так как M_F зависит от φ , и также зависит от φ :

$$u_\alpha = [M_F^{-1}(\varphi)]_{\alpha\beta} \lambda_\beta. \quad (22.7)$$

Причина такого выбора состоит в том, что теперь изменение F_α выглядит очень просто. Из (22.4) видно, что

$$F_\alpha(\varphi') = F_\alpha(\varphi) + \lambda_\alpha + O(\lambda^2). \quad (22.8)$$

Функциональная мера $[d\varphi]$ и $\Delta_F[\varphi]$, определенный согласно (22.2), не инвариантны относительно преобразования (22.5), когда u выбраны в виде (22.6). Это связано с тем, что преобразование не является линейным по φ . (Простым примером является мера $dx dy$, которая инвариантна относительно преобразования $x \rightarrow x \cos \theta - y \sin \theta$, $y \rightarrow y \cos \theta + x \sin \theta$. Мера не инвариантна, если θ зависит от x и y .) Однако имеется важная лемма, выведенная Фрадкиным и Тютиным и Славновым для случая калибровки Ландау и обобщенная на произвольную калибровку Ли и Зинн-Жустэном в дополнении к работе IV, которая утверждает, что произведение $\Delta_F[\varphi][d\varphi]$ инвариантно относительно таких нелинейных калибровочных преобразований:

$$[d\varphi] \Delta_F[\varphi] = [d\varphi'] \Delta_F[\varphi'], \quad (22.9)$$

где φ' дается формулами (22.5) и (22.6)

Доказательство этого любопытно, но несколько длинно, и мы отсылаем читателя к дополнению работы IV Ли и Зинн-Жустэна.

Поскольку замена переменных интегрирования не меняет значения интеграла, вариация W_F по λ при замене переменных (22.5), (22.6) должна равняться нулю. Имеем

$$0 = \int [d\varphi] \Delta_F[\varphi] \exp[i\{S[\varphi] - \frac{1}{2}F_\alpha^2(\varphi) + J_a \varphi_a\}] \delta / \delta \lambda_\alpha \{S[\varphi] - \frac{1}{2}F_\alpha^2(\varphi) + J_a \varphi_a\}$$

или

$$\int [d\varphi] \Delta_F[\varphi] \exp[i\{S[\varphi] - \frac{1}{2}F_\alpha^2(\varphi) + J_a \varphi_a\}] \{-F_\alpha(\varphi) + J_a (\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta)(M_F^{-1}(\varphi))_{\beta\alpha}\}, \quad (22.10)$$

где вместо φ' мы пишем φ .

Выражение (22.10) можно преобразовать в функциональное дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $W_F[J]$:

$$\begin{aligned} & \{-F_\alpha (\delta/i\delta J) + J_a (\Gamma_{ab}^\beta (\delta/i\delta J_b) + \Lambda_a^\beta) \times \\ & \times [M_F^{-1} (\delta/i\delta J)]_{\beta\alpha} \} W_F[J] = 0. \end{aligned} \quad (22.11)$$

Это и есть тождество Уорда — Такахаши для $W_F[J]$. Чтобы использовать (22.11), следует знать, что означает

$$[M_F^{-1} (\delta/i\delta J)]_{\beta\alpha} W_F[J].$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} W_{\alpha\beta}[J] = \int [d\varphi] [dc_\alpha] [dc_\alpha^\dagger] c_\alpha c_\beta^\dagger \exp \{ i \{ S[\varphi] - \frac{1}{2} F_\alpha^2(\varphi) + c_\alpha^\dagger (M_F)_{\alpha\beta} c_\beta + \\ + J_a \varphi_a \} \}, \end{aligned} \quad (22.12)$$

где c_α^\dagger и c_α — антикоммутирующие поля, так что

$$\Delta_F[\varphi] = \det M_F = \int [dc_\alpha] [dc_\alpha^\dagger] \exp \{ i c_\alpha^\dagger (M_F)_{\alpha\beta} c_\beta \}. \quad (22.13)$$

Функционал $W_{\alpha\beta}[J]$ есть функция Грина фиктивных скалярных полей неправильной статистики в присутствии внешних источников J и удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned} [M_F (\delta/i\delta J)]_{\alpha\beta} W_{\beta\gamma}[J] &= \int [d\varphi] [dc] [dc^\dagger] (M_F)_{\alpha\beta} c_\beta c_\gamma^\dagger \exp \{ i \{ S[\varphi] - \\ & - \frac{1}{2} F_\alpha^2(\varphi) + c_\alpha^\dagger (M_F)_{\alpha\beta} c_\beta + J_a \varphi_a \} \} = \\ &= \int [d\varphi] [dc] [dc^\dagger] c_\gamma^\dagger (-\partial/i\partial c_\alpha^\dagger) \exp \{ i \{ S[\varphi] - \\ & - \frac{1}{2} F_\alpha^2(\varphi) + c_\alpha^\dagger (M_F)_{\alpha\beta} c_\beta + J_a \varphi_a \} \}, \end{aligned}$$

т.е.

$$[M_F (\delta/i\delta \dot{w})]_{\alpha\beta} W_{\beta\gamma}[J] = i\delta_{\alpha\gamma} W_F[J]. \quad (22.14)$$

Видно, что

$$[M_F^{-1}(\delta/i\delta J)]_{\beta\alpha} = -iW_{\beta\alpha}[J]. \quad (22.15)$$

Рассмотрим далее изменение $W_F[J]$ при изменении калибровочного условия F_α на ΔF_α :

$$\begin{aligned} W_{F+\Delta F}[J] - W_F[J] = \int [d\varphi] \Delta_F \exp(i\{S[\varphi] - \\ - \frac{1}{2}F_\alpha^2(\varphi) + J_a \varphi_a\}) \{-iF_\alpha \Delta F_\alpha + (\delta\Delta F_\alpha / \delta\varphi_a)(\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \\ + \Lambda_a^\beta) [M_F^{-1}(\varphi)]_{\beta\alpha}\}, \end{aligned} \quad (22.16)$$

где использовано следующее из (22.3) соотношение

$$\begin{aligned} \Delta_{F+\Delta F} &= \det\{(\delta F_\alpha / \delta\varphi_a + \delta\Delta F_\alpha / \delta\varphi_a)(\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta)\} = \\ &= \det\{M_F + (\delta\Delta F_\alpha / \delta\varphi_a)(\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta)\} = \\ &\approx \Delta_F + \Delta_F (\delta\Delta F_\alpha / \delta\varphi_a)(\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta)(M_F^{-1})_{\beta\alpha}, \end{aligned}$$

