

**ASYMPTOTIC  
EXPANSIONS**

by

**E. T. COPSON**

**Regius Professor of Mathematics in  
the University of St Andrews**

**CAMBRIDGE  
AT THE UNIVERSITY PRESS**

**1965**

Э. Т. КОПСОН

к

# АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ

Перевод с английского  
Г. М. МОРДАСОВОЙ

Под редакцией  
М. А. ЕВГРАФОВА

347628

Б-ка Нр. Под. Ки-та №

ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“  
Москва 1966

В книге английского математика Э. Копсона рассматриваются методы получения асимптотических разложений для функций, заданных определенными или контурными интегралами. Излагаются метод стационарной фазы, метод Лапласа, метод наибоыстрейшего спуска, метод перевала. Подробно исследуется поведение интегралов Эйри.

Основной особенностью книги является особая ясность и доступность изложения, которая сочетается с полной строгостью. Очень удачно подобраны примеры.

Книга будет ценным пособием для преподавателей, аспирантов и студентов университетов, пединститутов и инженерно-физических вузов.

## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Метод перевала известен в математике уже довольно давно, но в послевоенные годы произошло как бы новое рождение этого метода для широких слоев математиков. В разговорах математиков, да и физиков, очень часто можно было услышать вопрос: „Не знаете ли вы, где можно найти приличное изложение метода перевала?“ Среди разнообразнейших ответов на этот вопрос встречалось упоминание о таинственной книге Копсона, и это упоминание непременно сопровождалось самыми яркими эпитетами. Увы, книга Копсона была совершенно недоступима. С течением времени появилось довольно много вполне доступных работ, содержащих хорошее изложение метода перевала, и о таинственной книге Копсона забыли. Когда недавно мне попало в руки новое издание этой книги, я, конечно, стал просматривать ее с большим любопытством, но, признаться, не очень надеялся, что она способна конкурировать с последними работами по тем же вопросам. Однако талантливые книги и по математике стареют медленно, и, прочтя книгу Копсона, я убедился, что у нее и сейчас найдется немало поклонников. Книга легко читается, примеры подобраны очень удачно и совсем не избиты, некоторые из них производят большое эстетическое впечатление даже на опытного читателя. Рассматриваются в книге и такие вопросы, которые слабо освещены в имеющихся работах. Таков, например, материал последней главы.

Я рад случаю рекомендовать читателю интересную, со вкусом написанную, содержательную книгу.

*М. А. Евграфов*

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В 1943 г. по просьбе Вычислительной службы Морского министерства я написал небольшую монографию „The Asymptotic Expansion of a Function Defined by a Definite Integral or Contour Integral“. Эта книга вошла в серию монографий, изданных для нужд научно-исследовательских учреждений Морского министерства с целью заполнить пробелы в легко доступной математической литературе.

Монография, изданная Морским министерством скоро стала библиографической редкостью, и мои друзья убедили меня написать более обширную книгу, построенную по тому же принципу. Этот принцип таков: излагается несколько теорем, в которых сформулированы основные методы, затем они иллюстрируются на примере наиболее важных специальных функций.

Я должен выразить благодарность профессору Артуру Эрдейи за его советы и за то внимание, которое он уделял мне в течение всей работы над этой книгой.

Э. Т. К.

## Введение

Хотя современный подход к задачам анализа был известен уже в семнадцатом столетии, математиков восемнадцатого столетия часто больше интересовало формальное применение бесконечных процессов, чем их строгое обоснование. Некоторые из результатов, полученных этим формальным путем, поразительны.

Например, в 1730 г. Стирлинг в своей книге „Methodus Differentialis“ дал бесконечный ряд для  $\ln(m!)$ , который в современных обозначениях выглядит так:

$$\ln(m!) = z \ln z - z + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_1^{\infty} \frac{B_{2n} \left(\frac{1}{2}\right)}{(2n-1) 2nz^{2n-1}};$$

здесь  $z = m + \frac{1}{2}$ , а  $B_n(x)$  — полиномы Бернулли, определяемые из равенства

$$\frac{ze^{xz}}{e^z - 1} = \sum_0^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!}.$$

Стирлинг нашел первые пять полиномов и рекуррентную формулу для последовательного определения остальных. Аналогичная формула

$$\begin{aligned} \ln(m!) = & \left(m + \frac{1}{2}\right) \ln m - m + \\ & + \frac{1}{2} \ln(2\pi) + \sum_1^{\infty} \frac{B_{2n}(0)}{(2n-1) 2nm^{2n-1}} \end{aligned}$$

была впоследствии установлена Муавром. Оба эти ряда расходящиеся; однако Стирлинг, используя лишь несколько первых членов своего ряда, смог вычислить с десятью

десятичными знаками  $\lg(1000!)$  — число, заключенное между 2567 и 2568. Любая частичная сумма какого-либо из этих расходящихся рядов дает приближение к  $\ln(m!)$  с ошибкой порядка первого отброшенного члена; и так как эти члены вначале убывают очень быстро, то сумма из нескольких первых членов может дать очень хорошее приближение.

Другой интересный результат, принадлежащий Эйлеру, состоит в том, что

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \ln m = \gamma + \frac{1}{2m} - \sum_1^{\infty} \frac{B_{2n}(0)}{2nm^{2n}},$$

где  $\gamma$  — постоянная Эйлера. Эйлер указывал, что этот ряд расходится при  $m=1$ , он использовал его для  $m=10$ , чтобы вычислить  $\gamma$  с точностью до 15-го десятичного знака; впрочем ряд расходится для всех значений  $m$ . Это знакопеременный ряд; члены которого вначале убывают по абсолютной величине, частичные суммы его попеременно больше или меньше искомой „суммы“, и мы никогда не сможем обеспечить приближение с точностью много большей, чем величина наименьшего члена.

Лаплас в своей книге „Théorie analytique des probabilités“, опубликованной в 1812 г. в Париже, провел две новые идеи. Он показал, что функцию ошибок

$$\text{Erf}(T) = \int_0^T e^{-t^2} dt$$

можно представить в виде сходящегося степенного ряда

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n \frac{T^{2n+1}}{(2n+1)n!},$$

который он назвал „série-limite“<sup>1)</sup>, так как его частичные суммы попеременно больше или меньше значения интеграла и дают оценку для этого интеграла сверху и снизу.

<sup>1)</sup> В русской литературе термин „série-limite“ не употребляется. В. Л. Гончаров в переводе книги Поля и Сергё [23, т. 1, стр. 46] ввел термин „обвертывающий ряд“. — Прим. перев.

Когда  $T$  велико, то велико и число больших членов этого ряда, так что от этой оценки мало пользы. С помощью интегрирования по частям Лаплас получил для функции

$$\operatorname{Erfc}(T) = \int_T^{\infty} e^{-t^2} dt,$$

легко выражающейся через  $\operatorname{Erf}(T)$ , другой, более удобный обвертывающий ряд, а именно

$$\frac{e^{-T^2}}{2T} \left( 1 - \frac{1}{2T^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2T^2)^2} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2T^2)^3} + \dots \right).$$

Он заметил, что этот ряд неудобно использовать целиком из-за его расходимости, но свойства обвертывающего ряда делают его пригодным для вычисления значений  $\operatorname{Erfc}(T)$  при больших значениях  $T$ .

Вторая идея состояла в том, что значение интеграла

$$\int \varphi(x) \{u(x)\}^s dx,$$

когда  $s$  велико, определяется поведением функции  $u(x)$  вблизи ее стационарных точек. Лаплас использовал это для получения формулы

$$s! = s^{s+1/2} e^{-s} \sqrt{2\pi} \left[ 1 + \frac{1}{12s} + \dots \right],$$

которую часто несправедливо называют формулой Стирлинга.

Лежандр в своей книге „*Traité des fonctions elliptiques*“ (1825—1828 гг.) назвал бесконечный ряд *полусходящимся*, если он представляет данную функцию в том смысле, что ошибка, получающаяся при остановке на любом члене, имеет тот же порядок, что и первый отброшенный член. Название оказалось неудачным, так как это свойство не имело никакого отношения к сходимости; так, например, ряды

$$\sum_0^{\infty} (-1)^n r^n \quad (0 < r < 1) \quad \text{и} \quad \sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2}$$



оба сходятся, но первый является полусходящимся, а второй нет. Однако по традиции это название продолжает употребляться, оно встречается, например, у Янке и Эмде в „Таблицах функций с формулами и кривыми“. Полусходящиеся ряды сейчас называют *асимптотическими*.

В течение девятнадцатого столетия асимптотические разложения были получены для большинства специальных функций анализа, иногда только формально, иногда с точной оценкой величины ошибки. Особый интерес представляет докторская диссертация Стильтьеса [26], в которой он исследует ошибку, получающуюся при остановке на наименьшем члене асимптотического разложения некоторых важных специальных функций, и указывает, как можно уточнить найденное приближение.

Современная теория асимптотических разложений начинается с работы Пуанкаре [22]. Эта работа распадается на две неравные части. Первая часть посвящена суммируемости асимптотических рядов и применимости таких операций, как почленное дифференцирование и интегрирование; вторая — фактическому получению рядов, которые асимптотически представляют данные функции.

В настоящей книге рассматриваются асимптотические представления функций, заданных в виде определенного или контурного интегралов; обычно это аналитические функции комплексного переменного  $z$ . Если  $z$  — комплексное число, обозначим его действительную и мнимую части через  $\operatorname{Re} z$  и  $\operatorname{Im} z$ . Если  $z$  представлено в тригонометрической форме

$$z = r \cos \theta + ir \sin \theta \quad (r > 0),$$

назовем  $\theta$  аргументом  $z$  и обозначим его  $\theta = \arg z$ . Аргумент  $z$  определяется неоднозначно, только с точностью до слагаемого, кратного  $2\pi$ . Главное значение  $\arg z$  удовлетворяет неравенству  $-\pi < \arg z \leq \pi$ ; но так как нам будут встречаться нецелые степени  $z$ , то значения  $\arg z$ , отличные от главного, тоже будут нужны.

Терминология и обозначения специальных функций, использованные здесь, такие же, как в книге Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми „Higher Transcendental Functions“ (McGraw-Hill, 1953). Так как в ней

имеется хорошая библиография, то здесь мы даем лишь необходимые ссылки. Необходимо также отметить, что обозначения в этой книге не всегда такие же, как у Уиттекера и Ватсона в „Курсе современного анализа“ (Москва, 1934).

Библиография нашей книги представляет собой просто перечень работ, на которые имеются ссылки в тексте. Например, ссылка „Пуанкаре [22]“ на стр. 12 отсылает читателя к работе Анри Пуанкаре, опубликованной в журнале *Acta Mathematica*, которая значится под двадцать вторым номером в библиографии.

# Предварительные сведения

## § 1. Асимптотические последовательности

Пусть функции  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  определены на множестве  $R$  комплексной плоскости, и пусть точка  $z_0$  является предельной точкой  $R$ , возможно бесконечно удаленной. Так, например,  $R$  может быть углом

$$0 < |z| < \infty, \quad \alpha < \arg z < \beta,$$

а  $z_0$  — вершиной угла или точкой в бесконечности. Под окрестностью точки  $z_0$  (более точно, круговой окрестностью) мы понимаем открытый круг  $|z - z_0| < \delta$ , если точка  $z_0$  — конечная, и область  $|z| > \delta$ , если  $z_0$  — бесконечно удаленная точка.

Используя обычные обозначения, мы пишем  $f = O(\varphi)$ , если существует такая постоянная  $A$ , что  $|f| \leq A|\varphi|$  для всех  $z$  из  $R$ . Мы также пишем  $f = O(\varphi)$  при  $z \rightarrow z_0$ , если существуют постоянная  $A$  и окрестность  $U$  точки  $z_0$ , такие, что  $|f| \leq A|\varphi|$  для всех точек  $z$  из пересечения  $U$  и  $R$ ; мы пишем  $f = o(\varphi)$  при  $z \rightarrow z_0$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  существует такая окрестность  $U$  точки  $z_0$ , что  $|f| \leq \varepsilon|\varphi|$  для всех точек  $z$  из пересечения  $U$  и  $R$ . Иными словами, если  $\varphi$  не обращается в нуль на  $R$ , то формула  $f = O(\varphi)$  означает, что отношение  $f/\varphi$  ограничено, а формула  $f = o(\varphi)$  — что  $f/\varphi$  стремится к нулю при  $z \rightarrow z_0$ .

Последовательность функций  $\{\varphi_n(z)\}$  называется *асимптотической последовательностью* при  $z \rightarrow z_0$ , если существует окрестность точки  $z_0$ , в которой ни одна из функций не обращается в нуль (за исключением точки  $z_0$ ), и если для всех  $n$

$$\varphi_{n+1} = o(\varphi_n) \quad \text{при} \quad z \rightarrow z_0.$$

Например, если  $z_0$  — конечная точка, то  $\{(z - z_0)^n\}$  является асимптотической последовательностью при  $z \rightarrow z_0$ ; аналогично  $\{z^{-n}\}$  при  $z \rightarrow \infty$ .

## § 2. Определение Пуанкаре асимптотического разложения

Мы будем говорить, что формальный ряд

$$\sum_0^{\infty} a_n \varphi_n(z),$$

не обязательно сходящийся, является асимптотическим разложением в смысле Пуанкаре функции  $f(z)$  по асимптотической последовательности  $\{\varphi_n(z)\}$ , если для каждого значения  $m$

$$f(z) - \sum_0^m a_n \varphi_n(z) = o(\varphi_m(z))$$

при  $z \rightarrow z_0$ . Так как

$$f(z) - \sum_0^{m-1} a_n \varphi_n(z) = a_m \varphi_m(z) + o(\varphi_m(z)),$$

то частичные суммы  $\sum_0^{m-1} a_n \varphi_n(z)$  являются приближенными значениями функции  $f(z)$  с ошибкой  $O(\varphi_m)$  при  $z \rightarrow z_0$ , т. е. ошибка имеет величину порядка первого отброшенного члена. Если такое асимптотическое разложение существует, то оно единственно и коэффициенты определяются последовательно по формуле

$$a_m = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - \sum_0^{m-1} a_n \varphi_n(z)}{\varphi_m(z)}.$$

Если функция имеет асимптотическое разложение в этом смысле, то мы пишем

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} a_n \varphi_n(z).$$

Частичные суммы этого формального ряда будут часто называться *асимптотическими приближениями* к функции  $f(z)$ . Первый член называется *главным членом*; мы часто будем писать  $f(z) \sim a_0 \varphi_0(z)$ , понимая под этим, что  $f(z)/\varphi_0(z)$  стремится к  $a_0$  при  $z \rightarrow z_0$ .

Определение асимптотического разложения дано для функций комплексного переменного  $z$ , но его можно приспособить для функций действительного переменного  $x$ . Если предельная точка  $x_0$  является конечной, то  $R$  может быть открытым интервалом, причем  $x_0$  лежит внутри него или совпадает с одним из его концов, а окрестностью точки  $x_0$  служит открытый интервал  $|x - x_0| < \delta$ . Но если  $x_0$  — бесконечно удаленная точка, то мы должны различать два случая: 1)  $x \rightarrow +\infty$ ; тогда  $R$  может быть, например, полубесконечным интервалом  $x > a$ , 2)  $x \rightarrow -\infty$ ; в этом случае  $R$  может быть интервалом  $x < b$ . Возможны случаи, когда множество  $R$  дискретно, например, когда необходимо найти асимптотическое разложение для  $n$ -й частичной суммы бесконечного ряда для больших  $n$ , но такие вопросы выходят за рамки этой книги.

Вид асимптотического разложения, очевидно, зависит от выбора асимптотической последовательности. Например, при  $z \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{z-1} \sim \sum_1^{\infty} \frac{1}{z^n}$$

и

$$\frac{1}{z-1} \sim \sum_1^{\infty} \frac{z+1}{z^{2n}}$$

В этих примерах асимптотические разложения являются сходящимися рядами.

С другой стороны, две функции могут иметь одинаковые асимптотические разложения. Например, если  $-\pi/2 + \delta \leq \arg z \leq \pi/2 - \delta$ , где  $0 < \delta < \pi/2$ , то обе функции

$$\frac{1}{z+1}, \quad \frac{1}{z+1} + e^{-z}$$

при  $z \rightarrow \infty$  имеют одно и то же асимптотическое разложение

$$\sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{z^n},$$

так как в данном угле  $z^n e^{-z} \rightarrow 0$  при  $z \rightarrow \infty$  при любом  $n$ .

### § 3. Асимптотические степенные ряды

Если предельная точка  $z_0$  является конечной, преобразуем ее в бесконечно удаленную точку с помощью замены  $z' = 1/(z - z_0)$ . Мы будем предполагать, что это уже сделано, и будем рассматривать асимптотические разложения только при  $z \rightarrow \infty$  в угле  $\alpha < \arg z < \beta$ , или в случае функций действительного переменного  $x$  при  $x \rightarrow +\infty$  (или  $x \rightarrow -\infty$ ).

Простейшим типом асимптотической последовательности при  $z \rightarrow \infty$  является  $\{\varphi(z) z^{-n}\}$ . Если функция  $f(z)$  обладает асимптотическим разложением по этой последовательности, например

$$f(z) \sim \varphi(z) \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^n},$$

то отсюда следует, что

$$f(z) \sim \varphi(z) \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

347 628

причем последний ряд является асимптотическим разложением по последовательности  $\{z^{-n}\}$ . Асимптотическое разложение по последовательности  $\{z^{-n}\}$  называется *асимптотическим степенным рядом*.

### § 4. Действия над асимптотическими степенными рядами

Асимптотические степенные ряды и сходящиеся степенные ряды обладают очень сходными формальными свойствами. Основные результаты мы установим сначала для случая

действительного переменного. Предположим, что  $f(x)$  и  $g(x)$  имеют асимптотические разложения

$$f(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{x^n}, \quad g(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{b_n}{x^n}$$

при  $x \rightarrow +\infty$ .

I. Если  $A$  — постоянная, то

$$Af(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{Aa_n}{x^n}.$$

II. 
$$f(x) + g(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n + b_n}{x^n}.$$

Эти результаты немедленно следуют из определения.

III. 
$$f(x)g(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{c_n}{x^n},$$

где  $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_{n-1}b_1 + a_nb_0$ .

Для любого положительного целого числа  $N$

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_N}{x^N} + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right),$$

$$g(x) = b_0 + \frac{b_1}{x} + \dots + \frac{b_N}{x^N} + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right),$$

поэтому

$$f(x)g(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_N}{x^N} + O\left(\frac{1}{x^{N+1}}\right),$$

что и требовалось доказать.

Отсюда следует, что любая положительная целая степень функции  $f(x)$  обладает разложением в асимптотический степенной ряд и это же утверждение справедливо для любого полинома от  $f(x)$ .

IV. Если  $a_0 \neq 0$ , то

$$\frac{1}{f(x)} \sim \frac{1}{a_0} + \sum_1^{\infty} \frac{d_n}{x^n}$$

при  $x \rightarrow +\infty$ .

Во-первых,  $1/f(x)$  стремится к конечному пределу  $1/a_0$  при  $x \rightarrow \infty$ . Затем

$$\left\{ \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} \right\} : \frac{1}{x} = x \left\{ \frac{1}{a_0 + a_1 x^{-1} + O(x^{-2})} - \frac{1}{a_0} \right\} = \\ = \frac{-a_1 + O(x^{-1})}{a_0 \{a_0 + a_1 x^{-1} + O(x^{-2})\}} \rightarrow -\frac{a_1}{a_0^2}.$$

Таким же образом

$$\left\{ \frac{1}{f(x)} - \frac{1}{a_0} + \frac{a_1}{a_0^2 x} \right\} : \frac{1}{x^2} \rightarrow \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3}$$

и т. д. Следующие коэффициенты  $d_n$  определяются тем же путем.

И вообще любая рациональная функция от  $f(x)$  имеет разложение в асимптотический степенной ряд, если только знаменатель не стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$ .

V. Если  $f(x)$  непрерывна при  $x > a > 0$ , то при  $x > a$  функция

$$F(x) = \int_x^\infty \left\{ f(t) - a_0 - \frac{a_1}{t} \right\} dt$$

разлагается в асимптотический степенной ряд

$$F(x) \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{nx^n} + \dots$$

при  $x \rightarrow +\infty$ .

Так как  $f(t) - a_0 - a_1 t^{-1}$  непрерывна при  $t > a$  и имеет порядок  $O(t^{-2})$ , когда  $t \rightarrow +\infty$ , то интеграл  $F(x)$  существует при  $x > a$ .

Так как

$$F(x) = \int_x^\infty \left\{ \sum_2^m \frac{a_n}{t^n} + O\left(\frac{1}{t^{m+1}}\right) \right\} dt$$

для каждого целого числа  $m \geq 2$ , то мы имеем

$$F(x) = \sum_2^m \frac{a_n}{(n-1)x^{n-1}} + O\left(\frac{1}{x^m}\right) = \sum_1^{m-1} \frac{a_{n+1}}{nx^n} + O\left(\frac{1}{x^m}\right)$$

при  $x \rightarrow +\infty$ ; отсюда следует утверждение.



VI. Если  $f(x)$  имеет непрерывную производную  $f'(x)$ , которая разлагается в асимптотический степенной ряд при  $x \rightarrow +\infty$ , то это разложение имеет вид

$$f'(x) \sim - \sum_2^{\infty} \frac{(n-1) a_{n-1}}{x^n}.$$

Предположим, что

$$f'(x) \sim \sum_0^{\infty} \frac{b_n}{x^n}$$

при  $x \rightarrow +\infty$ . Далее, так как  $f'(x)$  непрерывна, то

$$\begin{aligned} f(y) - f(x) &= \int_x^y f'(t) dt = b_0(y-x) + b_1 \ln \frac{y}{x} + \\ &+ \int_x^y \left\{ f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right\} dt. \end{aligned}$$

Но  $f(y) \rightarrow a_0$  при  $y \rightarrow +\infty$  и интеграл

$$\int_x^{\infty} \left\{ f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right\} dt$$

сходится, так как подынтегральная функция имеет порядок  $O(t^{-2})$ . Следовательно,  $b_0 = b_1 = 0$  и

$$a_0 - f(x) = \int_x^{\infty} \left\{ f'(t) - b_0 - \frac{b_1}{t} \right\} dt.$$

Согласно (V),

$$a_0 - f(x) \sim \sum_1^{\infty} \frac{b_{n+1}}{n x^n}, \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Но мы знаем, что

$$a_0 - f(x) \sim - \sum_1^{\infty} \frac{a_n}{x^n},$$

и так как разложение в асимптотический степенной ряд единственно, то  $b_{n+1} = -na_n$ , откуда

$$f'(x) \sim - \sum_2^{\infty} \frac{(n-1)a_{n-1}}{x^n}$$

при  $x \rightarrow +\infty$ . Другими словами, асимптотические разложения допускают формальное почленное дифференцирование<sup>1)</sup>.

Эти результаты установлены для функций действительного переменного  $x$ , когда  $x \rightarrow +\infty$ . Их доказательства почти дословно переносятся на функции комплексного переменного  $z$  при  $z \rightarrow \infty$  или внутри угла, или во всей окрестности бесконечно удаленной точки.

Утверждение (VI) можно приспособить к случаю аналитических функций комплексного переменного  $z$ , которые, согласно определению, дифференцируемы. В данном случае получаем результат

VII. Если  $f(z)$  — аналитическая функция, регулярная в области  $R$ , определяемой неравенствами  $|z| > \alpha$ ;  $\alpha < |\arg z| < \beta$ , и если

$$f(z) \sim a_0 + \frac{a_1}{z} + \frac{a_2}{z^2} + \dots$$

равномерно по  $\arg z$  при  $|z| \rightarrow \infty$  в любом замкнутом угле, содержащемся в  $R$ , то

$$f'(z) \sim -\frac{a_1}{z^2} - \frac{2a_2}{z^3} - \frac{3a_3}{z^4} - \dots$$

равномерно по  $\arg z$  при  $|z| \rightarrow \infty$  в любом замкнутом угле, содержащемся в  $R$ .

Когда мы говорим, что разложение в асимптотический степенной ряд функции  $f(z)$  равномерно по  $\arg z$  при  $|z| \rightarrow \infty$  в замкнутом угле

$$\alpha_1 \leq \arg z \leq \beta_1,$$

<sup>1)</sup> В действительном случае это верно только тогда, когда производная допускает асимптотическое разложение того же вида.—Прим. ред.

содержащемся в  $R$ , то мы понимаем это так: для каждого целого числа  $m$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{m-1} \frac{a_n}{z^n} + \frac{\varphi_m(z)}{z^m},$$

где  $\varphi_m(z)$  — ограниченная в замкнутой области  $|z| \geq a_1$ ,  $\alpha_1 \leq \arg z \leq \beta_1$  функция, т. е. для любого целого числа  $m$  существует постоянная  $A_m$ , такая, что

$$|\varphi_m(z)| \leq A_m$$

в этой области.

Так как  $f(z)$  регулярна в  $R$ , то, по определению, она дифференцируема, поэтому  $\varphi_m(z)$  регулярна в  $R$  и

$$\begin{aligned} f'(z) &= - \sum_{n=1}^{m-1} \frac{na_n}{z^{n+1}} + \frac{\varphi'_m(z)}{z^m} - \frac{m\varphi_m(z)}{z^{m+1}} = \\ &= - \sum_{n=2}^{m-1} \frac{(n-1)a_{n-1}}{z^n} + \frac{\psi_m(z)}{z^m}, \end{aligned}$$

где

$$\psi_m(z) = \varphi'_m(z) - (m-1)a_{m-1} - \frac{m\varphi_m(z)}{z}.$$

Мы должны показать, что  $\psi_m(z)$  ограничена в любом замкнутом угле  $\alpha_2 \leq \arg z \leq \beta_2$ , содержащемся в  $R$ . Очевидно, достаточно показать, что  $\varphi'_m(z)$  ограничена.

Для данных  $\alpha_2$  и  $\beta_2$  выберем  $\alpha_1$  и  $\beta_1$  так, чтобы

$$\alpha < \alpha_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \beta_1 < \beta.$$

Тогда  $|\varphi_m(z)| < A_m$  для точек угла  $\alpha_1 \leq \arg z \leq \beta_1$ . Мы можем выбрать такое положительное число  $\delta$ , чтобы для точки  $\zeta$  из угла  $\alpha_2 \leq \arg \zeta \leq \beta_2$  окружность  $C$  с уравнением  $|z - \zeta| = \delta|\zeta|$  лежала в угле  $\alpha_1 \leq \arg z \leq \beta_1$ . Поэтому

$$\varphi'_m(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\varphi_m(z)}{(z - \zeta)^2} dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\varphi_m(\zeta + \delta\zeta e^{i\theta})}{\delta\zeta e^{i\theta}} d\theta,$$

и таким образом,

$$|\varphi'_m(\zeta)| \leq \frac{A_m}{\delta|\zeta|} \leq \frac{A_m}{\delta a},$$

что и требовалось доказать.

Разложение в асимптотический степенной ряд аналитической функции обычно имеет место в угле. В разных углах одна и та же функция может иметь различные асимптотические разложения; это называется *явлением Стокса*.

VIII. Если  $f(z)$  — однозначная функция, регулярная в области  $|z| \geq a$ , и если

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{a_n}{z^n}$$

при  $z \rightarrow \infty$  для всех значений  $\arg z$ , то асимптотический степенной ряд для достаточно больших значений  $|z|$  сходится к сумме  $f(z)$ .

Пусть  $R_1$  — любое число больше  $a$ . Тогда  $f(z)$  разлагается в ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n z^n,$$

сходящийся в области  $|z| \geq R_1$ , где

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{z^{n+1}} dz,$$

а  $\Gamma$  — любая окружность  $|z| = R$ ,  $R > R_1$ . В силу того что  $f(z)$  стремится к  $a_0$  при  $z \rightarrow \infty$ , она ограничена, поэтому существует такая постоянная  $M$ , что  $|f(z)| \leq M$ , когда  $|z| \geq a$ . Для  $n > 0$

$$|c_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Радиус  $R$  может быть сколь угодно большим, поэтому  $c_n = 0$ , когда  $n > 0$ . Таким образом,

$$f(z) = \sum_0^{\infty} c_{-n} z^{-n},$$

причем это сходящийся ряд для  $|z| \geq R_1$ . Но

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} a_n z^{-n}$$

при  $z \rightarrow \infty$ , поэтому

$$a_0 = \lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = c_0,$$

$$a_1 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ f(z) - a_0 \right\} : \frac{1}{z} = c_{-1},$$

$$a_2 = \lim_{z \rightarrow \infty} \left\{ f(z) - a_0 - \frac{a_1}{z} \right\} : \frac{1}{z^2} = c_{-2};$$

в общем случае  $a_n = c_{-n}$ . Следовательно, функция  $f(z)$  разлагается в сходящийся асимптотический степенной ряд.

# Интегрирование по частям

## § 5. Неполная гамма-функция

Одним из простейших путей получения асимптотического разложения функции, заданной в виде определенного интеграла, является метод интегрирования по частям. Члены асимптотического ряда находятся один за другим повторным применением этой операции, асимптотический характер полученного ряда затем устанавливается исследованием остаточного члена, который имеет вид определенного интеграла. Область применения этого метода весьма ограничена, и сформулировать сколько-нибудь общие точные теоремы было бы трудно. Вместо таких попыток мы постараемся разъяснить идею метода, рассматривая частные примеры.

В качестве первого примера мы возьмем неполную гамма-функцию, определенную формулой

$$\gamma(a, x) = \int_0^x e^{-t} t^{a-1} dt,$$

где  $x$  и  $a$  положительны. Ряд, удобный для вычислений при малых  $x$ , можно сразу получить, если разложить показательную функцию в ряд и проинтегрировать его почленно. Этот ряд

$$\gamma(a, x) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+a}}{(a+n)n!}$$

сходится для всех положительных значений  $x$ , но для вычислений он почти не используется<sup>1)</sup>. Например, если

<sup>1)</sup> Автор имеет в виду, что ряд не является асимптотическим при  $x \rightarrow +\infty$ . — *Прим. перев.*

$x = 10$ ,  $a = 1/2$ , то значение наибольшего его члена, соответствующего  $n = 8$ , около 923, однако  $\gamma(1/2, 10)$  равна  $\sqrt{\pi}$  с ошибкой порядка  $10^{-5}$ .

Когда  $x$  велико и положительно, лучше рассматривать функцию

$$\Gamma(a, x) = \Gamma(a) - \gamma(a, x) = \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt,$$

где интеграл является сходящимся для всех значений параметра  $a$ . Если мы проинтегрируем по частям один раз, то получим

$$\Gamma(a, x) = e^{-x} x^{a-1} + (a-1) \Gamma(a-1, x).$$

Повторяя этот прием, находим, что для целых положительных  $a$  функция  $\Gamma(a, x)$  есть произведение  $e^{-x}$  на полином от  $x$  степени  $a-1$ . В общем же случае после  $n$  интегрирований по частям мы получаем

$$\Gamma(a, x) = \sum_{r=1}^n \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-r+1)} e^{-x} x^{a-r} + \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \Gamma(a-n, x).$$

Теперь заметим, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \int_x^{\infty} e^{-t} t^{a-n-1} dt \right| &< \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \right| x^{a-n-1} \int_x^{\infty} e^{-t} dt = \\ &= \left| \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-n)} \right| e^{-x} x^{a-n-1}, \end{aligned}$$

если  $n > a-1$ . Следовательно, когда  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$\Gamma(a, x) \sim \sum_{r=1}^{\infty} \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(a-r+1)} e^{-x} x^{a-r}.$$

причем ошибка при остановке на  $n$ -м члене меньше по абсолютной величине, чем первый отбрасываемый член<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup> При  $n > a-1$ . — Прим. ред.

Частным случаем этой формулы является асимптотическое разложение функции ошибок

$$\operatorname{Erfc} T = \int_T^{\infty} e^{-u^2} du = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}, T^2\right),$$

когда  $T \rightarrow +\infty$ , а именно формула

$$\operatorname{Erfc} T \sim \frac{1}{2} \sqrt{\pi} e^{-T^2} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3}{2} - r\right) T^{2r-1}},$$

которая легко преобразуется в формулу Лапласа

$$\operatorname{Erfc} T \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} e^{-T^2} \sum_{r=1}^{\infty} \Gamma\left(r - \frac{1}{2}\right) \frac{(-1)^{r-1}}{T^{2r-1}}.$$

## § 6. Интегралы Френеля и аналогичные им

### Интегралы Френеля

$$\int_u^{\infty} \cos(\theta^2) d\theta, \quad \int_u^{\infty} \sin(\theta^2) d\theta,$$

применяющиеся в физической оптике, могут быть записаны в виде

$$\int_{u^2}^{\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_{u^2}^{\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt.$$

Они являются частными случаями действительной и мнимой частей интеграла

$$F(x, a) = \int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t^a} dt,$$

который сходится для всех положительных значений  $x$ , если  $a$  положительно.

Проинтегрировав по частям, получим

$$F(x, a) = \frac{ie^{ix}}{x^a} - iaF(x, a+1).$$



Повторяя этот прием, находим, что

$$F(x, a) = \frac{ie^{ix}}{x^a} \sum_{r=0}^n \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)(ix)^r} + \\ + \frac{1}{i^{n+1}} \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} F(x, a+n+1).$$

Отсюда вытекает, что при  $x \rightarrow +\infty$ ,

$$F(x, a) \sim \frac{ie^{ix}}{x^a} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+r)}{\Gamma(a)(ix)^r}.$$

Действительно, для абсолютной величины остаточного члена с номером  $n+1$  справедливо неравенство

$$\frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} \left| \int_x^{\infty} \frac{e^{it}}{t^{a+n+1}} dt \right| \leq \\ \leq \frac{\Gamma(a+n+1)}{\Gamma(a)} \int_x^{\infty} \frac{dt}{t^{a+n+1}} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a) x^{a+n}},$$

в правой части которого стоит абсолютная величина  $(n+1)$ -го члена. Поэтому остаточный член с номером  $n$  не превосходит по абсолютной величине абсолютной величины  $(n+1)$ -го члена, что и доказывает наше утверждение. Найденное асимптотическое разложение, очевидно, имеет место и в том случае, когда  $a$  — комплексная постоянная с положительной действительной частью.

## § 7. Задача Стильтьеса

В своей работе [26] Стильтьес применил метод интегрирования по частям к функции

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t+z}. \quad (7.1)$$

Так как этот интеграл сходится равномерно в области

$$|z| \geq \varepsilon > 0, \quad |\arg z| \leq \pi - \delta < \pi,$$

то  $F(z)$  — аналитическая функция, регулярная в комплексной плоскости, разрезанной вдоль отрицательной действительной оси. Это вырожденная гипергеометрическая функция  $\Psi(1, 1; z)$ , ее единственная особенность — точка ветвления в начале координат, вблизи которой она ведет себя, как главное значение  $\ln(1/z)$ .

Если мы проинтегрируем по частям  $n$  раз, то получим

$$F(z) = \sum_{r=1}^n \frac{(-1)^{r-1} (r-1)!}{z^r} + (-1)^n n! \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{(t+z)^{n+1}}.$$

Расходящийся ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} (r-1)!}{z^r}$$

является асимптотическим степенным разложением функции  $F(z)$ , справедливым при  $|z| \rightarrow \infty$ , в угле  $|\arg z| \leq \pi - \delta$ .

Для того чтобы доказать это, заметим, что когда  $t \geq 0$  и  $|\arg z| \leq \pi - \delta$ , то  $|z+t| \geq |z| \sin \delta$ . Для абсолютного значения остаточного члена  $R_n(z)$  имеет место оценка

$$\begin{aligned} |R_n(z)| &= \left| (-1)^n n! \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{(t+z)^{n+1}} \right| \leq \\ &\leq \frac{n!}{|z|^{n+1} \sin^{n+1} \delta} \int_0^{\infty} e^{-t} dt = \frac{n!}{|z|^{n+1} \sin^{n+1} \delta}, \end{aligned}$$

т. е.  $|R_n(z)|$  при  $|z| \rightarrow \infty$  является величиной того же порядка, что и  $(n+1)$ -й член. Таким образом,

$$F(z) \sim \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(-1)^{r-1} (r-1)!}{z^r}. \quad (7.2)$$

Когда  $z = x > 0$ , то

$$0 < (-1)^n R_n(x) = n! \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{(t+x)^{n+1}} < \frac{n!}{x^{n+1}},$$

поэтому остаточный член с номером  $n$  имеет тот же знак, что и  $(n+1)$ -й член, и меньше его по абсолютной

величине. Это асимптотическое разложение — знакопеременный ряд, обвертывающий (*série-limite*)<sup>1)</sup> в терминах Лапласа; его частичные суммы попеременно больше или меньше значения  $F(x)$ . Наилучшее приближение частичными суммами мы получим, если остановимся перед наименьшим членом. Стильтьес указывал, что можно затем получить более точный результат, прибавив половину наименьшего члена.

