Библиотека выпускается под общим руководством кафедры вычислительной математики Московского государственного университета Заведующий кафедрой чл.-корр. АН СССР А. Н. Тихонов

АННОТАЦИЯ

В книге рассматриваются некоторые теоретикочисловые подходы к решению задач приближенного анализа. Наибольшее внимание уделено вопросу о приближенном вычислении кратных интегралов.

Книга не требует обязательного предварительного знания теории чисел, поскольку содержит необходимые для понимания материала теоретикочисловые сведения.

Книга представляет собой единственную в нашей научной литературе и новейшую по уровню излагаемых фактов монографию, затрагивающую одну из интересных и перспективных областей приближенного анализа.

Николай Михайлович Коробов

Теоретикочисловые методы в приближенном анализе

М., Физматгиз, 1963 г., 224 стр.

(Серия «Библиотека прикладного анализа и вычислительной математики»)

Редактор *В. С. Рябенький.*

Техн. редактор *В. Н. Крючкова.* Корректор *Л. О. Сечейко.*

Сдано в набор 2/I 1963 г. Тираж 12 000 экз. Подписано к печати 30/V 1963 г. Бумага 84×108 1/32. Физ. печ. л. 7. Условн. печ. л. 11,48. Уч.-изд. л. 11,77. Т-04985. Цена книги 59 коп. Заказ № 526.

Государственное издательство физико-математической литературы. Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

2-я типография Военного издательства Министерства обороны СССР. Ленинград, Д-65, Дворцовая пл., 10.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В этой книге рассматриваются некоторые теоретико-числовые подходы к решению задач приближенного анализа. Наибольшее внимание уделено вопросу о приближенном вычислении кратных интегралов.

Появлению книги в значительной мере способствовала работа семинара, организованного в 1957 г. по инициативе отдела теории чисел Математического института АН СССР. Семинар объединял сотрудников и аспирантов Математического института и механико-математического факультета МГУ.

Почти весь материал, вошедший в книгу, представляет собой подробное изложение результатов, опубликованных в работах автора этой книги [13]—[22]. Исключение составляют теоремы 4, 10, 19 и 26, содержащие изложение некоторых результатов Н. Н. Ченцова, И. И. Пятецкого-Шапиро, Н. С. Бахвалова и В. С. Рябенького. В связи с ограниченными задачами и небольшим объемом книги в нее не были включены другие результаты, полученные в работах участников семинара.

В книге приведены и большей частью доказаны сведения из теории чисел, необходимые для понимания материала. Таким образом, от читателя не требуется предварительного знания теории чисел. Однако знакомство с простейшими вопросами теории сравнений и диофантовыми приближениями позволило бы с большей легкостью сосредоточить внимание на главном.

ВВЕДЕНИЕ

За последние годы в некоторых вопросах приближенного анализа получен ряд результатов, основанных на применении теоретикочисловых соображений. Можно указать три типа задач, в которых теоретикочисловые подходы приводят к результатам общего характера: построение квадратурных формул для интегралов произвольной кратности, интерполяция функций многих переменных и приближенное решение интегральных уравнений.

Из перечисленных вопросов более подробно по сравнению с остальными разработан вопрос о приближенном вычислении кратных интегралов.

Пусть $s \geqslant 1$ и A_s^α — некоторый класс функций s переменных, гладкость которых характеризуется значением параметра α. Рассмотрим квадратурную формулу с произвольными весами ρ_k,

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s)\, dx_1 \dots dx_s = \sum_{k=1}^{N} \rho_k f[\xi_1(k, N), \dots, \xi_s(k, N)] - R, \qquad (1^\circ)$$

построенную с помощью сетки

$$M_k = (\xi_1(k, N), \dots, \xi_s(k, N)) \qquad (k = 1, 2, \dots, N).$$

Предположим, что существует бесконечная последовательность значений N такая, что при $f \in A_s^\alpha$ для погрешности этой формулы справедлива оценка

$$R = O\left(\frac{1}{N^{\alpha_1}}\right), \qquad (2^\circ)$$

где α_1 зависит от класса A_s^α и от выбора сетки M_k, но не зависит от N.