справедливое в первом порядке по ΔF_α . Подействуем $i\Delta F_\alpha(\delta/i\delta J)$ на (22.10). Замечая, что

$$i\Delta F_\alpha(\delta/i\delta J)J_a \exp(iJ_a \varphi_a) = \exp(iJ_a \varphi_a)\{iJ_a \Delta F_\alpha(\varphi) + \delta\Delta F_\alpha(\varphi)/\delta\varphi_a\},$$

получаем

$$\begin{aligned} 0 = \int [d\varphi] \Delta_F[\varphi] \exp(i\{S[\varphi] - \frac{1}{2}F_\alpha^2(\varphi) + J_a \varphi_a\}) \{-iF_\alpha \Delta F_\alpha + \\ + [iJ_a \Delta F_\alpha(\varphi) + \delta\Delta F_\alpha(\varphi)/\delta\varphi_a](\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta)(M_F^{-1})_{\beta\alpha}\}. \end{aligned} \quad (22.17)$$

Комбинируя (22.16) и (22.17), получаем окончательно

$$\begin{aligned} W_{F+\Delta F}[J] - W_F[J] = -i \int [d\varphi] \Delta_F[\varphi] \exp(i\{S[\varphi] - \\ - \frac{1}{2}F_\alpha^2(\varphi) + J_a \varphi_a\}) J_a \Delta F_\alpha(\varphi)(\Gamma_{ab}^\beta \varphi_b + \Lambda_a^\beta)(M_F^{-1})_{\beta\alpha} \end{aligned}$$

или, в первом порядке по ΔF ,

$$W_{F+\Delta F} \approx \int [d\varphi] \Delta_F [\varphi] \exp (i\{S[\varphi] - \frac{1}{2} F_\alpha^2(\varphi) + J_a [\varphi_a - (\Gamma_{ab}^\alpha \varphi_b + \Lambda_a^\alpha)(M_F^{-1})_{\alpha\beta} \Delta F_\beta(\varphi)]\}), \quad (22.18)$$

т.е. эффект изменения калибровки от F к $F + \Delta F$ состоит лишь в добавлении дополнительных вершин между источниками и полями:

$$J_a \varphi_a \xrightarrow{F \rightarrow F+\Delta F} J_a \{ \varphi_a - (\Gamma_{ab}^\alpha \varphi_b + \Lambda_a^\alpha) [M_F^{-1}(\varphi)]_{\alpha\beta} \Delta F_\beta(\varphi) \}.$$

То, что происходит с S -матрицей при таких обстоятельствах, подробно обсуждалось в разд. 15 в связи с изменением S -матрицы при переходе от кулоновской калибровки к калибровке Ландау. Вывод, сделанный там, мы перенесем и на этот случай, именно, если два $W[J]$ отличаются только членом с внешним источником, как в (22.18), то это сводится лишь к переопределению перенормировки непрерывной S -матрицы. Изменение в S -матричных элементах можно представить в виде

$$S_{F+\Delta F} = \prod_l (Z_{F+\Delta F} / Z_F)_l^{1/2} S_F,$$

где $(Z_F)_l$ — перенормировка волновой функции l -й внешней линии и произведение распространяется на все внешние линии. Таким образом, величина

$$S = \left[\prod_l (Z_F)_l^{1/2} \right]^{-1} S_F \quad (22.19)$$

не зависит от F . Напомним, что мы работаем с размерно регуляризованными (с $n=4-\epsilon$) величинами. $(Z_F)_l$ в (22.19) следует вычислить по двухточечной функции $[G_F^{(2)}(\epsilon)]_l$ для частицы l -го типа. В общем случае S_F и Z_F зависят как от F , так и от ϵ и конечны, если $\epsilon \neq 0, 2$ и т.д.

Если выбрана ξ -калибровка, величина в (22.19) равна

$$S(\epsilon) = \lim_{p_l^2 \rightarrow m_l^2} \left\{ \prod_{l=1}^n (p_l^2 - m_l^2) \right\} \Lambda [Z(\xi, \epsilon)]_l^{1/2} \{ G^{(n)}(\xi, \epsilon) \}, \quad (22.20)$$

$$\lim_{p^2 \rightarrow m_l^2} [G^{(2)}(\xi, \epsilon)]_l = [Z(\xi, \epsilon)]_l / (p_l^2 - m_l^2),$$

где $G^{(n)}(\xi, \epsilon)$ — регуляризованная n -точечная функция Грина в ξ -калибровке. Вышеприведенные рассуждения показывают, что $S(\epsilon)$ не зависит от ξ . Поэтому S -матрица свободна от нефизических сингулярностей по k^2 , зависящих от ξ , как это можно видеть с помощью перехода в (22.20) к пределу $\xi \rightarrow 0$.

Чтобы получить физическую S -матрицу, следует после перенормировки перейти к пределу $\epsilon \rightarrow 0$. Один способ выполнения этой процедуры состоит в перенормировке функций Грина $G^{(n)}(\xi, \epsilon)$ для произвольного ξ . В работе IV Ли и Зинн-Жустэна обсуждается схема перенормировки для произвольного ξ , основанная на тождествах Уорда — Такахаши для частной модели. Для общего класса моделей это не было проделано¹⁾. Однако это не является необходимым. Так как $S(\epsilon)$ не зависит от ξ , можно взять случай $\xi \rightarrow \infty$ (калибровка Ландау), в результате чего получаем

$$S(\epsilon) = \lim_{p^2 \rightarrow m_l^2} \left\{ \prod_{l=1}^n (p^2 - m_l^2) / [Z(\infty, \epsilon)]_l^{1/2} \right\} G^{(n)}(\infty, \epsilon).$$

Это выражение представляет собой регуляризованный S -матричный элемент в калибровке Ландау, и мы теперь знаем, что эта величина не содержит нефизических сингулярностей по k^2 . Теперь, согласно обсуждению в разд. 20, можно выполнить масштабное преобразование констант связи и других параметров, т.е.

$$g^0 = g_R Z_1(\epsilon) / [Z_3(\epsilon)]^{1/2} = g_R \bar{Z}_1(\epsilon) / [Z_3(\epsilon)]^{1/2} \bar{Z}_3(\epsilon) \text{ и т.д.,}$$

и взять предел $\epsilon \rightarrow 0$ при фиксированных g_R и других перенормированных параметрах²⁾. В результате получится конечный S -матричный элемент, свободный от нефизических сингулярностей.

¹⁾ Замечание авторов при корректуре английского издания. В настоящее время это проделано и опубликовано в работе Ли.

²⁾ См. примечание на стр. 361. — *Прим. перев.*

ЛИТЕРАТУРА

Этот раздел основан на работе:

1. Lee B.W., Zinn-Justin J., Spontaneously Broken Gauge Symmetries, IV-General Gauge Formulation, Phys. Rev., D7, 1049 (1973).

