Физико-
Математическая
Библиотека
Инженера

Б. Г. КОРЕНЕВ

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1971

517.2
К 66
УДК 517

Введение в теорию бесселевых функций. Коренев Б. Г. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», М., 1971

Книга рассчитана на лиц, интересующихся функциями Бесселя с точки зрения их приложений. В первой части книги излагаются основы теории бесселевых функций. Здесь рассматриваются свойства бесселевых функций: представления функций в виде степенных рядов, интегральные представления, асимптотические разложения, функциональные уравнения типа вронскианов, формулы сложения и др. Наряду с этим подробно рассматриваются дифференциальные уравнения второго и четвертого порядка, приводимые к уравнениям Бесселя, а также неоднородные уравнения Бесселя; излагаются основные сведения о функциях, родственных функциям Бесселя, и о функциях Ломмеля двух переменных. Сравнительно подробно рассматриваются несобственные интегралы, ряды Фурье — Бесселя и ряды Шлемильха Приводятся решения парных интегральных уравнений, основанные на использовании аппарата теории бесселевых функций.

Вторая часть книги, основанная главным образом на работах автора, посвящена приложениям бесселевых функций, она содержит решения различных задач, относящихся, в основном, к теории упругости и колебаниям упругих систем. Книга написана простым языком и ее основная часть вполне доступна лицам, имеющим образование в объеме втуза.

Книга содержит табл 1, илл. 38, библ. 85 назв.

2-2-3
64-71

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие 5
Введение 9

ЧАСТЬ I

ОСНОВЫ ТЕОРИИ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Глава I. Уравнение Бесселя. Свойства бесселевых функций 13

§ 1. Дифференциальное уравнение Бесселя. Применение степенных рядов. Цилиндрические функции первого рода 13
§ 2. Цилиндрические функции второго рода (функции Неймана) 17
§ 3. Цилиндрические функции третьего рода (функции Ганкеля) 18
§ 4. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента . . 19
§ 5. Цилиндрические функции комплексного аргумента . . 20
§ 6. Формулы дифференцирования, рекуррентные формулы 23
§ 7. Цилиндрические функции с полуцелым индексом . . 26
§ 8. Некоторые обозначения для функций полуцелого и дробного индекса. Интеграл Эйри 27
§ 9. Определитель Вронского 29
§ 10. Интеграл Бесселя и разложения Якоби 34
§ 11. Теоремы сложения 39
§ 12. Разложение Ломмеля 45
§ 13. Дифференциальные уравнения, приводимые к уравнению Бесселя 46
§ 14. Интеграл Пуассона 53
§ 15. Некоторые неопределенные интегралы 57
§ 16. Функции, родственные бесселевым функциям. Частные решения неоднородного уравнения Бесселя 61
§ 17. Об интегрировании неоднородного уравнения Бесселя. Функции Коши 71
§ 18. Произведения бесселевых функций 78
§ 19. Интегральные представления бесселевых функций . . 83

Глава II. Определенные и несобственные интегралы. Ряды по бесселевым функциям 90

§ 20. Определенные интегралы 90
§ 21. Несобственные интегралы 95
§ 22. Парные интегральные уравнения 120
§ 23. Корни бесселевых функций 129
§ 24. Ряды Фурье — Бесселя и Дини 134
§ 25. Ряды Шлемильха 145
§ 26. Ряды Неймана 156
§ 27. Функции Ломмеля двух переменных 158

§ 28. О неполных цилиндрических функциях 165
§ 29. Асимптотические разложения бесселевых функций . . 173
§ 30. О бесселевых функциях с большим индексом 176

ЧАСТЬ II

ПРИЛОЖЕНИЯ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

Глава I. **Задачи теории пластинок и оболочек** 180
§ 1. Колебания круглой пластинки 180
§ 2. Равновесие круглой пластинки, лежащей на упругом основании. Осесимметричная деформация 196
§ 3. Равновесие круглой пластинки на упругом основании. Неосесимметричная деформация 201
§ 4. Расчет круговой конической оболочки на действие осесимметричных нагрузок и неравномерного нагрева . . . 206
§ 5. Метод компенсирующих нагрузок в задачах о мембранах и пластинках 216
§ 6. Задачи о равновесии неограниченной пластинки, лежащей на однородном упругом основании, модель которого обладает круговой симметрией 234

Глава II. **Задачи теории колебаний, гидродинамики и теплопроводности** 243
§ 7. О колебаниях нити 243
§ 8. Действие импульса на цилиндрические и призматические резервуары, наполненные жидкостью 249
§ 9. Плоские тепловые волны в полупространстве и слое; тепловые волны в стержне 256
§ 10. Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является степенной функцией глубины 264
§ 11. Применение интегральных уравнений к решению некоторых задач о мембранах и пластинках 268
§ 12. О распространении волн в линиях электропередач . . 276

Приложение. **Краткие сведения о гамма-функциях** 279
Литературные указания 281
Литература 283

ПРЕДИСЛОВИЕ

Большое число различных задач, относящихся практически ко всем важнейшим разделам математической физики и к самым разнообразным техническим вопросам, связано с применением бесселевых функций. Литература, в которой встречаются эти функции, практически просто необозрима.

Различные разделы теории бесселевых функций широко используются при решении задач акустики, радиофизики, гидродинамики, задач атомной и ядерной физики и др.

Весьма многочисленны приложения функций Бесселя к теории теплопроводности, в том числе и к динамическим и связанным задачам.

В теории упругости решения в бесселевых функциях охватывают все пространственные задачи, решаемые в сферических и цилиндрических координатах, различные задачи о колебаниях пластинок и о равновесии пластинок на упругом основании, ряд вопросов теории оболочек, задачи о концентрации напряжений вблизи трещин и др.

В каждой из этих областей приложения бесселевых функций очень разнообразны.

Функции Бесселя хорошо изучены. Имеется обширная справочная литература, содержащая формулы и различные таблицы.

Ознакомление с теорией бесселевых функций под углом зрения их приложений должно представить интерес для широкого круга инженеров и научных работников. Изложению теории бесселевых функций посвящены специальные разделы различных курсов математической физики (см. курсы Р. Куранта и Д. Гильберта, Р. И Морса и Г. Фешбаха, А. Н. Тихонова и А. А. Самарского и др.). Наряду с этим изучению бесселевых функций уделяется, естественно, серьезное внимание в

монографиях, посвященных специальным функциям. Это относится, например, ко второй книге «Курса современного анализа» Э. Т. Уиттекера и Г. Н. Ватсона, книге Н. Н. Лебедева «Специальные функции и их приложения», книге А. Н. Кратцера и В. Франца «Трансцендентные функции», монографии Н. Я. Виленкина «Специальные функции и теория представлений групп» и др.

На русском языке имеется несколько книг по теории бесселевых функций. Среди них мы отметим два издания книги Р. О. Кузьмина «Бесселевы функции», перевод книги Э. Грея и Г. Б. Мэтьюза «Функции Бесселя и их приложения к физике и механике», а также, конечно, перевод наиболее подробного курса по теории бесселевых функций — книги Г. Н. Ватсона «Теория бесселевых функций».

Предлагаемая книга содержит краткое изложение основ теории бесселевых функций, сопровождаемое примерами приложений теории к решению различных физических задач.

Книга предназначается для читателя, который в основном интересуется приложениями теории, а не самой теорией. Это определило как выбор материала, так и характер изложения. Автор стремился к тому, чтобы читатель мог почерпнуть здесь наиболее необходимые сведения и в дальнейшем сознательно пользоваться справочной литературой и самостоятельно применять бесселевы функции к решению прикладных задач.

Применяя аппарат теории бесселевых функций, инженер-исследователь должен обязательно иметь общее представление об основах теории в целом и ясно представлять взаимные связи между ее различными разделами. Именно поэтому выводы формул, даваемые в большом количестве в этой книге, важны для читателя, интересующегося приложениями. По той же причине при выборе схем вывода здесь отдавалось предпочтение тем, которые используют одни свойства бесселевых функций для выяснения других свойств. Взаимные связи между отдельными разделами теории при этом просматриваются более ясно.

Цели выявления связей теории с физическими приложениями служат и отдельные краткие замечания или

вводные разделы, носящие эвристический характер. Именно с этой точки зрения следует рассматривать отдельные выводы, относящиеся, например, к формулам сложения, интегралу Бесселя, несобственным интегралам и др., а также приложения бесселевых функций, рассматриваемые во второй части книги.

Книга состоит из двух частей.

Первая часть книги содержит изложение основ теории бесселевых функций, вторая часть — их приложения. Первая часть для удобства чтения разделена на две главы.

В первой главе, содержащей сравнительно простой материал, сначала рассматриваются основные свойства решений однородного уравнения Бесселя, основанные на представлении решений в виде рядов по возрастающим степеням аргумента. Далее приводятся интеграл Бесселя, интеграл Пуассона и, в § 19, некоторые их обобщения (которые, в связи с их определенной сложностью, можно опустить при первом чтении). Рассматриваются теоремы сложения Неймана и основы теории произведений функций Бесселя. Сравнительно подробно излагаются вопросы о дифференциальных уравнениях, приводимых к уравнениям Бесселя, и о неоднородных уравнениях Бесселя; в этой связи здесь, в частности, рассматриваются функции, родственные функциям Бесселя. Кроме того, здесь рассматриваются некоторые интегралы, получение которых непосредственно вытекает из разобранных в этой главе свойств бесселевых функций.

Вторая глава может быть пропущена при первом чтении, в этом случае к ней следует возвращаться лишь по мере надобности. В нее входят теория определенных и несобственных интегралов и элементы теории парных интегральных уравнений. Далее излагается представление функций рядами Фурье — Бесселя, Дини, Шлемильха и Неймана. Этой группе параграфов предшествует рассмотрение корней бесселевых функций. Затем рассматриваются более сложные, чем в первой главе, задачи о неоднородных уравнениях Бесселя, которые приводят к функциям Ломмеля двух переменных. С этих же позиций вкратце обсуждаются отдельные сведения о неполных цилиндрических функциях. В заключение

главы очень кратко рассматриваются асимптотические разложения бесселевых функций.

Вторая часть книги, посвященная приложениям, также состоит из двух глав; в первой рассматриваются задачи о пластинках и оболочках вращения. Среди них, наряду с задачами о колебаниях круглых пластинок и о равновесии пластинки на винклеровском основании, рассмотрены задачи, сводящиеся к использованию метода компенсирующих нагрузок. Применительно к задаче об осесимметрической деформации круговой конической оболочки подробно рассмотрен метод начальных параметров.

Во второй главе объединены сравнительно разнообразные задачи, относящиеся к вопросам теории колебаний, гидродинамики, теории теплопроводности и др. Несколько особняком стоит § 11 этой главы, в котором рассматриваются краевые задачи, решение которых сводится к сингулярным уравнениям, хотя формально здесь идет речь о пластинках и мембранах, но решение носит несколько более общий характер и менее тесно связано с конкретными приложениями. Вторая часть книги при желании читателя может быть прочитана независимо от первой, в этом случае читатель может считать вторую часть продолжением введения и при этом обращаться к первой лишь для справок.

Автор считает своим приятным долгом выразить глубокую благодарность профессору С. Г. Михлину, внимательно прочитавшему рукопись, за сделанные им весьма ценные замечания и, отнюдь не в меньшей мере, за большое внимание, проявленное к этой работе, и советы, высказанные при ее обсуждении.

Автор искренне благодарит своих учеников А. И Цейтлина за замечания, высказанные при чтении рукописи, Л. М. Резникова и М. Я. Волоцкого за помощь при подготовке рукописи к печати и проверке многочисленных формул.

Б. Коренев

Во многих задачах математической физики, решение которых связано с применением цилиндрических и сферических координат, процесс разделения переменных приводит к дифференциальному уравнению

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2) u = 0, \qquad (0.1)$$

которое называется уравнением Бесселя, а его решения — цилиндрическими или бесселевыми функциями.

Покажем на нескольких примерах, какие задачи приводят к уравнению Бесселя, а затем перейдем к рассмотрению различных свойств бесселевых функций и их приложениям.

Рассмотрим малые свободные колебания тонкой однородной круговой мембраны. Дифференциальное уравнение колебаний мембраны имеет вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2}, \qquad (0.2)$$

где w — прогиб мембраны, t — время; r, φ — полярные координаты, $1/c^2 = \rho/N$, ρ — масса мембраны, отнесенная к единице площади, N — натяжение мембраны.

Применим метод разделения переменных, положив

$$w = u(r)\, T(t)\, \Phi(\varphi); \qquad (0.3)$$

из (0.2) сразу получим

$$T(t) = \sin(\alpha t + A), \qquad \Phi(\varphi) = \sin(n\varphi + B),$$

где α, A — соответственно круговая частота и начальная фаза колебаний, n — число узловых диаметров, B — постоянная, которая легко выражается через угол, образованный первым узловым диаметром и полярной осью; $u(r)$ — функция переменной r, подлежащая определению.

После подстановки (0.3) в (0.2) получается следующее уравнение относительно u:

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{du}{dr}+\left(\frac{\alpha^2}{c^2}-\frac{n^2}{r^2}\right)u=0. \tag{0.4}$$

Если ввести новую переменную $\xi=\alpha r/c$, то уравнение (0.4) принимает вид

$$\frac{d^2u}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{du}{d\xi}+\left(1-\frac{n^2}{\xi^2}\right)u=0. \tag{0.5}$$

В введении будем обозначать функцию $u=u_n(\xi)$, называя ξ — аргументом, а n — индексом. В рассматриваемой задаче ξ — действительное, а индекс n — натуральное число; нецелые индексы будем обозначать через ν.

Рассмотрим, далее, задачу о колебаниях мембраны, имеющей форму кругового сектора с центральным углом γ, считая, что мембрана жестко закреплена по всему контуру.

Будем искать решение уравнения (0.2) в виде

$$w=u_\nu(r)\sin(\alpha t+A)\sin\frac{\pi(k+1)}{\gamma}\varphi, \qquad k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

где k — число узловых радиусов, расположенных внутри сектора. Если $\nu=\pi(k+1)/\gamma$ — нецелое число, то задача сводится к решению уравнения Бесселя

$$\frac{d^2u_\nu}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{du_\nu}{d\xi}+\left(1-\frac{\nu^2}{\xi^2}\right)u_\nu=0 \tag{0.6}$$

с нецелым индексом ν.

В качестве следующего примера применения уравнения Бесселя рассмотрим задачу об интегрировании уравнения Лапласа в цилиндрических координатах. Такие задачи встречаются в математической физике очень часто. Например, при рассмотрении задачи теории теплопроводности в случае, когда температурное поле является стационарным и отсутствуют источники тепла, температура $T(r, \varphi, z)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2T}{\partial z^2}+\frac{\partial^2T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\varphi^2}=0. \tag{0.7}$$

Если частное решение уравнения (0.7) искать в виде

$$T_n = e^{-\alpha z} \sin(n\varphi + B) u_n(r), \tag{0.8}$$

то, внося (0.8) в (0.7), для функции $u_n(r)$ получаем уравнение

$$\frac{d^2u_n}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{du_n}{dr} + \left(\alpha^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) u_n = 0.$$

Рассмотрим задачу об определении перемещений $w(r, \varphi)$ мембраны, лежащей на упругом винклеровском основании (это означает, что, кроме нагрузки, на мембрану действуют еще и реактивные усилия, пропорциональные с коэффициентом k_0 ее прогибам).

Дифференциальное уравнение упругой поверхности незагруженного участка мембраны имеет вид

$$\nabla^2 w - \lambda^2 w = 0, \quad \lambda = \sqrt{k_0/N}, \tag{0.9}$$

$$\left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}\right);$$

здесь N — натяжение мембраны, k_0 называется коэффициентом постели. Если уравнение (0.9) записать в полярной системе координат и считать, что мембрана занимает круговую область, то разыскивая частное решение в форме $w_n = u_n(\xi)\sin(n\varphi + B)$, получим для функции u_n

$$\frac{d^2u_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du_n}{d\xi} + \left(-\frac{n^2}{\xi^2} - 1\right) u_n = 0, \tag{0.10}$$

где $\xi = \lambda r$.

Введем новую переменную $x = i\xi$, тогда уравнение (0.10) перейдет в уравнение Бесселя с мнимым аргументом.

Рассмотренная еще Герцем задача о равновесии плавающей пластинки сводится к решению уравнения

$$\nabla^2 \nabla^2 w + \lambda^4 w = 0, \quad \lambda = \sqrt[4]{\gamma/D}, \tag{0.11}$$

где γ — объемный вес жидкости, D — цилиндрическая жесткость пластинки.

Если искать частное решение уравнения (0.11) в виде

$$w_n = u_n(\xi)\sin(n\varphi + B_n),$$

то, как это легко проверить, функцию $u_n(\xi)$ можно представить в виде

$$u_n(\xi) = u_{1,n}(\xi) + u_{2,n}(\xi),$$

где одна из функций, стоящих в правой части, удовлетворяет первому, а другая второму из уравнений [1]) (0.12)

$$\frac{d^2u_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{du_n}{d\xi} - \left(\frac{n^2}{\xi^2} \pm i\right) u_n = 0. \qquad (0.12)$$

Решение этой задачи приводит, таким образом, к функциям Бесселя от комплексного аргумента $\xi\sqrt{i}$.

Можно указать еще много различных прикладных задач, решение которых, связанное с интегрированием уравнения Лапласа, волнового уравнения, уравнения теплопроводности, системы волновых уравнений и др., в цилиндрических, сферических и конических координатах приводит в результате разделения переменных к уравнению Бесселя. К этому уравнению приводятся также некоторые дифференциальные уравнения второго порядка с переменными коэффициентами. В тех случаях, когда имеются источники, распределенные по объему, задачи зачастую сводятся к интегрированию неоднородных уравнений Бесселя. Целый ряд подобных задач рассматривается во второй части книги.

---

[1]) Этот вопрос подробно рассмотрен на стр. 196.

ОСНОВЫ ТЕОРИИ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА I
УРАВНЕНИЕ БЕССЕЛЯ. СВОЙСТВА БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Дифференциальное уравнение Бесселя. Применение степенных рядов. Цилиндрические функции первого рода

Рассмотрим *дифференциальное уравнение Бесселя* с индексом ν

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + z \frac{du}{dz} + (z^2 - \nu^2) u = 0. \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) является линейным дифференциальным уравнением второго порядка и, следовательно, его общий интеграл может быть записан в форме

$$u(z) = C_1 u_1(z) + C_2 u_2(z),$$

где $u_1(z)$, $u_2(z)$ — линейно независимые частные решения уравнения (1.1). Предположим, что z и ν могут принимать любые комплексные значения. В тех случаях, когда индекс ν является целым числом, будем обозначать его буквой n. Если аргумент z будет вещественным, будем обозначать его буквой x. Введем *оператор Бесселя* индекса ν

$$\nabla_\nu \equiv z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + z^2 - \nu^2 \tag{1.2}$$

и перепишем (1.1) в следующем виде: $\nabla_\nu u = 0$.

Будем искать решение уравнения (1 1) в виде обобщенного степенного ряда по возрастающим степеням аргумента z

$$u(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{m+\alpha}, \tag{1.3}$$

где $a_0 \neq 0$.

Определим здесь α и коэффициенты a_m ряда (1.3). Для этого найдем первую и вторую производные (1.3)

$$u'(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+\alpha) z^{m+\alpha-1},$$

$$u''(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (m+\alpha)(m+\alpha-1) z^{m+\alpha-2}$$

и внесем в левую часть уравнения (1.1) взамен функции $u(z)$ и ее производных полученные ряды.

Собирая слагаемые, содержащие одинаковые степени z, получим следующий ряд:

$$\nabla_\nu u = [\alpha(\alpha-1)+\alpha-\nu^2] a_0 z^\alpha + [(\alpha+1)\alpha+(\alpha+1)-\nu^2] a_1 z^{\alpha+1} +$$
$$+ \{[(\alpha+2)(\alpha+1)+(\alpha+2)-\nu^2] a_2 + a_0\} z^{\alpha+2} + \ldots =$$
$$= a_0(\alpha^2-\nu^2) z^\alpha + a_1[(\alpha+1)^2-\nu^2] z^{\alpha+1} +$$
$$+ \sum_{m=2}^{\infty} \{a_m[(\alpha+m)^2-\nu^2] + a_{m-2}\} z^{\alpha+m}. \quad (1.4)$$

Так как $\nabla_\nu u = 0$, то, очевидно, каждый из коэффициентов при $z^{\alpha+m}$ в (1.4) должен равняться нулю.

Это условие дает бесконечную систему

$$a_0(\alpha^2-\nu^2) = 0, \quad [(\alpha+1)^2-\nu^2] a_1 = 0,$$
$$a_m[(\alpha+m)^2-\nu^2] + a_{m-2} = 0, \quad m = 2, 3, 4\ldots$$

Для четных и нечетных значений m получаем соответственно две системы уравнений:

$$(\alpha^2-\nu^2) a_0 = 0, \quad [(\alpha+2)^2-\nu^2] a_2 + a_0 = 0,$$
$$[(\alpha+4)^2-\nu^2] a_4 + a_2 = 0 \ldots, \quad (1.5)$$

$$[(\alpha+1)^2-\nu^2] a_1 = 0, \quad [(\alpha+3)^2-\nu^2] a_3 + a_1 = 0, \ldots \quad (1.6)$$

Так как $a_0 \neq 0$, то из первого уравнения системы (1.5) получаем уравнение $\alpha^2 - \nu^2 = 0$, которое называется *определяющим*; из него следует $\alpha = \pm\nu$.

Второе и последующие уравнения системы (1.5) позволяют выразить коэффициенты a_m с четными номерами через a_0 и приводят к рекуррентным формулам

$$a_2 = -\frac{a_0}{4(\alpha+1)}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{8(\alpha+2)} = \frac{a_0}{4\cdot 8\cdot(\alpha+1)(\alpha+2)}, \ldots$$

Уравнения (1.6) удовлетворяются, если положить $a_1 = a_3 = a_5 = \ldots = 0$.

Приняв $\alpha = \nu$, получим формально первое частное решение уравнения (1.1) в виде

$$u_1(z) = a_0 z^{\nu}\left[1 - \frac{z^2}{4\cdot 1\cdot(\nu+1)} + \frac{z^4}{4^2\cdot 2!\,(\nu+1)(\nu+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{z^6}{4^3\cdot 3!\,(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)} + \ldots\right];$$

при $\alpha = -\nu$ получим второе частное решение

$$u_2(z) = a_0' z^{-\nu}\left[1 - \frac{z^2}{4\cdot 1\cdot(-\nu+1)} + \frac{z^4}{4^2\cdot 2!\,(-\nu+1)(-\nu+2)} - \right.$$
$$\left. - \frac{z^6}{4^3\cdot 3!\,(-\nu+1)(-\nu+2)(-\nu+3)} + \ldots\right].$$

Обычно постоянным a_0 и a_0' придают следующие значения:

$$a_0 = \frac{1}{2^{\nu}\Gamma(\nu+1)}, \qquad a_0' = \frac{1}{2^{-\nu}\Gamma(-\nu+1)}.$$

Используя свойства (3) гамма-функций, можно записать полученные ряды в более компактном виде [1]).

Первый ряд $u_1(z)$ определяет функцию, которая называется *бесселевой* или *цилиндрической функцией первого рода* или *функцией Бесселя индекса* [2]) ν *от аргумента* z

$$J_{\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}, \tag{1.7}$$

второй ряд определяет функцию Бесселя отрицательного индекса $-\nu$

$$J_{-\nu}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!\,\Gamma(-\nu+m+1)}. \tag{1.8}$$

---

[1]) Сведения о гамма-функциях даны в приложении; все ссылки на формулы приложения содержат номер, состоящий из одного числа, более подробные данные о гамма-функциях можно найти, например, в [4], [53]

[2]) Иногда взамен термина «индекс» употребляют равносильный термин «порядок».

Нетрудно показать, что полученные степенные ряды сходятся во всей плоскости комплексного переменного z (за исключением, быть может, $z=0$) и допускают почленное дифференцирование.

Действительно, ряд для $J_\nu(z)$ сходится абсолютно и равномерно в любой ограниченной области изменения индекса ν и в любой замкнутой области изменения z (если $\operatorname{Re}\nu<0$, то при $z=0$ функция имеет особенность типа $z^{\operatorname{Re}\nu}$, и поэтому начало координат не включается в область). Справедливость этого утверждения следует из того, что при $|\nu|\leqslant N$ и $|z|<d$ модуль отношения последующего члена ряда к предыдущему меньше единицы

$$\left|\frac{-z^2/4}{m(\nu+m)}\right|\leqslant\frac{d^2/4}{m(m-N)}<1,$$

если m больше, чем положительный корень уравнения $m^2-mN-d^2/4=0$, который не зависит от ν и z.

Признак Вейерштрасса доказывает указанное выше свойство ряда. Следовательно, функция Бесселя $J_\nu(z)$ является аналитической функцией для всех значений ν в окрестности любого значения z, кроме, быть может, $z=0$. Отсюда, в частности, следует заключение о возможности почленного интегрирования и дифференцирования полученных рядов.

Очевидно, что при нецелом индексе функции $J_\nu(z)$, $J_{-\nu}(z)$ являются линейно независимыми. Если $\nu=n$ — целое число, то $\Gamma(n)=(n-1)!$ и функцию $J_n(z)$ можно записать в следующем виде:

$$J_n(z)=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m+n}}{2^{2m+n}m!\,(n+m)!}. \tag{1.9}$$

Покажем, что в этом случае между функциями $J_n(z)$ и $J_{-n}(z)$ существует следующая зависимость:

$$J_{-n}(z)=(-1)^n J_n(z). \tag{1.10}$$

В самом деле, если k — целое положительное число или нуль, то, как отмечено в приложении (стр. 279), $\Gamma(-k)=\infty$. Поэтому при целом и положительном $\nu=n$ каждый из первых n членов ряда (1.8) обращается в

нуль; переписав (1.8), начиная с $(n+1)$-го члена, получим

$$J_{-n}(z) = \frac{(-1)^n (z/2)^{-n+2n}}{n!\,\Gamma(-n+n+1)} + \frac{(-1)^{n+1} (z/2)^{-n+2n+2}}{(n+1)!\,\Gamma(-n+n+2)} + \ldots =$$
$$= (-1)^n \left[\frac{(z/2)^n}{0!\,n!} - \frac{(z/2)^{n+2}}{1!\,(n+1)!} + \frac{(z/2)^{n+4}}{2!\,(n+2)!} - \ldots\right] =$$
$$= (-1)^n J_n(z). \qquad (1.11)$$

§ 2. Цилиндрические функции второго рода (функции Неймана)

В § 1 было показано, что при нецелом индексе общее решение уравнения Бесселя можно записать в виде

$$u = B_1 J_\nu(z) + B_2 J_{-\nu}(z).$$

Очевидно, что в этом случае решением будет также

$$u = B_3 J_\nu(z) + B_4 Z_\nu(z),$$

где

$$Z_\nu(z) = C_1 J_\nu(z) + C_2 J_{-\nu}(z).$$

Здесь B_1, B_2, B_3, B_4, C_1, C_2 не зависят от аргумента z; $C_2 \neq 0$.

Если положить $C_1 = \operatorname{ctg} \nu\pi$, $C_2 = -\operatorname{cosec} \nu\pi$, то получим функцию, которая была введена Вебером и обозначается $Y_\nu(z)$:

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)}{\sin\nu\pi}. \qquad (2.1)$$

В литературе она часто называется *функцией Неймана* и иногда обозначается через $N_\nu(z)$. Функция $Y_\nu(z)$ называется также *бесселевой* или *цилиндрической функцией второго рода* индекса ν от аргумента z.

При целом значении $\nu = n$ правая часть (2.1) является неопределенностью типа $\frac{0}{0}$. Для нахождения $Y_n(z)$ раскроем неопределенность по правилу Лопиталя и определим

$$Y_n(z) = \lim_{\nu \to n} \frac{\frac{\partial}{\partial \nu}\left[J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)\right]}{\frac{\partial}{\partial \nu}\sin\nu\pi}. \qquad (2.2)$$

В результате получается формула

$$Y_n(z)=\frac{2}{\pi}J_n(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(n-m-1)!}{m!}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n+2m}-$$

$$-\frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{n+2m}}{m!\,(m+n)!}\left\{\sum_{k=1}^{n+m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}\right\}, \quad (2.3)$$

где C — постоянная Эйлера; ее приближенное значение равно 0,5772157.

Функция Неймана $Y_\nu(z)$ и функция $J_\nu(z)$ образуют фундаментальную систему решений уравнения Бесселя при любом, в том числе и целом, индексе.

Остановимся на выводе формулы (2.3). Достаточно получить ее для частного случая $n=0$ (после этого с помощью рекуррентных формул, рассмотренных далее, в § 6, можно получить результат для любого n).

Из (2.2) имеем

$$Y_0(z)=\lim_{\nu\to 0}\frac{\frac{\partial}{\partial\nu}\left[J_\nu(z)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(z)\right]}{\frac{\partial}{\partial\nu}\sin\nu\pi}=\frac{2}{\pi}\left[\frac{\partial J_\nu(z)}{\partial\nu}\right]_{\nu=0};$$

дифференцируя (1.7) по ν почленно и используя формулы (9), (11), получим

$$Y_0(z)=\frac{2}{\pi}J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2}+C\right)-$$

$$-\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k!)^2}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{k}\right]. \quad (2.4)$$

§ 3. Цилиндрические функции третьего рода (функции Ганкеля)

Любая линейная комбинация решений, полученных в §§ 1, 2, также является интегралом уравнения Бесселя. Рассмотрим функции

$$H_\nu^{(1)}(z)=J_\nu(z)+iY_\nu(z), \qquad H_\nu^{(2)}(z)=J_\nu(z)-iY_\nu(z), \quad (3.1)$$

которые называются *цилиндрическими функциями третьего рода*. Их называют также *функциями Ганкеля* соответственно первого и второго рода.

Как видно из (3.1), между функциями Ганкеля, Бесселя и Неймана имеют место зависимости, аналогичные связи между экспоненциальной функцией мнимого аргумента, косинусом и синусом.

Если в задаче об интегрировании волнового уравнения функция Бесселя действительного аргумента является образом стоячей волны, то функции Ганкеля позволяют дать образ распространяющейся волны. Поэтому очевидно, какую важную роль играют функции Ганкеля в приложениях, особенно при изучении волновых процессов в неограниченных областях.

§ 4. Цилиндрические функции чисто мнимого аргумента

В этом параграфе рассматриваются бесселевы функции мнимого аргумента $z = ix$. Если в (1.1) произвести замену $z = ix$, то получим уравнение

$$x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + x \frac{du}{dx} - (x^2 + \nu^2) u = 0. \tag{4.1}$$

Одним из решений уравнения (4.1) будет бесселева функция мнимого аргумента $J_\nu(ix)$, определяемая выражением (1.7), если в нем произвести замену z на ix. Функция $J_n(ix)$ при четном n является вещественной, а при нечетном принимает мнимые значения. Для того чтобы избавиться от этого неудобства, обычно вводят в рассмотрение *модифицированную функцию Бесселя*

$$I_\nu(x) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ix), \tag{4.2}$$

вещественную при любом ν. Разложение функции $I_\nu(x)$ в степенной ряд имеет следующий вид:

$$I_\nu(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2m+\nu}}{m!\,\Gamma(\nu + m + 1)}. \tag{4.3}$$

В качестве второго интеграла уравнения (4.1) обычно принимают функцию

$$K_\nu(x) = \frac{1}{2} \pi i e^{\nu\pi i/2} H_\nu^{(1)}(ix); \tag{4.4}$$

она является вещественной при любом вещественном значении индекса.

Эта функция называется *функцией Макдональда*; при целом $\nu = n$ разложение этой функции в степенной ряд имеет вид

$$K_n(x) = (-1)^{n+1} I_n(x) \ln \frac{x}{2} + \\ + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{n-1} (-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{-n+2m} \frac{(n-m-1)!}{m!} + \\ + (-1)^{n+1} \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{n+2m}}{m!\,(n+m)!} \left[2C - \sum_{k=1}^{m+n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k}\right], \quad (4.5)$$

где C — по-прежнему постоянная Эйлера. Эту формулу можно легко получить, если в (4.4) внести $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$ с помощью первой из формул (3.1), а затем произвести замену аргумента z на ix в формулах (1.9) и (2.3) и выразить $J_n(ix)$ через $I_n(x)$ с помощью (4.2).

Заметим, что приведенные выше формулы для модифицированных функций можно применить, если x заменить комплексным аргументом z; однако при этом модифицированная функция $I_\nu(z)$ определяется следующим образом:

$$I_\nu(z) = e^{-\nu\pi i/2} J_\nu(ze^{\pi i/2}), \qquad -\pi < \arg z \leqslant \frac{\pi}{2},$$

$$I_\nu(z) = e^{3\nu\pi i/2} J_\nu(ze^{-3\pi i/2}), \qquad \frac{\pi}{2} < \arg z \leqslant \pi.$$

При больших значениях аргумента x функции $I_n(x)$ и $K_n(x)$ ведут себя подобно экспоненциальной функции соответственно вещественного положительного аргумента и вещественного отрицательного аргумента. Поэтому иногда табулируют функции $e^x K_n(x)$ и $e^{-x} I_n(x)$.

§ 5. Цилиндрические функции комплексного аргумента

Если в уравнении (1.1) положить $\nu = 0$ и $z = x\sqrt{-i}$, то оно примет вид

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} - iu = 0. \quad (5.1)$$

Одним из двух решений этого уравнения является функция комплексного аргумента $I_0(x\sqrt{i})$, разложение

которой в степенной ряд состоит из чередующихся вещественных и мнимых членов.

Вещественная и мнимая части этого выражения обозначаются соответственно через $\operatorname{ber} x$ и $\operatorname{bei} x$ и называются обычно *функциями Томсона.*

Заменив в (4.3) аргумент x на $x\sqrt{i}$ и положив $\nu = 0$, получим

$$I_0(x\sqrt{i}) = \operatorname{ber} x + i \operatorname{bei} x, \tag{5.2}$$

где

$$\operatorname{ber} x = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (x/2)^{4m}}{(2m!)^2}, \tag{5.3}$$

$$\operatorname{bei} x = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1} (x/2)^{4m-2}}{[(2m-1)!]^2}. \tag{5.4}$$

Аналогично функция

$$I_0(x\sqrt{-i}) = \operatorname{ber} x - i \operatorname{bei} x \tag{5.5}$$

является одним из решений уравнения

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{du}{dx} + iu = 0. \tag{5.6}$$

Сравнивая (4.3) и (1.9), получим

$$I_0(x\sqrt{\pm i}) = J_0(x\sqrt{\mp i}).$$

Таким образом, функции $J_0(x\sqrt{-i})$ и $J_0(x\sqrt{i})$ являются соответственно решениями уравнений (5.1) и (5.6).

Введем для сокращения записи обозначения

$$u_0(x) = \operatorname{ber} x, \qquad v_0(x) = -\operatorname{bei} x,$$

которые используются во многих работах.

В качестве второго решения уравнения (5.6) можно принять функцию комплексного аргумента

$$H_0^{(1)}(x\sqrt{i}) = f_0(x) + ig_0(x), \tag{5.7}$$

где на основании (1.9), (2.4) и (3.1)

$$f_0(x) = \frac{u_0(x)}{2} - \frac{2}{\pi}\left[R_1(x) + v_0(x)\ln\frac{\gamma x}{2}\right], \tag{5.8}$$

$$g_0(x) = \frac{v_0(x)}{2} + \frac{2}{\pi}\left[R_2(x) + u_0(x)\ln\frac{\gamma x}{2}\right], \tag{5.9}$$

причем

$$R_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[(2k+1)!]^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+2}\sum_{m=1}^{2k+1}\frac{1}{m},$$

$$R_2(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k[(2k+1)!]^{-2}\left(\frac{x}{2}\right)^{4k+4}\sum_{m=1}^{2k+2}\frac{1}{m},$$

$$\gamma = \exp C.$$

В качестве второго решения уравнения (5.1) примем функцию

$$H_0^{(2)}(x\sqrt{-i}) = f_0(x) - ig_0(x). \tag{5.10}$$

Решениями более общего уравнения

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}\right)u \pm iu = 0$$

будут соответственно функции комплексного аргумента

$$J_\nu(x\sqrt{\pm i}) = u_\nu(x) \pm iv_\nu(x), \tag{5.11}$$

$$H_\nu^{(1,2)}(x\sqrt{\pm i}) = f_\nu(x) \pm ig_\nu(x). \tag{5.12}$$

При целом индексе разложения функций u_n, v_n, f_n, g_n по-прежнему могут быть получены при помощи выражений (1.9), (2.3) и (3.1), если в них заменить z на $x\sqrt{\pm i}$ и разделить затем вещественную и мнимую части.

В различных задачах физики и механики и, в частности, в рассмотренных во второй части задачах о круглых пластинках, сжатых или растянутых осевыми силами, встречаются функции аргумента $\rho e^{i\varphi} = a + bi$.

Введем обозначения

$$J_\nu(\rho e^{\pm i\varphi}) = \tilde{u}_\nu(\rho) \pm i\tilde{v}_\nu(\rho), \tag{5.13}$$

$$H_\nu^{(1,2)}(\rho e^{\pm i\varphi}) = \tilde{f}_\nu(\rho) \pm i\tilde{g}_\nu(\rho), \tag{5.14}$$

где φ — постоянная, а $\tilde{u}_\nu$, $\tilde{v}_\nu$, $\tilde{f}_\nu$, $\tilde{g}_\nu$ определяются попрежнему при помощи формул (1.9), (2.4), (3.1), если в них вместо z подставить $\rho e^{\pm i\varphi}$ и разделить затем действительную и мнимую части; некоторые формулы, относящиеся к этим функциям, приводятся в § 6.

Заметим, что при $\rho \to 0$

$$\tilde{g}_0(\rho) \sim \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\rho}{2} + C\right), \tag{5.15}$$

$$\tilde{f}_0(\rho) \sim \frac{1}{2\pi}\rho^2 \ln\rho \sin 2\varphi + 1 - \frac{2\varphi}{\pi}. \tag{5.16}$$

При $\varphi = \pi/4$ выражения (5.13), (5.14) переходят в (5.11), (5.12).

Представляют практический интерес также цилиндрические функции комплексного аргумента, у которого мнимая часть мала по сравнению с вещественной, т. е. случай, когда $|\operatorname{tg}\varphi| \ll 1$. Этот случай, часто встречающийся в задачах теории колебаний и акустики, будет вкратце рассмотрен в § 6.

§ 6. Формулы дифференцирования, рекуррентные формулы

Разделив (1.7) на z^ν, находим

$$\frac{J_\nu(z)}{z^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)};$$

продифференцировав это равенство по аргументу z, получим соотношение

$$\frac{d}{dz}\frac{J_\nu(z)}{z^\nu} = \frac{1}{2^\nu}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (z/2)^{2m-1}}{(m-1)!\,\Gamma(\nu+m+1)} = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^\nu},$$

которое можно переписать в следующем виде:

$$\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\frac{J_\nu(z)}{z^\nu} = -\frac{J_{\nu+1}(z)}{z^{\nu+1}}. \tag{6.1}$$

Аналогичным образом получается формула

$$\frac{d}{z\,dz}[z^\nu J_\nu(z)] = z^\nu J_{\nu-1}(z). \tag{6.2}$$

Выполняя дифференцирование в левой части формул (6.1) и (6.2), после упрощений находим

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) = -J_{\nu+1}(z) + \frac{\nu J_\nu(z)}{z}, \tag{6.3}$$

$$\frac{d}{dz} J_\nu(z) = J_{\nu-1}(z) - \frac{\nu J_\nu(z)}{z}, \tag{6.4}$$

откуда получаем следующие рекуррентные формулы:

$$J_{\nu-1}(z) + J_{\nu+1}(z) = \frac{2\nu J_\nu(z)}{z}, \tag{6.5}$$

$$J_{\nu-1}(z) - J_{\nu+1}(z) = 2\frac{d}{dz} J_\nu(z). \tag{6.6}$$

Во всех этих формулах можно заменить $J_\nu(z)$ на любую из функций: $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$. Из формул (6.1) и (6.2) можно, повторно выполнив дифференцирование, получить

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^\nu J_\nu(z)] = z^{\nu-m} J_{\nu-m}(z), \tag{6.7}$$

$$\left(\frac{d}{z\,dz}\right)^m [z^{-\nu} J_\nu(z)] = (-1)^m z^{-\nu-m} J_{\nu+m}(z). \tag{6.8}$$

Для модифицированных цилиндрических функций имеем следующие формулы дифференцирования, которые получаются в результате замены аргумента z на ix и последующего выражения функций $J_\nu(z)$ и $H_\nu^{(1)}(z)$ через функции $I_\nu(x)$ и $K_\nu(x)$:

$$\frac{d}{dx} I_\nu(x) = \frac{1}{2}[I_{\nu-1}(x) + I_{\nu+1}(x)], \tag{6.9}$$

$$\frac{d}{dx} K_\nu(x) = -\frac{1}{2}[K_{\nu-1}(x) + K_{\nu+1}(x)]. \tag{6.10}$$

Соответствующие рекуррентные формулы имеют вид

$$I_{\nu-1}(x) - I_{\nu+1}(x) = \frac{2\nu}{x} I_\nu(x), \tag{6.11}$$

$$K_{\nu-1}(x) - K_{\nu+1}(x) = -\frac{2\nu}{x} K_\nu(x). \tag{6.12}$$

При комплексном аргументе $z = x\sqrt{i}$ формулы дифференцирования функций u, v, f, g по модулю x можно получить, заменяя в выражениях (6.3) и (6.4) аргу-

мент z на $x\sqrt{i}$ и разделяя затем вещественную и мнимую части:

$$u'_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_{\nu-1}(x) - v_{\nu-1}(x)] - \frac{\nu}{x}u_\nu(x), \quad (6.13)$$

$$v'_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[u_{\nu-1}(x) + v_{\nu-1}(x)] - \frac{\nu}{x}v_\nu(x), \quad (6.14)$$

$$f'_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{\nu-1}(x) - g_{\nu-1}(x)] - \frac{\nu}{x}f_\nu(x), \quad (6.15)$$

$$g'_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}[f_{\nu-1}(x) + g_{\nu-1}(x)] - \frac{\nu}{x}g_\nu(x). \quad (6.16)$$

Практический интерес представляют следующие формулы, которые получаются из дифференциального уравнения Бесселя заменой аргумента z на $x\sqrt{i}$:

$$\Delta_\nu u_\nu = v_\nu, \quad \Delta_\nu v_\nu = -u_\nu, \quad \Delta_\nu f_\nu = g_\nu, \quad \Delta_\nu g_\nu = -f_\nu, \quad (6.17)$$

где

$$\Delta_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}. \quad (6.18)$$

Для функций комплексного аргумента $z = \rho e^{i\varphi}$ формулы дифференцирования по модулю ρ принимают вид

$$\tilde{u}'_\nu(\rho) = -\frac{\nu}{\rho}\tilde{u}_\nu(\rho) + \tilde{u}_{\nu-1}(\rho)\cos\varphi - \tilde{v}_{\nu-1}(\rho)\sin\varphi, \quad (6.19)$$

$$\tilde{v}'_\nu(\rho) = -\frac{\nu}{\rho}\tilde{v}_\nu(\rho) + \tilde{u}_{\nu-1}(\rho)\sin\varphi + \tilde{v}_{\nu-1}(\rho)\cos\varphi, \quad (6.20)$$

$$\tilde{f}'_\nu(\rho) = -\frac{\nu}{\rho}\tilde{f}_\nu(\rho) + \tilde{f}_{\nu-1}(\rho)\cos\varphi - \tilde{g}_{\nu-1}(\rho)\sin\varphi, \quad (6.21)$$

$$\tilde{g}'_\nu(\rho) = -\frac{\nu}{\rho}\tilde{g}_\nu(\rho) + \tilde{f}_{\nu-1}(\rho)\sin\varphi + \tilde{g}_{\nu-1}(\rho)\cos\varphi. \quad (6.22)$$

При $\nu = 0$

$$\tilde{u}'_0(\rho) = -\tilde{u}_1(\rho)\cos\varphi + \tilde{v}_1(\rho)\sin\varphi, \quad (6.23)$$

$$\tilde{v}'_0(\rho) = -\tilde{u}_1(\rho)\sin\varphi - \tilde{v}_1(\rho)\cos\varphi. \quad (6.24)$$

Приведем еще формулы, аналогичные (6.17), при $\nu = 0$

$$\left.\begin{aligned}\Delta_0\tilde{u}_0 &= -\tilde{u}_0\cos 2\varphi + \tilde{v}_0\sin 2\varphi,\\ \Delta_0\tilde{v}_0 &= -\tilde{u}_0\sin 2\varphi - \tilde{v}_0\cos 2\varphi.\end{aligned}\right\} \quad (6.25)$$

В (6.23)—(6.25) $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ можно заменить соответственно на $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$.

Рассмотрим функции комплексного аргумента $z = x(1 + \varkappa i)$, где $|\varkappa| \ll 1$. Введем следующие обозначения:

$$Z_\nu[x(1+\varkappa i)] = u_\nu^{(1)}(x) + iv_\nu^{(1)}(x), \tag{6.26}$$

где Z_ν — цилиндрическая функция индекса ν.

Если в соответствующих степенных рядах после замены аргумента сохранить только члены, содержащие x в степени не выше первой, то в результате получим следующие приближенные формулы:

$$u_\nu^{(1)}(x) \approx Z_\nu(x), \qquad v_\nu^{(1)}(x) \approx \varkappa x \frac{dZ_\nu(x)}{dx}, \tag{6.27}$$

которые практически пригодны, однако, только при сравнительно малых значениях $|x|$.

§ 7. Цилиндрические функции с полуцелым индексом

Полагая в разложении для $J_\nu(z)$ индекс $\nu = 1/2$ и заменяя гамма-функции их значениями по формуле (15), получим после элементарных упрощений

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z. \tag{7.1}$$

Дифференцируя (7.1), получим

$$J'_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z - \frac{1}{z}\sqrt{\frac{1}{2\pi z}} \sin z. \tag{7.2}$$

Далее воспользуемся формулой (6.4); положив $\nu = 1/2$, легко получить

$$zJ'_{1/2}(z) + \frac{1}{2} J_{1/2}(z) = zJ_{-1/2}(z),$$

после этого находим

$$J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z. \tag{7.3}$$

Используя рекуррентные формулы, приведенные в § 6, можно найти функцию Бесселя при любом индексе

вида $n + 1/2$, где n — целое, и доказать, что при целом положительном n справедливы следующие формулы:

$$\left.\begin{aligned} J_{n+\frac{1}{2}}(z) &= \frac{(-1)^n (2z)^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^n}{(dz^2)^n}\left(\frac{\sin z}{z}\right), \\ J_{-n-\frac{1}{2}}(z) &= \frac{(-1)^n (2z)^{n+1/2}}{\sqrt{\pi}} \frac{d^n}{(dz^2)^n}\left(\frac{\cos z}{z}\right). \end{aligned}\right\} \tag{7.4}$$

Формулы, аналогичные (7.1)—(7.4), можно таким же путем получить для модифицированных функций; в частности,

$$I_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\mathrm{sh}\, z, \qquad K_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, e^{-z}, \tag{7.5}$$

с помощью рекуррентных формул легко получить формулы и при других значениях полуцелого индекса.

§ 8. Некоторые обозначения для функций полуцелого и дробного индекса. Интеграл Эйри

Функции полуцелого индекса часто встречаются в приложениях и, в частности, в задачах математической физики, решаемых в сферических координатах. Метод разделения переменных при этом приводит к решениям, в которые входит в качестве слагаемого произведение цилиндрической функции полуцелого индекса на степенную функцию того же аргумента. Разные авторы в этой связи дали свои наименования различным произведениям этого типа, сводку которых можно найти в [7]; приведем здесь обозначения Зоммерфельда

$$\psi_n(z) = \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{1/2} J_{n+1/2}(z),$$

$$\zeta_n(z) = \left(\frac{1}{2}\pi z\right)^{1/2} [J_{n+1/2}(z) + (-1)^n i J_{-n-1/2}(z)].$$

Во многих работах функции

$$\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, J_{n+1/2}(z), \quad \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, Y_{n+1/2}(z), \quad \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\, H^{(1)}_{n+1/2}(z)$$

называются *сферическими функциями Бесселя* соответственно первого, второго и третьего рода.

Рассмотрим теперь дифференциальное уравнение

$$U''(s) + s^{\alpha} U(s) = 0. \tag{8.1}$$

Решения уравнения (8.1) выражаются [1]) через так называемые *обобщенные функции Эйри* $U_1(s, \alpha)$ и $U_2(s, \alpha)$

$$U = C_1 U_1(s, \alpha) + C_2 U_2(s, \alpha). \tag{8.2}$$

Эти функции и их производные по аргументу s связаны с функциями Бесселя соотношениями:

$$\left.\begin{aligned}
&U_1(s, \alpha) = \\
&\quad = (\alpha+2)^{-1/(\alpha+2)} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) \sqrt{s}\, J_{-1/(\alpha+2)}\left(\frac{2}{\alpha+2} s^{(\alpha+2)/2}\right), \\
&U_2(s, \alpha) = \\
&\quad = (\alpha+2)^{1/(\alpha+2)} \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right) \sqrt{s}\, J_{1/(\alpha+2)}\left(\frac{2}{\alpha+2} s^{(\alpha+2)/2}\right), \\
&U_1'(s, \alpha) = -(\alpha+2)^{-1/(\alpha+2)} \times \\
&\qquad \times \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) s^{(\alpha+1)/2} J_{(\alpha+1)/(\alpha+2)}\left(\frac{2}{\alpha+2} s^{(\alpha+2)/2}\right), \\
&U_2'(s, \alpha) = (\alpha+2)^{1/(\alpha+2)} \times \\
&\qquad \times \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right) s^{(\alpha+1)/2} J_{-(\alpha+1)/(\alpha+2)}\left(\frac{2}{\alpha+2} s^{(\alpha+2)/2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8.3}$$

При $\alpha = 1$ получаем функции, называемые ***функциями Эйри***:

$$\left.\begin{aligned}
U_1(s, 1) &= \frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt[3]{3}} \sqrt{s}\, J_{-1/3}\left(\frac{2}{3} s^{3/2}\right), \\
U_2(s, 1) &= \sqrt[3]{3}\, \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \sqrt{s}\, J_{1/3}\left(\frac{2}{3} s^{3/2}\right), \\
U_1'(s, 1) &= -\frac{\Gamma(2/3)}{\sqrt[3]{3}} s J_{2/3}\left(\frac{2}{3} s^{3/2}\right), \\
U_2'(s, 1) &= \sqrt[3]{3}\, \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) s J_{-2/3}\left(\frac{2}{3} s^{3/2}\right).
\end{aligned}\right\} \tag{8.4}$$

Функции U_1, U_2 получили свое наименование в связи с тем, что они тесно связаны с *интегралом Эйри*

$$\int_0^{\infty} \cos(t^3 \pm xt)\, dt, \tag{8.5}$$

[1]) См также стр. 47.

а именно,

$$\int_0^\infty \cos(t^3+xt)\,dt=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{x}{3}}\left[I_{-1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)-I_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\right]=$$

$$=\frac{\sqrt{x}}{3}K_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right), \quad (8.6)$$

$$\int_0^\infty \cos(t^3-xt)\,dt=$$

$$=\frac{1}{3}\pi\sqrt{\frac{x}{3}}\left[J_{-1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)+J_{1/3}\left(\frac{2x\sqrt{x}}{3\sqrt{3}}\right)\right]. \quad (8.7)$$

Чтобы доказать справедливость этих формул, следует дважды продифференцировать по параметру x интеграл (8.5), заметив при этом, что он удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d^2v}{dx^2}\pm\frac{1}{3}xv=0,$$

которое является частным случаем уравнения (8.1).

Приведем следующие обозначения для интеграла Эйри:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \cos\left(tz+\frac{1}{3}t^3\right)dt=\mathrm{Ai}(z) \quad (8.8)$$

и *присоединенной функции*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\left[\exp\left(-tz-\frac{1}{3}t^3\right)+\sin\left(tz+\frac{1}{3}t^3\right)\right]dt=\mathrm{Bi}(z). \quad (8.9)$$

§ 9. Определитель Вронского

Если $u_1(z)$ и $u_2(z)$ суть линейно независимые решения уравнения Бесселя, то они удовлетворяют соотношению

$$u_1u_2'-u_1'u_2=C_1/z, \quad (9.1)$$

где C_1 — некоторая постоянная.

В самом деле, внося в уравнение Бесселя (1.1) сначала u_1, а затем u_2, умножая первое уравнение на u_2,

а второе — на u_1 и вычитая затем первое из второго, после простых преобразований напишем

$$u_1 \frac{d}{dz}(zu_2') - u_2 \frac{d}{dz}(zu_1') = 0$$

или

$$\frac{d}{dz}[z(u_1u_2' - u_1'u_2)] = 0,$$

откуда сразу получаем (9.1).

Заметим, что левую часть (9.1), представляющую определитель

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{vmatrix}, \tag{9.2}$$

обозначают через $\mathfrak{W}(u_1, u_2)$ и называют *определителем Вронского*, или *вронскианом уравнения Бесселя*.

Значение постоянной C_1 легко определяется, если в формуле (9.1) перейти к пределу при $z \to 0$, воспользовавшись полученными в §§ 1—3 разложениями бесселевых функций.

Положим, что уравнение имеет нецелый индекс ν, и найдем вронскиан

$$\mathfrak{W}(J_\nu(z), J_{-\nu}(z)) = C_1/z. \tag{9.3}$$

Заметим, что если ν нецелое, то при $z \to 0$

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1)}[1 + O(z^2)],$$

$$J_\nu'(z) = \frac{(z/2)^{\nu-1}}{2\Gamma(\nu)}[1 + O(z^2)],$$

где $O(z^2)$ означает величину, отношение которой к z^2 при $z \to 0$ ограничено.

Внося эти выражения в (9.1), получаем

$$J_\nu(z)J_{-\nu}'(z) - J_\nu'(z)J_{-\nu}(z) =$$
$$= \frac{1}{z}\left[\frac{1}{\Gamma(\nu+1)\Gamma(-\nu)} - \frac{1}{\Gamma(\nu)\Gamma(-\nu+1)}\right] + O(z) =$$
$$= \frac{1}{z}\frac{-2}{\Gamma(\nu)\Gamma(1-\nu)} + O(z) = -\frac{2\sin\pi\nu}{\pi z} + O(z); \tag{9.4}$$

при выводе была использована формула (3).

Умножив (9.3) на z и используя (9.4), после перехода к пределу при $z \to 0$ получим

$$C_1 = -\frac{2\sin \pi\nu}{\pi}$$

и, следовательно,

$$J_\nu(z) J'_{-\nu}(z) - J'_\nu(z) J_{-\nu}(z) = (-2\sin \pi\nu)/(\pi z). \quad (9.5)$$

Точно так же, воспользовавшись соотношениями (2.1) между бесселевыми функциями первого и второго рода, можно получить

$$J_\nu(z) Y'_\nu(z) - J'_\nu(z) Y_\nu(z) = 2/(\pi z). \quad (9.6)$$

Для функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$ определитель Вронского равен

$$I_\nu(z) K'_\nu(z) - I'_\nu(z) K_\nu(z) = -1/z, \quad (9.7)$$

а для $J_\nu(z)$, $H^{(1)}_\nu(z)$ и $H^{(1)}_\nu(z)$, $H^{(2)}_\nu(z)$ соответственно имеем

$$J_\nu(z)\frac{dH^{(1)}_\nu(z)}{dz} - H^{(1)}_\nu(z)\frac{dJ_\nu(z)}{dz} = 2\frac{i}{\pi z}, \quad (9.8)$$

$$H^{(1)}_\nu(z)\frac{dH^{(2)}_\nu(z)}{dz} - H^{(2)}_\nu(z)\frac{dH^{(1)}_\nu(z)}{dz} = -\frac{4i}{\pi z}. \quad (9.9)$$

Полагая в (9.8) $z = x\sqrt{i}$ и разделяя вещественную и мнимую части, для функций $u_\nu(x)$, $v_\nu(x)$, $f_\nu(x)$, $g_\nu(x)$ получим

$$u_\nu(x) f'_\nu(x) - v_\nu(x) g'_\nu(x) = u'_\nu(x) f_\nu(x) - v'_\nu(x) g_\nu(x), \quad (9.10)$$

$$v_\nu(x) f'_\nu(x) + u_\nu(x) g'_\nu(x) = u'_\nu(x) g_\nu(x) - v'_\nu(x) f_\nu(x) + 2/(\pi x), \quad (9.11)$$

где штрих обозначает дифференцирование по переменной x.

Во многих задачах оказываются очень удобными также *формулы Бассета*, при получении которых

используются вронскиан и дифференциальное уравнение Бесселя.

$$J_\nu(z)\,Y_\nu''(z) - Y_\nu(z)\,J_\nu''(z) = -\frac{2}{\pi z^2}, \tag{9.12}$$

$$J_\nu'(z)\,Y_\nu''(z) - Y_\nu'(z)\,J_\nu''(z) = \frac{2}{\pi z}\left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right), \tag{9.13}$$

$$J_\nu(z)\,Y_\nu'''(z) - Y_\nu(z)\,J_\nu'''(z) = \frac{2}{\pi z}\left(\frac{\nu^2+2}{z^2} - 1\right), \tag{9.14}$$

$$J_\nu'(z)\,Y_\nu'''(z) - Y_\nu'(z)\,J_\nu'''(z) = \frac{2}{\pi z^2}\left(\frac{3\nu^2}{z^2} - 1\right), \tag{9.15}$$

$$J_\nu''(z)\,Y_\nu'''(z) - Y_\nu''(z)\,J_\nu'''(z) = \frac{2}{\pi z}\left(1 - \frac{2\nu^2+1}{z^2} + \frac{\nu^4-\nu^2}{z^4}\right), \tag{9.16}$$

$$J_\nu(z)\,Y_\nu^{(\mathrm{IV})}(z) - Y_\nu(z)\,J_\nu^{(\mathrm{IV})}(z) = \frac{4}{\pi z^2}\left(1 - \frac{3\nu^2+3}{z^2}\right), \tag{9.17}$$

$$J_\nu'(z)\,Y_\nu^{(\mathrm{IV})}(z) - Y_\nu'(z)\,J_\nu^{(\mathrm{IV})}(z) = -\frac{2}{\pi z}\left(\frac{\nu^4+11\nu^2}{z^4} - \frac{2\nu^2+3}{z^2} + 1\right). \tag{9.18}$$

Формулу, устанавливающую соотношение между цилиндрическими функциями, индексы которых отличаются на единицу, получили Ломмель и Ганкель; она имеет вид

$$J_\nu(z)\,Y_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z)\,Y_\nu(z) = -2/(\pi z). \tag{9.19}$$

Используя определитель Вронского и рекуррентные формулы, можно сразу получить аналогичные соотношения между цилиндрическими функциями, индексы которых отличаются на целое число; мы будем называть их *формулами Ломмеля — Ганкеля*, так, например,

$$J_\nu(z)\,Y_{\nu+2}(z) - J_{\nu+2}(z)\,Y_\nu(z) = -\frac{4(\nu+1)}{\pi z^2}, \tag{9.20}$$

$$J_\nu(z)\,Y_{\nu+3}(z) - J_{\nu+3}(z)\,Y_\nu(z) = -\frac{8(\nu+1)(\nu+2)}{\pi z^3} + \frac{2}{\pi z}, \tag{9.21}$$

$$J_\nu(z)\,Y_{\nu+4}(z) - J_{\nu+4}(z)\,Y_\nu(z) = -\frac{16(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{\pi z^4} + \frac{8(\nu+2)}{\pi z^2}. \tag{9.22}$$

Если обозначить

$$J_\nu(z)\,Y_{\nu+m}(z) - J_{\nu+m}(z)\,Y_\nu(z) = B(\nu, m; z), \tag{9.23}$$

$$m = 1, 2, 3, \ldots,$$

то можно сразу установить рекуррентную формулу

$$B(\nu, m+1; z) = \frac{2(\nu+m)}{z} B(\nu, m; z) - B(\nu, m-1; z). \quad (9.24)$$

С помощью (9.24) легко установить, что правые части формул Ломмеля — Ганкеля представляют полиномы относительно $1/z$, которые можно представить в виде

$$B(\nu, m; z) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{-\left(\frac{z}{2}\right)^{-m}\prod_{k=1}^{m-1}(\nu+k)+(m-2)\left(\frac{z}{2}\right)^{-m+2}\prod_{k=2}^{m-2}(\nu+k)+\ldots\right\}-$$

$$-\frac{2}{\pi z}\sin\frac{m\pi}{2} =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{i=1}^{r}(-1)^i\prod_{k=i}^{m-i}(\nu+k)\left(\frac{z}{2}\right)^{-m+(i-1)2} C_{m-i}^{i-1} - \frac{2}{\pi z}\sin\frac{m\pi}{2}, \quad (9.25)$$

где

$$C_{m-i}^{i-1} = \frac{(m-i)!}{(m-2i+1)!\,(i-1)!},$$

$$r = \begin{cases} (m-1)/2, & \text{если } m \text{ нечетное,} \\ m/2, & \text{если } m \text{ четное.} \end{cases}$$

Аналогичные формулы можно получить для модифицированных функций

$$I_\nu(x) K_{\nu+1}(x) + I_{\nu+1}(x) K_\nu(x) = \frac{1}{x}, \quad (9.26)$$

$$I_\nu(x) K_{\nu+2}(x) - I_{\nu+2}(x) K_\nu(x) = \frac{2(\nu+1)}{x^2}, \quad (9.27)$$

$$I_\nu(x) K_{\nu+3}(x) + I_{\nu+3}(x) K_\nu(x) = \frac{4(\nu+1)(\nu+2)}{x^3} + \frac{1}{x}, \quad (9.28)$$

$$I_\nu(x) K_{\nu+4}(x) - I_{\nu+4}(x) K_\nu(x) =$$

$$= \frac{8(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)}{x^4} + \frac{4(\nu+2)}{x^2}. \quad (9.29)$$

Представляют интерес *функциональные уравнения типа определителя Вронского, в которые входят функции с различными индексами*; они также легко получаются

с помощью рекуррентных формул. Так, например,

$$J'_\nu(z)\,Y_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z)\,Y'_\nu(z) = -\frac{2\nu}{\pi z^2}, \tag{9.30}$$

$$J''_\nu(z)\,Y_{\nu+1}(z) - J_{\nu+1}(z)\,Y''_\nu(z) = \frac{2\nu(1-\nu)}{\pi z^3} + \frac{2}{\pi z}, \tag{9.31}$$

$$J'_\nu(z)\,Y_{\nu+2}(z) - J_{\nu+2}(z)\,Y'_\nu(z) = -\frac{4\nu(\nu+1)}{\pi z^3} + \frac{2}{\pi z}, \tag{9.32}$$

$$J''_\nu(z)\,Y_{\nu+2}(z) - J_{\nu+2}(z)\,Y''_\nu(z) = \frac{4\nu(1-\nu^2)}{\pi z^4} + \frac{4\nu+2}{\pi z^2}. \tag{9.33}$$

Для модифицированных функций легко получаются аналогичные зависимости, например

$$I'_\nu(x)\,K_{\nu+1}(x) - I_{\nu+1}(x)\,K'_\nu(x) = \nu/x^2. \tag{9.34}$$

§ 10. Интеграл Бесселя и разложения Якоби

Рассмотрим разложение функций $\exp(zt/2)$ и $\exp(-zt^{-1}/2)$ в степенные ряды. Так как

$$\exp z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!},$$

то произведение этих разложений дает

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s z^{r+s} t^{r-s}}{r!\,s!\,2^{r+s}}. \tag{10.1}$$

Положив $s = m$, $r = m + n$ и вспомнив, что при $n < -m$ $\frac{1}{\Gamma(m+n+1)} = 0$, перепишем (10.1) в следующем виде:

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-m}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{n+2m} t^n}{\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(m+1)\,2^{n+2m}} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{n+2m} t^n}{\Gamma(m+n+1)\,\Gamma(m+1)\,2^{n+2m}},$$

и вследствие (1.7) сразу получим

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t - \frac{1}{t}\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\,t^n. \tag{10.2}$$

Воспользовавшись соотношением (1.10), представим (10.2) в виде

$$\exp\left[\frac{z}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\right]=J_0(z)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[t^n+(-1)^n t^{-n}\right]J_n(z).$$

Положив здесь $t=\pm\exp i\theta$, получим

$$\exp(\pm iz\sin\theta)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos 2n\theta\pm$$

$$\pm 2i\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta. \quad (10.3)$$

Отсюда следует

$$\cos(z\sin\theta)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}J_{2n}(z)\cos 2n\theta, \quad (10.4)$$

$$\sin(z\sin\theta)=2\sum_{n=0}^{\infty}J_{2n+1}(z)\sin(2n+1)\theta. \quad (10.5)$$

Если заменить в (10.4) и (10.5) θ на $\pi/2-\eta$, получим

$$\cos(z\cos\eta)=J_0(z)+2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n J_{2n}(z)\cos 2n\eta, \quad (10.6)$$

$$\sin(z\cos\eta)=2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n J_{2n+1}(z)\cos(2n+1)\eta. \quad (10.7)$$

Эти *разложения* были получены *Якоби* и носят его имя. Они дают представление плоской волны через цилиндрические волны.

Заменяя в (10.4) θ на φ, умножив левую и правую части на $\cos n\varphi$ и проинтегрировав затем по φ от 0 до π, получим

$$\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi)\cos n\varphi\,d\varphi=\begin{cases}\pi J_n(z) & \text{при } n \text{ четном},\\ 0 & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases} \quad (10.8)$$

Аналогично из (10.5) получим

$$\int_0^{\pi}\sin(z\sin\varphi)\sin n\varphi\,d\varphi=\begin{cases}0 & \text{при } n \text{ четном},\\ \pi J_n(z) & \text{при } n \text{ нечетном}.\end{cases} \quad (10.9)$$

Складывая (10.8) и (10.9), находим, что при любом целом n

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\varphi - n\varphi)\,d\varphi = J_n(z). \tag{10.10}$$

Интеграл, стоящий в левой части (10.10), называется *интегралом Бесселя*; Бессель принимал это равенство (точнее, почти такое) в качестве определения функции $J_n(z)$. Заметим, что при нецелом индексе интеграл уже не дает функцию Бесселя и его обозначают

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\nu\theta - z\sin\theta)\,d\theta = \mathrm{J}_\nu(z), \tag{10.11}$$

где $\mathrm{J}_\nu(z)$ — функция, называемая обычно *функцией Ангера*; вопрос о свойствах этой функции разбирается в § 16.

Интеграл (10.10) при $n = 0$ называется *интегралом Парсеваля*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta)\,d\theta = J_0(z). \tag{10.12}$$

Выводы формул, которые излагались выше, в какой-то мере иллюстрируют характер приложений интеграла Бесселя Он появляется естественным образом в тех случаях, когда от решения уравнения Гельмгольца в декартовых координатах необходимо перейти к решению в полярных координатах, ниже будет показано, что интегралы типа интеграла Бесселя получаются и при переходе от других координатных систем к полярной системе В приложениях интеграл Бесселя появляется и при переходе от полярных координат к декартовым. Во второй части приводится одна из типичных задач, связанных с применением интеграла Бесселя (стр. 266).

Рассмотрим вновь интеграл Парсеваля. Возьмем частное решение уравнения Гельмгольца

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + \lambda^2 u = 0$$

в виде $u = \cos\lambda\xi = \cos(\lambda R\cos\theta)$; здесь R, θ — полярные координаты точки с декартовыми координатами ξ, η

Образуем суперпозицию таких решений при $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$, считая, что ось ξ вращается вокруг начала координат

$$u^*(R) = \int_0^{2\pi}\cos(\lambda R\cos\theta)\,d\theta,$$

Очевидно, что $u^*(R)$ является решением осесимметричной задачи для уравнения Гельмгольца, не имеющим особенности в начале координат, и, следовательно, $u^*(R) = BJ_0(\lambda R)$. Положим $R = 0$; так как $J_0(0) = 1$, то $B = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ и

$$J_0(\lambda R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\lambda R \cos\theta)\, d\theta. \tag{10.13}$$

В случае, если $u = \sin \lambda\xi$, то

$$u^*(R) = \int_0^{2\pi} \sin(\lambda R \cos\theta)\, d\theta = BJ_0(\lambda R);$$

полагая здесь $R = 0$, получим $B = 0$.

Нетрудно получить также измененный интеграл Парсеваля, который лишь несколько отличается от интеграла (10.12).

Положим $u = \cos\alpha\xi \cos\beta\eta$, где $\alpha^2 + \beta^2 = \lambda^2$; тогда

$$BJ_0(\lambda R) = \int_0^{2\pi} \cos(\alpha R \cos\theta) \cos(\beta R \sin\theta)\, d\theta.$$

Очевидно $B = 2\pi$ и, следовательно,

$$J_0(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}\, R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\alpha R \cos\theta) \cos(\beta R \sin\theta)\, d\theta. \tag{10.14}$$

Если заменить функцию $u(\xi, \eta)$ любой функцией, являющейся решением уравнения Гельмгольца и не имеющей особых точек в рассматриваемой конечной области, то при вращении она также даст с точностью до постоянного множителя функцию Бесселя нулевого индекса.

Так, если воспользоваться эллиптической системой координат и положить (см. [37]) $u(\xi, \eta) = \mathrm{ce}_0(\xi)\mathrm{Ce}_0(\eta)$, то, очевидно,

$$BJ_0(R) = \int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_0(R\cos\theta)\, \mathrm{Ce}_0(R\sin\theta)\, d\theta. \tag{10.15}$$

Можно осуществлять дальнейшие обобщения, связанные с тем, что у функций ce_0 и Ce_0 можно переставить аргументы и, кроме того, ввести другие, отличающиеся от нуля индексы.

Таким образом, интеграл Парсеваля (10.13) можно рассматривать как суперпозицию плоских волн, а интегралы (10.14), (10.15) — как суперпозицию волн, имеющих более сложную структуру.

Следует заметить, что с помощью интеграла Парсеваля можно разложить функцию Бесселя индекса нуль в степенной ряд; для этого достаточно представить в (10.13) косинус в виде степенного ряда, обозначить $\lambda R = r$ и поменять порядок интегрирования и суммирования.

Интеграл Парсеваля легко обобщается на случай, когда $\lambda = i\gamma$ — чисто мнимое число.

Взяв частное решение уравнения

$$\Delta^2 u - \gamma^2 u = 0 \tag{10.16}$$

в виде

$$u_1(\gamma r) = A \operatorname{ch} \alpha x \operatorname{ch} \beta y = A \operatorname{ch} [\alpha r \cos \varphi] \operatorname{ch} (\beta r \sin \varphi),$$

где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $y/x = \operatorname{tg} \varphi$, $\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2$, α, β — параметры, принимающие действительные значения; получим сразу

$$I_0(\gamma r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \operatorname{ch} (\alpha r \cos \varphi) \operatorname{ch} (\beta r \sin \varphi)\, d\varphi \tag{10.17}$$

Теперь перейдем от интеграла Парсеваля к интегралу Бесселя; для дальнейшего существенным является требование, чтобы индекс n был целым числом.

Рассмотрим интеграл

$$\int_0^{2\pi} A \cos n(\theta - \varphi) \cos (\alpha r \cos \varphi) \cos (\beta r \sin \varphi)\, d\varphi =$$

$$= A \cos n\theta \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos (\alpha r \cos \varphi) \cos (\beta r \sin \varphi)\, d\varphi = u_n(\gamma r) \cos n\theta.$$

Функция $u_n(\gamma r) \cos n\theta$ удовлетворяет уравнению $\nabla^2 u + \gamma^2 u = 0$, и, следовательно, с точностью до постоянного множителя, $u_n(\gamma r)$ является функцией Бесселя индекса n и аргумента γr. Таким образом, при подходящем выборе постоянной A выполняется равенство

$$A \int_0^{2\pi} \cos n\varphi \cos (\alpha r \cos \varphi) \cos (\beta r \sin \varphi)\, d\varphi = J_n(\gamma r).$$

Постоянная A определяется в результате несложных выкладок и равна

$$A = 1/(2\pi \cos n\delta); \qquad \delta = \arcsin (\alpha/\gamma).$$

Здесь уместно упомянуть о другой суперпозиции плоских волн, с помощью которой можно представить также и функции Бесселя нецелого индекса; она отличается тем, что ось, по которой направлено движение плоской волны, вращается вокруг вершины кругового конуса, оставаясь все время на его поверхности; этот результат изложен в монографии [50].

Иной эвристический прием принадлежит Вейриху [84], который рассматривал цилиндрическую волну и ее математический образ — соответствующую бесселеву функцию — как суперпозицию симметричных относительно центра сферических волн, если центр перемещается вдоль прямой. Способ Вейриха допускает такие очевидные обобщения, как, например, рассмотрение задачи о движении диполя или источника с обильностью, изменяющейся по синусоидальному закону.

§ 11. Теоремы сложения

Теоремой сложения для функции Бесселя нулевого индекса называется равенство

$$J_0\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right)=2\sum_{m=0}^{\infty}{}'J_m(x)\,J_m(y)\cos m\varphi, \quad (11.1)$$

где символ $\sum_{m=0}^{\infty}{}'$ отличается от $\sum_{m=0}^{\infty}$ тем, что при $m=0$ вводится дополнительный множитель, равный 1/2.

Равенство (11.1) носит название *теоремы сложения Неймана*. Дадим ему геометрическую интерпретацию, полагая, что x, y, φ вещественны. Вершины O_1, O, C треугольника O_1OC (рис. 1) назовем соответственно первым и вторым полюсами и точкой наблюдения, длины сторон O_1O, OC, O_1C обозначим соответственно x, y, z; углы при вершинах O_1 и O обозначим соответственно ψ и φ; очевидно, $z=\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}$.

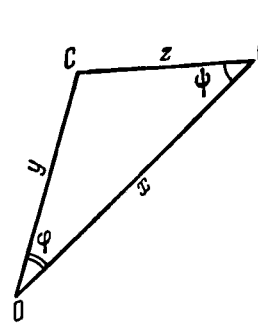

Рис. 1.

Левая часть (11.1) представляет стоячую цилиндрическую волну с полюсом O_1, каждое из слагаемых в правой части описывает цилиндрическую волну со вторым полюсом. Таким образом, формула (11.1) дает возможность решить вопрос о разложении цилиндрической волны на цилиндрические волны, имеющие другой полюс.

Доказательство этой теоремы можно легко выполнить с помощью интеграла Парсеваля. Приведем

доказательство более общего равенства

$$\cos n\psi J_n\left(\sqrt{x^2+y^2-2xy\cos\varphi}\right)=$$

$$=2\sum_{m=0}^{\infty}{}' J_{m+n}(x)\,J_m(y)\cos m\varphi, \quad (11.2)$$

где n — целое. Это равенство можно, очевидно, интерпретировать точно так же, как (11.1).