Пусть  $x = N + \eta$ , где  $0 \leq \eta < 1$ , а целое положительное число  $N$  выбрано так, что  $(N + 1)$ -й член является наименьшим. Остаточный член с номером  $N$  равен

$$\begin{aligned} R_N(N + \eta) &= (-1)^N N! \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{(t + N + \eta)^{N+1}} = \\ &= \frac{(-1)^N N!}{(N + \eta)^{N+1}} \int_0^{\infty} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{N + \eta}\right)^{-N-1} dt. \end{aligned}$$

Подинтегральная функция мажорируется функцией  $e^{-t}$  (и стремится к  $e^{-2t}$  при  $N \rightarrow \infty$ . — *Перев.*). По признаку Вейерштрасса

$$\begin{aligned} \frac{R_N(N + \eta)}{(-1)^N N! (N + \eta)^{-(N+1)}} &= \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} \left(1 + \frac{t}{N + \eta}\right)^{-N-1} dt \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-2t} dt = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

при  $N \rightarrow \infty$ . Поэтому, если  $x = N + \eta$ , где  $N$  — большое целое число,  $0 \leq \eta < 1$ , то остаточный член с номером  $N$  равен приблизительно половине  $(N + 1)$ -го члена, т. е. половине наименьшего члена.

## § 8. Аналитическое продолжение функции Стильтьеса

Функция  $F(z)$ , определенная в области  $|\arg z| < \pi$  равенством (7.1), является главной ветвью вырожденной гипергеометрической функции  $\Psi(1, 1; z)$ , имеющей логарифмическую точку ветвления в начале координат. Дру-

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 10. — *Прим. перев.*

гие ветви этой функции можно получить с помощью аналитического продолжения следующим образом.

Когда  $\operatorname{Re} z > 0$ , поворачивая путь интегрирования на прямой угол, получаем интеграл

$$F_1(z) = \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{t dt}{it + z}, \quad (8.1)$$

который дает еще одно представление для функции  $F(z)$  в правой полуплоскости. Но  $F_1(z)$  — аналитическая функция, регулярная в области  $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$  (плоскость с разрезом по лучу  $\arg z = -\pi/2$ ), так как интеграл (8.1) сходится равномерно на любом компактном множестве из этой области. Поэтому в силу того, что в угле  $-\pi/2 < \arg z < \pi$  функции  $F(z)$  и  $F_1(z)$  совпадают, функция  $F_1(z)$  дает аналитическое продолжение функции  $F(z)$  через разрез  $\arg z = \pi$ .

В третьем квадранте  $F(z)$  и  $F_1(z)$  — различные функции. Их разность можно представить в виде

$$\begin{aligned} F(z) - F_1(z) &= \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{z+s} - \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{i dt}{z+it} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C e^{-\sigma} \frac{d\sigma}{z+\sigma}, \end{aligned} \quad (8.2)$$

где  $C$  — граница квадранта  $|\sigma| \leq R$ ,  $0 \leq \arg \sigma \leq \pi/2$  в комплексной  $\sigma$ -плоскости. Когда  $z$  лежит в третьем квадранте, полюс  $\sigma = -z$  находится внутри  $C$ , если  $R > |z|$ , поэтому  $F(z) - F_1(z) = 2\pi i e^z$ .

Таким образом, формула

$$F_1(z) = F(z) - 2\pi i e^z \quad (8.3)$$

связывает значения двух ветвей в третьем квадранте.

Хотя функция  $F(z)$  претерпевает разрыв при переходе через отрицательную действительную ось, функция  $F_1(z)$  непрерывна, поэтому если  $a > 0$ , то

$$F(-a + 0i) - F(-a - 0i) = -2\pi i e^{-a}.$$

Стильтьес установил, что оба этих предельных значения могут быть выражены с помощью главного значения

интеграла в смысле Коши. В том случае, если  $a > 0$  и  $\Gamma$  — путь интегрирования в интеграле (8.2), обходящий точку  $\sigma = a$  сверху, мы получаем

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} e^{-\sigma} \frac{d\sigma}{\sigma - a} = 0.$$

Это дает<sup>1)</sup>

$$\text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s-a} - \pi i e^{-a} - \int_0^{\infty} e^{-it} \frac{it}{it-a} = 0,$$

или

$$F_1(-a) = \text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s-a} - \pi i e^{-a}. \quad (8.4)$$

Поэтому  $F(-a + 0i) = F_1(-a)$ , откуда и следует, что

$$F(-a \pm 0i) = \text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s-a} \mp \pi i e^{-a}. \quad (8.5)$$

Асимптотическое разложение функции  $F_1(z)$  можно легко найти из формулы (8.1), интегрируя по частям. В результате получаем

$$F_1(z) \sim \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} (k-1)!}{z^k}$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  в области  $-\pi/2 + \delta \leq \arg z \leq 3\pi/2 - \delta < 3\pi/2$ . Отсюда, используя (8.4), находим

$$\text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{s-a} \sim - \sum_1^{\infty} \frac{(k-1)!}{a^k} \quad (8.6)$$

при  $a \rightarrow +\infty$ ; член, содержащий  $e^{-a}$ , может быть опущен, так как он очень мал по сравнению со всеми членами ряда (8.6).

<sup>1)</sup> V. P.  $\int$  — интеграл в смысле главного значения по Коши. — Прим. ред.

Асимптотическое разложение (8.6) является рядом из положительных членов, и то обстоятельство, что он не знакопеременный, как отмечал Стильес, делает очень затруднительным оценку наилучшего приближения, которое можно получить с помощью частичных сумм данного ряда.

## § 9. Стильесовские наилучшие приближения

Обозначим

$$G(a) = \text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-s} \frac{ds}{a-s}. \quad (9.1)$$

Мы уже видели, что

$$G(a) \sim \sum_1^{\infty} \frac{(k-1)!}{a^k} \quad (9.2)$$

при  $a \rightarrow +\infty$ . Этот результат можно получить другим путем, который приведет нас к более удобной формуле для остаточного члена асимптотического разложения.

Записывая  $G(a)$  в виде

$$G(a) = \text{V. P.} \int_{-\infty}^a e^{t-a} \frac{dt}{t},$$

мы получаем равенство

$$e^a G(a) - e^b G(b) = \int_b^a e^t \frac{dt}{t}$$

для  $a > b > 0$ , которое имеет то преимущество, что не содержит интегралов, понимаемых в смысле главного значения по Коши. Интегрируя по частям  $n$  раз, получаем

$$e^a G(a) - e^b G(b) = \sum_{k=1}^n (k-1)! \left( \frac{e^a}{a^k} - \frac{e^b}{b^k} \right) + n! \int_b^a \frac{e^v}{v^{n+1}} dv.$$

Таким образом, если положить

$$G(a) = \sum_1^n \frac{(k-1)!}{a^k} + R_n(a),$$

то

$$e^a R_n(a) - e^b R_n(b) = n! \int_b^a \frac{e^v}{v^{n+1}} dv. \quad (9.3)$$

Отсюда

$$R_n(a) = e^{1-a} R_n(1) + n! \int_1^a \frac{e^{v-a}}{v^{n+1}} dv.$$

Покажем, что правая часть этого равенства при  $a \rightarrow \infty$  имеет порядок  $O(1/a^{n+1})$ . Это справедливо для первого члена, и если  $a > 2$ , то

$$\begin{aligned} 0 &< \int_1^a \frac{e^{v-a}}{v^{n+1}} dv = \int_1^{a/2} \frac{e^{v-a}}{v^{n+1}} dv + \int_{a/2}^a \frac{e^{v-a}}{v^{n+1}} dv \ll \\ &\ll \int_1^{a/2} e^{v-a} dv + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}a\right)^{n+1}} \int_{a/2}^a e^{v-a} dv = \\ &= (e^{-a/2} - e^{1-a}) + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}a\right)^{n+1}} (1 - e^{-a/2}) = O\left(\frac{1}{a^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

Это доказывает, что (9.2) дает асимптотическое разложение для функции  $G(a)$ ; но соотношение (9.3) позволяет нам получить более точные сведения.

В частности,

$$e^a R_1(a) - e^b R_1(b) = \int_b^a \frac{e^v}{v^2} dv,$$

откуда следует, что  $e^x R_1(x)$  монотонно возрастает от  $-\infty$  до  $+\infty$ , когда  $x$  растет от 0 до  $+\infty$ . Поэтому  $e^a R_1(a)$  положительна для достаточно больших значений  $a$ . Кроме того, так как

$$R_n(a) = \frac{n!}{a^{n+1}} + R_{n+1}(a),$$

то величина  $R_n(a)$  при возрастании  $n$  монотонно убывает, начиная с положительного числа  $R_1(a)$ . Она не может

стремиться к конечному пределу, так как ряд  $\sum_1^{\infty} (k-1)!/a^k$  расходится, следовательно,  $R_n(a)$  монотонно стремится к  $-\infty$ . Существует, таким образом, целое число  $N$ , обладающее свойством:  $R_N(a) \geq 0$ ,  $R_{N+1}(a) \leq 0$ , так что остаточный член  $R_n(a)$  изменяет знак, когда  $n$  проходит через значение  $N$ . Наилучшее приближение с помощью частичных сумм достигается выбором такого номера  $N$ , при котором  $R_n(a)$  изменяет знак.

Стилтьес доказал, что это изменение знака происходит около наименьшего члена. Для  $a = N + \eta$ , где  $N$  — большое целое число и  $0 \leq \eta < 1$ , он установил, что

$$R_{N-1}(N + \eta) = \frac{N!}{(N + \eta)^{N+1}} \left\{ \eta + \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\},$$

$$R_N(N + \eta) = \frac{N!}{(N + \eta)^{N+1}} \left\{ \eta - \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\},$$

$$R_{N+1}(N + \eta) = \frac{N!}{(N + \eta)^{N+1}} \left\{ \eta - \frac{4}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\},$$

так что  $R_{N-1}(N + \eta)$  и  $R_{N+1}(N + \eta)$  имеют разные знаки; знак  $R_N(N + \eta)$  зависит от величины  $\eta$ . Мы вернемся к этому вопросу в гл. 6.

Для знакомства с дальнейшим развитием этих идей, которые имеют большое значение в практическом использовании асимптотических разложений для вычислений, мы отсылаем к работам Дингля [11].

## § 10. Интегралы Фурье

В предыдущих примерах этой главы полное асимптотическое разложение было возможно получить, интегрируя по частям бесконечное число раз. Но есть случаи, когда интегрировать по частям можно только конечное число раз, тогда этот путь приводит к конечному разложению с остаточным членом. Простейшим таким примером является интеграл Фурье на конечном интервале.



Пусть  $\varphi(x)$  имеет  $N$  непрерывных производных на отрезке  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\nu x} \varphi(x) dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^{n+1}}{\nu^{n+1}} \{e^{i\nu\alpha} \varphi^{(n)}(\alpha) - e^{i\nu\beta} \varphi^{(n)}(\beta)\} + o\left(\frac{1}{\nu^N}\right) \quad (10.1)$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ , где  $\varphi^{(n)}(x)$  означает  $d^n \varphi / dx^n$ .

В самом деле, проинтегрировав  $N$  раз по частям, получим

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\nu x} \varphi(x) dx = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{i^{n+1}}{\nu^{n+1}} \{e^{i\nu\alpha} \varphi^{(n)}(\alpha) - e^{i\nu\beta} \varphi^{(n)}(\beta)\} + R_N,$$

где

$$R_N = \frac{i^N}{\nu^N} \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\nu x} \varphi^{(N)}(x) dx.$$

Так как  $\varphi^{(N)}(x)$ , по предположению, непрерывна, последний интеграл стремится к нулю при  $\nu \rightarrow \infty$  в силу леммы Римана и, следовательно,  $R_N = o(1/\nu^N)$ .

Этот результат справедлив и для  $\beta = \infty$ , если предположить, что  $\varphi^{(n)}(x)$  стремится к нулю при  $x \rightarrow +\infty$  для  $n = 0, 1, 2, \dots, N-1$  и что  $|\varphi^{(N)}(x)|$  интегрируема при  $x \geq \alpha$ . Аналогично, когда нижний предел бесконечен.

Если  $\varphi(t)$  или ее производные в некоторой точке имеют особенности, это рассуждение неприменимо. Заметим, что если имеется конечное число особых точек, то можно ограничиться рассмотрением только того случая, когда особая точка только одна и она является концом интервала интегрирования. Простейший случай представляет интеграл вида

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\nu x} (x - \alpha)^{\lambda-1} (\beta - x)^{\mu-1} \varphi(x) dx, \quad (10.2)$$

где  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu < 1$ , а  $\varphi(x)$  — непрерывно дифференцируема  $N$  раз.

## § 11. Сингулярный случай

Для того чтобы применить способ интегрирования по частям к интегралу (10.2) и использовать высшие производные функции  $\varphi(x)$ , необходимо иметь формулу для последовательных интегралов от функции

$$e^{ivx} (x - \alpha)^{\lambda-1} (\beta - x)^{\mu-1}.$$

Использованное здесь рассуждение заимствовано у Эрдейи [12].

Обозначим через  $I^n f(x)$  интеграл от функции  $f(x)$  на отрезке от  $a$  до  $x$ . Тогда

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-t)^{n-1} f(t) dt. \quad (11.1)$$

Действительно, эта формула справедлива для  $n=1$ . Если она верна для  $n=m$ , то

$$\begin{aligned} I^{m+1} f(x) &= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x du \int_a^u (u-t)^{m-1} f(t) dt = \\ &= \frac{1}{(m-1)!} \int_a^x dt \int_t^x (u-t)^{m-1} f(t) du = \\ &= \frac{1}{m!} \int_a^x (x-t)^m f(t) dt, \end{aligned}$$

т. е. она верна и для  $n=m+1$ . Равенство (11.1), таким образом, доказано по индукции.

Нижний предел  $a$  — произвольная постоянная. Если

$$f(x) = e^{ivx} (x - \alpha)^{\lambda-1}, \quad (11.2)$$

где  $v > 0$ ,  $0 < \lambda < 1$ , то интегрирование удобно проводить в плоскости комплексного переменного  $\sigma$ , выбрав  $a = \infty i$ . Тогда

$$I^n f(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{\infty i}^x (x - \sigma)^{n-1} (\sigma - \alpha)^{\lambda-1} e^{iv\sigma} d\sigma,$$

где  $x \geq \alpha$  и для  $(\sigma - \alpha)^{\lambda-1}$  берется главное значение. Положим  $\sigma = x + it$ ; в результате этой замены получим

$$I^n f(x) = \frac{e^{i\nu x - n\pi i/2}}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\nu t} t^{n-1} (x - \alpha + it)^{\lambda-1} dt,$$

и в частности

$$\begin{aligned} I^n f(\alpha) &= \frac{e^{i\nu\alpha + \lambda\pi i/2 - (n+1)\pi i/2}}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\nu t} t^{n+\lambda-2} dt = \\ &= e^{i\nu\alpha + \lambda\pi i/2 - (n+1)\pi i/2} \frac{\Gamma(n + \lambda - 1)}{(n-1)! \nu^{n+\lambda-1}}. \end{aligned} \quad (11.3)$$

В общем случае

$$\begin{aligned} |I^n f(x)| &\leq \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\nu t} t^{n-1} \{(x - \alpha)^2 + t^2\}^{(\lambda-1)/2} dt \leq \\ &\leq \frac{(x - \alpha)^{\lambda-1}}{(n-1)!} \int_0^{\infty} e^{-\nu t} t^{n-1} dt = \frac{(x - \alpha)^{\lambda-1}}{\nu^n}. \end{aligned} \quad (11.4)$$

Мы теперь в состоянии доказать следующий результат:

Пусть  $\varphi(x)$  имеет  $N$  непрерывных производных на отрезке  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Пусть функция  $\varphi(x)$  и первые  $N-1$  ее производных обращаются в нуль при  $x = \beta$ . Тогда если  $0 < \lambda < 1$ , то

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} e^{i\nu x} (x - \alpha)^{\lambda-1} \varphi(x) dx = \\ = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n + \lambda)}{n! \nu^{n+\lambda}} e^{i\nu\alpha + \lambda\pi i/2 + n\pi i/2} \varphi^{(n)}(\alpha) + O\left(\frac{1}{\nu^N}\right) \end{aligned} \quad (11.5)$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Используя обозначение (11.2), получаем

$$\begin{aligned} \int_a^\beta \varphi(x) f(x) dx &= \left[ \sum_{n=0}^{N-1} (-1)^n \varphi^{(n)}(x) I^{n+1} f(x) \right]_a^\beta + \\ &+ (-1)^N \int_a^\beta \varphi^{(N)}(x) I^N f(x) dx = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\lambda)}{n! \nu^{n+\lambda}} e^{i\nu a + \lambda\pi i/2 + n\pi i/2} \varphi^{(n)}(a) + R_N, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} |R_N| &= \left| \int_a^\beta \varphi^{(N)}(x) I^N f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\nu^N} \int_a^\beta |\varphi^{(N)}(x)| (x-a)^{\lambda-1} dx = O\left(\frac{1}{\nu^N}\right), \end{aligned}$$

что и доказывает этот результат. Условия, при которых он доказан, а именно требование, чтобы функция  $\varphi(x)$  и ее первые  $N-1$  производных обращались в нуль при  $x=\beta$ , выглядят довольно искусственными; это ограничение мы снимем в следующем пункте. Для того чтобы сделать это, нам нужна еще следующая асимптотическая формула, которая применима в том случае, когда особая точка — это  $x=a$ .

Пусть  $\varphi(x)$  имеет  $N$  непрерывных производных на отрезке  $a \leq x \leq \beta$ . Пусть  $\varphi(x)$  и ее первые  $N-1$  производных обращаются в нуль при  $x=a$ . Тогда если  $0 < \mu < 1$ , то

$$\begin{aligned} \int_a^\beta e^{i\nu x} (\beta-x)^{\mu-1} \varphi(x) dx &= \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n+\mu)}{n! \nu^{n+\mu}} e^{i\nu\beta - \mu\pi i/2 + n\pi i/2} \varphi^{(n)}(\beta) + O\left(\frac{1}{\nu^N}\right) \quad (11.6) \end{aligned}$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Этот результат получается из (11.5) с помощью замены переменной. Следует отметить, что оценка остаточного члена не столь хороша, как в случае (10.1), так как лемма Римана здесь уже неприменима.

## § 12. Применение „нейтрализатора“, введенного ван дер Корпутом

Результаты § 11 являются частными случаями следующей теоремы:

Пусть функция  $\varphi(x)$  имеет  $N$  непрерывных производных на отрезке  $\alpha \leq x \leq \beta$ . Пусть  $0 < \lambda < 1$ ,  $0 < \mu < 1$ . Тогда при  $\nu \rightarrow +\infty$

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{i\nu x} (x - \alpha)^{\lambda-1} (\beta - x)^{\mu-1} \varphi(x) dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n + \lambda)}{n! \nu^{n+\lambda}} e^{i\nu\alpha + \lambda\pi i/2 + n\pi i/2} \frac{d^n}{d\alpha^n} \{(\beta - \alpha)^{\mu-1} \varphi(\alpha)\} +$$

$$+ \sum_{n=0}^{N-1} \frac{\Gamma(n + \mu)}{n! \nu^{n+\mu}} e^{i\nu\beta - \mu\pi i/2 + n\pi i/2} \frac{d^n}{d\beta^n} \{(\beta - \alpha)^{\lambda-1} \varphi(\beta)\} +$$

$$+ O\left(\frac{1}{\nu^N}\right). \quad (12.1)$$

И обратно, эта теорема может быть выведена из результатов § 11 с помощью введения функции, которую ван дер Корпут в работе [8] назвал *нейтрализатором*.

Идея нейтрализатора очень проста. Пусть функция  $f(x)$  обладает непрерывными производными всех порядков, и пусть, скажем,

$$\nu_0(x) = e^{-1/x} \quad (x > 0), \quad \nu_0(0) = 0. \quad (12.2)$$

Тогда функция  $\nu_0(x) f(x)$  тоже имеет непрерывные производные всех порядков для  $x \geq 0$  и все эти производные обращаются в нуль при  $x = 0$ ; такая функция  $\nu_0(x)$  называется нейтрализатором. В данной задаче нам нужен нейтрализатор, обладающий следующими свойствами:

1)  $v(x)$  имеет непрерывные производные всех порядков на отрезке  $\alpha \leq x \leq \beta$ ;

2)  $v(\alpha) = 1$ ,  $v(\beta) = 0$ ;

3) производные  $v(x)$  всех порядков обращаются в нуль в точках  $x = \alpha$  и  $x = \beta$ .

Эта функция  $v(x)$ , не имеет, конечно, ничего общего с большим параметром  $v$ , который входит в интеграл (12.1).

Очевидным обобщением функции  $v_0(x)$ , определенной формулой (12.2), является функция

$$v_1(x) = \exp \left\{ -\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{\beta-x} \right\},$$

которая удовлетворяет всем условиям, кроме 2), так как при  $x \rightarrow \alpha + 0$  или  $x \rightarrow \beta - 0$ ,  $v_1(x) \rightarrow 0$ . Но интеграл

$$v(x) = C \int_{\alpha}^{\beta} v_1(t) dt \quad (\alpha \leq x \leq \beta)$$

при соответствующем выборе постоянной  $C$  уже удовлетворяет всем этим условиям. Конкретный вид выбранного нейтрализатора, очевидно, не имеет значения.

Выбрав такой нейтрализатор, получим

$$\begin{aligned} & \int_{\alpha}^{\beta} e^{lvx} (x-\alpha)^{\lambda-1} (\beta-x)^{\mu-1} \varphi(x) dx = \\ & = \int_{\alpha}^{\beta} e^{lvx} (x-\alpha)^{\lambda-1} \{v(x) (\beta-x)^{\mu-1} \varphi(x)\} dx + \\ & + \int_{\alpha}^{\beta} e^{lvx} (\beta-x)^{\mu-1} \{[1-v(x)] (x-\alpha)^{\lambda-1} \varphi(x)\} dx. \end{aligned}$$

Первый интеграл в правой части равенства имеет вид, к которому применима оценка (11.5), так как функция

$$\Phi(x) = v(x) (\beta-x)^{\mu-1} \varphi(x)$$

и все ее производные равны нулю при  $x = \beta$ . Более того, если мы будем рассматривать функцию  $\Phi(x)$  как произ-

ведение функций  $v(x)$  и  $(\beta - x)^{\mu-1}\varphi(x)$  и продифференцируем ее  $n$  раз, применяя теорему Лейбница, то все производные  $v(x)$  при  $x = \alpha$  обратятся в нуль, и мы получим

$$\Phi^{(n)}(\alpha) = \frac{d^n}{d\alpha^n} \{(\beta - \alpha)^{\mu-1} \varphi(\alpha)\}.$$

Применение формулы (11.5) к первому интегралу дает нам первую сумму в правой части равенства (12.1). Таким же образом второй интеграл порождает вторую сумму, что и доказывает наше утверждение.

## Метод стационарной фазы

### § 13. Гидродинамическая задача Кельвина

Идея метода стационарной фазы состоит в том, что главные члены асимптотического разложения интеграла

$$\int_a^b e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx \quad (\nu \rightarrow \infty), \quad (13.1)$$

где  $f(x)$  — действительная функция, порождаются сколь угодно малыми окрестностями концов интервала интегрирования и сколь угодно малыми окрестностями тех точек, в которых фаза  $\nu f(x)$  стационарна. Пока трудно описать этот метод более точно, но физическая идея Кельвина (см. [16]), лежащая в основе этого метода, крайне проста.

Рассмотрим двумерную задачу о движении волн жидкости в прямолинейном канале, исследованную, например, в работе Ламба [17]. Выберем начало координат на невозмущенной свободной поверхности и направим ось  $Oy$  вертикально вверх; тогда потенциал скорости  $\varphi$  будет равен

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, t) &= \\ &= \frac{g}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin st}{s} e^{my} \int_{-\infty}^\infty f(a) \cos m(x-a) da dm, \end{aligned} \quad (13.2)$$

если предположить, что в начальный момент профиль волны задается функцией  $\eta = f(x)$ . В этой формуле  $s$  — известная функция от переменного  $m$ : если канал очень глубокий, то  $s^2 = gm$ ; если же он имеет глубину  $h$ , то

$$s^2 = gm \operatorname{th}(mh).$$



В любом случае волновая скорость  $s/m$  отличается от групповой скорости. Мы покажем сейчас, как принцип интерференции, использованный Стоксом и Рэлеем для изучения групповой скорости, может привести на мысль о методе стационарной фазы.

Гидродинамическая задача состоит в определении профиля волны  $\eta = f(x, t)$  в любой последующий момент времени  $t$ ; ее решение дается формулой

$$\eta = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t},$$

где  $\varphi_0 = \varphi(x, 0, t)$ . Пусть в начальный момент волна сосредоточена только вблизи начала координат, т. е.  $f(x, 0)$  — дельта-функция Дирака; тогда

$$\varphi_0 = \frac{g}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin st}{s} \cos mx \, dm. \quad (13.3)$$

В случае глубокого канала ( $s^2 = gm$ ) формулу (13.3) можно преобразовать в интеграл

$$\varphi_0 = \frac{\sqrt{g}}{\pi \sqrt{x}} \int_{-\omega}^{\omega} \sin(\omega^2 - v^2) \, dv, \quad (13.4)$$

который по существу является интегралом Френеля (здесь  $\omega^2 = gt^2/4x$ ). В более общем случае нет столь простых преобразований, поэтому кельвиновская аппроксимация имеет большое значение. Для простоты ограничимся случаем глубокого канала.

Так как функция  $\varphi_0$  равна

$$\varphi_0 = \frac{g}{2\pi} \int_0^{\infty} \{\sin(st + mx) + \sin(st - mx)\} \frac{dm}{s}, \quad (13.5)$$

то она представляет собою суперпозицию двух систем волн, из которых одна движется налево, другая направо со скоростью  $s/m$ . Переменная  $t$ , обозначающая время, положительна. Мы можем для симметрии предположить также, что переменная  $x$  тоже положительна.

Пусть  $\mu$  — любое фиксированное значение  $m$ . Тогда, если  $m = \mu + u$ , где  $u$  мало, фаза первой системы волн приближенно равна

$$st + mx = t \sqrt{g\mu} + \mu x + u \left\{ x + \frac{1}{2} t \sqrt{\frac{g}{\mu}} \right\}.$$

Кельвин рассуждал так: волны первой системы, частоты которых лежат вне малого интервала  $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ , имеют разные фазы и, интерферируя, уничтожают друг друга. Таким же образом волны второй системы, интерферируя, в основном уничтожают друг друга. Но если  $\mu = gt^2/4x^2$ , волны второй системы с частотами, лежащими в интервале  $(\mu - \varepsilon, \mu + \varepsilon)$ , имеют одну фазу (во всяком случае, с точностью до  $\varepsilon$  в первой степени) и усиливают друг друга. Это значение  $\mu$  переменной  $m$  и является тем значением, которое делает фазу стационарной. Рассуждение Кельвина приводит, таким образом, к следующему приближенному значению функции  $\varphi_0$ :

$$\varphi_0 = \frac{\sqrt{g}}{2\pi\sqrt{\mu}} \int_{\mu-\varepsilon}^{\mu+\varepsilon} \sin(st - mx) dm, \quad (13.6)$$

когда  $\varepsilon$  очень мало отличается от значения  $\mu$  стационарной фазы.

Если мы сделаем замену переменной

$$m = \mu + u, \quad \mu = \frac{1}{4} \frac{gt^2}{x^2},$$

то получим

$$st - mx = \frac{gt^2}{4x} - \frac{x^3 u^2}{gt^2}$$

с точностью до  $u^2$ . Следовательно,  $\varphi_0$  приближенно равна

$$\varphi_0 = \frac{x}{\pi t} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \sin \left( \frac{gt^2}{4x} - \frac{x^3 u^2}{gt^2} \right) du.$$

Внимательно просмотрев рассуждение, замечаем, что пределы интегрирования можно заменить на  $\pm \infty$ . Если мы теперь положим

$$x^3 u^2 = gt^2 v^2,$$

то получим

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \frac{\sqrt{g}}{\pi\sqrt{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \sin\left(\frac{gt^2}{4x} - v^2\right) dv = \\ &= \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{\pi x}} \sin\left(\frac{gt^2}{4x} - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (13.7)$$

Сравнение этого приближенного значения с точным (13.4) показывает, что приближенная формула Кельвина хороша, когда  $gt^2/4x$  велико.

Пока эти рассуждения носят чисто физический характер, требование, чтобы параметр  $t^2/x$  был большим, не кажется очевидным. Но с помощью замены переменной мы можем записать (13.5) в виде

$$\varphi_0 = \frac{gt}{2\pi x} \int_0^{\infty} \left\{ \sin v(\theta + \sqrt{\theta}) - \sin v(\theta - \sqrt{\theta}) \right\} \frac{d\theta}{\sqrt{\theta}},$$

где  $v = gt^2/x$ , откуда ясно, что  $\varphi_0$  является разностью между мнимыми частями двух интегралов типа (13.1), т. е.

$$\int_a^b e^{ivf(\theta)} \varphi(\theta) d\theta,$$

при большом значении параметра  $v$ .

## § 14. Метод стационарной фазы

Во многих применениях метода стационарной фазы амплитуда  $\varphi(x)$  и фаза  $vf(x)$  являются аналитическими функциями комплексного переменного, поэтому мы ограничимся этим случаем. Доказательства теорем при более общих условиях были даны Ватсоном [29] и ван дер Корпутом [7]. Позже Эрдейи [13] указал, как некоторые из этих результатов могут быть получены более просто с помощью замены переменной с последующим повторным интегрированием по частям.

Мы будем рассматривать интеграл

$$F(\nu) = \int_a^b e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx, \quad (14.1)$$

где  $a$  и  $b$  конечны, а  $\nu$  — большое положительное число.

Предположим, что

1)  $f(z)$  и  $\varphi(z)$  — аналитические функции комплексного переменного  $z$ , регулярные в односвязной открытой области  $D$ , содержащей отрезок действительной оси  $a \leq x \leq b$ ;

2)  $f(z)$  принимает действительные значения на действительной оси.

Поскольку  $f(z)$  регулярна в области  $D$ , то  $f'(z)$  тоже регулярна в этой области. Поэтому  $f'(z)$  имеет только конечное число нулей на любом компактном множестве, содержащемся в области  $D$ . В частности,  $f'(x)$  имеет только конечное число нулей на отрезке  $a \leq x \leq b$ , следовательно, функция  $f(x)$  имеет только конечное число стационарных точек на этом отрезке.

Мы можем поэтому разделить отрезок  $a \leq x \leq b$  на конечное число замкнутых интервалов, в каждом из которых  $f'(x)$  или не обращается в нуль или обращается в нуль только в одном конце. Мы рассмотрим все три случая отдельно.

I. Если функция  $f(x)$  не имеет стационарных точек на отрезке  $a \leq x \leq \beta$ , то

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\beta e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx = \\ &= \frac{\varphi(\beta)}{i\nu f'(\beta)} e^{i\nu f(\beta)} - \frac{\varphi(a)}{i\nu f'(a)} e^{i\nu f(a)} + O\left(\frac{1}{\nu^2}\right) \end{aligned} \quad (14.2)$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Так как  $f'(x)$  не обращается в нуль на отрезке  $a \leq x \leq \beta$ , то  $1/f'(z)$  — аналитическая функция, регулярная в некоторой открытой области, которая содержит данный интервал.

Интегрирование по частям дает

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{i\nu} \int_a^\beta \frac{\varphi}{f'} \frac{d}{dx} (e^{i\nu f}) dx = \\ &= \frac{\varphi(\beta)}{i\nu f'(\beta)} e^{i\nu f(\beta)} - \frac{\varphi(\alpha)}{i\nu f'(\alpha)} e^{i\nu f(\alpha)} - \frac{1}{i\nu} \int_a^\beta e^{i\nu f} \psi dx, \end{aligned}$$

где

$$\psi(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{\varphi(x)}{f'(x)} \right).$$

Очевидно, что  $I$  имеет порядок  $O(1/\nu)$ . А так как  $\psi(x)$  удовлетворяет тем же условиям, что и  $\varphi(x)$ , то интеграл

$$\int_a^\beta e^{i\nu f} \psi dx$$

— также величина порядка  $O(1/\nu)$ , что и доказывает теорему.

II. Пусть  $f(x)$  имеет одну стационарную точку на отрезке  $a \leq x \leq \beta$ , а именно  $x = \alpha$ , тогда если  $f''(\alpha) > 0$ , то

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\beta e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx = \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2\nu f''(\alpha)} \right\}^{1/2} \varphi(\alpha) e^{i\nu f(\alpha) + \pi i/4} + O\left(\frac{1}{\nu}\right), \quad (14.3) \end{aligned}$$

если же  $f''(\alpha) < 0$ , то

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\beta e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx = \\ &= \left\{ \frac{\pi}{-2\nu f''(\alpha)} \right\}^{1/2} \varphi(\alpha) e^{i\nu f(\alpha) - \pi i/4} + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad (14.4) \end{aligned}$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Из теоремы видно, что если  $\varphi(\alpha) \neq 0$ , то интеграл  $I$  имеет величину порядка  $O(1/\sqrt{\nu})$ , что больше, чем вклад интервалов, не содержащих стационарных точек.

Согласно (I), мы можем взять  $\beta$  сколь угодно близким к  $\alpha$ . Выберем точку  $\beta$  так, чтобы она лежала внутри окружности с центром в точке  $\alpha$ , а все встречающиеся функции были регулярны внутри этой окружности. Более того, так как  $f'(\alpha) = 0$ ,  $f''(\alpha) > 0$ , мы можем выбрать точку  $\beta$  так, чтобы функция  $f(x)$  монотонно возрастала, когда  $x$  изменяется от  $\alpha$  до  $\beta$ . Если ввести новую переменную  $u$ , определив ее при помощи равенства

$$f(x) = f(\alpha) + u^2,$$

где  $u$  положительна в полуинтервале  $\alpha < x \leq \beta$ , то получим

$$I = e^{i\nu f(\alpha)} \int_0^\varepsilon e^{i\nu u^2} \varphi(x) \frac{dx}{du} du,$$

где  $\varepsilon = \sqrt{f(\beta) - f(\alpha)}$ .

Рассмотрим теперь уравнение

$$f(z) = f(\alpha) + w^2.$$

Так как  $f'(\alpha) = 0$ , то оно имеет два решения:

$$z = \alpha + \sum_1^{\infty} b_n w^n$$

и

$$z = \alpha + \sum_1^{\infty} b_n (-w)^n;$$

оба регулярны в окрестности точки  $w = 0$ , причем первый коэффициент  $b_1$  равен

$$b_1 = \sqrt{\frac{2}{f''(\alpha)}}.$$

Если мы возьмем для  $b_1$  положительное значение корня, то переменные  $x$  и  $u$  будут связаны соотношением

$$x = \alpha + \sum_1^{\infty} b_n u^n.$$

Далее, интеграл

$$\int_{\alpha}^z \varphi(t) dt$$

является аналитической функцией от  $z$ , регулярной в некоторой окрестности точки  $\alpha$ , причем функция  $z(\omega)$ , равная

$$z = \alpha + \sum_1^{\infty} b_n \omega^n,$$

регулярна в окрестности точки  $\omega = 0$ . Поэтому и сам интеграл является аналитической функцией от  $\omega$ , равной нулю при  $\omega = 0$  и разлагающейся в сходящийся степенной ряд

$$\sum_0^{\infty} \frac{c_n \omega^{n+1}}{n+1}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\varphi(z) \frac{dz}{d\omega} = \sum_1^{\infty} c_n \omega^n,$$

где

$$c_0 = \varphi(\alpha) \sqrt{\frac{2}{f''(\alpha)}}.$$

Мы можем теперь записать

$$\varphi(z) \frac{dz}{d\omega} = c_0 + \omega \psi(\omega),$$

где  $\psi(\omega)$  в свою очередь регулярна в окрестности точки  $\omega = 0$ , поэтому для интеграла  $I$  мы получаем выражение

$$I = e^{i\nu f(\alpha)} \int_0^{\varepsilon} e^{i\nu u^2} [c_0 + u\psi(u)] du = (I_1 + I_2) e^{i\nu f(\alpha)};$$

здесь

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\varepsilon} c_0 e^{i\nu u^2} du = \frac{c_0}{2\sqrt{\nu}} \int_0^{\nu\varepsilon^2} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}} dv = \\ &= \frac{c_0}{2\sqrt{\nu}} \int_0^{\infty} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}} dv - \frac{c_0}{2\sqrt{\nu}} \int_{\nu\varepsilon^2}^{\infty} \frac{e^{iv}}{\sqrt{v}} dv = \\ &= \frac{1}{2} c_0 \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{\pi i/4} + O\left(\frac{1}{\nu}\right), \end{aligned}$$

причем второе слагаемое оценивается с помощью интегрирования по частям и

$$\begin{aligned} |I_2| &= \left| \int_0^\varepsilon e^{i\nu u^2} u \psi(u) du \right| = \\ &= \left| \frac{1}{2i\nu} \left\{ e^{i\nu \varepsilon^2} \psi(\varepsilon) - \psi(0) - \int_0^\varepsilon e^{i\nu u^2} \psi'(u) du \right\} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\nu} \left\{ |\psi(\varepsilon)| + |\psi(0)| + \int_0^\varepsilon |\psi'(u)| du \right\} = O\left(\frac{1}{\nu}\right). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что при  $\nu \rightarrow +\infty$

$$\int_a^\beta e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx = \frac{1}{2} c_0 \sqrt{\frac{\pi}{\nu}} e^{i\nu f(\alpha) + \pi i/4} + O\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

что и требовалось. Доказательство в случае, когда  $f''(\alpha)$  отрицательна, получается тем же способом.

