Н. П. Коноплева, В. Н. Попов

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

МОСКВА АТОМИЗДАТ 1972

УДК 519.4 : 539.12

К о н о п л е в а Н. П., П о п о в В. Н. **Калибровочные поля**. М., Атомиздат, 1972.

В книге рассматривается широкий круг математических вопросов, связанных с попытками построения единой теории различных взаимодействий элементарных частиц на основе понятия калибровочного поля. Это понятие может охватывать как сильные и слабые, так и электромагнитные и гравитационные взаимодействия элементарных частиц. Такой единый подход к различным взаимодействиям позволяет с новой точки зрения взглянуть на прежние поиски объединенного описания электромагнитного и гравитационного полей, а также на общую теорию относительности Эйнштейна. Таблица 1, рисунков 9, библиография 101.

$\frac{2-3-7}{1-72}$

Коноплева Нелли Павловна,
Попов Виктор Николаевич

КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ

Редактор *З. Д. Андреенко*
Художественный редактор *А. С. Александров*
Переплет художника *В. П. Покусаева*
Техннческнй редактор *С. А. Бирюкова* Корректор *Л. В. Галкина*
Сдано в набор 15/II 1972 г. Подписано к печати 24/VIII 1972 г. Т. 14619
Формат 84×108/32. Бумага типографская № 2
Усл. печ. л. 12,6 Уч.-изд. л. 12,11
Тираж 2 600 экз. Цена 1 р. 37 к. Зак. изд. 69329 Зак. тип. 769.
Атомиздат, 103031. Москва, К-31, ул. Жданова, 5/7

Московская типография № 4 Главполиграфпрома
Государственного комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли

Б. Переяславская, 46.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга посвящена актуальным проблемам, находящимся на стыке теории сильных взаимодействий элементарных частиц, квантовой и классической электродинамики, а также геометрической единой теории взаимодействий, включающей общую теорию относительности Эйнштейна. Она знакомит читателей с новыми фундаментальными физическими идеями динамической симметрии (принцип локальной калибровочной инвариантности), универсальными сильными и слабыми взаимодействиями элементарных частиц (поля Янга—Миллса, векторные и тензорные мезоны), которые наряду с электромагнитными и гравитационными взаимодействиями представляют собой частный случай калибровочных полей, а также геометрической интерпретацией калибровочных полей в терминах геометрии расслоенных пространств, обобщающей риманову геометрию. Подход, развиваемый в книге, позволяет последовательно и с единой точки зрения проанализировать особенности как классической, так и квантовой теории калибровочных полей и показать связь этой теории с другими стремительно развивающимися направлениями в теории элементарных частиц (алгебра токов и полей, киральная динамика) и в общей теории относительности (гравитационные волны, реперный формализм, геометродинамика).

В книге используются современные математические методы: бескоординатный метод внешних форм на многообразии и понятие расслоенного пространства — при анализе геометрической картины взаимодействия (гл.II); вариационный формализм и теоремы Нетер — в лагранжевой формулировке теории поля, инвариантной относительно бесконечной группы (гл. III); метод континуального интегрирования — при построении квантовой теории калибровочных полей (гл. IV).

В частности, в книге показано, что классическая теория любого калибровочного поля может рассматриваться просто как аспект геометрии, и в этом смысле реализуется глубокая физическая и философская идея Эйнштейна о том, что геометрии пространства — времени самой по себе не существует, ибо она определяется взаимодействиями физических тел. Иными словами, каждый вид взаимодействий создает свою геометрию.

Книга содержит обзор основных работ советских и зарубежных авторов, посвященных калибровочным полям, а также оригинальные результаты, полученные авторами книги.

Следует отметить, что ни один из разделов книги к настоящему времени не представляет собой полностью законченного раздела теории. Но мы стремились включить в нее все более или менее законченные вопросы. Все главы книги относительно самостоятельны и могут читаться практически независимо друг от друга. Первая глава носит вводный характер. Чтобы сделать изложение других глав более доступным физикам и математикам, в главе I, по возможности, вводятся параллельно геометрическая и физическая терминологии. Для понимания остальных глав желательно знакомство с теорией групп, римановой геометрией и теорией поля в объеме курсов, читаемых на физико-математических факультетах вузов. Главы I—III написаны Н. П. Коноплевой, глава IV — В. Н. Поповым.

Авторы выражают признательность А. М. Балдину, Л. Д. Фаддееву, Е. С. Фрадкину, Л. Е. Евтушику и Г. А. Соколику, ознакомившимся с главами книги в рукописи и сделавшим полезные замечания.

Глава I

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ИЛИ ГЕОМЕТРИЯ?

§ 1. ПРИНЦИПЫ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ, ГЕОМЕТРИЯ И ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ

Введение. В теории элементарных частиц сложилась своеобразная ситуация: с одной стороны, нет ни одного экспериментального факта, который нельзя было бы теоретически обосновать, с другой стороны, в настоящее время нет последовательной теории, с единой точки зрения описывающей все многообразие свойств и типов элементарных частиц. Особенно остро воспринимается разрыв между «внутренними» (гиперзаряд, изоспин и др.) и «внешними» (пространственно-временными) симметриями элементарных частиц. Становится все более ясным, что построение единой теории частиц требует изменения фундаментальных принципов, лежащих в основе физических теорий, и ведет к использованию новых представлений о структуре пространства—времени и природе взаимодействий элементарных частиц.

Свойства симметрии элементарных частиц формулируются обычно в терминах инвариантов групп* симметрии пространства—времени, задающих принцип относительности теории (например, лоренц-инвариантность), и групп внутренней симметрии (например, изотопическая инвариантность сильных взаимодействий, вытекающая из независимости ядерных сил от электрического заряда частиц). Тем самым вопрос о естественном объединении внутренних и внешних

---

* Группой называют совокупность преобразований (или операций), удовлетворяющую следующим условиям (аксиомам): 1) произведение двух преобразований A и B (два преобразования, выполненные подряд) дают некоторое преобразование C из той же совокупности $A \cdot B = C$; 2) ассоциативность этого умножения: $A(B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$; 3) определено тождественное преобразование E; 4) каждое из преобразований A имеет обратное преобразование A^{-1}, т. е. $A \cdot A^{-1} = E$. Группа называется конечной, если ее преобразования зависят от конечного числа числовых параметров, и бесконечной, если преобразования группы зависят от конечного числа функций или бесконечного числа параметров.

симметрий тесно связан с использованием новых принципов относительности и симметрии в теории элементарных частиц. Именно таким фундаментальным принципом является требование локальной инвариантности теории и связанные с ним идеи об универсальных взаимодействиях и калибровочных полях.

В основе работ Янга, Миллса, Утиямы и Сакураи [1], в которых впервые обсуждался вопрос о калибровочных полях, лежит утверждение о существенно локальном характере всех внутренних свойств симметрии элементарных частиц. Из него вытекает необходимость замены конечных калибровочных групп симметрии соответствующими локальными группами, параметры преобразований которых меняются от точки к точке. Это дает возможность ввести в теорию новый физический объект — *калибровочное поле*, взаимодействие с которым обеспечивает инвариантность теории относительно локальной группы симметрии. Тем самым принцип локальной калибровочной инвариантности оказывается глубоким физическим принципом, позволяющим вводить взаимодействие чисто аксиоматически и определяющим его форму в соответствии со свойствами симметрии теории. Поэтому свойства калибровочных полей можно исследовать и независимо от эксперимента. Вопрос о реализации теоретических понятий в наблюдаемых явлениях, сам по себе достаточно сложный, отделяется тем самым от математического аппарата теории. Заметим, что локальная инвариантность впервые использовалась в качестве фундаментального физического принципа в общей теории относительности Эйнштейна. Затем эту идею развил Вейль, который ввел электромагнитное поле из требования инвариантности теории относительно локальных, т. е. зависящих от точки растяжений интервала: $ds^{2\prime} = \lambda(x)ds^2$ [2]. Но свою окончательную форму принцип локальной калибровочной инвариантности как физический принцип принял в работах Янга, Миллса, Утиямы и Сакураи (см. § 2).

Гравитационное и электромагнитное поля относятся к универсальным взаимодействиям. Гравитационное поле взаимодействует универсально со всеми массивными частицами, электромагнитное — со всеми заряженными. Локальная калибровочная инвариантность привела к открытию универсальных ядерных взаимодействий, осуществляемых векторными нестабильными частицами — резонансами, взаимодействующими одинаково со всеми частицами, несущими изоспин. Обнаружена также универсальность некоторых слабых взаимодействий, в связи с чем имеются попытки и в этом случае применить метод калибровочных полей.

Принцип локальной калибровочной инвариантности отражает глубокую связь между универсальностью различных взаимодействий, сохранением векторных токов и существованием самих взаимодействий. Этот принцип определяет форму всех взаимодействий, независимо от их физической природы, которые можно описать с помощью калибровочных полей, и тем самым открывает путь к построению единой и последовательной теории взаимодействий элементарных частиц. В то же время принцип локальной калибровочной инвариантности, подобно общему принципу относительности Эйнштейна, придает теории такую форму, которая допускает чисто геометрическую интерпретацию. Благодаря этому становится возможным развитие и обобщение идеи Эйнштейна о том, что геометрия пространства не задается *ad hoc*, а определяется взаимодействием физических тел [3]. Иными словами, геометрия приобретает динамический характер и эффективно отражает влияние на выделенную пробную частицу (или поле) всей остальной материи в мире. Геометризация калибровочных полей показывает, что 4-мерное риманово пространство — время — лишь частный случай возможных динамических геометрий. Произвольному калибровочному полю соответствует геометрия расслоенного пространства, получаемого из обычного пространства — времени заменой его точек «внутренними» пространствами, в которых действует калибровочная группа. Таким образом, классическая теория калибровочных полей становится чисто геометрической теорией, подобно общей теории относительности Эйнштейна. Тем самым возникает единая геометрическая теория различных взаимодействий (сильных, слабых электромагнитных и гравитационных). Единство ее заключается в существовании *общего принципа*, по которому строится геометрия, соответствующая каждому из взаимодействий [4].

Расслоенное пространство замечательно тем, что в нем движение частиц, взаимодействующих с каким-либо калибровочным полем, становится свободным (бессиловым). Тем самым, как и в общей теории относительности Эйнштейна, устраняется разделение движений на инерциальные (или свободные) и неинерциальные (происходящие под действием внешних сил). Это позволяет описывать калибровочные поля с помощью простых геометрических понятий (коэффициентов связности, тензоров кривизны) и делает геометрию экспериментально проверяемой. Заметим, что переход от 4-мерного пространства—времени к расслоенному пространству означает признание удивительной возможности: физическое пространство, определяемое взаимодействиями, может быть многомерным и даже бесконечномерным. Описание же микропроцессов в обычных пространственно-временных терминах означает с этой точки зрения некое проектирование «истинной» физической геометрии взаимодействий на геометрию, порождаемую нашими макроскопическими приборами. Поэтому было бы очень полезно знать, что мы теряем при таком проектировании.

Локальные симметрии и геометризация взаимодействий. Локальные пространственные симметрии и гравитационное поле. Предположим, что у нас есть квадратный лист тонкого стекла и глобус. Плоский однородный стеклянный лист будет изображать плоское (евклидово) пространство, а поверхность глобуса — искривленное (риманово) пространство. Допустим теперь, что нам нужно «завернуть» глобус в стеклянный лист.

Разрежем наш большой стеклянный квадрат на множество маленьких квадратиков и «оклеим» ими глобус. Эта операция представляет собой модель процесса покрытия искривленной поверхности (или пространства) локальными картами (или координатными сетками). Легко видеть, что весь плоский лист можно покрыть одной картой, а сферу — нельзя. Поэтому нам и пришлось взять множество маленьких квадратиков (локальных карт), чтобы они как можно ближе прилегали к точкам сферы. Поступив таким образом, мы заменили сферу множеством маленьких плоскостей, определенным образом взаимосвязанных, например повернутых друг относительного друга на фиксированный угол. Иными словами, можно сказать, что разница между множеством маленьких плоских квадратиков, собранных в один плоский лист, и множеством тех же квадратиков, собранных в сферу, состоит в том, что угол поворота между их плоскостями в первом случае равен нулю, а во втором отличен от нуля. В переводе на геометрический язык это значит, что искривленное пространство можно представить как совокупность плоских пространств, «соединенных» *коэффициентами связности*. Коэффициенты связности определяют величину взаимного «поворота» или «сдвига» соседних локальных плоских пространств (рис. 1). Поэтому при склеивании квадратиков в плоскость они равны нулю, а при склеивании в сферу отличны от нуля. Таким образом, *сфера — это множество плоскостей + коэффициенты связности.*

Сравним теперь группы симметрии плоскости и сферы, точнее, группы движений, при которых эти объекты, как говорят, переходят в себя.

Если большой квадрат, о котором говорилось вначале, повернуть на четверть оборота вокруг оси, проходящей через его центр и перпендикулярной к его поверхности, то он займет то же положение, что и до поворота (см. рис. 1). Поскольку для человека, не видевшего самого процесса

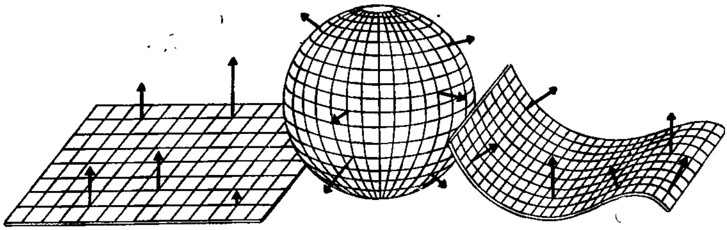

Рис. 1

вращения, это состояние ничем не отличается от исходного, говорят, что квадрат после такого поворота перешел в себя. Заметим, что при этом *все точки* нашего листа двигались в одной и той же плоскости и поворачивались на один и тот же угол, т. е. совершали *одно и то же движение*. Если же выбрать какой-нибудь маленький квадратик, приклеенный к глобусу, и повернуть глобус на четверть оборота вокруг оси, проходящей через центр этого квадратика и перпендикулярной к его поверхности, то глобус тоже совпадет с самим собой. Но теперь прежнее движение совершают лишь точки, принадлежащие выбранному маленькому квадратику. Точки же соседних квадратиков, слегка повернутых на глобусе друг относительно друга, совершают повороты в других плоскостях, т. е. *другие движения*. Это значит, что если *плоский лист* был *в целом симметричен* относительно рассмотренных поворотов, то на *глобусе прежняя симметрия стала лишь локальной*, т. е. она выполняется для каждого маленького квадратика в отдельности, но не для всех вместе. Заметим, что это обстоятельство не исключает наличия у сферы в целом собственной симметрии, отличной от симметрии плоского листа.

Таким образом, локально сфера обладает той же симметрией, что и плоскость в целом. Локализация симметрии сводится к тому, что, сохраняя в каждой точке свою структуру (т. е. тип движения), преобразования должны менять свои параметры при переходе от одной точки к другой. В нашем примере при переходе от одного маленького квадратика на сфере к другому мы совершаем вращения вокруг новой оси, тогда как плоский лист вращался целиком в одной плоскости вокруг одной оси.

Представим себе теперь, что и плоскость, и сфера очень большие, а наблюдатель очень маленький. Пусть у наблюдателя есть возможность узнать кое-что о пространстве, в котором он находится, но все его наблюдения «привязаны» к той точке, где он расположен, и к тому моменту времени, когда он делает измерения. Очевидно, что все результаты измерений будут отражать только локальные свойства окружающего наблюдателя пространства. Может ли он установить, что собой представляет пространство в целом? Может ли он, находясь в точке, отличить сферу от плоскости? Это тот самый вопрос, который в физике впервые поднял Эйнштейн [3]. Ответ Эйнштейна содержится в сформулированном им принципе эквивалентности. Обычно этот принцип формулируется как принцип равенства (локального) инертной и гравитационной масс. Но принципу эквивалентности можно придать и другую форму, а именно следующую: *плоское пространство + гравитационное поле локально эквивалентны искривленному риманову пространству* (т. е. неотличимы от него [4]).

Нетрудно заметить, что принцип эквивалентности в такой форме очень похож на установленную в приведенном выше примере локальную эквивалентность сферы и плоскости. Для полного совпадения достаточно отождествить коэффициенты связности (геометрическое понятие) с гравитационным полем (физическое понятие). Тогда получится геометрическая интерпретация гравитации.

Какова геометрия окружающего нас мира? Принцип эквивалентности Эйнштейна в некотором смысле означает, что однозначного ответа на этот вопрос быть не может. Можно считать, что пространство плоское и все тела подвергаются воздействию универсального всепроникающего поля, или что никакого поля нет, но пространство кривое. В таком случае вопрос о геометрии пространства в целом оказывается эквивалентным вопросу о поведении физических полей на произвольно больших расстояниях от источника.

Свойства симметрии пространства становятся свойствами симметрии взаимодействий. Так смыкаются геометрия и физика.

Заметим, что геометрическая интерпретация гравитационного поля стала возможной благодаря локализации пространственно-временной симметрии, т. е. переходу от плоского пространства — времени к искривленному, но обладающему локально теми же свойствами риманову пространству. Другие виды взаимодействий, а именно те, которые можно подвести под понятие калибровочного поля, также допускают чисто геометрическую интерпретацию. Только в этом случае локальными становятся внутренние симметрии элементарных частиц.

Локальные внутренние симметрии и калибровочное поле. Для того чтобы наглядно представить, что такое внутренние симметрии, рассмотрим следующий пример. Пусть летит по некоторой траектории шарик от пинг-понга, причем мы не видим, вращается он вокруг собственного центра инерции или нет, но знаем, что выполняется закон сохранения момента. Как описать положение точек поверхности шарика в произвольный момент времени, если угловая скорость его собственных вращений может меняться?

Как известно из механики, свободный полет шарика определяется только движением его центра инерции. Свободное движение центра инерции не зависит от того, вращается шарик или нет и постоянна ли скорость вращения. Вращение вокруг собственного центра инерции — это дополнительная (внутренняя) степень свободы, которая имеется у каждого тела (точнее, имеются три степени свободы, так как вращение возможно в любой плоскости). Если скорость вращения меняется, для обеспечения закона сохранения момента необходимо предположить, что во время полета на шарик действует некоторое поле сил, закручивающих его или тормозящих вращение. Это поле сил — аналог калибровочного поля.

Калибровочными преобразованиями называют те преобразования функций, описывающих движение частицы, которые не отражаются на наблюдаемых характеристиках движения, т. е. не меняют физического состояния ее. В этом смысле вращения шарика вокруг его центра инерции являются аналогом калибровочных преобразований внутренней симметрии, если нас интересует лишь траектория движения шарика. Локализация такой «внутренней» симметрии означает переменность угловой скорости собственного вращения шарика. Исчезновению локализации, т. е. преобразованиям внутренней симметрии с постоянными параметрами, здесь соответствует установление постоянной вдоль всей траектории скорости вращения. Очевидно, что и калибровочное поле при этом исчезает. Любопытно отметить, что точно так же исчезает сверхпроводимость (в классической электродинамике), когда калибровочная функция, зависящая от точки, становится постоянной.

Собственные вращения шарика ненаблюдаемы до тех пор, пока на шарике не сделана какая-нибудь отметка, например нанесена полоска краски, позволяющая следить за его вращением. Но сделать внутренние вращения наблюдаемыми можно, только нарушив внутреннюю симметрию, поскольку краска делает неэквивалентными разные повороты шарика. Этот простой пример иллюстрирует еще одно важное обстоятельство: наличие какой бы то ни было симметрии означает наличие тождественных, т. е. неотличимых состояний, тогда как наблюдение и измерение предполагают различение состояний, т. е. нарушение симметрии. Это нарушение всегда связано с воздействием на систему, т. е. с появлением некоторого поля сил [5].

Инвариантность по отношению к локальным калибровочным преобразованиям означает невозможность измерить относительную фазу волновой функции частицы в двух различных мировых точках. На примере шариков это утверждение иллюстрируется следующим образом. Предположим, что в каждой точке Вселенной помещается вращающийся шарик. Если два таких шарика находятся в точках, отделенных друг от друга пространственноподобным интервалом, то невозможно установить угол поворота их друг относительно друга просто потому, что скорость света конечна. Следовательно, если строится теория, описывающая поведение всего ансамбля вращающихся шариков в целом, она должна допускать возможность независимых вращений шариков в разных точках. Иными словами, такая теория должна быть инвариантной относительно локальных вращений с переменной скоростью. В то же время в силу закона сохранения момента изменение скорости вращения требует наличия силового поля, взаимодействующего с шариками и закручивающего их по-разному в разных точках. Тем самым вновь локализация симметрии сопровождается появлением силового поля, изменяющего внутреннее состояние системы — калибровочного поля.

Аналогичным образом каждой локальной внутренней симметрии ставится в соответствие свое калибровочное поле. Источником его является сохраняющаяся в случае инвариантности относительно обычной (т. е. нелокализованной) калибровочной группы величина — плотность векторного или тензорного тока. В примере с шариками источник калибровочного поля — плотность момента собственных вращений.

Внутренние пространства и расслоение над V_4. Внутренние симметрии можно понимать как симметрии некоторого внутреннего пространства, точки которого соответствуют различным состояниям частицы, не связанным с ее положением в пространстве. Пример внутренней симметрии: изотопическая инвариантность или независимость ядерных сил от заряда частиц. Вследствие изотопической инвариантности ядерных сил в отсутствие электромагнитного поля протон и нейтрон неразличимы. Две неразличимые частицы можно рассматривать как два состояния одной частицы. Занумеруем эти состояния значениями внутреннего квантового числа — изоспина: 1/2 (протон) и —1/2 (нейтрон). Получим изотопический дублет. Возможны и более богатые изотопические мультиплеты, содержащие три и более частиц. Воздействие электромагнитным полем на изотопический мультиплет приводит к нарушению изотопической симметрии и распадению мультиплета на отдельные компоненты (частицы), которые по отношению к электромагнитному полю ведут себя по-разному.

Локализация внутренних симметрий подобно локализации пространственно-временных симметрий приводит к необходимости ввести новый физический объект — калибровочное поле. Понятие калибровочного поля было впервые введено Янгом и Миллсом в связи с попыткой построить теорию сильных взаимодействий, исходя из требования инвариантности относительно локальной группы изотопических преобразований. В 1954 г. они предложили метод введения векторного поля, ответственного за сильные взаимодействия между нуклонами и связанного с сохраняющимся током изоспина. Идея метода состояла в следующем [1]. Сохранение изотопического спина тождественно требованию инвариантности всех взаимодействий относительно вращений изотопического спина. Это означает, что в тех случаях, когда электромагнитными взаимодействиями можно пренебречь, ориентация изотопического спина не имеет физического значения. В этом случае различение протона и нейтрона становится чисто произвольным. Однако обычно подразумевается, что этот произвол ограничен следующим условием: как только сделан выбор, что называть протоном, а что нейтроном в одной точке пространства—времени, свобода выбора в других пространственно-временных точках, даже отделенных от первой пространственно-подобным интервалом, пропадает.

Такое положение несовместимо с гипотезой близкодействия, лежащей в основе обычных физических теорий. В самом деле, пусть электромагнитное поле отсутствует и протон и нейтрон неразличимы. Предположим теперь, что в одной из точек или в некоторой области пространства включено электромагнитное поле и тем самым установлено, какая частица является протоном, а какая — нейтроном. В других областях пространства это различие будет устанавливаться лишь по мере того, как электромагнитное поле достигнет этих областей. Очевидно, что это не может произойти мгновенно во всех точках пространства, поскольку скорость распространения света (электромагнитного поля) конечна. Поэтому Янг и Миллс предложили ввести требование инвариантности всех взаимодействий относительно независимых вращений изотопического спина во всех точках пространства — времени, так что относительная ориентация изотопического спина в разных точках пространства—времени теряет смысл (если пренебречь электромагнитным полем). Таким образом, требуется инвариантность относительно изотопического калибровочного преобразования $\psi' = S\psi$, где S представляет собой вращение изотопического спина, зависящее от выбора точки.

Инвариантность теории относительно локальных изотопических вращений обеспечивается введением триплета векторных полей, кванты которых отождествляются с триплетом ρ-мезонов. Мультиплетам векторных мезонов в геометрической интерпретации соответствует понятие коэффициентов связности расслоенного пространства, играющих роль «сил».

Расслоенное пространство получается из обычного пространства — времени, если его точки заменить новыми пространствами (слоями), т. е. предположить, что «точки» имеют «внутреннюю структуру». Внутренние симметрии элементарных частиц становятся тогда симметриями, действующими внутри слоев (внутренних пространств), а пространственно-временные симметрии преобразуют друг в друга слои, отнесенные к разным пространственно-временным точкам. Геометрия расслоенного пространства обобщает риманову геометрию и включает ее как свой частный случай.

Внутреннее пространство не может быть отождествлено с обычным пространством—временем (будем говорить: мировым пространством) даже тогда, когда координаты его точек тоже пространственно-временные. Простейший пример — тот же вращающийся шарик. Отождествить внутреннюю и пространственно-временную симметрию движений шарика означало бы отождествить собственные и орбитальные его вращения. Иными словами, мы с самого начала должны здесь рассматривать *два пространства*: одно для описания движения центра инерции (обычное пространство), другое — «внутреннее» — для описания вращений вокруг центра инерции. В данном примере на самом деле имеется одно пространство, которое учитывается дважды, так как играет двоякую роль. Но в теории элементарных частиц это два разных пространства.

Довольно быстро было замечено, что переход от симметрии, заданной во всем пространстве, к симметрии, выполняющейся лишь локально, в окрестности точки, напоминает переход от плоского абсолютного пространства — времени Минковского* к риманову пространству общей теории относительности, которое локально обладает теми же свойствами, что и пространство Минковского. В самом деле, риманово пространство можно представить как многообразие, «точками» которого являются плоские пространства Минковского, причем «соединены» они между собой коэффициентами связности Риччи или Кристоффеля. Геометрическое понятие коэффициента связности в римановом 4-мерном пространстве соответствует в физике гравитационному взаимодействию. Если аналогичным образом рассматривается 4-мерное многообразие, «точками» которого являются пространства представлений группы внутренней симметрии, получается пример расслоенного пространства. Коэффициенты связности, введенные в нем, соответствуют вектор-потенциалам калибровочных полей или мультиплетам векторных полей. Такая геометрическая интерпретация

* Т. е. плоского 4-мерного пространства, в котором время играет роль четвертой координаты. Интервал (или длина) в таком пространстве определяется как корень квадратный из суммы квадратов пространственных координат минус квадрат временного промежутка, умноженный на квадрат скорости света. Из-за наличия минуса в выражении для 4-мерного интервала геометрия пространства Минковского называется не евклидовой, а псевдоевклидовой.

калибровочных полей позволяет рассматривать траектории частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, как свободные траектории в расслоенном пространстве. Тем самым при описании любых взаимодействий, которые осуществляются через какое-либо калибровочное поле, можно избавиться от понятия силы и сделать теорию таких взаимодействий чисто геометрической, подобно общей теории относительности Эйнштейна.

Взаимодействие и геометрия. Принципы относительности, геометрия и понятие силы. В основе каждой современной физической теории лежит некоторый принцип относительности. Принцип относительности формулируется в виде требования инвариантности теории относительно некоторой группы симметрии. Как правило, предполагается, что эта группа отражает свойства симметрии пространства—времени в целом. До создания общей теории относительности Эйнштейна роль таких групп играли конечные группы Ли (группа Галилея, включающая вращения и сдвиги в 3-мерном пространстве и отдельно — сдвиги во времени, группа Лоренца, включающая вращения в 4-мерном пространстве Минковского, где три пространственные координаты и время рассматриваются как равноправные координаты, и группа Пуанкаре — группа движений, т. е. вращений и сдвигов пространства Минковского). В теории Эйнштейна впервые в основу принципа относительности была положена бесконечная группа.

Принцип относительности указывает определенный класс систем отсчета, называемых инерциальными (в смысле данного принципа относительности), в которых, по определению, движение частиц считается прямолинейным, а сами частицы — свободными. Наблюдаемое отклонение траекторий от инерциальных и взаимодействие между частицами описываются с помощью понятия силового поля.

Эйнштейновская концепция движения делает все траектории инерциальными. Это соответствует инвариантности теории относительно произвольных непрерывных преобразований пространственных координат и времени, которые называют также общековариантными преобразованиями. В механике Ньютона все инерциальные траектории связаны между собой преобразованиями Галилея, а в специальной теории относительности—преобразованиями Лоренца. Группы преобразований Галилея, Лоренца и общековариантные преобразования задают принципы относительности соответствующих теорий. Они определяют как бы степень симметричности возможных бессиловых движений. Нарушение этой симметрии отождествляется с действием силы. Бессиловые, инерциальные движения реализуют аксиоматически введенную геометрию пространства — времени.

Иными словами, в основе каждой физической теории лежит постулат о геометрических свойствах пространства— времени, причем этот постулат находит свое выражение в принципе относительности теории [6, 7]. В этом смысле геометрия логически предшествует всякому эксперименту. Законы физики не могут быть выражены без помощи геометрии, хотя геометрия, взятая сама по себе, не соответствует никаким опытам, никакой опытной науке [8].

Абсолютное пространство и динамическая геометрия. Согласно закону инерции классической механики тело сохраняет состояние покоя или равномерного прямолинейного движения до тех пор, пока на него не подействует сила. Следовательно, в механике Ньютона мы узнаем о существовании силы, действующей на тело, по отклонению его траектории от прямолинейной. Но как определить, прямолинейна ли траектория? Для этого нужно сравнить ее с эталоном прямой линии. Иными словами, нужна траектория, прямолинейная по определению, и нужна фиксированная процедура сравнения траекторий. В качестве образа прямой линии в механике часто используют луч света. Такой выбор эквивалентен предположению, что кванты света — фотоны — не подвержены механическим воздействиям, т. е. их масса равна нулю. В принципе в качестве прямой линии можно взять траекторию любой частицы, движущейся по инерции, т. е. свободно. Но существуют ли свободные частицы и прямые линии? Для теорий типа механики Ньютона это принципиальный вопрос, поскольку отклонение исследуемых траекторий от инерциальных служит мерой интенсивности взаимодействия или силы, действующей на частицу.

Если частица ни с чем не взаимодействует, то она не наблюдаема, так как наблюдение (измерение) подразумевает воздействие на нее. Абсолютно свободные частицы и абсолютно прямые линии — это абсолютно ненаблюдаемые объекты, объекты-мифы. Понятие инерциального или свободного движения относительно. Оно зависит от выбора класса возможных взаимодействий. Абсолютное пространство Ньютона — это пространство траекторий инерциальных механических движений. Однако обычно считается, что эти движения наблюдаемы, например, с помощью света, т. е. электромагнитного поля. Таким образом, механика оказывается принципиально незамкнутой теорией. Она предполагает существование немеханических взаимодействий, позволяющих наблюдать инерциальные механические движения и делать измерения. При этом подразумевается, что воздействие на исследуемую систему и на эталон во время измерения достаточно мало. Когда же такому условию удовлетворить невозможно, переходят к квантовой картине, которая явно учитывает влияние процесса измерения на исследуемую систему. Квантование снимает противоречивость процедуры сравнения с ненаблюдаемыми эталонами.

Обратимся теперь к общей теории относительности Эйнштейна. В чем разница между точками зрения Ньютона и Эйнштейна? Теория Эйнштейна не просто обобщает классическую (ньютоновскую) теорию тяготения. Она построена на совершенно других принципах и представляет собой, в сущности, новый тип физической теории. Главные особенности этой теории — отсутствие понятия взаимодействия (или силы) и новая концепция пространства—времени. Они вытекают из нового понимания роли принципов относительности и симметрии в физической теории.

Согласно Эйнштейну [3], в опыте нет отдельно физики и геометрии, проверке на опыте подлежит только сумма: геометрия + физические законы. Опыт не дает доказательства существования того или иного геометрического пространства и соответственно геометрий безотносительно к тем физическим законам, которые лежат в его основе. Действительно, экспериментатор, прежде чем ставить опыт, делает явно или неявно ряд предположений относительно условий эксперимента. Например, он предполагает, что результат не зависит от того, в какой точке земного шара проводится эксперимент и как при этом ориентированы приборы. Таким образом, заранее постулируется, что пространство, в котором ставится опыт, однородно и изотропно.

Если пространство однородно, т. е. в целом обладает некоторой симметрией, то все геометрические объекты в нем характеризуются набором чисел — инвариантов различных представлений группы симметрии данного пространства. Эти числа соответствуют тем свойствам геометрических объектов, которые не изменяются при преобразованиях, переводящих рассматриваемое пространство в себя. Например, для окружности на плоскости таким числом является радиус. Радиус (расстояние) — инвариант группы движений плоскости. Окружность — геометрическое место точек, равноудаленных от заданной точки. Таким образом, для однородного пространства достаточно знать его группу движений, чтобы описать все, что может в нем происходить: свойства геометрических объектов и отношения между ними. В этом заключается смысл известной эрлангенской программы Ф. Клейна. Использование однородных пространств в физике означает, что свойства изучаемых объектов (например, частиц) формулируются в терминах инвариантов, задающих представления группы симметрии пространства—времени и внутренних симметрий [9]. Численные значения инвариантов соответствуют интегральным сохраняющимся величинам: энергии, импульсу, моменту, спину, изотопическому спину и др.

Эйнштейн впервые ввел в физику риманову точку зрения на геометрию, согласно которой пространство в целом и нелокальные характеристики (например, длина) определяются только шаг за шагом.

Риманово пространство не допускает, вообще говоря, никаких движений, т. е. не обладает никакой степенью однородности. Инварианты римановой геометрии — это дифференциальные инварианты группы произвольных непрерывных преобразований координат (общековариантных преобразований). В том смысле, как конечные группы Ли, соответствующие клейновским пространствам, группа общековариантных преобразований инвариантов не имеет. Точно так же не приводят к обычным законам сохранения и, следовательно, инвариантам группы локальных внутренних симметрий. Их подгруппы, соответствующие преобразованиям с постоянными параметрами, дают законы сохранения. Сами же локальные симметрии определяют лишь форму дифференциальных инвариантов, которые становятся лагранжианами взаимодействующих полей. Именно поэтому они являются динамическими симметриями. Динамические симметрии позволяют формулировать свойства взаимодействий.

Таким образом, перед нами два совершенно различных типа физических теорий. В одном случае полевые теории, в которых структура пространства—времени жесткая и абсолютная, обладающая той или иной степенью симметрии. Предполагается, что могут существовать свободные частицы, которые движутся по геодезическим (прямолинейным) траекториям. Наблюдаемое в действительности искривление траекторий описывается с помощью понятия взаимодействия (силового поля). Все поля (в том числе и гравитационное) равноправны и отличаются только законом распространения и взаимодействием с порождающими их токами.

В другом случае взаимодействие полностью устраняется. Оно рассматривается как проявление динамической природы геометрии. Тогда все результаты измерений будут непосредственно относиться к геометрическим характеристикам пространства—времени. При этом уже не нужно выделять инерциальные траектории в качестве эталонов. Достаточно сравнивать между собой траектории двух произвольных частиц или тел. Расстояние между ними, называемое геодезическим отклонением, пропорционально тензору кривизны пространства—времени. Геометризация взаимодействий избавляет физическую теорию от разбиения на две разнородные части: ненаблюдаемую (геометрическую) и наблюдаемую (физическую). Поскольку эксперимент отражает только сумму этих частей, такое обычно встречающееся разбиение всегда допускает произвол и служит причиной неоднозначности соответствия между теорией и экспериментом (конвенционализма физической теории) [7].

Если взаимодействие геометризовано, геометрия физического пространства становится экспериментально проверяемой. В этом случае возможен ответ на вопрос о том, какова геометрия физического мира. Достаточно лишь указать, какие физические тела или процессы реализуют основные геометрические понятия: точка, прямая, сфера, вектор и т. д. Такая реализация всегда приблизительна, так как связана с идеализацией. От этого сопоставления зависит ответ на наш вопрос. Известно, что посредством твердых и неизменяемых (насколько это возможно) макроскопических тел можно реализовать геометрию Евклида. Среди классических теорий ей соответствует классическая механика Ньютона. Электродинамика фотонов реализует геометрию пространства Минковского, гравитационное поле без источников — риманову геометрию, свободные калибровочные поля — геометрию расслоенного пространства. В последнем случае вектор-потенциалы калибровочных полей являются образами неголономных сил (типа сил трения, пропорциональных скорости частицы). Неголономность означает, что их нельзя представить в виде производных по координатам от некоторой функции, называемой потенциалом. По этой причине неголономные силы обычно нельзя ввести лагранжевым методом. Метод внутренних симметрий и переход к расслоенным пространствам позволяют рассматривать неголономные силы так же, как обычные, в рамках лагранжева формализма.

О роли геометрических теорий. Геометрическое описание взаимодействий позволяет: 1) естественным образом объединить внутренние и пространственно-временные симметрии; 2) найти естественный критерий для выбора формы лагранжианов взаимодействующих полей; 3) классифицировать решения уравнений классических калибровочных полей. В последнем случае оказывается, что далеко не всегда существуют классические решения с плоской асимптотикой, необходимой для перехода к квантованию. Тем самым вопрос о соотношении между квантовой и классической теорией приобретает новый смысл. Геометрия расслоенного пространства определяет структуру ковариантного волнового оператора для калибровочных полей. Обоснование алгебры полей также, по-видимому, является задачей геометрической теории. Однако главное достоинство геометрической теории взаимодействий — в ее суверенности. В своей полемике с Бором Эйнштейн не просто выступал против чуждой ему идеологии. В основе его возражений против квантового подхода, для развития которого он сам много сделал, лежит образ идеальной теории, в которую прообразы действительности входят через их теоретические аналоги. При этом теория не содержит элементов, заимствованных из опыта и не имеющих чисто теоретической интерпретации. Только такая «недуалистическая» теория может быть сравнима с экспериментом как целое. Квантовая механика, по мнению Эйнштейна, этому требованию не удовлетворяла, как, впрочем, и теория поля тяготения с источниками, развиваемая самим Эйнштейном. Стремление избавиться от такого дуализма и было причиной многолетних поисков Эйнштейном единой геометрической теории взаимодействий.

Следует отметить принципиальное отличие единой теории взаимодействий, использующей понятие калибровочных полей, от всех других вариантов единых теорий физических процессов. Как известно, стремление найти общую точку зрения на различные физические явления или общий математический аппарат существует с тех пор, как существует физика. Но до нашего столетия физика, как правило, стремилась найти универсальное вещество, заполняющее все пространство, свойствами которого можно было бы объяснить все физические явления. Так появились гипотезы об универсальных жидкостях типа флогистона и об эфире.

С современной точки зрения эфир — механическая модель геометрических свойств пространства—времени. Поэтому он может быть без ущерба для теории из нее изъят и заменен аксиомами о пространственно-временных отношениях. Понимание этого обстоятельства привело, как известно, к созданию специальной, а затем общей теории относительности. В общей теории относительности универсальное гравитационное взаимодействие отождествлялось с искривлением пространства—времени. В геометрических единых теориях гравитации и электромагнетизма (Эйнштейн, Вейль, Эддингтон, Райнич, Калуза, Фок и др.) гравитационное и электромагнитное поля объединялись предположением, что оба эти взаимодействия суть проявления неевклидовости пространства—времени, но более сложной природы, чем искривление, соответствующее лишь гравитационному взаимодействию. В современных групповых подходах часто ищут наиболее широкую группу преобразований, включающую как пространственно-временные, так и внутренние симметрии элементарных частиц, т. е. расширяют принцип относительности теории. Как оказалось, такая группа, если она нетривиальна, должна быть бесконечной.

В отличие от этих подходов при геометрическом объединении симметрий строится такое пространство, которое естественным образом наделено обоими видами симметрии, задаваемыми произвольными группами. Геометрия в «слое» и в «базе», т. е. пространственно-временная и внутренняя симметрии, вообще говоря, не связаны друг с другом. Это отражает независимость квантовых чисел, соответствующих внутренним симметриям и определяющих правила запрета в реакциях элементарных частиц, от их пространственно-временных характеристик. Тем самым конструкция расслоенного пространства позволяет объединять любые симметрии. Связь между внутренними и пространственными симметриями проявляется только при нарушении локальной калибровочной инвариантности. Вместо одного вещества, или одной функции с большим числом компонент, или одной широкой группы в геометрической теории калибровочных полей указывается общий принцип, по которому строится геометрия пространства, соответствующая каждому взаимодействию.

Использование геометрии расслоенного пространства позволяет рассматривать не только каждое калибровочное поле отдельно, изменяя лишь структуру «слоя» в соответствии с калибровочной группой, но и несколько полей одновременно, если над каждой точкой пространства—времени ввести несколько слоев. Взаимодействие разных полей друг с другом или с гравитационным полем можно определить тогда с помощью проекций соответствующих слоев друг на друга или на касательное пространство к базе, т. е. проекции на пространство—время. Все результаты геометрических единых теорий гравитации и электродинамики, использующих 4-мерную или 5-мерную геометрию, могут быть получены таким способом.

Итак, исследователь, имеющий дело с современной теорией элементарных частиц, напоминает тех, кто сидит в платоновской пещере спиной к огню и пытается по пляскам теней на стене определить, что происходит с предметами, движущимися у него за спиной и отбрасывающими эти тени. Мы не знаем, что представляет собой «внутренний мир» элементарных частиц, какова природа внутренних симметрий. Тем не менее по отражениям этих внутренних свойств, улавливаемым нашими приборами, макроскопическими и 3-мерными, мы пытаемся восстановить происходящее в этом загадочном и недоступном мире, который называется «элементарная частица». Но если мы не можем «обернуться» и «увидеть сущность», то можно попробовать понять, как получается «тень» и что такое «огонь». Видя отображение и зная, как оно получается, мы могли бы «построить сущность».

§ 2. ДИНАМИЧЕСКИЕ СИММЕТРИИ. КЛАССИЧЕСКИЕ КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ. ЭКСПЕРИМЕНТ

Динамические симметрии и универсальные взаимодействия. Одно из наиболее перспективных направлений в современной теории поля — изучение свойств симметрии взаимодействий элементарных частиц. Эти свойства проявляются двояко. Первый тип симметрии (алгебраический) в том случае, когда отсутствуют нарушения ее, позволяет классифицировать элементарные частицы по мультиплетам, реализующим линейные представления данной (конечной) группы симметрии, а также приводит к линейной зависимости между амплитудами различных физических процессов. Если какой-либо мультиплет оказывается не заполненным известными частицами, появляется возможность предсказать существование новых частиц со свойствами (т. е. с квантовыми числами), диктуемыми группой симметрии. Как известно, именно таким образом открытие Ω^--гиперона подтвердило наличие SU_3-симметрии в сильных взаимодействиях.

Совершенно иначе проявляют себя динамические симметрии элементарных частиц, которые в последние годы привлекают к себе все большее внимание физиков [10]. Наличие точной динамической симметрии требует введения определенных взаимодействий, осуществляемых безмассовыми частицами. Нарушение динамической симметрии приводит к появлению массы у этих частиц.

Примеры алгебраических симметрий: лоренц-инвариантность, калибровочная инвариантность относительно фазовых преобразований с числовыми параметрами, зарядовая независимость сильных взаимодействий. Примеры динамических симметрий: общая ковариантность в теории тяготения, локальные калибровочные преобразования с параметрами, зависящими от точки, алгебра токов, нелинейные киральные преобразования типа $SU_2 \times SU_2$, $SU_3 \times SU_3$ и т. д. В то время как алгебраические симметрии порождают законы сохранения энергии, импульса и момента, заряда и изотопического спина, динамические симметрии приводят к ограничениям на возможную динамику взаимодействий: теоремы малых энергий для мягких фотонов и гравитонов, правила сумм в сильных и слабых взаимодействиях, принцип эквивалентности в гравитации, связь между ограничениями по спину и формой взаимодействия калибровочных полей и др.

Динамические симметрии реализуются неоднородно или нелинейно по полям. Иными словами, преобразования полевых переменных, соответствующие динамической симметрии, неоднородны или нелинейны. Например, преобразования аффинной связности в теории тяготения

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} \to \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \cdot \frac{\partial x^{\tau}}{\partial x'^{\mu}} \cdot \frac{\partial x^{\sigma}}{\partial x'^{\nu}} \Gamma^{\rho}_{\tau\sigma} + \frac{\partial x'^{\lambda}}{\partial x^{\rho}} \cdot \frac{\partial^2 x^{\rho}}{\partial x'^{\mu} \partial x'^{\nu}},$$

калибровочные преобразования вектор-потенциала в электродинамике

$$A_{\mu}(x) \to A_{\mu}(x) + \partial_{\mu} \Theta(x)$$

и в теории калибровочных полей

$$A^a_{\mu}(x) \to A^a_{\mu}(x) + \partial_{\mu} \varepsilon^a(x).$$

Приближенная киральная инвариантность сильных взаимодействий порождает нелинейные преобразования поля π-мезонов:

$$\delta\pi = F_\pi \left\{ \frac{1}{2}\varepsilon + F_\pi^{-2}\left[\pi(\pi\cdot\varepsilon) - \frac{1}{2}\pi^2\varepsilon \right] \right\},$$

где F_π — амплитуда распада π-мезонов.

Инвариантность теории относительно групп динамической симметрии обеспечивается введением взаимодействия с тем или иным полем через замену обычных производных ковариантными. Именно, взаимодействие с гравитационным полем соответствует замене $\partial_\mu \to \delta_\nu^\lambda \partial_\mu + \Gamma^\lambda_{\mu\nu}$, с электромагнитным полем $\partial_\mu \to \partial_\mu - ieA_\mu$, с произвольным калибровочным полем $\partial_\mu \to \partial_\mu - i\varepsilon I_a A_\mu$, где I_a — генератор представления калибровочной группы.

Возможность включить взаимодействие с некоторым полем с помощью перехода от обычного дифференцирования к ковариантному означает, что речь идет об универсальном в той или иной степени взаимодействии. Действительно, гравитационное поле взаимодействует универсально со всеми массивными частицами (или телами), электромагнитное поле — со всеми заряженными частицами, сильные взаимодействия, осуществляемые ρ-мезонами, — со всеми частицами, несущими изоспин, и т. д. Все взаимодействия, обладающие этим свойством, независимо от их физической природы (сильные, слабые, электромагнитные и гравитационные) соответствуют калибровочным полям. Универсальность взаимодействий означает, что константа связи, характеризующая взаимодействие квантов того или иного калибровочного поля (например, фотонов, а также векторных и тензорных мезонов) с другими частицами, одинакова для всех процессов, протекающих с их участием. Тем самым такие константы связи становятся *фундаментальными физическими константами*. Другая привлекательная особенность универсальных взаимодействий состоит в возможности чисто геометрического описания их свойств, благодаря чему геометрия приобретает динамический характер. Третья особенность универсальных взаимодействий — их связь с сохраняющимися токами, которая вселяет надежду на возможность построения классификации взаимодействий по группам симметрии, подобно классификации частиц.

Законы сохранения бывают двух типов: слабые и сильные. Слабые законы сохранения — это обычные законы сохранения, отражающие наличие симметрии относительно конечной группы (алгебраической симметрии). Они выполняются только на решениях уравнений поля (экстремалях). Их вид определяется структурой лагранжиана. Сильные законы сохранения появляются при локализации конечных групп и отражают наличие динамической симметрии. Они представляют собой своеобразную запись тождеств Нетер, которым подчиняются уравнения поля, или дополнительных условий на полевые переменные. Их вид определяется только структурой преобразований группы динамической симметрии и не зависит от формы инвариантного лагранжиана. Сильные законы сохранения часто оказываются так называемыми ковариантными законами сохранения. Интегрирование токов, сохраняющихся в сильном смысле, приводит к мультиплетам зарядов, образующих алгебру, структура которой также не зависит от конкретного вида лагранжиана. Этому обстоятельству обязан своим возникновением метод алгебры токов, представляющий собой один из методов теории динамической симметрии. Ограничения на форму взаимодействий, вытекающие из наличия динамической симметрии, сохраняются даже при некоторых нарушениях ее, что очень важно для сопоставления теории с экспериментальными данными.

Значение принципа локальной калибровочной инвариантности как принципа динамической симметрии состоит в том, что он выражает тесную связь между универсальностью различных взаимодействий и законами сохранения с одной стороны и формой и существованием самих взаимодействий — с другой.

Поля Янга—Миллса. Требование локальной изотопической инвариантности $\psi' = S(x)\psi$ аналогично требованию калибровочной инвариантности заряженных полей $\psi' = \exp[i\alpha(x)]\psi$ в электродинамике. В электродинамике такая инвариантность обеспечивается введением электромагнитного поля A_μ, преобразующегося по закону

$$A'_\mu = A_\mu + \frac{1}{e}\cdot\frac{\partial\alpha}{\partial x^\mu}, \qquad (2.1)$$

и заменой в уравнении Дирака обычной производной, ковариантной по следующему правилу: $\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$.

Аналогично локальная изотопическая инвариантность обеспечивается заменой

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - \mathrm{i}\,\varepsilon B_\mu, \qquad (2.2)$$

где B_μ представляют собой 2×2-матрицы ($\hbar = c = 1$, $x_4 = \mathrm{i}t$), из которых три эрмитовы ($\mu = 1, 2, 3,$) и B_4 — антиэрмитова.

Из требования инвариантности $S(\partial_\mu - \mathrm{i}\varepsilon B_\mu')\psi' = (\partial_\mu - \mathrm{i}\varepsilon B_\mu)\psi$ получим закон преобразования для B_μ (B-квантов поля Янга — Миллса):

$$B_\mu' = S^{-1} B_\mu S + \frac{\mathrm{i}}{\varepsilon} S^{-1}\, \partial S/\partial x^\mu.$$

Последний член подобен градиентному члену в калибровочном преобразовании электромагнитных потенциалов.

По аналогии с тензором напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$ строится тензор

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial B_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial B_\nu}{\partial x^\mu} + \mathrm{i}\varepsilon\,(B_\mu B_\nu - B_\nu B_\mu), \qquad (2.3)$$

преобразующийся по закону

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}' = S^{-1}\,\mathcal{F}_{\mu\nu}\,S. \qquad (2.4)$$

Изложенный выше ход рассуждений можно применить к полю ψ с произвольным изотопическим спином. При этом будут меняться матрицы S, т. е. представление группы вращений в 3-мерном пространстве. Различные поля с одинаковыми полными изотопическими спинами, т. е. принадлежащие к одному представлению S, взаимодействуют с одним и тем же матричным полем B_μ. Произведение представлений $S = S^{(a)}S^{(b)}$ порождает сумму B_μ-полей, соответствующих каждому представлению: $B_\mu = B_\mu^{(a)} + B_\mu^{(b)}$. Поле B_μ можно представить в виде

$$B_\mu = \mathbf{A}_\mu \cdot \mathbf{T}, \qquad (2.5)$$

где $\mathbf{T}$ — матрица представления группы изотопических вращений O_3, а поля $\mathbf{A}_\mu$ одинаковы для всех представлений.

В изотопическом пространстве $\mathbf{T}$ и $\mathbf{A}_\mu$ — 3-мерные векторы. Тогда

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = 2\mathbf{F}_{\mu\nu}\cdot\mathbf{T}; \quad \mathbf{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathbf{A}_\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial \mathbf{A}_\nu}{\partial x^\mu} - 2\varepsilon\,\mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu.$$

Одни и те же $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ взаимодействуют со всеми полями ψ безотносительно к представлению S, к которому относится ψ. Если рассматриваются лишь инфинитезимальные изотопические калибровочные преобразования $S = 1 - 2i\mathbf{T}\delta\boldsymbol{\omega}$, то преобразования $\mathbf{A}_\mu$ выглядят следующим образом:

$$\mathbf{A}'_\mu = \mathbf{A}_\mu + 2\mathbf{A}_\mu \times \delta\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\boldsymbol{\omega}.$$

Заметим, что выделить инфинитезимальные преобразования можно только в том случае, если локализуемая группа является группой Ли.

Выберем плотность лагранжиана, инвариантную относительно локальных изотопических калибровок, в виде

$$L = -\frac{1}{4} \mathbf{F}^{\mu\nu} \mathbf{F}_{\mu\nu} - \bar{\psi}\gamma^\mu (\partial_\mu - i\,\varepsilon\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}_\mu)\,\psi - m\bar{\psi}\psi.$$

Варьирование этого лагранжиана по $\mathbf{A}_\mu$ и ψ приводит к следующим уравнениям:

$$\frac{\partial \mathbf{F}^{\mu\nu}}{\partial x^\nu} + 2\varepsilon\,(\mathbf{A}_\nu \times \mathbf{F}^{\mu\nu}) + \mathbf{J}^\mu = 0; \qquad (2.6)$$

$$\gamma^\mu (\partial_\mu - i\,\varepsilon\boldsymbol{\tau}\mathbf{A}_\mu)\,\psi + m\psi = 0,$$

где

$$\mathbf{J}^\mu = i\,\varepsilon\,\bar{\psi}\gamma^\mu\,\boldsymbol{\tau}\psi. \qquad (2.7)$$

Дивергенция $\mathbf{J}_\mu$ не обращается в нуль:

$$\partial \mathbf{J}^\mu / \partial x^\mu = -2\varepsilon \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{J}^\mu.$$

Если, однако, ввести величину $\tilde{\mathbf{J}}^\mu = \mathbf{J}^\mu + 2\varepsilon \mathbf{A}_\nu \times \mathbf{F}^{\mu\nu}$, то получим закон сохранения в виде $\partial\tilde{\mathbf{J}}^\mu/\partial x^\mu = 0$.

Уравнения поля можно дополнить условием на $\mathbf{A}_\mu$, аналогичным лоренцевой калибровке для электромагнитных потенциалов: $\partial \mathbf{A}_\mu / \partial x^\mu = 0$. Эти условия устраняют скалярную часть в поле $\mathbf{A}_\mu$, оставляя компоненты, соответствующие спину 1, и налагают ограничение на возможные изотопические калибровочные преобразования. Именно преобразование $S = 1 - i\boldsymbol{\tau}\delta\boldsymbol{\omega}$ должно удовлетворять условию

$$2\mathbf{A}_\mu \times \frac{\partial}{\partial x^\mu} \delta\boldsymbol{\omega} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial^2}{\partial x^{\mu 2}} \delta\boldsymbol{\omega} = 0,$$

которое, используя (2.2), можно представить в виде $\nabla_\mu \nabla_\mu \delta\omega = 0$. Это аналог условия на параметры градиентного преобразования (2.1) в электродинамике:

$$\partial^2\alpha/\partial x^{\mu 2} = 0. \qquad (2.8)$$

Как известно, условие (2.8) выделяет волновые решения уравнений Максвелла.

Будучи записаны через вектор-потенциал, уравнения Янга—Миллса выглядят следующим образом:

$$\square\, \mathbf{A}_\mu + 2\varepsilon \mathbf{A}_\nu \times (2\partial_\nu \mathbf{A}_\mu - \partial_\mu \mathbf{A}_\nu - 2\varepsilon \mathbf{A}_\mu \times \mathbf{A}_\nu) = 0. \qquad (2.9)$$

Теория Утиямы. Калибровочные поля общего вида. В 1956 г. Утияма показал, что из требования локальной инвариантности интеграла действия

$$S = \int \bar{\psi}\Gamma^\mu \partial_\mu \psi d^4 x \qquad (2.10)$$

относительно произвольной полупростой группы Ли можно получить соответствующее этой группе калибровочное векторное поле и законы сохранения. Действительно, пусть ψ подвергается калибровочным преобразованиям вида

$$\psi' = S\psi, \qquad (2.11)$$

где $S = 1 + \underset{a}{I}\varepsilon^a(x)$; $\underset{a}{I}$ — генератор некоторого представления группы Ли G_r, относительно которой интеграл действия (2.10) инвариантен. Легко видеть, что (2.11) получается из бесконечно малых преобразований G_r заменой параметров произвольными функциями координат. Таким образом, в каждой точке повторяется алгебра конечной группы Ли G_r, но параметры преобразований меняются от точки к точке. Поскольку преобразования зависят от r функций, а не чисел, будем обозначать группы локальных калибровок $G_{\infty r}$ (бесконечная группа).

Интеграл действия (2.10) не инвариантен относительно $G_{\infty r}$ из-за появления в его вариации неисчезающих производных параметрических функций. Чтобы восстановить инвариантность лагранжиана, достаточно ввести в него взаимодействие с некоторым векторным полем, заменив обычную производную «ковариантной» (или компенсирующей) по следующему правилу:

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - A^a_\mu \underset{a}{I}.$$

Условия инвариантности, аналогичные (2.4), определяют трансформационные свойства вектор-потенциала калибровочного поля $A^a{}_\mu$ относительно группы локальных калибровок:

$$\delta A^a_\mu = f^a_{bc} A^c_\mu \varepsilon^b + \partial_\mu \varepsilon^a.$$

Такой закон преобразования $A^a{}_\mu$ обеспечивает одинаковые (т. е. ковариантные) трансформационные свойства относительно (2.11) для волновой функции ψ и ее ковариантной производной

$$\delta(\nabla_\mu \psi) = \varepsilon^a \underset{a}{I} \nabla_\mu \psi.$$

Зная закон преобразования $A^a{}_\mu$, можно найти лагранжиан свободного калибровочного поля, зависящий от $A^a{}_\mu$ и их первых производных. Простейший релятивистски- и калибровочно-инвариантный лагранжиан имеет вид $L_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu}_a F^a{}_{\mu\nu}$. Произвольный лагранжиан свободного поля $A^a{}_\mu$ сводится к произвольной функции от L_0. Тензор напряженности калибровочного поля, иногда называемый просто «тензор поля», в общем случае имеет вид

$$F^a_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A^a_{\nu]} - \frac{1}{2} f^a_{bc} A^b_{[\mu} A^c_{\nu]}.$$

Он преобразуется относительно $G_{\infty r}$ однородно:

$$\delta F^a_{\mu\nu} = f^a_{bc} F^c_{\mu\nu} \varepsilon^b.$$

Опуская в выражении для $F^a{}_{\mu\nu}$ параметрический индекс с помощью групповой метрики $g_{ab} = f_{am}{}^l f_l{}^m{}_b$, получим тензор поля $F_a{}^{\mu\nu} = g_{ab} F^b{}_{\mu\nu}$. Его закон преобразования

$$\delta F^{\mu\nu}_a = -f^b_{ac} F^{\mu\nu}_b \varepsilon^c.$$

Уравнения свободного калибровочного поля, получаемые при варьировании L_0 по A^a_μ, нелинейны и имеют квазимаксвелловский вид:

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}_a = \overset{0}{J}{}^\mu_a, \qquad (2.12)$$

где $\overset{0}{J}{}^\mu_a = f^b_{ac} F^{\mu\nu}_b A^c_\nu$ — ток самодействия поля.

Учитывая закон преобразования $F^{\mu\nu}_a$, уравнение

(2.12) можно переписать через ковариантную производную:

$$\nabla_\nu F_a^{\mu\nu}=0.$$

Простейшая плотность лагранжиана, инвариантная относительно $G_{\infty r}$ и описывающая взаимодействие частиц с калибровочным полем, выбирается в виде

$$L=\bar{\psi}\,\Gamma^\mu\,\nabla_\mu\psi-1/4F^a_{\mu\nu}F_a^{\mu\nu}. \tag{2.13}$$

Варьированием (2.13) по ψ получим уравнения движения частиц, взаимодействующих с калибровочным полем:

$$\Gamma^\mu\,\nabla_\mu\psi-m\psi=0.$$

Уравнения поля, соответствующие (2.13), примут вид

$$\nabla_\nu F_a^{\mu\nu}=J_a^\mu, \tag{2.14}$$

где $J_a^\mu=\bar{\psi}\,\Gamma^\mu \underset{a}{I}\psi$ — ток частиц (источников). Анализ уравнений (2.14) в 3-мерной форме был дан в [11].

Из уравнения (2.14) следует закон сохранения суммарного тока в виде

$$\partial_\mu\,(J_a^\mu+\overset{0}{J}{}_a^\mu)=0. \tag{2.15}$$

Если $J_a^\mu=0$, из (2.15) следует закон сохранения тока самодействия поля в виде $\partial_\mu\overset{0}{J}{}^a_\mu=0$. Однако в силу нетензорности закона преобразования для $\overset{0}{J}{}_a^\mu$ (пропорционального $A^a{}_\mu$) такой закон сохранения не ковариантен. Ток источников без учета $\overset{0}{J}{}_a^\mu$ не сохраняется:

$$\partial_\mu\,J_a^\mu=f_{ab}^c\,J_c^\mu\,A_\mu^b.$$

Для системы источники + поле имеем точный закон сохранения (2.15). Здесь $\overset{0}{J}{}_a^\mu$ играет ту же роль, что и псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля $t_{\mu\nu}$ в общей теории относительности. Этот псевдотензор добавляется к тензору энергии-импульса источников $T_{\mu\nu}$ для получения закона сохранения в обычной форме, а не в виде ковариантной дивергенции $T^{\mu\nu}_\nu=0$, вытекающей из уравнений Эйнштейна. Как показано в § 10, такие законы сохранения типичны для теорий, инвариантных относительно бесконечных групп (в частности, локальных симметрий). Они являются следствием тождеств Нетер. Их форма не зависит от структуры инвариантного лагранжиана (сильные законы сохранения).

Итак, локализация калибровочной группы симметрии позволяет ввести взаимодействие с векторным полем $A_\mu(x)$ или мультиплетом векторных полей $A_\mu{}^a(x)$. При этом новый постулат инвариантности позволяет ответить на следующие вопросы:

1. Какого типа будет поле $A_\mu(x)$, вводимое на основе требования инвариантности?
2. Как преобразуется это новое поле при преобразованиях группы $G_{\infty r}$?
3. Какова форма взаимодействия между полем $A_\mu(x)$ и исходным полем ψ?
4. Можно ли определить новый лагранжиан $L'(\psi, A)$ по исходному $L(\psi)$?
5. Какие типы уравнений поля $A_\mu(x)$ допустимы?

Группа Лоренца и гравитационное поле. Попытки интерпретировать гравитацию как калибровочное поле занимают особое место, ибо, во-первых, это единственное физическое поле, которое непосредственно связано со структурой пространства—времени, и, во-вторых, в этих попытках затрагивается вопрос о локализации координатных преобразований (а не калибровочных), что приводит к замене однородных пространств типа пространства Минковского неоднородными типа риманова пространства, а в самом общем случае — расслоенными пространствами.

Если группа Ли локализуется, то алгебра ее сохраняется только локально. Точно так же и понятие представления конечной группы Ли G_r становится локальным. Поэтому прежде чем рассматривать группы преобразований координат, необходимо ввести наряду с мировыми координатными сетками, покрывающими все пространство — время, локальные системы координат касательного пространства к V_4, присоединенные в каждой мировой точке. Базисные векторы локальной ортогональной системы координат в общей теории относительности называются реперами. Таким образом, получается касательное расслоение над V_4, когда слоем является касательное пространство в каждой точке. Замена риманова пространства касательным расслоением над V_4 позволяет рассматривать в искривленном пространстве произвольные представления группы Лоренца, в том числе и спинорные. Уравнение геодезической в таком расслоенном пространстве имеет смысл уравнения геодезического отклонения.

Неоднородная группа движений плоского пространства при локализации распадается на две различные по смыслу группы преобразований: однородная подгруппа переходит в локальную симметрию, преобразующую реперный базис в каждой точке, а сдвиги — в группу непрерывных автоморфизмов, отображающих друг на друга локальные пространства (общековариантную группу). Очевидно, что в этом случае размерности слоя и базы совпадают.

Реперы h^i_μ связаны с римановой метрикой $g_{\mu\nu}$ соотношением $g_{ik}h_\mu{}^i h_\nu{}^k = g_{\mu\nu}$, где g_{ik} — метрика пространства Минковского. Метрический тензор $g_{\mu\nu}$ инвариантен относительно лоренцевых вращений реперов: $h_\mu{}^{i'} = L^i{}_k h_\mu{}^k$. Следовательно, можно переформулировать теорию гравитации, взяв за основу вместо метрического тензора реперы $h_\mu{}^i$, причем все уравнения общей теории относительности будут инвариантны относительно лоренцевых преобразований новых переменных. Если в качестве коэффициентов связности использовать коэффициенты вращения Риччи

$$\Delta_{\mu,\,\tau\lambda} = \Gamma_{\lambda,\,\mu\tau} - h^i_\lambda\, \partial_\mu\, h_{i\tau},$$

где $\Gamma_{\lambda,\,\mu\tau}$ — символы Кристоффеля, а $h_\lambda{}^i\partial_\mu h_{i\tau}$ — так называемая связность абсолютного параллелизма, соответствующая плоскому пространству (вообще говоря, с кручением), то лоренцевы вращения реперов могут выбираться независимо в различных точках пространства—времени. Иными словами, уравнения Эйнштейна инвариантны относительно преобразований реперов, принадлежащих локальной однородной группе Лоренца.

Оказывается, что можно, идя обратным путем, т. е. требуя инвариантность лагранжиана относительно локальной группы Лоренца, получить уравнения, описывающие гравитационное поле и частицы в гравитационном поле. Именно таким образом Утияма получил уравнения Эйнштейна.

Независимо от Утиямы трактовка гравитации как калибровочного поля рассматривалась в работе Бродского, Иваненко и Соколика [12], где коэффициенты связности Риччи вводились из требования инвариантности уравнения первого порядка для частиц произвольного спина $\Gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\psi = 0$ относительно локализованной однородной группы Лоренца.

Заметим, что такая интерпретация гравитации — не единственная и ведет, вообще говоря, к неэйнштейновской теории, так как основными полевыми переменными здесь оказываются коэффициенты связности, а не метрический тензор, как у Эйнштейна. Тем самым в геометрической трактовке такому полю тяготения соответствуют пространства аффинной связности, которые могут быть и не наделены метрикой. Если же метрический тензор ввести дополнительно и потребовать его ковариантного постоянства и отсутствия кручения, то коэффициенты связности выражаются через производные от метрического тензора. Тогда в качестве простейшего лагранжиана, описывающего свободное калибровочное поле тяготения, можно взять не квадратичный лагранжиан, как следовало бы из общего метода Утиямы, а линейный по тензору поля (т. е. по тензору кривизны) эйнштейновский лагранжиан. Тогда уравнения поля становятся эйнштейновскими. Именно так и поступает Утияма в своей трактовке гравитации. В общем случае линейная комбинация обычного лагранжиана (скалярной кривизны R) и квадратичного приводит к уравнениям, обобщающим уравнения Эйнштейна, и, кроме того, дает для гравитационного поля уравнения типа уравнений Максвелла. Эйнштейновская теория гравитации как калибровочного поля получается в том случае, если в качестве калибровочной группы рассматривается группа общековариантных преобразований координат, а роль калибровочного поля играет метрический тензор. Об этих трактовках гравитации см. § 7 и 13.

Трактовка гравитационного поля, принадлежащая Утияме [1], состоит в следующем. Рассматриваются две группы преобразований: локальная группа Лоренца, действующая в касательном пространстве, и группа произвольных точечных преобразований в базе. Кроме обычных полевых переменных типа волновых функций частиц в лагранжиан вводятся реперы как 16 новых независимых переменных. Постулируется определенная зависимость между ковариантными производными от мировых и реперных компонент тензоров. Тогда возникает зависимость между калибровочным полем $A_\mu(kl)$, соответствующим локальной группе Лоренца, и реперами. Учитывая соотношение между метрическим тензором и реперами и предполагая, что коэффициенты связности в базе симметричны по нижним индексам, Утияма показывает, что калибровочное поле $A_\mu(kl)$ выражается через символы Кристоффеля и, следовательно, совпадает с гравитационным полем. Тензор напряженности поля $F_{\mu\nu}(kl)$ выражается тогда через тензор римановой кривизны базы. С помощью реперов строится линейный по $F_{\mu\nu}(kl)$ лагранжиан калибровочного поля, совпадающий с обычной скалярной кривизной V_4. Обобщение теории Утиямы было предложено Кибблом [1], который вместо однородной группы Лоренца использовал в качестве калибровочной группы группу Пуанкаре, считая, однако, что локальные сдвиги не влияют на локальные вращения, хотя параметрические функции в обоих случаях зависят от одних и тех же переменных. По отношению к локальным сдвигам тензорные преобразования реперов можно рассматривать как калибровочные. Тогда реперы становятся вторым калибровочным полем и вводятся автоматически. Та же зависимость между ковариантными производными компонент тензоров в слое и в базе, которую постулирует Утияма, но без ограничения на симметрию коэффициентов связности базы, позволяет Кибблу выразить калибровочное поле $A_\mu(kl)$ через символы Кристоффеля и тензор кручения пространства—времени. Тензор кручения предлагается связать со спиновыми свойствами материальных источников гравитационного поля.

Изложим вывод уравнений Эйнштейна в теории Утиямы. Вводится две системы координат: локальная лоренцева система (x-система) и произвольная криволинейная система мировых координат (u-система). Величины, отнесенные к x-системе, обозначаются латинскими индексами, к u-системе — греческими.