По-видимому, обсуждение, приведенное в этом разделе, эквивалентно рассмотрению с помощью комбинаторного метода, приведенного в:

2. 't Hooft G., Veltman M.T., Nucl. Phys., B50, 318 (1972).

23. АНОМАЛЬНЫЙ МАГНИТНЫЙ МОМЕНТ МЮОНА В МОДЕЛИ ДЖОРДЖИ – ГЛЭШОУ

В качестве практического применения этих идей вычислим первую слабую поправку к аномальному магнитному моменту мюона в модели Джорджи – Глэшоу с использованием R_ξ -калибровки. В общем случае сохраняющая четность часть μ -электромагнитной вершины имеет вид

$$V_\mu = \bar{u}(p + \frac{1}{2}q)[\gamma_\mu F_1(q^2) + (i\sigma_{\mu\nu} q^\nu/2m)F_2(q^2)]u(p - \frac{1}{2}q), \quad (23.1)$$

где $p \pm q/2$ – начальный (конечный) импульс мюона; q – импульс, переданный фотону; m – масса мюона. С помощью разложения Гордона¹⁾

$$2m\gamma_\mu = 2p_\mu + i\sigma_{\mu\nu} q^\nu$$

(23.1) можно представить в виде

$$V_\mu = \bar{u}(p + \frac{1}{2}q)[\gamma_\mu [F_1(q^2) + F_2(q^2)] - (p_\mu/m)F_2(q^2)]u(p - \frac{1}{2}q), \quad (23.2)$$

или

$$V_\mu = \bar{u}(p + \frac{1}{2}q)[(p_\mu/m)F_1(q^2) + (i\sigma_{\mu\nu} q^\nu/2m)[F_1(q^2) + F_2(q^2)]]u(p - \frac{1}{2}q). \quad (23.3)$$

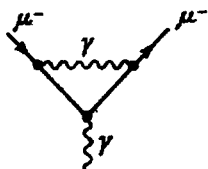
В любой из этих форм $F_1(q^2)$ есть электрический формфактор и $F_2(q^2)$ – магнитный формфактор. В частности, $F_1(0)$ всегда должна

¹⁾Здесь использованы также равенства $\gamma^\mu(p \pm q/2)_\mu = m$. – Прим. перев.

быть нормирована на 1, а $F_2(0)$ есть аномальный магнитный момент. В обычной электродинамике V_μ представляет собой матричный элемент нейтрального, калибровочно-инвариантного электромагнитного тока и поэтому формфактор не зависит от калибровки. В рассматриваемом более общем случае этот ток неинвариантен относительно произвольных преобразований неабелевой группы и формфактор будет зависеть от калибровки. В частности, в R_ξ -калибровке $F_1(q^2)$ и $F_2(q^2)$ будут зависеть от ξ .

Однако электрический заряд и аномальный магнитный момент, $F_1(0)$ и $F_2(0)$ соответственно, являются физически измеряемыми величинами; они связаны, например, с вычетами в фотонном полюсе в S -матрице для упругого $\mu^+\mu^-$ -рассеяния. Поэтому мы ожидаем, что они не зависят от ξ , поскольку S -матрица калибровочно-инвариантна. Этот факт мы хотим продемонстрировать с помощью явного вычисления.

Во всех моделях имеется вклад в $F_2(0)$ от диаграммы с обменом фотоном (см. фиг. 23.1), который был вычислен давно и равен $\alpha/2\pi$.

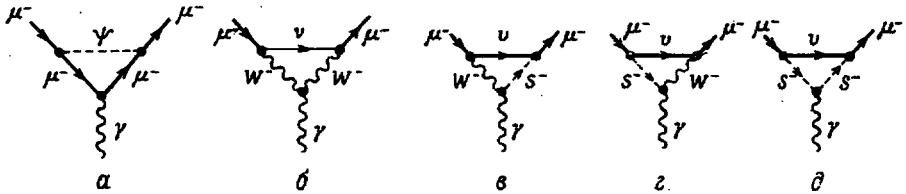


Фиг. 23.1. Вклад обмена фотоном в аномальный момент мюона.

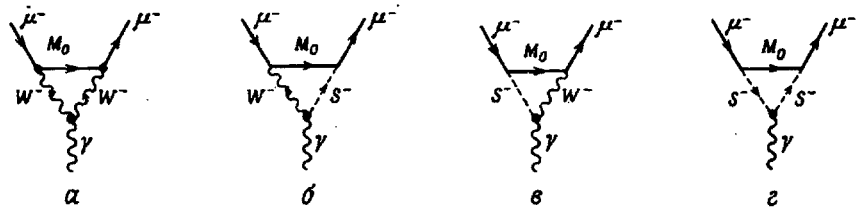
Остающиеся диаграммы также формально порядка α , но они все пропорциональны α/μ^2 (μ — масса W , как и в предыдущих разделах) и, таким образом, численно они представляют собой величины порядка константы Ферми G и, следовательно, могут рассматриваться как слабые поправки к $F_2(0)$. В модели Вейнберга — Салама все эти поправки равны Gm^2 с точностью до множителя порядка 1, так что они действительно очень малы. В модели Джорджи — Глэшоу диаграммы с обменом тяжелым лептоном дают вклад порядка $GM_0 m(M_0$ — масса нейтрального тяжелого мюона) и могут быть более интересны с экспериментальной точки зрения. Мы приведем в общих чертах вычисление в простом приближении.

Тяжелые мюоны M^0 и M^+ с массами M_0 и M_+ могут быть добавлены в модель Джорджи — Глэшоу, обсуждавшуюся в разд. 9, в

точной аналогии с E^0 и E^+ . Кроме диаграммы с обменом фотоном (фиг. 23.1), в $F_2(0)$ дают вклад все диаграммы на фиг. 23.2 и 23.3. В U-калибровке диаграммы, содержащие заряженные скаляры s^\pm , отсутствуют, но из остающихся диаграмм не все сходятся без неопределенностей. В R_ξ -калибровку мы должны включить диаграммы с s^\pm , но эта калибровка имеет то преимущество, что вклад каждой диаграммы в $F_2(0)$ сходится. Пропагаторы скаляров и W-мезонов приведены в (21.27) и (21.28).



Ф и г. 23.2. Вклады обмена нейтрино и скалярным мезоном в аномальный магнитный момент мюона.



Ф и г. 23.3. Вклад обмена тяжелым мюоном в аномальный магнитный момент мюона.

Диаграмма обмена нейтральным скаляром (фиг. 23.2, a) дает вклад порядка $Gm^2(m^2/m_\psi^2)$, который мы будем считать пренебрежимо малым, хотя модель, строго говоря, не требует, чтобы m_ψ было очень большой. Все диаграммы с обменом нейтрино (фиг. 23.2, б-г) порядка Gm^2 , в то время как вклады обмена M^0 (фиг. 23.3) пропорциональны GmM_0 и поэтому наибольшие.