Представим функцию Бесселя с помощью интеграла Бесселя

$$J_n(z)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta-n\theta)\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{i(z\sin\theta-n\theta)}\,d\theta=\frac{e^{-n\alpha i}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{i[z\sin(\theta+\alpha)-n\theta]}\,d\theta.$$

Эта формула верна при произвольных значениях α. Выберем α равным $\angle CO_1O$, тогда $z\sin\psi=y\sin\varphi$, $z\cos\psi=x-y\cos\varphi$ и, следовательно, $z\sin(\theta+\psi)=$ $=x\sin\theta+y\sin(\varphi-\theta)$.

Теперь воспользуемся формулами Якоби (10.6), (10.7), выполним элементарные преобразования и вновь воспользуемся интегралом Бесселя, получив при этом

$$J_n(z)=\frac{1}{2\pi}e^{-\psi ni}\int_{-\pi}^{\pi}e^{ix\sin\theta}e^{iy\sin(\varphi-\theta)}e^{-in\theta}\,d\theta=$$

$$=\frac{e^{-in\psi}}{2\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi}J_m(y)\,e^{im(\varphi-\theta)}e^{-in\theta}e^{ix\sin\theta}\,d\theta=$$

$$=e^{-in\psi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_m(y)\,J_{m+n}(x)\,e^{im\varphi},$$

отсюда сразу следует (11.2).

Заметим, что положенный в основу вывода интеграл Бесселя переходит при нецелом индексе в интегральное представление функции Ангера (см. § 16), и, следовательно, при нецелом индексе проведенный выше вывод дает формулу сложения для функции Ангера, в правую

часть которой взамен функций $J_{m+n}(x)$ войдут функции Ангера $J_{m+\nu}(x)$.

Теоремы сложения для функций Бесселя с произвольным индексом выводятся по аналогичной схеме, но при этом взамен интеграла Бесселя используются другие интегральные представления (вывод теорем сложения для бесселевых функций произвольного индекса приведен в [7], [4]).

Приведем без вывода теоремы сложения для функций Бесселя, когда индекс ν представляет произвольное число; этот результат, принадлежащий Графу, можно записать в следующем виде:

$$e^{i\nu\psi}J_\nu(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_{\nu+m}(x)\,J_m(y)\,e^{mi\varphi}, \tag{11.3}$$

где $\psi=\operatorname{arcctg}\dfrac{x-y\cos\varphi}{y\sin\varphi}$.

Поменяв в этой формуле знаки у φ и ψ, получим

$$e^{-i\nu\psi}J_\nu(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_{\nu+m}(x)\,J_m(y)\,e^{-mi\varphi}. \tag{11.4}$$

Из формул (11.3), (11.4) следует

$$J_\nu(z)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\nu\psi=\sum_{m=-\infty}^{\infty}J_{m+\nu}(x)\,J_m(y)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi. \tag{11.5}$$

Если в (11.5) поменять знаки у ν и m и вспомнить соотношения, связывающие цилиндрические функции первого, второго и третьего рода, то можно получить

$$Z_\nu(z)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\nu\psi=\sum_{m=-\infty}^{\infty}Z_{\nu+m}(x)\,J_m(y)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi, \tag{11.6}$$

где под $Z_\nu(z)$ — понимается цилиндрическая функция первого, второго или третьего рода.

Если заменить в (11.5), (11.6) z, x, y соответственно на iz, ix, iy, то легко получаются следующие формулы

$$I_\nu(z)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\nu\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty}(-1)^m I_{\nu+m}(x)\,I_m(y)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi, \quad (11.7)$$

$$K_\nu(z)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\nu\psi = \sum_{m=-\infty}^{\infty}K_{\nu+m}(x)\,I_m(y)\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}m\varphi. \quad (11.8)$$

Формулы (11.3)—(11.8) справедливы при условии $|ye^{\pm i\varphi}|<|x|$.

Нетрудно вывести формулы сложения для цилиндрических функций комплексного аргумента. Положив в (11.6) вместо z, x, y соответственно $z\sqrt{i}$, $x\sqrt{i}$, $y\sqrt{i}$, $\nu=0$ и $Z_\nu(z)=H_0^{(1)}(z)$ и разделяя вещественную и мнимую части, получим

$$\operatorname{Re}H_0^{(1)}(z\sqrt{i}) = f_0(z) = \begin{cases} 2\sum\limits_{m=0}^{\infty}{}'\,[f_m(y)\,u_m(x) - g_m(y)\,v_m(x)]\cos m\varphi \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x\leqslant y, \\ 2\sum\limits_{m=0}^{\infty}{}'\,[f_m(x)\,u_m(y) - g_m(x)\,v_m(y)]\cos m\varphi \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x\geqslant y; \end{cases} \quad (11.9)$$

$$\operatorname{Im}H_0^{(1)}(z\sqrt{i}) = g_0(z) = \begin{cases} 2\sum\limits_{m=0}^{\infty}{}'\,[v_m(y)\,f_m(x) + u_m(y)\,g_m(x)]\cos m\varphi \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x\leqslant y, \\ 2\sum\limits_{m=0}^{\infty}{}'\,[v_m(x)\,f_m(y) + u_m(x)\,g_m(y)]\cos m\varphi \\ \qquad\qquad \text{при} \quad x\geqslant y. \end{cases} \quad (11.10)$$

В начале этого параграфа указывалось, что формула (11.1) представляет разложение решения уравнения Гельмгольца в полярных координатах в ряд по решениям того же уравнения, но при другом полюсе Физический смысл формул сложения заключается в перестройке решения в полярных координатах при необходимости изменения положения полюса.

Этот взгляд на формулы сложения хорошо иллюстрируется многочисленными приложениями, в которых рассматривается неосесимметричное решение уравнения Гельмгольца для круговой области (см §§ 1, 3 ч. II).

Для того чтобы последующее изложение имело с физической точки зрения более четкий характер, рассмотрим для примера одно из таких приложений, а именно, задачу о круглой мембране на упругом основании. С учетом сказанного, дадим вывод формул сложения, основанный на использовании разложения сосредоточенной силы в ряд по тригонометрическим функциям и на применении определителя Вронского уравнения Бесселя.

Рассмотрим основную функцию Грина уравнения $\nabla^2 u - u = 0$, которая представляет решение этого уравнения, ограниченное на бесконечности и имеющее в начале координат особенность типа сосредоточенной силы, т. е. удовлетворяющее условию

$$-\int_0^{2\pi} r \frac{\partial u}{\partial r}\, d\varphi \Big|_{r\to 0} \to 1.$$

Очевидно, что указанная функция имеет вид $\frac{1}{2\pi} K_0(r)$.

Теперь перейдем к другой полярной системе и рассмотрим точку наблюдения (R, θ); обозначим расстояние между этой точкой и точкой (r, φ), в которой приложена сила, через

$$z = \sqrt{r^2 + R^2 - 2Rr\cos(\theta - \varphi)}.$$

Представим функцию $K_0(z)$ в виде, более удобном для решения задач, связанных с применением второй координатной системы. Рассмотрим окружность радиуса r с центром в начале второй полярной системы координат; в точке r, φ этой окружности приложена единичная сосредоточенная сила. Разложим силу в тригонометрический ряд

$$q(\theta - \varphi) = \frac{1}{\pi r} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2} + \cos[m(\theta - \varphi)]\right) = \frac{1}{\pi r} \sum_{m=0}^{\infty}{}' \cos[m(\theta - \varphi)].$$

Соответственно представим функцию Грина в виде

$$\frac{1}{2\pi} K_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty}{}' w_m(R) \cos[m(\theta - \varphi)].$$

Очевидно, что функция $w_m(R)$ является решением уравнения Бесселя мнимого аргумента с индексом m; она должна быть аналитической в начале координат и стремиться к нулю на бесконечности. При $R = r$ производная указанной функции должна иметь разрыв непрерывности, при котором

$$\frac{dw_m}{dR}\Big|_{r-0} - \frac{dw_m}{dR}\Big|_{r+0} = \frac{1}{\pi r}. \qquad (11.11)$$

Будем искать решение в виде

$$w_m(R) = \begin{cases} A_m I_m(R), & R \leqslant r; \\ B_m K_m(R), & R \geqslant r; \end{cases}$$

из условия непрерывности функции $w_m(R)$ имеем

$$A_m I_m(r) - B_m K_m(r) = 0.$$

Кроме того, из (11.11) следует

$$A_m I'_m(r) - B_m K'_m(r) = \frac{1}{\pi r}.$$

Решая эту систему и используя для упрощения формулу (9.7), получим

$$A_m = \frac{1}{\pi} K_m(r), \qquad B_m = \frac{1}{\pi} I_m(r),$$

и, следовательно,

$$K_0(z) = \begin{cases} 2 \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' I_m(R) K_m(r) \cos[m(\theta - \varphi)], & R \leqslant r, \\ 2 \sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' I_m(r) K_m(R) \cos[m(\theta - \varphi)], & R \geqslant r. \end{cases} \tag{11.12}$$

Дифференцируя (11.12) по переменной r, можно получить решение задачи о мембране, на которую действует сосредоточенный момент.

В заключение этого параграфа приведем формулу, называемую *теоремой сложения Гегенбауэра*, которую можно получить из (11.1), продифференцировав это равенство n раз по $\cos\varphi$:

$$\frac{J_n(z)}{z^n} = 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{J_{m+n}(x)}{x^n} \frac{J_{m+n}(y)}{y^n} \frac{d^n \cos(m+n)\varphi}{[d(\cos\varphi)]^n}; \tag{11.13}$$

здесь на отношение x/y не накладывается ограничений.

Теорема Гегенбауэра для цилиндрической функции $Z_\nu(z)$ имеет вид

$$\frac{Z_\nu(z)}{z^\nu} = 2^\nu \Gamma(\nu) \sum_{m=0}^{\infty}{}' (\nu + m) \frac{Z_{m+\nu}(x)}{x^\nu} \frac{J_{m+\nu}(y)}{y^\nu} C_m^\nu(\cos\varphi) \tag{11.14}$$

при $|ye^{\pm i\varphi}| < |x|$. Здесь $C_m^\nu(\cos\varphi)$ есть коэффициент при слагаемом, содержащем β^m в разложении $(1 - 2\beta\cos\varphi + \beta^2)^{-\nu}$.

§ 12. Разложение Ломмеля

Разложим функцию $(z+h)^{-\nu/2}J_\nu(\sqrt{z+h})$, являющуюся аналитической функцией аргумента $(z+h)$ при всех его значениях, в ряд по степеням h, воспользовавшись при вычислении производных формулами (6.8). При этом получим

$$(z+h)^{-\nu/2}J_\nu(\sqrt{z+h})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\frac{d^m}{dz^m}\{z^{-\nu/2}J_\nu(\sqrt{z})\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-h/2)^m}{m!}z^{-(\nu+m)/2}J_{\nu+m}(\sqrt{z}). \quad (12.1)$$

Функция $(z+h)^{\nu/2}J_\nu(\sqrt{z+h})$ — аналитическая всюду, за исключением точки $h=-z$; если $|h|<|z|$, то

$$(z+h)^{\nu/2}J_\nu(\sqrt{z+h})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{h^m}{m!}\frac{d^m}{dz^m}\{z^{\nu/2}J_\nu(\sqrt{z})\}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(h/2)^m}{m!}z^{(\nu-m)/2}J_{\nu-m}(\sqrt{z}). \quad (12.2)$$

Полагая в разложении (12.1) $\nu=1/2$ и $\nu=-1/2$, получим соответственно

$$\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\cos(\sqrt{z^2-2zt})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}J_{m-1/2}(z), \quad (12.3)$$

$$\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\sin(\sqrt{z^2+2zt})=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{t^m}{m!}J_{1/2-m}(z), \quad |t|<\frac{1}{2}|z|. \quad (12.4)$$

В формулах (12.1), (12.2) при $|h|<|z|$ можно заменить функции первого рода функциями второго или третьего рода; обе формулы остаются верными и в том случае, когда индекс является целым. Некоторые дальнейшие результаты, относящиеся к разложению Ломмеля, излагаются в § 14 и 16.

§ 13. Дифференциальные уравнения, приводимые к уравнению Бесселя

В настоящем параграфе рассматривается вопрос о том, какие дифференциальные уравнения можно привести к уравнению Бесселя и как выполнить при этом необходимые преобразования уравнений. Этот вопрос рассматривается с практической точки зрения и его изложение, следующее установившейся традиции, вряд ли можно назвать полностью систематическим. Оно скорее представляет сводку наиболее удачных и интересных результатов, расположенных в порядке возрастания сложности их получения. Бóльшая часть этих результатов принадлежит Ломмелю.

Многие дифференциальные уравнения можно привести к уравнению Бесселя с помощью преобразований зависимой и независимой переменных. Начнем с наиболее простого частного случая.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^2u}{dz^2} - c^2u = \frac{p(p+1)}{z^2}\,u. \tag{13.1}$$

Положим $v = z^{-1/2}u$, относительно новой переменной v уравнение примет вид

$$z^2\frac{d^2v}{dz^2} + z\frac{dv}{dz} - \left[c^2z^2 + \left(p+\frac{1}{2}\right)^2\right]v = 0.$$

Обозначим $p + 1/2 = \nu$, $icz = x$, тогда написанное выше уравнение преобразуется к виду

$$x^2\frac{d^2v}{dx^2} + x\frac{dv}{dx} + (x^2 - \nu^2)\,v = 0,$$

т. е. оно перейдет в обычное уравнение Бесселя. Следовательно, $v = Z_\nu(x)$, где $Z_\nu(x)$ — цилиндрическая функция индекса ν. В результате обратной замены получаем

$$u = z^{1/2}Z_{p+1/2}(icz).$$

Если положить в (13.1) $u = wz^{-p}$, то в результате подстановки получается уравнение

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{2p}{z}\frac{dw}{dz} - c^2w = 0, \tag{13.2}$$

решение которого имеет вид

$$w = z^p u = z^{p+1/2} Z_{p+1/2}(icz). \tag{13.3}$$

Положив в (13.2) $z = \zeta^q/q$, $q = 1/(2p+1)$, получим уравнение

$$\frac{d^2w}{d\zeta^2} - c^2\zeta^{2q-2} w = 0. \tag{13.4}$$

Решение этого уравнения найдем, заменив в (13.3) аргумент z на ζ^q/q; таким образом

$$w = \zeta^{1/2} (1/q)^{1/(2q)} Z_{1/(2q)}(ic\zeta^q/q).$$

Прямым преобразованием можно свести к уравнению Бесселя и уравнения более широкого класса; Ломмель, в частности, показал, что общим решением уравнения

$$z^2 \frac{d^2u}{dz^2} + (2\alpha - 2\beta\nu + 1) z \frac{du}{dz} + [\beta^2\gamma^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu)] u = 0 \tag{13.5}$$

будет

$$u = z^{\beta\nu-\alpha} Z_\nu(\gamma z^\beta). \tag{13.6}$$

Для получения (13.6) следует ввести новые переменные $w = uz^{\alpha-\beta\nu}$, $t = \gamma z^\beta$; нетрудно показать, что функция $w(t)$ удовлетворяет уравнению Бесселя с индексом ν.

Приведем несколько частных случаев уравнения (13.5):

$$\frac{d^2u}{dz^2} \pm zu = 0, \quad u = z^{1/2} Z_{1/3}\left(\frac{2}{3} z^{3/2}\right), \quad u = z^{1/2} Z_{1/3}\left(\frac{2}{3} iz^{3/2}\right); \tag{13.7}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} \pm z^{-1/2} u = 0, \quad u = z^{1/2} Z_{2/3}\left(\frac{4}{3} z^{3/4}\right), \quad u = z^{1/2} Z_{2/3}\left(\frac{4}{3} iz^{3/4}\right); \tag{13.8}$$

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + (1-\nu)\frac{du}{dz} - \frac{1}{4}u = 0, \quad u = z^{\nu/2} Z_\nu(i\sqrt{z}); \tag{13.9}$$

$$z\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{\nu^2}{z}\right) u = 0, \quad u = Z_\nu(\sqrt{z}); \tag{13.10}$$

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + 4\left(z^2 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = 0, \quad u = Z_\nu(z^2); \tag{13.11}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1-2k}{z}\frac{dy}{dz} + \beta^2 z^{\nu-2} y = 0, \quad y = z^k Z_{1/(2\nu)}\left(\frac{2\beta}{\nu} z^{\nu/2}\right); \tag{13.12}$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{1-2k}{z}\frac{dy}{dz} + \left(\beta^2 + \frac{c}{z^2}\right) y = 0, \quad y = z^k Z_{\sqrt{k^2-c}}(\beta z). \tag{13.13}$$

Дадим вывод еще более общего результата, также принадлежащего Ломмелю. Рассмотрим для этого уравнение (13.2). Заменяя в нем w на $y/\chi(z)$, z на $\psi(z)$, $2p$ на $2\nu-1$ и полагая $c=i$, получим

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\left[\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)}+(2\nu-1)\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}+2\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}\right]\frac{dy}{dz}+$$
$$+\left\{\left[\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)}+(2\nu-1)\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}+2\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}\right]\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}-\right.$$
$$\left.-\frac{\chi''(z)}{\chi(z)}+[\psi'(z)]^2\right\}y=0. \qquad (13.14)$$

Решением уравнения (13.14) будет

$$y=\chi(z)[\psi(z)]^{\nu}Z_{\nu}[\psi(z)].$$

Введем в рассмотрение новую функцию $\varphi(z)$, определяемую уравнением

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}=\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)}+(2\nu-1)\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}+2\frac{\chi'(z)}{\chi(z)}, \qquad (13.15)$$

и исключим из (13.14) функцию $\chi(z)$, при этом получим

$$\frac{d^2y}{dz^2}-\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\frac{dy}{dz}+\left\{\frac{3}{4}\left[\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\right]^2-\frac{1}{2}\frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)}-\frac{3}{4}\left[\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2}\frac{\psi'''(z)}{\psi'(z)}+\left[\psi^2(z)-\nu^2+\frac{1}{4}\right]\left[\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]^2\right\}y=0. \qquad (13.16)$$

Решение уравнения (13.16) имеет вид

$$y=\sqrt{\frac{\varphi(z)\psi(z)}{\psi'(z)}}\,Z_{\nu}[\psi(z)].$$

В частном случае, когда $\varphi(z)\equiv 1$,

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\left\{\frac{1}{2}\frac{\psi'''(z)}{\psi'(z)}-\frac{3}{4}\left[\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)}\right]^2+\right.$$
$$\left.+\left[\psi^2(z)-\nu^2+\frac{1}{4}\right]\left[\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]^2\right\}y=0. \qquad (13.17)$$

Решение уравнения (13.17) есть

$$y=\sqrt{\frac{\psi(z)}{\psi'(z)}}\,Z_{\nu}[\psi(z)].$$

Возвращаясь к исходному уравнению (13.2) и рассматривая случай $\chi(z)\equiv[\psi(z)]^{\mu-\nu}$, находим, что

решение уравнения

$$\frac{d^2y}{dz^2} - \left[\frac{\psi''(z)}{\psi'(z)} + (2\mu - 1)\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]\frac{dy}{dz} + \\ + [\mu^2 - \nu^2 + \psi^2(z)]\left[\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]^2 y = 0 \quad (13.18)$$

имеет вид

$$y = [\psi(z)]^{\mu} Z_{\nu}[\psi(z)].$$

Частным случаем (13.18) является уравнение

$$\frac{d^2y}{dz^2} + (e^{2z} - \nu^2)\, y = 0, \quad (13.19)$$

решение которого доставляет функция

$$y = Z_{\nu}(e^z). \quad (13.20)$$

Следующие несколько уравнений приводятся к уравнению Бесселя с помощью преобразований Ломмеля [1]):

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left[b^2 \exp(2\beta i) - \frac{4p^2 - 1}{z^2}\right] y = 0, \qquad y = \sqrt{z}\, Z_p(bz);$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{a}{z}\frac{dy}{dz} + \left[b^2 e^{2cz} + \frac{a(a-2)}{4z^2} - d^2\right] y = 0,$$

$$y = z^{-a/2} Z_{d/c}\left(\frac{b}{c}\, e^{cz}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{a}{z}\frac{dy}{dz} + \left[\frac{a(a-2)}{4z^2} + \frac{1}{z^4}(b^2 e^{2c/z} - p^2)\right] y = 0,$$

$$y = z^{1-a/2} Z_{d/c}\left(\frac{b}{c}\, e^{cz}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{1}{z} + h\right)\frac{dy}{dz} + \left(\frac{h^2}{4} + \frac{h + 2b^2}{2z} - \frac{p^2}{4z^2}\right) y = 0,$$

$$y = \exp[-hz/2] \cdot Z_p(2b\sqrt{z});$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \left(\frac{a}{z} + h\right)\frac{dy}{dz} + \left[b^2 z^m + \frac{h}{2}\left(\frac{a}{z} + \frac{h}{2}\right) + \frac{(1-a)^2}{4z^2}\right] y = 0,$$

$$y = \exp[-hz/2]\, z^{(1-a)/2} Z_0\left(\frac{2b}{m+2}\, z^{m/2+1}\right);$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2}{\operatorname{sh} 2z}\frac{dy}{dz} + \operatorname{ch}^2 z\left(1 - \frac{p^2}{\operatorname{sh}^2 z}\right) y = 0, \qquad y = Z_p(\operatorname{sh} z),$$

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \frac{2b}{2bz + c}\frac{dy}{dz} + \frac{b^2}{2bz + c}\left(1 - \frac{p^2}{2bz + c}\right) y = 0,$$

$$y = Z_p(\sqrt{2bz + c}).$$

---

[1]) Эти уравнения заимствованы из [80], где в приложении приводится обширная и полезная сводка аналогичных уравнений.

Перейдем к рассмотрению уравнений четвертого порядка. Заметим, что во многих задачах математической физики метод разделения переменных приводит к обыкновениым дифферепциальным уравнениям следующего вида:

$$\Delta_\nu^2 u + a\Delta_\nu u + bu = 0, \qquad \Delta_\nu = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - \frac{\nu^2}{z^2}.$$

Если уравнение имеет вид

$$\Delta_\nu^2 u - 2b_1\Delta_\nu u + \lambda^4 u = 0, \tag{13.21}$$

то, перейдя к переменной $\xi = \lambda z$ и сохранив те же обозначения для оператора $\Delta_\nu \left(\Delta_\nu = \frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi} - \frac{\nu^2}{\xi^2}\right)$, получим

$$\Delta_\nu\Delta_\nu u - 2b_0\Delta_\nu u + u = 0, \; b_0 = b_1/\lambda^2. \tag{13.22}$$

Заметим, что $\Delta_\nu = \frac{1}{z^2}\nabla_\nu - 1$, где ∇_ν — оператор Бесселя Будем искать решение в виде

$$u = AZ_\nu(\xi\sqrt{s})$$

и внесем это выражение в уравнение (13 22); в результате получим характеристическое уравнение $s^2 + 2b_0 s + 1 = 0$, корни которого суть $s_{1,2} = -b_0 \pm \sqrt{b_0^2 - 1}$.

Если b_0 равно нулю, то $s_{1,2} = \pm i$ и имеет место случай, который подробно рассматривается на стр. 201

Если b_0 отлично от нуля, но мало по сравнению с единицей, то можем приближенно считать $s_{1,2} \approx -b_0 \pm i$. В более общем случае, при $0 < b_0 < 1$,

$$s_{1,2} = a \pm ib,$$

где $a = -b_0$, $b = \sqrt{1 - b_0^2}$.

Полагая $\xi\sqrt{a \pm ib} = \rho e^{\pm i\varphi}$ и возводя это равенство в квадрат, получим

$$\xi^2(a \pm ib) = \rho^2(\cos 2\varphi \pm i \sin 2\varphi).$$

Так как $|a| \leqslant 1$, $|b| \leqslant 1$, то, положив

$$\xi = \rho, \quad a = \cos 2\varphi, \quad b = \sin 2\varphi,$$

где $\varphi = \frac{1}{2}\operatorname{arcctg}\frac{a}{b}$, можно записать решение в следующем виде:

$$u = A_1^* J_\nu(\rho e^{i\varphi}) + A_2^* H_\nu^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) + A_3^* J_\nu(\rho e^{-i\varphi}) + A_4^* H_\nu^{(2)}(\rho e^{-i\varphi}),$$

или

$$u = A_1\tilde{u}_\nu(\rho) + A_2\tilde{v}_\nu(\rho) + A_3\tilde{j}_\nu(\rho) + A_4\tilde{g}_\nu(\rho),$$

где

$$A_1 = A_1^* + A_3^*, \quad A_2 = i(A_1^* - A_3^*),$$

$$A_3 = A_2^* + A_4^*, \quad A_4 = i(A_2^* - A_4^*).$$

Если $b_0 = 1$, то характеристическое уравнение имеет кратные корни.

При $b_0^2 > 1$ оба корня характеристического уравнения действительны, и решение уравнения (13.21) в этом случае можно записать в следующем виде.

при $b_0 < -1$

$$u = A_1 J_\nu(\xi\sqrt{s_1}) + A_2 Y_\nu(\xi\sqrt{s_1}) + A_3 J_\nu(\xi\sqrt{s_2}) + A_4 Y_\nu(\xi\sqrt{s_2}),$$

при $b_0 > 1$

$$u = A_1 I_\nu(\xi\sqrt{|s_1|}) + A_2 K_\nu(\xi\sqrt{|s_1|}) + A_3 I_\nu(\xi\sqrt{|s_2|}) + A_4 K_\nu(\xi\sqrt{|s_2|}).$$

Рассмотрим теперь задачи, в которых переход к системе уравнений Бесселя является менее очевидным.

Приведем принадлежащий Ломмелю результат, впоследствии обобщенный Ватсоном.

Уравнение (13.5) можно записать в виде

$$(D+\alpha)(D+\alpha-2\beta\nu)u = -\beta^2\gamma^2 z^{2\beta}u, \quad D = z\frac{z}{dz}. \tag{13.23}$$

Приведем уравнение

$$\prod_{r=0}^{n-1}(D+\alpha-2r\beta)(D+\alpha-2\beta\nu-2r\beta)u = (-1)^n\beta^{2n}c^{2n}z^{2n\beta}u, \tag{13.24}$$

которое при $n = 1$ переходит в (13.23); легко проверить, что решение уравнения (13.24) имеет вид

$$u = z^{\beta\nu-\alpha}Z_\nu(\gamma z^\beta),$$

где

$$\gamma = c\exp(r\pi i/n), \qquad r = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1.$$

Давая r последовательно значения 0, 1, ..., $n-1$, получаем n решений, образующих фундаментальную систему.

Положив в (13.24) $n = 2$, получим уравнение четвертого порядка

$$(D+\alpha)(D+\alpha-2\beta)(D+\alpha-2\beta\nu)(D+\alpha-2\beta\nu-2\beta)u = \beta^4c^4z^{4\beta}u. \tag{13.25}$$

Кирхгофф рассмотрел уравнение

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(z^4\frac{d^2u}{dz^2}\right) = z^2u, \tag{13.26}$$

описывающее поперечные колебания конического стержня. Если ввести новую независимую переменную

$\beta = 2\sqrt{z}$ и обозначить $u\beta^2 = \gamma$, то уравнение (13.26) сводится к системе двух уравнений

$$\frac{d^2\gamma}{d\beta^2} + \frac{1}{\beta}\frac{d\gamma}{d\beta} \pm \gamma - \frac{4}{\beta^2}\gamma = 0,$$

откуда

$$u = \frac{1}{z}\left[A_1 J_2(2\sqrt{z}) + A_2 Y_2(2\sqrt{z}) + \right.$$
$$\left. + A_3 I_2(2\sqrt{z}) + A_4 K_2(2\sqrt{z})\right]. \quad (13.27)$$

Уравнение, рассмотренное Мононобе

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(z^3 \frac{d^2u}{dz^2}\right) = zu, \quad (13.28)$$

имеет решение, которое можно получить, положив в (13.27) индексы равными 1 и заменив $1/z$ на $1/\sqrt{z}$. Это уравнение встречается в задаче о колебаниях клина. Более общая задача изучалась А. Н. Динником [12], который рассматривал дифференциальное уравнение колебаний стержня, имеющее вид

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(z^m \frac{d^2u}{dz^2}\right) - z^{m-2}u = 0; \quad (13.29)$$

очевидно, что задачи Мононобе и Кирхгоффа получаются как частные случаи задачи А. Н. Динника. Решение уравнения Динника запишем в виде

$$u = z^{1-m/2}\left\{A_1 J_{m-2}(2\sqrt{z}) + A_2 Y_{m-2}(2\sqrt{z}) + \right.$$
$$\left. + A_3 I_{m-2}(2\sqrt{z}) + A_4 K_{m-2}(2\sqrt{z})\right\}.$$

Приведем недавно опубликованный результат, принадлежащий Т. Ларднеру [32], который показал, что решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2}{dz^2}\left(z^m \frac{d^2u}{dz^2}\right) - pz^n u = 0 \quad (13.30)$$

можно выразить через бесселевы функции, если $m = P/Q$, $n = (P+2)/Q - 4$, где P и Q — натуральные числа, и $Q \neq 0$; кроме того, числа $|P|$ и $|Q|$ не являются одновременно четными.

Ларднер не приводит в [32] общего решения, указывая на его сложность, и ограничивается рассмотрением частного случая $P = 9$, $Q = 2$.

Если положить $z_1 = \frac{pz^\theta}{\theta^4}$, $t = \ln\left(4z_1^{1/4}\right)$, то уравнение (13.30) можно переписать в виде

$$[D_1(D_1-4)(D_1+6)(D_1+10) - e^{4t}]\,u(t) = 0, \quad (13.31)$$

где $D_1 = d/dt$.

Решение уравнения (13.31) имеет следующий вид:

$$u(t) = e^{-12t} D_1^2 (D_1-2)(D_1-4)^2 (D_1-8)^2 (D_1-12)\,\Phi(t),$$

где $\Phi(t)$ — решение уравнения

$$\left[D_1^2 (D_1-2)^2 - e^{4t}\right]\Phi(t) = 0,$$

выражающееся через бесселевы функции,

$$\Phi(t) = A_1 J_0(e^t) + A_2 Y_0(e^t) + A_3 I_0(e^t) + A_4 K_0(e^t).$$

Рассмотренные уравнения второго и четвертого порядка являются однородными. Использование функций Коши, приведенных в § 17, позволяет легко получить решения соответствующих неоднородных уравнений.

§ 14. Интеграл Пуассона

Наряду с интегралом Бесселя в теории бесселевых функций и их приложениях важную роль играет другое интегральное представление, принадлежащее Пуассону, который в своих работах по теории теплопроводности рассматривал интегралы типа

$$\int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2n+1}\theta\,d\theta, \qquad \int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2n}\theta\,d\theta,$$

где n — целое положительное число или нуль.

В дальнейшем аналогичные интегралы рассматривал Ломмель.

Рассмотрим *интеграл Пуассона*

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)} \int_0^\pi \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta. \quad (14.1)$$

Для доказательства (14.1) заменим первый сомножитель подынтегрального выражения правой части рядом

$$\cos(z\cos\theta)=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(z\cos\theta)^{2m}}{(2m)!}, \tag{14.2}$$

поменяем порядок суммирования и интегрирования и воспользуемся затем формулами (7), (8).

В результате получим

$$\frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\int_0^{\pi}\cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=$$

$$=\frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{z^{2m}}{\Gamma(2m+1)}\int_0^{\pi}\cos^{2m}\theta\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+\nu}2^{2m}}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)\,\Gamma(2m+1)}\,\frac{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(m+1/2)}{\Gamma(m+\nu+1)}=$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+\nu}}{\Gamma(m+1)\,\Gamma(m+\nu+1)}=J_{\nu}(z), \tag{14.3}$$

что и доказывает справедливость (14.1). В отличие от интеграла Бесселя полученный результат справедлив не только при целом индексе n, но и при любом вещественном $\nu>-1/2$, а также при комплексном ν, если $\operatorname{Re}\nu>-1/2$.

Учитывая, что

$$\int_0^{\pi}\sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta=0, \tag{14.4}$$

формулу (14.1) можно записать и в таком виде:

$$J_{\nu}(z)=\frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\int_0^{\pi}e^{iz\cos\theta}\sin^{2\nu}\theta\,d\theta. \tag{14.5}$$

Если теперь произвести замену $\cos\theta=t$, то интеграл Пуассона можно записать так:

$$J_{\nu}(z)=\frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\int_{-1}^{1}e^{izt}(1-t^2)^{\nu-1/2}\,dt. \tag{14.6}$$

В § 19 будут рассмотрены некоторые обобщения этого интеграла.

В качестве примера использования интеграла Пуассона приведем вывод разложения Ломмеля, рассмотренного в § 12, при $\nu = 0$. Заметим, что до получения приведенного в § 12 общего решения, Ломмель рассмотрел частный случай разложения, когда $\nu = 1$ (см., например, [7]). Приведенный ниже вывод основан на очевидном соображении о том, что интеграл Парсеваля (10.12) не изменяется при переносе начала отсчета полярного угла, поэтому его можно записать в виде

$$J_0(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos[r\cos(\theta-\varphi)]\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos[r\cos\theta\cos\varphi + r\sin\theta\sin\varphi]\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} [\cos(r\cos\theta\cos\varphi)\cos(r\sin\theta\sin\varphi) -$$

$$- \sin(r\cos\theta\cos\varphi)\sin(r\sin\theta\sin\varphi)]\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(r\cos\theta\cos\varphi)\cos(r\sin\theta\sin\varphi)\,d\varphi, \quad 2\pi \geqslant \theta \geqslant 0.$$

Заметим, что подобная формула была уже ранее получена в § 10 другим путем (см. (10.14)). Разложим второй сомножитель подынтегрального выражения в степенной ряд, поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся интегралом Пуассона; таким образом, получим

$$J_0(r) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(r\cos\theta\cos\varphi)\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{r(\sin\theta\sin\varphi)^{2m}}{(2m)!}\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(r\sin\theta)^{2m}}{(2m)!}\int_0^{\pi}\cos(r\cos\theta\cos\varphi)\sin^{2m}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(r\sin\theta)^{2m}}{(2m)!}\frac{\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)^m}\frac{J_m(r\cos\theta)}{(r\cos\theta)^m} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(r\sin\theta)^{2m}}{m!\,2^m}\frac{J_m(r\cos\theta)}{(r\cos\theta)^m}. \qquad (14.7)$$

Обозначив $r\cos\theta = \sqrt{z}$, $r\sin\theta = \sqrt{h}$, $r = \sqrt{z+h}$, найдем

$$J_0(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-h/2)^m}{m!} z^{-m/2} J_m(\sqrt{z}). \tag{14.8}$$

Отсюда, воспользовавшись формулой дифференцирования

$$\frac{d^n}{d(z^2)^n} J_0(z) = \frac{(-1)^n J_n(z)}{2^n z^n},$$

легко вытекающей из формул (6.2) и (1.10), и формулой (6.8), после простых выкладок получаем для целых значений n

$$(z+h)^{-n/2} J_n(\sqrt{z+h}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-h/2)^m z^{-(n+m)/2}}{m!} J_{n+m}(\sqrt{z}). \tag{14.9}$$

Разложения аналогичного типа можно построить и для интеграла

$$\int_0^{\pi} \cos[z\cos(\theta-\varphi)] \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi, \tag{14.10}$$

который является очевидным обобщением интеграла Пуассона (14.1) и при $\nu = 0$ переходит в интеграл Парсеваля.

Интеграл Пуассона, умноженный на z^{ν}, можно рассматривать как суперпозицию моментов степени ν смещений, носящих характер плоских волн, относительно оси, совпадающей с неподвижным радиусом

Разложение интеграла (14.10) в ряд, аналогичное разложению Ломмеля, получаем точно так же, как это было выполнено при рассмотрении (14.1); таким образом,

$$\int_0^{\pi} \cos[r\cos(\theta-\varphi)] \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(\sqrt{z}\cos\varphi)\cos(\sqrt{h}\sin\varphi)\sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi =$$

$$= \int_0^{\pi} \cos(\sqrt{z}\cos\varphi) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m(\sqrt{h}\sin\varphi)^{2m}}{(2m)!} \sin^{2\nu}\varphi\, d\varphi =$$

$$= 2^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^m h^m}{(2m)!} \frac{J_{\nu+m}(\sqrt{z})}{(\sqrt{z})^{m+\nu}} \Gamma\left(\nu+m+\frac{1}{2}\right). \tag{14.11}$$

Если $\theta = 0$, то, очевидно, получаем интеграл Пуассона, так как при этом $h = 0$ и в разложении сохранится только первый член.

§ 15. Некоторые неопределенные интегралы

Сначала рассмотрим некоторые неопределенные интегралы, являющиеся следствием формул дифференцирования и соотношений, вытекающих из рассмотрения определителя Вронского и формул Бассета.

Рекуррентные формулы и формулы дифференцирования дают возможность сразу получить следующие неопределенные интегралы:

$$\int z^{\nu+1} Z_\nu(z)\, dz = z^{\nu+1} Z_{\nu+1}(z), \tag{15.1}$$

$$\int z^{-\nu+1} Z_\nu(z)\, dz = -z^{-\nu+1} Z_{\nu-1}(z). \tag{15.2}$$

В случае, когда $z = \rho e^{-i\varphi}$, $\nu = 0$, имеем

$$\int \rho \tilde{f}_0(\rho)\, d\rho = \rho\,[\tilde{f}_1(\rho)\cos\varphi + \tilde{g}_1(\rho)\sin\varphi], \tag{15.3}$$

$$\int \rho \tilde{g}_0(\rho)\, d\rho = \rho\,[\tilde{g}_1(\rho)\cos\varphi - \tilde{f}_1(\rho)\sin\varphi]; \tag{15.4}$$

в этих формулах $\tilde{f}$ и $\tilde{g}$ можно заменить на $\tilde{u}$ и $\tilde{v}$ соответственно.

Ломмелю принадлежат полученные путем использования вронскиана уравнения Бесселя следующие интегралы, содержащие две бесселевы функции или квадрат бесселевой функции:

$$\int \frac{dz}{z J_\nu^2(z)} = -\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\cdot\frac{J_{-\nu}(z)}{J_\nu(z)}, \tag{15.5}$$

$$\int \frac{dz}{z J_\nu(z) J_{-\nu}(z)} = \frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\ln\frac{J_\nu(z)}{J_{-\nu}(z)}, \tag{15.6}$$

$$\int \frac{dz}{z J_\nu(z) Y_\nu(z)} = \frac{\pi}{2}\ln\frac{Y_\nu(z)}{J_\nu(z)}, \tag{15.7}$$

$$\int \frac{dz}{z J_\nu^2(z)} = \frac{\pi}{2}\frac{Y_\nu(z)}{J_\nu(z)}, \tag{15.8}$$

$$\int \frac{dz}{z Y_\nu^2(z)} = -\frac{\pi}{2}\frac{J_\nu(z)}{Y_\nu(z)}. \tag{15.9}$$

Для доказательства первой из этих формул рассмотрим производную дроби

$$\frac{d}{dz}\left[\frac{J_{-\nu}(z)}{J_\nu(z)}\right]=\frac{J'_{-\nu}(z)J_\nu(z)-J_{-\nu}(z)J'_\nu(z)}{J^2_\nu(z)}=-\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z J^2_\nu(z)}.$$

(При этом была использована формула (9.5).) Интегрируя по z, сразу получим (15.5); при этом предполагается, что ν — нецелое число. Заметим, что таким же образом можно получить аналогичные формулы для других цилиндрических функций.

Рассмотрим теперь производную от логарифма дроби $\frac{J_\nu(z)}{J_{-\nu}(z)}$

$$\frac{d}{dz}\left[\ln\frac{J_\nu(z)}{J_{-\nu}(z)}\right]=\frac{J'_\nu(z)J_{-\nu}(z)-J'_{-\nu}(z)J_\nu(z)}{J_\nu(z)J_{-\nu}(z)}=\frac{2\sin\nu\pi}{\pi z J_\nu(z)J_{-\nu}(z)}.$$

Отсюда, интегрируя по z, получим при ν нецелом

$$\int\frac{dz}{zJ_\nu(z)J_{-\nu}(z)}=\frac{\pi}{2\sin\nu\pi}\ln\frac{J_\nu(z)}{J_{-\nu}(z)},$$

что и доказывает (15.6).

Таким же образом могут быть доказаны и формулы (15.7)—(15.9), в которых ν — нецелое число. Укажем еще, что

$$\int\frac{dz}{zH^{(1)}_\nu(z)H^{(2)}_\nu(z)}=-\frac{\pi}{4i}\ln\frac{H^{(2)}_\nu(z)}{H^{(1)}_\nu(z)}, \tag{15.10}$$

где ν может быть и целым числом.

Аналогичным образом, но с помощью формулы Бассета (9.13) получаются неопределенные интегралы, в которые входят производные цилиндрических функций

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{(\nu^2/z^2-1)\,dz}{z[Y'_\nu(z)]^2}=\frac{J'_\nu(z)}{Y'_\nu(z)}, \tag{15.11}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{(1-\nu^2/z^2)\,dz}{z[J'_\nu(z)]^2}=\frac{Y'_\nu(z)}{J'_\nu(z)}, \tag{15.12}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{(\nu^2/z^2-1)\,dz}{zJ'_\nu(z)Y'_\nu(z)}=\ln\frac{J'_\nu(z)}{Y'_\nu(z)}, \tag{15.13}$$

$$\frac{2}{\pi}\int\frac{(1-\nu^2/z^2)\,dz}{zJ'_\nu(z)Y'_\nu(z)}=\ln\frac{Y'_\nu(z)}{J'_\nu(z)}. \tag{15.14}$$

Произведение правых частей формул (15.8) и (15.11) можно с помощью формулы Бассета (9.13) и определителя Вронского представить в следующем виде:

$$\frac{2}{\pi}\int \frac{J'_\nu(z)\,Y'_\nu(z)-(1-\nu^2/z^2)\,Y_\nu(z)\,J_\nu(z)}{z\left[J_\nu(z)\,Y'_\nu(z)\right]^2}\,dz=\frac{J'_\nu(z)\,Y_\nu(z)}{J_\nu(z)\,Y'_\nu(z)}. \tag{15.15}$$

Очевидно, не представляет никакого труда ввести в эти интегралы функции $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$, $J_{-\nu}(z)$ взамен функций $J_\nu(z)$ и $Y_\nu(z)$; легко получить и родственные формулы для модифицированных функций $I_\nu(z)$ и $K_\nu(z)$; так, например,

$$\int \frac{(\nu^2/z^2+1)\,dz}{z\left[I'_\nu(z)\right]^2}=\frac{K'_\nu(z)}{I'_\nu(z)}, \tag{15.16}$$

$$\int \frac{-I'_\nu(z)\,K'_\nu(z)+(1+\nu^2/z^2)\,I_\nu(z)\,K_\nu(z)}{z\left[I_\nu(z)\,K'_\nu(z)\right]^2}\,dz=\frac{I'_\nu(z)\,K_\nu(z)}{I_\nu(z)\,K'_\nu(z)}. \tag{15.17}$$

Рассмотрим интеграл

$$\int z^n J_0(\alpha z)\,dz=\frac{1}{\alpha}\int z^{n-1}\frac{d}{dz}\left[zJ_1(\alpha z)\right]dz=$$

$$=\frac{z^n}{\alpha}J_1(\alpha z)+\frac{n-1}{\alpha^2}z^{n-1}J_0(\alpha z)-\frac{(n-1)^2}{\alpha^2}\int z^{n-2}J_0(\alpha z)\,dz. \tag{15.18}$$

Очевидно, что в результате последовательного применения к интегралу $\int z^n J_0(\alpha z)\,dz$ формулы (15.18) при нечетном n можно получить выражение, содержащее только функции $J_0(\alpha z)$ и $J_1(\alpha z)$; если n четное, то в результат войдет еще слагаемое, содержащее $\int J_0(\alpha z)\,dz$.

Аналогичные результаты будут получены и в случае, когда под интегралом находятся функции $z^nY_0(\alpha z)$ и $z^nH_0^{(1)}(\alpha z)$.

Более общую формулу

$$\int z^{\mu+1}Z_\nu(z)\,dz=$$

$$=z^{\mu+1}Z_{\nu+1}(z)+(\mu-\nu)\,z^\mu Z_\nu(z)-(\mu^2-\nu^2)\int z^{\mu-1}Z_\nu(z)\,dz$$

можно легко проверить, выполнив дифференцирование и воспользовавшись формулами (6.3), (6.4).

Рассмотрим полученные Ломмелем весьма важные неопределенные интегралы, которые получаются в результате использования различных преобразований уравнения Бесселя, приведенных в § 13. Если y и η суть решения уравнений

$$\frac{d^2y}{dz^2}+P(z)\,y=0, \qquad \frac{d^2\eta}{dz^2}+Q(z)\,\eta=0,$$

то справедлива следующая формула:

$$\int (P-Q)\,y\eta\,dz = y\frac{d\eta}{dz}-\eta\frac{dy}{dz}. \tag{15.19}$$

Положим, что $P(z)$ определяется из (13.17) при $\psi(z)=kz$ и $\nu=\mu_1$; соответственно $Q(z)$ получается, если положить в (13.17) $\psi(z)=lz$, $\nu=\mu_2$, $k\neq l$. Тогда

$$\int \left\{(k^2-l^2)\,z-(\mu_1^2-\mu_2^2)/z\right\} Z_{\mu_1}(kz)\,Z^*_{\mu_2}(lz)\,dz = \\ = z\left\{Z_{\mu_1}(kz)\frac{dZ^*_{\mu_2}(lz)}{dz}-Z^*_{\mu_2}(lz)\frac{dZ_{\mu_1}(kz)}{dz}\right\}. \tag{15.20}$$

Полагая $\mu_1=\mu_2=\mu$, получим

$$\int zZ_\mu(kz)\,Z^*_\mu(lz)\,dz = \\ = \frac{z}{k^2-l^2}\left\{Z_\mu(kz)\frac{dZ^*_\mu(lz)}{dz}-Z^*_\mu(lz)\frac{dZ_\mu(kz)}{dz}\right\}= \\ = \frac{z}{k^2-l^2}\left\{kZ_{\mu+1}(kz)\,Z^*_\mu(lz)-lZ_\mu(kz)\,Z^*_{\mu+1}(lz)\right\},\ \mu\neq l; \tag{15.21}$$

при $l=k$ приходим к неопределенности типа $\frac{0}{0}$.

С помощью правила Лопиталя можно получить

$$\int zZ_\mu(kz)\,Z^*_\mu(kz)\,dz = \\ = z^2/4\left\{2Z_\mu(kz)\,Z^*_\mu(kz)-Z_{\mu-1}(kz)\,Z^*_{\mu+1}(kz)- \right. \\ \left. -Z_{\mu+1}(kz)\,Z^*_{\mu-1}(kz)\right\}. \tag{15.22}$$

Если положить $P(z) = e^{2z-\nu^2}$, $Q(z) = e^{2z+\nu^2}$, то, как видно из (13.19), (13.20),

$$\int (e^{2z-\nu^2} - e^{2z+\nu^2}) Z_\nu(e^z) Z_{i\nu}(e^z)\, dz = \\ = Z_\nu(e^z) \frac{dZ_{i\nu}(e^z)}{dz} - Z_{i\nu}(e^z) \frac{dZ_\nu(e^z)}{dz}. \quad (15.23)$$

Несложно получить подобные формулы для решений неоднородных уравнений Бесселя (см. § 16).

§ 16. Функции, родственные бесселевым функциям. Частные решения неоднородного уравнения Бесселя

В приложениях значительное место занимают функции, являющиеся частными решениями неоднородного уравнения Бесселя $\nabla_\nu u = z^2\varphi(z)$.

Наиболее простыми из этих функций являются те, к которым приводит уравнение Бесселя с правой частью, представляющей степенную или линейную функции аргумента, и которые *называются функциями, родственными функциям Бесселя.* Эти функции и рассмотрены в настоящем параграфе; в зависимости от вида правой части и соотношений между индексом уравнения и показателем степени они носят название *функций Ломмеля, Струве, Ангера, Вебера.* Несколько дальше, в § 27, будут рассмотрены *функции Ломмеля двух переменных* и их частные случаи — *интегралы вероятностей* и *интегралы Френеля*; § 28 посвящен значительно более общему и широкому классу функций — *неполным цилиндрическим функциям*; все эти функции можно рассматривать как частные решения неоднородного уравнения Бесселя с правой частью, представляющей произведение степенной и экспоненциальной функций.

В § 17 будут рассмотрены еще два простых класса частных решений уравнения Бесселя: 1) когда правая часть представляет ступенчатую функцию; 2) когда правая часть представляет бесселеву функцию.

Целесообразно еще до того, как будут разобраны по отдельности различные частные решения неоднородных уравнений Бесселя, остановиться на рассмотрении некоторых общих свойств этих решений, которые

устанавливаются весьма простым образом. Этому вопросу и посвящен п. 1 настоящего параграфа.

1. Здесь будут рассмотрены следующие вопросы: 1) функциональные уравнения, содержащие вронскиан, 2) неопределенные интегралы, 3) разложения Ломмеля, 4) интегральные представления, для получения которых можно использовать функции Грина уравнения Бесселя, фундаментальные функции Коши, обладающие свойством единичной матрицы, или воспользоваться методом вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим сначала вронскианы неоднородных уравнений Бесселя. Обозначим через u_1 и u_2 соответственно решения однородного и неоднородного уравнений Бесселя с индексом ν и аргументом z

$$\frac{d^2u_1}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du_1}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u_1=0,$$
$$\frac{d^2u_2}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du_2}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)u_2=\varphi_1(z).$$

Умножим первое из этих уравнений на u_2, второе на u_1 и вычтем из первого второе, при этом получим следующее уравнение:

$$\frac{d}{dz}\left[u_1'u_2-u_1u_2'\right]+\frac{1}{z}\left[u_1'u_2-u_2'u_1\right]=-u_1\varphi_1(z).$$

Обозначим $t_1=u_1'u_2-u_1u_2'$ и будем разыскивать t_1 в виде $t_1=p(z)/z$, тогда

$$p'(z)/z=-u_1\varphi_1(z), \qquad p(z)=-\int zu_1\varphi_1(z)\,dz$$

и, следовательно,

$$\left(u_1'u_2-u_2'u_1\right)\Big|_0^z=-\frac{1}{z}\int_0^z zu_1\varphi_1(z)\,dz.$$

Если функция u_1 вместе с первой производной обращается в нуль при $z=0$, то

$$u_1'u_2-u_2'u_1=-\frac{1}{z}\int_0^z zu_1\varphi_1(z)\,dz.$$

Воспользовавшись рекуррентными формулами для функций u_1 и u_2, легко получить различные модификации этого равенства с тем, чтобы в левой части находились функции различных индексов, отличающихся на целое число, а также написать формулы Бассета и Ломмеля — Ганкеля для неоднородного уравнения (см. § 9). Особенно простые результаты будут для того частного случая, когда правая часть неоднородного уравнения Бесселя представляет степенную функцию.

Если обе функции u_2 и u_3 — частные решения неоднородных уравнений $\nabla_\nu u = z^2\varphi(z)$, у которых правые части равны соответственно $z^2\varphi_1(z)$ и $z^2\varphi_2(z)$, то

$$u_2'u_3 - u_3'u_2\Big|_0^z = \frac{1}{z}\int_0^z z\,[u_3\varphi_2(z) - u_2\varphi_3(z)]\,dz.$$

В § 15 приведены некоторые неопределенные интегралы, в подынтегральную часть которых входят бесселевы функции; покажем, как аналогичным путем можно получить интегралы, в которые входят функции, родственные функциям Бесселя.

Обозначим

$$-\frac{1}{z}\int_0^z zu_1\varphi(z)\,dz = A_1(\varphi, z).$$

Имеем

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{u_1}{u_2}\right) = \frac{u_1'u_2 - u_2'u_1}{u_2^2} = \frac{A_1(\varphi, z)}{u_2^2}.$$

Отсюда

$$\frac{u_1}{u_2} = \int \frac{A_1(\varphi, z)\,dz}{u_2^2},$$

аналогично

$$\frac{u_2}{u_1} = -\int \frac{A_1(\varphi, z)\,dz}{u_1^2}.$$

Далее

$$\frac{d}{dz}\left[\ln\frac{u_1}{u_2}\right] = \frac{u_1'u_2 - u_2'u_1}{u_2^2}\cdot\frac{u_2}{u_1},$$

и, следовательно,

$$\int \frac{A_1(\varphi, z)\,dz}{u_1 u_2} = \ln \frac{u_1}{u_2}.$$

Различные интегралы, содержащие функции, родственные функциям Бесселя, можно получить с помощью метода Ломмеля.

Положим, что функция u_1 удовлетворяет однородному уравнению $u_1'' + Pu_1 = 0$, а функция u_2 — неоднородному уравнению $u_2'' + Qu_2 = \varphi(z)$, которые могут быть приведены к уравнению Бесселя; нетрудно проверить, что

$$\int (P - Q) u_1 u_2\,dz = u_1 \frac{du_2}{dz} - u_2 \frac{du_1}{dz} - \int u_1 \varphi(z)\,dz;$$

отсюда легко получить различные интегралы от произведений цилиндрических функций на функции, родственные функциям Бесселя. Точно так же можно в результате очевидного обобщения получить соответствующие интегралы от произведений двух различных родственных функций.

Приведем без вывода несколько определенных интегралов, содержащих функцию $s_{\mu,\nu}(z)$, которая будет определена ниже формулами (16.10)—(16.12). Эти интегралы легко получаются с помощью использования способов Ломмеля, примененных им для цилиндрических функций и изложенных в начале § 15:

$$\int_0^z \frac{(\mu + \nu - 1) J_\nu(z) s_{\mu-1,\nu-1}(z) - J_{\nu-1}(z) s_{\mu,\nu}(z)}{J_\nu^2(z)}\,dz = \frac{s_{\mu,\nu}(z)}{J_\nu(z)}, \quad (16.1)$$

$$\int_0^z \frac{(\mu + \nu - 1) J_\nu(z) s_{\mu-1,\nu-1}(z) - J_{\nu-1}(z) s_{\mu,\nu}(z)}{s_{\mu,\nu}^2(z)}\,dz = -\frac{J_\nu(z)}{s_{\mu,\nu}(z)}, \quad (16.2)$$

$$\int_0^z \frac{(\mu + \nu - 1) J_\nu(z) s_{\mu-1,\nu-1}(z) - J_{\nu-1}(z) s_{\mu,\nu}(z)}{s_{\mu,\nu}(z) J_\nu(z)}\,dz = \ln\left[\frac{-J_\nu(z)}{s_{\mu,\nu}(z)}\right], \quad (16.3)$$

$$\int_0^z \frac{z^{\mu-1} J_\nu(z)\, dz}{(\mu+\nu-1)\, J_\nu(z)\, s_{\mu-1,\,\nu-1}(z) - J_{\nu-1}(z)\, s_{\mu,\,\nu}(z)} =$$

$$= \ln\left[(\mu+\nu-1)\, z J_\nu(z)\, s_{\mu-1,\,\nu-1}(z) - z J_{\nu-1}(z)\, s_{\mu,\,\nu}(z)\right], \quad (16.4)$$

$$\int_0^z \left[(1-\alpha^2) + \frac{\nu_2^2-\nu_1^2}{z^2}\right] z J_{\nu_1}(z)\, s_{\mu,\,\nu_2}(\alpha z)\, dz =$$

$$= z\left[J_{\nu_1}(z)\, s'_{\mu,\,\nu_2}(\alpha z) - s_{\mu,\,\nu_2}(\alpha z)\, J'_{\nu_1}(z)\right] -$$

$$- \alpha^{\mu+1} z\left[(\mu+\nu_1-1)\, J_{\nu_1}(z)\, s_{\mu-1,\,\nu_1-1}(z) - \right.$$

$$\left. - J_{\nu_1-1}(z)\, s_{\mu,\,\nu_1}(z)\right]. \quad (16.5)$$

Интегральное представление функции $\Phi_\nu(z)$, являющейся частным решением дифференциального уравнения

$$\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d\Phi}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right)\Phi = \varphi(z),$$

можно, согласно методу вариации произвольных постоянных, разыскивать в виде

$$\Phi_\nu(z) = A(z)\, J_\nu(z) + B(z)\, Y_\nu(z).$$

Нетрудно показать, что
при нецелом индексе

$$\Phi_\nu(z) = \frac{-\pi}{2\sin\nu\pi} \int_{z_0}^{z} \xi\left[J_\nu(\xi)\, J_{-\nu}(z) - J_\nu(z)\, J_{-\nu}(\xi)\right] \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (16.6)$$

$$z > z_0,$$

при целом индексе

$$\Phi_n(z) = \frac{\pi}{2} \int_{z_0}^{z} \xi\left[J_n(\xi)\, Y_n(z) - J_n(z)\, Y_n(\xi)\right] \varphi(\xi)\, d\xi, \quad (16.7)$$

$$z > z_0.$$

В тех случаях, когда правая часть является степенной функцией, в частное решение входят интегралы

$$A_{2\mu,\,\nu}\left(\sqrt{z+h}\right) = \int_0^z (z+h)^\mu\, J_\nu\left(\sqrt{z+h}\right) d\left(\sqrt{z+h}\right),$$

которые можно представить в виде ряда, являющегося аналогом разложения Ломмеля:

$$A_{2\mu,\,\nu}\left(\sqrt{z+h}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-h/2)^m}{m!} \sum_{k=0}^{n} \frac{h^k n!}{k!\,(n-k)!}\, A_{2\mu-m-2k,\,\nu-m}\left(\sqrt{z}\right). \quad (16.8)$$

Рассмотрим частное решение неоднородного уравнения Бесселя в некоторых случаях.

В п. 2 будет получено частное решение в случае, когда правая часть представляет степенную функцию. Это решение выражается через функции Ломмеля. В п. 3 мы рассмотрим частный случай, когда показатель степени на единицу больше индекса оператора Бесселя и решение выражается через функции Струве. В п. 4 рассмотрены функции Ангера и Вебера, которые позволяют найти частное решение в случае, когда правая часть представляет некоторую линейную функцию аргумента z.

2. Рассмотрим частное решение уравнения

$$\nabla_\nu u = kz^{\mu+1}, \quad (16.9)$$

где k, μ — постоянные. Нетрудно убедиться в том, что частное решение этого уравнения, представленное в виде степенного ряда по возрастающим степеням аргумента z, имеет вид

$$y = k\left[\frac{z^{\mu+1}}{(\mu+1)^2-\nu^2} - \frac{z^{\mu+3}}{\{(\mu+1)^2-\nu^2\}\{(\mu+3)^2-\nu^2\}} + \ldots\right] =$$

$$= kz^{\mu-1} \times$$

$$\times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{1}{2}z\right)^{2m+2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + m + \frac{3}{2}\right)} =$$

$$= ks_{\mu,\,\nu}(z). \quad (16.10)$$

Функция $s_{\mu,\,\nu}(z)$ называется *функцией Ломмеля*.

Разложение (16.10), очевидно, становится непригодным, когда $\mu \pm \nu$ оказывается отрицательным нечетным числом.

Для того чтобы дать другое представление функции Ломмеля, применим к уравнению (16.9) метод вариации произвольных постоянных.

В соответствии с формулами (16.6), (16.7) определим функцию Ломмеля $s_{\mu, \nu}(z)$ следующим образом:

$$s_{\mu, \nu}(z) = \frac{\pi}{2 \sin \nu\pi} \left[J_\nu(z) \int_0^z z^\mu J_{-\nu}(z)\, dz - J_{-\nu}(z) \int_0^z z^\mu J_\nu(z)\, dz \right] \tag{16.11}$$

при ν нецелом и

$$s_{\mu, \nu}(z) = \frac{\pi}{2} \left[Y_\nu(z) \int_0^z z^\mu J_\nu(z)\, dz - J_\nu(z) \int_0^z z^\mu Y_\nu(z)\, dz \right] \tag{16.12}$$

при ν целом.

Если $\mu \pm \nu$ — нечетное положительное число, то частное решение уравнения (16.9) при $k = 1$ можно представить в виде функции Ломмеля $S_{\mu, \nu}(z)$, которая при нецелом ν имеет вид

$$S_{\mu, \nu}(z) = s_{\mu, \nu}(z) + \frac{2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sin \nu\pi} \times$$
$$\times \left[\cos\left(\frac{1}{2}(\mu - \nu)\pi\right) J_{-\nu}(z) - \cos\left(\frac{1}{2}(\mu + \nu)\pi\right) J_\nu(z) \right]. \tag{16.13}$$

Если же ν целое, то

$$S_{\mu, \nu}(z) = s_{\mu, \nu}(z) + 2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu - \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \times$$
$$\times \Gamma\left(\frac{1}{2}\mu + \frac{1}{2}\nu + \frac{1}{2}\right) \left[\sin\left(\frac{1}{2}(\mu - \nu)\pi\right) J_\nu(z) - \right.$$
$$\left. - \cos\left(\frac{1}{2}(\mu - \nu)\pi\right) Y_\nu(z) \right]. \tag{16.14}$$

Непосредственно из (16.11) и (16.12) можно получить рекуррентные формулы, принадлежащие Ломмелю [7]:

$$s_{\mu+2, \nu}(z) = z^{\mu+1} - \{(\mu + 1)^2 - \nu^2\} s_{\mu, \nu}(z), \tag{16.15}$$

$$s'_{\mu, \nu}(z) + \frac{\nu}{z} s_{\mu, \nu}(z) = (\mu + \nu - 1)\, s_{\mu-1, \nu-1}(z), \tag{16.16}$$

$$s'_{\mu, \nu}(z) - \frac{\nu}{z} s_{\mu, \nu}(z) = (\mu - \nu - 1)\, s_{\mu-1, \nu+1}(z). \tag{16.17}$$

Из этих формул можно сразу получить

$$\frac{2\nu}{z} s_{\mu,\nu}(z) = (\mu+\nu-1)\, s_{\mu-1,\nu-1}(z) - (\mu-\nu-1)\, s_{\mu-1,\nu+1}(z), \tag{16.18}$$

$$2s'_{\mu,\nu}(z) = (\mu+\nu-1)\, s_{\mu-1,\nu-1}(z) + (\mu-\nu-1)\, s_{\mu-1,\nu+1}(z). \tag{16.19}$$

Заметим, что в (16.15)—(16.19) функции $s_{\mu,\nu}(z)$ можно заменить на $S_{\mu,\nu}(z)$.

Случай, когда $\mu \pm \nu$ есть нечетное отрицательное число, требует сравнительно сложных рассмотрений, которые можно найти у Ватсона.

В литературе встречаются работы, в которых рассматриваются интегралы $\int \mathrm{Ai}(t)\,dt$; $\int \mathrm{Bi}(t)\,dt$ (см. § 8), легко выражающиеся через функции Ломмеля.

С практической точки зрения функции Ломмеля являются очень важными специальными функциями, поскольку большое число задач математической физики сводится к уравнениям Бесселя с правой частью, представляющей степенную функцию.

Функции Ломмеля позволяют получить в удобном виде частное решение в тех случаях, когда правая часть неоднородного уравнения Бесселя есть кусочно непрерывная функция, представляющая собой некоторый полином в пределах каждого участка непрерывности.

3. Функцию Струве с индексом ν обычно определяют выражением

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \frac{2\,(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)} \int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2} \sin(zt)\,dt =$$

$$= \frac{2\,(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta, \tag{16.20}$$

где $t = \cos\theta$.

При условии, что $\mathrm{Re}\,\nu > -1/2$, функция $\mathbf{H}_\nu(z)$ может быть представлена степенным рядом

$$\mathbf{H}_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m\,(z/2)^{\nu+2m+1}}{\Gamma(m+3/2)\,\Gamma(\nu+m+3/2)}. \tag{16.21}$$

Это легко показать, разложив в (16.20) $\sin(z\cos\theta)$ в ряд по возрастающим степеням z и выполнив затем выкладки, аналогичные проведенным в § 14 при рассмотрении интеграла Пуассона.

Воспользовавшись этим разложением, можно получить следующие рекуррентные формулы:

$$\mathbf{H}_{\nu-1}(z)+\mathbf{H}_{\nu+1}(z)=\frac{2\nu}{z}\,\mathbf{H}_{\nu}(z)+\frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu+{}^{3}/_{2}\right)\Gamma\left({}^{1}/_{2}\right)}, \quad (16.22)$$

$$\mathbf{H}_{\nu-1}(z)-\mathbf{H}_{\nu+1}(z)=2\mathbf{H}'_{\nu}(z)-\frac{(z/2)^{\nu}}{\Gamma\left(\nu+{}^{3}/_{2}\right)\Gamma\left({}^{1}/_{2}\right)}, \quad (16.23)$$

$$\left(\frac{d}{dz}+\frac{\nu}{z}\right)\mathbf{H}_{\nu}(z)=\mathbf{H}_{\nu-1}(z), \quad (16.24)$$

$$\left(\frac{d}{dz}-\frac{\nu}{z}\right)\mathbf{H}_{\nu}(z)=-\frac{(z/2)^{\nu}}{2\Gamma\left(\nu+{}^{3}/_{2}\right)\Gamma\left({}^{3}/_{2}\right)}-\mathbf{H}_{\nu+1}(z), \quad (16.25)$$

которые, очевидно, являются частным случаем соответствующих рекуррентных формул для функции Ломмеля.

Из этих формул следует, что функция Струве удовлетворяет неоднородному уравнению Бесселя

$$\nabla_{\nu}\mathbf{H}_{\nu}(z)=\frac{4\,(z/2)^{\nu+1}}{\Gamma\left({}^{1}/_{2}\right)\Gamma\left(\nu+{}^{1}/_{2}\right)}, \quad (16.26)$$

у которого правая часть — степенная функция с показателем степени, превышающим на единицу индекс оператора Бесселя. Таким образом, функция Струве может рассматриваться как частный случай функций Ломмеля. Если все члены ряда в разложении $\mathbf{H}_{\nu}(z)$ взять с положительным знаком, то он представит функцию $\mathbf{L}_{\nu}(z)$, изученную (в случае $\nu=0$) Никольсоном.

4. В качестве определения *функции Ангера* может быть принят интеграл Бесселя

$$\mathbf{J}_{\nu}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos(\nu\theta-z\sin\theta)\,d\theta. \quad (16.27)$$

Если ν принимает целые значения n, то функция Ангера совпадает с функцией Бесселя $J_n(z)$, если ν — нецелое, то $\mathbf{J}_{\nu}(z)$ отличается от функции Бесселя индекса ν.

Функция

$$\mathbf{E}_{\nu}(z)=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin(\nu\theta-z\sin\theta)\,d\theta \tag{16.28}$$

называется *функцией Вебера.*

В результате преобразования интегралов, связанных с разложением подынтегральной функции в ряд по возрастающим степеням z, получаются равенства

$$\mathbf{J}_{\nu}(z)=\cos\frac{1}{2}\nu\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\nu+1\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\nu+1\right)}+$$

$$+\sin\frac{1}{2}\nu\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+1}}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)}, \tag{16.29}$$

$$\mathbf{E}_{\nu}(z)=\sin\frac{1}{2}\nu\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m}}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\nu+1\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\nu+1\right)}-$$

$$-\cos\frac{1}{2}\nu\pi\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{2m+1}}{\Gamma\left(m-\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(m+\frac{1}{2}\nu+\frac{3}{2}\right)}. \tag{16.30}$$

Функции $\mathbf{J}_{\nu}(z)$, $\mathbf{E}_{\nu}(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_{\nu}\mathbf{J}_{\nu}(z)=\frac{(z-\nu)\sin\nu\pi}{\pi}, \tag{16.31}$$

$$\nabla_{\nu}\mathbf{E}_{\nu}(z)=-\frac{z+\nu}{\pi}-\frac{(z-\nu)\cos\nu\pi}{\pi}. \tag{16.32}$$

Таким образом, очевидно, что обе эти функции связаны с функциями Ломмеля, поскольку они представляют сумму решений неоднородного уравнения для случаев, когда показатель степенной функции равен нулю и единице. Отсюда вытекают формулы

$$\mathbf{J}_{\nu}(z)=\frac{\sin\nu\pi}{\pi}s_{0,\,\nu}(z)-\frac{\nu\sin\nu\pi}{\pi}s_{-1,\,\nu}(z), \tag{16.33}$$

$$\mathbf{E}_{\nu}(z)=-\frac{1+\cos\nu\pi}{\pi}s_{0,\,\nu}(z)-\frac{\nu(1-\cos\nu\pi)}{\pi}s_{-1,\,\nu}(z). \tag{16.34}$$

§ 17. Об интегрировании неоднородного уравнения Бесселя. Функции Коши

При решении неоднородных линейных дифференциальных уравнений наряду с функциями Грина большую роль играют фундаментальные функции Коши, использование которых облегчает получение решений.

В п. 1 рассматриваются функции Коши для уравнения Бесселя и системы двух уравнений Бесселя; в п. 2 рассматривается решение уравнения Бесселя со специальной правой частью, основанное на использовании фундаментальных функций Коши.

1. Будем рассматривать решение неоднородного уравнения

$$\Delta_\nu u + u = \frac{1}{z^2} \nabla_\nu u = f(z) \tag{17.1}$$

при начальных условиях

$$u(z_0) = u_0, \qquad \frac{du}{dz}\Big|_{z=z_0} = v_0. \tag{17.2}$$

Частное решение, которое разыскивалось в § 16 (стр. 65), имеет вид

$$u^*(z) = \frac{\pi}{2\sin \nu\pi} \int_{z_0}^{z} x f(x) [J_\nu(x) J_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(x) J_\nu(z)]\, dx,$$

где ν нецелое. Общее решение уравнения (17.1) можно представить в виде

$$u(z) = A_1 J_\nu(z) + A_2 J_{-\nu}(z) + u^*(z),$$

где A_1 и A_2 подлежат определению из начальных условий (17.2).

Введем функции Коши

$$Y_1(z, x) = \begin{cases} 0, & z < x; \\ \dfrac{\pi x}{2\sin \nu\pi} [J'_{-\nu}(x) J_\nu(z) - J'_\nu(x) J_{-\nu}(z)], & z \geqslant x; \end{cases} \tag{17.3}$$

$$Y_2(z, x) = \begin{cases} 0, & z < x; \\ \dfrac{\pi x}{2\sin \nu\pi} [J_\nu(x) J_{-\nu}(z) - J_{-\nu}(x) J_\nu(z)], & z \geqslant x. \end{cases} \tag{17.4}$$

Очевидно, что каждая из этих функций удовлетворяет уравнению Бесселя с индексом ν; кроме того, что легко проверить, при $z = x$ эти функции и их производные принимают следующие значения:

	$Y_1(x, x)$	$Y_2(x, x)$
Y	1	0
Y'	0	1

Приведем иные выражения для функций Коши, пригодные и при целых значениях индекса:

$$Y_1(z, x) = \begin{cases} 0, & z < x; \\ \frac{\pi x}{2}\left[Y_n'(x) J_n(z) - J_n'(x) Y_n(z)\right], & z \geqslant x; \end{cases} \tag{17.5}$$

$$Y_2(z, x) = \begin{cases} 0, & z < x; \\ \frac{\pi x}{2}\left[J_n(x) Y_n(z) - Y_n(x) J_n(z)\right], & z \geqslant x, \end{cases} \tag{17.6}$$

Решение уравнения (17.1), удовлетворяющее условиям (17.2), теперь можно записать в виде

$$u(z) = u_0 Y_1(z, z_0) + v_0 Y_2(z, z_0) + \int_{z_0}^{z} Y_2(z, x) f(x)\, dx.$$

Рассмотрим частное решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = f(z),$$

правая часть которого является ступенчатой функцией; таким образом, $f(z) = 0$ при $z < z_1$, $f(z) = q_1$ при $z_1 < z < z_2$, ..., $f(z) = \sum_{i=1}^{k} q_i$ при $z_k < z < z_{k+1}$, где q_i постоянные. Нетрудно убедиться в том, что при $z_k <$

$< z < z_{k_1}$ частное решение имеет следующий вид:

$$u^*(z) = \sum_{i=1}^{k} q_i \{s_{1,\nu}(z) - s_{1,\nu}(z_i) Y_1(z, z_i) + \\ + \nu [z_i^{-1} s_{1,\nu}(z_i) - s_{0,\nu-1}(z_i)] Y_2(z, z_i)\}.$$

В [20] рассмотрена аналогичная задача для уравнения Бесселя нулевого индекса, правая часть которого является ступенчатой функцией; в этом случае в частное решение, полученное с помощью интегрирования функции Грина, входят только бесселевы функции.

Если правая часть рассмотренного выше уравнения представляет непрерывную функцию

$$f(z) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i (z - z_i) \quad \text{при} \quad z_k \leqslant z \leqslant z_{k+1}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

то частное решение можно записать в таком виде:

$$u^*(z) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \left\{ s_{2,\nu}(z) - s_{2,\nu}(z_i) Y_1(z, z_i) + \right. \\ \left. + \left[\frac{2}{z} s_{2,\nu}(z_i) - (1+\nu) s_{1,\nu-1}(z_i) \right] Y_2(z, z_i) \right\},$$

где β_i — некоторые постоянные.

Перейдем к уравнению четвертого порядка, которое сводится к системе двух уравнений Бесселя. Сначала рассмотрим неоднородное уравнение

$$L^2(u) - u = f(z), \tag{17.7}$$

где L — линейный дифференциальный оператор второго порядка. Нетрудно доказать, что общее решение уравнения (17.7) имеет вид

$$u = u_1 + u_2,$$

где функции u_1 и u_2 удовлетворяют соответственно уравнениям

$$L(u_{1,2}) \pm u_{1,2} = \mp \frac{1}{2} f(z).$$

Если $L = \Delta_\nu = \frac{d^2}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{d}{dz} - \frac{\nu^2}{z^2}$, то для каждого из двух уравнений можно получить частное решение,

как это было показано на стр. 50. Положим, что индекс оператора — целое число, тогда, объединяя частные решения u_1^*, u_2^*, получим формулу вида

$$u^* = u_1^* + u_2^* = \int_{z_1}^{z} Y_4(z, x) f(x)\, dx, \qquad (17.8)$$

где

$$Y_4(z, x) = \frac{\pi x}{4}\left\{ J_n(z) Y_n(x) - Y_n(z) J_n(x) + \right.$$
$$\left. + \frac{2}{\pi}\left[I_n(z) K_n(x) - K_n(z) I_n(x) \right] \right\};$$

при нецелом индексе n заменяется на ν.