Будем говорить, что оценка (2°) не допускает существенного улучшения, если ни при каком $\varepsilon>0$ для всех функций $f\in A_s^\alpha$ в ней нельзя заменить α_1 на $\alpha_1+\varepsilon$. Из двух квадратурных формул вида (1°) первая будет асимптотически лучшей, если соответствующие оценки

$$R_1=O\left(\frac{1}{N^{\alpha_1}}\right),\quad R_2=O\left(\frac{1}{N^{\alpha_2}}\right)$$

не допускают существенного улучшения и $\alpha_1>\alpha_2$.

Пусть $s\geqslant 1$ и $\alpha\geqslant\frac{1}{s}$. Обычно при построении квадратурных формул рассматривается класс D_s^α, состоящий из функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, у которых существуют и непрерывны все производные до порядка αs включительно:

$$\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_s}f}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_s^{n_s}}\qquad (0\leqslant n_1+\ldots+n_s\leqslant\alpha s,\ 0\leqslant n_\nu\leqslant\alpha s).$$

Согласно классической теории для вычисления интеграла

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s$$

его надо записать в виде повторного и последовательно заменять интеграл по каждой переменной на апроксимирующую сумму. В итоге получается квадратурная формула с узлами в вершинах прямоугольной сетки. Если $f\in D_s^\alpha$, то таким путем можно получить квадратурные формулы, для погрешности которых выполняется оценка

$$R=O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right).$$

Из результатов, полученных Н. С. Бахваловым (см. [1] и [11]), следует, что эту оценку нельзя улучшить ни при каком выборе сеток. Таким образом, на классе D_s^α традиционные методы построения квадратурных формул обеспечивают наилучший возможный порядок убывания погрешности.

Между тем в задачах математической физики чаще приходится иметь дело с функциями, принадлежащими классам, существенно отличным от классов D_s^α. К таким классам относятся классы H_s^α, состоящие из функций, у которых существуют и непрерывны уже не все производные порядка αs (как это было у классов D_s^α), а лишь производные вида

$$\frac{\partial^{n_1+\ldots+n_s}f}{\partial x_1^{n_1}\ldots\partial x_s^{n_s}}\qquad (0\leqslant n_1+\ldots+n_s\leqslant\alpha s,\ 0\leqslant n_\nu\leqslant\alpha).$$

Действительно, рассмотрим, например, интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^1 K(x,y)\,\varphi(y)\,dy+f(x).$$

Предположим, что существуют и непрерывны производные $f'(x)$, $\frac{\partial K}{\partial x}$, $\frac{\partial K}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 K}{\partial x\,\partial y}$. При решении этого уравнения методом итераций приходится вычислять интегралы вида

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 K(x,x_1)\ldots K(x_{s-1},x_s)\,f(x_s)\,dx_1\ldots dx_s,\qquad (3°)$$

где подынтегральную функцию

$$F(x_1,\ldots,x_s)=K(x,x_1)\ldots K(x_{s-1},x_s)\,f(x_s)$$

можно рассматривать как функцию любого из классов: $D_s^{\frac{1}{s}}$ или H_s^1. При этом в первом случае учитывается лишь то, что функция F имеет первые производные $\frac{\partial F}{\partial x_1},\ldots$ $\ldots,\frac{\partial F}{\partial x_s}$, тогда как во втором случае учитывается еще и существование смешанной производной $\frac{\partial^s F}{\partial x_1\ldots\partial x_s}$. Таким образом, рассматривая функцию F как функцию класса H_s^1, мы получаем значительно более полную информацию об интеграле 3°.