Квадрат инвариантной длины бесконечно малого интервала имеет вид

$$ds^2 = g_{ik}\, dx^i\, dx^k = g_{\mu\nu}\, du^\mu\, du^\nu,$$

$$g_{\mu\nu}(u) = \frac{\partial x^i}{\partial u^\mu} \cdot \frac{\partial x^k}{\partial u^\nu}\, g_{ik}.$$

Две группы функций $h^k_\mu(u) = \partial x^k / \partial u^\mu$; $h^\mu_k(u) = \partial u^\mu / \partial x^k$ связывают локальные и мировые величины. При этом выполняются соотношения:

$$g_{ik}\, h^i_\mu\, h^k_\nu = g_{\mu\nu}; \quad g_{\mu\nu}\, h^\mu_i\, h^\nu_k = g_{ik}; \quad h^\mu_k\, h^l_\mu = \delta^l_k;$$

$$g^{ik}\, h^\mu_i\, h^\nu_k = g^{\mu\nu}; \quad g^{\mu\nu}\, h^i_\mu\, h^k_\nu = g^{ik}; \quad h^\mu_k\, h^k_\nu = \delta^\mu_\nu;$$

$$\det |g_{\mu\nu}| = g = -h^2 = -\left|\det\left(h^k_\mu\right)\right|^2.$$

4-вектор h_1^μ, h_2^μ, h_3^μ, h_4^μ (репер) задает в каждой мировой точке локальную лоренцеву систему отсчета (x-систему). Волновые функции Q^A определяются по отношению к этой x-системе. В частности, спиноры вводятся как функции, локальные компоненты которых преобразуются по спинорному представлению группы лоренцевых вращений локальной системы координат. Мировые компоненты волновых функций получаются из локальных с помощью реперов:

$$Q^\mu(u) = h_k^\mu(u)\, Q^k.$$

Интеграл действия записывается в виде

$$I = \int |h|\, L\left(Q^A,\ h_k^\mu Q^A_{,\mu}\right) d^4x.$$

Он оказывается инвариантным по отношению к двум типам преобразований:

1) преобразованию Лоренца

$$\left.\begin{aligned} \delta h_\mu^k &= \varepsilon_l^k\, h_\mu^l; \\ \delta Q^A &= \frac{1}{2} \underset{(kl)}{T}{}_B^A\, Q^B\, \varepsilon^{kl}, \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

где $\underset{(kl)}{T}{}_B^A$ — элемент $(N \times N)$-матрицы представления группы Лоренца; при этом u^μ не изменяются;

2) общему точечному преобразованию

$$u^{\mu\prime} = u^\mu + \lambda^\mu(u), \tag{2.17}$$

где $\lambda^\mu(u)$ — произвольная функция u;

$$\delta h_\mu^k = -\frac{\partial \lambda^\nu}{\partial u^\mu} h_\nu^k; \quad \delta Q^A(u) = Q^{A\prime}(u') - Q^A(u) = 0;$$

$$\delta Q^A{}_{,\mu} = -\left(\frac{\partial \lambda^\nu}{\partial u^\mu}\right) Q^A{}_{,\nu}.$$

Локализация преобразований (2.16) приводит к замене обычной производной ковариантной:

$$\partial_\mu \to \nabla_\mu = \partial_\mu - \frac{1}{2} A_\mu(kl) \underset{(kl)}{T}{}_B^A\, Q^B,$$

где $A_\mu(kl)$ — калибровочное поле. В частности, если Q^B — спинорное поле ψ, то

$$\nabla_\mu \psi = \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} - \frac{i}{4} A_\mu(kl)\, [\gamma_k \gamma^l]\, \psi,$$

где γ^k — обычные матрицы Дирака. Такое определение ковариантной производной спиноров в римановом пространстве предлагалось ранее Фоком и Иваненко [13].

Требование инвариантности по отношению к преобразованиям (2.17) приводит к замене $\nabla_\mu \to h_i^{\ \mu} \nabla_\mu$. Таким образом, реперы в качестве калибровочного поля появляются не в виде дополнительного слагаемого в выражении для производной, а в виде множителя при производной. Такая разница в двух типах калибровочных полей — следствие разницы в их трансформационных свойствах по отношению к соответствующим преобразованиям: поле $A_\mu(kl)$ сдвигается на производную от параметра, а поле h_i^μ умножается на аналогичную производную.

Вариации $A_\mu(kl)$ и h_i^μ при локальных преобразованиях (2.16), (2.17) имеют вид:

$$\delta A_\mu(kl) = f^{kl}_{mn\ pq} A_\mu(pq)\,\varepsilon^{mn} + \partial_\mu \varepsilon^{mn} - \frac{\partial \lambda^\nu}{\partial u^\mu} A_\nu(kl);$$

$$\delta h_i^\mu = h_\mu^l \varepsilon_l^k - \frac{\partial \lambda^\nu}{\partial u^\mu} A_\nu(kl).$$

Тензор поля определяется формулой

$$F_{\mu\nu}(kl) = \frac{\partial A_\nu(kl)}{\partial u^\mu} - \frac{\partial A_\mu(kl)}{\partial u^\nu} -$$

$$- \frac{1}{4} f^{kl}_{ab\ mn} [A_\mu(ab) A_\nu(mn) - A_\nu(ab) A_\mu(mn)] =$$

$$= \frac{\partial A_\nu(kl)}{\partial u^\mu} - \frac{\partial A_\mu(kl)}{\partial u^\nu} + [A_\mu(kb) A_\nu(lb) - A_\nu(kb) A_\mu(lb)].$$

Учитывая соотношение между реперами, коэффициентами Риччи и коэффициентами связности Кристоффеля $\Gamma^\rho_{\nu\mu}$: $: h_l^\rho \dfrac{\partial h_\nu^l}{\partial u^\mu} - A^\rho_{\nu\mu} = \Gamma^\rho_{\nu\mu}$, где $A^\rho_{\nu\mu} = h_k^\rho h_{l\nu} A_\mu\ (kl)$, можно показать, что выполняется соотношение

$$F_{\mu\nu}(kl) = h^{l\lambda} h_\alpha^k R^\alpha_{\lambda\mu\nu},$$

где $R^\alpha_{\lambda\mu\nu}$ — тензор кривизны Римана:

$$R^\alpha_{\lambda\mu\nu} = \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\lambda\mu}}{\partial u^\nu} - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\lambda\nu}}{\partial u^\mu} + \Gamma^\beta_{\lambda\mu} \Gamma^\alpha_{\beta\nu} - \Gamma^\beta_{\lambda\nu} \Gamma^\alpha_{\beta\mu}.$$

Лагранжиан свободного гравитационного поля определяется как $L_0 = hR$, где $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} = h^{\mu}{}_{l}h^{\nu}{}_{k}F_{\mu\nu}(kl)$ — скалярная кривизна.

Варьирование лагранжиана L_0 приводит к уравнениям Эйнштейна в качестве уравнений поля тяготения.

Теория сильных взаимодействий Сакураи. В 1960 г. появилась большая статья Сакураи, в которой предлагалась универсальная теория сильных взаимодействий. Сакураи опирался, во-первых, на вывод Пайса о том, что не существует других точных внутренних свойств симметрии, кроме числа барионов, гиперзаряда и изоспина, и, во-вторых, на локальную калибровочную инвариантность. С каждой из перечисленных величин посредством требования локальной калибровочной инвариантности можно связать некоторое векторное поле. Сакураи утверждал, что трех этих полей достаточно для объяснения существовавшего тогда спектра масс.

Кроме того, теория Сакураи предсказывала образование резонансов и давала ряд красивых следствий и объяснений (в частности, множественность рождения π-мезонов при аннигиляции протона и антипротона, эффект отталкивательной сердцевины и т. д.). Согласно Сакураи, сильные взаимодействия носят векторный характер. Объекты, осуществляющие их, должны быть векторными частицами с массой, равной массе нескольких π-мезонов, и малым временем жизни (резонансами). Однако теория Сакураи не допускала порождения единичных π- и K-мезонов, и связи типа Юкавы оказывались с ее точки зрения чисто феноменологическими.

Онуки и Икеда в 1960 г. и затем Не'еман, Гелл-Манн и Глэшоу (1961 г.) [14], исходя из идей Сакураи, предложили 8-мерную симметрию для сильных взаимодействий. В отличие от теории Сакураи, опиравшейся на три самостоятельные локализованные симметрии: две однопараметрические, как в электродинамике, соответствующие сохранению числа барионов и гиперзаряда, и локализованную группу изотопических вращений, — в новой теории указанные законы сохранения вытекали из одной группы симметрии, а именно из группы SU_3. Эта группа объединяла все барионы (как и мезоны) в одно 8-мерное представление.

Предсказывался ряд новых частиц и большое число правил отбора. Определялась форма связей с потенциалом Юкавы для π-, K- и χ-мезонов. Формула масс, вытекающая из SU_3-симметрии, находилась в хорошем согласии с экспериментом и привела, в частности, к открытию Ω^--резонанса.

Трудности калибровочных теорий. Несохранение токов и массивность полей. Векторный характер слабых взаимодействий (если не говорить о несохранении четности) и приблизительная универсальность их по силе привели к попыткам описать их с помощью векторных полей, связанных с локальной калибровочной инвариантностью. Однако построение теорий слабого и сильного взаимодействий на основе локальной калибровочной инвариантности наталкивается на ряд больших трудностей. Одна из них заключается в том, что некоторые из токов, фигурирующих в теории, не сохраняются. Токи изотопического спина и странности, которые входят в уравнения теории сильных связей, перестают сохраняться, как только учитываются электромагнитные и слабые взаимодействия. Сохранение слабого тока нарушается не только в присутствии электромагнитных полей, но также (если речь идет об аксиально векторной части лагранжиана и части, изменяющей странность) массовыми членами и, вероятно, сильными взаимодействиями. Кроме того, оказалось невозможным просто выразить слабые адронные токи через фундаментальные поля, соответствующие известным стабильным частицам. Поэтому пришлось искать формулировку универсальности слабых взаимодействий, не зависящую от сохраняющихся токов. Такая формулировка была предложена Гелл-Манном. В основе ее лежит постулат об одинаковых алгебраических свойствах мультиплетов зарядов тяжелых и легких частиц. Гипотеза универсальности и гипотеза сохранения векторного тока вместе объясняют наблюдаемое в эксперименте приблизительное совпадение константы мюонного распада и векторной константы связи нейтронного распада.

Другая трудность состоит в следующем. Фотоны не имеют массы (как это и должно быть для квантов в теории, в которой имеет место общая калибровочная инвариантность с калибровочной функцией, зависящей от координат). Векторные же частицы, осуществляющие сильное взаимодействие и слабое (если такие существуют), должны обладать массой. В противном случае сильные и слабые взаимодействия оказались бы дальнодействующими, подобно гравитационному и электромагнитному полям.

Сходство классических калибровочных полей с электромагнитным полем продемонстрировали Икеда и Миячи (1962 г.) [15] и затем Лус [16] (1965 г.), которые получили сферически симметричные решения уравнений Янга—Миллса без источника в лоренцевой калибровке для случая изотопической и SU_3-симметрии. Лус, кроме того, показал, что сферически-симметричные решения уравнений для калибровочного поля с любой внутренней симметрией приводятся всегда к кулонову виду. В самом деле, в общем случае сферически-симметричное решение уравнений Янга—Миллса имеет вид

$$\mathbf{A}_i = (x^i/r)\,\mathbf{f}(r, t) \quad (i = 1, 2, 3); \quad \mathbf{A}_4 = i\mathbf{g}(r, t),$$

или в полярных координатах

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{f}(r, t); \quad \mathbf{A}_\theta = \mathbf{A}_\varphi = 0;$$
$$\mathbf{A}_4 = i\mathbf{g}(r, t).$$

Уравнения Янга—Миллса (2.9) принимают тогда вид

$$\Delta\mathbf{f} - 2\mathbf{f}/r^2 + 2\varepsilon\,[\mathbf{f}\times\mathbf{f}' + \mathbf{g}\times\mathbf{g}' + 2\varepsilon\mathbf{g}\,(\mathbf{f}\times\mathbf{g})] = 0; \tag{2.18}$$

$$\Delta\mathbf{g} + 4\varepsilon\mathbf{f}\times[\mathbf{g}' + \mathbf{f}\times\mathbf{g}] = 0. \tag{2.19}$$

Условия калибровки $\partial_\mu \mathbf{A}_\mu = 0$ переходят в условия

$$\mathbf{f}' + 2\mathbf{f}/r = 0. \tag{2.20}$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r; Δ —оператор Лапласа.

Интегрируя (2.20), получим $\mathbf{f} = \mathbf{a}/r^2$ ($\mathbf{a}$ — константа интегрирования). Тогда (2.18) и (2.19) дают:

$$\mathbf{g}\times[\mathbf{g}' + 2\varepsilon\mathbf{a}\times\mathbf{g}/r^2] = 0; \tag{2.21}$$

$$(r^2\mathbf{g}')' + 4\varepsilon\mathbf{a}\times[\mathbf{g}' + \varepsilon\mathbf{a}\times\mathbf{g}/r^2] = 0, \tag{2.22}$$

$\mathbf{g} = 0$ — тривиальное решение этих уравнений. Пусть $\mathbf{g} \neq 0$. Тогда из (2.21) следует существование такой скалярной функции $\lambda(r)$, что

$$r^2\mathbf{g}' = -2\varepsilon\mathbf{a}\times\mathbf{g} + \lambda\mathbf{g}. \tag{2.23}$$

Подставив (2.23) в (2.22), получим $(\lambda' + \lambda^2/r^2)\mathbf{g} = 0$, откуда $\lambda = k(1 - k/r)^{-1}$ (k — константа интегрирования). Когда $\lambda \neq 0$, (2.23) сводится к уравнению $r^2(\lambda\mathbf{g})' = -2\varepsilon\mathbf{a}\times \times(\lambda\mathbf{g})$. Общее решение этого уравнения:

$$\mathbf{g} = (1 - k/r)\,[\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}\cos(2\varepsilon\,|\mathbf{a}|\,/r) + \bar{\mathbf{c}}\sin(2\varepsilon\,|\mathbf{a}|\,/r)], \tag{2.24}$$

$\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ — константы интегрирования, удовлетворяющие условиям: $\bar{\mathbf{a}}\times\mathbf{a} = 0$; $|\mathbf{a}|\,\bar{\mathbf{c}} = \mathbf{a}\times\bar{\mathbf{b}}$; $|\mathbf{a}|\,\bar{\mathbf{b}} = -\mathbf{a}\times\bar{\mathbf{c}}$. Это значит, что: 1) $\bar{\mathbf{a}} \parallel \mathbf{a}$; 2) $\bar{\mathbf{a}}$, $\bar{\mathbf{b}}$ и $\bar{\mathbf{c}}$ образуют правостороннюю ортогональную систему и 3) $|\bar{\mathbf{b}}| = |\bar{\mathbf{c}}|$.

Когда $\lambda = 0$ (т. е. $k = 0$), общее решение (2.23) дается формулой (2.24), в которой надо положить $k = 0$.

В случае $\mathbf{a}\times\mathbf{g} \neq 0$ решение (2.23) обладает следующими свойствами. При перемещении из одной точки пространства в другую вектор $\mathbf{g}$ «вращается» в групповом пространстве вокруг «оси» $\mathbf{a}$, причем угол φ между $\mathbf{a}$ и $\mathbf{g}$ всюду постоянен. «Угловая скорость» ω этого вращения получается следующим образом. Компонента скорости конца вектора $\mathbf{g}$ в направлении $\mathbf{a}\times\mathbf{g}$, найденная из уравнения (2.23), есть

$$(\mathbf{a}\times\mathbf{g})\cdot\mathbf{g}'/|\mathbf{a}\times\mathbf{g}| = -2\varepsilon|\mathbf{a}\times\mathbf{g}|/r^2 = \\ = -2\varepsilon|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{g}|\cdot(\sin\varphi)/r^2. \tag{2.25}$$

Если разделить это выражение на расстояние конца вектора $\mathbf{g}$ от оси $\mathbf{a}$ (т. е. на $|\mathbf{g}|\sin\varphi$), то получим выражение для угловой скорости ω:

$$\omega = -2\varepsilon|\mathbf{a}|/r^2. \tag{2.26}$$

Частное решение $\mathbf{A}_i = 0$; $\mathbf{A}_4 = \mathrm{i}(\mathbf{c}_1/r + \mathbf{c}_2)$; $\mathbf{c}_1 = (0, 0, c_1)$; $\mathbf{c}_2 = (0, 0, c_2)$; $c_1, c_2 = \mathrm{const}$ назовем *каноническим решением*. Его можно интерпретировать как нейтральное B-поле.

Итак, для B-квантов поля Янга—Миллса имеем каноническое решение:

$$B_i = 0; \quad B_4 = 2\mathrm{i}(\mathbf{c}_1/r + \mathbf{c}_2)\cdot\mathbf{T}.$$

Ему соответствует тензор поля с компонентами

$$\mathcal{F}_{ij} = 0; \quad \mathcal{F}_{i4} = 2\mathrm{i}(x^i/r^2)\,\mathbf{c}_1\cdot\mathbf{T}. \tag{2.27}$$

Общее решение:

$$B_i = 2(x^i/r^3)\,\mathbf{a}\cdot\mathbf{T}; \quad B_4 = 2\mathrm{i}\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{T}, \tag{2.28}$$

где $\mathbf{g}$ определяется формулами (2.24) и (2.25). В этом случае

$$\mathcal{F}_{ij} = 0; \quad \mathcal{F}_{i4} = -2\mathrm{i}\,\lambda\,(x^i/r^3)\,\mathbf{g}\cdot\mathbf{T}. \tag{2.29}$$

Общее решение выбором калибровки может быть приведено к каноническому виду.

Сохраняющиеся интегральные величины удовлетворяют соотношениям

$$4\pi c_1 = -\mathrm{i}\int \mathbf{J}_4\, d^3 x;$$

$$4\pi k(\bar{\mathrm{a}} + \bar{\mathrm{b}}) = \mathrm{i}\int \mathbf{J}_4\, d^3 x.$$

Сферически-симметричное решение для калибровочного поля с SU_3-симметрией, найденное Лусом, аналогично по своим свойствам решению Икеды и Миячи для изотопической инвариантности, приведенному выше. Компоненты вектор-потенциала в решении Луса имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}_r = \mathrm{i}\frac{c^j\,\mathbf{H}_j}{r^2}\ (j = 1,\ 2); \quad \mathbf{A}_\theta = \mathbf{A}_\varphi = 0;\\ &\mathbf{A}_t = \frac{\mathrm{i}\,a}{r}\left[\mathbf{E}_3 \exp \mathrm{i}\beta + \mathbf{E}_{-3}\exp(-\mathrm{i}\beta)\right], \end{aligned}\right\} \tag{2.30}$$

где $\beta = \beta_0 - c^j a_j(3)/r$; $\mathbf{H}_1$, $\mathbf{H}_2$, $\mathbf{E}_3$, $\mathbf{E}_{-3}$ — генераторы SU_3; $\mathbf{H}_1 = (\sqrt{3}/3)\mathbf{I}_3$; $\mathbf{H}_2 = (1/2)\mathbf{Y}$. Корневой вектор $a^j(3) = (-\sqrt{3}/6,\ ^1/_2)$ принадлежит $\mathbf{E}_3$; c^j, a — вещественные константы,

$$\mathbf{F}_{rt} = -(\mathrm{i}\,a/r^2)\left[\mathbf{E}_3 \exp \mathrm{i}\,\beta + \mathbf{E}_{-3}\exp(-\mathrm{i}\,\beta)\right]. \tag{2.31}$$

Как и в случае изотопической симметрии, решение уравнений (2.30), (2.31) приводится к кулонову виду с помощью преобразования $S = \exp(\mathrm{i}\cdot c^j\mathrm{H}_j/r)$ при условии $c^j a_j(3) = 0$, которое означает пропорциональность $c^j\mathrm{H}_j$ выражению $\mathbf{Q} = \mathbf{I}_3 + {}^1/_2\mathbf{Y}$, т. е. $\mathbf{A}_r$ пропорционально электрическому заряду $\mathbf{Q}$.

При изменении r, как и в решении Икеды и Миячи, вектор $r\mathbf{A}_t$ вращается в групповом пространстве. В результате при больших r $\beta \to \beta_0$ и для $r \gg c^j a_j$ решение практически кулоновского типа.

Если положить скорость света равной единице ($c = 1$), коэффициенты в формулах можно выбрать так, чтобы матричные элементы $\mathbf{A}_r$ имели размерность $1/l$, где l — длина, а генераторы группы, корневые векторы и a были безразмерны, $c^j \sim l$. Тогда $c^j a_j \sim l$, где l определяет размеры области, внутри которой поле короткодействующее, а снаружи быстро стремится к кулонову виду. Таким образом, если рассматривается калибровочное поле одной точечной частицы, оно не отличается принципиально от кулоновского поля, и нелинейность уравнений (2.14) себя не проявляет.

Однако для двух точечных частиц решение уже не может быть приведено к кулонову виду.

Калибровочные поля и принцип эквивалентности. Кулоновский дальнодействующий характер классических безмассовых калибровочных полей затрудняет их физическую интерпретацию, приводя к противоречию с принципом эквивалентности. Действительно, рассмотрим простой пример, приведенный Ли и Янгом (1955 г., [1]). Сохранению барионного числа соответствует калибровочная инвариантность типа калибровочной инвариантности в электродинамике. Следовательно, должно существовать калибровочное поле типа электромагнитного, связывающее «тяжелые» элементарные частицы. Ему соответствует константа взаимодействия η, которая одновременно играет роль «тяжелочастичного заряда». Нуклоны при этом должны иметь тяжелочастичный заряд $+\eta$, антинуклоны — заряд $-\eta$. Поэтому между двумя массивными телами должны появляться силы типа кулоновского отталкивания, поскольку оба они состоят из вещества, а не из антивещества. Полная сила с учетом гравитационного притяжения будет равна

$$\text{Сила} = -G(M_1 M_2/R^2) + \eta^2 (A_1 A_2/R^2).$$

Здесь M_1, M_2, A_1, A_2 — инертные массы и массовые числа соответственно двух рассматриваемых тел; G — гравитационная постоянная.

Коэффициент упаковки для различных атомов ведет себя таким образом, что отношение M/A изменяется от одного элемента к другому на величину порядка 10^{-3}. Это значит, что отношение наблюдаемой массы к инертной должно изменяться от элемента к элементу как $10^{-3}\eta^2/G(M_p)^2$, где M_p — масса протона. Эксперименты Этвеша по проверке принципа эквивалентности показали, что подобное изменение должно быть менее 10^{-8}. Отсюда $\eta^2/G(M_p)^2 < 10^{-5}$. Иными словами, такое калибровочное поле оказывается слабее гравитационного, хотя начали мы свои рассуждения с того, что вводили поле, соответствующее сильным (ядерным) взаимодействиям элементарных частиц. По этой причине в настоящее время, как правило, используют массивные калибровочные поля, которые описываются видоизмененными уравнениями с массой

$$\nabla_\mu F_a^{\mu\nu} - m^2 A_a^\mu = J_a^\mu. \tag{2.32}$$

Уравнение (2.32) отличается от (2.14) присутствием «введенного руками» массового члена $m^2 A_a^\mu$. Этот член нарушает локальную калибровочную инвариантность уравнений (2.32) и оставляет только обычную калибровочную инвариантность с постоянными параметрами преобразований. Для массивных калибровочных полей строится квантовая теория.

Вопрос о массе векторных полей обсуждался многими авторами и до сих пор остается открытым. Правда, Швингер заметил, что если связь с векторным током достаточно сильна, то локальная калибровочная инвариантность векторного поля не означает с необходимостью равенства нулю массы соответствующих частиц. Для полей, порождаемых неабелевыми калибровочными группами, имеется возможность получить массу векторных частиц за счет нелинейности уравнений поля. Впрочем, как говорит Швингер, в природе соответствие между полями и наблюдаемыми частицами может быть довольно отдаленным, в противоположность обычно предполагаемому непосредственному соответствию.

Масса в геометрической теории калибровочных полей. Геометризация калибровочных полей реализует идею Швингера о том, что внутренние свойства симметрии должны проявлять себя динамически.

Предположим, что на самом деле физическое пространство—время имеет размерность гораздо большую четырех. Тогда обычное 4-мерное искривленное пространство—время можно рассматривать как поверхность, вложенную в плоское пространство большей размерности V_N. В этом случае дополнительные размерности появляются как результат искривления физического 4-мерного пространства—времени на малых расстояниях. Если пространство V_N локально разбить на 4-мерное пространство — время V_4 и ортогональное к нему пространство V_{N-4}, то внутренние симметрии элементарных частиц превратятся в симметрии, действующие в V_{N-4} пространстве. Они оставляют инвариантным малый объем физического пространства ΔV_4. Взаимодействия осуществляются через калибровочные поля в V_N. Их радиус действия (а следовательно, и масса) определяется размерами инвариантного пространства ΔV_4, т. е. пределами применимости системы координат, в которой V_{N-4} ортогонально к ΔV_4. На этом пути, возможно, удастся связать такие далекие вещи, как космология и теория элементарных частиц.

Векторная доминантность и эксперимент. Фундаментальные идеи о калибровочных полях, выдвинутые Янгом и Миллсом, несмотря на целый ряд трудностей и отсутствие в квантовой теории точной математической формулировки, привели к многочисленным качественным предсказаниям, удивительно хорошо согласующимся с экспериментом. Можно сказать, что в настоящее время универсальные сильные взаимодействия, осуществляемые векторными мезонами, составляют неотъемлемую часть представлений о сильных (ядерных) взаимодействиях элементарных частиц (модели векторной и тензорной доминантностей) [14].

В последние несколько лет стал особенно актуален вопрос о влиянии различных по силе взаимодействий друг на друга, поскольку в некоторых чисто электромагнитных явлениях был достигнут экспериментально «естественный предел электродинамики Максвелла—Дирака». Этот предел возникает при больших передаваемых импульсах, а также в области малых передаваемых импульсов, но рассматриваемых на высоком уровне точности, когда в электромагнитных процессах начинают сказываться сильные (ядерные) взаимодействия. Однако учет влияния сильных взаимодействий на электромагнитные явления до последнего времени представлялся очень проблематичным в связи с отсутствием теории сильных взаимодействий.

Идеи об универсальности сильных взаимодействий, подобной универсальности электромагнитных и гравитационных взаимодействий, а также о выделенной роли векторных сохраняющихся токов дают возможность найти общий подход к описанию электромагнитных свойств тяжелых частиц (адронов) и отклонений от электродинамики, обусловленных сильными взаимодействиями. В свою очередь, трактовка гравитации как калибровочного поля и применение к ней модели тензорной доминантности позволяют учесть вклады гравитационного поля в сильные взаимодействия.

Универсальные сильные взаимодействия и векторная доминантность. В квантовой теории поля универсальность электромагнитных взаимодействий (т. е. универсальность электрического заряда как константы связи с электромагнитным полем) формулируется как соотношение между амплитудами, характеризующими испускание фотона γ очень малой частоты. Например, для протона p и позитрона e^+ имеем:

$$\frac{A\,(e^+ \leftarrow \rightarrow e^+ + \gamma)}{A\,(p \leftarrow \rightarrow p + \gamma)} = \frac{Q\,(e^+)}{Q\,(p)} = 1,$$

где Q — электрический заряд. Это соотношение выполняется только в пределе $q^2 \to 0$, когда передаваемый фотоном импульс стремится к нулю. При больших передаваемых импульсах соответствующие амплитуды (форм-факторы) различаются на несколько порядков величины.

Совершенно аналогично универсальность сильных взаимодействий ρ-мезона можно сформулировать в виде равенства

$$\frac{A\,(A \leftarrow \rightarrow A + \rho^0)}{A\,(B \leftarrow \rightarrow B + \rho^0)} = \frac{T_3^{(A)}}{T_3^{(B)}}, \tag{2.33}$$

где T_3^i — третьи компоненты изотопических спинов; A и B — произвольные частицы, несущие изоспин. Так же, как и в случае фотонов, мы должны требовать равенства матричных элементов при $q^2 \to 0$. Однако ρ-мезон в отличие от фотона обладает массой. Поэтому проверить данное соотношение экспериментально можно только в том случае, если соответствующие форм-факторы очень медленно меняются или если этот закон изменения известен и можно провести необходимую экстраполяцию.

К соотношению (2.33) приводит также постулат о тождестве токов и полей, предложенный Кроллем, Ли и Зумино [14]:

$$j_\mu^a(x) = \frac{m_\rho^2}{f_\rho}\,\rho_\mu^a(x), \tag{2.34}$$

где $j_\mu{}^a(x)$ — плотность изовекторного электромагнитного тока; $\rho_\mu\ (x)$ — оператор ρ-мезонного поля.

Формулировка универсальности в квантовой теории сильных взаимодействий тесно связана с моделью векторной доминантности, т. е. с предположением о том, что основной вклад в сильные взаимодействия элементарных частиц вносят обмены одним векторным мезоном. Иначе говоря, векторная доминантность в сильных взаимодействиях означает преобладание диаграмм типа рис. 2. В качестве следствия она приводит к универсальности векторных взаимодействий. Например, для ρ-мезона $f_{\rho\pi\pi} = f_{\rho NN} = f_\rho =$

$=$ (константа взаимодействия ρ-мезона с любой частицей, несущей изоспин). Кроме того, появляется эффективная константа связи фотона с векторным мезоном, которая для ρ-мезона имеет вид

$$g_{\gamma\rho} = e\,\frac{m_\rho^2}{f_\rho},$$

где m_ρ — масса ρ-мезона.

Появление диаграмм типа рис. 2 с точки зрения квантовой электродинамики означает возможность перехода фотона в векторный мезон («фотон обрастает массой»), кото-

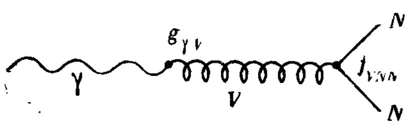

Рис. 2

рый затем распадается на электрон-позитронную (или мюонную) пару, а также возможность образования векторных мезонов при столкновении электрон—позитрон очень высокой энергии (на встречных пучках):

$$\rho \rightleftarrows e^+ + e^-.$$

Кроме трех ρ-мезонов (ρ^+, ρ^-, ρ^0), образующих изовектор, в соответствии с SU_3-симметрией сильных взаимодействий имеется два изоскалярных (т. е. лишенных изоспина) векторных мезона ω и φ, для которых возможны аналогичные процессы:

$$\omega \rightleftarrows e^+ + e^-,$$

$$\varphi \rightleftarrows e^+ + e^-.$$

Пропорциональность электрического заряда и константы связи векторных мезонов с другими частицами дает возможность находить соотношения между матричными элементами процессов $\gamma + A \to B$ и $\rho(q^2 = 0) + A \to B$, где A и B — произвольные частицы. Иными словами, сильные взаимодействия, протекающие с участием векторных мезонов, как бы воспроизводят аналогичные электромагнитные процессы (γ-квант просто «заменяется» ρ-мезоном). Примером подобного рода может служить также связь между реакциями:

$$\omega \to \pi^0 + \gamma \leftarrow\to \omega \to \pi + \rho;$$

$$\gamma + N \to \pi + N \leftarrow\to \pi + N \to \rho(\omega,\ \varphi) + N;$$

$$\gamma + p \to \rho^0 + p \leftarrow\to \rho^0 + p \to \rho^0 + p.$$

Для проверки идеи универсальности сравнивают значения констант связи, полученные различными методами. Как видно из приведенной ниже таблицы, значения константы связи для ρ-мезонов, вычисленные в разных процессах, совпадают между собой с хорошей степенью точности.

Способ определения	g
1. $\dfrac{\sigma_t^2(\gamma p)}{(d\sigma/dt)_{\gamma p\to\rho^0 p}}$	2,0±0,4
2. Форм-фактор π-мезона	2,12±0,16
3. $\gamma p\to\pi^+ n$, $\gamma n\to\pi^- p$ от 3 до 8 *Гэв*	1,8±0,4
4. $\dfrac{\Gamma_{\omega\to\pi\gamma}}{\Gamma_{\omega\to 3\pi}}$	2,6±0,4
5. $\dfrac{(d\sigma/dt)_{\gamma p\to\pi^0 p}}{(d\sigma/dt)_{\pi N\to\rho_\perp N}}$	~2
6. $\dfrac{(d\sigma/dt)_{\gamma p\to\pi^+ n}}{(d\sigma/dt)_{\pi^- p\to\rho_\perp^0 n}}$	1,8

Заметим, что расхождения между предсказаниями модели векторной доминантности и экспериментом следует скорее отнести к ее приближенному характеру, чем к идее универсальности, которая за ней стоит. При сопоставлении с экспериментом вопрос о выборе модели, адекватно реализующей какой-либо физический принцип, всегда неоднозначен и сложен.

Сильная гравитация. Речь идет об учете вклада гравитационного поля в сильные взаимодействия элементарных частиц. Гравитационное поле рассматривается как калибровочное, соответствующее вейлевским преобразованиям координат (скейлинг-симметрия): $x^{\mu\prime} = \lambda(x)x^{\mu}$. Легко видеть, что эти преобразования образуют локальную абелеву калибровочную группу и в соответствии с общей идеологией приводят к существованию калибровочного поля. Источником такого поля считается след тензора энергии-импульса сильно взаимодействующих тяжелых частиц (адронов), который заменяется (доминируется) скалярной частицей—квантом калибровочного поля. Другой вариант учета гравитации в сильных взаимодействиях — тензорная доминантность или введение калибровочного тензорного поля (переносчики — f- и f'-мезоны, имеющие спин 2). Тензорная доминантность требует, чтобы гравитационное поле взаимодействовало не непосредственно с феноменологическими полями адронов, а через промежуточное адронное поле спина 2, с которым оно взаимодействует билинейно. Источником тензорного мезонного поля считается тензор энергии-импульса адронов. Поэтому такое поле должно соответствовать эйнштейновской гравитации.

Как показывает эксперимент, скейлинг-симметрия приближенно справедлива для взаимодействий при очень высоких энергиях и выполняется тем лучше, чем выше энергия [17].

ЛИТЕРАТУРА

1. Сборник переводов статей «Элементарные частицы и компенсирующие поля». Под ред. Д. Д. Иваненко. М., «Мир», 1964.
2. Эддингтон А. Теорня относительности. Л.—М., ГТТИ, 1934.
3. Эйнштейн А. Неэвклидова геометрия и физика. В сб. «Эйнштейн и развитие физико-математической мысли». М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. Коноплева Н. П. «Научная мысль». М., Изд. АПН, № 5 (1971).
5. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. Проблема тождества и прннцип относительности. Эйнштейновский сборник, 1967. М., «Наука», 1967.
6. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. Возможиое и действительиое в теории поля и их связь с общим принципом относительности. В сб. «Простраиство и время в современиой физике», Киев, «Наукова думка», 1968.
7. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. Симметрии и типы физических теорий. «Вопросы философии», № 1 (1972).
8. Фок В. А. Применение идей Лобачевского в физике. М., ГТТИ, 1950.
9. Соколик Г. А. Групповые методы в теории элемеитарных частиц. М., Атомиздат, 1965.
10. Weinberg S. Phys. Rev., 177, 2604, 1969.

11. Иосифьян А. Г., Станюкович К. П., Соколик Г. А. «Докл. АН СССР», **159**, 1261 (1964).
12. Бродский А. М., Иваненко Д. Д., Соколик Г. А. «Экспериментальная и теоретическая физика», **41**, 1307 (1961).
13. Fock V., Ivanenko D. Compt. rend., **188**, 1470 (1929).
14. Сборник переводов статей «Электромагнитные взаимодействия и структура элементарных частиц». Под ред. А. М. Балдина. М., 1969.
15. Ikeda M., Miyachi Y. Progr. Theor. Phys., **27**, 474 (1962).
16. Loos H. G. Nucl. Phys., **72**, 677 (1965).
17. Zumino B. Effective lagrangians and broken symmetries. Preprint.

Глава II

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

§ 3. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ И ЕДИНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ КАРТИНА ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

В этой главе обсуждаются вопросы классической теории калибровочных полей. Показано, что содержание классической теории калибровочных полей может быть сделано чисто геометрическим и сведено к теории связностей главного расслоенного пространства над пространством — временем, причем роль структурной группы играет конечная калибровочная группа.

Цель всякого геометрического подхода к взаимодействиям состоит в нахождении такого пространства, в котором изучаемые поля стали бы стандартными геометрическими величинами. Это позволяет с единой точки зрения рассмотреть целый ряд на первый взгляд не связанных друг с другом теорий. В данном случае речь идет о поисках единой и последовательной точки зрения на различные взаимодействия элементарных частиц: сильные, слабые, электромагнитные и гравитационные.

В настоящее время существует лишь одна геометрическая теория физического поля — это общая теория относительности Эйнштейна и ее модификации. Но оказывается, что все поля, которые можно рассматривать как калибровочные, допускают чисто геометрическое описание. Чтобы это осуществить, нужно перейти к более общей геометрии, чем риманова, и к более общему представлению о пространстве.

Калибровочные поля реализуют геометрию расслоенных пространств. Это значит, что, подобно тому как в общей теории относительности уравнения движения нейтрального массивного тела под действием гравитационных сил можно представить как свободные уравнения геодезической в некотором 4-мерном римановом многообразии, уравнения движения частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, можно рассматривать как свободные уравнения в некотором расслоенном пространстве. При этом векторы-потенциалы калибровочного поля $A^a{}_\mu$ играют роль коэффициентов связности расслоенного пространства, а тензор напряженности $F^a_{\mu\nu}$ — тензора кривизны этого пространства (подобно коэффициенту связности $\Gamma^\tau_{\mu\lambda}$ и тензору кривизны Римана в римановом пространстве). Пространство—время V_4 играет роль базы рассматриваемого расслоенного пространства. Слоем является групповое пространство калибровочной группы.

Расслоенное пространство проще всего можно представить себе как совокупность двух пространств, связанных между собой специальным отображением. Именно одно из двух пространств выбирается в качестве базы расслоенного пространства, и в каждую точку базы проектируется экземпляр второго пространства (слой). Таким образом, расслоенное пространство можно рассматривать и как обычное n-мерное пространство (базу), точки которого заменены некоторыми m-мерными пространствами F_x со своей, вообще говоря, геометрией. Предполагается, что в каждом слое F_x действует группа G_r, не затрагивая базы. База представляет собой многообразие, инвариантное относительно действия группы G_r. Простым примером расслоенного пространства является многообразие траекторий какой-либо интразитивной группы (например, одномерное многообразие окружностей на плоскости, рассматриваемых как траектории или орбиты группы вращений). В этом случае точки базы упорядочиваются по инвариантам интразитивной группы. Слоем является траектория группы, на которой группа действует транзитивно*.

Риманово пространство общей теории относительности тоже можно рассматривать как расслоенное, если считать слоем касательное пространство к V_4, т. е. использовать касательное расслоение.

Таким образом, гравитация не только как физическое поле в плоском пространстве, но и в геометрической трактовке становится в один ряд с другими полями. При этом геометрический подход позволяет строить классическую теорию всех калибровочных полей по единому принципу, меняя только G_r, причем охватывает сильные и слабые взаимодействия, электромагнитное поле и гравитацию. Каждому виду

* Транзитивность означает, что преобразованиями, принадлежащими данной группе, любую точку пространства можно перевести в любую другую. Интранзитивность означает отсутствие такой возможности, если, например, некоторые точки группа оставляет неподвижными (центр вращения).

взаимодействия соответствует в этом случае своя группа симметрии (локальная калибровочная группа). Тем самым образуется иерархия взаимодействий, в которой переход к более сильному взаимодействию сопровождается расширением группы симметрии, а ослабление взаимодействия связано с нарушением симметрии и сужением калибровочной группы. Однако, как показано в § 6, такая классификация взаимодействий осуществима лишь до некоторой степени, поскольку имеется зависимость между пространственно-временными свойствами симметрий решений уравнений поля и структурой группы голономии, являющейся подгруппой калибровочной группы. С одной стороны, это говорит о зависимости между внутренними и внешними симметриями, а с другой — о неоднозначности связи между типом взаимодействия и внутренней симметрией, поскольку, например, сферически-симметричным потенциалом могут обладать различные поля, в то время как всем сферически-симметричным решениям отвечает абелева группа голономии.

Для всех видов калибровочных полей как следствие универсальности подхода возникают уравнения одного и того же типа, известные в случае изотопической симметрии как уравнения Янга—Миллса. Эти уравнения напоминают уравнения Максвелла, но сильно нелинейны, так как учитывают «самодействие» полей. Иными словами, каждое калибровочное поле может влиять не только на частицы и другие внешние по отношению к нему объекты, но и само на себя. Величина такого самодействия поля определяется структурой соответствующей ему калибровочной группы. Для электромагнитного поля калибровочная группа очень простая (однопараметрическая), и поэтому соответствующие ему уравнения совпадают с уравнениями Максвелла (самодействие отсутствует). Вследствие нелинейности уравнений калибровочных полей не все их классические решения могут быть истолкованы квантовомеханически как решения, описывающие элементарные частицы. Подобный переход, возможность которого предполагается принципом соответствия, на самом деле осуществим лишь для специальных конфигураций полей, обладающих плоской асимптотикой. В связи с этим становятся важными геометрические методы классификации решений нелинейных классических уравнений, которые применимы к произвольным конфигурациям полей. Один из них (см. § 6) использует понятие группы голономии расслоенного пространства.

Гравитационное поле, рассматриваемое как калибровочное, может соответствовать нескольким группам симметрии: 1) общековариантной; 2) локальной группе Лоренца; 3) группе масштабных преобразований интервала. В первом случае его свойства определяются свойствами метрического тензора, получается обычная теория Эйнштейна; во втором случае — свойствами коэффициентов связности Риччи. В третьем случае источником поля считается след тензора энергии-импульса, а переносчиками — скалярные частицы. Следовательно, подход с точки зрения калибровочных симметрий приводит к более общей теории гравитации, чем эйнштейновская. Это проявляется в двух моментах: во-первых, коэффициенты связности могут существовать и тогда, когда метрики нет. Если же метрика введена, коэффициенты связности не обязательно выражаются только через производные от нее, но могут быть более общими (например, учитывать кручение и отличие от нуля ковариантной производной метрики). Второй момент заключается в появлении уравнений более общих, чем уравнения Эйнштейна, но содержащих эти уравнения как свой простой предельный случай. Такая обобщенная теория гравитации, в которой роль полевых переменных играют коэффициенты связности, по своей структуре подобна максвелловской электродинамике (§ 7).

Вопрос о связи между различными калибровочными полями и гравитацией, или структурой V_4 (§ 7), имеет два аспекта: 1) учет влияния негравитационных взаимодействий на геометрию пространства—времени; 2) интерпретация внутренних симметрий и массы калибровочных полей как эффективного проявления искривленности пространства—времени на малых расстояниях. Первый аспект геометрически сводится к свойствам проекции пространства, в котором действует калибровочная группа, на касательное пространство к V_4. Таким образом могут быть получены многие известные интерпретации электромагнитного поля, использующие неевклидовость 4-мерного пространства—времени, в частности интерпретация электромагнитного поля в плоском пространстве с кручением. Второй аспект связан со свойствами вложимости риманова пространства—времени V_4 в плоское пространство большей размерности. Дополнительные размерности, появляющиеся при этом, становятся ареной действия внутренних симметрий. Взаимодействие между гравитационным полем и другими калибровочными полями можно учесть и непосредственно в рамках геометрии расслоенного пространства, если предположить, что пробная частица движется по геодезической в этом пространстве. Тогда в уравнениях движения частицы появляется добавочный член типа силы Лоренца, описывающий отклонение от движения по обычной геодезической в римановом 4-мерном пространстве—времени, вызванное влиянием калибровочного поля (§ 7).

Определение гравитационных волн в общей теории относительности предполагает наличие точной математической формулировки волнового оператора и волновых пространств. Однако в отличие от плоского (евклидова) пространства в римановом пространстве невозможно построить такой оператор, который обладал бы всеми свойствами оператора Даламбера плоского пространства. Прежде всего, вид волнового оператора начинает зависеть от тензорной размерности и свойств симметрии функций, к которым он применяется. Если ограничиться требованиями правильных топологических свойств и наличия решений в виде гармонических функций на произвольном многообразии, можно построить волновой оператор в римановом пространстве, обобщающий даламбертиан. Но такой оператор (топологический лапласиан де Рама) определен только для полностью антисимметричных тензоров (форм). Для тензоров со смешанной симметрией типа тензора кривизны и тем более для симметричных тензоров типа метрики топологический лапласиан в римановом пространстве не определяется. Однако интерпретация тензора кривизны и тензоров других калибровочных полей в терминах расслоенного пространства позволяет сформулировать волновой оператор и для этих величин. Тем самым появляется инвариантная формулировка гравитационных волн (§ 7).

Понятие волновых пространств оказывается также тесно связанным со свойствами системы уравнений, получающейся для тензора кривизны при интерпретации поля тяготения как калибровочного, соответствующего локальной группе Лоренца. Эта система уравнений содержит уравнения максвелловского типа для тензора кривизны и уравнения, обобщающие эйнштейновские. Она допускает решения, описывающие пространства с гравитационными волнами.

Материал главы расположен следующим образом. Вначале (§ 4) приводятся необходимые сведения из дифференциальной геометрии и теории связностей на расслоенных пространствах (метод внешних форм, уравнения структуры пространства). Затем обсуждается геометрическая интерпретация калибровочных полей как связностей на главном расслоенном пространстве над V_4 со структурной группой калибровок (§ 5). В § 6 вводится понятие группы голономии расслоенного пространства (подгруппы калибровочной группы), и с помощью его анализируются классы решений классических уравнений Янга—Миллса и вопрос об иерархии взаимодействий. Кроме того, показано, что имеется зависимость между пространственно-временной симметрией решений уравнений калибровочного поля и структурой соответствующей группы голономии. § 7 посвящен различным вариантам учета взаимодействия гравитационного поля, определяющего геометрию пространства—времени, и других калибровочных полей. В частности, с новой точки зрения рассматриваются 4-мерные и 5-мерные геометрические теории, объединяющие гравитационное и электромагнитное поля (масштабная инвариантность Вейля, геометродинамика Райнича—Уилера—Мизнера и 5-оптика Калузы—Клейна—Румера).

§ 4. ВНЕШНИЕ ФОРМЫ НА МНОГООБРАЗИИ И УРАВНЕНИЯ СТРУКТУРЫ ПРОСТРАНСТВА

Электродинамика Максвелла и внешние формы. Для установления количественной формы физических законов обычно пользуются тензорным анализом. Однако тензорный анализ требует введения несингулярных координатных систем, в которых могут быть заданы компоненты векторов и тензоров. В то же время, согласно определению дифференцируемого многообразия, одной несингулярной координатной системы недостаточно для того, чтобы покрыть многообразие, не эквивалентное топологически открытому множеству в евклидовом пространстве. Поэтому, например, в произвольном дифференцируемом многообразии невозможно описать такое поле, как электромагнитное, задав его компоненты $F_{\mu\nu}$ в какой-либо одной конкретной системе координат. Если же компоненты использовать, то их следует задать по отношению к координатам нескольких координатных систем (или локальных карт), покрывающих в совокупности все многообразие. В каждой точке окрестности существует значительная свобода выбора координатных систем. Таким образом, компоненты напряженности электромагнитного поля в различных координатных системах сами по себе не так существенны, как понятие, к которому можно прийти, абстрагируясь от них: внутреннее значение F напряженности поля*. Чтобы пояснить смысл этого термина, рассмотрим векторы на многообразии. Утверждение, что вектор** **v** известен, означает, что в случае необходимости можно задать его компоненты в любой несингулярной системе координат. Связь между вектором **v** и его компонентами выражается формулой

$$\mathbf{v} = v_m \mathbf{e}^m. \tag{4.1}$$

Компоненты v_m зависят от выбора векторов $\mathbf{e}^m$ базиса системы координат. Простейший базис составляется из векторов градиента координатных функций dx^m:

$$\mathbf{v} = v_m \, dx^m. \tag{4.2}$$

Ковариантные векторы являются линейными комбинациями дифференциалов координат и называются дифференциальными формами 1-го ранга, 1-формами или пфаффовыми формами [1].

Вместо того чтобы в качестве базисных векторов использовать дифференциалы координат, можно взять произвольный набор n линейно независимых векторов ω^α (здесь индекс означает номер вектора, а не его компоненту). По отношению к этому набору базисных векторов компоненты вектора **v** определяются из разложения

$$\mathbf{v} = v_\alpha \, \omega^\alpha. \tag{4.3}$$

Компоненты вектора-градиента в таком базисе называются пфаффовыми производными по отношению к ω^α : $\operatorname{grad} f = f_\alpha \, \omega^\alpha$. Иногда набор n векторов ω^α называют неголономным базисом, в отличие от голономного базиса, составленного из первых дифференциалов координат.

Для описания электромагнитного поля необходимо использовать формы более высокого ранга или 2-формы. Простейшую 2-форму, α, можно представить в виде внешнего произведения двух 1-форм ($\mathbf{u} = u_\alpha \omega^\alpha$ и $\mathbf{v} = v_\alpha \omega^\alpha$):

$$\alpha = \mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = {}^1/_2 \, (u_\alpha v_\beta - u_\beta v_\alpha) \, \omega^\alpha \wedge \omega^\beta = \\ = {}^1/_2 \alpha_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \wedge dx^\beta. \tag{4.4}$$

---

* Внутреннее значение возникает при переходе к бескоординатной записи полей на многообразии через p-формы. Оно не зависит от выбора системы координат.

** Точнее, ковариантный вектор.

Операция внешнего произведения $\wedge$ обобщает векторное произведение на случай умножения векторов и антисимметричных тензоров любого ранга таким образом, что после умножения снова получаются антисимметричные тензоры. Внешнее произведение $\wedge$ определяется требованиями: 1) ассоциативности; 2) дистрибутивности, а для произведения двух векторов — также антикоммутативности, т. е. $\mathbf{u} \wedge \mathbf{v} = -\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}$. В частности, $\mathbf{u} \wedge \mathbf{u} = 0$.

Внешнее произведение p векторов или линейная комбинация этих векторов образует p-форму. Если каждый вектор выражен через ω^{α}, p-форма может быть записана в виде

$$\mathbf{a} = \sum_{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_p} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \ldots \wedge \omega^{\alpha_p} =$$

$$= (p!)^{-1} a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p} \omega^{\alpha_1} \wedge \omega^{\alpha_2} \ldots \wedge \omega^{\alpha_p}. \qquad (4.5)$$

Тензорные компоненты представляют собой коэффициенты p-формы (в выражении (4.5) — $a_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_p}$). На многообразии p-формы, в отличие от тензорных коэффициентов, могут быть выбраны инвариантным образом. Инвариантным же образом можно определить дифференцирование p-форм (внешнее дифференцирование).

Оператор внешнего дифференцирования D в применении к скалярной функции (0-форме) дает вектор (1-форму). Для p-форм более высокого ранга (4.5) эта операция обобщается с помощью определения [1]:

$$D\mathbf{a} = (p!)^{-1} da_{\alpha_1 \ldots \alpha_p} \wedge dx^{\alpha_1} \wedge \ldots \wedge dx^{\alpha_p}.$$

В тензорных компонентах

$$(Da)_{\alpha_1 \ldots \alpha_{p+1}} = \sum (-1)^P \frac{\partial a_{\beta_2 \ldots \beta_{p+1}}}{\partial x^{\beta_1}},$$

где P равно 0 или $+1$, в зависимости от того, какую подстановку индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_{p+1}$ образуют индексы $\beta_1, \ldots, \beta_{p+1}$ — четную или нечетную.

Операция D, или *внешняя производная*, представляет собой антисимметричное дифференцирование, обобщающее обычную операцию взятия ротора от вектора. Она линейна: $D(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = D\mathbf{a}_1 + D\mathbf{a}_2$. В применении к произведению, в котором первый сомножитель является p-формой, она дает

$$D(\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}) = (D\mathbf{a}) \wedge \mathbf{b} + (-1)^p \mathbf{a} \wedge D\mathbf{b}.$$

Повторное применение внешнего дифференцирования дает нуль:

$$D(D\mathrm{a}) = 0.$$

Уравнения Максвелла можно рассматривать как уравнения для коэффициентов $F_{\mu\nu}$ и $^*F_{\mu\nu}$ (дуально-сопряженный тензор) двух 2-форм [2]:

$$\mathrm{f} = \frac{1}{2} F_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}; \tag{4.6}$$

$$^*\mathrm{f} = \frac{1}{2} {}^*F_{\mu\nu}\, dx^{\mu} \wedge dx^{\nu}. \tag{4.7}$$

Внешняя производная от формы (4.6) имеет вид

$$D\mathrm{f} = \frac{1}{2} (\partial F_{\alpha\beta}/\partial x^{\gamma})\, dx^{\gamma} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta} =$$

$$= \frac{1}{6} (\partial F_{\alpha\beta}/\partial x^{\gamma} + \partial F_{\beta\gamma}/\partial x^{\alpha} + \partial F_{\gamma\alpha}/\partial x^{\beta})\, dx^{\gamma} \wedge dx^{\alpha} \wedge dx^{\beta}. \tag{4.8}$$

Согласно уравнениям Максвелла, коэффициенты 3-формы (4.8) обращаются в нуль: $(\partial F_{\alpha\beta}/\partial x^{\gamma} + \partial F_{\beta\gamma}/\partial x^{\alpha} + \partial F_{\gamma\alpha}/\partial x^{\beta}) = 0$. Отсюда следует, что

$$D\mathrm{f} = 0. \tag{4.9}$$

Уравнение (4.9) удовлетворяется тождественно, если $\mathrm{f} = D\mathbf{A}$, т. е.

$$F_{\alpha\beta} = (\partial A_{\beta}/\partial x^{\alpha}) - (\partial A_{\alpha}/\partial x^{\beta}).$$

Оставшиеся уравнения Максвелла в отсутствие источников означают, что внешняя производная 2-формы (4.7) равна нулю:

$$D^*\mathrm{f} = 0. \tag{4.10}$$

Уравнения (4.9) и (4.10) представляют собой бескоординатную запись уравнений Максвелла в произвольном многообразии при произвольном выборе координатных систем.

Интегрирование на произвольном многообразии не является вполне определенной и однозначной операцией, если она применяется к произвольным тензорам. Интегрирование однозначно только тогда, когда p-форма интегрируется по p-мерному пространству. В этом случае оно может быть проведено так, что приведет к скалярной, не зависящей от системы координат величине. Поэтому интегральные законы сохранения в электродинамике, имеющие инвариантный смысл, суть [2]

$$\int_{c^2} \mathbf{f} = 4\pi p \quad (p\text{—магнитный заряд});$$

$$\int_{c^2} {}^*\mathbf{f} = 4\pi q \quad (q\text{—электрический заряд}),$$

c^2—замкнутая 2-мерная поверхность.

Факт существования векторного потенциала означает отсутствие магнитного заряда: $\int_{c^2} \mathbf{f} = \int_{c^2} D\mathbf{A} = \int_{\partial c^2} \mathbf{A} = 0$, так как $\partial c^2 = 0$ (∂c^2 — граница c^2).

Метод внешних форм. Уравнения структуры и отображение многообразий. Рассмотрим гладкое многообразие, покрытое координатными окрестностями. На нем в окрестности каждой точки зададим систему пфаффовых форм [3]:

$$\underset{x}{\omega}^i = X^i_j\, dx^j; \quad \underset{y}{\omega}^i = Y^i_j\, dy^j, \tag{4.11}$$

где dx^j, dy^j — дифференциалы координат в окрестности точек x и y соответственно. Назовем их главными формами. Пусть на пересечении окрестностей точек x и y соответствующие координаты связаны дифференцируемыми преобразованиями $y^i = y^i(x)$. Потребуем, чтобы на пересечении окрестностей точек x и y формы $\underset{x}{\omega}^i$ и $\underset{y}{\omega}^i$ совпадали между собой (были инвариантными формами):

$$\underset{y}{\omega}^i = Y^i_j \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k = \underset{x}{\omega}^i = X^i{}_k\, dx^k.$$

Из этого требования получим закон преобразования для коэффициентов 1-форм:

$$X^i_k = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} Y^i_j. \tag{4.12}$$

Закон преобразования (4.12) обеспечивает инвариантность форм ω^i на пересечении различных координатных окрестностей. Переходя от одной точки к другой, можно задать ω^i на всем многообразии.

Система форм ω^i [система уравнений (4.11)] вполне интегрируема, так как n переменных зависят от n дифференциалов. При этом требуется, чтобы матрица коэффициентов $X^i{}_f$ была невырожденной.

Условия интегрируемости систем уравнений, как известно, находятся их внешним дифференцированием. Внешнее дифференцирование системы уравнений (4.11) приводит к следующим соотношениям:

$$D\omega^i = dX^i_j \wedge dx^j = dX^i_j \wedge \tilde{X}^j_k \omega^k = \omega^k \wedge (-dX^i_j \tilde{X}^j_k), \quad (4.13)$$

где $D\omega^i$ — внешний дифференциал от ω^i; $\tilde{X}^i{}_k$ — матрица, обратная матрице $X^i{}_k$ и удовлетворяющая условию $dx^i = \tilde{X}^i{}_k\omega^k$. К выражению, стоящему в скобках в уравнении (4.13), не меняя его, можно добавить член $X^i{}_{kl}\omega^l$, где матрица $X^i{}_{kl}$ симметрична по нижним индексам (поскольку при этом добавляется нуль: $X^i{}_{kl}\omega^l \wedge \omega^k \equiv 0$). Тогда (4.13) принимает вид

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k, \quad (4.14)$$

где $\omega^i_k = dX^i_j \tilde{X}^j_k + X^i_{kl}\omega^l$ — двухиндексные формы. Уравнения (4.14) называют *уравнениями структуры.*

Можно потребовать, чтобы $\omega^i{}_k$, так же как и ω^i, были инвариантными формами и на пересечений окрестностей определялись однозначно. Тогда определится закон преобразования для коэффициентов $X^i{}_{kl}$.

Уравнения (4.13) представляют собой необходимые и достаточные условия для полной интегрируемости системы форм ω^i, так как внешние дифференциалы этих форм разлагаются по ним самим. Продифференцируем (4.13) внешним образом. Поскольку внешний дифференциал от внешнего дифференциала тождественно равен нулю, получим

$$0 = \omega^k \wedge (\omega^l_k \wedge \omega^i_l - D\omega^i_k).$$

В силу обобщенной леммы Картана коэффициенты в скобках разлагаются по тем же формам ω^i:

$$D\omega^i_k - \omega^l_k \wedge \omega^i_l = \omega^l \wedge \omega^i_{kl}, \quad (4.15)$$

где $\omega^i{}_{kl}$ — некие новые 3-индексные формы. Снова можно потребовать, чтобы $\omega^i{}_{kl}$ были инвариантны на пересечении, т. е. имели глобальный характер, и продифференцировать (4.15) внешним образом. Тогда получим

$$D\omega^i_{kl} = \omega^m_{kl} \wedge \omega^i_m + \omega^m_k \wedge \omega^i_{ml} + \omega^m_l \wedge \omega^i_{km} + \omega^m \wedge \omega^i_{klm}. \quad (4.16)$$

Здесь появились 4-индексные формы $\omega^i{}_{klm}$.

Таким образом, получается бесконечная цепочка зацепляющихся уравнений структуры для бесконечной последовательности форм ω^i, $\omega^i{}_k$, $\omega^i{}_{kl}$, $\omega^i{}_{klm}$, задаваемых глобально на всем многообразии. Эта цепочка уравнений определяет структуру многообразия. Цепочка обрывается, если, начиная с некоторого количества индексов, формы высшего порядка выражаются через формы низших порядков.

Обычная дифференциальная геометрия соответствует на языке внешних форм и уравнений структуры простейшему случаю, когда уже двухиндексные формы $\omega^i{}_k$ становятся линейными комбинациями одноиндексных главных форм ω^i:

$$\omega^i_k = \Gamma^i_{kl}\,\omega^l. \tag{4.17}$$

Коэффициенты разложения (4.17) называют тогда *коэффициентами связности*, а формы $\omega^i{}_k$ — *формами связности*; Γ^i_{kl}, вообще говоря, несимметричны и не связаны с метрикой. Цепочка уравнений структуры заменяется в этом случае двумя уравнениями, выведенными Картаном и названными им *уравнениями структуры пространства* [4]:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i_k + S^i_{kl}\,\omega^l \wedge \omega^k; \tag{4.18}$$

$$D\omega^i_k = \omega^l_k \wedge \omega^i_l + R^i_{klm}\,\omega^m \wedge \omega^l, \tag{4.19}$$

где S^i_{kl} — тензор кручения; R^i_{klm} — тензор кривизны. Формы ω^i по Картану определяют смещение начала координат $dM = \omega^i \mathbf{e}_i$, а формы $\omega^i{}_k$ — изменение базисных векторов (репера) при переходе от одной точки многообразия к другой: $d\mathbf{e}_i = \omega_i{}^k \mathbf{e}_k$. Для ортогонального базиса в V_4 формы ω^k_i определяют лоренцевы повороты реперов. В общем случае формы ω^i соответствуют пространству первых дифференциалов, ω^i и ω^i_j — пространству вторых дифференциалов и т. д.

Смысл уравнений структуры становится ясным, если в качестве многообразия рассматривать какую-либо классическую группу Ли. На ней введем n линейно независимых пфаффовых форм $\Omega^\alpha = \Omega^\alpha(u,du) = a_\beta{}^\alpha(u)du^\beta$. Пусть преобразования из группы $v^\alpha = \varphi^\alpha(a,\ u)$ оставляют Ω^α инвариантными, т. е. $\Omega^\alpha[\varphi(a,\ u),\ d_u\,\varphi(a,\ u)] = \Omega^\alpha(u,\ du)$. Тогда вместо $\omega^i{}_k$ появятся 2-индексные формы $\Omega_\beta{}^\alpha = f^\alpha_{\beta\gamma}\Omega^\gamma$, где $f^\alpha_{\beta\gamma}$ — структурные константы группы, одновременно играющие роль коэффициентов связности на группе. Уравнения структуры (4.14) примут вид уравнений структуры группы:

$$D\Omega^\alpha = \frac{1}{2} f^\alpha_{\beta\gamma}\, \Omega^\beta \wedge \Omega^\gamma. \tag{4.20}$$

Дифференцируя (4.20) внешним образом, получим соотношение на структурные константы группы — тождество Бианки.

Если рассматривается r-мерное пространство представления конечной группы Ли, структурные уравнения приводят к уравнениям для генераторов этого представления. Зададим структурные формы представления:

$$\Delta X^J = dx^J - \xi^J_\alpha(x)\,\Omega^\alpha.$$

Первые интегралы этих уравнений $\widetilde{x}^J = f^J(a, x)$ выберем так, чтобы при $a = 1$ $\widetilde{x}^J = x^J$. Тогда при $d\widetilde{x}^J = 0$ получим $dx^J = \xi_\alpha{}^J(x)\Omega^\alpha$. Внешнее дифференцирование этой вполне интегрируемой системы дает дифференциальные уравнения Ли:

$$\left(\partial\xi^J_{[\alpha}/\partial x^K\right)\xi^K_{\beta]} = \xi^J_\gamma f^\gamma_{\alpha\beta}; \quad (J,\ K = 1,\ 2,\ \dots,\ r).$$

В общем случае в каждой фиксированной точке многообразия (точка фиксируется условием $\omega^i = 0$) уравнения структуры для каждой системы форм принимают вид, аналогичный (4.20). Например, (4.15) переходит в $D\omega^i{}_k = \omega^l{}_k \wedge \omega_l{}^i$, где $\omega_k{}^i = dX_k{}^l\widetilde{X}_l{}^i$. Иными словами, в каждой точке многообразия имеется система форм, таких, что их внешние дифференциалы выражаются через них самих, причем коэффициенты разложения постоянны. Это такая же картина, как в теории групп Ли. Тем самым уравнения структуры приводят к возникновению в каждой точке многообразия пространства некоторой линейной группы Ли, для которой ω^i, $\omega^i{}_j$, $\omega^i{}_{jk}$ и т. д. являются структурными формами. Например, ω^i, $\omega^i{}_j$ соответствуют второй дифференциальной группе Ли. Размерность пространства структурных форм ω^i, $\omega^i{}_j$, $\omega^i{}_{jk}$: $n + n^2 + n^2(n + 1)/2$. Иными словами, над каждой точкой многообразия возникает новое пространство (слой) с действующей в нем структурной группой. Многообразие расслаивается, становится расслоенным многообразием.

Слои определяются над каждой точкой окрестности x и над каждой точкой окрестности y. Над каждой точкой пересечения окрестностей возникают два слоя, «смещенные» друг относительно друга определенным образом (с помощью элемента группы). Чтобы однозначно определить слой над пересечением окрестностей, можно вместо инвариантных форм группы Ω^α, удовлетворяющих (4.20), перейти к формам ω^α, заданным над всем многообразием, в том числе и над пересечением окрестностей. Тогда уравнения структуры принимают вид:

$$D\omega^i = \omega^k \wedge \omega^i{}_k; \tag{4.21}$$

$$D\omega^a = \frac{1}{2} f^a_{\beta\gamma}\, \omega^\beta \wedge \omega^\gamma + \omega^k \wedge \omega^a_k, \tag{4.22}$$

где $\underset{x}{\omega^a} = \underset{y}{\omega^a}; \quad \underset{x}{\omega^a_k} = \underset{y}{\omega^a_k}.$

Инвариантные формы Ω^α связаны с произвольными формами ω^α соотношением $\omega^\alpha = \Omega^\alpha + \Gamma^\alpha{}_k \omega^k$, где $\Gamma^\alpha{}_k$ — коэффициенты связности расслоенного пространства, задающие отображение слоев в двух бесконечно близких точках друг на друга. Если фиксируется точка, т. е. $x^i = \mathrm{const}$, $\omega^i = 0$, первая система уравнений удовлетворяется тождественно, а вторая переходит в структурные уравнения группы.

Структурные уравнения (4.21) и (4.22), если они просто постулируются, позволяют рассматривать расслоения с произвольной группой Ли в качестве структурной группы. Они называются уравнениями расслоенного пространства. Именно в произвольных расслоенных пространствах калибровочные поля становятся коэффициентами связности.

Отображение многообразий определяется через отображение соответствующих систем внешних форм следующим образом [3]. Пусть на первом многообразии задана система форм $\Phi^I = U^I{}_k du^k$, а на втором $\theta^a = t^a{}_b dt^b$, подчиняющихся уравнениям структуры:

$$D\theta^a = \theta^b \wedge \theta^a_b; \tag{4.23}$$

$$D\Phi^I = \Phi^K \wedge \Phi^I_K. \tag{4.24}$$

Зададим отображение $u^I = u^I(t)$. Тогда возникает связь между дифференциалами $du^I = (\partial u^I/\partial t^a)dt^a$, которая приводит к соотношениям $\Phi^I = U^I{}_K(\partial u^K/\partial t^a)dt^a$; $dt^a = \tilde{t}^a{}_b\theta^b$, т. е. $\Phi^I = U^I{}_K(\partial u^K/\partial t^a)\tilde{t}^a{}_b\theta^b$. Таким образом, формы на первом многообразии линейно выражаются через формы на втором многообразии:

$$\Phi^I = \Lambda^I_a\, \theta^a. \tag{4.25}$$

Введенная система форм обладает свойством правильной продолжаемости, т. е. при внешнем дифференцировании получается разложение только по главным формам. Других коэффициентов нет. Поэтому можно применять обобщенную лемму Картана, согласно которой коэффициенты при главных формах должны разлагаться по ним самим. Действительно, продифференцируем (4.25):

$$D\Phi^J = d\Lambda_a^J\,\theta^a + \Lambda_a^J\,D\theta^a.$$

Подставим сюда вместо $D\Phi^J$, $D\theta^a$ их выражения из (4.23), (4.24). Тогда

$$\Phi^K \wedge \Phi_K^J = d\Lambda_a^J\,\theta^a + \Lambda_a^J\,\theta^b \wedge \theta_b^a. \tag{4.26}$$

Все члены в (4.26) пропорциональны $\Lambda^k{}_a\theta^a$. Применим лемму Картана и получим уравнение, которому должны подчиняться коэффициенты $\Lambda^J{}_a$ при отображении систем форм:

$$d\Lambda_a^J + \Lambda_a^K\,\Phi_K^J - \Lambda_b^J\,\theta_a^b = \Lambda_{ab}^J\,\theta^b, \tag{4.27}$$

где Λ_{ab}^J — новые коэффициенты.

Если один раз имеет место правильная продолжаемость, она имеет место все время. Дифференцируя (4.27) внешним образом, получим бесконечную цепочку зацепляющихся уравнений для коэффициентов отображения $\Lambda^J{}_a$, $\Lambda^J{}_{ab}$, $\Lambda^J{}_{abc}$ и т. д. Обрывая эту цепочку уравнений, фиксируем отображение многообразий с точностью до бесконечно малых соответствующего порядка:

$$\Lambda_a^J \sim \partial u^K/\partial t^a; \quad \Lambda_{ab}^J \sim \partial u^K/\partial t^a\,\partial t^b \text{ и т. д.}$$

§ 5. КАЛИБРОВОЧНЫЕ ПОЛЯ КАК КОЭФФИЦИЕНТЫ СВЯЗНОСТИ ГЛАВНОГО РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА НАД V_4

Понятия связности и расслоенного пространства. В теории связностей переход к современной глобальной точке зрения и замена линейных групп общей группой Ли привели к большим изменениям. Само понятие связности возникло у Леви-Чивита как параллельное перенесение касательных векторов многообразия. У него связность определялась самой метрикой. Вейль обобщил понятие связности и показал, что метрика в определении связности несущественна. Так появилось понятие пространств аффинной связности.

Дальнейшее обобщение произошло с появлением пространств и связности Кенига. Он ввел связности в векторных расслоениях и показал, что не обязательно, чтобы размерности слоя и базы совпадали. Затем Картан ввел понятия проективной, конформной и других связностей. Эти связности, как показал Схоутен, локально можно моделировать в векторных расслоениях. В настоящее время понятие связности формулируется для самых общих расслоений, когда не обязательно, чтобы в слое действовала группа Ли, и не обязательно, чтобы связность была линейной. Нам понадобится понятие линейной связности в однородном расслоении, когда в слое действует произвольная группа Ли G_r.

Связность в однородном расслоении (вообще говоря, нелинейная) вводится как отображение множества путей в базе в множество диффеоморфизмов слоя на слой, удовлетворяющее определенным условиям [5, 6]. Иначе говоря, связность определяет отображение слоев друг на друга при перенесении их вдоль различных путей в базе.

Расслоенное пространство [7] представляет собой дифференцируемое c^v-многообразие E, на котором задано отношение эквивалентности R такое, что: а) пространство отношений $B = E/R$ или базисное пространство — дифференцируемое многообразие n измерений; б) проекция p, т. е. каноническое отображение многообразия E на базу B, соответствующее определению B как пространства отношений, есть c^v — дифференцируемое отображение всюду ранга n.