III. Пусть функция  $f(x)$  имеет одну стационарную точку на отрезке  $a \leq x \leq \beta$ , а именно точку  $x = \beta$ ; тогда если  $f''(\beta) > 0$ , то

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\beta e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx = \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2\nu f''(\beta)} \right\}^{1/2} \varphi(\beta) e^{i\nu f(\beta) + \pi i/4} + O\left(\frac{1}{\nu}\right) \quad (14.5) \end{aligned}$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ , и если  $f''(\beta) < 0$ , то

$$\begin{aligned} I &= \int_a^\beta e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx = \\ &= \left\{ \frac{\pi}{-2\nu f''(\beta)} \right\}^{1/2} \varphi(\beta) e^{i\nu f(\beta) - \pi i/4} + O\left(\frac{1}{\nu}\right). \quad (14.6) \end{aligned}$$

Это доказывается так же, как теорема II.

Если в теореме II первой отличной от нуля производной в точке  $x = a$  является  $n$ -я производная, то интеграл  $I$  имеет порядок  $O(\nu^{-1/n})$ . Для  $n = 3$  получаем теорему



IV. Пусть  $f(x)$  имеет одну стационарную точку на отрезке  $a \leq x \leq \beta$ , а именно точку  $x = a$ ; тогда, если  $f''(a) = 0$ ,  $f'''(a) > 0$ , то

$$I = \int_a^\beta e^{i\nu f(x)} \varphi(x) dx = \\ = \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \frac{6}{\nu f'''(a)} \right\}^{1/3} e^{i\nu f(a) + \pi i/6} \varphi(a) + O(\nu^{-2/3}) \quad (14.7)$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Это исследование можно было бы продолжить и рассмотреть более полно стационарные точки. В каждом случае оказывается, что главная часть интеграла порождается окрестностью стационарной точки. Эрдеи [13], используя методы действительного переменного, рассмотрел случай, когда

$$f'(x) = (x - a)^{\rho-1} (\beta - x)^{\sigma-1} f_1(x), \quad (\rho, \sigma \geq 1),$$

где  $f_1(x)$  положительна, и

$$\varphi(x) = (x - a)^{\lambda-1} (\beta - x)^{\mu-1} \varphi_1(x) \quad (0 < \lambda, \mu \leq 1),$$

причем и  $\varphi_1(x)$ , и  $f_1(x)$  имеют  $N$  непрерывных производных. Он использовал интегрирование по частям и нейтралizador ван дер Корпута, что позволило ему рассматривать точки  $a$  и  $\beta$  отдельно. Если  $f_1(x)$  и  $\varphi_1(x)$  имеют непрерывные производные всех порядков, этот метод дает полное асимптотическое разложение, а не только главный член.

## § 15. Приложения к функциям Бесселя

Метод стационарной фазы был использован Никольсоном [20] и Рэлеем [24], чтобы получить приближенные формулы для функций Бесселя  $J_\nu(\nu)$  и  $J_\nu(\nu \sec \beta)$ , когда  $\nu$  — большое положительное число, а  $\beta$  — положительный острый угол.

В формуле

$$J_\nu(\nu \sec \beta) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos \nu(\theta - \sec \beta \sin \theta) d\theta - \frac{\sin \nu\pi}{\pi} \int_0^\infty e^{-\nu(t + \sec \beta \operatorname{sh} t)} dt$$

второй член имеет порядок  $O(1/\nu)$ , так как

$$0 < \int_0^{\infty} e^{-\nu(t + \sec \beta \operatorname{sh} t)} dt < \int_0^{\infty} e^{-\nu t} dt = \frac{1}{\nu}.$$

Первый интеграл в правой части формулы является действительной частью интеграла

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i\nu f(\theta)} d\theta,$$

где

$$f(\theta) = \theta - \sec \beta \sin \theta.$$

Стационарной точкой функции  $f(\theta)$  будет точка  $\theta = \beta$ , причем  $f''(\beta) = \operatorname{tg} \beta$ . Мы можем, следовательно, использовать формулу (14.3) для отрезка  $\beta \leq \theta \leq \pi$  и формулу (14.5) для отрезка  $0 \leq \theta \leq \beta$ . Из этих формул следует, что

$$I = \left\{ \frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \beta} \right\}^{1/2} e^{i\nu(\beta - \operatorname{tg} \beta) + \pi i/4} + O\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

отсюда получаем оценку для функции  $J_{\nu}(\nu \sec \beta)$ :

$$J_{\nu}(\nu \sec \beta) = \left\{ \frac{2}{\pi \nu \operatorname{tg} \beta} \right\}^{1/2} \cos \left\{ \nu(\beta - \operatorname{tg} \beta) + \frac{1}{4} \pi \right\} + O\left(\frac{1}{\nu}\right)$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Аналогично,

$$J_{\nu}(\nu) = \operatorname{Re} I + O\left(\frac{1}{\nu}\right),$$

где

$$I = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{i\nu f(\theta)} d\theta$$

и

$$f(\theta) = \theta - \sin \theta.$$

В данном случае стационарной точкой будет только точка  $\theta = 0$ , причем  $f''(0) = 0$ ,  $f'''(0) = 1$ . Применяв формулу (14.7), получим

$$I = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left\{ \frac{6}{\nu} \right\}^{1/3} e^{\pi i/6} + O(\nu^{-2/3}).$$

поэтому

$$J_\nu(\nu) = \frac{1}{\pi} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \left(\frac{6}{\nu}\right)^{1/3} \frac{\sqrt{3}}{2} + O(\nu^{-2/3}),$$

или

$$J_\nu(\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi \nu^{1/3}} + O(\nu^{-2/3}).$$

Порядок остаточных членов в этих формулах указывает на то, что это весьма слабое приближение. Ватсон с помощью метода, который он назвал „скупным интегрированием по частям“, получил для остаточного члена более сильную оценку  $O(\nu^{-5/3})$ .

## § 16. Кратные интегралы

Метод стационарной фазы можно также применить к двойным интегралам вида

$$\iint e^{i\nu f(x, y)} \varphi(x, y) dx dy,$$

которые возникают в теории дифракции. Их оценка и библиография других работ, в которых рассматриваются эти вопросы, даны Джонсом и Клейном [15].

# Метод Лапласа

## § 17. Асимптотическая формула Лапласа

Пусть в интеграле

$$f(v) = \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) e^{vh(x)} dx \quad (17.1)$$

$\varphi(x)$  и  $h(x)$  — действительные и непрерывные функции на отрезке  $\alpha \leq x \leq \beta$ , а  $v$  — большая положительная постоянная. Тогда наибольшие вклады в значение интеграла, очевидно, дают окрестности тех точек, в которых  $h(x)$  принимает наибольшее значение. В точках, в которых достигается наибольшее значение,  $h'(x)$  может быть равной нулю или отличной от нуля, асимптотическая формула Лапласа для каждого из этих случаев получается разными способами.

Мы предположим, что производные  $h'(x)$  и  $h''(x)$  непрерывны. Рассмотрим сначала первый случай, когда  $h(x)$  достигает своего наибольшего значения в точке  $x = \alpha$ , в которой  $h'(x)$  отрицательна. В этом случае мы можем найти такой отрезок  $\alpha \leq x \leq \alpha + \eta$ , в котором  $h'(x)$  строго меньше нуля. Новая переменная  $t$ , определенная равенством

$$h(x) = h(\alpha) - t,$$

монотонно возрастает от 0, допустим до  $\tau$ , когда  $x$  возрастает от  $\alpha$  до  $\alpha + \eta$ . Главная часть функции  $f(v)$  для больших и положительных  $v$  равна

$$f(v) \sim \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \varphi(x) e^{vh(x)} dx = - \int_0^{\tau} \frac{\varphi(x)}{h'(x)} e^{vh(\alpha) - vt} dt.$$

Для достаточно малых  $\eta$  значения  $\varphi(x)$  и  $h'(x)$  мы можем заменить значениями  $\varphi(\alpha)$  и  $h'(\alpha)$ . Тогда получим

$$f(\nu) \sim -\frac{\varphi(\alpha)}{h'(\alpha)} e^{\nu h(\alpha)} \int_0^{\tau} e^{-\nu t} dt = -\frac{\varphi(\alpha)}{h'(\alpha)} \frac{e^{\nu h(\alpha)}}{\nu} (1 - e^{-\nu \tau}).$$

Следовательно, это нестрогое рассуждение приводит к асимптотической формуле

$$f(\nu) \sim -\frac{\varphi(\alpha)}{h'(\alpha)} \frac{e^{\nu h(\alpha)}}{\nu} \quad (17.2)$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ . Если  $\varphi(\alpha) = 0$ , аналогичное рассуждение дает оценку

$$f(\nu) = o\left(\frac{e^{\nu h(\alpha)}}{\nu}\right),$$

где точный порядок зависит от поведения  $\varphi(x)$  в точке  $x = \alpha$ .

Аналогично, если  $h(x)$  достигает своего наибольшего значения в точке  $x = \beta$ , где  $h'(x)$  положительна, то

$$f(\nu) \sim \frac{\varphi(\beta)}{h'(\beta)} \frac{e^{\nu h(\beta)}}{\nu}.$$

Предположение, что наибольшее значение достигается в одном из концов интервала интегрирования, не является ограничением, так как путь интегрирования всегда можно разбить на такие отрезки, в каждом из которых это условие выполняется.

Если  $h(x)$  имеет конечное число точек максимума, в которых  $h'(x) = 0$ , мы можем разбить путь интегрирования на конечное число таких отрезков, в каждом из которых  $h(x)$  достигает наибольшего значения только в одном конце, причем эти наибольшие значения — максимумы. Поэтому мы можем сосредоточить свое внимание на случае такого интеграла (17.1), когда  $h(x)$  имеет максимум в точке  $x = \alpha$  и  $h(x) < h(\alpha)$ , если  $\alpha < x \leq \beta$ . Когда максимум достигается в точке  $x = \beta$ , доказательство аналогичное.

В простейшем случае  $h'(\alpha) = 0$  и  $h''(\alpha) < 0$ . Тогда существует отрезок  $\alpha \leq x \leq \alpha + \eta$ , в котором  $h''(x)$  строго меньше нуля, а  $h'(x)$  отрицательна. Следуя Ла-

пласу [19], мы определим новую переменную  $t$  с помощью равенства

$$h(x) = h(\alpha) - t^2;$$

эта переменная  $t$  монотонно возрастает от 0, скажем, до  $\tau$ , когда  $x$  изменяется от  $\alpha$  до  $\alpha + \eta$ . Главная часть функции  $f(v)$ , когда  $v$  принимает большие положительные значения, в этом случае представляется в виде

$$f(v) \sim \int_{\alpha}^{\alpha+\eta} \varphi(x) e^{vh(x)} dx = - \int_0^{\tau} \varphi(x) e^{vh(\alpha) - vt^2} \frac{2t}{h'(x)} dt.$$

Для достаточно малых  $\eta$  значение функции  $\varphi(x)$  мы можем заменить значением  $\varphi(\alpha)$ . Тогда по формуле Лагранжа

$$t^2 = h(\alpha) - h(x) = -\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 h''(\xi),$$

где  $\alpha < \xi < \alpha + \eta$ , и

$$h'(x) = (x - \alpha) h''(\xi_1),$$

где  $\alpha < \xi_1 < \alpha + \eta$ . Таким образом,

$$\frac{2t}{h'(x)} = \frac{\sqrt{-2h''(\xi)}}{h''(\xi_1)},$$

причем правая часть равенства может быть заменена на  $-1/\sqrt{-h''(\alpha)}/2$  при достаточно малых  $\eta$ . Эти преобразования приводят к асимптотической формуле Лапласа

$$f(v) \sim 2 \frac{\varphi(\alpha) e^{vh(\alpha)}}{\sqrt{-2h''(\alpha)}} \int_0^{\tau} e^{-vt^2} dt.$$

Но в силу тех же соображений

$$f(v) \sim 2 \frac{\varphi(\alpha) e^{vh(\alpha)}}{\sqrt{-2h''(\alpha)}} \int_0^{\infty} e^{-vt^2} dt,$$

так как главная часть последнего интеграла порождается окрестностью точки  $t=0$ , в котором подынтегральная функция имеет максимум. Таким образом,

$$f(v) \sim \varphi(\alpha) e^{vh(\alpha)} \left[ \frac{-\pi}{2vh''(\alpha)} \right]^{1/2}, \quad (17.3)$$

когда  $\varphi(\alpha) \neq 0$ . Но если  $\varphi(\alpha) = 0$ , то

$$f(v) = o \left\{ e^{vh(\alpha)} \frac{1}{\sqrt{v}} \right\},$$

где точный порядок зависит от поведения функции  $\varphi(x)$  в точке  $x = \alpha$ . Когда локальный максимум достигается в точке  $x = \beta$ , имеет место такая же формула, если заменить  $\alpha$  на  $\beta$ . Если первые  $n - 1$  производных функции  $h(x)$  обращаются в нуль в точке  $x = \alpha$ , а  $n$ -я производная отрицательна, можно применить аналогичные рассуждения; в этом случае новая переменная вводится с помощью равенства

$$h(x) = h(\alpha) - t^n.$$

Было бы трудно обосновать способ получения асимптотической формулы Лапласа, двигаясь предложенным выше путем, поэтому мы дадим другое доказательство при условиях, достаточно широких для многих приложений, близкое к идеям, изложенным в книге Полия и Сегё [23]. За доказательством при менее ограничительных условиях мы отсылаем читателя к работе Уиддера [32].

### § 18. Доказательство асимптотической формулы Лапласа

Пусть  $\varphi(x)$  и  $h(x)$  — две действительные непрерывные функции, определенные на отрезке  $\alpha \leq x \leq \beta$  (конечном или полубесконечном), такие, что

1) функция  $\varphi(x)e^{vh(x)}$  абсолютно интегрируема на данном отрезке для любого положительного значения  $v$ ;

2)  $h(x)$  имеет один максимум на данном отрезке, а именно в точке  $x = \alpha$ , и наибольшее значение функции  $h(x)$  на любом замкнутом подмножестве, не содержащем  $\alpha$ , меньше чем  $h(\alpha)$ ;

3) функция  $h''(x)$  непрерывна;  $h'(\alpha) = 0$ ,  $h''(\alpha) < 0$ . Тогда если  $v \rightarrow +\infty$ , то

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) e^{vh(x)} dx \sim \varphi(\alpha) e^{vh(\alpha)} \left[ \frac{-\pi}{2vh''(\alpha)} \right]^{1/2}.$$

В силу предположений теоремы мы можем взять произвольное положительное число  $\varepsilon$  и затем подобрать такое положительное число  $\delta$  ( $\delta < \beta - \alpha$ ), чтобы для любого  $x$  из отрезка  $\alpha \leq x \leq \alpha + \delta$  выполнялись неравенства

$$\begin{aligned} \varphi(\alpha) - \varepsilon &\leq \varphi(x) \leq \varphi(\alpha) + \varepsilon, \\ h''(\alpha) - \varepsilon &\leq h''(x) < h''(\alpha) + \varepsilon < 0. \end{aligned}$$

Так как на этом отрезке

$$h(x) = h(\alpha) + \frac{1}{2}(x - \alpha)^2 h''(\xi),$$

где  $\alpha < \xi < \alpha + \delta$ , то значения функции  $h(x) - h(\alpha)$  заключены между  $-(B/2)(x - \alpha)^2$  и  $-(A/2)(x - \alpha)^2$ , где  $A$  и  $B$  — положительные постоянные, равные

$$A = -h''(\alpha) - \varepsilon, \quad B = -h''(\alpha) + \varepsilon.$$

Следовательно, значения интеграла

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \varphi(x) e^{vh(x)} dx$$

заклучены между значениями интегралов

$$\{\varphi(\alpha) - \varepsilon\} e^{vh(\alpha)} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{-vB(x-\alpha)^2/2} dx$$

и

$$\{\varphi(\alpha) + \varepsilon\} e^{vh(\alpha)} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{-vA(x-\alpha)^2/2} dx.$$

Далее, ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\alpha+\delta} e^{-vA(x-\alpha)^2/2} dx &= \int_0^{\infty} e^{-vAu^2/2} du - \int_0^{\infty} e^{-vAu^2/2} du = \\ &= \left\{ \frac{\pi}{2vA} \right\}^{1/2} \{1 + O(e^{-vA\delta^2/2})\}, \end{aligned}$$



когда  $\nu$  велико. Отсюда следует, что

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \leq \leq \{\varphi(\alpha) + \varepsilon\} e^{\nu h(\alpha)} \left\{ \frac{\pi}{2\nu A} \right\}^{1/2} [1 + O(e^{-\nu A \delta^2/2})],$$

и аналогично

$$\int_{\alpha}^{\alpha+\delta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \geq \geq \{\varphi(\alpha) - \varepsilon\} e^{\nu h(\alpha)} \left\{ \frac{\pi}{2\nu B} \right\}^{1/2} [1 + O(e^{-\nu B \delta^2/2})].$$

Для остальной части интервала мы имеем

$$\left| \int_{\alpha+\delta}^{\beta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \right| \leq \int_{\alpha+\delta}^{\beta} |\varphi(x)| e^{h(x)} e^{(\nu-1)M} dx,$$

где

$$M = \sup_{\alpha+\delta < x < \beta} h(x) < h(\alpha),$$

согласно условию 2). Поэтому, используя условие 1), получаем оценку

$$\left| \int_{\alpha+\delta}^{\beta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \right| \leq e^{(\nu-1)M} \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)| e^{h(x)} dx = K e^{(\nu-1)M}.$$

$$\text{Здесь } K = \int_{\alpha}^{\beta} |\varphi(x)| e^{h(x)} dx.$$

Теперь мы имеем

$$\begin{aligned} & \{\varphi(\alpha) - \varepsilon\} \left\{ \frac{\pi}{2B} \right\}^{1/2} [1 + O(e^{-\nu B \delta^2/2})] - \frac{K \sqrt{\nu}}{e^M} e^{\nu \{M - h(\alpha)\}} \leq \\ & \leq \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \sqrt{\nu} e^{-\nu h(\alpha)} \leq \\ & \leq \{\varphi(\alpha) + \varepsilon\} \left\{ \frac{\pi}{2A} \right\}^{1/2} [1 + O(e^{-\nu A \delta^2/2})] + \frac{K \sqrt{\nu}}{e^M} e^{\nu \{M - h(\alpha)\}}. \end{aligned}$$

Пусть  $\nu \rightarrow +\infty$ . Тогда

$$\begin{aligned} \{\varphi(\alpha) - \varepsilon\} \left\{ \frac{-\pi}{2h''(\alpha) - 2\varepsilon} \right\}^{1/2} &\leq \\ &\leq \liminf_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \sqrt{\nu} e^{-\nu h(\alpha)} \leq \\ &\leq \overline{\lim}_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \sqrt{\nu} e^{-\nu h(\alpha)} \leq \\ &\leq \{\varphi(\alpha) + \varepsilon\} \left\{ \frac{-\pi}{2h''(\alpha) + 2\varepsilon} \right\}^{1/2}. \end{aligned}$$

Но так как  $\varepsilon$  выбирается произвольно, то отсюда вытекает, что

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \sqrt{\nu} e^{-\nu h(\alpha)} = \varphi(\alpha) \left\{ \frac{-\pi}{2h''(\alpha)} \right\}^{1/2},$$

т. е. что

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) e^{\nu h(x)} dx \sim \varphi(\alpha) e^{\nu h(\alpha)} \left\{ \frac{-\pi}{2\nu h''(\alpha)} \right\}^{1/2},$$

что и требовалось доказать. В том случае, когда  $\varphi(\alpha)$  равняется нулю, результат можно получить тем же путем.

Другой вид асимптотической формулы получается, если положить  $e^{h(x)} = f(x)$ , а именно если  $f(x)$  имеет максимум в точке  $x = \alpha$ , причем  $f'(\alpha) = 0$ ,  $f''(\alpha) < 0$ ; тогда

$$\int_{\alpha}^{\beta} \varphi(x) \{f(x)\}^{\nu} dx \sim \varphi(\alpha) \{f(\alpha)\}^{\nu+1/2} \left\{ \frac{-\pi}{2\nu f''(\alpha)} \right\}^{1/2}$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ .

### § 19. Несколько примеров на асимптотическую формулу Лапласа

Простой пример на асимптотическую формулу Лапласа возникает при изучении бесселевых функций  $I_n(t)$  целого порядка  $n$ , имеющих следующее интегральное представление:

$$I_n(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{t \cos \theta} \cos n\theta d\theta.$$

Здесь  $\varphi(\theta) = \cos n\theta$ ,  $h(\theta) = \cos \theta$ . Монотонно убывающая функция  $h(\theta)$  имеет максимум при  $\theta = 0$ . Так как  $h(0) = 1$ ,  $h'(0) = 0$  и  $h''(0) = -1$ , то

$$I_n(t) \sim \frac{e^t}{\sqrt{2\pi t}}$$

при  $t \rightarrow +\infty$ .

В качестве примера на вторую асимптотическую формулу рассмотрим первый интеграл Лапласа для полиномов Лежандра  $P_n(\mu)$ , а именно интеграл

$$P_n(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \{\mu + (\mu^2 - 1)^{1/2} \cos \theta\}^n d\theta,$$

где  $\mu > 1$  и квадратный корень положителен. Здесь  $\varphi(\theta) = 1$  и

$$f(\theta) = \mu + (\mu^2 - 1)^{1/2} \cos \theta.$$

Так как  $f(\theta)$  имеет наибольшее значение в точке  $\theta = 0$ , где  $f'(\theta) = 0$ ,  $f''(\theta) = -(\mu^2 - 1)^{1/2}$ , мы сразу же получаем формулу

$$P_n(\mu) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi n}} \frac{\{\mu + (\mu^2 - 1)^{1/2}\}^{n+1/2}}{(\mu^2 - 1)^{1/4}}$$

при  $n \rightarrow \infty$ .

В качестве последнего примера возьмем гамма-функцию, определенную эйлеровым интегралом

$$\Gamma(v+1) = \int_0^\infty e^{-u} u^v du,$$

и найдем ее асимптотическую формулу для больших положительных  $v$ . К данному интегралу метод Лапласа не применим, так как функция  $u$  не имеет максимума. Но если мы положим  $u = vt$ , то интеграл примет вид

$$\Gamma(v+1) = v^{v+1} \int_0^\infty e^{v(-t + \ln t)} dt.$$

Этот интеграл имеет требуемую форму, так как функция  $h(t) = -t + \ln t$  достигает максимума в единственной

точке  $t=1$ , в которой  $h'(1)=0$ ,  $h''(1)=-1$ . Если мы разобьем отрезок интегрирования на две части:  $0 \leq t \leq 1$  и  $t \geq 1$ , и применим метод Лапласа к обоим интегралам, то получим

$$\Gamma(v+1) \sim (2\pi v)^{1/2} v^v e^{-v}$$

при  $v \rightarrow +\infty$ .

## § 20. Обобщения метода Лапласа

Обсуждая метод Лапласа, мы рассмотрели интегралы вида

$$\int_a^{\beta} \varphi(x) e^{vh(x)} dx$$

при  $v \rightarrow +\infty$ , где функция  $h(x)$  имеет только один максимум в точке  $\xi$  отрезка  $a \leq x \leq \beta$  (конечного или бесконечного). Для удобства мы разбивали этот отрезок так, чтобы точка максимума оказалась в одном из концов меньших отрезков, но это несущественно. Метод Лапласа может быть обобщен так, чтобы он охватывал интегралы вида

$$\int_a^{\beta} \varphi(x, v) e^{h(x, v)} dx,$$

где  $\varphi(x, v)$  ограничена при  $v \rightarrow \infty$ , а  $h(x, v)$  имеет один максимум в точке  $\xi$ , но эта стационарная точка  $\xi$  не является фиксированной, она изменяется вместе с  $v$ .

Представление подинтегральной функции в виде произведения  $\varphi(x) e^{h(x)}$  довольно произвольно, различное разбиение на множители может привести к разным асимптотическим формулам, справедливым при различных обстоятельствах. Обычно заменяют, если это возможно, переменные так, чтобы сделать стационарную точку не зависящей от  $v$ . Это не всегда возможно, да и не обязательно это нужно делать.

Например, в случае гамма-функции

$$\Gamma(v+1) = \int_0^{\infty} e^{v \ln x - x} dx$$

мы не можем положить  $\varphi(x) = e^{-x}$ ,  $h(x) = \ln x$ , так как  $\ln x$  не имеет стационарных точек. Но мы можем взять  $\varphi(x) = 1$ ,  $h(x, v) = v \ln x - x$ ; функция  $h(x, v)$  имеет один максимум в точке  $x = v$ , и асимптотическую формулу можно получить, исходя из этих функций. Мы избежали необходимости рассматривать стационарную точку  $x = v$ , сделав замену переменной  $x = vt$ .

В случае бесселевой функции

$$K_\nu(a) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu x - a \operatorname{ch} x} dx,$$

где  $\nu$  и  $a$  положительны и  $\nu$  велико, метод Лапласа неприменим, если взять  $h(x) = x$ ,  $\varphi(x) = e^{-a \operatorname{ch} x}$ , так как  $h(x)$  не имеет максимума. Но функция  $\nu x - a \operatorname{ch} x$  имеет один максимум в точке  $x = \operatorname{Arsh}(\nu/a)$ , которая изменяется вместе с  $\nu$ . Если мы положим

$$x = \operatorname{Arsh}\left(\frac{\nu}{a}\right) + t,$$

то получим

$$K_\nu(a) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + a^2}}{a} \right\}^\nu \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(t-e^t)} \varphi(t, \nu) dt,$$

где

$$\varphi(t, \nu) = \exp\left[-a^2 \operatorname{ch} \frac{t}{\nu + \sqrt{\nu^2 + a^2}}\right].$$

Функция  $t - e^t$  имеет один максимум при  $t = 0$ , но это простое выражение для функции  $h(t)$  мы получили за счет введения  $\nu$  в функцию  $\varphi(t, \nu)$ . Это совершенно безвредно, так как на любом конечном отрезке  $-a \leq t \leq a$  функция  $\varphi(t, \nu)$  непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$\varphi(a, \nu) \leq \varphi(t, \nu) \leq \varphi(0, \nu),$$

поэтому  $\varphi(t, \nu) \rightarrow 1$  равномерно по  $t$  при  $\nu \rightarrow +\infty$ . Кроме того,  $\varphi(t, \nu) \leq 1$  для всех значений  $t$  и  $\nu$ .

Теперь мы имеем

$$\int_{-a}^a e^{\nu(t-e^t)} \varphi(t, \nu) dt = \varphi(t_0, \nu) \int_{-a}^a e^{\nu(t-e^t)} dt,$$

где  $-\alpha \leq t_0 \leq \alpha$ , и поэтому

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} e^{\nu(t-e^t)} \varphi(t, \nu) dt \sim \int_{-\infty}^{\infty} e^{\nu(t-e^t)} dt \sim \\ \sim e^{-\nu} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\nu t^2/2} dt = e^{-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}}.$$

Чтобы доказать, что вклады интервалов  $t \geq \alpha$  и  $t \leq -\alpha$  малы, мы положим  $t = \alpha + \tau$  и вспомним, что  $\varphi(t, \nu) \leq 1$  для всех  $t$  и  $\nu$ . Тогда, используя неравенство  $e^{\tau} \geq 1 + \tau$  ( $\tau \geq 0$ ), мы получаем

$$0 \leq \int_{\alpha}^{\infty} e^{\nu(t-e^t)} \varphi(t, \nu) dt \leq e^{\nu(\alpha-e^{\alpha})} \int_0^{\infty} e^{\nu\tau - \nu e^{\alpha}(e^{\tau}-1)} d\tau \leq \\ \leq e^{\nu(\alpha-e^{\alpha})} \int_0^{\infty} e^{-\nu\tau} (e^{\alpha}-1) d\tau = \frac{e^{-\nu}(e^{\alpha}-\alpha)}{\nu(e^{\alpha}-1)} = o\left(\frac{e^{-\nu}}{\nu}\right),$$

так как  $e^{\alpha} - \alpha > 1$ . Аналогично в случае  $t \leq -\alpha$ .

Мы показали, таким образом, что когда  $a$  положительно и  $\nu \rightarrow +\infty$ , имеет место формула

$$K_{\nu}(a) \sim \frac{\{\nu + \sqrt{\nu^2 + a^2}\}^{\nu}}{2a^{\nu}} e^{-\nu} \sqrt{\frac{2\pi}{\nu}},$$

или более просто:

$$K_{\nu}(a) \sim \frac{2^{\nu} \nu^{\nu} e^{-\nu}}{a^{\nu}} \sqrt{\frac{\pi}{2\nu}}.$$

Этот результат можно было бы получить и в случае нецелого  $\nu$  из формулы

$$K_{\nu}(a) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \{I_{-\nu}(a) - I_{\nu}(a)\}.$$

Более трудный пример представляет функция параболического цилиндра, определенная равенством

$$D_{-\nu-1}(a) = \frac{e^{-a^2/4}}{\Gamma(\nu+1)} \int_0^{\infty} e^{-ax - x^2/2} x^{\nu} dx,$$

когда  $\operatorname{Re} \nu > -1$ . Мы хотим найти асимптотическую формулу Черри [4], имеющую место, когда  $a$  положительно и  $\nu \rightarrow +\infty$ . Если положить  $x = s\sqrt{\nu}$ , то мы получим

$$D_{-\nu-1}(a) = \frac{e^{-a^2/4}}{\Gamma(\nu+1)} \nu^{(\nu+1)/2} \int_0^{\infty} e^{h(s, \nu)} ds,$$

где

$$h(s, \nu) = \nu \ln s - \frac{1}{2} \nu s^2 - a s \sqrt{\nu}.$$

Функция  $h(s, \nu)$  имеет один максимум на действительной полуоси в точке

$$s = \left(1 + \frac{a^2}{4\nu}\right)^{1/2} - \frac{a}{2\sqrt{\nu}},$$

причем  $s$  приблизительно равно 1, когда  $\nu$  велико. Обозначая  $s = 1 + t$ , мы находим, что

$$D_{-\nu-1}(a) = \frac{e^{-a^2/4 - a\sqrt{\nu}} \nu^{(\nu+1)/2}}{\Gamma(\nu+1)} I,$$

где

$$I = \int_{-1}^{\infty} \exp \left\{ \nu \ln(1+t) - \frac{1}{2} \nu(1+t)^2 \right\} e^{-at\sqrt{\nu}} dt.$$

Этот случай совсем не похож на предыдущий, так как функция  $e^{-at\sqrt{\nu}}$  не стремится к непрерывному (по  $t$ ) пределу, когда  $\nu \rightarrow +\infty$ .

Для того чтобы упростить запись, удобно обозначить  $k = \sqrt{\nu}$ . Полагая  $t = u/k$ , мы получаем

$$I = \int_{-k}^{\infty} \exp \left\{ k^2 \ln \left(1 + \frac{u}{k}\right) - \frac{1}{2} (u+k)^2 - au \right\} \frac{du}{k}.$$

Теперь, согласно формуле Тейлора,

$$\ln \left(1 + \frac{u}{k}\right) = \frac{u}{k} - \frac{u^2}{2k^2} + \frac{u^3}{3(k+u_1)^3},$$

где  $u_1$  лежит между 0 и  $u$ . Поэтому

$$\begin{aligned} k^2 \ln \left(1 + \frac{u}{k}\right) - \frac{1}{2} (u+k)^2 - au &= \\ &= -\frac{1}{2} k^2 - u^2 - au + \frac{k^2 u^3}{3(k+u_1)^3} \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$I = \frac{e^{-k^2/2}}{k} \int_{-k}^{\infty} e^{-u^2 - au} \psi(u, k) du,$$

где

$$\psi(u, k) = \exp \left\{ \frac{k^2 u^3}{3(k+u)^3} \right\}.$$

Когда  $k > 1$  и  $0 < \varepsilon < 1$ , отрезок  $-k^\varepsilon \leq u \leq k^\varepsilon$  лежит на полупрямой  $(-k, \infty)$ , по которой мы интегрируем, и на нем выполняется неравенство

$$\left| \frac{k^2 u^3}{3(k+u)^3} \right| \leq \frac{k^{2+3\varepsilon}}{3(k-k^\varepsilon)^3} = \frac{k^{3\varepsilon-1}}{3(1-k^{\varepsilon-1})^3} < k^{3\varepsilon-1}$$

для достаточно больших значений  $k$ . Поэтому значения функции  $\psi(u, k)$  заключены между  $\exp k^{3\varepsilon-1}$  и  $\exp(-k^{3\varepsilon-1})$ . Если мы теперь выберем  $\varepsilon$  так, чтобы  $0 < \varepsilon < 1/3$ , то функция  $\psi(u, k)$  будет стремиться к 1 при  $k \rightarrow \infty$  равномерно по  $u$ . Обозначая  $\eta = k^\varepsilon$ , мы видим, что при  $k \rightarrow \infty$  имеет место асимптотическое равенство

$$\frac{e^{-k^2/2}}{k} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-u^2 - au} \psi(u, k) du \sim \frac{e^{-k^2/2}}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2 - au} du = e^{-v/2 + a^2/4} \sqrt{\frac{\pi}{v}}.$$

Вклад в интеграл  $I$  интервала  $u \geq \eta$  положителен и равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \int_{\eta}^{\infty} \exp \left\{ k^2 \ln \left( 1 + \frac{u}{k} \right) - \frac{1}{2} (k+u)^2 - au \right\} du \leq \\ & \leq \frac{1}{k} \int_{\eta}^{\infty} \exp \left\{ ku - \frac{1}{2} (k+u)^2 - au \right\} du = \\ & = \frac{1}{k} \int_{\eta}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} u^2 - au \right\} du \leq \\ & \leq \frac{e^{-k^2/2}}{k} \int_{\eta}^{\infty} e^{-u^2/2} du \leq \frac{e^{-(k^2 + \eta^2)/2}}{k} \int_0^{\infty} e^{-v^2/2} dv = \\ & = \frac{e^{-(k^2 + \eta^2)/2}}{k} \left( \frac{\pi}{2} \right)^{1/2} = e^{-(v + \eta^2)/2} \left( \frac{\pi}{2v} \right)^{1/2}, \end{aligned}$$



он очень мал по сравнению с вкладом отрезка  $-\eta \leq u \leq \eta$ , где  $\eta = k^\varepsilon$  ( $0 < \varepsilon < 1/3$ ).

И, наконец, вклад в интеграл  $I$  отрезка  $-k \leq u \leq -\eta$  тоже положителен и равен

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k} \int_{\eta}^k \exp \left\{ k^2 \ln \left( 1 - \frac{v}{k} \right) - \frac{1}{2} (k - v)^2 + av \right\} dv \leq \\ & \leq \frac{1}{k} \int_{\eta}^k \exp \left( -\frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} v^2 + av \right) dv = \\ & = \frac{1}{k} \exp \left( \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} k^2 \right) \int_{\eta}^k \exp \left\{ -\frac{1}{2} (v - a)^2 \right\} dv = \\ & = \frac{1}{k} \exp \left\{ \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} k^2 \right\} \int_{(\eta - a)^2/2}^{(k - a)^2/2} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2t}} \leq \\ & \leq \frac{1}{k} \exp \left\{ \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} k^2 - \frac{1}{2} (\eta - a)^2 \right\} \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{\sqrt{2t}} = \\ & = \left( \frac{\pi}{2v} \right)^{1/2} \exp \left\{ \frac{1}{2} a^2 - \frac{1}{2} v - \frac{1}{2} (\eta - a)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Он тоже мал по сравнению с вкладом отрезка  $-\eta \leq u \leq \eta$ .

Мы показали, таким образом, что при  $v \rightarrow +\infty$  справедлива, асимптотическая формула

$$D_{-v-1}(a) \sim \frac{V\pi}{\Gamma(v+1)} e^{-v/2 - aV\sqrt{v}} v^{v/2}$$

или формула

$$D_{-v-1}(a) \sim \frac{e^{v/2 - aV\sqrt{v}}}{2^{1/2} v^{(v+1)/2}},$$

которая получается из первой применением формулы Стирлинга. Черри установил, что формула

$$D_{-v-1}(a) \sim \frac{e^{v/2 - aV\sqrt{v}}}{2^{1/2} v^{(v+1)/2}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{V\sqrt{v}}\right) \right\}$$

справедлива для комплексных  $v$  и  $a$ , удовлетворяющих условию  $|\arg v| \leq \pi/2$ .

## Лемма Ватсона

## § 21. Интегралы Лапласа

Интеграл вида

$$f(z) = \int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt \quad (21.1)$$

называется интегралом Лапласа. Мы предположим, что функция  $\varphi(t)$  интегрируема на любом конечном отрезке  $0 \leq t \leq T$  и что интеграл (21.1) является пределом при  $T \rightarrow +\infty$  соответствующего интеграла по конечному пути интегрирования. Можно показать, что если интеграл (21.1) сходится в точке  $z = z_0$ , то он сходится в полуплоскости  $\operatorname{Re} z > \operatorname{Re} z_0$ , причем равномерно на любом компактном множестве из этой полуплоскости. Пусть  $\alpha$  — точная нижняя грань таких чисел  $\operatorname{Re} z_0$ , тогда интеграл (21.1) сходится для  $\operatorname{Re} z < \alpha$  и расходится для  $\operatorname{Re} z > \alpha$ . Постоянная  $\alpha$  называется абсциссой сходимости, полуплоскость  $\operatorname{Re} z > \alpha$  — полуплоскостью сходимости. Очевидно, что  $f(z)$  — аналитическая функция, регулярная в полуплоскости сходимости. Если  $\alpha = -\infty$ , то  $f(z)$  — целая функция.