Мы вычислим только диаграммы с обменом M^0 . Так как M_0 произвольно, член, пропорциональный M_0 , в любом случае не должен

зависеть от ξ . Будем считать, что

$$m^2 \ll M_0^2 \ll \mu^2 \quad (23.4)$$

и для удобства ограничим значения ξ неравенством

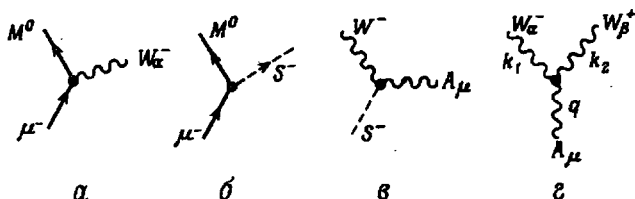
$$M_0^2 \ll \mu^2/\xi. \quad (23.5)$$

Получаемый результат для каждой диаграммы в отдельности поэтому не будет справедлив в калибровке Ландау $\xi \rightarrow \infty$, которую можно рассмотреть отдельно.

Вершины, появляющиеся в диаграммах (фиг. 23.3), могут быть получены из членов взаимодействия, выписанных в разд. 9.

Из мюонного аналога (9.19) μWM^0 -вершина (фиг. 23.4, а) равна

$$e\bar{M}^0[\cos\beta\gamma^\alpha\mu_L^- + \gamma^\alpha\mu_R^-]. \quad (23.6)$$



Ф и г. 23.4. Вершины, необходимые для вычисления диаграмм на фиг. 23.3.

sM^0_μ -вершина (фиг. 23.4, в) получается из мюонного аналога (9.22):

$$G_1[\bar{M}^0_L s^+\mu_R^- \cos\beta + \bar{\mu}_L^- s^- M^0_R] + \text{эрмит. сопр.} + \\ + G_2 \sin\beta \bar{M}^0_L s^*\mu_R^- + \text{эрмит. сопр.}, \quad (23.7)$$

где

$$G_1 = (e/\mu)[m - M_0 \cos\beta], \quad G_2 = -(e/\mu) M_0 \sin\beta.$$

Согласно (9.20), $W^-_A A_\mu s^-$ -вершина (фиг. 23.4, г) равна

$$-e\mu g_{\alpha\mu}. \quad (23.8)$$

WWA-вершину (фиг. 23.4, ν) можно получить из трилинейного члена в $-F_{\mu\nu} \cdot F^{\mu\nu}$, как на фиг. 14.1. Результат сводится к

$$e\Gamma_{\alpha\beta\mu} \equiv e[\varepsilon_{\alpha\beta} (k_1 - k_2)_\mu + \varepsilon_{\mu\alpha} (q - k_1)_\beta + \varepsilon_{\beta\mu} (k_2 - q)_\alpha]. \quad (23.9)$$

Упрощающим обстоятельством при вычислениях является тот факт, что для нахождения $F_2(0)$ нам нужен в V_μ только член, линейный по q . Поэтому члены высшего порядка по q можно опустить, но члены, пропорциональные q , следует удерживать до тех пор, пока V_μ не будет выражено в одной из форм (23.1) – (23.3). Введем следующее обозначение: $V_\mu^{(a)}$, $V_\mu^{(\delta)}$, $V_\mu^{(\sigma)}$ и $V_\mu^{(\nu)}$ соответственно означают вклады в V_μ диаграмм на фиг. 23.3, $a - \nu$ и аналогичный смысл имеют $F_2^{(a)\mu}$, $F_2^{(\delta)\mu}$, $F_2^{(\sigma)\mu}$ и $F_2^{(\nu)\mu}$.

Обратимся к фиг. 23.3, a :

$$\begin{aligned} V_\mu^{(a)} &= \frac{-ie^2}{(2\pi)^4} \int d^4 k \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) N^{\alpha\gamma} u(p - \frac{1}{2}q) \times \\ &\times \left[-g_\alpha^\beta + \frac{(1 - \frac{1}{\xi})(k + \frac{1}{2}q)_\alpha (k + \frac{1}{2}q)^\beta}{(k + \frac{1}{2}q)^2 - \frac{1}{\xi}\mu^2 + i\varepsilon} \right] \times \\ &\times \left[-g_\gamma^\delta + \frac{(1 - \frac{1}{\xi})(k - \frac{1}{2}q)_\gamma (k - \frac{1}{2}q)^\delta}{(k - \frac{1}{2}q)^2 - \frac{1}{\xi}\mu^2 + i\varepsilon} \right] \Gamma_{\delta\beta\mu} [(p - k)^2 - M_0^2 + i\varepsilon]^{-1} \times \\ &\times [(k - \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\varepsilon]^{-1} [(k + \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\varepsilon]^{-1}, \quad (23.10) \end{aligned}$$

где $\Gamma_{\delta\beta\mu}$ определено в (23.9) при $k_1 = k - \frac{1}{2}q$, $k_2 = -(k + \frac{1}{2}q)$. Кроме того, из (23.6) имеем

$$\begin{aligned}
 u(p + \frac{1}{2}q) N^{\alpha\gamma} u(p - \frac{1}{2}q) &= \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) \times \\
 &\times [\cos \beta \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)/2 + \gamma^\alpha (1 + \gamma_5)/2] \times \\
 &\times [\gamma(p - k) + M_0] [\cos \beta \gamma^\gamma (1 - \gamma_5)/2 + \gamma^\gamma (1 + \gamma_5)/2] u(p - \frac{1}{2}q) \\
 &= \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) [M_0 \cos \beta \gamma^\alpha \gamma^\gamma + \frac{1}{2}(1 + \cos^2 \beta) \gamma^\alpha \gamma^\gamma (p - k) \gamma^\gamma + \\
 &+ \text{члены с } \gamma_5] u(p - \frac{1}{2}q). \tag{23.11}
 \end{aligned}$$

Мы игнорируем нарушающие четность формфакторы, пропорциональные γ_5 . Первый член в (23.11) пропорционален M_0 , поэтому членом $-(1 + \cos^2 \beta)$ также пренебрегаем. Таким образом, (23.11) заменяется на

$$N^{\alpha\gamma} = M_0 \cos \beta \gamma^\alpha \gamma^\gamma = M_0 \cos \beta [g^{\alpha\gamma} - i\sigma^{\alpha\gamma}]. \tag{23.12}$$