При этих условиях структура дифференцируемого расслоенного пространства на E определяется совокупностью следующих элементов: B — база; F — типовой слой; c^v — дифференцируемое многообразие; G_r — группа Ли; c^v — дифференцируемо действующая на F (группа автоморфизмов F); p — проекция E на базу B; Φ — семейство гомеоморфизмов топологического произведения $U \times F$ на прообраз $p^{-1}(U)$, где U — открытое множество пространства B, причем выполняется ряд условий на Φ. Если F представляет собой групповое пространство G_r, E называют *главным расслоенным пространством*; если F — касательное пространство к базе, то говорят о *касательном расслоении*; когда F является пространством представления G_r, E называют *присоединенным расслоенным пространством*.

При переходе от одной точки базы к другой происходит изоморфное отображение слоев, «присоединенных» в этих точках, друг на друга. Если это отображение тождественное, т. е. движение в базе не вызывает преобразования слоя, то геометрически это значит, что расслоенное пространство представляет собой прямую сумму двух пространств. Это тривиальный случай. Калибровочные группы и связанные с ними калибровочные поля приводят нас к нетривиальному примеру расслоенных пространств. Действительно, выберем в качестве базы пространство—время V_4, а в качестве слоя—групповое пространство некоторой полупростой группы Ли*. При перемещении точки в V_4 слой, как говорилось, изоморфно преобразуется. В данном случае это преобразование принадлежит G_r и зависит от точки V_4. Эти два свойства характеризуют локальные калибровочные группы. Коэффициенты связности задают отображение слоев, отнесенных к бесконечно близким точкам базы. Такую же роль играют калибровочные поля, связывая пространства представлений калибровочной группы. Если слоем является пространство, в котором действует группа изотопических преобразований (изопространство), то связь между изопространствами в разных точках V_4 осуществляется полем Янга—Миллса. Если слой совпадает с касательным пространством, то отображение слоев задается коэффициентами связности Кристоффеля, отождествляемыми с гравитационным полем. Аналогично и для других калибровочных полей.

Определение связности через векторные поля в расслоенном пространстве. Рассмотрим пространство, касательное к расслоенному пространству. Локально оно разбивается на два подпространства, образующих прямую сумму: пространство, касательное к базе, и пространство, касательное к слою. Пусть в касательном пространстве к базе выбрано n линейно независимых векторов $\mathbf{e}_\mu$, а в касательном пространстве к слою — r векторов $\mathbf{e}_i$, которые одновременно являются касательными к одномерным подгруппам G_r. Вместе эти $(n+r)$ векторов образуют базис касательного пространства к расслоенному пространству (репер): $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \ldots, \mathbf{e}_{n+r}\}$. Многообразие $L_0(p)$ — пространство реперов — имеет размерность $n(n+r)$. Векторы, касательные к слою, называют *вертикальными векторами*. Если вдоль пути в базе задано отображение слоев, это значит, что эти слои «пронизаны» семейством кривых, инвариантных относительно действия группы. Компоненты векторного поля $\mathbf{v}$, каса-

* Если группа G_r не полупроста, то может не существовать связанного с ней риманова пространства, так как метрика на группе будет тогда вырожденной.

тельного к этим кривым, удовлетворяют уравнениям:

$$v^i \mathbf{e}_i + v^\alpha \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{v} \; (i = 1, \ldots, n; \;\; \alpha = 1, \ldots, r); \tag{5.1}$$

$$dv^\alpha + v^k \omega_k^\alpha + v^\beta f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma = v_1^\alpha \, dt, \tag{5.2}$$

где $f_{\beta\gamma}^\alpha$ — структурные константы G_r, ω^γ, ω_k^i, ω_k^α — внешние дифференциальные формы.

Вдоль пути в базе полагаем $\omega^i = v^i dt$, где t — параметр. Вид коэффициентов при v^β в (5.2) есть следствие инвариантности поля $\mathbf{v}$ относительно действия группы и означает, что все «торчащие» из слоя векторы имеют одну и ту же проекцию в базе. Можно показать и обратное: если задано векторное поле уравнениями (5.1) и (5.2), то их интегральные кривые задают изоморфизм слоев друг на друга. Эти интегральные кривые называют *горизонтальными путями*.

Для того чтобы определить перенос слоев вдоль произвольного пути в базе или, что то же самое, определить связность во всем расслоенном пространстве, а не только вдоль отдельных кривых, необходимо задать n векторных полей, удовлетворяющих уравнениям типа (5.1) и (5.2):

$$\underset{k}{\mathbf{v}} = \underset{k}{v^i} \mathbf{e}_i + \underset{k}{v^\alpha} \mathbf{e}_\alpha \quad (k = 1, \ldots, n); \tag{5.3}$$

$$d\underset{l}{v^i} + \underset{l}{v^k} \omega_k^i = \underset{l}{v^i}{}_{,k} \, \omega^k; \tag{5.4}$$

$$d\underset{l}{v^\alpha} + \underset{l}{v^k} \omega_k^\alpha + \underset{l}{v^\beta} f_{\beta\gamma}^\alpha \omega^\gamma = \underset{l}{v^\alpha}{}_{,k} \, \omega^k. \tag{5.5}$$

Свернем соотношение (5.3) с величинами $\overset{k}{v}_l$, удовлетворяющими условию $\overset{k}{v}_l \underset{k}{v^i} = \delta^i{}_l$, тогда получим:

$$E_l = \mathbf{e}_l + \overset{k}{v}_l \underset{k}{v^\alpha} \mathbf{e}_\alpha = \mathbf{e}_l + \Gamma_l^\alpha \mathbf{e}_\alpha.$$

Векторы E_l проектируются в n векторов в базе. Геометрический объект

$$\Gamma_l^\alpha = \overset{k}{v}_l \underset{k}{v^\alpha} \tag{5.6}$$

играет роль коэффициентов связности расслоенного пространства.

Из соотношения (5.6) следует, что горизонтальные и вертикальные компоненты векторного поля $\underset{k}{v}^l$ и $\underset{k}{v}^\alpha$ взаимосвязаны:

$$\underset{k}{v}^\alpha = \Gamma^\alpha_l \underset{k}{v}^l. \tag{5.7}$$

Отсюда следует, что, зная коэффициенты связности $\Gamma^\alpha{}_l$ можно по проекции векторного поля в базу (v^i) определить проекцию его в слой (v^α) и тем самым восстановить векторное поле полностью, т. е. «поднять» его в расслоенное пространство. Поэтому говорят, что задание уравнений (5.4), (5.5) означает задание n лифтов векторных полей, причем это эквивалентно заданию коэффициентов связности (5.6).

Задание n лифтов векторных полей позволяет определить связность вдоль любого пути в базе. Если отображение слоев осуществляется с помощью некоторой псевдогруппы, то компоненты $\underset{k}{\mathbf{v}}$ специализируются так, чтобы они определяли однопараметрические преобразования этой псевдогруппы.

Вектор-потенциалы калибровочных полей как коэффициенты связности расслоенного пространства. Дифференцируя выражение для $\Gamma^a{}_\mu$ (5.6) и используя уравнения структуры расслоенного пространства, а также уравнения (5.4), (5.5), нетрудно получить закон преобразования этой величины ($\mu=1, \dots 4$; $a=1, \dots r$):

$$d\Gamma^a_\mu - \Gamma^a_\nu \omega^\nu_\mu + f^a_{bc}\Gamma^b_\mu \omega^c + \omega^a_\mu = \Gamma^a_{\mu\nu}\omega^\nu. \tag{5.8}$$

Если взять частные значения форм $\omega^\nu = 0$; $\omega^a{}_\mu = -\partial_\mu \varepsilon^a$; $\omega^c = -\varepsilon^c$; $\omega_\mu{}^\nu = \partial\delta x^\nu/\partial x^\mu$, то получим известный закон преобразования для вектор-потенциалов калибровочных полей $A_\mu{}^a$:

$$\delta A^a_\mu - A^a_\nu (\partial\delta x^\nu/\partial x^\mu) - f^a_{bc} A^b_\mu \varepsilon^c - \partial_\mu \varepsilon^a = 0.$$

Заметим, что здесь учитываются преобразования вектор-потенциала как по групповому индексу, так и по пространственно-временному.

Поскольку с точки зрения дифференциальной геометрии характер величины определяется ее законом преобразования, можно отождествить вектор-потенциалы калибровочного поля $A_\mu{}^a$ с коэффициентами связности главного расслоенного пространства $\Gamma_\mu{}^a$, базой которого является V_4, а структурной группой — калибровочная группа G_r [8]. Такое отождествление приводит к превращению уравнений движения частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, в свободные уравнения. Покажем это.

Ковариантные производные в расслоенном пространстве для произвольных геометрических объектов строятся, исходя из их закона преобразования относительно G_r и произвольных непрерывных преобразований координат в базе. При этом используется понятие производной Ли. Приведем здесь алгоритм нахождения ковариантной производной, из которого станет ясно, что ковариантная производная в расслоенном пространстве совпадает с ковариантной производной по Янгу и Миллсу, включающей взаимодействие с калибровочным полем $A_\mu{}^a$.

Поле произвольного геометрического объекта в расслоенном пространстве задается уравнениями вида

$$dY^J + \Phi_a^J(Y)\,\omega^a = Y_\mu^J\,\omega^\mu, \qquad (5.9)$$

где J — компоненты объекта; $a = 1, \ldots, r$; $\mu = 1, \ldots, n$ (для V_4 $n = 4$), $\Phi_a^J(Y)$ — произвольные функции от Y. Если функции Φ_a^J линейны по Y, то говорят, что задан линейный объект. Ковариантный дифференциал получается при замене в (5.9) произвольных форм ω^a инвариантными формами: $\tilde{\omega}^a = \omega^a - \Gamma_\mu{}^a\omega^\mu$. Он имеет вид

$$\nabla Y^J = dY^J + \Phi_a^J(Y)\,\tilde{\omega}^a = \left(Y_\mu^J + \Gamma_\mu^a\,\Phi_a^J\right)\omega^\mu.$$

Ковариантная производная произвольного геометрического объекта представляет собой коэффициент при ω^μ и, следовательно, имеет вид

$$Y^J_{;\,\mu} = Y_\mu^J + \Gamma_\mu^a\,\Phi_a^J(Y). \qquad (5.10)$$

В частности, для линейных представлений G_r, которые задаются соотношениями

$$\bar{\delta}\psi = \underset{a}{I}\varepsilon^a\psi - (\partial\psi/\partial x^\mu)\,dx^\mu$$

или

$$\bar{\delta}\psi - \underset{a}{I}\varepsilon^a\psi = -(\partial\psi/\partial x^\mu)\,dx^\mu,$$

из (5.9) и (5.10) получаем

$$\psi_{;\,\mu} = -(\partial\psi/\partial x^\mu) + \underset{a}{I}A_\mu^a\,\psi. \qquad (5.11)$$

Здесь $\underset{a}{I}$ — генератор представления G_r. Легко видеть, что выражение (5.11) совпадает с ковариантной производной

Янга—Миллса. Таким образом, если взаимодействие с калибровочным полем вводится через замену обычных производных на ковариантные в смысле Янга—Миллса (минимальное взаимодействие), то соответствующие уравнения (или лагранжианы) можно рассматривать как свободные, но определенные в расслоенном пространстве с объектом связности:

$$\Gamma^a_\mu \doteq A^a_\mu = \underset{\varkappa}{v}^a \overset{\varkappa}{v}_\mu .$$

Тензор кривизны расслоенного пространства определяется из уравнений структуры (4.22) при замене в них произвольных форм ω^a инвариантными формами $\widetilde{\omega}^a$. В этом случае вместо (4.22) получим уравнения структуры

$$D\widetilde{\omega}^a = \frac{1}{2} f^a_{bc} \widetilde{\omega}^b \wedge \widetilde{\omega}^c + R^a_{\mu\nu} \omega^\mu \wedge \omega^\nu, \tag{5.12}$$

где $R^a_{\mu\nu}$ — тензор кривизны расслоенного пространства, выражаемый через коэффициенты связности следующим образом:

$$R^a_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} \Gamma^a_{\nu]} - \frac{1}{2} f^a_{bc} \Gamma^b_{[\mu} \Gamma^c_{\nu]}. \tag{5.13}$$

Если в качестве слоя взять касательное пространство, $\Gamma_\mu{}^a$ переходят в коэффициенты Риччи (или в символы Кристоффеля), а $R^a_{\mu\nu}$ превращается в обычный тензор кривизны.

Легко видеть, что $R^a_{\mu\nu}$ точно так же выражается через $\Gamma_\mu{}^a$, как тензор напряженности калибровочного поля $F^a_{\mu\nu}$ через вектор-потенциал $A_\mu{}^a$:

$$F^a_{\mu\nu} = A^a_{[\nu,\,\mu]} - \frac{1}{2} f^a_{bc} A^b_{[\mu} A^c_{\nu]}. \tag{5.14}$$

Если $\Gamma_\mu{}^a = A_\mu{}^a$, то $F^a_{\mu\nu} = R^a_{\mu\nu}$. Таким образом, отождествление вектор-потенциалов калибровочных полей с коэффициентами связности расслоенного пространства приводит к отождествлению тензора напряженности калибровочного поля с тензором кривизны этого пространства.

Вторая ковариантная производная линейного геометрического объекта (как и вторая ковариантная производная в смысле Янга — Миллса), будучи антисимметризована, выражается через тензор кривизны расслоенного пространства:

$$\psi^{J}{}_{;[\mu\nu]} = \underset{a}{I}{}^{J}_{K} R^{a}_{\nu\mu} \omega^{K}. \tag{5.15}$$

Итак, локализация калибровочных групп, т. е. введение над каждой точкой пространства—времени группы Ли G_r (или соответствующей алгебры) так, что отнесенные к разным точкам, эти группы изоморфны друг другу, означает переход к главному расслоенному пространству. Базой этого пространства является пространство—время V_4, слоем — группа G_r, рассматриваемая как многообразие. Локально, т. е. в окрестности каждой точки, расслоенное пространство представляет собой прямую сумму двух пространств $G_r \times V_4$, а касательное пространство — прямую сумму двух касательных пространств $T_{V_4} \times A_r$(T_{V_4}— касательное пространство к V_4, A_r — алгебра Ли группы G_r). Введение калибровочного поля, описываемого вектор-потенциалом $A_\mu{}^a$, означает введение связности расслоенного пространства. Если тензор напряженности калибровочного поля $F_{\mu\nu}{}^a = 0$, то введенная связность имеет нулевую кривизну. Минимальные взаимодействия с калибровочным полем, которые соответствуют замене обычных производных ковариантными в смысле Янга—Миллса, означают переход к ковариантному дифференцированию в расслоенном пространстве. При этом уравнения, включающие взаимодействие с $A^a{}_\mu$, остаются свободными.

Уравнения Янга—Миллса с геометрической точки зрения означают, что рассматриваются связности на главном расслоенном пространстве, такие, что дивергенция соответствующих тензоров кривизны равна нулю $R_a^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$ или заданной величине J_a^μ : $R_a^{\mu\nu}{}_{;\nu} = J_a{}^\mu$ ($R_a^{\mu\nu} = g_{ab} R^b_{\tau\lambda} g^{\mu\tau} g^{\nu\lambda}$, где g_{ab} — метрика на группе; $g^{\mu\nu}$ — метрика на базе).

Классификация таких связностей и пространств с такими тензорами кривизны может быть построена чисто геометрическими методами подобно классификации полей тяготения А. З. Петрова [9]. Геометрический метод классификации решений уравнений Эйнштейна, разработанный А. З. Петровым, показывает, что квантовой теорией могут быть описаны не все типы полей тяготения, а лишь небольшое число специфических конфигураций, допускающих плоскую асимптотику на бесконечности. Отсюда следует, что области применимости квантовой и классической теорий калибровочных полей перекрываются, но не совпадают.

Один из геометрических методов анализа классов решений классических уравнений Янга—Миллса основан на использовании понятия группы голономии расслоенного пространства (§ 6).

§ 6. ГРУППА ГОЛОНОМИИ РАССЛОЕННОГО ПРОСТРАНСТВА И АНАЛИЗ КЛАССОВ РЕШЕНИЙ КЛАССИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЯНГА — МИЛЛСА

Определения. Группа голономии расслоенного пространства определяется следующим образом [7]. При заданной точке z в главном расслоенном пространстве E группой голономии $\mathcal{H}_z$ данной связности в точке z называется совокупность элементов $g \in G$, таких, что точки z и zg^{-1} могут быть соединены горизонтальным путем.

Более наглядно группа голономии получается следующим образом. Выберем вектор в пространстве, касательном к слою (т. е. в алгебре Ли), с началом в точке z фиксированного слоя и обнесем выбранный слой по замкнутому пути в базе. При переносе слоя начало вектора, касательного к слою (вертикального вектора), переносится по горизонтальному пути. В результате переноса слой оказывается преобразованным, а точка z исходного слоя переходит в $z' = zg^{-1}$, где $g \in G$.

Группа голономии представляет собой группу преобразований векторов пространства, касательного к слою (т. е. векторов алгебры Ли), полученную в результате параллельного переноса их по всевозможным замкнутым путям в базе, выходящим из данной точки x. Если рассматриваются только пути, лежащие в заданной окрестности точки, то *группу голономии* называют *локальной*. Если перенос осуществляется только вдоль путей, стягиваемых в точку, то *группу голономии* называют *ограниченной*. Если группа голономии определена во всем пространстве и выбор путей не ограничен, она называется просто *группой голономии*. При перенесении векторного пространства группа голономии состоит из линейных преобразований векторов и называется *однородной*. Если переносится не векторное, а аффинное пространство, группа голономии неоднородна, так как может содержать сдвиги касательного пространства.

Структура группы голономии отражает свойства пространства в некоторой области, хотя сама она определяется в каждой точке этой области отдельно.

Всякий элемент ограниченной неоднородной группы голономии $\rho_x(V_n)$, где V_n—дифференцируемое многообразие, представляет собой произведение конечного числа элементов, получаемых из элементов локальных неоднородных групп голономии $\rho_y{}^*(y \in V_n)$ переносом вдоль путей, соединяющих точку y с точкой x. То же самое справедливо для ограниченной однородной группы голономии $\sigma_x(V_n)$.

Группы голономии в разных точках z являются сопряженными подгруппами G_r, причем если z и z' принадлежат базе, то $\mathcal{H}_z = \mathcal{H}_{z'}$, а если z и z' принадлежат одному слою и $z' = z\gamma$, то $\mathcal{H}_{z'} = \gamma^{-1}\mathcal{H}_z\gamma$, где $\gamma \in G_r$. Свойства группы голономии тесно связаны с топологическими свойствами базы, а именно с топологическим инвариантом базы—группой Пуанкаре. Группа Пуанкаре определяется числом классов замкнутых путей на многообразии, не переводимых друг в друга непрерывной деформацией (т. е. не гомотопных друг другу). Ограниченная однородная группа голономии σ_z является нормальным делителем $\mathcal{H}_z$. При этом существует отображение (гомоморфизм) $f: \pi_x$ на $\mathcal{H}_z/\sigma_z$, где π_x—группа Пуанкаре базы в точке $x = pz$. Таким образом, меняя топологию V_4, т. е. π_x, можно дополнительно учесть дискретные симметрии элементарных частиц.

Группа голономии, калибровочная группа и структура многообразия. Как показал Э. Картан [4], в случае аффинной связности без кручения, заданной на групповом пространстве конечной группы Ли G_r, ограниченная группа голономии совпадает с производной подгруппой ее присоединенной группы. Иначе говоря, если известна G_r, группа голономии строится следующим образом: нужно найти группу всех автоморфизмов G_r (присоединенную группу), состоящую из преобразований вида $\gamma^{-1}G\gamma$, где $\gamma \in G$, и затем найти производную подгруппу этой группы, содержащую все ее коммутаторы, т. е. элементы вида: $a \cdot b \cdot c \ldots a^{-1} \cdot b^{-1} \cdot c^{-1}$, где a, b, c, ... принадлежат присоединенной группе и число их произвольно.

Производная подгруппа является нормальным делителем соответствующей группы. Поэтому для простой группы производная подгруппа совпадает с самой группой. Но в этом случае и присоединенная группа тоже совпадает с самой группой. Следовательно, простую калибровочную группу можно рассматривать не только как фундаментальную группу связанного с ней риманова пространства, но и как группу голономии этого пространства. Восстановление калибровочной группы по группе голономии $\mathscr{H}$ связано в общем случае с поисками нормализаторов этой группы.

Любая группа Ли может быть реализована в виде группы голономии пространства аффинной связности, но для римановых пространств (т. е. наделенных метрикой) это не так. Выбор группы голономии сильно ограничивает возможную структуру риманова пространства, а в некоторых случаях (когда группа голономии узкая или необычная, т. е. не совпадает с ортогональной группой в касательном пространстве) полностью ее определяет [10]. Необычными группами голономии риманова пространства могут быть следующие группы: $U(n/2)$; $SU(n/2)$; $\mathrm{Sp}(n/4)$; $\mathrm{Sp}(1)\cdot\mathrm{Sp}(n/4)$; $G_2(n = 7)$; $\mathrm{Spin}(7)$ $(n = 8)$; $\mathrm{Spin}\ 9(n = 16)$. Попытка связать калибровочные группы и внутренние симметрии с такими группами голономии привела бы к пространствам большей размерности, чем 4 (кроме разрешимой группы и ее подгрупп, для которых возможно $n = 4$).

В произвольном многообразии V_n группа голономии характеризует структуру параллельного переноса и степень отклонения V_n от евклидовости. Для аналитической связности нулевой кривизны ограниченная группа голономии сводится к тождественному преобразованию.

Если группа голономии уже, чем группа G_r, действующая в слое, можно безболезненно редуцировать группу, действующую в слое, до группы голономии, поскольку все преобразования векторов, разнесенных по всему V_4, принадлежат группе голономии и не выходят за ее рамки. Геометрически суженность группы голономии по сравнению с максимально возможной группой $GL(n)$ означает возможность зафиксировать часть реперов в слое, которые не преобразуются при параллельном переносе. Это происходит, например, из-за некоторой степени однородности или симметрии базы.

Структура многообразия группой голономии определяется неоднозначно. На одном и том же многообразии можно ввести разные связности, и они, вообще говоря, дадут разные группы голономии. Поэтому, зная только связность (или ее группу голономии), еще нельзя сказать, о каком многообразии идет речь. Могут быть разные многообразия с одинаковыми группами голономии. Простейший пример: на одной полости гиперболоида можно ввести евклидову связность. Тензор кривизны для такой связности равен нулю. В то же время для связности, индуцированной на 2-мерном гиперболоиде при вложении его в 3-мерное евклидово пространство, гиперболоид представляет собой пространство постоянной кривизны, т. е. тензор кривизны индуцированной связности отличен от нуля.

Группы голономии многообразий связаны также с их группами движений. Стационарная подгруппа группы движений одновременно является подгруппой группы голономии. Это легко видеть из следующих рассуждений.

Если в многообразии задано поле ковариантно-постоянного тензора (например, поле метрического тензора в римановом пространстве), это поле определяет в точке x многообразия тензор, инвариантный относительно группы голономии $\mathcal{H}_x(V_n)$, и наоборот, всякий тензор в точке x, инвариантный относительно группы голономии $\mathcal{H}_x(V_n)$, порождает при параллельном переносе в многообразии поле, ковариантная производная которого равна нулю. Таким образом, существование ковариантно-постоянного поля метрического тензора на многообразии приводит к тому, что группа голономии в каждой точке x_0 такого многообразия совпадает с группой движения плоского пространства, наделенного той же метрикой $g_{\mu\nu}(x_0)$, или с одной из ее подгрупп. Отсюда следует, что для псевдориманова пространства V_4 и римановой связности (т. е. символов Кристоффеля) группой голономии может быть только группа Лоренца или ее подгруппа. Необычные группы голономии, о которых говорилось вначале, соответствуют необычным связностям.

Если рассматривать группы, описывающие внутренние симметрии элементарных частиц, как группы голономии псевдориманова пространства, а элементарные частицы — как представления этих групп, получим концепцию неточечных частиц. Зависимость волновой функции частиц от конечной области войдет через структуру группы голономии, представлением которой они будут определяться.

Некоторые решения уравнений Янга—Миллса с точечным источником, не обладающие сферической симметрией. Положительная определенность энергии поля и фиксированная пространственно-временная симметрия решений как ограничения на структуру группы голономии. Понятие группы голономии расслоенного пространства удобно использовать для анализа классов решений классических уравнений калибровочных полей, поскольку решить эти уравнения на геометрическом языке означает найти связность главного расслоенного пространства над V_4. Такой анализ показывает, что физические требования типа положительной определенности энергии поля, условий Лоренца, представляющих собой ограничение на переносимый полем спин, а также выбор определенной пространственно-временной симметрии решений представляют собой ограничения на возможную структуру соответствующей им группы голономии. Тем самым иллюстрируется тесная связь между пространственно-временными и внутренними свойствами симметрии, реализуемая геометрической интерпретацией калибровочных полей.

В римановом пространстве тензор кривизны и его ковариантные производные, а точнее, их свертки с произвольными векторами v^λ; w^μ; $u_1^{v_1}$; $u_2^{v_2}$ в точке x вида

$$R^\alpha_{\beta\lambda\mu}\, v^\lambda\, w^\mu; \;\ldots u_k^{v_k} \ldots u_1^{v_1}\, \nabla_{v_k} \ldots \nabla_{v_1} R^\alpha_{\beta\lambda\mu}\, v^\lambda\, w^\mu \tag{6.1}$$

определяют элементы алгебры Ли $d\sigma_x^*$ локальной однородной группы голономии.

Аналогичным образом в расслоенном пространстве алгебра Ли локальной однородной группы голономии определяется тензором кривизны и его ковариантными производными (т. е. тензором напряженности калибровочного поля $\mathbf{F}_{\mu\nu}$ и его ковариантными производными). С этой точки зрения уравнения калибровочного поля представляют собой ограничение на ковариантные производные тензора кривизны. По ним можно определить алгебру Ли группы голономии, если известна пространственно-временная симметрия решений. Иначе говоря, если мы ищем решения уравнений Янга—Миллса, обладающие заданной симметрией в V_4, то мы ограничиваем калибровочную группу. Например, для калибровочных полей с точечными источниками справедливы следующие теоремы [11, 12]: 1) сферически-симметричные аналитические решения для калибровочного поля точечного заряда имеют абелевы группы голономии; 2) для калибровочного поля с абелевой группой голономии уравнения Янга—Миллса и тождества Бианки редуцируются к уравнениям Максвелла. Поэтому все сферически-симметричные решения уравнений Янга—Миллса с точечным источником кулоноподобны, вернее, могут быть выбором калибровки приведены к кулоновой форме. В частных случаях калибровочной симметрии O_3 и SU_3 это было показано Икедой и Миячи и Лусом [см. (2.26), (2.30)].

Эти кулоновоподобные решения соответствуют дальнодействующим силам подобно электромагнитным и гравитационным полям. Для того чтобы получить калибровочное поле неэлектромагнитного типа, нужно найти решение с неабелевой группой голономии [12].

Рассмотрим пример такого решения с неполупростой группой голономии. Как вектор-потенциалы, так и компоненты тензора напряженности будем записывать в операторной форме Γ, $\mathbf{F}_{\mu\nu}$, не конкретизируя вид матриц, по которым должно вестись разложение.

Уравнения Янга—Миллса в операторной форме имеют вид

$$\nabla_\nu \mathbf{F}^{\mu\nu} = J^\mu. \tag{6.2}$$

Будем искать решения этих уравнений для точечного заряда, не являющиеся сферически-симметричными, и определим их группы голономии. Пусть t, r, θ, φ — сферические координаты в пространстве—времени V_4, которое для простоты считается плоским (пространство Минковского). Будем искать решения в виде

$$\mathbf{\Gamma}_t = [f(\theta)/r]\,\mathbf{A};\quad \mathbf{\Gamma}_r = 0;\quad \mathbf{\Gamma}_\theta = 0;\quad \mathbf{\Gamma}_\varphi = h(\theta)\,\mathbf{B}, \tag{6.3}$$

где f и h — вещественные функции, зависящие только от θ; **A** и **B** — постоянные матрицы.

Плотность тока J^μ отлична от нуля только на мировой линии заряда $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Тогда

$$\begin{gathered} \mathbf{F}_{tr} = (f/r^2)\,\mathbf{A};\quad \mathbf{F}_{t\theta} = -(f'/r)\,\mathbf{A}; \\ \mathbf{F}_{t\varphi} = (fh/r)\,[\mathbf{AB}];\quad \mathbf{F}_{\varphi r} = 0; \\ \mathbf{F}_{\varphi\theta} = -h'\,\mathbf{B};\quad \mathbf{F}_{r\theta} = 0. \end{gathered} \tag{6.4}$$

Для плотности тока получим

$$\begin{gathered} J^t = (r^3)^{-1}\,(f''\,\mathbf{A} + f'\,\mathbf{A}\cos\theta - (fh^2/\sin^2\theta)\,\big[\mathbf{B}\,[\mathbf{AB}]\big] \\ J^r = 0;\quad J^\theta = 0); \\ J^\varphi = -(r^4\sin^2\theta)^{-1}\,(h''\,\mathbf{B} - h'\,\mathbf{B}\cos\theta) - f^2 h\,\big[\mathbf{A}\,[\mathbf{AB}]\big]. \end{gathered} \tag{6.5}$$

Уравнения (6.5) представляют собой систему нелинейных уравнений в частных производных для функций $f(\theta)$ и $h(\theta)$. Потребуем, чтобы функции f, f', $fh/\sin\theta$, $h'/\sin\theta$ были ограничены в интервале

$$0 < \theta < \pi. \tag{6.6}$$

Такие решения назовем *регулярными*. Тривиальные решения $f(\theta) = 0$, $h(\theta) = 0$ отбросим.

Для точечного заряда уравнения (6.5) приводят к соотношениям

$$[\mathbf{B}[\mathbf{AB}]]=\alpha\mathbf{A}; \tag{6.7}$$

$$[[\mathbf{AB}]\mathbf{A}]=\beta\mathbf{B},$$

где α и β — вещественные числа. Уравнения (6.7) показывают, что группа голономии порождается операторами **A**, **B** и [**AB**] (производная подгруппа).

Введем новую переменную $z=\cos\theta$. Тогда уравнения (6.5) примут вид

$$f''-\frac{2z}{1-z^2}f'-\frac{\alpha fh^2}{(1-z^2)^2}=0; \tag{6.8}$$

$$h''+\frac{\beta f^2 h}{1-z^2}=0, \tag{6.9}$$

где штрих означает дифференцирование по z, а условия регулярности решений переходят в следующие:

$$\left.\begin{array}{l} f,\ f'(1-z^2)^{1/2},\quad fh(1-z^2)^{-1/2} \text{ и} \\ h \text{ ограничены на } -1<z<1. \end{array}\right\} \tag{6.10}$$

Операторы **A** и **B** можно нормировать так, чтобы $|\alpha|$ и $|\beta|$ равнялись единице (если они не исчезают). Тогда представляются три возможности: 1) $\alpha=0$; $|\beta|=1$; 2) $|\alpha|=|\beta|=1$; 3) $|\alpha|=1$; $|\beta|=0$.

Случай 1: $\alpha=0$; $|\beta|=1$. Единственное регулярное решение (6.8): $f(z)=\text{const}$. При $\beta=-1$ (6.9) имеет регулярное решение, отличное от нуля только в том случае, если $f=0$. Это решение $h=h_0+h_1\cdot z$, где h_0 и h_1 постоянны. При $\beta=1$ (6.9) имеет регулярное решение только в том случае, если

$$f^2=m(m+1);\quad m\geqslant 0 \quad \text{и целое.} \tag{6.11}$$

Это решение имеет вид

$$h(z)=(1-z^2)(d/dz)P_m(z), \tag{6.12}$$

где $P_m(z)$ — полиномы Лежандра степени m.

Из (6.7) следует, что при $\alpha=0$, $\beta=1$ **B** и [**AB**] порождают абелеву инвариантную подгруппу $\mathcal{H}$. При этом можно показать, что $\mathrm{Sp}\,\mathbf{B}^k=0$ для любого положительного целого k, откуда следует, что **B** — нильпотентная матрица. Следовательно, $\exp \omega \mathbf{B}$ — полином, так что $\mathscr{H}$ некомпактна. В соответствии с (6.7) имеем

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A} &= \mathbf{L}_1 + a_2 \mathbf{L}_2 + a_3 \mathbf{L}_3; \\ \mathbf{B} &= b_2 \mathbf{L}_2 + b_3 \mathbf{L}_3, \end{aligned}\right\} \tag{6.13}$$

где $\mathbf{L}_1$, $\mathbf{L}_2$ и $\mathbf{L}_3$ — генераторы $\mathscr{H}$, удовлетворяющие коммутационным соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} [\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2] &= \mathbf{L}_3; \\ [\mathbf{L}_2, \mathbf{L}_3] &= 0; \\ ]\mathbf{L}_3, \mathbf{L}_1] &= \mathbf{L}_2. \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

Здесь алгебра Ли рассматривается над полем вещественных чисел. Поэтому a_2, a_3, b_2, b_3 — вещественны.

Если слой представляет собой 2-мерное комплексное линейное векторное пространство, всегда можно выбрать базис в нем так, чтобы

$$\mathbf{L}_1 = \pm \begin{pmatrix} \gamma + \mathrm{i} & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{L}_3 = \pm \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

где γ — комплексное число.

Представление (6.15) имеет инвариантное подпространство, но из-за некомпактности $\mathscr{H}$ оно не вполне приводимо. Неприводимых 2-мерных представлений алгебры Ли $\mathscr{H}$ не существует.

Случай 2: $|\alpha| = 1$; $|\beta| = 1$. Исследование дифференциального уравнения (6.9) около сингулярностей показывает, что любое нетривиальное регулярное решение $h(z)$ должно удовлетворять условию $h(\pm 1) = 0$; $h'(\pm 1) \neq 0$. Учет знаков h'' и h показывает, что эти условия удовлетворяются только в случае $\beta > 0$. Следовательно, $\beta = 1$, в то время как $h(z) = 0$. Зная поведение нетривиального регулярного решения $h(z)$ около точек $z = \pm 1$, можно исследовать уравнения (6.8). Тогда придем к выводу, что любое нетривиальное регулярное решение $f(z)$ должно удовлетворять условиям $f(\pm 1) \neq 0$; $f'(\pm 1) = 0$. Эти условия не могут быть выполнены, если $\alpha > 0$, так как тогда $f' = 0$, по крайней мере в одной точке z в интервале $-1 < z < 1$, и, следовательно, f'' и f имеют одинаковый знак. Следовательно, остается единственная возможность: $\alpha = -1$. Решений уравнений (6.8), (6.9) в этом случае не найдено, но предполагается, что они существуют и образуют дискретный спектр. При $\alpha = -1$, $\beta = 1$ группа голономии является некомпактной модификацией $O_3 : \mathscr{H} = O(2, 1)$.

Случай 3: $|\alpha| = 1$; $\beta = 0$. Тогда $h(z) = h_0 + h_1 z$ с постоянными h_0 и h_1. Если h_0 и h_1 исчезают одновременно, получим $h(z) = 0$. В других же случаях h не может исчезать одновременно в обеих точках $z = \pm 1$ [сингулярные точки для (6.8)]. В той из них, в которой $h \neq 0$, характеристическое уравнение при отрицательном α имеет мнимые корни. Так как $f(z)$ должно быть вещественно, $\alpha = 1$. Разложение ненулевого $f(z)$ в той сингулярности, в которой $h \neq 0$, содержит главный член $f_1(z \pm 1)^{1/2\,|h(\pm 1)|}$, где f_1 — константа. Знак выбирается в зависимости от той сингулярности, о которой идет речь.

Следовательно, регулярных решений в случае 3) не существует, если не считать почти тривиальных возможностей, когда $h(z) = 0$, $f(z) = \mathrm{const}$ и $h(z) = h_0 + h_1 \cdot z$, $f(z) = 0$.

Случай 4: $\alpha = 0$; $\beta = 0$. Единственное регулярное решение уравнений (6.8), (6.9) имеет вид $f = \mathrm{const}$; $h = h_0 + h_1 z$, где h_0 и h_1 — постоянны.

Таким образом, максимально общее решение для калибровочного поля точечного заряда в рассмотренном случае дается формулами (6.11), (6.12). Это решение не является сферически-симметричным. Соответствующая ему группа голономии не полупроста и некомпактна.

Исследование асимптотического поведения компонент этого решения показывает, что одна из них ведет себя на бесконечности как кулоновский потенциал (хотя вблизи $r = 0$ поведение довольно сложное), а остальные компоненты — короткодействующие. Решение (6.11), (6.12) можно интерпретировать как описывающее два «пузыря», находящихся на большом расстоянии друг от друга и взаимодействующих между собой «почти» электромагнитно. Вблизи «пузырей» и внутри них поле короткодействующее, типа ядерных сил. Иными словами, «пузыри» (или янг-милловские «частицы») — это чисто полевые образования, напоминающие в этом смысле геоны Уилера.

Юзес [11] рассматривал решения уравнений Янга—Миллса, обладающие плоскостью симметрии. Наличие плоскости симметрии определялось условием равенства нулю ковариантных производных по y и z тензора напряженности поля и его ковариантных производных. Было показано, что для решений уравнений (6.2), обладающих этим свойством, группа голономии абелева, а уравнения Янга—

Миллса переходят в уравнения Максвелла, если имеется хотя бы одна область пространства—времени, в которой нет источников поля.

При физической интерпретации решений уравнений калибровочных полей важным моментом является требование положительной определенности плотности энергии поля. В отсутствие источников положительная определенность плотности энергии обеспечивается полупростотой и компактностью группы голономии соответствующих решений. Решения (6.11), (6.12) не удовлетворяют этому требованию. Поэтому они содержат неисчезающие компоненты, не дающие вклада в тензор энергии-импульса, которые трудно физически интерпретировать. Другой пример того же рода— решение свободных уравнений Янга—Миллса, регулярное, с неабелевой группой голономии, удовлетворяющее в фиксированный момент времени $x^0 = t_0$ требованию

$$\mathbf{F}_{01} = b\mathbf{F}_{23}; \quad \mathbf{F}_{02} = b\mathbf{F}_{31}; \quad \mathbf{F}_{03} = b\mathbf{F}_{12}, \qquad (6.16)$$

где $b = \mathrm{const}$.

Анализ показывает, что условия (6.16) выполняются во все моменты времени $x^0 > t_0$, если $b = \pm i$, а вектор-потенциалы (коэффициенты связности) удовлетворяют при $b = i$ условию

$$\partial_0 \mathbf{\Gamma}_1 = \mathrm{i}\,(\partial_2 \mathbf{\Gamma}_3 - \partial_3 \mathbf{\Gamma}_2 - [\mathbf{\Gamma}_2 \mathbf{\Gamma}_3]), \ \mathrm{cycl}.$$

Это решение в качестве группы голономии имеет комплексифицированную группу голономии 3-мерного подпространства $x^0 = \mathrm{const}$. Такая группа голономии некомпактна. Тензор энергии-импульса калибровочного поля в этом случае равен нулю.

Если считать физическими только те решения, которые дают положительную плотность энергии поля, можно указать целые классы решений, которые отбрасываются этим требованием. Например, можно показать, что не существует частицеподобных (т. е. регулярных и в определенном смысле локализуемых) решений свободных уравнений Янга—Миллса, группа голономии которых компактна и полупроста, а поле относится к одному из следующих типов:

1) постоянное поле, для которого существует такая калибровка, что вектор-потенциалы не зависят от времени;

2) статическое поле, для которого тензор напряженности $\mathbf{F}_{\varkappa\lambda}$ ковариантно постоянен во времени, и

3) стационарное поле, тензор напряженности которого удовлетворяет условию $\nabla_\iota \mathbf{F}_{\varkappa\lambda} = [\mathbf{T}, \mathbf{F}_{\varkappa\lambda}]$, где $\mathbf{T}$ — операторное поле $\mathbf{T}(x)$, обладающее специальными свойствами (например, $\nabla_\varkappa \mathbf{T}$ принадлежит алгебре Ли группы голономии и др.).

Таким образом, простота и компактность группы голономии сильно ограничивают выбор решений классических уравнений Янга—Миллса. Они являются в сущности физическими требованиями, гарантирующими положительную определенность плотности энергии поля. В свою очередь, структура группы голономии сильно зависит от пространственно-временной симметрии решений. Тем самым требование положительной определенности энергии накладывает ограничения и на возможную пространственно-временную конфигурацию калибровочного поля.

Электромагнитное поле и мультиплеты векторных полей Идея калибровочных полей тесно связана с идеей иерархии взаимодействий, т. е. классификации взаимодействий по группам симметрии. Каждый вид взаимодействий (сильные, слабые, электромагнитные и гравитационные), будучи представлен через калибровочное поле, соответствует определенной локальной группе симметрии $G_{\infty r}$ и некоторому сохраняющемуся току, связанному с конечной группой G_r (подгруппой $G_{\infty r}$). Переход от одной симметрии к другой означает переход к другому взаимодействию. В то же время мы видели, что решения уравнений калибровочных полей могут обладать более узкой симметрией, чем группа симметрии уравнений (калибровочная группа). Например, все сферически-симметричные решения имеют абелеву группу голономии и поэтому кулоновоподобны. С точки зрения иерархии взаимодействий таким решениям соответствует электромагнитное поле, поскольку другие дальнодействующие поля с кулоновским потенциалом (если пренебречь гравитационным полем) неизвестны. Таким образом, электромагнитное поле оказывается включенным в один мультиплет с другими взаимодействиями, каждому из которых соответствует решение уравнений поля с определенной пространственно-временной симметрией и соответствующей группой голономии.

Как уже отмечалось, группа голономии может быть подгруппой калибровочной группы. Поэтому для отождествления взаимодействий и симметрий нужно дополнительно исследовать вопрос, в какие более широкие группы могут вкладываться в качестве подгрупп абелевы группы голономии, соответствующие сферически-симметричным решениям [10]. Эту задачу можно рассматривать и иначе: каким образом электромагнитное поле включается в один мультиплет с другими взаимодействиями? Обычно закон сохранения электрического заряда (1 компонента) объединяют с законами сохранения изотопического спина (3 компоненты) и гиперзаряда (1 компонента). В результате получается 8-параметрическая простая калибровочная группа SU_3. Почему именно SU_3? Оказывается, что единственный нетривиальный случай вложения абелевой подалгебры группы голономии в алгебру калибровочной группы G_r представляется, когда группа голономии соответствует подгруппе простой группы Ли. В остальных вариантах либо компоненты мультиплета распадаются на невзаимодействующие части, либо эти части распространяются не одинаково: одна группа компонент влияет на другую, но не наоборот [12].

Заметим, однако, что если электромагнитное поле включается таким образом в мультиплет полей с простой калибровочной группой, в уравнениях Максвелла для дальнодействующей электромагнитной компоненты появляются «источники» типа магнитных монополей, создаваемые неэлектромагнитными компонентами мультиплета. В самом деле, в последнем случае для электромагнитной компоненты мультиплета $F_0^{\mu\nu}$ уравнения поля дадут

$$\partial_\mu F_0^{\mu\nu} = f_{0b}^{a} F_a^{\mu\nu} A_\nu^b,$$

где $a, b \neq 0$ вследствие антисимметрии структурных констант для простой группы. Эти уравнения можно понимать как уравнения Максвелла с источниками электрического типа.

Тождества Бианки при выделении электромагнитной компоненты мультиплета дают уравнения Максвелла с «источниками» магнитного типа:

$$\partial_{[\tau} F_{\mu\nu]}^{0} = f_{ab}^{0} F_{[\mu\nu}^{a} A_{\tau]}^{a}.$$

Нужно отметить, что мультиплет взаимодействий, соответствующих цепочке групп голономии, являющихся подгруппами калибровочной группы, может начинаться с любого дальнодействующего поля, например гравитационного. Все зависит от того, с чем отождествляются сферически симметричные решения уравнений поля.

О зарядах, переносимых калибровочным полем. Если поле Янга—Миллса осуществляет взаимодействие между заряженной частицей (протоном) и незаряженной (нейтроном), оно должно переносить, в частности, электрический заряд. Но всегда ли это возможно? Несмотря на свою неожиданность, такой вопрос законен, так как мультиплет векторных полей (или неабелево калибровочное поле) переносит мультиплет сохраняющихся величин типа зарядов, образующих «вектор заряда». Этот вектор может «вращаться» в групповом пространстве калибровочной группы во время движения частицы (см. § 2 и 7). Использование группы голономии позволяет сформулировать понятие инвариантных относительно калибровочных преобразований зарядов, представляющих собой своего рода проекции вектора заряда на пространство—время.

Электрический заряд определяется классически как интеграл от четвертой компоненты плотности тока по 3-мерному пространству:

$$Q = \int J^0 d^3 x.$$

В случае произвольной калибровочной группы такая процедура дает r аналогичных зарядов, где r — размерность калибровочной группы G_r:

$$Q_a = \int J_a^0 d^3 x, \quad a = 1, \ldots, r.$$

При переходе к квантовой теории из них остаются только те заряды, которые соответствуют коммутирующим друг с другом генераторам G_r. Число их равно рангу калибровочной группы (или числу операторов Казимира для нее).

Заряды Q_a не являются калибровочно-инвариантными величинами, поскольку содержат групповой индекс. Для того чтобы устранить связанную с этим неоднозначность в определении Q_a, Лус предложил ввести еще один тип «зарядов», инвариантных по отношению к преобразованиям калибровочной группы. Они определяются посредством интегрирования с ковариантно-постоянными на замкнутой поверхности σ матрицами $\mathbf{C}$, коммутирующими с той частью преобразований группы голономии, которая соответствует петлям на поверхности интегрирования σ:

$$\widetilde{Q} = \int \mathrm{Sp}(J_a^0 C^a)\, d^3 x = \oint_\sigma \mathrm{Sp}(\mathbf{F}^{\mu\nu}\mathbf{C})\, d\sigma_{\mu\nu}.$$

Легко видеть, что число «измеряющих операторов» $\mathbf{C}$ может не совпадать ни с размерностью, ни с рангом калибровочной группы. Преимуществом такого определения заряда является его инвариантность относительно калибровочной группы. Однако число получаемых таким образом зарядов зависит от размерности представления группы голономии $\mathcal{H}$, по которому преобразуется $\mathbf{F}^{\mu\nu}$. Меняя выбор $\mathbf{C}$, можно получить различные заряды в обычном смысле: электрический заряд, гиперзаряд, барионное число и т. д.

§ 7. О СВЯЗИ МЕЖДУ КАЛИБРОВОЧНЫМИ ПОЛЯМИ И ГЕОМЕТРИЕЙ ПРОСТРАНСТВА — ВРЕМЕНИ

Полностью геометризованная теория не должна содержать внешних по отношению к себе объектов. Невыполненность этого условия в общей теории относительности, где источники гравитационного поля — материя — выбирались из феноменологических соображений, была причиной постоянной неудовлетворенности Эйнштейна созданной им теорией и его многолетних поисков чисто геометрической единой теории всех полей. Геометрическая интерпретация различных взаимодействий в терминах геометрии расслоенного пространства позволяет не только найти общий принцип построения классической теории различных полей, но и решить, по крайней мере в принципе, проблему взаимодействия этих полей с гравитационным полем.

Геометрические единые теории гравитации и электромагнетизма и обобщения римановой геометрии. Создание общей теории относительности привело к появлению геометрических теорий и для других взаимодействий. Прежде всего это относится к электромагнитному полю. Геометрический путь казался наиболее естественным для создания единой теории классических полей, описывающей не только каждое поле в отдельности, но и взаимодействие между ними. Поиски геометрического описания электромагиитного поля велись в четырех основных направлениях: 1) обобщение параллельного переноса векторов в 4-мерном пространстве — времени; 2) обобщение метрики пространства — времени; 3) совместное решение уравнений Максвелла и Эйнштейна в римановом пространстве общей теории относительности как уравнений уже объединенной системы гравитационного и электромагнитного полей; 4) обобщение самого пространства — времени, т. е. введение дополнительного, 5-го измерения.

В первом случае обобщались коэффициенты связности риманова пространства—времени V_4. Для этого кроме символов Кристоффеля $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, соответствующих гравитационному полю (по Эйнштейну), вводились дополнительные коэффициенты связности Γ_{μ}, которые отождествлялись с вектор-потенциалом A_{μ} электромагнитного поля. Таким образом, пространство—время V_4 наделялось геометрией Вейля. В пространстве Вейля параллельный перенос изменял длину векторов. Это дополнительное преобразование (калибровка масштаба) отождествлялось с калибровочными преобразованиями в электродинамике [13, 14]. Использование геометрии Вейля привело к открытию любопытного геометрического аналога квантования орбит по Бору. Именно, если рассматривать кулоновское центрально-симметричное электромагнитное поле (атом водорода) в пространстве Вейля, то оказывается, что боровские орбиты (орбиты электрона) — это те траектории, вдоль которых параллельный перенос вектора не меняет его длины. В то же время любые другие траектории в пространстве Вейля этому требованию не удовлетворяют.

К направлению (1) относятся и другие обобщения параллельного переноса в пространстве—времени V_4, например те, которые используют для геометрической интерпретации электромагнитного поля антисимметричную часть коэффициентов связности (кручение). При этом симметричная часть коэффициентов связности (символы Кристоффеля), как и в общей теории относительности, отождествляется с гравитационным полем [15, 16].

Направление (2) представлено так называемыми несимметричными теориями, т. е. теориями, использующими несимметричный метрический тензор $g_{\mu\nu} = g_{(\mu\nu)} + g_{[\mu\nu]}$ [15, 16]. В этих теориях электромагнитное поле влияет на геометрию через антисимметричную часть метрики, которая зависит от тензора напряженности электромагнитного поля $F_{\mu\nu}$. Несимметричная часть связности в такой теории выражается через несимметричную часть метрики. Равенство нулю несимметричной части метрики влечет за собой равенство нулю несимметричной части связности. Аппарат здесь получается очень громоздким и сложным из-за неоднозначности операций ковариантного дифференцирования и поднятия и опускания индексов. Однако несимметричная теория дает очень интересную зависимость между гравитационным и электромагнитным полями. Вследствие этой зависимости, например, нейтральная массивная вращающаяся звезда может приобрести магнитное поле. Кроме того, из теории вытекает ограничение сверху на величину электромагнитного поля, которым может обладать гравитирующая система [17]. Такого ограничения не дает никакая другая теория.

Пункт (3) — геометродинамика Райнича—Уилера—Мизнера [2, 18]. Эта теория использует обычную риманову геометрию общей теории относительности, но обобщает ее уравнения. Система уравнений Эйнштейна второго порядка по производным от $g_{\mu\nu}$. Если же в совместной системе уравнений Эйнштейна—Максвелла исключить электромагнитные переменные, то для $g_{\mu\nu}$ получится система уравнений 4-го порядка. Она содержит достаточно информации для того, чтобы описывать чисто геометрически как гравитационное, так и электромагнитное поле. Электромагнитное поле оказывается в этом случае связанным со скоростью изменения римановой кривизны пространства—времени. Следы, оставляемые электромагнитным полем на метрике пространства—времени, столь характерны, что по ним можно восстановить свойства породившего их поля. В геометродинамике возможны устойчивые, чисто полевые образования — *геоны*. Для внешнего наблюдателя геоны ведут себя как тяготеющая масса, но на самом деле никакой сингулярности внутри них нет. Они соответствуют регулярным решениям уравнений Эйнштейна—Максвелла и «состоят» из замкнутых силовых линий поля. Электрический заряд в рамках геометродинамики также получает чисто геометрическую интерпретацию, если учесть топологические свойства V_4. Если пространство—время наделено неевклидовой топологией (обладает «ручками» и «дырками»), то поток силовых линий через каждую топологическую «ручку» ведет себя для внешнего наблюдателя, находящегося около одной горловины «ручки», как классический электрический заряд. Однако величина этого заряда не имеет прямого отношения к заряду элементарных частиц, например электрона. Таким образом, работы Райнича, Уилера и Мизнера показывают, что классическая физика, если в нее включать теорию тяготения Эйнштейна и максвелловскую электродинамику, представляет собой естественным образом объединенную чисто геометрическую теорию. Иными словами, классическая физика суть аспект геометрии.

В основе 5-мерных теорий, развивавшихся Эйнштейном, Калузой, О. Клейном, Манделем, Фоком, Румером [19]—

[21], геометрически объединяющих электродинамику и гравитацию, лежит замечание Ф. Клейна о том, что каждая механическая задача о движении материальной точки с помощью пространства высшего числа измерений может быть сведена к определению пути светового луча, проходящего в соответствующей среде. Вместо 4-мерного риманова пространства—времени в 5-мерной оптике (или 5-оптике) рассматривается 5-мерное многообразие, в котором пятая координата пропорциональна действию S: $x^5 = S/mc$. Траектории заряженных массивных частиц, взаимодействующих с электромагнитным полем в 4-мерном пространстве—времени, соответствуют тогда траекториям луча света, распространяющегося в 5-мерном римановом многообразии с метрическим тензором [21]:

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g_{ik} + g_i g_k & g_i \\ g_k & 1 \end{pmatrix}. \tag{7.1}$$

Контравариантные компоненты $g^{\mu\nu}$ имеют вид

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} g^{ik} & -g^i \\ -g^k & 1 + g^{ik} g_i g_k \end{pmatrix}. \tag{7.2}$$

Здесь $g_i = (e/mc^2) A_i$, где A_i — электромагнитный вектор-потенциал; e — электрический заряд.

Существование кванта действия S отражается в топологической замкнутости пятой координаты. Иными словами, координатная линия пятой координаты представляет собой окружность S^1. Легко видеть, что компоненты 5-мерного метрического тензора не зависят от x^5. Это условие отражает независимость наблюдаемых явлений от пятой координаты и называется *условием цилиндричности.* Оно означает ортогональность V_4 и x^5 в выбранной метрике.

О. Клейн и В. А. Фок показали, что квантовомеханическая задача о движении частицы со спином нуль может быть сформулирована как задача о распространении скалярных волн в 5-мерном пространстве, если на зависимость скалярной волновой функции ψ от пятой координаты наложить условие цикличности:

$$\Psi(x^1, x^2, x^3, x^4, x^5) = \psi(x^1, x^2, x^3, x^4) \exp(\mathrm{i}\, mcx^5/\hbar).$$

В самом деле, волновое уравнение для 5-мерного пространства $\partial^2\Psi/\partial x^{\alpha 2} = 0$ соответствует в этом случае в 4-мерном пространстве уравнению Прока:

$$[\Box - (mc/\hbar)^2]\, \psi = 0.$$

Аналогично для векторных полей. Уравнения Прока для массивных векторных мезонов в 4-мерной формулировке благодаря условию цилиндричности превращаются в 5-мерные уравнения Максвелла. Таким образом, 5-оптика объединяет электродинамику и динамику массивных векторных мезонов в единую 5-мерную теорию Максвелла. Физически это значит, что она приводит к необходимости учитывать в электромагнитной теории света при наличии коротких волн $\lambda \ll \hbar/mc$ кроме обычных фотонов еще и «тяжелые фотоны» — векторные мезоны. Как заметил Румер [21], при описании звуковых волн в неограниченном плоскопараллельном слое возникает сходная ситуация. Если в звуковом поле представлены только длинные волны $\lambda > l$, где l — толщина слоя, λ — длина волны звука, то имеются только обычные двумерные фононы, распространяющиеся без дисперсии. Если же в звуковом поле представлены и короткие волны $\lambda < l/n$, то необходимо учитывать и двумерные «тяжелые фононы», распространяющиеся с дисперсией. При этом возникает альтернатива: 1) отказаться от двумерного описания звукового поля и перейти к трехмерному уравнению или 2) сохраняя двумерное описание, ввести наряду с обычными двумерными фононами «тяжелые фононы».

5-Оптика приводит к появлению дополнительного скалярного гравитационного поля χ, которое в классической теории нельзя отделить от обычного гравитационного поля, связанного с 4-мерным метрическим тензором, но которое можно выделить при квантовании 5-мерной теории. Это поле связано с 5-мерным метрическим тензором соотношением $g_{55} = 1 + \chi$. Наличие χ-поля в 5-оптике приводит к исчезновению особенности у кулоновского потенциала при $r=0$ в задаче о поле заряженной точечной массы.

Имбединг. Внутреииие симметрии и масса калибровочного поля как следствие искривления простраиства—времени. В связи с развитием теории элементарных частиц и исследованием их внутренних симметрий появились работы, в которых предлагалось использовать для интерпретации внутренних симметрий и соответствующих им калибровочных полей свойства искривленного пространства—времени, а именно свойства вложимости риманова пространства—времени в плоское пространство большей размерности (имбединг) [22, 23]. В самом деле, произвольное риманово пространство локально можно рассматривать как поверхность, вложенную в 10-мерное евклидово пространство. При этом возникает 6 дополнительных измерений, которые можно интерпретировать как внутренние степени свободы элементарных частиц. Удобно выбрать во вмещающем пространстве систему координат так, чтобы координатные векторы, дополнительные к пространственно-временным, были к ним ортогональны. Тогда преобразования «внутренних» степеней свободы не будут затрагивать пространства—времени. Иначе говоря, преобразования калибровочной группы будут коммутировать с преобразованиями группы Лоренца. В 6-мерном «внутреннем» пространстве, возникающем при имбединге, действует ортогональная группа O_6, которая имеет в качестве подгруппы группу SU_3, классифицирующую состояния элементарных частиц. Различные способы вложения дают различные группы «внутренних» симметрий. Динамические симметрии, описываемые киральными группами типа $SU_2 \times SU_2$ или $SU_3 \times SU_3$, также могут быть получены с помощью имбединга.

Если V_4 обладает некоторой степенью симметрии, его класс вложимости (число дополнительных размерностей) может быть меньше шести. Так, статическое и сферически-симметричное поле Шварцшильда, создаваемое точечной гравитирующей массой, вложимо в плоское пространство 6 измерений. Его класс вложимости равен двум. Совокупность 15 генераторов ортогональной группы O_6 содержит одно преобразование в 2-мерной плоскости, коммутирующее с группой Лоренца. Это преобразование можно рассматривать как внутреннюю симметрию.

Относительно некоторых типов полей тяготения можно указать нижнюю или верхнюю границу класса вложимости [24]. Например, не существует риманова (и псевдориманова) многообразия V_4 с $R_{\mu\nu} = 0$, вложимого в 5-мерное плоское пространство. Единственное V_4 с $R_{\mu\nu} = \lambda g_{\mu\nu}$ (уравнение Эйнштейна с космологическим членом), вложимое в 5-мерное пространство, есть пространство постоянной кривизны. Единственный вид решений уравнений Эйнштейна с некогерентной материей ($p = 0$), который вложим в 5-мерное пространство, — фридмановские космологические модели. Если материя вращается, V_4 не может быть вложено в 5-мерное пространство. Таким образом, свойства внутренних симметрий, возникающих при имбединге, определяются свойствами материи в римановом пространстве—времени.

Число дополнительных размерностей резко увеличится, если все пространство—время, а не только окрестность некоторой точки рассматривать как поверхность в некотором плоском пространстве большей размерности. Для такого *глобального* вложения V_4 с гиперболической сигнатурой* нужно пространство, имеющее, вообще говоря, более 230 измерений. Однако часто число измерений для глобального вложения современных космологических моделей гораздо меньше.

Для того чтобы проиллюстрировать соотношение между внутренними и пространственно-временными симметриями при имбединге, представим V_4 как кривую в плоском 3-мерном пространстве. Выберем какую-нибудь точку этой кривой и построим плоскость, ортогональную к кривой в данной точке. Преобразованиям внутренних симметрий будут соответствовать вращения в этой плоскости. Такие вращения оставляют инвариантной окрестность выбранной точки на кривой. Подобным образом при вложении V_4 преобразования дополнительных (ортогональных к V_4) размерностей оставляют инвариантным некоторый малый фиксированный объем ΔV_4. Поскольку ортогональность кривой и плоскости в нашем примере лишь локальная, вся кривая не может быть инвариантной при «внутренних вращениях». Это значит, что свойства внутренней симметрии могут носить только локальный характер. Если рассматривать процессы, захватывающие большие области пространства—времени, внутренняя симметрия, вообще говоря, может исчезнуть. Размеры области ΔV_4, в которых выполняются свойства внутренней симметрии (или ортогональность V_4 и дополнительного подпространства), можно связать с радиусом действия калибровочного поля, соответствующего внутренней симметрии, или с массой его квантов.

Таким образом, использование имбединга позволяет интерпретировать появление внутренних симметрий элементарных частиц как следствие искривления пространства—времени на малых расстояниях. Эта связь должна проявляться сильнее в районах с большой кривизной. На этом пути возможна зависимость между космологическими свойствами Вселенной и свойствами элементарных частиц.

Теория калибровочных полей как теория связностей расслоенного пространства, наделенного метрикой. Все рассмотренные выше обобщения геометрических представлений о пространстве—времени оказываются взаимно связан-

---

* Т. е. когда метрический тензор приводится к виду $g_{\mu\nu} = (-1, -1, -1, 1)$.

ными, если перейти к геометрии расслоенных пространств. В самом деле, частным случаем расслоенного пространства является многообразие поверхностей, вложенных в пространство большей размерности. Локально расслоенное пространство представляет собой прямую сумму двух пространств. Иначе говоря, всегда можно выбрать систему координат так, чтобы базисные векторы в слое были ортогональны к базисным векторам базы. Преобразования структурной группы G_r, действующей в слое, не затрагивают базы, что необходимо для интерпретации G_r как группы внутренней симметрии. Таким образом, структура вмещающего пространства, возникающая при вложении риманова V_4, локально идентична структуре расслоенного пространства. Введение метрики и коэффициентов связности во вмещающем или расслоенном пространстве и отображение слоя на касательное пространство к базе позволяют получить геометрические интерпретации любого калибровочного поля как проявления неевклидовости пространства—времени (аналогично рассмотренным в предыдущих пунктах). В сущности, такое отображение уже исключает специфику расслоенного пространства, сводя все проявления калибровочного поля к особенностям геометрии физического 4-мерного пространства и к отклонениям этой геометрии от евклидовой. При этом появляется возможность учитывать различные формы взаимодействия между гравитационным полем и калибровочными полями.

Рассмотрим обобщение 5-мерной теории гравитации и электродинамики Калузы—Клейна на произвольные калибровочные поля [25].

Эквивалентность подходов Утиямы и Калузы — Клейна к теории электромагнитного поля. Теорию электромагнитного поля в формулировке Утиямы можно рассматривать как геометрическую теорию связностей на главном расслоенном пространстве над римановым многообразием V_4 со структурной группой, изоморфной одномерной сфере S^1. Одномерность слоя — следствие одномерности абелевой группы калибровок электромагнитных потенциалов. Компактность слоя (окружность, а не прямая) — следствие требования положительной определенности энергии электромагнитного поля. Теория Калузы — Клейна также представляет собой геометрическую теорию, трактующую единым образом гравитационное и электромагнитное поля в 5-мерном дифференцируемом многообразии. Между этими теориями существует изоморфизм. Чтобы его установить, необходимо ввести метрику на главном расслоенном пространстве (которое также будет 5-мерным дифференцируемым многообразием). Эта метрика должна удовлетворять следующим требованиям: а) горизонтальные подпространства касательного пространства ко всему расслоенному пространству должны быть ортогональны при этой метрике к вертикальным подпространствам; б) проекция метрики на горизонтальное пространство должна быть изоморфна римановой метрике на базисном многообразии; в) вертикальная часть метрики должна быть изоморфна некоторой метрике пространства, касательного к слою, т. е. некоторой метрике на алгебре Ли структурной группы.

Единственный произвол, который содержится в таком определении, относится к (в), поскольку на группе существуют разные метрики. В теории Калузы — Клейна групповая метрика самая тривиальная и соответствует определению длины в R^1. Такой выбор метрики эквивалентен «сильному условию цилиндричности» Калузы—Клейна (см. [19]).

В теории Утиямы лагранжиан не выбирается однозначно. Устанавливается лишь, что он зависит от геометрической величины — формы кривизны расслоенного многообразия. Однако точная форма этой зависимости не фиксируется. Для того чтобы установить изоморфизм между теориями Утиямы и Калузы—Клейна, а также обобщить этот изоморфизм на неабелевы калибровочные группы, допустим, что лагранжиан равен скалярной плотности, составленной из квадратного корня детерминанта метрического тензора риманова V_4, умноженного на скалярную кривизну расслоенного пространства. Тогда останется выбрать только метрику на групповом пространстве. Возьмем в качестве метрики на группе инвариантную метрику, составленную из структурных констант: $g_{ab} = f_a{}^c{}_d f^d_c{}_b$. В случае одномерной абелевой группы детерминант 5-мерного метрического тензора равен детерминанту метрического тензора базы. Скалярная кривизна расслоенного пространства равна в этом случае сумме скалярной кривизны V_4 и лагранжиана электромагнитного поля. Оказывается, что и для неабелевых калибровочных групп скалярная кривизна расслоенного пространства представляет собой сумму скалярной кривизны V_4 и лагранжиана калибровочного поля.

Обобщение теории Калузы — Клейна на неабелевы калибровочные групп ы. Пусть над римановым пространством—временем V_4 с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$ построено главное расслоенное пространство, причем структурная группа — конечная группа Ли G_r. Пусть в этом расслоенном пространстве введена связность Γ^{φ}_{μ}. Тензор кривизны, соответствующий этой связности, совпадает с тензором напряженности калибровочного поля. Метрика на группе выбрана инвариантной.

В окрестности каждой точки такое расслоенное пространство представляет собой прямое произведение окрестности точки в базе на окрестность точки в групповом пространстве. Это достигается выбором специальной системы координат. Будем считать, что индексы μ, ν пробегают значения от 1 до 4 (координаты базы), индексы a, b, c, ... — от 5 до $r+4$ (координаты в слое), α, β, γ, ... — от 1 до $r+4$. Тогда специализация системы координат сводится к тому, что дифференциал проекции на базу dp имеет координаты $dp^{\nu}_{\mu} = \delta^{\nu}_{\mu}$ и $dp^{\nu}_{a} = 0$. Аналогично изоморфизм σ алгебры Ли структурной группы на вертикальное подпространство касательного пространства ко всему расслоенному пространству имеет коэффициенты $\sigma_b{}^a = \delta_b{}^a$ $\sigma_b{}^{\nu} = 0$. Коэффициенты формы связности — $A^a{}_{\mu}$, формы кривизны

$$F^{a}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(\partial_{\mu} A^{a}_{\nu} - \partial_{\nu} A^{a}_{\mu}\right) + f^{a}_{bc} A^{b}_{\mu} A^{c}_{\nu}.$$

На базе выберем локально геодезическую систему координат. Для этого потребуем, чтобы на базе ковариантная производная от $A^a{}_{\mu}$ по групповому пространству исчезала, т. е.

$$\partial_a A^{b}_{\mu} + f^{b}_{ac} A^{c}_{\mu} = 0,$$

или

$$\partial_a A^{b}_{\mu} = f^{b}_{ca} A^{c}_{\mu}. \tag{7.3}$$

Инвариантность метрики на группе g_{ab} означает, что

$$R_a g = g = L_a g, \quad a \in G, \tag{7.4}$$

где R_a и L_a — правая и левая трансляции соответственно. Без потери общности (7.4) сводится к

$$\partial_a g_{bc} = 0. \tag{7.5}$$

Локальная тривиальность расслоения дает

$$\partial_a g_{\mu\nu} = 0; \quad \partial_{\mu} g_{ab} = 0. \tag{7.6}$$

Найдем точную форму метрики расслоенного пространства, удовлетворяющую требованиям (а)—(в). В координатной записи эти требования выглядят следующим образом:

$$dp^{\mu}_{\alpha}\,dp^{\nu}_{\beta}\,g^{\alpha\beta}=g^{\mu\nu};\quad A^{a}_{\alpha}\,A^{b}_{\beta}\,g^{\alpha\beta}=g^{ab}. \tag{7.7}$$

Аналогичные условия можно написать для ковариантных тензоров:

$$d\tau^{\alpha}_{\mu}\,d\tau^{\beta}_{\nu}\,g_{\alpha\beta}=g_{\mu\nu};\quad \sigma^{\alpha}_{a}\,\sigma^{\beta}_{b}\,g_{\alpha\beta}=g_{ab}, \tag{7.8}$$

где $d\tau^{\alpha}_{\mu}$ — дифференциал лифта и σ^{α}_{a} — изоморфизм алгебры Ли на вертикальное подпространство, касательное к слою. При этом удовлетворяются соотношения:

$$\left.\begin{aligned} &A^{a}_{\alpha}\,\sigma^{\alpha}_{b}=\delta^{a}_{b};\quad dp^{\nu}_{\alpha}\,d\tau^{\alpha}_{\mu}=\delta^{\nu}_{\mu};\\ &A^{a}_{\alpha}\,d\tau^{\alpha}_{\mu}=0;\quad dp^{\nu}_{\alpha}\,\sigma^{\alpha}_{a}=0. \end{aligned}\right\} \tag{7.9}$$

Отсюда нетрудно вывести, что единственное решение, удовлетворяющее условиям (7.7) и (7.8), имеет вид:

$$g_{\alpha\beta}=dp^{\nu}_{\alpha}\,dp^{\mu}_{\beta}\,g_{\mu\nu}+A^{a}_{\alpha}\,A^{b}_{\beta}\,g_{ab}; \tag{7.10}$$

$$g^{\alpha\beta}=d\tau^{\alpha}_{\nu}\,d\tau^{\beta}_{\mu}\,g^{\mu\nu}+\sigma^{\alpha}_{a}\,\sigma^{\beta}_{b}\,g^{ab}. \tag{7.11}$$

В наших специальных координатах эти формулы имеют вид:

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} g_{\mu\nu}+g_{ab}\,A^{a}_{\mu}\,A^{b}_{\nu} & g_{ab}\,A^{a}_{\mu}\\ g_{ab}\,A^{b}_{\nu} & g_{ab}\end{pmatrix}; \tag{7.12}$$

$$g^{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} g^{\mu\nu} & -g^{\mu\nu}\,A^{b}_{\nu}\\ -g^{\mu\nu}\,A^{a}_{\mu} & g^{ab}+g^{\mu\nu}\,A^{a}_{\mu}\,A^{b}_{\nu}\end{pmatrix}. \tag{7.13}$$

Простые вычисления показывают, что матрица (7.13) обратна матрице (7.12) и $\det|g_{\alpha\beta}|=\det|g^{\alpha\beta}|^{-1}$. Теперь можно вычислять символы Кристоффеля для расслоенного многообразия. Вычисления проведем в выбранной выше системе координат. Полезно заметить, что поле векторов $A^{\alpha}{}_{a}=$ $=g^{\alpha\beta}g_{ab}A^{b}{}_{\beta}$ — поле векторов Киллинга по отношению к нашей метрике. Это легко усмотреть в нашей системе координат. Во-первых, легко видеть, что единственная неисчезающая компонента $A_{a}{}^{\alpha}$ есть $A^{b}{}_{a}=\delta_{a}{}^{b}$. Наконец, вследствие того, что $\partial_{c}\delta_{a}{}^{b}$ исчезает так же, как $\partial_{a}g_{bc}$, нетрудно получить

$$A^{\alpha}_{a}\,\partial_{\alpha}\,g_{\beta\gamma}+g_{\alpha\gamma}\,\partial_{\beta}\,A^{\alpha}_{a}+g_{\beta\alpha}\,\partial_{\gamma}\,A^{\alpha}_{a}=0. \tag{7.14}$$

Коэффициенты связности в нашей координатной системе имеют вид:

$$\Gamma^a_{bc}=0;\quad \Gamma^\mu_{bc}=0;\quad \Gamma^\nu_{b\mu}=g^{\nu\lambda}g_{ab}F^a_{\mu\lambda};$$

$$\Gamma^a_{b\mu}=g^{\nu\lambda}g_{bc}A^a_\lambda F^c_{\nu\mu}+f^a_{cb}A^c_\mu;$$

$$\Gamma^a_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu+\partial_\nu A^a_\mu)-\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}A^a_\lambda+$$

$$+g^{\lambda\sigma}g_{bc}A^a_\sigma A^b_\nu\mathcal{F}^c_{\lambda\mu}+g^{\lambda\sigma}g_{bc}A^a_\sigma A^b_\mu\mathcal{F}^c_{\lambda\nu};\tag{7.15}$$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}=\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}+g^{\lambda\sigma}g_{bc}A^b_\nu\mathcal{F}^c_{\mu\sigma}+g^{\lambda\sigma}g_{bc}A^b_\mu\mathcal{F}^c_{\nu\sigma},$$

где обозначено

$$\mathcal{F}^a_{\mu\nu}=\frac{1}{2}(\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu)\tag{7.16}$$

и $\begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix}$ — символы Кристоффеля в базе.