Многие из специальных функций могут быть представлены в виде интегралов Лапласа, поэтому было бы весьма желательно уметь находить асимптотические представления таких интегралов при  $|z| \rightarrow \infty$  в полуплоскости сходимости. Если функция  $\varphi(t)$  имеет непрерывные производные всех порядков, то метод интегрирования по частям, рассмотренный в гл. 3, дает

$$f(z) \sim \sum_0^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(0)}{z^{n+1}};$$

этот результат можно получить также, если в интеграле (21,1) заменить функцию  $\varphi(t)$  ее рядом Тейлора и формально проинтегрировать ряд почленно. Обоснование этого формального процесса дает лемма, принадлежащая Ватсону [30]. Эта лемма дает асимптотическое разложение и в том случае, когда начало координат — точка ветвления функции  $\varphi(t)$  и метод интегрирования по частям неприменим.

## § 22. Лемма Ватсона

Пусть  $\varphi(t)$  — аналитическая функция  $t$ , регулярная в секторе  $|t| \leq R + \delta$ ,  $|\arg t| \leq \Delta < \pi$ , где  $R$ ,  $\delta$ ,  $\Delta$  положительны, за исключением точки ветвления при  $t=0$ , и пусть

$$\varphi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m t^{m/r-1},$$

когда  $|t| \leq R$ ,  $r$  положительно. Пусть также  $|\varphi(t)| < Ke^{bt}$ , где  $K$  и  $b$  — положительные числа, не зависящие от  $t$ , когда  $t$  положительно и  $t \geq R$ . Тогда,

$$\int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt \sim \sum_{m=1}^{\infty} a_m \Gamma\left(\frac{m}{r}\right) z^{-m/r}$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ .

Если  $r=1$ , то функция  $\varphi(t)$  не имеет точки ветвления в начале координат, в этом случае условие  $|\arg t| \leq \Delta$  отпадает.

Для того чтобы доказать лемму, заметим, что мы можем выбрать для любого целого положительного числа  $M$  постоянную  $C$  так, чтобы выполнялось неравенство

$$\left| \varphi(t) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m t^{m/r-1} \right| \leq C e^{bt} t^{M/r-1},$$

когда  $t \geq 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-zt} \varphi(t) dt &= \sum_{m=1}^{M-1} a_m \int_0^{\infty} e^{-zt} t^{m/r-1} dt + R_M = \\ &= \sum_{m=1}^{M-1} a_m \Gamma\left(\frac{m}{r}\right) z^{-m/r} + R_M, \end{aligned}$$

где

$$R_M = \int_0^{\infty} e^{-zt} \left\{ \varphi(t) - \sum_{m=1}^{M-1} a_m t^{m/r-1} \right\} dt.$$

Мы должны показать, что функция  $z^{M/r} R_M$  ограничена при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ .

Обозначив  $\operatorname{Re} z = x$ , получим

$$|R_M| \leq \int_0^{\infty} e^{-xt} C e^{bt} t^{M/r-1} dt = \frac{C}{(x-b)^{M/r}} \Gamma\left(\frac{M}{r}\right),$$

когда  $x > b$ . Но так как  $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$ , то  $x \geq |z| \sin \varepsilon$  и поэтому  $x > b$ , когда  $|z| > b \operatorname{cosec} \varepsilon$ . Следовательно, если  $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon$  и  $|z| > b \operatorname{cosec} \varepsilon$ , то

$$|z^{M/r} R_M| \leq \frac{C |z|^{M/r}}{(|z| \sin \varepsilon - b)^{M/r}} \Gamma\left(\frac{M}{r}\right),$$

откуда следует, что модуль  $|z^{M/r} R_M|$  ограничен при  $|z| \rightarrow \infty$ .

Иногда бывает удобна другая формулировка леммы, а именно:

Пусть  $\varphi(t)$  — аналитическая функция от  $t$ , регулярная в некоторой окрестности начала координат, и пусть

$$\varphi(t) = \sum_0^{\infty} a_m t^m$$

— ее ряд Тейлора. Пусть также при  $t \geq 0$

$$|\varphi(t)| \leq K e^{bt}.$$

где  $K$  и  $b$  — положительные числа, не зависящие от  $t$ , и  $r > 0$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-zt^r} \varphi(t) dt \sim \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{r} \Gamma\left(\frac{m+1}{r}\right) z^{-(m+1)/r}$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ .

### § 23. Функция $\Psi(1, 1; z)$

В § 7 с помощью метода интегрирования по частям мы нашли асимптотическое разложение вырожденной гипергеометрической функции  $\Psi(1, 1; z)$ , справедливое при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| \leq \pi - \delta < \pi$ . Эта функция, обозначенная для краткости через  $F(z)$ , задается в виде интеграла

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} \frac{dt}{t+z}.$$

она регулярна в комплексной плоскости, разрезанной по отрицательной части вещественной оси.

Когда  $z$  положительно, подстановка  $t = zu$  дает

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-zu} \frac{du}{1+u}; \quad (23.1)$$

с помощью аналитического продолжения эта формула распространяется на полулоскость  $\operatorname{Re} z > 0$ . Применение леммы Ватсона приводит к формуле

$$F(z) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{z^n} \quad (23.2)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ . Это разложение (7.2), но доказано оно при более ограничительных условиях.

Если мы повернем путь интегрирования в формуле (23.1) на угол  $\pi/2$ , то получим другое интегральное представление для функции  $F(z)$ , а именно

$$F(z) = \int_0^{\infty} e^{-izv} \frac{idv}{1+iv},$$

которое справедливо в полуплоскости  $\text{Im } z < 0$ . Этот интеграл снова приводит к разложению (23.2) при  $|z| \rightarrow \infty$ , но оно справедливо теперь в угле

$$-\pi + \delta \leq \arg z \leq -\delta < 0.$$

Аналогично поворот на угол  $-\pi/2$  приводит к тому же представлению в угле  $0 < \delta \leq \arg z \leq \pi - \delta$ .

Поворачивая контур интегрирования, мы часто получаем возможность расширить область значений  $\arg z$ , в которой имеет место асимптотическое разложение интеграла Лапласа. Впрочем, в приведенном примере было проще обойтись интегрированием по частям.

## § 24. Логарифм гамма-функции

Асимптотическое разложение логарифмической производной функции  $\Gamma(p)$  можно получить простым применением леммы Ватсона.

Из формулы Эйлера

$$\Gamma(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{p(p+1)(p+2)\dots(p+n-1)} n^p,$$

используя обычные обозначения, получаем

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \frac{\Gamma'(p)}{\Gamma(p)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \ln n - \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1} - \dots - \frac{1}{p+n-1} \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-nt}}{t} dt - \sum_{r=0}^{n-1} \int_0^{\infty} e^{-(p+r)t} dt \right\}, \end{aligned}$$

где  $\operatorname{Re} p > 0$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \psi(p) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-nt}}{t} dt - \int_0^{\infty} \frac{1 - e^{-nt}}{1 - e^{-t}} e^{-pt} dt \right\} = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-pt}}{1 - e^{-t}} \right) dt - \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{e^{-pt}}{1 - e^{-t}} \right) e^{-nt} dt \right\} = \\ &= \int_0^{\infty} \left( \frac{e^{-t}}{t} - \frac{e^{-pt}}{1 - e^{-t}} \right) dt = \\ &= \int_0^{\infty} \frac{e^{-t} - e^{-pt}}{t} dt + \int_0^{\infty} \left( \frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right) e^{-pt} dt = \\ &= \ln p + \int_0^{\infty} \left\{ \frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} \right\} e^{-pt} dt \end{aligned}$$

в предположении, что  $\operatorname{Re} p > 0$ .

Далее, функция

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}}$$

регулярна при  $|t| < 2\pi$ . В этой области ее можно разложить в ряд Тейлора

$$\sum_0^{\infty} \frac{B_{n+1}}{(n+1)!} (-1)^n t^n,$$

в котором коэффициенты  $B_n$  — числа Бернулли, определенные равенством  $B_n = B_n(0)$ . Здесь  $B_n(x)$  — полиномы Бернулли в обозначении книги Эрдейи, Магнуса, Оберхеттингера и Трикоми «Higher Transcendental Functions», оно отличается от обозначений Уиттекера и Ватсона в „Курсе современного анализа“. Значения  $B_n$  связаны рекуррентным соотношением; выпишем несколько первых коэффициентов:

$$B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_6 = \frac{1}{42}$$

и  $B_{2n+1} = 0$  для  $n > 0$ . В этих обозначениях

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{1 - e^{-t}} = -\frac{1}{2} - \sum_1^{\infty} \frac{B_{2m}}{(2m)!} t^{2m-1}.$$

Поскольку выражение в левой части этого равенства ограничено при  $t > 0$ , то лемма Ватсона применима и дает

$$\psi(p) \sim \ln p - \frac{1}{2p} - \sum_0^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m} \frac{1}{p^{2m}}$$

при  $|p| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg p| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ .

Интегрируя последнее асимптотическое равенство, получаем

$$\ln \Gamma(p) \sim \left(p - \frac{1}{2}\right) \ln p - p + \sum_1^{\infty} \frac{B_{2m}}{2m(2m-1)} \frac{1}{p^{2m}} + C,$$

где  $C$  — постоянная. Доказать, что  $C = (\ln 2\pi)/2$ , совсем просто, если подставить асимптотический ряд в лежандровскую<sup>1)</sup> формулу удвоения

$$\ln \Gamma(p) + \ln \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) + (2p - 1) \ln 2 = \ln \Gamma(2p) + \frac{1}{2} \ln \pi.$$

Хотя формулы доказаны здесь только для угла, лежащего в правой полуплоскости, но они справедливы в области  $|\arg p| \leq \pi - \delta < \pi$ . Действительно, поворачивая путь интегрирования на положительный или отрицательный острый угол  $\alpha$ , мы можем показать, что формулы справедливы также, если  $|\arg pe^{i\alpha}| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ , откуда и следует результат.

## § 25. Гамма-функция

Для действительных и положительных  $p$  имеем

$$\Gamma(p) = \frac{1}{p} \Gamma(p+1) = \frac{1}{p} \int_0^{\infty} e^{-x} x^p dx = p^p \int_0^{\infty} e^{-p\omega} \omega^p d\omega.$$

<sup>1)</sup> Еще проще сравнить полученную формулу с найденной выше формулой Стирлинга (см. стр. 63). — *Прим. ред.*



С помощью аналитического продолжения эта формула распространяется на полуплоскость  $\operatorname{Re} p > 0$ , здесь  $p^p$  понимается как  $e^{p \ln p}$ , а для  $\ln p$  берется его главное значение. Поэтому получаем

$$p^{-p} \Gamma(p) = \int_0^{\infty} (\omega e^{-\omega})^p d\omega.$$

Из этой формулы мы выведем асимптотическое разложение для функции  $\Gamma(p)$  при  $|p| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg p| \leq \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$  и затем покажем, что в действительности оно имеет место в области  $|\arg p| \leq \pi - \varepsilon < \pi$ .

Функция  $\omega e^{-\omega}$  монотонно возрастает от 0 до  $e^{-1}$ , когда  $\omega$  изменяется от 0 до 1, а затем монотонно убывает от  $e^{-1}$  до 0, когда  $\omega$  возрастает от 1 до  $\infty$ . Представим интеграл в следующем виде:

$$p^{-p} \Gamma(p) = \int_0^1 (\omega_2 e^{-\omega_2})^p d\omega_2 + \int_1^{\infty} (\omega_1 e^{-\omega_1})^p d\omega_1,$$

так как нам будет удобно по-разному обозначить  $\omega$  на каждом из двух участков интегрирования. Если мы положим  $\omega_1 e^{-\omega_1} = e^{-1-\tau}$ , то  $\tau$  монотонно возрастает от 0 до  $+\infty$ , когда  $\omega_1$  изменяется от 1 до  $+\infty$ ; и если мы положим также  $\omega_2 e^{-\omega_2} = e^{-1-\tau}$ , то  $\tau$  будет монотонно убывать от  $+\infty$  до 0, когда  $\omega_2$  возрастает от 0 до 1. Заменяя переменную интегрирования указанным способом, мы получаем интеграл

$$p^{-p} e^p \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} \left( \frac{d\omega_1}{d\tau} - \frac{d\omega_2}{d\tau} \right) d\tau,$$

к которому мы применим лемму Ватсона. Наше доказательство основано на методе, использованном Ватсоном [31] при решении аналогичной задачи Рамануджана.

При  $\tau \geq 0$  функции  $\omega_1$  и  $\omega_2$  являются двумя действительными решениями уравнения

$$\omega - \ln \omega = 1 + \tau,$$

равными 1 при  $\tau = 0$ . Если мы обозначим  $w = 1 + W$ ,  $\tau = z^2/2$ , то уравнение примет вид  $F(W, z) = 0$ , где

$$F(W, z) = W - \ln(1 + W) - \frac{1}{2} z^2;$$

мы теперь будем рассматривать  $W$  и  $z$  в этом уравнении как комплексные переменные.

Далее, для того чтобы уравнение  $F = 0$  могло иметь единственное решение  $W$ , которое принимает значение  $W_0$  при  $z = z_0$  и регулярно в некоторой окрестности точки  $z_0$ , необходимо и достаточно, чтобы производная  $\partial F / \partial W$  не равнялась нулю при  $z = z_0$ ,  $W = W_0$ . Но

$$\frac{\partial F}{\partial W} = \frac{W}{1 + W},$$

поэтому она обращается в нуль только при  $W = 0$ , причем соответствующие значения  $z$  задаются формулой  $z^2 = 4n\pi i$ , где  $n$  — целое или нуль. Уравнение  $F = 0$ , таким образом, определяет многозначную функцию  $W(z)$  с точками ветвления  $z = 0$  и  $z = \pm 2\sqrt{n\pi} e^{\pm \pi i/4}$ , где  $n$  — целое положительное число.

Вблизи точки  $W = 0$  имеем

$$F = \frac{1}{2} W^2 - \frac{1}{3} W^3 + \frac{1}{4} W^4 - \dots - \frac{1}{2} z^2,$$

так что переменная  $z$ , рассматриваемая как функция от  $W$ , имеет две ветви

$$z = \pm W \left( 1 - \frac{2}{3} W + \frac{2}{4} W^2 - \dots \right)^{1/2}.$$

Выбирая верхний знак, мы получаем

$$z = W \left( 1 - \frac{1}{3} W + \dots \right),$$

причем выражение, стоящее в правой части этого равенства, является аналитической функцией от  $W$ , регулярной в круге  $|W| < 1$  и имеющей простой нуль в точке  $W = 0$ . Последнее уравнение имеет, следовательно, единственное решение  $W_1(z)$ , равное нулю при  $z = 0$  и регулярное

в окрестности точки  $z = 0$ . Это решение представляется в виде

$$W_1 = \sum_1^{\infty} a_n z^n,$$

где  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 1/3$ . Аналогично уравнение

$$z = -W \left( 1 - \frac{2}{3} W + \frac{2}{4} W^2 - \dots \right)^{1/2}$$

имеет единственное решение

$$W_2 = \sum_1^{\infty} a_n (-z)^n,$$

равное нулю при  $z = 0$  и регулярное в окрестности начала координат. Позже мы вернемся к определению других коэффициентов этих рядов.

Так как

$$\frac{dW}{dz} = \frac{z(1+W)}{W},$$

то особыми точками  $W$  как функции от  $z$  будут только найденные уже точки ветвления  $\pm 2\sqrt{n\pi} e^{\pm n i/4}$ , поэтому ряды для  $W_1$  и  $W_2$  сходятся в круге  $|z| < 2\sqrt{\pi}$ .

Положив опять  $z^2 = 2\tau$ , найдем, что

$$w_1 = 1 + \sum_1^{\infty} a_n (2\tau)^{n/2},$$

$$w_2 = 1 + \sum_1^{\infty} a_n (-1)^n (2\tau)^{n/2},$$

причем различие между функциями  $w_1$  и  $w_2$  заключается в том, что  $w_1$  возрастает при  $\tau > 0$ , а  $w_2$  убывает при малых  $\tau$ . Функции  $w_1$  и  $w_2$  являются аналитическими функциями комплексного переменного  $\tau$ , имеющими в круге  $|\tau| < 2\pi$  единственную точку ветвления  $\tau = 0$ .

Так как

$$\frac{dw}{d\tau} = \frac{w}{w-1},$$

то мы имеем

$$\frac{dw_1}{d\tau} - \frac{dw_2}{d\tau} = \frac{w_1}{w_1-1} - \frac{w_2}{w_2-1} = \frac{1}{w_1-1} + \frac{1}{1-w_2},$$

следовательно, разность  $d\omega_1/d\tau - d\omega_2/d\tau$  ограничена при  $\tau \geq \tau_0$ , где  $\tau_0$  — любое положительное число.

Условия леммы Ватсона, таким образом, выполняются, и мы получаем асимптотическое разложение интеграла

$$\int_0^{\infty} e^{-p\tau} \left( \frac{d\omega_1}{d\tau} - \frac{d\omega_2}{d\tau} \right) d\tau$$

с помощью подстановки рядов вместо  $\omega_1$  и  $\omega_2$  и интегрирования по частям. Отсюда следует, что

$$\Gamma(p) \sim e^{-p} p^p \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left\{ 1 + \frac{3a_3}{p} + \frac{3 \cdot 5 a_5}{p^2} + \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 a_7}{p^3} + \dots \right\},$$

где  $|p|$  велик и  $|\arg p| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ .

Для того чтобы определить коэффициенты  $a_n$ , заменим в уравнении

$$W_1 \frac{dW_1}{dz} = z(1 + W_1)$$

$W_1$  рядом  $\sum_1^{\infty} a_n z^n$  и приравняем коэффициенты; этот способ применим, так как все ряды, входящие в уравнение, абсолютно сходятся в круге  $|z| < 2\sqrt{\pi}$ . Из тождества

$$\sum_1^{\infty} a_m z^m \sum_1^{\infty} a_n n z^{n-1} = z + \sum_1^{\infty} a_n z^{n+1}$$

получаем

$$a_{n-1} = \sum_{r+s=n+1} r a_r a_s = \sum_{r+s=n+1} s a_s a_r,$$

поэтому

$$2a_{n-1} = (n+1) \sum_{r+s=n+1} a_r a_s,$$

когда  $n \geq 2$ . Мы знаем, что  $a_1 = 1$ . При  $n = 2$  получаем  $2a_1 = 6a_1 a_2$ , откуда  $a_2 = 1/3$ . Когда  $n \geq 3$ ,

$$2a_{n-1} = 2(n+1) a_1 a_n + (n+1) \sum_{r=2}^{n-1} a_r a_{n+1-r},$$

откуда

$$a_n = \frac{a_{n-1}}{n+1} - \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{n-1} a_r a_{n+1-r}$$

Эта формула дает нам возможность найти следующие коэффициенты, вот несколько первых:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{36}, \quad a_4 = -\frac{1}{270}, \quad a_5 = \frac{1}{4320}.$$

По этой формуле произвольный коэффициент оценить сложно, но Ватсон показал, что при больших  $n$

$$a_n \sim (-1)^n \frac{\cos(n+1)\pi/4}{2^{n-3/2} n^{3/2} \pi^{n/2}}.$$

Подставляя в ряд  $\Gamma(p)$  значение коэффициентов, мы окончательно получаем

$$\Gamma(p) \sim e^{-p} p^p \sqrt{\frac{2\pi}{p}} \left\{ 1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} + \dots \right\},$$

когда  $|p|$  велик и  $|\arg p| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ .

На самом деле это асимптотическое разложение справедливо, когда

$$|\arg p| \leq \pi - \varepsilon < \pi.$$

Детальное доказательство этого утверждения могло бы оказаться весьма утомительным, но основная идея проста. Мы исходим из формулы

$$p^{-p} e^p \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} F(\tau) d\tau,$$

где

$$F(\tau) = \frac{dw_1}{d\tau} - \frac{dw_2}{d\tau} = \frac{1}{w_1 - 1} - \frac{1}{w_2 - 1}.$$

Можно показать, что  $w_1 = O(|\tau|)$ ,  $w_2 = O(|e^{-\tau}|)$  для комплексных  $\tau$ , когда  $\operatorname{Re} \tau > 0$ . Поэтому  $F(\tau)$  ограничена в любом угле  $-\pi/2 < \alpha \leq \arg \tau \leq \beta < \pi/2$  при  $|\tau| \rightarrow \infty$  равномерно по  $\arg \tau$ . Так как особыми точками функции  $F(\tau)$  являются только точки ветвления, расположенные в начале координат и на мнимой оси, то мы можем поворачивать путь интегрирования на любой положительный или отрицательный острый угол  $\gamma$ . Тогда

$$\int_0^{\infty} e^{-p\tau} F(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} e^{-q\tau} F(\tau e^{i\gamma}) e^{i\gamma} d\tau,$$

если предположить, что действительные части  $p$  и  $q = pe^{i\gamma}$  положительны. Поэтому с помощью аналитического продолжения мы получаем

$$p^{-p} e^{p\gamma} \Gamma(p) = \int_0^{\infty} e^{-qt} F(\tau e^{i\gamma}) e^{i\gamma} d\tau,$$

когда  $\operatorname{Re} q > 0$ . Повторение примененного выше приема приводит к формуле

$$\begin{aligned} p^{-p} e^{p\gamma} \Gamma(p) &\sim \left(\frac{2\pi e^{i\gamma}}{q}\right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{e^{i\gamma}}{12q} + \frac{e^{2i\gamma}}{288q^2} + \dots \right\} = \\ &= \left(\frac{2\pi}{p}\right)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} + \dots \right\}. \end{aligned}$$

т. е. к тому же самому ряду, что и раньше. Но теперь уже установлено, что эта формула имеет место при  $|q| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg q| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ , т. е. для аргументов  $p$ , заключенных между  $-\pi/2 + \varepsilon - \gamma$  и  $\pi/2 - \varepsilon - \gamma$ . А так как  $\gamma$  — любой положительный или отрицательный острый угол, то разложение справедливо в угле  $|\arg p| \leq \pi - \varepsilon < \pi$ .

## § 26. Интегральный логарифм

Для положительных  $x$  интегральный логарифм определяется формулой

$$\operatorname{Li}(x) = \int_0^x \frac{dt}{\ln t},$$

причем интеграл понимается в смысле главного значения по Коши, если  $x > 1$ . Положим  $x = e^a$ ,  $t = e^{a-v}$ , тогда интеграл примет вид

$$\operatorname{Li}(e^a) = e^a \text{ V. P. } \int_0^{\infty} e^{-v} \frac{dv}{a-v}$$

при  $a > 0$ . Этот интеграл мы уже рассматривали в § 9. Теперь мы применим метод Лапласа для того, чтобы доказать приведенный ранее результат Стильтьеса отно-

сительно наилучших приближений с помощью асимптотических разложений.

В формуле

$$e^{-a} \text{Li}(e^a) = \text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{dt}{1-t}$$

положим

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \dots + t^{n-1} + \frac{t^n}{1-t}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} e^{-a} \text{Li}(e^a) &= \sum_{k=1}^n \int_0^{\infty} e^{-at} t^{k-1} dt + \text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{t^n}{1-t} dt = \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(k-1)!}{a^k} + R_n(a), \end{aligned}$$

где

$$R_n(a) = \text{V. P.} \int_0^{\infty} e^{-at} \frac{t^n}{1-t} dt.$$

Можно показать, что  $R_n(a)$  имеет порядок  $O(1/a^{n+1})$  при  $a \rightarrow \infty$  и, следовательно,

$$e^{-a} \text{Li}(e^a) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)!}{a^k}.$$

Этот результат был получен ранее с помощью другой формулы для остаточного члена. Пусть  $a = N + \eta$ ,  $0 \leq \eta < 1$ , а  $N$  — большое целое число, такое, что наименьший член асимптотического разложения имеет номер  $N$ . Стильтьес показал, что остаточный член  $R_n(N + \eta)$  изменяет знак при переходе через  $n = N$ , так что частичная сумма с номером  $N - 1$  дает наилучшее приближение.

Действительно, по определению интеграла в смысле главного значения по Коши остаточный член равен

$$\begin{aligned} R_N(N + \eta) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_0^{1-\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} e^{-(N+\eta)t} \frac{t^N}{1-t} dt \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (I_1 + I_2), \end{aligned}$$

Вводя обозначения предыдущего параграфа, мы получаем

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \int_0^{1-\varepsilon} \frac{e^{-\eta w_2}}{1-w_2} (\omega_2 e^{-w_2})^N dw_2 = \\
 &= - \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-\eta w_2}}{1-w_2} (\omega_2 e^{-w_2})^N \frac{dw_2}{d\tau} d\tau, \\
 I_2 &= \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{-\eta w_1}}{1-w_1} (\omega_1 e^{-w_1})^N dw_1 = \int_{\varepsilon^2/2}^{\infty} \frac{e^{-\eta w_1}}{1-w_1} (\omega_1 e^{-w_1})^N \frac{dw_1}{d\tau} d\tau.
 \end{aligned}$$

На самом деле нижние пределы не равны  $\varepsilon^2/2$ , они отличаются от  $\varepsilon^2/2$  и друг от друга на величину  $O(\varepsilon^3)$ ; но это не влияет на доказательство — достаточно внести небольшие изменения в определение интеграла в смысле главного значения по Коши<sup>1)</sup>. Мы устремим  $\varepsilon$  к нулю и получим

$$R_N(N+\eta) = \int_0^{\infty} e^{-N(1+\tau)} \left\{ \frac{e^{-\eta w_1}}{1-w_1} \frac{dw_1}{d\tau} - \frac{e^{-\eta w_2}}{1-w_2} \frac{dw_2}{d\tau} \right\} d\tau.$$

Условия леммы Ватсона выполнены; осталось вычислить коэффициенты разложения в окрестности начала координат выражения, стоящего в скобках под знаком интеграла, и затем проинтегрировать почленно.

Если взять только главные члены, то мы получим

$$\begin{aligned}
 R_N(N+\eta) &= \\
 &= \sqrt{2} e^{-N-\eta} \left( \eta - \frac{1}{3} \right) \int_0^{\infty} e^{-N\tau} \tau^{-1/2} d\tau \left[ 1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right] = \\
 &= e^{-N-\eta} \left( \frac{2\pi}{N} \right)^{1/2} \left( \eta - \frac{1}{3} \right) \left[ 1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right].
 \end{aligned}$$

<sup>1)</sup> Автор хочет сказать, что для рассматриваемой функции  $V. P. \int_0^{\infty} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon_1} + \int_{1+\varepsilon_2}^{\infty} \right\}$ , где  $\varepsilon_1 \sim \varepsilon$ ,  $\varepsilon_2 \sim \varepsilon$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , поскольку подинтегральная функция равна  $O(1/|1-x|)$ . — Прим. ред.



Это равенство при  $N \rightarrow \infty$  эквивалентно следующему:

$$R_N(N + \eta) = \frac{N!}{(N + \eta)^{N+1}} \left\{ \eta - \frac{1}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\}.$$

Стильбес, доказательство которого несколько отличалось от приведенного, дал очень сложные формулы для коэффициентов при  $1/N$  и  $1/N^2$ .

Из сказанного выше вытекает, что

$$R_{N-1}(N + \eta) = \frac{N!}{(N + \eta)^{N+1}} \left\{ \eta + \frac{2}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\},$$

$$R_{N+1}(N + \eta) = \frac{N!}{(N + \eta)^{N+1}} \left\{ \eta - \frac{4}{3} + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\},$$

и, таким образом,  $R_n(N + \eta)$  меняет знак между  $n = N - 1$  и  $n = N + 1$ , если  $0 \leq \eta < 1$ .

## § 27. Применение леммы Ватсона к контурным интегралам

Трикоми и Эрдейи [28] отмечали, что лемма Ватсона может быть применена к контурным интегралам типа интегралов Лапласа, и использовали эту идею для нахождения асимптотического разложения функции

$$\frac{\Gamma(v + \alpha)}{\Gamma(v + \beta)}$$

при больших значениях  $|v|$ .

Они исходили из эйлера интеграла

$$\frac{\Gamma(v + \alpha) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(v + \beta)} = \int_0^1 t^{v+\alpha-1} (1-t)^{\beta-\alpha-1} dt; \quad (27.1)$$

здесь многозначные функции, стоящие под знаком интеграла, понимаются в смысле главного значения по Коши. Это представление верно, если выполнены два условия. Первое заключается в том, чтобы  $\operatorname{Re}(v + \alpha) > 0$ ; но если  $|\arg v| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ , это условие будет заведомо выполнено при достаточно большом  $|v|$ . Второе условие — это

$\operatorname{Re}(\beta - \alpha) > 0$ ; чтобы освободиться от этого ограничения, Трикоми и Эрдейи ввели контурный интеграл.

Если в формуле (27.1) мы положим  $t = e^{-r}$ , то получим интеграл Лапласа

$$\frac{\Gamma(\nu + \alpha) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\nu + \beta)} = \int_0^{\infty} e^{-\nu r} e^{-\alpha r} (1 - e^{-r})^{\beta - \alpha - 1} dr,$$

из которого следует, что

$$\frac{\Gamma(\nu + \alpha) \Gamma(\beta - \alpha)}{\Gamma(\nu + \beta)} = \frac{1}{2i \sin \pi(\beta - \alpha)} \int_{-\infty}^{(0+)} e^{\nu z} \varphi(z) dz, \quad (27.2)$$

где

$$\varphi(z) = e^{\alpha z} (e^z - 1)^{\beta - \alpha - 1}.$$

В формуле (27.2)  $|\arg z| \leq \pi$  и функция  $\varphi(z)$  понимается в смысле главного значения. Предполагается также, что  $\beta - \alpha$  не является целым числом<sup>1)</sup>.

Лемма Ватсона (с небольшим уточнением) может быть применена непосредственно к интегралу в формуле (27.2). Не все условия этой леммы выполнены, но ее доказательство еще проходит, если предположить, что ограничение на рост функции  $\varphi(z)$  распространяется на весь контур и что разложение в степенной ряд функции  $\varphi(z)$  имеет место на контуре в некоторой окрестности начала координат. Оба предположения в данном случае выполнены. Разложение функции  $\varphi(z)$ , справедливое в круге  $|z| < 2\pi$ , имеет вид

$$\varphi(z) = \sum_0^{\infty} B_n^{(\alpha - \beta + 1)}(\alpha) \frac{z^{\beta - \alpha + n - 1}}{n!}, \quad (27.3)$$

где  $B_n^{(k)}(\alpha)$  — обобщенные Нёрлундом полиномы Бернулли.

<sup>1)</sup> Контур интегрирования в интеграле  $\int_{-\infty}^{(0+)}$  начинается в  $-\infty$ ,

идет по лучу  $\arg z = -\pi$  до нуля, обходит начало координат, а затем возвращается в  $-\infty$  по лучу  $\arg z = \pi$ . — Прим. перев.

Теперь с помощью контурного интеграла Ганкеля для гамма-функции мы получаем

$$\begin{aligned} \Gamma(\beta - \alpha + n) &= \frac{1}{2i \sin \pi(\beta - \alpha + n)} \int_{-\infty}^{(0+)} e^t t^{\beta - \alpha + n - 1} dt = \\ &= \frac{v^{\beta - \alpha + n}}{2i \sin \pi(\beta - \alpha)} (-1)^n \int_{-\infty}^{(0+)} e^{vz} z^{\beta - \alpha + n - 1} dz, \end{aligned}$$

где  $v$  положительно. С помощью аналитического продолжения эта формула распространяется на полуплоскость  $\operatorname{Re} v > 0$ . Поэтому если мы подставим ряд (27.3) в формулу (27.2) и проинтегрируем по частям, то получим

$$\frac{\Gamma(v + \alpha)}{\Gamma(v + \beta)} \sim \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} B_n^{(\alpha - \beta + 1)}(\alpha) \frac{\Gamma(\beta - \alpha + n)}{\Gamma(\beta - \alpha)} \frac{1}{v^{\beta - \alpha + n}} \quad (27.4)$$

при  $|v| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg v| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ .

Если заменить нижний предел интегрирования в формуле (27.2) на  $-\infty e^{i\gamma}$ , где  $\gamma$  — положительный или отрицательный острый угол, то можно показать, что формула (27.2) остается справедливой при положительных  $v$ . После этой замены равенство (27.2) выполняется при

$$|\arg(v e^{i\gamma})| \leq \frac{\pi}{2} - \delta.$$

Просматривая доказательство, замечаем, что в этом новом угле формула (27.4) также справедлива; варьируя теперь значения  $\gamma$ , получаем, что формула (27.4) имеет место, когда  $|\arg v| \leq \pi - \delta < \pi$ .

Эта асимптотическая формула справедлива несмотря на то, что функция

$$\frac{\Gamma(v + \alpha)}{\Gamma(v + \beta)}$$

имеет полюсы в точках  $v = -\alpha, -\alpha - 1, -\alpha - 2, \dots$ ; если  $|v|$  достаточно велик, то ни один из этих полюсов не лежит в фиксированном угле  $|\arg v| \leq \pi - \delta$ . Но аппроксимация (27.4) непригодна, если  $|v|$  велик, а  $v$  лежит

вблизи полюса. Это затруднение можно обойти, если воспользоваться равенством

$$\frac{\Gamma(\nu + \alpha)}{\Gamma(\nu + \beta)} = \frac{\sin \pi(\nu + \beta) \Gamma(1 - \beta - \nu)}{\sin \pi(\nu + \alpha) \Gamma(1 - \alpha - \nu)}$$

и асимптотическим разложением выражения в правой части этого равенства, имеющим место в угле  $|\arg(-\nu)| \leq \pi - \delta$ .

И, наконец, ограничение, заключающееся в том, что  $\beta - \alpha$  не является целым, почти несущественно: если  $\beta - \alpha$  целое, то  $\Gamma(\nu + \alpha)/\Gamma(\nu + \beta)$  является рациональной функцией.

Первые два члена формулы (27.4) дают

$$\frac{\Gamma(\nu + \alpha)}{\Gamma(\nu + \beta)} = \nu^{\alpha - \beta} \left[ 1 + \frac{(\alpha - \beta)(\alpha + \beta - 1)}{2\nu} + O\left(\frac{1}{|\nu|^2}\right) \right].$$

Интересный частный случай формулы (27.4) мы получаем при  $\alpha = 1/2$ ,  $\beta = 1$ :

$$\frac{\Gamma(\nu + 1/2)}{\Gamma(\nu + 1)} = \frac{1}{\sqrt{\nu}} \left[ 1 - \frac{1}{8\nu} + \frac{1}{128\nu^2} + O\left(\frac{1}{|\nu|^3}\right) \right],$$

отсюда следует, что

$$\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n - 1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n)} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \left[ 1 - \frac{1}{8n} + \frac{1}{128n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right],$$

когда  $n$  — большое положительное целое число.

# Метод наибыстрейшего спуска

## § 28. Истоки метода

Метод наиболее быстрого спуска восходит к работе Римана [25], изданной после его смерти. В этой работе Риман нашел асимптотическое выражение для гипергеометрической функции

$$F(n - c, n + a + 1; 2n + a + b + 2; s)$$

при больших положительных  $n$ . Эта функция представляется интегралом

$$\int_0^1 z^{n+a} (1-z)^{n+b} (1-sz)^{c-n} dz;$$

она является аналитической функцией, регулярной в комплексной плоскости  $s$ , разрезанной вдоль действительной оси от точки  $s=1$  до  $s=+\infty$ .

Этот интеграл можно записать в виде

$$\int_0^1 \{f(z)\}^n \varphi(z) dz, \quad (28.1)$$

где

$$f(z) = z(1-z)(1-sz)^{-1}, \quad \varphi(z) = z^a(1-z)^b(1-sz)^c.$$

Риман начал с рассмотрения таких кривых в комплексной плоскости  $z$ , на которых  $|f(z)|$  имеет постоянное значение. Это линии уровня поверхности, уравнение которой в прямоугольных декартовых координатах  $(x, y, t)$  есть  $t = |f(x + iy)|$ . Если модуль мал, то линия уровня имеет две ветви, мало отличающиеся от непересекающихся

окружностей малых радиусов с центрами в точках  $z = 0$  и  $z = 1$ . Когда модуль возрастает, эти ветви приближаются друг к другу и при некотором значении модуля сливаются в одну кривую с двойной точкой при  $z = \zeta$ . Если модуль велик, то линия уровня снова состоит из двух ветвей, мало отличающихся от малой окружности с центром в точке  $z = 1/s$  и большой окружности с центром в начале координат. Когда модуль уменьшается, эти ветви приближаются друг к другу, при некотором значении модуля они сливаются в одну кривую с двойной точкой при  $z = \zeta'$ . В силу условий Коши — Римана эти двойные точки удовлетворяют уравнению  $f'(z) = 0$ , из которого получаем

$$\zeta = \frac{1}{1 + \sqrt{1-s}}, \quad \zeta' = \frac{1}{1 - \sqrt{1-s}},$$

причем ветви квадратного корня имеют положительные действительные части в разрезанной плоскости  $s$ .