Если для вычисления интегралов (3°) использовать квадратурные формулы, узлы которых образуют прямоугольную решетку, параллельную координатным осям, то для погрешности нельзя получить оценку, лучшую чем

$$R = O\left(\frac{1}{N^{\frac{1}{s}}}\right). \qquad (4°)$$

При возрастании s точность результатов, получающихся таким путем, резко снижается. Поэтому для вычисления интегралов вида (3°) при больших размерностях s классические квадратурные формулы практически непригодны.

Возникающие трудности удается преодолеть с помощью квадратурных формул, которые учитывают специфику задачи, состоящую в том, что интегрируемая функция принадлежит классу H_s^1. При этом выясняется, что сетки таких квадратурных формул должны удовлетворять требованиям, имеющим отчетливо выраженный теоретикочисловой характер.

Применение теоретикочисловых сеток позволяет при любом $\varepsilon > 0$ получать квадратурные формулы, для погрешности которых на классе H_s^1 справедлива оценка

$$R = O\left(\frac{1}{N^{1-\varepsilon}}\right). \qquad (5°)$$

Эта оценка является почти предельно точной, так как на классе H_s^1 ни при каком выборе сеток нельзя получить оценку погрешности, лучшую чем

$$R = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Оценка (5°), очевидно, значительно точнее оценок, получающихся на классе H_s^1 как с помощью классических методов (4°), так и с помощью методов Монте-Карло, дающих случайную погрешность

$$R = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right).$$

Первые результаты по применению теоретикочисловых сеток для вычисления интегралов произвольной кратности были получены в работе [13] для периодических функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, принадлежащих классам H_s^α при $\alpha \geqslant 2$. Такие функции разлагаются в абсолютно сходящийся ряд Фурье

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)},$$

причем для коэффициентов Фурье выполняется оценка

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \qquad (6°)$$

где $\overline{m}_\nu = \max(1, |m_\nu|)$ и константа C не зависит от $m_1, \ldots$ $\ldots, m_s$. Путем несложных преобразований для погрешности простейшей квадратурной формулы вида (1°) при $\rho_k = \frac{1}{N}$ получается оценка *)

$$|R| \leqslant \frac{C}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{|S(m_1, \ldots, m_s)|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \qquad (7°)$$

где

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k, N) + \ldots + m_s \xi_s(k, N)]}. \qquad (8°)$$

Неравенство (7°) позволяет установить связь между оценками тригонометрических сумм $S(m_1, \ldots, m_s)$ и оценкой погрешности квадратурной формулы, построенной с помощью сетки

$$M_k = (\xi_1(k, N), \ldots, \xi_s(k, N)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Нетривиальные оценки тригонометрических сумм вида (8°) возникают в различных вопросах теории чисел. Таким образом, появляется возможность использовать теоретикочисловые соображения при построении квадратурных формул.

*) Здесь Σ' означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$.

Выбирая, в частности, сетки вида

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где $\left\{\frac{k^\nu}{N}\right\}$ — дробная доля величины $\frac{k^\nu}{N}$ (такие сетки будем называть неравномерными), получаем в неравенстве (7°) хорошо известные рациональные тригонометрические суммы

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \cdot \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{N}}. \qquad (9°)$$

Для сумм (9°) при простых N и $m_1, \ldots, m_s$, не делящихся одновременно на N, справедливы оценки, имеющие порядок $\sqrt{N}$. Пользуясь этим, для погрешности квадратурных формул с неравномерными сетками в конечном счете удается получить оценку

$$R = O\left(\frac{1}{\sqrt{N}}\right). \qquad (10°)$$

Будем говорить, что периодическая функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу E_s^α, если при некотором $\alpha > 1$ для ее коэффициентов Фурье выполняется оценка вида (6°):

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^\alpha}.$$

Результаты, получающиеся с помощью неравномерных сеток, оказываются справедливыми не только для периодических функций $f \in H_s^\alpha$, где $\alpha \geqslant 2$, но и для более широкого класса функций $f \in E_s^\alpha$ с любым $\alpha > 1$.