Нетрудно убедиться в том, что

$$Y_4(z, z) = 0, \quad Y_4'(z, z) = 0, \quad \Delta_n Y_4(z, z) = 0, \quad \Delta_n' Y_4(z, z) = 1.$$

Отсюда сразу следует, что в качестве одной из фундаментальных функций Коши можно принять Y_4, а в качестве трех других — производную этой функции по x, результат применения оператора Δ_n и его производную по x. Таким образом, будем выражать решение поставленной задачи в виде суммы частного решения u^* и некоторой линейной комбинации фундаментальных функций Коши

$$Y_1(z, x), \; Y_2(z, x), \; Y_3(z, x), \; Y_4(z, x),$$

которые при $z < x$ тождественно равны нулю и при $z \geqslant x$ удовлетворяют уравнению $L^2(u) - u = 0$; при $z = x$ выполняются следующие условия:

m	Y_m	Y_m'	$\Delta_n Y_m$	$\Delta_n' Y_m$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

Нетрудно показать, что в рассматриваемом случае эти функции при $z \geqslant x$ имеют вид

$$\left.\begin{aligned}
Y_1(z, x) &= \frac{\pi x}{4}\left\{-J_n'(x)\,Y_n(z) + Y_n'(x)\,J_n(z) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{2}{\pi}\left[I_n'(x)\,K_n(z) - K_n'(x)\,I_n(z)\right]\right\},\\
Y_2(z, x) &= \frac{\pi x}{4}\left\{J_n(x)\,Y_n(z) - Y_n(x)\,J_n(z) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{2}{\pi}\left[I_n(x)\,K_n(z) - K_n(x)\,I_n(z)\right]\right\},\\
Y_3(z, x) &= \frac{\pi x}{4}\left\{J_n'(x)\,Y_n(z) - Y_n'(x)\,J_n(z) + \right.\\
&\qquad \left. + \frac{2}{\pi}\left[I_n'(x)\,K_n(z) - K_n'(x)\,I_n(z)\right]\right\},\\
Y_4(z, x) &= \frac{\pi x}{4}\left\{-J_n(x)\,Y_n(z) + Y_n(x)\,J_n(z) - \right.\\
&\qquad \left. - \frac{2}{\pi}\left[I_n(x)\,K_n(z) - K_n(x)\,I_n(z)\right]\right\}.
\end{aligned}\right\} \qquad (17.9)$$

Приведем формулы дифференцирования фундаментальных функций

m	Y_m	Y_m'	$\Delta_n Y_m$	$\Delta_n' Y_m$
1	Y_1	Y_1'	Y_3	Y_3'
2	Y_2	Y_2'	Y_4	Y_4'
3	Y_3	Y_3'	$-Y_1$	$-Y_1'$
4	Y_4	Y_4'	$-Y_2$	$-Y_2'$

Решение уравнения (17.7) при начальных условиях

$$u(z_0) = u_0, \quad u'(z_0) = v_0, \quad \Delta_n u_0 = C_0^*, \quad \Delta_n' u_0 = Q_0$$

можно записать в виде

$$u(z) = u_0 Y_1(z, z_0) + v_0 Y_2(z, z_0) + C_0^* Y_3(z, z_0) + \\ + Q_0 Y_4(z, z_0) + u^*(z).$$

В работах автора [18], [20] фундаментальные функции Коши использованы в задачах о колебаниях стержней переменного сечения, колебаниях круглой пластинки, равновесии конической оболочки, теории тепловых волн, а также задачах об изгибе круглой пластинки на упругом основании и др

Функции Коши при полуцелом индексе уравнения Бесселя выражаются через элементарные функции (см [24]).

При решении некоторых физических задач в начальные условия, определяющие вид функций Коши, входят линейные дифференциальные операторы второго и третьего порядка, отличающиеся от рассмотренных здесь операторов Δ_ν и Δ'_ν, однако это не вызывает каких-либо существенных затруднений (см, например, [20]).

В начале параграфа упоминалось о функциях Грина. Между фундаментальными функциями Коши и функциями Грина $K(z, x)$ существует непосредственная связь, вытекающая из определения функции Грина дифференциального оператора.

Рассмотрим решение уравнения

$$\Delta_0\Delta_0 u + u = 0, \tag{17.10}$$

не имеющее особенностей при $z = 0$ и непрерывное при $z = x$ вместе с первой производной и оператором Δ, причем

$$\Delta'_0 u_{x+0} - \Delta'_0 u_{x-0} = 1;$$

$u \to 0$ при $z \to \infty$. Это решение называется функцией Грина уравнения (17.10). Из формул (11.9) можно сразу получить (обозначения u_0, v_0, f_0, g_0 см. на стр. 21—22)

$$K(z, x) = \begin{cases} \frac{\pi x}{2}\,[f_0(x)\,u_0(z) - g_0(x)\,v_0(z)], & x \geqslant z; \\ \frac{\pi x}{2}\,[u_0(x)\,f_0(z) - v_0(x)\,g_0(z)], & z \geqslant x. \end{cases} \tag{17.11}$$

Покажем, что из $K(z, x)$ можно простым способом получить функцию $Y_4(z, x)$. Образуем разность функции $K(z, x)$ и выражения, представляющего верхнюю строку (17.11), записанную без ограничения $x \geqslant z$; очевидно, эта разность является функцией $Y_4(z, x)$ и имеет вид

$$Y_4(z, x) = \begin{cases} 0, & x > z; \\ \frac{\pi x}{2}\,[u_0(x)\,f_0(z) - v_0(x)\,g_0(z) - f_0(x)\,u_0(z) + g_0(x)\,v_0(z)], & z \geqslant x; \end{cases}$$

формулы для функций $Y_1(z, x)$, $Y_2(z, x)$, $Y_3(z, x)$ приведены в [20].

Рассмотрим частное решение неоднородного уравнения

$$\Delta_\nu^2 u - u = f(z).$$

Положим, что при $z \neq z_k$ $f(z) = 0$, $k = 1, 2, 3, \ldots$ Пусть также

$$u|_{z_k+0} = u|_{z_k-0} + u_{0,k}; \qquad u'|_{z_k+0} = u'|_{z_k-0} + v_{0,k};$$
$$\Delta_\nu u|_{z_k+0} = \Delta_\nu u|_{z_k-0} + G_{0,k}^*; \quad \Delta_\nu' u|_{z_k+0} = \Delta_\nu' u|_{z_k-0} + Q_{0,k};$$

тогда частное решение при $z_k < z < z_{k+1}$ имеет следующий вид:

$$u_k^*(z) = \sum_{i=1}^{k} \{u_{0,i} Y_1(z, z_i) + v_{0,i} Y_2(z, z_i) + G_{0,i}^* Y_3(z, z_i) + Q_{0,i} Y_4(z, z_i)\}.$$

2. Рассмотрим частные решения неоднородного уравнения Бесселя в случаях, когда правая часть представляет произведение цилиндрической функции на квадрат аргумента. Начнем с другой простой задачи.

Пусть правая часть уравнения Бесселя представляет цилиндрическую функцию, имеющую индекс, отличный от индекса оператора:

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = z^{-2} Z_\mu(z), \qquad \mu \neq \nu.$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$u^* = \frac{1}{\mu^2 - \nu^2} Z_\mu(z).$$

Частное решение неоднородного уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{du}{dz} + \left(1 - \frac{\nu^2}{z^2}\right) u = Z_\nu(\lambda z) \tag{17.12}$$

имеет вид

$$u = \frac{Z_\nu(\lambda z)}{1 - \lambda^2}, \qquad \lambda \neq 1.$$

Этот результат становится непригодным, если $\lambda = 1$. Решение неоднородного уравнения (17.12) в этом случае

будем называть *резонансным решением*; для его разыскания воспользуемся предельным переходом.

Решение уравнения (17.12) при начальных условиях $u(z_0)=0$, $u'(z_0)=0$ можно записать в виде

$$u=\frac{1}{1-\lambda^2}\{-Z_\nu(\lambda z_0)Y_1(z, z_0)-\lambda Z'_\nu(\lambda z_0)Y_2(z, z_0)+Z_\nu(\lambda z)\},$$

где штрихом обозначено дифференцирование по аргументу λz. При $\lambda=1$ знаменатель и выражение в скобках обращаются в нуль; используя правило Лопиталя, получим

$$u(z)=$$
$$=-\frac{1}{2}\left[-z_0Z'_\nu(z_0)Y_1(z, z_0)+\left(z_0-\frac{\nu^2}{z_0}\right)Z_\nu(z_0)Y_2(z, z_0)+zZ'_\nu(z)\right].$$

Рассмотрим более простой частный случай. Решение уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{du}{dz}+u=AJ_0(\lambda z)$$

при начальных условиях $u(0)=0$, $u'(0)=0$ и при $\lambda\neq 1$ имеет вид

$$u=\frac{A}{1-\lambda^2}[J_0(\lambda z)-J_0(z)].$$

Применяя предельный переход $(\lambda\to 1)$, получим резонансное решение

$$u=\frac{Az}{2}J_1(z).$$

§ 18. Произведения бесселевых функций

В этом параграфе рассматриваются некоторые свойства произведений бесселевых функций, уже встречавшихся в §§ 11 и 17. Здесь выводятся дифференциальные уравнения, которым удовлетворяют эти произведения, и даются интегральные представления последних. Вопрос о разложении произведений бесселевых функций в степенные ряды рассмотрен в [7].

Вначале, следуя Ватсону [7], Орру и Аппелю, рассмотрим два дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2v}{dz^2}+R_1(z)v=0, \quad \frac{d^2w}{dz^2}+R_2(z)w=0. \qquad (18.1)$$

Обозначив произведение vw через y, получим

$$y'' = v''w + 2v'w' + vw'' = -(R_1 + R_2)\,y + 2v'w'.$$

Отсюда

$$y'' + (R_1 + R_2)\,y = 2v'w'.$$

Дифференцируя это уравнение, будем иметь

$$y''' + 2(R_1 + R_2)\,y' + (R_1' + R_2')\,y = (R_1 - R_2)(v'w - vw'). \quad (18.2)$$

Частный случай $R_1 = R_2$ приводит к дифференциальному уравнению третьего порядка

$$y''' + 4R_1y' + 2R_1'y = 0. \quad (18.3)$$

Если $R_1 \neq R_2$, то

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{y''' + 2(R_1 + R_2)\,y' + (R_1' + R_2')\,y}{R_1 - R_2}\right\} = -(R_1 - R_2)\,y. \quad (18.4)$$

Остановимся на случае $R_1 = -R_2$, который приводит к произведению, содержащему две функции, аргументы которых отличаются множителем, равным мнимой единице. Имеем

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{y'''}{2R_1}\right) = -2R_1y \quad \text{или} \quad y^{IV} - \frac{R_1'}{R_1}\,y''' + 4R_1^2y = 0. \quad (18.5)$$

Положим $R_1 = c^2z^{2q-2}$, тогда (18.5) принимает вид

$$y^{IV} - 2(q-1)\frac{y'''}{z} + 4c^4z^{4(q-1)}y = 0. \quad (18.6)$$

При принятых выражениях R_1 и R_2 уравнения (18.1) приводятся, как это показано в § 13, к уравнению Бесселя; следовательно (см. стр. 47), решением (18.6) будет

$$y = zZ^*_{1/(2q)}(cz^q/q)\,Z_{1/(2q)}(ciz^q/q).$$

Здесь Z^* и Z могут быть различными цилиндрическими функциями, например, Z^* — функция Бесселя, Z — функция Ганкеля. При $q = 1$ имеем тривиальный случай $y^{IV} + 4c^4y = 0$. Если $q = 3/2$, то

$$y^{IV} - \frac{y'''}{z} + 4c^4z^2y = 0,$$

$$y = zZ^*_{1/5}(2cz^{1,5}/3)\,Z_{1/5}(2icz^{1,5}/3). \quad (18.7)$$

При $z = i\xi$, $q = 3/2$

$$\frac{d^4y}{d\xi^4} - \frac{1}{\xi}\frac{d^3y}{d\xi^3} - 4c^4\xi^2 y = 0, \tag{18.8}$$

$$y = \xi Z^*_{1/4}(2ci\sqrt{i}\,\xi^{1,5}/3)\,Z_{1/4}(2c\sqrt{i}\,\xi^{1,5}/3).$$

Положив $y = zt(z)$, получим при $q = 3/2$

$$t^{IV} + 3t'''/z - 3t''/z^2 + 4c^4z^2t = 0, \quad t = y/z, \tag{18.9}$$

где y выражается формулой (18.7).

Если положить $R_1 = R_2$, то для случая $R_1 = e^{2z} - \nu^2$ будем иметь (см. стр. 49)

$$v = Z_{\pm\nu}(e^z),$$

и, следовательно,

$$y = Z_{\pm\nu}(e^z)\,Z^*_{\pm\nu}(e^z).$$

Дифференциальное уравнение, имеющее указанное решение, получим сразу из (18.3)

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2}{dz^2} - 4\nu^2\right)y + 4e^{2z}\left(\frac{d}{dz} + 1\right)y = 0. \tag{18.10}$$

Если решение представлено произведением

$$y = z^2 Z_{\pm\nu}(e^{1/z})\,Z^*_{\pm\nu}(e^{1/z}),$$

то соответствующее уравнение имеет вид

$$\frac{d^3y}{dz^3} + 4\,\frac{e^{2/z} - \nu^2}{z^4}\,y' - 4\,\frac{e^{2/z} + 2z\,(e^{2/z} - \nu^2)}{z^6}\,y = 0. \tag{18.11}$$

Если $R_2 = kR_1$, $k \neq 1$, то

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{\dfrac{d^3y}{dz^3} + 2(1+k)\,R_1y' + (1+k)\,R_1'y}{(1-k)\,R_1}\right\} = -(1-k)\,R_1y$$

или

$$\frac{d}{dz}\left\{\frac{y'''}{R_1} + 2(1+k)y' + (1+k)\frac{R_1'}{R_1}y\right\} + (1-k)^2 R_1 y = 0. \tag{18.12}$$

Рассмотрим задачу о построении фундаментальных функций Коши для уравнения (18.5).

Имеем по-прежнему

$$y = vw, \quad v'' + R_1 v = 0, \quad w'' - R_1 w = 0. \qquad (18.13)$$

Обозначим фундаментальные функции Коши[1]) уравнений (18.1): v_1, v_2, w_1, w_2; при этом, если $z < a$, то v_1, v_2, w_1, w_2 равны тождественно нулю; при $z = a$

$$v_1(a) = 1; \quad v_1'(a) = 0; \quad v_2(a) = 0; \quad v_2'(a) = 1;$$
$$w_1(a) = 1; \quad w_1'(a) = 0; \quad w_2(a) = 0; \quad w_2'(a) = 1.$$

Прежде всего построим функцию

$$y_1 = v_1 w_1, \quad z \geqslant a.$$

Очевидно,

$$y_1' = v_1' w_1 + v_1 w_1',$$
$$y_1'' = v_1'' w_1 + v_1 w_1'' + 2v_1' w_1' = 2v_1' w_1',$$
$$y_1''' = 2R_1 [-v_1 w_1' + w_1 v_1'],$$
$$y_1^{\mathrm{IV}} = -4R_1^2 v_1 w_1 + 2R_1' [-v_1 w_1' + v_1' w_1].$$

При $z = a$

$$y_1(a) = 1, \quad y_1'(a) = 0, \quad y_1''(a) = 0, \quad y_1'''(a) = 0.$$

Введем функции

$$y_2 = \frac{v_2 w_1 + v_1 w_2}{2}, \quad y_3 = \frac{1}{2} v_2 w_2,$$
$$y_4 = \frac{v_2 w_1 - v_1 w_2}{4R_1(a)} \quad \text{при } z \geqslant a,$$
$$y_2 = y_3 = y_4 = 0 \quad \text{при } z < a.$$

Выполнив дифференцирование этих функций и определив значения y_2, y_3, y_4 и их производных при $z = a$, получим сразу, что y_1, y_2, y_3, y_4 образуют систему

---

[1]) Эти функции можно легко построить, воспользовавшись результатами п. 1 § 17.

фундаментальных функций Коши, т. е. при $z = a$ имеем

	y_1	y_2	y_3	y_4
y	1	0	0	0
y'	0	1	0	0
y''	0	0	1	0
y'''	0	0	0	1

Перейдем к интегральным представлениям произведений бесселевых функций. Существенным для дальнейшего является использование теорем сложения бесселевых функций.

Приведем теорему сложения Неймана (см. § 11)

$$Y_0\left(\sqrt{\alpha^2+\xi^2-2\alpha\xi\cos\theta}\right)=2\sum_{m=0}^{\infty}{}'J_m(\alpha)\,Y_m(\xi)\cos m\theta, \quad (18.14)$$

$$\alpha\leqslant\xi.$$

Положим $\alpha = \xi$, тогда левая часть (18.14) примет вид $Y_0\left(2\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right)$. Обозначим затем $\theta/2 = \varphi$; умножив это равенство на $\cos 2n\varphi$ и проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}Y_0(2\alpha\sin\varphi)\cos 2n\varphi\,d\varphi=Y_n(\alpha)\,J_n(\alpha). \quad (18.15)$$

Аналогичные формулы сразу получаются и для функций чисто мнимого и комплексного аргумента из соответствующих теорем сложения, приведенных в § 11.

Воспользуемся теперь обобщением теоремы сложения Неймана (см. § 11)

$$Z_\nu\left(\sqrt{\alpha^2+\xi^2-2\alpha\xi\cos\theta}\right)\cos\nu\psi=2\sum_{m=0}^{\infty}{}'Z_{\nu+m}(\xi)\,J_m(\alpha)\cos m\theta,$$

$$\alpha\leqslant\xi;$$

положим $\alpha = \xi$, умножив обе части равенства на $\cos n\theta$ и проинтегрировав, получим

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}Z_\nu\left(2\alpha\sin\frac{\theta}{2}\right)\cos\left[\frac{\nu(\pi-\theta)}{2}\right]\cos n\theta\,d\theta=Z_{\nu+n}(\alpha)\,J_n(\alpha).$$

Аналогичным образом можно получить при $\alpha \leqslant \xi$

$$Z_{\nu+n}(\xi)\, J_n(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z_\nu\left(\sqrt{\alpha^2+\xi^2-2\alpha\xi\cos\theta}\right) \cos\psi\nu \cos n\theta\, d\theta.$$

Формула

$$\int_0^{\pi/2} J_{\nu+\mu}(2\alpha\cos\theta)\cos[(\mu-\nu)\theta]\, d\theta = \frac{\pi}{2} J_\nu(\alpha)\, J_\mu(\alpha), \quad (18.16)$$

$$\operatorname{Re}(\mu+\nu) > -1,$$

может быть получена в результате представления бесселевых функций, входящих в произведение, в виде степенных рядов [7].

Для произведения бесселевых функций с различными аргументами доказана формула [7] [1])

$$J_\mu(az)\, J_\nu(bz) = \frac{(az/2)^\mu\,(bz/2)^\nu}{\Gamma(\mu+1)} \times$$

$$\times \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda\,(bz/2)^{2\lambda}}{\lambda!\,\Gamma(\nu+\lambda+1)}\, {}_2F_1(-\lambda,\ -\nu-\lambda;\ \mu+1;\ a^2/b^2). \quad (18.17)$$

§ 19. Интегральные представления бесселевых функций

Выше, в §§ 10, 14, рассматривались два интегральных представления функции Бесселя — интеграл Бесселя и интеграл Пуассона. В этом параграфе с помощью теории функций комплексного переменного будет рассмотрено несколько контурных интегралов, являющихся обобщением интеграла Пуассона; после этого без выводов будут приведены некоторые результаты, связанные с аналогичными обобщениями интеграла Бесселя.

Напомним, что интеграл Пуассона дает для функции Бесселя следующее представление:

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)} \int_{-1}^{1} (1-t^2)^{\nu-1/2}\, e^{izt}\, dt.$$

[1]) См. также Кратцер А. и Франц В., Трансцендентные функции, ИЛ, 1963.

Постараемся обобщить этот результат, рассмотрев контурные интегралы типа

$$v(z) = \int_C T(t)\, e^{izt}\, dt. \tag{19.1}$$

Выясним, каковы должны быть контур C и функция $T(t)$ для того, чтобы функция $z^\nu v$ была решением уравнения Бесселя с индексом ν.

Функция $v(z)$ удовлетворяет уравнению

$$zv'' + (2\nu + 1)\, v' + zv = 0. \tag{19.2}$$

Дифференцируя (19.1), внесем затем полученные выражения в (19.2) и проинтегрируем по частям произведения zv'' и zv; в результате получим

$$it^2T(t) - iT(t)]\, e^{izt}\,|_C -$$

$$- i \int_C [t^2T'(t) + 2tT(t) - (2\nu + 1)\, tT - T'(t)]\, e^{izt}\, dt = 0. \tag{19.3}$$

Здесь символ $|_C$ означает приращение величины, стоящей перед вертикальной чертой при обходе контура C в положительном направлении.

Для того чтобы равенство (19.3) выполнялось, очевидно, достаточно, чтобы каждое из двух слагаемых, находящихся в левой части, равнялось нулю; приравнивая нулю первое слагаемое, получим

$$[T(t)\,(t^2 - 1)]\, e^{izt}\,|_C = 0$$

и, учитывая, что второе слагаемое обращается в нуль, если выражение в квадратной скобке равно нулю, будем иметь

$$\frac{d}{dt}\,[T(t)\,(t^2 - 1)] = (2\nu + 1)\, T(t)\, t. \tag{19.4}$$

Интегрируя (19.4), получим с точностью до постоянного множителя

$$T(t) = (t^2 - 1)^{\nu - 1/2}. \tag{19.5}$$

Будем полагать, что индекс ν не принимает значений $\nu = n + 1/2$ (где $n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$), так как в этом случае подынтегральная функция будет аналитической при $t = \pm 1$ и интегралы типа (19.1) обратятся в нуль.

При принятом допущении функция (19.5) многозначна.

Если контур представляет замкнутую кривую, внутри которой находится одна из точек $t = \pm 1$, то при ее обходе в положительном направлении аргумент увеличивается на $(\nu - 1/2)\pi i$.

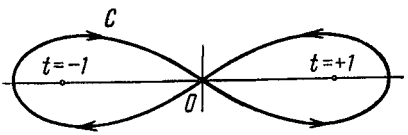

Рис. 2.

Приняв контур C в виде, изображенном на рис. 2, будем обходить обе указанные точки в различных направлениях, и поэтому функция сохранит свое значение при обходе всего контура. Следовательно, применяя интегрирование по указанному замкнутому контуру, можно получить представление интеграла уравнения Бесселя в виде

$$u = z^{\nu} \int_C (t^2 - 1)^{\nu - 1/2} e^{zti}\, dt. \qquad (19.6)$$

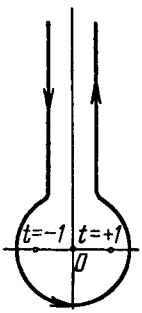

Рис. 3.

Придавая контуру ту или иную форму, можно получить различные интегральные представления бесселевых функций.

Вторая группа интегральных представлений может быть получена, если контуром является незамкнутая кривая и в бесконечно удаленных точках произведение $(t^2 - 1)^{\nu - 1/2} e^{zti}$ стремится к нулю.

Если интегрирование производится по контуру, изображенному на рис. 3, то для точки контура $b + iy$ входящая в подынтегральное выражение экспоненциальная функция будет иметь вид

$$\exp[iz(b + iy)], \qquad \operatorname{Re} z > 0.$$

При $y \to \infty$ подынтегральная функция стремится к нулю, а интеграл (19.6) сходится абсолютно.

Остановимся на случае, когда контур имеет вид, изображенный на рис. 2.

Условимся приписывать многозначной функции $(t^2 - 1)^{\nu - 1/2}$ для контура такого вида знак плюс при $t > 1$.

Интеграл (19 6) сходится при $\operatorname{Re} z > 0$; дифференцирование под знаком интеграла законно, и интеграл есть аналитическая функция от ν при всех значениях ν.

Покажем, что при определенном выборе постоянного множителя интеграл (19.6) представляет функцию Бесселя $J_\nu(z)$. Ниже будет доказано, что интеграл по восьмерке, который является обобщением Ганкеля интеграла Пуассона, сводится к обычному интегралу Пуассона (рассмотренному в § 14) и, следовательно, представляет функцию Бесселя $J_\nu(z)$.

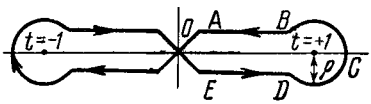

Рис. 4.

Будем интегрировать по симметричному контуру [1]), изображенному на рис. 4. Достаточно рассмотреть интеграл по половине контура, расположенной в правой полуплоскости и состоящей из двух наклонных отрезков OA и OE, двух горизонтальных отрезков AB и ED и дуги BCD, имеющей центром точку t $(1, 0)$. Обозначим радиус дуги через ρ, $\rho \leqslant 1$; очевидно, что на дуге справедливо неравенство

$$\left|(t^2-1)^{\nu-1/2}\, e^{zti}\right| < C\rho^{\nu-1/2},$$

где C — некоторая постоянная.

Отсюда следует, что интеграл по дуге не может быть больше, чем $C\rho^{\nu-1/2}2\pi\rho = 2\pi C\rho^{\nu+1/2}$. Таким образом, при $\nu + 1/2 > 0$ интеграл по дуге стремится к нулю при $\rho \to 0$. Очевидно, что при стремлении ρ к нулю, одновременно стремятся к нулю длины отрезков OE и OA, а на отрезке AB функция T имеет модуль $(t^2-1)^{\nu-1/2}$ и аргумент $-\pi i(\nu - 1/2)$.

На участке ED модуль функции $T(t)$ по-прежнему равен $(t^2-1)^{\nu-1/2}$, а аргумент ее будет $-\pi i(\nu - 1/2)$. Очевидно, что по наклонным отрезкам модуль подынтегральной функции будет меньше единицы. Следовательно, интеграл по правой половине петли равен сумме интегралов по отрезкам AB и ED, длины которых в пределе

[1]) См. [28].

при $\rho \to 0$ стремятся к единице, поэтому

$$u = 2z^{\nu}\left[e^{-\pi(\nu-1/2)i}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2}e^{itz}\,dt - \right.$$

$$\left. - e^{\pi i(\nu-1/2)}\int_0^1 (1-t^2)^{\nu-1/2}e^{itz}\,dt\right] =$$

$$= 2z^{\nu}i\sin(\nu-1/2)\pi\int_{-1}^{1}(1-t^2)^{\nu-1/2}e^{itz}\,dt.$$

Сравнивая этот результат с интегралом Пуассона, получим окончательно

$$J_{\nu}(z) = \frac{u}{2^{\nu+1}i\sqrt{\pi}\cos\nu\pi\Gamma(\nu+1/2)} =$$

$$= \frac{(z/2)^{\nu}}{2i\sqrt{\pi}\cos\nu\pi\Gamma(\nu+1/2)}\int_C (t^2-1)^{\nu-1/2}e^{izt}\,dt, \qquad (19.7)$$

что и является обобщением Ганкеля интеграла Пуассона.

Ограничение $\nu + 1/2 > 0$ не является обязательным, поскольку обе части равенства являются аналитическими функциями ν, и по принципу аналитического продолжения результат является верным для любого ν.

Рассмотрим теперь петлеобразный контур (см. рис. 3) и покажем, что, интегрируя по этой петле, приходим к представлению функции Бесселя $J_{-\nu}(z)$. Потребуем, чтобы круг $|t| = 1$ был внутри контура, тогда $(t^2-1)^{\nu-1/2}$ можно разложить в равномерно сходящийся на контуре ряд по убывающим степеням t:

$$(t^2-1)^{\nu-1/2} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}t^{2\nu-1-2m}.$$

Здесь t — комплексная переменная с аргументом φ ($-3\pi/2 < \varphi < \pi/2$), а ее модуль больше единицы. Тогда почленное интегрирование является возможным и

поэтому

$$z^{\nu}\int\limits_{\infty i}^{(-1+,\ 1+)} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{z^{\nu}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}\int\limits_{\infty i}^{(-1+,\ 1+)} t^{2\nu-1-2m}e^{izt}\,dt.$$

Известно [7], что

$$\int\limits_{C_1} t^{2\nu-2m-1}e^{zti}\,dt = \frac{(-1)^m\,2\pi e^{-\nu\pi i}z^{2m-2\nu}i}{\Gamma(2m-2\nu+1)},$$

где C_1 — контур, изображенный на рис. 3, и, следовательно,

$$z^{\nu}\int\limits_{\infty i}^{(-1+,\ 1+)} e^{izt}(t^2-1)^{\nu-1/2}\,dt = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\,2\pi i z^{-\nu+2m}\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu+m\right)}{m!\,\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)\Gamma(2m-2\nu+1)} =$$

$$= \frac{2^{\nu+1}\pi i e^{-\nu\pi i}\Gamma(1/2)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}-\nu\right)}J_{-\nu}(z). \qquad (19.8)$$

Это обобщение интеграла Пуассона получено при следующих ограничениях: $\operatorname{Re} z>0$ и $\nu+1/2$ не является целым положительным числом.

Через функции $J_\nu(z)$ и $J_{-\nu}(z)$ можно выразить функции $H_\nu^{(1)}(z)$ и $H_\nu^{(2)}(z)$. Не проводя выкладок, напишем сразу формулы

$$H_\nu^{(1)}(z) = \frac{(z/2)^\nu}{i\sqrt{\pi}\cos\nu\pi\,\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_{\lambda_4}(t^2-1)^{\nu-1/2}e^{zti}\,dt, \qquad (19.9)$$

$$H_\nu^{(2)}(z) = \frac{(z/2)^\nu}{i\sqrt{\pi}\cos\nu\pi\,\Gamma(\nu+1/2)}\int\limits_{\lambda_3}(t^2-1)^{\nu-1/2}e^{zti}\,dt; \qquad (19.10)$$

здесь ν — нецелое число, а контуры λ_3 и λ_4 изображены на рис. 5 (формулы верны и при целых индексах).

Из этих формул можно получить обобщенные интегралы Мелера — Сонина. Изменяя в интегралах (19.9) и (19.10) контур интегрирования, получим интегралы по контурам, изображенным на рис. 6.

Деформируя эти контуры соответственно в бесконечные полуинтервалы

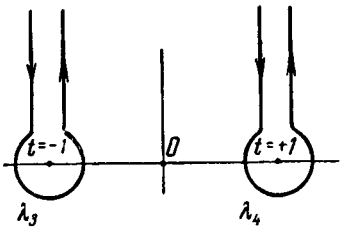

Рис. 5.

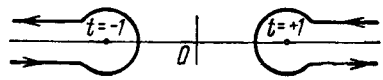

Рис. 6.

вещественной оси $(-\infty, -1]$ и $[+1, \infty)$, каждый из которых взят два раза, можно получить формулы

$$H_\nu^{(1)}(x) = \frac{\Gamma(1/2 - \nu)(x/2)^\nu}{\pi i \Gamma(1/2)} [1 - e^{-2(\nu - 1/2)\pi i}] \int_1^\infty e^{ixt} (t^2 - 1)^{\nu - 1/2}\, dt; \tag{19.11}$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = \frac{\Gamma(1/2 - \nu)(x/2)^\nu}{\pi i \Gamma(1/2)} [1 - e^{2(\nu - 1/2)\pi i}] \int_1^\infty e^{-ixt} (t^2 - 1)^{\nu - 1/2}\, dt. \tag{19.12}$$

Обобщения интеграла Бесселя получены в работах Шлефли и Сонина. Приведем без вывода формулу

$$J_\nu(z) = \frac{(z/2)^\nu}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0+)} t^{-\nu - 1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt, \quad |\arg z| < \pi/2. \tag{19.13}$$

Если в этой формуле положить $t = \frac{1}{2} z e^w$, то получается выражение

$$J_\nu(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\infty - \pi i}^{\infty + \pi i} e^{z \operatorname{sh} w - \nu w}\, dw, \tag{19.14}$$

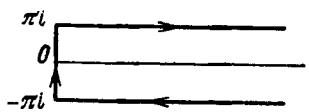

Рис. 7.

при этом контур интегрирования представляет три стороны прямоугольника, изображенного на рис 7, с вершинами в точках $(\infty; -\pi i)$, $(0; -\pi i)$, $(0; \pi i)$, $(\infty; +\pi i)$.

ГЛАВА II

ОПРЕДЕЛЕННЫЕ И НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ. РЯДЫ ПО БЕССЕЛЕВЫМ ФУНКЦИЯМ

§ 20. Определенные интегралы

В этом параграфе рассматриваются интегралы Сонина и некоторые их обобщения. Кроме того, здесь приводятся очень краткие сведения о тригонометрических интегралах Каптейна.

Роль определенных интегралов Сонина в последующей части курса достаточно велика. Они используются в теории несобственных интегралов (§ 21), а также при изучении парных интегральных уравнений (§ 22). Определенные интегралы Сонина от функций Струве и Ломмеля также используются в § 21 для разыскания несобственных интегралов от этих функций. Читатель может обратить внимание на связь некоторых выводов, приводящихся в этом параграфе, с содержанием § 14. Указанная связь объясняется тем, что интеграл Пуассона есть частный случай первого интеграла Сонина.

Можно отметить, что эвристические подходы, о которых шла речь при изложении интеграла Бесселя, могут быть в известной мере использованы и при изложении теории интегралов Сонина. Нетрудно, в частности, показать, что в простейшем случае рассмотренный ниже интеграл (20.1) дает образ симметричной относительно центра сферической волны как суперпозицию осесимметричных цилиндрических волн.

Сначала рассмотрим *первый интеграл Сонина*

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(z\sin\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta = \frac{2^\nu\Gamma(1+\nu)}{z^{\nu+1}}J_{\mu+\nu+1}(z), \quad (20.1)$$

$$\operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}\nu > -1.$$

Вывод этой формулы можно провести по той же схеме, которая была принята в § 14 при рассмотрении ин-

теграла Пуассона. Разложим подынтегральную функцию (20.1) в ряд по степеням z и воспользуемся формулой (8), получив при этом

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(z\sin\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{\mu+2m}}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)\,2^{2m+\mu}} \int_0^{\pi/2} \sin^{2\mu+2m+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{2^\nu\Gamma(1+\nu)}{z^{\nu+1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\mu+\nu+2m+1}}{m!\,\Gamma(\mu+\nu+m+2)} = \frac{2^\nu\Gamma(1+\nu)}{z^{\nu+1}} J_{\mu+\nu+1}(z).$$

Очевидно, что при $\mu = -1/2$ первый интеграл Сонина переходит в интеграл Пуассона.

Выполнив выкладки, аналогичные приведенным выше, и воспользовавшись разложением функции Ломмеля $s_{\mu,\nu}(z)$ в степенной ряд, получим

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(z\sin\theta)\sin^{1-\mu}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2^{\mu-1}z^{\nu+1}\Gamma(\mu)}\, s_{\mu+\nu,\,\nu-\mu+1}(z). \qquad (20.2)$$

При $\nu = -1/2$ равенство (20.2) переходит в следующее:

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(z\sin\theta)\sin^{1-\mu}\theta\,d\theta = (\pi/(2z))^{1/2}\,\mathbf{H}_{\mu-1/2}(z). \qquad (20.3)$$

Рассмотрим первый интеграл Сонина от функций Струве. Для этого сначала разложим, воспользовавшись (16.21), в ряд по степеням z интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{H}_\mu(z\sin\theta)\sin^{k+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\mu+2m+1}}{\Gamma(m+3/2)\,\Gamma(\mu+m+3/2)} \int_0^{\pi/2} \sin^{\mu+k+2m+2}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{\mu+2m+1}}{\Gamma(m+3/2)\,\Gamma(\mu+m+3/2)} \frac{\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+m+\frac{k}{2}+\frac{3}{2}\right)\Gamma(\nu+1)}{2\Gamma\left(\frac{\mu}{2}+\nu+m+\frac{k}{2}+\frac{5}{2}\right)};$$

полагая затем $k = \mu$, получим

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{H}_\mu(z\sin\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(\nu+1)}{2(z/2)^{\nu+1}}\mathbf{H}_{\mu+\nu+1}(z); \tag{20.4}$$

если же положить $k = -\mu$, то в результате несложных преобразований, вводя обозначения $\mu_1 = \mu + \nu + 1$, $\nu_1 = \nu - \mu + 1$, будем иметь

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{H}_\mu(z\sin\theta)\sin^{1-\mu}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(z/2)^{\mu+2m+1}\Gamma(\nu+1)}{\Gamma((\mu_1-\nu_1+2m+3)/2)\,\Gamma((\mu_1+\nu_1+2m+3)/2)} =$$

$$= \frac{\Gamma(\nu+1)}{2^\mu\Gamma(\mu+1/2)\,\Gamma(\nu+3/2)\,z^{\nu+1}}\,s_{\mu_1,\nu_1}(z). \tag{20.5}$$

Выведем интеграл Сонина для функций Ломмеля. разложив в ряд по степеням z интеграл

$$\int_0^{\pi/2} s_{\mu,\nu}(z\sin\theta)\sin^{\mu+1+k_1}\theta\cos^{2\nu+k}\theta\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m 2^{\mu-1}(z/2)^{2m+1+\mu}\Gamma((\mu-\nu+1)/2)\,\Gamma((\mu+\nu+1)/2)}{\Gamma((\mu-\nu+2m+3)/2)\,\Gamma((\mu+\nu+2m+3)/2)}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2}\sin^{2m+2\mu+2+k_1}\theta\cos^{2\nu+k}\theta\,d\theta =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m\left(\frac{z}{2}\right)^{2m+1+\mu}2^{\mu-1}\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\mu-\nu+2m+3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\mu+\nu+n+3}{2}\right)}\times$$

$$\times\frac{\Gamma\left(m+\mu+\frac{3}{2}+\frac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(m+\mu+\nu+\frac{k}{2}+\frac{k_1}{2}+2\right)}.$$

Полагая затем $k_1 = \nu - \mu$, после некоторых преобразований получим

$$\int_0^{\pi/2} s_{\mu,\,\nu}(z\sin\theta)\sin^{\nu+1}\theta\cos^{2\nu+k}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma((\mu+\nu+1)/2)\,\Gamma((2\nu+k+1)/2)}{2\Gamma((3\nu+\mu+k+2)/2)}\,z^{-\nu-k/2-1/2}\times \times s_{\mu+\nu+k/2+1/2,\;2\nu+k/2+1/2}(z). \qquad (20.6)$$

Представляют известный интерес интегралы, у которых аргумент бесселевой функции пропорционален квадрату синуса. Нетрудно показать [73], что

$$\int_0^{\pi/2} J_\nu(z\sin^2\theta)\sin^{2\nu+3}\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2z}\,J_{\nu+1}(z), \qquad (20.7)$$

$$\int_0^{\pi/2} \mathbf{H}_\nu(z\sin^2\theta)\sin^{2\nu+3}\theta\cos\theta\,d\theta = \frac{1}{2z}\,\mathbf{H}_{\nu+1}(z), \qquad (20.8)$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1.$$

Приведем важную формулу, доказанную Рутгерсом, а затем Ватсоном:

$$\int_0^{\pi/2} J_\nu(z\sin^2\theta)\,J_\nu(z\cos^2\theta)\sin^{2\nu+1}\theta\cos^{2\nu+1}\theta\,d\theta = \frac{\Gamma(\nu+1/2)\,J_{2\nu+1/2}(z)}{2^{2\nu+3/2}\Gamma(\nu+1)\,z^{1/2}}, \qquad \operatorname{Re}\nu > -1/2. \qquad (20.9)$$

Ссылки на источники, в которых помещены обобщения этой формулы, см. в [4].

Рассмотрим *второй интеграл Сонина*

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(aq\cos\varphi)\,J_\nu(az\sin\varphi)\cos^{\mu+1}\varphi\sin^{\nu+1}\varphi\,d\varphi = \frac{q^\mu z^\nu}{a}\,\frac{J_{\mu+\nu+1}\left(a\sqrt{q^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{z^2+q^2}\right)^{\nu+\mu+1}}, \qquad (20.10)$$

$$\operatorname{Re}\mu > -1, \quad \operatorname{Re}\nu > -1.$$

Для доказательства этой формулы, разложим подынтегральную функцию в ряд по степеням aq, поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся первым интегралом Сонина; полученный ряд можно просуммировать с помощью разложения Ломмеля

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(aq\cos\varphi)\,J_\nu(az\sin\varphi)\cos^{\mu+1}\varphi\sin^{\nu+1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{aq}{2}\right)^{\mu+2m}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}\times$$

$$\times\int_0^{\pi/2} J_\nu(az\sin\varphi)\sin^{\nu+1}\varphi\cos^{2\mu+2m+1}\varphi\,d\varphi =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} J_{\nu+\mu+m+1}(az)\frac{2^{\nu+m}\Gamma(\mu+m+1)}{(az)^{\mu+m+1}}\frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(\mu+m+1)}\left(\frac{aq}{2}\right)^{\mu+2m} =$$

$$= \frac{q^\mu z^\nu}{a}\cdot\frac{J_{\nu+\mu+1}\left(a\sqrt{q^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{q^2+z^2}\right)^{\nu+\mu+1}}.$$

Вкратце рассмотрим некоторые *тригонометрические интегралы Каптейна.*

Решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^2u}{dz^2}+u=\varphi(z), \tag{20.11}$$

с нулевыми начальными условиями имеет вид

$$u=\int_0^z \varphi(t)\sin(z-t)\,dt.$$

Вычисление этого интеграла в случае, когда правая часть (20.11) выражена через бесселевы функции, приводит к интегралам Каптейна. Положим $\varphi(z)=J_0(z)$; как это легко показать,

$$\int_0^z J_0(t)\sin(z-t)\,dt = zJ_1(z). \tag{20.12}$$

Положив $\varphi(z) = J_1(z)$, при вычислении u имеет интеграл

$$\int_0^z J_1(t) \sin(z-t)\, dt = \sin z - zJ_0(z). \qquad (20.13)$$

Справедливость этих равенств легко установить проверкой, для чего их нужно внести в уравнение (20.11).

Приведем еще один интеграл Каптейна

$$\int_0^z J_0(t) \cos(z-t)\, dt = zJ_0(z). \qquad (20.14)$$

Напишем два интеграла Каптейна, содержащих функции Струве,

$$\int_0^z \mathbf{H}_0(t) \sin(z-t)\, dt = z\mathbf{H}_1(z) - \frac{2z}{\pi}, \qquad (20.15)$$

$$\int_0^z \mathbf{H}_1(t) \sin(z-t)\, dt = \frac{4}{\pi} - z\mathbf{H}_0(z), \qquad (20.16)$$

проверка которых также не вызывает затруднений.

Весьма важный интеграл, полученный Бейтменом,

$$\frac{J_{\nu+\rho+1}(z)}{\rho+1} = \int_0^z J_\nu(z-a)\, J_{\rho+1}(a)\, \frac{da}{a}, \qquad (20.17)$$

приводится в [7]; на основе использования этого интеграла Рутгерсом получено в [81] довольно много (более четырехсот) различных определенных интегралов, содержащих функции Бесселя.

§ 21. Несобственные интегралы

В этом параграфе рассматриваются несобственные интегралы, в подынтегральные выражения которых входят бесселевы функции или функции, родственные им. Многие из этих интегралов встречаются при получении интегральных преобразований Бесселя [5], [6], [13].

В п. 1 этого параграфа рассматриваются несобственные интегралы от функций Бесселя, в п 2 вычисляются

интегралы от функций Струве и Ломмеля; вопрос о применении интегральных преобразований Бесселя для вычисления некоторых интегралов вкратце разбирается в п. 3; в п. 4 рассматриваются интегралы по индексу; п. 5 посвящен рассмотрению вопроса об улучшении сходимости некоторых несобственных интегралов.

1. Сначала рассмотрим *интеграл Липшица*

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}, \tag{21.1}$$

где $\operatorname{Re} a > 0$ и оба числа $\operatorname{Re}(a \pm ib)$ положительны.

Значение корня выбрано так, чтобы $|a+\sqrt{a^2+b^2}| > |b|$.

Для доказательства заменим бесселеву функцию под знаком интеграла через интеграл Бесселя, который в рассматриваемом случае переходит в интеграл Парсеваля, и переменим порядок интегрирования; таким образом, получим

$$\int_0^\infty e^{-at} J_0(bt)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty e^{-at}\,dt \int_0^\pi e^{ibt\cos\theta}\,d\theta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{d\theta}{a - ib\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Аналогичным образом можно доказать более общую формулу

$$\int_0^\infty e^{-at} J_n(bt)\,dt = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left\{\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}\right\}^n, \tag{21.2}$$

где n — целое число (см. [11]).

Для доказательства воспользуемся интегралом Бесселя в форме

$$J_n(x) = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\pi e^{ix\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi,$$

а затем переменим порядок интегрирования; таким образом,

$$\int_0^\infty e^{-at} J_n(bt)\,dt = \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\infty e^{-at}\,dt\int_0^\pi e^{ibt\cos\varphi}\cos n\varphi\,d\varphi =$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\pi \cos n\varphi\,d\varphi\int_0^\infty e^{-(a-ib\cos\varphi)t}\,dt =$$

$$= \frac{(-i)^n}{\pi}\int_0^\pi \frac{\cos n\varphi\,d\varphi}{a-ib\cos\varphi} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\left[\frac{\sqrt{a^2+b^2}-a}{b}\right]^n. \quad (21.3)$$

При выводе этой формулы предполагалось, что n — целое число, однако эта формула справедлива и при нецелых индексах ν, если $\operatorname{Re}\nu > -1$

Рассмотрим принадлежащее Ганкелю *обобщение интеграла Липшица.*

Если бесселеву функцию разложить в степенной ряд и поменять порядок интегрирования и суммирования, то в результате почленного интегрирования получим

$$\int_0^\infty e^{-at} J_\nu(bt)\,t^{\mu-1}\,dt =$$

$$= \sum_{m=0}^\infty \frac{(-1)^m (b/2)^{\nu+2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)}\cdot\frac{\Gamma(\mu+\nu+2m)}{a^{\mu+\nu+2m}} =$$

$$= \frac{(b/(2a))^\nu\,\Gamma(\mu+\nu)}{a^\mu\,\Gamma(\nu+1)}\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{\mu+\nu+1}{2};\ \nu+1, -\frac{b^2}{a^2}\right). \quad (21.4)$$

Равенство (21.4) справедливо при условии, что $\frac{|b|}{|a|} < 1$, так как только в этом случае почленное интегрирование законно; для сходимости интеграла в (21.4), кроме того, необходимо выполнение неравенства $\operatorname{Re}(a) > 0$. С помощью аналитического продолжения можно доказать, что (21.4) справедливо для более широкой области значений b при одновременном выполнении условий $\operatorname{Re}(a \pm ib) > 0$. Нильсен [76] назвал этот интеграл *интегральным представлением гипергеометрической функции.*

Формулу (21.4) можно переписать в следующем виде:

$$\int_0^\infty e^{-at} J_\nu(bt)\, t^{\mu-1}\, dt = \\ = \frac{(b/2)^\nu\, \Gamma(\mu+\nu)}{\Gamma(\nu+1)\,(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}(\mu+\nu)}}\, {}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu}{2}, \frac{1-\mu+\nu}{2};\ \nu+1;\ \frac{b^2}{a^2+b^2}\right). \tag{21.5}$$

Аналогичные результаты можно получить и для случая, когда подынтегральная цилиндрическая функция является функцией Неймана, для этого следует воспользоваться формулой (2.1).

Этот общий результат содержит много важных частных случаев; некоторые из них были рассмотрены выше.

Интересные результаты можно получить для случаев, когда гипергеометрическая функция сводится к элементарным; в частности, при μ, равном $\nu+1$ и $\nu+2$, имеем формулы, впервые полученные Гегенбауэром:

$$\int_0^\infty e^{-at} J_\nu(bt)\, t^\nu\, dt = \frac{(2b)^\nu\, \Gamma(\nu+1/2)}{(a^2+b^2)^{\nu+1/2}\sqrt{\pi}}, \tag{21.6}$$

$$\int_0^\infty e^{-at} J_\nu(bt)\, t^{\nu+1}\, dt = \frac{2a\,(2b)^\nu\, \Gamma(\nu+3/2)}{(a^2+b^2)^{\nu+3/2}\sqrt{\pi}}; \tag{21.7}$$

здесь $\operatorname{Re}\nu > -1/2$ и $\operatorname{Re}\nu > -1$ соответственно. Приведем без вывода (см. [7]) формулу

$$\int_0^\infty e^{-at} K_0(t)\, dt = \frac{\arccos a}{\sqrt{1-a^2}}, \tag{21.8}$$

где $\operatorname{Re} a > -1$; если положить в (21.8) $a = ib$, $|\operatorname{Im} b| < 1$, то

$$\int_0^\infty \cos bt\, K_0(t)\, dt = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\sqrt{1+b^2}}, \tag{21.9}$$

$$\int_0^\infty \sin btK_0(t)\, dt = \frac{\operatorname{arsh} b}{\sqrt{1+b^2}}. \tag{21.10}$$

Перейдем к рассмотрению *интеграла Вебера*

$$\int_0^\infty J_\nu(bt)\, t^{-\nu+\mu-1}\, dt = \frac{\Gamma(\mu/2)}{b^{\mu-\nu}2^{\nu-\mu+1}\,\Gamma(\nu-\mu/2+1)}, \qquad (21.11)$$

где $b>0$, $0<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}(\nu)+1/2$. Вебер доказал этот результат только для целых значений n; на любые значения ν этот результат был распространен Н. Я. Сониным. Формулу (21.11) можно получить из (21.5) в результате предельного перехода, полагая $a\to 0$.

Приведем вывод этой формулы, используя интеграл Пуассона и перемену порядка интегрирования и полагая, что $0<\operatorname{Re}\mu<\operatorname{Re}\nu+5/4$:

$$\int_0^\infty J_\nu(bt)\, t^{-\nu+\mu-1}\, dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu \int_0^\infty t^{\mu-1}\, dt \int_0^{\pi/2} \cos(bt\cos\varphi)\,(\sin\varphi)^{2\nu}\, d\varphi =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{b}{2}\right)^\nu \int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2\nu}\, d\varphi \int_0^\infty t^{\mu-1}\cos(bt\cos\varphi)\, dt =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{1}{2}\right)^\nu \frac{\Gamma(\mu)\cos(\pi\mu/2)}{b^{\mu-\nu}} \int_0^{\pi/2} (\sin\varphi)^{2\nu}(\cos\varphi)^{-\mu}\, d\varphi.$$

При этом, используя формулы (7) и (8) приложения, получаем (21.11).

Рассмотрим теперь *первый экспоненциальный интеграл Вебера*

$$\int_0^\infty J_0(at)\exp(-p^2t^2)\, t\, dt = \frac{1}{2p^2}\exp(a^2/(4p^2)), \qquad (21.12)$$

для сходимости которого необходимо, чтобы было $|\arg p|<\pi/4$.

Для доказательства этой формулы функция Бесселя раскладывается в степенной ряд, а затем изменяется порядок суммирования и интегрирования.

Обобщением интеграла Вебера является формула

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\exp(-p^2t^2)\,t^{\nu+1}\,dt = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right), \quad (21.13)$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1;$$

она доказывается точно так же, как и (21.12), а именно:

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\exp(-p^2t^2)\,t^{\nu+1}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\,(a/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \int_0^\infty e^{-p^2t^2} t^{2\nu+2k+1}\,dt =$$

$$= \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\,(a/2)^{\nu+2k}}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)} \cdot \frac{\Gamma(\nu+k+1)}{2p^{2(\nu+k+1)}} =$$

$$= \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}} \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k\,(a/2p)^{2k}}{k!} = \frac{a^\nu}{(2p^2)^{\nu+1}}\exp\left(-\frac{a^2}{4p^2}\right).$$

Более общая формула, которая доказывается аналогичным образом, имеет вид

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\exp(-p^2t^2)\,t^{\mu-1}\,dt =$$

$$= \frac{a^\nu\Gamma((\mu+\nu)/2)}{2^{\nu+1}p^{\mu+\nu}\Gamma(\nu+1)}\,{}_1F_1\left(\frac{1}{2}\nu - \frac{1}{2}\mu + 1;\ \nu+1;\ \frac{a^2}{4p^2}\right). \quad (21.14)$$

Приведем частный случай формулы (21.14)

$$\int_0^\infty J_{2\nu}(at)\exp(-p^2t^2)\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2p}\exp\left(-\frac{a^2}{8p^2}\right) I_\nu\left(\frac{a^2}{8p^2}\right); \quad (21.15)$$

заменяя ν на $-\nu$ и комбинируя эти два решения, получим

$$\int_0^\infty Y_{2\nu}(at)\exp(-p^2t^2)\,dt =$$

$$= -\frac{\sqrt{\pi}}{2p}\exp\left(-\frac{a^2}{8p^2}\right)\left[I_\nu\left(\frac{a^2}{8p^2}\right)\operatorname{tg}\nu\pi + \frac{1}{\pi}K_\nu\left(\frac{a^2}{8p^2}\right)\sec\nu\pi\right], \quad (21.16)$$

при $|\operatorname{Re}\nu| < 1/2$.

Если воспользоваться теоремами сложения (см. § 11), заменив в (21.14) a на $\tilde{\omega} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\varphi}$, и положить затем $\mu = 2$, то, как это показано в [7],

$$\int_0^\infty \exp(-p^2t^2) J_\nu(at) J_\nu(bt)\, t\, dt = \frac{1}{2p^2} \exp\left(-\frac{a^2+b^2}{4p^2}\right) I_\nu\left(\frac{ab}{2p^2}\right). \tag{21.17}$$

Эта формула верна при $|\arg p| < \pi/4$, $\operatorname{Re}\nu > -1$.

Рассмотрим еще *интегралы Ганкеля*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{z^{\rho-1} H_\nu^{(1)}(az)}{(z^2 - r^2)^{m+1}}\, dz; \tag{21.18}$$

выберем замкнутый контур L, изображенный на рис. 8. Имеем при $z = x$

$$z^{\rho-1} H_\nu^{(1)}(az) = x^{\rho-1} H_\nu^{(1)}(ax);$$

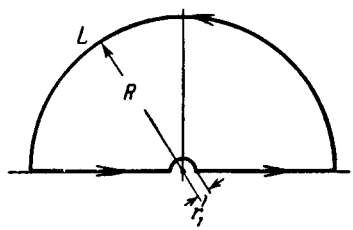

Рис. 8.

при $z = xe^{\pi i}$, т. е. на левой половине горизонтальной оси,

$$z^{\rho-1} H_\nu^{(1)}(az) = -\, x^{\rho-1} e^{\rho\pi i} H_\nu^{(1)}(axe^{\pi i}).$$

Если $R \to \infty$, $r_1 \to 0$, то

$$\int_0^\infty \frac{x^{\rho-1}\left[H_\nu^{(1)}(ax) - e^{\rho\pi i} H_\nu^{(1)}(axe^{\pi i})\right] dx}{(x^2 - r^2)^{m+1}} = \\ = 2\pi i \frac{1}{2m!} \left(\frac{d}{dr^2}\right)^m \left\{r^{\rho-2} H_\nu^{(1)}(ar)\right\}, \tag{21.19}$$

где выражение в правой части представляет умноженный на $2\pi i$ вычет при $z = r$.

Из (21.19), используя равенство $H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z)$ и положив $r = ik$, получим при $\operatorname{Re} k > 0$

$$\int_0^\infty \left[\cos\left[\frac{1}{2}(\rho - \nu)\pi\right] J_\nu(ax) + \right. \\ \left. + \sin\left[\frac{1}{2}(\rho - \nu)\pi\right] Y_\nu(ax)\right] \frac{x^{\rho-1}\, dx}{(x^2 + k^2)^{m+1}} = \\ = \frac{(-1)^{m+1}}{2^m m!} \left(\frac{d}{k\, dk}\right)^m \left[k^{\rho-2} K_\nu(ak)\right]. \tag{21.20}$$

Мелер указал частный случай этой формулы

$$\int_0^\infty \frac{xJ_0(ax)\,dx}{x^2+k^2} = K_0(ak). \tag{21.21}$$

Большое число интегралов, являющихся, по существу, обобщениями (21.21), можно получить, полагая, что в числителе стоит произведение двух бесселевых функций на степень аргумента, а в знаменателе — четный полином четвертой степени[1]). Здесь возможен такой путь: сначала, не меняя числителя (21.21) положим, что в знаменателе стоит четный полином четвертой степени. При этом можно воспользоваться интегрированием по тому же контуру. Затем с помощью формул сложения можно получить решение для случая, когда числитель подынтегрального выражения является произведением двух функций Бесселя. Далее можно ввести под интеграл степенные функции или заменить одну из функций Бесселя функцией Ломмеля, Струве или Ангера. Заметим, что фактическое вычисление некоторых из этих интегралов было проведено автором несколько иным путем в [20]: все эти интегралы являются решением задачи об интегрировании уравнения

$$(\Delta_\nu\Delta_\nu + b\Delta_\nu + 1)\,w = q(\xi), \tag{21.22}$$

где $q(\xi)$ — либо дельта-функция, либо некоторая финитная функция, например, степенная на каком-либо участке и тождественный нуль всюду, кроме этого участка.

Приведем лишь один из интегралов этого типа, когда аргумент x и числа a, b вещественны (см. стр. 199, 241):

$$\int_0^\infty \frac{xJ_0(ax)\,dx}{1+bx^2+x^4} = \frac{\pi}{2\sin 2\varphi}\,\tilde{f}_0(\rho); \tag{21.23}$$

несколько таких интегралов приведены в [20], а также во второй части книги.

---

[1]) Вопрос об интегралах (являющихся другим обобщением (21.21)), у которых не выполняется условие четности полинома, являющегося знаменателем подынтегрального выражения, рассматривается в п. 5 этого параграфа.

Приведем важные для приложений *разрывные интегралы* [1]) *Вебера — Сонина — Шафхейтлина*

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\,J_\nu(bt)}{t^\lambda}\,dt, \tag{21.24}$$

которые были для некоторых частных случаев вычислены Вебером; для всех значений параметров λ, μ, ν, при которых этот интеграл сходится, он был вычислен Сониным; Шафхейтлин в своем последующем исследовании отметил, что интеграл терпит при $a = b$ разрыв непрерывности. В общем случае интеграл Вебера — Сонина — Шафхейтлина выражается через гипергеометрические функции

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\,J_\nu(bt)}{t^\lambda}\,dt = \frac{b^\nu\Gamma\left(\frac{1}{2}\mu+\frac{1}{2}\nu-\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\right)}{2^\lambda a^{\nu-\lambda+1}\Gamma(\nu+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\lambda+\frac{1}{2}\mu-\frac{1}{2}\nu+\frac{1}{2}\right)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\ \frac{\nu-\lambda-\mu+1}{2};\ \nu+1;\ \frac{b^2}{a^2}\right) \tag{21.25}$$

при $0 < b < a$,

$$\int_0^\infty \frac{J_\mu(at)\,J_\nu(bt)}{t^\lambda}\,dt = \frac{a^\mu\Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^\lambda b^{\mu-\lambda+1}\Gamma\left(\frac{\nu+\lambda-\mu+1}{2}\right)\Gamma(\mu+1)}\times$$

$$\times\,{}_2F_1\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2},\ \frac{\mu+3\nu-\lambda+5}{2};\ \mu+1;\ \frac{a^2}{b^2}\right) \tag{21.26}$$

при $0 < a < b$; предполагается, что интегралы (21.25) и (21.26) сходятся (условия сходимости см. в [7]).

Доказательство формул (21.25), (21.26) можно получить, воспользовавшись интегральным представлением произведения бесселевых функций с различными индексами и аргументами, которое имеет вид

$$J_\mu(az)\,J_\nu(bz) =$$

$$= \frac{1}{\pi}(2az)^\mu(2bz)^\nu \int_{-\pi/2}^{\pi/2} e^{i\theta(\mu-\nu)}(\cos\theta)^{\nu+\mu}(\lambda z)^{-\mu-\nu}J_{\mu+\nu}(\lambda z)\,d\theta,$$

$$\operatorname{Re}(\nu+\mu) > -1, \quad \lambda = \sqrt{2\cos\theta\left(a^2e^{i\theta}+b^2e^{-i\theta}\right)}; \tag{21.27}$$

[1]) Ватсон называет их интегралами Вебера и Шафхейтлина.

если положить $z = t$, внести (21.27) в интеграл (21.24), переменить порядок интегрирования и воспользоваться затем интегралом Вебера (21.11), то в результате получим определенный интеграл, который выражается через гипергеометрическую функцию[1]) (см. [4]).

Рассмотрим частные случаи формул (21.25) и (21.26), положив в них $\nu = 1/2$, $\lambda = -1/2$:

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\sin bt\,dt = \begin{cases} \dfrac{\sin\{\mu \arcsin(b/a)\}}{\sqrt{a^2-b^2}}, & b<a, \\ \infty \quad \text{или} \quad 0, & b=a, \\ \dfrac{a^\mu \cos(\mu\pi/2)}{\sqrt{b^2-a^2}\{b+\sqrt{b^2-a^2}\}^\mu}, & b>a, \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(\mu) > -2; \qquad (21.28)$$

$$\int_0^\infty J_\mu(at)\cos bt\,dt = \begin{cases} \dfrac{\cos\{\mu \arcsin(b/a)\}}{\sqrt{a^2-b^2}} & b<a, \\ \infty \quad \text{или} \quad 0, & b=a, \\ -\dfrac{a^\mu \sin(\mu\pi/2)}{\sqrt{b^2-a^2}\{b+\sqrt{b^2-a^2}\}^\mu}, & b>a, \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(\mu) > -1; \qquad (21.29)$$

полагая затем $\mu = 0$, получим

$$\int_0^\infty J_0(at)\sin bt\,dt = \begin{cases} 0, & b<a, \\ \infty, & b=a, \\ 1/\sqrt{b^2-a^2}, & b>a; \end{cases} \qquad (21.30)$$

$$\int_0^\infty J_0(at)\cos bt\,dt = \begin{cases} 1/\sqrt{b^2-a^2}, & b<a, \\ \infty, & b=a, \\ 0, & b>a. \end{cases} \qquad (21.31)$$

Последние два интеграла носят название разрывных множителей Вебера. В конце параграфа будет дан простой вывод для другого частного случая интеграла Вебера — Сонина — Шафхейтлина (см. формулу (21.43))

[1]) Сравни со стр. 97.

Перейдем к рассмотрению важных для приложений *несобственных интегралов Сонина.* Сначала рассмотрим интегралы Сонина, содержащие под знаком интеграла одну бесселеву функцию, а затем рассмотрим разрывный интеграл Сонина, в подынтегральное выражение которого входит произведение двух бесселевых функций от различных аргументов.

Рассмотрим сначала полученную Сониным формулу

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu\left(a\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\, t^{2\mu+1}\, dt = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{a^{\mu+1} z^{\nu-\mu-1}}\, J_{\nu-\mu-1}(az), \quad (21.32)$$

$$a \geqslant 0, \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{\nu}{2}-\frac{1}{4}\right) > \operatorname{Re}\mu > -1.$$

Эту формулу можно доказать, воспользовавшись разложением Ломмеля (§ 12), с помощью которого находящееся под знаком интеграла отношение

$$\frac{J_\nu\left(a\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}$$

можно представить в виде ряда, а затем воспользоваться интегралом Вебера (21.11). При этом получим

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu\left(a\sqrt{z^2+t^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\, t^{2\mu+1}\, dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z^2a^2/2)^m a^{-m}}{m!} \int_0^\infty J_{\nu+m}(at)\, t^{2\mu-\nu-m+1}\, dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z^2a^2/2)^m a^{-m}}{m!\, a^{2\mu+2-\nu-m}} \cdot \frac{\Gamma(1+\mu)}{2^{-1+m+\nu-2\mu}\Gamma(\nu-\mu+m)} =$$

$$= \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{a^{\mu+1} z^{\nu-\mu-1}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (az/2)^{\nu-\mu-1+2m}}{m!\,\Gamma(\nu-\mu+m-1+1)} =$$

$$= \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{a^{\mu+1} z^{\nu-\mu-1}}\, J_{\nu-\mu-1}(az).$$

Приведем еще один интеграл, который является обобщением предыдущего и получается аналогичным образом:

$$\int_0^\infty \frac{J_\nu\left(a\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\, t^{2\mu+k}\, dt = 2^{\mu+(k-1)/2} z^{\mu-\nu+(k+1)/2} a^{-\mu-(k+1)/2} \times$$

$$\times\, \Gamma(\mu+(k+1)/2)\, J_{\nu-\mu-(k+1)/2}(az),$$

где $\mu > -(k+1)/2$, $\nu > 2\mu + k - 1/2$.

Вспоминая, что разложение Ломмеля легко обобщается на любую цилиндрическую функцию, в том числе, очевидно, и на функцию Ганкеля, переходя от действительного аргумента к мнимому и повторив выкладки, проведенные на стр. 105, получим важную формулу

$$\int_0^\infty \frac{K_\nu\left(a\sqrt{t^2+z^2}\right)}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\, t^{2\mu+1}\, dt = \frac{2^\mu \Gamma(\mu+1)}{a^{\mu+1} z^{\nu-\mu-1}} K_{\nu-\mu-1}(az), \quad (21.33)$$

где $a > 0$, $\operatorname{Re}\mu > -1$.

Рассмотрим *разрывный интеграл Сонина*

$$\int_0^\infty J_\mu(bt) \frac{J_\nu\left[a\sqrt{t^2+z^2}\right]}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\, t^{\mu+1}\, dt =$$

$$= \begin{cases} 0, & a < b \\ \dfrac{b^\mu}{a^\nu} \left\{ \dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{z} \right\}^{\nu-\mu-1} J_{\nu-\mu-1}\left\{z\sqrt{a^2-b^2}\right\}, & a > b \end{cases} \quad (21.34)$$

при $\operatorname{Re}\nu > \operatorname{Re}\mu > -1$, $a > 0$, $b > 0$.

Для доказательства воспользуемся разложением Ломмеля (стр. 45), поменяем порядок интегрирования и суммирования и воспользуемся разрывным интегралом Вебера — Сонина — Шафхейтлина (21.24), в частном

случае[1]) $\lambda = \nu + m - \mu - 1$ при этом получим

$$\int_0^\infty J_\mu(bt)\,\frac{J_\nu\left[a\sqrt{t^2+z^2}\right]}{(t^2+z^2)^{\nu/2}}\,t^{\mu+1}\,dt =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} a^{-m}\,\frac{(-1)^m\,(az)^{2m}}{2^m m!}\int_0^\infty J_\mu(bt)\,J_{\nu+m}(at)\,t^{\mu-\nu-m+1}\,dt =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m a^m z^{2m} 2^{\mu-\nu-m+1} b^\mu a^{-\nu-m}\left(a^2-b^2\right)^{\nu+m-\mu-1}}{m!\,2^m\Gamma(\nu-\mu+m)}, & a>b, \\ 0, & a<b, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{b^\mu}{a^\nu}\,J_{\nu-\mu-1}\left(z\sqrt{a^2-b^2}\right)\left\{\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{z}\right\}^{\nu-\mu-1}, & a>b, \\ 0, & a<b. \end{cases}$$

2. Рассмотрим несобственные интегралы от функций Струве. Для их получения можно было бы (см. [7]) воспользоваться теми способами, которые уже применялись в этом параграфе, а именно разложением подынтегральной функции в степенной ряд, либо использованием интегрального представления типа Пуассона (см. § 16) с последующей переменой порядка интегрирования.

Здесь результат будет получен с помощью представления функции Струве, даваемого формулой (20.3) с последующей переменой порядка интегрирования. При этом будут, очевидно, сначала использованы ранее полученные в этом параграфе интегралы от функций Бесселя, а затем — определенные интегралы, рассмотренные в § 20.

Положим

$$\int_0^\infty J_\nu(az)\,\Phi(bz)\,z^\mu\,dz = f(a,\ b,\ \mu,\ \nu),$$

где выражения Φ и f должны удовлетворять условиям, обеспечивающим сходимость интегралов и законность последующей после использования формулы (20.3)

[1]) См формулу (21.43).

перемены порядка интегрирования. Тогда, очевидно,

$$\int_0^\infty \mathbf{H}_\nu(az)\,\Phi(bz)\,z^\mu\,dz =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2az}{\pi}\right)^{1/2} J_{\nu+1/2}(az\sin\theta)\,\Phi(bz)\,z^\mu(\sin\theta)^{1-\nu-1/2}\,dz\,d\theta =$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{\pi}} \int_0^{\pi/2} f\left(a\sin\theta,\ b,\ \mu+\frac{1}{2},\ \nu+\frac{1}{2}\right)\sin^{1/2-\nu}\theta\,d\theta. \quad (21.35)$$

Рассмотрим в качестве первого примера *интеграл Вебера от функции Струве*

$$\int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_\nu(z)\,dz}{z^{\nu-\mu+1}} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} J_{\nu+1/2}(z\sin\theta)\sin^{1/2-\nu}\theta z^{-\nu+\mu-1/2}\,dz\,d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma((\mu+1)/2)}{\Gamma(\nu+1-\mu/2)\,2^{\nu-\mu}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi/2} \sin^{-\mu}\theta\,d\theta =$$

$$= \frac{\Gamma(\mu/2)\operatorname{tg}(\pi\mu/2)}{\Gamma(\nu-\mu/2+1)\,2^{\nu-\mu+1}}, \qquad \operatorname{Re}\mu < \operatorname{Re}\left(\nu+\frac{3}{2}\right). \quad (21.36)$$

При этом мы воспользовались формулами (20.3), (21.11) и соотношением (6).

Рассмотрим затем интеграл

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\,\mathbf{H}_{\nu-1/2}(bt)\,t^{-1/2}\,dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{\pi/2} \left(\frac{2bt}{\pi}\right)^{1/2} t^{-1/2} J_\nu(at)\,J_{\nu-1}(bt\sin\theta)\sin^{2-\nu}\theta\,d\theta\,dt =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{b^{\nu-1/2}}{a^\nu}, \qquad \operatorname{Re}\nu > 0,\ b/a < 1. \quad (21.37)$$

При выводе была использована формула

$$\int_0^\infty J_\nu(at)\,J_{\nu-1}(bt)\,dt = b^{\nu-1}/a^\nu, \quad \text{если} \quad \operatorname{Re}\nu > 0,\ b/a < 1,$$

являющаяся частным случаем (21.25); эта формула будет выведена ниже (стр. 111).

Рассмотрим *интеграл Сонина для функции Струве*

$$\int_0^\infty \frac{\mathbf{H}_\nu\left(a\sqrt{t^2+z^2}\right)dt}{\left(\sqrt{t^2+z^2}\right)^{\nu+1}t} =$$

$$= \sqrt{\frac{2a}{\pi}}\int_0^\infty\int_0^{\pi/2} \frac{J_{\nu+1/2}\left(a\sin\theta\sqrt{t^2+z^2}\right)}{\left(\sqrt{t^2+z^2}\right)^{\nu+1/2}t}\sin^{1/2-\nu}\theta\,d\theta\,dt =$$

$$= \frac{1}{2}z^{-\nu-1}\mathbf{H}_\nu(az). \quad (21.38)$$

Аналогичным образом можно вычислить несобственные интегралы, если в подынтегральное выражение входит функция Ломмеля. Так, например, воспользовавшись формулой (20.2), в результате несложных преобразований можно получить

$$\int_0^\infty s_{\mu+\nu,\,\nu-\mu+1}(az)\,J_k(az)\,z^{\mu-\nu-k}\,dz =$$

$$= \frac{2^{2\mu-k-1}\Gamma(\mu)\,a^{\nu+k-\mu-1}}{(\nu+k-\mu)\,\Gamma(k-\mu)}, \quad (21.39)$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}\mu > \operatorname{Re}k > 0;$$

в частном случае

$$\int_0^\infty s_{\mu+\nu,\,\nu-\mu+1}(az)\,J_{\mu-\nu-1}(az)\,z\,dz = -\frac{2^{\mu+\nu}\Gamma(\mu)\,a^{-2}}{\Gamma(-\nu-1)}, \quad (21.40)$$

$$\operatorname{Re}\nu > -1,\ \operatorname{Re}(\mu-\nu-1) > 0.$$

Этот прием применяется и для получения интеграла от произведения двух бесселевых функций первого рода, имеющих одинаковые аргументы, но различные индексы. Для этого используется формула Неймана (18.16).

Использование различных обобщений этой формулы дает возможность получить интегралы от произведения двух различных цилиндрических функций одинакового аргумента. Если аргументы у цилиндрических функций различны, то нужно воспользоваться формулой Неймана (18 17).

Несобственный интеграл от функции Ломмеля двух переменных (см. стр. 161) аналогичным образом вычисляется ниже, в § 27.

3. Рассмотрим отдельные примеры применения интегральных преобразований Бесселя к задачам о вычислении несобственных интегралов.

Если в интегральном преобразовании

$$f^*(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\, K(\lambda t)\, dt$$

ядро $K(\lambda t)$ есть цилиндрическая функция, то преобразование называется преобразованием Бесселя. Наиболее важным из преобразований Бесселя является преобразование Ганкеля

$$f^*(u) = \int_0^\infty tf(t)\, J_\mu(ut)\, dt, \quad 0 < u < +\infty, \ \mu > -1/2, \quad (21.41)$$

которое имеет следующую формулу обращения:

$$f(t) = \int_0^\infty uf^*(u)\, J_\mu(ut)\, du, \qquad 0 < t < +\infty. \quad (21.41')$$

Свойства интегрального преобразования Ганкеля вкратце изложены в [13], более подробно в [47]. Таблицы интегральных преобразований Ганкеля приведены в [47], [5], [6]. Получим с помощью преобразования Ганкеля и определенных интегралов Сонина, рассмотренных в § 20, некоторые разрывные несобственные интегралы.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \begin{cases} (a^2 - t^2)^\nu\, t^\mu, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < \infty. \end{cases} \quad (21.42)$$

Преобразование Ганкеля функции $f(t)$ имеет вид

$$f^*(u) = \int_0^a (a^2 - t^2)^\nu t^{\mu+1} J_\mu(ut)\, dt;$$

положив $t = a\sin\theta$, преобразуем интеграл к виду

$$f^*(u) = \int_0^{\pi/2} a^{2\nu+\mu+2} \cos^{2\nu+1}\theta \sin^{\mu+1}\theta J_\mu(au\sin\theta)\, d\theta.$$

Таким образом, задача свелась к вычислению интеграла Сонина, (20.1), и, следовательно,

$$f^*(u) = a^{2\nu+\mu+2} \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{(au)^{\nu+1}} J_{\mu+\nu+1}(au) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)\, a^{\nu+\mu+1}}{u^{\nu+1}} J_{\mu+\nu+1}(au).$$

Формула обращения сразу дает интеграл

$$\int_0^\infty u^{-\nu} J_{\mu+\nu+1}(au) J_\mu(ut)\, du = f(t) \frac{1}{2^\nu \Gamma(1+\nu)\, a^{\nu+\mu+1}}, \quad (21.43)$$

который является частным случаем интеграла Вебера — Сонина — Шафхейтлина. В качестве второго примера рассмотрим **H**-преобразование (см. [6])

$$f_\nu^*(u) = \int_0^\infty \mathbf{H}_\nu(tu)(tu)^{1/2} f(t)\, dt \quad (21.44)$$

и соответствующую формулу обращения

$$f(t) = \int_0^\infty Y_\nu(tu)(tu)^{1/2} f_\nu^*(u)\, du. \quad (21.45)$$

Если положить, что $f(t)$ выражается формулой

$$f(t) = \begin{cases} (a^2 - t^2)^\mu t^{\nu+1/2}, & 0 < t < a, \\ 0, & a < t < \infty, \end{cases}$$

то, используя первый интеграл Сонина для функции Струве, получим

$$f_\nu^*(u) = \mathbf{H}_{\nu+\mu+1}(au) \frac{\Gamma(\mu+1)}{u^{\mu+1/2}} 2^\mu a^{\nu+\mu+1}$$

и из формулы обращения (21.45) получаем сразу

$$\int_0^\infty \mathbf{H}_{\nu+\mu+1}(au)\, Y_\nu(tu)\, u^{-\mu}\, du = \begin{cases} \dfrac{t^\nu (a^2-t^2)^\mu}{\Gamma(\mu+1)\, a^{\nu+\mu+1}}, & 0<t\leqslant a, \\ 0, & a<t<\infty. \end{cases} \tag{21.46}$$

Этот разрывный интеграл аналогичен интегралу Вебера — Сонина — Шафхейтлина.