Так как  $\ln |f(z)|$  — гармоническая функция, то  $|f(z)|$  не может иметь ни максимума ни минимума<sup>1)</sup>. Поэтому точки  $z = \zeta$  и  $z = \zeta'$  являются седловинами или точками перевала на поверхности  $t = |f(x + iy)|$ . Далее,  $f(0) = f(1) = 0$ , но так как  $f(\zeta) = \zeta^2$ ,  $|f(\zeta)| > 0$ , то на этой поверхности имеются такие контуры, ведущие из точки 0 в точку  $\zeta$ , на которых  $|f(z)|$  монотонно возрастает, и такие контуры, ведущие из точки  $\zeta$  в точку 1, на которых  $|f(z)|$  монотонно убывает. Более наглядно: имеются поднимающиеся в гору пути от точки 0 до точки  $\zeta$ , лежащие в долине ниже точки перевала, и спускающиеся вниз пути из точки  $\zeta$  в точку 1. Из таких двух путей Риман составил контур интегрирования.

Для того чтобы получить желаемое асимптотическое приближение, Риман; по существу, использовал метод Лапласа. Он утверждал, что главная часть интеграла при больших  $n$  определяется окрестностью точки перевала; вблизи этой точки он полагал

$$\{f(z)\}^n = \zeta^{2n} e^{-n\tau^2}, \quad (28.2)$$

где  $\tau$  — действительная величина. Это означает, как мы увидим позже, что он интегрировал по наибоыстрейшему

<sup>1)</sup> Минимума, отличного от нуля. — *Прим. ред.*

пути <sup>1)</sup>, выходящему из точки перевала. Уравнение (28.2), когда  $\tau$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , определяет кривую, начинающуюся в точке  $z=0$  и кончающуюся в точке  $z=1$ , которая является наибоыстрейшим путем из одной долины в другую. Если бы Риман использовал весь путь целиком, то он мог бы получить полное асимптотическое разложение вместо асимптотического приближения <sup>2)</sup>.

Впервые эту идею реализовал Дебая [10] в работе об асимптотическом разложении функций Бесселя; он использовал весь путь интегрирования и, не прибегая к методу Лапласа, смог получить асимптотическое разложение.

Мы будем различать два метода: метод Римана, использующий только окрестность точки перевала, называемый *методом перевала*, и метод Дебая, называемый *методом наибоыстрейшего спуска*.

Полезно внести небольшие изменения в обозначения. Вместо того чтобы рассматривать интегралы вида (28.1), положим  $f(z) = e^{w(z)}$  и будем рассматривать интеграл

$$\int e^{nw(z)} \varphi(z) dz.$$

Кривые, на которых  $|f(z)|$  был постоянен, теперь станут кривыми, на которых постоянна  $\operatorname{Re} w(z)$ . Значительно более удобно рассматривать поверхность  $u = \operatorname{Re} w(x + iy)$  вместо поверхности  $t = |f(x + iy)|$ , где  $(x, y, u)$  — прямоугольные декартовы координаты.

## § 29. Метод Дебая наибоыстрейшего спуска

Метод наибоыстрейшего спуска состоит в основном в выборе контура интегрирования с нужными геометрическими свойствами. Предположим, что нам нужно найти асимптотическое разложение при больших положительных  $v$  функции, заданной интегралом вида

$$\int e^{v w(z)} \varphi(z) dz, \quad (29.1)$$

<sup>1)</sup> Установившийся термин „наибоыстрейший путь“ не вполне точен. Путь, о котором идет речь, не самый короткий, а самый крутой. По такому пути потекла бы вода. — *Прим. ред.*

<sup>2)</sup> Автор допускает неточность — интеграл по любой фиксированной окрестности точки перевала уже дает все асимптотическое разложение. — *Прим. ред.*

где контур интегрирования — некоторая дуга или замкнутая кривая в плоскости  $z$ . Функции  $w(z)$  и  $\varphi(z)$  не зависят от  $\nu$ , это аналитические функции от  $z$ , регулярные в некоторой области, содержащей контур интегрирования. Идея метода состоит в том, чтобы так деформировать контур интегрирования, чтобы для полученного контура выполнялись условия:

1) контур проходит через точку  $z_0$ , в которой  $w'(z_0) = 0$ ;

2) мнимая часть функции  $w(z)$  постоянна на этом контуре.

Если мы обозначим

$$z = x + iy, \quad w(z) = u(x, y) + iv(x, y), \quad (29.2)$$

где  $x$ ,  $y$ ,  $u$  и  $v$  — действительные переменные, то  $v(x, y) = v(x_0, y_0)$  будет уравнением нового пути интегрирования и подинтегральная функция примет вид

$$e^{i\nu v(x_0, y_0)} e^{\nu u(x, y)} \varphi(x + iy).$$

Так как  $\nu$  и  $u$  действительны, а функция  $\varphi(x + iy)$  не зависит от  $\nu$ , то подинтегральная функция не будет быстро осциллировать на новом контуре интегрирования при больших значениях  $\nu$ .

Для того чтобы получить геометрическое представление о новом контуре, рассмотрим поверхность  $S$ , уравнением которой в прямоугольной декартовой системе координат является уравнение  $u = u(x, y)$ , причем ось  $u$  направлена вверх. Из условий Коши — Римана получаем

$$w'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Поэтому если  $z_0$  — нуль функции  $w'(z)$ , то касательная плоскость к поверхности  $S$  в соответствующей точке  $(x_0, y_0, u_0)$  горизонтальна. А так как

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

то эта точка может быть только точкой перевала, а не точкой максимума или минимума.

Форма поверхности  $S$  может быть отражена на плоскости  $(x, y)$  с помощью горизонталей или линий уровня, на которых  $u$  постоянно; точка перевала, очевидно, будет



кратной точкой некоторой линии уровня. Линия уровня, проходящая через точку перевала, разделяет ближайший к ней кусок поверхности  $S$  на долины, лежащие ниже точки перевала, и возвышенности, расположенные выше точки перевала. Линии, на которых  $v$  постоянно, образуют ортогональные траектории к линиям уровня, и поэтому они являются образами в плоскости  $(x, y)$  наибоыстрейших кривых, лежащих на поверхности  $S$ . Отсюда следует, что кривая, выбранная Дебаем, является наибоыстрейшим путем, проходящим через точку перевала. В простейшем случае, когда точка перевала — двойная точка соответствующей линии уровня, имеются два пути наибоыстрейшего спуска и два пути наибоыстрейшего подъема, выходящие из этой точки.

На наибоыстрейшем пути, проходящем через точку перевала  $z_0$ , мы имеем

$$\omega(z) = \omega(z_0) - \tau, \quad (29.3)$$

где  $\tau$  действительно, и поэтому если  $s$  — длина дуги кривой, то  $d\tau/ds = \pm |\omega'(z)|$ . Следовательно,  $d\tau/ds$  может изменить знак, только если контур интегрирования пройдет через другую точку перевала или особую точку функции  $\omega'(z)$ , но такой случай является исключительным. Переменная  $\tau$  обычно бывает монотонной на наибоыстрейшем пути, проходящем через точку перевала, и либо возрастает до  $+\infty$ , либо убывает до  $-\infty$ . А так как подинтегральная функция равна

$$e^{v\omega(z_0) - v\tau} \varphi(z),$$

то интеграл по контуру, на котором  $\tau \rightarrow -\infty$ , оказался бы расходящимся. Поэтому мы будем выбирать такие контуры интегрирования, на которых  $\tau$  положительно — это и есть пути наибоыстрейшего спуска из точки перевала. Если возможно изменить путь интегрирования и представить интеграл в виде суммы интегралов по путям наибоыстрейшего спуска из точек перевала, то остается только рассмотреть асимптотическое поведение интегралов вида

$$e^{v\omega(z_0)} \int_0^{\infty} e^{-v\tau} \varphi(z) \frac{dz}{d\tau} d\tau \quad (29.4)$$

при больших положительных значениях  $v$ , к каждому из которых обычно мы можем применить лемму Ватсона.

В общем случае трудно получить из формулы (29.3) параметрическое уравнение для каждого из контуров наибоыстрейшего спуска, выходящих из точки перевала, хотя очень просто определить вид кривой вблизи точки перевала. Рассмотрим случай, когда функция  $w'(z)$  имеет нуль порядка  $m-1$  в точке перевала  $z_0$ , так что

$$w(z) = w(z_0) - (z - z_0)^m f(z), \quad (29.5)$$

где функция  $f(z)$  регулярна в некоторой окрестности точки  $z_0$  и  $f(z_0) = ae^{-\alpha i}$ , причем  $a > 0$ . Вблизи точки перевала линии уровня и наибоыстрейшие линии приблизительно такие же, как у функции

$$w(z) = w(z_0) - ae^{-\alpha i} (z - z_0)^m.$$

Поэтому если  $z = z_0 + re^{i\theta}$ , то

$$u = u_0 - ar^m \cos(m\theta - \alpha), \quad v = v_0 - ar^m \sin(m\theta - \alpha).$$

Линиям уровня  $u = u_0$  соответствуют значения  $\theta$ , приближенно равные  $\{(n + 1/2)\pi + \alpha\}/m$ , а наибоыстрейшим линиям  $v = v_0$  — значения  $\theta = (n\pi + \alpha)/m$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots, 2m$ . Таким образом, имеются  $2m$  наибоыстрейших направлений из точки  $z_0$ :  $m$  направлений наибоыстрейшего спуска и  $m$  направлений наибоыстрейшего подъема. Линии уровня вблизи точки  $z_0$  делят поверхность  $S$  на  $m$  долин, лежащих ниже точки перевала, и  $m$  холмов, расположенных выше точки перевала. Пути интегрирования лежат в долинах. На рис. 1 и 2 показано, как выглядит окрестность точки перевала в простейших случаях  $m = 2$ ,  $m = 3$ , когда  $\alpha = 0$ ; долины заштрихованы, наибоыстрейшие линии нанесены пунктиром, а сплошные линии — это линии уровня.

Исходя из формул (29.3) и (29.5), мы должны получить решение уравнения

$$(z - z_0)^m f(z) = \tau, \quad (29.6)$$

причем на контуре наибоыстрейшего спуска  $\tau$  положительно. Нам будет удобно считать  $\tau$  комплексным и применить теорию функций комплексного переменного, для того чтобы найти  $m$  решений уравнения (29.6), которые имеют значение  $z_0$  при  $\tau = 0$ .

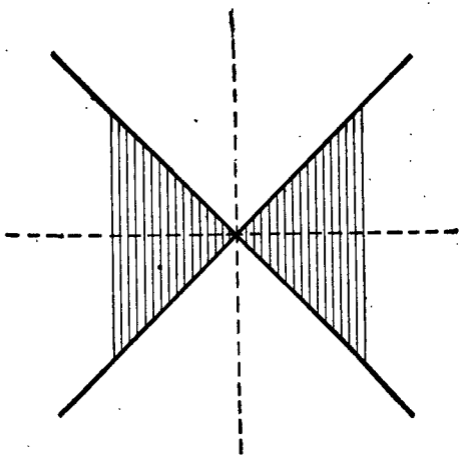


Рис. 1.  $m=2$ ,  $\alpha=0$ .

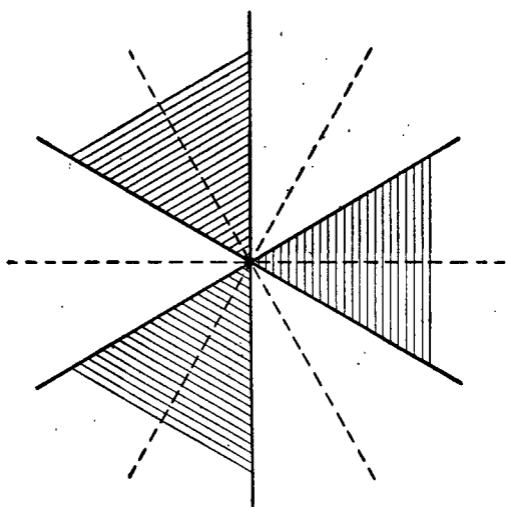


Рис. 2.  $m=3$ ,  $\alpha=0$ .

По предположению,  $f(z)$  можно разложить в сходящийся степенной ряд

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

где  $a_0 \neq 0$ . В силу непрерывности функции  $f(z)$  имеется некоторая окрестность точки  $z_0$ , в которой  $f(z)$  не равна нулю. Полагаем  $g(z)$  равной корню  $m$ -й степени из  $f(z)$ . Ясно, что она является аналитической функцией в некоторой окрестности точки  $z_0$  и ее можно будет разложить в степенной ряд

$$g(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \dots,$$

где  $b_0$  — главное значение  $\sqrt[m]{a_0}$ . Теперь уравнение (29.6) принимает вид

$$(z - z_0)g(z) = t,$$

где  $t$  — корень  $m$ -й степени из  $\tau$ . Но в силу теоремы об обратной функции<sup>1)</sup> в случае аналитических функций это уравнение имеет единственное решение

$$z = z_0 + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots, \quad (29.7)$$

которое принимает значение  $z_0$  при  $t = 0$  и регулярно в некоторой окрестности точки  $t = 0$ . Эта формула дает одно решение уравнения (29.6); другие решения получаются с помощью подстановки в первое решение  $\omega t$ , вместо  $t$ , где  $\omega$  — некоторый комплексный корень  $m$ -й степени из единицы. Когда  $t$  действительно, (29.7) дает параметрическое уравнение для наибыстрейшего пути, проходящего через точку перевала; при  $t > 0$  это — контур наибыстрейшего спуска.

Для того чтобы найти асимптотическое разложение, сначала нужно найти коэффициенты  $A_n$  степенного ряда

$$\varphi(z) \frac{dz}{dt} = \sum_0^{\infty} A_n t^n, \quad (29.8)$$

<sup>1)</sup> См., например, Евграфов М. А., Аналитические функции, «Наука», М., 1965, стр. 137. — *Прим. перев.*

предположив, что функция  $\varphi(z)$  является регулярной в некоторой окрестности точки  $z_0$ . Легко видеть, что<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} A_n &= \frac{1}{2\pi i} \int^{(0+)} \varphi(z) \frac{dz}{dt} \frac{dt}{t^{n+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int^{(z_0+)} \frac{\varphi(z)}{t^{n+1}} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int^{(z_0+)} \frac{\varphi(z)}{(\omega_0 - \omega)^{(n+1)/m}} dz \end{aligned}$$

для соответствующей ветви функции  $(\omega_0 - \omega)^{1/m}$ . Следовательно,  $A_n$  равен вычету функции  $\varphi(z)/(\omega_0 - \omega)^{(n+1)/m}$  в точке  $z_0$ . В частности,  $nc_n$  равно вычету функции  $1/(\omega_0 - \omega)^{n/m}$ . Определение общего вида коэффициентов весьма затруднительно, но вычисление любого числа первых коэффициентов не составит труда.

В точке  $z_0$  мы имеем

$$\frac{dz}{dt} = c_1 = \frac{A_0}{\varphi(z_0)},$$

и аргумент  $dz/dt$  в точке  $z_0$  задает направление, соответствующее контуру наибоыстрейшего спуска.

Это изложение метода Дебая наибоыстрейшего спуска является только описанием, а не строгим обоснованием; основная идея станет яснее при рассмотрении частных примеров. Следует заметить, что в формуле (29.4) мы предполагали  $v$  большим и положительным. Но часто оказывается, что интегралы, полученные таким путем, сходятся, когда, скажем,  $|v|$  принимает большие значения, а  $|\arg v| < \alpha$ ; этот метод дает тогда асимптотическое разложение при больших значениях  $|v|$  даже в том случае, когда контур интегрирования не является путем наибоыстрейшего спуска.

<sup>1)</sup> Здесь интеграл вычисляется по некоторому замкнутому контуру, проходимому против часовой стрелки и лежащему в области регулярности  $\varphi(z)$ , причем точка 0 (соответственно  $z_0$  в случае  $\int^{(z_0+)}$ ) лежит внутри контура. — *Прим. перев.*

§ 30. Асимптотическое разложение функции  $1/\Gamma(v)$ 

В этом параграфе мы применим метод наибыстрейшего спуска к интегралу Ганкеля

$$\frac{1}{\Gamma(v)} = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{t^v} t^{-v} dt,$$

где  $t^v$  понимается как  $e^{v \ln t}$ , причем для логарифма берется главное значение. Контур интегрирования начинается в точке  $\infty e^{-\pi i}$ , обходит вокруг начала координат один раз и заканчивается в  $\infty e^{\pi i}$ . Эта формула справедлива для всех действительных и комплексных значений  $v$ , но если  $v$  — действительное и положительное, то подстановка  $t = vz$  дает

$$\frac{1}{\Gamma(v)} = \frac{1}{2\pi i v^{v-1}} \int_C e^{v(z - \ln z)} dz; \quad (30.1)$$

контур интегрирования здесь тот же, что и раньше. Этот интеграл сходится равномерно на любом компактном множестве в полуплоскости  $\operatorname{Re} v > 0$ , а так как  $1/\Gamma(v)$  — целая функция, то равенство (30.1) справедливо в этой полуплоскости в предположении, что  $v^v$  понимается как  $e^{v \ln v}$ , где для логарифма берется главное значение.

Мы имеем одну точку перевала, а именно  $z = 1$ . Когда  $v$  положительно, контур наибыстрейшего спуска задается формулой

$$z - \ln z = 1 - \tau, \quad (30.2)$$

где  $\tau > 0$ . Если  $\tau$  мало,  $z$  равняется приблизительно  $1 \pm i \sqrt{2\tau}$ , так что имеются два направления наибыстрейшего спуска из точки перевала, для которых  $\arg(z - 1) = \pm \pi/2$ . Для наибыстрейшего пути имеем уравнение  $\operatorname{Im}(z - \ln z) = 0$ , откуда получаем

$$y - \operatorname{Arctg} \frac{y}{x} = 0.$$

Этому уравнению удовлетворяет функция  $y = 0$ , определяющая два направления наибыстрейшего подъема из точки перевала, и функция  $x = y \operatorname{ctg} y$ . Верхняя и нижняя половины этой кривой, симметричной относительно

действительной оси, являются двумя путями наибоыстрейшего спуска. Так как

$$\frac{dx}{dy} = \frac{\sin 2y - 2y}{2 \sin^2 y},$$

то  $x$  монотонно убывает и стремится к  $-\infty$ , когда  $y$  растет от 0 до  $\pi$ ; аналогично для  $y$ , убывающего от 0 до  $-\pi$ . Кривая  $x = y \operatorname{ctg} y$ , или вернее ветвь, проходящая через точку  $(1, 0)$ , имеет асимптоты  $y = \pm \pi$ , когда  $x$  стремится к  $-\infty$ . Простое применение теоремы Коши показывает, что этот контур можно взять в качестве пути интегрирования  $S$ .

Если мы поожим  $z = 1 + Z$ ,  $\tau = -t^2/2$  в формуле (30.2), то получим уравнение

$$Z - \ln(1 + Z) = \frac{1}{2} t^2,$$

рассмотренное в других обозначениях в § 25. Это уравнение определяет многозначную функцию  $Z(t)$  комплексного переменного  $t$ , имеющую точки ветвления при  $t = \pm 2\sqrt{n\pi} e^{\pm \pi i/4}$ . Два решения, обращающиеся в нуль при  $t = 0$ , определяются формулами

$$Z_1(t) = \sum_1^{\infty} a_n t^n, \quad Z_2(t) = \sum_1^{\infty} a_n (-t)^n,$$

причем ряды заведомо сходятся в круге  $|t| < 2\sqrt{\pi}$ , так как ближайшая особенность лежит на границе круга сходимости. Первые пять коэффициентов  $a_n$  были определены выше:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{1}{3}, \quad a_3 = \frac{1}{36}, \quad a_4 = -\frac{1}{270}, \quad a_5 = \frac{1}{4320}.$$

Возвращаясь к начальным переменным, мы получаем два решения уравнения (30.2): первое

$$z_1 = 1 + \sum_1^{\infty} a_n t^n (2\tau)^{n/2},$$

которое дает верхний контур наибоыстрейшего спуска, когда  $\sqrt{2\tau} > 0$ , и второе

$$z_2 = 1 + \sum_1^{\infty} a_n (-t)^n (2\tau)^{n/2}.$$

которое дает нижний контур. Отсюда получаем формулу

$$\frac{1}{\Gamma(v)} = \frac{e^v}{2\pi i v^{v-1}} \int_0^\infty e^{-v\tau} \left( \frac{dz_1}{d\tau} - \frac{dz_2}{d\tau} \right) d\tau. \quad (30.3)$$

Очевидно, что  $d(z_1 - z_2)/d\tau$  — аналитическая функция комплексного переменного  $\tau$ , функция типа, рассматриваемого в лемме Ватсона. Осталось проверить только условие, касающееся поведения этой функции при действительных положительных значениях  $\tau$ . Но так как  $dz/d\tau = z/(1-z)$ , то мы имеем

$$\frac{dz_1}{d\tau} - \frac{dz_2}{d\tau} = \frac{z_1}{1-z_1} - \frac{z_2}{1-z_2} = \frac{1}{z_2-1} - \frac{1}{z_1-1},$$

откуда следует, что производная  $d(z_1 - z_2)/d\tau$  ограничена, когда  $\tau \geq \tau_0$  для любого положительного значения  $\tau_0$ . Теперь мы можем подставить ряды для  $z_1$  и  $z_2$  в интеграл и проинтегрировать почленно.

Прежде чем мы это сделаем, заметим, что интеграл (30.3) сходится равномерно на любом компактном множестве в области  $|v| > 0$ ,  $|\arg v| < \pi/2$  и что представление функции  $1/\Gamma(v)$  справедливо в более широкой области.

Окончательный результат состоит в том, что

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \sim e^{v\sqrt{v}} \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \sum_1^\infty \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n+1)}{v^n} (-1)^n a_{2n+1},$$

когда  $|\arg v| < \pi/2$ , или

$$\frac{1}{\Gamma(v)} \sim e^{v\sqrt{v}} \sqrt{\frac{v}{2\pi}} \left\{ 1 - \frac{1}{12v} + \frac{1}{288v^2} - \dots \right\}. \quad (30.4)$$

На самом деле этот результат имеет место в области  $|\arg v| \leq \pi - \varepsilon < \pi$ , что можно показать с помощью поворотов контура интегрирования в плоскости  $\tau$ .

Мы могли бы получить этот результат из известного асимптотического разложения функции  $\Gamma(v)$ . Данное здесь решение является, вероятно, прослейшим примером на метод Дебая.



### § 31. Функция Бесселя $J_\nu(a)$

Довольно полное изложение теории асимптотического разложения бесселевых функций можно найти в книге Ватсона „Теория бесселевых функций“. Мы рассмотрим здесь несколько простых случаев в качестве примеров применения метода наибыстрейшего спуска; простейшим является случай  $J_\nu(a)$  при  $a \rightarrow +\infty$ .

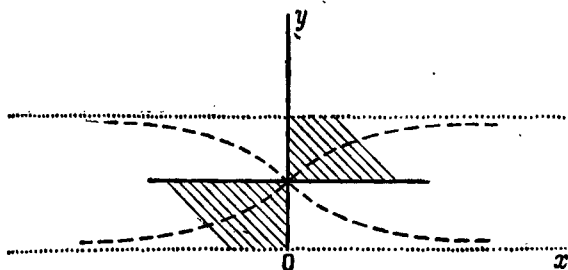


Рис. 3.

Нам будет удобно начать с функции Ганкеля, определенной интегралом

$$H_\nu^{(1)}(a) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty + \pi i} e^a \operatorname{sh} z - \nu z \, dz, \quad (31.1)$$

когда  $|\arg a| < \pi/2$ . Мы предположим, что  $a$  действительно и положительно и что порядок  $\nu$  сохраняется постоянным. Параметр  $a$  играет здесь такую же роль, какую играл параметр  $\nu$  в предыдущем параграфе. Точки перегиба находятся из уравнения  $\operatorname{sh} z = 0$ , и только одна из них интересует нас — это точка  $z = \pi i/2$ . Контур наибыстрейшего спуска задается формулой

$$\operatorname{sh} z = l - \tau \quad (\tau > 0). \quad (31.2)$$

Когда  $\tau$  мало,  $z$  приближенно равняется  $\pi i/2 \pm e^{\pi i/4} \sqrt{2\tau}$ , отсюда получаем, что два направления наибыстрейшего спуска образуют углы  $\pi/4$  и  $5\pi/4$  с действительной осью, а направления наибыстрейшего подъема (соответствующие

значениям  $\tau < 0$ ) ортогональны им. Уравнение наибо-  
стрейшего пути имеет вид

$$\operatorname{ch} x \sin y = 1,$$

а линиями уровня, проходящими через точку перевала, уравнение которых  $\operatorname{sh} x \cos y = 0$ , будут прямые  $x = 0$  и  $y = \pi/2$ . На рис. 3 сплошные линии — это линии уровня, пунктирные линии — наибо-  
стрейшие кривые, а площадь долин заштрихована. Наибо-  
стрейшие кривые асимпто-  
тически приближаются к действительной оси и прямой  $y = \pi$ , когда  $x \rightarrow \pm \infty$ . Два пути наибо-  
стрейшего спуска из точки перевала ведут соответственно в  $z = \infty + \pi i$  и  $z = -\infty$ , поэтому их можно взять в качестве пути интегрирования.

Этот путь интегрирования симметричен относительно точки перевала. Если мы положим  $z = \pi i/2 + \zeta$ , то получим

$$\begin{aligned} H_\nu^{(1)}(a) &= \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty - \pi i/2}^{\infty + \pi i/2} e^{ia \operatorname{ch} \zeta - \nu \zeta - \nu \pi i/2} d\zeta = \\ &= \frac{2}{\pi i} e^{-\nu \pi i/2} \int_0^{\infty + \pi i/2} e^{ia \operatorname{ch} \zeta} \operatorname{ch} \nu \zeta d\zeta, \end{aligned}$$

причем

$$\operatorname{ch} \zeta = 1 + i\tau. \quad (31.3)$$

Следовательно, функция  $H_\nu^{(1)}(a)$  представляется в виде интеграла

$$H_\nu^{(1)}(a) = \frac{2e^{ia - \nu \pi i/2}}{\pi i} \int_0^\infty e^{-a\tau} \operatorname{ch} \nu \zeta \frac{d\zeta}{d\tau} d\tau, \quad (31.4)$$

к которому мы можем применить лемму Ватсона. Мы должны отметить, однако, что эта формула справедлива не только для  $a > 0$ , но также в области

$$|\arg a| < \frac{\pi}{2}.$$

Асимптотическое разложение, которое мы получим, пригодно в этой полуплоскости, несмотря на то, что контур интегрирования не является контуром наибо-  
стрейшего спуска, когда  $a$  имеет комплексные значения.

Формула (31.3) дает

$$\operatorname{sh} \frac{1}{2} \zeta = e^{\pi i/4} \sqrt{\frac{\tau}{2}},$$

где квадратный корень положителен на данном контуре интегрирования. Если считать  $\tau$  комплексным, то  $\operatorname{sh} \zeta/2$  — аналитическая функция от  $\tau$ , имеющая изолированную точку ветвления в начале координат. Функция  $\operatorname{sh} v\zeta$  — также аналитическая функция от  $\operatorname{sh} \zeta/2$ , регулярная при  $|\operatorname{sh} \zeta/2| < 1$ , и ее ряд Тейлора равен

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} v\zeta &= \\ &= 2v \operatorname{sh} \frac{1}{2} \zeta \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2 - v)_r (1/2 + v)_r}{(2r + 1)!} (-1)^r 2^{2r} \operatorname{sh}^{2r} \frac{1}{2} \zeta \right], \end{aligned}$$

где

$$(\alpha)_r = \alpha(\alpha + 1) \dots (\alpha + r - 1).$$

Следовательно,  $\operatorname{sh} v\zeta$  — аналитическая функция от  $\tau$  в кольце  $0 < |\tau| < 2$  с точкой ветвления в начале координат, и ее можно записать в виде

$$\operatorname{sh} v\zeta = 2ve^{\pi i/4} \sqrt{\frac{\tau}{2}} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2 - v)_r (1/2 + v)_r}{(2r + 1)!} (-i\tau)^r \right].$$

Отсюда получаем, что функция

$$\operatorname{ch} v\zeta \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{e^{\pi i/4}}{\sqrt{2\tau}} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2 - v)_r (1/2 + v)_r}{(2r)!} (-i\tau)^r \right]$$

также аналитична в кольце  $0 < |\tau| < 2$  с точкой ветвления в начале.

Окончательно получаем

$$e^{\zeta} \sim 2i\tau, \quad \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{i}{\operatorname{sh} \zeta} \sim \frac{1}{\tau}$$

при больших положительных  $\tau$ . Поэтому

$$\operatorname{ch} v\zeta \frac{d\zeta}{d\tau} = \frac{1}{2} (e^{v\zeta} + e^{-v\zeta}) \frac{d\zeta}{d\tau} \sim \frac{1}{2\tau} \{ (2i\tau)^v + (2i\tau)^{-v} \},$$

откуда ясно, что существуют такие постоянные  $K$  и  $\tau_1$ , для которых выполняется неравенство

$$\left| \operatorname{ch} v \zeta \frac{d\zeta}{d\tau} \right| < K e^\tau,$$

когда  $\tau > \tau_1$ . А так как произведение  $\operatorname{ch} v \zeta \frac{d\zeta}{d\tau}$ , очевидно, ограничено на отрезке  $1 \leq \tau \leq \tau_1$ , то все условия леммы Ватсона выполнены. Отсюда получаем, что

$$H_\nu^{(1)}(a) \sim \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} e^{i(a - \nu\pi/2 - \pi/4)} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - \nu)_r (\frac{1}{2} + \nu)_r}{r! (2ia)^r} \right]$$

при  $|a| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg a| \leq \pi/2 - \varepsilon < \pi/2$ . На самом деле этот результат справедлив в области  $-\pi + \varepsilon \leq \arg a \leq 2\pi - \varepsilon < 2\pi$ , доказательство этого утверждения несколько утомительно, но может быть проведено тем же самым путем.

Аналогичные соображения показывают, что

$$H_\nu^{(2)}(a) \sim \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} e^{-i(a - \nu\pi/2 - \pi/4)} \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - \nu)_r (\frac{1}{2} + \nu)_r}{r! (-2ia)^r} \right]$$

при  $|a| \rightarrow \infty$  в угле  $-2\pi + \varepsilon \leq \arg a \leq \pi - \varepsilon < \pi$ .

Асимптотическое разложение

$$J_\nu(a) \sim \left(\frac{2}{\pi a}\right)^{1/2} \left\{ \cos\left(a - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - \nu)_{2r} (\frac{1}{2} + \nu)_{2r} (-1)^r}{(2r)! (2a)^{2r}} + \right. \\ \left. + \sin\left(a - \frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi\right) \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{2} - \nu)_{2r+1} (\frac{1}{2} + \nu)_{2r+1} (-1)^r}{(2r+1)! (2a)^{2r+1}} \right\}$$

при  $|a| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg a| \leq \pi - \varepsilon < \pi$  получается из этих результатов и из формулы

$$J_\nu(a) = \frac{1}{2} \{ H_\nu^{(1)}(a) + H_\nu^{(2)}(a) \}.$$

### § 32. Функция Бесселя $J_\nu(va)$

Задача получения асимптотического разложения функции  $J_\nu(a)$  при больших  $\nu$  и фиксированном  $a$  мало интересна; можно было бы сразу показать, что степенной ряд для бесселевой функции имеет вид

$$J_\nu(a) \sim \frac{e^\nu (a/2)^\nu}{\sqrt{2\pi\nu} \nu^\nu} \left[ 1 + \frac{a_1}{\nu} + \frac{a_2}{\nu^2} + \dots \right].$$

Но такая же задача для функции  $J_\nu(va)$ , когда  $\nu$  велико, а  $a$  фиксировано, представляет очень большой интерес, так как получаются совершенно различные разложения для случаев  $a = 1$  и  $a \neq 1$ .

Мы рассмотрим в этом параграфе случай  $0 < a < 1$ . Нам будет удобно обозначить  $a = 1/\operatorname{ch} \alpha$ , где  $\alpha > 0$ , и  $k = va$ . Предположим, что  $\nu$ ,  $a$  следовательно, и  $k$  имеют большие положительные значения. Тогда получим

$$\begin{aligned} J_\nu(va) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{\nu a \operatorname{sh} z - \nu z} dz = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{k(\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha)} dz. \end{aligned} \quad (32.1)$$

Точки перевала задаются уравнением  $\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha = 0$ , это точки  $z = \pm \alpha + 2n\pi i$ , где  $n$  целое. В полосе  $|\operatorname{Im} z| < \pi$  имеются две интересующие нас точки перевала, а именно  $z = \pm \alpha$ , и только одна из них  $z = \alpha$  нам подходит.

Контур наибоыстрейшего спуска, проходящий через точку перевала  $z = \alpha$ , задается уравнением

$$\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha = \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha - \tau, \quad (32.2)$$

где  $\tau > 0$ . Когда  $\tau$  мало,  $z$  приближенно равняется  $\alpha \pm i\sqrt{2\tau/\operatorname{sh} \alpha}$ , поэтому касательные к двум путям наибоыстрейшего спуска в точке перевала параллельны положительному и отрицательному направлениям мнимой оси. Наибоыстрейшие кривые, проходящие через точку  $z = \alpha$ , задаются формулой  $\operatorname{ch} x \sin y - y \operatorname{ch} \alpha = 0$ . Пути наибоыстрейшего подъема лежат на прямой  $y = 0$  — положительная и отрицательная действительные полуоси; а пути

наибыстрейшего спуска — это верхняя и нижняя половины ветви кривой

$$\operatorname{ch} x = \frac{y \operatorname{ch} \alpha}{\sin y},$$

проходящей через точку  $z = \alpha$ ; эта ветвь симметрична относительно действительной оси. Если  $y$  возрастает от

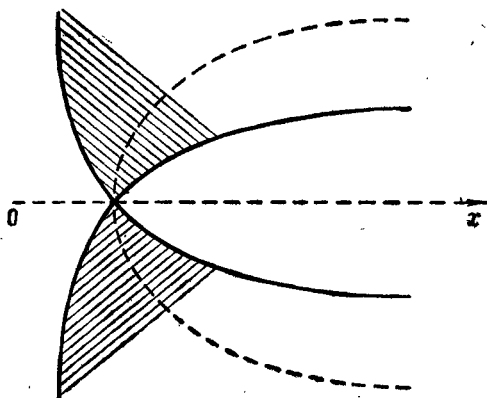


Рис. 4.

0 до  $\pi$ , то  $x$  монотонно растет от  $\alpha$  до  $+\infty$ . Следовательно, два контура наиболее быстрого спуска образуют допустимый путь интегрирования в формуле (32.1). Линии уровня, выходящие из точки  $\alpha$ , асимптотически приближаются к прямым  $y = \pm \pi/2$  и заканчиваются в точках перевала  $z = \alpha \pm 2\pi l$  (см. рис. 4).

Если мы положим  $\tau = t^2$  в формуле (32.2), то получим

$$\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha = \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha - t^2, \quad (32.3)$$

откуда  $z$  приближенно равняется  $\alpha + it \sqrt{2/\operatorname{sh} \alpha}$  вблизи точки перевала, причем нужно предполагать, что  $t$  положительно на верхней половине и отрицательно на нижней половине контура интегрирования. Равенство (32.1) принимает вид

$$J_\nu(va) = \frac{e^{k(\operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha)}}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\tau^2} \frac{dz}{dt} dt. \quad (32.4)$$

Уравнение (32.3) имеет два решения, это — аналитические функции комплексного переменного  $t$ , регулярные в некоторой окрестности начала координат. Если искать решение в виде

$$z = \alpha + c_1 t + c_2 t^2 + c_3 t^3 + \dots,$$

то нам нужно такое решение, у которого  $c_1 = i\sqrt{2/\operatorname{sh} \alpha}$ . Наиболее простой способ определения коэффициентов, хотя и не приводящий к общей формуле, состоит в повторном дифференцировании формулы (32.3), при этом нужно полагать каждый раз  $z = \alpha$  при  $t = 0$ ; коэффициенты  $c_n$  равны значениям  $z_n/n!$  при  $t = 0$ , где  $z_n$  обозначает  $n$ -ю производную функции  $z$  по переменной  $t$ . Этот процесс дает

$$(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha) z_1 = -2t,$$

$$(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha) z_2 + z_1^2 \operatorname{sh} z = -2,$$

$$(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha) z_3 + 3 z_1 z_2 \operatorname{sh} z + z_1^3 \operatorname{ch} z = 0,$$

$$(\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha) z_4 + 4 z_1 z_3 \operatorname{sh} z + 3 z_2^2 \operatorname{sh} z + 6 z_1^2 z_2 \operatorname{ch} z + z_1^4 \operatorname{sh} z = 0$$

и т. д. При  $t = 0$ ,  $z = \alpha$  первое уравнение тривиально, а второе дает уже известное значение  $z_1(0)$ . Из третьего мы находим

$$z_2(0) = -\frac{\operatorname{ch} \alpha}{3 \operatorname{sh} \alpha} z_1^2(0) = \frac{2 \operatorname{ch} \alpha}{3 \operatorname{sh}^2 \alpha}.$$

Таким же образом мы получаем

$$z_3(0) = \frac{i\sqrt{2}}{\sqrt{\operatorname{sh} \alpha}} \frac{3 \operatorname{sh}^2 \alpha - 5 \operatorname{ch}^2 \alpha}{6 \operatorname{sh}^3 \alpha},$$

$$z_4(0) = \frac{16 \operatorname{ch} \alpha (9 \operatorname{sh}^2 \alpha - 10 \operatorname{ch}^2 \alpha)}{45 \operatorname{sh}^5 \alpha}$$

и т. д. Граница круга сходимости ряда  $\sum c_n t^n$  проходит через особенность функции  $z$ , ближайшую к началу координат. Так как

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2t}{\operatorname{ch} \alpha - \operatorname{ch} z},$$

то особые точки  $t$  находятся из уравнения

$$\operatorname{ch} z = \operatorname{ch} \alpha;$$

они задаются формулами

$$t^2 = 2\pi i \operatorname{ch} \alpha, \quad t^2 = 2\pi i \operatorname{ch} \alpha + 2\operatorname{sh} \alpha - 2\alpha \operatorname{ch} \alpha,$$

где  $n$  принимает целые значения ( $t=0$  исключается). Следовательно, ряд имеет положительный радиус сходимости.