Не все коэффициенты связности строго ковариантны по отношению к калибровочной группе. Однако если структурные константы $f_{abc}=g_{ad}f^d{}_{bc}$ антисимметричны по всем трем индексам, в последних двух коэффициентах связности, не меняя их, можно заменить $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$ ковариантной величиной $F^a_{\mu\nu}$. В этом случае, если g_{ab} — инвариантная метрика на группе, антисимметрия f_{abc} является следствием тождеств Бианки.

Отметим также, что в 5-мерной теории, которая здесь обобщается, не все компоненты 5-мерного метрического тензора ведут себя как тензоры при пространственно-временных и групповых преобразованиях. Компоненты проекции 5-мерного метрического тензора на базу (риманова 4-мерная метрика) преобразуются тензорно относительно преобразований координат базы и инвариантны при калибровочных преобразованиях в слое. Компоненты метрики на группе ведут себя как компоненты тензора при калибровочных преобразованиях и инвариантны относительно пространственно-временных преобразований. Смешанные компоненты 5-мерного метрического тензора, пропорциональные вектор-потенциалу калибровочного поля $A_\mu{}^a$, при калибровочных преобразованиях сдвигаются на производную от параметров группы.

Таким образом, 5-мерные преобразования координат при расслоении пространства распадаются на следующие группы: 1) произвольные непрерывные преобразования координат базы (общековариантные преобразования); 2) автоморфизм калибровочной группы (преобразования координат в слое); 3) локальные калибровочные преобразования для векторов-потенциалов калибровочного поля. То же самое должно происходить и здесь. Действительно, в общем случае 4-мерной поверхности, вложенной в псевдоевклидово пространство E_n, компоненты метрического тензора объемлющего пространства представляются в виде матрицы [24]

$$g_{\alpha\beta}=\begin{pmatrix} g_{\mu\nu} & P_{ab\mu}\,x^b \\ P_{ab\mu}\,x^b & \varepsilon^a\,\delta_a^b \end{pmatrix}.$$

Здесь система координат выбрана так, чтобы E_{n-4} было ортогонально к V_4, координатные линии в слое $x^a = v^a t$, где t — параметр. Тензор $P_{ab\mu}$ удовлетворяет условию $P_{ab\mu} + P_{ba\mu} = 0$. В такой записи особенно хорошо видно, что неоднородные преобразования типа локальных калибровочных преобразований всегда появляются наряду с тензорными преобразованиями при переходе к пространствам высших размерностей, содержащим V_4 в качестве поверхности $x_a = 0$ $(a = 5, \ldots n)$.

У р а в н е н и я к а л и б р о в о ч н о г о и г р а в и т а ц и о н н о г о п о л е й. Имея лагранжиан, равный $\sqrt{-g}\,R$, как в теории Калузы — Клейна, с помощью известной стандартной вариационной процедуры получим уравнения Эйлера—Лагранжа в форме

$$\left(R_{\alpha\beta}-\frac{1}{2}\,g_{\alpha\beta}\,R\right)\delta g^{\alpha\beta}=0. \tag{7.17}$$

Вариации $\delta g^{\alpha\beta}$ не вполне произвольны. Потребуем, чтобы они не меняли структуры расслоенного пространства. Другими словами, вариации $\delta g^{\alpha\beta}$ не должны менять форму метрики (7.13). В пределах этих условий вариации $\delta g^{\mu\nu}$ и $A_\mu{}^a$ произвольны.

Уточним вид отдельных частей уравнений Эйлера—Лагранжа, соответствующий независимому варьированию коэффициентов связности $A_\mu{}^a$ и метрики $g^{\mu\nu}$. Заменив $g_{\alpha\beta}$ и $g^{\alpha\beta}$ их выражениями (7.12), (7.13), получим две системы уравнений;

$$A_\mu^a\,R_{ab}-R_{b\mu}=0 \tag{7.18}$$

(соответствует варьированию по $A_\mu{}^a$) и

$$R_{ab} A^a_\mu A^b_\nu - 2R_{b\nu} A^b_\mu + R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 0 \tag{7.19}$$

(соответствует варьированию по $g^{\mu\nu}$). Используя (7.18), приведем (7.19) к более простой форме:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R - A^a_\mu R_{a\nu} = 0. \tag{7.20}$$

Уравнения (7.18) можно интерпретировать как уравнения поля, в то время как (7.20) можно считать определением тензора энергии-импульса для комбинации поля Янга—Миллса и гравитационного поля. Вычисления приводят к следующим выражениям для компонент тензора Риччи:

$$R_{ac} = g^{\mu\sigma} g^{\nu\lambda} g_{ab} g_{cd} F^b_{\sigma\lambda} F^d_{\mu\nu}; \tag{7.21}$$

$$R_{b\mu} = g^{\nu\sigma} g_{ab} \nabla_\nu F^a_{\mu\sigma} - g^{\nu\lambda} g^{\rho\sigma} g_{ab} g_{cd} A^c_\mu F^a_{\rho\lambda} F^d_{\nu\sigma} - \\ - 2g^{\nu\lambda} g_{bc} f^c_{ad} A^a_\lambda F^d_{\nu\mu}; \tag{7.22}$$

$$R_{\mu\nu} = K_{\mu\nu} + g^{\lambda\sigma} g_{ab} A^a_\mu F^b_{\nu\sigma;\lambda} + g^{\lambda\sigma} g_{ab} A^a_\nu F^b_{\mu\sigma;\lambda} + \\ + g^{\lambda\sigma} g_{ab} F^a_{\lambda\mu} F^b_{\nu\sigma} + g^{\lambda\sigma} g_{ab} F^a_{\lambda\nu} F^b_{\mu\sigma} - 2g^{\lambda\sigma} g_{ab} f^a_{cd} A^c_\lambda A^d_\nu F^b_{\mu\sigma} - \\ - 2g^{\lambda\sigma} g_{ab} f^a_{cd} A^c_\lambda A^d_\mu F^b_{\nu\sigma} + f^d_{ac} f^c_{db} A^a_\mu A^b_\nu - \\ - g^{\lambda\sigma} g^{\rho\tau} g_{ab} g_{cd} A^a_\mu A^c_\nu F^b_{\rho\sigma} F^d_{\lambda\tau} + \\ + g^{\lambda\sigma} g^{\rho\tau} g_{ab} g_{cd} A^a_\mu A^c_\sigma F^b_{\nu\tau} F^d_{\lambda\rho} + \\ + g^{\lambda\sigma} g^{\rho\tau} g_{ab} g_{cd} A^a_\nu A^c_\sigma F^b_{\mu\tau} F^d_{\lambda\rho}. \tag{7.23}$$

Здесь точка с запятой означает ковариантное дифференцирование по отношению к символам Кристоффеля базы; $K_{\mu\nu}$ — тензор Риччи базы. Подставив эти выражения в (7.18), получим

$$g^{\nu\lambda} g_{ab} F^a_{\mu\lambda;\nu} = 2g^{\nu\lambda} g_{ab} f^a_{cd} A^c_\lambda F^d_{\nu\mu}, \tag{7.24}$$

или, используя невырожденность групповой метрики,

$$g^{\nu\lambda} F^a_{\mu\lambda;\nu} = 2g^{\nu\lambda} f^a_{bc} A^b_\lambda F^c_{\nu\mu}. \tag{7.25}$$

Для плоского пространства—времени эти уравнения идентичны уравнениям Янга—Миллса для неабелевой калибровочной группы. Уравнения (7.25) обобщают уравнения Янга—Миллса на случай искривленного пространства—времени и определяют форму взаимодействия между гравитационным и обобщенным янг-миллсовским полями.

Заметим, что, несмотря на сложный вид коэффициентов связности базы $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ и коэффициентов связности $\Gamma^{a}_{b\mu}$, задающих перенесение векторов алгебры Ли структурной группы, уравнения (7.24) сводятся к простой форме: $g^{\nu\lambda} g_{ab} \nabla_{\nu} F^{a}_{\mu\lambda} = 0$, где ∇_{ν} означает ковариантное дифференцирование в расслоенном пространстве со связностью в базе $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \left\{ {\lambda \atop \mu\nu} \right\}$ и $\Gamma^{a}_{b\mu} = f^{a}_{cb} A^{c}_{\mu}$. Остальные члены сокращаются и выпадают. Таким образом, вектор-потенциалы калибровочных полей играют здесь двойную роль: они входят в виде компонент как в метрический тензор, так и в коэффициенты связности вмещающего пространства.

Чтобы получить точную форму уравнения (7.20) и определить тензор кривизны, выпишем выражение для скалярной кривизны расслоенного пространства:

$$R = K + g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} g_{ab} F^{a}_{\nu\lambda} F^{b}_{\mu\sigma} + g^{\mu\nu} g_{ab} A^{a}_{\mu} A^{b}_{\nu}, \tag{7.26}$$

где K означает скалярную кривизну базы. Здесь всегда теряется инвариантность относительно структурной группы благодаря последнему члену в (7.26). Тем не менее можно показать, что этот член исчезает. Действительно, поскольку в выбранной нами системе координат $f^{c}_{ad} A^{a}_{\mu} = \partial_{d} A^{c}_{\mu}$, а также вследствие полной антисимметрии f_{abc}, $\partial_{d} A^{d}_{\mu} = 0$, мы имеем

$$-g^{\mu\nu} f^{c}_{ad} f^{d}_{cb} A^{a}_{\mu} A^{b}_{\nu} = g^{\mu\nu} (\partial_{d} A^{c}_{\mu}) (\partial_{c} A^{d}_{\nu}) =$$

$$= g^{\mu\nu} \partial_{d} (A^{c}_{\mu} \partial_{c} A^{d}_{\nu}) - g^{\mu\nu} A^{c}_{\mu} \partial^{2}_{cd} A^{d}_{\nu} = g^{\mu\nu} \partial_{d} (A^{c}_{\mu} \partial_{c} A^{d}_{\nu}). \tag{7.27}$$

Теперь

$$g^{\mu\nu} \partial_{d} (A^{c}_{\mu} \partial_{c} A^{d}_{\nu}) = \partial_{d} (g^{\mu\nu} A^{c}_{\mu} \partial_{c} A^{d}_{\nu}) =$$

$$= \partial_{d} (g^{\mu\nu} f^{d}_{ac} A^{c}_{\mu} A^{a}_{\nu}) = 0, \tag{7.28}$$

потому что $g^{\mu\nu} f^{d}_{ac} A^{c}_{\mu} A^{a}_{\nu} = 0$. Окончательный вид лагранжиана:

$$L = \sqrt{-g}\, R = \sqrt{-g}\, K + \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu} g^{\lambda\sigma} g_{ab} F^{a}_{\lambda\nu} F^{b}_{\mu\sigma}. \tag{7.29}$$

Используя соотношение

$$(8\pi k/c^{4}) T_{\rho\tau} = K_{\rho\tau} - 1/2\, g_{\rho\tau} K \tag{7.30}$$

(где k — константа тяготения), из уравнения (7.20) получим выражение для тензора энергии-импульса:

$$(8\pi k/c^4)\,\mathrm{T}_{\rho\tau}=2g^{\lambda\sigma}g_{ab}F^a_{\rho\lambda}F^b_{\tau\sigma}+$$
$$+\frac{1}{2}g_{\rho\tau}g^{\mu\nu}g^{\lambda\sigma}g_{ab}F^a_{\lambda\nu}F^b_{\mu\sigma}. \qquad (7.31)$$

В случае электромагнитного поля $F^a_{\mu\nu}$ сводится к $\mathcal{F}^a_{\mu\nu}$, а g_{ab} — к единице, и уравнение (7.31) дает хорошо известный тензор энергии-импульса электромагнитного поля. Ковариантная производная от $\mathrm{T}_{\rho\tau}$ исчезает по определению [в силу (7.30)]. Имея совместную систему уравнений (7.25) и (7.31), можно решить, по крайней мере теоретически, проблему взаимодействия калибровочных полей с гравитационным полем. Практически это можно сделать только при больших упрощающих предположениях, т. е. для некоторых специальных симметрий пространства—времени и поля или используя приближенные вычисления. В этом случае получается обобщение геометродинамики на произвольные калибровочные поля.

Движение частиц в поле янг-миллсовского типа и гравитационном поле. Допустим, что траектория точечной частицы является геодезической в $(r+4)$-мерном расслоенном многообразии. Тогда, подставив в уравнение геодезической выражение для коэффициентов связности (7.15), получим уравнения движения в виде

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\nu}{ds}+2g^{\lambda\sigma}g_{ab}A^a_\nu F^b_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\nu}{ds}+$$
$$+2g^{\lambda\sigma}g_{ab}F^b_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^a}{ds}=0. \qquad (7.32)$$

В наших координатах компоненты $A_b{}^a=\delta_b{}^a$, следовательно, можно преобразовать (7.32) к виду

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\nu}{ds}+$$
$$+2g^{\lambda\sigma}g_{ab}F^b_{\mu\sigma}\left(A^a_\alpha\frac{dx^\alpha}{ds}\right)\frac{dx^\mu}{ds}=0. \qquad (7.33)$$

Скалярное произведение $A_\alpha{}^a(dx^\alpha/ds)=\mathrm{const}$, так как в любой метрике пространства угол между геодезическими и полем Киллинга постоянен. Введя понятие обобщенного заряда $Q^a = 2A_\alpha{}^a(dx^\alpha/ds)$, перепишем уравнение геодезической в виде

$$\frac{d^2x^\lambda}{ds^2}+\left\{\begin{matrix}\lambda\\ \mu\nu\end{matrix}\right\}\frac{dx^\mu}{ds}\cdot\frac{dx^\nu}{ds}+g^{\lambda\sigma}g_{ab}Q^aF^b_{\mu\sigma}\frac{dx^\mu}{ds}=0. \qquad (7.34)$$

Полезно заметить, что Q^a, действительно, соответствует величине, аналогичной заряду, деленному на массу частицы.

Уравнение (7.34) неполно из-за того, что во время движения «вектор заряда» «вращается» в групповом пространстве. В этом можно убедиться, дифференцируя его определение. Траектория этого «вращения» зависит от внешнего поля.

В случае одномерной абелевой группы получим классические уравнения с силой Лоренца для электрона, движущегося во внешнем электромагнитном поле. В случае неабелевой калибровочной группы получаем интересные новые свойства уравнений движения. В то время как при движении в электромагнитном поле необходимым и достаточным условием движения частицы по геодезической в пространстве—времени было или исчезновение заряда, или исчезновение поля, здесь мы получаем новую возможность—исчезновение на группе скалярного произведения «вектора заряда» и поля: $g_{ab}Q^aF^b_{\mu\nu} = 0$. Исчезновение Q^a или $F^a_{\mu\nu}$ не обязательно, однако трудно сказать, какой физический смысл имеет это условие.

Таким образом, переход от риманова пространства—времени V_4 к расслоенному пространству приводит к появлению в уравнениях движения для классических частиц добавочного члена типа силы Лоренца.

Заметим, что в теории Вейля не получалось правильного выражения для силы Лоренца. Из-за этого, в частности, она была оставлена, несмотря на ряд очень изящных следствий, который она давала.

К а л и б р о в о ч н ы е   п о л я   и   н е е в к л и д о в о с т ь   п р о с т р а н с т в а—в р е м е н и. Интерпретацию калибровочных полей как проявление неевклидовости пространства—времени V_4 можно получить, используя проекцию слоя на касательное пространство к базе с помощью реперов. В общем случае оказывается, что калибровочные поля порождают в V_4 геометрию с кручением и отличной от нуля ковариантной производной метрического тензора [26—29].

Пусть для векторов касательного пространства Φ^i выполняются соотношения:

$$\Phi^i = h^i_\mu \Phi^\mu; \quad \Phi_i = h^\mu_i \Phi_\mu; \tag{7.35}$$

$$\nabla_\mu \Phi^i = h^i_\nu \nabla_\mu \Phi^\nu. \tag{7.36}$$

Тогда можно выразить калибровочное поле $A_\mu(kl)$ через реперы и коэффициенты связности в базе $\Gamma^\nu_{\mu\tau}$. Действительно, распишем правую и левую части равенства (7.36):

$$h^i_\lambda (\partial_\mu \Phi^\lambda + \Gamma^\lambda_{\mu\nu} \Phi^\nu) = \partial_\mu \Phi^i - A_\mu(pq) \underset{(pq)}{I^i_k} \Phi^k =$$

$$= (\partial_\mu h^i_\nu) \Phi^\nu + h^i_\nu \partial_\mu \Phi^\nu - A_\mu(pq) \underset{(pq)}{I^i_k} h^k_\nu \Phi^\nu. \tag{7.37}$$

Приравнивая коэффициенты при Φ^λ, получаем

$$h^i_\lambda \Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \partial_\mu h^i_\nu - A_\mu(pq) \underset{(pq)}{I^i_k} h^k_\nu, \tag{7.38}$$

откуда, свертывая (7.38) с h^τ_i, будем иметь

$$\Gamma^\tau_{\mu\nu} = h^\tau_i \partial_\mu h^i_\nu - h^\tau_i A_\mu(pq) \underset{(pq)}{I^i_k} h^k_\nu. \tag{7.39}$$

С помощью (7.39) легко получить ковариантную производную от метрического тензора. Для этого свернем (7.39) с $g_{\lambda\tau}$ и симметризуем полученное выражение по λ, ν:

$$\Gamma_{\lambda,\,\mu\nu} + \Gamma_{\nu,\,\mu\lambda} = h_{\lambda i} \partial_\mu h^i_\nu + h_{\nu i} \partial_\mu h^i_\lambda -$$

$$- 2A_\mu(pq) h_{i\,(\lambda} \underset{(pq)}{I^i_k} h^k_{\nu)} = \partial_\mu g_{\lambda\nu} - 2A_\mu(pq) h_{i\,(\lambda} \underset{(pq)}{I^i_k} h^k_{\nu)}, \tag{7.40}$$

что эквивалентно требованию

$$g_{\lambda\nu;\,\mu} = 2A_\mu(pq) h_{i\,(\lambda} \underset{(pq)}{I^i_k} h^k_{\nu)}. \tag{7.41}$$

Аналогичные формулы можно получить при отображении в базу пространства 4-мерного представления произвольной группы G_r. Для этого достаточно заменить матрицы представления группы Лоренца матрицами представления G_r: $\underset{a}{I^i{}_k}$ и калибровочное поле $A_\mu(pq)$ заменить вектор-потенциалом $A_\mu{}^a$.

Если представление G_r таково, что все матрицы $\underset{a}{I_k{}^i}$ вещественны и антисимметричны, то (7.41) переходит в

$$g_{\lambda\nu;\,\mu}=0. \qquad (7.42)$$

При обычном дифференциально-геометрическом подходе геометрия многообразия определяется полностью заданием трех величин [30]: метрического тензора $g_{\mu\nu}$, его ковариантной производной $Q_{\mu\nu\tau}=-g_{\nu\tau;\mu}$ и тензора кручения $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}$. Если $Q_{\mu\nu\tau}=0$, перенесение называется *метрическим*. Если $Q_{\mu\nu\tau}=-\Gamma_\mu g_{\nu\tau}$, где Γ_μ — некоторый вектор, перенесение называется *полуметрическим* и при $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}=0$— вейлевым. Если $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}=0$, перенесение *симметрическое*; при $S_{\mu\nu}{}^{\lambda}=p_{[\mu}\delta^{\lambda}{}_{\nu]}$ — *полусимметрическое*. Все эти разновидности геометрий в V_4 можно получить с помощью отображения слоя на базу.

Полный коэффициент связности V_4 имеет вид

$$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}=\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}+S_{\mu\lambda}{}^{\varkappa}-S_{\lambda}{}^{\varkappa}{}_{\mu}-S_{\mu}{}^{\varkappa}{}_{\lambda}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(Q_{\mu\lambda}{}^{\varkappa}+Q_{\lambda}{}^{\varkappa}{}_{\mu}-Q^{\varkappa}{}_{\mu\lambda}\right), \qquad (7.43)$$

где $\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}$ — символ Кристоффеля второго рода:

$$\begin{Bmatrix}\varkappa\\ \mu\lambda\end{Bmatrix}=\frac{1}{2}g^{\varkappa\sigma}\left(\partial_\mu g_{\lambda\sigma}+\partial_\lambda g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\lambda}\right)-\Omega^{\varkappa}_{\mu\lambda}+$$

$$+g_{\mu\tau}g^{\varkappa\sigma}\Omega^{\tau}_{\lambda\sigma}+g_{\lambda\tau}g^{\varkappa\sigma}\Omega^{\tau}_{\mu\sigma}\overset{h}{=}\frac{1}{2}g^{\varkappa\sigma}\left(\partial_\mu g_{\lambda\sigma}+\partial_\lambda g_{\sigma\mu}-\partial_\sigma g_{\mu\lambda}\right). \qquad (7.44)$$

Здесь $\Omega^{\tau}_{\mu\sigma}$ — коэффициенты неголономности системы координат; знак $\overset{h}{=}$ определяет равенство в голономной системе координат;

$$S_{\mu\lambda}{}^{\varkappa}=\Gamma^{\varkappa}_{[\mu\lambda]}+\Omega^{\varkappa}_{\mu\lambda}\overset{h}{=}\Gamma^{\varkappa}_{[\mu\lambda]}. \qquad (7.45)$$

Заметим, что если считать заданными $g_{\lambda\varkappa}$, $Q_\mu{}^{\varkappa\lambda}$ и $S_{\mu\lambda}{}^{\varkappa}$, то не только знакопеременная часть $\Gamma^{\varkappa}_{\mu\lambda}$, но и $\Gamma^{\varkappa}_{(\mu\lambda)}$ будет зависеть от выбора кручения $S_{\mu\lambda}{}^{\varkappa}$. Этой зависимости нет в том и только в том случае, если $S_{\mu\lambda\varkappa}$ — полностью антисимметричный тензор. Заметим также, что символы Кристоффеля симметричны только в голономной системе координат.

Предположим, что коэффициенты связности $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ симметричны. Тогда из формулы (7.39) следует

$$\Gamma^{\tau}_{[\mu\nu]}=h^{\tau}_{i}\,\partial_{[\mu}\,h^{i}_{\nu]}-h^{\tau}_{i}\,A^{a}_{[\mu}\,\underset{a}{I}{}^{i}_{k}\,h^{k}_{\nu]}=0. \tag{7.46}$$

Опустим в формуле (7.46) индекс τ и прибавим к этому равенству два других, получаемых из него циклической подстановкой τ, μ, ν, взяв последнее с противоположным знаком. Учитывая (7.41), будем иметь

$$A^{a}_{\mu}\,h_{i\,[\tau}\,\underset{a}{I}{}^{i}_{k}\,h^{k}_{\nu]}=\left(h_{\tau i}\,\partial_{[\mu}\,h^{i}_{\nu]}+h_{\nu i}\,\partial_{[\tau}\,h^{i}_{\mu]}-\right.$$
$$\left.-h_{\mu i}\,\partial_{[\nu}\,h^{i}_{\tau]}\right)+\frac{1}{2}\left(Q_{\tau\mu\nu}-Q_{\nu\mu\tau}\right). \tag{7.47}$$

Если матрицы $\underset{a}{I}{}^{i}_{k}$ симметричны, формула (7.47) дает

$$Q_{\nu\mu\tau}-Q_{\tau\mu\nu}=2\left(h_{\tau i}\,\partial_{[\mu}\,h^{i}_{\nu]}+h_{\nu i}\,\partial_{[\tau}\,h^{i}_{\mu]}-\right.$$
$$\left.-h_{\mu i}\,\partial_{[\nu}\,h^{i}_{\tau]}\right)=4\Delta_{\mu,\,\tau\nu}. \tag{7.48}$$

Если $\underset{a}{I}{}^{i}_{k}$ антисимметричны, то получим $Q_{\mu\nu\tau}=0$ и

$$A^{a}_{\mu}\,h_{i\tau}\,\underset{a}{I}{}^{i}_{k}\,h^{k}_{\nu}=\Delta_{\mu,\,\tau\nu}. \tag{7.49}$$

Здесь $\Delta_{\tau,\,\mu\nu}$ — коэффициент вращения Риччи. С помощью величин $\underset{a}{\omega}_{\tau\nu}=h_{\tau i}\,\underset{a}{I}{}^{i}_{k}\,h^{k}_{\nu}$ и обратных $\overset{a}{\omega}{}^{\nu\lambda}$, связанных с первыми соотношениями $\underset{a}{\omega}_{\nu\lambda}\,\overset{b}{\omega}{}^{\nu\lambda}=\lambda\delta^{b}_{a}$; $\overset{a}{\omega}=g_{ab}\,\underset{b}{\omega}$, где $g_{ab}=f^{l}_{am}f^{m}_{lb}$ — групповая метрика, можно переписать соотношение (7.49) в виде $A^{a}_{\mu}=\frac{1}{\lambda}\,\overset{a}{\omega}{}^{\nu\lambda}\,\Delta_{\mu,\,\nu\lambda}$. Аналогично формулу (7.39) можно представить в виде

$$A^{a}_{\mu}=\frac{1}{\lambda}\,\overset{a}{\omega}{}^{\nu\lambda}\left(h_{\lambda i}\,\partial_{\mu}\,h^{i}_{\nu}-\Gamma_{\lambda,\,\mu\nu}\right). \tag{7.50}$$

Коэффициенты вращения Риччи отличны от нуля только в неголономной системе кординат $\left(\Omega^{\tau}_{\mu\nu}=h^{\tau}_{i}\,\partial_{[\mu}\,h^{i}_{\nu]}\neq 0\right)$. Они описывают перенос ортогональной системы реперов. В голономной системе координат при $\Gamma^{\tau}_{[\mu\nu]}=0$ из (7.48), (7.49) следует $Q_{\nu\mu\tau}=Q_{\tau\mu\nu}$; $A^a_\mu=0$. Если $\Gamma^\tau_{[\mu\nu]}\overset{h}{=}S_{\mu\nu}{}^\tau\neq 0$, получим для симметричных и антисимметричных $\underset{a}{I^i_k}$ соответственно:

$$Q_{\nu\mu\tau}-Q_{\tau\mu\nu}\overset{h}{=}2\,(S_{\nu\tau\mu}+S_{\nu\mu\tau}-S_{\tau\mu\nu}); \tag{7.51}$$

$$A^a_\mu\overset{h}{=}\frac{1}{2\lambda}\overset{a}{\omega}{}^{\nu\tau}(S_{\nu\tau\mu}+S_{\nu\mu\tau}-S_{\tau\mu\nu}). \tag{7.52}$$

Таким образом, если V_4 представляет собой риманово пространство без кручения, то калибровочные поля могут быть связаны только с неголономностью системы координат подобно инерциальным силам.

Условия (7.36) эквивалентны условиям ковариантного постоянства реперов:

$$h^i_{\nu;\,\mu}=\partial_\mu h^i_\nu-A^a_\mu\,\underset{a}{I^i_k}\,h^k_\nu-\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,h^i_\lambda=0; \tag{7.53}$$

$$h^\lambda_{i;\,\mu}=\partial_\mu h^\lambda_i+h^\lambda_k\,A^a_\mu\,\underset{a}{I^k_i}+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,h^\nu_i=0. \tag{7.54}$$

Условия (7.53) и (7.54) обеспечивают переход локального базиса представления G_r в себя при параллельном переносе в V_4. В то же время они означают, что реперы в каждой точке $x=\mathrm{const}$ удовлетворяют уравнениям (4.27) для коэффициентов дифференцируемых отображений. Существует ли система реперов, удовлетворяющая нашим условиям? Условия интегрируемости (7.53) имеют вид

$$h^\lambda_{i;\,[\mu\nu]}=R_{\mu\nu\tau}{}^\lambda\,h^\tau_i+F^a_{\mu\nu}\,\underset{a}{I^k_i}\,h^\lambda_k+S^\sigma_{\mu\nu}\,h^\lambda_{i;\,\sigma},$$

где $F^a_{\mu\nu}$ — тензор напряженности калибровочного поля, а

$$R_{\nu\mu\tau}{}^\lambda=\partial_{[\nu}\Gamma^\lambda_{\mu]\,\tau}+\Gamma^\lambda_{[\nu\,|\sigma|}\Gamma^\sigma_{\mu]\,\tau}+\Omega^\sigma_{\nu\mu}\left(\Gamma^\lambda_{\sigma\tau}+A^a_\sigma\,\overset{}{\underset{a}{\omega}}{}^\lambda_\tau\right)$$

(вертикальными черточками обозначены индексы, не участвующие в антисимметризации).

Вследствие (7.53) и (7.54) отсюда следует формула, связывающая тензор кривизны V_4 и тензор напряженности калибровочного поля:

$$R_{\nu\mu\lambda}{}^\tau\,h^i_\tau=F^a_{\mu\nu}\,\underset{a}{I^i_k}\,h^k_\lambda \tag{7.55}$$

или

$$R_{\nu\mu\lambda}{}^\tau=\underset{a}{\omega}{}^\tau_\lambda\,F^a_{\mu\nu}. \tag{7.56}$$

Выполнение (7.56) обеспечивает также интегрируемость (7.54).

Из формулы (7.56) следует, что если $\underset{a}{I^i}{}_k$ — антисимметричная матрица, то $R_{\nu\mu\lambda}{}^{\lambda} = 0$, что является необходимым и достаточным условием равнообъемности перенесения.

Тензор кривизны Риччи получается свертыванием (7.56) с $g^{\lambda\nu}$:

$$R_{\mu}{}^{\tau} = F^{a\cdot}_{\mu\nu} \underset{a}{\omega}{}^{\tau\nu}. \tag{7.57}$$

Выражение для скалярной кривизны имеет вид

$$R = F^{a}_{\mu\nu} \underset{a}{\omega}{}^{\mu\nu}. \tag{7.58}$$

Эта величина инвариантна относительно локальных калибровочных преобразований и может быть использована в качестве линейного лагранжиана для произвольного калибровочного поля.

Таким образом, если 4-мерное представление G_r задается антисимметричными вещественными матрицами, в V_4 получаем метрическое перенесение с кручением. Если матрицы $\underset{a}{I^i}{}_k$ симметричны, ковариантная производная от метрического тензора отлична от нуля и перенесение не будет равнообъемным. Его можно сделать равнообъемным, только введя соответствующее симметрическое перенесение $\overset{s}{\Gamma}{}^{\lambda}_{\mu\nu}$, для чего нужно выбрать специальную неголономную систему координат.

П р и м е р: теория Вейля [7]. При интерпретации электромагнитного поля в рамках 4-мерной геометрии пространства—времени Вейль, Эддингтон, Фок используют дополнительные коэффициенты связности Γ_{μ}, соответствующие инвариантности интервала относительно растяжений: $ds'^2 = \sigma(x)ds^2$.

Проектирование 4-мерного представления этой абелевой калибровочной группы на касательное пространство дает в V_4 [12]

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = h^{\lambda}_{i}\, \partial_{\mu} h^{i}_{\nu} - \mathrm{i}e\delta^{\lambda}_{\nu} A_{\mu};$$

$$\Gamma^{\varkappa}_{\mu\varkappa} = \frac{1}{2}\, \partial_{\mu} \ln|-g| + 2Q_{\mu} = \frac{1}{2}\, \partial_{\mu} \ln|-g| - 4\mathrm{i}eA_{\mu};$$

$$S_{\mu\nu}{}^{\lambda} = -\mathrm{i}eA_{[\mu}\, \delta^{\lambda}_{\nu]}; \quad Q_{\mu\lambda\nu} = -2\mathrm{i}\, eg_{\lambda\nu} A_{\mu}. \tag{7.59}$$

Таким образом, электромагнитное поле соответствует полуметрическому переносу в V_4 $(Q_\mu = -2ieA_\mu)$ с кручением $(S_\mu = -3ieA_\mu)$.

Поскольку Q_μ получилось отличным от нуля, ковариантное дифференцирование не будет перестановочно с поднятием и опусканием индексов. Перенесение не сохраняет объем, так как $F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} R_{\mu\nu\tau}{}^{\tau} \neq 0$. В геодезической системе координат $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = 0$ и $A_\mu = -\frac{i}{8e}\partial_\mu \ln |-g|$. Легко видеть, что в этом случае $F_{\mu\nu} = 0$.

Равенство (7.59) инвариантно относительно некоординатных преобразований метрики вида

$$g_{\mu\nu}' = \sigma(x)\, g_{\mu\nu} \tag{7.60}$$

и связанных с ними преобразований A_μ:

$$A_\mu' = A_\mu - \frac{i}{2e}\partial_\mu \ln \sigma(x) = A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu \alpha(x),$$

где $\alpha(x) = -\frac{i}{2}\ln \sigma(x)$.

Таким образом, градиентная инвариантность в электродинамике, соответствующая калибровочным преобразованиям волновых функций $\psi' = \exp[i\alpha(x)]\psi = \exp[{}^1/_2 \ln \sigma(x)]\psi$, оказывается следствием инвариантности коэффициентов связности V_4 относительно конформных преобразований метрики $g_{\mu\nu}' = \exp[2i\alpha(x)]g_{\mu\nu}$. Если преобразования (7.60) считать координатными, то давно отмечавшаяся конформная инвариантность уравнений Максвелла становится следствием объединения в одной группе симметрии лоренц-инвариантности и градиентной инвариантности. С конформными преобразованиями координат связана также интерпретация электромагнитного поля как калибровочного, соответствующего группе движения прямой $x' = \alpha(x) + \beta$ [31]. В этом случае калибровочная группа разрешима. Ее группа голономии абелева (нормальный делитель).

Электродинамика сплошной среды и геометрия пространства—времени. Геометрический подход в теории упругости [32], [33] и в электродинамике сплошной среды позволяет очень ясно показать, каким образом взаимодействие (в данном случае электромагнитное) влияет на геометрию пространства — времени и наоборот: как геометрические характеристики среды связаны с характером энергетических процессов в ней.

Как уже говорилось, геометрия многообразия определяется полностью заданием трех величин: поля симметричного тензора второго ранга, его ковариантной производной и тензором кручения. В случае 3-мерной сплошной среды этим геометрическим понятиям соответствуют: тензор деформаций (симметричный тензор второго ранга), его ковариантная производная и тензор плотности дислокаций [32].

Задание кручения можно заменить заданием ковариантной дивергенции некоторой антисимметричной тензорной плотности. Поэтому уравнения Максвелла в среде могут рассматриваться чисто геометрически как уравнения, определяющие кручение через источники поля. В этом случае компоненты тензора кручения играют роль коэффициентов пропорциональности между напряженностью электромагнитного поля в среде и током. В частном случае полусимметрической геометрии пространственные компоненты вектора кручения S_i представляют собой (с точностью до числового множителя) отношение силы Лоренца к инварианту электромагнитного поля $I_1 = 2\,(\mathbf{HB} - \mathbf{DE})$, а временная компонента S_0 — отношение джоулевых потерь к I_1. В то же время проводимость оказывается пропорциональной S_0. Рассмотрим эти вопросы подробнее.

Как известно, классические уравнения электромагнитного поля в среде (или в вакууме при наличии материальных источников) связывают два типа физически различных величин: характеристики поля и вещества. Для того, чтобы найти поле с помощью этих уравнений, необходимо задать либо сами источники и характеристики среды, либо их выражение через характеристики поля. В последнем случае дополнительно к уравнениям поля постулируют соотношения типа линейной связи между током и полем (например, закон Ома [34]) или представляют ток как движение заряженных частиц, для которых пишется уравнение движения. Геометрическая интерпретация среды как риманова пространства позволяет естественным образом связывать поля и токи через геометрию пространства.

Пусть уравнения электромагнитного поля в среде имеют вид

$$\hat{F}^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0; \tag{7.61}$$

$$F_{[\mu\nu;\tau]} = 0, \tag{7.62}$$

где точка с запятой означает ковариантное дифференцирование, в отличие от обычного, обозначаемого запятой; квадратные скобки означают альтернацию по всем индексам внутри скобок; крышка — тензорную плотность. Выражение для тензора поля имеет вид:

$$\left.\begin{array}{l} F_{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & B^z & -B^y & -\mathrm{i}E_x \\ -B^z & 0 & B^x & -\mathrm{i}E_y \\ B^y & -B^x & 0 & -\mathrm{i}E_z \\ \mathrm{i}E_x & \mathrm{i}E_y & \mathrm{i}E_z & 0 \end{pmatrix}; \\ F^{\mu\nu}=\begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -\mathrm{i}D^x \\ -H_z & 0 & H_x & -\mathrm{i}D^y \\ H_y & -H_x & 0 & -\mathrm{i}D^z \\ \mathrm{i}D^x & \mathrm{i}D^y & \mathrm{i}D^z & 0 \end{pmatrix}, \end{array}\right\} \tag{7.63}$$

причем $F^{\mu\nu}=g^{\mu\tau}g^{\nu\lambda}F_{\tau\lambda}={}^1/_2\,(g^{\mu\tau}g^{\nu\lambda}-g^{\mu\lambda}g^{\nu\tau})\,F_{\tau\lambda}$, или в базисе бивекторного пространства $F^a=g^{ab}F_b$. Отсюда получаем связь между напряженностью и индукцией электрического и магнитного полей:

$$\left.\begin{array}{l} D^i=g^{00}\sum\limits_{k=1,2,3}\left(g^{ik}-\dfrac{g^{i0}g^{k0}}{g^{00}}\right)E_k+ \\ \qquad +\mathrm{i}\sum\limits_{k,l,m=\mathrm{cycle}}g^{i[k}g^{l]0}B_m; \\ H_i=\det g^{ln}\sum\limits_{k=1,2,3}g_{ik}B^k- \\ \qquad -\mathrm{i}\sum\limits_{i,k,l=\mathrm{cycle}}\ \sum\limits_{m=1,2,3}g^{m[k}g^{l]0}E_m. \end{array}\right\} \tag{7.64}$$

Когда $g^{\mu\nu}$ — диагональный тензор, из соотношений (7.64) получим:

$$\left.\begin{array}{l} H_i=g^{kk}g^{ll}B^i=g_{ii}B^i\det g^{lk}, \quad i,\,k,\,l=1,\,2,\,3; \\ D^i=g^{00}g^{ii}E_i. \end{array}\right\} \tag{7.65}$$

В этом случае метрический тензор принимает вид

$$\left.\begin{array}{l} g^{\mu\nu}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu}}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \varepsilon\mu \end{pmatrix}; \quad g_{\mu\nu}=\sqrt{\mu}\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \varepsilon\mu^{-1} \end{pmatrix}; \\ \det g_{\mu\nu}=\mu/\varepsilon; \quad \det g^{\mu\nu}=\varepsilon/\mu. \end{array}\right\} \tag{7.66}$$

Тензор (7.66) совпадает с метрическим тензором, предложенным Таммом [35] для описания однородной изотропной покоящейся среды.

Ковариантное дифференцирование в уравнениях (7.61), (7.62) ведется по неизвестной связности, которая в самом общем случае имеет вид (7.43).

Раскрывая левую часть уравнений (7.61), получим:

$$\hat{F}^{\nu\lambda}{}_{;\nu} = \underline{\partial_\nu (\hat{F}^{\nu\lambda}) + \Omega^{\lambda}_{\nu\tau} \hat{F}^{\nu\tau} - 2\Omega_{\nu\tau}{}^{\tau} \hat{F}^{\nu\lambda}} + S_{\nu\tau}{}^{\lambda} \hat{F}^{\nu\tau} - 2S_{\nu\tau}{}^{\tau} \hat{F}^{\nu\lambda}. \tag{7.67}$$

В соотношении (7.67) сумма подчеркнутых членов зависит только от выбора системы координат (криволинейная, вращающаяся и т. д.) и не зависит от выбора параллельного переноса. Поэтому в голономной системе координат уравнения (7.61) равносильны уравнениям

$$\partial_\nu (\hat{F}^{\nu\lambda}) = 2S_{\nu\tau}{}^{\tau} \hat{F}^{\nu\lambda} - S_{\nu\tau}{}^{\lambda} \hat{F}^{\nu\tau}. \tag{7.68}$$

Сравнивая (7.68) с уравнениями Максвелла в обычной форме

$$\partial_\nu (\hat{F}^{\nu\lambda}) = \hat{J}^{\lambda}, \tag{7.69}$$

где $\hat{J}^{\lambda}$ — плотность тока источников поля, находим соотношение между током и компонентами поля, обобщающее закон Ома:

$$J^{\lambda} = 2S_{\nu\tau}{}^{\tau} F^{\nu\lambda} - S_{\nu\tau}{}^{\lambda} F^{\nu\tau}. \tag{7.70}$$

Аналогично вторая пара уравнений Максвелла

$$\partial_{[\mu} F_{\tau\nu]} = 0 \tag{7.71}$$

приводит к соотношению

$$2S_{\nu\tau}{}^{\tau} {}^{*}F^{\nu\lambda} - S_{\nu\tau}{}^{\lambda} {}^{*}F^{\nu\tau}, \tag{7.72}$$

где ${}^{*}F^{\nu\lambda} = (1/2\sqrt{-g})\, \varepsilon_{\nu\lambda\mu\tau} F^{\mu\tau}$, $\varepsilon_{\nu\lambda\mu\tau}$ — дискримиантный тензор. При наличии магнитных источников (7.72) следует заменить выражением

$$2S_{\nu\tau}{}^{\tau} {}^{*}F^{\nu\lambda} - S_{\nu\tau}{}^{\lambda} {}^{*}F^{\nu\tau} = {}^{*}J^{\lambda}_{\mathrm{magn}}. \tag{7.73}$$

Система уравнений поля (7.71), (7.72) дуально инвариантна (как и уравнения Максвелла для пустоты), если выполняются условия (7.70), (7.72) при наличии источников только электрического типа или (7.70), (7.73) — при наличии источников обоих типов.

Физический смысл условий (7.70), (7.72) становится ясным, если их расписать по компонентам. Равенства (7.72) дают:

$$\sum_{k=1}^{3} S_{0k}{}^{[k}B^{i]} = (i/2) \sum_{k,l,n=1}^{3} \varepsilon^{ikl} S_{kl}{}^{n} E_n; \qquad (7.74)$$

$$\sum_{i,k=1}^{3} S_{ki}{}^{[k}B^{i]} = (i/2) \sum_{i,k,l=1}^{3} \varepsilon^{ikl} S_{[ik}{}^{0} E_{l]}, \qquad (7.75)$$

где ε^{ikl} — 3-мерный дискриминантный тензор.

Равенства (7.70) приводят к соотношениям

$$J^i = 2\mathrm{i} S_{k0}{}^{[i}D^{k]} - \varepsilon^{ikl} S_{kl}{}^{n} H_n; \qquad (7.76)$$

$$J^0 = 2\mathrm{i} S_{ki}{}^{[k}D^{i]} - \varepsilon^{ikl} S_{[ik}{}^{0} H_{l]}. \qquad (7.77)$$

Таким образом, электрический ток может возбуждаться как электрическим, так и магнитным полем, причем плотность тока линейно связана с напряженностями этих полей. Соотношения (7.76) и (7.77) на первый взгляд переносят незамкнутость электродинамики в другое место: вместо неизвестных токов вводится неизвестная геометрия. Однако геометрические характеристики (в данном случае кручение) можно определить, например, из теории дислокаций, где кручение — измеримая характеристика [32, 33]. Тем самым уравнения (7.76) — (7.77) устанавливают связь между электродинамикой сплошной среды и теорией дислокаций в ней.

Закон сохранения энергии вследствие (7.61), (7.62) имеет такой же вид, как в общей теории относительности:

$$\nabla_\mu T^\mu_\nu = 0, \qquad (7.78)$$

что позволяет строить интегральные сохраняющиеся величины (см. § 13). Здесь $T^\mu_\nu = (1/2)(F^{\mu\tau}F_{\nu\tau} + {}^*F^{\mu\tau}\,{}^*F_{\nu\tau})$. При наличии источников обоих видов из (7.78) получим

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = (1/2)(F_{\mu\nu} J^\mu_e + {}^*F_{\mu\nu}\,{}^*J^\mu_{\mathrm{magn}}). \qquad (7.79)$$

Если ${}^*J^\mu_{\mathrm{magn}} = 0$, то

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = (1/2) F_{\mu\nu} J^\mu_e, \qquad (7.80)$$

т. е.

$$\partial_i T^i_0 + \partial_0 T^0_0 = (1/2) E_i J^i_e, \qquad (7.81)$$

$$\partial_0 T^0_k + \partial_i T^i_k = (\mathrm{i}/2) J^0_e E_k + (1/2)[\mathbf{J}_e \times \mathbf{B}]_k. \qquad (7.82)$$

Используя (7.76)—(7.77), из (7.80) получим

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = S_{\nu\mu}{}^\mu T^\nu_\sigma + S_{\nu\sigma}{}^\mu T^\nu_\mu. \tag{7.83}$$

Заметим, что тогда

$$J^\mu_e F_{\mu\sigma} = 2\,(S_{\varphi\sigma}{}^\mu T^\nu_\mu + S_{\nu\mu}{}^\mu T^\nu_\sigma. \tag{7.84}$$

Тензор энергии-импульса удовлетворяет условиям:

$$\mathrm{Sp}\, T = 0;\ \mathrm{Sp}\,(T^2) = (1/4)\,(I_1^2 - I_2^2),\ \text{где}\ \ I_1 = (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = = 2\,(\mathbf{HB}\cdot\mathbf{DE});$$

$$I_2 = (F^{\mu\nu}\,{}^*F_{\mu\nu}) = -({}^*F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}) = \mathrm{i}\,\sqrt{-g}\,(\mathbf{HD}) = \left(\mathrm{i}/\sqrt{-g}\right)(\mathbf{BE}).$$

Другие полезные соотношения:

$$ {}^*F_{\mu\lambda} T^\mu_\nu = (1/4)\,(I_2 F_{\nu\lambda} - I_1\,{}^*F_{\nu\lambda});\ \ {}^*F^{\nu\lambda} T^\mu_\nu = = (-1/4)\,(I_2 F^{\mu\lambda} + I_1\,{}^*F^{\mu\lambda});$$

$$F_{\mu\lambda} T^\mu_\nu = (1/4)\,(I_1 F_{\nu\lambda} - I_2\,{}^*F_{\nu\lambda});\ \ F^{\nu\lambda} T^\mu_\nu = (1/4)\,(I_1 F^{\mu\lambda} + + I^2\,{}^*F^{\mu\lambda});\ \ T^\alpha_\mu T^\mu_\nu = (1/16)\,\delta^\alpha_\nu\,(I_1^2 - I_2^2).$$

Очевидно, что обычный закон сохранения тензора энергии — импульса получается в случае

$$J^\mu F_{\mu\sigma} = 2\,(S_{\nu\sigma}{}^\mu T^\nu_\mu + S_{\nu\mu}{}^\mu T^\nu_\sigma) = 0.$$

В частном случае полусимметрической геометрии, т. е. когда тензор кручения представим в виде

$$S_{\nu\sigma}{}^\mu = (1/3)\, S_{[\nu}\,\delta^\mu_{\sigma]},$$

получим

$$J^\mu = (-4/3)\, S_\nu F^{\nu\mu}, \tag{7.85}$$

$$S_\nu\,{}^*F^{\nu\mu} = 0. \tag{7.86}$$

Аналогично для тока

$$J^\mu F_{\mu\alpha} = (2/3)\, S_\alpha I_1, \tag{7.87}$$

$$J^\mu\,{}^*F_{\mu\alpha} = (1/3)\, S_\alpha I_2. \tag{7.88}$$

При наличии источников обоих типов закон сохранения имеет вид

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = (4/3)\, S_\mu T^\mu_\nu. \tag{7.89}$$

Если источники только электрические, (7.89) сохраняет свой вид, но может быть преобразовано в уравнение

$$\partial_\mu T^\mu_\nu = (1/3)\, S_\nu I_1 \tag{7.90}$$

вследствие появляющегося в этом случае соотношения

$$S_\nu T^\nu_\alpha = (1/4)\, S_\alpha I_1, \quad \alpha, \nu = 1, \dots, 4. \tag{7.91}$$

Из условий совместности уравнений (7.85) — (7.88) следует, что при $I_2 \neq 0$ $J^\mu = S_\mu = 0$. Поэтому положим $I_2 = 0$. Тогда $S_\mu J^\mu = 0$, т. е. вектор кручения «ортогонален» вектору тока, что немедленно следует из выражения для компонент S_ν, полученных с помощью (7.87):

$$S_0 = -\mathrm{i}\,\frac{3}{4}\,\frac{(\mathbf{JE})}{\mathbf{HB}-\mathbf{DE}}; \quad S_i = \frac{3}{4}\,\frac{(\mathrm{i}J^0E_i + [\mathbf{B}\times\mathbf{J}])}{\mathbf{HB}-\mathbf{DE}}. \tag{7.92}$$

Используя условие $I_2 = 0$, можно представить S_i в другом виде:

$$S_i = -\frac{3\mathrm{i}}{4}\left(\frac{J^0E_i}{\mathbf{DE}} + \frac{(\mathbf{JE})}{\mathbf{DE}}\cdot\frac{[\mathbf{B}\times\mathbf{D}]}{\mathbf{HB}-\mathbf{DE}}\right), \tag{7.93}$$

откуда видно, что вектор кручения характеризует отношение потерь энергии при взаимодействии поля с веществом к энергии электромагнитного поля.

Следует отметить соотношение, являющееся следствием условия $I_2 = 0$: $(\mathbf{HB})\,(\mathbf{DE}) = [\mathbf{D}\times\mathbf{B}]\cdot[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]$.

В 3-мерном виде уравнения (7.85) —(7.88) сводятся к следующим условиям:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}\cdot\mathbf{B} = 0; && \mathbf{J}\cdot\mathbf{H} = 0;\\
&S_0\,\mathbf{B} = \mathrm{i}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{S}]; && J^0\,\mathbf{H} = \mathrm{i}\,[\mathbf{J}\times\mathbf{D}];\\
&S_0\,(\mathbf{HB}) = \mathrm{i}\,[\mathbf{E}\times\mathbf{H}]\cdot\mathbf{S}; && J^0\,(\mathbf{HB}) = \mathrm{i}\mathbf{J}\cdot[\mathbf{D}\times\mathbf{B}];\\
&\mathrm{i}S_0[\mathbf{D}\times\mathbf{B}] = \mathbf{E}\,(\mathbf{DS}) - \mathbf{S}\,(\mathbf{DE}); && \mathrm{i}J^0\,[\mathbf{H}\times\mathbf{E}] = \mathbf{J}\,(\mathbf{DE}) - (\mathbf{JE})\,\mathbf{D}
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$J^0 = (4\mathrm{i}/3)\,(\mathbf{SD}); \quad \mathbf{J} = (4/3)\,([\mathbf{S}\times\mathbf{H}] - \mathrm{i}S_0\mathbf{D}).$$

Таким образом, обычная проводимость, т. е. коэффициент пропорциональности между вектором тока и индукцией электрического поля, с точностью до множителя совпадает с S_0.

Обобщения теории Эйнштейна. Гравитационное поле, соответствующее локальной группе Лоренца. Квадратичный лагранжиан и волновые пространства. Новые черты, которые придает теории использование принципа калибровочной инвариантности и геометрии расслоенных пространств, лучше всего видны на примере гравитационного поля. Если гравитационное поле рассматривается как калибровочное, лагранжиан $L=R+\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^{\mu\nu}_a$, соответствующий скалярной кривизне расслоенного пространства, переходит в [28,37] $\mathcal{L}=R+\frac{\lambda^2}{4}R^{\lambda}_{\mu\nu\tau}R^{\mu\nu\tau}_{\lambda}=$ $=R+\frac{\lambda^2}{4}R_{\mu\nu}(ik)\,R^{\mu\nu}(ik)$ (λ—константа размерности длины). Этот лагранжиан может быть построен и вариационным методом. Варьируя L по A^a_μ, получим уравнения Янга — Миллса в римановом V_4:

$$F_a{}^{\mu\nu}{}_{;\nu}=0. \qquad (7.94$$

Варьирование L по $g^{\mu\nu}$ (или $h_i{}^\mu$) дает уравнение Эйнштейна с правой частью:

$$R_{\mu\nu}-\frac{1}{2}g_{\mu\nu}R=\lambda^2\left(F^a_{\mu\tau}F^{\tau}_{a\nu}-\frac{1}{4}g_{\mu\nu}F^a_{\tau\lambda}F^{\tau\lambda}_a\right). \qquad (7.95)$$

Проектирование слоя на V_4 переводит систему (7.94), (7.95) в уравнения типа Янга — Миллса для тензора кривизны Римана:

$$R^{\mu\nu\tau}_{\lambda}{}_{;\mu}=0 \qquad (7.96)$$

и уравнения, обобщающие уравнения Эйнштейна:

$$R_{\mu\nu}=\frac{1}{4}\lambda^2 C_{\mu\tau\lambda\nu}R^{\tau\lambda}, \qquad (7.97)$$

где $C_{\mu\tau\lambda\nu}$ — тензор конформной кривизны. Здесь учтено ковариантное постоянство реперов. Уравнения (7.96) эквивалентны уравнениям для тензора Риччи:

$$R^{\lambda}_{[\tau;\nu]}=0. \qquad (7.98)$$

Система уравнений (7.94)—(7.95) для калибровочных полей подобна системе уравнений геометродинамики. Проектирование слоя на V_4 показывает, что не всегда в V_4 порождается обычная риманова геометрия. Может возникнуть и $Q_{\mu\nu\tau}\neq 0$, и $S^{\lambda}_{\mu\nu}\neq 0$. В этом смысле геометродинамика не охватывает всех возможностей влияния калибровочного поля на геометрию V_4.

Свойства системы уравнений (7.97), (7.98) исследовались нами в работах [34, 35]. Поскольку пространства Эйнштейна удовлетворяют этой системе тривиально, изучались свойства конформно-эйнштейновских пространств. При этом было показано, что если такое пространство удовлетворяет системе (7.97), (7.98), то тензор Риччи выражается через производные от градиентного изотропного вектора σ_λ : $R_{\mu\lambda} = \sigma_{\lambda;\mu} + \sigma_{(\mu}\sigma_{\lambda)}$, причем σ_λ удовлетворяет волновому уравнению $\sigma_{\lambda;\mu}{}^{;\mu} = 0$. Более того, в силу тех же уравнений (7.97), (7.98) эти пространства могут быть конформными только пространствам Эйнштейна типа N, волновым в смысле Лихнеровича [34, 35].

О волновых уравнениях для калибровочных полей. В искривленном пространстве—времени V_4 свойства операторов сильно изменяются. Поэтому структура полевых уравнений определяется уже не только требованиями симметрии, но и топологическими свойствами V_4. Особенно важно учитывать эти свойства при построении волновых операторов в искривленном пространстве—времени. В качестве волновых операторов в настоящее время используются различные операторы, обобщающие те или иные свойства оператора Даламбера в плоском пространстве. Но, как правило, эти операторы можно считать волновыми только для узкого, специально выбранного класса полей. Если принять, что основным свойством волнового оператора является наличие решений в виде гармонических функций (или их обобщений), то можно указать общий вид волнового оператора для полей произвольной тензорной размерности (антисимметричных) в римановом пространстве—времени. Этот оператор называется *топологическим лапласианом.* Для него всегда можно построить в римановом пространстве функцию Грина. Топологический лапласиан в римановом пространстве был построен де Рамом [1]. Обобщая понятие внешнего дифференцирования (d) и кодифференцирования (δ) на формы со значениями в алгебре Ли, можно построить аналог этого оператора для расслоенного пространства. В применении к тензору напряженности калибровочного поля волновой оператор имеет вид [29]

$$\Delta F^a_{\mu\nu} = (d\delta + \delta d) F^a_{\mu\nu} = F^a_{\mu\nu;\tau}{}^{;\tau} = -\Box F^a_{\mu\nu}, \tag{7.99}$$

где

$$F^a_{\mu\nu;\tau} = \partial_\tau F^a_{\mu\nu} - \Gamma^\lambda_{\tau\mu} F^a_{\lambda\nu} - \Gamma^\lambda_{\tau\nu} F^a_{\mu\lambda} - f^a_{bc} F^c_{\mu\nu} A^b_\lambda.$$

Для гравитационного поля отсюда получим волновое уравнение Зельманова — Захарова [36]:

$$\Box R_{\mu\nu\lambda\tau} = R_{\mu\nu\lambda\tau;\sigma}{}^{;\sigma} = 0. \qquad (7.100)$$

Как было показано В. Д. Захаровым, все решения этого уравнения принадлежат типу N по классификации А. З. Петрова.

Если спроектировать слой на касательное пространство к V_4, то волновые операторы (7.99) и (7.100) будут связаны формулой

$$h^i_\tau \underset{a}{I^k_i} h^\lambda_k \Box F^a_{\mu\nu} = \Box R_{\mu\nu\tau}{}^\lambda.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Де Рам Ж. Дифференцируемые многообразия. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1956.
2. Уилер Дж. Гравитация, нейтрино и Вселенная. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
3. Лаптев Г. Ф. Дифференциальная геометрня погруженных многообразнй. Тр. Моск. матем. об-ва, **2**, 275 (1953); Тр. 13-го матем. съезда. М., Изд-во АН СССР, **3**, 409 (1958).
4. Картаи Э. Геометрия групп Ли и симметрические простраиства. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1949.
5. Лумисте Ю. Г. «Тр. геометрического семинара», **1**, 191 (1966).
6. Евтушик Л. Е. «Изв. вузов. Сер. матем.», № 2 (81), 32, 1969.
7. Лихнерович А. Теория связностей в целом и группы голономии. Пер. с франц. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Коноплева Н. П. Геометрическое описание калибровочных полей. В Тр. междун. семинара «Векторные мезоны и электромагнитные взаимодействия». Дубна, ОИЯИ, 1969.
9. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
10. Алексеевский Д. А. «Функциональный аналнз и его приложения», **2**, вып. 2, 1—10 (1968).
11. Uzes C. Ann. Phys., **50**, 534 (1968).
12. Loos H. Nuovo cimento, **58A**, 365, (1968); **53A**, 202 (1968).
13. Weyl H. Gravitation und Electrizität. Sitzber Preuss. Akad. Wiss., Berlin, 1918, S. 465.
14. Фок В. А. Применение идей Лобачевского в физике. М., ГТТИ, 1950.
15. Тоннела М. А. Основы электромагнетизма и теории относительиости. Пер. с франц. М., Изд-во ииостр. лит., 1962.
16. Tonnelat A. M. Les théories unitares de l'electromagnetisme et de la gravitation. Gauthier — Villars, Paris, 1965.
17. Брежнев В. С. Тезисы доклада на V Междун. конференции по гравитации и теории относительности. Тбилиси, Изд. ТГУ. 1968, стр. 244.

18. Rainich G. Y. Trans. Amer. Math. Soc., **27**, 106 (1925).
19. Einstein A. Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., Phys. Math. Kl., 23—30 (1927).
20. Kaluza Th. Zum Unitätsproblem der Physik. Berlin, Berichte, 1921 S, 966.
21. Румер Ю. Б. Исследование по 5-оптике. М., Гостехиздат, 1956.
22. Ne'eman Y., Rosen J. Rev. Mod. Phys., **37**, 391 (1965).
23. Rosen J., Rosen N., Ne'eman Y. Coral Gables Conf. Symmetry Principles High Energy. Miami, 1964. San-Francisco—London, 1964, p. 93.
24. Szekeres P. Nuovo cimento, **43A**, 1062 (1966).
25. Kerner R. Ann. Inst. Henri Poincaré, **9A**, 143 (1968).
26. Sokolik H. A., Konopleva N. P. Nucl. Phys., **72**, 667 (1965).
27. Коноплева Н. П. В сб. «Проблемы гравитации». Тбилиси, Изд. ТГУ, 1965.
28. Коноплева Н. П. «Вест. МГУ, Сер. физ.», № 3 (1965).
29. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. В сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». М., Атомиздат, 1966.
30. Схоутен И. А., Стройк Д. Дж. Введение в новые методы дифференциальной геометрии. Т. I. Пер. с англ., М.—Л., ГТТИ, 1939.
31. Схоутен Я. Тензорный анализ для физиков. М., «Наука», 1965.
32. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
33. Коноплева Н. П., Соколик Г. А. «Докл. АН СССР», 177, 302 (1967).
34. Коноплева Н. П. Тезисы доклада на V Междун. конференции по гравитации. Тбилиси, 1968.
35. Коноплева Н. П. В сб. «Проблемы теории гравитации и элементарных частиц». Вып. 3. М., Атомиздат, 1970.
36. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., «Наука», 1972.

Глава III

ВАРИАЦИОННЫЙ ФОРМАЛИЗМ И БЕСКОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ

§ 8. ВВЕДЕНИЕ

Отличительная особенность всех калибровочных теорий— инвариантность относительно бесконечной группы (псевдогруппы), преобразования которой зависят от r произвольных функций и их производных. Благодаря такой симметрии калибровочные поля всегда соответствуют системам с лишними степенями свободы, что приводит при замене параметрических функций постоянными параметрами к системам со связями. Обычно, когда теория инвариантна относительно конечной группы и в ней присутствуют лишние переменные, эти переменные исключаются с помощью наложеиия дополнительных условий (условий калибровки). Вид условий калибровки не связывается при этом с уравнениями поля или движения. В теориях калибровочных полей инвариантность относительно бесконечной группы приводит к появлению тождественных соотношений между экстремалями соответствующих лагранжианов (тождеств Нетер). В квантовой теории тождествам Нетер соответствуют тождества Уорда.

При нарушении локальной калибровочной инвариантности и сужении ее до r-параметрической конечной группы (например, при введении массовых членов в лагранжиан) первоначальная инвариантность относительно бесконечной группы проявляет себя в наличии дополнительных условий на полевые переменные, являющихся следствием уравнений поля. Вид таких дополнительных условий определяется тождествами Нетер для той части уравнений поля, которая инвариантна относительно ненарушенной бесконечной группы симметрии. Выполнение этих дополнительных условий при нарушенной симметрии обеспечивает на экстремалях выполнение локальной калибровочной инвариантности интеграла действия, несмотря на отсутствие ее на произвольных траекториях. Кроме того, инвариантность относительно бесконечной группы приводит к уникальной и очень важной с физической точки зрения ситуации: возникают так называемые сильные законы сохранения, вид которых не связан с конкретной структурой лагранжиана и уравнений экстремали. Токи, сохраняющиеся в сильном смысле, называются несобственными. Структура сильных законов сохранения определяется только структурой локальной калибровочной группы и тождествами Нетер. Нарушение локальной калибровочной инвариантности лагранжиана добавлением членов, не содержащих производных от полевых переменных (массовыми членами), не изменяет выражений несобственных токов через полевые переменные. Не изменяются и законы сохранения, если выполнены дополнительные условия, о которых говорилось выше. Нужно лишь отметить, что сильные законы сохранения всюду, кроме электродинамики, имеют вид «ковариантных», а не обычных законов сохранения, подобно законам сохранения в общей теории относительности Эйнштейна. В электродинамике сильные законы сохранения совпадают с обычными вследствие абелевости калибровочной группы.

Интегрирование несобственных сохраняющихся токов приводит к мультиплетам зарядов, образующих регулярное представление* конечной калибровочной группы. Алгебра этих зарядов также не связана с конкретной структурой лагранжиана. Она связана лишь с наличием симметрии относительно бесконечной группы, даже несколько нарушенной. Существование законов сохранения, не зависимых до некоторой степени от уравнений поля и лагранжианов, позволяет получать полезные и простые соотношения, характеризующие взаимодействия элементарных частиц, не конкретизируя детально эти взаимодействия, но лишь постулируя свойства симметрии для сохраняющихся токов или зарядов [1].

Лагранжева формулировка классической теории калибровочных полей — наиболее удобный путь для обсуждения калибровочной инвариантности с точки зрения выбора формы инвариантных лагранжианов, анализа структуры законов сохранения и их возможных нарушений, а также при выборе дополнительных условий на полевые перемен-

* Регулярным представлением алгебры Ли называют представление матрицами, матричные элементы которых суть структурные константы этой алгебры.

ные. Использование вариационного формализма и двух теорем Нетер дает при этом определенные преимущества, связывая эти вопросы в единое целое.

Таким образом, наличие локальной калибровочной инвариантности (а в более общем случае — инвариантности относительно произвольной бесконечной группы) приводит к возможности решения следующих задач:

1) по виду преобразований полевых переменных, образующих бесконечную группу, построить инвариантный лагранжиан, найти уравнения поля и дополнительные условия для них (при этом используется прямая вторая теорема Нетер), а также найти законы сохранения (первая и вторая теоремы Нетер);

2) по виду уравнений поля и дополнительных условий на полевые переменные, вытекающих из них, восстановить форму лагранжиана и групповых преобразований полевых переменных (используется обратная вторая теорема Нетер).

Материал главы расположен следующим образом. В § 9 излагаются первая и вторая теоремы Нетер [2], составляющие основу всех групповых и вариационных подходов, а также формулируются соответствующие законы сохранения. Первая теорема Нетер относится к случаю симметрии относительно произвольных конечных групп Ли, вторая — бесконечных. В § 10 показано, как по виду преобразований полевых переменных, порождаемых локальной калибровочной группой, построить инвариантный лагранжиан, уравнения полей [3,4], определить вид тождеств Нетер и законов сохранения, а также найти дополнительные условия на полевые переменные, вытекающие из уравнений поля и тождеств Нетер при появлении массовых членов [5]. Иными словами, теоремы Нетер применяются к построению лагранжевой теории произвольного калибровочного поля. § 11 посвящен обратным задачам: нахождению групповых преобразований и восстановлению формы лагранжиана по уравнениям поля и дополнительным условиям, вытекающим из них [6, 7]. Важность этих задач связана с тем, что выбор дополнительных условий может диктоваться физическими соображениями, а это влечет за собой ограничения на форму возможных взаимодействий. Здесь излагается работа В. И. Огиевецкого и И. В. Полубаринова [6], в которой показано, что выбор определенного спина (спина 1) для взаимодействующих векторных полей приводит к тому, что все константы взаимодействия в лагранжиане оказываются структурными константами калибровочной группы (учтена минимальность взаимодействий). В § 12 [8] обсуждается возможность введения массы калибровочного поля как множителя Лагранжа, если при варьировании основного интеграла действия накладывается интегральное дополнительное условие типа $\int A^a_\mu A^\mu_a dv = \text{const}$ или $\int F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a \, dv = \text{const}$. Отмечается, что последнее условие принадлежит к типу ограничивающих топологию пространства. Показано, что локальная калибровочная инвариантность интеграла действия на экстремалях сохраняется при наличии массовых членов, если выполнены дополнительные условия, вытекающие из тождеств Нетер. Обсуждается форма законов сохранения при наличии интегральных дополнительных условий. Затрагивается вопрос о появлении соотношений типа пропорциональности токов и полей при нарушении бесконечной симметрии массовыми членами. Параграф 13 посвящен интерпретации общей теории относительности как теории калибровочного поля симметричного тензора второго ранга [5, 9]. В качестве калибровочной группы рассматривается группа общековариантных (произвольных, непрерывных) преобразований координат 4-мерного пространства—времени. В качестве групповых вариаций полевых переменных используются производные Ли [10]. Это дает возможность показать, что при переходе к неоднородному пространству—времени не нужно локализовать группу движений плоского пространства—времени, как делается при наивном перенесении идей Янга—Миллса на пространственно-временные симметрии, но достаточно использовать аппарат производных Ли, вид которых и определение не связаны с какой-либо конкретной геометрией пространства—времени. По этой причине и результаты, полученные таким методом, не зависят от геометрии пространства—времени, в котором вводится калибровочное поле. В § 13 показано, что лагранжиан для поля симметричного тензора второго ранга $g_{\mu\nu}$, рассматриваемого как калибровочное поле в указанном выше смысле, по своей структуре совпадает со скалярной кривизной риманова V_4, а уравнения поля — с уравнениями Эйнштейна. Поэтому и оказалось возможным отождествить $g_{\mu\nu}$ с метрическим тензором. Но можно и не делать такого отождествления. Тогда гравитационное поле может рассматриваться как тензорное поле в плоском V_4. Кроме того, в § 13 делается попытка получить с помощью производных Ли уравнения

Максвелла как уравнения калибровочного векторного поля [5], а также рассматривается вопрос об интегральных законах сохранения в общей теории относительности [11].