Вычислим вначале член в (23.10), пропорциональный $g_\alpha^\beta g_\gamma^\delta$:

$$\begin{aligned}
 &-(i/2\pi)^4 e^2 \int d^4 k \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) N^{\alpha\gamma} u(p - \frac{1}{2}q) \times \\
 &\times [2k_\mu g_{\alpha\gamma} + (\frac{1}{2}q - k)_\alpha g_{\mu\gamma} + (k + \frac{1}{2}q)_\gamma g_{\alpha\mu}] \times \\
 &\times [(p - k)^2 - M_0^2 + i\epsilon]^{-1} [(k - \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-1} \\
 &[(k + \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-1}. \tag{23.13}
 \end{aligned}$$

Стандартным образом параметризуем знаменатель

$$\begin{aligned}
 &[(p - k)^2 - M_0^2 + i\epsilon]^{-1} [(k - \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-1} [(k + \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-1} \\
 &= 2 \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy [k^2 - 2k \cdot (\alpha p - \beta q) + \\
 &+ \alpha m^2 + \frac{1}{4}(1 - \alpha)q^2 - (1 - \alpha)\mu^2 - \alpha M_0^2 + i\epsilon]^{-3}, \tag{23.14}
 \end{aligned}$$

где

$$\alpha = 1 - x - y, \quad \beta = \frac{1}{2}(x - y), \tag{23.15}$$

и выполним замену переменных интегрирования от k к l :

$$k = l + \alpha p - \beta q. \quad (23.16)$$

С использованием (23.12) выражение (23.13) принимает вид (спиноры не выписываем)

$$\begin{aligned} & -(3e^2/4\pi^4)M_0 \cos \beta \int d^4 l \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \times \\ & \times \{ [l_\mu + (\alpha - 1)p_\mu - \beta q_\mu + m\gamma_\mu] / [l^2 - (1 - \alpha)\mu^2 + i\epsilon] \}^3, \quad (23.17) \end{aligned}$$

где с учетом (23.4) мы пренебрегли в знаменателе членами, пропорциональными m^2 , q^2 и M_0^2 . Интегрирование l_μ - и βq_μ -членов дает нуль, и в результате получаем

$$(3/4\pi)(\alpha M_0 \cos \beta / \mu^2)(p_\mu + m\gamma_\mu).$$

Из (23.2) мы заключаем, что этот член дает вклад в $F_2^{(a)}(0)$, равный

$$-(3/4\pi)(\alpha m M_0 \cos \beta / \mu^2). \quad (23.18)$$

Вычислим, далее, "перекрестные" члены в (23.10), т.е. члены, пропорциональные $g_\alpha^\beta (1 - 1/\xi)$ и $g_\gamma^\delta (1 - 1/\xi)$.

Используем тождества

$$k_{1\delta} \Gamma_\mu^{\delta\beta} = k_2^\beta k_{2\mu} - g_\mu^\beta k_2^2, \quad (23.19a)$$

$$-k_{2\beta} \Gamma_\mu^{\delta\beta} = k_1^\delta k_{1\mu} - g_\mu^\delta k_1^2, \quad (23.19b)$$

справедливые с точностью до членов, квадратичных по q .

С использованием (23.19) сумму перекрестных членов в $V_\mu^{(a)}$ можно записать в виде

$$\begin{aligned} & -(ie^2/2\pi^4)M_0 \cos \beta (1 - 1/\xi) \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) \gamma^\alpha \gamma^\mu \times \\ & \times (p - \frac{1}{2}q) (I_{\alpha\gamma}^{(1)} + I_{\alpha\gamma}^{(2)}), \quad (23.20) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\gamma}^{(1)} = & \int d^4k g_{\alpha\beta} k_{1\gamma} (k_2^\beta k_{2\mu} - g_\mu^\beta k_2^2) \times \\
 & \times (k_1^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon)^{-1} (k_1^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{-1} (k_2^2 - \mu^2 + i\epsilon)^{-1} \times \\
 & \times [(k-p)^2 - M_0^2 + i\epsilon]^{-1} = 6 \int \{ [d^4k dw dx dy dz \times \\
 & \times \delta(w+x+y+z-1) g_{\alpha\beta} k_{1\gamma} (k_2^\beta k_{2\mu} - \\
 & - g_\mu^\beta k_2^2)] / [w(k_1^2 - \mu^2/\xi) + x(k_1^2 - \mu^2) + \\
 & + y(k_2^2 - \mu^2) + z[(k-p)^2 - M_0^2] + i\epsilon]^4 \};
 \end{aligned}$$

$I_{\alpha\gamma}^{(2)}$ определяется аналогично.

Определим l с помощью соотношения

$$k = l + zp + \frac{1}{2}\lambda q, \quad (23.21)$$

где

$$\lambda = x - y + w,$$

и, делая в знаменателе те же самые приближения, что и ранее, получаем

$$\begin{aligned}
 I_{\alpha\gamma}^{(1)} = & 6 \int \{ d^4l dx dy dz dw \delta(x+y+z+w-1) \times \\
 & \times [l^2 - (x+y+w/\xi)\mu^2 + i\epsilon]^{-4} T_{\alpha\gamma\mu}^{(1)}, \quad (23.22)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\gamma\mu}^{(1)} = & [l + zp + \frac{1}{2}(\lambda - 1)q]_\gamma \cdot \{ [l + zp + \frac{1}{2}(\lambda + 1)q]_\alpha [l + zp + \\
 & + \frac{1}{2}(\lambda + 1)q]_\mu - [l + zp + \frac{1}{2}(\lambda + 1)q]^2 g_{\alpha\mu} \}. \quad (23.23)
 \end{aligned}$$

Линейные и кубичные по l члены в (23.23) исчезают после симметричного интегрирования. Члены, не зависящие от l , пропорциональны m^2/μ^2 , и ими мы пренебрегаем. И в результате можно написать

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\gamma\mu}^{(1)} = & \frac{1}{4} l^2 \{ g_{\alpha\gamma} [zp_\mu + \frac{1}{2}(\lambda + 1)q_\mu] + g_{\gamma\mu} [zp_\alpha + \frac{1}{2}(\lambda + 1)q_\alpha] - \\
 & - g_{\alpha\mu} [5zp_\gamma + \frac{1}{2}(5\lambda + 1)q_\gamma] \}. \quad (23.24)
 \end{aligned}$$

Аналогично можно представить $I^{(2)}$. Полный вклад (23.20) в $V_\mu^{(a)}$ равен

$$\begin{aligned}
 & -(6ie/2\pi^4) M_0 \cos \beta (1 - 1/\xi) \bar{u} \gamma^\alpha \gamma^\nu u \times \\
 & \times \int d^4 l dx dy dz dw \delta(x+y+z+w-1) [l^2 - (x+y+w/\xi)\mu^2 + i\epsilon]^{-4} \times \\
 & \times (l^2/4) T_{\alpha\gamma\mu}, \quad (23.25)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 T_{\alpha\gamma\mu} = & g_{\alpha\mu} [\frac{1}{2}(\nu - 5\lambda) q_\gamma - 4z p_\gamma] + g_{\alpha\mu} [\frac{1}{2}(\lambda - 5\nu) q_\alpha - 4z p_\alpha] + \\
 & + g_{\alpha\gamma} [2z p_\mu + \frac{1}{2}(\lambda + \nu) q_\mu]; \quad (23.26)
 \end{aligned}$$

здесь $\mu = x - y - w$.