Как заметил И. И. Пятецкий-Шапиро (см. [10]), существуют величины $\theta_1, \ldots, \theta_s$, для которых при сетках вида

$$M_k = (\{\theta_1 k\}, \ldots, \{\theta_s k\}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

возможно дальнейшее улучшение оценки R до $O\left(\frac{\ln N}{N}\right)$. Несмотря на неэффективность доказательства и невозможность указать способ выбора соответствующих величин $\theta_1, \ldots, \theta_s$, это замечание стимулировало получение новых эффективных результатов.

Из оценки (10°) видно, что в отличие от классических квадратурных формул, дающих на классе H_s^α оценку

$$R = O\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha}{s}}}\right),$$

точность квадратурных формул с неравномерными сетками не уменьшается при возрастании числа измерений. Однако эти формулы (так же как и формулы, получающиеся с помощью методов Монте-Карло) не реагируют на гладкость подынтегральной функции.

От этого недостатка свободны квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками, введенные в работе [14]. Параллелепипедальные сетки определяются равенством

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad (11°)$$

где $a_1, \ldots, a_s$ — специальным образом выбранные целые числа (оптимальные коэффициенты).

Для погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками на классе периодических функций $f \in H_s^\alpha$ при любом $\alpha \geqslant 1$ справедлива оценка

$$R = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right), \qquad (12°)$$

где γ не зависит от N. Точность этой оценки будет, очевидно, тем выше, чем больше значение параметра α, характеризующего гладкость функций, принадлежащих классу H_s^α. Оценка (12°) уже ни при каком выборе сеток не допускает существенного улучшения как на классе H_s^α, так и на более гладком классе D_s^α. Вместе с тем эти формулы можно использовать и для функций малой гладкости, принадлежащих классам $E_s^{1+\varepsilon}$ с произвольным $\varepsilon > 0$, а также (см. [31]) при интегрировании функций, удовлетворяющих условию Липшица с любым показателем $\alpha > 0$.

Н. Н. Ченцов [11] обратил внимание на то, что теоретикочисловые методы приближенного интегрирования можно применять не только для периодических, но также и для непериодических функций. При этом необходима предварительная периодизация задачи, состоящая в замене вычисляемого интеграла равным ему интегралом от некоторой периодической функции.

Характерной особенностью квадратурных формул с параллелепипедальными сетками является их точность для конечных тригонометрических полиномов

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s < C_0 N^{1-\varepsilon}} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}, \quad (13^\circ)$$

т. е. выполнение равенства

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 P(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} P\left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right)$$

для всякого полинома вида (13°) с любыми коэффициентами $C(m_1, \ldots, m_s)$ при произвольно малом $\varepsilon > 0$ и $C_0 = C_0(\varepsilon)$.

Оптимальные коэффициенты $a_1, \ldots, a_s$, с помощью которых строятся параллелепипедальные сетки (11°), тесно связаны с задачами теории диофантовых приближений и, в частности, с вопросами равномерного распределения дробных долей.

Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — произвольные действительные числа из интервала [0,1]. Рассмотрим область, определенную условиями

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_1, \ldots, 0 \leqslant x_s \leqslant \gamma_s, \quad (14^\circ)$$

и обозначим через $T_N(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ число тех точек сетки

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

которые лежат в этой области. Как показано в теореме 22, необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $a_1, \ldots, a_s$ были оптимальными коэффициентами, является выполнение равенства

$$T_N(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) = \gamma_1 \ldots \gamma_s N + R_0, \quad (15^\circ)$$

где $R_0 = O(\ln^\beta N)$ и β не зависит от N. Таким образом, узлы параллелепипедальных сеток расположены так, что число их попаданий в произвольную область вида (14°) асимптотически равно произведению объема области на число всех точек сетки.