Как известно, в общей теории относительности имеется ковариантный, а не обычный дифференциальный закон сохранения тензора энергии-импульса $T^{\mu\nu}$, причем интегрирование симметричных тензоров определено неоднозначно. Поэтому обычно получение интегральных сохраняющихся величин типа вектора энергии-импульса в общей теории относительности является проблемой. Здесь предлагается интегрировать ковариантный дифференциальный закон сохранения вдоль направлений векторов Киллинга, задающих группу движений пространства—времени [12]. Показано, что такая процедура однозначна и в плоском V_4 приводит к обычным сохраняющимся величинам: 4-импульсу P^{μ} и моменту $M_{\mu\nu}$. В общем же случае мультиплет сохраняющихся интегральных величин не распадается на 4-импульс и момент, а образует регулярное представление группы движений V_4.

Таким образом, оказывается, что в плоском пространстве—времени возможность независимого рассмотрения 4-импульса и момента связана с наличием у соответствующей группы движений 4-мерного нормального делителя. С этим же обстоятельством связана возможность отождествления P^{μ} с пространственно-временным вектором, хотя на самом деле индексы μ относятся не к самому пространству Минковского, а к расслоению над ним. Простейший случай расслоения — касательное пространство, которое в случае плоского V_4 обычно отождествляется с исходным пространством. В общем же случае все интегральные сохраняющиеся величины оказываются векторами в алгебре Ли, т. е. в пространстве, касательном к слою.

§ 9. ТЕОРЕМЫ НЕТЕР

Формулировка и доказательство теорем. Как известно, в современной теории поля законы сохранения получаются вариационным методом с помощью первой теоремы Нетер. Она формулируется следующим образом.

Теорема 1. *Если интеграл действия S инвариантен по отношению к некоторой группе G_r (r-параметрической группе Ли), то r линейно независимых комби-*

наций лагранжевых производных* обращаются в дивергенции; и обратно, из последнего условия вытекает инвариантность S по отношению к некоторой группе G_r.

Выражения, стоящие под знаком дивергенций, фигурирующих в этой теореме, называются *токами*. Если лагранжевы производные равны нулю (выполняются уравнения Эйлера), дивергенции от токов обращаются в нуль. Так получаются дифференциальные законы сохранения. Интегральные законы сохранения (типа закона сохранения электрического заряда, или закона сохранения энергии) получаются при интегрировании дифференциальных законов сохранения по специальным образом выбранной 3-мерной гиперповерхности при определенных граничных условиях.

Локальные калибровочные группы и группа общековариантных преобразований координат пространства—времени относятся к бесконечным группам. Локальные калибровочные группы получаются из конечных групп Ли калибровочных преобразований волновых функций $\delta\psi = \varepsilon^a I_a \psi$ заменой параметров ε^a функциями координат $\varepsilon^a(x)$. Поскольку по определению группа калибровок представляет собой надкоординатные преобразования, при такой замене в каждой фиксированной точке пространства—времени сохраняется алгебра конечной группы Ли. Это отличает локальные калибровочные группы от других бесконечных групп, которым, вообще говоря, никакая алгебра не соответствует. Группу общековариантных преобразований координат общей теории относительности $x^\mu = f^\mu(x)$ можно рассматривать как бесконечную группу $G_{\infty 4}$.

Свойства функционалов, инвариантных относительно произвольных бесконечных групп $G_{\infty r}$, исследовала Э. Нетер, и полученные ею результаты сформулированы в виде следующей теоремы (вторая теорема Нетер);

Теорема 2. Если интеграл действия S инвариантен относительно группы $G_{\infty r}$, в которой встречаются производные до k-го порядка включительно, то имеют место r тождественных соотношений между лагранжевыми производными

* Т. е. левых частей уравнений Эйлера, решения которых называют экстремалями.

и производными от них до k-го порядка. Обратное тоже верно.

Таким образом, в случае $G_{\infty r}$-инвариантности появляются тождественные соотношения между уравнениями Эйлера и производными от них, что приводит к сокращению числа линейно независимых полевых уравнений. Иными словами, в $G_{\infty r}$-инвариантной теории всегда имеется r произвольных преобразований полевых переменных, которые можно зафиксировать дополнительными калибровочными условиями. В случае G_r-инвариантности уравнения Эйлера, вообще говоря, линейно независимы, и тождеств, связывающих их, не существует (число переменных равно числу уравнений).

Теория, инвариантная относительно бесконечной группы $G_{\infty r}$, инвариантна также и относительно ее подгруппы G_r, полученной из $G_{\infty r}$ при $\varepsilon^a(x) = \text{const}$. Поэтому соотношения дивергенций, о которых речь идет в первой теореме Нетер, возникают также и в случае $G_{\infty r}$-инвариантности. В результате применения обеих теорем Нетер оказывается, что если (и только если) конечная группа G_r представляет собой подгруппу бесконечной группы, то соотношения дивергенций, соответствующие G_r-инвариантности, являются линейными комбинациями тождественных соотношений, связывающих лагранжевы производные, а токи становятся линейными комбинациями лагранжевых производных. Такие токи Нетер назвала *несобственными токами*. Законы сохранения для несобственных токов выполняются на экстремалях тождественно. Несобственный сохраняющийся ток может быть сведен к дивергенции от некоторого антисимметричного тензора.

Сравним доказательство и результаты обеих теорем Нетер [5, 13]:

$$S = \int L(x, u, u', u'')\, dx,$$

где u — произвольные функции, описывающие систему (полевые переменные): x — координаты (пространственные и временные переменные); штрихи, так же как и запятая, означают обычное дифференцирование; L — плотность лагранжиана.

Сделаем преобразование $y = x + \Delta x$; $v(y) = u + \Delta u$. При этом вариация формы u имеет вид $\bar{\delta} u = \Delta u - \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x$. Тогда условие инвариантности действия примет вид

$$\int [\bar{\delta} L + \operatorname{div}(L \Delta x)]\, dx = 0. \tag{9.1}$$

Поскольку соотношение (9.1) удовлетворяется при интегрировании по любой области, то подынтегральное выражение обращается в нуль тождественно, и мы получаем дифференциальное условие для $\delta S=0$:

$$\bar{\delta} L+\operatorname{div}(L \Delta x)=0, \tag{9.2}$$

где

$$\bar{\delta} L=\frac{\delta L}{\delta u} \bar{\delta} u+\partial_{\mu}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial u_{, \mu}}-\partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial u_{, \nu \mu}}\right) \bar{\delta} u+\frac{\partial L}{\partial u_{, \mu \nu}} \bar{\delta} u_{, \nu}\right];$$

$$\frac{\delta L}{\delta u}=\frac{\delta L}{\partial u}-\partial_{\mu} \frac{\partial L}{\partial u_{, \mu}}+\partial_{\nu \mu}^{2} \frac{\partial L}{\partial u_{, \nu \mu}}-$$

лагранжева производная.

Уравнение (9.2) представляет собой дифференциальное уравнение Ли, по которому можно найти явный вид лагранжиана, если известны вариации Δx и Δu или $\bar{\delta} u$. Представим уравнение (9.2) в виде

$$\frac{\delta L}{\partial u} \bar{\delta} u=\partial_{\mu}\left[\left(-\frac{\delta L}{\partial u_{, \mu}}+\partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial u_{, \nu \mu}}\right) \bar{\delta} u-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial L}{\partial u_{, \mu \nu}} \bar{\delta} u_{, \nu}-L \Delta x^{\mu}\right]. \tag{9.3}$$

Выражение (9.3) является тождеством относительно всех входящих в него аргументов, если S — инвариант. Заметим также, что соотношение (9.3) справедливо для любых функций u, не обязательно решений уравнений Эйлера. Для выполнения (9.3) безразлично также поведение u на границе, так как дивергенциальный член не отбрасывается. В дальнейшем нас будут интересовать два случая: 1) u—экстремальная поверхность; 2) u—решение обобщенных уравнений Эйлера с правой частью специального вида.

Рассмотрим частные случаи инвариантности.

Инвариантность относительно конечной группы. Пусть S инвариантен относительно конечной группы G_r и вариации имеют вид: $\delta x^{\mu}=\varepsilon^{a} \underset{a}{X} x^{\mu}$; $\delta u=\varepsilon^{a} \underset{a}{I} u$; $\bar{\delta} u=(\underset{a}{I} u-\underset{a}{X} x^{\mu} \partial_{\mu} u) \varepsilon^{a}$. Если $\underset{a}{X}=\xi_{a}^{\mu} \partial_{\mu}$ - генераторы G_r в дифференциальной форме, то

$$\delta x^{\mu}=\xi_{a}^{\mu} \varepsilon^{a} ; \quad \bar{\delta} u=\left(\underset{a}{I} u-\xi_{a}^{\mu} \partial_{\mu} u\right) \varepsilon^{a}. \tag{9.4}$$

Выражение (9.4) показывает, что вариация формы функции устроена аналогично производной Ли (см. § 13). Подставляя (9.4) в (9.3), вынося параметры ε^a из-под знака дивергенции и собирая члены при одинаковых ε^a, получаем:

$$\frac{\delta L}{\delta u}\left(\underset{a}{I}u-\xi_a^{\mu}\partial_{\mu}u\right)=-\partial_{\mu}\left[\left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}}-\partial_{\nu}\frac{\partial L}{\partial u_{,\nu\mu}}\right)\times\right.$$
$$\left.\times\left(\underset{a}{I}u-\xi_a^{\nu}\partial_{\nu}u\right)+L\xi_a^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu\nu}}\left(\underset{a}{I}u_{,\nu}-\xi_a^{\lambda}u_{,\nu\lambda}\right)\right],\qquad(9.5)$$

или

$$\frac{\delta L}{\delta u}\left(\underset{a}{I}u-\xi_a^{\mu}\partial_{\mu}u\right)=\partial_{\mu}J_{\nu}^{\mu}.\qquad(9.6)$$

Итак, r линейно независимых комбинаций лагранжевых производных $\delta L/\delta u$ в случае инвариантности S относительно G_r, обращаются в дивергенции независимо от того, является ли u решением уравнений Эйлера.

В обычной вариационной задаче на отыскание экстремума S интеграл от правой части (9.5) преобразуется в интеграл по поверхности, и, поскольку вариации функций предполагаются исчезающими на границе области вместе со всеми своими производными, обращается в нуль (задача с закрепленными концами). При этом из $\delta S=0$ и из произвольности δu следует уравнение Эйлера $\delta L/\delta u=0$.

В случае групповых вариаций δu, вообще говоря, не исчезают на границе (концы до некоторой степени свободны), вариационный принцип дает только соотношения (9.5), а уравнение Эйлера не предполагается выполненным.

Если u — экстремальная поверхность, т. е. $\delta L/\delta u=0$, из (9.5) вытекает известный дифференциальный закон сохранения $\partial_{\mu}J_a^{\mu}=0$, где

$$J_a^{\mu}=-\left[\left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}}-\partial_{\nu}\frac{\partial L}{\partial u_{,\nu\mu}}\right)\left(\underset{a}{I}u-\xi_a^{\lambda}\partial_{\lambda}u\right)+\right.$$
$$\left.+L\xi_a^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu\nu}}\left(\underset{a}{I}u_{,\nu}-\xi_a^{\lambda}u_{,\nu\lambda}\right)\right]\qquad(9.7)$$

сохраняющийся ток.

Если лагранжиан не содержит вторых производных от полевых переменных, сохраняющийся ток удобно представить в виде

$$J_a^{\mu}=-\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}}\underset{a}{I}u+\left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}}u_{,\nu}-L\delta_{\nu}^{\mu}\right)\xi_a^{\nu}=$$
$$=-\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}}\underset{a}{I}u+T_{\nu}^{\mu}\xi_a^{\nu},\qquad(9.8)$$

где $T_\nu^\mu = \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} u_{,\nu} - L\delta_\nu^\mu$ — канонический тензор энергии—импульса.

Если u — решение «обобщенного» уравнения Эйлера вида $\delta L/\delta u = \Theta$, где Θ — новые функции (например, источники, не включенные в лагранжиан), то из (9.5) получим «обобщенные» неоднородные законы сохранения:

$$\partial_\mu J_a^\mu + \Theta \left(\underset{a}{I} u - \xi_a^\mu \partial_\mu u \right) = 0.$$

Из полученного выражения вытекает, что отличие дивергенции тока от нуля, т. е. нарушение законов сохранения и, следовательно, симметрии, можно связать определенным образом с новыми источниками. Соотношения (9.5) показывают также, что выражения для дивергенций от токов можно получить непосредственно из полевых уравнений, свертывая их с вариациями формы волновых функций, порожденными группой инвариантности G_r [14, 15]. Из $\delta L/\delta u = 0$. следует $\partial_\mu J_a^\mu = 0$, и в этом смысле законы сохранения являются следствием уравнений поля. Таким образом, первая теорема Нетер вовсе не дает непосредственно законов сохранения. Она лишь утверждает, что в случае наличия определенной симметрии в вариационной задаче (или в соответствующей физической ситуации) можно составить выражения (называемые токами), дивергенции которых равны линейным комбинациям лагранжевых производных. Эти дивергенции обращаются в нуль на экстремалях, и тогда получаются дифференциальные законы сохранения. Однако соотношения дивергенций, о которых идет речь в первой теореме Нетер, выполняются и в том случае, когда уравнения поля лишь частично совпадают с уравнениями Эйлера. Выбор вида уравнений поля (и, следовательно, вида законов сохранения) лежит уже вне рамок первой теоремы Нетер.

Инвариантность относительно бесконечной группы. Допустим теперь, что интеграл действия S инвариантен относительно $G_{\infty r}$. Пусть, как и в случае G_r, δx и δu линейны относительно $\varepsilon^a(x)$ и их производных. Тогда вариацию формы можно записать в виде

$$\bar{\delta} u = a_a(x, u, u', \ldots)\, \varepsilon^a(x) + b_a^\mu(x, u, u', \ldots)\, \partial\varepsilon^a/\partial x^\mu. \qquad (9.9)$$

(для существования несобственных законов сохранения достаточно первых производных от $\varepsilon^a(x)$).

В этом случае

$$\frac{\delta L}{\delta u}\,\overline{\delta u}=\frac{\delta L}{\delta u}\left[a_a(x,u,u',\ldots)\,\varepsilon^a(x)+b_a^{\mu}(x,u,u',\ldots)\,\partial\varepsilon^a/\partial x^{\mu}\right].$$

Теперь на основании тождества

$$\varphi(x,u,u',\ldots)\,\frac{\partial^{\tau}\varepsilon(x)}{\partial x^{\tau}}\equiv(-1)^{\tau}\,\frac{\partial^{\tau}\varphi}{\partial x^{\tau}}\,\varepsilon(x)\bmod\operatorname{div}$$

можно заменить производные от $\varepsilon^a(x)$ самими функциями. Тогда (9.3) примет вид

$$\left[a_a\,\frac{\delta L}{\delta u}-\partial_{\mu}\left(b_a^{\mu}\,\frac{\delta L}{\delta u}\right)\right]\varepsilon^a(x)=-\operatorname{div}\left(B^{\mu}+\frac{\delta L}{\delta u}\,b_a^{\mu}\varepsilon^a\right).\qquad(9.10)$$

В отсутствие вторых производных в лагранжиане

$$B^{\mu}=\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}}\,a_a(x,u,u',\ldots)\,\varepsilon^a+L\Delta x^{\mu}+\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}}\,b_a^{\nu}\,\partial_{\nu}\varepsilon^a.$$

Если теперь проинтегрировать (9.10) по какой-либо области, на границе которой $\varepsilon^a(x)$ со всеми своими производными исчезают, интеграл от правой части (9.10) обратится в нуль*. Тогда из $\delta S=0$ следует

$$\int\left[a_a\cdot\delta L/\delta u-\partial_{\mu}\left(b_a^{\mu}\cdot\delta L/\delta u\right)\right]\varepsilon^a(x)\,dx=0.$$

В силу произвольности функций $\varepsilon^a(x)$ отсюда вытекает равенство нулю выражения в квадратных скобках:

$$a_a\cdot\delta L/\delta u\equiv\partial_{\mu}\left(b_a^{\mu}\cdot\delta L/\delta u\right).\qquad(9.11)$$

Это искомые зависимости между лагранжевыми производными и производными от них. Соотношения (9.11) линейно независимы и справедливы также для конечных преобразований $G_{\infty r}$.

Для перехода от бесконечно малых проеобразований $G_{\infty r}$ к конечным существенно, чтобы: а) δu и δx были линейны относительно $\varepsilon^a(x)$ и их производных; б) δu и δx не содержали производных от u, поскольку в противном случае

---

* Поскольку утверждение второй теоремы Нетер состоит в том, что инвариантность относительно бесконечной группы *порождает* тождественные соотношения между экстремалями, для доказательства теоремы достаточно среди *произвольных* функций $\varepsilon^a(x)$ отыскать такие, которые обращаются в нуль вместе со своими производными на поверхности интегрирования.

конечные преобразования $G_{\infty r}$ зависят от бесконечного числа производных от u. Соотношения (9.11), как и (9.5) для G_r, справедливы для любых функций u, независимо от того, являются ли они решениями уравнений Эйлера.

Как и раньше, рассмотрим два случая:

1. Пусть u — экстремальная поверхность, т. е. $\delta L/\delta u = 0$. Тогда из (9.11) следует

$$\partial_\mu \left(b_a^\mu \cdot \delta L/\delta u\right) = 0. \tag{9.12}$$

Это выражение дает нам способ получения законов сохранения из уравнений поля с помощью дифференцирования, аналогичный тому, который дает закон сохранения энергии в гравитационном поле.

2. Если u удовлетворяет уравнению $\delta L/\delta u = \Theta$, где Θ — новые функции, то из (9.11) получаем дополнительные условия на Θ : $\partial_\mu (b_a^\mu\ \Theta) = a_a\Theta$. Роль Θ могут играть также члены, нарушающие $G_{\infty r}$-инвариантность уравнений поля, но инвариантные относительно G_r, например массовые члены в калибровочно-инвариантной теории. Тогда тождества Нетер приводят к дополнительным условиям на полевые переменные, исключающим лишние степени свободы. В самом деле, пусть $\delta L/\delta u = \lambda u$, где $\lambda = \text{const}$. Тогда

$$\partial_\mu \left(b_a^\mu\, u\right) = a_a u.$$

Слабые и сильные, или собственные и несобственные законы сохранения. Законы сохранения (9.7), полученные с помощью первой теоремы, Нетер называет *собственными законами сохранения.* Их также называют иногда *слабыми законами сохранения*, так как они выполняются только на экстремалях [16]. В отличие от слабых законов сохранения, связанных с G_r-инвариантностью лагранжиана, инвариантность относительно бесконечной группы приводит к *сильным законам сохранения*, выполняющимся не только на решениях уравнений экстремали, но для любых u. Сильные законы сохранения на самом деле являются записью тождеств Нетер при некоторых специальных значениях коэффициентов a_a и b_a^μ. В теории калибровочных полей, как и в общей теории относительности, возникают сильные законы сохранения именно такого типа. Эти законы сохранения — несобственные, так как в качестве сохраняющегося тока в них фигурируют линейные комбинации экстремалей. Примером такого сильного (несобственного) закона сохранения может служить тождество, которому удовлетворяют уравнения Эйнштейна:

$$\left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R\right)_{;\mu} \equiv 0. \qquad (9.13)$$

В § 9.5 показано, что оно является частным случаем тождеств Нетер для $G_{\infty 4}$, которые в общем случае выглядят следующим образом:

$$(\delta\hat{L}/\delta g^{\mu\nu})_{;\mu} \equiv 0, \qquad (9.14)$$

где $\hat{L}$ означает плотность функции Лагранжа.

Тождества Нетер для электродинамики имеют вид

$$\partial_\mu (\delta L/\delta A_\mu) \equiv 0. \qquad (9.15)$$

Если источников нет, а $L = \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, то (9.15) означает

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \qquad (9.16)$$

Интегрирование этого закона сохранения приводит к теореме Гаусса относительно потоков электрического и магнитного полей через замкнутую двумерную поверхность: $\oint\limits_\sigma H d\sigma = 0$; $\oint\limits_\sigma E d\sigma = 0$.

Если источники поля появляются как новые члены в уравнениях экстремали, из (9.14) и (9.15) получаем известные законы сохранения тока источников в электродинамике и тензора энергии — импульса в гравитации $\partial_\mu j^\mu = 0$; $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$. Оба эти закона сохранения являются следствиями тождеств Нетер, т. е. дополнительных условий на уравнения поля, и поэтому естественно понимать их как условия на источники. Любопытно, что эти условия на источники абсолютно безразличны к конкретному виду экстремалей, т. е. к виду левых частей уравнений, в которых они стоят. Важно лишь, что эти левые части инвариантны относительно бесконечной группы. Таким образом, законы сохранения (9.15), (9.16) не чувствительны к конкретной структуре инвариантной относительно $G_{\infty r}$ части лагранжиана.

Из (9.10) при выполнении тождеств Нетер (9.11) следует равенство

$$\operatorname{div}\left[J^\mu_a \varepsilon^a(x) - \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} b^\nu_a \partial_\nu \varepsilon^a(x) - \frac{\delta L}{\delta u} b^\mu_a \varepsilon^a(x)\right] = 0, \qquad (9.17)$$

где $J_a^\mu = (\partial L/\partial u_{,\mu})\cdot a_a$. Равенство (9.17) выполняется при любых $\varepsilon^a(x)$ и обеспечивает инвариантность интеграла действия относительно $G_{\infty r}$, а также справедливость обратной второй теоремы Нетер.

Если учесть уравнения экстремали $\delta L/\delta u = 0$, то будем иметь

$$\operatorname{div}\left[J_a^\mu \varepsilon^a(x) - \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} b_a^\nu \partial_\nu \varepsilon^a(x)\right] = 0. \qquad (9.18)$$

Левая часть уравнения (9.18) представляет собой с точностью до знака не что иное, как вариацию лагранжиана после учета уравнений Эйлера и связывающих их тождеств. Таким образом,

$$\delta L = -\left\{\partial_\mu J_a^\mu \varepsilon^a(x) + \left[J_a^\mu - \partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}} b_a^\mu\right)\right]\times\right.$$
$$\left.\times\,\partial_\mu \varepsilon^a(x) - \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} b_a^\nu \partial_{\mu\nu}\varepsilon^a(x)\right\}. \qquad (9.19)$$

Так как параметрические функции совершенно произвольны, условие экстремальности действия приводит к равенству нулю коэффициентов в δL при $\varepsilon^a(x)$ и их производных:

$$\partial_\mu J_a^\mu = 0; \qquad (9.20)$$

$$J_a^\mu = \partial_\nu\left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}} b_a^\mu\right); \qquad (9.21)$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} b_a^\nu + \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}} b_a^\mu = 0. \qquad (9.22)$$

Таким образом, инвариантность интеграла действия относительно бесконечной группы приводит на экстремалях к обычному закону сохранения (9.20) для тока

$$J_a^\mu = \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} a_a,$$

соответствующего G_r-инвариантности. Но этот ток оказывается равным [в силу условий (9.21) и (9.22)] дивергенции от некоторого антисимметричного тензора.

Если лагранжиан не инвариантен относительно $G_{\infty r}$, но уравнения Эйлера и тождества Нетер выполнены, из соотношений (9.19) получаем следующие уравнения:

$$\partial \delta L / \partial \varepsilon^a (x) = \partial_\mu J_a^\mu; \tag{9.23}$$

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \partial_\mu \varepsilon^a (x)} = J_a^\mu - \partial_\nu \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}} b_a^\mu \right) =$$

$$= J_a^\mu - \frac{\partial L}{\partial u} b_a^\mu - \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}} \partial_\nu b_a^\mu; \tag{9.24}$$

$$\frac{\partial \delta L}{\partial \partial_{\mu\nu} \varepsilon^a (x)} = \frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} b_a^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial L}{\partial u_{,\mu}} b_a^\nu + \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}} b_a^\mu \right). \tag{9.25}$$

Если полевые переменные преобразуются относительно $G_{\infty r}$ однородно, т. е. $b_a{}^\mu = 0$, уравнения (9.23) и (9.24) переходят в уравнения, предложенные Гелл-Манном и Леви (1960 г.) [1]:

$$\partial \delta L / \partial \partial_\mu \varepsilon^a (x) = J_a^\mu;$$

$$\partial \delta L / \partial \varepsilon^a (x) = \partial_\mu J_a^\mu.$$

Эти уравнения для лагранжиана, описывающего массивное калибровочное поле (с нарушенной локальной калибровочной инвариантностью), приводят к пропорциональности тока и поля: $J_a{}^\mu \sim m^2 A_a{}^\mu$.

§ 10. ЛОКАЛЬНАЯ КАЛИБРОВОЧНАЯ ИНВАРИАНТНОСТЬ ЛАГРАНЖИАНА И ВТОРАЯ ТЕОРЕМА НЕТЕР

Вторая теорема Нетер и теория Утиямы [3]. Построение инвариантных лагранжианов. Поставим следующую задачу: найти простейший лагранжиан, содержащий производные от полевых переменных $A_\mu{}^a$ не выше первого порядка, инвариантный относительно локальной калибровочной группы, если преобразования ее для $A^a{}_\mu$ имеют вид

$$\delta A_\mu^a = f_{bc}^a A_\mu^c \varepsilon^b + \partial_\mu \varepsilon^a \ (a = 1, \ldots, r; \ \mu = 1, \ldots, 4), \tag{10.1}$$

где f_{bc}^a — структурные константы некоторой конечной группы Ли; ε^a — параметры. Вектор-потенциал калибровочного поля $A_\mu{}^a$ можно понимать как мультиплет (набор)

r (по числу параметров калибровочной группы) векторных полей A_μ, причем калибровочная группа перепутывает эти поля.

Преобразования (10.1) образуют группу $G_{\infty r}$, причем вид вариации $\delta A_\mu{}^a$ соответствует случаю $\Delta x = 0$, $\bar{\delta} A_\mu{}^a = \delta A_\mu{}^a$. Иными словами, преобразования $G_{\infty r}$ надкоординатные (координаты не затрагиваются или фиксируется точка x).

Используя вторую теорему Нетер, построим интеграл действия $S = \int L(A_\mu{}^a;\ A_\mu{}^a{}_{,\nu})\,dv$, инвариантный относительно $G_{\infty r}$. Соотношения (9.3), являющиеся дифференциальными условиями инвариантности S, принимают вид

$$\frac{\delta L}{\delta A^a_\mu}\,\delta A^a_\mu \equiv \partial_\mu \left(- \frac{\partial L}{\partial A^a_{\nu,\mu}}\,\delta A^a_\nu \right). \qquad (10.2)$$

Подставим в (10.2) $\delta A_\mu{}^a$ и, поскольку (10.2) должны выполняться тождественно, приравняем нулю коэффициенты при $\varepsilon^a(x)$, $\partial_\mu \varepsilon^a(x)$ и $\partial_{\mu\nu}\varepsilon^a(x)$ по отдельности. Тогда условия инвариантности S запишутся в виде системы тождеств, решая которую снизу вверх, получим общий вид зависимости L от $A_\mu{}^a$ и $A^a_{\mu,\nu}$:

$$\frac{\partial L}{\partial A^b_\mu} f^b_{ac}\, A^c_\mu + \frac{\partial L}{\partial A^b_{\nu,\mu}} f^b_{ac}\, A^c_{\nu,\mu} \equiv 0; \qquad (10.3)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A^a_\mu} + \frac{\partial L}{\partial A^b_{\nu,\mu}} f^b_{ac}\, A^c_\nu \equiv 0; \qquad (10.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial A^a_{\mu,\nu}} \equiv 0. \qquad (10.5)$$

Из (10.5) следует, что производные от $A_\mu{}^a$ входят в L только через антисимметричные выражения $A^a{}_{[\mu,\nu]}$. Используя (10.5), из (10.4) получим

$$L = L(F^a_{\mu\nu}), \qquad (10.6)$$

где

$$F^a_{\mu\nu} = A^a_{\nu,\mu} - A^a_{\mu,\nu} - \frac{1}{2} f^a_{bc}\left(A^b_\mu A^c_\nu - A^b_\nu A^c_\mu\right).$$

Нетрудно убедиться, что $F^a_{\mu\nu}$ преобразуется относительно (10.1) однородно:

$$\delta F^a_{\mu\nu} = f^a_{bc}\, F^c_{\mu\nu}\, \varepsilon^b. \qquad (10.7)$$

Поскольку структура $F^a_{\mu\nu}$ напоминает максвелловский тензор поля, назовем $F^a_{\mu\nu}$ тензором напряженности поля A^a_μ. Учитывая (10.7), из (10.3) получаем

$$L = L\left(F^a_{\mu\nu}\, f^m_{ac} f^c_{mb}\, F^b_{\tau\lambda}\right). \tag{10.8}$$

Введем величину

$$F_{a\mu\nu} = f^m_{ac}\, f^c_{mb}\, F^b_{\mu\nu} = g_{ab}\, F^b_{\mu\nu}. \tag{10.9}$$

Ее закон преобразования

$$\delta F_{a\mu\nu} = f^b_{ac}\, F_{b\mu\nu}\, \varepsilon^c.$$

В этом случае (10.8) переходит в

$$L = L\left(F^a_{\mu\nu}\, F_{a\tau\lambda}\right). \tag{10.10}$$

Величина $g_{ab} = f^m_{ac} f^c_{mb}$ симметрична по a, b в силу тождества Якоби. В дальнейшем она будет использоваться как внутренняя метрика. Матрица g_{ab} невырождена только для полупростых групп, для которых f^b_{ac} антисимметричны по всем значкам.

Простейший калибровочно инвариантный, а также релятивистски инвариантный лагранжиан имеет вид

$$L_0 = \frac{1}{4}\, F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a. \tag{10.11}$$

Произвольный инвариантный лагранжиан есть произвольная функция от L_0; L_0 называют *лагранжианом свободного калибровочного поля.*

Теперь определим общий вид лагранжиана взаимодействия $L_{\text{вз}}(A_\mu{}^a;\ \psi;\ \psi_{,\mu})$, инвариантного относительно $G_{\infty r}$ и зависящего от двух видов функций и их производных: от вектор-потенциалов калибровочных полей $A_\mu{}^a$, содержащих в преобразованиях первые производные от параметров, и от волновых функций полей ψ, преобразующихся однородно и соответствующих частицам, взаимодействующим с калибровочным полем. Пусть

$$\left.\begin{aligned} \delta A^a_\mu &= f^a_{bc}\, A^c_\mu\, \varepsilon^b + \partial_\mu \varepsilon^a; \\ \delta\psi &= \underset{a}{I}\varepsilon^a\, \psi;\quad \delta\bar\psi = -\varepsilon^a\, \bar\psi \underset{a}{I}, \end{aligned}\right\} \tag{10.12}$$

где $\underset{a}{I}$ — генератор некоторого представления группы G_r, получающейся из $G_{\infty r}$ при $\varepsilon^a(x) = \text{const}$.

Предположим, что взаимодействие (смешанные члены в $L_{вз}$) не зависит от производных $A_\mu{}^a$. В этом случае для определения $L_{вз}$ получим следующую систему:

$$\frac{\partial L_{вз}}{\partial A^b_\mu} f^b_{ac} A^c_\mu = -\frac{\partial L_{вз}}{\partial\psi} \underset{a}{I}\psi - \frac{\partial L_{вз}}{\partial\psi_{,\mu}} \underset{a}{I}\psi_{,\mu} + \text{h. c.}; \quad (10.13)$$

$$\frac{\partial L_{вз}}{\partial A^a_\mu} = -\frac{\partial L_{вз}}{\partial\psi_{,\mu}} \underset{a}{I}\psi + \bar\psi \underset{a}{I} \frac{\partial L_{вз}}{\partial\bar\psi_{,\mu}}, \quad (10.14)$$

где h.c. — эрмитово сопряженные члены. Из (10.14) следует, что $L_{вз}$ зависит от аргументов, имеющих вид ковариантной производной:

$$\begin{aligned} \nabla_\mu \psi &= \partial_\mu \psi - \frac{1}{2} \underset{a}{I} A^a_\mu \psi; \\ \nabla_\mu \bar\psi &= \partial_\mu \bar\psi + \frac{1}{2} \bar\psi \underset{a}{I} A^a_\mu. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Нетрудно убедиться, что уравнению (10.13) удовлетворяет лагранжиан взаимодействия

$$L_{вз} = \bar\psi\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar\psi \gamma^\mu \psi - m\bar\psi\psi, \quad (10.16)$$

где m — произвольно.

Таким образом, простейший лагранжиан, инвариантный относительно $G_{\infty r}$, описывающий калибровочное поле и взаимодействие этого поля, например, со спинорным полем ψ, имеет вид

$$L = \frac{1}{4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + \bar\psi\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \nabla_\mu \bar\psi\gamma^\mu \psi - m\bar\psi\psi, \quad (10.17)$$

где γ^μ — матрицы Дирака.

Уравнения полей. Уравнения поля для лагранжиана (10.10) имеют квазимаксвелловский вид

$$\partial_\nu F^{\mu\nu}_a - f^b_{ac} F^{\mu\nu}_b A^c_\nu = 0, \quad (10.18)$$

или $\partial_\nu F^{\mu\nu}_a = \overset{0}{J}{}^\mu_a$, или $\nabla_\nu F^{\mu\nu}_a = 0$.

Если f^b_{ac} — структурные константы группы изотопических вращений, уравнения (10.18) представляют собой уравнения для бозонов Янга—Миллса. В электродинамике мы имеем однопараметрическую абелеву группу калибровочных преобразований, для которой $f^b_{ac} = 0$. Поэтому уравнения (10.18) переходят в уравнения Максвелла : $\partial_\nu F^{\mu\nu} = 0$.

Если гравитационное поле рассматривается как калибровочное, связанное с однородной локальной группой Лоренца, то (10.18) переходит в $R^{\mu\nu}{}_{ik;\nu} = 0$.

Уравнения движения частиц, описываемых полем ψ и взаимодействующих с калибровочным полем, записываются в виде

$$\frac{\delta L}{\delta\psi} = \frac{\partial L}{\partial\psi} - \nabla_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial\nabla_\mu\psi}\right) = 0,$$

что для лагранжиана (10.17) дает

$$\gamma^\mu \nabla_\mu \psi - m\psi = 0.$$

Тождества Нетер и законы сохранения. Полагая в тождествах (9.11) $a_a = f^b_{ac}A_\mu{}^c$, $b_a{}^\mu = 1$, получаем

$$\frac{\delta L}{\delta A^b_\mu} f^b_{ac} A^c_\mu \equiv \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta A^a_\mu}\right), \tag{10.19}$$

где

$$\frac{\delta L}{\delta A^a_\mu} = \frac{\partial L}{\partial A^a_\mu} - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial A^a_{\mu,\nu}}.$$

Поскольку $A_\mu{}^a$ и $A^a_{\mu,\nu}$ входят в L только через $F^a_{\mu\nu}$, удобнее переписать (10.19) через производные по $F^a_{\mu\nu}$. Используя соотношения

$$\left.\frac{\partial L}{\partial A^a_\mu}\right|_{A^a_{\mu,\nu} = \mathrm{const}} = -\frac{\partial L}{\partial F^b_{\mu\nu}} f^b_{ac} A^c_\nu;$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial A^a_{\mu,\nu}}\right|_{A^a_\mu = \mathrm{const}} = -\frac{\partial L}{\partial F^a_{\mu\nu}} = \frac{\partial L}{\partial F^a_{\nu\mu}},$$

получим

$$\frac{\delta L}{\delta A^a_\mu} = \frac{\delta L}{\partial F^b_{\nu\mu}} f^b_{ac} A^c_\nu - \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F^a_{\nu\mu}} = \partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F^a_{\mu\nu}} - \frac{\partial L}{\partial F^b_{\mu\nu}} f^b_{ac} A^c_\nu; \tag{10.20}$$

$$\left(\partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F^a_{\mu\nu}} - \frac{\partial L}{\partial F^b_{\mu\nu}} f^b_{ac} A^c_\nu\right) f^a_{kl} A^l_\mu \equiv -\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial F^b_{\mu\nu}} f^b_{kc} A^c_\nu\right), \tag{10.21}$$

Учитывая закон преобразования для $F^a_{\mu\nu}$, тождествам (10.19) нетрудно придать вид ковариантной дивергенции от лагранжевой производной:

$$\nabla_\mu\left(\partial_\nu \frac{\partial L}{\partial F^a_{\mu\nu}}-\frac{\partial L}{\partial F^b_{\mu\nu}} f^b_{ac} A^c_\nu\right)\equiv 0, \qquad (10.22)$$

или, возвращаясь от производных по $F^a_{\mu\nu}$ к производным по A^a_μ, $\nabla_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta A^a_\mu}\right)\equiv 0$.

Мы получили сильный закон сохранения, справедливый независимо от вида полевых уравнений для A^a_μ.

Тождества (10.21) на экстремалях приводят к обычному закону сохранения («слабому»):

$$\partial_\mu\left(\frac{\partial L}{\partial F^b_{\mu\nu}} f^b_{ac} A^c_\nu\right)=\partial_\mu \overset{0}{J}{}^\mu_a=0 \qquad (10.23)$$

для тока «самодействия» калибровочного поля

$$\overset{0}{J}{}^\mu_a=\frac{\partial L}{\partial F^b_{\mu\nu}} f^b_{ac} A^c_\nu.$$

Относительно локальных калибровочных преобразований закон сохранения (10.23) нековариантен. Несобственный ток $\overset{0}{J}{}^\mu{}_a$ по своему смыслу аналогичен псевдотензору энергии-импульса гравитационного поля общей теории относительности и мог бы быть назван псевдотоком. Как легко видеть из уравнений поля, он действительно равен дивергенции от антисимметричного тензора. В электродинамике $\overset{0}{J}{}^\mu{}_a=0$ из-за абелевости калибровочной группы.

Рассмотрим теперь лагранжиан (10.17). Тождества (9.11) в этом случае выглядят следующим образом:

$$\frac{\delta L}{\delta A^b_\mu} f^b_{ac} A^c_\mu+\frac{\delta L}{\delta\psi} \underset{a}{I}\psi-\bar\psi \underset{a}{I} \frac{\delta L}{\delta\bar\psi}\equiv\partial_\mu\left(\frac{\delta L}{\delta A^a_\mu}\right), \qquad (10.24)$$

где

$$\frac{\partial L}{\partial A^a_\mu}=\frac{\partial L_0}{\partial A^a_\mu}+\frac{\partial L_{\text{вз}}}{\partial A^a_\mu}=\overset{0}{J}{}^\mu_a+J^\mu_a, \qquad (10.25)$$

причем $J_a^\mu = -\frac{\partial L_{\text{вз}}}{\partial \nabla_\mu \psi} \underset{a}{I} \psi + \bar{\psi} \underset{a}{I} \frac{\partial L_{\text{вз}}}{\partial \nabla_\mu \bar{\psi}}$. Если A_μ^a, ψ и $\bar{\psi}$ — решения уравнений Эйлера, то из (10.24) получаем закон сохранения

$$\partial_\mu (\overset{0}{J}{}_a^\mu + J_a^\mu) = 0. \tag{10.26}$$

Закон сохранения (10.26) ковариантен. Это обычный (слабый) закон сохранения тока, но несобственный. Интересно, что его структура подобна структуре закона сохранения энергии в ОТО: сохраняется в обычном смысле ток «материи» + псевдоток поля. Ток «материи», т. е. частиц, взаимодействующих с калибровочным полем, сохраняется лишь в смысле ковариантной дивергенции. В этом легко убедиться, записывая тождества Нетер для лагранжиана (10.16):

$$\frac{\delta L}{\delta \psi} \underset{a}{I} \psi - \bar{\psi} \underset{a}{I} \frac{\delta L}{\delta \bar{\psi}} \equiv 0.$$

Раскрывая лагранжевы производные $\delta L/\delta\psi$ и $\delta L/\delta\bar{\psi}$, получим

$$\partial_\mu J_a^\mu - f_{ac}^b A_\mu^c J_a^\mu = 0.$$

Учитывая, что $J_a{}^\mu$ преобразуется по регулярному представлению G_r: $\delta J_a{}^\mu = f_{ac}^b \varepsilon^a J_b{}^\mu$, запишем закон сохранения для тока частиц в ковариантном виде $\nabla_\mu J_a{}^\mu = 0$. Для абелевых групп закон сохранения, полученный таким образом, по-прежнему однороден:

$$\partial_\mu J^\mu = 0.$$

Массивные калибровочные поля и дополнительные условия. Как было отмечено, тождества Нетер, обеспечивающие инвариантность интеграла действия относительно бесконечной группы, выполняются независимо от того, являются ли полевые переменные решениями уравнений Эйлера для этого действия. Они могут выполняться и в том случае, если уравнения движения, не совпадающие с экстремалями, инвариантны лишь относительно конечной группы, в которую переходит $G_{\infty r}$ при $\varepsilon^a(x) = \text{const}$. Но тогда тождества Нетер приводят к дополнительным условиям на полевые переменные, устраняющим лишние компоненты.

Предположим, что вектор-потенциалы калибровочного поля удовлетворяют не уравнению (10.18), а уравнению с массой

$$\nabla_\nu F_a^{\mu\nu} - m^2 A_a^\mu = 0,$$

которое можно записать как

$$\delta L_0/\delta A_\mu^a = m^2 A_a^\mu.$$

Тогда тождества Нетер приводят к условиям калибровки для A_a^μ типа условий Лоренца:

$$m^2 \nabla_\mu A_a^\mu = m^2 (\partial_\mu A_a^\mu - f_{ac}^b A_\mu^c A_b^\mu) = 0. \qquad (10.27)$$

Поскольку для простых групп структурные константы антисимметричны по всем индексам и $m^2 \neq 0$, условия калибровки сводятся просто к $\partial_\mu A_a{}^\mu = 0$. Когда уравнение экстремали $\delta L_0/\delta A_\mu^a = 0$ удовлетворяется ($m^2 = 0$), дополнительных условий на вектор-потенциалы не возникает. Оба случая можно записать в виде соотношения

$$m^2 \partial_\mu A_a^\mu = \begin{cases} 0 \text{ при } m^2 \neq 0 \\ \text{произвольно при } m^2 = 0. \end{cases} \qquad (10.28)$$

Существование тождеств, связывающих уравнения поля и производные от них, в силу справедливости обратной второй теоремы Нетер говорит об инвариатности соответствующего лагранжиана относительно бесконечной группы. Действительно, если установлено, что калибровочные условия на вектор-потенциалы можно получить как следствие тождеств Нетер между уравнениями поля и обычных законов сохранения, то, используя коэффициенты в тождествах как коэффициенты бесконечной группы $G_{\infty r}$, можно по соответствующим вариациям полевых переменных восстановить лагранжиан (например, методом Утиямы). Тождествам Нетер при наличии дополнительных условий удобно придавать вид

$$a_a \left(\frac{\delta L}{\delta u} - \Theta \right) \equiv \partial_\mu \left[b_a^\mu \left(\frac{\delta L}{\delta u} - \Theta \right) \right], \qquad (10.29)$$

где $\left(\frac{\delta L}{\delta u} - \Theta \right)$ соответствует инвариантной относительно $G_{\infty r}$ части уравнений Эйлера. Члены, включающие Θ, учитывают дополнительные условия.

Заметим, что если рассматриваются не только калибровочные поля, но и другие, взаимодействующие с ними (например, спинорные), выполнение дополнительных условий для калибровочного поля, связанных с тождествами Нетер, возможно лишь при условии выполнения определенных законов сохранения для других полей. В самом деле, из (10.24) следует, что

$$\nabla_\mu (\delta L / \delta A_\mu^a) \equiv \nabla_\mu J_a^\mu .$$

Следовательно, $m^2 \partial_\mu A_a^\mu \equiv \nabla_\mu J_a^\mu$.

§ 11. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ЛАГРАНЖИАНА ПО УРАВНЕНИЯМ ПОЛЯ И ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ, ВЫТЕКАЮЩИМ ИЗ НИХ

Ограничение числа степеней свободы взаимодействующего поля с помощью специального выбора дополнительных условий может быть связано с определенными физическими принципами. Например, калибровочные условия (10.28) для векторных полей означают, что эти поля могут переносить при взаимодействии только спин 1, тогда как в отсутствие дополнительных условий векторное поле может переносить два спина: 0 и 1. Оказывается, что если наложить на векторные поля дополнительные условия (10.28), т. е. потребовать, чтобы они обладали определенным спином и этот спин равнялся единице, то мультиплеты взаимодействующих векторных полей образуют *регулярные представления* различных полупростых алгебр Ли. Спин — это одно из квантовых чисел, классифицирующих представления группы Пуанкаре, которая является группой движений пространства—времени Минковского. Таким образом, здесь мы встречаемся еще с одним примером ситуации (другой пример приведен в § 6), когда требование определенных пространственно-временных свойств векторного поля приводит к ограничениям на возможный вид взаимодействия между полями, т. е. определяет внутреннюю симметрию взаимодействий. Таким образом, устанавливается связь между законами сохранения, соответствующими внутренним симметриям (сохранение числа барионов, странности, изотопического спина, а также электрического заряда) и пространственно-временным свойством векторных полей — обладать определенным спином. Так, существование истинно нейтральных полей со спином 1 (например, фотона или ω-мезона) влечет за собой инвариантности, соответствующие сохранению аддитивных квантовых чисел (электрического заряда или странности).

Существование заряженных полей со спином 1 (например, ρ-мезона) приводит к инвариантностям типа изотопической и т. д. Обратное тоже верно: при наличии того или иного закона сохранения есть место для частицы, обусловливающей его возникновение, и можно ставить вопрос о поиске такой частицы.

В рамках лагранжева подхода, изложенного в § 10, связь между дополнительными условиями и группой инвариантности лагранжиана возникает благодаря справедливости обратной второй теоремы Нетер, когда наложенные дополнительные условия таковы, что их можно получить как следствие тождественных соотношений между уравнениями движения и производными от них (при выполнении соответствующих законов сохранения). Ниже приведен предложенный В. И. Огиевецким и И. В. Полубариновым метод восстановления структуры лагранжиана, описывающего взаимодействующие векторные поля, по уравнениям поля и дополнительным условиям, вытекающим из них.

Пусть имеется некоторое число r векторных полей $A_\mu^a (a = 1, \ldots, r)$. Наиболее общий лагранжиан, описывающий все возможные взаимодействия с безразмерными константами связи, можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_1(x) = &-1/4\, f_{\mu\nu}^a f_{\mu\nu}^a - 1/2 (m^2)_{ab} A_\mu^a A_\mu^b + \\ &+ \alpha_{abc}\, \partial_\nu A_\mu^a A_\mu^b A_\nu^c + \beta_{abcd} A_\mu^a A_\mu^b A_\nu^c A_\nu^d + \\ &+ \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} (\gamma_{abc}\, \partial_\mu A_\nu^a A_\lambda^b A_\rho^c + \delta_{abcd} A_\mu^a A_\nu^b A_\lambda^c A_\rho^d), \end{aligned} \qquad (11.1)$$

где

$$f_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a;$$

$$\alpha_{ijk};\ \beta_{ijkl};\ \gamma_{ijk} \text{ и } \delta_{ijkl}$$

вещественные (для обеспечения эрмитовости лагранжиана) числовые коэффициенты — константы связи. Симметричную эрмитову матрицу $||m^2{}_{ab}||$ естественно считать диагонализуемой и обладающей неотрицательными собственными значениями. Заранее не предполагается, что она кратна единичной; поэтому у разных полей массы могут быть как одинаковые, так и разные. Свободная часть лагранжиана (11.1) (т. е. та, в которую входят поля A_μ^a только с одним и тем же латинским индексом), с самого начала записана в таком виде, чтобы в отсутствие взаимодействия (т. е. при $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$; $(m^2)_{ab} = m^2 I$, где I — единичная матрица) каждое поле удовлетворяло обычному уравнению для векторного поля со спином 1:

$$\partial_\nu f^{\mu\nu} - m^2 A_a^\mu = 0. \tag{11.2}$$

Отметим также, что члены с γ и δ учитывают возможность несохранения четности. Из самих определений нелинейных членов следуют свойства

$$\beta_{abcd} = \beta_{bacd} = \beta_{abdc} = \beta_{cdab}; \tag{11.3}$$

$$\gamma_{abc} = -\gamma_{acb}; \tag{11.4}$$

δ_{abcd} полностью антисимметричны по всем индексам, как и дискриминантный тензор $\varepsilon_{\mu\nu\tau\lambda}$. С учетом этих свойств из лагранжиана (11.1) получаем уравнения движения:

$$\begin{gathered}\Box A_\mu^a - \partial_\mu \partial_\nu A_\nu^a - (m^2)_{ab} A_\mu^b - \alpha_{abc} \partial_\nu (A_\mu^b A_\nu^c) + \\ + \alpha_{bac} \partial_\nu A_\mu^b A_\nu^c + \alpha_{bca} \partial_\mu A_\nu^b A_\nu^c + \\ + 4\beta_{abcd} A_\mu^b A_\nu^c A_\nu^d + 2(\gamma_{abc} - \gamma_{bca}) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu A_\lambda^b A_\rho^c + \\ + 4\delta_{abcd} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu^b A_\lambda^c A_\rho^d = 0.\end{gathered} \tag{11.5}$$

Беря 4-мерную дивергенцию от этого уравнения и исключая в полученном соотношении $\Box A_\mu^a$ с помощью уравнения (11.5), найдем

$$\begin{gathered}-(m^2)_{ab} \partial_\mu A_\mu^b - \alpha_{abc} (\partial_\mu \partial_\nu A_\mu^b A_\nu^c + A_\mu^b \partial_\mu \partial_\nu A_\nu^c + \\ + \partial_\mu A_\mu^b \partial_\nu A_\nu^c + \partial_\nu A_\mu^b \partial_\mu A_\nu^c) + \alpha_{bac} (\partial_\mu \partial_\nu A_\mu^b A_\nu^c + \\ + \partial_\nu A_\mu^b \partial_\mu A_\nu^c) + \alpha_{mna} A_\mu^n \{\partial_\mu \partial_\nu A_\nu^m + (m^2)_{mb} A_\mu^b + \\ + \alpha_{mbc} (\partial_\nu A_\mu^b A_\nu^c + A_\mu^b \partial_\nu A_\nu^c) - \alpha_{bmc} \partial_\nu A_\mu^b A_\nu^c - \\ - \alpha_{bcm} \partial_\mu A_\nu^b A_\nu^c - 4\beta_{mbcd} A_\mu^b A_\nu^c A_\nu^d - 2(\gamma_{mbc} - \\ - \gamma_{bcm}) \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu A_\lambda^b A_\rho^c - 4\delta_{mbcd} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} A_\nu^b A_\lambda^c A_\rho^d\} + \\ + \alpha_{bca} \partial_\mu A_\nu^b \partial_\mu A_\nu^c + 4\beta_{abcd} (\partial_\mu A_\mu^b A_\nu^c A_\nu^d + \\ + 2A_\mu^b A_\nu^c \partial_\mu A_\nu^d) - 2\gamma_{bca} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\nu A_\lambda^b \partial_\mu A_\rho^c + \\ + 12\delta_{abcd} \varepsilon_{\mu\nu\lambda\rho} \partial_\mu A_\nu^b A_\lambda^c A_\rho^d = 0.\end{gathered} \tag{11.6}$$

Потребуем теперь, чтобы выполнялась альтернатива (10.28). Для этого необходимо и достаточно, чтобы каждая комбинация членов одинаковой структуры тождественно равнялась нулю. Отсюда мы найдем свойства коэффициентов α_{abc}, β_{abcd}, γ_{abc} и δ_{abcd}. Необходимость следует из того, что в противном случае нельзя было бы задать нужные начальные условия в задаче Коши произвольным образом (а в квантовой теории—непротиворечиво задать одновременные перестановочные соотношения). Достаточность очевидна. Оказывается, что:

а) β_{abcd} связаны с коэффициентами α_{abc} соотношениями $8\beta_{abcd}+\alpha_{mca}\alpha_{mdb}+\alpha_{mcb}\alpha_{mda}=0$;

б) коэффициенты α_{abc} полностью антисимметричны и удовлетворяют структурному соотношению, совпадающему с тождеством Якоби для структурных констант алгебр Ли: $[\alpha_a, \ \alpha_b] = -\alpha_{abc}\ \alpha_c$, где обозначены матрицы $(\alpha_a)_{bc} = \alpha_{abc}$;

в) γ_{abc} полностью антисимметричны, в результате чего члены с γ_{abc} вообще выпадают из уравнений движения;

г) $\delta_{abcd} = 0$, т. е. члены, не сохраняющие четность, несовместимы с условием Лоренца. Таким образом, при взаимодействии векторных полей с определенным спином сохраняется четность;

д) массы ограничены условием $[\alpha_a m^2] = 0$.

В результате лагранжиан (11.1) принимает вид

$$L_1=-1/4\,F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}-1/2\,(m^2)_{ab}\,A^a_\mu A^b_\mu, \tag{11.7}$$

где

$$F^a_{\mu\nu}=\partial_\mu A^a_\nu-\partial_\nu A^a_\mu+\alpha_{abc}A^b_\mu A^c_\nu.$$

Получился лагранжиан так называемого массивного калибровочного поля. Он инвариантен относительно преобразований калибровочной группы G_r, алгебра которой задается матрицами α_{abc} (в прежних обозначениях f^b_{ac}):

$$A^{a'}_\mu=A^a_\mu+\alpha_{abc}\,\varepsilon_b\,A^c_\mu, \tag{11.8}$$

где $\varepsilon_b=\mathrm{const}$. Вектор-потенциал калибровочного поля $A_\mu{}^a$ здесь соответствует мультиплетам векторных полей A_μ, образующим неприводимые представления G_r. В рамках одного мультиплета, компоненты которого преобразуются только между собой, массы векторных полей одинаковы. Поэтому m^2 можно понимать просто как массу калибровочного поля.

При выполнении условий (10.28) под действием локальной калибровочной группы, параметры преобразований которой зависят от пространственно-временных координат точки x, лагранжиан (11.7) сдвигается на полную дивергенцию. Но интеграл действия, несмотря на это, остается инвариантным относительно $G_{\infty r}$, если граничные условия таковы, что поверхностный интеграл, в который перейдет интеграл от дивергенции, обращается в нуль.

Аналогичным образом можно найти лагранжиан системы взаимодействующих полей со спинами 1/2, 0, 1 [6]. При этом поля спина 1/2 и 0 также распадаются на мультиплеты, преобразующиеся по неприводимым представлениям калибровочной группы, но представлениям уже не регулярным. Действительно, мультиплет спинорных полей удобно представить в виде столбца

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi^1 \\ \psi^2 \\ \vdots \\ \psi^n \end{pmatrix},$$

где каждое ψ^n —обычный дираковский спинор. Если, кроме того, ввести столбец удвоенной размерности

$$\Psi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \psi + \psi_c \\ i(\psi - \psi_c) \end{pmatrix}$$

со свойством $\overline{\psi} = \psi C^{-1}$, где ψ_c — зарядово-сопряженный спинор, C — матрица зарядового сопряжения, и матрицы

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix},$$

где M — массовый оператор, релятивистски-инвариантный лагранжиан для системы полей со спинами 1/2, 1 запишется в виде

$$L_{1/2,\,1} = L_1 - 1/2\,\overline{\Psi}\,(\gamma^\mu \partial_\mu + \hat{M})\,\Psi + \\ + (i/2)\,\overline{\Psi}\gamma^\mu\,(\hat{T}_a^{(1)} + \gamma^5\,\hat{T}_a^{(2)})\,\Psi A_\mu^a. \qquad (11.9)$$

Здесь матрицы $\hat{T}_a^{(1)}$ антисимметричны, $\hat{T}_a^{(2)}$ симметричны и, кроме того, те и другие эрмитовы. Матрицы $(\hat{T}_a^{(1)} + \gamma_5 \hat{T}_a^{(2)})$ образуют представление алгебры Ли. Точную структуру этих матриц можно найти в [6]. Соответствующие преобразования для Ψ имеют вид

$$\Psi' = \Psi - i\varepsilon_a\,(\hat{T}_a^{(1)} + \gamma_5\,\hat{T}_a^{(2)})\,\Psi. \qquad (11.10)$$

Если учитывается также взаимодействие со скалярным полем φ спина 0 лагранжиан принимает вид

$$L_{0,\,1/2,\,1}=L_{1,\,1/2}-1/2\,(\partial_\mu-\eta^a A^a_\mu)\,\varphi\,(\partial_\mu-\eta^b A^b_\mu)\,\varphi-$$
$$-1/2\,\varphi^2_\mu\varphi+\xi_{ijkl}\,\varphi^i\,\varphi^j\,\varphi^k\,\varphi^l+$$
$$+1/2\,\overline{\Psi}\,(\hat{G}^{(1)}_i+\mathrm{i}\gamma^5\,\hat{G}^{(2)}_i)\,\Psi\varphi^i, \qquad (11.11)$$

где ξ_{ijkl} — полностью симметричны.

Преобразования скалярного поля под действием G_r определяются соотношением $\varphi^{i'}=\varphi^i+\varepsilon_a\eta^a{}_{ij}\varphi^j$. Матрицы $\eta^a{}_{ij}$ также реализуют представление G_r.

Перечислим свойства взаимодействий, соответствующих лагранжианам (11.7), (11.9), (11.11), имея в виду, что все эти свойства — суть проявления двух требований: условий калибровки для векторных полей (10.28) и существования тождеств между уравнениями движения и производными от них, следствием которых являются условия (10.28).

1. Одно нейтральное векторное поле A_μ и одно спинорное поле ψ. У поля A_μ нет самодействия (все $\alpha_{abc}=0$). Осуществляются следующие возможности:

а) масса векторного поля $m\neq 0$ и масса спинорного поля $M\neq 0$. Лагранжиан $L=-1/4F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}-\frac{m^2}{2}A_\mu A_\mu-$ $-\overline{\psi}(\gamma_\mu\partial_\mu+M)\psi+\mathrm{i}g_1\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$. Для выполнения условий Лоренца необходимо потребовать, чтобы сохранялось число спинорных частиц, т. е. имелась инвариантность относительно преобразования G_1: $\psi\to\exp(\mathrm{i}\alpha)\psi$ и чтобы сохранялась четность:

б) $M\neq 0$; $m=0$. Получается электродинамика Максвелла. $\partial_\mu A_\mu$ — произвольно. Свойства взаимодействия те же, что в (а);

в) $M=0$; $m\neq 0$.

$$L=-1/4\,F_{\mu\nu}\,F_{\mu\nu}-(m^2/2)\,A_\mu\,A_\mu-\overline{\psi}\gamma^\mu\,\partial_\mu\psi+j^\mu\,A_\mu,$$

где $j^\mu=\mathrm{i}\overline{\psi}\gamma^\mu\,(g_1+\gamma^5g_2)\psi+\frac{\mathrm{i}}{2}f\overline{\psi}\,\gamma^\mu\gamma^5\psi_c+\frac{\mathrm{i}}{2}f^*\overline{\psi}_c\,\gamma^\mu\gamma^5\psi$.

Ни четность, ни число спинорных частиц не обязаны сохраняться. Сохранению тока j^μ соответствует любопытное обобщение фазовой инвариантности, а именно инвариантность относительно однопараметрической группы преобразований

$$\psi^1=\exp\,(\mathrm{i}\omega g_2\,\gamma^5)\,\{[\cos\,(\omega a)+\mathrm{i}\,\sin\varphi\,\sin\,(\omega a)]\,\psi+$$
$$+\mathrm{i}\,f/|\,f\,|\,\gamma^5\cos\varphi\,\sin\,(\omega a)\,\psi_c\},$$

где ω — параметр преобразования, a и φ — функции констант связи: $a=\sqrt{g_1^2+|f|^2}$; $\sin\varphi=g_1/a$; $\cos\varphi=|f|/a$;

г) $M=0$; $m=0$. Сюда относится все сказанное в пункте (в). Этот случай интересен тем, что открывает некоторую специфическую возможность взаимодействия безмассовых спинорных частиц с электромагнитным полем.

2. Мультиплет векторных полей спина 1 и спинорные поля со спином 1/2. Лагранжиан (11.9).

Можно показать, что между спинорными полями с массой и без массы нет прямого взаимодействия. Поэтому те и другие можно рассматривать отдельно.

Свойства взаимодействий:

а) для полей с нулевыми массами ($M=0$) группа преобразований (11.10) является обобщением группы Паули и Гюрси на случай многих спинорных полей с $M=0$;

б) если массы всех спинорных полей отличны от нуля, то $T_a^{(2)}=0$; $\psi'=\psi-i\varepsilon_a T_a^{(1)}\psi$; $\psi'=\psi-i\varepsilon_a(T_a^{(1)}\psi+T_a^{(3)}\psi_c)$.

Этот класс преобразований — максимальное обобщение фазового преобразования $\psi\to\exp(i\Lambda)\psi$ в случае многих полей с ненулевой массой.

3. Мультиплеты полей со спинами 0, 1/2, 1. В этих взаимодействиях четность не обязана сохраняться. Если же число спинорных частиц сохраняется, то для спинорного поля остаются только преобразования $\psi'=\psi-i\varepsilon_a T_a^{(1)}\psi$, а лагранжиан $L_{0,1/2}$ принимает вид

$$\begin{aligned}L_{0,\,1/2,\,1}= &-\frac{1}{4}F^a_{\mu\nu}F^a_{\mu\nu}-A^a_\mu m^2 A^a_\mu-\\ &-\overline{\psi}\left[\gamma^\mu\left(\partial_\mu-i\,T_a^{(1)}A^a_\mu\right)+M\right]\psi-\\ &-\frac{1}{2}\left(\partial_\mu-\eta^a A^a_\mu\right)\varphi\left(\partial_\mu-\eta^b A^b_\mu\right)\varphi-1/2\,\varphi^2_\mu\varphi+\\ &+\xi_{iklm}\varphi^i\varphi^k\varphi^l\varphi^m+\overline{\psi}\left(G_i^{(1)}+i\gamma^5 G_i^{(2)}\right)\psi\varphi^i.\end{aligned}$$

Четность также сохраняется. Векторные поля должны иметь спин-четность 1^- (быть векторами, а не псевдовекторами).

Несколько слов о реализации симметрий в теории полей с определенным спином (теории класса А*).

Если имеется несколько истинно нейтральных векторных полей, то $\alpha_{ifk}=0$. Калибровочная группа распадается

---

* В теориях класса В дополнительные условия для взаимодействующих полей отличны от дополнительных условий в свободном случае. В теориях класса А они такие же, как для свободных полей.

на однопараметрические группы, коммутирующие между собой. Каждому такому полю соответствует инвариантность вида

$$\psi^{r'} = \exp(i\Lambda_r)\psi^r.$$

Заряженное векторное поле без нейтрального партнера существовать не может. Простейшая возможность — триплет векторных полей (например, ρ-мезон). Тогда $\alpha_{ab_c} = g\varepsilon_{ab_c}$ (a, b, $c = 1, 2, 3$), где ε_{ab_c} — единичный абсолютно антисимметричный тензор; g — константа связи. Существование триплета служит источником изотопической инвариантности, причем векторные поля составляют изотопический псевдовектор, а другие поля преобразуются по тем или иным представлениям группы изотопических вращений. В этом случае мы приходим к теории Янга—Миллса, но масса векторных полей может иметь любое значение. Более богатые мультиплеты векторных полей ведут к более высоким симметриям. Все симметрии соответствуют классическим группам. После триплета идет октет, соответствующий группе SU_3. Если бы число спинорных частиц не сохранялось, векторные поля со спином 1 приводили бы к инвариантностям относительно групп, изоморфных указанным выше, при которых перепутывались бы барионы с антибарионами.

Заметим, что спин заряженного векторного поля (а следовательно, и изотопическая инвариантность) — хорошее квантовое число только в рамках сильных взаимодействий, но в пренебрежении электромагнитными и слабыми. Включение электромагнитного взаимодействия нарушает как изотопическую инвариантность, так и пространственно-временное условие (10.28) для заряженных векторных полей, которое приводило к этой инвариантности. Поэтому можно построить иерархию взаимодействий, в которой более сильному взаимодействию (с большей константой связи) будет соответствовать более широкая группа симметрии. При переходе к каждой «ступени», расположенной ниже, т. е. при переходе к более слабым взаимодействиям, предыдущая симметрия нарушается и заменяется более узкой. Например, переход от сильных взаимодействий к электромагнитным сопровождается заменой группы инвариантности O (изотопические вращения) группой O_2 (однопараметрическая группа фазовых преобразований). В рамках каждого мультиплета полей константа связи одинакова.

Ограничение, которое было принято здесь, — безразмерность констант связи (в единицах $\hbar = c = 1$). Это значит, что речь идет о первом члене разложения лагранжиана по размерности констант связи (т. е. о простейших лагранжианах). Взаимодействия класса А с безразмерными константами связи называют также *минимальными взаимодействиями*.

§ 12. УСЛОВНЫЙ ЭКСТРЕМУМ ДЛЯ ЛАГРАНЖИАНОВ, ИНВАРИАНТНЫХ ОТНОСИТЕЛЬНО БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ НА ЭКСТРЕМАЛИ

Масса как множитель Лагранжа в изопериметрической задаче. Как мы видели в предыдущем параграфе, выбор дополнительных условий на полевые переменные имеет глубокий физический смысл. При этом очень важной оказывается связь между свойствами симметрии лагранжиана и видом дополнительных условий. Такая связь возникает в тех случаях, когда часть уравнения движения совпадает с уравнением Эйлера для интеграла действия, инвариантного относительно бесконечной группы $G_{\infty r}$, причем уравнения движения допускают группу инвариантности G_r, получающуюся из бесконечной группы $G_{\infty r}$ при $\varepsilon^a(x) = \mathrm{const}$. Такие уравнения движения можно рассматривать как уравнения Эйлера интеграла действия, инвариантного относительно бесконечной группы, но для задачи на условный экстремум (типа изопериметрических задач). В данном параграфе обсуждаются свойства симметрии в задачах на условный экстремум, соответствующих физическим системам со связями. Как известно, изопериметрические задачи представляют собой задачи на отыскание условного экстремума некоторого функционала в том случае, когда дополнительным условием при варьировании является сохранение другого функционала S_1 от тех же переменных, т. е. когда дополнительные условия являются интегральными. Поскольку нас интересуют законы сохранения и дополнительные условия, здесь будут рассматриваться функционалы как S, так и S_1, инвариантные относительно конечных или бесконечных групп Ли.

Экстремали изопериметрической задачи и массивные калибровочные поля. Прежде всего заметим, что экстремали функционала $S = \int L(x, u, u', \ldots)\, dv$ при дополнительном условии $S_1 = \int L_1(x, u, u', \ldots)\, dv = \mathrm{const}$ одновременно являются экстремалями задачи на безусловный экстремум для вспомогательного функционала:

$$S_2 = S + \lambda S_1 = \int [L(x, u, u', \ldots) + \lambda L_1(x, u, u', \ldots)]\, dv, \quad (12.1)$$

где $\lambda = \mathrm{const}$ — множитель Лагранжа. Иными словами, если варьирование происходит при интегральном дополнительном условии, экстремали приобретают вид

$$\delta L_2/\delta u = \delta L/\delta u + \lambda \delta L_1/\delta u = 0, \quad (12.2)$$

причем предполагается, что $\delta L/\delta u \neq 0$ и $\delta L_1/\delta u \neq 0$.

Изопериметрические задачи допускают обращение в том смысле, что система экстремалей не изменится, если варьируемый функционал и дополнительнсе условие поменять ролями, т. е. варьировать S_1 при условии $S = \mathrm{const}$. Роль множителя Лагранжа в этом случае будет играть $1/\lambda$, что для однородных экстремалей не имеет значения:

$$\frac{\delta L_2}{\delta u} = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\delta L}{\delta u} + \frac{\delta L_1}{\delta u} = 0.$$

Условным экстремумом можно воспользоваться для изменения симметрии задачи, например для перехода от $G_{\infty r}$ инвариантной теории к G_r-инвариантной. Для этого достаточно выбрать S_1 инвариатным относительно G_r, если S инвариантен относительно $G_{\infty r}$. Таким способом можно ввести массу калибровочного поля и тем самым снять ограничение $m = 0$. В самом деле, рассмотрим следующую вариационную задачу: найти экстремум функционала $S = \int\limits_{V_4} F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a dv$, где $F^a_{\mu\nu} = \partial_{[\mu} A^a_{\nu]} - \frac{1}{2} f^a_{bc} A^b_{[\mu} A^c_{\nu]}$ — тензор напряженности калибровочного поля, A^a_μ — вектор-потенциал этого поля, при условии, что другой функционал

$$S_1 = \int\limits_{V_4} A^a_\mu A^\mu_a\, dv = b = \mathrm{const} \neq 0. \quad (12.3)$$

Здесь $a = 1, \ldots, r$, где r — число параметров калибровочной группы; $\mu = 1, \ldots, 4$ — пространственно-временные индексы; V_4 будем считать конечной областью.