4. Рассмотрим *несобственные интегралы по индексу.*

Сначала вспомним, что задача о свободных колебаниях мембраны, имеющей форму кругового сектора, обычно сводится к определению функции, представленной рядом, общий член которого есть произведение функции Бесселя на тригонометрическую функцию угла θ; зафиксировав θ, получаем ряд Фурье — Бесселя; предельный переход позволяет перейти от ряда к интегралу с бесконечными пределами. Если же зафиксировать r, то функция угла θ будет представлена рядом Фурье, коэффициенты которого суть функции Бесселя, зависящие от индекса. Здесь также возможен предельный переход, позволяющий перейти к интегралам по индексу. При получении интегралов по индексу, очевидно, во многих случаях может быть использовано преобразование Фурье

В настоящее время вопрос об интегралах по индексу приобрел большое значение в связи с различными применениями преобразования Конторовича — Лебедева.

Рассмотрим несколько интегралов по индексу; при этом в основу получения интегралов будет сначала положена формула обращения Фурье, примененная к различным определенным интегралам, подынтегральные выражения которых содержат в качестве параметров аргумент и индекс бесселевой функции; идея вывода заключается в том, что интеграл умножается на соответствующее ядро Фурье, в котором переменным является индекс, проводится интегрирование и используется формула обращения.

Воспользуемся формулой (18.16)

$$\int_0^{\pi/2} J_{\nu_1+\mu_1}(2z\cos\theta)\cos[(\mu_1-\nu_1)\theta]\, d\theta = \frac{\pi}{2} J_{\nu_1}(z)\, J_{\mu_1}(z),$$

$$\operatorname{Re}(\nu_1+\mu_1) > -1;$$

обозначим $\mu_1 - \nu_1 = \xi$, $\mu_1 + \nu_1 = \mu$, введем функцию

$$f_\mu(2z\cos\theta) = \begin{cases} J_{2\mu}(2z\cos\theta), & 0 < |\theta| < \pi/2, \\ 0, & \pi/2 \leqslant |\theta| < \infty \end{cases}$$

и перепишем приведенный выше интеграл в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\mu(2z\cos\theta)\cos(2\xi\theta)\,d\theta = \pi J_{\mu+\xi}(z)\,J_{\mu-\xi}(z).$$

Таким образом, с точностью до постоянного множителя, правая часть является косинус-преобразованием функции $f_\mu(2z\cos\theta)$.

Воспользовавшись формулой обращения, получим

$$\int_0^{\infty} J_{\mu+\xi}(z)\,J_{\mu-\xi}(z)\cos(2\xi\theta)\,d\xi = \frac{1}{2}\,J_{2\mu}(2z\cos\theta), \qquad (21.47)$$

$$0 < |\theta| < \frac{\pi}{2}.$$

Довольно много интегралов от функций, родственных функциям Бесселя, можно получить, используя обобщения интеграла Бесселя (см. формулы § 16, а также [4]).

Рассмотрим в качестве примера интеграл (см. [3])

$$\int_0^{\pi} \sin(z\sin\theta)\cos(\nu\theta)\,d\theta = (1+\cos\nu\pi)\,s_{0,\nu}(z);$$

воспользовавшись формулой обращения, сразу получим

$$\int_0^{\infty} (1+\cos\nu\pi)\,s_{0,\nu}(z)\cos(\nu\theta)\,d\nu = \frac{\pi}{2}\sin(z\sin\theta), \qquad (21.48)$$

$$0 < \theta < \pi.$$

Другой способ получения интегралов по индексу связан с использованием интегральных представлений, полученных в результате преобразования интеграла Бесселя (см. § 19).

Если взять, например, интеграл

$$K_\nu(z) = \int_0^{\infty} e^{-z\,\mathrm{ch}\,t}\,\mathrm{ch}(\nu t)\,dt, \qquad \mathrm{Re}\,z > 0,$$

то, положив $\nu = ix$ и воспользовавшись той же формулой обращения, можно получить

$$\int_0^\infty K_{ix}(z)\cos(xt)\,dx = \frac{\pi}{2}e^{-z\operatorname{ch}t}, \qquad 0<t<\infty. \tag{21.49}$$

Некоторые более сложные интегралы сравнительно легко получаются в результате применения формул обращения к несобственным интегралам, подынтегральное выражение которых содержит функции $\operatorname{ch}(\nu x)$ или $\operatorname{sh}(\nu x)$, а также $\operatorname{ch}(\nu \pm \mu)x$, $\operatorname{sh}(\nu \pm \mu)x$.

В качестве примера можно взять, например, следующий интеграл, приведенный в [4]:

$$[K_\nu(x)]^2 \sin(\nu\pi) = \pi \int_0^\infty J_0(2x\operatorname{sh}t)\operatorname{sh}(2\nu t)\,dt,$$
$$|\operatorname{Re}\nu| < 3/4, \quad x>0;$$

используя замену $\nu = ix$ и формулу обращения, получим

$$\int_0^\infty [K_{i\nu}(x)]^2 \operatorname{sh}(\nu\pi)\sin(2\nu t)\,d\nu = \frac{\pi^2}{4}J_0(2x\operatorname{sh}t), \tag{21.50}$$
$$0<t<\infty.$$

Вопрос об интегралах по индексу подробно рассмотрен в книге Н. Н. Лебедева [34].

5. Рассмотрим вопрос об улучшении сходимости некоторых несобственных интегралов. Для этого здесь используется метод контурного интегрирования; в результате его применения интеграл выражается в виде суммы некоторого простого выражения, содержащего бесселевы функции, и другого несобственного интеграла, сходящегося лучше, чем исходный [22].

Рассмотрим несобственный интеграл

$$I_1(\xi) = \int_0^\infty \frac{J_n(\lambda\xi)\,d\lambda}{F(\lambda)}, \tag{21.51}$$

где $F(\lambda)$ — функция, аналитическая во всей плоскости; подынтегральная функция представляет однозначную функцию аргумента λ. С помощью формулы

$$J_n(x) = \frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(x) + H_n^{(2)}(x)\right]$$

представим интеграл в виде суммы

$$I_1(\xi) = \frac{1}{2}[I_2(\xi) + I_3(\xi)],$$

где

$$I_2(\xi) = \int_0^\infty \frac{H_n^{(1)}(\lambda\xi)\,d\lambda}{F(\lambda)}, \quad I_3(\xi) = \int_0^\infty \frac{H_n^{(2)}(\lambda\xi)\,d\lambda}{F(\lambda)}.$$

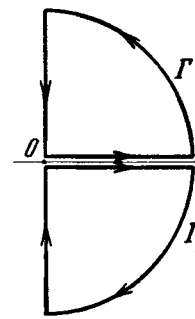

Рис. 9.

Преобразуем $I_2(\xi)$, $I_3(\xi)$, интегрируя в плоскости комплексного переменного $z = \lambda + it$ по контурам, изображенным на рис. 9, и считая затем, что радиус дуги стремится к бесконечности. При этом, имея в виду, что интеграл по дуге обращается в нуль, и используя приведенную в § 4 зависимость между функцией Ганкеля от мнимого аргумента и функцией Макдональда, получим

$$I_2(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_n(t\xi)\,dt}{F(it)} + 2\pi i \sum \operatorname{res} \psi_1(z),$$

$$\psi_1(z) = H_n^{(1)}(z)/F(z); \tag{21.52}$$

аналогичным образом преобразуется $I_3(\xi)$.

В результате получим

$$I_1(\xi) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_n(t\xi)\,[F(it) + F(-it)]\,dt}{F(t)\,F(it)} +$$

$$+ 2\pi i \sum \operatorname{res} \psi_1(z) + 2\pi i \sum \operatorname{res} \psi_2(z), \quad \psi_2(z) = H_n^{(2)}(z)/F(z). \tag{21.53}$$

Остановимся на вычислении этого интеграла для случая, когда $F(z)$ является полиномом.

Эта задача имеет значение в связи с расчетом неограниченной плиты, лежащей на упругом однородном

изотропном полупространстве и загруженной сосредоточенной силой P. В этом случае прогиб $w(r)$ и реактивное давление $p(r)$ выражаются следующим образом:

$$w(\xi) = \frac{Pl^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi)\, d\lambda}{1+\lambda^3},$$

$$p(\xi) = \frac{P}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda\xi)\, d\lambda}{1+\lambda^3}, \qquad (21.54)$$

где $\xi = r/l$; E, σ — модуль упругости и коэффициент Пуассона материала плиты; E_0, σ_0 — соответственно модуль упругости и коэффициент Пуассона основания; h — толщина плиты; D — цилиндрическая жесткость;

$$l = \sqrt[3]{D/k}, \qquad k = E_0/[2(1-\sigma_0^2)].$$

Обозначим

$$\mathrm{I}_{(1)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi)\, d\lambda}{1+\lambda^3}. \qquad (21.55)$$

Воспользовавшись формулой

$$J_0(x) = \frac{1}{2}\left[H_0^{(1)}(x) + H_0^{(2)}(x)\right],$$

получим

$$\mathrm{I}_{(1)}(\xi) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{I}_{(2)}(\xi) + \mathrm{I}_{(3)}(\xi)\right], \qquad (21.56)$$

где

$$\mathrm{I}_{(2)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(\lambda\xi)\, d\lambda}{1+\lambda^3},$$

$$\mathrm{I}_{(3)}(\xi) = \int_0^\infty \frac{H_0^{(2)}(\lambda\xi)\, d\lambda}{1+\lambda^3}. \qquad (21.57)$$

Для вычисления $\mathrm{I}_2(\xi)$ будем интегрировать функцию $\psi(z) = H_0^{(1)}(\xi z)/(1+z^3)$ в плоскости комплексного переменного $z = \lambda + it$ по замкнутому контуру Γ (см. рис. 9), обходя его в положительном направлении.

Легко видеть, что при $R \to \infty$ интеграл вдоль дуги обращается в нуль, и поэтому

$$\int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(\lambda\xi)\,d\lambda}{1+\lambda^3} - i\int_0^\infty \frac{H_0^{(1)}(it\xi)\,dt}{1+(it)^3} = 2\pi i \sum \operatorname{res}\psi. \quad (21.58)$$

Функция ψ имеет в области, ограниченной рассматриваемым контуром, только один полюс в точке $z_1 = {}^1/_2 + i\sqrt{3}/2$; с помощью несложных выкладок можно показать, что

$$\operatorname{res}\psi(z_1) = \frac{H_0^{(1)}[\xi({}^1/_2 + i\sqrt{3}/2)]}{-{}^3/_2 + i3\sqrt{3}/2}.$$

Таким образом, из (21.58) получаем

$$I_{(2)}(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(t\xi)\,dt}{1+(it)^3} + 4\pi i \frac{H_0^{(1)}[({}^1/_2 + i\sqrt{3}/2)\xi]}{3(-1+i\sqrt{3})}. \quad (21.59)$$

Аналогичным образом преобразуем второй интеграл (21.57), принимая в качестве пути интегрирования контур Γ_1, изображенный на рис. 9 и полагая, что радиус дуги стремится к бесконечности. В отличие от первого случая будем вести обход в отрицательном направлении. В результате, используя соотношение $H_0^{(2)}(-x) = H_0^{(1)}(x)$, получим

$$I_{(3)}(\xi) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(t\xi)\,dt}{1-(it)^3} + 4\pi i \frac{H_0^{(2)}[({}^1/_2 - i\sqrt{3}/2)\xi]}{3(-1+i\sqrt{3})}. \quad (21.60)$$

Подставляя (21.59) и (21.60) в (21.56) и (21.55), находим

$$w(\xi) = \frac{Pl^2}{2\pi D}\left\{\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(t\xi)\,dt}{1+t^6} + \frac{\pi}{3}\left[\tilde{f}_0(\xi)\sqrt{3} + \tilde{g}_0(\xi)\right]\right\}, \quad (21.61)$$

где

$$\tilde{f}_0(\xi) = \operatorname{Re} H_0^{(1)}[\xi({}^1/_2 + i\sqrt{3}/2)] = \operatorname{Re} H_0^{(1)}(\xi e^{i\varphi_0}),$$

$$\tilde{g}_0(\xi) = \operatorname{Im} H_0^{(1)}[\xi({}^1/_2 + i\sqrt{3}/2)] = \operatorname{Im} H_0^{(1)}(\xi e^{i\varphi_0}),$$

$$\varphi_0 = \pi/3.$$

С вычислительной точки зрения полученное решение удобнее исходного (21.54). Действительно, (21.61),

состоит из суммы двух слагаемых. Одно из них представляет линейную комбинацию табулированных бесселевых функций. Другое — интеграл, который сходится значительно быстрее, чем исходный. Для удобства вычислений интеграл, входящий в (21.61), можно представить в виде суммы двух интегралов с пределами от 0 до α и от α до ∞, где α мало по сравнению с единицей; тогда первый из интегралов можно выразить через табулированную функцию.

Если, например, принять $\alpha = 0{,}2$, то

$$\int_0^{0,2} \frac{K_0(t\xi)\,dt}{1+t^6} \approx \int_0^{0,2} K_0(t\xi)\,dt.$$

При этом наибольшая погрешность в величине подынтегральной функции будет равна 1/15625; введя новую переменную $x = t\xi$, приведем интеграл к виду

$$\int_0^{a} K_0(t\xi)\,dt = \frac{1}{\xi}\int_0^{x=a\xi} K_0(x)\,dx.$$

Полученный интеграл протабулирован в [7], т. 2, и, таким образом, остается лишь вычислить интеграл с пределами α, ∞ с помощью формул механических квадратур. Верхний предел этого интеграла можно приближенно принять равным $3 \div 4$ в связи с очень быстрым ростом знаменателя и еще более быстрым убыванием стоящей в числителе функции Макдональда.

Заметим, что при дифференцировании (21.61) (с целью получения углов поворота и внутренних усилий в плите) интеграл в правой части остается еще достаточно хорошо сходящимся.

Изложенный прием преобразования интеграла легко обобщается на случай, когда в числителе подынтегрального выражения находится более сложная функция; выкладки в случае, когда знаменатель подынтегральной функции представляет полином более сложного вида, становятся более громоздкими.

В качестве примера рассмотрим задачу о вычислении интеграла, встречающегося в расчете неограниченной

плиты, лежащей на упругом полупространстве, и положим, что плита в средней плоскости растянута равномерным усилием p_0. В этом случае прогиб и реактивное давление имеют вид

$$\left.\begin{aligned} w(\xi) &= \frac{Pl^2}{2\pi D}\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi)\,d\lambda}{1+a\lambda+\lambda^3}, \\ p(\xi) &= \frac{P}{2\pi l^2}\int_0^\infty \frac{\lambda J_0(\lambda\xi)\,d\lambda}{1+a\lambda+\lambda^3}, \\ a &= p_0/kl. \end{aligned}\right\} \tag{21.62}$$

Определение первого интеграла (21.62) сводится к вычислению двух интегралов по контурам, изображенным на рис. 9.

Дадим сразу окончательный результат

$$\int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi)\,d\lambda}{1+a\lambda+\lambda^3} = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{K_0(t\xi)\,dt}{1+(at-t^3)^2} + G(\xi), \tag{21.63}$$

где

$$G(\xi) = 4\pi\frac{\delta\tilde{f}_0(\xi) - \gamma\tilde{g}_0(\xi)}{\gamma^2+\delta^2},$$

$$\tilde{f}_0(\xi) + i\tilde{g}_0(\xi) = H_0^{(1)}[(\alpha_1 + i\beta_1)\xi] = H_0^{(1)}(\rho e^{i\varphi_0}); \quad \rho = \xi/b,$$

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \beta_1/\alpha_1,\ \alpha_1 = b/2,\ \beta_1 = \sqrt{1/b - b^2/4},$$

$$\gamma = b^2/2 - 2/b,\ \delta = 3b\beta_1,$$

где $b = -z_0$, z_0 — действительный корень уравнения $z^3 + az + 1 = 0$.

Вычислим интегралы для случая, когда нагрузка распределена по круговой области и может быть представлена в виде

$$q(\xi,\ \theta) = \sum_0^\infty F_n(\xi)\cos n\theta.$$

Рассмотрим для краткости только интегралы типа (21.56). Пусть нагрузка $q_n \cos n\theta$ распределена по окружности радиуса R.

Используя принцип суперпозиции, найдем прогиб в точке с координатами $\xi_1 = R/l$, φ. Расстояние между точками в принятой безразмерной системе координат (ξ, φ) и (ξ_1, θ) обозначим через

$$\zeta = \sqrt{\xi^2 + \xi_1^2 - 2\xi\xi_1 \cos(\theta - \varphi)}.$$

Воспользовавшись формулами сложения бесселевых функций, можно, интегрируя по θ, сразу получить при $\xi_1 < \xi$

$$w(\xi, \varphi) = \frac{q_n l^3 \xi_1 \cos n\varphi}{4D} \left\{ \frac{4}{\pi} \int_0^\infty \frac{K_n(\xi t)\, I_n(\xi_1 t)\, dt}{1 + t^6} + \right.$$

$$+ \frac{2\pi}{3} \left[\sqrt{3} \{ \tilde{u}_n(\xi) \tilde{f}_n(\xi_1) - \tilde{v}_n(\xi) \tilde{g}_n(\xi_1) \} + \right.$$

$$\left. \left. + \tilde{u}_n(\xi) \tilde{g}_n(\xi_1) + \tilde{v}_n(\xi) \tilde{f}_n(\xi_1) \right] \right\}, \quad (21.64)$$

где обозначения $\tilde{u}_n(\xi)$, $\tilde{v}_n(\xi)$, $\tilde{f}_n(\xi)$, $\tilde{g}_n(\xi)$ приведены на стр. 22; при $\xi < \xi_1$ выражение для w получится из (21 64) перемеой мест ξ и ξ_1 в фигурных скобках.

Следует обратить внимание на то, что, хотя функция $I_n(x)$ при $x \to \infty$ возрастает как $e^x/\sqrt{x}$, асимптотическое представление произведения $I_n(t\xi) K_n(t\xi_1)$ будет содержать экспоненциальный множитель $e^{-t(\xi_1 - \xi)}$, который при $\xi_1 > \xi$ обеспечивает должное убывание числителя. То же будет при $\xi > \xi_1$. Ясно, что при $\xi = \xi_1$ преимущества, связанные с наличием в числителе экспоненциального множителя, исчезают.

При нагрузке $q(\xi_1)\cos n\theta$, распределенной по круговому кольцу, необходимо провести интегрирование по аргументу ξ_1. Если $q(\xi_1) = A\xi_1^n (n = 1, 2, 3, \ldots)$, то результат выражается через цилиндрические функции. Если $q(\xi_1) = A\xi_1^\mu$, $\mu \neq n$, то в результат войдут функции Ломмеля комплексного аргумента.

§ 22. Парные интегральные уравнения

Как известно, многие задачи математической физики, сводятся к решению парных интегральных уравнений. К их числу принадлежат различные контактные задачи теории упругости, задачи о напряженном состоянии вблизи трещин, некоторые задачи электростатики и др.

Теория парных уравнений очень развилась за последнее время и является предметом многочисленных исследований.

Интересно отметить, что при решении парных интегральных уравнений с бесселевыми ядрами в последнее время широко используются различные интегралы Сонина и ряд других результатов, относящихся к теории бесселевых функций

Сначала рассмотрим парные уравнения

$$\int_0^\infty t^\alpha A(t) J_\nu(\rho t)\, dt = f(\rho), \qquad 0 \leqslant \rho < d, \qquad (22.1а)$$

$$\int_0^\infty A(t) J_\nu(\rho t)\, dt = g(\rho), \qquad \rho > d, \qquad (22.1б)$$

где $A(t)$ — неизвестная функция, $f(\rho)$ и $g(\rho)$ — известные функции, α — заданная константа

Уравнения (22.1а), (22.1б) рассматривали многие авторы. Следует отметить первые работы, принадлежащие Титчмаршу и Басбридж. Результаты Титчмарша опубликованы на русском языке в его монографии [51], а результаты Басбридж изложены в книге Снеддона [47]. Оба эти автора получили решения, применяя довольно сложные выводы; в последнее время были опубликованы работы, в которых решение было получено более простым путем.

Ниже будет приведен вывод, основанный на использовании интегралов Сонина и принадлежащий Ноблу [77].

Приведем сначала первый определенный интеграл Сонина

$$J_{\nu+\xi+1}(z) = \frac{z^{\xi+1}}{2^\xi \Gamma(\xi+1)} \int_0^{\pi/2} J_\nu(z \sin\theta) \sin^{\nu+1}\theta \cos^{2\xi+1}\theta\, d\theta,$$

где $\nu > -1$, $\xi > -1$.

Внесем в этот интеграл $z = xt$, $\rho = x \sin\theta$, получив при этом

$$t^{-\xi-1} J_{\nu+\xi+1}(xt) = \frac{x^{-\xi-\nu-1}}{2^\xi \Gamma(\xi+1)} \int_0^x J_\nu(\rho t)\, \rho^{\nu+1} (x^2 - \rho^2)^\xi\, d\rho. \qquad (22.2)$$

Умножим обе части интегрального уравнения (22.1а) на

$$\frac{x^{-\xi-\nu-1}}{2^{\xi}\Gamma(\xi+1)}\rho^{\nu+1}(x^2-\rho^2)^{\xi}$$

и проинтегрируем по ρ от 0 до x, переменим порядок интегрирования в левой части и используем преобразованную формулу Сонина (22.2), при этом получим

$$\int_0^{\infty} t^{\alpha-\xi-1}A(t)J_{\nu+\xi+1}(xt)\,dt = \frac{x^{-\xi-\nu-1}}{2^{\xi}\Gamma(\xi+1)}\int_0^{x} f(\rho)\rho^{\nu+1}(x^2-\rho^2)^{\xi}\,d\rho,$$

$$0<x<d, \quad \nu>-1, \quad \xi>-1. \tag{22.3}$$

Приведем другой результат Сонина, относящийся к несобственным интегралам:

$$t^{-\eta-1}J_{\nu-\eta-1}(xt) = \frac{x^{\nu-\eta-1}}{2^{\eta}\Gamma(\eta+1)} \times \int_0^{\infty} J_{\nu}\left[t(s^2+x^2)^{1/2}\right](s^2+x^2)^{-\frac{1}{2}\nu}s^{2\eta+1}\,ds,$$

где $\nu/2 - 1/4 > \eta > -1$. Положив здесь $s^2 + x^2 = \rho^2$, получим

$$t^{-\eta-1}J_{\nu-\eta-1}(xt) = \frac{x^{\nu-\eta-1}}{2^{\eta}\Gamma(\eta+1)}\int_x^{\infty} J_{\nu}(\rho t)\rho^{-\nu+1}(\rho^2-x^2)^{\eta}\,d\rho. \tag{22.4}$$

Теперь умножим левую и правую части уравнения (22.1б) на

$$\frac{x^{\nu-\eta-1}}{2^{\eta}\Gamma(\eta+1)}\rho^{-\nu+1}(\rho^2-x^2)^{\eta}$$

и проинтегрируем по ρ от x до ∞, после этого переменим порядок интегрирования и воспользуемся несобственным

интегралом Сонина (22.4), получив в результате

$$\int_0^\infty t^{-\eta-1} A(t) J_{\nu-\eta-1}(xt)\, dt =$$

$$= \frac{x^{\nu-\eta-1}}{2^\eta \Gamma(\eta+1)} \int_x^\infty g(\rho)\, \rho^{-\nu+1} (\rho^2 - x^2)^\eta\, d\rho, \quad (22.5)$$

где $d < x < \infty$, $\nu/2 - 1/4 > \eta > -1$.

В левых частях равенств (22.3), (22.5) постараемся сделать одинаковыми индекс бесселевой функции и показатель степени при t; затем, объединяя эти два равенства, можно будет сразу получить преобразование Ганкеля искомой функции. Таким образом, получим следующие уравнения: $\nu + \xi + 1 = \nu - \eta - 1$, $\alpha - \xi - 1 = -\eta - 1$, откуда $\xi = -1 + \alpha/2$, $\eta = -1 - \alpha/2$.

Так как $\xi + \eta = -2$, то невозможно, чтобы ξ и η одновременно были больше, чем -1. Перейдем к дальнейшим выкладкам, рассмотрев по отдельности два частных случая.

а) $0 < \alpha < 2$. Из ограничений, которые наложены на интегралы (22.3), (22.5), следует, что $\nu > 1/2 - \alpha$. Положим $\xi = -1 + \alpha/2$ и $\eta = -\alpha/2$. Внеся значения ξ и η в полученные выше формулы, найдем

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2} A(t) J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, dt =$$

$$= \frac{x^{-\nu-\alpha/2}}{2^{-1+\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)} \int_0^x f(\rho)\, \rho^{\nu+1} (x^2 - \rho^2)^{-1+\alpha/2}\, d\rho, \qquad 0 \leqslant x < d, \quad (22.6)$$

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2-1} A(t) J_{\nu+\alpha/2-1}(xt)\, dt =$$

$$= \frac{x^{\nu+\alpha/2-1}}{2^{-\alpha/2}\Gamma(1-\alpha/2)} \int_x^\infty g(\rho)\, \rho^{-\nu+1} (\rho^2 - x^2)^{-\alpha/2}\, d\rho, \quad x > d. \quad (22.7)$$

Умножив левую и правую части уравнения (22.7) на $x^{-\nu-\alpha/2+1}$ и дифференцируя затем по x, получим

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2} A(t) J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, dt =$$

$$= -\frac{2^{\alpha/2} x^{\nu+\alpha/2-1}}{\Gamma(1-\alpha/2)} \frac{d}{dx} \int_x^\infty g(\rho)\, \rho^{-\nu+1} (\rho^2 - x^2)^{-\alpha/2} d\rho, \quad x > d. \tag{22.8}$$

Уравнения (22.6) и (22.8) можно, воспользовавшись тем, что их левые части одинаковы, переписать в виде одного уравнения

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2} A(t)\, J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, dt = \psi(x), \qquad 0 \leqslant x < \infty, \tag{22.9}$$

где

$$\psi(x) = \begin{cases} \dfrac{x^{-\nu-\alpha/2}}{2^{-1+\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)} \displaystyle\int_0^x f(\rho)\, \rho^{\nu+1} (x^2 - \rho^2)^{-1+\alpha/2} d\rho, & 0 \leqslant x < d, \\ -\dfrac{2^{\alpha/2} x^{\nu+\alpha/2-1}}{\Gamma(1-\alpha/2)} \dfrac{d}{dx} \displaystyle\int_x^\infty g(\rho)\, \rho^{-\nu+1} (\rho^2 - x^2)^{-\alpha/2} d\rho, & \\ & x > d. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что с точностью до множителя $\sqrt{x}$ функция $\psi(x)$ представляет преобразование Ганкеля от неизвестной функции $A(t)$. Используя теорему обращения, сразу получаем ответ для случая $\nu > 1/2 - \alpha$, $\alpha > 0$,

$$A(t) = \frac{(2t)^{1-\alpha/2}}{\Gamma(\alpha/2)} \int_0^d x^{-\nu-\alpha/2+1} J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, F_1(x)\, dx +$$

$$+ \frac{2^{\alpha/2} t^{1-\alpha/2}}{\Gamma(1-\alpha/2)} \int_d^\infty x^{\nu+\alpha/2} J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, G_1(x)\, dx, \tag{22.10}$$

где

$$F_1(x) = \int_0^x f(\rho)\,\rho^{\nu+1}(x^2-\rho^2)^{-1+\alpha/2}\,d\rho, \qquad (22.11)$$

$$G_1(x) = -\frac{d}{dx}\int_x^\infty g(\rho)\,\rho^{-\nu+1}(\rho^2-x^2)^{-\alpha/2}\,d\rho.$$

Формула (22.10) дает результат Титчмарша [51], который рассмотрел случай $0<\alpha<2$.

б) Пусть $-2<\alpha<0$, $\nu>\max(-3/2-\alpha, -1-\alpha/2)$. Положим, что $\xi=\alpha/2$, $\eta=-1-\alpha/2$, отсюда следует, что в (22.3), (22.5) мы должны иметь $-2<\alpha<0$, $\nu>-3/2-\alpha$. Внося в (22.3), (22.5) вместо ξ и η их значения, получим

$$\int_0^\infty t^{-1+\alpha/2}A(t)\,J_{\nu+\alpha/2+1}(xt)\,dt =$$

$$= \frac{x^{-\nu-\alpha/2-1}}{2^{\alpha/2}\Gamma(1+\alpha/2)}\int_0^x f(\rho)\,\rho^{\nu+1}(x^2-\rho^2)^{\alpha/2}d\rho, \quad 0\leqslant x<d, \qquad (22.12)$$

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2}A(t)\,J_{\nu+\alpha/2}(xt)\,dt =$$

$$= \frac{x^{\nu+\alpha/2}}{2^{-1-\alpha/2}\Gamma(-\alpha/2)}\int_x^\infty g(\rho)\,\rho^{-\nu+1}(\rho^2-x^2)^{-1-\alpha/2}\,d\rho, \quad x>d. \qquad (22.13)$$

Преобразуем первое из этих уравнений; умножим обе его части на $x^{\nu+\alpha/2+1}$ и продифференцируем затем по x, получив в результате

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2}A(t)\,J_{\nu+\alpha/2}(xt)\,dt =$$

$$= \frac{x^{-\nu-\alpha/2-1}}{2^{\alpha/2}\Gamma(1+\alpha/2)}\frac{d}{dx}\int_0^x f(\rho)\,\rho^{\nu+1}(x^2-\rho^2)^{\alpha/2}\,d\rho, \quad 0\leqslant x<d; \qquad (22.14)$$

левая часть уравнения (22.14) имеет такой же вид, как и левая часть уравнения (22.13), что и являлось целью выполненных преобразований.

Теперь остается, так же как и в предыдущем случае, произвести обратное преобразование, в результате которого получим

$$A(t) = \frac{2^{-\alpha/2} t^{1-\alpha/2}}{\Gamma(1+\alpha/2)} \int_0^d x^{-\nu-\alpha/2} J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, F_2(x)\, dx + \\ + \frac{2^{1+\alpha/2} t^{1-\alpha/2}}{\Gamma(-\alpha/2)} \int_d^\infty x^{\nu+\alpha/2+1} J_{\nu+\alpha/2}(xt)\, G_2(x)\, dx, \quad (22.15)$$

где

$$F_2(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x f(\rho)\, \rho^{\nu+1} (x^2 - \rho^2)^{\alpha/2}\, d\rho,$$

$$G_2(x) = \int_x^\infty g(\rho)\, \rho^{-\nu+1} (\rho^2 - x^2)^{-1-\alpha/2}\, d\rho.$$

Произведя интегрирование по частям, можно привести результат к виду, который совпадает с решением, полученным Басбридж [52]. На этом закончим рассмотрение уравнений (22.1а), (22.1б) и перейдем к другой более сложной задаче.

Рассмотрим парные уравнения

$$\int_0^\infty t^\alpha [1 + H(t)]\, B(t)\, J_\nu(\rho t)\, dt = f(\rho), \qquad 0 \leqslant \rho \leqslant d, \quad (22.16)$$

$$\int_0^\infty B(t)\, J_\nu(\rho t)\, dt = g(\rho), \qquad \rho > d, \quad (22.17)$$

где $H(t)$ — убывающая на бесконечности функция.

В отличие от уравнений (22 1а), (22.1б) здесь не удается получить решение в квадратурах; конечной целью является сведение задачи к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

Если $0 < \alpha < 2$, уравнения (22.16), (22.17) можно преобразовать, используя тот же путь, который позво-

лил получить из (22.1а), (22.1б) уравнения (22.6), (22.8):

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2}[1+H(t)]B(t)J_{\nu+\alpha/2}(xt)\,dt = \frac{x^{-\nu-\alpha/2}}{2^{-1+\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)}F_1(x), \qquad 0\leqslant x<d, \tag{22.18}$$

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2}B(t)J_{\nu+\alpha/2}(xt)\,dt = 0, \qquad x>d, \tag{22.19}$$

где $F_1(x)$ определяется формулой (22 11).

Обозначим

$$\int_0^\infty t^{\alpha/2}B(t)J_{\nu+\alpha/2}(xt)\,dt = \frac{x^{-1/2}}{2^{-1+\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)}\theta(x), \qquad 0\leqslant x<d; \tag{22.20}$$

учитывая (22.19) и используя обратное преобразование Ганкеля, получим

$$B(t) = \frac{t^{1-\alpha/2}}{2^{-1+\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)}\int_0^d \xi^{1/2}\theta(\xi)J_{\nu+\alpha/2}(\xi t)\,d\xi. \tag{22.21}$$

Внесем в левую часть (22.17) (полагая $0\leqslant\rho<d$), которую мы обозначим $h(\rho)$, вместо $B(t)$ выражение (22 21) и используем разрывный несобственный интеграл Вебера—Сонина—Шафхейтлина

$$\int_0^\infty J_\mu(at)J_k(bt)t^{k-\mu+1}\,dt = \begin{cases} \dfrac{(a^2-b^2)^{\mu-k-1}b^k}{2^{\mu-k-1}a^\mu\Gamma(\mu-k)}, & a>b, \\ 0, & a<b, \end{cases} \tag{22.22}$$

получив в результате

$$h(\rho) = \frac{\rho^\nu 2^{2-\alpha}}{[\Gamma(\alpha/2)]^2}\int_\rho^d \xi^{-\nu-\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2}}\theta(\xi)(\xi^2-\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}-1}\,d\xi. \tag{22.23}$$

Для того чтобы получить уравнение относительно $\theta(\xi)$, внесем (22.20) в (22.18)

$$\theta(x)+x^{1/2}2^{-1+\alpha/2}\Gamma(\alpha/2)\int_0^\infty t^{\alpha/2}H(t)B(t)J_{\nu+\alpha/2}(xt)\,dt= \\ =x^{1/2-\nu-\alpha/2}F_1(x), \qquad 0\leqslant x<d. \quad (22.24)$$

Использовав теперь (22 21), преобразуем уравнение (22.24) к уравнению Фредгольма второго рода

$$\theta(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^d M(x,\xi)\theta(\xi)\,d\xi=x^{1/2-\nu-\alpha/2}F_1(x), \quad (22.25)$$
$$0\leqslant x<d,$$

с ядром

$$M(x,\xi)=\pi(x\xi)^{1/2}\int_0^\infty tH(t)J_{\nu+\alpha/2}(xt)J_{\nu+\alpha/2}(\xi t)\,dt. \quad (22.26)$$

Для того чтобы проведенный выше анализ был должным образом обоснован, необходимо, чтобы интеграл (22.26) был сходящимся.

Выясним, каким условиям должна удовлетворять функция $H(t)$ для того, чтобы $M(x,\xi)$ был сходящимся интегралом.

Очевидно, для этого необходимо, чтобы при $t\to 0$ $H(t)$ стремилось к нулю как t^λ, где $\lambda>-(2\nu+\alpha+2)$, и при $t\to\infty$ $H(t)\to 0$; если $H(t)$ при $t\to\infty$ стремится к нулю как t^η, $\eta<0$, то для того, чтобы ядро не имело особенности при $x=\xi$, нужно, чтобы было $\eta<-1$; если же $0>\eta\geqslant -1$, то ядро имеет особенность при $x=\xi$.

Если $-2<\alpha<0$, то таким же путем получаем

$$\left.\begin{aligned}&\theta(x)+\frac{1}{\pi}\int_0^d M(x,\xi)\theta(\xi)\,d\xi=x^{-\nu-\alpha/2-1/2}F_2(x),\\ &\int_0^\infty t^{\alpha/2}B(t)J_{\nu+1/2}(xt)\,dt= \\ &\qquad=\frac{x^{-1/2}}{2^{\alpha/2}\Gamma(1+\alpha/2)}\theta(x) \qquad 0\leqslant x<d.\end{aligned}\right\} \quad (22.27)$$

Приведенный вывод решения парных интегральных уравнений с бесселевыми ядрами принадлежит Ноблу [77] Такие уравнения рассматривались и в ряде других работ [1]). Аналогичные результаты для парных интегральных уравнений с ядрами в виде линейной комбинации цилиндрических функций первого и второго рода получил Шривастав [83]; парные уравнения с ядрами в виде функций Струве рассматривал А. И. Цейтлин, которому принадлежит метод решения парных интегральных уравнений и уравнений с парными рядами достаточно широкого класса, основанный на применении так называемых операторов преобразования [56], [57].

§ 23. Корни бесселевых функций

Задачи об определении корней бесселевых функций играют важную роль в приложениях. В качестве примера рассмотрим перемещения круглой мембраны, которая совершает свободные осесимметричные колебания: $w = AJ_0(\lambda r)\sin(\omega t + \varphi_0)$, где ω — круговая частота колебаний; $\lambda = \omega\sqrt{\rho/T}$, ρ — поверхностная плотность; T — натяжение.

Это решение должно обращаться в нуль на контуре мембраны: $w(R) = 0$. Отсюда получаем, что для существования нетривиального решения задачи необходимо, чтобы было

$$J_0(\lambda R) = 0. \tag{23.1}$$

Хорошо известно, что уравнение (23.1) имеет бесчисленное множество простых вещественных корней и не имеет ни кратных, ни комплексных корней. Из физических соображений очевидно, что при достаточно больших номерах корней задача сведется к рассмотрению колебаний мембраны, у которой имеется большое число узловых линий, представляющих концентрические окружности, центр которых совпадает с центром контура, и поэтому следует ожидать аналогии с задачей

[1]) См Cooke J. C., A solution of Tranter's dual integral equations problem, Quarterly Journ. Mech. and Applied Math **9**, № 1 (1956); Лебедев Н. Н, Распределение электричества на тонком параболоидальном сегменте, ДАН СССР **114**, № 3 (1957); Лебедев Н Н и Уфлянд Я. С., Осесимметричная контактная задача для упругого слоя, ПММ **22**, № 3 (1958).

о колебаниях струны. Есть поэтому все основания полагать, что большие корни функции Бесселя будут отстоять друг от друга на расстоянии, которое стремится к постоянной, равной π.

Совместное решение двух и более уравнений Бесселя приводит к задачам о корнях более сложных выражений, в которые входят функции Бесселя различного аргумента. Так, например, задача о колебаниях круглой пластинки без отверстия с защемленным краем, являющаяся одной из простейших задач этого типа, приводит к изучению корней функции

$$J_n(x)\,J_n'(x) - J_n'(x)\,J_n(x).$$

Изучение свойств решений соответствующих задач математической физики дает в ряде случаев возможность облегчить рассмотрение свойств корней бесселевых функций. На это обстоятельство указывает, в частности, Г. Н. Ватсон, который пишет о том, что значительная часть результатов, относящихся к изучению корней бесселевых функций, изложенная в его монографии, может быть непосредственно получена из результатов Рэлея, связанных с решением отдельных конкретных задач математической физики.

В книге Г. Н. Ватсона [7] рассматриваются доказательства многочисленных теорем, относящихся к изучению свойств корней бесселевых функций (стр. 525—573). Ряд интересных результатов содержится в упоминавшейся ранее монографии А. Кратцера и В. Франца (стр. 374—416).

Приведем несколько простейших выводов, относящихся к случаю, когда индекс ν является вещественным.

Теорема 1. *Если индекс* $\nu > -1$, *то функция* $J_\nu(z)$ *имеет только вещественные корни.*

Так как

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m (z/2)^{2m}}{m!\,\Gamma(\nu+m+1)},$$

то, полагая, что $z = i\alpha$, получим ряд, содержащий только положительные члены; отсюда следует, что функция $J_\nu(z)$ не может иметь чисто мнимых корней.

Докажем, что $J_\nu(z)$ не имеет комплексных корней. Положим, что α является комплексным корнем рассматриваемой функции. Так как $J_\nu(z)$ разлагается в степенной ряд с вещественными коэффициентами, то $\bar{\alpha}$ также должно быть ее корнем. Теперь воспользуемся интегралом

$$\int_0^x tJ_\nu(\beta t)\,J_\nu(\bar{\beta}t)\,dt = \frac{x}{\beta^2-\bar{\beta}^2}\left[J_\nu(\beta x)\frac{dJ_\nu(\bar{\beta}x)}{dx} - J_\nu(\bar{\beta}x)\frac{dJ_\nu(\beta x)}{dx}\right], \quad (23.2)$$

доказательство которого дано в § 15 [см. (15 21)].

Положив в формуле (23 2) $x = 1$ и приняв во внимание, что β и $\bar{\beta}$ суть корни функции $J_\nu(z)$, получим

$$\int_0^1 tJ_\nu(\beta t)\,J_\nu(\bar{\beta}t)\,dt = 0.$$

Это, однако, невозможно, потому что $J_\nu(\bar{\beta}t) = \overline{J_\nu(\beta t)}$, и, следовательно,

$$\int_0^1 tJ_\nu(\beta t)\,J_\nu(\bar{\beta}t)\,dt = \int_0^1 t\,|J_\nu(\beta t)|^2\,dt > 0.$$

Отсюда следует, что $J_\nu(z)$ не имеет также и комплексных корней. Следовательно, при $\nu > -1$ функция $J_\nu(z)$ имеет только вещественные корни

Теорема 2 *Все корни функции* $Z_\nu(z)$, *кроме* $z = 0$, *являются простыми.*

Рассмотрим цилиндрическую функцию $Z_\nu(z)$. Предположим, что z_0 — корень порядка $n > 1$, тогда $Z_\nu(z_0)$ и $Z'_\nu(z_0)$ равны нулю. Воспользовавшись дифференциальным уравнением Бесселя, получим сразу что $Z''_\nu(z_0)$ равняется нулю. Теперь продифференцируем уравнение Бесселя и внесем значения $Z''_\nu(z_0)$ и $Z'_\nu(z_0)$, получив $Z'''_\nu(z_0) = 0$. Таким же образом можно показать, что все производные функции $Z_\nu(z)$ обращаются в нуль при $z = z_0$. Отсюда следует $Z_\nu(z) \equiv 0$, что неверно, и, следовательно, функция $Z_\nu(z)$ может иметь только простые корни.

Теорема 3. *Корни функций* $Z_p(z)$ и $Z_{p+1}(z)$ *перемежаются друг с другом.*

Приведем формулу дифференцирования

$$\frac{d}{dz}(z^{-\nu}Z_\nu(z)) = -z^{-\nu}Z_{\nu+1}(z).$$

Рассмотрим два последовательных корня функции $Z_\nu(z)$, которые, как показано выше, вещественны. Тогда по теореме Ролля между этими двумя значениями должен находиться хотя бы один корень производной, а следовательно, и корень функции $Z_{\nu+1}(z)$.

Теорема 4. *Корни двух цилиндрических функций, имеющих одинаковый индекс, перемежаются.*

Рассмотрим две различные цилиндрические функции $Z_\nu^*(x)$ и $Z_\nu(x)$. Поскольку они линейно независимы, то их определитель Вронского отличен от нуля, т. е.

$$Z_\nu Z_\nu^{*\prime} - Z_\nu' Z_\nu^* = \frac{c}{z},$$

где $c \neq 0$.

Пусть x_1 и x_2 — два последовательных корня функции $Z_\nu(x)$; по доказанному выше x_1, x_2 вещественны и

$$Z_\nu'(x_1) \neq 0, \quad Z_\nu'(x_2) \neq 0.$$

Положим, что в интервале $x_1 < x < x_2$ функция $Z_\nu(x)$ положительна, очевидно, что

$$Z_\nu'(x_1) > 0,$$
$$Z_\nu'(x_2) < 0.$$

Воспользовавшись определителем Вронского и положив последовательно $z = x_1$ и $z = x_2$, получим

$$Z_\nu^*(x_1) = -\frac{c}{x_1 Z_\nu'(x_1)},$$

$$Z_\nu^*(x_2) = -\frac{c}{x_2 Z_\nu'(x_2)}.$$

Отсюда следует, что знаки $Z_\nu^*(x_1)$ и $Z_\nu^*(x_2)$ разные. Нетрудно сообразить, что тот же вывод будет получен, если $Z_\nu(x) < 0$ при $x_1 < x < x_2$. Следовательно, функция $Z_\nu^*(x)$ имеет хотя бы один корень между x_1 и x_2.

Так как между двумя корнями функции $Z_\nu^*(x)$ расположен по крайней мере один корень функции $Z_\nu(x)$, то отсюда следует, что $Z_\nu^*(x)$ имеет между x_1 и x_2 только один корень.

Приведем без вывода некоторые свойства корней цилиндрических функций. Более подробные сведения приведены в [7] и [4] (см. также сноску на стр. 83).

1. *Функции* $J_\nu(z)$ *и* $J_{\nu+m}(z)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, *не имеют общих корней, за исключением* $z = 0$ (предположение Бурже).

В этой связи отметим результат Зигеля, который доказал, что если ν — рациональное число, z — не равное нулю алгебраическое число, то $J_\nu(z)$ не является алгебраическим числом.

2. *Для наименьших корней* γ_ν, γ'_ν, γ''_ν *функций* $J_\nu(x)$ $J'_\nu(x)$, $J''_\nu(x)$ *имеем*

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \gamma_\nu < \sqrt{2(\nu+1)(\nu+3)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu+2)} < \gamma'_\nu < \sqrt{2\nu(\nu+1)}, \quad \nu > 0,$$

$$\sqrt{\nu(\nu-1)} < \gamma''_\nu < \sqrt{\nu^2-1}, \quad \nu > 1.$$

3. *Функция*

$$J_\nu(ax)\,Y_\nu(bx) - J_\nu(bx)\,Y_\nu(ax), \qquad a > 0,\ b > 0,$$

имеет только вещественные и простые корни, множество этих корней бесконечно.

4. *При* $\nu \geqslant 0$ *функция* $K_\nu(z)$ *не имеет корней, для которых* $|\arg z| \leqslant \pi/2$. *Она имеет вещественные корни при чисто мнимых индексах.*

5. *Функции Ганкеля при вещественном индексе не имеют положительных корней.*

6. *Большие корни функции* $Z_\nu(z) = J_\nu(z)\cos\alpha - Y_\nu(z)\sin\alpha$ *можно вычислять с помощью асимптотического разложения*

$$\left(n + \frac{1}{2}\nu - \frac{1}{4}\right)\pi - \alpha - \frac{4\nu^2-1}{8\{(n+\nu/2-1/4)\pi-\alpha\}} - \frac{(4\nu^2-1)(28\nu^2-31)}{384\{(n+\nu/2-1/4)\pi-\alpha\}^3} - \ldots$$

7. *Всякий положительный корень функции* $Z_\nu(z)$ *можно рассматривать как непрерывную возрастающую функцию вещественного переменного* ν.

8. *Любой положительный корень трансцендентного уравнения*

$$J_\nu(kz)\,Y_\nu(z) - J_\nu(z)\,Y_\nu(kz) = 0$$

является непрерывной возрастающей функцией вещественного переменного ν *при условии, что* ν *положительно.*

§ 24. Ряды Фурье — Бесселя и Дини

В этом параграфе рассматриваются ряды Фурье — Бесселя, имеющие важное значение в приложениях, а также и некоторые другие аналогичные ряды, являющиеся их естественным обобщением.

Если функции $u(z)$ и $v(z)$ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{d^2u}{dz^2} + Pu = 0, \quad \frac{d^2v}{dz^2} + Qv = 0,$$

то

$$\int_a^b (P - Q)\,uv\,dz = \left(u\frac{dv}{dz} - v\frac{du}{dz}\right)\Big|_a^b. \tag{24.1}$$

Положим $P = \alpha^2 - (4\nu^2 - 1)/z^2$, $Q = \beta^2 - (4\nu^2 - 1)/z^2$. В этом случае

$$u = z^{1/2}Z_\nu(\alpha z), \quad v = z^{1/2}Z_\nu(\beta z),$$

что легко проверить, выполнив дифференцирование. Из (24.1) следует

$$(\alpha^2 - \beta^2)\int_a^b zZ_\nu(\alpha z)\,Z_\nu(\beta z)\,dz =$$

$$= -\left|\alpha z Z_\nu'(\alpha z)\,Z_\nu(\beta z) - \beta z Z_\nu'(\beta z)\,Z_\nu(\alpha z)\right|_a^b. \tag{24.2}$$

Докажем, что функции Бесселя обладают свойством ортогональности, которое можно записать в следующем

виде:

$$\int_0^1 xJ_\nu(j_m x)\,J_\nu(j_k x)\,dx = 0, \qquad k \neq m,\ \nu > -1, \quad (24.3)$$

где x — вещественная переменная; j_m, j_k — вещественные корни функции Бесселя.

Положим в (24.2) $Z_\nu(\alpha z) = J_\nu(\alpha x)$, $Z_\nu(\beta z) = J_\nu(\beta x)$, $a = 0$, $b = 1$, и заметим, что при $a = 0$ правая часть (24.2) при $\nu > -1$ обращается в нуль

Отсюда следует [см. также (15 21)]

$$\int_0^1 xJ_\nu(\alpha x)\,J_\nu(\beta x)\,dx = \frac{\alpha J_\nu(\beta)\,J'_\nu(\alpha) - \beta J_\nu(\alpha)\,J'_\nu(\beta)}{\beta^2 - \alpha^2}. \quad (24.4)$$

При $\beta = \alpha$ правая часть (24.4) есть неопределенность; раскрывая ее по правилу Лопиталя и воспользовавшись (6.3), получим

$$\int_0^1 xJ_\nu^2(\alpha x)\,dx = J_{\nu+1}^2(\alpha)/2. \quad (24.5)$$

Если α и β являются различными корнями функции Бесселя индекса ν, т. е.

$$\alpha = j_m, \quad \beta = j_k, \quad m \neq k,$$

то правая часть (24.4), обращается в нуль и, следовательно, функции Бесселя ортогональны с весом x.

Функции

$$\frac{\sqrt{2}}{J_{\nu+1}(\gamma_m)}\,J_\nu(\gamma_m x),$$

как это видно из (24.5), нормированы на интервале $(0, 1)$.

Функции $J_\nu(\gamma_m x)$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, образуют полную систему; доказательство этого можно найти в различных курсах, и, в частности, см. [30], [7] и др.

Указанные выше свойства функций Бесселя позволяют получить разложение функции

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(j_m x), \quad (24.6)$$

где по-прежнему j_m, $m = 1, 2, 3, \ldots$, — корни функции Бесселя.

Если, полагая, что указанное разложение существует и допускает почленное интегрирование, умножить правую и левую части (24.6) на $xJ_\nu(j_k x)$ и затем проинтегрировать, то для коэффициента a_k получим следующее выражение:

$$a_k = \frac{2}{J^2_{\nu+1}(j_k)} \int_0^1 xf(x) J_\nu(j_k x)\, dx. \qquad (24.7)$$

Ряд (24.6), коэффициенты которого определяются по формуле (24.7), называется рядом Фурье — Бесселя. Приведем без доказательства теорему.

Теорема. *Пусть $f(t)$ — произвольная функция, заданная на интервале $(0, 1)$; интеграл $\int_0^1 t^{1/2} f(t)\, dt$ существует и абсолютно сходится. Положим, что a_k выражается формулой (24.7), где $\nu \geqslant -1/2$. Пусть x — какая-нибудь внутренняя точка интервала (a, b), $0 < a < b < 1$, и $f(t)$ имеет на этом интервале ограниченное полное изменение. Тогда ряд*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(j_m x)$$

сходится и сумма его равна $\frac{1}{2}\{f(x+0) + f(x-0)\}$.

Эта теорема доказана Гобсоном и приведена в [7].

Если $f(t)$, удовлетворяя перечисленным выше условиям, будет непрерывной функцией в интервале (a, b), то разложение Фурье — Бесселя функции $f(t)$ сходится равномерно к функции $f(x)$ во всяком интервале $(a + \Delta, b - \Delta)$, где Δ — любое положительное число [7].

Для равномерной сходимости вблизи $x = 1$ необходимо, чтобы $f(1 - 0) = 0$.

Вопрос о равномерной сходимости при $x = 0$ требует видоизменения разложения, а именно умножения на $\sqrt{x}$ (см. [7]).

Если $t^{-\nu}f(t)$ непрерывна в интервале $(0, b)$ и $t^{1/2}f(t)$ имеет ограниченное полное изменение на $(0, b)$, то [7] ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m x^{1/2} J_\nu(j_m x) \tag{24.8}$$

равномерно сходится на $(0, b-\Delta)$ и имеет своей суммой $x^{1/2}f(x)$.

Если λ_m — положительные корни функции $xJ'_\nu(x) + HJ_\nu(x)$, где H не зависит от x и ν, то ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m J_\nu(\lambda_m x), \tag{24.9}$$

где

$$b_m = \frac{2\lambda_m^2}{(\lambda_m^2 - \nu^2) J_\nu^2(\lambda_m) + \lambda_m^2 J_\nu'^2(\lambda_m)} \int_0^1 tf(t) J_\nu(\lambda_m t)\, dt, \tag{24.10}$$

называется *рядом Дини.*

Функции $J_\nu(\lambda_m x)$ обладают свойством ортогональности

$$\int_0^1 xJ_\nu(\lambda_m x) J_\nu(\lambda_k x)\, dx = 0,$$

которое непосредственно следует из (24.4) и условия

$$\lambda_m J'_\nu(\lambda_m) + HJ_\nu(\lambda_m) = 0.$$

Полагая в (24.4) $\alpha = \beta = \lambda_m$ и раскрывая полученную неопределенность, получим условие нормировки, использованное в (24.10). Если ряд (24.9) сходится к функции $f(x)$ в любой точке интервала $(0, 1)$, то он называется *разложением Дини* функции $f(x)$. При $H = -\nu$ к разложению Дини (24.10) нужно добавить начальный член

$$B_0(x) = 2(1+\nu) x^\nu \int_0^1 t^{\nu+1} f(t)\, dt.$$

Если $H < -\nu$, то начальный член равен

$$B_0(x) = \frac{2\lambda_0^2 I_\nu(\lambda_0 x)}{(\lambda_0^2+\nu^2) I_\nu^2(\lambda_0) - \lambda_0^2 I_\nu'^2(\lambda_0)} \int_0^1 tf(t) I_\nu(\lambda_0 t)\, dt,$$

где $\pm i\lambda_0$ — чисто мнимые корни функции

$$z^{-\nu}[zJ_\nu'(z) + HJ_\nu(z)].$$

В качестве примера приведем разложения функции x^ν в ряд Фурье — Бесселя

$$x^\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2J_\nu(j_m x)}{j_m J_{\nu+1}(j_m)}, \qquad 0 \leqslant x < 1 \qquad (24.11)$$

и в ряд Дини

$$x^\nu = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2\lambda_m J_\nu(\lambda_m x) J_{\nu+1}(\lambda_n)}{(\lambda_m^2 - \nu^2) J_\nu^2(\lambda_m) + \lambda_m^2 J_\nu'^2(\lambda_m)},$$
$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad H + \nu \leqslant 0. \qquad (24.12)$$

Для разложения степенной функции x^μ в ряд Фурье — Бесселя и ряд Дини требуется вычисление интегралов

$$\int_0^1 x^{\mu+1} J_\nu(j_k x)\, dx \quad \text{и} \quad \int_0^1 x^{\mu+1} J_\nu(\lambda_k x)\, dx,$$

которые при $\mu \neq \nu$ выражаются через функции Ломмеля по формулам, приведенным в § 16 [1]); в отдельных случаях, когда в правую часть входят экспоненциальные и тригонометрические функции, коэффициенты указанных рядов выражаются через функции Ломмеля двух переменных и неполные цилиндрические функции (см. §§ 27, 28). Рассмотренные ряды являются частным случаем рядов по собственным функциям задачи Штурма — Лиувилля для уравнения Бесселя.

Рассмотрим разложения в ряды по цилиндрическим функциям, пригодные для положительных конечных интервалов.

---

[1]) В отдельных случаях (см. стр. 59) они выражаются через функции Бесселя.

Если функция $f(x)$ определена в интервале $a < x < b$, $a > 0$, то разложение, полученное Титчмаршем, есть

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m [J_\nu(\gamma_m x) Y_\nu(\gamma_m b) - Y_\nu(\gamma_m x) J_\nu(\gamma_m b)]; \quad (24.13)$$

здесь γ_m есть m-положительный корень уравнения

$$J_\nu(az) Y_\nu(bz) - Y_\nu(az) J_\nu(bz) = 0,$$

$$a_m = \{[J_\nu(\gamma_m a)]^2 - [J_\nu(\gamma_m b)]^2\}^{-1} \frac{\pi\gamma_m^2}{2} \times$$

$$\times [J_\nu(\gamma_m a)]^2 \int_a^b [J_\nu(\gamma_m t) Y_\nu(\gamma_m b) - Y_\nu(\gamma_m t) J_\nu(\gamma_m b)] tf(t)\, dt.$$

Граничные условия этой задачи аналогичны граничным условиям задачи, порождающей ряды Фурье — Бесселя; с физической точки зрения они соответствуют, например, задаче о свободных колебаниях закрепленной по контуру мембраны, занимающей область в виде кругового прямоугольника.

В рассматриваемой мембране криволинейная часть контура суть отрезки дуг, радиусы которых соответственно равны a и b; отрезки радиусов, соединяющие концы дуг, образуют между собой угол, равный $\nu\pi$. Рассматриваются только такие формы колебаний, у которых узловые линии суть дуги окружностей, концентрических окружностям, которым принадлежат дуги контура. Формы этих колебаний, с точностью до множителя $C \sin \nu\theta$, где $C = \text{const}$, и будут выражениями, стоящими в квадратных скобках (24 13).

Получим формально ряд Дини для отрезка. Для этого сначала запишем функции, ранее рассматривавшиеся в § 17:

$$Y_1(\alpha a, \alpha x) = \frac{\pi a \alpha}{2 \sin \nu\pi} [J'_\nu(\alpha a) J_{-\nu}(\alpha x) - J'_{-\nu}(\alpha a) J_\nu(\alpha x)],$$

$$Y_2(\alpha a, \alpha x) = -\frac{\pi a \alpha}{2 \sin \nu\pi} [J_\nu(\alpha a) J_{-\nu}(\alpha x) - J_{-\nu}(\alpha a) J_\nu(\alpha x)],$$

при $x = a$

$$Y_1 = 1, \quad Y'_1 = 0, \quad Y_2 = 0, \quad Y'_2 = 1.$$

Положим, что функция $w(x)$, являющаяся решением уравнения Бесселя с индексом ν и параметром α, удовлетворяет при $x = a$ условию

$$w + H_1 \frac{dw}{dx} = 0, \tag{24.14}$$

а при $x = b$

$$w + H_2 \frac{dw}{dx} = 0. \tag{24.15}$$

Очевидно, что первому граничному условию удовлетворяет функция

$$\Phi_\nu(\alpha a, \alpha x) = \alpha H_1 Y_1(\alpha a, \alpha x) - Y_2(\alpha a, \alpha x). \tag{24.16}$$

Из второго граничного условия получаем трансцендентное уравнение относительно α

$$\alpha H_2 [\alpha H_1 Y_1'(\alpha a, \alpha b) - Y_2'(\alpha a, \alpha b)] + \\ + \alpha H_1 Y_1(\alpha a, \alpha b) - Y_2(\alpha a, \alpha b) = 0, \tag{24.17}$$

корни которого обозначаются через μ_m. Так же как и выше, для доказательства ортогональности функций $\Phi_\nu(\mu_m x, \mu_m a)$ и $\Phi_\nu(\mu_k x, \mu_k a)$, $k \neq m$, рассмотрим интеграл

$$(\mu_m^2 - \mu_k^2) \int_a^b x \Phi_\nu(\mu_m a, \mu_m x) \Phi_\nu(\mu_k a, \mu_k x)\, dx = \\ = \left| \mu_m x \Phi_\nu'(\mu_m a, \mu_m x) \Phi_\nu(\mu_k a, \mu_k x) - \right. \\ \left. - \mu_k x \Phi_\nu'(\mu_k a, \mu_k x) \Phi_\nu(\mu_m a, \mu_m x) \right|_a^b = \\ = \mu_m b \Phi_\nu'(\mu_m a, \mu_m b) \Phi_\nu(\mu_k a, \mu_k b) - \\ - \mu_k b \Phi_\nu'(\mu_k a, \mu_k b) \Phi_\nu(\mu_m a, \mu_m b). \tag{24.18}$$

Из условия (24.15) следует, что правая часть (24.18) равна нулю.

Для того чтобы пронормировать полученные функции, рассмотрим интеграл

$$\int_a^b x [Z_\nu(\alpha x)]^2 dx = \frac{x^2}{2} \left\{ [Z_\nu'(\alpha x)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 x^2}\right) Z_\nu^2(\alpha x) \right\} \Bigg|_a^b. \tag{24.19}$$

Здесь $Z_\nu(\alpha x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая уравнению Бесселя с индексом ν и параметром α.

Выражение (24.19) может быть получено либо интегрированием по частям, либо в результате применения правила Лопиталя [7].

При $Z_\nu(\alpha x) = \Phi_\nu(\alpha a, \alpha x)$ получим

$$\int_a^b x\,[\Phi_\nu(\alpha a, \alpha x)]^2\,dx = \frac{b^2}{2}\left\{[\Phi'_\nu(\alpha a, \alpha b)]^2 + \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 b^2}\right)\Phi_\nu^2(\alpha a, \alpha b)\right\} - \frac{a^2}{2}\left[\left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 a^2}\right)H_1^2\alpha^2 + 1\right]. \quad (24.20)$$

Учитывая (24.15), преобразуем (24.20) к следующему виду:

$$\int_a^b x\,[\Phi_\nu(\alpha a, \alpha x)]^2\,dx = \frac{a^2}{2}\left\{\left(1 + \frac{1}{H_2^2\alpha^2} - \frac{\nu^2}{\alpha^2 b^2}\right)\frac{[H_1\alpha J'_\nu(\alpha a) + J_\nu(\alpha a)]^2}{[H_2\alpha J'_\nu(\alpha b) + J_\nu(\alpha b)]^2}\,H_2^2\alpha^2 - 1 - \left(1 - \frac{\nu^2}{\alpha^2 a^2}\right)H_1^2\alpha^2\right\} = B(\alpha). \quad (24.21)$$

Обозначив правую часть (24.21) через $B(\alpha)$, запишем разложение в ряд Дини в следующем виде:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_m}{B(\mu_m)}\,\Phi_\nu(\mu_m x, \mu_m a), \quad (24.22)$$

где

$$C_m = \int_a^b t f(t)\,\Phi_\nu(\mu_m t, \mu_m a)\,dt.$$

Рассмотрим разложение в ряд по собственным функциям задачи, описываемой дифференциальным

уравнением

$$\Delta_\nu \Delta_\nu w_\nu - \alpha^4 w_\nu = 0 \qquad (24.23)$$

и граничными условиями

$$w_\nu(\alpha a) = 0, \quad w'_\nu(\alpha a) = 0, \quad w_\nu(\alpha b) = 0, \quad w'_\nu(\alpha b) = 0,$$

где

$$\Delta_\nu = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{\nu^2}{x^2}.$$

Собственные функции этой задачи во многом являются аналогом балочных функций, рассматриваемых в теории колебаний упругих систем в связи с изучением свободных колебаний стержня постоянного сечения, и широко применяемых в различных приложениях.

Нам необходимо найти собственные значения α_k и собственные функции, которые будем обозначать $\Phi_\nu(\alpha_k a, \alpha_k x)$.

Для получения собственных функций будут использованы рассмотренные ранее в § 17 функции Коши, обладающие свойством единичной матрицы. Чтобы удовлетворить граничным условиям при $r = a$, примем

$$\Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x) = Y_3(\alpha_k a,\ \alpha_k x) + AY_4(\alpha_k a,\ \alpha_k x),$$

где A — величина, подлежащая определению.

Из граничных условий при $x = b$ получим трансцендентное уравнение, корни которого являются собственными числами α_k; кроме того, из этих условий находим коэффициент при втором слагаемом; таким образом, получаем

$$\Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x) = Y_3(\alpha_k a,\ \alpha_k x) - \frac{Y_3(\alpha_k a,\ \alpha_k b)}{Y_4(\alpha_k a,\ \alpha_k b)} Y_4(\alpha_k a,\ \alpha_k x). \qquad (24.24)$$

Остановимся на доказательстве ортогональности полученных функций; для этого уравнениям, которым удовлетворяют функции $\Phi_\nu(\alpha_m a, \alpha_m x)$, $\Phi_\nu(\alpha_n a, \alpha_n x)$, умножим соответственно на $x\Phi_\nu(\alpha_n a, \alpha_n x)$, $x\Phi_\nu(\alpha_m a, \alpha_m x)$, проинтегрируем по x от a до b и вычтем одно из

другого:

$$(\alpha_m^4 - \alpha_n^4) \int_a^b x\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x)\,dx =$$

$$= \int_a^b x\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,\Delta_\nu\Delta_\nu\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x) -$$

$$- \int_a^b x\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x)\,\Delta_\nu\Delta_\nu\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,dx.$$

Интегрируя по частям, легко получить

$$\int_a^b x\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,\Delta_\nu\Delta_\nu\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x)\,dx =$$

$$= x\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,\frac{d}{dx}\,\Delta_\nu\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x)\Big|_a^b -$$

$$- x\frac{d}{dx}\,\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,\Delta_\nu\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x)\Big|_a^b +$$

$$+ \int_a^b x\,\Delta_\nu\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,\Delta_\nu\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x)\,dx.$$

При заданных краевых условиях внеинтегральные члены обращаются в нуль.

Учитывая соотношение, которое получается из предыдущего, если поменять местами α_m и α_n, получим

$$(\alpha_m^4 - \alpha_n^4) \int_a^b x\Phi_\nu(\alpha_m a,\ \alpha_m x)\,\Phi_\nu(\alpha_n a,\ \alpha_n x)\,dx = 0, \qquad m \neq n.$$

При вычислении коэффициентов a_k разложения

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x), \tag{24.25}$$

где

$$a_k = \frac{\int_a^b x f(x)\,\Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x)\,dx}{\int_a^b x\left[\Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x)\right]^2 dx},$$

может быть полезной следующая формула:

$$\int_a^b x\,[w_\nu(\alpha x)]^2\,dx = \frac{x^2}{4}\Big\{[w_\nu(\alpha x)]^2 + [\Delta_\nu w_\nu(\alpha x)]^2 - 2\,[\Delta_\nu w_\nu(\alpha x)]'\,w'_\nu(\alpha x) + 2\,\frac{\nu^2}{x^2}\,w_\nu(\alpha x)\,\Delta_\nu w_\nu(\alpha x) + \frac{2}{\alpha x}\,[\Delta'_\nu w_\nu(\alpha x) - \Delta_\nu w_\nu(\alpha x)\,w'_\nu(\alpha x)]\Big\}\Big|_a^b, \quad (24.26)$$

где дифференцирование производится по аргументу αx и, кроме того, в (24.26) положено:

$$\Delta_\nu = \frac{\partial^2}{\partial(\alpha x)^2} + \frac{1}{\alpha x}\cdot\frac{\partial}{\partial(\alpha x)} - \frac{\nu^2}{(\alpha x)^2}.$$

Это равенство аналогично (24.19) и может быть получено тем же путем.

При заданных краевых условиях получим

$$\int_a^b x\,[\Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x)]^2\,dx = \frac{x^2}{4}\,[\Delta_\nu \Phi_\nu(\alpha_k a, \alpha_k x)]^2\Big|_a^b. \quad (24.27)$$

Учитывая, что

$$\Delta_\nu \Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x) = -Y_1(\alpha_k a,\ \alpha_k x) + \frac{Y_3(\alpha_k a, \alpha_k b)}{Y_4(\alpha_k a, \alpha_k b)}\,Y_2(\alpha_k a,\ \alpha_k x),$$

после элементарных упрощений получим

$$\int_a^b x\,[\Phi_\nu(\alpha_k a,\ \alpha_k x)]^2\,dx = \frac{a^2}{4}\left\{\frac{\pi^2 b^2 \alpha_k^2}{4\sin^2\nu\pi}\,[J'_\nu(\alpha_k b)\,J_{-\nu}(\alpha_k a) - J'_{-\nu}(\alpha_k a)\,J_\nu(\alpha_k b)]^2 \times \left[1 - \frac{\pi - 2A_{k\nu}\sin\nu\pi}{\pi - 2B_{k\nu}\sin\nu\pi}\right]^2 - 1\right\},$$

где

$$A_{k,\nu} = \frac{I'_\nu(\alpha_k b)\,K_\nu(\alpha_k a) - K'_\nu(\alpha_k b)\,I_\nu(\alpha_k a)}{J'_\nu(\alpha_k b)\,J_{-\nu}(\alpha_k a) - J'_{-\nu}(\alpha_k b)\,J_\nu(\alpha_\nu a)},$$

$$B_{k,\nu} = \frac{I'_\nu(\alpha_k b)\,K'_\nu(\alpha_k a) - K'_\nu(\alpha_k b)\,I'_\nu(\alpha_k a)}{J'_\nu(\alpha_k b)\,J'_{-\nu}(\alpha_k a) - J'_{-\nu}(\alpha_k b)\,J'_\nu(\alpha_k a)}.$$

При рассмотрении различных частных задач об интегрировании дифференциальных уравнений, приводящихся к уравнению Бесселя или к системе уравнений Бесселя (см. § 17), могут быть без существенных изменений использованы результаты этого параграфа [1]).

§ 25. Ряды Шлемильха

Рядом Шлемильха обычно называется ряд вида

$$a_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\nu(mx), \tag{25.1}$$

у которого индекс не зависит от номера, а аргумент пропорционален номеру.

Рассмотрим сначала ряд Шлемильха при нулевом индексе функций Бесселя. Докажем, что непрерывная функция $f(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ допускает разложение в ряд

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx), \tag{25.2}$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 2f(0) + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} uf'(u\sin\varphi)\,d\varphi\,du, \\ a_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi/2} uf'(u\sin\varphi)\cos mu\,d\varphi\,du. \end{aligned}\right\} \tag{25.3}$$

При этом требуется, чтобы $f'(x)$ была непрерывна и имела ограниченное полное изменение при $0 \leqslant x \leqslant \pi$.

Доказательство основано на том, что решением интегрального уравнения

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(x\sin\theta)\,d\theta, \tag{25.4}$$

---

[1]) См., например, Б. Г. Коренев, Л. М. Резников, О колебаниях конструкций с динамическими гасителями при стационарных случайных воздействиях, Строительная механика и расчет сооружений, № 4 (1969).

которое называется интегральным уравнением Шлемильха, является функция

$$g(x) = f(0) + x \int_0^{\pi/2} f'(x \sin \varphi)\, d\varphi. \tag{25.5}$$

Уравнение (25.4) легко приводится к уравнению Абеля, которое имеет вид

$$\int_a^y \frac{u(t)\, dt}{(y-t)^{\alpha}} = f(y), \quad 0 < \alpha < 1, \quad \alpha = \text{const}, \tag{25.6}$$

и является частным случаем интегрального уравнения Вольтерра первого рода. К уравнению Абеля легко можно привести уравнение вида

$$\int_a^y \frac{u(t)\, dt}{\sqrt{y^2 - t^2}} = f(y). \tag{25.7}$$

Это уравнение рассмотрено, например, в [15] и [43].

Уравнение Шлемильха (25.4) переходит в уравнение Абеля (25 7) при $a = 0$ в результате следующих замен:

$$t = x \sin \theta, \quad x = y, \quad u(t) = \frac{2}{\pi} g(t).$$

Если положить, что в уравнении Шлемильха нижний предел интегрирования равен α, то в уравнении Абеля (25.7)

$$a = y \sin \alpha.$$

Решение уравнения Абеля в этом частном случае приведено в [15], его можно получить заменив y на s и умножив обе части уравнения на $2s(y^2 - s^2)^{-1/2}$; если теперь проинтегрировать по переменной s в пределах от a до x, то в результате получим

$$u(y) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dy} \int_a^y \frac{sf(s)\, ds}{\sqrt{y^2 - s^2}}. \tag{25.8}$$

Полагая $s = y\sin\theta$, при $a > 0$, $a \leqslant y$ получим

$$u(y) = \frac{2y}{\pi}\left\{\frac{f(a)}{\sqrt{y^2-a^2}} + \int_b^{\pi/2} f'(y\sin\theta)\,d\theta\right\}, \quad b = \arcsin(a/y). \tag{25.9}$$

Заменяя y на x, после элементарных преобразований при $a \to 0$ приходим к (25.5).

Функция $g(x)$, которая играет важную роль в получении разложения $f(x)$, непрерывна и обладает ограниченным полным изменением; при $0 \leqslant x \leqslant \pi$ она допускает разложение

$$\left.\begin{aligned} g(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos mx, \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \\ a_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(u)\cos mu\,du = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left[f(0) + u\int_0^{\pi/2} f'(u\sin\varphi)\,d\varphi\right]\cos mu\,du. \end{aligned}\right\} \tag{25.10}$$

Учитывая (25.4), получим

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(x\sin\theta)\,d\theta = \\ &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m\cos(mx\sin\theta)\right]d\theta = \\ &= \frac{a_0}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty} a_m\int_0^{\pi/2}\cos(mx\sin\theta)\,d\theta = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(mx). \end{aligned} \tag{25.11}$$

При этом, очевидно, был использован интеграл Парсеваля

Обобщение ряда Шлемильха может быть получено при замене бесселевых функций индекса нуль на

бесселевы функции произвольного индекса ν. Кроме того, возможна замена в общем члене ряда функции Бесселя линейной комбинацией функции Бесселя и либо функции Неймана, либо функции Струве. Эти ряды записываются в виде

$$\frac{a_0}{2\Gamma(1+\nu)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m J_\nu(mx)+b_m Y_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}, \tag{25.12}$$

$$\frac{a_0}{2\Gamma(1+\nu)}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m J_\nu(mx)+b_m \mathbf{H}_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu}, \quad -\frac{1}{2}<\nu<\frac{1}{2}. \tag{25.13}$$

Ряды (25.13), изученные более детально, получаются при разложении функции $f(x)$ в интервале $(-\pi, \pi)$ и называются *обобщенными рядами Шлемильха*. Теория этих рядов, подробно рассмотренная в книге Ватсона, была развита и упрощена Куком [63].