Чем лучше оценивается остаточный член в равенстве (15°), тем равномернее распределены в единичном кубе точки сетки M_k. Вместе с тем, чем равномернее расположены точки сеток, тем точнее квадратурные формулы, построенные с помощью этих сеток. Можно показать, что ни при каком выборе целых $a_1, \ldots, a_s$ остаточный член равенства (15°) нельзя оценить лучше, чем некоторой степенью $\ln N$. Следовательно, для оптимальных коэффициентов достигаются лучшие из возможных оценок остаточного члена, чем и обеспечиваются оптимальные свойства квадратурных формул с параллелепипедальными сетками.

Вычисление оптимальных коэффициентов основано на использовании различных достаточных условий оптимальности. При этом удается указать алгоритмы, позволяющие в случае простых N вычислять оптимальные коэффициенты с помощью $O(N^2)$ элементарных арифметических операций. При переходе к составным N специального вида число необходимых операций можно снизить до $O(N^{1+\frac{1}{3}})$.

Остановимся теперь кратко на применении теоретикочисловых сеток к решению интегральных уравнений и построению интерполяционных формул. Рассмотрим кратное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_s} K(P, Q)\, \varphi(Q)\, dQ + f(P), \quad (16^\circ)$$

где интегрирование распространено на единичный s-мерный куб G_s. Будем предполагать, что свободный член и ядро этого уравнения принадлежат соответственно классам E_s^α и E_{2s}^α и что знаменатель Фредгольма $D(\lambda)$ отличен от нуля. В работе [15] показано, что, используя теоретикочисловые сетки M_k, можно получить решение уравнения (16°) в виде

$$\varphi(P)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(P, M_k)\tilde{\varphi}(M_k)+f(P)+R_1,$$

где величины $\tilde{\varphi}(M_k)$ определяются из системы линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{\varphi}(M_j)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(M_j, M_k)\tilde{\varphi}(M_k)+ \\ +f(M_j) \qquad (j=1, 2, \ldots, N),$$

причем погрешность R_1, в зависимости от выбора сеток, имеет такой же порядок, как и при вычислении интегралов от функций, принадлежащих классу E_s^α. В частности, используя параллелепипедальные сетки, получаем для R_1 оценку

$$R_1=O\left(\frac{1}{N^{\alpha-\varepsilon}}\right) \qquad (17°)$$

с произвольно малым $\varepsilon>0$.

Применяя метод итераций и используя для вычисления интегралов возрастающей кратности квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками, при достаточно малом λ для решения уравнения (16°) можно получить явное приближенное выражение. При этом для погрешности по-прежнему сохраняется оценка (17°).

При решении тем же методом кратных уравнений Вольтерра возникает трудность, состоящая в том, что интегрирование проводится по области, отличной от единичного куба. Однако и в этом случае (см. [37], [38] и [36]) для решения уравнения удается получить приближенные формулы, порядок точности которых не зависит от размерности и улучшается с возрастанием гладкости ядра и свободного члена уравнения.

В. С. Рябенький [24] и, независимо, С. А. Смоляк [29] показали, что теоретикочисловые сетки можно использовать в вопросах интерполяции функций многих переменных. Применяя к коэффициентам Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)\in E_s^\alpha$, как это сделано в работе [24], квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками, получаем интерполяционную формулу

$$f(x_1,\ldots,x_s)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\left\{\frac{a_1k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{N}\right\}\right)\psi_k(x_1,\ldots,x_s)+ \\ +O\left(\frac{\ln^{\gamma_1}N}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right), \qquad (18°)$$

где $\psi_k(x_1, \ldots, x_s)$ — некоторые известные функции и γ_1 не зависит от N. На классе E_s^α при $s>2$ эта формула значительно точнее классических интерполяционных формул, погрешность которых на том же классе имеет порядок $\frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{s}}}$.