Подставляя (23.26) в (23.25) и спаривая $T_{\alpha\gamma\mu}$ с $\gamma^\alpha \gamma^\nu$, получаем для вклада (23.20) в $V_2^{(a)}(0)$

$$\begin{aligned}
 & [-(9e^2 M_0 \cos \beta)/2\pi^4] (1 - 1/\xi) \bar{u} \sigma_{\mu\nu} q^\nu u \times \\
 & \times \int d^4 l dx dy dz dw \delta(x+y+z+w-1) l^2 w [l^2 - (x+y+w/\xi)\mu^2 + i\epsilon]^{-4}; \quad (23.27)
 \end{aligned}$$

вклад в $F_2^{(a)}(0)$ есть

$$\begin{aligned}
 & (3\alpha/2\pi) \frac{mM_0 \cos \beta}{\mu^2} (1 - 1/\xi) \times \\
 & \times \int dx dy dz dw \delta(x+y+z+w-1) w/(x+y+w/\xi). \quad (23.28)
 \end{aligned}$$

Интеграл в (23.28) равен

$$\xi \int_0^1 t [1 - t - \xi t \ln[1 + (1 - t)/(\xi t)]] dt.$$

так что (23.28) равно

$$\begin{aligned}
 & -(\alpha/\pi) (mM_0/\mu^2) [\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \xi/(\xi - 1) + \frac{1}{2} (\xi/(\xi - 1))^2 \ln \xi] \cos \beta. \quad (23.29)
 \end{aligned}$$

Оставшиеся члены в $V_{\mu}^{(a)}$ [см. (23.10)] имеют вид

$$[-ie^2/(2\pi^4)]M_0 \cos \beta u (p + \frac{1}{2}q) \gamma^\alpha \gamma^\gamma u (p + \frac{1}{2}q) (1 - 1/\xi)^2 \times \\ \times \int d^4 k k_{2\alpha} k_2^\beta k_{1\gamma} k_1^\delta \Gamma_{\delta\beta\mu} [(k-p)^2 - M_0^2 + i\epsilon][k_1^2 - \mu^2 + i\epsilon]^2 [k_2^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-2} \quad (23.30)$$

Из любого тождества (23.19) следует

$$k_2^\beta k_1^\delta \Gamma_{\delta\beta\mu} = 0, \quad (23.31)$$

так что вклад от (23.30) отсутствует. Поэтому из (23.18) и (23.29)

$$F_2^{(a)}(0) = -(\alpha/\pi)(mM_0/\mu^2)[1 - \frac{1}{2}\xi/(\xi-1) + \frac{1}{2}(\xi/(\xi-1))^2 \ln \xi] \cos \beta. \quad (23.32)$$

Обратимся далее к диаграммам на фиг. 23.3, б и в. Соответствующие вершины представлены в (23.6), (23.7) и (23.8). Например:

$$V_{\mu}^{(b)} = -[ie^2/(2\pi)^4] \int d^4 k \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) N_b^\alpha u(p - \frac{1}{2}q) [-g_{\alpha\mu} + \\ + (1 - 1/\xi)(k - \frac{1}{2}q)_\alpha (k - \frac{1}{2}q)_\mu / [(k - \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon]] \times \\ \times [(k-p)^2 - M_0^2 + i\epsilon]^{-1} [(k + \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon]^{-1} \times \\ \times [(k - \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\epsilon]^{-1}, \quad (23.33)$$

где

$$N_b^\alpha = [(m \cos \beta - M_0)(1 - \gamma_5)/2 + (m - M_0 \cos \beta)(1 + \gamma_5)/2] \times \\ \times [M_0 + \gamma \cdot (p - k)] [\cos \beta \gamma^\alpha (1 - \gamma_5)/2 + \gamma^\alpha (1 + \gamma_5)/2 = \\ = M_0 \cos \beta \gamma \cdot (k - p) \gamma^\alpha - M_0^2 (1 + \cos^2 \beta) \gamma^\alpha + \\ + \text{члены, нарушающие четность} + \\ + \text{члены порядка } m/M_0. \quad (23.34)$$

Второй член, пропорциональный M_0^2 , дает вклад порядка m/μ от тех членов, которые мы оставляем в $F_2^{(b)}(0)$, так что мы пре-
небрежем им.

Аналогично $V_{\mu}^{(\sigma)}$ берем равным

$$V_{\mu}^{(\sigma)} = -(ie^2)/(2\pi)^4 M_0 \cos \beta \int d^4 k \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) \gamma^{\alpha} \gamma \cdot (k-p) u(p - \frac{1}{2}q) \times$$

$$-g_{\alpha\mu} + (1 - \frac{1}{\xi}) \frac{(k + \frac{1}{2}q)_{\alpha} (k + \frac{1}{2}q)_{\mu}}{(k + \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon}$$

$$\times \frac{1}{[(k-p)^2 - M_0^2 + i\epsilon][k + \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2 + i\epsilon][(k - \frac{1}{2}q)^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon]} \quad (23.35)$$

Вычислим вначале члены в (23.33) и (23.35), пропорциональные $g_{\alpha\mu}$. Это можно выполнить, введя фейнмановские параметры в (23.33) и (23.35) точно так же, как это было сделано в (23.14), и переобозначая их в (23.35), чтобы получить одинаковые знаменатели. Вычисление делается просто, и вклад этих членов в $F_2^{(\sigma)}(0) + F_2^{(\sigma)}(0)$ оказывается равным

$$(\alpha/\pi)(mM_0 \cos \beta / \mu^2) \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy (x/(y/\xi + x)) =$$

$$= (\alpha/\pi)(mM_0 \cos \beta / \mu^2) \int_0^1 \xi x \ln[1 + (1-x)/\xi x] dx =$$

$$= -(\alpha/\pi)(mM_0 \cos \beta / \mu^2) [(\frac{1}{2}\xi/(\xi-1) - \frac{1}{2}\xi/(\xi-1)^2) \ln \xi]. \quad (23.36)$$