Для получения разложения функции $f(x)$ в обобщенные ряды Шлемильха, можно воспользоваться приведенным у Ватсона интегральным уравнением типа уравнения Шлемильха, которое, по существу, имеется в несколько ином виде у Нильсена [76],

$$f(x)=\frac{2}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\int_0^{\pi/2}\cos^{2\nu}\theta\, g(x\sin\theta)\,d\theta, \qquad 0<\nu<1/2; \tag{25.14}$$

непрерывное решение уравнения (25.14) имеет вид

$$g(x)=\Gamma(\nu+1)f(0)+ \\ +\frac{\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2-\nu)}\int_0^{\pi/2}\sec^{2\nu+1}\theta\frac{d}{d\theta}\left[\sin^{2\nu}\theta\,\{f(x\sin\theta)-f(0)\}\right]d\theta. \tag{25.15}$$

Поскольку ν положительно, слагаемые, содержащие $f(0)$, могут быть опущены (см. [7]).

Уравнение (25.14) приводится к уравнению Абеля (25.6) с помощью замен

$$g(x)=xu(x^2), \quad f(x)=(\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)\,x^{2\nu})^{-1}f_1(x^2),$$
$$2\nu=1-2\alpha, \quad x^2=y, \quad x^2\sin^2\theta=t,$$

и в этом случае нижний предел в (25.14) можно положить равным $\beta = \arcsin \sqrt{a/y}$.

Если функция $g(x)$ допускает разложение (25.10), то, воспользовавшись (25.14), (25.15), получим

$$f(x) = \frac{a_0}{2\Gamma(\nu+1)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m J_\nu(mx) + b_m \mathbf{H}_\nu(mx)}{(mx/2)^\nu},$$

где

$$\left.\begin{aligned} a_m &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sec^{2\nu+1}\theta}{\Gamma(1/2-\nu)\,\Gamma(1/2)} \frac{d}{d\theta}\left[\sin^{2\nu}\theta\,\{f(u\sin\theta) - \right. \\ &\qquad \left. - f(0)\}\right] \cos mu\, d\theta\, du, \\ b_m &= \int_{-\pi}^{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \frac{\sec^{2\nu+1}\theta}{\Gamma(1/2-\nu)\,\Gamma(1/2)} \frac{d}{d\theta}\left[\sin^{2\nu}\theta\,\{f(u\sin\theta) - \right. \\ &\qquad \left. - f(0)\}\right] \sin mu\, d\theta\, du. \end{aligned}\right\} \qquad (25.16)$$

При этом был использован интеграл Пуассона и аналогичная формула (16.20), являющаяся интегральным представлением функции Струве.

Заметим, что, следуя Куку, можно было бы сразу получить разложения, не используя интегральных уравнений Шлемильха, опираясь при этом на интегралы Сонина. Этот путь будет использован ниже при рассмотрении некоторых обобщений рядов Шлемильха; последние могут быть легко получены следующим образом:

1) разложение функции $g(x)$ в некоторые другие ряды по функциям $g_m(x)$ таким, что интегралы

$$\int_0^{\pi/2} g_m(x\sin\theta)\,\varphi(\theta)\,d\theta,$$

где $\varphi(\theta)$ не зависит от номера члена ряда, можно достаточно просто выразить через цилиндрические функции;

2) использование интегралов Сонина, с помощью которых получаются разложения по бесселевым функциям аргумента $x\sqrt{m^2+k^2}$;

3) рассмотрение с помощью решений уравнений Абеля при нижнем пределе $a \neq 0$ измененных уравнений

Шлемильха, что приводит к разложениям в ряды по неполным цилиндрическим функциям.

Все отмеченные выше выкладки можно производить раздельно или совместно, последнее в свою очередь приведет к некоторому дальнейшему видоизменению рядов Шлемильха.

Сначала положим [1]), что разложение функции $g(x)$ в ряд Фурье — Бесселя имеет вид

$$g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(j_m x), \tag{25.17}$$

где

$$a_m = \frac{2}{[J_1(j_m)]^2} \int_0^1 u g(u) J_0(j_m u)\, du,$$

$$g(u) = f(0) + u \int_0^{\pi/2} f'(u \sin\theta)\, d\theta.$$

Тогда из (25.4) получим

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} a_m \int_0^{\pi/2} J_0(j_m x \sin\varphi)\, d\varphi. \tag{25.18}$$

Воспользовавшись формулой

$$\int_0^{\pi/2} J_0(z \sin\varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} J_0^2\left(\frac{z}{2}\right),$$

которая получается из формулы на стр. 82, если положить $\nu = 0$, $n = 0$, $Z_\nu(\alpha) = J_\nu(\alpha)$, окончательно найдем

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0^2\left(\frac{j_m x}{2}\right). \tag{25.19}$$

Это разложение по квадратам бесселевых функций, полученное по схеме Шлемильха, не обладает, однако, основным свойством рядов Шлемильха, которое заключается в том, что аргумент пропорционален номеру члена ряда.

---

[1]) См Thielmann H P., Bull. Amer. Math. Soc. **40** (1934).

Введем вспомогательную функцию

$$F(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos mx, \qquad 0\leqslant x\leqslant\pi. \quad (25.20)$$

Теперь построим функцию $g(x)$:

$$g(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}F(x\sin\theta)\,d\theta, \quad (25.21)$$

$$F(x)=g(0)+x\int_0^{\pi/2}g'(x\sin\theta)\,d\theta. \quad (25.22)$$

В соответствии с (25.10), (25.11) справедливо разложение

$$g(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_mJ_0(mx).$$

Пусть функция $f(x)$ связана с $g(x)$ соотношением

$$g(x)=f(0)+x\int_0^{\pi/2}f'(x\sin\theta)\,d\theta. \quad (25.23)$$

Воспользовавшись (25.4), получим разложение, в котором a_m находим из (25.3), заменяя $f(u\sin\varphi)$ на $g(u\sin\varphi)$ по формуле (25.23):

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}g(x\sin\theta)\,d\theta=\\&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2}\left[\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_mJ_0(mx\sin\theta)\right]d\theta=\\&=\frac{a_0}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}a_m\int_0^{\pi/2}J_0(mx\sin\theta)\,d\theta=\\&=\frac{a_0}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}a_mJ_0^2\left(\frac{mx}{2}\right). \quad (25.24)\end{aligned}$$

Теперь положим, что функция $g(x)$ раскладывается в ряд Фурье — Бесселя или Дини на отрезке $[a, b]$ (формулы (24.13) или (24.22)). В этом случае функция $g(x)$ раскладывается в ряд, общий член которого представляет линейную комбинацию цилиндрических функций одинакового индекса. Ограничиваясь случаем, когда индекс равен нулю, получим, что если $g(x)$ раскладывается в ряд с общим членом

$$C_m J_0(j_m x) + d_m Y_0(j_m x), \tag{25.25}$$

то разложение функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left[C_m J_0^2\left(\frac{j_m x}{2}\right) + d_m Y_0\left(\frac{j_m x}{2}\right) J_0\left(\frac{j_m x}{2}\right) \right]. \tag{25.26}$$

Здесь использована формула

$$\int_0^{\pi/2} Y_0(z \sin \varphi)\, d\varphi = \frac{\pi}{2} J_0\left(\frac{z}{2}\right) Y_0\left(\frac{z}{2}\right),$$

которая получается из (18.15) при $n = 0$.

Рассмотрим ряды Шлемильха, у которых аргумент цилиндрической функции равен $z = \sqrt{k^2 + m^2}\, x$, где m — номер члена ряда; k — отличная от нуля постоянная.

Разложение функции $f(x)$ в ряд

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 J_0(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0\left(\sqrt{k^2 + m^2}\, x\right), \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi, \tag{25.27}$$

где

$$a_m = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\, G_m(x, k)\, dx,$$

$$G_m(x, k) =$$

$$= \frac{(-1)^m x \operatorname{ch}\left(k\sqrt{\pi^2 - x^2}\right)}{\sqrt{\pi^2 - x^2}} + \int_x^{\pi} \frac{mx \operatorname{ch}\left(k\sqrt{t^2 - x^2}\right) \sin mt\, dt}{\sqrt{t^2 - x^2}},$$

получено в [67]; доказательство аналогично проведенному ранее при получении разложения (25.2), отличие

заключается в том, что взамен (25.4) рассматривается уравнение Шлемильха, полученное в [67]

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g(x\sin\theta)\cos(kx\cos\theta)\,d\theta, \qquad (25.28)$$

которое также сводится к уравнению Абеля.

Представляя функцию $g(x)$ в виде ряда Фурье по косинусам и используя интеграл Парсеваля, сразу получаем (25.27).

Приведем, следуя схеме Кука [4], несколько иное доказательство, опирающееся на использование интеграла Сонина.

Рассмотрим интеграл Сонина (см. § 20).

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu(a\sin\theta)\,J_\nu(b\cos\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{\nu+1}\theta\,d\theta=$$

$$=a^\mu b^\nu\left(a^2+b^2\right)^{(-\nu-\mu-1)/2}J_{\nu+\mu+1}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right),$$

$$\operatorname{Re}\mu>-1,\quad \operatorname{Re}\nu>-1.$$

Положим

$$a=x\sqrt{m^2+k^2},\quad b=ikx,\quad \nu=-\mu-{}^1\!/_2.$$

Тогда

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu\left[\sqrt{m^2+k^2}\,x\sin\theta\right]J_{-\mu-1/2}(ikx\cos\theta)\times$$

$$\times\sin^{\mu+1}\theta\cos^{-\mu+1/2}\theta\,d\theta=$$

$$=\left[x^2(m^2+k^2)\right]^{\mu/2}(ikx)^{-\mu-1/2}(mx)^{-1/2}J_{1/2}(mx). \qquad (25.29)$$

Воспользовавшись формулами

$$J_{1/2}(mx)=\sqrt{2/(\pi mx)}\sin mx,$$

$$J_{-\mu-1/2}(ikx\cos\theta)=\exp\left[-\frac{i\pi}{2}\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\right]I_{-\mu-1/2}(kx\cos\theta),$$

перепишем (25.29) в следующем виде:

$$\int_0^{\pi/2} J_\mu\left[\sqrt{m^2+k^2}\,x\sin\theta\right]I_{-\mu-1/2}(kx\cos\theta)\sin^{\mu+1}\theta\cos^{-\mu+1/2}\theta\,d\theta=$$

$$=\left[x^2(m^2+k^2)\right]^{\mu/2}(kx)^{-\mu-1/2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{\sin mx}{mx}. \qquad (25.30)$$

Положим, что для функции $f(x)$ имеется разложение

$$f(x)=\sum_{m=1}^{\infty} a_m J_\mu\left(\sqrt{m^2+k^2}\,x\right)\frac{\sqrt{\pi}\,mx\,(kx)^{\mu+1/2}}{\sqrt{2}\,[x^2(m^2+k^2)]^{\mu/2}},\quad 0\leqslant x\leqslant\pi. \tag{25.31}$$

В общем члене ряда заменим x на $x\sin\theta$ и умножим обе части на

$$(\sin\theta)^{\mu-1/2}(\cos\theta)^{-\mu+1/2}I_{-\mu-1/2}(kx\cos\theta).$$

Проинтегрируем от 0 до $\pi/2$ и применим формулу (25.30), получив при этом формально

$$\int_0^{\pi/2} f(x\sin\theta)(\sin\theta)^{\mu-1/2}(\cos\theta)^{-\mu+1/2}I_{-\mu-1/2}(kx\cos\theta)\,d\theta=$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty} a_m \sin mx, \tag{25.32}$$

где

$$a_m=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin mt\,dt\int_0^{\pi/2} f(t\sin\theta)(\sin\theta)^{-1/2+\mu}\times$$

$$\times(\cos\theta)^{-\mu+1/2}I_{-\mu-1/2}(kt\cos\theta)\,d\theta.$$

Полагая $\mu=0$, получаем результат, который, как это можно показать, имеет весьма простой вид.

Нильсен [76] рассмотрел различные ряды Шлемильха, дающие в сумме нуль. Простейший из таких рядов имеет вид

$$\frac{1}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m J_0(mx)=0,\qquad 0<x<\pi; \tag{25.33}$$

при $x=0$ этот ряд колеблется; при $x=\pi$ ряд расходится.

Этот факт показывает, что если функция, заданная в интервале $(-\pi,\pi)$, может быть представлена рядом Шлемильха, сходящимся в этом интервале (за исключением, быть может, конечного числа точек), то такое представление не является единственным.

В [67] показано, что нуль в сумме дает также ряд

$$\frac{1}{2} J_0(kx) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m J_0\left(\sqrt{m^2 + k^2}\, x\right), \qquad 0 < x < \pi, \quad (25.34)$$

где k — вещественное число.

Доказательство формулы (25.33), данное Ватсоном, легко обобщается для суммы ряда (25.34).

Вернемся к ряду (25.2). Если положить, что нижний предел a в интеграле, входящем в уравнение Абеля, отличен от нуля и, следовательно, в интегральном уравнении Шлемильха нижний предел равен $\arcsin \sqrt{a/x}$, то при разложении функции $g(x)$ в ряд по косинусам и последующем вычислении интегралов

$$\int_{\arcsin(a/x)}^{\pi/2} \cos(mx \sin\theta)\, d\theta,$$

кроме функций Бесселя, получим неполные функции Бесселя (см. § 28) и ряд Шлемильха примет вид

$$f(x) = a_0/2 + \sum_{m=1}^{\infty} a_m [J_0(mx) - J_0(w_m, x)], \quad (25.35)$$

где $w_m = \arcsin \sqrt{a/(mx)}$, обозначение $J_0(w_m, x)$ см. в § 28.

Очевидно, что и в других рассмотренных выше формулах, где встречались интегралы Парсеваля или интегралы Пуассона, вводя нижний предел, отличный от нуля, мы получим соответствующие неполные цилиндрические функции.

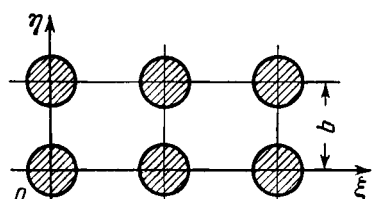

Рис. 10.

В приложениях часто встречаются ряды, весьма близкие к рассмотренным рядам Шлемильха и получаемые в результате очевидных физических соображений. Они появляются при решении краевых задач для неоднородного уравнения Гельмгольца с периодической правой частью такой, что для части области она обращается в нуль, а участки, где она отлична от нуля, имеют характеристический размер, малый по сравнению с периодами правой части уравнения (см. рис. 10). Для определенности рассмотрим пример.

Пусть функция $w(\xi, \eta)$ удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 w - w = q(\xi, \eta),$$

где $q = 0$, если точка находится вне заштрихованных кругов,

$$q = q_{mn} = f_{mn}(\sqrt{(\xi - na)^2 + (\eta - mb)^2}),$$

где m, n — числа, характеризующие номер центра круга, координаты которого $\xi_{mn} = na$, $\eta_{mn} = mb$, если точка принадлежит заштрихованному кругу.

Найдем $w(0, 0)$, использовав для этого осесимметричные решения, соответствующие влиянию каждой из нагрузок q_{mn}.

Очевидно, что решение, отвечающее влиянию нагрузки, расположенной по кругу ($m = 0$, $n = 0$), имеет вид, определяемый формулами, приведенными в [20], и отыскивается в результате интегрирования основной функции влияния; для всех других значений m, n вклад, даваемый нагрузкой, распределенной по соответствующему кругу, приближенно равен

$$w_{m,\,n} = A_{mn} K_0(\sqrt{m^2 a^2 + n^2 b^2}).$$

При этом числа A_{00} и A_{mn} вычисляются так, как это показано в [20], где рассматривается влияние точечного источника и проводится интегрирование соответствующей функции влияния. Таким образом, решение имеет вид

$$w(0, 0) = A_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} K_0(\sqrt{m^2 a^2 + n^2 b^2}).$$

Эту задачу можно интерпретировать как определение прогиба мембраны, лежащей на упругом винклеровском основании.

Представляет интерес решение аналогичной задачи для пластинки, лежащей на винклеровском упругом основании (см [20])

§ 26. Ряды Неймаиа

В §§ 24, 25 рассматривались ряды, которые в определенной мере аналогичны рядам Фурье. Здесь будут рассмотрены ряды по бесселевым функциям, в какой-то мере аналогичные степенным рядам.

Рядом Неймана называется ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_{\nu+n}(z). \tag{26.1}$$

С рядами Неймана читатель, по существу, уже встречался при рассмотрении формул сложения и при выводе разложения Ломмеля.

Приведем два примера разложений функций в ряды Неймана, которые получаются из формул сложения

$$J_\nu(z+y)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} J_{\nu-m}(y)\,J_m(z),$$

$$K_0(z-y)=\begin{cases} 2\sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' I_m(y)\,K_m(z), & y\leqslant z,\\ 2\sum\limits_{m=0}^{\infty}{}' I_m(z)\,K_m(y), & y\geqslant z. \end{cases}$$

Приведем без вывода (см. [7]) разложение в ряд Неймана функции $f(z)$, для которой задано представление в виде ряда Маклорена:

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n, \qquad |z|\leqslant R.$$

Коэффициенты ряда Неймана (26.1) в этом случае имеют вид

$$a_0=b_0,$$
$$a_n=n\sum_{m=0}^{\leqslant n/2} 2^{n-2m}\,\frac{(n-m-1)!}{m!}\,b_{n-2m}.$$

В случае, когда функция $f(z)$ может быть представлена в виде ряда Лорана

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n+\sum_{n=1}^{\infty} b'_n/z^n, \qquad r\leqslant|z|\leqslant R,$$

ряд Неймана имеет вид

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n J_n(z)+\sum_{n=0}^{\infty} a'_n O_n(z), \tag{26.2}$$

где $O_n(z)$ — полином Неймана, который выражается формулой

$$O_n(z)=\frac{1}{4}\sum_{m=0}^{n}\frac{n\Gamma(n/2+m/2)\cos^2[(m\pm n)\pi/2]}{\Gamma(n/2-m/2+1)\,(z/2)^{m+1}},$$

$a_0, \ldots, a_n$ имеют такое же выражение, как и для ряда Маклорена, а коэффициенты a'_n определены формулой

$$a'_n = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{n+2m}\, m!\,(m+n)!}\, b'_{n+2m+1}.$$

§ 27. Функции Ломмеля двух переменных

Функции Ломмеля двух переменных можно определить с помощью рядов Неймана следующими равенствами:

$$\left.\begin{aligned} U_n(w, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (w/z)^{n+2m} J_{n+2m}(z), \\ V_n(w, z) &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (w/z)^{-n-2m} J_{-n-2m}(z). \end{aligned}\right\} \quad (27.1)$$

Если индекс ν — нецелое число, то

$$U_\nu(w, z) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m (w/z)^{\nu+2m} J_{\nu+2m}(z). \quad (27.2)$$

Между функциями U и V при целом индексе имеют место соотношения

$$\left.\begin{aligned} U_n(w, z) - V_{-n+2}(w, z) &= \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} - \frac{\pi n}{2}\right), \\ U_{n+1}(w, z) - V_{-n+1}(w, z) &= \sin\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} - \frac{\pi n}{2}\right). \end{aligned}\right\} \quad (27\,3)$$

Если индекс ν — нецелое число, то

$$\left.\begin{aligned} V_\nu(w, z) &= U_{-\nu+2}(w, z) + \cos\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} + \frac{\nu\pi}{2}\right), \\ U_\nu(w, z) + U_{\nu+2}(w, z) &= (w/z)^\nu J_\nu(z), \\ V_\nu(w, z) + V_{\nu+2}(w, z) &= (w/z)^{-\nu} J_{-\nu}(z). \end{aligned}\right\} \quad (27.4)$$

Рассматриваемые функции были введены Ломмелем при изучении задач дифракции. Их можно рассматривать как некоторые частные решения неоднородного уравнения Бесселя. Можно установить соотношения между этими и ранее рассмотренными функциями, родственными функциям Бесселя.

Нетрудно получить дифференциальное уравнение, которому удовлетворяют функции Ломмеля двух переменных

Воспользовавшись формулой

$$\frac{d}{dz}[z^{-\nu}Z_\nu(z)] = -z^{-\nu}Z_{\nu+1}(z)$$

и продифференцировав по z ряд (27.2), получим

$$\frac{\partial}{\partial z}U_\nu(w, z) = -\frac{z}{w}U_{\nu+1}(w, z).$$

Повторное дифференцирование дает

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}U_\nu(w, z) = \frac{z^2}{w^2}U_{\nu+2}(w, z) - \frac{1}{w}U_{\nu+1}(w, z). \quad (27.5)$$

Эти формулы дают возможность, воспользовавшись первым из уравнений (27.1), получить следующий результат:

$$\left\{\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{z}\frac{\partial}{\partial z} + \frac{z^2}{w^2}\right\}U_\nu(w, z) =$$

$$= \frac{z^2}{w^2}\{U_{\nu+2}(w, z) + U_\nu(w, z)\} = \left(\frac{w}{z}\right)^{\nu-2}J_\nu(z). \quad (27.6)$$

Функция Ломмеля $U_\nu(w, z)$ является частным решением полученного дифференциального уравнения, которое с помощью замены переменной $z = \sqrt{2wt}$ можно записать в виде

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y = \left(\frac{w}{2}\right)^{\nu/2}t^{-\nu/2}J_\nu(\sqrt{2wt}),$$

где $y = U_\nu(w, z)$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения имеет вид

$$y = A\cos\frac{z^2}{2w} + B\sin\frac{z^2}{2w}.$$

Нетрудно показать, что $V_\nu(w, z)$ есть частное решение уравнения

$$\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - \frac{1}{z}\frac{\partial y}{\partial z} + \frac{z^2 y}{w^2} = \left(\frac{z}{w}\right)^\nu J_{-\nu+2}(z). \quad (27.7)$$

Приведем интегралы, дающие представление функций Ломмеля в виде

$$\left.\begin{aligned} U_\nu(w, z) &= \frac{w^\nu}{z^{\nu-1}} \int_0^1 J_{\nu-1}(zt) \cos\left\{\frac{1}{2} w (1-t^2)\right\} t^\nu \, dt, \\ U_{\nu+1}(w, z) &= \frac{w^\nu}{z^{\nu-1}} \int_0^1 J_{\nu-1}(zt) \sin\left\{\frac{1}{2} w (1-t^2)\right\} t^\nu \, dt. \end{aligned}\right\} \quad (27.8)$$

Эти формулы справедливы при $\operatorname{Re}\nu > 0$; для других значений ν формулы получаются в результате интегрирования в плоскости комплексного переменного. Объединяя приведенные выше две формулы, находим

$$U_\nu(w, z) \pm iU_{\nu+1}(w, z) = \\ = \frac{w^\nu}{z^{\nu-1}} \int_0^1 J_{\nu-1}(zt) \exp\left\{\pm \frac{1}{2} iw (1-t^2)\right\} t^\nu \, dt.$$

В результате интегрирования в плоскости комплексного переменного получаются формулы

$$\frac{w^\nu}{z^{\nu-1}} \int_0^\infty J_{\nu-1}(zt) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} \left\{\frac{1}{2} w (1-t^2)\right\} t^\nu \, dt = \\ = \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left(\frac{w}{2} + \frac{z^2}{2w} - \frac{\nu\pi}{2}\right), \quad (27.9)$$

которые справедливы при $w > 0$, $z > 0$, $3/2 > \operatorname{Re}(\nu) > 0$.

Приведем еще формулы, для получения которых нужно воспользоваться (27.9), (27.4), (27.8),

$$\left.\begin{aligned} V_\nu(w, z) &= -\frac{z^{\nu-1}}{w^{\nu-2}} \int_1^\infty J_{1-\nu}(zt) \cos\left\{\frac{1}{2} w (1-t^2)\right\} t^{2-\nu} \, dt, \\ V_{\nu-1}(w, z) &= -\frac{z^{\nu-1}}{w^{\nu-2}} \int_1^\infty J_{1-\nu}(zt) \sin\left\{\frac{1}{2} w (1-t^2)\right\} t^{2-\nu} \, dt. \end{aligned}\right\} \quad (27.10)$$

В частном случае, если положить в (27.9) $\nu = 1$, получаем

$$\int_0^\infty J_0(zt) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}\left(\frac{wt^2}{2}\right) t\,dt = \frac{1}{w} \begin{matrix}\sin \\ \cos\end{matrix}\left(\frac{z^2}{2w}\right). \qquad (27.11)$$

Этот результат тесно связан с первым экспоненциальным интегралом Вебера.

Приведенная ранее формула дифференцирования по z является рекуррентной формулой для $U_\nu(w, z)$; для получения дальнейших формул следует вычислить производную по аргументу w

$$\frac{\partial}{\partial w} U_\nu(w, z) = \frac{1}{2}\left[U_{\nu-1}(w, z) + \left(\frac{z}{w}\right)^2 U_{\nu+1}(w, z)\right].$$

Для функции $V_\nu(w, z)$ можно получить аналогичные формулы:

$$\frac{\partial}{\partial z} V_\nu(w, z) = -\frac{z}{w} V_{\nu-1}(w, z),$$

$$2\frac{\partial}{\partial w} V_\nu(w, z) = V_{\nu+1}(w, z) + \frac{z^2}{w^2} V_{\nu-1}(w, z).$$

Рассмотрим несобственный интеграл от функции Ломмеля двух переменных, аналогичный несобственному интегралу Вебера от функции Бесселя. Для этого воспользуемся первой из формул (27.8) и поменяем порядок интегрирования, получив при этом

$$\int_0^\infty U_\nu(w, z)\, z^{-\nu+k}\,dz =$$

$$= \int_0^\infty \frac{w^\nu}{z^{\nu-1}} z^{-\nu+k}\,dz \int_0^1 J_{\nu-1}(zt) \cos\left\{\frac{1}{2} w\left(1-t^2\right)\right\} t^\nu\,dt =$$

$$= \int_0^1 \frac{\Gamma\left((k-\nu+1)/2\right) w^\nu t^{3\nu-k-2}}{2^{2\nu-1-k}\Gamma\left(\nu-(k-\nu+1)/2\right)} \cos\left\{\frac{1}{2} w\left(1-t^2\right)\right\} dt =$$

$$= \frac{\Gamma\left((k-\nu+1)/2\right) w^\nu}{2^{2\nu-1-k}\Gamma\left(\nu-(k-\nu+1)/2\right)} \cdot \frac{2^{(3\nu-k-3)/2}\,\Gamma\left((3\nu-k-1)/2\right)}{w^{(3\nu-k-1)/2}} \times$$

$$\times U_{(3\nu-k-1)/2}(w, 0) =$$

$$= \frac{w^{-\nu/2+k/2+1}\,\Gamma\left((k-\nu+1)/2\right)}{2^{\nu/2-k/2+1}\,\Gamma\left((3\nu-k-3)/2\right)} S_{(3\nu-k-4)/2,\,1/2}\left(\frac{w}{2}\right),$$

$$\operatorname{Re} k + 1 > \operatorname{Re}\nu > \frac{\operatorname{Re} k}{2} + \frac{1}{4}.$$

Воспользовавшись формулой обращения для преобразования Меллина [5], можно сразу получить представление для функции Ломмеля двух переменных в виде интеграла от функций Ломмеля $s_{\mu,\nu}$

$$\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} s_{(3\nu-k-4)/2,\,1/2}\left(\frac{w}{2}\right) z^{-k-1} \times$$

$$\times \frac{\Gamma\left((k-\nu+1)/2\right) w^{(k+2-\nu)/2}}{\Gamma\left((3\nu-k-3)/2\right) 2^{(2-k+\nu)/2}}\, dk =$$

$$= 2\pi i z^{-\nu} U_\nu(w, z),$$

где $z^{\sigma-1}z^{-\nu}U_\nu(w, z) \in L(0, +\infty)$ $(\sigma+2>\operatorname{Re}\nu>\sigma/2+{}^3/_4)$.

Остановимся теперь на некоторых частных случаях функций Ломмеля от двух переменных и их связи с другими специальными функциями.

Рассмотрим сначала функции Ломмеля при $w = cz$, $c = \text{const}$. В этом случае приведенные выше формулы позволяют показать, что частными решениями уравнения

$$4\frac{d^2y}{dz^2} + \left(c+\frac{1}{c}\right)^2 y = c^\nu J_{\nu-2}(z) + c^{\nu-2}J_\nu(z)$$

являются функции $U_\nu(cz, z)$ и $V_{-\nu+2}(cz, z)$.

Из интегральных представлений функций Ломмеля двух переменных видно, что при $z = 0$, воспользовавшись разложением функции Бесселя в степенной ряд, получим (см. также (27.17)), что эта функция сомножителем, имеющим весьма простой вид, отличается от функции Ломмеля одной переменной, рассматривавшейся ранее, в § 16:

$$U_\nu(w, 0) = \frac{(w/2)^{1/2}}{\Gamma(\nu-1)} s_{\nu-3/2,\,1/2}\left(\frac{1}{2}w\right), \qquad (27.12)$$

$$V_{-\nu+2}(w, 0) = \frac{(w/2)^{1/2}}{\Gamma(\nu-1)} S_{\nu-1/2,\,1/2}\left(\frac{1}{2}w\right). \qquad (27.13)$$

При целом положительном индексе и при $w = z$ справедливы следующие простые соотношения, при получении

которых использованы разложения Якоби (стр. 34):

$$\left.\begin{aligned} U_0(z,\ z) &= V_0(z,\ z) = \tfrac{1}{2}(J_0(z) + \cos z), \\ U_{2n}(z,\ z) &= V_{2n}(z,\ z) = \tfrac{1}{2}(-1)^n \left(\cos z - 2\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m J_{2m}(z)\right), \end{aligned}\right\} \tag{27.14}$$

$$\left.\begin{aligned} U_1(z,\ z) &= -V_1(z,\ z) = (\sin z)/2, \\ U_{2n+1}(z,\ z) &= -V_{2n+1}(z,\ z) = \\ &= \tfrac{1}{2}(-1)^n \left(\sin z - 2\sum_{m=0}^{n-1}(-1)^m J_{2m+1}(z)\right). \end{aligned}\right\} \tag{27.15}$$

Эти соотношения справедливы при условии, что в (27.14) $n \geqslant 1$, в (27.15) $n \geqslant 0$.

Представляют интерес формулы, связывающие функции Ломмеля индекса 1/2 и 3/2 с функциями того же индекса, у которых вторая переменная обратилась в нуль

$$U_{1/2}(w,\ z) \pm iU_{3/2}(w,\ z) = \tfrac{1}{2} e^{\mp iz}\{U_{1/2}(2\sigma,\ 0) \pm iU_{3/2}(2\sigma,\ 0)\} + \\ + \tfrac{1}{2} e^{\pm iz}\{U_{1/2}(2\delta,\ 0) \pm iU_{3/2}(2\delta,\ 0)\}, \tag{27.16}$$

где

$$\sqrt{\sigma} = \frac{w+z}{\sqrt{2w}}, \quad \sqrt{\delta} = \frac{w-z}{\sqrt{2w}}.$$

Воспользовавшись интегральными представлениями, имеем при $z = 0$

$$\left.\begin{aligned} U_\nu(w,\ 0) &= \frac{w^\nu}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \int_0^1 t^{2\nu-1} \cos\left\{\tfrac{1}{2} w(1-t^2)\right\} dt, \\ U_{\nu+1}(w,\ 0) &= \frac{w^\nu}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \int_0^1 t^{2\nu-1} \sin\left\{\tfrac{1}{2} w(1-t^2)\right\} dt. \end{aligned}\right\} \tag{27.17}$$

При $\nu = {}^1/_2$, обозначив $w = \pi u^2$, получим

$$\int_0^u \cos\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \cos t\, dt =$$

$$= [U_{1/2}(2z,\ 0)\cos z + U_{3/2}(2z,\ 0)\sin z]/\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2} + [V_{1/2}(2z,\ 0)\sin z + V_{3/2}(2z,\ 0)\cos z]/\sqrt{2};$$

$$\int_0^u \sin\left(\frac{1}{2}\pi t^2\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^z \left(\frac{2}{\pi t}\right)^{1/2} \sin t\, dt =$$

$$= [U_{1/2}(2z,\ 0)\sin z - U_{3/2}(2z,\ 0)\cos z]/\sqrt{2} =$$

$$= \frac{1}{2} - [V_{1/2}(2z,\ 0)\cos z - V_{3/2}(2z,\ 0)\sin z]/\sqrt{2}.$$

Эти формулы устанавливают связь между функциями Ломмеля двух переменных и *интегралами Френеля*

$$S(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \sin t^2\, dt,\quad C(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \cos t^2\, dt.$$

В приложениях часто встречается связанный с интегралами Френеля *интеграл вероятности*

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-u^2}\, du,$$

который, очевидно, также связан с функциями Ломмеля двух переменных.

Интересно отметить, что функции Ломмеля двух переменных нашли широкое применение в теории прохождения через резонанс динамических систем при линейном изменении частоты возмущающего воздействия.

В задачах о прохождении через резонанс встречаются следующие интегралы, к которым приводит и рассмотрение функций Ломмеля двух переменных с индексами 3/2 и 1/2, если z мнимое:

$$\int_0^t e^{\varkappa t}\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) dt,\quad \int_0^t e^{\varkappa t}\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right) dt,$$

Эти интегралы могут быть выражены через функции S и T, где

$$S = 2^{-1}\sqrt{\pi}\exp(x^2 - y^2)(u\sin 2xy + v\cos 2xy),$$

$$T = 2^{-1}\sqrt{\pi}\exp(x^2 - y^2)(1 + v\sin 2xy - u\cos 2xy),$$

а через $u(z)$ и $v(z)$ обозначены вещественная и мнимая части интеграла вероятности в комплексной области

$$u(z) + iv(z) = W(z).$$

Приведем следующие формулы:

$$A_1(t) = \int_0^t e^{\varkappa t}\cos\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)dt =$$

$$= -\omega^{-1/2}\{(\sin\beta - \cos\beta)[T(\sqrt{-\beta}) + T(\tau)] -$$

$$-(\sin\beta + \cos\beta)[S(\sqrt{-\beta}) + S(\tau)]\};$$

$$A_2(t) = \int_0^t e^{\varkappa t}\sin\left(\frac{1}{2}\omega t^2\right)dt =$$

$$= \omega^{-1/2}\{(\sin\beta - \cos\beta)[T(\sqrt{-\beta}) + T(\tau)] +$$

$$+(\sin\beta + \cos\beta)[S(\sqrt{-\beta}) + S(\tau)]\},$$

где $\beta = \varkappa^2/(2\omega)$, $\tau = \sqrt{\omega/4}\,[(t - \varkappa/\omega) + i(t + \varkappa/\omega)]$.

§ 28. О неполных цилиндрических функциях

В предыдущих параграфах рассматривались различные частные решения неоднородного уравнения Бесселя. Некоторые из них, как, например, функции Ангера и Вебера, получались естественным образом в результате некоторого обобщения интегралов Бесселя, другие определялись в результате использования метода вариации произвольных постоянных. В этом параграфе будет рассмотрен вкратце весьма широкий класс решений неоднородных уравнений Бесселя.

Эти решения носят название *неполных цилиндрических функций* и чаще всего определяются из интегральных представлений Бесселя, Пуассона и Сонина — Шлефли, в которых пределы интегрирования являются переменными. При этом указанные функции определяются так, чтобы при некоторых значениях пределов они переходили в обычные цилиндрические функции. Неполные цилиндрические функции зависят от трех независимых

переменных — индекса, аргумента и параметра неполноты, обозначаемого w. Это обстоятельство и дает возможность в рамках теории неполных цилиндрических функций рассмотреть очень широкий класс решений неоднородных уравнений, куда входят, в частности, и рассмотренные ранее, в § 16, частные решения неоднородного уравнения Бесселя. Теория этих функций очень подробно разработана в монографии М. М. Агреста и М. З. Максимова [2]. В этом параграфе даны самые краткие сведения из теории неполных цилиндрических функций, заимствованные из указанной монографии

Рассмотрим функцию

$$E_\nu^+(w, z) = \frac{2z^\nu}{A_\nu} \int_0^w e^{iz\cos t} \sin^{2\nu} t\, dt, \qquad (28.1)$$

$$A_\nu = 2^\nu \Gamma(\nu + 1/2)\, \Gamma(1/2), \qquad \operatorname{Re}(\nu + 1/2) > 0,$$

которая при $w = \pi/2$ переходит в обычный интеграл Пуассона, и поэтому

$$E_\nu^+(\pi/2, z) = J_\nu(z).$$

Рассматривая z как аргумент, w как параметр, найдем последовательно первую и вторую производные (28.1), после этого используем полученные выражения при применении оператора Бесселя индекса ν к функции $E_\nu^+(w, z)$. В результате несложных выкладок получим для функции $E_\nu^+(w, z)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\nabla_\nu E_\nu^+(w, z) = 2iz^{\nu+1} \sin^{2\nu+1} w A_\nu^{-1} e^{iz\cos w} = \Psi_\nu(w, z). \qquad (28.2)$$

Формулы, которые неоднократно были использованы выше (см., например, § 16) и основаны, по существу, на применении функций Коши для уравнений с правой частью, дают

$$E_\nu^+(w, z) = J_\nu(w)\left[C_\nu(w) - \frac{\pi}{2}\int_0^z Y_\nu(t)\,\Psi_\nu(w, t)\,\frac{dt}{t}\right] +$$

$$+ Y_\nu(z)\left[D_\nu(w) + \frac{\pi}{2}\int_0^z J_\nu(t)\,\Psi_\nu(w, t)\,\frac{dt}{t}\right], \qquad (28.3)$$

где, как это показывает изучение асимптотики $E_\nu^+(w, z)$,

$$C_\nu(w) = 2\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\int_0^w \sin^{2\nu} t\,dt, \qquad D_\nu(w) = 0. \quad (28.4)$$

Используя эти результаты и заменяя $\Psi_\nu(w, t)$ его выражением (28.2), получим

$$E_\nu^+(w, z) = 2J_\nu(z)\frac{\Gamma(\nu+1)}{\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\int_0^w \sin^{2\nu} t\,dt +$$

$$+ 2\pi i\frac{\sin^{2\nu+1} w}{2^{\nu+1}\Gamma(\nu+1/2)\,\Gamma(1/2)}\left[Y_\nu(z)\int_0^z J_\nu(t)\,e^{it\cos w}t^\nu\,dt - \right.$$

$$\left. - J_\nu(z)\int_0^z Y_\nu(t)\,e^{it\cos w}t^\nu\,dt\right]. \quad (28.5)$$

Введем еще функцию

$$E_\nu^-(w, z) = \frac{2z^\nu}{A_\nu}\int_0^w e^{-iz\cos u}\sin^{2\nu} u\,du \quad (28.6)$$

и приведем выражения для неполной функции Бесселя $J_\nu(w, z)$ и неполной функции Струве $\mathbf{H}_\nu(w, z)$:

$$J_\nu(w, z) = \frac{E_\nu^+(w, z) + E_\nu^-(w, z)}{2} =$$

$$= 2\frac{z^\nu}{A_\nu}\int_0^w \cos(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta, \quad (28.7)$$

$$\mathbf{H}_\nu(w, z) = \frac{E_\nu^+(w, z) - E_\nu^-(w, z)}{2i} =$$

$$= 2\frac{z^\nu}{A_\nu}\int_0^w \sin(z\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta\,d\theta.$$

Очевидно, что

$$J_\nu(\pi/2, z) \equiv J_\nu(z), \quad \mathbf{H}_\nu(\pi/2, z) \equiv \mathbf{H}_\nu(z). \quad (28.8)$$

Замена аргумента z на iz приводит к следующим формулам:

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(w, iz) &= e^{i\nu\pi/2} I_\nu(w, z), \\ \mathbf{H}_\nu(w, iz) &= ie^{i\nu\pi/2} \mathbf{L}_\nu(w, z), \end{aligned}\right\} \tag{28.9}$$

где

$$\left.\begin{aligned} I_\nu(w, z) &= \frac{2z^\nu}{A_\nu} \int_0^w \operatorname{ch}(z\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta \, d\theta, \\ \mathbf{L}_\nu(w, z) &= \frac{2z^\nu}{A_\nu} \int_0^w \operatorname{sh}(z\cos\theta) \sin^{2\nu}\theta \, d\theta, \\ &\operatorname{Re}(\nu + {}^1/_2) > 0. \end{aligned}\right\} \tag{28.10}$$

Функция $I_\nu(w, z)$ называется неполной функцией Бесселя от чисто мнимого аргумента, $\mathbf{L}_\nu(w, z)$ — неполной функцией Струве от чисто мнимого аргумента.

Функция $E_\nu^+(-iw, z)$ при $w \to -i\infty$ переходит в функцию Ганкеля первого рода, поэтому неполной функцией Ганкеля называют

$$\mathscr{H}_\nu(w, z) = E_\nu^+(-iw, z). \tag{28.11}$$

Очевидно,

$$\mathscr{H}_\nu(\beta, z) = -\frac{2ie^{-i\pi\nu} z^\nu}{A_\nu} \int_0^\beta e^{iz \operatorname{ch} u} \operatorname{sh}^{2\nu} u \, du \tag{28.12}$$

при вещественном $\operatorname{ch}\beta > 1$, $\operatorname{Re}(\nu + 1/2) > 0$.

Переходя, далее, к комплексному аргументу iz, придем к неполной функции Макдональда

$$K_\nu(w, z) = \frac{i\pi}{2} e^{i\nu\pi/2} E_\nu^+(-iw, iz) =$$

$$= \frac{\pi z^\nu}{A_\nu} \int_1^{\operatorname{ch} w} e^{-zt} (t^2 - 1)^{\nu - 1/2} \, dt, \quad \operatorname{Re}(\nu + {}^1/_2) > 0. \tag{28.13}$$

Приведем теперь рекуррентные соотношения между неполными цилиндрическими функциями. Для этого нужно

воздействовать на функцию $E_\nu^+(w, z)$ операторами:

$$\left.\begin{aligned} L_\nu(f_\nu) &\equiv f_{\nu-1} + f_{\nu+1} - \frac{2\nu}{z} f_\nu, \\ L'_\nu(f_\nu) &\equiv f_{\nu-1} - f_{\nu+1} - 2\frac{d}{dz} f_\nu, \end{aligned}\right\} \tag{28.14}$$

что дает следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} L_\nu[E_\nu^+(w, z)] &= 2z^\nu \sin^{2\nu-1} w \left[\frac{\cos w}{A_\nu z} + i\frac{\sin^2 w}{A_{\nu+1}}\right] e^{iz\cos w}, \\ L'_\nu[E_\nu^+(w, z)] &= 2z^\nu \sin^{2\nu-1} w \left[\frac{\cos w}{A_\nu z} - i\frac{\sin^2 w}{A_{\nu+1}}\right] e^{iz\cos w}. \end{aligned}\right\} \tag{28.15}$$

Из этих формул при $\operatorname{Im} z > 0$, $w \to -i\infty$ непосредственно получаются обычные рекуррентные соотношения для функций Ганкеля первого рода. Имеем

$$E_\nu^+(w, z) = J_\nu(w, z) + i\mathbf{H}_\nu(w, z),$$
$$e^{iz\cos w} = \cos(z\cos w) + i\sin(z\cos w).$$

С помощью этих формул из (28.15) получим

$$\left.\begin{aligned} L_\nu[J_\nu(w, z)] &= g_\nu^-(w, z); \\ L'_\nu[J_\nu(w, z)] &= g_\nu^+(w, z), \end{aligned}\right\} \tag{28.16}$$

где

$$g^\pm(w, z) = 2z^\nu \sin^{2\nu-1} w \left[\frac{\cos w}{zA_\nu}\cos(z\cos w) \pm \right.$$
$$\left. \pm \frac{\sin^2 w}{A_{\nu+1}}\sin(z\cos w)\right].$$

Приведем аналогичные формулы для неполных функций Струве

$$L_\nu[\mathbf{H}_\nu(w, z)] = f_\nu^+(w, z), \quad L'_\nu[\mathbf{H}_\nu(w, z)] = f_\nu^-(w, z),$$

где

$$f_\nu^\pm(w, z) =$$
$$= 2z^\nu \sin^{2\nu-1} w \left[\frac{\cos w}{zA_\nu}\sin(z\cos w) \pm \frac{\sin^2 w}{A_{\nu+1}}\cos(z\cos w)\right].$$

Неполные цилиндрические функции полуцелого индекса имеют в качестве аналога цилиндрические

функции полуцелого индекса, например:

$$E^{+}_{1/2}(w, z) = 2\sqrt{2/\pi z}\,(e^{iz} - e^{iz\cos w})/2i.$$

Все рассмотренные выше функции называются неполными цилиндрическими функциями в форме Пуассона. Кроме этих функций, рассматриваются неполные цилиндрические функции, связанные с другими интегральными представлениями функций Бесселя.

Неполные цилиндрические функции в форме Бесселя определяются следующим образом:

$$\varepsilon_{\nu}(w, z) = \frac{1}{\pi i}\int_{0}^{w} e^{z\,\mathrm{sh}\,t - \nu t}\,dt. \qquad (28.17)$$

По аналогии с тем, что имеет место для обычных цилиндрических функций, эти функции при $w = 2\pi i$ переходят в функции Бесселя только при целых значениях индекса: $\varepsilon_n(2\pi i, z) = 2J_n(z)$; отсюда также следует, что неполные функции в форме Бесселя и функции в форме Пуассона принадлежат, как это подробно рассматривается в [2], к различным классам функций. В этом случае также можно ввести неполные функции Бесселя от чисто мнимого аргумента в форме Бесселя, неполные функции Ганкеля в форме Бесселя и др.

Неполные цилиндрические функции в форме Бесселя удовлетворяют неоднородному дифференциальному уравнению

$$\nabla_{\nu}\varepsilon_{\nu}(w, z) = [(\nu + z\,\mathrm{ch}\,w)\exp(z\,\mathrm{sh}\,w - \nu w) - (\nu + z)]/\pi i. \qquad (28.18)$$

Между функциями $E^{+}_{\nu}(w, z)$ и $\varepsilon_{\nu}(w, z)$ существует однозначная связь только при целых индексах.

Рассмотрим неполные цилиндрические функции в форме Сонина — Шлефли.

Интегральное представление Сонина — Шлефли функции Бесселя имеет вид

$$J_{\nu}(z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^{\nu}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} t^{-\nu-1}\exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right)dt, \qquad (28.19)$$

где $c > 0$, $\mathrm{Re}\,\nu > -1$.

Контур интегрирования разомкнутый, его концы — две бесконечно удаленные точки, расположенные в правой полуплоскости и имеющие одинаковые конечные абсциссы [1]). Если провести интегрирование по контуру, начало и конец которого заданы комплексными числами p, q, то очевидно, что в тех случаях, когда $p = c - i\infty$, $q = c + i\infty$, мы получим по-прежнему функцию Бесселя, в остальных случаях этот интеграл представит функцию, которую можно назвать неполной цилиндрической функцией в форме Сонина — Шлефли

$$S_\nu(p, q; z) = \frac{1}{2\pi i}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_p^q t^{-\nu-1} \exp\left(t - \frac{z^2}{4t}\right) dt. \quad (28.20)$$

Если положить $p = z/2$, $q = (z/2)\exp w$ и произвести замену переменной интегрирования $t = (z/2)\exp u$, то

$$S_\nu\left(\frac{z}{2}, \frac{z}{2}e^w, z\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_0^w e^{z \operatorname{sh} u - \nu u}\, du = \frac{1}{2}\varepsilon_\nu(w, z). \quad (28.21)$$

Это показывает, что функции $S_\nu(p, q; z)$ являются более общими, чем рассматривавшиеся выше $\varepsilon_\nu(w, z)$.

Воздействуя оператором Бесселя на $S_\nu(p, q; z)$, можно получить неоднородное уравнение Бесселя

$$\nabla_\nu S_\nu(p, q; z) = \Psi(z, q) - \Psi(z, p), \quad (28.22)$$

которому удовлетворяет эта функция, где

$$\Psi(z, x) = \frac{z}{\pi i}\left(\frac{z}{2x}\right)^{\nu+1} \exp\left(x - \frac{z^2}{4x}\right).$$

Интегральные представления $S_\nu(p, q; z)$ позволяют непосредственно получить рекуррентные формулы:

$$\left.\begin{aligned} S_{\nu-1} + S_{\nu+1} - \frac{2\nu}{z} S_\nu &= \frac{2}{z^3}[q\Psi(z, q) - p\Psi(z, p)], \\ S_{\nu-1} - S_{\nu+1} - 2\frac{\partial S_\nu}{\partial z} &= \frac{2}{z^3}[q\Psi(z, q) - p\Psi(z, p)]. \end{aligned}\right\} \quad (28.23)$$

[1]) См. [7], где контур интегрирования, аналогичный (28.19), есть прямая, параллельная мнимой оси.

Интегральное представление $S_\nu(p, q; z)$, основанное на получении решения неоднородного дифференциального уравнения Бесселя, имеет следующий вид:

$$S_\nu(p, q; z) = \frac{1}{2i} Y_\nu(z)\,[Q_\nu(q, z) - Q_\nu(p, z)] + \\ + \frac{1}{2i} J_\nu(z)\,[P_\nu(q, z) - P_\nu(p, z)], \quad (28.24)$$

где

$$Q_\nu(x, t) = (2x)^{-\nu-1} e^x \int_0^z t^{\nu+1} J_\nu(t) \exp\left(-\frac{t^2}{4x}\right) dt,$$

$$P_\nu(x, t) = (2x)^{-\nu-1} e^x \int_z^{\infty \exp i\lambda} t^{\nu+1} Y_\nu(t) \exp\left(-\frac{t^2}{4x}\right) dt,$$

$\operatorname{Re}\nu > -1$, при фиксированном x должно выполняться неравенство $|2\lambda - \arg x| < \pi/2$.

Функции $Q_\nu(x, t)$ и $P_\nu(x, t)$ имеют самостоятельное значение и носят название неполных интегралов Вебера от цилиндрических функций первого и второго рода. В [2] проведено подробное изучение свойств этих интегралов.

Представление неполных цилиндрических функций через неполные интегралы Вебера наглядно показывает естественную связь между функциями Ломмеля двух переменных и неполными цилиндрическими функциями. Сравнивая неполные интегралы Вебера и приведенные в § 27 формулы для функций Ломмеля, можно получить следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned} Q_\nu(x, z) &= i^{\nu+1}[U_{\nu+1}(z^2/(2ix), z) + \\ &\quad + iU_{\nu+2}(z^2/(2ix), z)] \exp(x - z^2/(4x)), \\ \tilde{Q}_\nu(x, z) &= [V_{\nu+1}(z^2/(2x), z) + \\ &\quad + V_{\nu+2}(z^2/(2x), z)] \exp(x - z^2/(4x)), \end{aligned}\right\} \quad (28.25)$$

где

$$\tilde{Q}_\nu(x, z) = (2x)^{-\nu-1} e^x \int_0^z t^{\nu+1} I_\nu(t) \exp(-t^2/(4x))\, dt.$$

§ 29. Асимптотические разложения бесселевых функций

Как правило, практические вычисления, связанные с применением бесселевых функций, опираются на использование таблиц этих функций. В отдельных случаях возможно проведение вычислений, основанное на использовании приведенных в начале книги обобщенных степенных рядов или рядов, содержащих в некоторых случаях множитель $\ln z$; эти ряды по возрастающим степеням аргумента удобны для вычислений только при малых значениях аргумента. Если аргумент велик, возникает вопрос о построении приближенных решений уравнения Бесселя, пригодных при больших значениях аргумента. Указанная задача связана с построением асимптотических разложений; при ее решении приходится оперировать с расходящимися рядами, которые, однако, обладают тем свойством, что в определенной области значений аргумента они удобны для вычислений и допускают простую оценку погрешности.

Здесь с самого начала нужно подчеркнуть разницу в решении задач различных классов, в зависимости от поведения аргумента и индекса ν цилиндрической функции:

1. $z \to \infty$, ν фиксировано (разложение Ганкеля).
2. Аргумент и индекс бесконечно возрастают; при этом $z - \nu = \gamma$, где γ — постоянная.
3. Отношение z/ν фиксировано, $z \to \infty$, $z/\nu = \operatorname{ch} b$, $b > 0$.

Наибольший интерес представляет первая задача, решение которой является наиболее простым.

Для получения асимптотических разложений при больших значениях аргумента и фиксированном индексе можно воспользоваться обобщением интегрального представления Пуассона, данным Ганкелем; эти разложения иногда называются разложениями Ганкеля.

Опишем в общих чертах процесс получения асимптотического разложения, данный Ганкелем и несколько видоизмененный Ватсоном.

Интегральное представление функции Ганкеля первого рода

$$H_\nu^{(1)}(z)=\left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2}\frac{\exp i(z-\pi\nu/2-\pi/4)}{\Gamma(\nu+1/2)}\times$$
$$\times\int_0^{\infty\exp i\beta}e^{-u}u^{\nu-1/2}\left(1+\frac{iu}{2z}\right)^{\nu-1/2}du \qquad (29.1)$$

имеет место при $\pi/2>\beta>-\pi/2$,

$$-\pi/2+\beta<\arg z<3\pi/2+\beta, \qquad \operatorname{Re}(\nu+1/2)>0.$$

Получение решения основано на биноминальном разложении с остатком множителя $(1+iu/(2z))^{\nu-1/2}$, входящего в подынтегральное выражение. Если в интеграл внести указанное разложение, проинтегрировать почленно и оценить остаток, то получим

$$H_\nu^{(1)}(z)\sim(2/(\pi z))^{1/2}\exp i(z-\pi\nu/2-\pi/4)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,m)}{(2iz)^m}, \qquad (29.2)$$

где

$$(\nu,m)=\frac{\Gamma(\nu+m+1/2)}{m!\,\Gamma(\nu-m+1/2)}, \qquad -\pi<\arg z<2\pi.$$

Аналогичным образом может быть получена формула

$$H_\nu^{(2)}(z)\sim(2/(\pi z))^{1/2}\exp[-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)]\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu,m)}{(2iz)^m}, \qquad (29.3)$$

при $-2\pi<\arg z<\pi$.

Сохранив только первый член асимптотического разложения, называемый асимптотическим представлением, получим

$$H_\nu^{(1)}(z)\sim(2/\pi z)^{1/2}\exp i(z-\nu\pi/2-\pi/4),$$
$$H_\nu^{(2)}(z)\sim(2/\pi z)^{1/2}\exp[-i(z-\nu\pi/2-\pi/4)].$$

Имея асимптотические разложения функций Ганкеля, по формулам § 3 нетрудно получить разложения

функций Бесселя и Неймана, пригодные при $|\arg z| < \pi$:

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(z) &\sim (2/\pi z)^{1/2}\left[\cos(z-\nu\pi/2-\pi/4)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,\,2m)}{(2z)^{2m}} - \right.\\ &\left. -\sin(z-\nu\pi/2-\pi/4)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,\,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}\right],\\ Y_\nu(z) &\sim (2/\pi z)^{1/2}\left[\sin(z-\nu\pi/2-\pi/4)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,\,2m)}{(2z)^{2m}} + \right.\\ &\left. +\cos(z-\nu\pi/2-\pi/4)\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,\,2m+1)}{(2z)^{2m+1}}\right]. \end{aligned}\right\} \quad (29.4)$$

Используя соотношение между функцией Ганкеля и функцией Макдональда, находим

$$K_\nu(z) \sim \left(\frac{\pi}{2z}\right)^{1/2} e^{-z}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu,\,m)}{(2z)^m}, \qquad |\arg z| < \frac{3\pi}{2}. \quad (29.5)$$

Из зависимости между функциями Бесселя и модифицированными функциями Бесселя вытекают следующие формулы:

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,\,m)}{(2z)^m} + \\ + \frac{\exp[-z+(\nu+1/2)\pi i]}{(2\pi z)^{1/2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu,\,m)}{(2z)^m} \quad (29.6)$$

при $3\pi/2 > \arg z > -\pi/2$;

$$I_\nu(z) \sim \frac{e^z}{(2\pi z)^{1/2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(\nu,\,m)}{(2z)^m} + \\ + \frac{\exp[-z-(\nu+1/2)\pi i]}{(2\pi z)^{1/2}}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\nu,\,m)}{(2z)^m} \quad (29.7)$$

при $-3\pi/2 < \arg z < \pi/2$ [1]).

[1]) Формулы (29.6) и (29.7) при $-\pi/2 < \arg z < \pi/2$ кажутся противоречивыми, это связано с явлением Стокса, рассмотренным в [7].

Точно таким же образом получаются асимптотические разложения для вещественной и мнимой частей функций комплексного аргумента.

Остаточный член разложений для функций Ганкеля имеет тот же порядок, что и первые отбрасываемые члены. Для цилиндрических функций первого и второго рода имеют место более тонкие оценки: при положительных z и вещественных ν остаток численно меньше первого отбрасываемого члена и имеет тот же знак; если при вещественных ν и z величина $2z - m + 1/2$ мала по сравнению с z (m — номер первого отброшенного члена), то остаток приблизительно равен половине первого отброшенного члена.

Асимптотические разложения могут быть непосредственно получены из рассмотрения дифференциального уравнения Бесселя.

Если в интегральные представления функций, родственных бесселевым функциям, внести при больших значениях аргумента z асимптотические разложения бесселевых функций, то интегрирование дает сразу асимптотические разложения для указанных функций.

§ 30. О бесселевых функциях с большим индексом

Прежде чем перейти к краткому изложению свойств бесселевых функций при больших индексах, сделаем несколько связанных с физическими представлениями замечаний, поясняющих в известной мере постановку задачи.

Ограничимся сначала рассмотрением функций Бесселя $J_n(x)$, предполагая, что индекс — целое положительное число, x — вещественное число Как уже указывалось во введении, задача о свободных колебаниях круглой однородной мембраны с жестким контуром приводит к рассмотрению трансцендентного уравнения $J_n(\lambda_k R) = 0$ Здесь n — индекс бесселевой функции, который равен числу узловых диаметров формы собственных колебаний, k — порядковый номер корня, равный числу узловых окружностей, включая и контурную окружность; R — радиус этой окружности, который, не теряя общности, можно принять равным единице.

Положим сначала, что n невелико, а k — большое число, и рассмотрим область, заключенную между двумя смежными узловыми окружностями с радиусами ρ_l и ρ_{l+1} ($n \ll l + 1 < k$) и двумя смежными узловыми радиусами мембраны.

Очевидно, что для такой области форма колебаний мембраны, за исключением участков, прилегающих к радиусам, близка к форме

колебаний мембраны, у которой узловые линии суть параллельные прямые, расстояние между которыми равно $\rho_{l+1} - \rho_l$. Таким образом, аппликаты формы колебаний изменяются вдоль радиуса по закону, близкому к синусоидальному. Если взять противоположный случай, считая что k мало по сравнению с n, то рассматриваемая часть мембраны будет вытянута в направлении радиуса и форма колебаний при этом такова, что вдоль AB (рис. 11) ее аппликаты быстро изменяются только вблизи точек A и B, по остальной же части отрезка они изменяются весьма медленно. Очевидно, что в случае, который рассматривается в настоящем параграфе (наряду со случаями, когда индекс мало отличается от аргумента), нужно исходить из асимптотических представлений, отличных от тех, которые были получены в § 29. При нецелых значениях индекса следует рассмотреть мембрану, имеющую форму кругового сектора. Задача о мембране с отверстием приводит к таким же задачам для функции второго рода.

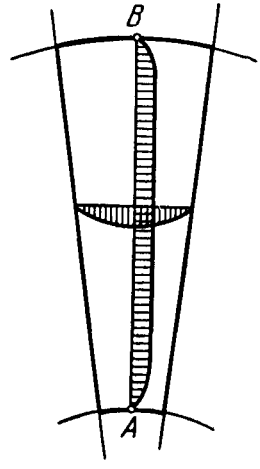

Рис. 11.

Здесь будут приведены лишь отдельные весьма немногочисленные сведения, относящиеся к этому довольно сложному вопросу, чрезвычайно подробно рассмотренному в монографии Ватсона [7].

Наиболее простой вид имеет решение Мейсселя.

Преобразуем уравнение Бесселя с помощью замены

$$J_\nu(\nu z) = \frac{\nu^\nu}{\Gamma(\nu+1)} \exp\left\{\int^z u(z)\,dz\right\}$$

к виду

$$z^2[u'(z) + \{u(z)\}^2] + zu(z) - \nu^2(1-z^2) = 0.$$

Представим решения этого уравнения в виде ряда по убывающим степеням ν

$$u = \nu u_0 + u_1 + \frac{u_2}{\nu} + \frac{u_3}{\nu^2} + \ldots;$$

здесь $u_0, u_1, u_2, \ldots$ — функции от z. Подстановка ряда в уравнение, сравнение коэффициентов при степенях с одинаковыми показателями и последующее интегрирование

дают следующий результат:

$$J_\nu(\nu z) = \frac{(\nu z)^\nu \exp\{\nu\sqrt{1-z^2}\}\exp(-V_\nu)}{e^\nu \Gamma(\nu+1)(1-z^2)^{1/4}\{1+\sqrt{1-z^2}\}^\nu}, \qquad (30.1)$$

где

$$V_\nu = \frac{1}{24\nu}\left\{\frac{2+3z^2}{(1-z^2)^{3/2}} - 2\right\} - \frac{4z^2+z^4}{16\nu^2(1-z^2)^3} -$$
$$- \frac{1}{5760\nu^3}\left\{\frac{16-15\,12z^2-3654z^4-375z^6}{(1-z^2)^{9/2}} - 16\right\} + \ldots$$

Первое приближение, получаемое из (30.1),

$$J_\nu(\nu z) \sim \frac{z^\nu \exp[\nu\sqrt{1-z^2}]}{(2\pi\nu)^{1/2}(1-z^2)^{1/4}[1+\sqrt{1-z^2}]^\nu}$$

есть формула Карлини.

Если z вещественно и больше 1, то разложение (30.1) непригодно. В этом случае используется второе разложение Мейсселя (см. [7]); сохранив в нем лишь главные члены, получим следующие приближенные формулы для $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$:

$$\left.\begin{aligned} J_\nu(x) &\sim \left(\frac{2}{\pi\sqrt{x^2-\nu^2}}\right)^{1/2}\cos\theta_\nu, \\ Y_\nu(x) &\sim \left(\frac{2}{\pi\sqrt{x^2-\nu^2}}\right)^{1/2}\sin\theta_\nu, \\ \theta_\nu &\sim \sqrt{x^2-\nu^2} - \nu\pi/2 + \nu\arcsin(\nu/x) - \pi/4. \end{aligned}\right\} \qquad (30.2)$$

Перейдем к асимптотическим разложениям для цилиндрических функций, у которых разность аргумента и индекса есть постоянное число.

Приведем результат, относящийся к случаю $z\to\infty$, $z-\nu=\gamma$, где γ — некоторая постоянная.

$$H^{(2)}_{z-\gamma}(z) \sim$$
$$\sim \frac{1}{\pi\sqrt{3}}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{l+1}{3}\right)\left(\frac{6}{z}e^{2\pi i}\right)^{(l+1)/3}\Gamma\left(\frac{l+1}{3}\right)B_l(\gamma), \qquad (30.3)$$

$\left(\frac{l+1}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}\sin\frac{2\pi(l+1)}{3}$, $B_l(\gamma)$ — полином степени l;

$B_0(x)=1$, $B_1(x)=x$; $B_2(x)=x^2/2-{}^1/_{20}$, $B_3(x)=\frac{1}{6}x^3-$

$-\frac{1}{15}x$, ... [1]).

Если разность $z-\nu$ при $z\to\infty$ есть величина порядка $z^{1/3}$ или $\nu^{1/3}$, то можно воспользоваться приближенными формулами Никольсона

$$\left.\begin{aligned} e^{-\pi i/6}H^{(1)}_{z-\nu}(z) &\sim \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{1/2} H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{(2\gamma)^{3/2}}{3z^{1/2}}\right),\\ e^{\pi i/6}H^{(2)}_{z-\nu}(z) &\sim \left(\frac{2\gamma}{3z}\right)^{1/2} H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{(2\gamma)^{3/2}}{3z^{1/2}}\right). \end{aligned}\right\} \qquad (30.4)$$

Задача об асимптотических представлениях цилиндрических функций подробно рассмотрена Шебе [82].

В заключение этого параграфа приведем следующую формулу:

$$2J_\nu(\nu\operatorname{sech} b)\sim\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{\nu(\operatorname{th} b-b)}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{P_l(\operatorname{cth}^2 b)}{(2\nu\operatorname{th} b)^{l+1/2}} \qquad (30.5)$$

при $\nu\to\infty$, $b>0$, причем

$$P_0(\xi)=1,\quad P_1(\xi)=\frac{1}{15}\xi,\quad P_2(\xi)=\frac{\xi^5}{7200}+\frac{13}{1260}\xi^2,$$

$$P_3(\xi)=\frac{283}{9\,072\,000}\xi^6+\frac{463}{226\,800}\xi^3+\frac{1}{900},\ \ldots\ [2]).$$

Ряды (30.3) и (30.5) называются рядами Дебая.

В [7] приводится очень подробное изложение теории асимптотических разложений бесселевых функций при больших значениях индекса. Сводка различных асимптотических разложений приведена в [4]; весьма подробные сведения об асимптотических разложениях имеются также в справочнике Янке, Эмде и Леша [61].

---

[1]) В [82] подробно рассматривается вопрос о построении полиномов $B_l(\gamma)$ и приводятся таблицы этих полиномов.

[2]) Построение полиномов $P_l(\xi)$ рассмотрено в [82].

ПРИЛОЖЕНИЯ БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

ГЛАВА I
ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛАСТИНОК И ОБОЛОЧЕК

§ 1. Колебания круглой пластинки

Рассмотрим задачу о колебаниях круглой пластинки; будем полагать, что прогиб пластинки w мал по сравнению с ее толщиной h, а толщина в свою очередь мала по сравнению с радиусом пластинки. Расположим полярную систему координат r, φ в средней плоскости и примем ее начало в центре окружности, по которой боковая поверхность пластинки пересекается со средней плоскостью.

Обозначим через D цилиндрическую жесткость пластинки, h — толщину, γ — плотность.

Сначала рассмотрим свободные колебания пластинки. Положим, что пластинка жестко оперта по контуру, радиус которого обозначим b.

При $r = b$ имеем $W = 0$ и $\frac{\partial W}{\partial r} = 0$, где $W(r, \varphi, t)$ — динамический прогиб пластинки.

Дифференциальное уравнение упругой поверхности пластинки имеет следующий вид

$$D\nabla^2\nabla^2 W + \gamma h \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = 0. \tag{1.1}$$

Для интегрирования уравнения (1.1) воспользуемся методом разделения переменных, приняв частное решение в виде

$$W(r, \varphi, t) = w(r, \varphi) F(t). \tag{1.2}$$

Подставляя (1.2) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{D}{\gamma h} \frac{\nabla^2\nabla^2 w}{w} = -\frac{d^2F}{dt^2} \Big/ F. \tag{1.3}$$

Так как левая часть уравнения (1.3) представляет функцию только переменных r, φ, а правая зависит только от времени t, то очевидно, что каждая из величин $D\nabla^2\nabla^2 w/\gamma h w$ и $-\frac{d^2F}{dt^2}\Big/F$ должна быть постоянной; обозначим указанную постоянную через ω^2, тогда

$$\frac{d^2F}{dt^2} = -\omega^2 F,$$

откуда

$$F = A\sin(\omega t + \varphi_0).$$

Таким образом, ω является круговой частотой колебаний. Функция w называется формой колебаний, она удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2\nabla^2 w - \lambda^4 w = 0, \tag{1.4}$$

где

$$\lambda^4 = w^2\gamma h/D.$$

Перейдем от переменной r к безразмерной величине $\xi = \lambda r$ (в дальнейшем ξ будем называть приведенным расстоянием), тогда уравнение (1.4) примет вид

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right)^2 w - w = 0. \tag{1.5}$$

Обозначим

$$\nabla_\xi^2 = \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\xi} + \frac{1}{\xi^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}$$

и будем разыскивать решение уравнения (1.5) в виде

$$w(r, \varphi) = w_1(r, \varphi) + w_2(r, \varphi),$$

где функции $w_1(r, \varphi)$ и $w_2(r, \varphi)$ удовлетворяют уравнениям

$$\nabla_\xi^2 w_1 + w_1 = 0, \tag{1.6}$$

$$\nabla_\xi^2 w_2 - w_2 = 0. \tag{1.7}$$

Вновь воспользуемся методом разделения переменных, полагая, что частные решения уравнений (1.6) и (1.7) имеют вид

$$w_1 = R_1(r)\,\Phi_1(\varphi), \tag{1.8}$$

$$w_2 = R_2(r)\,\Phi_2(\varphi). \tag{1.9}$$

Внося (1.8) и (1.9) соответственно в (1.6) и (1.7), получим, опуская индексы у функций $R(r)$ и $\Phi(\varphi)$,

$$(\xi^2 R'' + \xi R' \pm \xi^2 R)/R = -\Phi''/\Phi.$$

Так как левая часть зависит только от ξ, а правая — только от φ, то

$$\left.\begin{aligned} (\xi^2 R'' + \xi R' \pm \xi^2 R)/R &= \varepsilon^2, \\ -\Phi''/\Phi &= \varepsilon^2, \end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

где ε^2 — некоторая постоянная; из уравнения (1.10) имеем

$$\Phi = \sin(\varepsilon\varphi + \alpha),$$

где α — постоянная. Поскольку добавление к φ угла, содержащего целое число раз 2π, не должно изменить значение функции, ε может равняться только целому числу n. Таким образом, для функции R мы имеем следующие уравнения:

$$\xi^2 R'' + \xi R' - (n^2 \pm \xi^2) R = 0. \tag{1.11}$$

Каждое из уравнений (1.11) представляет уравнение Бесселя и поэтому

$$R_{1n} + R_{2n} = C_{1n} J_n(\xi) + C_{3n} Y_n(\xi) + C_{2n} I_n(\xi) + C_{4n} K_n(\xi).$$

Форму колебаний представим в следующем виде:

$$w_n(r, \varphi) =$$
$$= [C_{1n} J_n(\xi) + C_{3n} Y_n(\xi) + C_{2n} I_n(\xi) + C_{4n} K_n(\xi)] \sin(n\varphi + \alpha_n).$$

Постоянные C, α и круговая частота ω, от которой зависит λ, а следовательно, и $\xi = \lambda r$, должны быть определены.

Рассмотрим сначала во всех подробностях наиболее важный частный случай — осесимметричные колебания круглой пластинки; форма колебаний будет иметь вид

$$w = C_1 J_0(\xi) + C_3 Y_0(\xi) + C_2 I_0(\xi) + C_4 K_0(\xi).$$

Если пластинка сплошная и в центре пластинки нет опоры, то при $\xi = 0$ прогиб должен быть конечным; функции $Y_0(\xi)$ и $K_0(\xi)$, как это следует из их разложения в степенные ряды, при $\xi \to 0$ стремятся к бесконечности. Однако отсюда вовсе не следует, что $C_3 = 0$ и $C_4 = 0$. Указанные функции в окрестности точки $\xi = 0$

можно представить в виде [1])

$$Y_0(\xi) = \frac{2}{\pi}\left(1 - \frac{\xi^2}{4}\right)\ln\xi + \frac{2\gamma}{\pi} + \ldots, \qquad (1.12)$$

$$K_0(\xi) = -\left(1 + \frac{\xi^2}{4}\right)\ln\xi - \gamma + \ldots. \qquad (1.13)$$

Точками обозначены невыписанные члены, которые вместе с производными, появляющимися при выполняемом здесь дифференцировании, при $\xi \to 0$ стремятся к нулю, в силу чего отбрасывание их не отразится на результате наших выкладок. Положим $C_4 = 2C_3/\pi$ и образуем сумму второго и четвертого слагаемых

$$\tilde{w}_0 = C_3[Y_0(\xi) + 2K_0(\xi)/\pi], \qquad (1.14)$$

которая при ξ, близких к нулю, имеет вид

$$\tilde{w}_0 = -C_3\xi^2\ln\xi/\pi + \ldots$$

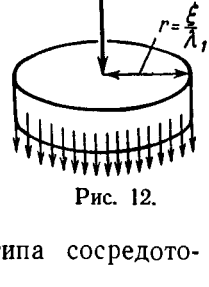

Рис. 12.

Таким образом, эта часть решения при $\xi \to 0$ также стремится к нулю; покажем, что с механической точки зрения решение (1.14) содержит особенность типа сосредоточенной силы.

Для этого найдем поперечную силу по окружности малого радиуса ξ, подсчитаем сумму поперечных сил по этой окружности и перейдем к пределу при $\xi \to 0$. Очевидно, что из условий равновесия части плиты, ограниченной окружностью радиуса ξ/λ_1, следует, что этот предел должен равняться взятой с обратным знаком сосредоточенной силе P, действующей на плиту (рис. 12). Таким образом, для определения постоянной необходимо внести выражение (1.14) в следующее уравнение:

$$\lim_{\xi\to 0}\left[-D\lambda_1^3\frac{d}{d\xi}\left(\frac{d^2w_0}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dw_0}{d\xi}\right)\right]2\pi\frac{\xi}{\lambda_1} = -P. \qquad (1.15)$$

При проведении выкладок полезно воспользоваться зависимостями

$$\frac{d^2Y_0(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dY_0(\xi)}{d\xi} = -Y_0(\xi), \qquad (1.16)$$

$$\frac{d^2K_0(\xi)}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{dK_0(\xi)}{d\xi} = K_0(\xi). \qquad (1.17)$$

[1]) См. стр. 18, 20.

Внося выражение (1.14) в уравнение (1.15) и воспользовавшись уравнениями (1.16) и (1.17), получим

$$\lim_{\xi \to 0}\left\{-DC_3\lambda_1^2\left[-Y_0'(\xi)+\frac{2}{\pi}K_0'(\xi)\right]2\pi\xi\right\}=-P. \quad (1.18)$$

Воспользовавшись выражениями (1.12) и (1.13), выполнив дифференцирование и предельный переход, для определения C_3 получим $-8DC_3\lambda_1^2=P$, откуда $C_3=-P/(8D\lambda_1^2)$.

Таким образом, выражение (1.14) можно написать в следующем виде:

$$\tilde{w}_0=-\frac{P}{8D\lambda_1^2}\left[Y_0(\xi)+\frac{2}{\pi}K_0(\xi)\right]. \quad (1.19)$$

Если бы пластинка имела опору в центре, то функцию $w(\xi)$ следовало бы записать в виде

$$w(\xi)=C_1J_0(\xi)+C_2I_0(\xi)-\frac{P}{8D\lambda_1^2}\left[Y_0(\xi)+\frac{2}{\pi}K_0(\xi)\right], \quad (1.20)$$

где P — опорная реакция.