Окончательно, когда  $t^2$  принимает большие положительные значения, из формулы (32.3) вытекает, что функция  $e^z$  приближенно равна  $-2t^2$  и что производная  $dz/dt$  стремится к нулю, когда  $t$  стремится к  $+\infty$  или  $-\infty$ . Условия второй формулировки леммы Ватсона, таким образом, выполнены. Если мы подставим в формулу (32.4) степенной ряд функции  $z$  и проинтегрируем почленно, то получим

$$\begin{aligned} J_\nu(va) &\sim \frac{e^{k(\operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha)}}{2\pi i} \sum_0^\infty (2n+1) c_{2n+1} \int_{-\infty}^\infty e^{-kt^2 t^{2n}} dt = \\ &= \frac{e^{k(\operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha)}}{2\pi i} \sum_0^\infty (2n+1) c_{2n+1} \frac{\Gamma(n+1/2)}{k^{n+1/2}} \end{aligned}$$

при  $k \rightarrow +\infty$  или, более общо, когда  $|k| \rightarrow \infty$  в угле

$$|\arg k| \leq \frac{1}{2} \pi - \varepsilon < \frac{1}{2} \pi.$$

Возвращаясь к первоначальным переменным, находим

$$J_\nu\left(\nu \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}\right) \sim \frac{e^{\nu(\operatorname{th} \alpha - \alpha)}}{2\pi i} \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+1/2)}{(2n)!} \frac{z_{2n+1}(0)}{(\nu/\operatorname{ch} \alpha)^{n+1/2}} \quad (32.5)$$

для  $\alpha > 0$ , когда  $|\nu| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg \nu| \leq \pi/2 - \varepsilon$  при любом положительном значении  $\varepsilon$ . Коэффициенты все действительны, так как  $z_{2n+1}(0)$  — чисто мнимые числа. Ограничиваясь главным членом разложения, получаем

$$J_\nu\left(\frac{\nu}{\operatorname{ch} \alpha}\right) \sim \frac{e^{\nu(\operatorname{th} \alpha - \alpha)}}{\sqrt{2\pi\nu \operatorname{th} \alpha}}.$$



### § 33. Функция Бесселя $J_\nu(\nu)$

Пример точки перевала более высокого порядка мы получаем в случае функции Бесселя  $J_\nu(\nu)$ , определенной формулой

$$J_\nu(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{\nu(\operatorname{sh} z - z)} dz, \quad (33.1)$$

когда  $\nu > 0$  и даже когда  $\operatorname{Re} \nu > 0$ . Контур интегрирования можно построить следующим образом: из отрезков прямой  $y = -\pi$ , когда  $x$  изменяется от  $+\infty$  до 0, прямой  $x = 0$ , когда  $y$  изменяется от  $-\pi$  до  $\pi$ , и прямой  $y = \pi$ , когда  $x$  изменяется от 0 до  $+\infty$ .

Точки перевала определяются из уравнения  $\operatorname{ch} z = 1$ , это точки  $z = 2\pi i n$ , где  $n$  — целое или нуль. Нас интересует только точка перевала в начале координат. Для положительных  $\nu$  путь наибоыстрейшего спуска из начала координат задается формулой

$$\operatorname{sh} z - z = -\tau \quad (\tau > 0). \quad (33.2)$$

Когда  $\tau$  мало, мы получаем, что приближенное уравнение этой линии  $z^3 = -6\tau$ , откуда видно, что имеются три направления наибоыстрейшего спуска из начала координат, т. е. направления, на которых аргумент  $z$  равен соответственно  $\pm \pi/3$  или  $-\pi$ . Имеются также три направления наибоыстрейшего подъема из начала координат, причем аргумент  $z$  на них равен  $\pm 2\pi/3$  или 0.

Точным уравнением кривых наибоыстрейшего спуска и подъема будет

$$\operatorname{ch} x \sin y - y = 0,$$

ему удовлетворяют действительная ось и кривая

$$\operatorname{ch} x = \frac{y}{\sin y},$$

для которой прямые  $y = \pm \pi$  являются асимптотами. Линиями уровня, проходящими через начало координат, будут мнимая ось и кривая

$$\cos y = \frac{x}{\operatorname{sh} x}.$$

асимптоты которой  $y = \pm\pi/2$ . На рис. 5 заштрихована площадь долин, лежащих ниже точки перевала, не заштрихована площадь холмов, пунктирные линии означают наибыстрейшие кривые, выходящие из точки перевала.

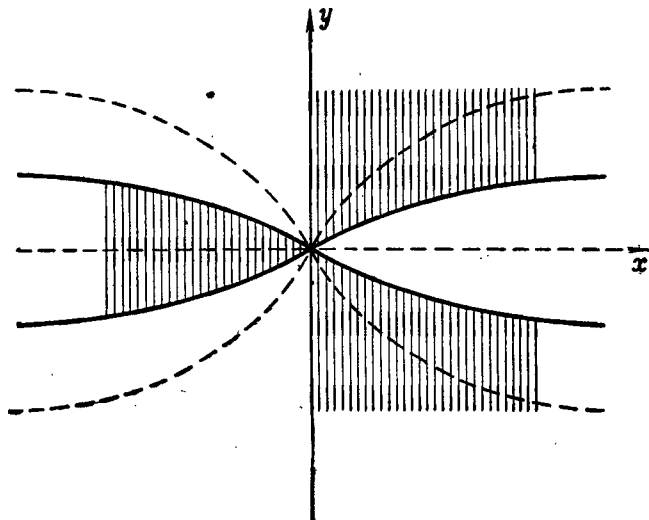


Рис. 5.

Мы можем, очевидно, взять в качестве пути интегрирования пунктирную линию, ведущую из  $+\infty - \pi i$  в начало координат, а затем по наибыстрейшей кривой в  $+\infty + \pi i$ . Тогда мы получаем

$$J_\nu(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \left\{ \int_0^{\infty + \pi i} - \int_0^{\infty - \pi i} e^{\nu(\text{sh } z - z)} dz \right\},$$

где интегрирование ведется вдоль пути наибыстрейшего спуска.

Параметрические уравнения трех контуров наибыстрейшего спуска из точки перевала являются тремя решениями уравнения

$$\text{sh } z - z = -\tau.$$

Первое решение  $z = z_1(\tau)$  даст контур, ведущий из 0 в  $\infty + \pi i$ , второе  $z = z_2(\tau)$  — путь от 0 до  $\infty - \pi i$  и третье  $z = z_3(\tau)$  — путь от 0 до  $-\infty$ . Теперь мы должны определить, можно ли применить лемму Ватсона к получившемуся интегралу

$$J_\nu(\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty e^{-\nu\tau} \left\{ \frac{dz_1}{d\tau} - \frac{dz_2}{d\tau} \right\} d\tau. \quad (33.3)$$

Для того чтобы можно было использовать теорию аналитических функций, мы обозначим  $\tau = t^3$  и будем с этого момента рассматривать  $t$  как комплексное переменное. Так как

$$\operatorname{sh} z - z = z^3 \left\{ \frac{1}{3!} + \sum_1^\infty \frac{z^{2n}}{(2n+3)!} \right\},$$

то уравнение, которое нужно решить, принимает вид

$$zf(z) = \omega t, \quad (33.4)$$

где  $\omega$  — комплексный кубический корень из  $-1$ , равный  $\omega = e^{\pi i/3}$  для  $z_1$ ,  $\omega = e^{-\pi i/3}$  для  $z_2$  и  $\omega = -1$  для  $z_3$ . Функция  $f(z)$  является ветвью функции

$$\left\{ \frac{1}{3!} + \sum_1^\infty \frac{z^{2n}}{(2n+3)!} \right\}^{1/3},$$

которая положительна в начале координат. В силу теоремы об обратной функции<sup>1)</sup> уравнение (33.4) имеет единственное решение

$$z = \sum_1^\infty a_n (\omega t)^n, \quad (33.5)$$

которое обращается в нуль при  $t = 0$  и регулярно в некоторой окрестности начала координат. Так как

$$\frac{dz}{dt} = \frac{-3t^2}{\operatorname{ch} z - 1},$$

то особыми точками любой ветви функции  $z$ , рассматриваемой как функции от  $t$ , будут такие значения  $t$ , кото-

<sup>1)</sup> См. примечание на стр. 95. — *Прим. перев.*

рые соответствуют значениям  $z = 2n\pi i$  для  $n$  целых, отличных от нуля; они удовлетворяют уравнению  $t^3 = -2n\pi i$ . Ряд (33.5) тогда заведомо сходится в круге  $|t| < (2\pi)^{1/3}$ .

Если мы положим опять  $t^3 = \tau$ , то уравнение (33.5) даст три функции  $z_r(t)$ , каждая из которых аналитична в кольце  $0 < |\tau| < 2\pi$  и имеет точку ветвления  $\tau = 0$ .

Так как  $z$  — нечетная функция от  $t$ , то коэффициенты  $a_{2n}$  в формуле (33.5) все равны нулю. Для нечетных коэффициентов, по-видимому, нет достаточно общей формулы. Их можно определять последовательно с помощью приема, использованного в § 32, или с помощью метода неопределенных коэффициентов. Первые три отличных от нуля члена имеют вид

$$z = 6^{1/3}\omega t - \frac{1}{60}(6^{1/3}\omega t)^3 + \frac{1}{1400}(6^{1/3}\omega t)^5 + \dots \quad (33.6)$$

Три пути наибо́льшего спуска из начала координат — это те пути, на которых  $\tau^{1/3}$  положительно. Когда  $\tau$  принимает большие положительные значения, функции  $e^{z_1}$  и  $e^{z_2}$  приближенно равны  $-\tau$ , а так как

$$\frac{dz}{d\tau} = \frac{1}{1 - \operatorname{ch} z},$$

то производная ограничена. Условия леммы Ватсона, таким образом, выполнены. Далее, для разности  $z_1 - z_2$  имеем

$$z_1 - z_2 = \sum_1^{\infty} a_n (\omega_1^n - \omega_2^n) \tau^{n/3},$$

где  $\omega_1 = e^{\pi i/3}$ ,  $\omega_2 = e^{-\pi i/3}$ , поэтому

$$z_1 - z_2 = 2t \sum_1^{\infty} a_n \sin \frac{1}{3} n\pi \cdot \tau^{n/3}.$$

Следовательно, когда  $\nu$  принимает большие положительные значения, имеет место асимптотическое равенство

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{1}{3} n a_n \sin \frac{1}{3} n\pi \int_0^{\infty} e^{-\nu \tau^{1/3} - 1} d\tau.$$

или

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{1}{\pi} \sum_1^{\infty} a_n \sin \frac{1}{3} n\pi \frac{\Gamma(n/3 + 1)}{\nu^{n/3}}, \quad (33.7)$$

причем все коэффициенты  $a_{2n}$  равны нулю. Второй отличный от нуля член имеет порядок  $O(\nu^{-5/3})$ .

Это асимптотическое разложение не является предельной формой разложения (32.5) функции  $J_\nu(\nu/\text{ch } \alpha)$ ; в формуле (33.7) мы имеем ряд по степеням  $\nu^{1/3}$ , в то время как в формуле (32.5) — ряд по степеням  $\nu^{1/2}$ . Причина этого заключается в том, что две точки перевала  $\pm \alpha$ , связанные с функцией

$$\exp\left(\frac{\text{sh } z}{\text{ch } \alpha} - z\right),$$

сливаются в одну точку перевала более высокого порядка в начале координат, когда  $\alpha$  стремится к нулю. В гл. 10 мы покажем, что можно найти асимптотическое разложение, которое было бы справедливо равномерно в окрестности точки  $\alpha = 0$ , но этот асимптотический ряд уже не будет степенным.

Следует отметить, что  $J_\nu(\nu)$  — аналитическая функция комплексного переменного  $\nu$ , регулярная в плоскости с разрезом от  $\nu = -\infty$  до  $\nu = 0$ , и что она может быть представлена формулой (33.1) или (33.3), когда действительная часть  $\nu$  положительна. Асимптотическое разложение (33.7), таким образом, справедливо, когда  $|\nu|$  велик и  $|\arg \nu| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ .

### § 34. Функция ошибок

Все интегралы, рассмотренные в этой главе, за одним исключением, имели бесконечные пределы интегрирования. В этом исключительном случае интегральное представление гипергеометрической функции тоже оказалось таким, что путь наибоыстрейшего спуска из точки перевала прошел через концы отрезка  $[0, 1]$ , по которому ведется интегрирование. Однако в общем случае для интегралов вида

$$\int_a^b e^{\nu f(z)} \varphi(z) dz$$

с конечными пределами интегрирования не существует пути наиболее быстрого спуска из точки перевала, проходящего через концы отрезка интегрирования, так что метод придется несколько изменить. Обычно интегралы такого типа можно записать в виде

$$\int_a^c e^{vf(z)} \varphi(z) dz - \int_b^c e^{vf(z)} \varphi(z) dz$$

с бесконечными верхними пределами. Мы ограничимся рассмотрением интегралов с одним бесконечным пределом и проиллюстрируем основную идею метода на примере функции ошибок

$$\operatorname{Erfc} \sigma = \int_{\sigma}^{\infty} e^{-t^2} dt. \quad (34.1)$$

Поскольку функцию  $\operatorname{Erfc} \sigma$  можно представить в виде

$$\operatorname{Erfc} \sigma = \int_0^{\infty} e^{-t^2} dt - \int_0^{\sigma} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} \sqrt{\pi} - \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n \sigma^{2n+1}}{n! (2n+1)},$$

то это — целая функция комплексного переменного  $\sigma$ , удовлетворяющая условию

$$\operatorname{Erfc} \sigma + \operatorname{Erfc} (-\sigma) = \sqrt{\pi}. \quad (34.2)$$

Поэтому достаточно рассмотреть асимптотическое поведение этой функции в полуплоскости  $\operatorname{Re} \sigma \geq 0$ .

Один путь решения состоит в том, чтобы предположить сначала, что  $\sigma$  положительна, и сделать замену  $t = \sigma \sqrt{1 + \tau}$ . Это дает

$$\operatorname{Erfc} \sigma = \frac{1}{2} \sigma e^{-\sigma^2} \int_0^{\infty} e^{-\sigma^2 \tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1+\tau}}.$$

Интеграл сходится равномерно по комплексному переменному  $\sigma$  на любом компактном множестве в угле  $|\arg \sigma| < \pi/4$ , так что полученное представление справедливо в этом угле. Непосредственное применение леммы Ватсона приводит к асимптотическому равенству

$$\operatorname{Erfc} \sigma \sim \frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2) \sigma^{2n+1}} \quad (34.3)$$

при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg \sigma| \leq \pi/4 - \delta < \pi/4$ .

Однако, для того чтобы проиллюстрировать тот прием, который мы хотим применить, необходимо с самого начала рассматривать комплексные значения  $\sigma$ . Если  $\sigma = \sqrt{v}e^{a t}$ ,

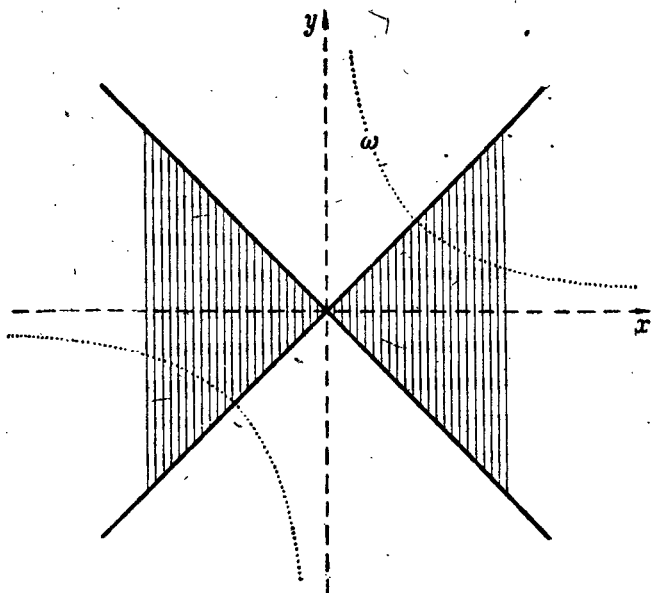


Рис. 6.

где  $\sqrt{v} > 0$  и  $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$ , подстановка  $t = z \sqrt{v}$  в формулу (34.1) дает

$$\operatorname{Erfc} \sigma = v^{1/2} \int_{\omega}^{\infty} e^{-vz^2} dz, \quad (34.4)$$

где  $\omega$  означает  $e^{at}$ . В этом случае одна точка перевала — начало координат, и линии уровня, проходящие через нее, имеют уравнения  $y = \pm x$ . Наибоыстрейшими кривыми будут оси, долинами — заштрихованные на рис. 6 квадраты. Точка  $\omega$  лежит на контуре наибоыстрейшего спуска, проходящем через точку перевала только в случае  $\alpha = 0$ . Но существует единственный путь наибоыстрейшего спуска,

проходящий через точку  $\omega$ , это — кривая, на которой

$$\operatorname{Im}(-z^2) = \operatorname{Im}(-\omega^2),$$

или

$$2xy = \sin 2\alpha.$$

Здесь возможны три случая:  $0 < \alpha < \pi/2$ ,  $\alpha = 0$ ,  $-\pi/2 < \alpha < 0$ . На рис. 6 иллюстрируется первый случай. Пунктирными линиями изображены наибо́льшие пути из начала координат, заштрихованная область изображает долины, расположенные ниже точки перевала, точками нанесена наибо́льшая кривая, проходящая через точку  $\omega$ . Следующее рассуждение применимо во всех трех случаях.

Лежит ли точка  $\omega$  в долине ниже точки  $O$  или на холме выше точки  $O$ , значения не имеет, в любом случае гиперболическая кривая, ведущая из точки  $\omega$  в  $+\infty$ , монотонно спускается вниз. Мы можем поэтому положить

$$-z^2 = -\omega^2 - \tau,$$

где  $\tau$  монотонно растет от 0 до  $+\infty$  на этом контуре. Так как  $\omega^2 = \sigma^2$ , то уравнение (34.4) дает

$$\operatorname{Erfc} \sigma = \frac{1}{2} \nu^{1/2} e^{-\sigma^2} \int_0^{\infty} e^{-\nu\tau} \left(1 + \frac{\tau}{\omega^2}\right)^{-1/2} \frac{d\tau}{\omega}.$$

Когда  $|\arg \sigma| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$  и  $\tau \geq 0$ , функция  $(1 + \tau\omega^{-2})^{-1/2}$  ограничена. Действительно, для точек угла  $|\arg \sigma| \leq \pi/4$  справедливо неравенство

$$|\tau + \omega^2| = |z|^2 \geq |\omega^2| = 1,$$

таким же образом, для угла  $\pi/4 < |\arg \sigma| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$  выполняется оценка

$$|\tau + \omega^2| = |z|^2 \geq |\operatorname{Im} z^2| = \sin 2\alpha \geq \sin 2\delta.$$

Мы можем, следовательно, применить лемму Ватсона, чтобы получить асимптотическое разложение

$$\begin{aligned} \operatorname{Erfc} \sigma &\sim \frac{1}{2} \nu^{1/2} e^{-\sigma^2} \sum_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-\nu\tau} \frac{\Gamma(n+1/2) (-1)^n \tau^n}{\Gamma(1/2) n! \omega^{2n+1}} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \nu^{1/2} e^{-\sigma^2} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2)} \frac{(-1)^n}{\nu^{n+1} \omega^{2n+1}}, \end{aligned}$$



или, возвращаясь к первоначальным переменным,

$$\operatorname{Erfc} \sigma \sim \frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2) \sigma^{2n+1}}.$$

Но это и есть формула (34.3), доказанная теперь для угла  $|\arg \sigma| \leq \pi/2 - \delta$ .

Если  $\alpha = \pm \pi/2$ , то метод неприменим, так как контур вырождается в отрезок мнимой оси от  $+i$  или  $-i$  до 0, продолженный затем действительной осью от 0 до  $\infty$ . Если  $\alpha = \pi/2$ , то этот путь дает

$$\operatorname{Erfc} \sigma = -\sigma \int_0^1 e^{vy^2} dy + v^{1/2} \int_0^{\infty} e^{-vx^2} dx.$$

Если положить  $y^2 = 1 - \tau$ , то мы получим

$$\operatorname{Erfc} \sigma = -\frac{1}{2} \sigma e^{-\sigma^2} \int_0^1 e^{-v\tau} \frac{d\tau}{\sqrt{1-\tau}} + \frac{1}{2} \sqrt{\pi},$$

и методы, так широко нами развитые, не дают асимптотического разложения интеграла, стоящего в правой части этого равенства. Один способ обойти это затруднение состоит в том, чтобы начать опять с формулы (34.4), а именно

$$\operatorname{Erfc} \sigma = v^{1/2} \int_l^{\infty} e^{-vz^2} dz, \quad (34.5)$$

где  $\alpha = \pi/2$  и путь интегрирования идет вдоль линии уровня, проходящей через точку  $l$ . На этой линии  $\operatorname{Re} z^2$  постоянна, так что

$$x^2 - y^2 = -1.$$

Прямая  $y = x$  является асимптотой этой гиперболы, и модифицированное доказательство леммы Жордана<sup>1)</sup> пока-

<sup>1)</sup> См., например, Е в гра ф о в М. А., Аналитические функции, „Наука“, М., 1965, стр. 188. — *Прим. перев.*

зывает, что это допустимый путь интегрирования. Параметрическим уравнением этой линии уровня будет  $z^2 = -1 + i\tau$ , где  $\tau$  возрастает от 0 до  $+\infty$ . Так как  $z = i\sqrt{1 - i\tau}$ , то уравнение (34.5) дает

$$\operatorname{Erfc} \sigma = \frac{1}{2} \nu^{1/2} e^{-\sigma^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\nu\tau}}{(1 - i\tau)^{1/2}} d\tau,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$\operatorname{Erfc} \sigma = \frac{e^{-\sigma^2}}{2i\nu^{1/2}} \sum_0^{N-1} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2) \nu^n} + \frac{e^{-\sigma^2} \Gamma(N+1/2)}{2\nu^{1/2} \Gamma(1/2) \nu^{N-1}} I_N,$$

где

$$I_N = \int_0^{\infty} \frac{e^{-i\nu\tau}}{(1 - i\tau)^{N+1/2}} d\tau.$$

Но

$$|I_N| \leq \int_0^{\infty} \frac{d\tau}{(1 + \tau^2)^{N/2+1/4}} = O(1)$$

при  $\nu \rightarrow +\infty$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\sigma^2}}{2i\nu^{1/2}} \frac{\Gamma(N-1/2)}{\Gamma(1/2) \nu^{N-1}} + \frac{e^{-\sigma^2} \Gamma(N+1/2)}{2\nu^{1/2} \Gamma(1/2) \nu^{N-1}} I_N &= \\ &= O\left(\frac{e^{-\sigma^2}}{2\nu^{1/2}} \frac{\Gamma(N+1/2)}{\Gamma(1/2) \nu^{N-1/2}}\right). \end{aligned}$$

Это показывает, что имеет место асимптотическая формула

$$\operatorname{Erfc} \sigma \sim \frac{e^{-\sigma^2}}{2i\nu^{1/2}} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2)}{\Gamma(1/2) \nu^n}$$

при  $\nu \rightarrow \infty$ , так как ошибка, получающаяся при отбрасывании членов, начиная с  $n = N - 1$ , является величиной того же порядка, что и первый отброшенный член.

Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем

$$\operatorname{Erfc} \sigma \sim \frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2) (-1)^n}{\Gamma(1/2) \sigma^{2n+1}} \quad (34.6)$$

при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , когда  $\arg \sigma = \pi/2$ . Применяя тождество (34.2), получаем, что

$$\operatorname{Erfc} \sigma \sim \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2) (-1)^n}{\Gamma(1/2) \sigma^{2n+1}}$$

при  $|\sigma| \rightarrow \infty$ , когда  $\arg \sigma = -\pi/2$ . Но  $\sqrt{\pi}$  очень мал по сравнению с другими членами этого ряда, поэтому асимптотическое равенство (34.6) справедливо для  $\arg \sigma = \pm \pi/2$ . Таким образом, разложение (34.3), как видно теперь, справедливо в угле  $|\arg \sigma| \leq \pi/2$ .

Окончательно, применяя снова тождество (34.2), мы получаем

$$\operatorname{Erfc} \sigma \sim \sqrt{\pi} + \frac{1}{2} e^{-\sigma^2} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+1/2) (-1)^n}{\Gamma(1/2) \sigma^{2n+1}}$$

при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  в полуплоскости  $\operatorname{Re} \sigma < 0$ .

Мы можем рассмотреть аналогичным образом асимптотическое поведение интеграла

$$\int_r^s e^{i(x^m - \sigma x)} dx \quad (34.7)$$

при больших  $\sigma$ ,  $r$ ,  $s$ . Бриллюэн [2] рассмотрел случаи  $m=3$  и  $m=4$  для действительных значений  $\sigma$ ,  $r$ ,  $s$ ; он уточнил, что хотя мы можем записать этот интеграл в виде

$$\int - \int'$$

с одинаковыми бесконечными нижними пределами, но могут возникнуть затруднения, если мы заменим эти интегралы асимптотическими разложениями при больших  $r$  и  $s$  в том случае, когда  $r-s$  мало. Бёрвелл [3] исследовал интеграл (34.7), когда  $m$  — любое положительное целое число, а  $\sigma$ ,  $r$  и  $s$  — комплексные.

## § 35. Другие интегралы с конечными пределами

Интересным примером интеграла с конечными пределами является интеграл

$$F(\sigma) = \int_0^1 e^{\sigma t^3} dt. \quad (35.1)$$

Функция  $F(\sigma)$  — это целая функция комплексного переменного  $\sigma$  с тейлоровским рядом

$$\sum_0^{\infty} \frac{\sigma^n}{n! (3n+1)}.$$

Когда  $\operatorname{Re} \sigma > 0$ , мы можем записать

$$\begin{aligned} F(\sigma) &= \int_{-\infty}^1 e^{\sigma t^3} dt - \int_{-\infty}^0 e^{\sigma t^3} dt = \\ &= \frac{1}{3} e^{\sigma} \int_0^{\infty} e^{-\sigma \tau} (1-\tau)^{-2/3} d\tau - \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-\sigma \tau} \tau^{-2/3} d\tau. \end{aligned}$$

Второй интеграл в правой части равенства может быть выражен через гамма-функцию, к первому применима лемма Ватсона. В результате получается, что

$$F(\sigma) \sim \frac{1}{3} e^{\sigma} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(2/3)} \frac{1}{\sigma^{n+1}} - \frac{\Gamma(4/3)}{\sigma^{1/3}} \quad (35.2)$$

при  $|\sigma| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg \sigma| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ . Но второе слагаемое мало по сравнению с любым членом бесконечного ряда.

Если  $\operatorname{Re} \sigma < 0$ , мы обозначим  $\sigma = -\nu$ , где  $\operatorname{Re} \nu > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} F(-\nu) &= \int_0^{\infty} e^{-\nu t^3} dt - \int_1^{\infty} e^{-\nu t^3} dt = \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{\infty} e^{-\nu \tau} \tau^{-2/3} d\tau - \frac{1}{3} e^{-\nu} \int_0^{\infty} e^{-\nu \tau} (1+\tau)^{-2/3} d\tau \sim \\ &\sim \frac{\Gamma(4/3)}{\nu^{1/3}} + \frac{1}{3} e^{-\nu} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(2/3)} \frac{(-1)^{n+1}}{\nu^{n+1}} \end{aligned}$$

при  $|v| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg v| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ . Возвращаясь к первоначальным переменным, получаем асимптотическую формулу

$$F(\sigma) \sim \frac{1}{3} e^\sigma \sum_0^\infty \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(2/3)} \frac{1}{\sigma^{n+1}} + \frac{\Gamma(4/3)}{(-\sigma)^{1/3}} \quad (35.3)$$

в области  $|\arg(-\sigma)| \leq \pi/2 - \delta$ . Отличие этой формулы от (35.2) состоит в том, что теперь член с  $\sigma^{-1/3}$  намного больше любого члена бесконечного ряда.

Предшествующее рассуждение дает асимптотическое разложение на всей плоскости, за исключением двух малых углов, содержащих положительную и отрицательную мнимые полуоси. Для того чтобы завершить доказательство, мы применим метод наибоыстрейшего спуска.

Обозначим  $\sigma = tv$ , где  $\operatorname{Re} v > 0$ . Теперь мы имеем

$$F(tv) = \int_0^1 e^{t^2 v z^3} dz. \quad (35.4)$$

В этом случае имеется одна точка перевала в начале координат. Если  $v > 0$ , то линиями уровня, проходящими через точку перевала, будут прямые  $y = 0$  и  $y = \pm \sqrt{3} x$ , наибоыстрейшими линиями — прямые  $x = 0$  и  $x = \pm \sqrt{3} y$ . Три долины встречаются в точке перевала так, как это показано на рис. 7. Точки 0 и 1 не лежат на одном и том же пути наибоыстрейшего спуска из точки перевала, обе они лежат на одной и той же линии уровня.

Наибоыстрейшая кривая, проходящая через точку  $z = 1$ , задается уравнением  $\operatorname{Im}(iz^3) = \operatorname{Im}(i)$ . Это — кубическая кривая  $x^3 - 3xy^2 = 1$ , ветвь ее, проходящая через точку  $z = 1$ , имеет асимптоту  $x = \sqrt{3} y$ . Верхняя ее половина — путь наибоыстрейшего спуска из точки 1 в  $\infty e^{\pi i/6}$ . Учитывая это, мы будем интегрировать сначала вдоль пути наибоыстрейшего спуска  $\arg z = \pi/6$  от начала координат до  $\infty e^{\pi i/6}$  и затем от  $\infty e^{\pi i/6}$  до 1 вдоль верхней половины ветви кубической кривой. Переменная интегрирования  $z$  на контуре от 0 до  $\infty e^{\pi i/6}$  равна  $z = \tau^{1/3} e^{\pi i/6}$ , где  $\tau > 0$ , а на наибоыстрейшей кривой от 1 до  $\infty e^{\pi i/6}$

$$iz^3 = i - \tau.$$

откуда

$$z = (1 + t\tau)^{1/3}.$$

Проведя в интеграле эти подстановки, находим, что для  $\nu > 0$  имеет место формула

$$F(iv) = \frac{1}{3} e^{\pi i/6} \int_0^{\infty} e^{-\nu t \tau} \tau^{-2/3} d\tau - \frac{1}{3} e^{i\nu} \int_0^{\infty} e^{-\nu t} (1+t\tau)^{-2/3} l d\tau;$$

применяя аналитическое продолжение, устанавливаем, что она справедлива в угле  $|\arg \nu| < \pi/2$ . Первый интеграл

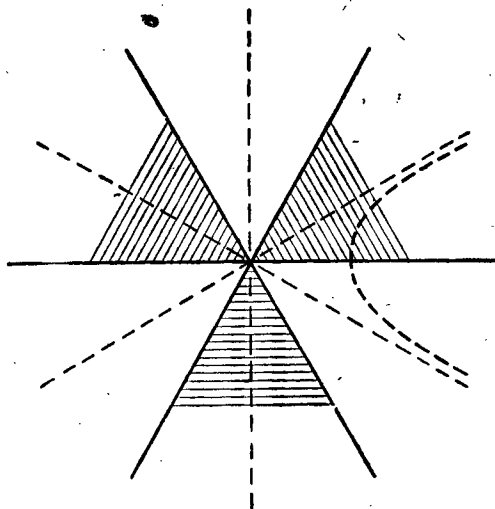


Рис. 7.

можно сразу вычислить, а лемма Ватсона дает асимптотическое разложение второго интеграла. Отсюда получаем, что

$$F(iv) \sim \frac{\Gamma(4/3) e^{\pi i/6}}{\nu^{1/3}} + \frac{1}{3} e^{i\nu} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(2/3)} \frac{1}{(i\nu)^{n+1}},$$

когда  $|\nu| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg \nu| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ . Аналогично

$$F(-iv) \sim \frac{\Gamma(4/3) e^{-\pi i/6}}{\nu^{1/3}} + \frac{1}{3} e^{-i\nu} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(2/3)} \frac{1}{(-i\nu)^{n+1}},$$

когда  $|v| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg v| \leq \pi/2 - \delta < \pi/2$ . Эти асимптотические равенства можно скомбинировать в одну формулу

$$F(\sigma) \sim \frac{\Gamma(4/3) e^{\pm \pi i/3}}{\sigma^{1/3}} + \frac{1}{3} e^{\sigma} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n+2/3)}{\Gamma(2/3)} \frac{1}{\sigma^{n+1}}, \quad (35.5)$$

где верхний или нижний знак выбирается соответственно для

$$\delta \leq \arg \sigma \leq \pi - \delta < \pi \quad \text{или} \quad -\pi + \delta \leq \arg \sigma \leq -\delta < 0.$$

Теперь мы имеем четыре различных асимптотических разложения функции  $F(\sigma)$ , справедливых для четырех перекрывающихся углов; поскольку эти формулы нельзя заменить одной, пригодной для всех значений  $\arg \sigma$ , то мы имеем еще один пример явления Стокса.

# Метод перевала

## § 36. Описание метода

В гл. 7 мы видели, что если  $w(z)$  и  $\varphi(z)$  — аналитические функции, регулярные в некоторой области комплексной плоскости, то часто оказывается возможным найти полное асимптотическое разложение интеграла

$$\int e^{v w(z)} \varphi(z) dz, \quad (36.1)$$

деформируя нужным образом контур интегрирования. Во многих случаях мы могли так деформировать путь интегрирования, чтобы он проходил через одну или несколько точек перевала, в которых  $w'(z)$  обращается в нуль, и составить контур из путей наибыстрейшего спуска. Если мы обозначим  $w = u + iv$ , где  $u$  и  $v$  — действительные, то  $v$  постоянно на пути наибыстрейшего спуска, и главная часть разложения порождается отрезком контура, лежащим вблизи самой высокой точки перевала, той точки, в которой  $u$  принимает свое наибольшее значение.

Если  $z_0$  — точка перевала, то пути наибыстрейшего спуска из этой точки задаются уравнением

$$w(z) = w(z_0) - \tau,$$

где  $\tau$  положительно. Метод наибыстрейшего спуска часто бывает громоздким из-за тех трудностей, которые встречаются при выражении  $z$  через  $\tau$ . Здесь мы опишем более простой метод, который будем называть *методом перевала*.

Предположим, что в формуле (36.1) возможно так изменить контур интегрирования, не меняя значения интеграла, чтобы он проходил через одну или несколько точек перевала и лежал бы в долинах ниже этих точек. Если  $z_0$  — самая высокая точка перевала, такая, в



которой  $u$  имеет наибольшее значение, то ее окрестность порождает главную часть интеграла при  $\nu \rightarrow +\infty$ . Предположение, что  $\nu \rightarrow +\infty$  вместо  $|\nu| \rightarrow \infty$ , не уменьшает общности, так как в том случае, когда  $\nu \rightarrow \infty e^{i\nu}$ , мы можем записать  $\nu w(z) = \nu_1 e^{i\nu} w(z) = \nu_1 w_1(z)$ , где  $\nu_1 \rightarrow +\infty$ . Очевидно, что если имеется несколько точек перевала одинаковой высоты, то вклад каждой из них имеет величину одного и того же порядка, и мы должны рассматривать каждую точку в отдельности. Все это создает значительную свободу в выборе контура интегрирования. Совсем не обязательно рассматривать контуры наибо-  
льшего спуска, ограничения накладываются только на направление контура в точке перевала.

В простейшем случае точка перевала  $z_0$  является простым нулем функции  $w'(z)$ . Вблизи точки  $z_0$  функция  $w(z)$  может быть разложена в сходящийся степенной ряд

$$w(z) = w(z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots \quad (36.2)$$

где  $a_2 = w''(z_0)/2$  и т. д. Вблизи точки перевала  $z_0$  мы выбираем контур интегрирования в виде прямой линии, на которой второе слагаемое ряда (36.2) действительно и отрицательно. Направление этой прямой можно назвать *критическим направлением в точке  $z_0$*  — это направление касательной в точке  $z_0$  к двум направлениям наибо-  
льшего спуска из точки  $z_0$ .