Оставшиеся члены в (23.33) и (23.35) пропорциональны $(1 - 1/\xi)$. Их можно параметризовать так же, как перекрестные члены на фиг. 23,3,а; получаем

$$-\frac{6ie^2}{(2\pi)^4} (1 - 1/\xi) M_0 \cos \beta \int d^4 k dw dx dy dz \delta(w + x + y + z - 1) \times$$

$$\times u(p + q/2) \left\{ \frac{\gamma \cdot (k-p) \gamma \cdot k_1}{[w(k_1^2 - \mu^2) + x(k_1^2 - \mu^2/\xi) + y(k_2^2 - \mu^2/\xi) + z[(k-p)^2 - M_0^2] + i\epsilon]^4} + \right.$$

$$\left. + \frac{\gamma \cdot k_2 \gamma \cdot (k-p)}{[w(k_2^2 - \mu^2) + y(k_2^2 - \mu^2/\xi) + y(k_1^2 - \mu^2/\xi) + z[(k-p)^2 - M_0^2] + i\epsilon]^4} \right\} u(p - q/2). \quad (23.37)$$

Определим l соотношением

$$k = l + zp + \frac{1}{2}\lambda q \quad (\lambda = x - y + w)$$

в первом члене и соотношением

$$k = l + zp + \frac{1}{2}uq \quad (u = x - y - w)$$

во втором. В приближениях (23.4) и (23.5) знаменатели в обоих членах совпадают. После l -интегрирования с точностью до членов порядка m^2/μ^2 (23.37) равно

$$- (e^2/32\pi^2)(M_0 \cos \beta / \mu^2)(1 - 1/\xi) \int dwdxdydz \delta(x+y+z+w-1) \times \\ \times [(12z-4)p_\mu + 3(x-y)q_\mu] / [w + (x+y)\lambda/\xi]. \quad (23.38)$$

Это выражение тождественно равно нулю для всех ξ . Мы заключаем, что

$$F_2^{(\beta)}(0) + F_2^{(\delta)}(0) = -\frac{\alpha}{2\pi} \frac{mM_0 \cos \beta}{\mu^2} \frac{\xi}{\xi-1} - \frac{1}{2} \frac{\xi}{(\xi-1)^2} \ln \xi \quad (23.39)$$

Окончательно вычислим вклад фиг. 23.3, v . $A_\mu s^+ s^-$ -вершина является обычной электромагнитной вершиной заряженного скалярного мезона, а две другие приведены в (23.7). Таким образом,

$$V_\mu^{(v)} = - (i/(2\pi)^4)(e^2/\mu^2) \int d^4k \bar{u}(p + \frac{1}{2}q) N u(p - \frac{1}{2}q) 2k_\mu \times \\ \times [k_1^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon]^{-1} [k_2^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon]^{-1} [(p-k)^2 - M_0^2 + i\epsilon]^{-1}, \quad (23.40)$$

где

$$N = [(m \cos \beta - M_0)(1 + \gamma_5)/2 + (m - M_0 \cos \beta)(1 - \gamma_5)/2] [\gamma \cdot (p-k) + M_0] \times \\ \times [(m \cos \beta - M_0)(1 - \gamma_5)/2 + (m - M_0 \cos \beta)(1 + \gamma_5)/2]. \quad (23.41)$$

Поэтому

$$V_\mu^{(v)} = - (2ie^2/(2\pi)^4)(M_0^3 \cos \beta / \mu^2) \int d^4k k_\mu [k_1^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon]^{-1} \times \\ \times [k_2^2 - \mu^2/\xi + i\epsilon]^{-1} [(p-k)^2 - M_0^2 + i\epsilon]^{-1} + \\ + \text{члены, меньшие по крайней мере на множитель } m/M_0. \quad (23.42)$$

При условии $\mu_0^2 \ll \mu^2/\xi$ интеграл в (23.42) порядка μ^{-2} , так что в нашем приближении имеем

$$V_{\mu}^{(z)} = F_2^{(z)}(0) = 0. \quad (23.43)$$

Из (23.32), (23.39) и (23.43) получаем, что главный член в $F_2(0)$ равен

$$\begin{aligned} F_2(0) &= F_2^{(a)}(0) + F_2^{(b)}(0) + F_2^{(c)}(0) + F_2^{(z)}(0) = \\ &= -(\alpha/\pi) m M_0 \cos \beta / \mu^2 \end{aligned} \quad (23.44)$$

и, как и ожидалось, не зависит от ξ .

Этот результат не связан с нашим ограничением на ξ . В пределе калибровки Ландау $\xi \rightarrow \infty$ интеграл в (23.42), очевидно, порядка M_0^{-2} вместо μ^{-2} , и в этом случае

$$F_2^{(z)}(0) = -(\alpha/4\pi)(m M_0 \cos \beta / \mu^2) (\xi \rightarrow \infty). \quad (23.45)$$

Аккуратное вычисление диаграмм на фиг. 23.3, б, в показывает, что $F_2^{(b)}(0) + F_2^{(c)}(0)$ также равно (23.45) в этом пределе. Вычисление, приводящее к выражению (23.32) для $F_2^{(a)}(0)$, корректно в этом пределе, так что

$$F_2^{(a)}(0) = -(\alpha/2\pi) m M_0 \cos \beta / \mu^2. \quad (23.46)$$

Сумма снова совпадает с (23.44) независимо от приближения (23.5).

Какова экспериментальная ситуация? С использованием (9.14) и (9.27) можно переписать (23.44) в виде

$$F_2(0) = -G m M_+ / 2 \pi^2 \sqrt{2} \sin^2 \beta, \quad (23.47)$$

где M_+ — масса заряженного тяжелого мюона.

Электромагнитные поправки к $F_2(0)$ вычислены в квантовой электродинамике до шестого порядка и равны

$$F_2^{\text{к.э.д}}(0) = (116582 \pm 1) \cdot 10^{-8}. \quad (23.48)$$

Добавка к этому значению адронными поправками оценена как $(6,5 \pm 0,5) \cdot 10^{-8}$, так что в пренебрежении слабыми поправками теоретическое предсказание есть

$$F_2^{\text{теор}}(0) = (116589 \pm 2) \cdot 10^{-8}. \quad (23.49)$$

Самые последние, имеющиеся в нашем распоряжении экспериментальные данные дают

$$F_2^{\text{эксп}}(0) = (116618 \pm 32) \cdot 10^{-8}, \quad (23.50)$$

так что теоретическое значение является хорошим в пределах современных экспериментальных ошибок без добавления каких-либо слабых поправок.