В случае, когда в центре нет ни опоры, ни сосредоточенной силы, имеем

$$w(\xi)=C_1J_0(\xi)+C_2I_0(\xi).$$

Так как пластинка зажата по контуру, то при $\xi=\beta=\lambda b$ имеем $w=0$, $dw/d\xi=0$.

Из граничных условий получаем следующие однородные относительно C_1 и C_2 уравнения:

$$C_1J_0(\beta)+C_2I_0(\beta)=0, \qquad C_1J_0'(\beta)+C_2I_0'(\beta)=0.$$

Для того чтобы эта система имела нетривиальное решение, необходимо равенство нулю определителя, составленного из коэффициентов при неизвестных.

Отсюда получаем следующее уравнение:

$$J_0(\beta)I_0'(\beta)-J_0'(\beta)I_0(\beta)=0. \quad (1.21)$$

Очевидно, что если рассматривать общий случай колебаний, то каждой форме, имеющей n узловых диаметров, соответствует выражение

$$w_n(\xi,\varphi)=[C_{1n}J_n(\xi)+C_{2n}I_n(\xi)]\sin(n\varphi+\alpha);$$

в этом случае имеем

$$J_n(\beta)\,I_n'(\beta) - J_n'(\beta)\,I_n(\beta) = 0. \qquad (1.22)$$

Корни уравнений (1.21), (1.22) дают значения β, зная которые, нетрудно определить частоты колебаний.

Если обозначить корень трансцендентного уравнения (1.22) через β_{in}, где i — порядковый номер корня, то

$$\omega_{in} = \sqrt{D\lambda_{in}^4/(\gamma h)} = \beta_{in}^2 \sqrt{D/(\gamma h)}/b^2.$$

Корни уравнения (1.22) приведены в различных справочниках и, в частности, в справочнике Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш [61].

Нетрудно рассмотреть колебания шарнирно опертой пластинки. В этом случае граничные условия при $r = b$ имеют вид: $w = 0$,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = 0,$$

где σ — пуассоново отношение. Второе из граничных условий можно записать в следующем виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{\sigma}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\sigma}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} = \nabla^2 w + (\sigma - 1)\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = 0; \quad (1.23)$$

так как

$$\nabla^2 [J_n(\lambda_n r)\cos n\varphi] = -\lambda_n^2 J_n(\lambda_n r)\cos n\varphi,$$

$$\nabla^2 [I_n(\lambda_n r)\cos n\varphi] = \lambda_n^2 I_n(\lambda_n r)\cos n\varphi,$$

то из (1.23) имеем

$$-\lambda_{in}[C_1 J_n(\lambda_{in} b) - C_2 I_n(\lambda_{in} b)] - $$
$$-(1-\sigma)\{[C_1 J_n'(\lambda_{in} b) + C_2 I_n'(\lambda_{in} b)]/b\} = 0.$$

Рассматривая это уравнение совместно с уравнением

$$C_1 J_n(\lambda_{in} b) + C_2 I_n(\lambda_{in} b) = 0,$$

получим трансцендентное уравнение, из которого определяются частоты свободных колебаний.

Рассмотрим задачу о свободных колебаниях круглой пластинки, имеющей точечную опору в центре. Будем пользоваться методом, именуемым в строительной механике методом сил, считая амплитуду реакции опоры неизвестной X. Мысленно отбросим опору, заменим ее

действие силой $X \sin \omega t$ и рассмотрим вынужденные колебания пластинки, вызываемые этой силой. Положим, что круглая пластинка зажата по контуру; тогда с помощью результатов, полученных ранее, используя формулу (1.20), получим уравнение формы колебаний в следующем виде:

$$w = w_0 + w_k = C_{10} J_0(\xi) + C_{20} I_0(\xi) - \frac{X}{8D\lambda^2}\left[Y_0(\xi) + \frac{2}{\pi} K_0(\xi)\right],$$

где $\lambda^4 = \omega^2 \gamma h/D$; A_0 и B_0 определяются из граничных условий на контуре. Напишем формулу для амплитуды прогиба в центре пластинки

$$w_0(0) = C_{10} J_0(0) + C_{20} I_0(0) - \frac{X}{8D\lambda^2}\left[Y_0(\xi) + \frac{2}{\pi} K_0(\xi)\right]\Big|_{\xi \to 0}. \tag{1.24}$$

Так как пластинка имеет опору в центре, то $w(0) = 0$. Упростим выражение (1.24), заметив, что $J_0(0) = 1$, $I_0(0) = 1$ и что, как было показано выше, при $\xi = 0$ сумма $\frac{2}{\pi} K_0(\xi) + Y_0(\xi)$ обращается в нуль. Перепишем с учетом сказанного (1.24) и, кроме того, из граничных условий для зажатого края найдем C_{10} и C_{20}; далее, сократив полученное выражение на $X/(8D\lambda^2)$, приведем его к виду

$$\frac{I_1(\beta) Y_0(\beta) + I_0(\beta) Y_1(\beta) + 2/(\pi\beta)}{J_0(\beta) I_1(\beta) + J_1(\beta) I_0(\beta)} + \\ + \frac{2[J_1(\beta) K_0(\beta) - J_0(\beta) K_1(\beta)]/\pi + 2/(\pi\beta)}{J_0(\beta) I_1(\beta) + J_1(\beta) I_0(\beta)} = 0.$$

Отсюда окончательно имеем следующее трансцендентное уравнение:

$$I_1(\beta) Y_0(\beta) + I_0(\beta) Y_1(\beta) + \frac{2}{\pi} J_1(\beta) K_0(\beta) - \\ - \frac{2}{\pi} J_0(\beta) K_1(\beta) + \frac{4}{\pi\beta} = 0. \tag{1.25}$$

Найдя корни β_i этого трансцендентного уравнения, мы тем самым определим и частоты собственных колебаний

$$\omega_i = \frac{\beta_i^2}{b^2} \sqrt{\frac{D}{\gamma h}},$$

формы которых таковы, что в опоре возникают реакции.

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях круглой защемленной по контуру пластинки, вызванных нагрузкой, равномерно распределенной по окружности радиуса a, концентричной с контуром; обозначим через q амплитуду нагрузки $q \sin pt$.

Представим форму колебаний в виде суммы основного решения w_0 и компенсирующего решения w_k.

Основное решение можно искать как решение задачи о загружении пластинки, не ограниченной в плане, т. е. бесконечной пластинки. Естественно, что основное решение, как правило, не может одновременно удовлетворить и граничным условиям, если рассматриваются задачи о пластинках, ограниченных в плане.

Для того чтобы удовлетворить этим условиям, вводится так называемое компенсирующее решение.

Из изложенного выше ясно, что компенсирующее решение должно удовлетворять однородному дифференциальному уравнению задачи (и, следовательно, не должно содержать каких-либо особенностей в области, занятой пластинкой) и, совместно с основным решением, удовлетворять граничным условиям задачи.

Предположим, например, что на контуре пластинки прогиб и угол поворота должны быть равны нулю. Основное решение не удовлетворяет этому условию, и поэтому на контуре пластинки возникнут отличные от нуля прогибы w_0 и углы поворота φ_0, соответствующие основному решению. Задачу можно будет считать решенной, если нам удастся найти такое компенсирующее решение w_k, которое на контуре пластинки будет удовлетворять условиям $w_k = -w_0$, $\frac{\partial w_k}{\partial r} = -\varphi_0$. Тогда сумма основного и компенсирующего решений даст нам искомое решение поставленной задачи.

Остановимся сначала на отыскании основного решения. Для этого мысленно разобьем нагрузку на ряд элементарных сил и просуммируем результат действия этих элементарных нагрузок. Возьмем на окружности, по которой действует нагрузка, точку с координатами (a, θ); элементарная нагрузка, приходящаяся на участок дуги длиной $a\,d\theta$, будет равна

$$qa\,d\theta = q\alpha\,d\theta/\lambda_1, \qquad \lambda_1 = \sqrt[4]{p^2\gamma h/D}. \tag{1.26}$$

Найдем w в точке с координатами $r = \xi_1/\lambda_1$, φ (рис. 13). Для этого воспользуемся формулой (1.19), подставив вместо P выражение (1.26) и вместо ξ — приведенное

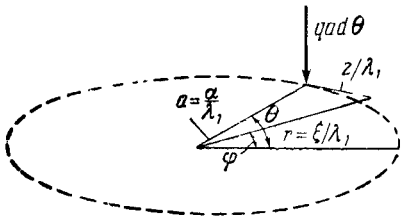

Рис. 13.

расстояние от точки приложения элементарной силы до рассматриваемой точки пластинки, которое равно

$$z = \sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)},$$

и проинтегрируем затем полученное выражение. Таким образом,

$$w_0 = -\int_0^{2\pi} \frac{q\alpha}{8D\lambda_1^3}\left[Y_0(z) + \frac{2}{\pi}K_0(z)\right]d\theta =$$

$$= -\frac{q\alpha}{8D\lambda_1^3}\left[\int_0^{2\pi} Y_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}\right)d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} K_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}\right)d\theta\right]. \quad (1.27)$$

Для вычисления интегралов, входящих в выражение (1.27), воспользуемся формулами сложения цилиндрических функций, которые в рассматриваемом случае имеют вид:

при $\xi \leqslant \alpha$

$$Y_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}\right) = 2\sum_0^{\infty}{}' J_n(\xi)\,Y_n(\alpha)\cos n(\theta - \varphi), \quad (1.28)$$

$$K_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}\right) = 2\sum_0^{\infty}{}' I_n(\xi)\,K_n(\alpha)\cos n(\theta - \varphi); \quad (1.29)$$

при $\xi \geqslant \alpha$

$$Y_0\left(\sqrt{\alpha^2+\xi^2-2\alpha\xi\cos(\theta-\varphi)}\right)=2\sum_0^{\infty}{}'J_n(\alpha)\,Y_n(\xi)\cos n(\theta-\varphi), \tag{1.30}$$

$$K_0\left(\sqrt{\alpha^2+\xi^2-2\alpha\xi\cos(\theta-\varphi)}\right)=2\sum_0^{\infty}{}'I_n(\alpha)\,K_n(\xi)\cos n(\theta-\varphi). \tag{1.31}$$

Внося в (1.27) соотношения (1.28) — (1.31) и интегрируя, заметим, что все члены ряда, содержащие косинус, при интегрировании дают нуль; таким образом, в решение войдет только результат интегрирования нулевого члена и поэтому

при $\xi \leqslant \alpha$

$$w_0=-\frac{\pi q\alpha}{4D\lambda_1^3}\left[J_0(\xi)\,Y_0(\alpha)+\frac{2}{\pi}I_0(\xi)\,K_0(\alpha)\right], \tag{1.32}$$

при $\xi \geqslant \alpha$

$$w_0=-\frac{\pi q\alpha}{4D\lambda_1^3}\left[Y_0(\xi)\,J_0(\alpha)+\frac{2}{\pi}K_0(\xi)\,I_0(\alpha)\right]. \tag{1.33}$$

Добавляя к основному решению компенсирующее, получим решение поставленной задачи

$$w=w_0+A_0J_0(\xi)+B_0I_0(\xi).$$

Граничные условия имеют вид

$$w_0(\beta)+w_k(\beta)=0,$$
$$w_0'(\beta)+w_k'(\beta)=0.$$

Теперь из граничных условий определим A_0 и B_0; при защемленном крае имеем следующие уравнения:

$$A_0J_0(\beta)+B_0I_0(\beta)-\frac{\pi q\alpha}{4D\lambda_1^3}\left[Y_0(\beta)\,J_0(\alpha)+\frac{2}{\pi}K_0(\beta)\,I_0(\alpha)\right]=0,$$

$$-A_0J_1(\beta)+B_0I_1(\beta)+\frac{\pi q\alpha}{4D\lambda_1^3}\left[Y_1(\beta)\,J_0(\alpha)+\frac{2}{\pi}K_1(\beta)\,I_0(\alpha)\right]=0,$$

решая которые и используя вронскиан [1]), получим

$$A_0 = \frac{\pi q \alpha}{4D\lambda_1^3} \frac{J_0(\alpha)\,[I_1(\beta)\,Y_0(\beta) + I_0(\beta)\,Y_1(\beta)] + 2I_0(\alpha)/(\pi\beta)}{I_0(\beta)\,J_1(\beta) + I_1(\beta)\,J_0(\beta)},$$

$$B_0 = -\frac{q\alpha}{2D\lambda_1^3} \frac{J_0(\alpha)/\beta + I_0(\alpha)\,[J_1(\beta)\,K_0(\beta) - J_0(\beta)\,K_1(\beta)]}{I_0(\beta)\,J_1(\beta) + I_1(\beta)\,J_0(\beta)}.$$

Заметим, что изменение граничных условий отразится только на уравнениях для определения постоянных A_0 и B_0, входящих в компенсирующее решение.

Рассмотрим теперь вынужденные колебания, вызываемые нагрузкой $q_1 \sin pt$, равномерно распределенной по кольцу, приведенный внутренний радиус которого равен α_1, а наружный α_2.

Для определения основного решения разобьем кольцо на концентрические элементарные кольца; приведенный внутренний радиус элементарного кольца обозначим через α, наружный — через $\alpha + d\alpha$. Нагрузка, приходящаяся на единицу длины кольца, будет равна $q = q_1\,d\alpha/\lambda_1$, где размерность q_1 будет уже *кг/см*^{2}; решение, соответствующее действию такой элементарной нагрузки, дается формулами (1.32) и (1.33), в которых нужно только заменить q на $q_1 d\alpha/\lambda_1$; интегрируя эти выражения по α в пределах от α_1 до α_2, получим решение поставленной задачи; если $\xi \leqslant \alpha_1$, т. е. сечение находится во внутреннем круге, свободном от внешней нагрузки, то нам нужно интегрировать (1.32) и поэтому

$$w_0 = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4} \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \left[J_0(\xi)\,Y_0(\alpha) + \frac{2}{\pi} I_0(\xi)\,K_0(\alpha)\right] \alpha\,d\alpha. \quad (1.34)$$

Воспользовавшись формулами

$$\int^x xY_0(x)\,dx = xY_1(x), \qquad \int^x xK_0(x)\,dx = -xK_1(x),$$

можно переписать (1.34) в следующем виде:

$$w_0 = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4} \Big\{ [\alpha_2 Y_1(\alpha_2) - \alpha_1 Y_1(\alpha_1)]\,J_0(\xi) - \\ - \frac{2}{\pi} [\alpha_2 K_1(\alpha_2) - \alpha_1 K_1(\alpha_1)]\,I_0(\xi) \Big\}.$$

[1]) См. стр. 31.

Для $\xi \geqslant \alpha_2$ нужно интегрировать (1.33), при этом следует воспользоваться формулами

$$\int^{x} xJ_0(x)\,dx = xJ_1(x), \qquad \int^{x} xI_0(x)\,dx = xI_1(x).$$

Таким образом, при $\xi \geqslant \alpha_2$

$$w_0 = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\left[J_0(\alpha)\,Y_0(\xi) + \frac{2}{\pi}I_0(\alpha)\,K_0(\xi)\right]\alpha\,d\alpha =$$

$$= -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\left\{[\alpha_2 J_1(\alpha_2) - \alpha_1 J_1(\alpha_1)]\,Y_0(\xi) + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{\pi}[\alpha_2 I_1(\alpha_2) - \alpha_1 I_1(\alpha_1)]\,K_0(\xi)\right\}.$$

Если рассматриваемая точка пластинки находится в пределах области, занятой нагрузкой, т. е. $\alpha_2 \geqslant \xi \geqslant \alpha_1$, то для решения задачи нужно при $\alpha_1 \leqslant \alpha \leqslant \xi$ интегрировать (1.33), а при $\xi \leqslant \alpha \leqslant \alpha_2$ интегрировать (1.32), заменив в них, как и всюду, q на $q_1 d\alpha/\lambda_1$. При этом получим следующий результат при $\alpha_2 \geqslant \xi \geqslant \alpha_1$:

$$w_0 = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\left\{[\xi J_1(\xi) - \alpha_1 J_1(\alpha_1)]\,Y_0(\xi) + \right.$$

$$+ \frac{2}{\pi}[\xi I_1(\xi) - \alpha_1 I_1(\alpha_1)]\,K_0(\xi) + [\alpha_2 Y_1(\alpha_2) - \xi Y_1(\xi)]\,J_0(\xi) -$$

$$\left. - \frac{2}{\pi}[\alpha_2 K_1(\alpha_2) - \xi K_1(\xi)]\,I_0(\xi)\right\}.$$

Перегруппировав в этой формуле отдельные члены, получим

$$w_0 = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\left\{\xi\,[J_1(\xi)\,Y_0(\xi) - Y_1(\xi)\,J_0(\xi)] + \right.$$

$$+ \frac{2\xi}{\pi}[I_1(\xi)\,K_0(\xi) + I_0(\xi)\,K_1(\xi)] - \alpha_1 J_1(\alpha_1)\,Y_0(\xi) -$$

$$\left. - \frac{2}{\pi}\alpha_1 I_1(\alpha_1)\,K_0(\xi) + \alpha_2 Y_1(\alpha_2)\,J_0(\xi) - \frac{2}{\pi}\alpha_2 K_1(\alpha_2)\,I_0(\xi)\right\}.$$

Слагаемые, стоящие в квадратных скобках, можно упростить, воспользовавшись определителем Вронского;

после этого получим

$$w_0 = -\frac{\pi q_1}{4D\lambda_1^4}\left[\frac{4}{\pi} - \alpha_1 J_1(\alpha_1) Y_0(\xi) - \frac{2}{\pi}\alpha_1 I_1(\alpha_1) K_0(\xi) + \right.$$
$$\left. + \alpha_2 Y_1(\alpha_2) J_0(\xi) - \frac{2}{\pi}\alpha_2 K_1(\alpha_2) I_0(\xi)\right].$$

Суммируя полученное основное решение с компенсирующим, будем иметь

$$w = w_0 + w_k = w_0 + A_0 J_0(\xi) + B_0 I_0(\xi),$$

где A_0 и B_0 определяются из граничных условий.

Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях круглой пластинки, на которую действует сосредоточенная сила $P\sin pt$, приложенная в точке A, находящейся на приведенном расстоянии $\alpha = \lambda_1 z$ от центра пластинки; обозначим угол, образованный прямой OA и неподвижным радиусом, через θ. Напишем основное решение, которое, по существу, было определено выше. Для этого заменим в формуле (1.19) аргумент ξ на z

$$w_0 = -\frac{P}{8D\lambda_1^2}\left[Y_0(z) + \frac{2}{\pi}K_0(z)\right], \tag{1.35}$$

где $z = \sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}$. С помощью формул сложения запишем (1.35) при $\xi \geqslant \alpha$

$$w_0 = -\frac{P}{4D\lambda_1^2}\sum_{n=0}^{\infty}{}'\left[Y_n(\xi) J_n(\alpha) + \frac{2}{\pi}K_n(\xi) I_n(\alpha)\right]\cos n(\theta - \varphi). \tag{1.36}$$

Представим компенсирующее решение w_k в виде

$$w_k = \sum_{n=0}^{\infty}{}'\left[A_n J_n(\xi) + B_n I_n(\xi)\right]\cos n(\theta - \varphi). \tag{1.37}$$

Коэффициенты A_n и B_n найдем из условий на контуре пластинки. Предположим, что пластинка зажата по контуру, приведенный радиус которого равен β, тогда при $\xi = \beta$

$$\frac{\partial w}{\partial \xi} = 0, \quad w = 0, \tag{1.38}$$

где $w = w_0 + w_k$.

Внося в условия (1.38) вместо w суммы (1.36) и (1.37) и приравнивая коэффициенты при косинусах одинаковых аргументов, получим следующие уравнения относительно неизвестных A_n и B_n:

$$-\frac{P}{4D\lambda_1^2}\left[Y_n(\beta)J_n(\alpha)+\frac{2}{\pi}K_n(\beta)I_n(\alpha)\right]+A_nJ_n(\beta)+B_nI_n(\beta)=0,$$

$$-\frac{P}{4D\lambda_1^2}\left[Y_n'(\beta)J_n(\alpha)+\frac{2}{\pi}K_n'(\beta)I_n(\alpha)\right]+A_nJ_n'(\beta)+B_nI_n'(\beta)=0.$$

Решая эту систему уравнений, получим после простых преобразований, связанных с использованием вронскиана.

$$A_n=\frac{P}{4D\lambda_1^2}\,\frac{J_n(\alpha)\left[-Y_n(\beta)I_n'(\beta)+Y_n'(\beta)I_n(\beta)\right]-2I_n(\alpha)/(\pi\beta)}{I_n(\beta)J_n'(\beta)-J_n(\beta)I_n'(\beta)}, \quad (1.39)$$

$$B_n=\frac{P}{4D\lambda_1^2}\,\frac{2I_n(\alpha)\left[J_n'(\beta)K_n(\beta)-J_n(\beta)K_n'(\beta)\right]/\pi-2J_n(\alpha)/(\pi\beta)}{I_n(\beta)J_n'(\beta)-J_n(\beta)I_n'(\beta)}. \quad (1.40)$$

Приведем числовой пример. Рассмотрим вынужденные колебания круглой пластинки, зажатой по контуру и загруженной силой $P\sin pt$, приложенной на расстоянии $a=0{,}5b$ от центра, где b — радиус контура (рис. 14).

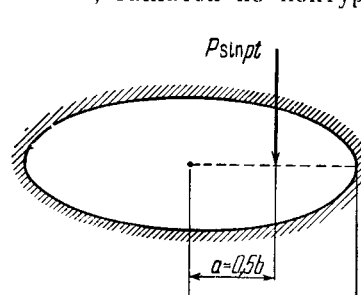

Рис. 14.

Примем следующие основные данные, считая пластинку железобетонной: модуль упругости $E=2\cdot10^6\ т/м^2$, пуассоново отношение $\sigma=1/6$, объемный вес $\gamma_1=2{,}4\ т/м^3$, плотность $\gamma=\gamma_1/g$, частота вынужденных колебаний $p=480\cdot2\pi/60\cong50\ 1/сек$, толщина пластинки $h=0{,}2\ м$, радиус пластинки $b=3\ м$.

Определим цилиндрическую жесткость

$$D=Eh^3/[12(1-\sigma^2)]=2\cdot10^6\cdot(0{,}2)^3/[12(1-(1/6)^2)]=1370\ тм.$$

Вычислим

$$\lambda_1 = \sqrt[4]{\gamma_1 h p^2/(Dg)} = \sqrt[4]{2{,}4 \cdot 0{,}2 \cdot 50^2/(1370 \cdot 9{,}81)} = 0{,}69 \ \ 1/м,$$

$$\beta = \lambda_1 b = 0{,}69 \cdot 3 \sim 2,$$

$$\alpha = \lambda_1 a \sim 1,$$

множитель $P/8D\lambda_1^2$ при выкладках считаем равным 1.

Вычисления проводятся по формулам (1.35), (1.37), (1.39), (1.40). Нас будет интересовать не только

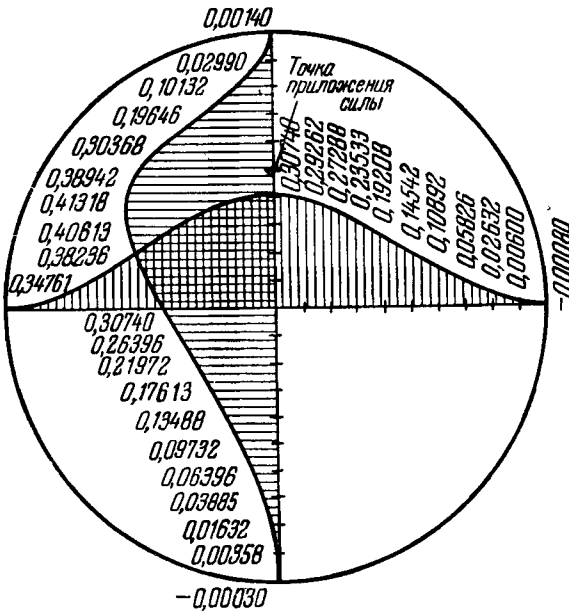

Рис. 15.

процесс получения решения, но и быстрота сходимости рядов. Поэтому приведем ниже, кроме ординат упругой поверхности (рис. 15), сводную таблицу вычислений.

В табл. 1 в первом столбце указаны координаты точек, для которых определялись прогибы; w_0 означает основное решение; w_{k_n} означает n-й член ряда (1.37), представляющего компенсирующее решение, где A_n и B_n

Таблица 1[1])

Точка (ξ, φ)	w_0	w_{k_0}	w_{k_1}	w_{k_2}	w_{k_3}	w_{k_4}	w
(0,2; 0)	−0,2731	0,6603	−0,0185	−0,00126	−0,00000385	0,00000156	0,34761
(0,4; 0)	−0,1860	0,6504	−0,0358	−0,00491	−0,000290	−0,0000204	0,38236
(0,6; 0)	−0.1035	0,6345	−0,0507	−0,0107	−0,000950	−0,0000850	0,40613
(0,8; 0)	−0,0350	0,6136	−0,0621	−0,0182	−0,00215	−0,000258	0,41318
(1,0; 0)	0	0,5892	−0,0688	−0,0266	−0.00390	−0,000590	0,38942
(1,2; 0)	−0,0350	0,5627	−0,0696	−0,0352	−0,00612	−0,00109	0,30368
(1,4; 0)	−0,1035	0,5363	−0,0638	−0 0429	−0,00970	−0,00177	0,19646
(1,6; 0)	−0,1860	0,5123	−0,0503	−0,0486	−0,0111	−0,00249	0,10132
(1,8; 0)	−0,2731	0,4934	−0,0282	−0,0510	−0,0129	−0,00310	0,02990
(2,0; 0)	−0,3563	0,48224	+0,00304	−0,04890	−0,01330	−0,00311	0,00140
(0,2; π/2)	−0,3642	0,6603	0	0,00126	0	0,00000156	0,29262
(0,4; π/2)	−0,3873	0,6504	0	0,00491	0	0,0000204	0,27288
(0,6; π/2)	−0,4204	0,6345	0	0,0107	0	−0,0000850	0,23533
(0,8; π/2)	−0,4574	0,6136	0	0,0182	0	−0,000258	0,19208
(1,0; π/2)	−0,4958	0,5892	0	0,0266	0	−0,000590	0,14542
(1,2; π/2)	−0,5220	0,5627	0	0,0352	0	−0,00109	0,10892
(1,4, π/2)	−0,5603	0,5363	0	0,0429	0	−0,00177	0,05826
(1,6; π/2)	−0,5782	0,5123	0	0,0486	0	−0,00249	0,02632
(1,8; π/2)	−0,5832	0,4934	0	0,0510	0	−0,00310	0,00600
(2,0, π/2)	−0,5745	0,4823	0	0,0489	0	−0,00310	0,00080
(0,2; π)	−0,4309	0,6603	0,0185	−0,00126	0,0000385	0,00000156	0,26396
(0,4; π)	−0,4930	0,6504	0,0358	−0,00491	0,000290	−0,0000204	0,21972
(0,6, π)	−0,5401	0,6345	0,0507	−0,0107	0,000950	−0,0000850	0,17613
(0,8; π)	−0,5703	0,6136	0,0621	−0,0182	0,00215	−0,000258	0,13488
(1,0, π)	−0,5829	0,5892	0,0688	−0,0266	0,00390	−0,00590	0,09732
(1,2; π)	−0,5776	0,5627	0,0696	−0,0352	0,00612	−0,00109	0,06396
(1,4; π)	−0,5551	0,5363	0,0638	−0,0429	0,00970	−0,00177	0,03886
(1,6, π)	−0,5166	0,5123	0,0503	−0,0486	0,0111	−0,00249	0,01632
(1,8; π)	−0,4638	0,4934	0,0282	−0,0510	0,0129	−0,00310	0,00358
(2,0, π)	−0,3990	0,4823	−0,0031	−0,0489	0,0133	−0,00310	0,00030
(0, 0)	−0,3563	0,6637	0,0000	−0,0000	−0,0000	0,0000	0,3074

[1]) При вычислении прогиба w слагаемые w_{k_1}, w_{k_2}, w_{k_3}, w_{k_4} удваиваются; при обозначении точек первое число показывает приведенное расстояние от центра, второе — угол в радианах.

вычислялись по формулам (1.39) и (1 40). Промежуточные очевидные выкладки, которые сводились к подстановке числовых значений в формулы, опущены. В таблице опущен постоянный множитель $P/8D\lambda_1^2$.

§ 2. Равновесие круглой пластинки, лежащей на упругом основании. Осесимметричная деформация

В этом параграфе рассматриваются задачи о круглой пластинке, лежащей на упругом винклеровском основании, для которого реактивное давление основания p в некоторой точке прямо пропорционально прогибу пластинки в той же точке:

$$p = k_0 w.$$

Коэффициент пропорциональности k_0 называется коэффициентом постели. Кроме того, предполагается, что на пластинку действуют радиальные усилия — сжимающие или растягивающие.

Такие задачи возникают при расчете пластинки, которая сжимается или растягивается вследствие температурных воздействий, а также при расчете предварительно напряженных покрытий.

Дифференциальное уравнение упругой поверхности пластинки, лежащей на винклеровском основании, с учетом влияния радиальных сил имеет следующий вид:

$$D\nabla^2\nabla^2 w - p_0\nabla^2 w + k_0 w = q, \qquad (2.1)$$

где D — цилиндрическая жесткость, k_0 — коэффициент постели, q — интенсивность внешней нагрузки, p_0 — радиальные усилия, которые мы считаем положительными в случае растяжения. В этом параграфе рассматривается только осесимметричная задача, поэтому оператор Лапласа будет иметь вид $\nabla^2 = \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}$. Обозначим $l = \sqrt[4]{D/k_0}$, $\xi = r/l$ и перепишем (2.1) в следующем виде:

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^2 w - 2b_0\left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right) w + w = \frac{ql^4}{D},$$

где

$$b_0 = p_0 l^2/(2D).$$

Рассмотрим однородное дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)^2 w - 2b_0\left(\frac{d^2}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{d}{d\xi}\right)w + w = 0; \quad (2.2)$$

будем искать решение этого уравнения в виде

$$w = AZ_0(\sqrt{s}\,\xi), \quad (2.3)$$

где Z_0 — цилиндрическая функция с нулевым индексом. Внесем выражение (2.3) в уравнение (2.2) и воспользуемся при этом соотношением

$$\frac{d^2Z_0(\sqrt{s}\,\xi)}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dZ_0(\sqrt{s}\,\xi)}{d\xi} = -sZ_0(\sqrt{s}\,\xi).$$

После сокращения на $AZ_0(\sqrt{s}\,\xi)$ получим характеристическое уравнение

$$s^2 + 2b_0 s + 1 = 0. \quad (2.4)$$

Если корни этого уравнения обозначим через s_1 и s_2 и положим, что $s_1 \neq s_2$, то решение дифференциального уравнения (2.2) можно записать в следующем виде:

$$w = A_1^* J_0(\xi\sqrt{s_1}) + A_2^* Y_0(\xi\sqrt{s_1}) + A_3^* J_0(\xi\sqrt{s_2}) + A_4^* Y_0(\xi\sqrt{s_2}). \quad (2.5)$$

Остановимся несколько подробнее на рассмотрении корней характеристического уравнения (2.4), которые равны $s_{1,2} = -b_0 \pm \sqrt{b_0^2-1}$; положим $b_0 < 1$. Обозначим

$$\xi\sqrt{s} = \rho e^{\pm i\varphi}, \quad \xi \equiv \rho, \quad \varphi = \left|\operatorname{arcctg}\left(-b_0/\sqrt{1-b_0^2}\right)\right|/2$$

и перепишем (2.5) в следующем виде:

$$w = A_1^* J_0(\rho e^{i\varphi}) + A_2^* H_0^{(1)}(\rho e^{i\varphi}) + A_3^* J_0(\rho e^{-i\varphi}) + A_4^* H_0^{(2)}(\rho e^{-i\varphi}). \quad (2.6)$$

Воспользуемся обозначениями

$$J_0(\rho e^{\pm i\varphi}) = \bar{u}_0(\rho) \pm i\bar{v}_0(\rho), \quad H_0^{(1)}(\rho e^{\pm i\varphi}) = \bar{f}_0(\rho) + i\bar{g}_0(\rho)$$

и положим

$$A_1 = A_1^* + A_3^*, \quad A_2 = i(A_1^* - A_3^*),$$
$$A_3 = A_2^* + A_4^*, \quad A_4 = i(A_2^* - A_4^*);$$

тогда (2.6) примет вид

$$w = A_1\bar{u}_0(\rho) + A_2\bar{v}_0(\rho) + A_3\bar{f}_0(\rho) + A_4\bar{g}_0(\rho). \qquad (2.7)$$

При растяжении пластинки $b_0 > 0$ и $\varphi > \pi/4$; при сжатии $b_0 < 0$, $\varphi < \pi/4$; если $b_0 = 1$, характеристическое уравнение имеет кратные корни.

Рассмотрим задачу о пластинке бесконечного радиуса, загруженной сосредоточенной силой; примем точку приложения силы за начало координат.

При комплексных корнях характеристического уравнения в решении (2.7) однородного дифференциального уравнения нужно положить A_1 и A_2 равными нулю, так как линейно независимые функции u_0 и v_0 при $\rho \to \infty$ также стремятся к бесконечности. Функции f_0 и g_0, входящие в это решение, на бесконечности стремятся к нулю. Для того чтобы определить коэффициенты при этих функциях, перейдем к рассмотрению условий в начале координат.

Этих условий два: первое из них заключается в том, что прогибы пластинки ограничены; второе условие носит статический характер и состоит в том, что сумма поперечных сил, действующих по окружности с центром в начале координат, стремится к заданной силе, если приведенный радиус окружности стремится к нулю. Таким образом, второе условие, так же как и в предыдущем параграфе, можно записать в виде

$$-\frac{D}{l^3}\frac{d}{d\rho}\nabla^2 w = -\frac{P}{2\pi l\rho}, \qquad \nabla^2 = \frac{d^2}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho} = \Delta_0.$$

Приведем разложения действительной и мнимой частей функции Ганкеля комплексного аргумента, ограничиваясь только теми слагаемыми, которые повлияют на выкладки, связанные с проведением предельного перехода $\rho \to 0$:

$$\bar{g}_0(\rho) \sim \frac{2}{\pi}\left(\ln\frac{\rho}{2} + C\right) + \ldots,$$

$$\bar{f}_0(\rho) \sim \frac{1}{2\pi}\rho^2 \ln\rho \sin 2\varphi + 1 - \frac{2\varphi}{\pi} + \ldots,$$

где C — постоянная Эйлера.

Первая из этих формул показывает, что коэффициент при $g_0(\rho)$ нужно положить равным нулю, так как ре-

шение не должно при $\rho \to 0$ обращаться в бесконечность. Таким образом, $w = A_3 \bar{f}_0(\rho)$. Нетрудно заметить [1]), что при $\rho \to 0$

$$\frac{d}{d\rho} \Delta_0 \bar{f}_0 = \frac{2}{\pi\rho} \sin 2\varphi,$$

откуда $A_3 = Pl^2/(4D \sin 2\varphi)$; если $\varphi = \pi/4$, то $A_3 = Pl^2/(4D)$.

Рассмотрим неограниченную пластинку, загруженную силами, равномерно распределенными по окружности радиуса a; приведенный радиус этой окружности $\alpha = a/l$.

Для того чтобы получить решение этой задачи, воспользуемся уравнением упругой поверхности пластинки, загруженной сосредоточенной силой P. Рассмотрим элемент дуги окружности, имеющий длину $ds = ad\theta$; сила, действующая на этот элемент, равна qds. Определим прогиб, вызванный этой силой в точке B, полярные координаты которой обозначим (r, θ_1). Расстояние между точкой, где приложена элементарная сила, и той точкой, в которой мы ищем прогиб, равно $\sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_1)}$, а прогиб, вызванный элементарной нагрузкой, будет равен

$$dw = \frac{qal^2}{4D \sin 2\varphi} \operatorname{Re} H_0^{(1)}\left(\frac{e^{i\varphi}}{l} \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_1)}\right) d\theta.$$

Для того чтобы определить прогиб, вызванный заданной нагрузкой, нужно проинтегрировать полученное выражение

$$w = \int_0^{2\pi} \frac{qal^2}{4D \sin 2\varphi} \operatorname{Re} H_0^{(1)}\left(\frac{e^{i\varphi}}{l} \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_1)}\right) d\theta.$$

Для вычисления этого интеграла нужно по-прежнему воспользоваться формулами сложения цилиндрических функций; эти формулы имеют вид

при $a \leqslant r$

$$H_0^{(1)}\left(\frac{1}{l} \sqrt{r^2 + a^2 - 2ar\cos(\theta - \theta_1)}\right) =$$

$$= 2 \sum{}' J_n(a/l) H_n^{(1)}(r/l) \cos n(\theta - \theta_1),$$

[1]) См. стр. 23, 25.

при $a \geqslant r$

$$H_0^{(1)}\left(\frac{1}{l}\sqrt{r^2+a^2-2ar\cos(\theta-\theta_1)}\right)=$$

$$=2\sum{}' H_n^{(1)}(a/l)\,J_n(r/l)\cos n(\theta-\theta_1).$$

Выполнив интегрирование, и разделив действительную и мнимую части, получим решение задачи в следующем виде:

при $r \leqslant a$

$$w = w_{\mathrm{I}} = \frac{\pi q a l^3}{2D\sin 2\varphi}\left[\bar{f}_0(\alpha)\,\bar{u}_0(\rho) - \bar{g}_0(\alpha)\,\bar{v}_0(\rho)\right];$$

при $r \geqslant a$

$$w = w_{\mathrm{II}} = \frac{\pi q a l^3}{2D\sin 2\varphi}\left[\bar{u}_0(\alpha)\,\bar{f}_0(\rho) - \bar{v}_0(\alpha)\,\bar{g}_0(\rho)\right],$$

где $\rho = r/l$, $\alpha = a/l$.

Как показывает проверка, функции $w(r)$, $w'(r)$ и $\Delta_0 w(r)$ непрерывны при $r = a$; непрерывны вследствие этого также моменты G_1 и G_2; функция $\Delta_0 w'$ терпит разрыв непрерывности на величину q/D, и, следовательно, поперечная сила имеет нужный разрыв на величину q

Решение задачи о пластинке, загруженной по окружности радиуса a моментами $q_{\mathrm{м}}$, векторы которых направлены по касательной к окружности, можно получить, приложив две равные по величине и направленные в противоположные стороны нагрузки по окружностям, приведенные радиусы которых равны α и $\alpha + \varepsilon$, положить $q_{\mathrm{м}} = q\varepsilon$ и найти предел, к которому стремится решение при $\varepsilon \to 0$; полученное таким образом уравнение упругой поверхности имеет вид

при $\rho \leqslant \alpha$

$$w = \frac{\pi q_{\mathrm{м}} a l^2}{2D\sin 2\varphi}\left[\bar{f}_0'(\alpha)\,\bar{u}_0(\rho) - \bar{g}_0'(\alpha)\,\bar{v}_0(\rho)\right];$$

при $\rho \geqslant \alpha$

$$w = \frac{\pi q_{\mathrm{м}} a l^2}{2D\sin 2\varphi}\left[\bar{u}_0'(\alpha)\,\bar{f}_0(\rho) - \bar{v}_0'(\alpha)\,\bar{g}_0(\rho)\right].$$

Это решение остается при $\rho = \alpha$ непрерывным вместе с $w'(\rho)$ и $\Delta_0 w'(\rho)$; функция $\Delta_0 w(r)$ и радиальный момент G_1 терпят разрыв непрерывности.

Рассмотрим задачу о загружении пластинки угловой деформацией θ_0; решение, давая при $\rho = \alpha$ разрыв в угле наклона на заданную величину θ_0, должно оставаться при $\rho = \alpha$ непрерывным вместе с моментом G_1 и поперечной силой N_1.

Это решение имеет вид:

при $\alpha \geqslant \rho$

$$w = \frac{\pi\alpha\theta_0 l}{2\sin 2\varphi}\left\{\left[\bar{f}_0(\alpha)\cos 2\varphi + \bar{g}_0(\alpha)\sin 2\varphi - \frac{1-\sigma}{\alpha}\bar{f}_0'(\alpha)\right]\bar{u}_0(\rho) + \right.$$
$$\left. + \left[-\bar{g}_0(\alpha)\cos 2\varphi + \bar{f}_0(\alpha)\sin 2\varphi + \frac{1-\sigma}{\alpha}\bar{g}_0'(\alpha)\right]\bar{v}_0(\rho)\right\},$$

при $\alpha \leqslant \rho$

$$w = \frac{\pi\alpha\theta_0 l}{2\sin 2\varphi}\left\{\left[\bar{u}_0(\alpha)\cos 2\varphi + \bar{v}_0(\alpha)\sin 2\varphi - \frac{1-\sigma}{\alpha}\bar{u}_0'(\alpha)\right]\bar{f}_0(\rho) + \right.$$
$$\left. + \left[-\bar{v}_0(\alpha)\cos 2\varphi + \bar{u}_0(\alpha)\sin 2\varphi + \frac{1-\sigma}{\alpha}\bar{v}_0'(\alpha)\right]\bar{g}_0(\rho)\right\}.$$

При $\alpha = \rho$ и $\Delta_0 w$, и кольцевой момент G_2 терпят разрыв непрерывности.

§ 3. Равновесие круглой пластинки на упругом основании. Неосесимметричная деформация

В этом параграфе, в отличие от предыдущего, рассматривается пластинка, лежащая на винклеровском упругом основании, но не нагруженная осевыми усилиями; поэтому p_0 нужно положить равным нулю, а в аргументе $\rho e^{i\varphi}$ принять $\varphi = \pi/4$; в обозначениях для действительной и мнимой частей бесселевых функций при этом будут опущены черточки над буквами u, v, f, g.

Как это следует из § 2, решение задачи о неограниченной пластинке при загружении сосредоточенной силой P имеет вид

$$w = Pl^2 f_0(\xi)/(4D).$$

Интегрируя это выражение, которое при $P = 1$ является основной функцией влияния, будем получать основные решения для отдельных частных задач.

Рассмотрим пластинку, нагруженную силами $q\cos n\theta$, распределенными по окружности, приведенный радиус которой обозначим α.

Воспользовавшись принципом сложения воздействий, представим прогиб в точке с координатами ξ, φ в следующем виде:

$$w = \frac{q\alpha l^3}{4D} \int_0^{2\pi} f_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}\right)\cos n\theta\, d\theta.$$

Для вычисления этого интеграла по-прежнему воспользуемся формулой сложения цилиндрических функций

$$Z_0\left(\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}\right) =$$

$$= 2\sum_{n=0}^{\infty}{}' J_n(\alpha)\, Z_n(\xi)\cos n(\theta - \varphi), \quad (3.1)$$

где значок $'$ обозначает, что при $n = 0$ вводится коэффициент 1/2. Эта формула справедлива при $\alpha \leqslant \xi$; если $\alpha \geqslant \xi$, то в правой части (3.1) α и ξ следует поменять местами. Положив

$$Z_0 = H_0^{(1)}\left(\sqrt{i}\,\sqrt{\alpha^2 + \xi^2 - 2\alpha\xi\cos(\theta - \varphi)}\right),$$

интегрируя и отделяя действительную часть, получим при $\xi \leqslant \alpha$

$$w = w_{\mathrm{I}} = \pi\alpha q l^3 [u_n(\xi) f_n(\alpha) - v_n(\xi) g_n(\alpha)]\cos n\varphi/(2D), \quad (3.2)$$

при $\xi \geqslant \alpha$

$$w = w_{\mathrm{II}} = \pi\alpha q l^3 [u_n(\alpha) f_n(\xi) - v_n(\alpha) g_n(\xi)]\cos n\varphi/(2D). \quad (3.3)$$

Положив в выражениях (3.2), (3.3) $n = 0$, мы придем к формулам для осесимметричной задачи.

Воспользовавшись вронскианом уравнения Бесселя, можно показать, что полученные решения удовлетворяют условиям сопряжения при $\xi = \alpha$.

Интегрируя выражения (3.2), (3.3), можно решить задачу о неограниченной пластинке, загруженной по закону $\Psi(\xi)\cos n\theta$, где $\Psi(\xi)$ — заданная функция.

Если на пластинку действует нагрузка $q(\varphi)$, распределенная по окружности приведенного радиуса α, то, разлагая эту нагрузку в ряд Фурье

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

и используя формулы (3.2) и (3.3), получим решение

при $\alpha \leqslant \xi$

$$w = \frac{\pi a l^3}{2D}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n [u_n(\alpha) f_n(\xi) - v_n(\alpha) g_n(\xi)] \sin n\varphi + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} b_n [u_n(\alpha) f_n(\xi) - v_n(\alpha) g_n(\xi)] \cos n\varphi \right\}; \qquad (3.4)$$

при $\alpha \geqslant \xi$

$$w = \frac{\pi a l^3}{2D}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} a_n [u_n(\xi) f_n(\alpha) - v_n(\xi) g_n(\alpha)] \sin n\varphi + \right.$$

$$\left. + \sum_{n=0}^{\infty} b_n [u_n(\xi) f_n(\alpha) - v_n(\xi) g_n(\alpha)] \cos n\varphi \right\}. \qquad (3.5)$$

При помощи формул (3.4), (3.5) удобно выполнить построение основного решения для нагрузки, представленной в виде ряда

$$q = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi_n(\xi) [a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta].$$

Если нагрузка, приложенная к пластинке, может быть представлена в виде

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta) \qquad (3.6)$$

или

$$q = \sum_{n=1}^{\infty} \xi^{-n} (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta), \qquad (3.7)$$

где n — целое положительное число, то интегрирование проводится особенно просто [1]).

---

[1]) Если в (3.6) и (3.7) показатель степени при ξ отличен от $\pm n$, то решение получается в функциях Ломмеля комплексного аргумента.

Напомним формулы дифференцирования бесселевых функций

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dz}[z^n J_n(z)] &= z^n J_{n-1}(z),\\ \frac{d}{dz}[z^n H_n^{(1)}(z)] &= z^n H_{n-1}^{(1)}(z).\end{aligned}\right\}$$

Полагая $z=\xi\sqrt{i}$, интегрируя и отделяя действительные и мнимые части, получаем следующие формулы:

$$\int \xi^n u_{n-1}(\xi)\,d\xi = \xi^n [u_n(\xi)+v_n(\xi)]/\sqrt{2},$$

$$\int \xi^n v_{n-1}(\xi)\,d\xi = -\xi^n [u_n(\xi)-v_n(\xi)]/\sqrt{2},$$

$$\int \xi^n f_{n-1}(\xi)\,d\xi = \xi^n [f_n(\xi)+g_n(\xi)]/\sqrt{2},$$

$$\int \xi^n g_{n-1}(\xi)\,d\xi = -\xi^n [f_n(\xi)-g_n(\xi)]/\sqrt{2}.$$

Решение задачи при нагрузке, изменяющейся по закону (3.6) и распределенной по площади кругового кольца, можно получить, интегрируя выражения (3.2) и (3.3). Для этого следует предварительно заменить в этих выражениях нагрузку q элементарной нагрузкой $q_0\alpha^n\,dz = q_0\alpha^n l\,d\alpha$, где q_0 имеет размерность $кг/см^2$. Заметим, что при этом появится множитель $l^4/D = 1/k_0$. Далее, проинтегрируем эти выражения в пределах от $\alpha=\alpha_1$ до $\alpha=\alpha_2$.

При $\xi \leqslant \alpha_1 < \alpha_2$ решение имеет вид

$$w = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{\pi q_0 \alpha^{n+1}}{2k_0}\,[u_n(\xi) f_n(\alpha) - v_n(\xi)\,g_n(\alpha)]\cos n\varphi\,d\alpha =$$

$$= \frac{\pi q_0}{2k_0\sqrt{2}}\Big(\{\alpha_2^{n+1}[f_{n+1}(\alpha_2)+g_{n+1}(\alpha_2)] - \alpha_1^{n+1}[f_{n+1}(\alpha_1)+g_{n+1}(\alpha_1)]\}\,u_n(\xi) + \{\alpha_2^{n+1}[f_{n+1}(\alpha_2)-g_{n+1}(\alpha_2)] - \alpha_1^{n+1}[f_{n+1}(\alpha_1)-g_{n+1}(\alpha_1)]\}\,v_n(\xi)\Big)\cos n\varphi;$$

при $\xi \geqslant \alpha_2 > \alpha_1$

$$w = \frac{\pi q_0}{2k_0\sqrt{2}} \left(\left\{ \alpha_2^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_2) + v_{n+1}(\alpha_2) \right] - \right.\right.$$
$$- \alpha_1^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_1) + v_{n+1}(\alpha_1) \right] \Big\} f_n(\xi) + \left\{ \alpha_2^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_2) - v_{n+1}(\alpha_2) \right] - \right.$$
$$\left.\left. - \alpha_1^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_1) - v_{n+1}(\alpha_1) \right] \right\} g_n(\xi) \right) \cos n\varphi.$$

При $\alpha_2 \geqslant \xi \geqslant \alpha_1$ решение может быть записано в следующей форме:

$$w = \frac{\pi q_0}{2k_0\sqrt{2}} \left(\left\{ \alpha_2^{n+1} \left[f_{n+1}(\alpha_2) + g_{n+1}(\alpha_2) \right] - \right.\right.$$
$$- \xi^{n+1} \left[f_{n+1}(\xi) + g_{n+1}(\xi) \right] \Big\} u_n(\xi) + \left\{ \alpha_2^{n+1} \left[f_{n+1}(\alpha_2) - g_{n+1}(\alpha_2) \right] - \right.$$
$$- \xi^{n+1} \left[f_{n+1}(\xi) - g_{n+1}(\xi) \right] \Big\} v_n(\xi) + \left\{ \xi^{n+1} \left[u_{n+1}(\xi) + v_{n+1}(\xi) \right] - \right.$$
$$- \alpha_1^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_1) + v_{n+1}(\alpha_1) \right] \Big\} f_n(\xi) + \left\{ \xi^{n+1} \left[u_{n+1}(\xi) - v_{n+1}(\xi) \right] - \right.$$
$$\left.\left. - \alpha_1^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_1) - v_{n+1}(\alpha_1) \right] \right\} g_n(\xi) \right) \cos n\varphi =$$
$$= \frac{\pi q_0}{2k_0\sqrt{2}} \left\{ \alpha_2^{n+1} \left[f_{n+1}(\alpha_2) + g_{n+1}(\alpha_2) \right] u_n(\xi) + \right.$$
$$+ \alpha_2^{n+1} \left[f_{n+1}(\alpha_2) - g_{n+1}(\alpha_2) \right] v_n(\xi) -$$
$$- \alpha_1^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_1) + v_{n+1}(\alpha_1) \right] f_n(\xi) -$$
$$\left. - \alpha_1^{n+1} \left[u_{n+1}(\alpha_1) - v_{n+1}(\alpha_1) \right] g_n(\xi) + 2\xi^n \sqrt{2}/\pi \right\} \cos n\varphi.$$

Эти формулы дают выражение для n-го члена ряда, представляющего прогиб при нагрузке, заданной (3.6).

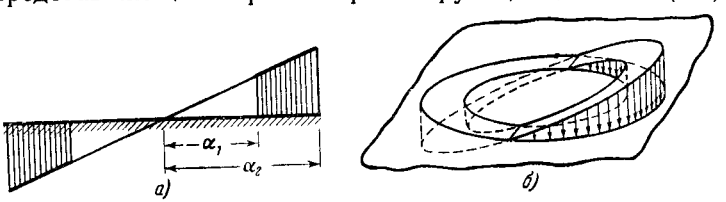

Рис. 16

Самостоятельное практическое значение имеет случай $n = 1$, т. е. загружение силами, изменяющимися по закону $q(\xi)\cos\theta$ (рис. 16, *а*, *б*). Такая нагрузка может появиться при расчете фундаментов, на которые

опираются круговые цилиндры, находящиеся под действием горизонтальных сил; при такой нагрузке окружности с центром в начале координат остаются плоскими, поворачиваясь одна относительно другой.

В работе [21] приведены таблицы функций, при помощи которых можно получить числовые результаты для случая $n = 1$.

§ 4. Расчет круговой конической оболочки на действие осесимметричных нагрузок и неравномерного нагрева

Рассмотрим расчет на действие осесимметричных сил и расчет на неравномерный нагрев круговой конической оболочки постоянной толщины. Для упрощения расчетов здесь может быть применен метод, получивший в строительной механике название метода начальных параметров.

Этот метод особенно подробно разработан в связи с задачами об изгибе балки, изгибе балки на винклеровском упругом основании и о колебаниях балки, которые сводятся к решению дифференциальных уравнений четвертого порядка

$$\frac{d^4y}{dx^4} = f(x), \quad \frac{d^4y}{dx^4} + y = f_1(x), \quad \frac{d^4y}{dx^4} - y = f_2(x).$$

Его основы изложены, например, в книгах А. Н. Крылова [25], [26]. Как известно, существенной особенностью этого метода является специальный выбор фундаментальной системы решений Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, которые при значении аргумента $x = 0$ удовлетворяют условиям

	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Y	1	0	0	0
Y'	0	1	0	0
Y''	0	0	1	0
Y'''	0	0	0	1

,

что позволяет упростить выполнение условий сопряжения в процессе отыскания частного решения при разрывной правой части и определения произвольных постоянных, входящих в выражение для общего решения

однородного уравнения Применение этого метода к задачам, описываемым системой двух уравнений Бесселя, излагалось в [18]—[20].

Метод начальных параметров наиболее целесообразно применять для оболочек небольшой длины или имеющих большой угол при вершине. Основы метода начальных параметров применительно к задаче о конической оболочке были рассмотрены в работе [20].

Приведем сначала основные расчетные формулы

$$T_1 = B\,[du/dr + \sigma\,(u/r - w/(r\,\mathrm{tg}\,\gamma))], \tag{4.1}$$

$$T_2 = B\,[\sigma\,du/dr + (u - w/\mathrm{tg}\,\gamma)/r], \tag{4.2}$$

$$G_1 = -\,D\,(d^2w/dr^2 + \sigma\,dw/(r dr)), \tag{4.3}$$

$$G_2 = -\,D\,(\sigma d^2w/dr^2 + dw/(r dr)), \tag{4.4}$$

$$N = -\,T_1\,\mathrm{ctg}\,\gamma. \tag{4.5}$$

Здесь в соответствии с рис. 17 через T_1, G_1 и N соответственно обозначены нормальная сила, изгибающий момент и поперечная сила в сечениях, нормальных к образующей, а через T_2 и G_2 — нормальная сила и изгибающий момент в сечениях по образующей; обозначим через u и w — составляющие перемещения по образующей и нормали к поверхности; r — расстояние от рассматриваемой точки срединной поверхности до вершины конуса, 2γ — угол при вершине конуса. Через D обозначена цилиндрическая жесткость оболочки; наконец, $B = Eh/(1 - \sigma^2)$.

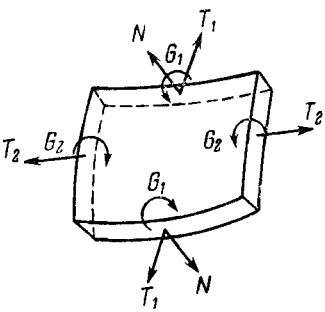

Рис 17.

Из уравнений равновесия и совместности, и из (4.1)—(4.5), как известно (см., например, [36]), получаются дифференциальные уравнения

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{d\xi}{d\zeta} - \frac{4\xi}{\zeta^2} + \frac{24}{h^2}\eta = 0, \tag{4.6}$$

$$\frac{d^2\eta}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta}\frac{d\eta}{d\zeta} - \frac{4\eta}{\zeta^2} - \frac{2(1-\sigma^2)}{\mathrm{tg}^2\gamma}\xi = 0, \tag{4.7}$$

где $\xi = dw/dr$, $\eta = Nr/B$, $\zeta = \sqrt{2r}$.

Положив $k^4 = 48(1-\sigma^2)/(h^2 \operatorname{tg}^2\gamma)$ и перейдя к аргументу $x = k\xi$, получим уравнения

$$\frac{d^2\xi}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\xi}{dx} - \frac{4\xi}{x^2} + \frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}{h\sqrt{1-\sigma^2}}\eta = 0,$$

$$\frac{d^2\eta}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d\eta}{dx} - \frac{4\eta}{x^2} - \frac{h\sqrt{1-\sigma^2}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}\xi = 0,$$

которые, после введения оператора $L = \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{4}{x^2}$, можно записать сокращенно в такой форме:

$$L(\xi) + \frac{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}{h\sqrt{1-\sigma^2}}\eta = 0, \tag{4.8}$$

$$L(\eta) - \frac{h\sqrt{1-\sigma^2}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}\xi = 0. \tag{4.9}$$

Исключая из уравнений (4.8) и (4.9) неизвестную η, получим уравнение

$$L^2(\xi) + \xi = 0, \tag{4.10}$$

интеграл которого можно записать в следующем виде (см. § 13, ч. I):

$$\xi = C_1 J_2(x\sqrt{i}) + C_2 J_2(x\sqrt{-i}) + C_3 Y_2(x\sqrt{i}) + C_4 Y_2(x\sqrt{-i}),$$

где J_2 — цилиндрическая функция первого рода второго порядка, Y_2 — цилиндрическая функция второго рода второго порядка.

Мы будем представлять ξ и η в виде линейной комбинации четырех функций $Y_1(x, a)$, $Y_2(x, a)$, $Y_3(x, a)$, $Y_4(x, a)$, которые удовлетворяют уравнению (4.10) и некоторым соотношениям, записанным ниже и облегчающим выполнение условий сопряжения. Эти функции образуем из функции Бесселя $J_2(x\sqrt{i}) = u_2(x) + iv_2(x)$ и функции Ганкеля первого рода $H_2^{(1)}(x\sqrt{i}) = f_2(x) + ig_2(x)$. Положим для этого, что

при $x < a$

$$Y_n(x, a) = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, 4),$$

при $x \geqslant a$

$$\left.\begin{aligned}
Y_1(x, a) &= \frac{\pi a}{2}\left[-u_2'(a)\,g_2(x) + f_2'(a)\,v_2(x) - \right.\\
&\qquad \left. - v_2'(a)\,f_2(x) + g_2'(a)\,u_2(x)\right],\\
Y_2(x, a) &= \frac{\pi a}{2}\left[-u_2(a)\,g_2(x) + \right.\\
&\qquad \left. + f_2(a)\,v_2(x) - v_2(a)\,f_2(x) + g_2(a)\,u_2(x)\right],\\
Y_3(x, a) &= \frac{\pi a}{2}\left[u_2'(a)\,f_2(x) - f_2'(a)\,u_2(x) - \right.\\
&\qquad \left. - v_2'(a)\,g_2(x) + g_2'(a)\,v_2(x)\right],\\
Y_4(x, a) &= \frac{\pi a}{2}\left[u_2(a)\,f_2(x) - f_2(a)\,u_2(x) - \right.\\
&\qquad \left. - v_2(a)\,g_2(x) + g_2(a)\,v_2(x)\right].
\end{aligned}\right\} \tag{4.11}$$

Функции $Y_n(x, a)$ выбраны так, чтобы при $x = a$ они удовлетворяли следующим условиям:

n	Y_n	Y_n'	$-L(Y_n)$	$-L'(Y_n)$
1	1	0	0	0
2	0	1	0	0
3	0	0	1	0
4	0	0	0	1

(4.12)

Между функциями $u_2(x)$, $v_2(x)$, $f_2(x)$, $g_2(x)$ существуют такие зависимости:

$$L(u_2) = v_2, \quad L(v_2) = -u_2, \quad L(f_2) = g_2, \quad L(g_2) = -f_2, \tag{4.13}$$

$$u_2(x) f_2'(x) - v_2(x) g_2'(x) - u_2'(x) f_2(x) + v_2'(x) g_2(x) = 0, \tag{4.14}$$

$$v_2(x) f_2'(x) + u_2(x) g_2'(x) - u_2'(x) g_2(x) - v_2'(x) f_2(x) = 2/(\pi x). \tag{4.15}$$

Формулы (4.13) легко непосредственно проверить; формулы (4.14) и (4.15) получаются из рассмотрения определителя Вронского.

Между функциями Y_1, Y_2, Y_3, Y_4 существуют также дифференциальные зависимости

$$L(Y_1) = Y_3, \quad L(Y_2) = Y_4, \quad L(Y_3) = -Y_1, \quad L(Y_4) = -Y_2.$$

Напишем теперь решения уравнений (4 8) и (4.9) в следующем виде:

$$\xi = A_1Y_1 + A_2Y_2 + A_3Y_3 + A_4Y_4, \tag{4.16}$$

$$\eta = -\frac{h\sqrt{1-\sigma^2}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}(A_1Y_3 + A_2Y_4 - A_3Y_1 - A_4Y_2). \tag{4.17}$$

Зная η, можно получить выражения для усилий

$$N = B\frac{\eta}{r} = \frac{Eh^2k^2}{x^2\sqrt{3(1-\sigma^2)}\operatorname{tg}\gamma}(A_1Y_3 + A_2Y_4 - A_3Y_1 - A_4Y_2), \tag{4.18}$$

$$T_1 = -\frac{1}{\operatorname{ctg}\gamma}N = \frac{Eh^2k^2}{x^2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(A_1Y_3 + A_2Y_4 - A_3Y_1 - A_4Y_2), \tag{4.19}$$

$$T_2 = \frac{d}{dr}(T_1r) =$$

$$= \frac{Eh^2k^2}{2x\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(A_1Y_3' + A_2Y_4' - A_3Y_1' - A_4Y_2'). \tag{4.20}$$

Изгибающие моменты определим из формул (4.3) и (4.4), которые с помощью вышеуказанных обозначений ξ и x принимают вид

$$G_1 = -\frac{Dk^2}{x}\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{2\sigma}{x}\xi\right), \qquad G_2 = -\frac{Dk^2}{x}\left(\sigma\frac{d\xi}{dx} + \frac{2}{x}\xi\right),$$

и, следовательно,

$$G_1 = -\frac{Eh^2}{x\sqrt{3(1-\sigma^2)}\operatorname{tg}\gamma}\left[A_1\left(Y_1' + \frac{2\sigma}{x}Y_1\right) + A_2\left(Y_2' + \frac{2\sigma}{x}Y_2\right) + \right.$$
$$\left. + A_3\left(Y_3' + \frac{2\sigma}{x}Y_3\right) + A_4\left(Y_4' + \frac{2\sigma}{x}Y_4\right)\right]; \tag{4.21}$$

$$G_2 = -\frac{Eh^2}{x\sqrt{3(1-\sigma^2)}\operatorname{tg}\gamma}\left[A_1\left(\sigma Y_1' + \frac{2}{x}Y_1\right) + A_2\left(\sigma Y_2' + \frac{2}{x}Y_2\right) + \right.$$
$$\left. + A_3\left(\sigma Y_3' + \frac{2}{x}Y_3\right) + A_4\left(\sigma Y_4' + \frac{2}{x}Y_4\right)\right]. \tag{4.22}$$

Таким образом, все внутренние усилия могут быть определены, если известно одно из усилий N или T_1. В последнем случае по формуле (4.5) находим N, а следовательно, и η, после чего путем сравнения (4.16) и (4.17) определяем ξ, а затем и изгибающие моменты.

Перемещения u и w могут быть определены из равенств (4.1), (4.2) и (4.19), (4.20).

Однако для наших целей нет необходимости находить эти перемещения, так как в дальнейшем понадобится определять абсолютные удлинения радиусов параллельных окружностей, полученных в результате сечения конической оболочки плоскостями, перпендикулярными к ее оси. Эти удлинения назовем поперечными перемещениями и обозначим их буквой δ; для их определения можно пользоваться формулой

$$\delta = u \sin\gamma - w \cos\gamma. \tag{4.23}$$

Из равенства (4.23) следует

$$\delta/(r \sin\gamma) = u/r - w/(r \operatorname{tg}\gamma),$$

откуда согласно формулам (4.1) и (4.2) получим

$$\delta = r \sin\gamma\,(T_2 - \sigma T_1)/[B\,(1-\sigma^2)]. \tag{4.24}$$

Из формул (4.1) и (4.2) получаем также

$$du/dr = (T_1 - \sigma T_2)/[B\,(1-\sigma^2)]. \tag{4.25}$$

Приведем несколько примеров использования метода начальных параметров при расчете конической оболочки на действие различных нагрузок.

1. Рассмотрим сначала коническую оболочку (рис. 18), у которой меньшее основание защемлено, а к большему основанию приложена равномерно распределенная радиальная сила Q_1.

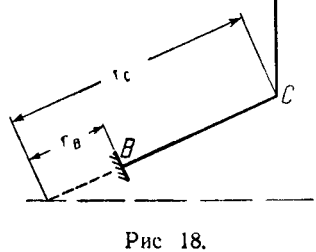

Рис 18.

Граничные условия будут иметь следующий вид:

при $r = r_B$, $\dfrac{dw}{dr} = 0$, $\delta = 0$,

при $r = r_C$, $T_1 = Q_1 \sin\gamma$, $G_1 = 0$.

Решение задачи состоит в определении постоянных A_1, A_2, A_3, A_4. Положим, что начало координат принято на защемленном конце, т. е. $a = k\sqrt{2r_B}$. Так как при $x = a$ $Y_1 = 1$, $Y_2 = Y_3 = Y_4 = 0$, то из (4.16) и из условия

равенства нулю угла поворота в сечении B следует, что $A_1 = 0$.

Из второго условия в сечении B получаем, что при $x = a$ $T_2 - \sigma T_1 = 0$; в то же время, согласно (4.19), (4.20) и (4.12), при $x = a$

$$T_1 = \frac{Eh^2k^2}{a^2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(-A_3), \quad T_2 = \frac{Eh^2k^2}{2a\sqrt{3(1-\sigma^2)}}(-A_4);$$

следовательно, $A_4 = 2\sigma A_3/a$.

Таким образом, основные неизвестные функции ξ и η примут вид

$$\xi = A_2Y_2 + A_3(Y_3 + 2\sigma Y_4/a),$$

$$\eta = -\frac{h\sqrt{1-\sigma^2}}{2\sqrt{3}\operatorname{tg}\gamma}\left[A_2Y_4 - A_3\left(Y_1 + \frac{2\sigma}{a}Y_2\right)\right].$$

Для определения оставшихся пока неизвестными постоянных A_2 и A_3 воспользуемся условиями в сечении C; положив $b = k\sqrt{2r_C}$, получаем следующие уравнения:

$$\frac{Eh^2k^2}{b^2\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\left[A_2Y_4(a, b) - A_3\left\{Y_1(a, b) + \frac{2\sigma}{a}Y_2(a, b)\right\}\right] = Q_1\sin\gamma, \quad (4.26)$$

$$\frac{Eh^2}{b\sqrt{3(1-\sigma^2)}\operatorname{tg}\gamma}\left[A_2\left\{Y_2'(a, b) + \frac{2\sigma}{b}Y_2(a, b)\right\} + A_3\left\{Y_3'(a, b) + \frac{2\sigma}{b}Y_3(a, b) + \frac{2\sigma}{a}Y_4'(a, b) + \frac{4\sigma^2}{ab}Y_4(a, b)\right\}\right] = 0. \quad (4.27)$$

Решая (4.26) и (4.27), находим A_2 и A_3. Если не пользоваться методом начальных параметров, то для определения произвольных постоянных пришлось бы решить систему, состоящую из четырех уравнений.

Рассмотрим другие случаи закрепления сечения B. Если в B шарнирное опирание, то при $x = a$ $G_1 = 0$ и $\delta = 0$.

Из первого условия следует, что $2\sigma A_1/a + A_2 = 0$, второе же условие дает, как это показано в предыдущем примере, $A_4 = 2\sigma A_3/a$.

Если в сечении B имеется опорное закрепление, препятствующее только повороту, тогда при $x = a$ $\xi = 0$ и $\eta = 0$, откуда $A_1 = 0$ и $A_3 = 0$.

Наконец, если в сечении B оболочка свободна, то при $x = a$ $G_1 = 0$ и $\eta = 0$, откуда $2\sigma A_1/a + A_2 = 0$ и $A_3 = 0$.

2. Перейдем к расчету оболочки, загруженной радиальными силами, действующими в плоскостях поперечных сечений и равномерно распределенными по сечению (рис. 19).

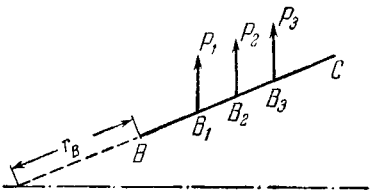

Рис. 19.

Интенсивность этих сил обозначим через P_1, P_2, P_3; сечения, по которым приложены силы — B_1, B_2, B_3, а соответствующие им значения аргумента x — через a_1, a_2, a_3.

Положим, что меньшее основание конуса закреплено против поворота. Рассмотрим участок $a_1 > x > a$. Обозначим для сокращения записи выражение для T_1 на этом участке через $T_{1,\,\mathrm{I}}$

$$T_{1,\,\mathrm{I}} = \frac{Eh^2k^2}{x^2\sqrt{3\,(1-\sigma^2)}}\,[A_2Y_4(a,\,x) - A_4Y_2(a,\,x)]. \quad (4.28)$$

Перейдем ко второму участку, где $a_2 > x > a_1$; обозначим нормальное усилие T_1 на этом участке через $T_{1,\,\mathrm{II}}$. Прибавим к $T_{1,\,\mathrm{I}}$ такое решение, которое дает нужный разрыв в поперечной силе и усилии T_1, не нарушая непрерывности изгибающего момента G_1 и перемещений u и ξ.

Попытаемся удовлетворить этим требованиям, прибавив к (4.28) выражение $A_3^*Y_1(x, a_1)$, где под a_1 подразумевается приведенное расстояние от вершины конуса до сечения B_1, т. е. $a_1 = k\sqrt{2r_{B_1}}$.

Как видно из выражений (4.18) — (4.20) и (4.11), при этом будет разрыв в N, T_1 и T_2; G_1 и G_2 останутся непрерывными, так же как и ξ; однако наличие разрыва в T_2 приведет к разрыву в перемещении δ. Для того чтобы избежать этого, будем искать дополнительное решение в следующей форме:

$$T_{1,\,\mathrm{II}} - T_{1,\,\mathrm{I}} = A_3^*Y_1(x,\,a_1) + A_4^*Y_2(x,\,a_1);$$

и в соответствии с (4.20) получим

$$T_{2,\,II} - T_{2,\,I} = \frac{x}{2}\left[A_3^* Y_1'(x, a_1) + A_4^* Y_2'(x, a_1)\right].$$

Теперь потребуем, чтобы при $x = a_1$ было $T_{2,II} - T_{2,I} - \sigma(T_{1,\,II} - T_{1,\,I}) = 0$, отсюда получим $A_1^* = 2\sigma A_3^*/a_1$ и

$$T_{1,\,II} - T_{1,\,I} = A_3^*\left[Y_1(x, a_1) + 2\sigma Y_4(x, a_1)/a_1\right].$$

Для того чтобы определить A_3^*, заметим, что при $x = a_1$ $T_{1,\,II} - T_{1,\,I} = P_1 \sin\gamma$, откуда $A_3^* = P_1 \sin\gamma$.

Таким образом, окончательно получаем

$$T_{1,\,II} = T_{1,\,I} + P_1 \sin\gamma\left[Y_1(x, a_1) + 2\sigma Y_4(x, a_1)/a_1\right].$$

Для следующего участка $a_3 > x > a_2$

$$T_{1,\,III} = T_{1,\,II} + P_2 \sin\gamma\left[Y_1(x, a_2) + 2\sigma Y_4(x, a_2)/a_2\right].$$

Для последнего участка $x > a_3$

$$T_{1,\,IV} = T_{1,\,III} + P_3 \sin\gamma\left[Y_1(x, a_3) + 2\sigma Y_4(x, a_3)/a_3\right].$$

Очевидно, что произвольные постоянные A_2 и A_4, входящие в выражение (4.28), могут быть определены из граничных условий в сечении C оболочки.

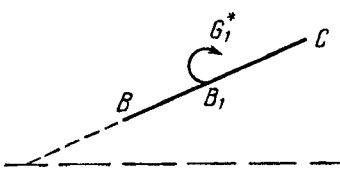

Рис. 20.

С помощью формул (4.18), (4.20), (4.21), (4.22), (4.24) и (4.25) можно отсюда непосредственно получить все усилия и перемещения.

Перейдем к построению решений, дающих разрыв в G_1. Пусть в сечении B_1 к оболочке приложен равномерно распределенный по сечению момент, интенсивность которого равна G_1^* (рис. 20). Обозначим усилия и перемещения при $x < a_1$, т. е. левее сечения B_1, индексом I, а при $x > a_1$ — индексом II. Будем по-прежнему искать дополнительное решение, равное разности усилий или перемещений с индексами II и I в виде линейной комбинации функций $A_n^* Y_n(x, a_1)$.

Используем для определения постоянных A_n^* условия (4.12); так как ξ, η в сечении B_1 должны быть непрерыв-

ными, то из (4.16) и (4.18) следует, что $A_1^* = 0$, $A_3^* = 0$, и наконец, из условия непрерывности поперечного смещения, используя (4.19), (4.20) и (4.24), найдем, что $A^* = 0$.

Таким образом, остается определить только A_2^*; для этой цели используем формулу (4.21), которая дает следующее уравнение:

$$G_1^* = -Eh^2 A_2^* / [a_1 \sqrt{3(1-\sigma^2)}\, \operatorname{tg}\gamma],$$

откуда

$$A_2^* = -G_1^* \sqrt{3(1-\sigma^2)}\, a_1 \operatorname{tg}\gamma / (Eh^2). \qquad (4.29)$$

Следовательно, если при $x < a_1$ $T_1 = T_{1,\,\mathrm{I}}$, то при $x > a_1$, принимая во внимание (4.19), получим

$$T_{1,\,\mathrm{II}} = T_{1,\,\mathrm{I}} + \frac{Eh^2k^2}{x^2\sqrt{3(1-\sigma^2)}} A_2^* Y_4(x, a_1),$$

или, используя (4.29),

$$T_{1,\,\mathrm{II}} = T_{1,\,\mathrm{I}} - G_1^* \frac{a_1 k^2}{x^2} \operatorname{tg}\gamma \cdot Y_4(x, a_1).$$

Таким же точно образом можно построить решения, дающие разрыв в угле поворота или в поперечном смещении. Эти решения имеют значение в связи с расчетом на неравномерный нагрев.

3. Рассмотрим теперь вкратце задачу о неравномерном нагреве конической оболочки. Будем полагать, что температура t, оставаясь постоянной по толщине оболочки, изменяется вдоль образующей. В этом случае в формулах (4.1), (4.2) нужно правые части изменить так, чтобы они выражали удлинения, вызванные только напряжениями.