Предположим, что степенной ряд (36.2) сходится в круге

$$|z - z_0| \leq R$$

и что  $M$  — максимум  $|w(z)|$  на окружности  $|z - z_0| = R$ . Тогда, согласно неравенству Коши,

$$|a_n| \leq \frac{M}{R^n}.$$

Поэтому если положить

$$w(z) = w(z_0) + a_2(z - z_0)^2 + F(z), \quad (36.3)$$

то для функции  $F(z)$  мы имеем оценку

$$\begin{aligned} |F(z)| &\leq M \left\{ \frac{|z - z_0|^3}{R^3} + \frac{|z - z_0|^4}{R^4} + \dots \right\} = \\ &= \frac{M |z - z_0|^3}{R^2 [R - |z - z_0|]}. \end{aligned}$$

Для любого положительного  $\varepsilon$  мы можем выбрать  $\nu$  таким большим, чтобы выполнялось неравенство  $\nu^{-\varepsilon} \leq R/2$ . Отсюда следует, что если  $|z - z_0| \leq \nu^{-\varepsilon}$ , то

$$|F(z)| \leq \frac{2M}{R^3} \nu^{-3\varepsilon}.$$

Слагаемые правой части равенства (36.3), таким образом, являются соответственно величинами порядков  $O(1)$ ,  $O(\nu^{-2\varepsilon})$  и  $O(\nu^{-3\varepsilon})$ , так что

$$e^{\nu w(z)} = \exp \{ \nu w(z_0) + \nu a_2 (z - z_0)^2 \} [1 + O(\nu^{1-3\varepsilon})].$$

Если мы возьмем  $\varepsilon > 1/3$ , то остаточный член будет очень мал при больших значениях  $\nu$ . Аналогично

$$\varphi(z) = \varphi(z_0) + O(\nu^{-\varepsilon}) = \varphi(z_0) + o(\nu^{1-3\varepsilon}),$$

если  $\varepsilon < 1/2$ . Учитывая это, предположим, что  $\varepsilon$  выбран в интервале  $1/3 < \varepsilon < 1/2$ . Вклад окрестности  $|z - z_0| \leq \leq \nu^{-\varepsilon}$  точки перевала  $z_0$  поэтому равен

$$\varphi(z_0) e^{\nu w(z_0)} \int e^{\nu a_2 (z - z_0)^2} dz [1 + O(\nu^{1-3\varepsilon})]. \quad (36.4)$$

Если мы положим  $a_2 = Ae^{\alpha i}$ , где  $A > 0$ , и  $z = z_0 + + re^{\theta i}$ , то второе слагаемое  $a_2 (z - z_0)^2$  равно

$$a_2 (z - z_0)^2 = Ar^2 e^{(\alpha + 2\theta) i}, \quad (36.5)$$

поэтому оно принимает действительные отрицательные значения, когда  $\theta = \pm \pi/2 - \alpha/2$ . Это дает два противоположных направления, соответствующих направлениям наискорейшего спуска из точки  $z_0$ . Мы возьмем верхний знак, и пусть  $r$  изменяется от  $-\eta$  до  $\eta$ , где  $\eta = \nu^{-\varepsilon}$ . Выражение (36.4) примет тогда вид

$$\varphi(z_0) e^{\nu w(z_0)} \int_{-\eta}^{\eta} e^{-Avr^2 + (\pi - \alpha) i/2} dr,$$

если пренебречь множителем  $1 + O(\nu^{1-3\varepsilon})$ . Обозначив  $Avr^2 = u^2$ , находим

$$\varphi(z_0) e^{\nu w(z_0) + (\pi - \alpha) i/2} \frac{1}{\sqrt{Av}} \int_{-\omega}^{\omega} e^{-u^2} du, \quad (36.6)$$

где

$$\omega = \sqrt{Av\eta^2} = \sqrt{Av^{1-2\varepsilon}}.$$

Так как  $\varepsilon < 1/2$ , то  $\omega$  стремится к  $+\infty$  вместе с  $\nu$ . Поэтому при  $\nu \rightarrow +\infty$  выполняется оценка

$$\int_{\omega}^{\infty} e^{-u^2} du = O\left(\frac{e^{-\omega^2}}{\omega}\right) = O(\nu^{\varepsilon-1/2} e^{-A\nu^{1-2\varepsilon}}) = o(\nu^{1-3\varepsilon}),$$

аналогично для интеграла от  $-\infty$  до  $-\omega$ . Мы можем, следовательно, изменить пределы интегрирования в формуле (36.6) на  $\pm\infty$ , не изменяя множителя  $1 + O(\nu^{1-3\varepsilon})$ , который там по существу имеется, но для краткости опущен.

Таким образом, мы показали, что вклад (36.6) окрестности точки перевала  $z_0$  равен

$$\begin{aligned} \varphi(z_0) e^{\nu w(z_0)} \left(\frac{-1}{A\nu e^{a_1 l}}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du &= \varphi(z_0) e^{\nu w(z_0)} \left(\frac{-\pi}{A\nu e^{a_1 l}}\right)^{1/2} = \\ &= \varphi(z_0) e^{\nu w(z_0)} \left(\frac{-2\pi}{\nu w''(z_0)}\right)^{1/2}. \end{aligned} \quad (36.7)$$

Это и есть требуемое асимптотическое приближение к интегралу (36.1), когда имеется только одна точка перевала — простой нуль функции  $w'(z)$ . Если же имеется несколько точек перевала одинаковой высоты, то приближение будет состоять из нескольких членов, подобных (36.7).

Иногда бывает проще брать путь через точку перевала не в критическом направлении, а в направлении, образующем угол менее  $\pi/4$  с критическим. Из формулы (36.5) ясно, что в этом случае  $a_2(z - z_0)^2$  принимает комплексные значения с отрицательной действительной частью и все исследования проводятся до конца лишь с небольшим изменением. Но если мы выбираем направление, образующее угол  $\pi/4$  с критическим, то действительная часть  $a_2(z - z_0)^2$  обращается в нуль, и мы тогда фактически используем метод стационарной фазы.

И наконец, мы будем помнить, что выбираемый путь интегрирования должен лежать не выше точки перевала. Если мы хотим найти оценку для ошибки, получающейся при использовании асимптотического приближения (36.7), то обычно проще всего — это отыскать путь, на котором действительная часть  $\nu w(z)$  монотонно убывает.

Мы рассмотрим здесь только случай, когда наивысшая точка перевала является простым нулем функции  $w'(z)$ .

Если это нуль более высокого порядка, то рассуждения становятся более сложными, но в основном от этих не отличаются.

### § 37. Полиномы Лежандра

Из формулы Родригеса следует, что полином Лежандра  $P_n(\mu)$  может быть представлен в виде интеграла

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C \frac{(z^2-1)^n}{(z-\mu)^{n+1}} dz, \quad (37.1)$$

где  $C$  — простой замкнутый контур, окружающий точку  $z = \mu$ . Мы используем метод перевала для того, чтобы найти асимптотическое приближение к  $P_n(\mu)$ , когда положительное целое число  $n$  велико, а  $\mu$  действительно. Имеются два случая, которые мы должны рассмотреть, а именно  $-1 < \mu < 1$  и  $\mu > 1$ . Нет необходимости рассматривать случай  $\mu < -1$ , так как  $P_n(-\mu) = (-1)^n P_n(\mu)$ , или случаи  $\mu = \pm 1$ , так как  $P_n(1) = 1$ .

Интеграл (37.1) представляется в виде

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^{n+1}\pi i} \int_C e^{n\omega(z)} \varphi(z) dz, \quad (37.2)$$

где

$$\omega(z) = \ln(z^2 - 1) - \ln(z - \mu),$$

причем для логарифма берется главное значение, а

$$\varphi(z) = \frac{1}{z - \mu}.$$

Так как

$$\omega'(z) = \frac{z^2 - 2\mu z + 1}{(z^2 - 1)(z - \mu)},$$

то имеются две точки перевала:  $z = \mu \pm \sqrt{\mu^2 - 1}$ .

Если  $\mu = \cos \theta$ , где  $0 < \theta < \pi$ , то обе точки перевала представляются в виде  $z = e^{\pm \theta i}$ . А так как в этих точках

$$|\exp \omega(e^{\pm \theta i})| = 2,$$

то их вклады одного порядка. Но у нас нет необходимости рассматривать их отдельно: если мы возьмем в качестве  $C$  окружность  $|z| = 1$ , то очевидно, что

$$P_n(\mu) = \frac{1}{2^n \pi} \operatorname{Im} I,$$

где

$$I = \int_{\Gamma} e^{n\omega(z)} \varphi(z) dz, \quad (37.3)$$

причем  $\Gamma$  — полуокружность  $|z| = 1$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ .

Вблизи точки  $z = e^{i\theta}$  имеем

$$\omega(z) = \theta i + \ln 2 - \frac{1}{2} i e^{\theta i} \operatorname{cosec} \theta (z - e^{\theta i})^2 + \dots$$

Если мы положим  $z = e^{\theta i} + r e^{\varphi i}$ , то

$$\omega(z) = \theta i + \ln 2 - i r^2 \operatorname{cosec} \theta e^{(2\varphi - \theta) i} + \dots$$

На критическом направлении коэффициент при  $r^2$  должен быть действительным и отрицательным, поэтому

$$\varphi = \frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \pi \pm \frac{1}{2} \pi.$$

Следовательно, критическое направление совпадает с биссектрисой острого угла, образованного касательной к  $\Gamma$  в точке  $e^{\theta i}$  и действительной осью. Так как критическое направление в точке  $e^{i\theta}$  всегда образует угол меньше  $\pi/4$  с касательной к окружности, то мы можем использовать полуокружность  $\Gamma$  в качестве пути интегрирования. И хотя в § 36 мы интегрировали вдоль малого отрезка прямой, но нет необходимости делать это — малая дуга в окрестности точки перевала также подходит: фактически мы отображаем полуокружность  $\Gamma$  на действительную ось с помощью формулы  $z = e^{it}$ .

Рассмотрим сначала окрестность  $-\eta \leq t - \theta \leq \eta$  точки перевала, где  $\eta = n^{-\varepsilon}$ , а  $1/3 < \varepsilon < 1/2$ . На этой дуге

$$n\omega(z) = n\theta i + \ln 2^n + \frac{1}{2} n i e^{\theta i} \operatorname{cosec} \theta (t - \theta)^2 + O(n^{1-3\varepsilon})$$

и

$$\begin{aligned} \varphi(z) \frac{dz}{dt} &= \frac{i e^{it}}{e^{it} - \cos \theta} = \frac{e^{i\theta}}{\sin \theta} \{1 + O(n^{-\varepsilon})\} = \\ &= \frac{e^{i\theta}}{\sin \theta} \{1 + o(n^{1-3\varepsilon})\}. \end{aligned}$$

так как  $\varepsilon < 1/2$ . Таким образом, вклад этой окрестности точки перевала в  $I$  равен

$$I_1 = \frac{2^n e^{(n+1)\theta i}}{\sin \theta} \int_{\theta-\eta}^{\theta+\eta} \exp \left\{ \frac{1}{2} i n e^{\theta i} \operatorname{cosec} \theta (t-\theta)^2 \right\} dt \times \\ \times \{1 + O(n^{1-3\varepsilon})\} = \\ = \frac{2^n e^{(n+1)\theta i}}{\sin \theta} \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \int_{-\omega}^{\omega} \exp \{-(1-t \operatorname{ctg} \theta) u^2\} du \cdot \{1 + O(n^{1-3\varepsilon})\},$$

где  $\omega = \sqrt{n^{1-2\varepsilon}/2}$ ; ясно, что  $\omega$  стремится к бесконечности вместе с  $n$ . Но

$$\left| \int_{\omega}^{\infty} \exp \{-(1-t \operatorname{ctg} \theta) u^2\} du \right| \leq \int_{\omega}^{\infty} e^{-u^2} du < \frac{e^{-\omega^2}}{\omega} = \\ = \frac{\exp(-n^{1-2\varepsilon}/2)}{\sqrt{n^{1-2\varepsilon}/2}} = o(n^{1-3\varepsilon}),$$

и аналогичная оценка имеет место для интеграла от  $-\infty$  до  $-\omega$ . Отсюда получаем

$$I_1 = \frac{2^n e^{(n+1)\theta i}}{\sin \theta} \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \{-(1-t \operatorname{ctg} \theta) u^2\} du \times \\ \times \{1 + O(n^{1-3\varepsilon})\} = \\ = \frac{2^n e^{(n+1)\theta i}}{\sin \theta} \left(\frac{2\pi}{n(1-t \operatorname{ctg} \theta)}\right)^{1/2} \{1 + O(n^{1-3\varepsilon})\} = \\ = 2^n e^{(n+1/2)\theta i + \pi i/4} \left(\frac{2\pi}{n \sin \theta}\right)^{1/2} \{1 + O(n^{1-3\varepsilon})\}.$$

Осталось рассмотреть вклады других дуг контура  $\Gamma$ . На  $\Gamma$

$$|e^w(z)| = \left| \frac{e^{2it} - 1}{e^{it} - \cos \theta} \right| = 2 \left\{ 1 + \frac{(\cos t - \cos \theta)^2}{\sin^2 t} \right\}^{-1/2},$$

поэтому  $|e^w(z)|$  возрастает при  $t$ , растущем от 0 до  $\theta$ , и убывает, когда  $t$  растет от  $\theta$  до  $\pi$ . Далее,

$$\left| \varphi(z) \frac{dz}{dt} \right| = \left| \frac{ie^{it}}{e^{it} - \cos \theta} \right| \leq \frac{1}{1 - \cos \theta}.$$

Поэтому вклад дуги  $\Gamma$ , на которой  $0 \leq t \leq \theta - \eta$ , в  $I$  меньше по абсолютной величине, чем  $K\theta/(1 - \cos \theta)$ , где

$$\begin{aligned} K &= \left| \exp n\omega(e^{i(\theta-\eta)}) \right| = \\ &= \left| 2^n e^{n\theta i} e^{-n(1-i \operatorname{ctg} \theta) \eta^{2/2}} \left\{ 1 + O(n^{1-3\varepsilon}) \right\} \right| = \\ &= 2^n \exp(-n^{1-2\varepsilon}/2) \left\{ 1 + O(n^{1-3\varepsilon}) \right\} = o(2^n n^{1/2-3\varepsilon}), \end{aligned}$$

так как  $1/3 < \varepsilon < 1/2$ . Аналогично для другой дуги.

Мы доказали, таким образом, что если  $0 < \theta < \pi$ , то

$$I = 2^n e^{(n+1/2)\theta i + \pi i/4} \left( \frac{2\pi}{n \sin \theta} \right)^{1/2} \left\{ 1 + O(n^{1-3\varepsilon}) \right\}$$

и поэтому

$$P_n(\cos \theta) = \left\{ \frac{2}{n\pi \sin \theta} \right\}^{1/2} \sin \left\{ \left( n + \frac{1}{2} \right) \theta + \frac{\pi}{4} \right\} \left\{ 1 + O(n^{1-3\varepsilon}) \right\}. \quad (37.4)$$

Величина остаточного члена весьма мала. Применяя более точные оценки, можно было бы показать, что  $O(n^{1-3\varepsilon})$  можно заменить на  $O(1/n)$ .

Если  $\mu > 1$ , обозначим  $\mu = \operatorname{ch} \xi$ , где  $\xi > 0$ . Теперь снова имеются две точки перевала:  $z = e^{\pm \xi}$ , причем в точке  $e^{\xi}$  достигается наибольшее значение, так как

$$\left| \exp \omega(e^{\pm \xi}) \right| = 2e^{\pm \xi}.$$

Если мы возьмем в качестве  $C$  окружность  $|z| = e^{\xi}$ , содержащую внутри себя точку  $z = \operatorname{ch} \xi$ , то мы найдем, что

$$P_n(\operatorname{ch} \xi) = \frac{1}{2^n \pi} \operatorname{Im} I, \quad (37.5)$$

где

$$I = \int_{\Gamma} e^{n\omega(z)} \varphi(z) dz,$$

причем  $\Gamma$  означает полуокружность  $|z| = e^{\xi}$ ,  $0 \leq \arg z \leq \pi$ . Вблизи  $z = e^{\xi}$  имеем

$$\omega(z) = \xi + \ln 2 + \frac{1}{2} e^{-\xi} \frac{1}{\operatorname{sh} \xi} (z - e^{\xi})^2 + \dots$$

так что критическое направление совпадает с касательной к полуокружности  $\Gamma$  в точке  $e^{\xi}$ . Полагая  $z = e^{\xi + it}$ , рас-

смотрим дугу  $0 \leq t \leq \eta$ , где  $\eta = n^\varepsilon$  при  $1/3 < \varepsilon < 1/2$ . На этой дуге

$$n\omega(z) = n\xi + \ln 2^n - \frac{1}{2} ne^\xi \frac{1}{\operatorname{sh} \xi} t^2 + O(n^{1-3\varepsilon})$$

и

$$\varphi(z) \frac{dz}{dt} = \frac{ie^\xi}{\operatorname{sh} \xi} \{1 + O(n^{-\varepsilon})\} = \frac{ie^\xi}{\operatorname{sh} \xi} \{1 + o(n^{1-3\varepsilon})\}.$$

Опуская множитель  $1 + O(n^{1-3\varepsilon})$ , получаем, что вклад дуги  $0 \leq t \leq \eta$  в  $I$  равен

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{2^n e^{(n+1)\xi}}{\operatorname{sh} \xi} i \int_0^\eta \exp\left(-\frac{1}{2} ne^\xi \frac{1}{\operatorname{sh} \xi} t^2\right) dt = \\ &= \frac{2^n e^{(n+1)\xi}}{\operatorname{sh} \xi} i \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \int_0^\omega \exp\{-(1 + \operatorname{cth} \xi) u^2\} du, \end{aligned}$$

где  $\omega = \sqrt{n^{1-2\varepsilon}/2}$ . Применяя то же самое рассуждение, мы можем заменить верхний предел на  $+\infty$ , не изменяя величины опущенного множителя. Это дает

$$I_1 = \frac{2^n e^{(n+1)\xi}}{\operatorname{sh} \xi} i \left\{ \frac{\pi}{2n(1 + \operatorname{cth} \xi)} \right\}^{1/2} = 2^n e^{(n+1/2)\xi} i \left( \frac{\pi}{2n \operatorname{sh} \xi} \right)^{1/2}.$$

Легко видеть, что вклад оставшейся части полуокружности  $\Gamma$  в  $I$  равен  $o(n^{1/2-3\varepsilon})$ . Поэтому из формулы (37.5) получаем

$$P_n(\operatorname{ch} \xi) = e^{(n+1/2)\xi} \left( \frac{1}{2\pi n \operatorname{sh} \xi} \right)^{1/2} \{1 + O(n^{1-3\varepsilon})\}.$$

Снова остаточный член мал и его можно было бы заметить на  $O(1/n)$ .

Хотя методы этой главы могли бы дать полное асимптотическое разложение полиномов Лежандра, но определить коэффициенты было бы трудно, поэтому предпочтительнее метод Дарбу, применяемый к последовательностям функций, заданным с помощью производящей функции.

Описание приложений метода перевала к классическим ортогональным полиномам можно найти в книге Сеге [27].



## Интеграл Эйри

### § 38. Определение функции $Ai(z)$

Целая функция

$$Ai(z) = \frac{1}{3^{2/3}\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(n/3 + 1/3)}{n!} \sin\left\{\frac{2}{3}(n+1)\pi\right\} (3^{1/3}z)^n \quad (38.1)$$

названа интегралом Эйри по той причине, что при действительных значениях  $z$  она равна интегралу

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{t^3}{3} + zt\right) dt, \quad (38.2)$$

который впервые появился в 1838 г. в исследованиях Эйри по оптике. Хотя она может быть выражена через функции Бесселя порядка  $1/3$ , но то большое значение, которое она имеет как в приложениях математики, так и в теории асимптотических решений дифференциальных уравнений, оправдывает необходимость ее самостоятельного изучения.

Легко видеть, что функция  $w = Ai(z)$  удовлетворяет дифференциальному уравнению  $d^2w/dz^2 = zw$ . Это уравнение имеет еще два решения:  $Ai(\omega z)$  и  $Ai(\omega^2 z)$ , где  $\omega = e^{2\pi i/3}$  — корень кубический из единицы. Эти три решения связаны соотношением

$$Ai(z) + \omega Ai(\omega z) + \omega^2 Ai(\omega^2 z) = 0. \quad (38.3)$$

В качестве второго решения вместо функции  $Ai(\omega z)$  или  $Ai(\omega^2 z)$  используется функция

$$Bi(z) = i\omega^2 Ai(\omega^2 z) - i\omega Ai(\omega z), \quad (38.4)$$

преимущество которой в том, что она принимает действительные значения при действительных  $z$ .

Предположим сначала, что  $z > 0$ , и обозначим  $z = v^2$ , где  $v > 0$ . Из формулы (38.2) следует, что

$$\text{Ai}(v^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_I e^{v^2 s - s^{3/3}} ds, \quad (38.5)$$

где  $I$  — мнимая ось от  $-\infty i$  до  $\infty i$ . Применяя теорему Коши, замечаем, что контур  $I$  может быть заменен контуром  $L$  (состоящим из двух лучей) от  $\infty \omega^2$  до  $0$  и затем до  $\infty \omega$ . А так как интеграл вдоль  $L$  сходится равномерно по  $v$  на любом компактном множестве плоскости  $v$ , то равенство

$$\text{Ai}(v^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{v^2 s - s^{3/3}} ds \quad (38.6)$$

справедливо для всех значений  $v$ .

### § 39. Асимптотическое разложение функции $\text{Ai}(v^2)$ методом наибо́льшего спуска

Когда  $v > 0$ , в интегралах (38.5) и (38.6) удобно сделать замену переменной  $s = v\omega$ , которая дает

$$\text{Ai}(v^2) = \frac{v}{2\pi i} \int_C e^{v^3(\omega - \omega^{3/3})} d\omega,$$

где  $C$  — либо мнимая ось  $I$ , либо контур  $L$ . В этом случае имеются две точки перевала  $\omega = \pm 1$ . Так как контур  $L$  лежит слева от мнимой оси, то выглядит правдоподобным, что подходящей точкой перевала будет  $\omega = -1$ . Если обозначить  $\omega = u + iv$ , то мы увидим, что линия уровня, проходящая через точку перевала  $\omega = -1$ , является ветвью кубической кривой

$$u^3 - 3uv^2 - 3u - 2 = 0,$$

а наибо́льшие кривые из точки  $\omega = -1$ , определяемые уравнением

$$v(3u^2 - v^2 - 3) = 0,$$

состоят из действительной оси и ветвей гиперболы. На рис. 8 изображены линии уровня (сплошные линии), наиболее быстрые кривые (пунктирные линии) и долины вблизи

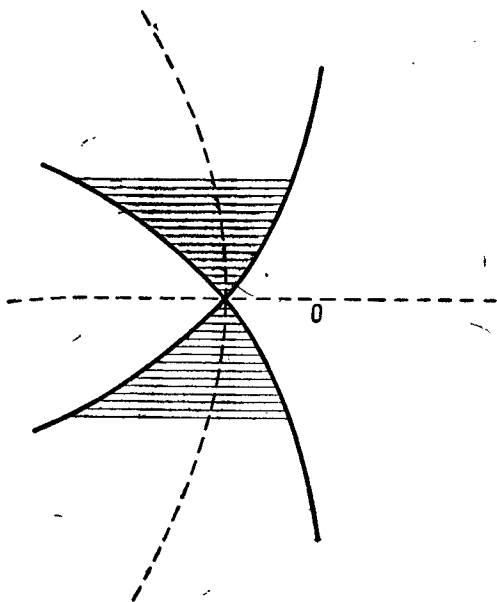


Рис. 8.

точки перевала. Асимптотами гиперболы будут прямые  $v = \pm \sqrt{3}u$ ; эта гиперболическая кривая является допустимым контуром  $L$ .

Параметризуем кривую наиболее быстрого спуска с помощью равенства

$$w - \frac{1}{3}w^3 = -\frac{2}{3} - t^2,$$

когда  $t$  изменяется от  $-\infty$  до  $\infty$ ,  $w$  описывает кривую  $L$ . Это нам дает

$$\text{Ai}(v^2) = \frac{v}{2\pi i} e^{-2v^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^{3/2}t} \frac{dw}{dt} dt. \quad (39.1)$$

Что делать дальше — ясно, но это весьма утомительно. Мы должны показать, что условия леммы Ватсона выполнены, и найти разложение функции  $dw/dt$  в окрестности точки  $t=0$ .

Мы не будем доказывать все полностью и отошлем читателя к работе Бриллюэна [2]. Как там установлено, такое доказательство привело бы к асимптотическому разложению при  $v \rightarrow +\infty$ . Но очевидно, что интеграл в формуле (39.1) сходится равномерно на любом компактном множестве в области  $|v| > 0$ ,  $|\arg v^3| < \pi/2$ , так что равенство (39.1) справедливо в угле  $|\arg v| < \pi/6$ . Поэтому наш метод дал бы асимптотическое разложение функции  $Ai(z)$  для  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| < \pi/3$ . В следующем параграфе мы покажем, что более простое рассуждение приводит к нужному разложению в области  $|\arg z| < \pi$ .

Главный член мы можем, конечно, получить сразу же. Легко видеть, что  $dw/dt = i$ , когда  $t=0$ . Поэтому, когда  $v$  положительно или, в более общем случае, когда  $|\arg v| < \pi/6$ , то

$$Ai(v^2) \sim \frac{v}{2\pi} e^{-2v^3/3} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^3 t^2} dt = \frac{1}{2\sqrt{\pi v}} e^{-2v^3/3},$$

откуда

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\pi^{1/2} z^{1/4}} e^{-2z^{3/2}/3}, \quad (39.2)$$

когда  $|\arg z| < \pi/3$ .

## § 40. Другой интеграл для функции $Ai(v^2)$

Вернемся к формуле (38.5), а именно

$$Ai(v^2) = \frac{1}{2\pi i} \int_I e^{v^2 s - s^{3/2}} ds, \quad (40.1)$$

где  $v > 0$ . Точка  $s = -v$  соответствует в плоскости  $s$  точке перевала  $w = -1$ . Из теоремы Коши следует, что контур интегрирования  $I$  (мнимая ось) может быть деформирован в параллельную ему линию, проходящую через точку  $s = -v$ . Возможность перенести контур вытекает из того, что интеграл по прямой линии от точки

$s = -v + it$  до точки  $s = it$  стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Если обозначить  $s = \sigma + it$ , то мы должны показать, что интеграл

$$\int_{-v}^0 e^{v^2(\sigma+it) - (\sigma+it)^{3/2}} d\sigma$$

стремится к нулю. Абсолютная величина этого интеграла не превосходит

$$\int_{-v}^0 e^{v^2\sigma - \sigma^{3/2} + \sigma t^2} d\sigma \leq e^{v^{3/2}} \int_{-v}^0 e^{\sigma t^2} d\sigma < \frac{e^{v^{3/2}}}{t^2},$$

что стремится к нулю при  $t \rightarrow \pm \infty$ .

Поэтому, когда  $v > 0$ , мы можем положить  $s = -v + it$  в формуле (40.1) и интегрировать от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Это дает

$$\text{Ai}(v^2) = \frac{1}{2\pi} e^{-2v^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-vt^2 + it^{3/2}} dt,$$

или

$$\text{Ai}(v^2) = \frac{1}{\pi} e^{-2v^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-vt^2} \cos \frac{t^3}{3} dt. \quad (40.2)$$

Теперь мы заметим, что когда  $v$  комплексное, интеграл в формуле (40.2) сходится равномерно на любом компактном множестве в области  $|v| > 0$ ,  $|\arg v| < \pi/2$ , а так как  $\text{Ai}(v^2)$  — целая функция по  $v$ , то отсюда следует, что формула (40.2) справедлива в полуплоскости  $\text{Re } v > 0$ .

#### 41. Асимптотическое разложение $\text{Ai}(z)$ в области $|\arg z| < \pi$

Если мы положим  $t^2 = u$  в формуле (40.2), то получим

$$\text{Ai}(v^2) = \frac{1}{2\pi} e^{-2v^{3/2}} \int_0^{\infty} e^{-vu} \cos \frac{u^{3/2}}{3} \frac{du}{\sqrt{u}},$$

когда  $|\arg v| < \pi/2$ . Условия леммы Ватсона, очевидно, выполняются, и мы можем разложить косинус в ряд по степеням  $u^3$  и проинтегрировать почленно. Отсюда следует, что

$$\text{Ai}(v^2) \sim \frac{1}{2\pi} e^{-2v^3/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{(-1)^n}{v^{3n+1/2}},$$

или, возвращаясь к первоначальным переменным,

$$\text{Ai}(z) \sim \frac{1}{2\pi z^{1/4}} e^{-2z^{3/2}/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{(-1)^n}{z^{3n/2}}$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  в области  $|\arg z| < \pi$ .

### § 42. Расширение области значений $\arg z$

Для того чтобы расширить область значений  $\arg z$  мы используем тождество

$$\text{Ai}(z) = -\omega \text{Ai}(\omega z) - \omega^2 \text{Ai}(\omega^2 z).$$

Если взять  $\omega = e^{2\pi i/3}$ ,  $\omega^2 = e^{4\pi i/3}$ ,  $-5\pi/3 < \arg z < -\pi/3$ , то  $-\pi < \arg(\omega z) < \pi/3$ ,  $-\pi/3 < \arg(\omega^2 z) < \pi$ , так что мы можем использовать для  $\text{Ai}(\omega z)$  и  $\text{Ai}(\omega^2 z)$  полученное же разложение. Оказывается, что

$$\text{Ai}(z) \sim F(z) - iG(z),$$

где

$$F(z) \sim \frac{1}{2\pi z^{1/4}} e^{-2z^{3/2}/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{(-1)^n}{z^{3n/2}},$$

$$G(z) \sim \frac{1}{2\pi z^{1/4}} e^{2z^{3/2}/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{1}{z^{3n/2}}$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $-5\pi/3 < \arg z < -\pi/3$ .

Если положить, а мы можем это сделать,  $\omega = e^{-4\pi i/3}$ ,  $\omega^2 = e^{-2\pi i/3}$ ,  $\pi/3 < \arg z < 5\pi/3$ , то мы получим

$$-\pi < \arg(\omega z) < \pi/3, \quad -\pi/3 < \arg(\omega^2 z) < \pi,$$

так что можно снова применить разложение предыдущего параграфа. Но теперь мы получаем результат

$$\text{Ai}(z) \sim F(z) + iG(z)$$

при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $\pi/3 < \arg z < 5\pi/3$ .

Таким образом, мы нашли три асимптотических разложения для  $\text{Ai}(z)$ , а именно:

$$\begin{aligned} F(z), & \quad \text{когда} \quad -\pi < \arg z < \pi, \\ F(z) - iG(z), & \quad \text{когда} \quad -5\pi/3 < \arg z < -\pi/3, \\ F(z) + iG(z), & \quad \text{когда} \quad \pi/3 < \arg z < 5\pi/3. \end{aligned}$$

Так как эти углы пересекаются, то на первый взгляд может показаться, что эти формулы противоречат друг другу, но это не так. Рассмотрим, например, точку  $z_1 = re^{(\pi-\alpha)i}$ , где  $r > 0$ ,  $-2\pi/3 < \alpha < 2\pi/3$ , так что  $\pi/3 < \arg z_1 < 5\pi/3$ , и точку  $z_2 = re^{-(\pi+\alpha)i}$ , такую, что  $-5\pi/3 < \arg z_2 < -\pi/3$ . Так как  $\text{Ai}(z)$  — целая функция, то она должна иметь одно и то же асимптотическое разложение в точках  $z_1$  и  $z_2$  в силу того, что это лишь разные обозначения одной и той же точки комплексной плоскости. И это действительно так: если учесть значения аргументов, то

$$F(z_2) = iG(z_1), \quad G(z_2) = iF(z_1),$$

так что

$$F(z_2) - iG(z_2) = iG(z_1) + F(z_1).$$

В угле  $\pi/3 < \arg z < \pi$  мы также имеем два асимптотических разложения:  $F(z)$  и  $F(z) + iG(z)$ . Обозначив  $z = re^{(\pi-\alpha)i}$ , где  $r > 0$ ,  $0 < \alpha < 2\pi/3$ , находим, что

$$\begin{aligned} |F(z)| &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} r^{1/4}} e^{(2r^{3/2} \sin 3\alpha/2)/3}, \\ |G(z)| &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi} r^{1/4}} e^{-(2r^{3/2} \sin 3\alpha/2)/3}. \end{aligned}$$

А так как  $3\alpha/2 > 0$ , то  $G(z)/F(z)$  экспоненциально стремится к нулю при  $|z| \rightarrow \infty$ , поэтому в угле  $\pi/3 < \arg z < \pi$  членом  $G(z)$  можно пренебречь. Слагаемое  $G(z)$  только тогда имеет значение, когда  $\cos[(3/2)\arg z] > 0$ , т. е.

когда  $\pi < |\arg z| < 5\pi/3$ . Когда  $|\arg z| < \pi/3$ ,  $G(z)$  в разложении отсутствует.

Эти различные формы асимптотического разложения для различных областей значений  $\arg z$  опять дают нам пример явления Стокса.

### § 43. Асимптотическое разложение функции $\text{Ai}(-z)$

Если положить  $z = \zeta e^{\pi i}$ , то получим, что  $|\arg \zeta| < 2\pi/3$ , когда  $\pi/3 < \arg z < 5\pi/3$ . Используя формулы, справедливые в последнем угле, находим, что

$$\begin{aligned} \text{Ai}(\zeta e^{\pi i}) \sim & \frac{1}{2\pi \zeta^{1/4}} e^{2i\zeta^{3/2}/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{e^{-(2n+1)\pi i/4}}{\zeta^{3n/2}} + \\ & + \frac{1}{2\pi \zeta^{1/4}} e^{-2i\zeta^{3/2}/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{e^{(2n+1)\pi i/4}}{\zeta^{3n/2}}, \end{aligned}$$

когда  $|\arg \zeta| < 2\pi/3$ . Далее находим, что  $\text{Ai}(\zeta e^{-\pi i})$  имеет такое же асимптотическое разложение в угле  $|\arg \zeta| < 2\pi/3$ .

Заменяя переменную, мы можем записать этот результат в более удобной тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \text{Ai}(-z) \sim & \frac{\sin(2z^{3/2}/3 + \pi/4)}{\pi z^{1/4}} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(6n+1/2)}{3^{4n} (4n)!} \frac{(-1)^n}{z^{3n}} - \\ & - \frac{\cos(2z^{3/2}/3 + \pi/4)}{\pi z^{3/4}} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(6n+7/2)}{3^{4n+2} (4n+2)!} \frac{(-1)^n}{z^{3n}}, \end{aligned}$$

когда  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| < 2\pi/3$ .

### § 44. Асимптотическое разложение функции $\text{Bi}(z)$

Можно использовать аналогичные рассуждения для получения асимптотического разложения функции  $\text{Bi}(z)$  из тождества

$$\text{Bi}(z) = t\omega^2 \text{Ai}(\omega^2 z) - t\omega \text{Ai}(\omega z).$$

Мы опустим детали и приведем только результаты.



Когда  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| < \pi$ , имеем

$$\begin{aligned} \text{Bi}(z) \sim \frac{1}{\pi z^{1/4}} e^{2z^{3/2}/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{1}{z^{3n/2}} \pm \\ \pm \frac{i}{2\pi z^{1/4}} e^{-2z^{3/2}/3} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(3n+1/2)}{3^{2n} (2n)!} \frac{(-1)^n}{z^{3n/2}}, \end{aligned}$$

где верхний или нижний знак выбирается в зависимости от того, положителен или отрицателен  $\arg z$ . Это приводит к разрыву при переходе через действительную положительную ось. Но это кажущийся разрыв, так как, когда  $|\arg z| < \pi/3$ , все члены второго ряда исчезающе малы по сравнению с членами первого ряда.

Окончательно получаем, что при  $|z| \rightarrow \infty$  в угле  $|\arg z| < 2\pi/3$

$$\begin{aligned} \text{Bi}(z) \sim \frac{\cos(2z^{3/2}/3 + \pi/4)}{\pi z^{1/4}} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(6n+1/2)}{3^{4n} (4n)!} \frac{(-1)^n}{z^{3n}} + \\ + \frac{\sin(2z^{3/2}/3 + \pi/4)}{\pi z^{3/4}} \sum_0^{\infty} \frac{\Gamma(6n+7/2)}{3^{4n+2} (4n+2)!} \frac{(-1)^n}{z^{3n}}. \end{aligned}$$

## § 45. Интеграл Харди и Литтлвуда

Интеграл

$$F_n(\sigma) = \int_0^{\infty} e^{\sigma x - x^n} dx,$$

где  $n$  — целое число больше единицы, появился в работе Харди и Литтлвуда о проблеме Варинга. Задача определения асимптотического разложения функции  $F_n(\sigma)$  при больших по модулю значениях комплексного переменного  $\sigma$  была рассмотрена во всех деталях Бакхумом [1]. Методы, использованные здесь, связаны с теми, которые использовал Бакхум, но они проще, так как затруднения, которые появляются при произвольном значении  $n$ , не имеют места при  $n = 3$ .

## Равномерные асимптотические разложения

### § 46. Асимптотические разложения функции $J_\nu(av)$

В § 32 и 33 мы видели, что, когда  $\nu$  велико, а  $a$  фиксировано, функция  $J_\nu(av)$  имеет в общем случае асимптотическое разложение, которое представляется при  $a \neq 1$  в виде бесконечного ряда по отрицательным степеням  $\nu^{1/2}$ , а при  $a = 1$  — в виде бесконечного ряда по отрицательным степеням  $\nu^{1/3}$ . Это изменение вида асимптотического разложения при  $a \rightarrow 1$  происходит потому, что две точки перевала, различные при  $a \neq 1$ , сливаются при  $a \rightarrow 1$  в одну точку перевала высшего порядка. Ясно, что явления такого рода происходят всегда, когда две точки перевала сливаются в одну.