Вычисленные слабые поправки в (23.47) имеют величину

$$F_2^{\text{слаб}}(0) = -4,5 \cdot 10^{-9} (M_+ / m \sin^2 \beta). \quad (23.51)$$

Мы знаем, что $M_+ / m > M_K / m = 4,7$, так что $|F_2^{\text{слаб}}(0)|$ в модели с тяжелым мюоном по крайней мере $\sim 2,14 \cdot 10^{-8}$. Возьмем два стандартных отклонения как разумный верхний предел для правильного экспериментального значения $F_2(0)$, так что $F_2^{\text{теор}}(0) + F_2^{\text{слаб}}(0) > 116542 \cdot 10^{-8}$. Тогда $F_2^{\text{слаб}}(0)$ должно быть меньше $47 \cdot 10^{-8}$ и $(M_+ / m) / \sin^2 \beta$ должно быть меньше 100. Таким образом,

$$M_+ < 10 \text{ ГэВ}. \quad (23.52)$$

Ясно, что более точное измерение $F_2(0)$ может привести к гораздо более низкому ограничению на массу тяжелого мюона.

ЛИТЕРАТУРА

Точное вычисление $F_2(q^2)$ в R_ξ -калибровке в модели Вейнберга и в обеих моделях с тяжелыми лептонами, обсуждавшееся в разд. 9, выполнено в:

1. *Fujikawa K., Lee B.W., Sanda A.I.*, Phys. Rev., **D6**, 2923 (1972).

Магнитный момент был также вычислен в модели Вейнберга в U-калибровке в:

2. *Jackiw R., Weinberg S.*, Phys. Rev., **D5**, 2936 (1972).

3. *Bars I., Yoshimura M.*, Phys. Rev., **D6**, 374 (1972), и в модели Джорджи — Глэшоу:

4. *Primack J.R., Quinn H.R.*, Phys. Rev., **D6**, 3171 (1972).

Эти вычисления в U-калибровке более просты, так как все диаграммы с заряженными скалярными мезонами отсутствуют,

однако остающиеся диаграммы не являются однозначно сходящимися и должны вычисляться с осторожностью¹⁾.

Обзор большинства последних расчетов высших поправок за счет слабых взаимодействий приведен в:

5. *Primack J.R.*, в сб. Proc. XVI Int. Conf. on High Energy Physics, Vol. 2, NAL, Batavia, 1972, p. 307.

Численное экспериментальное и теоретическое значения $F_2(0)$ взяты из:

6. *Brodsky S.*, Radiative Problems and Quantum Electrodynamics, Proc. 1971 Int. Symp. on Electron and Photon Interactions at High Energies, Laboratory of Nuclear Studies, Cornell University, Ithaca, New York, 1971, p. 14.

Следует ли сделать вывод, что дружеские отношения с природой оказывают успокаивающее действие, тогда как страстное желание проникнуть в тайну, лежащую в глубине явлений, вызывает расход нервной энергии, который в конечном счете изнуряет душу и тело?

Ж. Базен

¹⁾ Это замечание нужно понимать следующим образом: результаты являются конечными, однако зависят, вообще говоря, от способа вычисления. — *Прим. перев.*

СОДЕРЖАНИЕ

Вступительная статья редактора перевода. Калибровочные поля и физика элементарных частиц	5
Литература	19
<i>С. Коулмен</i> , Тайная симметрия: введение в теорию спонтанного нарушения симметрии и калибровочных полей (перевод И.В. Тютин)	23
§ 1. Введение	23
§ 2. Тайные симметрии в классической теории	26
§ 3. Тайная перенормируемость	43
§ 4. Функциональное интегрирование (в "популярном" изложении)	67
§ 5. Правила Фейнмана для калибровочных теорий	86
§ 6. Асимптотическая свобода	99
Приложение. Однопетлевой эффективный потенциал в общем случае	114
Литература	117
<i>Дж. Бернштейн</i> , Спонтанное нарушение симметрии, калибровочные теории, механизм Хиггса и т.п. (перевод Н.Н. Некрасова)	120
§ 1. Введение	120
§ 2. Теорема Голдстоуна	131
§ 3. Хиггсовская лазейка	145
§ 4. Механизм Хиггса, или куда делись все голдстоуновские частицы?	152
§ 5. S-матрица	174
§ 6. Неабелевы калибровочные симметрии	184

§ 7. Модель Вейнберга 1967 г.	194
§ 8. Заключение	224
Литература	238
<i>Е.С. Аберс, Б.В. Ли</i> , Калибровочные теории (перевод И.В. Тютина)	241
Введение	241
Часть I. Калибровочные модели слабых и электромагнитных взаимодействий	247
1. Калибровочная инвариантность в классических теориях поля	247
Литература	258
2. Спонтанно-нарушенные симметрии	258
Литература	266
3. Механизм Хиггса	267
Литература	274
4. Феноменология слабых взаимодействий	275
Литература	278
5. Феноменология слабых взаимодействий (продолжение)	278
Литература	283
6. Унитарные пределы, W -мезоны, PCAC	284
Литература	293
7. Модель Вейнберга – Салама	294
Литература	300
8. Феноменология модели. Включение адронов.	308
Литература	309
9. Модели с тяжелыми лептонами	315
Литература	315
10. Еще о построении моделей	315
Часть II. Квантование и перенормировка калибровочных теорий	321
11. Квантование с помощью интеграла по путям	321
Литература	335
12. Формулировка теории поля с помощью интеграла по путям	336
Литература	342

13. Поле Янга — Милса в кулоновской калибровке	342
Литература	350
14. Интуитивный подход к квантованию калибровочных полей	350
Литература	358
15. Эквивалентность калибровки Ландау и кулоновской калибровки	358
Литература	362
16. Производящие функционалы для функций Грина и вершинных функций	362
Литература	372
17. Перенормировка в σ -модели	373
Литература	379
18. БПХЦ-перенормировка	379
Литература	386
19. Схема регуляризации 'тОфта и Велтмана	387
Литература	395
20. Правила Фейнмана и перенормировка спонтанно нарушенных калибровочных теорий: калибровка Ландау	396
Литература	404
21. R_ξ -калибровки	405
Литература	412
22. Доказательство независимости перенормированной S -матрицы от ξ	412
Литература	419
23. Аномальный магнитный момент мюона в модели Джорджи — Глэшоу	419
Литература	432

ИБ 238.

КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Редактор Л. Третьякова, Художник Е. Самойлов. Художественный редактор Л. Наумов. Технический редактор Е. Бурмистрова.

Подписано к печати 23/VI 1977 г. Бумага офсетн. №1 60×84¹/₁₆ = 13,63 бум. л. Печ. л. 25,34 Уч.-изд. л. 23,38 Изд № 2/8631 Цена 2 р. 50к. Зак. 710.

Издательство "Мир" Москва, 1-й Рижский пер., 2

Тулская типография "Союзполиграфпрома" при Государственном Комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли г. Тула, пр. им. В.И. Ленина 109