Согласно общему правилу, мы должны составить вспомогательный функционал

$$S_2 = S + \lambda S_1 = \int\limits_{V_4} (F^a_{\mu\nu} F^{\mu\nu}_a + \lambda A^a_\mu A^\mu_a)\, dv. \quad (12.4)$$

и найти экстремум этого функционала. Найденная экстремаль будет также экстремалью для S, удовлетворяющей условию (12.3). Постоянные интегрирования и константа λ находятся затем из граничных условий и дополнительного условия (12.3). Если постоянную λ отождествить с квадратом массы калибровочного поля — m^2, то S_2 окажется действием для массивного калибровочного поля, причем масса будет иметь смысл множителя Лагранжа. Подобная интерпретация массы иногда используется в классической механике.

Уравнения Эйлера, соответствующие $\delta S_2 = 0$, имеют вид

$$F_a^{\mu\nu}{}_{;\nu} - m^2 A_a^\mu = 0. \qquad (12.5)$$

Система экстремалей не изменится, если уравнения Эйлера представить в виде

$$\frac{1}{m^2} F_a^{\mu\nu}{}_{;\nu} - A_a^\mu = 0. \qquad (12.6)$$

Уравнения (12.6) можно теперь рассматривать как уравнения Эйлера, соответствующие вариации функционала $S_1 = \int\limits_{V_4} A_\mu^a A_a{}^\mu dv$ при дополнительном условии

$$S = \int\limits_{V_4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} dv = a = \text{const}. \qquad (12.7)$$

Величина S определяет величину $1/m^2$. Интеграл S представляет собой интеграл от инвариантов поля [типа $(E^2 - H^2)$ в электродинамике], взятый по 4-мерной области, в которой существует поле. Его величина определяется не только самими инвариантами, но и топологией V_4. Если гравитационное поле рассматривается как калибровочное, соответствующее локальной группе Лоренца, то (12.7) переходит в

$$S = \int\limits_{V_4} R^{\mu\nu\tau\lambda} R_{\mu\nu\tau\lambda}\, dv, \qquad (12.8)$$

где $R_{\mu\nu\tau\lambda}$ — тензор кривизны Римана.

Интеграл (12.8) непосредственно определяется топологическими инвариантами V_4.

Аналогичная ситуация возникает и в отношении констант взаимодействия частиц с калибровочным полем. Именно появление взаимодействия с калибровочным полем можно рассматривать с тех же позиций, что и появление массового члена, т. е. как замену задачи на безусловный экстремум для свободного лагранжиана (или безмассового) задачей на условный экстремум с интегральными дополнительными условиями. Так, уравнения Дирака с взаимодействием

$$\gamma^{\mu}(\partial_{\mu}\psi - i\varepsilon \underset{a}{I} A^{a}_{\mu}\psi) - m\psi = 0 \tag{12.9}$$

дают экстремум функционалу

$$S_3 = \int (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi)\,dv$$

при дополнительном условии

$$S_4 = \int J^{\mu}_{a} A^{a}_{\mu}\,dv = \text{const} \neq 0. \tag{12.10}$$

Константа взаимодействия (заряд) играет роль множителя Лагранжа и определяется значением S_4. В то же время уравнение (12.9) дает экстремум функционалу $S_4 = \int J_a{}^{\mu} A_{\mu}{}^{a} dv = \int \bar{\psi}\gamma^{\mu} \underset{a}{I} \psi A^{a}{}_{\mu} dv$ при дополнительном условии

$$S_3 = \int (\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi - m\bar{\psi}\psi)\,dv = \text{const}. \tag{12.11}$$

В этом случае константа взаимодействия определяется через постоянное значение S_3, причем перенормировка константы взаимодействия соответствует изменению значения интеграла действия для свободных («голых») частиц.

Таким образом, переход от безмассового калибровочного поля к массивному, так же как и переход от свободных дираковских частиц к взаимодействующим можно представить как переход от вариационной задачи на безусловный экстремум к требованию экстремальности того же интеграла действия при дополнительных интегральных условиях типа (12.3), (12.7), (12.10) или (12.11).

Вторая теорема Нетер и дополнительные условия. В изопериметрических задачах, если интеграл действия S инвариантен относительно бесконечной группы $G_{\infty r}$ и фиксированный функционал S_1 инвариантен относительно конечной группы G_r, являющейся подгруппой $G_{\infty r}$, возникает r дифференциальных дополнительных условий на полевые переменные, являющихся следствием тождеств Нетер, связывающих лагранжевы производные функционала S и производные от них [8]. Пусть $S = \int L dv = \int L(x, u, u')\,dv$, где u — полевые переменные, инвариантен относительно

$G_{\infty r}$, преобразования которой содержат (для простоты) лишь первые производные от параметрических функций, и пусть $S_1 = \int L_1 dv = \text{const}$ инвариантен относительно группы G_r, получаемой из $G_{\infty r}$ при $\varepsilon^a(x) = \text{const}$. Тогда можно утверждать, что на своих экстремалях

$$S_2 = S + \lambda S_1 = \int (L + \lambda L_1)\, dv = \int L_2\, dv$$

инвариантен относительно $G_{\infty r}$, причем L_2 сдвигается под действием $G_{\infty r}$ на полную дивергенцию, а G_r оставляет L_2 без изменения. Действительно, пусть

$$\delta u = a_i (x, u, u', \ldots)\, \varepsilon^i (x) + b_i^{\mu} (x, u, u', \ldots)\, \varepsilon^i_{,\mu} (x),$$

где $\varepsilon^i (x)$ — произвольные функции, исчезающие на бесконечности вместе со своими производными;

$$\delta S_2 = \delta S + \lambda \delta S_1 = \int \left[\left(\frac{\delta L_2}{\delta u}\, \delta u + \operatorname{div} \left(\frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}}\, \delta u \right) \right] dv =$$

$$= \int \left[\frac{\delta L_2}{\delta u} \left(a_i(x, u, u', \ldots)\, \varepsilon^i (x) + b_i^{\mu} (x, u, u', \ldots)\, \varepsilon^i_{,\mu} (x)\right) + \right.$$

$$\left. + \operatorname{div} \left(\frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}}\, \delta u \right) \right] dv = \int \left[\frac{\delta L_2}{\delta u}\, a_i - \partial_{\mu} \left(b_i^{\mu} \frac{\delta L_2}{\delta u} \right) \right] \varepsilon^i_{(x)} +$$

$$+ \operatorname{div} \left[\left(b_i^{\mu} \frac{\delta L_2}{\delta u} + \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}}\, a_i \right) \varepsilon^i + \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}}\, b_i^{\nu}\, \partial_{\nu} \varepsilon^i \right] dv.$$

Здесь

$$\frac{\delta L_2}{\delta u} = \frac{\partial L_2}{\partial u} - \partial_{\nu} \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\nu}} = \left(\frac{\partial L}{\partial u} - \partial_{\nu} \frac{\partial L}{\partial u_{,\nu}} \right) +$$

$$+ \lambda \left(\frac{\partial L_1}{\partial u} - \partial_{\nu} \frac{\partial L_1}{\partial u_{,\nu}} \right).$$

Поскольку интеграл действия S и соответствующий ему лагранжиан инвариантны относительно $G_{\infty r}$, в силу второй теоремы Нетер справедливы следующие тождества:

$$\frac{\delta L}{\delta u}\, a_i \equiv \partial_{\mu} \left(b_i^{\mu} \frac{\delta L}{\delta u} \right). \qquad (12.12)$$

Тождества (12.12) справедливы независимо от того, являются ли u решением уравнений Эйлера $\delta L / \delta u = 0$, что в данном случае очень важно. Эти тождества для экстремалей изопериметрической задачи, где $\delta L/\delta u = -\lambda\delta L_1/\delta u$, переходят в дополнительные условия вида

$$a_i \frac{\delta L_1}{\delta u} = \partial_\mu \left(b_i^\mu \frac{\delta L_1}{\delta u} \right). \qquad (12.13)$$

По условиям изопериметрической задачи $\delta L_1/\delta u \neq 0$, и поэтому условия (12.13) имеют нетривиальный смысл. Вариация S_2 сводится (при учете (12.12), (12.13) и $\delta L_2/\delta u = 0$) к интегралу от полной дивергенции. Следовательно, если $\varepsilon^i(x)$ исчезают на границе вместе со всеми своими производными, то

$$\delta S_2 = \int \operatorname{div} \left[\frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i \varepsilon^i + \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} b^\nu \partial_\nu \varepsilon^i \right] dv =$$

$$= \oint \left(\frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i \varepsilon^i + \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} b^\nu \partial_\nu \varepsilon^i \right) d\sigma_\mu = 0. \qquad (12.14)$$

Если $\varepsilon^i = \mathrm{const}$ и $G_{\infty r}$ переходит в G_r, то вместо (12.14) получим

$$\delta S_2 = \oint \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i \varepsilon^i d\sigma_\mu = \varepsilon^i \oint J_i^\mu d\sigma_\mu = 0, \qquad (12.15)$$

так как мы предположили инвариантность S и S_1, а следовательно, S_2, относительно G_r. Если $\varepsilon^i(x)$ и $\partial_\mu \varepsilon^i(x)$ совершенно произвольны, то должно выполняться соотношение

$$J_i^\mu = \partial_\nu \left(b_i^\mu \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\nu}} \right) = b_i^\mu \frac{\partial L_2}{\partial u} + \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\nu}} \partial_\nu b_i^\mu.$$

Это соотношение, действительно, выполняется на экстремалях. Следовательно, на экстремалях $\delta S_2 = 0$. Таким образом, наши утверждения доказаны.

Для массивных калибровочных полей $L_1 = A_\mu{}^a A_a{}^\mu$; $a_i \to f_{ie}^k A_\mu{}^e$; $b_i^\mu \to 1$ (стрелка означает соответствие). Тогда условия (12.13) принимают вид

$$f_{ac}^b A_\mu^c A_b^\mu = \partial_\mu A_a^\mu = 0 \qquad (12.16)$$

вследствие полной антисимметрии структурных констант калибровочной группы по всем индексам.

Условия Лоренца для электродинамики получаются автоматически из (12.16), так как соответствующие структурные константы $f_{ac}^b = 0$.

Законы сохранения в изопериметрических задачах. Соотношение (12.15) дает законы сохранения для изопериметрической задачи в виде $\oint J_i^\mu d\sigma_\mu = 0$. Здесь

$$J_i^\mu = \frac{\partial L_2}{\partial u_{,\mu}} a_i = \underset{0}{J}{}_i^\mu + \lambda \frac{\partial L_1}{\partial u_{,\mu}} a_i, \tag{12.17}$$

где $\underset{0}{J}{}_i^\mu = (\partial L/\partial u_{,\mu}) a_i$ — ток, соответствующий лагранжиану S.

Нарушение симметрии и сохранение токов. Соотношение (12.17) показывает, как меняется вид сохраняющихся токов при наложении дополнительных условий типа изопериметрической задачи. Именно, токи не меняются, если L_1 не содержит производных от u. В частности, из (12.17) следует, что переход к массивным калибровочным полям (условия типа (12.3)) не меняет вида сохраняющихся токов. Однако учет тождеств Нетер приводит к новому соотношению. Именно в этом случае по-прежнему

$$\underset{0}{J}{}_i^\mu = J_{\infty i}^\mu = b_i^\mu \frac{\delta L}{\delta u} = J_i^\mu - \lambda \frac{\partial L_1}{\partial u_{,\mu}} a_i.$$

Для экстремалей изопериметрической задачи $\delta L_2/\delta u = 0$ получаем

$$J_i^\mu - \lambda \frac{\partial L_1}{\partial u_{,\mu}} a_i = -\lambda \frac{\delta L_1}{\delta u} b_i^\mu. \tag{12.18}$$

Для массивных калибровочных полей соотношение (12.18) приводит к пропорциональности тока и поля: $J_i^\mu = m^2 A_i{}^\mu$.

Таким образом, пропорциональность тока и поля можно понимать (как и появление массы у калибровочного поля) как следствие неявного введения дополнительного условия (12.3) и превращения обычной вариационной задачи для калибровочных полей в изопериметрическую.

Заметим в заключение, что дополнительные условия (12.13), как и инвариантность S_2 относительно $G_{\infty r}$, выполняются только на экстремалях $\delta L_2/\delta u = 0$, т. е. являются следствием уравнений поля, в то время как инвариантность S определяется его формой и не зависит от уравнений поля. Возможно, что это обстоятельство является аргументом в пользу принятия принципа действия в следующей форме: варьируется всегда та часть лагранжиана, которая нарушает симметрию (взаимодействие), а инвариантная часть фиксируется и, как говорилось выше, определяет величину константы взаимодействия.

§ 13. ОБЩАЯ КОВАРИАНТНОСТЬ, УРАВНЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА И ПРОИЗВОДНЫЕ ЛИ

Неоднородные пространства и производные Ли. В этом параграфе общая теория относительности рассматривается как теория калибровочного поля симметричного тензора второго ранга $h_{\mu\nu}$ в пространстве — времени с произвольной геометрией. Калибровочной группой является группа произвольных непрерывных преобразований координат общей теории относительности. Вид вариаций определяется с помощью производных Ли. Затем поле $h_{\mu\nu}$ отождествляется с полем метрического тензора $g_{\mu\nu}$ и совершается переход к псевдориманову пространству—времени. Далее обсуждается вопрос о векторном калибровочном поле и поле антисимметричного тензора второго ранга.

Группы, описывающие пространственно-временную симметрию, не могут быть локализованы в смысле Янга — Миллса. Такая операция фактически приводит к совершенно другому типу геометрии пространства—времени и другому представлению о пространстве, тогда как локализация внутренних симметрий не изменяет, вообще говоря, геометрии V_4. Аналогия между ОТО и теорией Янга—Миллса может быть проведена в том случае, если не отождествлять касательное пространство к V_4 с самим пространством—временем, как это происходит в специальной теории относительности. Тогда можно все свойства симметрии относить к касательному пространству, т. е. к пространству—времени Минковского, не заботясь вначале о том, локальным свойствам V_4 или глобальным соответствует эта симметрия. Для сравнения величин, отнесенных к разным точкам такого многообразия, расслоенного на касательные пространства, вводится операция дифференцирования Ли. Производные Ли определяются независимо от геометрической структуры многообразия, но они связаны с произвольными непрерывными преобразованиями координат, т. е. с общековариантной группой. Таким образом, если воспользоваться производными Ли как вариациями, порожденными бесконечной группой преобразований координат общей теории относительности, можно получить с помощью вариационной процедуры § 10 теорию гравитации как калибровочного поля. При этом калибровочным полем будет поле симметричного тензора второго ранга $h_{\mu\nu}$, который, вообще говоря, не обязательно отождествлять с метрическим тензором пространства—времени V_4. Если такое отождествление сделать, получится теория Эйнштейна. Уравнения Эйнштейна получаются автоматически для экстремалей простейшего калибровочно-инвариантного лагранжиана $L = R$.

Производные Ли в римановом пространстве (или в произвольном многообразии) вводятся следующим образом [10]. Поскольку все величины задаются в окрестности точки, а связь между точками задается дополнительно, для сравнения величин, отнесенных к разным точкам пространства, необходимо ввести в каждой из этих точек две системы координат. Одна из систем координат будет собственной, а другая — «увлеченной» из той точки, с которой происходит сравнение. Увлеченная система координат попросту «такая же», как во второй точке, и компоненты сравниваемых величин в первой точке относительно системы координат, увлеченной из второй точки, по определению, равны компонентам величин в собственной системе координат во второй точке. Иными словами, мы просто приписываем каждой точке кроме собственной системы координат систему координат и все значения компонент величины, подлежащей исследованию, отнесенные ко второй точке. Только теперь, имея в *одной точке* две системы координат и два набора компонент, мы можем воспользоваться тензорным анализом. Для этого необходимо осуществить автоморфизм (отображение) пространства в целом на себя и сравнить изменившиеся значения компонент с увлеченными значениями. Такое сравнение не зависит от определения параллельного переноса, т. е. от конкретных свойств пространства, и приводит к понятию производной Ли от данной величины. Сравнивать величины, отнесенные к разным точкам риманова пространства, не сводя их так или иначе в одну точку, бессмысленно, так как при переходе к новой системе координат такое равенство нарушается. Переход от собственных значений величины к увлеченным описывается формулами, обобщающими тензорные преобразования. Для симметричного тензора второго ранга $h_{\mu\nu}$ они дают

$$\overset{*}{h}_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^{*\tau}}{\partial x^{\mu}} \cdot \frac{\partial x^{*\lambda}}{\partial x^{\nu}} h_{\tau\lambda}(x^*), \tag{13.1}$$

где звездочкой обозначены увлеченные значения координат и компонент тензора $h_{\mu\nu}$.

Рассмотрим непрерывный автоморфизм риманова пространства, индуцируемый преобразованиями координат вида

$$x^{*\mu} = x^{\mu} + \xi^{\mu}(x)\, t, \tag{13.2}$$

где t — параметр. Относительно таких преобразований определяется операция, называемая дифференцированием Ли. В случае симметричного ковариантного тензора второго ранга $h_{\mu\nu}$ производной Ли от него называется выражение, легко получаемое из (13.1) как предел $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{h^*_{\mu\nu}(x^*)-h_{\mu\nu}(x)}{\delta t}$:

$$\delta_L h_{\mu\nu}=\xi^\tau(x)\,\partial_\tau h_{\mu\nu}+h_{\tau\nu}\partial_\mu\xi^\tau(x)+h_{\mu\tau}\partial_\nu\xi^\tau(x). \qquad (13.3)$$

Если $h_{\mu\nu}=g_{\mu\nu}$ и коэффициенты связности выражаются только через производные от $g_{\mu\nu}$ (риманова связность), то производную Ли можно переписать через ковариантные производные: $\delta_L\, g_{\mu\nu}=\xi_{\nu;\mu}+\xi_{\nu;\mu}$.

Группы Ли, образованные автоморфизмами (13.2) и сохраняющие метрический тензор $g_{\mu\nu}$ (в смысле $\delta_L g_{\mu\nu}=0$), называются *группами движения риманова пространства.* Соответствующий вектор ξ^τ называется *вектором Киллинга.* В пространстве, допускающем группу движения, зная компоненты метрического тензора в одной точке, можно путем увлечения найти $g_{\mu\nu}$ во всех точках. В плоском пространстве группы движения становятся обычными группами пространственно-временной симметрии. Например, в пространстве—времени Минковского группой движения является группа Пуанкаре, в пространстве—времени постоянной кривизны — группа де Ситтера (0(4,1)), из которой группа Пуанкаре получается в предельном случае $R\to\infty$ (R — радиус кривизны V_4).

Калибровочное поле симметричного тензора второго ранга. Если в V_4 заданы поле симметричного невырожденного тензора второго ранга $h_{\mu\nu}$ и автоморфизм V_4, индуцируемый непрерывными преобразованиями координат вида (13.2), то условия типа (10.3)—(10.5) определяют вид лагранжиана и уравнений поля, инвариантных относительно преобразований $h_{\mu\nu}$ (13.3), порожденных автоморфизмом V_4 [5]. Инвариантный лагранжиан, не содержащий производных от $h_{\mu\nu}$, имеет вид $L=1/\sqrt{-h}$; $h=\det|h_{\mu\nu}|$. Лагранжиан, зависящий от $h_{\mu\nu}$, его первых и вторых производных, сводится к

$$\hat{L}=\sqrt{-h}\,R, \qquad (13.4)$$

где R — аналог скалярной кривизны риманова пространства (в том смысле, что он составлен из величин $h_{\mu\nu}$ и их производных точно так же, как скалярная кривизна составляется из метрического тензора и его производных). Поднятия индексов здесь в обычном смысле не происходит, так как для свертывания индексов используется обратная матрица $h^{\mu\nu}$, удовлетворяющая условию $h^{\mu\sigma}h_{\sigma\nu} = \delta^{\mu}_{\nu}$. Введение метрики для построения инвариантного лагранжиана не требуется. Условия инвариантности типа (10.3)—(10.5) автоматически приводят также к тому, что производные от $h_{\mu\nu}$ входят в лагранжиан только через комбинации $\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$, составленные подобно символам Кристоффеля из $h^{\mu\nu}$ и производных от $h_{\mu\nu}$.

Варьирование лагранжиана (13.4) по $h^{\mu\nu}$ приводит в качестве уравнений экстремали к уравнениям Эйнштейна [5, 9]:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} h_{\mu\nu} R = 0.$$

Использование понятия производных Ли на произвольных многообразиях делает очень прозрачным смысл полученных формул. В самом деле, вид инвариантного лагранжиана определяется только видом вариаций полевых переменных. Строение производной Ли зависит только от тензорной размерности функций и, следовательно, одинаково для всех симметричных тензоров второго ранга и для всех геометрий. Производные Ли порождаются всегда группой, причем бесконечной, описывающей отображение на себя произвольного многообразия. Эта группа внешне совпадает с общековариантными преобразованиями (или «локальной группой сдвигов») и поэтому приводит к тем же результатам, что и риманова геометрия в смысле структуры дифференциальных инвариантов.

Тождества Нетер, соответствующие преобразованиям (13.3), имеют вид

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial \hat{L}}{\partial h_{\mu\nu}} (\partial_\tau h_{\mu\nu} - \partial_\nu h_{\mu\tau} - \partial_\mu h_{\tau\nu}) \equiv \partial_\nu \left(\frac{\delta \hat{L}}{\delta h_{\mu\nu}} \right) \cdot h_{\mu\tau} \qquad (13.5)$$

или $\nabla_\nu\ (\delta\hat{L}/\delta h_{\mu\nu}) \equiv 0$, где $\delta\hat{L}/\delta h_{\mu\nu} = \partial\hat{L}/\partial h_{\mu\nu} - \partial_\tau\ \partial\hat{L}/\partial\partial_\tau h_{\mu\nu}$; $L = \sqrt{-h}L$. Ковариантную производную здесь следует понимать формально в смысле коэффициентов связности, составленных из $h_{\mu\nu}$ и его производных.

Выражение (13.5) представляет собой сильный закон сохранения, справедливый независимо от конкретного вида лагранжиана или уравнений Эйлера. В частности, из него следует известный ковариантный закон сохранения

$$\left(R^{\mu\nu}-\frac{1}{2}h^{\mu\nu}R\right);\ {}_{\nu}\equiv 0. \qquad (13.6)$$

В общей теории относительности тождество (13.6) выводится обычно как следствие тождеств Бианки для тензора кривизны Римана. Здесь же оно является записью тождеств Нетер и справедливо для любого симметричного тензорного поля $h_{\mu\nu}$, например, тензора упругих деформаций среды.

Пусть теперь $\delta L/\delta h_{\mu\nu} = T^{\mu\nu}$, где $T^{\mu\nu}$ — симметричный тензор, описывающий источники поля. Тогда из (13.5) следует ковариантный закон сохранения для $T^{\mu\nu}$:$T^{\mu\nu};\,{}_{\nu} = 0$.

Таким образом, ковариантный, тождественно выполняющийся закон сохранения энергии в общей теории относительности представляет собой сильный закон сохранения, вытекающий из тождеств Нетер для полевых уравнений и являющийся следствием инвариантности теории относительно бесконечной группы $G_{\infty 4}$.

Для того чтобы получить обычный закон сохранения (в смысле обычной дивергенции) в соответствии с общим правилом для всех калибровочных полей, нужно ввести псевдоток (в данном случае — псевдотензор $t^{\mu\nu}$) самого поля. Суммарный тензор будет сохраняться в обычном смысле: $\partial_\nu(T^{\mu\nu}+t^{\mu\nu}) = 0$.

Тождества (13.5) позволяют определить строение дополнительных условий на уравнения поля. Например, если уравнения поля имеют вид $\delta\hat{L}/\delta h_{\mu\nu} = m^2(h_{\mu\nu} + q\delta_{\mu\nu}h^\rho_\rho)$, то из (13.5) получим

$$m^2\,\nabla_\nu\,(h_{\mu\nu}+q\delta_{\mu\nu}\,h^\rho_\rho)=0. \qquad (13.7)$$

Если $h_{\mu\nu}$ отождествляется с метрическим тензором $g_{\mu\nu}$, все ковариантные производные приобретают обычный смысл. Для метрического тензора $g_{\mu\nu}$ условия (13.7) можно упростить, выбирая локально геодезическую систему координат, что приводит к условиям Гильберта—Лоренца:

$$m^2\,\partial_\nu\,(g_{\mu\nu}+q\delta_{\mu\nu}g^\rho_\rho)=0. \qquad (13.8)$$

Можно было бы идти обратным путем, т. е. постулировать дополнительные условия (13.8) и тождества, связывающие дополнительные условия с уравнениями поля в виде

$$\nabla_\nu\left(\frac{\delta\hat{L}}{\delta h_{\mu\nu}}-m^2\,(h_{\mu\nu}+q\delta_{\mu\nu}\,h^\rho_\rho)\right)\equiv 0.$$

Тогда мы нашли бы, что преобразования $h_{\mu\nu}$, порождающие такие тождества, суть (13.3), а уравнения поля представляют собой уравнения Эйнштейна [9].

Дополнительные условия (13.8) выделяют определенный спин тензорного поля $h_{\mu\nu}$, а именно спин 2. Без наложения этих условий спин мог быть равен 0,1 или 2.

Калибровочное векторное поле и поле антисимметричного тензора второго ранга. Производные Ли определяются для величин произвольной размерности как целой, так и полуцелой. Фактически это значит, что произвольное многообразие V_4 расслаивается с помощью различных представлений полной линейной группы $GL(4)$. Иными словами, над каждой точкой V_4 вводится слой, размерность которого определяется размерностью нужного нам представления. Поскольку производные Ли всегда содержат произвольные функции ($\sim \Delta x$) и их производные, в качестве калибровочных можно рассматривать любые поля, имеющие лишь пространственно-временные индексы и не связанные с калибровочными группами типа внутренних симметрий. В качестве примера рассмотрим векторное поле A_μ. Его производная Ли имеет вид

$$\delta_L A_\mu = \xi^\tau \partial_\tau A_\mu + A_\tau \partial_\mu \xi^\tau;$$
$$\delta_L A^\mu = \xi^\tau \partial_\tau A_\mu - A^\tau \partial_\tau \xi^\mu.$$

Для построения инвариантного лагранжиана здесь придется использовать метрический тензор $g_{\mu\nu}$, так как $A_\mu = g_{\mu\nu} A^\nu$, но структура коэффициентов связности безразлична.

Тождества Нетер, используя (9.11), можно записать в виде

$$(\delta \hat{L}/\delta A_\mu)(\partial_\tau A_\mu - \partial_\mu A_\tau) \equiv \partial_\mu(\delta \hat{L}/\delta A_\mu) A_\tau.$$

Если свернуть это выражение с A^τ, получим

$$A^2 \partial_\mu (\delta \hat{L}/\delta A_\mu) = A^\tau \partial_{[\tau} A_{\mu]} \delta \hat{L}/\delta A_\mu.$$

На экстремали $\delta \hat{L}/\delta A_\mu = 0$ выполняется закон сохранения:

$$A^2 \partial_\mu (\delta \hat{L}/\delta A_\mu) = 0.$$

Уравнения поля вида $\delta \hat{L}/\delta A_\mu = m^2 A^\mu$ приводят для неизотропного вектора A_μ к дополнительным условиям Лоренца: $m^2 \partial_\mu \hat{A}^\mu = 0$. Для изотропного вектора ($A^2 = A_\mu A^\mu = 0$) $m^2 \partial_\mu \hat{A}^\mu$ произвольно. Таким образом, мы получили лоренцеву калибровку векторного поля с помощью второй теоремы Нетер.

Другой пример: антисимметричное тензорное поле второго ранга $f_{\mu\nu}$. Его вариация Ли задается формулой

$$\delta_L f_{\mu\nu} = \xi^\tau \partial_\tau f_{\mu\nu} + f_{\tau\nu} \partial_\mu \xi^\tau + f_{\mu\tau} \partial_\nu \xi^\tau. \tag{13.9}$$

Тождества Нетер имеют вид

$$\frac{1}{2} \frac{\delta L}{\delta f_{\mu\nu}} (\partial_\tau f_{\mu\nu} - \partial_\mu f_{\tau\nu} - \partial_\nu f_{\mu\tau}) \equiv \partial_\mu \left(\frac{\delta L}{\delta f_{\mu\nu}} \right) f_{\tau\nu}. \tag{13.10}$$

Если $\partial_{[\tau} f_{\widetilde{\mu\nu}]} \neq 0$ и тензорное поле «массивное», т. е. уравнения поля имеют вид $\delta L/\delta f_{\mu\nu} = m^2 f^{\mu\nu}$, то тождества (13.10) приводят к дополнительным условиям

$$\frac{m^2}{2} f^{\mu\nu} (\partial_\tau f_{\mu\nu} - \partial_\mu f_{\tau\nu} - \partial_\nu f_{\mu\tau}) = \partial_\mu f^{\mu\nu} f_{\tau\nu} m^2$$

или

$$\frac{m^2}{2} f^{\mu\nu} \partial_\tau f_{\mu\nu} = m^2 \partial_\mu (f^{\mu\nu} f_{\tau\nu}),$$

откуда следует «закон сохранения»

$$m^2 \partial_\mu \left(f^{\mu\nu} f_{\tau\nu} - \frac{1}{4} \delta^\mu_\tau f^{\alpha\beta} f_{\alpha\beta} \right) = 0.$$

Величина, стоящая в скобках, в электродинамике играет роль тензора энергии-импульса электромагнитного поля. Здесь закон сохранения этого тензора получен как дополнительное условие из тождеств Нетер.

Используя тождество $^*f^{\mu\nu} f_{\tau\nu} \equiv \frac{1}{4} \delta^\mu_\tau (^*f^{\lambda\nu} f_{\lambda\nu})$, где $^*f^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda} f_{\tau\lambda}$, $\varepsilon^{\mu\nu\tau\lambda}$ — дискриминантный тензор, и антисимметрию $f_{\mu\nu}$, можно (13.10) переписать так:

$$(^*f^{\lambda\nu} f_{\lambda\nu}) \partial_\mu (\delta L/\delta f_{\mu\sigma}) \equiv 6 ^*f^{\sigma\tau} \partial_{[\tau} f_{\mu\nu]} \delta L/\delta f_{\mu\nu}. \tag{13.11}$$

Если $f_{\mu\nu}$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{[\tau} f_{\mu\nu]} = 0, \tag{13.12}$$

(13.11) упрощается и приводится к виду

$$(^*f^{\lambda\sigma} f_{\lambda\sigma}) \partial_\mu (\delta L/\delta f_{\mu\nu}) = 0. \tag{13.13}$$

Из любого уравнения поля для $f_{\mu\nu}$ сильный закон сохранения и дополнительные условия получаются простым дифференцированием. Если $\delta L/\delta f_{\mu\nu}=m^2 f^{\mu\nu}$, то из (13.13) следует

$$m^2 ({}^*f^{\lambda\sigma} f_{\lambda\sigma}) \partial_\mu f^{\mu\nu}=0. \tag{13.14}$$

Таким образом,

$$\partial_\mu f^{\mu\nu}=\begin{cases}0, \text{ если } m^2\neq 0;\ {}^*f^{\lambda\sigma} f_{\lambda\sigma}\neq 0;\\ \text{произвольно, если } m^2=0 \text{ или } {}^*f^{\lambda\sigma} f_{\lambda\sigma}=0.\end{cases}$$

Итак, выполнение условий $m^2\neq 0$, ${}^*f^{\lambda\sigma} f_{\lambda\sigma}\neq 0$ и $\partial_{[\tau} f_{\mu\nu]}=0$ приводит к уравнениям Максвелла

$$\partial_\mu f^{\mu\nu}=0, \tag{13.15}$$

а также, в качестве следствия (13.12) и (13.15), к уравнениям

$$\Box f^{\mu\nu}=0. \tag{13.16}$$

Заметим, что уравнения (13.16) как следствие тождеств Нетер $\partial_\mu(\delta L/\delta f_{\mu\nu})\equiv 0$ можно получить и при отличном от (13.9) законе преобразования $f_{\mu\nu}$, а именно при

$$\delta f_{\mu\nu}=\partial_\mu \xi_\nu-\partial_\nu \xi_\mu. \tag{13.17}$$

Такой вид преобразований $f_{\mu\nu}$ был использован в работе [17], где вводились гипотетические частицы нотофы (фотоны «наоборот»), как кванты антисимметричного тензорного поля второго ранга.

Интегральные законы сохранения в ОТО. Часто обсуждение вопроса о построении интегрального закона сохранения энергии в ОТО начинают с замечания о том, что дифференциальный закон сохранения энергии в пространстве Эйнштейна V_4 имеет необычную структуру: нулю равняется не обычная, а ковариантная дивергенция от тензора энергии-импульса. Чтобы «исправить» дифференциальный закон сохранения, вводят различные псевдотензоры энергии-импульса гравитационного поля, которые в сумме с тензором энергии-импульса материи приводят к обычному дифференциальному закону сохранения энергии. Но если речь идет не о плоском, а о римановом пространстве, при интегрировании такого дифференциального закона сохранения мы сталкиваемся с проблемой неоднозначности. Неоднозначность возникает по двум причинам: 1) нековариантность псевдотензоров и обычного закона сохранения $\partial_\mu(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}) = 0$; 2) неоднозначность интеграла от симметричного тензора в римановом пространстве. В случае векторных сохраняющихся токов неоднозначности нет, так как ковариантная производная от вектора (вернее, от векторной плотности) совпадает с обычной, а интеграл от вектора по 3-мерной гиперповерхности Σ есть интеграл от скаляра и поэтому однозначен. Интегральные сохраняющиеся величины (энергия, масса, импульс) в ОТО зависят от выбора системы координат. Сам процесс интегрирования также зависит от этого выбора и способа сопоставления величин в разных точках V_4, т. е. от выбора коэффициентов связности. От этой неоднозначности можно избавиться, но тогда придется пересмотреть тот набор интегральных характеристик, который можно получить из дифференциального закона сохранения тензора энергии-импульса в ОТО.

Дело в том, что интегрирование в римановом пространстве однозначно определено только для скаляров. Поскольку элемент объема представляет собой полностью антисимметричное произведение дифференциалов координат, скаляр под знаком интеграла можно получить только при свертывании элемента объема с антисимметричными тензорами. Интегрирование симметричных тензоров ранга $n \geqslant 2$, таким образом, остается неопределенным. Один из возможных путей однозначного интегрирования симметричных тензоров — интегрирование с вектором.

Рассмотрим формулу Грина в римановом пространстве:

$$\int\limits_V J^m_{;m}\, d^4 v = \oint\limits_\Sigma J^m \varepsilon(N) N_m\, d^3 v, \qquad (13.18)$$

где N_m — вектор нормали; $\varepsilon(N)$ — индикатор вектора N_m; d^4v, d^3v — инвариантные элементы объема. Для симметричного тензора второго ранга T^{ik} формула, аналогичная формуле (13.18), может быть получена при помощи дополнительного вектора

$$\int (T^{ik}\lambda_k)_{;\,i}\, d^4 v = \int T^{ik}_{;\,i}\lambda_k\, d^4 v + \int T^{ik}\lambda_{i;\,k}\, d^4 v. \qquad (13.19)$$

Из формулы (13.19) видно, что интегральный закон сохранения для симметричного тензора имеет смысл только вдоль определенных направлений, а именно вдоль траекторий векторного поля λ_k. Если риманово пространство не допускает существования какого-либо векторного поля (что в общем случае возможно), то нельзя найти и интегральных законов сохранения в этом пространстве. Правда, для псевдориманова пространства, имеющего метрику с сигнатурой Минковского, это ограничение несущественно, так как условие существования такой метрики совпадает с условием существования на многообразии непрерывного поля направлений. Таким образом, в пространствах общей теории относительности всегда существует некоторое векторное поле и, следовательно, всегда можно построить интегральные сохраняющиеся величины (хотя бы одну). При этом свойства сохраняющейся интегральной величины определяются характером векторного поля λ_k. Поэтому интегральные сохраняющиеся величины, даже если они получены интегрированием дифференциального закона сохранения тензора энергии-импульса, могут не образовывать вектора энергии-импульса, а иметь совсем другой смысл. Понятие 4-мерного импульса (вектора энергии-импульса) можно ввести лишь в специальном случае, когда имеется 4 коммутирующих между собой векторных поля, компоненты которых приводятся к виду $\lambda_k = \delta_n^k$.

В качестве примера рассмотрим скалярные частицы в пространстве с метрикой де Ситтера. Для скалярного поля все сохраняющиеся токи имеют вид [см. формулу (9.8)] $J_a{}^\mu = T^\mu_\nu \xi^\nu_a$, где $\xi_a{}^\nu$ определяется преобразованиями координат: $\delta x^\mu = \xi_a{}^\mu \varepsilon^a$.

Пусть λ_k определяет группу движений пространства — времени, т. е. является одним из векторов Киллинга: $\lambda_k = \xi_{ak}$, причем $\xi_{a(k;i)} = 0$. Тогда соотношение (13.19) принимает вид, напоминающий формулу (13.18):

$$\int T^{ik}_{;\,i}\, \underset{a}{\xi_k}\, d^4 v = \oint T^{ik}\, \underset{a}{\xi_k}\, \varepsilon(N)\, N_i\, d^3 v. \tag{13.20}$$

В частном случае плоского пространства ξ^k_a имеют вид: 1) для сдвигов $\xi^k_{(l)} = \delta^k_l$; 2) для вращений $\xi^k_{in} = \underset{(in)}{L^k_l}\, x^l$, где $\underset{(in)}{L^k_l} = \delta^k_n g_{il} - \delta^k_i g_{nl}$ — матрица лоренцевых вращений. Из формулы (13.20) в первом случае получаем

$$\int T^{l\,(k)}_{;\,i}\, d^4 v = \oint T^{i\,(k)}\, \varepsilon(N)\, N_i\, d^3 v. \tag{13.21}$$

Если выполняется ковариантный закон сохранения $T^{ik}_{;\,i} = 0$, то $\oint T^{i\,(k)}\, \varepsilon(N)\, N_i\, d^3 v = 0$. Отсюда обычно при интегрировании по бесконечно удаленным поверхностям, где T^{ik} обращается в нуль, получают интегральный закон сохранения 4-мерного импульса P^i:

$$P^{(i)}=\int T^{(i)\,0}\,\varepsilon(N)\,N_0\,d^3v. \qquad (13.22)$$

Заметим, что векторный индекс у $P^{(i)}$ на самом деле является групповым значком. Он нумеровал векторы Киллинга, соответствующие сдвигам. Поэтому он поставлен в скобки.

В случае вращений плоского пространства формула (13.20) дает

$$\int T^{ik}_{;i}\underset{(pq)}{L_{kn}}x^n\,d^4v=\int(T^{ik}\underset{(pq)}{L_{kn}}x^n)_{;i}\,d^4v-$$
$$-\int T^{ik}\underset{(pq)}{L_{,ki}}\,d^4v=\oint T^{ik}\underset{(pq)}{L_{kn}}\,x^n\,\varepsilon(N)\,N_i\,d^3v. \qquad (13.23)$$

Если тензор T^{ik} симметричен, отсюда получим закон сохранения момента системы $M_{(pq)}=\int M^i_{(pq)}\;\varepsilon(N)N_i d^3v$:

$$\int \underset{(pq)}{M^i_{;i}}\,d^4v=\oint \underset{(pq)}{M^i}\;\;\varepsilon(N)\,N_i\,d^3v, \qquad (13.24)$$

где

$$M^i_{(pq)}=T^i_p\,x_q-T^i_q\,x_p. \qquad (13.25)$$

В пространстве постоянной кривизны (пространстве де Ситтера) в стереографических координатах элемент длины имеет вид

$$-ds^2=\varphi^2\,dx^{i^2},$$

где

$$\varphi=\left(1+\frac{r^2-x_0{}^2}{4R^2}\right)^{-1}\;(r^2=(x')^2+(x^2)^2+(x^3)^2).$$

Группа де Ситтера изоморфна группе вращений O_5. Ее генераторы можно представить в виде

$$\Pi_l=\varphi^{-1}P_l+(x_k/2R^2)\,L_{kl};$$
$$L_{ik}=x_i\,P_k-x_k\,P_i, \qquad (13.26)$$

где $P_k=-i\partial/\partial x^k$. Таким образом, только в пределе плоского пространства ($R\to\infty$) оператор 4-мерного импульса Π_l приобретает смысл оператора сдвига по координатам. В искривленном пространстве «импульс» всегда смешан с «моментом». Чтобы этого избежать, нужно было бы выбрать в группе движений четыре коммутирующих между собой оператора и назвать их операторами 4-мерного импульса. Однако это невозможно, так как группа де Ситтера проста и имеет ранг 2. В результате 4-мерный импульс и полный момент системы становятся компонентами 5-мерного полного момента системы.

Выпишем интегральные сохраняющиеся величины, предполагая, как обычно, что на пространственной бесконечности $T^{ik}=0$. Для компонент 4-мерного момента получим обычное выражение:

$$M_{lm}=\int M^{0}{}_{(lm)}\varepsilon(N)\,N_0\,d^3v=\int\varphi^4 M^{0}{}_{(lm)}\,d^3x=$$

$$=\int\left(M_{0\,(lm)}/\sqrt{g_{00}}\right)\varphi^3\,d^3x, \qquad (13.27)$$

где M^0_{lm} определяется формулой (13.25), но x — уже не декартовы, а стереографические координаты.

Обобщенные сдвиги Π_l дают четыре вектора Киллинга, которые определяют сохраняющийся (при тех же условиях на пространственной бесконечности) обобщенный 4-мерный импульс с компонентами:

$$P^{(0)}=\int\sqrt{-g}\,T^0_k\,\xi^k_0\,d^3x=\int\varphi^3\,T^0_0\,d^3x-$$

$$-\int\frac{r^2}{2R^2}\varphi^4\,T^0_0\,d^3x+\int\varphi^4\,\frac{x_0x_\alpha}{2R^2}\,T^0_\alpha\,d^3x=$$

$$=\int\varphi^3\,T^0_0\,d^3x-\frac{1}{2}\int\frac{x_\alpha M_{0\,(0\,\alpha)}}{\sqrt{g_{00}}\,R^2}\,\varphi^3\,d^3x,\quad(\alpha=1,\,2,\,3); \qquad (13.28)$$

$$P^{(\alpha)}=\int\sqrt{-g}\,T^0_k\,\xi^k_\alpha\,d^3x=\int\varphi^3\,T^0_\alpha\,d^3x-$$

$$-\frac{1}{2}\int\varphi^4\,\frac{\sum\limits_{k\neq\alpha}x_k^2}{R^2}\,T^0_\alpha\,d^3x+\frac{1}{2}\int\varphi^4\sum_{k\neq\alpha}T^0_\alpha\,\frac{x_k x_\alpha}{R^2}\,d^3x=$$

$$=\int\varphi^3\,\frac{T_{0\alpha}}{\sqrt{g_{00}}}\,d^3x-\frac{1}{2}\int\frac{x^k M_{0\,(0k)}}{\sqrt{g_{00}}\,R^2}\,\varphi^3\,d^3x. \qquad (13.29)$$

Эти выражения имеют смысл в том случае, если метрика пространства — времени считается жестко заданной и не связана с распределением материи. Если же рассматривается геометризованная теория (общая теория относительности), тогда с необходимостью T^{ik} будет пропорционален метрическому тензору g^{ik} и вместо (13.27)—(13.29) мы получим

$$M_{(0\alpha)} = \int \sqrt{-g}\, \xi^0_{(0\alpha)}\, d^3x = \int \varphi^4 x_\alpha\, d^3 x. \qquad (13.30)$$

(другие компоненты «момента» равны нулю);

$$P^{(0)} = \int \varphi^3\, d^3x - \int \frac{r^2}{2R^2} \varphi^4\, d^3 x =$$

$$= \int \frac{(1-(r^2+x_0^2))/4R^2}{1+(r^2-x_0^2)/4R^2} \varphi^3\, d^3 x, \qquad (13.31)$$

$$P^{(\alpha)} = \frac{1}{2}\int \frac{x_0\, x_\alpha}{R^2\,(1+(r^2-x_0^2)/4R^2)} \varphi^3\, d^3 x.$$

Все индексы у интегральных величин $P^{(i)}$, $M_{(ik)}$ групповые, поэтому $P^{(i)}$, $M_{(ik)}$ не изменяются при преобразованиях системы координат. Но они зависят от выбора поверхности интегрирования и базиса $\xi^\mu{}_a$ в алгебре Ли группы движений. Таким образом, интегральные сохраняющися величины, соответствующие пространственно-временным свойствам симметрии, образуют мультиплет, реализующий регулярное представление алгебры Ли группы движений V_4. В пространстве Минковского существование 4-мерного вектора энергии-импульса как самостоятельной интегральной характеристики системы связано с двумя «счастливыми обстоятельствами»: во-первых, группа движений пространства Минковского (группа Пуанкаре) имеет 4-мерную инвариантную подгруппу; во-вторых, само пространство Минковского может быть отождествлено с групповым пространством этой инвариантной подгруппы. Поэтому векторы P^i из алгебры Ли группы Пуанкаре становятся пространственно-временными векторами. В общем же случае интегральные сохраняющиеся величины являются векторами расслоенного пространства над V_4, когда в качестве слоя выступает групповое пространство группы движений. Если структура группы движений искривленного пространства окажется такой, что само V_4 можно будет отождествить с этой группой или ее инвариантной подгруппой, интегральные сохраняющиеся величины **P**, **M**, как и в плоском пространстве, окажутся пространственно-временными векторами. Число их компонент, однако, будет меньше, чем в плоском пространстве, как так группа движений риманова пространства у́же, чем псевдоевклидова.

ЛИТЕРАТУРА

1. Адлер, Дашен. Алгебра токов. Пер. с англ. М., «Мир», 1971.
2. Нетер Э. В сб. «Вариационные принципы механики». М., Физматгиз, 1959.
3. Utiyama R. Progr. Theor. Phys., **101**, 1596 (1956).
4. Соколик Г. А., Коноплева Н. П. «Докл. АН СССР», **154**, № 2 (1964).
5. Коноплева Н. П. В сб. «Гравитация и теория относительности». Вып. 4—5. Казань, КГУ, 1968.
6. Ogiyevetsky V. I., Polubarinov I. V. Ann. Phys., **25**, 358 (1963); Nucl. Phys., **76**, 677 (1966).
7. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. «Ж. эксперим. и теор. физ»., **45**, 237 (1963).
8. Иосифьян А. Г., Коноплева Н. П. «Докл. АН СССР», **198**, № 5 (1971).
9. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. В сб. «Современные проблемы гравитации». Тбилиси, ТГУ, 1967, стр. 430; Ann. Phys. (N. Y.), **35**, 167 (1965).
10. Yano K. The theory of derivatives and its applications. Amsterdam, 1957.
11. Коноплева Н. П. «Докл. АН СССР», **190**, 1070 (1970).
12. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
13. Гельфанд И. М., Фомин С. В. Вариационное исчисление. М., Физматгиз, 1961.
14. O'Connell R. F., Tompkins D. B. Nuovo cimento, **38**, 1088 (1965).
15. O'Connell R. F., Tompkins D. R. I. Math. Phys., **6**, 1952 (1965).
16. Траутман А. Эйнштейновский сборник. М., «Наука», 1967, стр. 308.
17. Огиевецкий В. И., Полубаринов И. В. «Ядерная физика», **4**, 216 (1966).

КВАНТОВАНИЕ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

§ 14. ОСНОВНЫЕ ИДЕИ ПОСТРОЕНИЯ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Геометрическая природа калибровочных полей проявляется и при построении их квантовой теории.

Попытки квантовать геометрические поля стандартными методами приводят к ряду трудностей и противоречий. С ними мы сталкиваемся уже в задаче о ковариантном квантовании электромагнитного поля, простейшего по своей геометрической структуре. Здесь трудности можно обойти, квантуя электромагнитное поле по методу Ферми с использованием индефинитной метрики. Однако этот прием отказывается служить для полей типа Янга—Миллса с неабелевой калибровочной группой. Впервые это заметил Фейнман [1]. Он показал, что квантование поля Янга—Миллса по Ферми нарушает условие унитарности. Фейнман же наметил путь устранения указанной им трудности.

В ряде работ, появившихся в недавнее время [2—12], была реализована намеченная Фейнманом программа и фактически решена задача квантования полей типа Янга—Миллса.

При квантовании теории тяготения Эйнштейна возникают новые специфические особенности, о которых сказано подробнее в конце главы. Здесь мы изложим один из возможных подходов к квантованию калибровочных полей, использующий формализм континуального интегрирования. Этот подход представляется наиболее естественным по своей логической структуре и наиболее простым в реализации.

Наметим идею, которая является основной во всей дальнейшей схеме построения квантовой теории.

Поля, получающиеся друг из друга калибровочными преобразованиями (например, A_μ и $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$ в электродинамике), описывают одну и ту же физическую (геометрическую) ситуацию и поэтому физически (геометрически) неразличимы. Это наводит на мысль, что основными объектами теории должны стать классы полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями. Так, в электродинамике в один класс с полем A_μ объединяются все поля вида $A_\mu + \partial_\mu \Lambda$.

Построить теорию, в которой основными объектами являются классы, помогает обращение к методу континуального (функционального) интегрирования. Этот метод позволяет записать величины, представляющие физический интерес, в виде интегралов «по всем полям» с весом $\exp(iS/\hbar)$, где S — классическое действие системы; $\hbar$ — постоянная Планка*. Действие одинаково для всех полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями. Другими словами, действие есть функционал на классах. В этой ситуации возникает задача: записать интеграл в виде интеграла по всем классам. Это можно сделать, если, например, вести интегрирование по однократно пересекающейся с каждым классом поверхности в многообразии всех полей. Тогда каждый класс будет иметь на указанной поверхности точно одного своего представителя. Возникающая на таких поверхностях мера интегрирования меняется при изменении формы поверхности, однако все физические результаты не должны зависеть от выбора поверхности.

Необходимая для теории калибровочных полей модификация континуального интеграла объясняется на примере квантования конечномерной механической системы (§ 15—17). Изложение в § 15 и 17 следует работам Л. Д. Фаддеева [5, 6]. Применению метода континуального интеграла в теории поля посвящен § 18. Далее (§ 19) строится модификация континуального интеграла, необходимая в теории калибровочных полей. Центральными здесь являются вопросы выбора меры в функциональном пространстве и перехода в континуальном интеграле от одной калибровки к другой. В § 20 выписаны интегралы для функций Грина и намечена теория возмущений для их вычисления. Глава завершается рассмотрением конкретных примеров. В § 21 продемонстрировано, как методом континуального интегрирования можно получить известные результаты квантовой электродинамики без обращения к индефинитной метрике. В § 22 подробно рассмотрено квантование полей типа Янга—

---

* В дальнейшем мы используем естественную в релятивистской квантовой теории систему единиц с $\hbar = c = 1$, где $\hbar$ — постоянная Планка; c — скорость света.

Миллса. В частности, на этом примере реализована схема построения функций Грина, S-матрицы и теории возмущений и рассмотрен переход от одной калибровки к другой. В заключительном § 23 обсуждаются вопросы квантования теории тяготения Эйнштейна.

Мы не рассматриваем здесь системы взаимодействующих друг с другом калибровочных полей. Читатель, понявший основные принципы построения квантовой теории калибровочных полей, сможет сам воспроизвести соответствующие выкладки и для этого, более сложного, случая.

§ 15. МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ И ФАЗОВОЕ ПРОСТРАНСТВО

Квантование классических механических систем при помощи континуального интеграла является одним из наиболее удобных из известных методов квантования и применимо к ситуациям, когда общепринятое каноническое квантование сталкивается с трудностями. Рассмотрим метод континуального интегрирования сначала в применении к квантованию механических систем с конечным числом степеней свободы. Это сделает рассуждения и выводы короче и обозримее. Кроме того, яснее станет их общий характер. Далее произведем обобщение на теорию поля, описывающую системы с бесконечным числом степеней свободы.

Механическая система определяется своей функцией Лагранжа

$$L(q, \dot{q}), \tag{15.1}$$

ависящей от точки q координатного многообразия M и обобщенной скорости $\dot{q}$ ($\dot{q}$ задает точку касательного пространства V_q к многообразию M в точке q). Пусть n — размерность многообразия M. На таком многообразии можно ввести обобщенные координаты $q^1, \ldots, q^n$.

Во многих случаях и, в частности, в задаче квантования бывает удобно перейти от лагранжева формализма к гамильтонову. С этой целью вводят канонические импульсы $p_1, \ldots, \ldots, p_n$, определяемые соотношениями

$$P_i = \partial L / \partial \dot{q}^i, \quad i = 1, \ldots n. \tag{15.2}$$

Переход от скоростей $\dot{q}^i$ к импульсам p_i соответствует переходу от касательного пространства V_q к кокасательному V^*_q (см., например, книгу Макки [13]). Многообразие M

вместе с определенным в каждой его точке q кокасательным пространством V^*_q определяет фазовое пространство механической системы, обозначаемое далее Г.

Для нас наиболее интересен случай, когда соотношения (15.2) неразрешимы относительно $\dot{q}$. Так будет, если, например, определнтель

$$\det\|\partial^2 L/\partial\dot{q}^i\partial\dot{q}^k\| \tag{15.3}$$

обращается в тождественный нуль. Лагранжиан $L(q, \dot{q})$ называется в этом случае сингулярным. Функции Лагранжа таких ннтересных полей, как электромагнитное и поле тяготения, сингулярны в указанном смысле*.

Рассмотрим переход от лагранжева формализма к гамильтонову для сингулярного лагранжиана следующего вида:

$$l(\xi, \dot{\xi}) = \sum_{\alpha=1}^{N} f_\alpha(\xi)\dot{\xi}^\alpha - \Phi(\xi). \tag{15.4}$$

Обобщенные скорости входят здесь линейно. Всякий несингулярный лагранжиан приводится к виду (15.4), если удвоить число динамических переменных. Действительно, нетрудно проверить, что в случае несингулярного лагранжиана уравнения движения для функции Лагранжа

$$l(q, v, \dot{q}, \dot{v}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L(q, v)}{\partial v^i}(\dot{q}^i - v^i) + L(q, v) \tag{15.5}$$

эквивалентны обычным уравнениям движения для лагранжиана $L(q, \dot{q})$.

Для сингулярного лагранжиана переход к виду (15.4) не является столь автоматичным. Дело в том, что уравнения $\partial l/\partial v^i = 0$ сводятся к системе

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial v^i\,\partial v^j}(\dot{q}^i - v^i) = 0, \tag{15.6}$$

которая эквивалентна уравнениям $\dot{q}^i = v^i$ лишь при отличном от нуля определителе (15.3), т. е. в случае несингулярного лагранжиана. Можно показать, однако, что такая

---

* Точнее говоря, как электромагнитное, так и гравитационное поля являются бесконечномерными аналогами конечномерной механической системы с тождественно равным нулю определителем (15.3).

эквивалентность имеет место и для сингулярного лагранжиана. В примерах из теории поля лагранжиан можно с самого начала записать в форме (15.4).

Приведем уравнения движения для лагранжиана (15.4) к гамильтонову виду. Начнем с замечания, что, как известно из теории дифференциальных форм первого порядка (см. например, книгу [14]), можно найти такую замену переменных $\xi \to (q, p, z)$

$$\left.\begin{array}{c} q=(q^1, \ldots, q^n); \quad p=(p_1, \ldots, p_n); \quad z=(z^1, \ldots, z^r); \\ 2n+r=N, \end{array}\right\} \tag{15.7}$$

что форма $\omega = \sum\limits_{\alpha} f_\alpha d\xi^\alpha$, участвующая в лагранжиане (15.4), примет канонический вид $\omega = \sum\limits_i p_i dq^i + dS$ с точностью до аддитивного слагаемого — полного дифференциала dS, добавка которого не влияет, как известно, на уравнения движения. Число пар канонических переменных (q, p) совпадает с половиной ранга антисимметричной матрицы:

$$\Omega_{\alpha\beta} = (\partial f_\alpha / \partial \xi^\beta) - (\partial f_\beta / \partial \xi^\alpha). \tag{15.8}$$

Переменные типа z отсутствуют, если эта матрица обратима. В этом случае назовем лагранжиан (15.4) регулярным. Он имеет явно гамильтонов вид:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H(q, p). \tag{15.9}$$

В общем случае в переменных (q, p, z) лагранжиан принимает вид

$$l = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - \Phi(q, p, z). \tag{15.10}$$

Соответствующие лагранжиану (15.10) уравнения движения, кроме канонических уравнений

$$\dot{q}^i = \partial\Phi / \partial p_i; \quad \dot{p}_i = -\partial\Phi / \partial q^i, \tag{15.11}$$

содержат еще уравнения типа

$$\partial\Phi / \partial z^a = 0, \quad a = 1, \ldots, r. \tag{15.12}$$

В регулярном случае последние уравнения отсутствуют, и задача приведения уравнений движения к гамильтонову виду решается, как только найдена замена (15.7).

Естественно попытаться использовать уравнения (15.12) для исключения переменных типа z. Это можно сделать, если

$$\det\|\Phi_{ab}\| \neq 0; \quad \Phi_{ab} = \partial^2\Phi/\partial z^a\,\partial z^b. \tag{15.13}$$

В этом случае, подставив найденные значения $z^a = z^a(q, p)$ в уравнения (15.11), мы не изменим их гамильтонова вида, если в качестве гамильтониана использовать

$$H(q, p) = \Phi(q, p, z(q, p)). \tag{15.14}$$

Действительно, имеем, например,

$$\frac{\partial H}{\partial p} = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial p}\right)\Bigg|_{z = z(q, p)}, \tag{15.15}$$

и второе слагаемое в скобках правой части исчезает вследствие (15.12).

Если же условие (15.13) не выполняется, можно при помощи уравнений (15.12) выразить переменные z через q, p и m параметров λ, где $m < r$, причем $r - m$ совпадает с рангом матрицы Φ_{ab}. Обозначим

$$\widetilde{\Phi}(q, p, \lambda) = \Phi(q, p, z(q, p, \lambda)). \tag{15.16}$$

Матрица $\partial^2\widetilde{\Phi}/\partial\lambda^a\partial\lambda^b$ исчезает тождественно, так как иначе можно было бы исключить еще несколько переменных типа z из уравнений (15.12). Таким образом, параметры λ входят в $\widetilde{\Phi}(q, p, z)$ линейно, и функция Лагранжа в новых переменных принимает вид

$$l = \sum_{i=1}^{n} p_i\dot{q}^i - H(q, p) - \sum_{a=1}^{m} \lambda_a\varphi^a(q, p). \tag{15.17}$$

Переменные λ_a, $a = 1, \ldots, m$ естественно назвать множителями Лагранжа, а стоящие при них коэффициенты $\varphi^a(q, p)$ интерпретировать как связи, наложенные на динамические переменные. Уравнения связи

$$\varphi^a(q, p) = 0, \quad a = 1, \ldots, m \tag{15.18}$$

позволяют исключить m переменных q, p, выразив их через остальные переменные. При этом лагранжиан (15.17) приводится к виду (15.4), но с меньшим числом переменных (n вместо N).

Описанный процесс исключения лишних переменных можно повторять до тех пор, пока лагранжиан не примет гамильтонов вид (15.9). Процесс исключения подразумевает явное решение уравнений связи типа (15.18), что на практике часто оказывается затруднительным. Поэтому полезно иметь формализм, не требующий явного решения уравнений связи.

Естественно считать связи, т. е. функции $\varphi^a(q, p)$, независимыми и неприводимыми в том смысле, что уравнения связи (15.18) определяют в фазовом пространстве Γ поверхность M размерности $2n - m$, причем произвольная функция f, исчезающая на M, является линейной комбинацией связей

$$f = \sum_a c_a(q, p)\, \varphi^a(q, p) \tag{15.19}$$

с переменными, вообще говоря, коэффициентами c_a.

Рассмотрим специальный, на первый взгляд, случай, когда связи φ^a и гамильтониан H удовлетворяют дополнительным условиям:

$$\{\varphi^a, \varphi^b\} = \sum_c c_c^{ab}\, \varphi^c; \tag{15.20}$$

$$\{H, \varphi^a\} = \sum_b c_b^a\, \varphi^b, \tag{15.21}$$

где c_c^{ab}, c_b^a — некоторые функции q и p, а $\{f, g\}$ — скобки Пуассона:

$$\{f, g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \cdot \frac{\partial g}{\partial q^i} - \frac{\partial f}{\partial q^i} \cdot \frac{\partial g}{\partial p_i} \right). \tag{15.22}$$

Другими словами, мы считаем, что скобки Пуассона связей друг с другом и с гамильтонианом исчезают на M. Забегая вперед, укажем, что именно таким условиям удовлетворяют связи в теории калибровочных полей.

Для выполнения условий (15.20) необходимо, чтобы m не превосходило n.

Уравнения движения для лагранжиана (15.17) состоят из канонических уравнений

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + \sum_a \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial p_i}; \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - \sum_a \lambda_a \frac{\partial \varphi^a}{\partial q^i} \tag{15.23}$$

и условий (15.18).

Условия (15.20); (15.21) гарантируют выполнение уравнений (15.18) при произвольных функциях $\lambda_a(t)$, если они выполнены для начальных условий. Другими словами, траектория, начавшаяся на M, не покидает эту поверхность.

Наблюдаемыми величинами естественно считать не все функции на многообразии M, а только такие, на изменении которых со временем не сказывается произвол в выборе $\lambda_a(t)$. Этому требованию удовлетворяют функции $f(q, p)$, подчиняющиеся условиям

$$\{f, \varphi^a\} = \sum_b d_b^a \varphi^b. \qquad (15.24)$$

Действительно, в уравнениях движения для таких функций

$$\dot{f} = \{H, f\} + \sum_a \lambda_a \{\varphi^a, f\} \qquad (15.25)$$

члены, зависящие от λ_a, исчезают на M.

Заданная на M и удовлетворяющая условиям (15.24) функция $f(q, p)$ существенно зависит не от всех переменных. Условия (15.24) можно рассматривать как систему m дифференциальных уравнений первого порядка на M, для которых уравнения (15.20) играют роль условий интегрируемости. Поэтому функция f однозначно определяется своими значениями на подмногообразии начальных условий для этой системы, имеющем размерность $(2n - m) - m = 2(n - m)$. В качестве такого подмногообразия удобно взять поверхность Γ^*, определяемую уравнениями

$$\chi_a(q, p) = 0, \quad a = 1, \ldots, m, \qquad (15.26)$$

которые называются дополнительными условиями. Функции χ_a должны удовлетворять условию

$$\det \|\{\chi_a, \varphi^b\}\| \neq 0, \qquad (15.27)$$

так как только в этом случае Γ^* может служить начальной поверхностью для уравнений (15.24). Удобно, кроме того, считать, что χ_a коммутируют друг с другом*:

$$\{\chi_a, \chi_b\} = 0. \qquad (15.28)$$

В этом случае на многообразии Γ^* можно ввести канонические переменные. Действительно, если выполнено условие (15.27), то при помощи канонического преобразования в Γ можно перейти к новым переменным, в которых χ_a примут простой вид:

$$\chi_a(q, p) = p_a, \qquad (15.29)$$

---

* Здесь и далее коммутатором двух функций f и g на фазовом пространстве мы называем скобки Пуассона $\{f, g\}$ (15.22). Мы говорим, что функции коммутируют, если их скобки Пуассона равны нулю.

где p_a $(a = 1, \ldots, m)$ — часть канонических импульсов новой системы переменных. Обозначим q^a сопряженные с ними координаты, и пусть q^*, p^* — остальные канонические переменные. В новых переменных условие (15.27) запишется в виде

$$\det \| \partial \varphi^a / \partial q^b \| \neq 0, \tag{15.30}$$

так что уравнения (15.18) можно разрешить относительно q^a. В результате поверхность Γ^* задается в Γ уравнениями

$$p_a = 0; \quad q^a = q^a(q^*, p^*), \tag{15.31}$$

означающими, что уравнения связи (15.18) можно разрешить относительно q^a, причем q^* и p^* играют роль независимых переменных на Γ^*. Эти переменные оказываются каноническими. Скобку Пуассона любых функций f и g, удовлетворяющих уравнениям (15.25), можно сосчитать следующим образом:

$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f^*}{\partial p^*} \cdot \frac{\partial g^*}{\partial q^*} - \frac{\partial f^*}{\partial q^*} \cdot \frac{\partial g^*}{\partial p^*} \right), \tag{15.32}$$

где

$$\left. \begin{aligned} f^* &= f(q^a(q^*, p^*), q^*, 0, p^*); \\ g^* &= g(q^a(q^*, p^*), q^*, 0, p^*). \end{aligned} \right\} \tag{15.33}$$

Для проверки формулы (15.32) удобно вычислить скобку Пуассона $\{f, g\}$ в неканонических координатах $\eta = (\varphi^a, q^*, p_a, p^*)$. При этом

$$\{f, g\} = \sum_{\alpha, \beta} \{\eta^\alpha, \eta^\beta\} (\partial f / \partial \eta^\alpha) \cdot (\partial g / \partial \eta^\beta). \tag{15.34}$$

Вследствие условий (15.20) и (15.24) ряд членов в правой части (15.34) исчезает, и в результате она совпадает с правой частью (15.32), где $f^* = f(\eta)|_{p_a = \varphi^a = 0}$. Подчеркнем еще раз, что вывод о каноничности q^* и p^* существенно связан с условием (15.28).

Таким образом, имеется два способа описания наблюдаемых величин в нашей системе. При первом из них наблюдаемые — функции на M (точнее, классы функций на Γ), удовлетворяющие уравнениям (15.24). Скобка Пуассона определяется как значение на M скобки Пуассона в Γ. Для перехода ко второму способу следует подобрать дополнительные условия χ_a, решить уравнения (15.18) и (15.26) и построить функцию f^* согласно (15.33). Можно показать, что эта процедура не зависит от выбора дополнительных условий, так как изменение χ_a при соблюдении условий (15.27) и (15.28) сводится к каноническому преобразованию в Г.

Как уже отмечалось, на практике решать уравнения связей типа (15.18) часто затруднительно и удобнее работать с первым способом описания наблюдаемых. С другой стороны, при описании по второму способу имеем дело с обычным фазовым пространством и можем использовать привычные формулы механики. Таким образом, для проверки правильности той или иной формулы в первом способе описания наблюдаемых достаточно проверить, что она переходит в обычную формулу при описанном выше переходе к второму способу.

Именно так мы будем в дальнейшем поступать при работе с континуальными интегралами.

§ 16. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ ПО ТРАЕКТОРИЯМ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

В 1948 г. Фейнман ввел и исследовал континуальный интеграл по траекториям в конфигурационном пространстве механической системы [15]. Для приложения к теории калибровочных полей более удобным оказывается полученное Фейнманом в 1951 г. [16] выражение для континуального интеграла, в котором интегрирование ведется по траекториям в фазовом пространстве.

Рассмотрим одномерную механическую систему с функцией Гамильтона $H(q, p)$, где q — координата ($-\infty < q < \infty$); p — канонически сопряженный импульс. Каноническое квантование такой системы состоит, как известно, в замене координаты q и импульса p операторами $\hat{q}$ и $\hat{p}$ по правилу

$$q \to \hat{q} \equiv q; \quad p \to \hat{p} \equiv -\mathrm{i}\, \partial/\partial q \tag{16.1}$$

(напомним, что мы используем систему единиц с $\hbar = 1$). Операторы действуют в гильбертовом пространстве волновых функций $\psi(q)$. Наложив на функции $\psi(q)$ условие нормировки

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(q)|^2\, dq = 1, \tag{16.2}$$

можно считать квадрат модуля $|\psi(q)|^2 = \rho(q)$ плотностью вероятности нахождения частицы в точке q.

Эволюция состояния системы во времени определяется уравнением Шредингера

$$i\,\partial\psi/\partial t = \hat{H}\psi, \qquad (16.3)$$

в котором оператор энергии $\hat{H}$ получается из классической функции Гамильтона $H(q, p)$ заменой q и p операторами по правилу (16.1). Формальное решение уравнения (16.3) можно записать в виде

$$\psi(t'') = \hat{U}(t'', t')\,\psi(t'), \qquad (16.4)$$

где оператор эволюции

$$\hat{U}(t'', t') = \exp\left(i\,(t' - t'')\,\hat{H}\right) \qquad (16.5)$$

есть показательная функция оператора энергии $\hat{H}$.

Матричные элементы оператора эволюции играют важную роль в квантовой теории. Метод континуального интегрирования позволяет представить матричный элемент оператора эволюции в виде среднего по траекториям в фазовом пространстве от выражения

$$\exp i\,S[t', t''], \qquad (16.6)$$

где

$$S[t', t''] = \int_{t'}^{t''} \{p(t)\,\dot{q}(t) - H(q(t), p(t))\}\,dt \qquad (16.7)$$

есть классическое действие для траектории $(q(t), p(t))$ $(t' \leqslant t \leqslant t'')$ в фазовом пространстве.

Обычно континуальный интеграл определяют как предел конечномерного интеграла [17]. Приведем одно из возможных определений. Разделим интервал $[t', t'']$ на N равных частей точками $\tau_1, \ldots, \tau_{N-1}$. Рассмотрим на интервале $[t', t'']$ функции $p(t)$, постоянные на интервалах

$$[t', \tau_1), (\tau_1\, \tau_2), \ldots, (\tau_{N-1}, t''], \qquad (16.8)$$

и непрерывные функции $q(t)$, линейные на интервалах (16.8). Фиксируем значения функции $q(t)$ на концах интервала $[t', t'']$, положив

$$q(t') = q', \quad q(t'') = q''. \qquad (16.9)$$

Траектория $(q(t), p(t))$ определяется значениями кусочнолинейной функции $q(t)$ в точках $\tau_1, \ldots, \tau_{N-1}$ (обозначим их $q_1, \ldots, q_{N-1}$) и значениями кусочнопостоянной функции $p(t)$ на интервалах (16.8). Обозначим эти значения $p_1, \ldots, p_N$.

Рассмотрим конечномерный интеграл

$$(2\pi)^{-N} \int dp_1\, dq_1 \ldots dq_{N-1}\, dp_N \exp(\mathrm{i}S[t', t'']) \equiv J_N(q', q''; t', t''), \tag{16.10}$$

где $S[t', t'']$—действие (16.7) для только что описанной траектории $(q(t), p(t))$.