Можно показать, что при произвольном выборе сеток нижняя граница погрешности интерполяционных формул на классе E_s^α определяется величиной $\frac{1}{N^{\alpha-1}}$. Следовательно, ни при каком выборе сеток степень N, полученную в оценке погрешности формулы (18°), нельзя увеличить более чем в два раза.

Другой подход к построению интерполяционных формул был предложен в работе [19]. Он основан на возможности представить функцию $f(x_1, \ldots, x_s)\in E_s^\alpha$ в виде интеграла от линейной комбинации произведений ее частных производных на полиномы Бернулли. Применяя к этому интегралу квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками при четном $\alpha>2$, получаем интерполяционные формулы, погрешность которых оценивается величиной $O\left(\frac{\ln^{\gamma_2}N}{N^{\frac{\alpha}{2}}}\right)$, где γ_2 не зависит от N.

Теоретикочисловые сетки можно применять также и для интерполяции непериодических функций, принадлежащих классам H_s^α. При этом удается получить интерполяционные формулы, погрешность которых оценивается так же, как и для случая периодических функций $f \in E_s^\alpha$.

Отметим в заключение, что после работ о применении теоретикочисловых сеток к вопросам приближенного интегрирования, опубликованных в Советском Союзе в 1957—1959 гг., сходные результаты были получены в 1962 г. в работе Главки [12].

Подробная обзорная статья о теоретикочисловых методах в приближенном анализе была написана Ван Юанем [6].

ГЛАВА I

О КЛАССАХ ФУНКЦИЙ И КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

§ 1. Теоретикочисловые леммы

Приведем прежде всего некоторые сведения из элементарной теории чисел, необходимые для дальнейшего изложения.

Пусть m — произвольное целое число. Если m можно представить в виде $m=pq$, где p и q также целые и $p>0$, то p называют делителем числа m, а m — кратным числа p.

Всякое целое, которое является делителем каждого из целых $m_1, \ldots, m_s$, называется их общим делителем. Наибольший из общих делителей называется общим наибольшим делителем. Числа $m_1, \ldots, m_s$ называются взаимно простыми, если их общий наибольший делитель равен единице.

Целое $m>1$ называется составным или простым, смотря по тому, имеет оно делители, отличные от 1 и m, или нет.

Каково бы ни было целое $p>1$, всякое целое m можно единственным образом представить в виде

$$m=pq+r, \quad 0 \leqslant r \leqslant p-1, \tag{1}$$

где q и r — целые. Здесь число r равно остатку от деления m на p, а число q представляет собой наибольшее целое, не превосходящее отношения m/p.

Пользуясь соотношением (1), все целые числа можно разбить на p классов, относя к одному классу те числа m, которые при делении на p дают один и тот же остаток r. Целые, принадлежащие одному классу, называются сравнимыми по модулю p. Для обозначения сравнимости чисел m_1 и m_2 принята запись

$$m_1 \equiv m_2 \pmod{p}. \tag{2}$$

Соотношение (2) называется сравнением; это сравнение равносильно утверждению, что разность $m_1 - m_2$ делится на p. В частности, сравнение $m \equiv 0 \pmod{p}$ означает, что m кратно p. Запись $m_1 \not\equiv m_2 \pmod{p}$ указывает на то, что числа m_1 и m_2 при делении на p дают разные остатки, т. е. принадлежат разным классам по модулю p.

Сравнения обладают рядом свойств, аналогичных свойствам равенств. В частности, легко проверить, что если

$$m \equiv m_1 \pmod{p} \quad \text{и} \quad n \equiv n_1 \pmod{p},$$

то

$$m \pm n \equiv m_1 \pm n_1 \pmod{p} \quad \text{и} \quad mn \equiv m_1 n_1 \pmod{p}. \tag{3}$$