Изменение вида асимптотического разложения функции  $J_\nu(av)$  (и, конечно, других функций, которые ведут себя аналогичным образом) делает желательным получение асимптотического разложения, справедливого равномерно в некоторой окрестности этого исключительного значения параметра.

Одним из путей достижения этой цели является возвращение назад к дифференциальному уравнению, которому удовлетворяет  $J_\nu(av)$  как функция параметра  $a$ . С помощью некоторой сложной замены переменных это уравнение может быть приведено к уравнению другого вида, приблизительно такому же, как уравнение, которому удовлетворяет интеграл Эйри; затем можно показать, что для приблизительно одинаковых уравнений решения тоже приближенно равны. Этим способом Лангер [18] получил равномерное асимптотическое приближение к функции  $J_\nu(av)$  при больших  $\nu$ . Этот метод был использован другими авторами, а именно Черри [5] и Олвером [21], которые получили равномерное асимптотическое разложение ре-

шений дифференциального уравнения вида

$$\frac{d^2 w}{dz^2} = \{u p(z) + q(z)\} w$$

для больших значений  $u$ .

Олверовский тип асимптотического разложения функции  $J_\nu(av)$  может быть получен непосредственно из интегрального представления с помощью метода, разработанного Честером, Фридманом и Урселлом [6], который в основном является развитием метода наибыстрейшего спуска, когда подинтегральная функция имеет близкие точки перевала, которые сливаются в двойную точку при стремлении параметра к некоторому специальному значению. Мы рассмотрим здесь задачу о функции Бесселя, но только в том случае, когда  $\nu$  большое и положительное и  $0 < a \leq 1$ , так как ее можно решить, не прибегая к общим теоремам.

### § 47. Кубическое преобразование

Мы начнем с интеграла

$$J_\nu(av) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{N(\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha)} dz,$$

где  $N = \nu a$ ,  $a = \frac{1}{\operatorname{ch} \alpha}$ ,  $\alpha \geq 0$ . Мы запишем его для удобства в виде

$$J_\nu(av) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{NF(z, \alpha)} dz, \quad (47.1)$$

где

$$F(z, \alpha) = \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha. \quad (47.2)$$

Точками перевала, в которых  $\partial F / \partial z$  обращается в нуль, будут  $z = 2n\pi i \pm \alpha$ , где  $n$  — любое целое число. В § 32 (где мы рассмотрели случай  $\alpha \neq 0$ ) мы использовали квадратическое преобразование

$$\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha = \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha - t^2,$$

а в § 33, где  $\alpha$  равнялось нулю, мы применили кубическое преобразование

$$\operatorname{sh} z - z = -t^3. \quad (47.3)$$

Основная идея Честера и др. [6] и Фридмана [14] состояла в использовании при всех значениях  $\alpha$  такого кубического преобразования, которое сводилось бы к формуле (47.3) при  $\alpha = 0$ .

Рассмотрим отображение

$$F(z, \alpha) = \frac{1}{3} \omega^3 - b^2 \omega + c, \quad (47.4)$$

где  $b$  и  $c$  — некоторые функции от  $\alpha$ , которые нужно определить; заметим, что отсутствие  $\omega^2$  в этом кубическом многочлене не делает это преобразование менее общим. Если отображение плоскости  $z$  в плоскости  $\omega$  конформно, то ни  $dz/d\omega$ , ни  $d\omega/dz$  не могут обратиться в нуль в соответствующих областях. Далее имеем

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{\omega^2 - b^2}{\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha}. \quad (47.5)$$

Числитель обращается в нуль при  $\omega = \pm b$ ; внутри интересующей нас полосы  $|\operatorname{Im} z| \leq \pi$  знаменатель обращается в нуль в точках  $z = \pm \alpha$ . Поставим в соответствие точке  $z = \alpha$  точку  $\omega = b$  и точке  $z = -\alpha$  точку  $\omega = -b$ . Это дает

$$c - \frac{2}{3} b^3 = \operatorname{sh} \alpha - \alpha \operatorname{ch} \alpha,$$

$$c + \frac{2}{3} b^3 = -\operatorname{sh} \alpha + \alpha \operatorname{ch} \alpha$$

и, следовательно,

$$c = 0, \quad b^3 = \frac{3}{2} (\alpha \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} \alpha).$$

Когда  $\alpha \geq 0$ , имеем  $b^3 \geq 0$ ; мы выберем  $b$  так, чтобы оно было положительным, когда  $\alpha > 0$ . Если мы будем рассматривать  $\alpha$  как комплексное переменное, то  $b$  будет аналитической функцией от  $\alpha$ , регулярной в некоторой окрестности точки  $\alpha = 0$ , причем ее особыми точками

будут те точки, в которых  $\operatorname{th} \alpha = \alpha$ . Ряд Тейлора функции  $b$  вблизи начала координат имеет вид

$$b = \alpha \sum_0^{\infty} a_n \alpha^{2n},$$

где  $a_0 = 2^{-1/3}$ ;  $a_1 = a_0/30$  и т. д.

### § 48. Решение уравнения для кубического преобразования

Уравнение, определяющее кубическое преобразование,

$$\frac{1}{3} w^3 - b^2 w = \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha \quad (48.1)$$

может быть решено точно. Когда  $\alpha = 0$ , это решение тривиально. Но когда  $\alpha \neq 0$ , его три решения представляются в виде

$$\begin{aligned} w_1 &= 2b \sin \frac{1}{3} \zeta, \\ w_2 &= -b \sin \frac{1}{3} \zeta + b \sqrt{3} \cos \frac{1}{3} \zeta, \\ w_3 &= -b \sin \frac{1}{3} \zeta - b \sqrt{3} \cos \frac{1}{3} \zeta, \end{aligned} \quad (48.2)$$

где  $\zeta$  — решение уравнения

$$\frac{2}{3} b^3 \sin \zeta = z \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} z, \quad (48.3)$$

обращающееся в нуль вместе с  $z$ . Эти формулы немедленно получаются из хорошо известного тригонометрического решения кубического уравнения.

При  $z = \alpha$  имеем  $w_1 = b$ ,  $w_2 = b$ ,  $w_3 = -2b$ , а при  $z = -\alpha$  имеем  $w_1 = -b$ ,  $w_2 = 2b$ ,  $w_3 = -b$ . Таким образом,  $w_1$  — нужное нам решение. Это — нечетная функция от  $z$ , разлагающаяся в ряд Тейлора

$$w_1(z) = \sum_0^{\infty} a'_n z^{2n+1}$$

в некоторой окрестности точки  $z=0$ . Коэффициенты выражаются через  $\alpha$  сложным образом; первые два из них равны

$$a'_0 = \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{b^2}, \quad a'_1 = \frac{1}{3b^2} \left\{ \frac{(\operatorname{ch} \alpha - 1)^3}{b^6} - \frac{1}{2} \right\}.$$

С помощью индукции можно показать, что если  $\alpha$  рассматривается как комплексное переменное, то все коэффициенты  $a'_n$  являются аналитическими функциями от  $\alpha^2$ , регулярными в некоторой окрестности точки  $\alpha=0$ .

На самом деле функция  $w_1(z)$  имеет вид  $zG(z^2 - \alpha^2, \alpha^2)$ , где  $G$  — аналитическая функция двух комплексных переменных  $z^2 - \alpha^2$  и  $\alpha^2$ . Для того чтобы доказать это, заметим, что  $w_1/z$  — четная функция, принимающая значение  $b/\alpha$ , когда  $z = \pm \alpha$ , поэтому  $w_1$  имеет вид

$$w_1(z) = \frac{bz}{\alpha} \{1 + (z^2 - \alpha^2)v\},$$

где  $v$  — некоторая неизвестная функция. Обозначая  $z^2 - \alpha^2 = t$  и подставляя  $t$  в формулу (48.1), мы получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \frac{b^3}{\alpha^3} (1 + vt)^3 (t + \alpha^2) - \frac{b^3}{\alpha} (1 + vt) &= \\ &= -\operatorname{ch} \alpha + \frac{\operatorname{sh} z}{z}. \end{aligned} \quad (48.4)$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} z}{z} &= \frac{\operatorname{sh} \sqrt{\alpha^2 + t}}{\sqrt{\alpha^2 + t}} = \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} + \sum_1^{\infty} \frac{t^n}{n!} \left( \frac{d}{2\alpha d\alpha} \right)^n \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} = \\ &= \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha} + \sum_1^{\infty} c_n t^n, \end{aligned}$$

где

$$c_n = \frac{1}{n!} \left( \frac{d}{2\alpha d\alpha} \right)^n \frac{\operatorname{sh} \alpha}{\alpha}.$$

Уравнение (48.4) тогда упрощается и принимает вид  $H(v, t, \alpha^2) = 0$ , где

$$H = v + v^2(t + \alpha^2) + \frac{1}{3} v^3 t(t + \alpha^2) - \frac{\alpha^3}{b^3} \sum_2^{\infty} c_n t^{n-2},$$

Так как  $c_2 = 1/5!$  и так как  $\alpha^3/b^3 \rightarrow 2$ , когда  $\alpha \rightarrow 0$ , то мы имеем  $H = 0$ ,  $\partial H/\partial v = 1$ , когда  $t = 0$ ,  $\alpha = 0$ ,  $v = 2/5!$ . Но  $H$  — аналитическая функция от  $v$ ,  $t$  и  $\alpha^2$ , поэтому уравнение  $H = 0$  имеет единственное решение  $v$ , принимающее значение  $2/5!$  при  $t = \alpha = 0$  и являющееся аналитической функцией двух переменных  $t$  и  $\alpha^2$  в некоторой окрестности точки  $t = \alpha = 0$ .

### § 49. Отображение функцией $w = w_1(z)$

Функция  $w = w_1(z)$  отображает полосу  $|\operatorname{Im} z| \leq \pi$  конформно на некоторую область плоскости  $w$ , причем это отображение взаимно однозначно. Простейший способ убедиться в этом состоит в том, чтобы рассмотреть последовательные отображения

$$w = 2b \sin \frac{1}{3} \zeta, \quad \frac{2}{3} b^3 \sin \zeta = Z, \quad Z = z \operatorname{ch} \alpha - \operatorname{sh} z,$$

начиная с полуполосы  $\operatorname{Re} z \geq 0$ ,  $0 \leq \operatorname{Im} z \leq \pi$ . Покажем, что каждое из этих преобразований является однолиственным, и поэтому в результате их последовательного применения мы получим тоже однолиственную функцию. На рис. 9—12 изображены соответствующие области в четырех плоскостях. Начала координат совпадают на всех четырех плоскостях. Точка  $z = \alpha$  отображается в точки  $Z = 2b^3/3$ ,  $\zeta = \pi/2$ ,  $w = b$ ; точка  $z = \alpha'$  отображается в точки  $Z = -2b^3/3$ ,  $\zeta = 3\pi/2$ ,  $w = 2b$ . Пунктирная линия в плоскости  $z$  — это кривая наибо́льшего спуска из точки  $\alpha$ ; ее образ в плоскости  $w$  является линией наибо́льшего спуска из точки  $b$ . На всех четырех рисунках заштрихованы области, соответствующие друг другу при отображениях.

Результаты последовательных отображений в других квадрантах можно было бы рассмотреть таким же образом, а конечный результат устанавливается с помощью принципа симметрии. Окончательно находим, что функция  $w = w_1(z)$  отображает конформно полосу  $|\operatorname{Im} z| \leq \pi$  на некоторую область плоскости  $w$ , и это отображение взаимно однозначно. Заметим, что рассматривать отображения сразу во всей полосе было бы неразумно, так как промежуточные результаты были бы не однолистными.

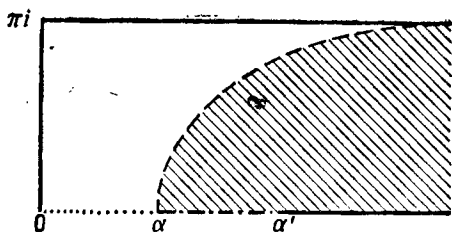


Рис. 9. Плоскость  $z$ .

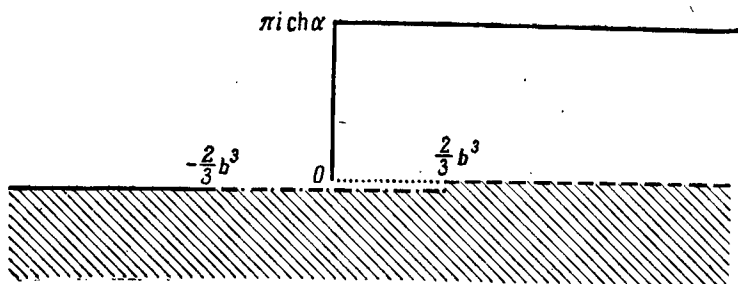


Рис. 10. Плоскость  $Z$ .

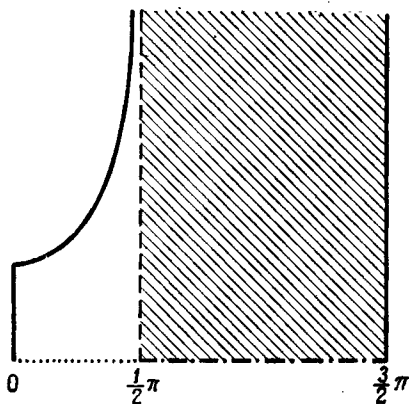


Рис. 11. Плоскость  $\zeta$ .



Верхняя граница области плоскости  $w$  является образом линии  $\text{Im } z = \pi$ . На этой прямой  $z = x + i\pi$ , поэтому

$$w^3 - 3b^2w = -3 \operatorname{sh} x - 3x \operatorname{ch} \alpha - 3\pi i \operatorname{ch} \alpha,$$

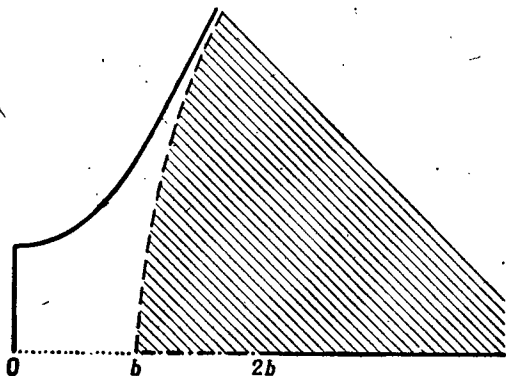
так что уравнение верхней границы имеет вид

$$\text{Im}(w^3 - 3b^2w) = -3\pi \operatorname{ch} \alpha.$$

Обозначая  $w = u + iv$ , находим, что граница является ветвью кубической кривой

$$v^3 - 3u^2v + 3b^2v = \pi \operatorname{ch} \alpha.$$

Эта ветвь имеет асимптоты  $v = \pm \sqrt{3}u$ . Нижняя граница — кривая, симметричная построенной кривой относительно действительной оси.



Р и с. 12. Плоскость  $w$ .

Кривая наискорейшего спуска из точки  $b$  имеет уравнение

$$\text{Im}(w^3 - 3b^2w) = 0,$$

или

$$v^3 - 3u^2v + 3b^2v = 0.$$

Действительная ось является путем наискорейшего подъема. Путь наискорейшего спуска — это ветвь гиперболы  $3u^2 - v^2 = 3b^2$ , которая асимптотически приближается к границе области; она изображена штриховой линией на рис. 12 и симметрична относительно действительной оси  $u$ .

### § 50. Вывод равномерного асимптотического разложения

Мы теперь опустим индекс и вместо  $w_1(z)$  будем писать  $w(z)$ . Мы будем исходить из формулы (47.1)

$$J_\nu(a\nu) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{N(\operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha)} dz,$$

где  $0 < a \leq 1$ ,  $a = 1/\operatorname{ch} \alpha$ ,  $N = \nu/\operatorname{ch} \alpha$ , и найдем асимптотическую формулу, справедливую при постоянном  $a$  и  $\nu \rightarrow +\infty$ . Допустимым контуром является контур наибыстрейшего спуска из точки  $\alpha$  (пунктирная линия на рис. 9). Вводя переменную  $w$ , мы получаем

$$J_\nu(\nu a) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{N(w^3/3 - b^2 w)} \frac{dz}{dw} dw. \quad (50.1)$$

Контур  $C$  лежит в  $w$ -плоскости  $w$ , это любая кривая типа кривой наибыстрейшего спуска из точки  $b$ , начинающаяся в  $\infty e^{-\pi i/3}$  и заканчивающаяся в  $\infty e^{\pi i/3}$ . Сначала мы должны исследовать поведение  $dz/dw$  как функции от  $w$ .

В силу того что функция  $w = w_1(z)$  осуществляет однолистное конформное отображение полосы  $|\operatorname{Im} z| \leq \pi$  на некоторую область в плоскости  $w$ , переменная  $z$  является аналитической функцией от  $w$  и  $\alpha^2$ , нечетной относительно  $w$ . Отсюда  $dz/dw$  — четная функция от  $w$  и, следовательно, аналитическая функция от  $w$ . Вблизи  $w^2 = b^2$  она поэтому может быть разложена в сходящийся степенной ряд

$$\frac{dz}{dw} = \sum_0^{\infty} k_n(\alpha) (w^2 - b^2)^n, \quad (50.2)$$

коэффициенты которого задаются формулой

$$k_n(\alpha) = \frac{1}{n!} \left\{ \frac{d^n}{d(w^2)^n} \frac{dz}{dw} \right\}_{w=b}.$$

Из уравнения

$$\frac{1}{3} w^3 - b^2 w = \operatorname{sh} z - z \operatorname{ch} \alpha$$

мы получаем

$$w^2 - b^2 = (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha) \frac{dz}{dw},$$

откуда

$$2w = (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha) \frac{d^2 z}{dw^2} + \operatorname{sh} z \left( \frac{dz}{dw} \right)^2,$$

$$2 = (\operatorname{ch} z - \operatorname{ch} \alpha) \frac{d^3 z}{dw^3} + 3 \operatorname{sh} z \frac{dz}{dw} \frac{d^2 z}{dw^2} + \operatorname{ch} z \left( \frac{dz}{dw} \right)^3$$

и т. д. Второе уравнение дает

$$\left( \frac{dz}{dw} \right)_{w=b}^2 = \frac{2b}{\operatorname{sh} \alpha},$$

а из определения функции  $w_1$  следует, что  $dz/dw$  в точке  $w = b$  равна

$$\left( \frac{dz}{dw} \right)_{w=b} = + \sqrt{\frac{2b}{\operatorname{sh} \alpha}}$$

и поэтому стремится к  $2^{1/3}$  при  $\alpha \rightarrow 0$ . Третье равенство теперь дает

$$\left( \frac{d^2 z}{dw^2} \right)_{w=b} = \frac{2}{3 \operatorname{sh} \alpha} \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \alpha}{2b}} - \frac{2b \operatorname{ch} \alpha}{3 \operatorname{sh}^2 \alpha}.$$

Следовательно,

$$k_0(\alpha) = \sqrt{\frac{2b}{\operatorname{sh} \alpha}},$$

$$k_1(\alpha) = \frac{1}{3b \operatorname{sh} \alpha} \left\{ \sqrt{\frac{\operatorname{sh} \alpha}{2b}} - \frac{b \operatorname{ch} \alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \right\}$$

и т. д. Другие коэффициенты можно определить таким же образом, но, по-видимому, не существует какой-либо простой формулы для коэффициентов  $k_n(\alpha)$ . Каждый из коэффициентов — аналитическая функция от  $\alpha^2$ , регулярная в некоторой окрестности начала координат.

Если мы подставим ряд (50.2) в формулу (50.1) и проинтегрируем почленно, то получим ряд вида

$$\sum_0^{\infty} k_n(\alpha) f_n(\alpha^2, N), \quad (50.3)$$

где

$$f_n(\alpha^2, N) = \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{N(w^{3/3} - b^2 w)} (w^2 - b^2)^n dw.$$

В частности,

$$f_0(\alpha^2, N) = \text{Ai}(N^{2/3}b^2) N^{-1/3}, \quad f_1(\alpha^2, N) = 0;$$

все остальные функции тоже можно выразить через интеграл Эйри  $\text{Ai}(N^{2/3}b^2)$  и его первую производную. Честер и др. [6] доказали, что ряд (50.3) является асимптотическим разложением, равномерным по  $\alpha$ . Для простоты мы приведем здесь только первый член и оценим величину ошибки.

Так как  $dz/dw$  — аналитическая функция от  $w^2$  и  $\alpha^2$ , то она ограничена в некоторой окрестности  $|\omega^2 - b^2| \leq R_1$ ,  $|\alpha^2| \leq R_2$  точек  $w^2 = b^2$ ,  $\alpha^2 = 0$ , поэтому  $|dz/dw| \leq K$  ( $K$  — некоторая постоянная). Отсюда с помощью неравенства Коши получаем, что  $|k_n(\alpha)| \leq K/R_1^n$ . Следовательно, если  $|\omega^2 - b^2| \leq R_1/2$ , то

$$\frac{dz}{dw} = k_0(\alpha) + k_1(\alpha)(\omega^2 - b^2) + (\omega^2 - b^2)^2 \Phi,$$

где

$$|\Phi| = \left| \sum_0^{\infty} k_{n+2}(\alpha^2) (\omega^2 - b^2)^n \right| \leq \sum_0^{\infty} \frac{K}{R_1^{n+2}} \left( \frac{1}{2} R_1 \right)^n = \frac{2K}{R_1^2}.$$

Следовательно,  $\Phi$  равномерно ограничена в области  $|\omega^2 - b^2| \leq R_1/2$ . С другой стороны, если  $z = x + iy$ , где  $x$  велико и положительно,  $-\pi \leq y \leq \pi$ , то

$$\frac{1}{3} \omega^3 \sim \frac{1}{2} e^{x-iy}$$

и поэтому

$$\frac{dz}{dw} = \frac{\omega^2 - b^2}{\text{ch } z - \text{ch } \alpha} \sim \frac{\omega^2}{e^{x+iy/2}} \sim \frac{1}{3\omega}.$$

Отсюда  $\Phi = O(1/\omega^2)$  равномерно по  $\alpha$  при  $|\omega| \rightarrow \infty$  на кривой  $C$ . Следовательно, существует постоянная  $K'$ , такая, что  $|\Phi| < K'$  на  $C$  для всех  $\alpha$  на некотором фиксированном отрезке  $0 \leq \alpha \leq \alpha_1$ .

Тогда мы имеем

$$\begin{aligned} J_\nu(\nu\alpha) &= k_0(\alpha) \frac{\text{Ai}(N^{2/3}b^2)}{N^{1/3}} + \\ &+ \frac{1}{2\pi i} \int_C e^{N(\omega^3/3 - b^2\omega)} (\omega^2 - b^2)^2 \Phi(\omega) d\omega = \\ &= \sqrt{\frac{2b}{\text{sh } \alpha}} \frac{\text{Ai}(N^{2/3}b^2)}{N^{1/3}} + \frac{1}{2\pi i} I. \end{aligned} \quad (50,4)$$

Мы покажем, что когда  $N$  велико,  $I$  мало по сравнению с первым слагаемым.

Так как на контуре наибоыстрейшего спуска

$$w = \sqrt{\frac{1}{3}v^2 + b^2} + iv,$$

где квадратный корень положителен, то мы имеем

$$\left| \frac{dw}{dv} \right| = \left| \frac{v}{3\sqrt{v^2/3 + b^2}} + i \right| = \sqrt{\frac{4v^2 + 9b^2}{3v^2 + 9b^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

$$|w^2 - b^2| = \frac{2}{3} |v| \sqrt{4v^2 + 9b^2},$$

$$w^3 - 3b^2w = -\frac{2}{3\sqrt{3}} (4v^2 + 3b^2) \sqrt{v^2 + 3b^2}.$$

Отсюда следует, что

$$|I| \leq \frac{8}{9\sqrt{3}} K'J,$$

где

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-N\psi v^2} (4v^2 + 9b^2) dv,$$

причем

$$\psi = \frac{2}{9\sqrt{3}} (4v^2 + 3b^2) \sqrt{v^2 + 3b^2}.$$

Квадратный корень из  $\psi$  положителен, поэтому мы можем представить  $J$  в виде двух соответствующих интегралов от 0 до  $\infty$ . Рассмотрим отдельно случай  $b = 0$  и случай  $b > 0$ .

Когда  $b = 0$ ,

$$J = 8 \int_0^{\infty} e^{-kNv^3} v^4 dv,$$

где  $k = 8/(9\sqrt{3})$ . Поэтому  $J = c_1 N^{-5/3}$ , где  $c_1$  — числовая постоянная, следовательно,

$$|I| \leq \frac{8c_1 K'}{9\sqrt{3} N^{5/3}}.$$

Но когда  $b = 0$ , первый член формулы (50.4) — это числовой множитель при  $N^{-1/3}$ , так что  $I$  в этом случае очень мало по сравнению с первым членом.

Когда  $b > 0$ , подстановка  $v = bt$  дает

$$J = 2b^5 \int_0^{\infty} e^{-Nb^3 \chi t^2} (4t^2 + 9) dt,$$

где

$$\chi = \frac{2}{9\sqrt{3}} (4t^2 + 3) \sqrt{t^2 + 3}.$$

Так как  $\chi$  имеет только одно стационарное значение — минимум при  $t = 0$ , то мы можем найти приближение к  $J$  с помощью метода Лапласа при больших положительных значениях  $N$ . Это дает

$$J \sim 18b^5 e^{-2Nb^3/3} \int_0^{\infty} e^{-Nb^3 t^2} dt = c_2 e^{-2Nb^3/3} \sqrt{\frac{b}{N^3}},$$

где  $c_2$  — числовая постоянная. Но в силу формулы (39.2)

$$\frac{\text{Ai}(N^{2/3}b^2)}{N^{1/3}} \sim \frac{1}{2\sqrt{N\pi b}} e^{-2Nb^3/3},$$

следовательно,

$$J \sim \frac{2\sqrt{\pi}}{N} bc_2 \frac{\text{Ai}(N^{2/3}b^2)}{N^{1/3}}.$$

Мы доказали, таким образом, что когда  $\alpha > 0$ ,

$$J_v\left(v \frac{1}{\text{ch } \alpha}\right) = \sqrt{\frac{2b}{\text{sh } \alpha}} \frac{\text{Ai}(N^{2/3}b^2)}{N^{1/3}} \left\{ 1 + O\left(\frac{1}{N}\right) \right\}, \quad (50.5)$$

где  $N = v/\text{ch } \alpha$ ,  $b^3 = 3(\alpha \text{ch } \alpha - \text{sh } \alpha)/2$ . Остаточный член содержит множитель  $b$ , так что при  $\alpha \rightarrow 0$  он должен быть заменен на  $o(1/N)$ , а на самом деле он равен  $O(N^{-4/3})$ .

Если  $\alpha \geq 1$ , мы можем положить  $\alpha = \text{sec } \beta$  и провести аналогичное рассуждение. Когда  $\alpha$  комплексное, исследования становятся значительно более сложными; за подробностями мы отсылаем к работе Честера и др. [6].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Bakhoom N. G., *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **35** (1933), 83—100.
2. Brillouin L., *Ann. scient. École norm. super.* (3), **33** (1916), 17—69.
3. Burwell W. R., *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), **22** (1924), 57—72.
4. Cherry T. M., *Proc. Edinb. Math. Soc.* (2), **8**, (1948), 51.
5. Cherry T. M., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **68** (1950), 224—257.
6. Chester C., Friedman B., Ursell F., *Proc. Camb. Philos. Soc.*, **53** (1957), 599—611.
7. van der Corput J. G., *Compositio math.*, **1** (1934—1935), 15—38; **3** (1936), 328—372.
8. van der Corput J. G., *Proc. Nederl. Acad. Wet.*, **51** (1948), 650—658.
9. Darboux G., *J. math. pures et appl.* (3), **4** (1878), 5—56, 377—416.
10. Debye P., *Math. Ann.*, **67** (1909), 535—558; *Münch. Ber.*, **40**, № 5 (1910).
11. Dingle R. B., *Proc. Roy. Soc.*, **A244** (1958), 456—490; **249**, 270—295.
12. Эрдейи А., Асимптотические разложения, Физматгиз, М., 1962. См. также: *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **3** (1955), 17—27; **4** (1956), 38—47.
13. Erdélyi A., *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **3** (1955), 17—27; *Proc. Fourth Canadian Math. Congr.* (Toronto 1959), 137—146.
14. Friedman B., *J. Soc. Ind. Appl. Math.*, **7** (1959), 280—289.
15. Jones D. S., Klein M., *J. Math. and Phys.*, **37** (1958), 1—28.
16. Kelvin (Thomson W.), *Philos. Mag.* (5), **23** (1887), 252—255; переиздано в его *Math. Phys. Pap.*, т. 4, 303—306.
17. Ламб Г., Гидродинамика, ГТТИ, М., 1947.
18. Langer R. E., *Trans. Amer. Math. Soc.*, **33** (1931), 23—64.
19. Laplace P. S., *Théorie analytique des probabilités*, Paris, 1820, 88—109.
20. Nicholson J. W., *Philos. Mag.* (16), **16** (1909), 276—277.
21. Oliver F. W. J., *Philos. Trans. Roy. Soc.*, **A247** (1954), 307—368.
22. Poincaré H., *Acta Math.*, **8** (1886), 295—344.

23. Полдиа, Сегё, Задачи и теоремы из анализа, т. I, ГТТИ, М., 1956, стр. 103—106, 283—288.
24. Rayleigh, *Philos. Mag.* (6), 20 (1910), 1001—1004.
25. Риман Б., Сочинения, ГТТИ, М., 1948. Упомянутая заметка составлена Шварцем по отрывочным записям, оставшимся после смерти Римана.
26. Stieltjes T. J., *Ann. scient. École norm. super.* (3), 3 (1886), 201—258 переиздано в *Oeuvres complètes de T. J. Stieltjes*, Groningen, 1918, t. 2, 2—58.
27. Сегё Г., Ортогональные многочлены, Физматгиз, М., 1962, стр. 229—243.
28. Tricomi F. G., Erdélyi A., *Pactf. J. Math.*, 1 (1951), 133—142.
29. Watson G. N., *Proc. Cambr. Philos. Soc.*, 19 (1918), 42—55. См. также: Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949, т. I.
30. Watson G. N., *Proc. Lond. Math. Soc.* (2), 17 (1918), 116—148, в частности стр. 133. См. также: Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949, т. I.
31. Watson G. N., *Proc. Lond. Math. Soc.* (1), 29 (1929), 293—308.
32. Widder D. V., *The Laplace Transform*, Princeton, 1941, 277.

Библиографию можно дополнить еще следующими трудами в которых рассматриваются вопросы теории, не вошедшие в эту книгу:

де Брейн Н. Г., Асимптотические методы в анализе, ИЛ, М., 1961.

Jeffreys H., *Asymptotic Approximations*, Oxford, 1962.



## УКАЗАТЕЛЬ

- Асимптотическая последовательность 14  
Асимптотические разложения в смысле Пуанкаре 15  
— степенные ряды 17
- Бесселевы функции 52—54, 61—62, 100—112, 141—153  
Бета-функция 84—87.
- Вырожденная гипергеометрическая функция 30, 72—73
- Гамма-функция 62—63, 75—81, 84—87, 97—99  
— логарифм 73—75
- Интегральный логарифм 81—84  
Интегрирование по частям 25—42
- Лапласа метод 55—68  
Лежандра полиномы 62
- Наибыстрейшего спуска метод 88—122  
Нейтрализатор 40—42  
Неполная гамма-функция 25—26
- Ошибка функция 10, 112—118
- Параболического цилиндра функция 65—68  
Перевала метод 123—131
- Равномерные асимптотические разложения 141—153
- Стационарной фазы метод 43—54
- Фурье интеграл 35—36
- Эйри интеграл 134—140, 151—153

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие редактора перевода . . . . .	5
Предисловие автора . . . . .	7
<b>Глава 1. Введение . . . . .</b>	<b>9</b>
<b>Глава 2. Предварительные сведения . . . . .</b>	<b>14</b>
§ 1. Асимптотические последовательности . . . . .	14
§ 2. Определение Пуанкаре асимптотического разложения . . . . .	15
§ 3. Асимптотические степенные ряды . . . . .	17
§ 4. Действия над асимптотическими степенными рядами . . . . .	17
<b>Глава 3. Интегрирование по частям . . . . .</b>	<b>25</b>
§ 5. Неполная гамма-функция . . . . .	25
§ 6. Интегралы Френеля и аналогичные им . . . . .	27
§ 7. Задача Стильтьеса . . . . .	28
§ 8. Аналитическое продолжение функции Стильтьеса . . . . .	30
§ 9. Стильтьесовские наилучшие приближения . . . . .	33
§ 10. Интегралы Фурье . . . . .	35
§ 11. Сингулярный случай . . . . .	37
§ 12. Применение „нейтрализатора“, введенного ван дер Корпутом . . . . .	40
<b>Глава 4. Метод стационарной фазы . . . . .</b>	<b>43</b>
§ 13. Гидродинамическая задача Кельвина . . . . .	43
§ 14. Метод стационарной фазы . . . . .	46
§ 15. Приложения к функциям Бесселя . . . . .	52
§ 16. Кратные интегралы . . . . .	54

<b>Глава 5. Метод Лапласа</b> . . . . .	<b>55</b>
§ 17. Асимптотическая формула Лапласа . . . . .	55
§ 18. Доказательство асимптотической формулы Лапласа . . . . .	58
§ 19. Несколько примеров на асимптотическую формулу Лапласа . . . . .	61
§ 20. Обобщения метода Лапласа . . . . .	63
<b>Глава 6. Лемма Ватсона</b> . . . . .	<b>69</b>
§ 21. Интегралы Лапласа . . . . .	69
§ 22. Лемма Ватсона . . . . .	70
§ 23. Функция $\Psi(1, 1; z)$ . . . . .	72
§ 24. Логарифм гамма-функции . . . . .	73
§ 25. Гамма-функция . . . . .	75
§ 26. Интегральный логарифм . . . . .	81
§ 27. Применение леммы Ватсона к контурным интегралам . . . . .	84
<b>Глава 7. Метод наискорейшего спуска</b> . . . . .	<b>88</b>
§ 28. Истоки метода . . . . .	88
§ 29. Метод Дебая наискорейшего спуска . . . . .	90
§ 30. Асимптотическое разложение функции $1/\Gamma(v)$ . . . . .	97
§ 31. Функция Бесселя $J_\nu(a)$ . . . . .	100
§ 32. Функция Бесселя $J_\nu(va)$ . . . . .	104
§ 33. Функция Бесселя $J_\nu(v)$ . . . . .	108
§ 34. Функция ошибок . . . . .	112
§ 35. Другие интегралы с конечными пределами . . . . .	119
<b>Глава 8. Метод перевала</b> . . . . .	<b>123</b>
§ 36. Описание метода . . . . .	123
§ 37. Подиномы Лежандра . . . . .	127
<b>Глава 9. Интеграл Эйри</b> . . . . .	<b>132</b>
§ 38. Определение функции $\text{Ai}(z)$ . . . . .	132
§ 39. Асимптотическое разложение функции $\text{Ai}(v^2)$ методом наискорейшего спуска . . . . .	133
§ 40. Другой интеграл для функции $\text{Ai}(v^2)$ . . . . .	135

§ 41. Асимптотическое разложение функции $A_i(z)$ в области $ \arg z  < \pi$ . . . . .	136
§ 42. Расширение области значений $\arg z$ . . . . .	137
§ 43. Асимптотическое разложение функции $A_i(-z)$ . . . . .	139
§ 44. Асимптотическое разложение функции $B_i(z)$ . . . . .	139
§ 45. Интеграл Харди и Литтлвуда . . . . .	140
Глава 10. Равномерные асимптотические разложения	
§ 46. Асимптотические разложения функции $J_\nu(av)$ . . . . .	141
§ 47. Кубическое преобразование . . . . .	142
§ 48. Решение уравнения для кубического преобразования . . . . .	144
§ 49. Отображение функцией $w = w_1(z)$ . . . . .	145
§ 50. Вывод равномерного асимптотического разложения . . . . .	149
Литература . . . . .	154
Указатель . . . . .	156

**Э. КОПСОН**  
**АСИМПТОТИЧЕСКИЕ**  
**РАЗЛОЖЕНИЯ**

Редактор *Л. Б. Штейнпресс*

Художник *С. Г. Ципорин*

Художественный редактор *В. И. Шаповалов*

Технический редактор *Ю. И. Экке*

Сдано в производство 5/X 1965 г.

Подписано к печати 29/XII 1965 г.

Бумага  $84 \times 108 \frac{1}{32} = 2,50$  бум. л.

8,40 условн. печ. л.

Уч.-изд. л. 7,0. Изд. № 1/3501.

Цена 50 коп. Зак. 1917.

Темплан 1966 г. изд-ва „Мир“, пор. № 7.

**ИЗДАТЕЛЬСТВО „МИР“**

Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2

имени Евгении Соколовой

Главполиграфпрома

Комитета по печати при Совете

Министров СССР.

Измайловский проспект, 29.