Основное утверждение состоит в том, что предел интеграла (16.10) при $N \to \infty$ дает матричный элемент оператора эволюции

$$\lim_{N\to\infty} (2\pi)^{-N} \int dp_1\, dq_1 \ldots dq_{N-1}\, dp_N \exp(\mathrm{i}S[t', t'']) = \\ = \langle q'' | \exp \mathrm{i}(t' - t'') \hat{H} | q' \rangle. \tag{16.11}$$

Нетрудно проверить это утверждение в простейших случаях, когда гамильтониан H зависит только от координаты или только от импульса.

Если $H = H(q)$ есть функция только координаты, классическое действие для описанной выше траектории $(q(t), p(t))$ имеет вид

$$\int_{t'}^{t''} (p\dot{q} - H(q))\, dt = \\ = p_1(q_1 - q') + p_2(q_2 - q_1) + \ldots + p_N(q'' - q_{N-1}) - \int_{t'}^{t''} H(q)\, dt. \tag{16.12}$$

Интеграл по импульсам в (16.10) есть произведение δ-функций

$$\delta(q_1 - q')\, \delta(q_2 - q_1) \ldots \delta(q'' - q_{N-1}). \tag{16.13}$$

Выражение $\exp\left(-\mathrm{i}\int_{t'}^{t''} H(q) dt\right)$ можно считать равным $\exp(\mathrm{i}(t' - t'') H(q'))$ и вынести за знак интеграла. Интегрирование по координатам $q_1, \ldots, q_{N-1}$ снимает все δ-функции, кроме одной, приводя к результату

$$\delta(q' - q'') \exp\{\mathrm{i}(t' - t'') H(q')\}, \tag{16.14}$$

совпадающему с матричным элементом оператора эволюции.

Если $H = H(p)$ зависит только от импульса, действие принимает вид

$$\int_{t'}^{t''} \left(p\dot{q} - H(p)\right) dt =$$

$$= p_1(q_1 - q') + p_2(q_2 - q_1) + \ldots + p_N(q'' - q_{N-1}) - \int_{t'}^{t''} H(p)\, dt. \tag{16.15}$$

Интегрируя в (16.10) сначала по координатам $q_1, \ldots, \ldots, q_{N-1}$, а затем по всем импульсам, кроме одного, получим интеграл

$$\frac{1}{2\pi} \int dp \exp\{\mathrm{i}(p(q'' - q') + (t' - t'')H(p))\}, \tag{16.16}$$

дающий матричный элемент оператора эволюции для гамильтониана $\hat{H} = H(\hat{p})$.

Доказательство формулы (16.11) усложняется, если гамильтониан нетривиально зависит как от координаты, так и от импульса. В этом случае допредельное выражение (16.10), вообще говоря, не совпадает со своим пределом — матричным элементом оператора эволюции. Формула, аналогичная (16.11) для оператора эволюции уравнения параболического типа, доказана, например, в работе М. А. Евграфова [18]. В интересующем нас случае уравнения Шредингера можно, по-видимому, доказать, что существует так называемый слабый предел, т. е. для любых квадратично интегрируемых функций $f(q)$, $g(q)$ имеет место формула

$$\lim_{N \to \infty} \int J_N(q', q''; t', t'') f(q') \bar{g}(q'')\, dq'\, dq'' =$$

$$= \langle g | \exp\{\mathrm{i}(t' - t'')\hat{H}\} | f \rangle. \tag{16.17}$$

Континуальный интеграл, определенный как предел выражения (16.10) при $N \to \infty$, обозначим символом

$$\int_{q(t') = q'}^{q(t'') = q''} \exp(\mathrm{i}S[t', t'']) \prod_t \frac{dq(t)\, dp(t)}{2\pi}. \tag{16.18}$$

Такое обозначение удобно и поэтому часто используется, хотя оно не отражает того, что в допредельном выражении (16.10) число интегрирований по импульсам на единицу больше, чем по координатам. Для теории поля интереснее другое использование континуального интеграла. Здесь важны формулы для S-матрицы и функций Грина.

Покажем на примере одномерной системы, как можно написать формулы для функций Грина через континуальные интегралы.

Функции Грина определяют обычно как матричные элементы от произведения операторов $\hat{A}(t)$, $\hat{B}(t)$, $\hat{C}(t)$, ... в гайзенберговском представлении:

$$\hat{A}(t) = \exp\left(\mathrm{i}\hat{H}\,t\right)\hat{A}\exp\left(-\mathrm{i}\hat{H}\,t\right). \tag{16.19}$$

Важный частный случай — когда операторы расставлены в хронологическом порядке, т. е. в порядке убывания временных аргументов, а функции Грина определяются формулами вида

$$G(t_1, t_2, t_3, \ldots \,|\, q', q'') = \\ = \langle q'' \,|\, \mathrm{T}\left(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\hat{C}(t_3)\ldots\right) |\, q'\rangle. \tag{16.20}$$

Входящий сюда знак хронологического произведения Т расставляет следующие за ним операторы $\hat{A}(t_1)$, $\hat{B}(t_2)$, $\hat{C}(t_3)$,... в хронологическом порядке, т. е. операторы с бо́льшими временны́ми аргументами слева от операторов с меньшими временны́ми аргументами.

Представим в виде континуального интеграла производящий функционал для таких функций. Рассмотрим выражение

$$\exp\left(\mathrm{i}S\,[t', t''; \eta_A, \eta_B, \ldots]\right) \equiv \exp\left\{\mathrm{i}\int\limits_{t'}^{t''}\left(p\dot{q} - H(q, p) + \right.\right. \\ \left.\left. + \eta_A(t)A(q,p)\,(q, p) + \eta_B(t)\,B(q, p) + \ldots\right) dt\right\}, \tag{16.21}$$

где $\eta_A(t)$, $\eta_B(t)$, ... — произвольные «пробные» функции времени t; $H(q, p)$, $A(q, p)$, $B(q, p)$ — функции координаты q и импульса p, соответствующие операторам $\hat{H}$, $\hat{A}$, $\hat{B}$, ...

Интересующий нас континуальный интеграл определим как предел

$$\lim_{N\to\infty}(2\pi)^{-N}\int \exp\left(\mathrm{i}S\,[t', t''; \eta_A, \eta_B, \ldots]\right) \times \\ \times dp_1\, dq_1 \ldots dq_{N-1}\, dp_N \tag{16.22}$$

выражения, получаемого из (16.10) заменой $\exp(\mathrm{i}S)$ под знаком интеграла функционалом (16.21). Обозначим полученный результат $Z\,[\eta_A, \eta_B, \ldots]$.

Функции Грина получаются из функционала $Z[\eta_A, \eta_B, \ldots]$, если взять функциональные производные от этого функционала по переменным, а затем положить все функции η равными нулю:

$$\langle q'' | \mathrm{T}(\hat{A}(t_1)\hat{B}(t_2)\ldots) | q' \rangle =$$
$$= \frac{\delta}{\delta\eta_A(t_1)} \cdot \frac{\delta}{\delta\eta_B(t_2)} \ldots Z[\eta_A, \eta_B, \ldots] |_{\eta=0}. \quad (16.23)$$

Не встречает затруднений обобщение формализма континуального интеграла на системы с любым конечным числом степеней свободы.

Действие механической системы с n степенями свободы имеет вид

$$S[t', t''] = \int \left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H(q,p) \right) dt, \quad (16.24)$$

где q^i — i-я каноническая координата; p_i — сопряженный с ней канонический импульс; $H(q, p)$ — гамильтониан.

Континуальный интеграл для матричного элемента оператора эволюции есть предел конечномерного интеграла, получаемого из (16.10) в результате замены

$$(2\pi)^{-N} \to (2\pi)^{-Nn}; \; dq_k \to \prod_{i=1}^{n} dq_k^i; \; dp_k \to \prod_{i=1}^{n} dp_{i,k}, \quad (16.25)$$

где $q_k{}^i$ — значение i-й координаты в точке τ_k ($k = 1, \ldots, \ldots, N-1$); $p_{i,k}$ — значение i-го импульса на интервале (τ_{k-1}, τ_k). При этом следует считать фиксированными значениями всех координат $q^1, \ldots, q^n$ на обоих концах временного интервала $[t', t'']$. Определенный таким образом континуальный интеграл обозначим символом

$$\int\limits_{q(t')=q'}^{q(t'')=q''} \exp(iS) \prod_t \prod_{i=1}^{n} \frac{dq^i(t)\, dp_i(t)}{2\pi}. \quad (16.26)$$

Функции Грина определяются формулами, совершенно аналогичными приведенным выше для системы с одной степенью свободы.

Информация, содержащаяся в функциях Грина, оказывается вполне достаточной для определения оператора рассеяния (S-матрицы). Соответствующие формулы (формулы приведения) хорошо известны. Они даны в § 18 и использованы далее при построении S-матрицы в теории калибровочных полей.

§ 17. МОДИФИКАЦИЯ КОНТИНУАЛЬНОГО ИНТЕГРАЛА ДЛЯ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ

Покажем, как выглядит континуальный интеграл для конечномерной механической системы со связями, задаваемой каноническими переменными q, p, функцией Гамильтона $H(q, p)$ и связями $\varphi^a(q, p)$, которые удовлетворяют условиям (15.20), (15.21) (см. § 15). Подберем дополнительные условия $\chi_a(q, p)$ так, чтобы были выполнены соотношения (15.27) и (15.28). Наше основное утверждение состоит в том, что матричный элемент оператора эволюции дается континуальным интегралом

$$\int \exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}^i - H\right)dt\right\}\prod_t d\mu\,(q(t), p(t)), \qquad (17.1)$$

в котором мера интегрирования определена формулой

$$d\mu(t) = (2\pi)^{m-n}\det\|\{\chi_a, \varphi^b\}\|\prod_a \delta(\chi_a)\delta(\varphi^a)\prod_{i=1}^{n} dq^i(t)\,dp_i(t). \qquad (17.2)$$

Для доказательства приведем интеграл (17.1) с мерой (17.2) к интегралу вида (16.26), в котором интегрирование ведется по траекториям в физическом фазовом пространстве Γ^*. С этой целью перейдем к описанным в § 15 координатам q^a, q^*, p_a, p^*. При этом интеграл (17.1) превращается в интеграл с другой мерой:

$$d\tilde{\mu}\,(q(t), p(t)) = (2\pi)^{m-n}\det\left\|\frac{\partial\varphi^a}{\partial q^b}\right\|\prod_a \delta(p_a)\,\delta(\varphi^a)\times$$
$$\times\prod_{i=1}^{n} dq^i\,dp_i, \qquad (17.3)$$

которую можно переписать еще так:

$$\prod_a \delta(p_a)\,\delta\,[q^a - q^a(q^*, p^*)]\,dq^a\,dp_a \prod_{j=1}^{n-m}\frac{dq^{*j}\,dp_j^*}{2\pi}. \qquad (17.4)$$

Интегрирование по q^a и p_a снимается δ-функциями. В результате интеграл принимает вид

$$\int \exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left(\sum_i p_i^*\,\dot{q}^{*i} - H^*(q^*, p^*)\right)dt\right\}\prod_t\prod_{j=1}^{n-m}\frac{dq^{*j}\,dp_j^*}{2\pi}, \qquad (17.5)$$

буквально совпадающий с (16.26). Поэтому можно считать формулы (17.1) и (17.2) доказанными.

Заметим, что интеграл (17.1) можно переписать в виде

$$\int \exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left(\sum_i p_i\dot{q}^i - H - \sum_a \lambda_a\varphi^a\right)dt\right\}\times$$

$$\times\prod_t \det\|\{\chi_a,\varphi^b\}\|(2\pi)^{m-n}\prod_a\delta(\chi^a)\prod_{i=1}^{n} dq^i\,dp_i\prod_b\frac{\Delta t\,d\lambda_b}{2\pi}. \tag{17.6}$$

Символ $\prod_b \Delta t d\lambda_b/2\pi$ показывает, что в допредельном выражении фигурируют интегралы по переменным $\lambda_b(\tau_i)$ (τ_i — точки деления интервала $[t', t'']$) вида

$$\int\exp\left[-i\sum_{i,a}\lambda_a(t_i)\varphi^a(q(t_i), p(t_i))\Delta t\right]\prod_{i,b} dt\,d\lambda_b/2\pi. \tag{17.7}$$

Выражение (17.7) сводится к произведению δ-функций:

$$\prod_{i,a}\delta\left[\varphi^a(q(t_i), p(t_i))\right]. \tag{17.8}$$

Это означает, что в интеграле (17.6) можно провести интегрирование по λ_b и вернуться к интегралу (17.1).

Теперь покажем, что континуальный интеграл (17.1) не зависит от выбора дополнительных условий. Пусть $\delta\chi_a$ — бесконечно малое изменение этих условий. С точностью до линейной комбинации связей можно представить $\delta\chi_a$ как результат инфинитезимального канонического преобразования в Г, генератор которого есть линейная комбинация связей. Действительно, $\delta\chi_a$ можно представить в виде

$$\delta\chi_a = \{\Phi, \chi_a\} + \sum_b c_{ab}\varphi^b, \tag{17.9}$$

где

$$\Phi = \sum_a h_a\varphi^a, \tag{17.10}$$

а в качестве h_a можно взять решение системы уравнений

$$\sum_b\{\chi_a, \varphi^b\}h_b = -\delta\chi_a, \tag{17.11}$$

которая в силу условия (15.27) имеет однозначное решение.

При описанном каноническом преобразовании связи заменяются своими линейными комбинациями

$$\delta\varphi^a=\sum_b A_b^a\varphi^b, \tag{17.12}$$

где

$$A_b^a=\{h_b,\varphi^a\}-\sum_c h_c c_b^{ac}. \tag{17.13}$$

Величины, участвующие в интеграле (17.1) и мере (17.2), изменяются следующим образом:

$$\chi_a\to\chi_a+\delta\chi_a,\ \varphi^a=\varphi^a+\sum_b A_b^a\varphi^b,\ H\to H;$$

$$\prod_a\delta(\varphi^a)\to\prod_a\delta(\varphi^a+\delta\varphi^a)=\left(1+\sum_a A_a^a\right)^{-1}\prod_a\delta(\varphi^a);$$

$$\det\|\{\chi_a,\varphi^b\}\|\to\det\|\{\chi_a+\delta\chi_a,\varphi^b+\delta\varphi^b\}\|=$$

$$=\det\|\{\chi_a+\delta\chi_a,\varphi^b\}\|\times\det\left\|\frac{\partial(\varphi^a+\delta\varphi^a)}{\partial\varphi^b}\right\|=$$

$$=\det\|\{\chi_a+\delta\chi_a,\varphi^b\}\|\left(1+\sum_a A_a^a\right).$$

В результате канонического преобразования мера интегрирования отличается от меры (17.2) лишь заменой $\chi_a\to\chi_a+\delta\chi_a$. Это и доказывает независимость интеграла (17.1) от выбора дополнительных условий.

Континуальные интегралы для функции Грина определим, задав производящий функционал как среднее по мере (17.2) от выражения

$$\exp\left\{i\int_{t'}^{t''}\left(\sum_i p_i\dot{q}^i-H+\eta_A A(q,p)+\eta_B B(q,p)+\ldots\right)\right\}dt, \tag{17.14}$$

где A, B — функции канонических переменных; η_A,η_B — произвольные «пробные» функции времени t.

Полученные здесь континуальные интегралы для конечномерных систем обобщим далее на теорию поля, описывающую системы с бесконечным числом степеней свободы.

§ 18. КОНТИНУАЛЬНЫЙ ИНТЕГРАЛ В КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

На теорию поля можно смотреть как на теорию механической системы с бесконечным числом степеней свободы. При этом калибровочные поля оказываются бесконечномерными аналогами механических систем со связями.

Формализм континуального интегрирования в квантовой теории поля возникает, если записать классическое действие поля в гамильтоновой форме и построить затем континуальный интеграл по фазовому пространству нашей бесконечномерной системы. В случае калибровочных полей ответ будет даваться аналогом интеграла, полученного в § 17 при квантовании систем со связями.

Можно рассуждать несколько иначе, исходя из действия, не записанного в явно гамильтоновой форме, и рассматривая континуальный интеграл «по всем полям». Такой подход не требует приведения действия к гамильтонову виду и позволяет построить явно релятивистскую теорию*. Объяснение и обоснование метода интегрирования по всем полям можно дать в том случае, когда удается проеобразовать получающиеся здесь континуальные интегралы к интегралам гамильтонова вида. Именно так мы и будем поступать.

Рассмотрим определение и правила работы с континуальными интегралами по всем полям на примере теории скалярного поля с действием

$$S=\int d^4x\left(\frac{1}{2}g_0^{\mu\nu}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\mu}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial x^\nu}-\frac{m^2}{2}\varphi^2-\frac{g}{3!}\varphi^3\right). \qquad (18.1)$$

Здесь $\varphi(x)$ — зависящие от точки $x(x^0, x^1, x^2, x^2)$ псевдоевклидова пространства V_4 полевые функции; $g_0^{\mu\nu}$ — диагональный тензор Минковского $[1, -1, -1, -1]$. Действие S есть разность квадратичного по полю φ функционала S_0 (действия свободного поля) и интеграла от $\varphi^3g/3!$, описывающего «самодействие» с константой связи g. Множитель $1/3!$ перед $g\varphi^3$ выбран из соображений удобства.

При определении континуального интеграла часто используется конечномерная аппроксимация.

Возьмем в пространстве V_4 большой кубический объем V, разделенный на N^4 равных маленьких кубиков v_i ($i = 1, \ldots, N^4$). Аппроксимируем функцию $\varphi(x)$ в объеме V функцией, постоянной в объемах v_i, а первые производные $\partial\varphi/\partial x^\mu$ — конечными разностями:

$$\frac{1}{\Delta l}\left[\varphi\left(x_\nu+\delta_{\mu\nu}\Delta l\right)-\varphi\left(x_\nu\right)\right], \qquad (18.2)$$

где Δl — длина ребра кубика v_i. Аппроксимирующая кусочнопостоянная функция $\varphi(x)$ определяется своими значениями в объемах v_i.

---

* При гамильтоновом подходе релятивистская ивариантность часто ие является очевидной и требует специальиого доказательства.

Рассмотрим конечномерный интеграл

$$\int \exp(\mathrm{i}S) \prod_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^4} n(x)\, d\varphi(x) \tag{18.3}$$

по значениям функции $\varphi(x)$ в объемах v_i. Здесь S — интеграл действия (18.1) для аппроксимирующей функции φ с аппроксимацией (18.2) для ее первых производных; $n(x)$ — не зависящий от $\varphi(x)$ множитель, выбранный так, чтобы при $V \to \infty$, $v_i \to 0$ интеграл (18.3) имел асимптотический вид $\exp(CV)$ с не зависящей от V константой C. Обычно $n(x)$ имеет вид

$$n(x) = a(\Delta l)^{\alpha} \tag{18.4}$$

с постоянными (не зависящими от x) константами a и α.

Конечномерные интегралы типа (18.3) фигурируют в допредельных выражениях при определении встречающихся в теории поля континуальных интегралов.

Не останавливаясь на записи в виде континуальных интегралов матричных элементов оператора эволюции, перейдем сразу к функциям Грина.

Функции Грина являются, по определению, средними от произведения двух или более полевых функций с весом $\exp(\mathrm{i}S)$. Например, двухточечная функция определяется формулой

$$G(x, y) \equiv -\mathrm{i}\langle \varphi(x)\varphi(y)\rangle =$$

$$= -\mathrm{i} \lim_{\substack{V \to \infty \\ v_i \to 0}} \frac{\int \exp(\mathrm{i}S)\varphi(x)\varphi(y) \prod\limits_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^4} n(x)\, d\varphi(x)}{\int \exp(\mathrm{i}S) \prod\limits_{\substack{i=1 \\ x \in v_i}}^{N^4} n(x)\, d\varphi(x)}. \tag{18.5}$$

Стоящий в правой части этой формулы предел обозначим символом

$$\frac{\int \exp(\mathrm{i}S)\varphi(x)\varphi(y) \prod\limits_{x} n(x)\, d\varphi(x)}{\int \exp(\mathrm{i}S) \prod\limits_{x} n(x)\, d\varphi(x)}. \tag{18.6}$$

Функции Грина можно считать известными, если известен производящий функционал

$$Z[\eta] = \frac{\int \exp i\left(S + \int \eta(x)\,\varphi(x)\,d^4x\right)\prod\limits_x n(x)\,d\varphi(x)}{\int \exp(iS)\prod\limits_x n(x)\,d\varphi(x)}. \tag{18.7}$$

В частности, двухточечная функция Грина дается формулой

$$G(x, y) = i\,\frac{\delta}{\delta\eta(x)}\cdot\frac{\delta}{\delta\eta(y)}\,Z[\eta]\,\Big|_{\eta=0}. \tag{18.8}$$

Функционал $Z[\eta]$ в теории свободного поля нетрудно вычислить. Для этого при интегрировании по φ в числителе (18.7) следует сделать сдвиг

$$\varphi(x) \to \varphi(x) + \varphi_0(x), \tag{18.9}$$

подобрав $\varphi_0(x)$ из условия сокращения в показателе экспоненты членов, линейных по φ. Это приводит к уравнению

$$-(\Box + m^2)\,\varphi_0(x) = -\eta(x) \tag{18.10}$$

для $\varphi_0(x)$. Решение уравнения (18.10) выражается через функцию Грина $D(x, y)$ оператора $(\Box - m^2)$ формулой

$$\varphi_0(x) = -\int D(x, y)\,\eta(y)\,d^4y. \tag{18.11}$$

Напомним, что функция Грина есть решение уравнения

$$(-\Box_x - m^2)\,D(x, y) = \delta(x - y) \tag{18.12}$$

с δ-функцией в правой части.

После сдвига (18.9) интеграл в числителе правой части (18.7) сводится к произведению интеграла в знаменателе на множитель

$$\exp\left\{-\frac{i}{2}\int \eta(x)\,D(x, y)\,\eta(y)\,d^4x\,d^4y\right\}, \tag{18.13}$$

который и дает значение производящего функционала $Z[\eta]$ в случае свободного поля. Легко убедиться, что двухточечная функция (обозначим ее $G_0(x, y)$), вычисленная согласно формуле (18.8), есть функция Грина оператора $(-\Box - m^2)$:

$$G_0(x, y) = D(x, y). \tag{18.14}$$

Эта функция определена уравнением (18.12) не однозначно, а лишь с точностью до аддитивной добавки — решения однородного уравнения

$$(-\Box - m^2) f = 0. \qquad (18.15)$$

Существует, однако, наиболее естественный выбор для функции $D(x, y)$, в пользу которого говорят многие соображения. Приведем одно из них.

Выражение $\exp(iS)$ есть осциллирующий функционал от $\varphi(x)$. Рассмотрим вместо него функционал $\exp(iS_\varepsilon)$, где S_ε — зависящее от неотрицательного параметра ε «комплексное действие»

$$S_\varepsilon = \frac{1}{2} \int \varphi (-\Box - m^2 + i\varepsilon) \varphi d^4 x, \qquad (18.16)$$

подобранное таким образом, чтобы функционал $\exp(iS_\varepsilon)$ был по абсолютной величине меньше единицы и исчезал при $\int \varphi^2 d^4 x \to \infty$.

Результаты получаются однозначными, если использовать при определении функций Грина «исправленное» действие S_ε, а затем в ответах перейти к пределу $\varepsilon \to +0$. В частности, $D(x, y)$ становится пределом функции Грина оператора $(-\Box - m^2 + i\varepsilon)$. Последняя определена однозначно. Она зависит от разности $(x - y)$ и дается формулой

$$D(x-y) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{\exp(ik(x-y))}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} d^4 k. \qquad (18.17)$$

Предел этой функции при $\varepsilon \to +0$ называется *причинной* или *фейнмановской функцией Грина* и обозначается $D_F(x - y)$.

Итак, для среднего от произведения двух полей $\varphi(x)$ и $\varphi(y)$ в теории свободного поля имеем

$$\langle \varphi(x) \varphi(y) \rangle = iD_F(x-y). \qquad (18.18)$$

Среднее от произведения любого конечного числа функций $\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n)$ в теории свободного поля получим, взяв n-кратную функциональную производную от выражения (18.13) и положив затем $\eta = 0$.

Среднее от нечетного числа функций φ равно, очевидно, нулю. Для среднего от четного числа функцией нетрудно вывести утверждение, известное под названием *теоремы Вика*. Среднее от произведения четного числа функций $\varphi(x_1)$

$\ldots\varphi(x_{2n})$ равно сумме произведений всевозможных попарных средних. Например,

$$\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\varphi(x_3)\varphi(x_4)\rangle=\langle\varphi(x_1)\varphi(x_2)\rangle\langle\varphi(x_3)\varphi(x_4)\rangle+$$
$$+\langle\varphi(x_1)\varphi(x_3)\rangle\langle\varphi(x_2)\varphi(x_4)\rangle+$$
$$+\langle\varphi(x_1)\varphi(x_4)\rangle\langle\varphi(x_2)\varphi(x_3)\rangle. \tag{18.19}$$

Доказательство для среднего от $2n$ функций получим, продифференцировав $2n$ раз функционал (18.13) и затем положив $\eta=0$.

Используется теорема Вика при построении формальной теории возмущений и связанной с ней диаграммной техники. Покажем, как строится теория возмущений для скалярного поля с лагранжианом (18.1). Представим функционал $\exp(\mathrm{i}S)$ в виде

$$\exp(\mathrm{i}S)=\exp(\mathrm{i}S_0)\exp(\mathrm{i}S_1), \tag{18.20}$$

где S_0 — действие свободного поля, а член S_1

$$S_1=-(g/3!)\int\varphi^3(x)\,d^4x \tag{18.21}$$

описывает самодействие. Теория возмущений основана на разложении $\exp(\mathrm{i}S_1)$ под знаком континуального интеграла в ряд по g:

$$\exp(\mathrm{i}S_1)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}g)^n}{n!\,(3!)^n}\int\varphi^3(x_1)\ldots\varphi^3(x_n)\,d^4x_1\ldots d^4x_n \tag{18.22}$$

и последующем почленном интегрировании получающихся рядов. Например, для двухточечной функции получается представление в виде частного двух рядов

$$G(x,y)=-\mathrm{i}\,\frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(-\mathrm{i}g)^n}{n!\,(3!)^n}\int[\exp(\mathrm{i}S_0)\varphi(x)\varphi(y)\int\varphi^3(x_1)\ldots\varphi^3(x_n)\times}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{-\mathrm{i}g^n}{n!(3!)^n}\int[\exp(\mathrm{i}S_0)\,\varphi^3(x_1)\ldots\varphi^3(x_n)\times}\rightarrow$$

$$\leftarrow\frac{\times d^4x_1\ldots d^4x_n]\ \prod\limits_x n(x)\,d\varphi(x)}{\times d^4x_1\ldots d^4x_n\ \prod\limits_x n(x)\,d\varphi(x)}. \tag{18.23}$$

Если разделить числитель и знаменатель правой части (18.23) на выражение

$$\int \exp(iS_0) \prod_x n(x)\, d\varphi(x), \tag{18.24}$$

то задача сводится к выполнению средних типа

$$\langle \varphi^3(x_1) \dots \varphi^3(x_n) \rangle_0 \equiv$$

$$\equiv \frac{\int \exp(i\, S_0)\, \varphi^3(x_1) \dots \varphi^3(x_n) \prod_x n(x)\, d\varphi(x)}{\int \exp(iS_0) \prod_x n(x)\, d\varphi(x)} \tag{18.25}$$

в знаменателе правой части (18.23) и к вычислению средних

$$\langle \varphi(x)\, \varphi(y)\, \varphi^3(x_1) \dots \varphi^3(x_n) \rangle_0 \tag{18.26}$$

в числителе.

Здесь нам и понадобится теорема Вика, которая представляет средние $\langle \dots \rangle_0$ в виде суммы всевозможных попарных средних, позволяя вычислить любой член рядов в (18.23). Фейнман указал на то, что каждому члену рассматриваемых рядов можно сопоставить рисунок — диаграмму. Теория возмущений, каждому члену которой сопоставляется

Рис. 3

диаграмма, получила название *диаграммной техники* (см., например, [20]). В рассматриваемой теории скалярного поля с самодействием можно прийти к диаграммам следующим образом.

Сопоставим среднему (18.25) диаграмму в виде n точек (каждая с тремя отростками), отображающих точки $x_1, \dots,$ $\dots, x_n$ в V_4. Такая диаграмма изображена на рис. 3 для случая $n = 4$.

Среднему (18.26) сопоставим диаграмму, получающуюся из соответствующей диаграммы для среднего (18.25) добавлением двух точек (каждая с одним отростком), изображающих точки и x и y в V_4 (рис. 4 для $n = 4$). Введенные таким образом диаграммы назовем *преддиаграммами* в отличие от тех, которые появятся далее. Преддиаграммы обладают симметрией относительно перестановки точек $x_1, \ldots, x_n$, а также относительно перестановки отростков в каждой точке. Поэтому можно говорить о группе симметрии G_n n-точечной преддиаграммы порядка

$$R_n = n!\,(3!)^n. \qquad (18.27)$$

Симметрия преддиаграмм отражает симметрию соответствующих им средних (18.25), (18.26), не меняющихся при

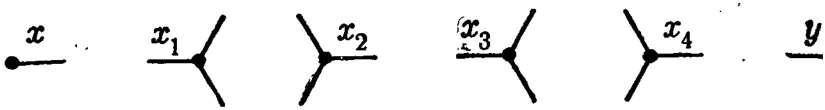

Рис. 4

перестановке аргументов $x_1, \ldots, x_n$ и при перестановке под знаком среднего в каждой тройке полевых функций $\varphi(x_i)\varphi(x_i)\varphi(x_i) = \varphi^3(x_i)$.

Заметим, что выражение $(R_n)^{-1}$ (вместе с $(-ig)^n$) фигурирует в рядах (18.23) как множитель перед средними $\langle \ldots \rangle_0$.

Согласно теореме Вика, средние (18.25), (18.26) являются суммами произведений всевозможных попарных средних. Каждому фиксированному способу образования попарных средних сопоставим диаграмму, соединив линией

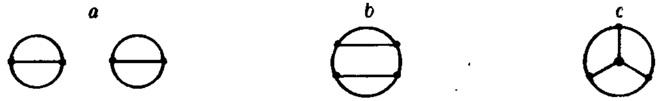

Рис. 5

каждую пару точек x_i и x_j преддиаграммы, если среди попарных средних есть среднее $\langle \varphi(x_i)\varphi(x_j) \rangle_0$. Число линий равно, очевидно, числу пар, т. е. уменьшенному вдвое числу усредняемых полевых функций.

Все диаграммы, возникающие из преддиаграммы рис. 3, представлены на рис. 5, а все возникающие из преддиаграммы рис. 4 — на рис. 6.

Соответствующее диаграмме выражение получится, если произведение попарных средних проинтегрировать по $x_1, \ldots, \ldots, x_n$, умножив результат на $(-ig)^n\ R_n^{-1}$ и на число способов, которыми данная диаграмма получается из преддиаграммы. Нетрудно сообразить, что указанное число способов есть отношение $R_n/r_{n,d}$ порядка R_n группы симметрии преддиаграммы к порядку $r_{n,d}$ группы симметрии диаграммы, полученной из преддиаграммы соединением ее вершин линиями. В результате численный множитель перед интегралом по $x_1, \ldots, x_n$ становится равным $(-ig)^n r_{n,d}^{-1}$.

Полученные правила соответствия удобно переформулировать следующим образом. Сопоставим каждой линии, сое-

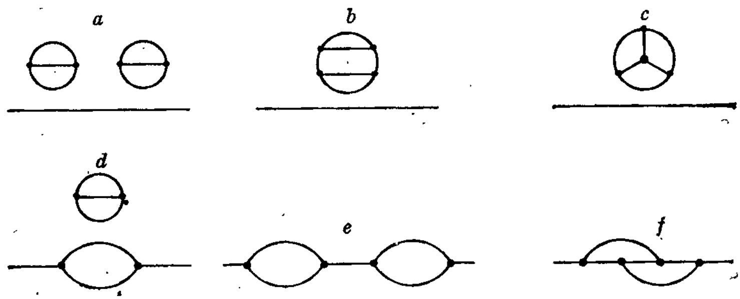

Рис. 6

диняющей точки x_i и x_j, функцию Грина $D_F(x_i - x_j)$, отличающуюся от среднего $\langle\varphi(x_i)\varphi(x_j)\rangle_0$ множителем i, а вершине — константу связи g:

$D_F(x_i - x_j)$

g

(18.28)

Выражение для диаграммы возникает, если произведение выражений, соответствующих элементам диаграммы — вершинам и линиям, проинтегрировать по координатам вершин и умножить получившийся результат на $(i)^{l-n-1}\, r_{n,d}^{-1}$, где l — число линий диаграммы; n — число ее вершин; $r_{n,d}$ — порядок группы симметрии.

Наличие множителя симметрии $r_{n,d}^{-1}$ не всегда четко отмечается в литературе. Возможно, это вызвано тем, что в квантовой электродинамике (единственной теории, в которой для сравнения с экспериментом необходимо учитывать высшие диаграммы) этот множитель равен единице для всех диаграмм, кроме вакуумных, которые при описании физических эффектов можно не рассматривать.

При вычислении вкладов от различных диаграмм в функцию Грина всегда можно ограничиться связными диаграммами, т. е. такими, в которых можно пройти из любой вершины диаграммы в любую другую вершину, двигаясь по линиям диаграммы. Для доказательства заметим прежде всего, что диаграммы, соответствующие ряду в знаменателе формулы (18.23), дают суммарный вклад вида

$$\exp \sum_i D_i^c, \tag{18.29}$$

где $\sum_i D_i{}^c$ — сумма вкладов всех связных вакуумных диаграмм (без внешних линий). Формула (18.29) следует из того, что диаграмма, состоящая из n_1 связных компонент одного сорта, n_2 связных компонент второго сорта и т. д. имеет множителем симметрии

$$r^{-1} = \left[\prod_i (n_i!)\, r_i^{n_i}\right]^{-1}, \tag{18.30}$$

где r_i — порядок группы симметрии связной компоненты i-го сорта. Множители $(n_i!)^{-1}$ отражают симметрию диаграммы относительно перестановок одинаковых компонент и приводят к показательной функции (18.29). Остается заметить, что сумма вкладов диаграмм в числитель (18.23) сводится к произведению суммы вкладов связных диаграмм на множитель (18.29).

В учебниках по квантовой теории поля (см., например, [20—22]) диаграммная техника строится обычно в рамках операторного метода. Приведенный здесь на примере скалярного поля ее вывод в формализме континуального интеграла представляется более естественным. Отметим, что сам Фейнман пришел к своим диаграммам именно через континуальный интеграл.

Для конкретных расчетов более удобна диаграммная техника в импульсном пространстве. Она возникает, если перейти к преобразованию Фурье $\tilde{\varphi}(k)$ функций поля $\varphi(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \exp(\mathrm{i}kx)\tilde{\varphi}(k)\, d^4k \tag{18.31}$$

и рассматривать в качестве функций Грина средние вида

$$\langle \tilde{\varphi}(k_1) \ldots \tilde{\varphi}(k_n) \rangle. \tag{18.32}$$

Выражения, соответствующие элементам диаграмм — вершинам и линиям, принимают вид

$$\delta(k_1+k_2)(k_1^2-m^2+\mathrm{i}\varepsilon)^{-1}$$

$$g\delta(k_1+k_2+k_3). \qquad (18.33)$$

Вклад конкретной диаграммы в импульсной диаграммной технике получится, если произведения выражений, соответствующих, согласно (18.23), ее элементам, проинтегрировать по всем внутренним импульсам и умножить результат на $r_{n,d}^{-1}(\mathrm{i}/(2\pi^4))^{l-n-1}$, где n—число вершин; l — число линий; $r_{n,d}$ — порядок группы симметрии диаграммы.

Отметим, что функции Грина в импульсном пространстве содержат множителем δ-функцию $\delta(\sum\limits_i k_i)$, обеспечивающую сохранение 4-импульса

$$G(k_i)=M(k_i)\,\delta\left(\sum_i k_i\right). \qquad (18.34)$$

Знание функций Грина позволяет вычислить элементы S-матрицы по формуле

$$S(k_1,\ldots,k_n)=\lim_{k_i^2\to m_i^2} M(k_i)\left\{\prod_{i=1}^{n}(k_i^2-m_i^2)\times\right.$$
$$\left.\times\,\theta(\pm k_i^0)\,|2k_i^0|^{-\frac{1}{2}}(2\pi)^{-\frac{3}{2}}\right\}. \qquad (18.35)$$

Доказательство формулы (18.35) можно найти во многих учебниках по квантовой теории поля, и здесь на нем останавливаться мы не будем.

Как уже отмечалось, объяснение и обоснование развитому формализму континуального интегрирования в квантовой теории поля можно дать в том случае, когда удается преобразовать полученные здесь континуальные интегралы к интегралам в гамильтоновой форме, являющимся обобщением на теорию поля интегралов, полученных выше при квантовании конечномерных механических систем.

Продолжая рассматривать пример скалярного поля, запишем в гамильтоновой форме континуальный интеграл

$$\int \exp(iS) \prod_x n(x)\, d\varphi(x). \tag{18.36}$$

Для этого рассмотрим интеграл

$$\int \exp(iS[\pi, \varphi]) \prod_x n(x)\, d\varphi(x)\, d\pi(x), \tag{18.37}$$

где выражение

$$S[\pi, \varphi] = \int \left(\pi \partial_0 \varphi - \frac{1}{2}\pi^2 - \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{m}{2}\varphi^2 - \frac{g}{3!}\varphi^3 \right) d^4x \tag{18.38}$$

совпадает с действием (18.1) при замене $\pi(x)$ на $\partial_0\varphi(x)$. Действие (18.38) имеет гамильтонов вид. Соответствующая функция Гамильтона есть

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\pi^2 + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 + \frac{m^2}{2}\varphi^2 + \frac{g}{3!}\varphi^3 \right), \tag{18.39}$$

где функции $\pi(x)$, $\varphi(x)$ имеют смысл плотности импульса и сопряженной ему координаты. Убедимся, что интеграл (18.37) по переменным $\varphi(x)$ и $\pi(x)$ сводится к интегралу (18.36) по всем полям. Для этого заметим, что интеграл по π в формуле (18.37) можно взять в явном виде, если сделать сдвиг

$$\pi(x) \to \pi(x) + \partial_0\varphi(x), \tag{18.40}$$

после которого интеграл (18.37) превращается в произведение интеграла (18.36) по φ и интеграла по π:

$$\int \exp\left(-\frac{i}{2} \int \pi^2(x)\, d^4x \right) \prod_x d\pi(x), \tag{18.41}$$

сводящегося к произведению нормировочных множителей. В формулах для функций Грина — средних от произведения нескольких полей φ — интегралы типа (18.41) входят в числитель и знаменатель и потому сокращаются.

Итак, нам удалось привести континуальный интеграл в теории скалярного поля к гамильтонову виду, искусственно введя интеграл по новой переменной — каноническому импульсу. Такой прием будет далее использован при рассмотрении конкретных примеров в теории калибровочных полей.

Схема континуального интегрирования по всем полям дает метод квантования бозе-полей. В операторном формализме такое квантование сводится к замене полевых функций операторами с бозевскими перестановочными соотношениями.

Квантование ферми-полей можно реализовать с помощью континуального интеграла по антикоммутирующим переменным. Подробное изложение метода интегрирования по антикоммутирующим полям содержится, например, в книге Ф. А. Березина «Метод вторичного квантования» [23]. Нам потребуются следующие основные факты.

Интеграл по ферми-полям (по бесконечной грассмановой алгебре с инволюцией) определяется как предел интеграла по алгебре с единицей и с конечным четным числом образующих x_i, x_i^* ($i=1, \ldots, n$) с перестановочными соотношениями:

$$\left.\begin{aligned} x_i x_j + x_j x_i = 0; \quad x_i^* x_j^* + x_j^* x_i^* = 0;\\ x_i x_j^* + x_j^* x_i = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (18.42)$$

Любой элемент такой алгебры $f(x, x^*)$ есть полином вида

$$f(x, x^*) = \sum_{a_i,\, b_i = 0,1} c_{a_1 \ldots a_n,\, b_1 \ldots b_n} \times$$
$$\times (x_1)^{a_1} \ldots (x_n)^{a_n} (x_1^*)^{b_1} \ldots (x_n^*)^{b_n} \qquad (18.43)$$

с коэффициентами $c_{a_1 \ldots a_n,\, b_1 \ldots b_n}$ из поля комплексных чисел. В силу перестановочных соотношений (18.42) степени образующих выше первой исчезают, и можно ограничиться порядком расположения сомножителей, принятым в формуле (18.43).

Операция инволюции действует на элемент (18.43) по правилу

$$f \to f^* = \sum_{a_i,\, b_i = 0,1} \bar{c}_{a_1 \ldots a_n,\, b_1 \ldots b_n} (x_n)^{b_n} \ldots (x_1)^{b_1} \times$$
$$\times (x_n^*)^{a_n} \ldots (x_1^*)^{a_1}. \qquad (18.44)$$

На описанной алгебре можно ввести интеграл

$$\int f(x, x^*)\, dx^*\, dx \equiv \int f(x_1, \ldots, x_n, x_1^*, \ldots, x_n^*) \times$$
$$\times dx_1^*\, dx_1 \ldots dx_n^*\, dx_n, \qquad (18.45)$$

определив его соотношениями

$$\int dx_i = 0; \quad \int dx_i^* = 0; \quad \int x_i\, dx_i = 1; \quad \int x_i^*\, dx_i^* = 1 \qquad (18.46)$$

и требованием, чтобы символы dx_i, dx_i^* антикоммутировали друг с другом и с образующими, если, кроме того, наложить естественное условие линейности

$$\int (c_1 f_1 + c_2 f_2)\, dx^*\, dx = c_1 \int f_1\, dx^*\, dx + c_2 \int f_2\, dx^*\, dx. \qquad (18.47)$$

При интегрировании суммы (18.43) отличным от нуля оказывается лишь вклад от слагаемого, у которого $a_i = b_i = 1$ для всех $i = 1, \dots, n$.

В дальнейшем окажутся полезными две формулы:

$$\int \exp(-x^* Ax)\, dx^*\, dx = \det A; \qquad (18.48)$$

$$\frac{\int \exp(-x^* Ax + \eta^* x + x^* \eta)\, dx^*\, dx}{\int \exp(-x^* Ax)\, dx^*\, dx} = \exp(\eta^* A^{-1} \eta), \qquad (18.49)$$

где

$$x^* Ax = \sum_{i,\,k} a_{ik}\, x_i^*\, x_k \qquad (18.50)$$

есть квадратичная форма образующих x_i, x_i^*, соответствующая матрице A. Выражения

$$\eta^* x = \sum_i \eta_i^*\, x_i, \quad x^* \eta = \sum_i x_i^*\, \eta_i \qquad (18.51)$$

являются линейными формами образующих x_i, x_i^*, коэффициенты которых η_i, η_i^* антикоммутируют друг с другом и с образующими. Элементы η_i, η_i^* вместе с образующими x_i, x_i^* можно считать образующими более широкой алгебры. Выражение $\eta^* A^{-1} \eta$ в формуле (18.49) есть квадратичная форма матрицы A^{-1}, обратной матрице A.

Показательная функция в подынтегральных выражениях формул (18.48), (18.49) определяется разложением в ряд, в котором в силу антикоммутационных соотношений (18.42) лишь несколько первых членов разложения отличны от нуля.

Формулу (18.48) нетрудно доказать, заметив, что вклад в интеграл дает лишь n-й член разложения показательной функции. Формула (18.49) доказывается сдвигом $x \to x - \tilde{\eta}$, $x^* \to x^* + \tilde{\eta}^*$, уничтожающим линейную форму по x, x^* в подынтегральной экспоненте.

Подробное доказательство и некоторые обобщения формул (18.48), (18.49) можно найти в упомянутой монографии Ф. А. Березина.

§ 19. КВАНТОВАЯ ТЕОРИЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Изложим теперь общий способ квантования калибровочных полей в формализме континуального интеграла по всем полям.

Напомним, что калибровочное поле есть связность расслоенного пространства, базой которого служит пространство—время V_4, а слоем является конечномерное пространство представлений некоторой группы G_0. Обозначим калибровочное поле A, а его компоненты A^a_μ, где $\mu = 0, 1, 2, 3$ — пространственно-временной и a — «изотопический» индексы. Калибровочная группа G есть прямое произведение групп G_0, действующих в каждой точке V_4:

$$G = \prod_x G_0(x). \tag{19.1}$$

Пусть Ω — элемент калибровочной группы, являющийся функцией на V_4 со значениями в G_0. Обозначим A^Ω результат действия элемента Ω на поле A. Совокупность полей A^Ω, когда A фиксировано, а Ω пробегает калибровочную группу, называется обычно *орбитой калибровочной группы.*

Как мы видели, квантование поля с действием S сводится к усреднению функционала $\exp(iS)$ по всем полям. В теории калибровочных полей действие $S[A]$ калибровочно инвариантно, т. е. одинаково для всех полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями:

$$S[A^\Omega[= S[A]. \tag{19.2}$$

Другими словами, действие есть функционал на классах полей, получающихся друг из друга калибровочными преобразованиями. В этой ситуации естественно возникает задача перейти от интегрирования по всем полям к интегрированию по классам полей. Ниже излагается один из возможных подходов к этой задаче.

Для построения континуального интеграла необходимо выбрать меру на многообразии всех полей A. Простейшая мера —

$$d\mu[A] = \prod_x \prod_{\mu,a} dA^a_\mu(x), \tag{19.3}$$

где символ $\prod_x$ был определен выше. Назовем эту меру локальной. В ряде конкретных примеров из теории поля мера (19.3) действительно обладает свойством калибровочной инвариантности:

$$d\mu\,[A^{\Omega}] = d\mu\,[A]. \tag{19.4}$$

Инвариантность действия $S[A]$ и меры $d\mu[A]$ относительно калибровочных преобразований $A \to A^{\Omega}$ приводит к тому, что соответствующий континуальный интеграл

$$\int \exp\left(iS\,[A]\right) d\mu\,[A] \tag{19.5}$$

становится пропорциональным «объему орбиты», т. е. континуальному интегралу

$$\int \prod_x d\Omega\,(x) \tag{19.6}$$

по калибровочной группе G, в котором $\prod_x d\Omega(x)$ обозначена инвариантная мера на группе G — произведение мер на группах G_0, действующих в каждой точке V_4.

Наш подход к интегрированию по классам состоит в явном выделении этого множителя из континуального интеграла. Такое выделение можно реализовать несколькими способами. Идея одного из них состоит в переходе от интеграла (19.5) по всем полям к интегралу по поверхности в многообразии всех полей, однократно пересекающейся с орбитами калибровочной группы. Пусть уравнение поверхности есть

$$f\,(A) = 0. \tag{19.7}$$

Уравнение $f(A^{\Omega}) = 0$ должно иметь при любом $A(x)$ единственное решение относительно Ω.

Введем функционал $\Delta_f[A]$, определив его условием

$$\Delta_f\,[A] \int \prod_x \delta\left(f\,(A^{\Omega}\,(x)\right) d\Omega\,(x) = 1. \tag{19.8}$$

Здесь мы интегрируем по калибровочной группе G бесконечномерную δ-функцию $\prod_x \delta(f(A^{\Omega}))$. Такая δ-функция есть функционал, определяемый заданием правила его интегрирования с другими функционалами. В дальнейшем будет приведено несколько конкретных примеров вычисления интегралов типа (19.8). Заметим, что функционал $\Delta_f[A]$ калибровочно инвариантен, т. е.

$$\Delta_f[A^{\Omega}] = \Delta_f[A]. \tag{19.9}$$

Чтобы выделить множитель (19.6) из континуального интеграла (19.4), вставим под знак интеграла левую часть формулы (19.8) (равную единице) и сделаем затем замену переменной $A^{\Omega} \to A$. Мера $d\mu[A]$ и функционалы $S[A]$, $\Delta_f[A]$ инвариантны при такой замене. Интеграл (19.4) сводится к произведению объема группы на интеграл

$$\int \exp(iS[A])\Delta_f[A]\left(\prod_x \delta(f(A))\right) d\mu[A]. \tag{19.10}$$

Именно этот интеграл будет для нас исходным в квантовой теории калибровочных полей. Обоснованием здесь служит возможность сведения меры к явно гамильтоновой, которое будет продемонстрировано на примере поля Янга—Миллса и поля тяготения.

Покажем, что интеграл (19.10), формально зависящий от выбора поверхности $f(A) = 0$, на самом деле инвариантен по отношению к выбору поверхности.

Для доказательства вставим под знак интеграла (19.10) «другую единицу»:

$$1 = \Delta_g[A] \int \prod_x \delta\left(g\left(A^{\Omega}(x)\right)\right) d\Omega(x), \tag{19.11}$$

где $g(A) = 0$ — уравнение другой поверхности, которая, как и поверхность $f(A) = 0$, однократно пересекается с орбитами группы G. Изменив порядок интегрирования по A и Ω, сделав сдвиг $A^{\Omega} \to A$, а затем снова поменяв местами порядок интегрирования по A и Ω, приведем интеграл (19.10) к виду

$$\int \exp(iS[A])\Delta_g[A]\left(\prod_x \delta(g(A))\right) d\mu[A]. \tag{19.12}$$

Описанный прием позволяет переходить в континуальном интеграле от одной поверхности к другой, или, как мы будем говорить, от одной калибровки к другой. В частности, такой способ удобен при переходе от гамильтоновой формы континуального интеграла к интегралу в релятивистской калибровке. Ниже мы проследим такой переход на конкретных примерах.

Можно указать более общий метод выделения из континуального интеграла объема калибровочной группы, чем только что описанный.

Рассмотрим калибровочно неинвариантный функционал $F[A]$. Определим функционал $\Phi[A]$ уравнением

$$\Phi[A]\int F[A^{\Omega}]\prod_x d\Omega(x)=1. \tag{19.13}$$

Конечно, необходимо потребовать, чтобы стоящий в левой части выражения (19.13) интеграл действительно существовал. Этот функционал калибровочно инвариантен. Вставив левую часть (19.13) в интеграл (19.5) и сделав затем сдвиг $A^{\Omega}\to A$, получим произведение объема группы (19.6) на интеграл:

$$\int \exp(iS[A])\,\Phi[A]\,F[A]\,d\mu[A]. \tag{19.14}$$

Введенный выше интеграл (19.10) является, очевидно, частным случаем (19.14). Независимость интеграла (19.14) от выбора функционала $F[A]$ доказывается так же, как и независимость интеграла (19.10) от выбора поверхности $f(A)=0$.

§ 20. ФУНКЦИИ ГРИНА И ТЕОРИЯ ВОЗМУЩЕНИЙ ДЛЯ КАЛИБРОВОЧНЫХ ПОЛЕЙ

Функции Грина в теории калибровочных полей определим как средние от произведения функций поля в различных точках пространства—времени V_4. Производящий функционал для функций Грина задается формулой

$$Z[\eta]=\frac{\int\left\{\exp i\left(S[A]+\int\eta A d^4x\right)\right\}F[A]\,\Phi[A]\,d\mu[A]}{\int\left\{\exp(iS[A])\right\}F[A]\,\Phi[A]\,d\mu[A]}, \tag{20.1}$$

где $S[A]$ — действие поля A; $d\mu[A]$ — локальная калибровочно инвариантная мера; функционалы F и Φ определены выше, в § 19; $\int\eta A d^4x$ — линейный функционал

$$\int\left(\sum_{\mu,a}\eta_a^{\mu}(x)\,A_{\mu}^{a}(x)\right)d^4x, \tag{20.2}$$

где $\eta_a{}^{\mu}(x)$ — произвольные пробные функции.

Функции Грина являются вариационными производными функционала (20.1). Вообще говоря, они зависят от выбора калибровки, т. е. от выбора функционала $F[A]$. Физические же результаты, получаемые усреднением калибровочно инвариантных функционалов, от выбора калибровки не зависят.

Отметим теперь характерное отличие теории возмущений в теории калибровочных полей от развитой в § 18 для теории скалярного поля.

Пусть действие содержит малый параметр ε. Действие, соответствующее нулевому значению параметра ε (обозначим его S_0), будем считать квадратичной формой полевых функций. Именно так обстоит дело во всех разумных примерах из теории поля.

При построении теории возмущений в формализме континуального интеграла в § 18 мы разлагали функционал $\exp(iS)$ в ряд вида

$$\exp(iS) = \exp(iS_0) \exp i(S - S_0) = \\ = \exp(iS_0) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} a_n \tag{20.3}$$

по степеням ε. Получившийся функциональный ряд затем почленно интегрировали, вычисляя отдельные члены ряда теории возмущений с помощью теоремы Вика, которая следует из того, что S_0 — невырожденная квадратичная форма.

В теории калибровочных полей под знак континуального интеграла кроме функционала $\exp(iS)$ входит еще произведение функционалов $F\Phi$. Это произведение в теории возмущений также разлагается в ряд по ε. Если F есть δ-функционал, то его разложение в ряд по ε затруднительно. Поэтому следует так выбирать уравнение поверхности $f(A) = 0$, чтобы оно не содержало параметра ε. Таковы, например, уравнения, выделяющие лоренцеву и кулонову калибровки

$$\partial_\mu A_\mu = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{A} = 0 \tag{20.4}$$

в электродинамике, а также в теории Янга—Миллса. В теории тяготения уравнениями с аналогичными свойствами являются, например, условия гармоничности.

Отметим, что функция $\Delta_f[A]$, вообще говоря, зависит от параметра ε даже в том случае, когда уравнение $f(A) = 0$ этого параметра не содержит. При этом необходимо разлагать функционал $\exp(iS[A])\Delta_f[A]$ в ряд вида

$$\exp(iS_0[A]) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n!} b_n[A]. \tag{20.5}$$

В общем случае произведение

$$\exp(iS_0) F_0 \Phi_0 \equiv M_0, \tag{20.6}$$

где F_0, Φ_0 — главные члены функционалов F и Φ, должно быть таким, чтобы при интегрировании с M_0 произведения полей выполнялась теорема Вика. Это свойство выполняется, например, если M_0 есть экспонента от невырожденной квадратичной формы или произведение экспоненты от вырожденной квадратичной формы на δ-функционал, соответствующий плоской поверхности, ортогональной нулевым направлениям этой квадратичной формы.

Построение теории возмущений, возникающей из разложения (20.5), рассмотрим подробнее на конкретных примерах, где только что сформулированное правило будет выполняться.

§ 21. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Покажем, как работает общая схема квантования калибровочных полей, на конкретных примерах*. Начнем с электромагнитного поля, наиболее простого по геометрической структуре.

Действие свободного электромагнитного поля

$$S = -\frac{1}{4}\int (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)^2 \, d^4x \tag{21.1}$$

инвариантно относительно абелевой группы калибровочных преобразований:

$$A_\mu(x) \to A_\mu(x) + \partial_\mu \lambda(x). \tag{21.2}$$

Квантование калибровочных полей осуществляется с помощью континуального интеграла от функционала (см. § 19)

$$\Phi F \exp(iS), \tag{21.3}$$

---

* В этом и следующем параграфах мы пишем векторные индексы внизу, не делая различия между ко- и контравариантными составляющими. Повторяющиеся греческие индексы показывают суммирование с учетом псевдоевклидовой метрики, повторяющиеся латинские значки — суммирование по значениям 1, 2, 3; например, $k^2 = k_\mu k_\mu = k_0^2 - k^2$; $\partial_\mu A_\mu = \partial_0 A_0 - \partial_1 A_1 - \partial_2 A_2 - \partial_3 A_3$; $k_i k_i = k_1^2 + k_2^2 + k_3^2$; $\delta_{\mu\nu}$ — тензор Минковского (с отличными от нуля составляющими $\delta_{00} = -\delta_{11} = -\delta_{22} = -\delta_{33} = 1$).

где S — действие системы; F — калибровочно неинвариантный функционал, а функционал Φ получается из F интегрированием по калибровочной группе.

Локальная мера интегрирования в нашем случае имеет вид

$$d\mu[A] = \prod_x \prod_{\mu=0}^{3} dA_\mu(x). \tag{21.4}$$

Калибровочная инвариантность этой меры очевидна, так как при фиксированной функции $\lambda(x)$ $dA_\mu(x) = d[A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x)]$. Остается выбрать функционал $F[A]$. Наиболее удобными для дальнейшего построения теории возмущений оказываются функционалы вида

$$\left.\begin{aligned} &F_1[A] = \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu(x));\\ &F_2[A] = \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{A}(x));\\ &F_3[A] = \exp\left\{\frac{-i}{2d_l}\int (\partial_\mu A_\mu(x))^2 d^4x\right\}. \end{aligned}\right\} \tag{21.5}$$

Функционалы F_1 и F_3 приводят к явно релятивистскому квантованию, а использование F_2 удобно при переходе к гамильтоновой теории. Соответствующие калибровочно инвариантные функционалы даются формулами:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1^{-1}[A] = \int \prod_x \delta(\partial_\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x)))\,d\lambda(x);\\ &\Phi_2^{-1}[A] = \int \prod_x \delta(\operatorname{div}(\mathbf{A}(x) + \nabla\lambda(x)))\,d\lambda(x);\\ &\Phi_3^{-1}[A] = \int \exp\left\{\frac{-i}{2d_l}\int (\partial_\mu(A_\mu(x) + \partial_\mu\lambda(x))^2)\,d^4x\right\}\prod_x d\lambda(x). \end{aligned}\right\} \tag{21.6}$$

Все эти функционалы не зависят на самом деле от поля $A_\mu(x)$, в чем можно убедиться, сделав в первом и третьем из интегралов (21.6) сдвиг $\lambda \to \lambda - \Box^{-1}\partial_\mu A_\mu$, а во втором $\lambda \to \lambda - \Delta^{-1}\operatorname{div}\mathbf{A}$. Поэтому с точностью до (бесконечного) постоянного множителя можно считать, что

$$\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi_3 = 1. \tag{21.7}$$

Теперь вид континуального интеграла определен во всех трех случаях.

Функционал F_2 предписывает интегрировать по полям, удовлетворяющим уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0. \tag{21.8}$$

Это хорошо известное условие кулоновой калибровки. Покажем, как интеграл с функционалом F_2 преобразуется к интегралу гамильтонова вида. Такому преобразованию, как мы видели на примере скалярного поля, может помочь введение интеграла по вспомогательным полям. В нашем случае к цели приводит континуальный интеграл вида

$$\int \exp\left(iS(A_\mu, F_{\mu\nu}]\right) \Phi[A] F[A] \prod_x \left(\prod_\mu dA_\mu(x) \prod_{\mu<\nu} dF_{\mu\nu}(x)\right). \tag{21.9}$$

с действием

$$S[A_\mu, F_{\mu\nu}] = \int \left(\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\right) d^4x, \tag{21.10}$$

зависящим не только от $A_\mu(x)$, но и от функции $F_{\mu\nu}(x)$, антисимметричной по μ, ν. В классической теории $F_{\mu\nu}$ есть напряженность электромагнитного поля

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \tag{21.11}$$

При переходе к квантовой теории мы должны считать функции A_μ, $F_{\mu\nu}$ независимыми и интегрировать по ним как по независимым переменным. Интеграл по $F_{\mu\nu}$ в (21.9) можно взять точно. Для этого достаточно сделать сдвиг

$$F_{\mu\nu} \to F_{\mu\nu} + (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \tag{21.12}$$

превращающий (21.9) в произведение интеграла по A_μ и интеграла по $F_{\mu\nu}$ вида

$$\int \exp\left(\frac{i}{4} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu} d^4x\right) \prod_x \prod_{\mu<\nu} dF_{\mu\nu}(x). \tag{21.13}$$

Последний интеграл есть просто нормировочная константа. Перепишем действие (21.10) в трехмерных обозначениях:

$$\int \left(\mathbf{E}\,\partial_0 \mathbf{A} - \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{H}^2 - \right.$$
$$\left. - (\mathbf{H}, \operatorname{rot} \mathbf{A}) + \mathbf{A}_0 \operatorname{div} \mathbf{E}\right) d^4x, \tag{21.14}$$

где

$$E_i = F_{0i};\ H_1 = F_{23};\ H_2 = F_{31};\ H_3 = F_{12}. \qquad (21.15)$$

Возьмем в (21.9) интеграл по $\mathbf{H}$ (это сводится к замене $\mathbf{H} \to \operatorname{rot} \mathbf{A}$ в действии (21.14)) и по A_0, что сводится к появлению δ-функционала

$$\prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{E}(x)). \qquad (21.16)$$

Приходим к интегралу

$$\int \exp(iS[\mathbf{A}, \mathbf{E}]) \prod_x \delta(\operatorname{div} \mathbf{A}(x))\, \delta(\operatorname{div} \mathbf{E}(x)) \prod_{i=1}^{3} dA_i(x)\, dE_i(x) \qquad (21.17)$$

с действием гамильтонова вида

$$\int \left(\mathbf{E}\, \partial_0 \mathbf{A} - \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 + (\operatorname{rot} \mathbf{A})^2) \right) d^4x. \qquad (21.18)$$

Интеграл (21.17) является аналогом интегралов, полученных в § 17 при квантовании конечномерных систем со связями. Роль связи играет здесь $\operatorname{div} \mathbf{E}$, роль дополнительного условия — уравнение кулоновой калибровки (21.8). Аналог определителя $\det \| \{\varphi_a, \chi^b\} \|$ равен здесь единице. Независимыми динамическими переменными можно считать поперечные в трехмерном смысле составляющие векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{E}$ — векторного потенциала и напряженности электрического поля.

Разобранная схема квантования электромагнитного поля позволяет построить формализм квантовой электродинамики без введения индефинитной метрики.

Отметим, что необходимость модификации континуального интеграла в квантовой электродинамике отмечалась Бялыницким-Бирулей [24], который, по-видимому, впервые рассмотрел континуальный интеграл с δ-функционалом $\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu)$ (однако без указания на возможность появления дополнительного множителя типа Δ_f при переходе к теории поля с неабелевой калибровочной группой).

Лагранжиан квантовой электродинамики

$$\mathcal{L}(x) = \bar{\psi}(x) (i\gamma_\mu (\partial_\mu - ieA_\mu(x)) - m) \psi(x) - \\ - \frac{1}{4} (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x))^2 \qquad (21.19)$$

содержит кроме поля $A_\mu(x)$ четырехкомпонентные спиноры, описывающие фермиевское электрон-позитронное поле (γ^μ — матрицы Дирака). Лагранжиан (21.19) инвариантен относительно калибровочных преобразований:

$$\left.\begin{aligned} &A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda; \\ &\psi \to \exp(ie\lambda)\,\psi, \quad \bar\psi \to \bar\psi \exp(-ie\lambda). \end{aligned}\right\} \qquad (21.20)$$

В схеме континуального интегрирования компоненты спиноров $\psi_\alpha(x)$, $\bar\psi_\alpha(x)$ следует считать антикоммутирующими друг с другом элементами грассмановой алгебры и интегрировать функционал (21.3) по мере

$$\prod_x \left(\prod_\mu dA_\mu(x) \prod_\alpha d\bar\psi_\alpha(x)\, d\psi_\alpha(x)\right) \equiv \prod_x dA\, d\bar\psi\, d\psi. \qquad (21.21)$$

Наметим построение теории возмущений по параметру e — коэффициенту при трехлинейном члене $\bar\psi\gamma_\mu\psi A_\mu$, описывающем взаимодействие электромагнитного поля с электрон-позитронным. Функционалы F_1, F_2, F_3 не зависят от параметра e, так что дело сводится к почленному интегрированию ряда

$$\exp(ie\,\Delta S) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ie)^n}{n!} (\Delta S)^n. \qquad (21.22)$$

Вид функций Грина зависит от выбора функционала $F[A]$. Найдем производящие функционалы для невозмущенных функций, соответствующих нулевому значению параметра e. При выборе $F = F_1$ необходимо вычислить интеграл

$$Z_0[\eta] = \frac{\int \exp i\left(S_0 + \int \left(\bar\eta\psi + \bar\psi\eta + \eta_\mu A_\mu\right) d^4x\right) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu)\, dA\, d\bar\psi\, d\psi}{\int \exp(iS_0) \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu)\, dA\, d\bar\psi\, d\psi}. \qquad (21.23)$$

где $\bar\eta$, η, η_μ — источники полей $\bar\psi$, ψ, A_μ. Интегрирование в (21.23) ведется по полям $A_\mu(x)$, удовлетворяющим уравнению

$$\partial_\mu A_\mu(x) = 0. \qquad (21.24)$$

Это уравнение называется обычно условием лоренцевой калибровки. Интеграл с функционалом $F_1[A]$ мы будем называть поэтому *интегралом в лоренцевой калибровке.*

Вычисляется функционал (21.23) стандартным приемом — сдвигом

$$\psi \to \psi + \psi_0, \quad \bar{\psi} \to \bar{\psi} + \bar{\psi}_0; \quad A_\mu \to A_\mu + A_\mu^{(0)}, \qquad (21.25)$$

уничтожающим линейные по $\bar{\psi}$, ψ, A_μ члены в показателе подынтегральной экспоненты числителя (21.23). Чтобы при сдвиге (21.25) не изменился δ-функционал $F_1[A]$, достаточно выбрать поле $A_\mu(x)$ поперечным, т. е. удовлетворяющим условию (21.24). Выражение для функционала $Z_0[\eta]$ оказывается равным

$$\exp\Big(-i\int \bar{\eta}(x)\,G(x-y)\,\eta(y)\,d^4x\,d^4y - -\frac{i}{2}\int \eta_\mu(x)\,D^{tr}_{\mu\nu}(x-y)\,\eta_\nu(y)\,d^4x\,d^4y\Big), \qquad (21.26)$$

где

$$\left.\begin{aligned} G(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4p \exp\big(ip(x-y)\big)\,\frac{\hat{p}+m}{p^2-m^2+i0}\,; \\ D^{tr}_{\mu\nu}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \exp\big(ik(x-y)\big)\,\frac{-k^2\delta_{\mu\nu}+k_\mu k_\nu}{(k^2+i0)^2}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (21.27)$$

Здесь $(p,\ x-y) = p_\mu(x-y)_\mu$; $\hat{p} = \gamma_\mu p_\mu$. Необходимость замены $k^2 \to k^2 + i0$ в подынтегральных выражениях формул (21.25) была объяснена выше.

Формула (21.26) обеспечивает справедливость теоремы Вика и, следовательно, диаграммной техники, в которой электронным (соответственно фотонным) линиям отвечают функции G (соответственно $D^{tr}_{\mu\nu}$), а каждой вершине — константа связи e.

Аналогичные схемы теории возмущений, отличающиеся лишь видом фотонной функции Грина, возникают при использовании функционалов F_2, F_3. Интегралы с функционалом F_2 будем называть *интегралами в кулоновой калибров-*

ке. Невозмущенная фотонная функция Грина в кулоновой калибровке дается формулами

$$\left.\begin{aligned} D^q_{\mu\nu}(x-y) &= \frac{1}{(2\pi)^4}\int d^4k \exp\left(\mathrm{i}k(x-y)\right)\widetilde{D}^q_{\mu\nu}(k); \\ \widetilde{D}^q_{00}(k) = \frac{1}{\mathbf{k}^2}; \quad \widetilde{D}^q_{0i}(k) &= 0; \quad \widetilde{D}^q_{ij}(k) = (k^2+\mathrm{i}0)^{-1}\left(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2}\right) \end{aligned}\right\}. \tag{21.28}$$

Невозмущенная функция $D_{\mu\nu}$ для функционала F_3 имеет вид

$$(k^2+\mathrm{i}0)^{-2}\left(-k^2\delta_{\mu\nu}+(1-d_l)\,k_\mu k_\nu\right). \tag{21.29}$$

Особенно проста формула (21.29) при $d_l = 1$. Соответствующую функцию Грина $\delta_{\mu\nu}(-k^2 - \mathrm{i}0)^{-1}$ называют обычно *функцией в фейнмановской калибровке.*

Итак, мы пришли к трем схемам теории возмущений, отличающимся видом фотонных функций Грина. Эти схемы хорошо известны и ведут к одним и тем же результатам для физических величин.

Метод континуального интегрирования удобен и при выводе точных соотношений, являющихся следствием калибровочной инвариантности. Для иллюстрации выведем тождество Уорда, а также связь функций Грина в разных калибровках. Рассмотрим электронную функцию Грина в лоренцевой калибровке:

$$G_L(x-y) = -\mathrm{i}\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle_L \equiv$$

$$\equiv -\mathrm{i}\frac{\int \exp(\mathrm{i}S)\,\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu)\,dA\,d\overline{\psi}\,d\psi}{\int \exp(\mathrm{i}S)\prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu)\,dA\,d\overline{\psi}\,d\psi}. \tag{21.30}$$

Поворот спинорных полей $\psi(x) \to \exp(\mathrm{i}ec(x))\psi(x)$, $\psi(x) \to \to \psi(x)\exp(-\mathrm{i}ec(x))$ в интеграле в числителе (21.30) ведет к появлению в подынтегральном выражении множителя

$$\exp \mathrm{i}e\left(c(x)-c(y)+\int c(z)\,\partial_\mu j_\mu(z)\,d^4z\right) \tag{21.31}$$

с $j_\mu = \overline{\psi}\gamma_\mu\psi$. Дифференцируя по $c(z)$ и положив затем $c \equiv 0$, получим формулу

$$G_L(x-y)\left(\delta(x-z)-\delta(y-z)\right) =$$

$$= \mathrm{i}\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\,\partial_\mu j_\mu(z)\rangle_L. \tag{21.32}$$

Из нее после перехода к импульсному представлению следует тождество Уорда [25]

$$G^{-1}(\hat{p}) - G^{-1}(\hat{q}) = (p-q)_\mu \Gamma_\mu(p, q), \qquad (21.33)$$

связывающее электронную функцию Грина $G(\hat{p})$ и неприводимую вершинную часть Γ_μ (p, q). Ясно, что это тождество справедливо при любой калибровке фотонной функции, так как при его выводе замена переменных в континуальном интеграле затрагивала лишь спинорные поля.