Обе части сравнения можно сократить на общий множитель, взаимно простой с модулем. Так, например, если m взаимно просто с p, то из сравнения

$$am \equiv bm \pmod{p}$$

будет следовать, что

$$a \equiv b \pmod{p}.$$

Лемма 1. *Пусть величина $\delta_p(m)$ определена равенством*

$$\delta_p(m) = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{p}. \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{mk}{p}} = \delta_p(m).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай $m \equiv 0 \pmod{p}$. Очевидно при этом $m = pq$, где q — целое, и, следовательно,

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{mk}{p}} = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i qk} = 1.$$

Пусть теперь $m \not\equiv 0 \pmod{p}$. В этом случае $e^{2\pi i \frac{m}{p}} \neq 1$ и, проводя суммирование геометрической прогрессии, получим

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{mk}{p}} = \frac{1}{p} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{p}} (e^{2\pi i m} - 1)}{e^{2\pi i \frac{m}{p}} - 1} = 0.$$

Таким образом,

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{mk}{p}} = \begin{cases} 1, & \text{если } m \equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{если } m \not\equiv 0 \pmod{p}, \end{cases}$$

что в силу определения $\delta_p(m)$ совпадает с утверждением леммы.

Следствие. *Пусть a и p взаимно просты. Тогда при любых целых b и n справедливо равенство*

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \delta_p(ak+b) = 1.$$

Действительно, пользуясь леммой 1, получим

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \delta_p(ak+b) = \sum_{k=1}^{p} \delta_p[a(k+n)+b] =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} \sum_{k_1=1}^{p} e^{2\pi i \frac{(ak+an+b)k_1}{p}} =$$

$$= \sum_{k_1=1}^{p} e^{2\pi i \frac{(an+b)k_1}{p}} \left(\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{ak_1 k}{p}} \right) = \sum_{k_1=1}^{p} \delta_p(ak_1)\, e^{2\pi i \frac{(an+b)k_1}{p}}.$$

Отсюда, так как в последней сумме отлично от нуля только то слагаемое, в котором $k_1 = p$, получаем утверждение следствия:

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \delta_p(ak+b) = \delta_p(ap)\, e^{2\pi i \frac{(an+b)p}{p}} = 1.$$

Пусть $f(x)$ — многочлен от x с произвольными целыми коэффициентами. Если существует целое x_0 такое, что $f(x_0)\equiv 0 \pmod p$, то x_0 называется решением сравнения

$$f(x)\equiv 0 \pmod p; \tag{4}$$

степень многочлена $f(x)$ называется степенью этого сравнения. В силу (3) из $m\equiv n \pmod p$ следует, что $f(m)\equiv f(n) \pmod p$. Поэтому вместе с x_0 решением сравнения (4) будет также любое из чисел того класса по модулю p, которому принадлежит x_0. Все числа этого класса рассматриваются как одно решение сравнения (4).

Лемма 2. *Пусть p — простое, $f(x)=a_0+a_1x+\ldots+a_sx^s$, $A_p(a_0, \ldots, a_s)$ — число решений сравнения $f(x)\equiv 0 \pmod p$ и d — общий наибольший делитель чисел $a_0, \ldots, a_s$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

$$1^\circ.\ A_p(a_0, \ldots, a_s)=\sum_{k=1}^{p}\delta_p(a_0+\ldots+a_sk^s),$$

$$2^\circ.\ A_p(a_0, \ldots, a_s)\begin{cases}=p, & \text{если } d\equiv 0 \pmod p,\\ \leqslant s, & \text{если } d\not\equiv 0 \pmod p.\end{cases}$$

Доказательство. Пользуясь тем, что $f(p)\equiv f(0) \pmod p$, получим

$$\sum_{k=1}^{p}\delta_p(a_0+\ldots+a_sk^s)=\sum_{k=0}^{p-1}\delta_p(a_0+\ldots+a_sk^s). \tag{5}$$