Для этой цели нужно в формулах (4.1) и (4.2) взамен полных удлинений, равных соответственно $\varepsilon_1 = du/dr$ и $\varepsilon_2 = u/r - w/(r \operatorname{tg}\gamma)$, ввести $\varepsilon_1^* = \varepsilon_1 - \alpha t$ и $\varepsilon_2^* = \varepsilon_2 - \alpha t$, где α — коэффициент температурного расширения; после проведения указанной замены нормальные усилия будут выражаться через перемещения следующим образом:

$$T_1 = B[du/dr + \sigma(u/r - w/(r \operatorname{tg}\gamma))] - B(1+\sigma)\alpha t, \qquad (4.30)$$

$$T_2 = B[\sigma\, du/dr + (u - w/\operatorname{tg}\gamma)/r] - B(1+\sigma)\alpha t. \qquad (4.31)$$

Изменение выражений для нормальных усилий повлечет

за собой появление правой части в уравнении (4.7), а уравнение (4.6) останется без изменений.

В самом деле, уравнение (4.6) является следствием условия равновесия и формул (4.3) и (4.4), в которые учет температуры не внес изменений.

Уравнение (4.7) получено из условия совместности, в котором относительные удлинения заменены их выражениями по формулам (4.1) и (4.2); в результате замены формул (4.1) и (4.2) на (4.30) и (4.31), естественно появляется правая часть.

Таким образом, взамен уравнений (4.8) и (4.9) будем иметь следующую систему уравнений:

$$\left.\begin{aligned} L(\xi) + \frac{2\sqrt{3}\,\operatorname{tg}\gamma}{h\sqrt{1-\sigma^2}}\,\eta = 0, \\ L(\eta) - \frac{h\sqrt{1-\sigma^2}}{2\sqrt{3}\,\operatorname{tg}\gamma}\,\xi = r\,\frac{h\sqrt{1-\sigma^2}}{2\sqrt{3}}\,\frac{d(\alpha t)}{dr}. \end{aligned}\right\}$$

После исключения η получим неоднородное уравнение

$$L^2(\xi) + \xi = -\,r\,(d(\alpha t)/dr)\operatorname{tg}\gamma,$$

которое удобно решать, используя метод начальных параметров, в особенности, если правая часть имеет разрывы.

Метод начальных параметров можно было использовать и во всех задачах предыдущих трех параграфов. При этом можно было бы показать (см., например [20]), что частное решение полученных уравнений определяется при применении метода начальных параметров, с точностью до постоянного множителя, как интеграл вида

$$\int_0^{\xi} Z_4(\xi, x)\,q(x)\,dx,$$

где q — правая часть, Z_4 — четвертая функция метода начальных параметров.

§ 5. Метод компенсирующих нагрузок в задачах о мембранах и пластинках

В этом параграфе будут рассматриваться некоторые задачи теории мембран и пластинок, решаемые с помощью метода компенсирующих нагрузок. При этом решение разбивается на сумму двух решений — основного

и компенсирующего. При построении обоих решений вместо заданной области рассматривается расширенная область, в большинстве случаев неограниченная. Как отмечалось ранее, основное решение удовлетворяет неоднородному дифференциальному уравнению и граничным условиям для расширенной области.

Компенсирующее решение должно удовлетворять однородному дифференциальному уравнению и, совместно с основным решением, граничным условиям. Компенсирующее решение рассматривается при этом как результат действия некоторых, специальным образом выбранных нагрузок, приложенных к плите или мембране, занимающей расширенную область. Очевидно, что компенсирующие нагрузки должны быть приложены только в той части расширенной области, которая находится вне заданной области.

Выбор линии или системы линий, по которой распределены компенсирующие нагрузки, предоставляет много возможностей для того, чтобы использовать упрощения, подсказываемые характером рассматриваемой задачи. Кроме того, произвол в выборе типа нагрузок, а именно, возможность выбрать нагрузки в виде сил, моментов, разрывов в перемещениях и углах поворота, также расширяет возможности построения эффективных расчетных приемов.

Для фактического решения задач нужно, в зависимости от типа граничных условий, приравнять полные прогибы, углы поворота или усилия на контуре нулю или некоторой заданной функции. При этом будут получены интегральное уравнение или система интегральных уравнений Фредгольма первого рода. Решая эти уравнения, найдем компенсирующую нагрузку, а затем и полное решение задачи. Указанные интегральные уравнения здесь решаются приближенно; тем или иным способом они заменяются системой линейных уравнений относительно параметров, через которые выражаются компенсирующие нагрузки.

В рассматриваемых здесь задачах основные функции влияния представлены через бесселевы функции, поэтому все ядра полученных интегральных уравнений также выражаются через эти функции.

Вычисления, результаты которых изложены в этом параграфе, показывают эффективность примененного метода.

1. Рассмотрим задачу о колебаниях мембраны. Положим, что мембрана, имеющая постоянные толщину h и объемный вес γ_1, растянута постоянным натяжением T_0. Дифференциальное уравнение свободных колебаний мембраны имеет вид

$$T_0 \nabla^2 w = \frac{\gamma_1 h}{g} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2}, \tag{5.1}$$

где $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$.

Обозначим $\gamma_1 h/(T_0 g) = 1/c^2$ и будем искать решение уравнения (5.1) в виде

$$W(x, y; t) = w(x, y) \sin(\omega t),$$

где ω — круговая [1]) частота свободных колебаний, а функция $w(x, y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w = 0, \tag{5.2}$$

где $\lambda = \omega/c$.

Как известно, к интегрированию этого уравнения сводится большое число задач математической физики.

Для того чтобы выявить эффективность метода компенсирующих нагрузок, применим его в первую очередь к задачам, имеющим точное решение.

Определим частоты и формы свободных колебаний мембраны. В рассматриваемом случае основное решение тождественно равно нулю, а граничные условия однородны. Представим решение задачи в виде

$$w = \int_C q(\sigma) K(x, y; \xi, \eta)\, d\sigma,$$

где C — линия, по которой распределена компенсирующая нагрузка (эту линию назовем особой), σ — дуговая координата на этой линии; x, y — координаты рассматриваемой точки мембраны; ξ, η — координаты точки особой линии; функция K представляет основную функцию влия-

[1]) Для краткости слово «круговая» иногда будет опускаться.

ния, в рассматриваемом случае она выражает форму колебаний неограниченной мембраны, вызванных единичной силой $1 \cdot \sin \omega t$. С точностью до постоянного множителя, функция K представляет собой бесселеву функцию второго рода с индексом нуль от действительного аргумента $r = \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, где r — приведенное расстояние между точкой особой линии и рассматриваемой точкой мембраны. Это легко проверить, выполнив выкладки, аналогичные тем, которые необходимы для получения формулы (1.14). Так как прогибы на контуре мембраны равны нулю, то для любой точки контура

$$\int_C q(\sigma)\, Y_0(r)\, d\sigma = 0. \tag{5.3}$$

Если приложить вместо сил моменты, то ядра будут представлять бесселевы функции первого порядка, умноженные на косинусы соответствующих углов[1]). Задача сводится к отысканию значений параметра λ, при которых уравнение (5.3) имеет нетривиальное решение. При вычислениях интеграл будет приближенно заменяться суммой, и задача сведется к определению корней некоторой системы трансцендентных уравнений.

В качестве числового примера рассмотрим задачу о свободных колебаниях квадратной мембраны, натянутой на жесткий контур. Попутно заметим, что эта задача, по существу, совпадает с задачей об определении критического давления, равномерно распределенного по шарнирно опертому контуру квадратной пластинки, а также с задачей о свободных колебаниях такой же пластинки.

Определим основную частоту колебаний. Известно, что эта задача имеет точное решение. Покажем, что, применяя полярную систему координат и исходя из метода компенсирующих нагрузок, можно получить сравнительно просто приближенное решение, которое имеет вполне достаточную с практической точки зрения точность. Кроме того, проиллюстрируем возможность применения различных вариантов вычисления первого собственного числа.

---

[1]) См. стр. 268, 269.

Пусть особой линией будет окружность; положим, что компенсирующие нагрузки $q(\sigma)$ представлены в виде ряда, который из условий симметрии имеет вид

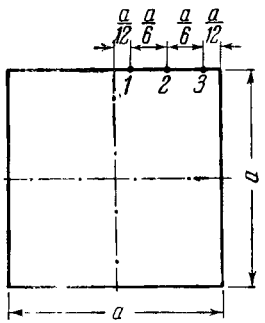

Рис. 21.

$$q(\sigma) = \sum_{n=0}^{\infty} B_{4n} \cos 4n\varphi,$$

где φ — полярный угол, с вершиной в центре квадрата (рис. 21).

Воспользовавшись теоремой сложения, можно записать уравнение (5.3) в виде

$$A_0 J_0(\lambda R_s) + A_4 J_4(\lambda R_s) \cos 4\varphi + \ldots = 0, \quad (5.4)$$

где R_s — полярная координата точки контура Если в (5 4) сохранить три слагаемых и потребовать, чтобы граничное условие выполнялось в трех точках (*1*, *2*, *3*) контура, показанных на рис 21, то в результате получим систему трех уравнений. В этих уравнениях углы φ заданы, а все величины R_s можно выразить через длину стороны квадрата a или через ее приведенную длину $a' = \lambda a$ Приравнивая определитель этой системы нулю, получим

$$\begin{vmatrix} J_0(k_1 a') & J_4(k_1 a')\cos 4\varphi_1 & J_8(k_1 a')\cos 8\varphi_1 \\ J_0(k_2 a') & J_4(k_2 a')\cos 4\varphi_2 & J_8(k_2 a')\cos 8\varphi_2 \\ J_0(k_3 a') & J_4(k_3 a')\cos 4\varphi_3 & J_8(k_3 a')\cos 8\varphi_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Как видно из рис. 21

$$2k_1 = \sqrt{1 + (1/6)^2}, \quad 2k_2 = \sqrt{1 + (1/2)^2}, \quad 2k_3 = \sqrt{1 + (5/6)^2},$$
$$\varphi_1 = \operatorname{arcsec}(2k_1), \quad \varphi_2 = \operatorname{arcsec}(2k_2), \quad \varphi_3 = \operatorname{arcsec}(2k_3).$$

Раскрывая определитель и вычисляя наименьший корень полученного трансцендентного уравнения, найдем приведенную длину a', откуда сразу получим $\lambda = a'/a$ и частоту собственных колебаний ω. Полученный результат, вычисленный с тремя значащими цифрами, с достаточной для практики точностью совпал с точным решением. Полученное решение приближенно удовлетворяет гранич-

ным условиям, и представляет интерес оценить неточность, которая вносится в результат.

Узловая линия, т. е. линия, на которой прогибы равны нулю, проходит через точки *1*, *2*, *3* и через точки, им симметричные, имея всего 24 точки, общие с точками контура (рис. 22). Для того чтобы выяснить, насколько узловая линия отклоняется от контура, проведем радиус-векторы через равноотстоящие точки контура *I*, *II*, *III*,

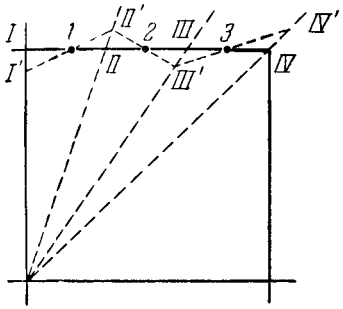

Рис. 22.

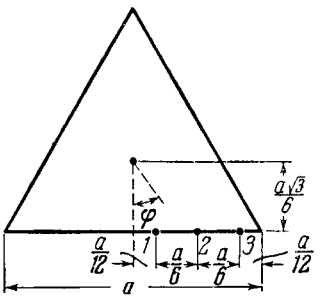

Рис 23

находящиеся на равном расстоянии от узлов интерполирования, и через точку *IV* — вершину квадрата; далее, определим положение точек пересечения этих прямых и узловой линии. Если бы решение было точным, то эти точки, обозначенные *I'*, *II'*, *III'*, *IV'*, лежали бы на контуре мембраны. Для того чтобы узловая линия не слилась с контуром, на рис. 22 потребовалось увеличить разность радиус-векторов λR и радиус-векторов соответствующих точек контура (на чертеже эта разность увеличена в двадцать пять раз). Аналогичные вычисления были проведены при сохранении двух членов ряда. В обоих случаях было получено хорошее совпадение как частот колебаний, так и координат узловой линии.

Аналогичные вычисления были проведены для мембраны в форме правильного треугольника. Здесь частота определялась из условия, что форма колебаний, соответствующая основному тону, имеет узловую линию, проходящую через равноудаленные друг от друга точки *1*, *2*, *3* контура (рис. 23).

Приближенно решение можно представить в виде суммы

$$w = A_0 J_0(\lambda R) + A_3 J_3(\lambda R)\cos 3\varphi + A_6 J_6(\lambda R)\cos 6\varphi. \quad (5.5)$$

Приведенная длина стороны треугольника a' определяется из уравнения

$$\begin{vmatrix} J_0(k_1^* a') & J_3(k_1^* a')\cos 3\varphi_1^* & J_6(k_1^* a')\cos 6\varphi_1^* \\ J_0(k_2^* a') & J_3(k_2^* a')\cos 3\varphi_2^* & J_6(k_2^* a')\cos 6\varphi_2^* \\ J_0(k_3^* a') & J_3(k_3^* a')\cos 3\varphi_3^* & J_6(k_3^* a')\cos 6\varphi_3^* \end{vmatrix} = 0.$$

Здесь, так же как и в предыдущем примере, коэффициенты k_n^* и углы φ_n^* определяются из геометрических соображений. Зная a', определяем частоту основного тона, которая почти совпадает со строгим решением (точное значение параметра $a' = 7{,}25$, приближенное $a' = 7{,}29$).

При сохранении только первых двух членов выражения (5.5) погрешность оказалась равной 0,2%.

Приближенное компенсирующее решение можно представить в виде линейной комбинации бесселевых функций нулевого порядка; для этого следует задать особенности типа сосредоточенной силы в различных точках, находящихся вне рассматриваемой области.

Рассмотрим вынужденные колебания мембраны. В этом случае частота колебаний задана. Интегральное уравнение, служащее для построения компенсирующего решения, будет иметь вид

$$\int_C q(\sigma) K(s, \sigma)\, d\sigma = -f_1(s), \quad (5.6)$$

где $f_1(s)$ — значение основного решения на контуре.

Так же как и в предыдущем случае, заменим интегральное уравнение (5.6) системой линейных уравнений, полагая, что особая линия является окружностью, а компенсирующая нагрузка раскладывается в ряд по косинусам, и определим коэффициенты суммы $\sum A_n J_n(\lambda R)\cos n\varphi$, которая дает приближенное решение задачи о вынужденных колебаниях квадратной и треугольной мембран, загруженных силами, интенсивностью $q_1 \sin \omega t$, приложенными по окружности, как это показано на рис. 24, 25.

Основное решение будет иметь вид

при $\lambda R \leqslant \alpha \quad w_0 = J_0(\lambda R)\, Y_0(\alpha)$,

при $\lambda R \geqslant \alpha \quad w_0 = J_0(\alpha)\, Y_0(\lambda R)$.

Сохраняя в компенсирующем решении три первых слагаемых, получаем для квадратной мембраны систему линейных алгебраических уравнений

$$A_0 J_0(\lambda R_m) + A_4 J_4(\lambda R_m)\cos 4\varphi_m + A_8 J_8(\lambda R_m)\cos 8\varphi_m + w_{0m} = 0$$

где $m = 1, 2, 3$ — индексы, показывающие номера точек контура, в которых удовлетворяются граничные условия, w_{0m} — значения основного решения в этих точках.

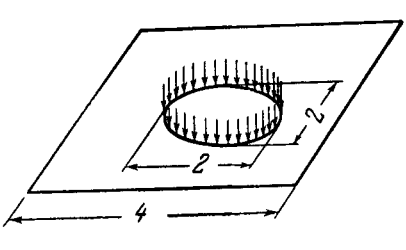

Рис 24

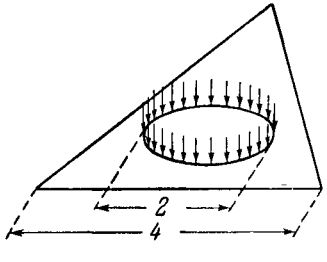

Рис 25

Результаты вычислений для квадратной мембраны приведены на рис. 26, где показан план в горизонталях и приведен график функции w на контуре.

Результаты вычислений для мембраны в форме равностороннего треугольника приведены на рис. 27.

Следует отметить, что с точки зрения вычислений эти задачи являются менее трудоемкими, чем рассмотренные выше задачи на собственные значения.

Во всех приведенных выше примерах решение находилось, по существу, способом точечного интерполирования.

Нетрудно наметить другие приемы приближенного численного решения интегрального уравнения. К одному из таких способов мы сейчас перейдем. Будем искать решение задачи о колебаниях мембраны по методу Треффтца. Этот метод можно рассматривать как один из вариантов аппроксимации интеграла в уравнении (5.3).

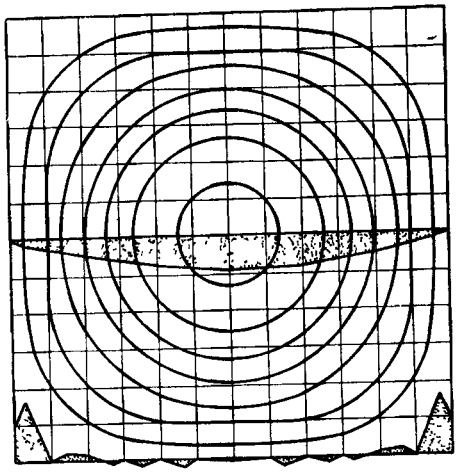

Рис. 26.

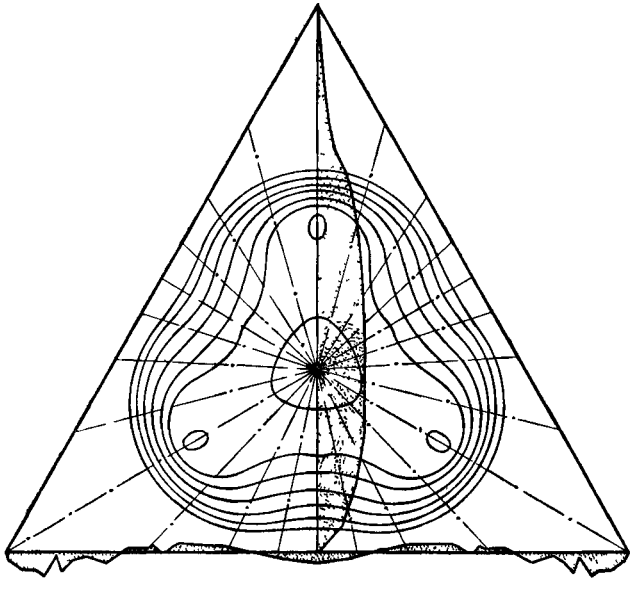

Рис. 27.

Будем по-прежнему приближенно представлять компенсирующее решение в виде суммы

$$w_k^* = \sum_{i=1}^{m} b_i \psi_i(x, y), \tag{5.7}$$

где $\psi_i(x, y)$ удовлетворяют уравнению (5.2); пусть искомое решение будет w_k; обозначим разность $w_k - w_k^* = w_{ka}$.

Найдем коэффициенты b_i так, чтобы обратить в минимум функционал

$$F = \iint_D \left[\left(\frac{\partial w_{ka}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w_{ka}}{\partial y}\right)^2 - \lambda^2 w_{ka}^2\right] dx\, dy,$$

где D — область, занятая мембраной.

В связи с тем, что w_{ka} представлено с помощью формулы (5.7), вариационная задача сводится к обычной задаче минимума, решение которой приводит к системе линейных уравнений

$$\partial F/\partial b_i = 0, \qquad i = 1, \ldots, m. \tag{5.8}$$

Перейдем от интеграла по области D, занятой мембраной, к интегралу по контуру C.

Применяя теорему Гаусса, получим при этом, что система (5.8) эквивалентна системе

$$\int_C (w_k - w_k^*) \frac{\partial \psi_i}{\partial n}\, ds = 0, \tag{5.9}$$

где n — внешняя нормаль к контуру. Внося в уравнение (5.9) значения w_k^* из выражения (5.7), получим

$$\int_C w(s) \frac{\partial \psi_i}{\partial n}\, ds - \sum_{j=1}^{m} b_j \int_C \psi_j \frac{\partial \psi_i}{\partial n}\, ds = 0,$$

где индекс $i = 1, \ldots, m$.

Отметим одну очень важную для практических целей особенность рассмотренного приема, которую Треффтц показал для задач, описываемых уравнением Лапласа, а Фридрихс [65] — для более широкого класса задач:

этот прием дает значение рассматриваемого функционала с недостатком.

В соответствии с приведенной выше схемой вычислений рассмотрим опять задачу о собственных колебаниях квадратной мембраны.

Определим частоту, приравнивая нулю определитель системы (5 8) при $w(s) = 0$.

Если положить

$$w_k^* = b_1 J_0(\lambda R) + b_2 J_4(\lambda R)\cos 4\varphi + b_3 J_8(\lambda R)\cos 8\varphi, \quad (5.10)$$

то уравнение частот примет вид

$$\begin{vmatrix} \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n}\,dx & \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_1 \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\,dx & \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_1 \frac{\partial \psi_3}{\partial n}\,dx \\ \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_2 \frac{\partial \psi_1}{\partial n}\,dx & \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\,dx & \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_2 \frac{\partial \psi_3}{\partial n}\,dx \\ \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_3 \frac{\partial \psi_1}{\partial n}\,dx & \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_3 \frac{\partial \psi_2}{\partial n}\,dx & \int\limits_{x=0}^{x=a/2} \psi_3 \frac{\partial \psi_3}{\partial n}\,dx \end{vmatrix} = 0. \quad (5.11)$$

В этом уравнении введены обозначения

$$\psi_1 = J_0(\lambda R),$$
$$\psi_2 = J_4(\lambda R)\cos 4\varphi,$$
$$\psi_3 = J_8(\lambda R)\cos 8\varphi.$$

Интегралы, входящие в уравнение (5.11), вычислены приближенно; при подсчете было получено значение $\lambda a = 4{,}42$.

При проведении дальнейших вычислений мы ограничились лишь первым слагаемым (5.10); уравнение (5.11) при этом приняло вид

$$\int\limits_{x=0}^{x=a/2} J_0(\lambda R)\, J_1(\lambda R)\cos(n,\ R)\,dx = 0, \quad (5.12)$$

где $R = \sqrt{x^2 + a^2/4}$.

Сведем в таблицу значения интеграла, стоящего в левой части уравнения (5.12), при различных значениях $a' = \lambda a$.

λa	4,1	4,2	4,3	4,4
$\int_0^{a/2} \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} dx$	−0,053	−0,027	−0,0042	0,0175

Как видно из таблицы, корень трансцендентного уравнения (5.12) меньше корня, полученного из точного решения, равного, как только что было отмечено, 4,42, и дает достаточно хорошее приближение.

Приведем таблицу вычислений, проведенных для мембраны в форме правильного треугольника:

λa	7,1	7,2	7,3	7,4
$\int_0^{a/2} \psi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial n} dx$	−0,0177	−0,0038	0,006	0,0159

Дифференциальное уравнение задачи о равновесии мембраны, лежащей на упругом основании, имеет вид $\nabla^2 w - \lambda^2 w = 0$, где $\lambda = \sqrt{k_0/T}$, k_0 — коэффициент постели упругого основания, T — натяжение мембраны.

Положим, что мембрана имеет несмещаемый контур. Основной функцией влияния в этом случае будет, с точностью до постоянного множителя, функция Макдональда нулевого порядка, представляющая решение задачи о неограниченной мембране, лежащей на упругом основании и загруженной сосредоточенной силой [20].

2. Рассмотрим задачу о пластинке, на которую действуют равномерно распределенные по контуру силы, лежащие в плоскости пластинки и направленные по нормали к контуру; на пластинку, кроме этих сил, могут действовать любые нагрузки, направленные перпендикулярно к срединной плоскости.

Дифференциальное уравнение упругой поверхности пластинки в этом случае, как известно, имеет вид

$$D\nabla^2\nabla^2 w + p\nabla w = q, \tag{5.13}$$

где p — интенсивность сил, приложенных к контуру и лежащих в его плоскости, q — нагрузка, перпендикулярная к срединной плоскости, w — прогиб, D — цилиндрическая жесткость пластинки.

Предварительно получим решение уравнения (5.13), имеющее особенность типа сосредоточенной силы для неограниченной области. Если эту силу положить равной единице, то такое решение дает основную функцию влияния; оно имеет вид

$$K_1^*(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{4D\lambda^2}\left[Y_0(r) - \frac{2}{\pi}\ln\frac{2}{\gamma r}\right], \tag{5.14}$$

где $r = \lambda\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$, $\lambda = \sqrt{p/D}$.

Это решение легко получить, проводя выкладки, аналогичные тем, которые приведены в § 1, ч. II при рассмотрении задачи о колебаниях пластинки.

Решение, имеющее единичную особенность типа сосредоточенного момента, имеет следующий вид:

$$K_2^*(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2D\lambda}\left[\frac{Y_1(r)}{2} + \frac{1}{\pi r}\right]\cos\varphi_1,$$

где φ_1 — угол между направлением отрезка r и плоскостью действия момента.

Как уже отмечалось выше, основное решение можно получить, интегрируя основную функцию влияния. Этот путь особенно удобен при нагрузках, распределенных по круговой области. В этом случае основное решение можно, пользуясь формулами сложения, представить в виде хорошо сходящихся рядов или в отдельных случаях получить его в замкнутом виде. Мы не будем здесь заниматься этим вопросом; перейдем сразу к построению компенсирующего решения.

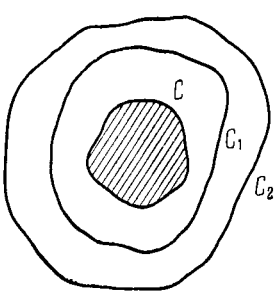

Рис. 28.

Напишем в общем виде уравнения метода компенсирующих нагрузок для пластинки с защемленным краем.

Положим, что полученные из основного решения прогиб и угол поворота нормали к контуру C представлены соответственно в виде $f_1(s)$ и $f_2(s)$. Компенсирующее решение представим, задав по двум несовпадающим особым линиям C_1 и C_2 (рис. 28) компенсирующие нагрузки q_1 и q_2; интенсивность этих нагрузок найдем, исходя из того, что сумма компенсирующего и основного решений должна удовлетворять условиям на контуре, а именно — прогиб и угол поворота нормали к контуру равны нулю

$$\int_{C_1} q_1(\sigma_1) K_1^*(s, \sigma_1)\, d\sigma_1 + \int_{C_2} q_2(\sigma_2) K_1^*(s, \sigma_2)\, d\sigma_2 = -f_1(s), \quad (5.15)$$

$$\int_{C_1} q_1(\sigma_1) \frac{dK_1^*(s, \sigma_1)}{dn_s}\, d\sigma_1 + \int_{C_2} q_2(\sigma_2) \frac{dK_1^*(s, \sigma_2)}{dn_s}\, d\sigma_2 = -f_2(s). \quad (5.16)$$

Здесь $K_1^*(s, \sigma)$ получим из решения (5.14), внеся в эту формулу вместо x, y координаты точки контура и взамен ξ, η — координаты точки соответствующей особой линии.

Для пластинки со свободным краем уравнения метода компенсирующих нагрузок примут следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} \int_{C_1} q_1(\sigma_1) L_1^{(M)}(s, \sigma_1)\, d\sigma_1 + \int_{C_2} q_2(\sigma_2) L_2^{(M)}(s, \sigma_2)\, d\sigma_2 &= -f_3(s), \\ \int_{C_1} q_1(\sigma_1) L_1^{(Q)}(s, \sigma_1)\, d\sigma_1 + \int_{C_2} q_2(\sigma_2) L_2^{(Q)}(s, \sigma_2)\, d\sigma_2 &= -f_4(s), \end{aligned}\right\} \quad (5.17)$$

где $f_3(s)$ и $f_4(s)$ — значения изгибающих моментов и приведенных поперечных сил на контуре пластинки, взятые из основного решения; $L^{(M)}$ и $L^{(Q)}$ вычисляются соответственно как изгибающие моменты и приведенные поперечные силы на контуре, вызванные единичной силой, приложенной к точке особой линии. Для определения $L^{(M)}$ над функцией K_1^* нужно провести операцию вычисления момента

$$L^{(M)} = -D\left[\frac{\partial^2 K_1^*}{\partial n_{s_1}^2} + \frac{1}{m}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial K_1^*}{\partial n_{s_1}} + \frac{\partial^2 K_1^*}{\partial s_1^2}\right)\right],$$

где ρ — радиус кривизны контура, $1/m$ — пуассоново отношение. Для прямолинейных участков контура следует совместить сторону пластинки с одной из осей декартовых координат; при этом, полагая, что n_{s_1} направлена по оси x, получим хорошо известную формулу

$$L^{(M)} = -D\left[\frac{\partial^2 K_1^*}{\partial x^2} + \frac{1}{m}\frac{\partial^2 K_1^*}{\partial y^2}\right].$$

Для подсчета $L^{(Q)}$ над функцией K_1^* нужно провести операцию

$$-D\left\{\frac{\partial}{\partial n_{s_1}}\nabla^2 + \left(1-\frac{1}{m}\right)\frac{\partial}{\partial s_1}\left(\frac{\partial^2}{\partial n_{s_1}\partial s_1}\right)\right\},$$

где n_{s1}, s_1 — фиксированные оси, совпадающие с нормалью и касательной в рассматриваемой точке контура.

Если пластинка шарнирно оперта по контуру, то решение дается системой уравнений (5.15) и первого из уравнений (5.17).

Уже упоминалось о возможности различных вариантов составления уравнений метода компенсирующих нагрузок. Так, например, можно задаться силами по одной особой линии, а моментами по другой особой линии; в этом случае можно и совместить обе особые линии, задав по одной линии силы и моменты. Наконец, можно задаться типом одной нагрузки и искать ее интенсивность и уравнение соответствующей особой линии. В этом случае, однако, вычисления становятся более сложными, и поэтому в примерах мы всегда задавались уравнением особой линии.

Перейдем к приближенным решениям задач с помощью метода компенсирующих нагрузок.

Рассмотрим задачу об устойчивости квадратной пластинки, зажатой по контуру. Определим величину критического давления p из системы уравнений типа (5.15) и (5.16) при $f_1 = 0$, $f_2 = 0$.

Рассмотрим решение, имеющее особенности по окружности, центр которой лежит в точке пересечения диагоналей квадрата, а радиус не меньше половины длины диагонали; разложим интенсивность этих особенностей в тригонометрический ряд; ограничимся при этом первыми двумя членами, использовав симметрию. В резуль-

тате прогиб в произвольной точке F пластинки будет представлен приближенным выражением

$$w = A_0 J_0(\lambda R) + A_4 J_4(\lambda R)\cos 4\varphi + B_0 + B_4 (\lambda R)^4 \cos 4\varphi. \quad (5.18)$$

Обозначения ясны из рис. 29.

Рассмотрим первый числовой пример.

Потребуем, чтобы в точках контура *1*, *2* (и симметричных им) прогиб и его производная по радиусу равнялись

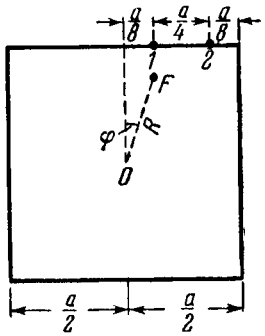

Рис 29.

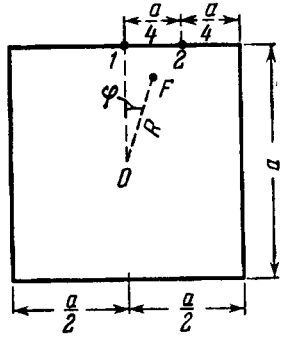

Рис. 30

нулю. Это приводит к следующему трансцендентному уравнению:

$$\begin{vmatrix} J_0(k_1a') & J_4(k_1a')\cos 4\varphi_1 & 1 & (k_1a')^4\cos 4\varphi_1 \\ J_0(k_2a') & J_4(k_2a')\cos 4\varphi_2 & 1 & (k_2a')^4\cos 4\varphi_2 \\ -J_1(k_1a') & J_4'(k_1a')\cos 4\varphi_1 & 0 & 4(k_1a')^3\cos 4\varphi_1 \\ -J_1(k_2a') & J_4'(k_2a')\cos 4\varphi_2 & 0 & 4(k_2a')^3\cos 4\varphi_2 \end{vmatrix} = 0, \quad (5.19)$$

где k_1, k_2, φ_1, φ_2 определяются из элементарных геометрических соображений.

Отсюда находим $a'/2 = \lambda a/2 = 3{,}58$.

Перейдем ко второму примеру, изменив точки интерполирования и взяв их по рис. 30; в результате вычислений получим $\lambda a/2 = 3{,}62$.

В третьем примере та же задача будет решена следующим способом: по-прежнему задавая w в виде (5.18),

находим критическое давление из трансцендентного уравнения,

$$\begin{vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \alpha'/4 & \delta_{14} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \alpha'/4 & \delta_{24} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & 0 & \delta_{34} \\ \delta_{41} & \delta_{42} & 0 & \delta_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

$$\delta_{11} = \int_{AB} J_0(\lambda R)\, dx, \qquad \delta_{12} = \int_{AB} J_4(\lambda R)\cos 4\varphi\, dx,$$

$$\delta_{14} = \int_{AB} (\lambda R)^4 \cos 4\varphi\, dx, \qquad \delta_{21} = \int_{BC} J_0(\lambda R)\, dx,$$

$$\delta_{22} = \int_{BC} J_4(\lambda R)\cos 4\varphi\, dx, \qquad \delta_{24} = \int_{BC} (\lambda R)^4 \cos 4\varphi\, dx,$$

$$\delta_{31} = \int_{AB} \frac{\partial}{\partial n} J_0(\lambda R)\, dx, \qquad \delta_{32} = \int_{AB} \frac{\partial}{\partial n}[J_4(\lambda R)\cos 4\varphi]\, dx,$$

$$\delta_{34} = \int_{AB} \frac{\partial}{\partial n}[\lambda^4 R^4 \cos 4\varphi]\, dx, \qquad \delta_{41} = \int_{BC} \frac{\partial}{\partial n} J_0(\lambda R)\, dx,$$

$$\delta_{42} = \int_{BC} \frac{\partial}{\partial n}[J_4(\lambda R)\cos 4\varphi]\, dx, \qquad \delta_{44} = \int_{BC} \frac{\partial}{\partial n}[\lambda^4 R^4 \cos 4\varphi]\, dx,$$

которое получается из условия, что интегралы от прогиба и его нормальной производной, взятые по участкам AB и BC контура, должны равняться нулю (рис. 31). Вычисления дали значение $a'/2 = \lambda a/2 = 3{,}62$, близкое к полученным ранее.

Таким образом, в результате вычислений, проведенных различными способами, получены весьма близкие друг другу значения критического давления.

Численное решение этой задачи было получено ранее другими авторами различными методами, отличающимися от методов, примененных в этом параграфе.

Введем величину $\mu = p_{кр}a^2/(\pi^2 D)$, где a — длина стороны квадрата; заметим, что число a', найденное нами, связано с критической силой соотношением $P_{кр} = a'^2 D/a^2$.

Приведем сводную таблицу значений, полученных разными авторами [1]).

Тэйлор	Сезава	Факсен	Треффтц	Игуши	Автор		
					пример 1	пример 2	пример 3
между 5,30 и 5,33	5,61	5,304	между 5,30 и 5,32	5,3086	5,18	5,31	5,31

Как видно из этой таблицы, результаты, полученные всеми авторами, весьма близки (исключение представляет неточный результат Сезава).

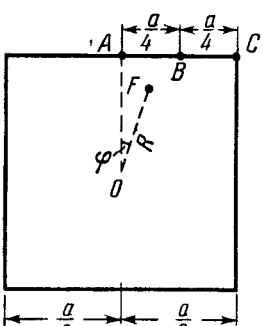

Рис. 31.

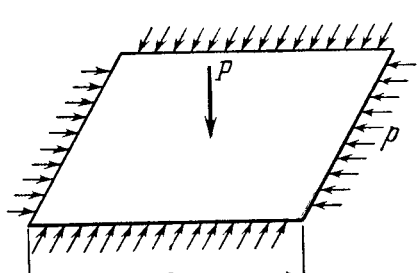

Рис. 32.

В заключение приведем приближенное решение задачи о расчете сжатой равномерным давлением p пластинки, зажатой по контуру и загруженной, кроме того, сосредоточенной силой P в центре (рис. 32). Пусть $P/(4D\lambda^2) = 1$, $\lambda a = 6$. Тогда, удовлетворяя граничным условиям примера 1, т. е. обращая в нуль прогибы и производные их в радиальном направлении в точках *1*, *2* (рис. 29), получим систему четырех уравнений относительно A_0, A_4, B_0, B_4, причем коэффициентами при не-

[1]) Эта таблица и литературные источники приведены в [20].

известных в этих уравнениях являются соответствующие элементы строк определителя в левой части (5.19), а их правые части получаются с помощью формулы

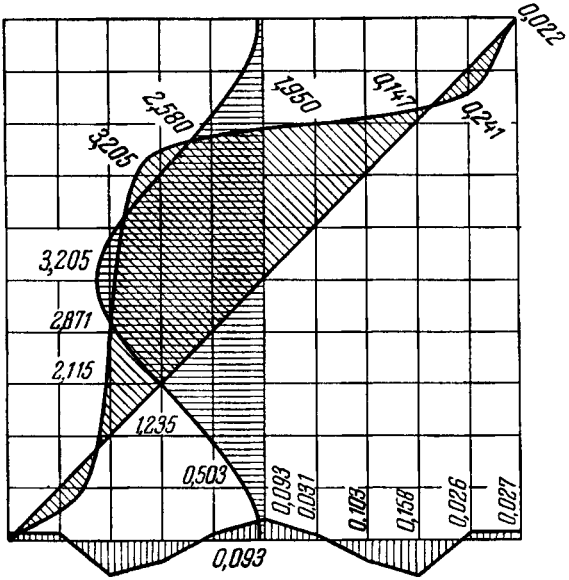

Рис 33

(5.14). В результате решения системы уравнений получим значения прогибов, которые показаны на рис. 33.

§ 6. Задачи о равновесии неограниченной пластинки, лежащей на однородном упругом основании, модель которого обладает круговой симметрией

Рассмотрим пластинку, лежащую на сплошном основании; положим, что верхняя граница основания представляет горизонтальную плоскость; если на эту плоскость действует вертикальная единичная сила, то в результате деформирования верхней границы основания будет образована некоторая поверхность, аппликату которой можно назвать *ядром модели упругого основания.* Положим, что уравнение этой поверхности, запи-

санное в системе координат, имеющей начало в точке приложения силы, остается одинаковым при изменении положения силы. Такое основание будем называть однородным.

Для того чтобы перейти к изучению изгиба балок и плит, лежащих на линейно деформируемом однородном основании, рассмотрим сначала важную вспомогательную задачу о зависимости между вертикальными силами, действующими на основание, и прогибами основания.

Здесь рассматриваются ядра, которые можно представить графически в виде поверхности вращения, т. е. ядра вида

$$K(x-\xi,\ y-\eta)=K\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right).$$

Они наиболее важны для приложений.

Многие важные свойства упругих однородных оснований с круговой симметрией относятся и к ядрам несколько более общего типа

$$K(x-\xi,\ y-\eta)=K\left(\sqrt{(x-\xi)^2+\mu^2(y-\eta)^2}\right),$$

где μ — некоторая постоянная. Соответствующие модели основания могут иметь значение при анизотропии в плоскости oxy, а также при решении некоторых динамических задач.

С помощью ядра упругого основания можно легко выписать интегро-дифференциальную систему уравнений рассмотренной задачи, допускающую в случае неограниченной области простое решение, основанное на использовании преобразования Фурье. Мы, однако, приведем это решение в несколько другой, более наглядной с механической точки зрения форме, в основу которой положим задачу о нагружении основания давлениями, изменяющимися по закону $q=a\sin\alpha x\sin\beta y$. Покажем, что для любого однородного упругого основания при такой нагрузке осадка дается выражением

$$w=bc\sin\alpha x\sin\beta y, \tag{6.1}$$

где $c(\alpha, \beta)$ — функция, вид которой зависит от того, какова модель основания.

Обозначим $\alpha x=x_1$, $\beta y=y_1$, $\alpha\xi=\xi_1$, $\beta\eta=\eta_1$; при замене переменных x, y, ξ, η на x_1, y_1, ξ_1 и η_1 ядро $K(x-\xi,\ y-\eta)$ примет вид $K_1(x_1-\xi_1,\ y_1-\eta_1)$.

Применяя принцип сложения воздействий, получим

$$w = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} b \sin(\alpha x)\sin(\beta y) K(x-\xi,\ y-\eta)\,dx\,dy =$$

$$= \frac{b}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin x_1 \sin y_1 K_1(x_1-\xi_1,\ y_1-\eta_1)\,dx_1\,dy_1; \qquad (6.2)$$

введем теперь переменные $x_1-\xi_1=z_1$, $y_1-\eta_1=\zeta_1$ и перепишем выражение (6.2) в следующем виде:

$$w = \frac{b}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \sin(\xi_1+z_1)\sin(\eta_1+\zeta_1) K(z_1/\alpha,\ \zeta_1/\beta)\,dz_1\,d\zeta_1 =$$

$$= \frac{b}{\alpha\beta}\sin\xi_1\sin\eta_1\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos z_1\cos\zeta_1 K(z_1/\alpha,\ \zeta_1/\beta)\,dz_1\,d\zeta_1$$

и, следовательно, $w = bc\sin\xi_1\sin\eta_1$, где

$$c = \frac{1}{\alpha\beta}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos z_1\cos\zeta_1 K(z_1/\alpha,\ \zeta_1/\beta)\,dz_1\,d\zeta_1, \qquad (6.3)$$

что и требовалось доказать.

Для решения задачи о перемещениях основания при рассматривавшейся здесь периодической нагрузке нужно определить c при помощи формулы (6.3). Перейдем к этим вычислениям для различных типов оснований.

Начнем рассмотрение с наиболее распространенной модели, а именно, рассмотрим упругое однородное изотропное полупространство. В этом случае, как известно из теории упругости,

$$K(x-\xi,\ y-\eta) = \frac{1-\sigma^2}{\pi E}\,\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \qquad (6.4)$$

где E — модуль упругости, σ — Пуассоново отношение.

Обозначим

$$E/(2(1-\sigma^2)) = k;$$

вычисляя c по формуле (6.3), можно получить [19]

$$c = 1/(k\sqrt{\alpha^2+\beta^2})$$

и, следовательно,

$$w = \frac{b}{k\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \sin \alpha x \sin \beta y.$$

Этот результат хорошо известен в теории изгиба плит, лежащих на упругом полупространстве (Войновский-Кригер [85]).

Для различных приложений удобно преобразовать формулу (6.4), перейдя от декартовых координат к полярным. Проделаем это сначала для частного случая ядра с осевой симметрией.

Приведем формулу, являющуюся следствием интеграла Бесселя:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \cos(\alpha x)\cos(\beta y)\, K\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) dx\, dy = 2\pi \int_0^{\infty} rK(r)\, J_0(\gamma r)\, dr, \quad (6.5)$$

где $\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2$; $r^2 = x^2 + y^2$. Таким образом, формулу (6.3) можно записать в следующем виде:

$$c = 2\pi \int_0^{\infty} rK(r)\, J_0(\gamma r)\, dr; \quad (6.6)$$

т. е. в виде преобразования Ганкеля.

В тех случаях, когда ядро, не обладая осевой симметрией, может быть представлено в виде

$$K = K\left(\sqrt{(x-\xi)^2 + \mu^2(y-\eta)^2}\right),$$

получим

$$c(\gamma) = \frac{2\pi}{\alpha} \int_0^{\infty} r_1 K(r_1)\, J_0(\gamma_1 r_1)\, dr_1,$$

где

$$r_1 = \sqrt{x^2+\mu^2 y^2}, \quad \gamma_1 = \sqrt{\alpha^2+\mu^2\beta^2}.$$

При помощи (6.6) можно найти функцию $c(\gamma)$ для тех задач, в которых известно ядро K.

Приведем в виде таблицы несколько типов ядер K, для которых, используя хорошо известные несобственные

интегралы, можно получить достаточно простые выражения функции $c(\gamma)$.

$K(r)$	$c(\gamma)$
$\frac{B}{\sqrt{r^2+\delta^2}}$	$\frac{2\pi B}{\gamma}\exp(-\delta\gamma)$
$\frac{B}{2\delta^2}\exp\left(-\frac{r^2}{4\delta^2}\right)$	$2\pi B\exp(-\delta^2\gamma^2)$
$BK_0(\delta r)$	$\frac{2\pi B}{\gamma^2+\delta^2}$
$\frac{B}{2\pi r}\exp(-\delta r)$	$\frac{B}{\sqrt{\gamma^2+\delta^2}}$
$\frac{B}{2\pi(r^2+\delta^2)}$	$BK_0(\gamma\delta)$

Таким образом, здесь получено несколько ядер, которыми, в частности, можно аппроксимировать экспериментально полученные поверхности осадок. В этой таблице B, δ — параметры, которыми можно распоряжаться, K_0 — функция Макдональда.

Если ядро K имеет вид $BK_0(\delta r)$, то оно соответствует основанию с двумя упругими характеристиками.

Для полупространства, модуль упругости которого меняется с глубиной по степенному закону, Г. К Клейн [17] получил ядро

$$K(x-\xi,\ y-\eta) = 1/(\pi D_n r^{n+1}),$$

где D_n — некоторая константа; n — число, характеризующее закон изменения модуля упругости по глубине,

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}.$$

В этом случае, как следует из теории несобственных интегралов с бесселевыми функциями (см. стр. 99), имеем при $0{,}5 < n < 1$

$$c(\alpha,\ \beta) = \frac{2^{1-n}}{D_n}\sqrt{(\alpha^2+\beta^2)^{n-1}}\ \frac{\Gamma((1-n)/2)}{\Gamma((1+n)/2)},$$

где Γ — гамма-функция.

Перейдем непосредственно к задаче о расчете неограниченной пластинки.

Рассмотрим сначала вспомогательную задачу об изгибе неограниченной пластинки, на которую действует нагрузка

$$q = a\cos\alpha x\cos\beta y.$$

Дифференциальное уравнение упругой поверхности пластинки имеет вид $D\nabla^2\nabla^2 w = q - p$, где $\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$; положим, что реактивное давление

$$p = b\cos\alpha x\cos\beta y, \tag{6.7}$$

и представим прогиб пластинки в виде

$$w = bc^*\cos\alpha x\cos\beta y, \quad c^* = c + 1/k_0. \tag{6.8}$$

Внося (6.7) и (6.8) в дифференциальное уравнение упругой поверхности пластинки, получим уравнение

$$bc^*D(\alpha^2+\beta^2)^2 = a - b,$$

откуда $b = a/[1 + c^*D(\alpha^2+\beta^2)^2]$.

Если теперь рассмотреть задачу о пластинке, на которую действует нагрузка

$$q = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} a_{mn}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y,$$

то, используя приведенные выше формулы, получим

$$p = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{mn}}{1 + c^*_{mn}D(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y,$$

$$w = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_{mn}c^*_{mn}}{1 + c^*_{mn}D(\alpha_m^2+\beta_n^2)^2}\cos\alpha_m x\cos\beta_n y.$$

Если перейти к задаче о пластинке, равномерно загруженной по прямоугольникам со сторонами $2a$ и $2b$, расположенным так, что их оси симметрии образуют прямоугольную сетку, и считать, что расстояние между прямоугольниками стремится к бесконечности, а затем поло-

жить, что при $a \to 0$ и $b \to 0$ имеем $4qab = P$, то, выполнив предельный переход [1]), получим искомое решение в следующем виде:

$$w = \frac{P}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{c^* \cos \alpha x \cos \beta y \, d\alpha \, d\beta}{1 + p_0 c^* (\alpha^2 + \beta^2) + c^* D (\alpha^2 + \beta^2)^2}.$$

Эту формулу можно легко преобразовать, вводя обозначения

$$\alpha^2 + \beta^2 = \gamma^2, \quad x^2 + y^2 = r^2, \quad \alpha/\beta = \operatorname{tg} \varphi;$$

тогда

$$\alpha = \gamma \sin \varphi, \quad \beta = \gamma \cos \varphi, \quad d\alpha \, d\beta = \gamma \, d\gamma \, d\varphi.$$

Применив опять формулу

$$J_0\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos (x \cos \varphi) \cos (y \sin \varphi) \, d\varphi,$$

получим

$$w = \frac{P}{2\pi} \int_0^\infty \frac{c^* \gamma J_0 (\gamma r) \, d\gamma}{1 + p_0 c^* \gamma^2 + c^* D \gamma^4}.$$

Рассмотрим некоторые частные случаи, положив при этом, что $p_0 = 0$ (p_0 — растягивающее усилие в средней плоскости).

1. Основание — упругое полупространство.

В этом случае $c^* = c = 1/k\gamma$, где $k = E/(2(1 - \sigma^2))$. Введем обозначения $l = \sqrt[3]{D/k}$, $\lambda = \gamma \sqrt[3]{D/k}$, $r/l = \xi$. Реактивные давления и прогибы даются выражениями

$$p(\xi) = \frac{P}{2\pi l^2} \int_0^\infty \frac{\lambda J_0 (\lambda \xi) \, d\lambda}{1 + \lambda^3}, \tag{6.9}$$

$$w(\xi) = \frac{P l^2}{2\pi D} \int_0^\infty \frac{J_0 (\lambda \xi) \, d\lambda}{1 + \lambda^3}, \tag{6.10}$$

где l имеет размерность длины.

[1]) Взамен этого можно воспользоваться интегральным представлением дельта функции.

Формулы (6.9), (6.10) другим путем были получены в 1932 г. С. Войновским-Кригером, рассматривавшим, однако, только задачу об упругом полупространстве; эта задача, а также ряд важных и более сложных задач о плите на упругом слое и т. д. были решены О. Я. Шехтер [59], которая составила также необходимые для расчета таблицы.

2. Винклеровское основание (модель коэффициента постели). Для этого случая мы имеем $c^* = 1/k_0$. Введем обозначения $l_1 = \sqrt[4]{D/k_0}$, $\lambda_1 = \gamma l_1$, $r/l_1 = \xi$; тогда

$$w(\xi) = \frac{P}{2\pi k_0 l_1^2} \int_0^\infty \frac{\lambda_1 J_0(\lambda_1 \xi)\, d\lambda_1}{1+\lambda_1^4}.$$

Нетрудно проверить, что это решение совпадает с решением, приведенным в § 2 ч. II, если $p_0 = 0$, т. е.

$$w(\xi) = \frac{Pl^2}{4D} f_0(\xi),$$

для этого нужно обратиться к § 21 (стр. 102), в котором рассматриваются несобственные интегралы.

С помощью теоремы сложения (стр. 39) нетрудно показать, что если решение задачи о неограниченной плите, загруженной сосредоточенной силой, имеет вид

$$w(\xi) = A \int_0^\infty \frac{J_0(\lambda\xi)\, d\lambda}{F(\lambda)},$$

то для нагрузки, распределенной по окружности (приведенного радиуса ρ) по закону $q\cos n\theta$, имеем

$$w = 2\pi q l A \rho \cos n\theta \int_0^\infty \frac{J_n(\lambda\rho)\, J_n(\lambda\xi)\, d\lambda}{F(\lambda)}. \qquad (6.11)$$

Перейдем к решению задачи об изгибе пластинки, загруженной распределенной нагрузкой q, изменяющейся по закону $q = B\rho^n \cos n\theta_1$ и действующей по площади кругового кольца, радиусы которого равны ρ_2 и

ρ_1, причем $\rho_2 > \rho_1$. Используя принцип сложения воздействий, проинтегрируем (6.11)

$$w = 2ABl^2\pi \cos n\theta \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{n+1}\, d\rho \int_0^{\infty} \frac{J_n(\lambda\rho)\, J_n(\lambda\xi)\, d\lambda}{F(\lambda)};$$

меняя порядок интегрирования, перепишем полученный интеграл в следующем виде:

$$w = 2ABl^2\pi \cos n\theta \int_0^{\infty} \frac{J_n(\lambda\xi)\, d\lambda}{F(\lambda)} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \rho^{n+1} J_n(\lambda\rho)\, d\rho.$$

При помощи (15.1) получим

$$w = 2ABl^2\pi \cos n\theta \int_0^{\infty} \frac{J_n(\lambda\xi)\left[\rho_2^{n+1} J_{n+1}(\lambda\rho_2) - \rho_1^{n+1} J_{n+1}(\lambda\rho_1)\right] d\lambda}{\lambda F(\lambda)}.$$

При $n = 0$ имеем решение для случая нагрузки, равномерно распределенной по площади кругового кольца:

$$w = 2ABl^2\pi \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda\xi)\left[\rho_2 J_1(\lambda\rho_2) - \rho_1 J_1(\lambda\rho_1)\right] d\lambda}{\lambda F(\lambda)};$$

если $\rho_1 = 0$, то кольцо переходит в круг радиуса $\rho_2 = \rho$ и решение принимает форму

$$w = 2ABl^2\rho\pi \int_0^{\infty} \frac{J_0(\lambda\xi)\, J_1(\lambda\rho)\, d\lambda}{\lambda F(\lambda)}.$$

ГЛАВА II

ЗАДАЧИ ТЕОРИИ КОЛЕБАНИЙ, ГИДРОДИНАМИКИ И ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

§ 7. О колебаниях нити

В этом параграфе рассматривается задача Бернулли о свободных колебаниях висящей нити, а также задача о вынужденных колебаниях нити; рассматривается и случай, когда нить имеет переменную плотность.

Рассмотрим свободные колебания гибкой тяжелой однородной нити. Положим, что нижний конец нити свободный; ось x направим вверх по вертикальной прямой, проходящей через ось нити в состоянии равновесия; начало координат примем в конце нити. Обозначим погонную массу нити ρ, ускорение силы тяжести g, перемещение точки нити в направлении, перпендикулярном к оси x, через y; рассматриваются только малые колебания.

Рассмотрим элемент длины dx; поперечная сила в сечении $xQ_x = N dy/dx$, где N — нормальная сила. Из условия равновесия элемента длины ниги имеем, проектируя силы, приложенные к элементу, на ось y,

$$\frac{d}{dx}\left(N\frac{dy}{dx}\right) = -q,$$

где q — нагрузка на единицу длины, направленная параллельно оси y.

В случае, когда нить совершает свободные колебания,

$$q = -\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \quad \text{и} \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial y}{\partial x}\right) - \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0;$$

если положить $y(x, t) = w(x)\sin(\omega t + \varphi_0)$, то

$$\frac{d}{dx}\left(N\frac{dw}{dx}\right) + \rho\omega^2 w = 0.$$

Если плотность ρ постоянна, то нить растягивается силой $N = \rho g x$; в этом случае имеем

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dw}{dx}\right)+\frac{\omega^2}{g}w=0.$$

Полагая $x = gs^2/(4\omega^2)$, приведем полученное уравнение к уравнению Бесселя с индексом нуль и аргументом s

$$\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dw}{ds}+w=0,$$

откуда

$$w(s) = AJ_0(s)+BY_0(s) = AJ_0\left(2\omega\sqrt{x/g}\right)+BY_0\left(2\omega\sqrt{x/g}\right).$$

Постоянная B равна нулю, так как при $x = 0$ функция w не может обращаться в бесконечность; таким образом, получаем решение

$$y(x,\ t) = AJ_0\left(2\omega\sqrt{x/g}\right)\sin(\omega t+\varphi_0).$$

Из граничного условия в месте заделки при $x = l$ получаем $y(l, t) = 0$.

Следовательно, $J_0\left[2\omega\sqrt{l/g}\right] = 0$.

Обозначив корни бесселевой функции индекса нуль через $a_1, a_2, \ldots, a_k$, получим сразу частоты собственных колебаний $\omega_k = a_k\sqrt{g/l}/2$; коэффициенты A_k и начальные фазы φ_{0k} определяются из начальных условий.

Если начальная форма искривления нити и начальные скорости равны соответственно $f_1(x)$ и $f_2(x)$, то, разыскивая общее решение в виде

$$y(x,\ t) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(2\omega_k\sqrt{x/g}\right)\sin(\omega_k t+\varphi_{0k}),$$

получим при $t = 0$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k J_0\left(2\omega_k\sqrt{x/g}\right)\sin\varphi_{0k} = f_1(x),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k\omega_k J_0\left(2\omega_k\sqrt{x/g}\right)\cos\varphi_{0k} = f_2(x);$$

отсюда, воспользовавшись ортогональностью функций Бесселя, легко определить A_k и φ_{0k}.

Если заделка нити упруга, то граничное условие при $x = l$ имеет вид

$$N_{x=l}\frac{\partial y(l, t)}{\partial x} = cy(l, t),$$

где c — так называемый квазиупругий коэффициент заделки, и если $N_{x=l} = g\rho l$, то

$$-g\rho l J_1(2\omega_k\sqrt{l/g})\,\omega_k/\sqrt{lg} = cJ_0(2\omega_k\sqrt{l/g}).$$

В этом случае задача сводится к рядам Дини.

Следует заметить, что в последнее время в задачах динамики и сейсмостойкости зданий рассматриваются так называемые сдвиговые колебания зданий, при которых дифференциальное уравнение сходно с уравнением колебаний нити; зачастую полагают, что ρ зависит от x и обычно является степенной функцией.

Рассмотрим колебания нити, считая N переменной и обозначив ее N_x; положим, что плотность ρ является некоторой заданной функцией координаты x.

Тогда дифференциальное уравнение формы свободных колебаний принимает вид

$$\frac{d}{dx}\left(N_x\frac{dw}{dx}\right) + \rho(x)\,\omega^2 w = 0,$$

где нормальная сила, равная сумме внешних сил, приложенных к стержню на участке $(0, x)$, равна

$$N_x = g\int_0^x \rho(z)\,dz,$$

и, следовательно,

$$N_x\frac{d^2w}{dx^2} + g\rho(x)\frac{dw}{dx} + \omega^2\rho(x)\,w = 0.$$

Рассмотрим простейший закон изменения $\rho(x)$: $\rho(x) = \rho_0(\alpha x)^\mu$, тогда

$$N_x = g\int_0^x \rho_0(\alpha x)^\mu\,dx = \frac{g\rho_0}{\alpha}\,\frac{(\alpha x)^{\mu+1}}{\mu+1},$$

и, следовательно,

$$\frac{d^2w}{dx^2} + (\mu+1)\,\frac{1}{x}\,\frac{dw}{dx} + \omega^2\,\frac{\mu+1}{gx}\,w = 0. \qquad (7.1)$$

Последнее является частным случаем уравнения

$$x^2 d^2w/dx^2 + (2\alpha_1 - 2\beta\nu + 1)\, x\, dw/dx + \\ + [\beta^2\gamma^2 x^{2\beta} + (\alpha_1 - 2\beta\nu)\,\alpha_1]\, w = 0,$$

решение которого имеет вид (как это следует из § 13 (стр. 47) $w = x^{\beta\nu-\alpha} Z_\nu(\gamma x^\beta)$. Положив

$$2\alpha_1 - 2\beta\nu + 1 = \mu + 1, \quad \alpha_1 - 2\beta\nu = 0,$$
$$2\beta = 1, \quad \beta^2\gamma^2 = \omega^2(\mu + 1)/g,$$

получим решение рассматриваемой задачи в виде

$$w = C_1 J_\mu\left(2\omega\sqrt{(\mu+1)/g}\; x^{1/2}\right) x^{-\mu/2} + \\ + C_2 Y_\mu\left(2\omega\sqrt{(\mu+1)/g}\; x^{1/2}\right) x^{-\mu/2}.$$

Принимая по-прежнему начало координат в нижнем конце стержня, получим сразу $C_2 = 0$, а для определения частоты свободных колебаний будем иметь трансцендентное уравнение

$$J_\mu\left(2\omega\sqrt{(\mu+1)/g}\,\sqrt{l}\right) = 0.$$

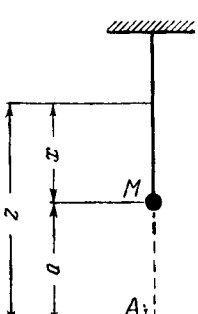

Рис 34.

Остановимся на вопросе о колебаниях нити постоянной плотности, имеющей на конце сосредоточенную массу M; предельные случаи приведут к задаче о математическом маятнике и к задаче о нити в классической постановке, которая рассматривалась в начале этого параграфа. Если по-прежнему принимать начало координат в конце нити, то $N_x = Mg + \rho g x$. Перенесем начало координат в точку A_1 (рис. 34), где $a = M/\rho$.

В этом случае

$$y(z) = AJ_0\left(2\omega\sqrt{z/g}\right) + BY_0\left(2\omega\sqrt{z/g}\right);$$

первое граничное условие задачи: при $z = a$ $Q = -M\omega^2 y$. Следовательно,

$$N\, dy/dz\,|_{z=a} = -M\omega^2 y\,|_{z=a}$$

или

$$Mg\, dy/dz + M\omega^2 y\,|_{z=a} = 0; \qquad (7.2)$$

второе граничное условие не изменяется по сравнению с ранее рассмотренными задачами, и если нить имеет жесткую опору, то второе граничное условие имеет вид

$$y|_{z=a+l}=0. \tag{7.3}$$

Оба граничные условия однородные; для существования нетривиального решения необходимо, чтобы удовлетворялось следующее трансцендентное уравнение:

$$J_0(2\omega\sqrt{(a+l)/g})[-Y_1(2\omega\sqrt{a/g})+\omega\sqrt{a/g}\,Y_0(2\omega\sqrt{a/g})]-$$
$$-Y_0(2\omega\sqrt{(a+l)/g})[-J_1(2\omega\sqrt{a/g})+\omega\sqrt{a/g}\,J_0(2\omega\sqrt{a/g})]=0,$$

вытекающее из (7.2) и (7.3).

Нельзя всегда считать, что нормальная сила вызвана только собственным весом нити; очевидно, что могут возникнуть задачи, в которых дополнительное сжатие или растяжение стержня вызвано иными причинами, например влиянием натяжения тросов (рис. 35). Таким образом, возникает необходимость рассмотреть влияние нормальной силы, которая не зависит от погонной массы. Простейший пример — стойка постоянного сечения, работающая на сдвиг, сжата тросами на конце; массой тросов при колебаниях пренебрегаем. В этом случае $N=-N_0-g\rho x$. Начало координат по аналогии с предыдущим примером нужно перенести в точку A, находящуюся на расстоянии $a=N_0/g\rho$ от конца стойки, и ввести координату $z=x+a$.

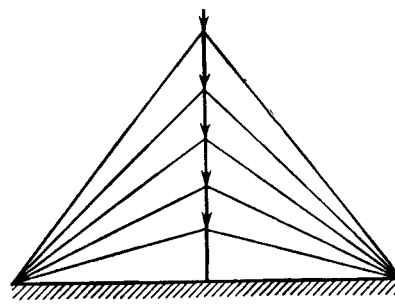

Рис. 35.

В заключение остановимся на задаче о вынужденных гармонических колебаниях нити, вызванных действием нагрузки $q=\varphi(x)\sin pt$. При этом положим, что частота возмущающей нагрузки p не совпадает ни с одной из частот свободных колебаний нити.

Тогда дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(N\frac{\partial y}{\partial x}\right)-\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=p(x,\ t)=\varphi(x)\sin pt.$$

Полагая $y(x, t)=w(x)\sin pt$, получим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dx}\left(N\frac{dw}{dx}\right)+\rho p^2 w=\varphi(x).$$

Остановимся сначала на рассмотрении вынужденных колебаний нити постоянной плотности, тогда, переходя к независимой переменной $s=2p\sqrt{x/g}$, получим следующее неоднородное уравнение:

$$\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dw}{ds}+w=\frac{g}{p^2}\varphi\left[\frac{g}{4p^2}s^2\right].$$

Если правая часть представляет степенную функцию $\varphi=A^*x^\mu$, то имеем

$$\frac{d^2w}{ds^2}+\frac{1}{s}\frac{dw}{ds}+w=\frac{g}{p^2}A^*\left(\frac{g}{4p^2}s^2\right)^\mu=2^{-2\mu}\left(\frac{g}{p^2}\right)^{1+\mu}A^*s^{2\mu}.$$

Частное решение задачи в этом случае выражается через функции Ломмеля $s_{\mu,\nu}$.

Общее решение уравнения имеет при ранее рассматривавшихся граничных условиях вид

$$w=AJ_0(s)+2^{-2\mu}(g/p^2)^{1+\mu}A^*s_{2\mu+1,0}(s).$$

Заметим, что здесь в переменную s входит заданная частота p_1 и из граничного условия при $x=l$ определяется постоянная A; таким образом, обозначив значение s при $x=l$ через β, получим

$$A=-(g/p^2)^{1+\mu}A^*s_{2\mu+1,0}(\beta)/(2^{2\mu}J_0(\beta)).$$

Заметим, что если ρ постоянно, а $N(x)$ изменяется по закону, отличающемуся от линейного, можно в качестве независимой переменной принять $N(x)\,dw/dx=Q_x$, тогда уравнение относительно функции Q_x примет вид

$$d^2Q_x/dx^2+\rho p^2N^{-1}(x)\,Q_x=0.$$

В заключение этого параграфа заметим, что большое число задач, описываемых дифференциальными

уравнениями второго порядка, которые в результате замены переменных приводятся к уравнению Бесселя, возникает в самых различных приложениях. Задачи устойчивости стержней переменного сечения, которые сводятся к уравнению Бесселя, рассматривал наиболее подробно А. Н. Динник [12].

§ 8. Действие импульса на цилиндрические и призматические резервуары, наполненные жидкостью

В этом параграфе рассматривается вопрос о колебаниях жидкости в вертикальном цилиндрическом или призматическом резервуаре. Предполагается, что жидкость идеальная, а причиной колебаний является действие горизонтального импульса; рассматривается вопрос о том, какие давления передаются при этом на стенки, днище и внутренние колонны резервуара.

Колебания жидкости в вертикальном круговом цилиндрическом резервуаре изучал Джекобсен [68], этот автор рассмотрел также задачу о колебаниях жидкости вблизи вертикальной круглой колонны. А. А. Охоцимский [42] решил задачу для цилиндрического резервуара с центрально расположенной круглой колонной. Автор в работе [23] дал общее решение аналогичной задачи для кругового цилиндра с внецентренно расположенной колонной.

Рассмотрим сначала круговой цилиндрический резервуар с одной внецентренно расположенной круглой колонной.

Предположим, что в начальный момент, т. е. при $t = 0$, жидкость находится в покое. Цилиндрический резервуар, вначале неподвижный, начинает в момент $t = 0$ двигаться поступательно в горизонтальном направлении, которое считаем совпадающим с направлением оси x, по закону $x = f(t)$.

Рассмотрим движение жидкости относительно движущегося резервуара, считая верхнюю поверхность жидкости свободной. Будем искать потенциал скоростей в виде

$$\Phi(r, z, \theta; t) = \Phi_1(r, z, \theta) f'(t).$$

Функция Φ_1 удовлетворяет уравнению $\nabla^2 \Phi_1 = 0$, где ∇^2 — оператор Лапласа в цилиндрических координатах.

Граничные условия на боковой поверхности цилиндра получим, исходя из того, что относительная скорость движения жидкости в точках, расположенных на боковой поверхности, направлена по касательной к этой поверхности; это является условием непроницаемости. Поэтому, имея в виду известное выражение скорости v через потенциал скоростей Φ, получим следующие граничные условия на боковых поверхностях:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right)_{r=b} = f'(t)\cos\theta, \tag{8.1}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial r_1}\right)_{r_1=a} = f'(t)\cos\beta, \tag{8.2}$$

где r, r_1 — соответственно расстояния от оси цилиндра и оси колонны до точки A; θ, β — полярные углы, имеющие вершины на оси цилиндра и оси колонны; b, a — радиусы цилиндра и колонны; e — расстояние от оси колонны до оси цилиндра (рис. 36).

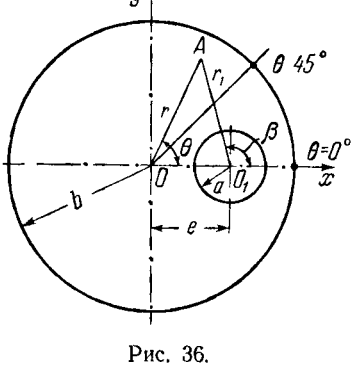

Рис. 36.

На нижней поверхности цилиндра вертикальная составляющая скорости должна равняться нулю, т. е. $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)_{z=0} = 0$. На свободной поверхности давление равняется нулю; поэтому

$$p_{z=h} = -\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} + F(t), \tag{8.3}$$

где γ — плотность; функция $F(t)$ может быть включена в Φ, так как ее производные по координатам равны нулю и, следовательно, она не влияет на распределение скоростей; полагая, таким образом, в (8.3) $F(t) = 0$, получим $\gamma \frac{\partial \Phi}{\partial t} = 0$ при $z = h$, и, следовательно, $\Phi(r, h, \theta; t) = 0$. Так как в начальный момент жидкость находилась в покое, то $\Phi_1(r, \theta, h) = 0$.

Будем искать решение задачи в виде

$$\Phi(r, z, \theta; t) = \Phi_1(r, z, \theta) f'(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r, \theta) T_n(z) f'(t).$$

Положим, что

$$T_n(z) = A_n \cos knz. \tag{8.4}$$

Из условий на верхней поверхности имеем $\cos knh = 0$. Следовательно, $k = \pi/2h$, и при четных n в (8.4) нужно положить $A_n = 0$.

Очевидно, что производная по z каждого из членов ряда при $z = 0$ обращается в нуль, так как

$$\sum_{n=1,\ 3,\ 5,\ \ldots}^{\infty} \varphi_n(r,\ \theta) f'(t)\, A_n kn \sin knz\,|_{z=0} = 0.$$

Функция φ_n удовлетворяет уравнению $\nabla^2\varphi_n - k^2n^2\varphi_n = 0$, и, таким образом, рассматриваемая задача сводится к решению уравнения Гельмгольца. Разыскивая решение этого уравнения в виде

$$\varphi_n(r,\ \theta) = \sum R_{mn}(r)\,\Theta_{mn}(\theta),$$

получим

$$\varphi_n(r,\ \theta) = 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' \{A^0_{mn} I_m(knr) + B^0_{mn} K_m(knr)\} \times$$
$$\times (A'_{mn} \cos m\theta + B'_{mn} \sin m\theta), \tag{8.5}$$

где $I_m(knr)$, $K_m(knr)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода целого индекса m.

Вследствие симметрии следует положить $B'_{mn} = 0$ и выражение для Φ_1 запишется в следующем виде:

$$\Phi_1(r,\ \theta,\ z) = 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' \sum_{n=1,\ 3,\ 5,}^{\infty} \{A_{mn} I_m(knr) + B_{mn} K_m(knr)\} \times$$
$$\times \cos knz \cos m\theta,$$

где $A_{mn} = A^0_{mn} A'_{mn}$, $B_{mn} = B^0_{mn} A'_{mn}$.

Если перейти к координатной системе, ось которой совпадает с осью колонны, необходимо в (8.5) заменить r на r_1, а θ на β.

Будем искать функцию Φ_1 в виде суммы двух рядов

$$\Phi_1 = 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' \sum_{n=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} A_{mn} I_m(knr) \cos knz \cos m\theta + \\ + 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' \sum_{n=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} B_{mn} K_m(knr_1) \cos knz \cos m\beta. \qquad (8.6)$$

Положим, что радиус колонны мал по сравнению с радиусом цилиндра, и возьмем во втором из рядов, входящих в (8.6), только два первых слагаемых по индексу m. Таким образом, выражение для потенциала скоростей принимает следующий вид:

$$\Phi = \sum_{n=1,\,3,\,5,\,\ldots}^{\infty} \left\{ 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' A_{mn} I_m(knr) \cos m\theta + B_{0n} K_0(knr_1) + \right. \\ \left. + 2B_{1n} K_1(knr_1) \cos\beta \right\} \cos(knz) f'(t).$$

Здесь символ Σ', как и всюду, означает, что при суммировании при $m = 0$ вводится множитель $1/2$. Займемся определением коэффициентов A_{mn}, B_{0n}, B_{1n}.

Для этого перейдем от координат r_1, β к координатам r, θ и воспользуемся следующими формулами сложения бесселевых функций:

$$K_0(knr_1) = 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' K_m(knr) I_m(kne) \cos m\theta,$$

$$K_1(knr_1) \cos\beta = 2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' K_{m+1}(knr) I_m(kne) \cos m\theta,$$

$$r_1 = \sqrt{r^2 + e^2 - 2re\cos\theta}, \qquad r \geqslant e.$$

Таким образом, из условия (8.1) на внешнем контуре получим после выполнения необходимых выкладок

$$A_{\nu n} = \frac{-2B_{0n} K_\nu'(knb) I_\nu(kne) - 4B_{1n} K_\nu'(knb) I_\nu'(kne) + \psi/(kn)}{2I_\nu'(knb)},$$

где

$$\nu = m; \quad \psi = \begin{cases} (-1)^{(n-1)/2} 4/(\pi n) & \text{при} \quad \nu = 1, \\ 0 & \text{при} \quad \nu \neq 1. \end{cases}$$

Рассмотрим условие (8.2) на внутреннем контуре, положив $r_1 = a$. Для того чтобы удовлетворить этому условию, нужно все слагаемые (8.6), содержащие A_{mn}, с помощью соответствующих формул сложения переписать так, чтобы перейти к системе координат r_1, β. После этого можно собирать все слагаемые, содержащие одинаковые множители $\cos \nu\beta$; однако это не позволяет удовлетворить условиям при всех ν, так как с самого начала было положено, что остались лишь слагаемые, содержащие B_{0n} и B_{1n}. Поэтому для определения B_{0n} и B_{1n} необходимо иметь только два уравнения; эти уравнения можно получить, удовлетворив граничным условиям при $\nu = 0$ и $\nu = 1$.

Не приводя промежуточных выкладок, напишем окончательный результат. Для определения B_{0n} и B_{1n} имеем два уравнения

$$C_{1n}B_{0n} + D_{1n}B_{1n} = F_{1n}; \quad C_{2n}B_{0n} + D_{2n}B_{1n} = F_{2n},$$

где

$$C_{1n} = -2 \sum_{m=0}^{\infty}{}' K'_m(knb) \frac{I_m(kne)}{I'_m(knb)} I'_0(kna) I_m(kne) + K'_0(kna),$$

$$D_{1n} = -4 \sum_{m=0}^{\infty}{}' K'_m(knb) \frac{I'_m(kne)}{I'_m(knb)} I'_0(kna) I_m(kne),$$

$$F_{1n} = -\frac{\psi}{kn} I'_0(kna) I_1(kne) \frac{1}{I'_1(knb)},$$

$$C_{2n} = -2I'_1(kna) \sum_{m=0}^{\infty}{}' K'_m(knb) \frac{I_m(kne)}{I'_m(knb)} \times$$
$$\times [I_{m-1}(kne) + I_{m+1}(kne)],$$

$$D_{2n} = -4I'_1(kna) \sum_{m=0}^{\infty}{}' \frac{K'_m(knb) I'_m(kne)}{I'_m(knb)} \times$$
$$\times [I_{m-1}(kne) + I_{m+1}(kne)] + 2K'_1(kna),$$

$$F_{2n} = -\frac{\psi}{kn} \frac{I'_1(kna)}{I'_1(knb)} [I_0(kne) + I_2(kne)] + \frac{4}{\pi} \cdot \frac{1}{n} (-1)^{(n-1)/2} \frac{1}{kn}.$$

Если оставить в решении (8.6) вместо двух членов, содержащих B_{mn}, p таких слагаемых, то A_{mn} с помощью условий на внешнем контуре можно выразить через p неизвестных B_{mn}. На внутреннем контуре можно было бы получить p уравнений с неизвестными $B_{\nu n}$, где $\nu = 1, 2, 3, \ldots, p$.