Проследим теперь переход от кулоновой калибровки к лоренцевой на примере одноэлектронной функции:

$$G_R(x-y) = -\mathrm{i}\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\rangle_R \equiv$$

$$\equiv -\mathrm{i}\frac{\int \exp(\mathrm{i}S)\,\psi(x)\,\overline{\psi}(y)\prod_x \delta(\operatorname{div}\mathbf{A})\,dA\,d\overline{\psi}\,d\psi}{\int \exp(\mathrm{i}S)\prod_x \delta(\operatorname{div}\mathbf{A})\,dA\,d\overline{\psi}\,d\psi}. \qquad (21.34)$$

Вставим в числитель и знаменатель правой части (21.34) интеграл $\int \prod_x \delta(\partial_\mu A_\mu - \Box\lambda)d\lambda(x)$, не зависящий, как мы видели, от $A_\mu(x)$, и сделаем не меняющие действие преобразования (21.20). При этом δ-функция $\delta(\partial_\mu A_\mu - \Box\lambda)$ превращается в $\delta(\partial_\mu A_\mu)$, $\delta(\operatorname{div}\mathbf{A})$—в $\delta(\operatorname{div}\mathbf{A} + \Delta\lambda)$. В числителе возникает множитель $\exp \mathrm{i}e(\lambda(x) - \lambda(y))$, в котором можно заменить $\lambda(x)$ решением $c(x)$ уравнения

$$\Delta c(x) + \operatorname{div}\mathbf{A}(x) = 0, \qquad (21.35)$$

т. е. функцией

$$\frac{1}{4\pi}\int |x-z|^{-1}\,\delta(x_0 - z_0)\operatorname{div}\mathbf{A}(z)\,d^4z \equiv \int l_i(x-z)\,A_i(z)\,d^4z, \qquad (21.36)$$

где

$$l_i(x-z) = \delta(x_0 - z_0)\frac{\partial}{\partial x^i}(4\pi\,|x-z|)^{-1}. \qquad (21.37)$$

После этого интегралы по $\lambda(x)$ в числителе и знаменателе сокращаются. Получающаяся формула

$$G_R(x-y) =$$

$$= -\mathrm{i}\left\langle\psi(x)\overline{\psi}(y)\exp\left(\mathrm{i}e\int\left(l_i(x-z) - l_i(y-z)\right)A_i(z)\,d^4z\right)\right\rangle_L. \qquad (21.38)$$

выражает функцию Грина в кулоновой калибровке после разложения по степеням «e» в виде ряда по функциям Грина $\langle \psi(x)\overline{\psi}(y)\prod\limits_{k=1} A_{i_k}(z_k)\rangle_L$ в лоренцевой калибровке.

§ 22. ПОЛЯ ЯНГА — МИЛЛСА

Теория поля Янга—Миллса [26] является простейшим примером теории с неабелевой калибровочной группой.

Векторное поле Янга—Миллса, связанное с простой компактной группой Ли G, удобно описывать матрицами $B_\mu(x)$ со значениями в алгебре Ли этой группы:

$$B_\mu(x) = \sum_{a=1}^{n} b_\mu^a(x)\,\tau_a. \tag{22.1}$$

Здесь τ_a — линейно-независимые матрицы в присоединенном представлении алгебры Ли, нормированные условиями

$$\operatorname{tr} \tau_a \tau_b = -2\delta_{ab}; \tag{22.2}$$

n — число параметров группы; $b_\mu{}^a(x)$ — числовая функция с векторным индексом μ и «изотопическим» a. Как известно, в присоединенном представлении последний индекс можно использовать и для нумерации матричных элементов, так что

$$(B_\mu)_{ab} = (\tau_c)_{ab}\, b_\mu^c = t_{abc}\, b_\mu^c, \tag{22.3}$$

где t_{abc} — структурные константы группы, антисимметричные по всем трем индексам.

Лагранжиан поля Янга—Миллса

$$\mathcal{L}(x) = \frac{1}{8} \operatorname{tr} F_{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \tag{22.4}$$

где

$$F_{\mu\nu} = \partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + \varepsilon\,[B_\mu,\ B_\nu], \tag{22.5}$$

инвариантен относительно калибровочных преобразований

$$B_\mu \to \Omega B_\mu \Omega^{-1} + \frac{1}{\varepsilon}(\partial_\mu \Omega)\Omega^{-1} \tag{22.6}$$

с матрицей Ω, действующей в присоединенном представлении группы.

При квантовании в формализме континуального интеграла оказываются удобными аналоги функционалов $F[A]$, используемых в квантовой электродинамике. Здесь они имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} F_1[B] &= \prod_x \delta\left(\partial_\mu B_\mu(x)\right) \equiv \prod_x \prod_a \delta\left(\partial_\mu b_\mu{}^a(x)\right); \\ F_2[B] &= \prod_x \delta\left(\operatorname{div}\mathbf{B}(x)\right) \equiv \prod_x \prod_a \delta\left(\operatorname{div}\mathbf{b}^a(x)\right); \\ F_3[B] &= \exp\left(\frac{i}{4d_l}\int \operatorname{tr}\left(\partial_\mu B_\mu(x)\right)^2 d^4x\right) \equiv \\ &\equiv \exp\left(\frac{-i}{2d_l}\int \sum_a \left(\partial_\mu b_\mu^a(x)\right)^2 d^4x\right). \end{aligned}\right\} \qquad (22.7)$$

Функционалы F_1 и F_2 выделяют среди всех полей поля, удовлетворяющие условиям

$$\left.\begin{aligned} f_L(B) &= \partial_\mu B_\mu = 0 \quad \text{для } F_1; \\ f_R(B) &= \operatorname{div}\mathbf{B} = 0 \quad \text{для } F_2. \end{aligned}\right\} \qquad (22.8)$$

Каждое из этих уравнений матричное и представляет собой на самом деле n дополнительных условий (по числу параметров группы G).

Множитель Φ_1, соответствующий функционалу F_1, обозначим Δ_L. В континуальном интеграле этот множитель стоит перед δ-функционалом от $\partial_\mu B_\mu$, и поэтому достаточно знать его значение лишь для поперечных полей ($\partial_\mu B_\mu = 0$). В этом случае весь вклад в интеграл

$$\Delta_L^{-1}[B] = \int \prod_x \delta\left(\partial_\mu B_\mu^\Omega(x)\right) d\Omega(x) \qquad (22.9)$$

вносит окрестность единичного элемента, в которой можно сделать замену

$$\Omega(x) = 1 + \varepsilon u(x), \qquad (22.10)$$

где $u(x)$ — элемент алгебры Ли, и оставить в $\partial_\mu B_\mu^\Omega$ только линейные по u члены

$$\begin{aligned} \partial_\mu B_\mu^\Omega &= \partial_\mu\left(B_\mu + \varepsilon[u, B_\mu] + \partial_\mu u\right) = \\ &= \Box u - \varepsilon[B_\mu, \partial_\mu u] \equiv \hat{A}u, \end{aligned} \qquad (22.11)$$

где $\Box \equiv \hat{A}_0$ — оператор Даламбера. Вместо матриц $u(x)$ введем столбец

$$u(x) = \sum_{a=1}^{n} u_a(x)\tau_a, \qquad (22.12)$$

на который оператор $\hat{A}$ действует по правилу

$$(\hat{A}u)_a = (\Box\, u - \varepsilon\, [B_\mu\, \partial_\mu u])_a =$$
$$= (\Box\, \delta_{ac} - \varepsilon\, (B_\mu)_{ac}\, \partial_\mu)\, u_c = \Box\, u_a - \varepsilon t_{abc}\, b_\mu^b\, \partial_\mu u_c. \qquad (22.13)$$

Интеграл (22.9) можно записать в виде

$$\Delta_L^{-1}[B] = \int \prod_x \prod_a \delta\left((\hat{A}u)_a\right) du_a(x). \qquad (22.14)$$

Формально $\Delta_L[B]$ есть определитель оператора $\hat{A}$. Выделив тривиальный (бесконечный) множитель $\det \Box$, можно затем разложить логарифм $\Delta_L[B]$ в ряд по ε*:

$$\ln \Delta_L[B] = \ln(\det \hat{A}/\det \hat{A}_0) = \mathrm{Sp}\ln(1 - \varepsilon\, \Box^{-1} B_\mu\, \partial_\mu) =$$
$$= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n} \int d^4x_1 \ldots d^4x_n\, \mathrm{tr}\left(B_{\mu_1}(x_1) \ldots B_{\mu_n}(x_n)\right) \times$$
$$\times\, \partial_{\mu_1} D(x_1 - x_2) \ldots \partial_{\mu_n} D(x_n - x_1). \qquad (22.15)$$

Здесь $D(x)$ — фейнмановская функция Грина оператора Даламбера (18.18). Соответствующий множитель в кулоновой калибровке обозначим $\Delta_R[B]$. Аналогичные вычисления приводят к формуле

$$\ln \Delta_R[B] = \mathrm{Sp}\ln(1 - \varepsilon\, \Delta^{-1} B_i\, \partial_i) =$$
$$= -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\varepsilon^n}{n} \int d^4x_1 \ldots d^4x_n\, \mathrm{tr}\left(B_{i_1}(x_1) \ldots B_{i_n}(x_n)\right) \partial_{i_1} \tilde{D}(x_1 -$$
$$- x_2) \ldots \partial_{i_n} \tilde{D}(x_n - x_1), \qquad (22.16)$$

где

$$\tilde{D}(x) = -\frac{1}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4k}{\mathbf{k}^2} \exp\left(\mathrm{i}k(x-y)\right) =$$
$$= -\delta(x_0)\,(4\pi\,|\mathbf{x}|)^{-1}. \qquad (22.17)$$

Индексы $i_1, \ldots, i_n$ в (22.16) пробегают значения 1, 2, 3. Множитель $\Phi_3[B]$ дается формулой

$$\Phi_3^{-1}[B] = \int \exp\left(\frac{\mathrm{i}}{4d_l} \int \mathrm{tr}\left(\partial_\mu B_\mu^\Omega(x)\right)^2 d^4x\right) \prod_x d\Omega(x). \qquad (22.18)$$

Однако для интеграла (22.18) не удается получить замкнутое выражение, аналогичное формулам (22.15), (22.16), представляющим множители Δ_L, Δ_R в виде определителей.

---

* В (22.15) и далее символ Sp означает след в операторном смысле в отличие от tr — следа матрицы.

Это обстоятельство, как мы потом убедимся, не мешает и в этом случае развить простую схему теории возмущений.

Рассмотрим сначала построение теории возмущений в лоренцевой калибровке. Она возникает при разложении в ряд по ε функционала

$$\Delta_L[B]\exp(iS[B]) = \exp(iS + \ln \Delta_L). \qquad (22.19)$$

При этом выражение $\ln \Delta_L$ удобно интегрировать как добавку к действию S. Член n-го порядка разложения $\ln \Delta_L$ в ряд по ε приведет к появлению в диаграммах вершины с n выходящими линиями. Явное выражение для этого члена (22.15) подсказывает интерпретацию вершины как кольца с n выходящими линиями, по которому распространяется фиктивная скалярная частица, взаимодействующая с векторным полем по закону $\sim\varepsilon\, \mathrm{tr}(\varphi B_\mu\, \partial_\mu\, \varphi)$. Этому утверждению можно придать точный смысл, если записать определитель Δ_L [B] в виде интеграла по антикоммутирующим переменным η^a, $\bar{\eta}^a$:

$$\det(\Box - \varepsilon B_\mu \partial_\mu) =$$
$$= \int \exp\left(i \int \mathscr{L}(B_\mu,\ \bar{\eta},\ \eta)\, d^4x\right) \prod_x \prod_a d\bar{\eta}^a(x)\, d\eta^a(x), \qquad (22.20)$$

где

$$\mathscr{L}(B_\mu,\ \bar{\eta},\ \eta) = -\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(\bar{\eta}\,(\Box - \varepsilon B_\mu \partial_\mu)\,\eta) =$$
$$= \bar{\eta}^a \Box \eta^a - \varepsilon t_{abc}\, b^c_\mu \eta^a \bar{\eta}^a\, \partial_\mu \eta^b. \qquad (22.21)$$

Поэтому можно рассматривать нашу систему как систему бозе-полей $b_\mu{}^a(x)$, взаимодействующих друг с другом и со скалярными ферми-полями $\eta^a\, \bar{\eta}^a$.

Построение теории возмущений и диаграммной техники во многом аналогично приведенному в § 21 для квантовой электродинамики. Элементами диаграммной техники в теории Янга—Миллса являются линии двух сортов, соответствующие поперечным векторным и фиктивным скалярным частицам, а также вершины, описывающие взаимодействие векторных частиц со скалярными и друг с другом.

Будем изображать векторные частицы сплошными, а фиктивные скалярные частицы — пунктирными линиями (рис. 7). Выражения для изображенных на рис. 7 элементов диаграмм в импульсном представлении имеют вид:

$$\left.\begin{aligned}
&G^{ab}_{\mu\nu}(p) = -\delta_{ab}(p^2\delta_{\mu\nu} - p_\mu p_\nu)(p^2 + i0)^{-2};\\
&G^{ab}(p) = -\delta_{ab}(p^2 + i0)^{-1};\\
&V^{abc}_{\mu,\,\nu\rho} = i\varepsilon t_{abc}(p_{1\nu}\delta_{\mu\rho} - p_{1\rho}\delta_{\mu\nu});\\
&V^{abcd}_{\mu\nu,\,\rho\sigma} = \varepsilon^2 t_{abe} t_{cde}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma} - \delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho});\\
&V^{abc}_{\mu} = \frac{i\varepsilon}{2} t_{abc}(p_3 - p_2)_\mu.
\end{aligned}\right\} \quad (22.22)$$

Чтобы найти вклад данной диаграммы, необходимо произведение выражений, соответствующих всем ее элементам,

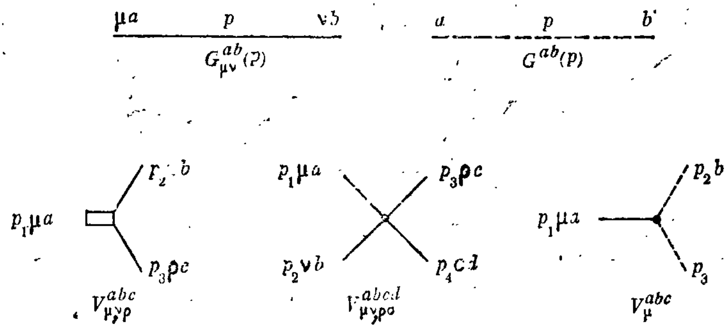

Рис. 7

проинтегрировать по независимым 4-импульсам, просуммировать по независимым дискретным индексам и умножить результат на

$$r^{-1}\left(\frac{i}{(2\pi)^4}\right)^{l-v-1}(-2)^s, \qquad (22.23)$$

где v — число вершин диаграммы; l — число ее внутренних линий; s — число замкнутых циклов фиктивных частиц; r — порядок группы симметрии диаграммы. Заметим, что $l - v - 1 = c$ есть число независимых контуров диаграммы.

Покажем, что в развитой теории возмущений поперечную функцию Грина $G^{ab}_{\mu\nu}$ можно без изменения физических результатов заменить функцией с произвольной продольной частью

$$G_{\mu\nu}^{ab}(d_l, p) = -\delta_{ab}(p^2 + i0)^{-2}(p^2\delta_{\mu\nu} + (d_l - 1)p_\mu p_\nu). \quad (22.24)$$

Первоначальное доказательство этого факта, данное де Виттом [2], было довольно громоздким. Приведем здесь доказательство, предложенное Хоофтом [27]. Рассмотрим семейство калибровочных условий вида

$$\partial_\mu B_\mu(x) - c(x) = 0. \quad (22.25)$$

Среднее от калибровочно инвариантного функционала $X[B]$ по полям с калибровочным условием (22.25) записывается в виде

$$\langle X \rangle = \frac{\int X[B] \exp(i S[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c)\, dB}{\int \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c)\, dB}, \quad (22.26)$$

где $\Delta_c[B]$ — множитель, соответствующий условию (22.25). Числитель и знаменатель в правой части (22.26) на самом деле не зависят от c. Используя это обстоятельство, перепишем выражение (22.26) в виде

$$\langle X \rangle = \frac{\int \exp\left(\frac{i}{4d_l}\int \mathrm{tr}\, c^2 d^4x\right) dc \int X[B] \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \times}{\int \exp\left(\frac{i}{4d_l}\int \mathrm{tr}\, c^2 d^4x\right) dc \int \exp(iS[B]) \Delta_c[B] \times} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{\times \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c)\, dB}{\times \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu - c)\, dB}, \quad (22.27)$$

т. е. как частное континуальных интегралов по переменной $c(x) = \sum_a c^a(x)\tau_a$. Проинтегрировав по c, получим для среднего $\langle X \rangle$ выражение

$$\langle X \rangle = \frac{\int X[B]\, \widetilde{\Delta}[B] \exp\left(i\left(S[B] + \frac{1}{4d_l}\int \mathrm{tr}(\partial_\mu B_\mu)^2 d^4x\right)\right) \prod_x dB}{\int \widetilde{\Delta}[B] \exp\left(i\left(S[B] + \frac{1}{4d_l}\int \mathrm{tr}(\partial_\mu B_\mu)^2 d^4x\right)\right) \prod_x dB}. \quad (22.28)$$

Множитель

$$\tilde{\Delta}[B] = \Delta_c[B]\,|_{c=\partial_\mu B_\mu} \tag{22.29}$$

определяется равенством

$$\Delta_c^{-1}[B] = \int \prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu{}^\Omega - c)\, d\Omega(x). \tag{22.30}$$

Вычисление множителя $\Delta_c[B]$ аналогично вычислению Δ_L (22.9). Весь вклад в интеграл (22.30) вносит окрестность единичного элемента, в которой можно сделать замену (22.10) и оставить в $(\partial_\mu B_\mu - c)$ только линейные по u члены:

$$\partial_\mu B_\mu^\Omega - c = \partial_\mu(\varepsilon[u, B_\mu] + \partial_\mu u) = \hat{A}u. \tag{22.31}$$

Оператор $\hat{\hat{A}}$ действует на столбец u_a, определенный выше формулой (22.12), по правилу

$$(\hat{\hat{A}}u)_a = \square u_a - \varepsilon t_{abc}\,\partial_\mu(b_\mu^b u_c). \tag{22.32}$$

Оператор $\hat{\hat{A}}$ является сопряженным по отношению к $\hat{A}$. Определители операторов $\hat{A}$ и $\hat{\hat{A}}$ совпадают. Поэтому

$$\tilde{\Delta}[B] = \det\hat{\hat{A}} = \det\hat{A} = \Delta_L[B]. \tag{22.33}$$

Вычисление $\langle X\rangle$ как частного континуальных интегралов (22.28) по теории возмущений приводит к диаграммной технике с функцией Грина векторной частицы (22.24). Вклад множителя $\Delta[B] = \tilde{\Delta}_L[B]$ по-прежнему интерпретируется как вклад дополнительных диаграмм, описывающих взаимодействие векторных частиц с фиктивными скалярными частицами.

Развитая теория возмущений — не единственно возможная. Другая форма теории возмущений и диаграммной техники возникает в так называемом формализме первого порядка. Этот формализм получается, если записать лагранжиан (22.4) в виде

$$\mathscr{L}(x) = -\frac{1}{8}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{4}\operatorname{tr} F_{\mu\nu}(\partial_\nu B_\mu - \partial_\mu B_\nu + \varepsilon[B_\mu, B_\nu]) \tag{22.34}$$

и интегрировать по B_μ, $F_{\mu\nu}$ как по независимым переменным. Термин «формализм первого порядка» используется здесь потому, что знак производной входит в лагранжиан (22.34) в степени не выше первой.

Используя лоренцеву калибровку, будем иметь дело с континуальным интегралом вида

$$\int \exp(\mathrm{i}S[B,F])\,\Delta_L[B]\prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu)\,dBdF, \tag{22.35}$$

где выражение

$$dB(x)\,dF(x)=\prod_a\left(\prod_\mu db^a_\mu(x)\right)\prod_{\mu<\nu} df^a_{\mu\nu}(x) \tag{22.36}$$

так же, как и $dB(x)$, калибровочно инвариантно.

Если под знаком интеграла (22.22) провести разложение функционала $\Delta_L[B]\exp(\mathrm{i}S[B,F])$ в ряд по ε, то получим новый вариант диаграммной теории возмущений с тремя

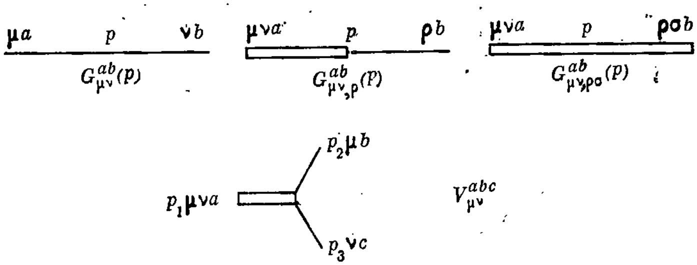

Рис. 8

линиями, соответствующими функциям $\langle BB\rangle$, $\langle BF\rangle$, $\langle FF\rangle$ и одной вершиной, описывающей трехлинейное взаимодействие εFBB. Элементы диаграммной техники и соответствующие им выражения даются диаграммами рис. 8 (где поле B изображено одинарной линией, а поле F — двойной) и формулами

$$\left.\begin{aligned}
&G^{ab}_{\mu\nu}=\delta_{ab}(-p^2\delta_{\mu\nu}+p_\mu p_\nu)(p^2+\mathrm{i}0)^{-2};\\
&G^{ab}_{\mu\nu,\rho}=\mathrm{i}\delta_{ab}(p_\nu\delta_{\mu\rho}-p_\mu\delta_{\nu\rho})(p^2+\mathrm{i}0)^{-1};\\
&G^{abcd}_{\mu\nu,\rho\sigma}=\delta_{ab}(\delta_{\mu\rho}\delta_{\nu\sigma}-\delta_{\mu\sigma}\delta_{\nu\rho}-(p^2+\mathrm{i}0)^{-1}\times\\
&\times(\delta_{\mu\rho}p_\nu p_\sigma+\delta_{\nu\sigma}p_\mu p_\rho-\delta_{\mu\sigma}p_\nu p_\rho-\delta_{\nu\rho}p_\mu p_\sigma));\\
&V^{abc}_{\mu\nu}=\varepsilon t_{abc}.
\end{aligned}\right\} \tag{22.37}$$

Линии и вершины, описывающие распространение фиктивных скалярных частиц и их взаимодействие с векторными, остаются такими же, как и в формализме второго порядка, так как множитель Δ_L, зависящий только от B, но не от F, остается тем же самым.

Формализм первого порядка удобен при переходе к каноническому квантованию. Рассмотрим такой переход, исходя из интеграла по B_μ, $F_{\mu\nu}$ в кулоновой калибровке с источниками, являющегося производящим функционалом для функций Грина:

$$Z[\eta]=\frac{\int \exp\left\{iS[B,F]+i\int\left(\eta_{\mu a}b_{\mu a}+\frac{1}{2}\eta_{\mu\nu a}f_{\mu\nu a}\right)d^4x\right\}\times}{\int \exp\{iS[B,F]\}\,\Delta_R[B]\times} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{\times\Delta_R[B]\prod_x \delta(\operatorname{div}\mathbf{B})\,dBdF}{\times\prod_x \delta(\operatorname{div}\mathbf{B})\,dBdF}. \tag{22.38}$$

Как и в электродинамике, возьмем в качестве динамических переменных поперечные в трехмерном смысле составляющие полей B_i, F_{0i} ($i=1, 2, 3$). Будем считать, что источники стоят лишь при выбранных динамических переменных, т. е. удовлетворяются условия

$$\eta_{0a}=\eta_{ika}=\partial_i\eta_{0ia}=\partial_i\eta_{ia}=0. \tag{22.39}$$

В трехмерных обозначениях лагранжиан (22,34) принимает вид

$$\mathscr{L}(x)=\operatorname{tr}\left\{-\frac{1}{8}F_{ik}F_{ik}+\frac{1}{4}F_{0i}F_{0i}+\frac{1}{4}F_{ik}(\partial_k B_i-\partial_i B_k+\right.$$
$$\left.+\varepsilon[B_i,B_k])-\frac{1}{2}F_{0i}\partial_0 B_i-\frac{1}{2}B_0(\partial_i F_{0i}-\varepsilon[B_i,F_{0i}])\right\}. \tag{22.40}$$

Отсутствие источников при B_0, F_{ik} позволяет проинтегрировать в (22.38) по этим переменным, что сводится к появлению δ-функционала

$$\prod_x \delta(\partial_i F_{0i}-\varepsilon[B_i,F_{0i}]) \tag{22.41}$$

и к замене F_{ik}

$$H_{ik}=\partial_k B_i-\partial_i B_k+\varepsilon[B_i B_k] \tag{22.42}$$

в интеграле по оставшимся переменным B_i, F_{0i}. Вставим в интеграл (22.38) множитель

$$\int \prod_x \delta(\Delta c + \partial_i F_{0i})\, dc(x), \tag{22.43}$$

не зависящий на самом деле от F_{0i}, и сделаем затем сдвиг $F_{0i} \to F_{0i} - \partial_i c$. При этом функционал $\prod_x \delta(\Delta c + \partial_i F_{0i})$ превращается в $\prod_x \delta(\partial_i F_{0i})$, а $\prod_x \delta(\partial_i F_{0i} - \varepsilon[B_i, F_{0i}])$ — в выражение $\prod_x \delta(\partial_i F_{0i} - \varepsilon[B_i F_{0i}] - \Delta c + \varepsilon[B_i, \partial_i c])$, равное $\prod_x \delta(\Delta c - \varepsilon[B_i, \partial_i c] + \varepsilon[B_i, F_{0i}])$, так как $\partial_i F_{0i} = 0$.

Пусть $c_0(x)$ — решение уравнения

$$\Delta c - \varepsilon[B_i, \partial_i c] = -\varepsilon[B_i, F_{0,i}], \tag{22.44}$$

выражающееся через зависящую от B функцию Грина

$$c_0(x) = -\varepsilon \int D(x, y; B)\,[B_i(y), F_{0i}(y)]\, d^3 y. \tag{22.45}$$

После сдвига $c \to c + c_0$ возникает функционал $\prod_x \delta(\Delta c - \varepsilon[B_i, \partial_i c])$, и функцию $c(x)$ можно положить равной нулю везде, кроме аргумента этого δ-функционала. Интеграл

$$\int \prod_x \delta(\Delta c - \varepsilon[B_i, \partial_i c])\, dc(x) \tag{22.46}$$

сокращается с множителем $\Delta_{\mathcal{K}}[B]$. В итоге функционал (22.38) приводится к виду

$$Z[\eta] = \frac{\int \exp\left\{iS[B_i, F_{0i}] + i\int \left(\eta_i^a b_i^a + \eta_{0i}^a f_{0i}^a\, d^4x\right\}\right. \times \prod_x \delta(\partial_i B_i)\,\delta(\partial_i F_{0i})\, dB dF}{\int \exp\left\{i S[B_i, F_{0i}]\right\} \times \prod_x \delta(\partial_i B_i)\,\delta(\partial_i F_{0i})\, dB dF}, \tag{22.47}$$

где

$$S[B_i, F_{0i}] = \int dx_0 \left(\int f_{0i}^a \partial_0 b_i^a\, d^3x - H\right); \tag{22.48}$$

$$H = \int d^3x \left(\frac{1}{4} h_{ik}^a h_{ik}^a + \frac{1}{2} f_{0i}^a f_{0i}^a + \frac{1}{2} \partial_i c_0^a \partial_i c_0^a\right). \tag{22.49}$$

В этих формулах $S[B_i, F_{0i}]$ — действие, соответствующее гамильтониану H, причем роль канонически сопряженных координат и импульсов играют поперечные поля b_i, f_{0i}.

Как мы видели, формализм континуального интеграла по каноническим сопряженным координатам и импульсам эквивалентен каноническому квантованию. В применении к системе с гамильтонианом (22.49) каноническое квантование сводится к замене функций b_i^a, f_{0j}^b, через которые выражаются h_{ik}^a, c_0^a, операторами $\hat{b}_i{}^a(x)$, $\hat{f}_{0j}^b(y)$ с перестановочными соотношениями

$$
\begin{gathered}
\left[\hat{b}_i^a(x), \hat{f}_{0j}^b(y)\right] = \mathrm{i}\delta_{ab}\delta_{ij}^{tr}(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \equiv \\
\equiv \frac{\mathrm{i}\delta_{ab}}{(2\pi)^3}\int d^3k \exp\left(\mathrm{i}\,\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{y})\right)\left(\delta_{ij}-\frac{k_i k_j}{\mathbf{k}}\right).
\end{gathered}
\tag{22.50}
$$

Гамильтониан при этом становится самосопряженным и положительно определенным оператором энергии. Такое квантование поля Янга—Миллса было предложено Швингером [28]. Мы показали, как формализм континуального интеграла приводится к каноническому квантованию Швингера. Подчеркнем, что наличие множителя $\Delta_R[B]$ в исходном интеграле (22.38) было существенно для приведения его к явно гамильтонову виду.

Остановимся еще на построении S-матрицы для поля Янга—Миллса. Естественно исходить из континуального интеграла в кулоновой калибровке. Именно в этой калибровке интеграл приводится к интегралу по каноническим переменным. Унитарность S-матрицы здесь очевидна, по крайней мере при вычислении ее элементов по теории возмущений.

Элемент S-матрицы, описывающий превращение m входящих частиц в $n-m$ выходящих, выражается через преобразование Фурье $G_{i_1 \dots i_n}^{a_1 \dots a_n}(p_1, \dots, p_n)$ функции Грина в кулоновой калибровке

$$
\begin{gathered}
\langle b_{i_1}^{a_1}(x_1) \dots b_{i_n}^{a_n}(x_n)\rangle_R \equiv \\
\equiv \frac{\int \exp(\mathrm{i}S)\,\Delta_R[B]\, b_{i_1}^{a_1}(x_1)\dots b_{i_n}^{a_n}(x_n)\prod_x \delta(\operatorname{div}\mathbf{B}(x))\,dB(x)}{\int \exp(\mathrm{i}S)\,\Delta_R[B]\prod_x \delta(\operatorname{div}\mathbf{B}(x))\,dB(x)}
\end{gathered}
\tag{22.51}
$$

формулой

$$S^{a_1 \dots a_n}_{i_1 \dots i_n}(p_1, \dots, p_n) = \lim_{p_k^2 \to 0} \left(\prod_{k=1}^{n} Z_R^{-1/2} u_k (\hat{e}_k)_{i_k j_k} \right) \times$$

$$\times G^{a_1 \dots a_n}_{j_1 \dots j_n}(p_1, \dots, p_n)\Big), \qquad (22.52)$$

где

$$(\hat{e}_k)_{ij} = \delta_{ij} - \frac{(p_k)_i (p_k)_j}{\mathbf{p}_k^2} \qquad (22.53)$$

есть оператор (поперечной) поляризации, а множители u_k равны $p_k^2 \theta(p_k^0) | 2p_k^0) |^{-1/2} (2\pi)^{-3/2}$ для входящих частиц и $p_k^2 \theta(-p_k^0) | 2p_k^0 |^{-1/2} (2\pi)^{-3/2}$ для выходящих. Наконец, Z_R есть вычет при $p^2 \to 0$ полной одночастичной функции Грина в кулоновой калибровке. Точнее, мы предполагаем, что при $p^2 \to 0$ одночастичная функция Грина имеет вид

$$G^{ab}_{ij} = \frac{Z_R \delta_{ab}}{p^2 + i0} \left(\delta_{ij} - \frac{p_i p_j}{\mathbf{p}^2} \right) \qquad (22.54)$$

(конечно, с точностью до инфракрасных особенностей).

Выражения для элементов S-матрицы в кулоновой калибровке не являются явно релятивистскими инвариантными. Преобразуем их, чтобы перейти к релятивистской лоренцевой калибровке.

Вставим в континуальные интегралы в числителе и знаменателе формулы (22.51) множитель

$$\Delta_L [B] \int \prod \delta (\partial_\mu B_\mu^\Omega) \, d\Omega (x), \qquad (22.55)$$

равный единице. Сделаем затем сдвиг $B^\Omega \to B$; $B \to B^{\Omega^{-1}}$. Возникает интеграл по калибровочной группе

$$\int (B^{\Omega^{-1}}(x_1))^{a_1}_{i_1} \dots (B^{\Omega^{-1}}(x_n))^{a_n}_{i_n} \prod_x \delta (\operatorname{div} B^{\Omega^{-1}}) \, d\Omega^{-1}, \qquad (22.56)$$

из которого можно вынести произведение $B^{\Omega^{-1}}(x_1)^{a_1}_{i_1} \dots$ $\dots B^{\Omega^{-1}}(x_n)^{a_n}_{i_n})$. Оставшийся интеграл по Ω сокращается с $\Delta_R[B]$.

Выражение (22.53) для функции Грина принимает вид

$$\frac{\int \exp(iS)\,\Delta_L[B]\left(B^{\Omega^{-1}}(x_1)\right)_{i_1}^{a_1}\dots\left(B^{\Omega^{-1}}(x_n)\right)_{i_n}^{a_n}\prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu)\,dB}{\int \exp(iS)\,\Delta_L[B]\prod_x \delta(\partial_\mu B_\mu)\,dB}. \tag{22.57}$$

В выражении (22.57) матрица Ω^{-1} выбирается из условия трехмерной поперечности поля $B^{\Omega^{-1}}(\operatorname{div}\,\mathbf{B}^{\Omega^{-1}}=0)$. При разложении $B^{\Omega^{-1}}$ по степеням ε возникает ряд

$$B^{\Omega^{-1}}(x)=B^{tr}-\frac{\varepsilon}{2}[\Delta^{-1}\operatorname{div}\mathbf{B}, B+B^{tr}]^{tr}+\dots \tag{22.58}$$

Здесь приведены два первых члена разложения, а индекс tr означает трехмерно-поперечную часть соответствующего вектора. Интеграл (22.57) можно вычислить по

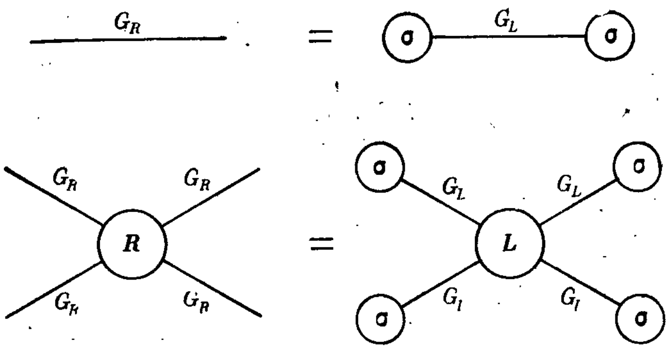

Рис. 9

теории возмущений, если предварительно разложить функции $B^{\Omega^{-1}}$ в ряды (22.58), сопоставив каждому члену разложения, зависящему от произведения m полей B, вершину с m выходящими из нее линиями.

Мы видим, что переход к лоренцовой калибровке для функций Грина оказывается достаточно сложным. Однако при построении S-матрицы достаточно знать функции Грина только на массовой оболочке (все $p^2_k \to 0$). При этом множители u_k исчезают, а переход к лоренцевой калибровке сводится к вставкам во внешние концы (рис. 9). Вклад в эту вставку (обозначим его σ) дают все поддиаграммы, начинающиеся с вершины, порожденной разложением (22.58), и заканчивающиеся вершиной, соединенной с остальной частью диаграммы только одной линией. Именно в диаграммах указанной структуры обращение в нуль множителей u_k компенсируется полюсами одночастичных функций G_L в лоренцевой калибровке (с вычетами Z_L). Вклад всех остальных диаграмм исчезает с выходом на массовую оболочку, а функция Грина (22.57) в кулоновой калибровке отличается от соответствующей функции в лоренцевой калибровке множителем σ^n. Из сравнения одночастичных функций (см. рис. 8) следует, что $\sigma=(Z_R/Z_L)^{1/2}$, т. е. σ выражается через отношение вычетов. В результате оказывается, что на массовой оболочке можно перейти к функциям Грина в лоренцевой калибровке и Z_R заменить Z_L, тем самым записав S-матричный элемент в явно лоренц-инвариантном виде.

§ 23. ТЕОРИЯ ТЯГОТЕНИЯ

Последним из примеров, иллюстрирующих схему квантования калибровочных полей, будет служить теория тяготения. Лагранжиан поля тяготения

$$\mathscr{L}(x)=\frac{1}{2\varkappa^2}\sqrt{-g}\,R=\frac{1}{2\varkappa^2}\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\left(\partial_\nu\Gamma^\rho_{\mu\rho}-\right.$$
$$\left.-\partial_\rho\Gamma^\rho_{\mu\nu}+\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma}\right) \qquad (23.1)$$

инвариантен при координатных преобразованиях, которые мы выпишем в инфинитезимальной форме:

$$\left.\begin{aligned}\delta g^{\mu\nu}&=-\delta x^\lambda\,\partial_\lambda g^{\mu\nu}+g^{\mu\lambda}\,\partial_\lambda\,\delta x^\nu+g^{\nu\lambda}\,\partial_\lambda\,\delta x^\mu;\\ \delta\Gamma^\rho_{\mu\nu}&=-\delta x^\lambda\,\partial_\lambda\,\Gamma^\rho_{\mu\nu}-\Gamma^\rho_{\mu\lambda}\,\partial_\nu\,\delta x^\lambda-\Gamma^\rho_{\nu\lambda}\,\partial_\mu\,\delta x^\lambda+\\ &+\Gamma^\lambda_{\mu\nu}\,\partial_\lambda\,\delta x^\rho-\partial_\mu\,\partial_\lambda\,\delta x^\rho.\end{aligned}\right\} \qquad (23.2)$$

Здесь δx^μ — бесконечно малые произвольные функции. Координатные преобразования зависят от четырех произвольных функций. Поэтому в нашей схеме поверхность в многообразии всех полей следует задавать четырьмя условиями, в качестве которых удобно выбрать условия гармоничности:

$$\partial_\nu\left(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\right)=0. \qquad (23.3)$$

(см. [29]). Гармоническая калибровка (23.3) является аналогом лоренцевой калибровки в электродинамике и теории

Янга—Миллса. Если за переменные континуального интегрирования взять $\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}$, $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, мы будем иметь дело с континуальными интегралами вида

$$\int \exp(iS)\,\Delta_h[g]\prod_x\Big(\prod_\mu \delta\big(\partial_\nu(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu})\big)\Big)\,dg\,d\Gamma. \qquad (23.4)$$

Здесь и далее опущены нормировочные множители типа $n(x)$ (см. § 18), которые при составлении объектов типа функций Грина входят в числитель и знаменатель, и, таким образом, сокращаются. Символом $dg\,d\,\Gamma$ в (23.4) обозначено выражение

$$g^{5/2}\prod_{\mu\leqslant\nu} d\big(\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\big)\prod_{\rho,\,\mu\leqslant\nu} d\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}. \qquad (23.5)$$

Обозначение $\Delta_h[g]$ указывает на происхождение этого множителя от условий гармоничности. Если (23.4) проинтегрировать по переменным $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$, получается интеграл

$$\int \exp(iS[g])\,\Delta_h[g]\prod_x\Big(\prod_\mu \delta\big(\partial_\nu\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu}\big)\,g^{5/2}\prod_{\mu\leqslant\nu} dg^{\mu\nu}\Big), \qquad (23.6)$$

где $S[g]$ — действие, в котором коэффициенты связности выражены через компоненты метрического тензора $g^{\mu\nu}$. Мера интегрирования

$$\prod_x g^{5/2}\prod_{\mu\leqslant\nu} dg^{\mu\nu} \qquad (23.7)$$

локально инвариантна, так как каждый множитель в произведении $\prod\limits_x$ инвариантен при координатных преобразованиях. Хотя интеграл по $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ в (23.4) можно взять точно, мы предпочтем этого не делать, оставаясь в формализме первого порядка. Диаграммная теория возмущений здесь естественно возникает, если положить

$$\sqrt{-g}\,g^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} + \varkappa u^{\mu\nu}; \quad \Gamma^{\rho}_{\mu\nu} = \varkappa\gamma^{\rho}_{\mu\nu} \qquad (23.8)$$

и разлагать затем интеграл по степеням $\varkappa$. При этом мы имеем две вершины. Одна соответствует взаимодействию $u^{\mu\nu}(\gamma^{\rho}_{\mu\sigma}\gamma^{\sigma}_{\rho\nu} - \gamma^{\rho}_{\mu\nu}\gamma^{\sigma}{}_{\rho\sigma})$, а вторая порождается множителем $\Delta_h[g]$, который мы сейчас вычислим. Этот множитель необходимо знать для полей $g^{\mu\nu}$, удовлетворяющих условиям гармоничности (23.3). Для таких полей

$$\partial_\nu \delta(\sqrt{-g}\, g^{\lambda\nu}) = \sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \partial_\nu \delta x^\lambda = \\ = (\Box \delta x^\lambda + \varkappa u^{\mu\nu}\, \partial_\mu \partial_\nu \delta x^\lambda), \qquad (23.9)$$

так что формула для множителя $\Delta_h[g]$ принимает вид

$$\Delta_h[g] \int \prod_x \delta(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}\, \partial_\mu \partial_\nu \delta x^\lambda)\, d\delta x^\lambda = 1. \qquad (23.10)$$

Действуя далее как в теории поля Янга—Миллса, придем к результату

$$\ln \Delta_h[g] = 4\, \mathrm{Sp} \ln(1 + \varkappa \Box^{-1} u^{\mu\nu}\, \partial_\mu \partial_\nu) = \\ = -4 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-\varkappa)^n}{n} \int d^4 x_1 \ldots d^4 x_n\, u^{\mu_1\nu_1}\, \partial_{\mu_1} \partial_{\nu_1} D(x_1 - \\ - x_2) \ldots u^{\mu_n \nu_n}(x_n)\, \partial_{\mu_n} \partial_{\nu_n} D(x_n - x_1). \qquad (23.11)$$

Общий вид разложения (23.11) описывает бегущую по кольцу с n выходящими линиями фиктивную (векторную) частицу, взаимодействующую с гармоническим полем $u^{\mu\nu}$ по закону $\sim \varkappa u^{\mu\nu} \partial_\mu \chi^\rho \partial_\nu\, \chi_\rho$.

Отметим, что множитель $\prod_x g^{5/2}$ в мере (23.7) формально приводит к появлению добавки к действию вида

$$\Delta S = (5/2)\, i\delta^{(4)}(0) \int \ln g(x)\, d^4 x.$$

Роль этой добавки чисто перенормировочная и сводится к добавлению перенормировочных вершин, пропорциональных $\delta^4(0)$. Появление таких членов отмечалось во многих работах, посвященных нелинейным теориям.

Таким образом, построение формализма квантования и релятивистской теории возмущений по намеченной в § 19 и 20 общей схеме не встречает принципиальных затруднений. При переходе к каноническому (операторному) квантованию возникают две задачи: 1) привести действие гравитационного поля к гамильтоновой форме; 2) преобразовать континуальный интеграл в форме (23.4) к интегралу по каноническим переменным.

Первая из указанных проблем могла бы быть решена сразу после написания Эйнштейном уравнений теории тяготения (1916 г.) Однако прошло более сорока лет, пока первое решение было дано Дираком в 1958 г. [30]. По видимому, дело было в недостаточном внимании к проблеме, а также в ее технической сложности.

Приведем здесь решение проблемы, использующее формальное преобразование континуального интеграла. Такой подход, как нам кажется, делает выкладки более прозрачными и потому обладает определенной эвристической ценностью.

Рассмотрим континуальный интеграл

$$\int \exp(iS[g,\Gamma]) \prod_x dg d\Gamma, \tag{23.12}$$

не обращая пока внимания на множитель типа $\Delta_h[g] \prod_x \prod_\mu \times \delta(\partial_\nu(\sqrt{-g}g^{\mu\nu}))$. Будем исходить из действия $\dot{S}[g,\Gamma]$, в котором производные перекинуты с $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$ на $\sqrt{-g}g^{\mu\nu} \equiv h^{\mu\nu}$. Соответствующий лагранжиан

$$\tilde{\mathscr{L}}(x) = \frac{1}{2\varkappa^2}\{-\Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_\nu h^{\mu\nu} + \Gamma^\rho_{\mu\nu}\partial_\rho h^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}(\Gamma^\rho_{\mu\sigma}\Gamma^\sigma_{\rho\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\nu}\Gamma^\sigma_{\rho\sigma})\} \tag{23.13}$$

отличается от лагранжиана (23.1) дивергенцией, а уравнения движения для обоих лагранжианов совпадают. Однако интегралы действия, соответствующие лагранжианам (23.1) и (23.13), различны. В пользу лагранжиана $\tilde{\mathscr{L}}(x)$ говорит то, что действие именно с этим лагранжианом приводит, как мы увидим далее, к правильному выражению для энергии гравитационного поля, а также и то, что при переходе к слабому гравитационному полю, если положить $h^{\mu\nu} = g_0^{\mu\nu} + \varkappa u^{\mu\nu}$; $\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \varkappa\gamma^\rho_{\mu\nu}$, лагранжиан $\tilde{\mathscr{L}}(x)$ превращается в квадратичную форму по $u^{\mu\nu}$, $\gamma^\rho_{\mu\nu}$.

Выделим из $\tilde{\mathscr{L}}(x)$ члены, содержащие производные по времени ∂_0:

$$\frac{1}{2\varkappa^2}(\Gamma^0_{\mu\nu}\partial_0 h^{\mu\nu} - \Gamma^\rho_{\mu\rho}\partial_0 h^{\mu 0}) = \frac{1}{2\varkappa^2}(\Gamma^0_{ik}\partial_0 h^{ik} + (\Gamma^0_{i0} - \Gamma^k_{ik})\partial_0 h^{i0} - \Gamma^i_{0i}\partial_0 h^{00}). \tag{23.14}$$

Это выражение содержит все десять переменных $h^{\mu\nu}$ и все $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, кроме Γ^μ_{00}. Переменные Γ^μ_{00} входят в $\tilde{\mathscr{L}}(x)$ линейно и играют роль множителей Лагранжа.

Выражения

$$\left.\begin{aligned} A_0^{00} &= h^{ik}\,\Gamma_{ik}^0 + h^{00}\,\Gamma_{0i}^i + \partial_i\,h^{i0}; \\ A_i^{00} &= 2h^{k0}\,\Gamma_{ik}^0 + h^{00}\,(\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k) + \partial_i\,h^{00}, \end{aligned}\right\} \tag{23.15}$$

стоящие при Γ_{00}^{μ} в лагранжиане $\tilde{\mathcal{L}}(x)$, играют роль связей. Интеграл по Γ_{00}^{μ} вычисляется и сводится к δ-функционалу

$$\prod_x \prod_{\mu=0}^{3} \delta\left(A_{\mu}^{00}(x)\right). \tag{23.16}$$

Это дает возможность выразить переменные Γ_{0i}^i, $(\Gamma_{i0}^0 - \Gamma_{ik}^k)$ через Γ_{ik}^0 и $h^{\mu\nu}$. Члены, содержащие производные по времени, принимают вид

$$\frac{1}{2\varkappa^2}\left\{\Gamma_{ik}^0\,\partial_0\,h^{ik} - \left(\frac{2h^{k0}}{h^{00}}\,\Gamma_{ik}^0 + \frac{\partial_i\,h^{00}}{h^{00}}\right)\partial_0\,h^{i0} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial_i\,h^{i0}}{h^{00}} + \frac{h^{ik}}{h^{00}}\,\Gamma_{ik}^0\right)\partial_0\,h^{00}\right\}.$$

Это выражение приводится к виду

$$\frac{1}{2\varkappa^2}\cdot\frac{\Gamma_{ik}^0}{h^{00}}\,\partial_0\,(h^{00}\,h^{ik} - h^{i0}\,h^{k0}), \tag{23.17}$$

если опустить члены

$$\frac{1}{2\varkappa^2\,h^{00}}\,(\partial_0\,h^{00}\,\partial_i\,h^{i0} - \partial_i\,h^{00}\,\partial_0\,h^{i0}) =$$
$$= \frac{1}{2\varkappa^2}\,(\partial_0\,\ln h^{00}\,\partial_i\,h^{i0} - \partial_i\ln h^{00}\,\partial_0\,h^{i0}), \tag{23.18}$$

исчезающие при интегрировании по частям.

Формула (23.17) показывает, что естественными динамическими переменными являются величины

$$\pi_{ik} = -\frac{1}{h^{00}}\,\Gamma_{ik}^0; \quad q^{ik} = h^{i0}\,h^{k0} - h^{00}\,h^{ik}. \tag{23.19}$$

Переменные $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$, отличные от Γ_{ik}^0, нединамические. Гауссов интеграл по нединамическим $\Gamma_{\mu\nu}^{\rho}$ может быть взят в явном виде. Оставшийся интеграл можно преобразовать к интегралу по переменным q^{ik}, π_{ik}, $h^{\mu 0}$ ($\mu=0, 1, 2, 3$) вида

$$\int \exp(\mathrm{i}\, S[q^{ik}, \pi_{ik}, h^{\mu 0}]) \prod_x \cdot \prod_{i\leqslant k} dq^{ik}\, d\pi_{ik} \left(d\left(\frac{1}{h^{00}}\right) \prod_{i=1}^{3} d\left(\frac{h^{i0}}{h^{00}}\right)\right) \tag{23.20}$$

с действием S в гамильтоновой форме:

$$S=\frac{1}{2\varkappa^2}\int \left\{ \pi_{ik}\,\partial_0 q^{ik} - H(x) - \left(\frac{1}{h^{00}}-1\right) T_0(x) - \right.$$
$$\left. -\frac{h^{i0}}{h^{00}}\, T_i(x)\right\} d^4x. \tag{23.21}$$

Здесь

$$\left.\begin{aligned} T_0(x) &= q^{ij} q^{kl} (\pi_{ik}\pi_{jl} - \pi_{ij}\pi_{kl}) + q^{1/2} R_3;\\ T_i(x) &= 2\left(\nabla_i (q^{kl}\pi_{kl}) - \nabla_k q^{kl}\pi_{il}\right);\\ H(x) &= T_0(x) + \partial_i\partial_k q^{ik}(x), \end{aligned}\right\} \tag{23.22}$$

где

$$q=\det q^{ik}, \tag{23.23}$$

а R_3 — трехмерный скаляр кривизны, порожденный трехмерной метрикой $g_{ik} (i,k = 1, 2, 3)$.

Функции T_0, $T_i (i = 1, 2, 3)$ в действии (23.21) играют роль связей, а стоящие перед ними коэффициенты $(\frac{1}{h^{00}} - 1)$, h^{i0}/h^{00} — роль множителей Лагранжа.

Канонические переменные и выражения для связей имеют наглядный геометрический смысл. Функции q^{ik} и π_{ik} играют роль первой и второй квадратичных форм поверхности $x^0 = \mathrm{const}$, погруженной в четырехмерное пространство—время с метрикой $h^{\mu\nu}$ и связностью $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$. Точнее, q^{ik} — контравариантная плотность метрики веса $+2$; π_{ik} — ковариантная плотность веса -1. Связи — это известные в теории поверхностей соотношения Кодацци и Гаусса (см., например, [31]). В выражениях для связей ∇_k — ковариантная производная по отношению к метрике q^{ik}, а $q^{1/2}R_3$ — плотность соответствующей скалярной кривизны веса $+2$.

Отметим роль дивергенции $\partial_i\partial_k q^{ik}$ в плотности гамильтониана $H(x)$. Если выполнены уравнения связи $T_\mu = 0$, гамильтониан H сводится к трехмерному интегралу от дивергенции, т. е. к интегралу до бесконечно удаленной поверхности. Этот интеграл нетрудно вычислить, зная асимптотику функции $q^{ik}(x^0, \mathbf{x})$ при $r|\mathbf{x}| \to \infty$. Для асимптотически «плоского» (при $r \to \infty$) поля тяготения асимптотику q^{ik} можно [29] взять в виде

$$q^{ik} = \delta^{ik}\left(1 - \frac{\varkappa^2 M}{2\pi r}\right) + O\left(\frac{1}{r^2}\right). \qquad (23.24)$$

В этом случае энергия

$$H = \int H(x)\, d^3x = \lim_{S \to \infty} \frac{1}{2\varkappa^2} \oint\limits_S (\partial_k q^{ik},\ dS_i) = M \qquad (23.25)$$

оказывается равной коэффициенту M в асимптотике (23.24), имеющему смысл гравитационной массы системы. Это и следовало ожидать из основных принципов — формулы $E = Mc^2$ и равенства инертной и гравитационной масс.

Формула (23.21) решает задачу приведения действия к гамильтоновму виду. Подчеркнем еще раз, что использование континуального интегрирования оказывается полезным (хотя и не обязательным) при ее выводе.

Обратимся теперь ко второй из поставленных задач — приведению к гамильтонову виду интеграла (23.4). Можно подойти к задаче по-другому — исходя из выражения (23.21) для действия гравитационного поля в гамильтоновой форме, написать континуальный интеграл для системы со связями, следуя рецепту, изложенному в § 17, а затем попытаться привести получившийся интеграл к виду (23.4).

Для записи континуального интеграла необходимо наложить четыре дополнительных условия $\chi_a(x) = 0$ на канонические переменные q^{ik}, π_{ik}. Возникает континуальный интеграл с весом

$$\exp(\mathrm{i}\, S[q^{ik}, \pi_{ik}]) = \exp\left\{\mathrm{i} \int (\pi_{ik}\, \partial_0 q^{ik} - H(x))\, d^4x\right\} \qquad (23.26)$$

по мере

$$\det\{T_\mu, \chi_a\} \prod_x \left(\prod_\mu \delta(T_\mu) \prod_a \delta(\chi_a) \prod_{i \leqslant k} dq^{ik}\, d\pi_{ik}\right). \qquad (23.27)$$

Возьмем в качестве χ_a связи, впервые предложенные Дираком [30]:

$$\chi^i \equiv \partial_k (q^{-1/3} q^{ik}), \quad \chi^0 \equiv q^{ik}\, \pi_{ik}. \qquad (23.28)$$

Легко проверить, что выбранные связи коммутируют

$$\{\chi^i, \chi^j\} = 0; \quad \{\chi^i, \chi^0\} = 0, \tag{23.29}$$

и потому могут быть приняты за канонические импульсы.

Определитель $\det\{T_\mu \chi_a\}$ имеет вид

$$\det\{T_\mu, \chi_a\} = \det A \det B, \tag{23.30}$$

где A — оператор, действующий на функцию f; B — оператор, действующий на столбец (η^1, η^2, η^3) по правилам

$$\left.\begin{aligned} Af &= q^{ik} \nabla_i \nabla_k f + q^{1/2} R_3 f; \\ (B\eta)^i &= q^{-1/3}\left(q^{kl} \partial_k \partial_l \eta^i + \frac{1}{3} q^{il} \partial_k \partial_l \eta^k\right) \end{aligned}\right\}. \tag{23.31}$$

Вводя интегралы по вспомогательным переменным — множителям Лагранжа $h^{\mu 0}$, можно записать

$$\int \exp(iS) \det A \det B \prod_x \left(\prod_a \delta(\chi_a)\right) \prod_{i \leqslant k} dq^{ik}\, d\Pi_{ik} \times \\ \times d\frac{1}{h^{00}} \prod_{i=1}^{3} d\left(\frac{h^{i0}}{h^{00}}\right) \tag{23.32}$$

с действием S в форме (23.21).

Теперь попытаемся привести к виду (23.32) интеграл (23.4) с гармоническим дополнительными условиями $\partial_\nu(\sqrt{-g}\, g^{\mu\nu}) = 0$. Этот интеграл может быть преобразован в интеграл с дополнительными условиями Дирака (23.28). При этом множитель Δ_h под знаком интеграла необходимо заменить множителем (обозначим его Δ_χ), который определяется равенством

$$\Delta_\chi \int \prod_x \prod_{a=0}^{3} \delta(\chi_a^\Omega)\, d\Omega(x) = 1. \tag{23.33}$$

Вычисление интеграла (23.33) по калибровочной группе дает для множителя Δ_χ выражение

$$\Delta_\chi = \det \tilde{A} \det B, \tag{22.34}$$

в котором оператор B был определен выше (23.31), а оператор $\tilde{A}$ действует на функцию f по правилу

$$\tilde{A} f = q^{ik} \nabla_i \nabla_k f - h^{00} q^{ik}\left(\nabla_i \nabla_k \frac{1}{h^{00}}\right) f. \tag{23.35}$$

По структуре операторы A и $\tilde{A}$ аналогичны. Разность $\tilde{A}-A$ есть оператор умножения на функцию

$$-h^{00}q^{ik}\nabla_i\nabla_k\frac{1}{h^{00}}-q^{1/2}R_3. \tag{23.36}$$

В континуальном интеграле

$$\int\exp(\mathrm{i}S[g\Gamma])\Delta_\chi\prod_x\left(\prod_a\delta(\chi_a)\right)dg\,d\Gamma \tag{23.37}$$

с дополнительными условиями Дирака $\chi_a=0$ можно проинтегрировать по нединамическим $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, т. е. по $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$, отличным от Γ^0_{ik}. Это превращает интеграл (23.37) в интеграл вида

$$\int\exp(\mathrm{i}S[q^{ik},\ \pi_{ik},\ h^{\mu0}])\det\tilde{A}\det B\ \times$$

$$\times\prod_x\left(\prod_a\delta(\chi_a)\prod_{i\leqslant k}dq^{ik}d\pi_{ik}d\frac{1}{h^{00}}\prod_{i=1}^{3}d\left(\frac{h^{i0}}{h^{00}}\right)\right), \tag{23.38}$$

отличающийся от интеграла (23.32) заменой $\det A$ на $\det\tilde{A}$ в подынтегральном выражении. Указанное отличие и является формальной причиной того, что интеграл (23.37) и сводящийся к нему интеграл в релятивистской калибровке (23.4) не удается привести к интегралу по динамическим переменным по мере (23.27) с дополнительными условиями Дирака (23.26).

Для приведения интеграла в релятивистской калибровке к интегралу гамильтонова вида более удобны, чем условия Дирака (23.28), условия

$$\left.\begin{aligned}\chi_0&\equiv\ln q-\Phi=0; & \chi_1&\equiv q^{23}=0;\\ \chi_2&\equiv q^{31}=0; & \chi_3&\equiv q^{12}=0,\end{aligned}\right\} \tag{23.39}$$

где Φ — произвольная функция с асимптотикой $-3\varkappa^2M/2\pi r$ при $r\to\infty$. Множитель $\det\{T_\mu,\ \chi_a\}$ в (23.27) есть определитель оператора C:

$$\det\{T_\mu,\ \chi_a\}=\det C, \tag{23.40}$$

действующего на столбец $(\eta^0, \eta^1, \eta^2, \eta^3)$ по правилу

$$\left.\begin{aligned}
(C\eta)^0 &= \{T_\eta, \chi_0\} = -\partial_s \ln q - 4\partial_s \eta^s + 4\pi\eta^0;\\
(C\eta)^1 &= \{T_\eta, \chi_1\} = -\partial_s q^{23}\eta^s + q^{2s}\partial_s \eta^3 + q^{3s}\partial_s \eta^2 -\\
&\quad - 2q^{23}\partial_s \eta^s - 2\eta^0(\pi^{23} - q^{23}\pi);\\
(C\eta)^2 &= \{T_\eta, \chi_2\} = -\partial_s q^{31}\eta^s + q^{3s}\partial_s \eta^1 + q^{1s}\partial_s \eta^3 -\\
&\quad - 2q^{31}\partial_s \eta^s - 2\eta^0(\pi^{31} - q^{31}\pi);\\
(C\eta)^3 &= \{T_\eta, \chi_3\} = -\partial_s q^{12}\eta^s + q^{1s}\partial_s \eta^2 + q^{2s}\partial_s \eta^1 -\\
&\quad - 2q^{12}\partial_s \eta^s - 2\eta^0(\pi^{12} - q^{12}\pi),
\end{aligned}\right\} \quad (23.41)$$

где

$$T_\eta = \int (T_0 \eta^0 + T_i \eta^i)\, d^3 x. \qquad (23.42)$$

Интеграл (23.6) с гармоническими координатными условиями можно преобразовать к интегралу с дополнительными условиями (23.39)

$$\int \exp(iS[g])\, \Delta_\chi [g] \prod_x \left(g^{5/2} \left(\prod_{\mu \leqslant \nu} dg^{\mu\nu} \right) \prod_a \delta(\chi_a) \right). \qquad (23.43)$$

Функционал $\Delta_\chi [g]$ (23.43) определяется из условия

$$\Delta_\chi \int \prod_x \left(\prod_a \delta(\chi_a^\Omega) \right) d\Omega(x) = 1 \qquad (23.44)$$

и оказывается равным определителю оператора C_1

$$\Delta_\chi = \det C_1. \qquad (23.45)$$

Явный вид оператора C_1 легко вычислить, используя формулы инфинитезимального преобразования (23.2):

$$\left.\begin{aligned}
(C_1\eta)^0 &= -\partial_\lambda \ln q\, \eta^\lambda - 4\partial_s \eta^s + 4\frac{h^{0s}}{h^{00}}\partial_s \eta^0;\\
(C_1\eta)^1 &= -\partial_\lambda q^{23}\eta^\lambda + q^{2s}\partial_s \eta^3 + q^{3s}\partial_s \eta^2 - 2q^{23}\partial_s \eta^s +\\
&\quad + \left(2\frac{h^{0s}}{h^{00}} q^{23} - \frac{h^{20}}{h^{00}} q^{3s} - \frac{h^{30}}{h^{00}} q^{2s} \right) \partial_s \eta^0;\\
(C_1\eta)^2 &= -\partial_\lambda q^{31}\eta^\lambda + q^{3s}\partial_s \eta^1 + q^{1s}\partial_s \eta^2 - 2q^{31}\partial_s \eta^s +\\
&\quad + \left(2\frac{h^{0s}}{h^{00}} q^{31} - \frac{h^{30}}{h^{00}} q^{1s} - \frac{h^{10}}{h^{00}} q^{3s} \right) \partial_s \eta^0;\\
(C_1\eta)^3 &= -\partial_\lambda q^{12}\eta^\lambda + q^{1s}\partial_s \eta^2 + q^{2s}\partial_s \eta^1 - 2q^{12}\partial_s \eta^s +\\
&\quad + \left(2\frac{h^{0s}}{h^{00}} q^{12} - \frac{h^{10}}{h^{00}} q^{2s} - \frac{h^{20}}{h^{00}} q^{1s} \right) \partial_s \eta^0.
\end{aligned}\right\} \quad (23.46)$$

Преобразуем к виду (23.6) интеграл с мерой (13.27) и дополнительными условиями (23.39). Вводя интегралы по вспомогательным переменным — множителям Лагранжа $h^{\mu 0}$, запишем интеграл в виде

$$\int \exp(\mathrm{i}\, S) \det C \prod_x \left[\left(\prod_a \delta(\chi_a)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \left(\prod_{i\leqslant k} dq^{ik}\, d\pi_{ik}\right) d\,\frac{1}{h^{00}} \prod_{i=1}^{3} d\left(\frac{h^{0i}}{h^{00}}\right)\right] \tag{23.47}$$

с действием S в форме (23.21). Представим $\det C$ в виде интеграла по антикоммутирующим переменным η^a, $\bar{\eta}^a$ ($a=0, 1, 2, 3$):

$$\det C = \int \exp\left(\mathrm{i} \int \bar{\eta}^a(x)\, C_{ab}\, \eta^b(x)\, d^4 x\right) \prod_x \left(\prod_a d\bar{\eta}^a\, d\eta^a\right). \tag{23.48}$$

Если сделать в этом интеграле замену переменных

$$\left.\begin{aligned} &\eta^0 \to \eta^0/h^{00}, \quad \eta^i \to \eta^i - \eta^0 h^{0\,i}/h^{00}, \quad i=1,\ 2,\ 3; \\ &\bar{\eta}^\mu \to \bar{\eta}^\mu, \quad \mu = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \end{aligned}\right\} \tag{23.49}$$

то оператор C превратится в $\tilde{C}$, совпадающий с C_1, если вместо импульсов π_{ik} подставить их выражения через q^{ik}. Сделаем в интеграле по π_{ik} сдвиг

$$\pi_{ik} \to \pi_{ik} + \pi_{ik}(g), \tag{23.50}$$

где $\pi_{ik}(g)$ — выражение $\pi_{ik} = -\Gamma^0_{ik}/h^{00}$ через компоненты метрического тензора $g^{\mu\nu}$. Действие S в форме (23.21) превращается при сдвиге (23.50) в выражение

$$S[g] - \int \frac{1}{h^{00}}\, q^{ij}\, q^{kl} (\pi_{ik}\, \pi_{jl} - \pi_{ij}\, \pi_{kl})\, d^4 x, \tag{23.51}$$

а $\bar{\eta}^a \tilde{C}_{ab}\, \eta^b$ — в

$$\bar{\eta}^a (C_1)_{ab}\, \eta^b + \bar{\eta}^\mu\, l_\mu(\pi) \eta^0, \tag{23.52}$$

где $l_\mu(\pi)$ — линейные формы переменных π_{ik}, явный вид которых в дальнейшем не потребуется. Сделаем еще один сдвиг:

$$\pi_{ik} \to \pi_{ik} + \pi_{ik}(\bar{\eta},\ \eta), \tag{23.53}$$

уничтожающий линейное по π_{ik} выражение $\bar{\eta}^\mu\, l_\mu(\pi)\, \eta^0$, вместо которого возникает квадратичная форма, содержащая $(\eta^0)^2 \equiv 0$ и потому исчезающая тождественно. Остается взять гауссов интеграл

$$\int \exp\left(-i\int \frac{1}{h^{00}} q^{ij}q^{kl}(\pi_{ik}\pi_{jl}-\pi_{ij}\pi_{kl})\,d^4x\right)\prod_x\prod_{i\leqslant k} d\pi_{ik} = \prod_x g^{-3/2}\,q^{-1/2}. \qquad (23.54)$$

В результате интеграл (23.47) преобразуется к виду

$$\int \exp(i\,S[g])\det C_{\perp}\prod_x\left(q^{1/2}g^{5/2}\prod_{\mu\leqslant\nu} dg^{\mu\nu}\prod_a \delta(\chi_a)\right), \qquad (23.55)$$

совпадающему с (23.43), так как в силу условия $\chi_0=0$ (23.39) множитель

$$\prod_x q^{1/2} = \prod_x \exp(\Phi/2) \qquad (23.56)$$

есть произведение известных функций, и его можно считать нормировочной постоянной. Таким образом, возможность приведения интеграла (23.6) к гамильтонову виду доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Feynman R. P. Acta phys. polon., **24**, 697 (1963).
2. De Witt B. Phys. Rev., **160**, 1113 (1967), **162**, 1195, 1293 (1967).
3. Faddeev L. D., Popov V. N. Phys. Lett., **25B**, 30 (1967).
4. Попов В. Н., Фаддеев Л. Д. Препринт ИТФ УССР, Киев, 1967.
5. Фаддеев Л. Д. Тезисы 5 Международной конференции по гравитации и теории относительности. Тбилиси, 1968.
6. Фаддеев Л. Д. «Теор. и матем. физ.», **1**, 3 (1969).
7. Славнов А. А., Фаддеев Л. Д. «Теор. матем. физ.», **3**, 18, (1970).
8. Mandelstam S. Phys. Rev., **175**, **1580**, 1604 (1968).
9. Хриплович И. Б. «Ядерная физика», **10**, 402 (1969).
10. Фрадкин Е. С. В сб. «Проблемы теоретической физики», М., «Наука», 1969, стр. 386.
11. Fradkin E. S., Tyutin I. V. Phys. Lett., **30B**, 562 (1969); Phys. Rev., D. 2, 2841 (1970).
12. Veltman M. Nucl. Phys. **7B**, 637 (1968).
13. Макки Дж. Лекции по математическим основам квантовой механики. Пер. с англ. М., «Мир», 1965.
14. Картан Э. Интегральные инвариаиты. Пер. с англ. Л., Гостехиздат, 1940.
15. Feynman R. P. Rev., Mod. Phys., **20**, 367 (1948).
16. Feynman R. P. Phys. Rev., **84**, 108 (1951).

17. Гельфанд И. М., Яглом А. М. «Успехи матем. наук», **11**; 1, 77 (1956).
18. Евграфов М. А. «Докл. АН СССР», **191**, 979 (1970).
19. Биленький С. М. Введение в диаграммную технику Фейнмана. М., «Атомиздат», 1971.
20. Швебер С. Введение в релятивистскую квантовую теорию поля. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
21. Боголюбов Н. Н., Ширков Д. В. Введение в теорию квантованных полей. М., Гостехиздат, 1957.
22. Ахиезер А. И., Берестецкий В. Б. Квантовая электродинамика. М., «Наука», 1969.
23. Березин Ф. А. Метод вторичного квантования. М., «Наука», 1965.
24. Bialynicki-Birula I. J. Math. Phys., **3**, 1094 (1962).
25. Ward J. C. Phys. Rev., 77, 2931 (1950), **78**, 1821 (1950).
26. Yang C. N., Mills R. L. Phys. Rev., **96**, 191 (1954).
27. Hooft G. Preprint of University of Utrecht. 1971. Nucl. Phys., **B33**, 173 (1971).
28. Schwinger J. Phys. Rev., **125**, 1043 (1962); **127**, 324 (1962).
29. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. М., «Наука» 1965.
30. Dirac P. A. M. Proc. Roy. Soc., **A246**, 326, 333 (1958).
31. Фавар Ж. Курс локальной дифференциальной геометрии. Пер. с англ. М., Изд-во иностр. лит., 1963.

ОГЛАВЛЕНИЕ