Подробные вычисления проведены в работе [23].

Задача о прямоугольном резервуаре, движение которого происходит в направлении, параллельном одной из сторон прямоугольника, образующего днище, является значительно более простой и хорошо изученной. Очевидно, что если в выражение потенциала скоростей по-прежнему входит ряд $\sum \varphi_n(x, y)\cos knz$, то $\varphi_n(x, y) = \varphi_n(x)$, т. е. соответствующая плоская задача об определении функции φ_n становится задачей одномерной.

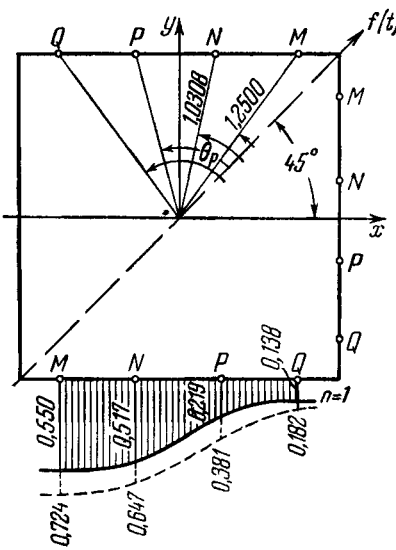

Рис. 37.

Задача о прямоугольном резервуаре в случае, когда он движется по прямой, не параллельной сторонам основания, несколько сложнее. В этом случае основной трудностью является при представлении потенциала скоростей в виде произведения $f_1'(t)\sum \varphi_n(x, y)\cos knz$ определение функций $\varphi_n(x, y)$, удовлетворяющих уравнению $\nabla^2\varphi_n - k^2n^2\varphi_n = 0$ и граничным условиям, которые получаются из того, что стенка резервуара является непроницаемой. Эти условия сводятся к тому, что нормальная производная функции φ_n на контуре равна некоторой заданной функции точки контура. Для решения этой задачи применим один из вариантов метода компенсирующих нагрузок. Существо метода изложено в § 5, ч. II.

Будем искать решение для резервуара, не имеющего внутренних колонн, в следующем виде:

$$\varphi_n(r, \varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k I_k(knr)[\cos k\theta + \alpha_k \sin k\theta],$$

и будем так подбирать коэффициенты A_k и α_k, чтобы удовлетворить в определенном смысле граничным условиям на контуре.

В качестве примера рассмотрим задачу об определении давления на стенки квадратного резервуара, считая, что импульсивное перемещение $f(t)$ направлено по его диагонали. Будем искать функции $\varphi_n(r, \theta)$ в виде

$$\varphi_n(r, \theta) = \sum_{m=1,3}^{7} A_{mn} I_m(knr) \cos m\theta,$$

где θ и r — полярные координаты рассматриваемой точки (рис. 37). Потребуем, чтобы условия непроницаемости выполнялись в точках M, N, P, Q одной из сторон квадрата, являющихся серединами отрезков, полученных при делении стороны на четыре равные части. Очевидно, что эти же условия будут выполняться и в соответствующих точках всех остальных сторон. Указанные условия дадут следующую систему уравнений:

$$A_{1n}\left[\frac{dI_1(knr_i)}{dr}\cos\theta\sin(45°+\theta) - I_1(knr_i)\frac{1}{r_i}\sin\theta\cos(45°+\theta)\right] +$$

$$+ A_{3n}\left[\frac{dI_3(knr_i)}{dr}\cos 3\theta\sin(45°+\theta) -\right.$$

$$\left. - I_3(knr_i)\frac{1}{r_i}3\sin 3\theta\cos(45°+\theta)\right] +$$

$$+ A_{5n}\left[\frac{dI_5(knr_i)}{dr}\cos 5\theta\sin(45°+\theta) -\right.$$

$$\left. - I_5(knr_i)\frac{1}{r_i}5\sin 5\theta\cos(45°+\theta)\right] +$$

$$+ A_{7n}\left[\frac{dI_7(knr_i)}{dr}\cos 7\theta\sin(45°+\theta) -\right.$$

$$\left. - I_7(knr_i)\frac{1}{r_i}7\sin 7\theta\cos(45°+\theta)\right] = \frac{4}{\pi\sqrt{2}}\frac{1}{n}(-1)^{(n-1)/2},$$

где $n = 1, 3, 5, 7$, $i = M, N, P, Q$ (в нашем случае $r_M = r_Q$, $r_N = r_P$).

Здесь нужно сначала положить $n = 1$, а затем $n = 3$. Принимая следующие числовые данные: длина стороны квадрата $a = 1$, высота слоя жидкости $h = \pi$, плотность $\gamma = 1$, и считая в соответствии с рис. 37

$$r_M = 1{,}25, \quad r_N = 1{,}03078, \quad r_P = 1{,}03078, \quad r_Q = 1{,}25;$$
$$\theta_M = 0{,}1419, \quad \theta_N = 0{,}5404, \quad \theta_P = 1{,}0304, \quad \theta_Q = 1{,}4289,$$

получаем при $n = 1$ следующую систему уравнений:

$$0{,}41321A_{11} + 0{,}00616A_{31} + 10^{-4} \cdot 0{,}209A_{51} - 10^{-7} \cdot 0{,}58A_{71} = 0{,}90032,$$
$$0{,}41177A_{11} - 0{,}00246A_{31} - 10^{-4} \cdot 0{,}479A_{51} - 10^{-7} \cdot 0{,}84A_{71} = 0{,}90032,$$
$$0{,}32008A_{11} - 0{,}00815A_{31} + 10^{-5} \cdot 0{,}56A_{51} + 10^{-6} \cdot 0{,}117A_{71} = 0{,}90032,$$
$$0{,}21809A_{11} - 0{,}01104A_{31} + 10^{-3} \cdot 0{,}1093A_{51} - 10^{-6} \cdot 0{,}403A_{71} = 0{,}90032.$$

Решая ее, получим

$$A_{11} = 2{,}33813, \quad A_{31} = -17{,}0810, \quad A_{51} = 2003{,}44, \quad A_{71} = 42569{,}9.$$

Аналогичным образом при $n = 3$ имеем

$$A_{13} = -0{,}14973; \quad A_{33} = 0{,}28253; \quad A_{53} = -1{,}45713; \quad A_{73} = -0{,}19584.$$

Теперь, сохраняя в выражении для потенциала скоростей только слагаемые с $n = 1$ и $n = 3$, можно легко найти давления на стенки по формуле

$$p = -\gamma f''(t) \sum_{n=1,3} \sum_{m=1,3}^{7} A_{mn} I_m(knr_i) \cos m\theta_i.$$

§ 9. Плоские тепловые волны в полупространстве и слое; тепловые волны в стержне

В этом параграфе рассматриваются некоторые одномерные задачи теории тепловых волн, описываемые дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами, которые приводятся к уравнениям Бесселя.

Расположим плоскость oxy в одной из двух параллельных плоскостей, ограничивающих слой; ось z на-

правлена внутрь слоя, толщина которого равна h. Будем рассматривать только задачу о плоских волнах, т. е. положим, что температура точки слоя $T(x, y, z, t) = f(z, t)$.

Задачи о плоских тепловых волнах в слое детально рассматриваются в строительной теплотехнике в связи с изучением влияния периодических изменений наружных температур на тепловые поля в ограждениях — стенах и покрытиях зданий; эти задачи представляют интерес и в других технических вопросах, а также в задачах геофизики. Так, например, при изучении тепловых полей в верхнем слое почвы, возникающих вследствие суточных колебаний температуры, приходится решать задачу о тепловых волнах.

В задаче о тепловых волнах в грунте обычно принимают объемную теплоемкость постоянной, а коэффициент теплопроводности считают заданной функцией координаты z, т. е. полагают, что $\lambda = \lambda(z)$ зависит от глубины. Случай, когда $\lambda(z)$ является линейной функцией глубины, был рассмотрен А. Ф. Чудновским [58]. Решение этой задачи получается в бесселевых функциях нулевого индекса. Более сложную задачу о тепловых волнах в слое с переменными теплофизическими характеристиками разобрал А. А. Дородницын [14].

Здесь будет рассмотрено несколько задач о тепловых волнах при различных законах изменения коэффициента теплопроводности $\lambda(z)$ по глубине слоя. Дифференциальное уравнение теплопроводности в рассматриваемом случае имеет вид

$$c\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\left[\lambda(z)\frac{\partial T}{\partial z}\right]. \tag{9.1}$$

Граничные условия задач о тепловых волнах должны содержать в правой части заданные функции времени типа $D_n \sin \varkappa t$ и $D_n^{(1)} \cos \varkappa t$, где $\varkappa$ — круговая частота изменения теплового воздействия. Для примера запишем граничные условия первого и второго рода рассматриваемой ниже задачи о слое.

В первом случае должна быть задана температура

$$\text{при } z = 0 \quad T = D_1 \sin \varkappa t + D_2 \cos \varkappa t, \tag{9.2}$$

$$\text{при } z = h \quad T = D_3 \sin \varkappa t + D_4 \cos \varkappa t. \tag{9.3}$$

Во втором случае задается величина потока тепла через границы слоя:

$$\text{при } z=0 \quad q = D_1^* \sin \varkappa t + D_2^* \cos \varkappa t,$$

$$\text{при } z=h \quad q = D_3^* \sin \varkappa t + D_4^* \cos \varkappa t,$$

где q — поток тепла.

При решении задач о тепловых волнах будем полагать, что температура в слое равна

$$T(z,\ t) = \varphi_1(z) \sin \varkappa t + \varphi_2(z) \cos \varkappa t, \tag{9.4}$$

а поток тепла в направлении оси z равен

$$q(z,\ t) = \psi_1(z) \sin \varkappa t + \psi_2(z) \cos \varkappa t.$$

Очевидно, что

$$\psi_1(z) = -\lambda(z)\, d\varphi_1(z)/dz, \quad \psi_2(z) = -\lambda(z)\, d\varphi_2(z)/dz.$$

Внося выражение (9.4) в (9.1) и приравнивая множители при $\sin \varkappa t$ и $\cos \varkappa t$, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda(z) \frac{d\varphi_2(z)}{dz}\right] = c\varkappa \varphi_1(z), \tag{9.5}$$

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda(z) \frac{d\varphi_1(z)}{dz}\right] = -c\varkappa \varphi_2(z). \tag{9.6}$$

Умножив уравнение (9.5) на i и сложив его затем с уравнением (9.6), получим

$$\frac{d}{dz}\left\{\lambda(z)\left[\frac{d\varphi_1(z)}{dz} + i \frac{d\varphi_2(z)}{dz}\right]\right\} = c\varkappa (i\varphi_1 - \varphi_2). \tag{9.7}$$

Введем обозначение $\Phi(z) = \varphi_1(z) + i\varphi_2(z)$; тогда (9.7) можно записать в следующем виде:

$$\frac{d}{dz}\left[\lambda(z) \frac{d\Phi(z)}{dz}\right] = ic\varkappa \Phi(z). \tag{9.8}$$

В некоторых случаях будет удобно вводить в рассмотрение функцию

$$\Psi(z) = \psi_1(z) + i\psi_2(z) = -\lambda(z)\, d\Phi/dz. \tag{9.9}$$

Поток тепла $q(z)$ при постоянном c удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^2 q}{\partial z^2} = \frac{c}{\lambda(z)} \frac{\partial q}{\partial t}.$$

Из приведенных выше зависимостей легко получить следующие уравнения для функций ψ_1, ψ_2:

$$c\varkappa\psi_2 = \lambda(z)\frac{\partial^2\psi_1}{\partial z^2}, \tag{9.10}$$

$$c\varkappa\psi_1 = -\lambda(z)\frac{\partial^2\psi_2}{\partial z^2}. \tag{9.11}$$

Из (9.10) и (9.11), пользуясь обозначением (9.9), находим

$$\frac{d^2\Psi(z)}{dz^2} = \frac{c\varkappa}{\lambda(z)}\, i\Psi(z).$$

Перейдем к рассмотрению различных законов изменения коэффициента теплопроводности.

Рассмотрим сначала задачу о тепловых волнах при коэффициенте теплопроводности, изменяющемся по степенному закону: пусть $\lambda(z) = \lambda_0(1 + d_0 z)^{-m}$.

В этом случае дифференциальное уравнение (9.8) примет вид $\frac{d}{d\zeta}\left(\zeta^{-m}\frac{d\Phi}{d\zeta}\right) = i\delta^2\Phi$, где $\zeta = 1 + d_0 z$, $\delta^2 = c\varkappa/\lambda_0 d_0^2$; заметим, что δ и ζ являются безразмерными величинами.

Полученное уравнение, которое мы перепишем в виде

$$\frac{d^2\Phi}{d\zeta^2} - \frac{m}{\zeta}\frac{d\Phi}{d\zeta} - i\zeta^m\delta^2\Phi = 0, \tag{9.12}$$

является частным случаем уравнения

$$y'' + \frac{1-2\alpha}{x}y' + \left[(\beta\gamma x^{\gamma-1})^2 + \frac{\alpha^2 - p^2\gamma^2}{x^2}\right]y = 0. \tag{9.13}$$

Уравнение (9.13) с помощью замены переменных $y = x^\alpha v$, $z = \beta x^\gamma$ (см. стр. 47) может быть сведено к уравнению Бесселя относительно функции v и, таким образом, имеет решения типа $y = x^\alpha Z_p(\beta x^\gamma)$. В нашем случае $1 - 2\alpha = -m$, $\alpha^2 = p^2\gamma^2$, $2(\gamma - 1) = m$, $-i\delta^2 = \beta^2\gamma^2$ и поэтому при нецелом $(m+1)/(m+2)$ решение уравнения (9.12) может быть записано в следующем виде:

$$\Phi = \zeta^{(1+m)/2}\left\{A_1 J_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\,\zeta^{(m+2)/2}\sqrt{-i}\right) + A_2 J_{-(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\,\zeta^{(m+2)/2}\sqrt{-i}\right)\right\}. \tag{9.14}$$

Если $(m+1)/(m+2)$ — целое, то

$$\Phi = \zeta^{(1+m)/2}\left\{A_1 J_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\sqrt{-i}\right)+\right.$$
$$\left.+A_2 H^{(2)}_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\sqrt{-i}\right)\right\}. \quad (9.15)$$

Заметим, что, приняв в качестве искомой функции Ψ, мы получили бы дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2\Psi}{d\zeta^2} - i\delta^2\zeta^m\Psi = 0.$$

Если $1/(m+2)$ — нецелое число, то решение этого уравнения имеет следующий вид:

$$\Psi = \sqrt{\zeta}\left[A_1 J_{1/(m+2)}\left(\frac{\delta\sqrt{-i}\,\zeta^{m/2+1}}{1+m/2}\right)+\right.$$
$$\left.+A_2 J_{-1/(m+2)}\left(\frac{\delta\sqrt{-i}\,\zeta^{m/2+1}}{1+m/2}\right)\right], \quad (9.16)$$

если $1/(m+2)$ — целое число, то

$$\Psi = \sqrt{\zeta}\left[A_1 J_{1/(m+2)}\left(\frac{\delta\sqrt{-i}\,\zeta^{m/2+1}}{1+m/2}\right)+\right.$$
$$\left.+A_2 H^{(2)}_{1/(m+2)}\left(\frac{\delta\sqrt{-i}\,\zeta^{m/2+1}}{1+m/2}\right)\right]. \quad (9.17)$$

Покажем, как найти действительные функции φ_1, φ_2, ψ_1, ψ_2, входящие в решение задачи о тепловых волнах.

Для примера остановимся на определении φ_1 и φ_2 в случае, когда Φ определяется по формуле (9.15). Обозначим $A_1 = B_1 + iB_2$, $A_2 = B_3 + iB_4$, где B_1, B_2, B_3, B_4 — действительные числа.

Обозначим

$$J_\nu(z\sqrt{-i}) = u_\nu(z) - iv_\nu(z), \quad H^{(2)}_\nu(z\sqrt{-i}) = f_\nu(z) - ig_\nu(z).$$

Внося в выражение (9.15) вместо A_1, A_2 их значения, а вместо $J_\nu(z)$, $H^{(2)}_\nu(z)$ правые части равенств (5.11), (5.12) и разделяя действительную и мнимую части,

получим

$$\varphi_1 = \zeta^{(1+m)/2}\left\{B_1 u_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)+\right.$$
$$+B_2 v_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)+B_3 f_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)+$$
$$\left.+B_4 g_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)\right\}, \quad (9.18)$$

$$\varphi_2 = \zeta^{(1+m)/2}\left\{-B_1 v_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)+\right.$$
$$+B_2 u_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)-B_3 g_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)+$$
$$\left.+B_4 f_{(m+1)/(m+2)}\left(\frac{2\delta}{m+2}\zeta^{(m+2)/2}\right)\right\}. \quad (9.19)$$

Решение задач о тепловых волнах в слое здесь выражено через бесселевы функции комплексного аргумента. Очевидно, что с практической точки зрения в первую очередь следует использовать такие решения, которые выражаются через табулированные функции.

Известно, что функции комплексного аргумента $x\sqrt{i}$ протабулированы для значений индекса 0; 1 и 1/3.

Остановимся на этих трех случаях.

1. Для первого из них $\nu = (m+1)/(m+2) = 0$. Таким образом, $m = -1$. Это означает, что коэффициент теплопроводности изменяется по линейному закону; здесь мы имеем упомянутую выше задачу, разобранную А. Ф. Чудновским [58].

В этом случае

$$\Phi = A_1 J_0\left(2\delta\zeta^{1/2}\sqrt{-i}\right) + A_2 H_0^{(2)}\left(2\delta\zeta^{1/2}\sqrt{-i}\right). \quad (9.20)$$

Обозначая для сокращения записи $2\delta\sqrt{\zeta} = \xi$, получим

$$\varphi_1 = B_1 u_0(\xi) + B_2 v_0(\xi) + B_3 f_0(\xi) + B_4 g_0(\xi). \quad (9.21)$$

Функция φ_2 может быть с помощью формулы (9.6) выражена через φ_1, поэтому

$$\varphi_2 = -B_1 v_0(\xi) + B_2 u_0(\xi) - B_3 g_0(\xi) + B_4 f_0(\xi). \quad (9.22)$$

Функции u_0, v_0, f_0, g_0 и постоянные B_1, B_2, B_3, B_4 — вещественные.

Для определения B_1, B_2, B_3, B_4 нужно обратиться к граничным условиям. Разберем случай, когда заданы

граничные условия первого рода; если внести φ_1 и φ_2 из выражений (9.21) и (9.22) в (9.4), а затем в (9.2) и (9.3) и приравнять коэффициенты при синусах и при косинусах, получим

$$\left.\begin{aligned} D_1 &= \varphi_1(\xi_0), \\ D_2 &= \varphi_2(\xi_0), \\ D_3 &= \varphi_1(\xi_h), \\ D_4 &= \varphi_2(\xi_h). \end{aligned}\right\}$$

При $z = 0$ $\zeta = 1$ и, следовательно, $\xi_0 = 2\delta$; при $z = h$ $\zeta = 1 + d_0 h$ и поэтому $\xi_h = 2\delta\sqrt{1 + d_0 h}$. Запишем полученную систему в развернутом виде:

$$\begin{aligned} B_1 u_0(\xi_0) + B_2 v_0(\xi_0) + B_3 f_0(\xi_0) + B_4 g_0(\xi_0) &= D_1, \\ B_1 v_0(\xi_0) - B_2 u_0(\xi_0) + B_3 g_0(\xi_0) - B_4 f_0(\xi_0) &= -D_2, \\ B_1 u_0(\xi_h) + B_2 v_0(\xi_h) + B_3 f_0(\xi_h) + B_4 g_0(\xi_h) &= D_3, \\ B_1 v_0(\xi_h) - B_2 u_0(\xi_h) + B_3 g_0(\xi_h) - B_4 f_0(\xi_h) &= -D_4. \end{aligned}$$

После того как из этой системы уравнений будут определены B_1, B_2, B_3, B_4, задачу можно считать решенной.

В частном случае $h \to \infty$ следует положить $B_1 = 0$, $B_2 = 0$, так как функции u_0 и v_0 неограниченно возрастают при $\xi \to \infty$.

При этом

$$\varphi_1 = B_3 f_0(\xi) + B_4 g_0(\xi), \tag{9.23}$$

$$\varphi_2 = -B_3 g_0(\xi) + B_4 f_0(\xi). \tag{9.24}$$

2. Перейдем к рассмотрению такого закона изменения коэффициента теплопроводности, при котором решение выражается через функции индекса 1; пусть $(m + 1)/(m + 2) = -1$, тогда $m = -3/2$ и $\lambda = \lambda_0(1 + d_0 z)^{1/2}$. Решение задачи, даваемое формулой (9.15) при $m = -3/2$, имеет вид

$$\Phi = \zeta^{-1/4}\left\{A_1 J_{-1}\left(4\delta\sqrt{-i}\,\zeta^{1/4}\right) + A_2 H^{(2)}_{-1}\left(4\delta\sqrt{-i}\,\zeta^{1/4}\right)\right\}. \tag{9.25}$$

Перейдем к функциям положительного индекса с помощью формул

$$\begin{aligned} u_{-1}(z) &= -u_1(z), \quad & f_{-1}(z) &= -f_1(z), \\ v_{-1}(z) &= -v_1(z), \quad & g_{-1}(z) &= -g_1(z), \end{aligned}$$

Таким образом, функции φ_1 и φ_2 можно записать в следующем виде:

$$\varphi_1 = \zeta^{-1/4}\{B_1 u_1(\eta) + B_2 v_1(\eta) + B_3 f_1(\eta) + B_4 g_1(\eta)\}, \quad (9.26)$$

$$\varphi_2 = \zeta^{-1/4}\{-B_1 v_1(\eta) + B_2 u_1(\eta) - B_3 g_1(\eta) + B_4 f_1(\eta)\}, \quad (9.27)$$

где $\eta = 4\delta\zeta^{1/4}$.

3. Рассмотрим случай изменения коэффициента теплопроводности, когда

$$(m+1)/(m+2) = 1/3;$$

отсюда имеем $m = -1/2$, и, следовательно, в этом случае

$$\lambda = \lambda_0 \sqrt{1 + d_0 z}.$$

Нам удобно записать решение в виде

$$\Phi = \zeta^{1/4}\left\{A_1 H^{(1)}_{1/3}\left(\frac{4\delta}{3}\sqrt{-i}\,\zeta^{3/4}\right) + A_2 H^{(2)}_{1/3}\left(\frac{4\delta}{3}\sqrt{-i}\,\zeta^{3/4}\right)\right\}. \quad (9.28)$$

Решение поставленной задачи о тепловых волнах в слое с коэффициентом теплопроводности, изменяющимся по степенному закону, может быть выражено через элементарные функции в том случае, когда в (9.19) входят бесселевы функции полуцелого индекса. Найдем такие значения m, при которых индекс бесселевой функции, равный $\nu = (m+1)/(m+2)$, есть целое число с половиной.

Положим, что $(m+1)/(m+2) = n + 1/2$, где n — целое число. Дадим n последовательно значения: $n = 0, 1, 2, 3$; при этом получим соответственно $m = 0$, -4, $-8/3$, $-12/5$. Случай $m = 0$ не представляет интереса, так как он соответствует задаче о слое с постоянным коэффициентом теплопроводности.

Разберем для примера в общих чертах случай $n = 1$; при этом $m = -4$ и, следовательно, $\lambda = \lambda_0(1 + d_0 z)^4$. Функция $\Phi(z)$ может быть записана в следующем виде:

$$\Phi = \zeta^{-3/2}\{A_1 J_{3/2}(\delta\zeta^{-1}\sqrt{-i}) + A_2 J_{-3/2}(\delta\zeta^{-1}\sqrt{-i})\}. \quad (9.29)$$

Обозначим

$$J_{-3/2}(z\sqrt{\pm i}) = u_{-3/2}(z) \pm i v_{-3/2}(z),$$
$$J_{3/2}(z\sqrt{\pm i}) = u_{3/2}(z) \pm i v_{3/2}(z).$$

Кроме того, введем обозначение $\delta\zeta^{-1} = \xi_1$, тогда решение задачи можно написать в виде $\Phi = \varphi_1 + i\varphi_2$, где

$$\varphi_1 = \zeta^{-3/2}\{B_1 u_{-3/2}(\xi_1) + B_2 v_{-3/2}(\xi_1) + B_3 u_{3/2}(\xi_1) + B_4 v_{3/2}(\xi_1)\}.$$

$$\varphi_2 = \zeta^{-3/2}\{-B_1 v_{-3/2}(\xi_1) + B_2 u_{-3/2}(\xi_1) - B_3 v_{3/2}(\xi_1) + B_4 u_{3/2}(\xi_1)\}.$$

Температура в слое по-прежнему будет выражаться формулой $T = \varphi_1 \sin \varkappa t + \varphi_2 \cos \varkappa t$.

Для вычисления функций $u_{3/2}$, $u_{-3/2}$, $v_{3/2}$, $v_{-3/2}$ можно воспользоваться (см. (7.4)) формулами

$$J_{3/2}(z) = (2/(\pi z))^{1/2}(\sin z/z - \cos z),$$

$$J_{-3/2}(z) = (2/(\pi z))^{1/2}(-\cos z/z - \sin z).$$

Нам нужно в эти формулы внести $z = x\sqrt{i}$, а затем найти мнимую и действительную части полученного выражения. Имеем

$$\sin(x\sqrt{i}) = \sin[x/\sqrt{2} + xi/\sqrt{2}] =$$
$$= \sin(x/\sqrt{2})\operatorname{ch}(x/\sqrt{2}) + i\cos(x/\sqrt{2})\operatorname{sh}(x/\sqrt{2}),$$

$$\cos(x\sqrt{i}) = \cos[x/\sqrt{2} + xi/\sqrt{2}] =$$
$$= \cos(x/\sqrt{2})\operatorname{ch}(x/\sqrt{2}) - i\sin(x/\sqrt{2})\operatorname{sh}(x/\sqrt{2}),$$

откуда

$$J_{\pm 3/2}(x\sqrt{i}) = (2/(\pi x\sqrt{i}))^{1/2} \times$$
$$\times \left\{ \begin{matrix} \sin \\ -\cos \end{matrix} \right\}(x\sqrt{i})/(x\sqrt{i}) - \left\{ \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \right\}(x\sqrt{i}).$$

Не представляет труда получить решение аналогичной задачи, если $\lambda(z)$ изменяется по экспоненциальному закону (см. [20]).

§ 10. Штамп, лежащий на упругом полупространстве, модуль упругости которого является степенной функцией глубины

Вопрос о распределении давления по подошве штампа, вдавливаемого в упругое полупространство, привлекал внимание многочисленных исследователей. Ряд важных задач о штампах решили Н. И. Мусхелишвили, А. И. Лурье и др. Особенно детально этот вопрос

разобран в монографиях И. Я. Штаермана [60] и Л. А. Галина [9]. Большинство этих работ посвящено вопросу о штампе, лежащем на упругом однородном полупространстве.

В этом параграфе формулируется задача о штампе, лежащем на основании с однородным осесимметричным ядром, т. е. предполагается, что осадка точки (x, y) основания от единичной вертикальной силы, приложенной в точке (ξ, η), будет функцией только расстояния между этими точками $K(r) = K\left(\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}\right)$.

Эта задача решается для случая, когда модуль упругости основания изменяется с глубиной по степенному закону.

Если на поверхность основания действует нагрузка $p(x, y)$ (для сокращения выкладок положим, что p — четная функция относительно каждой из координат), то

$$w(x,\ y) = \int_0^\infty \int_0^\infty c\left(\sqrt{z_1^2+z_2^2}\right) a(z_1,\ z_2) \cos z_1 x \cos z_2 y\, dz_1\, dz_2,$$

$$p(x,\ y) = \int_0^\infty \int_0^\infty a(z_1,\ z_2) \cos z_1 x \cos z_2 y\, dz_1\, dz_2,$$

где

$$a(z_1,\ z_2) = \frac{4}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty p(x,\ y) \cos z_1 x \cos z_2 y\, dx\, dy,$$

$$c(z_1,\ z_2) = \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty K(x,\ y) \cos z_1 x \cos z_2 y\, dy\, dx.$$

Если положить, что для точек $B(x, y)$, находящихся в пределах области F, осадка $w = \varphi(x, y)$, а для точек, находящихся вне этой области, $p(x, y) = 0$, причем $\varphi(x, y)$ есть известная, а $p(x, y)$ неизвестная функции, то задача о штампе формулируется следующим образом:

в пределах области, занятой штампом,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty c(z_1,\ z_2)\, a(z_1,\ z_2) \cos z_1 x \cos z_2 y\, dz_1\, dz_2 = \varphi(x,\ y),$$

вне этой области

$$\int_0^\infty \int_0^\infty a(z_1, z_2) \cos z_1 x \cos z_2 y \, dz_1 \, dz_2 = 0.$$

Решая эти уравнения относительно функции $a(z_1, z_2)$, можно затем легко найти $p(x, y)$.

В осесимметричном случае, используя интеграл Парсеваля, получим

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty p\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) \cos z_1 x \cos z_2 y \, dx \, dy =$$

$$= \int_0^\infty r p(r) J_0(\gamma r) \, dr = \tilde{p}(\gamma), \quad (10.1)$$

где

$$\gamma = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}, \quad r = \sqrt{x^2+y^2}.$$

Таким образом,

$$a(\gamma) = 2\tilde{p}(\gamma)/\pi, \quad (10.2)$$

и задача о штампе радиуса R, имеющем осадку $w_0(r)$, будет формулироваться следующим образом:

$$\int_0^\infty \gamma c(\gamma) a(\gamma) J_0(\gamma r) \, d\gamma = 2w_0/\pi, \qquad r < R,$$

$$\int_0^\infty \gamma a(\gamma) J_0(\gamma r) \, d\gamma = 0, \qquad r > R,$$

где

$$c(\gamma) = 2\pi \int_0^\infty r K(r) J_0(\gamma r) \, dr.$$

Если обозначить $r/R = \rho$, $\gamma R = \beta$, то $a(\gamma) = a(\beta/R) = a_1(\beta)$, $c(\gamma) = c(\beta/R) = c_1(\beta)$, $w_0(r) = w_0^*(\rho)$ и

$$\int_0^\infty \beta c_1(\beta) a_1(\beta) J_0(\beta\rho) \, d\beta = 2R w_0^*(\rho)/\pi, \qquad \rho < 1, \quad (10.3)$$

$$\int_0^\infty \beta a_1(\beta) J_0(\beta\rho) \, d\beta = 0, \qquad \rho > 1. \quad (10.4)$$

Решение этой системы уравнений для случая, когда $c_1(\beta)$ является степенной функцией, хорошо известно (см. § 22); оно и будет использовано ниже при рассмотрении штампа, находящегося на основании с модулем упругости, изменяющимся по степенному закону.

В этом случае ядро имеет вид

$$K(r) = 1/(\pi E_n r^{n+1}).$$

Положим, что модуль упругости увеличивается с глубиной, т. е. $n > 0$.

В этом случае

$$c(\gamma) = 2\pi \int_0^\infty rK(r) J_0(\gamma r)\, dr = \frac{2^{1-n}}{E_n} \frac{\Gamma((1-n)/2)}{\Gamma((1+n)/2)} \gamma^{n-1}.$$

Обозначим для сокращения записи

$$\frac{2^{1-n}}{E_n} \frac{\Gamma((1-n)/2)}{\Gamma((1+n)/2)} = A_n, \qquad n-1 = \alpha,$$

$$\frac{2}{\pi} w_0^* \frac{R^{n+1}}{A_n} = g(\rho), \qquad \beta a_1(\beta) = f(\beta);$$

тогда уравнения (10.3) и (10.4) примут вид

$$\int_0^\infty \beta^a f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta = g(\rho), \qquad 0 < \rho < 1,$$

$$\int_0^\infty f(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta = 0, \qquad 1 < \rho < \infty,$$

Положим $1 > n > 0$, тогда $\alpha < 0$ и решение задачи можно получить, используя результат, приведенный на стр. 126; учитывая, что правая часть второго интегрального уравнения обращается в нуль, а индекс функции Бесселя равен нулю, получим формулу

$$f(\beta) = \frac{2^{-\alpha/2}\beta^{-\alpha}}{\Gamma(1+\alpha/2)} \left[\beta^{1+\alpha/2} J_{\alpha/2}(\beta) \int_0^1 y(1-y^2)^{\alpha/2} g(y)\, dy + \right.$$

$$\left. + \int_0^1 u(1-u^2)^{\alpha/2}\, du \int_0^1 g(yu)(\beta y)^{2+\alpha/2} J_{1+\alpha/2}(\beta y)\, dy \right].$$

Если положить $g = g_0 = \text{const}$, т. е. считать, что штамп имеет плоскую нижнюю границу, то в результате выкладок, которые сводятся к определению $f(\beta)$, а следовательно, и $a_1(\beta)$, получим при помощи соотношений (10.2) и (10.1), что реактивное давление

$$p(\rho) = \frac{\pi}{2} g_0 \frac{2^{(1-n)/2}}{\Gamma((n+1)/2)} \int_0^\infty \beta^{(1-n)/2} J_{(n+1)/2}(\beta) J_0(\beta\rho)\, d\beta.$$

Теперь задача сводится к вычислению несобственного интеграла Вебера — Сонина — Шафхейтлина, которое в нашем случае приводит к следующему результату:

$$p(\rho) = \frac{\pi g_0}{2^n \Gamma^2((n+1)/2)} {}_2F_1(1,\ (1-n)/2;\ 1;\ \rho^2) = \frac{\pi g_0}{2^n \Gamma^2((n+1)/2)} \frac{1}{(1-\rho^2)^{(1-n)/2}}.$$

§ 11. Применение интегральных уравнений к решению некоторых задач о мембранах и пластинках

В этом параграфе рассматривается несколько задач, сводящихся к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода, ядра которых выражаются через бесселевы функции.

Рассмотрим сначала задачу о вынужденных колебаниях мембраны, которая сводится к решению внутренней задачи для уравнения

$$\nabla^2 w + \lambda^2 w = 0$$

при условии, что на контуре C (простом, кусочно гладком), ограничивающем рассматриваемую область (конечную, односвязную), $w = w(\sigma) = f$, где σ — дуговая координата точки контура.

Представим решение задачи истокообразно в виде

$$w(\sigma) = \int_C \mu(s) K_1^*(\sigma,\ s)\, ds,$$

где $\mu(s)$ — некоторая подлежащая определению плотность моментов, векторы которых направлены по касательной к контуру; s — дуговая координата текущей

точки контура; уравнение упругой поверхности мембраны, к которой приложен сосредоточенный момент, можно представить в виде

$$K_1^* = Y_1(r)\cos(n_\sigma,\ r), \tag{11.1}$$

n_σ — нормаль, $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, x, y — координаты точки наблюдения, принадлежащей рассматриваемой области; ξ, η — декартовы координаты точки контура, имеющей дуговую координату σ.

Как это следует из разложения цилиндрических функций второго рода с целым индексом в степенные ряды, ядро K_1^* можно представить в виде

$$Y_1(r)\cos(n_\sigma,\ r) = (-2/(\pi r) + \psi)\cos(n_s,\ r), \tag{11.2}$$

где ψ — регулярная функция; отсюда, пользуясь результатами классической теории логарифмического потенциала, сразу получаем интегральное уравнение для определения $\mu(s)$

$$2\mu(\sigma) + \int_C \mu(s) K_1^*(s,\ \sigma,\ \lambda)\, ds = f(\sigma).$$

Единственность решения этого уравнения следует из того, что ядро (11.1) является мнимой частью потенциала, удовлетворяющего принципу излучения Зоммерфельда; исследование существования и единственности решения проводится обычным путем.

Вводя ядро $K_2^* = Y_0(r)$, можно получить интегральные уравнения для задачи Неймана.

Вопрос о получении, исследовании и решении уравнений этого типа в задачах о распространении плоских волн неоднократно и подробно обсуждался в литературе. Здесь в первую очередь должны быть названы работы В. Д. Купрадзе [29]. Для неограниченной плоской области в ядра интегральных уравнений входят функции Ганкеля второго рода, что позволяет удовлетворить условиям на бесконечности, представляющим принцип излучения Зоммерфельда.

Перейдем к задаче, в которой ядром интегрального уравнения является модифицированная функция Бесселя.

Рассмотрим равновесие мембраны, лежащей на упругом винклеровском основании; эта задача сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2 w - \lambda^2 w = 0. \tag{11.3}$$

Рассмотрим внутреннюю задачу, положив, что на контуре $w = f$. Представим решение задачи в виде

$$w = \int_C \mu(s) K_1^*(x, y, \xi, \eta)\, ds, \tag{11.4}$$

где $K_1^* = K_1(r)\cos(n_s, r)\,2/\pi$; $K_1(r)$ — функция Макдональда первого порядка; замечая, что для ядра K_1^* также справедлива формула, аналогичная (11.2), получаем для определения μ уравнение Фредгольма: $-2\mu(\sigma) + \int_C \mu(s) K_1^*(s, \sigma)\, ds = f(\sigma)$.

Очевидно, что решение уравнения (11.3), представленное интегралом (11.4) для бесконечной области, при условии, что на C $w = 0$ или $dw/dn = 0$, есть тождественный нуль. Это непосредственно следует из асимптотического разложения функции Макдональда $K_n(r)$ при больших значениях аргумента

$$K_n(r) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2r}}\, e^{-r} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(p, m)}{2r^m},$$

где $(p, m) = \dfrac{\Gamma(p + m + 1/2)}{m!\,\Gamma(p - m + 1/2)}$; в нашем случае положим $K_n(r) \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2r}}\, e^{-r}$.

Отсюда несложно доказать, что интегральное уравнение этой задачи имеет решение и притом единственное.

В задачах теории теплопроводности и, в частности, при рассмотрении плоской задачи теории тепловых волн возникают задачи, подобные рассмотренным выше, однако отличающиеся от них тем, что ядра выражаются через цилиндрические функции комплексного аргумента; они рассматривались в [20].

Перейдем к рассмотрению плоских задач, которые сводятся к системе двух уравнений Гельмгольца. Такие задачи возникают, в частности, в теории дифракции плоских упругих волн. Их подробно рассматривал В. Д. Купрадзе [29]. Эти задачи сводятся к решению системы двух сингулярных интегральных уравнений с ядрами, выражающимися через цилиндрические функции; в результате регуляризации эти уравнения переходят в интегральные уравнения Фредгольма второго рода. Здесь будут рассмотрены задачи о пластинках с защемленным краем; граничные условия этих задач существенно отличаются от тех, которые были рассмотрены в дифракционных задачах. Здесь будет в большой мере использована работа Лауричелла [70], который с помощью введения специальных потенциалов свел первую основную задачу бигармонического уравнения к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода. Интересно отметить, что введенные Лауричелла потенциалы тесно связаны с основной функцией Грина бигармонического уравнения, которая с точностью до постоянного множителя имеет вид $K(r) = r^2 \ln r$, $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$. Введенные им потенциалы можно легко выразить через функцию $K(r)$ следующим образом

$$u_0' = \frac{\partial^2 K}{\partial x^2}; \quad v_0' = u_0'' = \frac{\partial^2 K}{\partial x\, \partial y}; \quad v_0'' = \frac{\partial^2 K}{\partial y^2}.$$

Рассмотрим задачу о пластинке, лежащей на винклеровском упругом основании, занимающей конечную односвязную область и ограниченную простым контуром с непрерывно вращающейся касательной. Задача о равновесии пластинки, лежащей на упругом основании, сводится, как уже отмечалось в предыдущих примерах, к интегрированию дифференциального уравнения $\nabla^2\nabla^2 w + \lambda^4 w = q/D$, где λ^4 — положительное постоянное число.

В нашем случае граничные условия на контуре имеют вид $w = 0$, $\frac{\partial w}{\partial n} = 0$. Обозначим

$$u = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial w}{\partial y}. \tag{11.5}$$

Решение будем искать, сводя задачу к решению однородного дифференциального уравнения при неоднородных

граничных условиях, которые запишем в таком виде:

$$w = f_1(s), \quad dw/dn = f_2(s).$$

Заметим, что из (11.5) следует $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$.

Пусть $M(x, y)$ — точка области; $P(\xi, \eta)$ — точка контура,

$$r = \lambda \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}, \quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial r}{\partial x} = \cos\varphi, \quad \frac{1}{\lambda}\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\varphi,$$

где φ — угол, составленный радиус-вектором r и осью x.

Введем функции (обозначения $g_0(r)$, $g_2(r)$ см. на стр. 22):

$$u_0' = g_2(r)\cos 2\varphi - g_0(r), \quad u_0'' = g_2(r)\sin 2\varphi,$$

$$v_0' = g_2(r)\sin 2\varphi, \quad v_0'' = -g_2(r)\cos 2\varphi - g_0(r).$$

Между этими функциями существуют соотношения

$$\frac{\partial u_0'}{\partial y} = \frac{\partial v_0'}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_0''}{\partial y} = \frac{\partial v_0''}{\partial x}.$$

Функции u_0', v_0', u_0'', v_0'' можно записать в виде

$$u_0' = \left[-\frac{1}{\pi} + \psi_1^*\right]\cos 2\varphi - \frac{2}{\pi}\left[\ln r + \ln\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4} + \psi_2^*\right],$$

$$v_0' = \left[-1/\pi + \psi_1^*\right]\sin 2\varphi, \quad u_0'' = \left[-1/\pi + \psi_1^*\right]\sin 2\varphi,$$

$$v_0'' = -\left[-1/\pi + \psi_1^*\right]\cos 2\varphi - \frac{2}{\pi}\left[\ln r + \ln\frac{\gamma}{2} - \frac{\pi}{4} + \psi_2^*\right],$$

где

$$\psi_1^*(r) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m r^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m r^{4m}\ln r,$$

$$\psi_2^*(r) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m r^{2m} + \sum_{m=1}^{\infty} D_m r^{2m}\ln r.$$

Образуем функции $u = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial w}{\partial x}$ и $v = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial w}{\partial y}$ с помощью выражений

$$u = \int_C \rho(s)\frac{du_0'}{dn_\sigma}\,ds + \int_C \mu(s)\frac{du_0''}{dn_\sigma}\,ds, \tag{11.6}$$

$$v = \int_C \rho(s)\frac{dv_0'}{dn_\sigma}\,ds + \int_C \mu(s)\frac{dv_0''}{dn_\sigma}\,ds, \tag{11.7}$$

которые удовлетворяют однородному дифференциальному уравнению и соотношению (11.5); здесь n_σ означает внешнюю нормаль.

Перепишем ядра выражений (11.6) и (11.7) в виде

$$\frac{du_0'}{dn_\sigma} = \Phi_1 - \frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n, r)}{r},$$

$$\frac{dv_0'}{dn_\sigma} = \Phi_2 + \frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r),$$

$$\frac{du_0''}{dn_\sigma} = \Phi_2 + \frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r),$$

$$\frac{dv_0''}{dn_\sigma} = \Phi_3 + \frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) - \frac{2}{\pi}\frac{\cos(n, r)}{r}.$$

Здесь Φ_1, Φ_2, Φ_3 — регулярные функции.

Положим, что точка M области стремится изнутри к контуру; тогда, принимая во внимание формулы теории логарифмического потенциала, получим интегральные уравнения для определения μ и ρ

$$u(\sigma) = -2\rho(\sigma) + \text{v. p.}\int_C \rho(s)\left[-\frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_1\right]ds +$$

$$+ \text{v. p.}\int_C \mu(s)\left[\frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_2\right]ds, \quad (11.8)$$

$$v(\sigma) = -2\mu(\sigma) + \text{v. p.}\int_C \rho(s)\left[\frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_2\right]ds +$$

$$+ \text{v. p.}\int_C \mu(s)\left[\frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_3\right]ds. \quad (11.9)$$

В уравнениях (11.8), (11.9) интегралы понимаются в смысле главных значений.

Эти уравнения образуют систему сингулярных интегральных уравнений. Преобразуем полученную систему в регулярную. Процесс регуляризации проведем, следуя С. Г. Михлину, который в [38] свел систему сингулярных интегральных уравнений плоской задачи теории упругости анизотропной среды к регулярной системе.

Для этого прежде всего заметим, что выражения $\sin(n, r)/r$, имеющие особенность типа простого полюса,

можно записать в виде

$$\frac{\sin(n, r)}{r}\,ds = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\,d\tau + p(t, \tau),$$

где τ, t — параметры, меняющиеся от 0 до 2π; $p(t, \tau)$ — непрерывная функция. Для регуляризации можно воспользоваться формулой Гильберта

$$\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\tau - t}{2}\left\{\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s - \tau}{2}\,\rho(s)\,ds\right\}d\tau = -\rho(t) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\rho(\tau)\,d\tau.$$

Перепишем полученную ранее систему в виде

$$L_1 = -2\rho(\sigma) + \text{v. p.}\int_C \rho(s)\left[-\frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_1\right]ds + \text{v. p.}\int_C \mu(s)\left[\frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_2\right]ds = u_1(\sigma),$$

$$L_2 = -2\mu(\sigma) + \text{v. p.}\int_C \rho(s)\left[\frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_2\right]ds + \text{v. p.}\int_C \mu(s)\left[\frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_3\right]ds = v_1(\sigma).$$

Положим

$$L_1^*(\mu_1, \rho_1) = 2\rho_1(\sigma) + \text{v. p.}\int_C \rho_1(s)\left[-\frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_1\right]ds + \text{v. p.}\int_C \mu_1(s)\left[\frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_2\right]ds,$$

$$L_2^*(\mu_1, \rho_1) = 2\mu_1(\sigma) + \text{v. p.}\int_C \rho_1(s)\left[\frac{2}{\pi r}\cos 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_2\right]ds + \text{v. p.}\int_C \mu_1(s)\left[\frac{2}{\pi r}\sin 2\varphi \sin(n, r) + \Phi_3\right]ds.$$

Если мы образуем систему интегральных уравнений

$$L_1^*(L_1, L_2) = L_1^*(u_1, v_1), \quad L_2^*(L_1, L_2) = L_2^*(u_1, v_1)$$

и воспользуемся формулой Гильберта, то получим регулярную систему уравнений

$$2\rho(\sigma) + \ldots = L_1^*(u_1, v_1),$$
$$2\mu(\sigma) + \ldots = L_2^*(u_1, v_1).$$

Здесь многоточием обозначены регулярные интегралы.

Задача об установившихся колебаниях пластинки, защемленной по контуру, сводится к интегрированию уравнения

$$\nabla^2\nabla^2 w - \lambda^4 w = 0.$$

В этом случае функции u_0', v_0', u_0'', v_0'' нужно взять в следующем виде:

$$u_0' = -\left[Y_2(r) + \frac{2}{\pi} K_2(r)\right] \sin 2\varphi,$$
$$v_0' = \left[Y_2(r) + \frac{2}{\pi} K_2(r)\right] \cos 2\varphi + Y_0(r) - \frac{2}{\pi} K_0(r),$$
$$u_0'' = -\left[Y_2(r) + \frac{2}{\pi} K_2(r)\right] \cos 2\varphi + Y_0(r) - \frac{2}{\pi} K_0(r),$$
$$v_0'' = -\left[Y_2(r) + \frac{2}{\pi} K_2(r)\right] \sin 2\varphi.$$

Легко убедиться в том, что

$$\frac{\partial u_0'}{\partial y} = \frac{\partial v_0'}{\partial x}, \quad \frac{\partial u_0''}{\partial y} = \frac{\partial v_0''}{\partial x}.$$

Задача об изгибе пластинки, сжатой гидростатическим давлением p, сводится к интегрированию дифференциального уравнения $D\nabla^2\nabla^2 w + p\nabla^2 w = q(x, y)$.

Для пластинки, защемленной по контуру, задача сводится к интегрированию этого уравнения без правой части при следующих условиях на контуре $u(s) = f_1(s)$, $v(s) = f_2(s)$, где по-прежнему $u = \frac{\partial w}{\partial x}$, $v = \frac{\partial w}{\partial y}$.

Для решения этой задачи следует ввести функции

$$u_0' = -\left[Y_2(r) + \frac{4}{\pi r^2}\right]\sin 2\varphi,$$

$$v_0' = \left[Y_2(r) + \frac{4}{\pi r^2}\right]\cos 2\varphi + Y_0(r),$$

$$u_0'' = -\left[Y_2(r) + \frac{4}{\pi r^2}\right]\cos 2\varphi + Y_0(r),$$

$$v_0'' = -\left[Y_2(r) + \frac{4}{\pi r^2}\right]\sin 2\varphi.$$

Получение интегральных уравнений в двух последних задачах проводится также, как и в предыдущей задаче о пластинке на упругом основании.

§ 12. О распространении волн в линиях электропередач

Рассмотрим задачу о распространении волн в линиях электропередач [55].

Напряжение и ток в однопроводной системе обозначим соответственно v и i; кроме того, обозначим индуктивность, емкость, сопротивление и проводимость соответственно L, C, R, G. Как известно, напряжение и ток удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$-\frac{\partial v}{\partial x} = L\frac{\partial i}{\partial t} + Ri, \tag{12.1}$$

$$-\frac{\partial i}{\partial x} = C\frac{dv}{dt} + Gv, \tag{12.2}$$

если $R = 0$, $G = 0$, линия называется *неискажающей*, а система уравнений (12.1), (12.2) приводится к хорошо изученному одномерному волновому уравнению

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}.$$

В общем случае система уравнений (12.1), (12.2) приводит к дифференциальному уравнению второго порядка, иногда называемому *телеграфным уравнением*

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - LC\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - (RC + LG)\frac{\partial v}{\partial t} - RGv = 0;$$

аналогичное уравнение можно записать и относительно функции i.

Такое же уравнение получается при рассмотрении задачи о колебаниях струны, имеющей вязкое сопротивление и опирающейся на упругое основание; в этом случае прогиб струны w удовлетворяет уравнению

$$T\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - m\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \gamma\frac{\partial w}{\partial t} - k_0 w = 0, \qquad (12.3)$$

где k_0 — коэффициент постели, T — натяжение, m — погонная масса, γ — число, характеризующее зависимость диссипативной силы от скорости.

В обоих случаях, очевидно, предполагалось, что все физические характеристики постоянные, а возмущения приложены только по концам линии электропередачи или струны.

Поскольку у читателя может возникнуть желание рассмотреть некоторые аналогии между поставленной здесь задачей и ранее рассмотренными задачами механики, будем при изложении исходить из уравнения (12.3). При этом физическая интерпретация будет строиться для задачи о продольных колебаниях стержня постоянного сечения, находящегося в упругой среде; здесь только нужно будет в уравнении (12.3) полагать, что w — продольное перемещение, заменить T на EF, где E — модуль упругости, F — площадь поперечного сечения, k_0 — коэффициент постели, отнесенный ко всему периметру сечения; заметим, что производная искомой функции w по координате x связана с нормальной силой соотношением $N = EF\frac{\partial w}{\partial x}$. Проведем сначала необходимые выкладки в случае, когда затухание отсутствует. Рассмотрим полубесконечный стержень, начало координат примем в его конце, ось x направим в сторону стержня. Положим, что на конце стержня действует сила $1\cdot e^{-i\omega t}$, тогда при $\gamma = 0$ решение уравнения (12.3) имеет вид

$$w = \frac{c}{T\sqrt{p^2+\mu^2c^2}}\exp\left[-\frac{x}{c}\sqrt{p^2+\mu^2c^2} + pt\right], \qquad (12.4)$$

где $p = -\omega i$, $\mu = \sqrt{k_0/T}$, $c = \sqrt{T/m}$.

Рассмотрим задачу о действии единичного мгновенного импульса. С физической точки зрения следует рассмотреть суперпозицию гармоник, дающих в сумме мгновенный импульс. Если воспользоваться терминоло-

гией операционного исчисления и рассматривать не зависящий от времени сомножитель (12.4)

$$\Psi(x,\ p)=\frac{c}{T\sqrt{p^2+\mu^2c^2}}\exp\left[-\frac{x}{c}\sqrt{p^2+\mu^2c^2}\right]$$

как изображение некоторой функции $\psi(x, t)$, т. е. считать, что $\psi(x, t)$ удовлетворяет соотношению

$$\Psi(x,\ p)=\int_0^\infty e^{-px}\psi(x,\ t)\,dp,$$

то $\psi(x, t)$ и является искомым решением.

Вычисление оригинала дает

$$w(x,\ t)=\begin{cases}0, & t<x/c,\\ \dfrac{c}{T}J_0\left(\mu c\sqrt{t^2-(x/c)^2}\right), & t\geqslant x/c.\end{cases}$$

Решение в случае, когда уравнение (12.3) содержит первую производную по времени, положив $\gamma = b\varkappa$, запишем в виде

$$w=\begin{cases}\dfrac{1}{mc}e^{-nc^2t}J_0\left(c\sqrt{\mu^2-n^2c^2}\sqrt{t^2-x^2/c^2}\right), & t\geqslant x/c,\\ 0, & t<x/c,\end{cases}$$

где $n = b\varkappa/(2T)$.

Если затухание вызвано внутренним трением, то, положив $EF = T_0(1 - \delta i)$, где $\delta \ll 1$, получим

$$u=\frac{1}{\sqrt{mT_0}}\left[\operatorname{Re}J_0(\rho_1e^{i\varphi})-\frac{\delta}{2}\operatorname{Im}J_0(\rho_1e^{i\varphi})\right],$$

где $\rho_1=\mu_0c_0\sqrt{\left(t^2-x^2/c_0^2\right)^2+\left(x^2\delta^2/c_0^2\right)^2}$,

$$\operatorname{tg}\varphi=-\frac{x^2\delta}{c_0^2}\frac{1}{t^2-x^2/c_0^2},\quad c=c_0\left(1-\frac{\delta}{2}i\right),\quad c_0=\sqrt{T_0/m},\quad \psi=2\delta.$$

Не представляет никакого труда рассмотреть задачу о действии импульса, изменяющегося по произвольному закону.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ О ГАММА-ФУНКЦИЯХ

Гамма-функция аргумента z, которая называется также эйлеровым интегралом второго рода и обозначается $\Gamma(z)$, определяется с помощью равенства

$$\Gamma(z) = \int_1^\infty e^{-x} x^{z-1}\, dx. \tag{1}$$

Этот интеграл сходится, если $\operatorname{Re} z > 0$.

При $\operatorname{Re} z > 0$ функция $\Gamma(z)$ является регулярной, с помощью аналитического продолжения можно рассмотреть $\Gamma(z)$ при $\operatorname{Re} z < 0$ и показать, что она является мероморфной и выражается формулой

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} + \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt, \qquad \operatorname{Re} z < 0. \tag{2}$$

Отсюда видно, что функция $\Gamma(z)$ имеет простые полюсы в точках $z = -n$, где $n = 0, 1, 2, \ldots$. Основное свойство гамма функций выражается равенством

$$z\Gamma(z) = \Gamma(z+1), \tag{3}$$

которое легко получить из (1).

Полагая, что z находится внутри отрезка $[0, 1]$, можно, перемножив $\Gamma(z)$ и $\Gamma(1-z)$, представленные с помощью формулы (1), после несложных выкладок получить важную формулу

$$\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \pi/\sin \pi z. \tag{4}$$

По принципу аналитического продолжения формула (4) распространяется на всю плоскость комплексного переменного Приведем еще два функциональных соотношения

$$\Gamma(1/2 + z)\,\Gamma(1/2 - z) = \frac{\pi}{\cos \pi z}, \tag{5}$$

$$\frac{\Gamma(z)\,\Gamma(1-z)}{\Gamma(1/2+z)\,\Gamma(1/2-z)} = \frac{1}{\operatorname{tg} \pi z}: \tag{6}$$

последнее является следствием (4), (5)

Формула удвоения гамма функций имеет вид

$$\Gamma(2z) = 2^{2z-1} \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \Gamma(z). \tag{7}$$

Через гамма-функции выражается интеграл

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} x \cos^{\mu_1-1} x\, dx = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\mu/2)\,\Gamma(\mu_1/2)}{\Gamma(\mu/2+\mu_1/2)}, \quad \operatorname{Re}\mu > 0. \quad \operatorname{Re}\mu_1 > 0. \tag{8}$$

Для логарифмической производной гамма-функции

$$\psi(z) = \frac{d}{dz} \ln \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)} \tag{9}$$

имеет место следующее разложение·

$$\psi(z) = -C - \frac{1}{z} - \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z+k} - \frac{1}{k}\right], \tag{10}$$

где C — постоянная Эйлера; ее приближенное значение равно 0,5772157.

Если n — целое положительное число, то

$$\psi(n+1) = -C + 1 + {}^1/_2 + \ldots + 1/n. \tag{11}$$

Приведем частные значения гамма-функции

$$\Gamma(1) = \Gamma(2) = \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = 1, \tag{12}$$

$$\Gamma({}^1/_2) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{-1/2}\, dx = \sqrt{\pi}. \tag{13}$$

Если n — натуральное число, то

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \tag{14}$$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}(2n-1)!!, \tag{15}$$

где $(2n-1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)$.

Более полные сведения о гамма функциях приводятся в [3], [31], [53], [72].

ЛИТЕРАТУРНЫЕ УКАЗАНИЯ

Наиболее подробным руководством по теории бесселевых функций является известный трактат Г. Н. Ватсона «Теория бесселевых функций» [7] В курсе Г. Н. Ватсона имеется обширная библиография.

Книга Г. Н. Ватсона содержит детальное и полное изложение теории бесселевых функций; следует отметить, что из всех источников, которыми пользовался автор, она является наиболее важным.

Не утратила еще своего значения книга Н. Нильсена [76], являющаяся наиболее подробным курсом, из числа вышедших ранее появления работы Г. Н Ватсона и содержащая ряд важных оригинальных результатов Представляет значительный интерес книга [49], в которую включен ряд классических исследований Н. Я. Сонина по цилиндрическим функциям и специальным полиномам и комментарий Н И. Ахиезера.

Краткое изложение теории бесселевых функций приводится в седьмой главе руководства «Высшие трансцендентные функцин» [4]; в эту главу входит и очень полезный справочный раздел, включающий много формул, полученных после 1922 г. и, таким образом, не отраженных в книге Г. Н. Ватсона Отдельные вопросы теории бесселевых функций рассмотрены с различных позиций в курсах уравнений математической физики и теории специальных функций, которые здесь перечислять нецелесообразно.

Интегралы от бесселевых функций рассмотрены в очень полезной книге [73]. Она содержит весьма подробную сводку неопределенных интегралов от функций Бесселя и их произведений на степенную и экспоненциальную функции. Специальная глава посвящена функциям Эйри. В книге имеется ряд формул, относящихся к определенным, повторным и несобственным интегралам. Очень много внимания уделено интегралам от функций Струве. В приложении даны таблицы бесселевых функций и интегралов от бесселевых функций К книге приложена обширная библиографическая справка.

Подробная сводка интегральных преобразований, ядрами которых являются бесселевы функции, приведена в известном двухтомном справочнике «Таблицы интегральных преобразований» [5], [6]. В этом издании содержится очень много важных несобственных интегралов, а также таблицы различных интегралов от бесселевых функций.

Ряд важных несобственных интегралов содержится в весьма полезной справочной книге «Интегральные преобразования и операционное исчисление» [13].

Много формул, относящихся к различным разделам теории бесселевых функций и особенно интегралов, содержится в справочнике И С Градштейна и И. М Рыжика [10]

Вопросы теории неполных цилиндрических функций подробно рассмотрены в монографии М. М Агреста и М. З. Максимова [2], таблицы этих функций приведены в [1].

В недавно вышедшей книге Н М Советова и М. Э Авербуха [48] рассмотрены функции, которые называются в настоящей книге фундаментальными функциями Коши уравнения Бесселя, а в других работах автора (например, [20]) назывались функциями, обладающими свойством единичной матрицы

В книге [48] рассмотрены различные обобщения этих функций, приведены полезные формулы и таблицы.

Следует отметить известную книгу Э Грей и Г Мэтьюза [11], которая является одним из лучших руководств по теории бесселевых функций и в которой многие вопросы рассмотрены детальнее и строже, чем в настоящей книге

Среди работ, посвященных изложению теории бесселевых функций, следует назвать весьма полезную книгу Р. О Кузьмина «Бесселевы функции» [28], которая была первой специальной монографией учебного характера по бесселевым функциям, вышедшей в СССР, и сыграла большую роль в популяризации теории бесселевых функций.

Краткая сводка таблиц бесселевых функций приведена в [20], там же содержатся ссылки на более подробные справочники по таблицам, среди которых следует отметить весьма подробный справочник [33]

Представляет интерес, носящее в большой мере справочный характер, подробное руководство [78]

Читатель, который заинтересуется применением аппарата теории функций комплексного переменного и, в частности, контурных интегралов к задачам теории бесселевых функций, может воспользоваться книгой М А. Лаврентьева и Б. В. Шабата [31]. В этой книге имеется специальная глава, посвященная бесселевым функциям

Большой популярностью пользуется книга Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш «Специальные функции» [61], в которой наряду с формулами содержатся графики и таблицы бесселевых функций.

Применение интегральных преобразований, ядра которых являются цилиндрическими функциями, подробно отражено в монографиях Снеддона [47] и Я С Уфлянда [54] Ряд приложений теории цилиндрических функций к операционному исчислению можно найти в монографии А. И. Лурье [35]. Приложения теории цилиндрических функций к отдельным задачам математической физики имеются в многочисленных работах В частности, задачи, связанные с использованием интегральных уравнений, нашли широкое применение в монографии В Д Купрадзе [29].

Вопросам приложения бесселевых функций к задачам теории упругости посвящена широкоизвестная монография А. Н. Динника [12]. Теория бесселевых функций и их приложения к радиотехнике изложены в книге Т. А. Розета [44] Приложения бесселевых функций рассмотрены также в [20].

Все перечисленные работы рассматривают теорию бесселевых функций с позиций классического анализа. Применение к теории бесселевых функций современного анализа и, в частности, теории представлений групп имеет большое значение; ему посвящена монография Н. Я. Виленкина [8].

ЛИТЕРАТУРА

1. Агрест М М, Бекаури И. Н, Максимов М З. и др., Таблицы неполных цилиндрических функций, Гос. ком. по использ. атомной энергии СССР, 1966
2. Агрест М М. и Максимов М. З., Теория неполных цилиндрических функций и их приложения, Атомиздат, 1965.
3. Бейтмен Г. и Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция, функции Лежандра, перев. с англ. (в серии «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1965
4. Бейтмен Г. и Эрдейи А., Высшие трансцендентные функции. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены, перев. с англ (в серии «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1966
5 Бейтмен Г. и Эрдейи А, Таблицы интегральных преобразований, т. I Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина, перев. с англ (в серии «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1969
6 Бейтмен Г. и Эрдейи А, Таблицы интегральных преобразований, т. II. Преобразования Бесселя. Интегралы от специальных функций, перев. с англ (в серии «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1970.
7. Ватсон Г Н, Теория бесселевых функций, ч. I, II, перев. со 2-го англ. изд, ИЛ, 1949
8. Виленкин Н. Я., Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965
9 Галин Л. А., Контактные задачи теории упругости, Гостехиздат, 1953.
10. Градштейн И. С. и Рыжик И. М, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, изд. 4-е, Физматгиз, 1963.
11 Грей Э. и Мэтьюз Г, Функции Бесселя и их приложения к физике и механике, изд. 2-е, перев. со 2-го англ изд., ИЛ, 1953.
12. Динник А Н, Избранные труды, т. II (Приложение функций Бесселя к задачам теории упругости), Изд-во АН УССР, 1952.
13. Диткин В А. и Прудников А П, Интегральные преобразования и операционное исчисление (в серии «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1961.
14 Дородницын А А, К теории суточного хода температуры в слое перемешивания, ДАН СССР **XXX**, № 5 (1941).
15. Забрейко П П, Кошелев А И, Красносельский М А, Михлин С Г, Раковщик Л С., Стеценко В Я., Интегральные уравнения (в серии «Справочная математическая библиотека»), «Наука», 1968.

16. Карслоу Г., Егер Д., Теплопроводность твердых тел, перев. с англ., «Наука», 1964.
17. Клейн Г. К., Расчет балок на линейно-деформируемом полупространстве, Советский метрополитен, № 12 (1940).
18. Коренев Б. Г., О методе начальных параметров в задачах о круглых плитах и оболочках вращения, ПММ **10**, вып. 1 (1946).
19. Коренев Б. Г., Вопросы расчета балок и плит на упругом основании, Госстройиздат, 1954.
20. Коренев Б. Г., Некоторые задачи теории упругости и теплопроводности, решаемые в бесселевых функциях, Физматгиз, 1960.
21. Коренев Б. Г., Черниговская Е И, Расчет плит на упругом основании (пособие для проектировщиков), Госстройиздат, 1962.
22. Коренев Б. Г., К расчету неограниченных плит, лежащих на упругом основании, Строительная механика и расчет сооружений, № 2 (1966).
23. Коренев Б Г., Действие импульса на цилиндрические и призматические резервуары, наполненные жидкостью, Строительная механика, юбил. сб., посвященный И. М Рабиновичу, Госстройиздат, 1968
24. Коренев Б. Г., Букейханов С. Р., О колебаниях стержней переменного сечения, Строительная механика и расчет сооружений, № 6 (1969).
25. Крылов А. Н., О расчете балок, лежащих на упругом основании, изд 3-е, Изд-во АН СССР, 1932
26. Крылов А. Н, Вибрация судов, ОНТИ, 1936.
27. Кузнецов Д С., Специальные функции, изд. 2-е, Высшая школа, 1965.
28. Кузьмин Р. О, Бесселевы функции, изд 2-е, ОНТИ, 1935.
29. Купрадзе В. Д, Граничные задачи теории колебаний и интегральные уравнения, Гостехиздат, 1950.
30. Курант Р. и Гильберт Д, Методы математической физики, т. I, перев. со 2-го нем. изд., Гостехиздат, изд. 3-е, 1951.
31. Лаврентьев М А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, «Наука», 1965.
32. Ларднер Т, Решения в обобщенных гипергеометрических функциях задач о поперечных колебаниях одного класса стержней переменного сечения (обсуждение), Прикладная механика (Тр. Амер. общ. инж мех., перевод) **35**, сер Е, № 1 (1968).
33. Лебедев А. В. и Федорова Р. М., Справочник по математическим таблицам, Изд-во АН СССР, 1956 [1]).
34. Лебедев Н. Н., Специальные функции и их прнложения, изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
35. Лурье А. И., Операционное исчисление и его приложения к задачам механики, Гостехиздат, изд. 2-е, 1951.
36 Ляв А., Математическая теория упругости, перев. с англ., ОНТИ, 1935.
37. Мак-Лахлан Н. В., Теория и приложения функций Матье, перев. с англ, ИЛ, 1953.

[1]) См также Н М. Бурунова, Дополнение № 1 к [33], Изд-во АН СССР, 1959.

38 Михлин С. Г., Плоская деформация в анизотропной среде, Изд-во АН СССР, 1936.
39. Михлин С. Г., Приложения интегральных уравнений к некоторым проблемам механики, математической физики и техники (в серии «Физико-математическая библиотека инженера»), Гостехиздат, 1947.
40. Михлин С. Г., Прямые методы в математической физике (в серии «Физико-математическая библиотека инженера»), Гостехиздат, 1950.
41. Морс Ф. М. и Фешбах Г., Методы теоретической физики, перев. с англ., ИЛ, т. I, 1958, т. II, 1960.
42 Охоцимский А А., К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью, ПММ, № 1 (1956).
43. Привалов И. И., Интегральные уравнения, изд. 2-е, ОНТИ, 1937.
44. Розет Т. А., Элементы теории цилиндрических функций с приложениями к радиотехнике, «Советское радио», 1956.
45. Ручимский М. Н., К расчету конических и пологих сферических оболочек при осесимметричном загружении, Гостоптехиздат, 1958.
46. Смирнов В. И., Курс высшей математики, т. III, ч. II, изд. 8-е, Физматгиз, 1969.
47. Снеддон И., Преобразования Фурье, перев. с англ., ИЛ, 1955.
48. Советов Н. М и Авербух М. Э., Разностные бесселевы функции и их применение в технике, Изд-во Сарат. ун-та, 1968.
49. Сонин Н. Я., Исследования о цилиндрических функциях и специальных полиномах, Ред. и коммент. Н И. Ахиезера, Гостехиздат, 1954.
50. Стрэттон Д. А., Теория электромагнетизма, перев. с англ., Гостехиздат, 1948
51. Титчмарш Е., Введение в теорию интегралов Фурье, перев. с англ., Гостехиздат, 1948
52. Тихонов А. Н. и Самарский А. А., Уравнения математической физики, изд. 3-е, Гостехиздат, 1966.
53. Уиттекер Э Т. и Ватсон Г. Н, Курс современного анализа, ч. II, перев. с англ., изд. 2-е, Физматгиз, 1963.
54. Уфлянд Я. С., Интегральные преобразования в задачах теории упругости, изд. 2-е, «Наука», Л., 1967.
55 Хаяси С., Волны в линиях электропередачи, перев. с англ., Госэнергоиздат, 1960.
56 Цейтлин А. И., Об изгибе круглой пластинки, лежащей на линейно деформируемом основании, Изв. АН СССР, Механика твердого тела, № 1 (1969).
57. Цейтлин А. И., О методе парных интегральных уравнений и парных рядов и его приложениях к задачам механики, ПММ, № 2 (1966).
58. Чудновский А. Ф, Физика теплообмена в почве, Гостехиздат, 1948.
59 Шехтер О Я., Расчет бесконечной плиты, лежащей на упругом основании конечной и бесконечной мощности и нагруженной сосредоточенной силой, сб. НИС Фундаментстроя, № 10, 1939.

60. Штаерман И. Я., Контактная задача теории упругости, Гостехиздат, 1949.
61. Янке Е, Эмде Ф., Леш Ф., Специальные функции (формулы, графики, таблицы), перев. с 6-го нем изд, «Наука», 1968.
62 Bowman F., Introduction to Bessel functions, Dover books on mathematics, N. Y., 1958
63 Cooke R. G., On the theory of Schlömilch series, Proc. of the London Math. Soc., second series **28** (1928), 207—241.
64 Farrel O. J., and Ross B, Solved problems: gamma and beta functions, Legendre polynomials, bessel functions, Macmillan, N. Y.; Collier Macmillan, London, 1963
65. Friedrichs K. O., Ein Verfahren der Variationsrechnung, Nachrichten der Ges. d. Wiss zu Gottingen, 1929.
66 Goudet G., Les fonctions de Bessel et leurs applications en physique, 2-ème ed., Masson, Paris, 1954.
67. Hayes W. D., Neo-Schlömilch series, J. of Math. and Physics, XXXIV, № 2 (1956).
68 Jacobsen L. S., Impulsive hydrodynamics of fluid inside a cylindrical tank and fluid surrounding a cylindrical pier, Bulletin of the Seismological Society of America **39**, № 3 (1949).
69 Jeffrevs H and Swirless B (Lady Jeffreys), Methods of mathematical physics, 3-d ed, Univ press, Cambridge, 1956.
70 Lauricella G., Sur l'integration de l'equation relative à l'équilibre des plaques élastiques encastrées, Acta Math. 32 (1909)
71. Lommel E., Studien über die Bessel'schen Functionen, Teubner, Leipzig, 1868
72. Lösch F. und Schoblik F, Die Fakultät (Gammafunktion) und verwandte Funktionen mit besonderer Berücksichtigung ihrer Anwendungen, Teubner, Leipzig, 1951.
73. Luke Y. L., Integrals of Bessel functions, Mc Graw-Hill, N. Y. — Toronto — London, 1962
74. McLachlan N. W., Bessel functions for engineers, 2-d ed., Clarendon Press, Oxford, 1955
75. Neumann C. G., Theorie der Bessel'schen Funktionen. Ein Analogen zur Theorie der Kugelfunktionen, Teubner, Leipzig, 1867.
76 Nielsen N, Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen, Teubner, Leipzig, 1904.
77 Noble B., The solution of Bessel function dual integral equations by a multiplying — factor method, Proc Cambridge Philos. Soc. **59**, № 2 (1963).
78 Petiau G., La théorie des fonctions de Bessel, exposée en vue de ses applications à la physique mathematique, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris, 1955.
79 Rehwald W., Elementare Einführung in die Bessel, Neumann und Hankel Funktionen, Wesentliche Eigenschaften der Zylinderfunktionen mit zahlreichen Anwendungsbeispielen aus Physik und Technik, Hirzel, Stuttgart, 1959
80 Rey Pastor J. y de Castro Brzezicki A, Funciones de Bessel Teoria Matematica y aplicationes a la ciencia y a la tecnica, Dossat, Madrid, 1958.

81 Rutgers J. G, Sur des séries et des intégrales définies contenantes les fonctions de Bessel, Nederl Akad. Wetensch. Proc. **44** (1941), 464—474, 636—647, 744—753, 840—851, 978—988, 1092—1098.
82 Schöbe W., Asymptotische Entwicklung für Zylinderfunktionen, Acta Math **92**, 1—2 (1954).
83 Srivastav R P, A pair of dual integral equations involving Bessel functions of the first and the second kind, Proc. Edinburgh Math Soc **14**, № 12 (1964).
84 Weyrich R., Die Zylinderfunktionen und ihre Anwendungen, Teubner, Leipzig und Berlin, 1937
85. Woinowsky-Krieger S, Uber die Biegung dünner rechteckiger Platten durch Kreislasten, Ingenieur Archiv **III**, H. 3 (1932).

Борис Григорьевич Коренев

ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ
БЕССЕЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

М., 1971 г., 288 стр. с илл.

Редактор *И. М. Овчинникова*
Техн. редактор *С. Я. Шкляр*
Корректоры *О. А. Бутусова*
и *Г. С. Смоликова*

Сдано в набор 30/X 1970 г. Подписано к печати 2/III 1971 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 9. Услови. печ. л. 15,12. Уч.-изд. л. 15,36. Тираж 10 000 экз. Т-02216. Цена книги 1 р. 21 к. Заказ № 832.

Издательство «Наука».
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.