Покажем, что сумма, стоящая в правой части этого равенства, равна числу решений сравнения

$$f(x)\equiv 0 \pmod p. \tag{6}$$

Действительно, так как, согласно равенству (1), каждый класс по модулю p определяется значением остатка r, где $r=0, 1, \ldots, p-1$, то для нахождения всех решений сравнения (6) достаточно рассмотреть значения x из интервала $0\leqslant x\leqslant p-1$. В силу определения величины $\delta_p(m)$ слагаемые суммы (5) равны единице для тех k, которые являются решениями сравнения (6) и равны нулю для остальных значений k из интервала $0\leqslant k\leqslant p-1$. Таким образом, сумма (5) содержит столько единиц, сколько решений имеет сравнение (6) и, следовательно, совпадает с числом решений этого сравнения, чем доказано равенство 1°.

Прежде чем перейти к доказательству соотношений 2°, покажем, что если число решений сравнения (6) больше его степени, то все коэффициенты многочлена $f(x)$ кратны p.

Действительно, при $s=0$ это утверждение очевидно. Применим индукцию. Пусть $s\geqslant 1$ и утверждение справедливо для сравнений, степень которых не превосходит $s-1$. Обозначим через $x_1, \ldots, x_{s+1}$ решения сравнения (6) и определим многочлен $\varphi(x)$ равенством

$$\varphi(x)=f(x)-a_s(x-x_1)\ldots(x-x_s). \tag{7}$$

Каждое из чисел $x_1, \ldots, x_s$ будет, очевидно, решением сравнения

$$\varphi(x)\equiv 0 \pmod p.$$

Согласно определению $\varphi(x)$ степень этого сравнения не превосходит $s-1$. Следовательно, в силу индукционного предположения все коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ кратны p. Пользуясь этим и замечая, что $f(x_{s+1})\equiv 0 \pmod p$, из (7) при $x=x_{s+1}$ получим

$$a_s(x_{s+1}-x_1)\ldots(x_{s+1}-x_s)\equiv 0 \pmod p.$$

Отсюда после сокращения на $(x_{s+1}-x_1)\ldots(x_{s+1}-x_s)$ следует, что a_s кратно p *). Таким образом, в равенстве (7) величина a_s и все коэффициенты многочлена $\varphi(x)$ кратны p. Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, убедимся, что все коэффициенты многочлена $f(x)$ кратны p.

Перейдем теперь к доказательству соотношений 2°. Если общий наибольший делитель чисел $a_0, \ldots, a_s$ не кратен p, то хотя бы один из коэффициентов сравнения (6) не будет делиться на p и, следовательно, число решений этого сравнения не будет превосходить его степени. Таким образом, при $d\not\equiv 0 \pmod p$ выполняется оценка

$$A_p(a_0, \ldots, a_s)\leqslant s,$$

*) Сокращение возможно, так как при простом p для чисел $x_1, \ldots, x_{s+1}$, принадлежащих разным классам, разности $x_{s+1}-x_\nu$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$ взаимно просты с p.

указанная во втором из утверждений 2°. Первое из этих утверждений очевидно, так как при d, кратном p, каждое из чисел $x=0, 1, \ldots, p-1$ является решением сравнения (6).

Замечание. В частном случае при $s=1$ и $a_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ лемма 2 приводит к оценке $A_p(a_0, a_1) \leqslant 1$. Нетрудно показать, что на самом деле при любом $p>1$ и a_1 взаимно простом с p имеет место равенство $A_p(a_0, a_1)=1$.

Действительно, применяя следствие леммы 1, получим

$$A_p(a_0, a_1) = \sum_{k=1}^{p} \delta_p(a_0 + a_1 k) = 1.$$

В терминах теории сравнений это равенство означает, что сравнение $a_1 x + a_0 \equiv 0 \pmod{p}$ при a_1 взаимно простом с p имеет единственное решение.

Приведем определения некоторых часто встречающихся в дальнейшем теоретикочисловых функций.

Наибольшее целое, не превосходящее действительного числа x, обозначается через $[x]$. Функция $[x]$ называется целой частью x. Очевидно, для любого x будет

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

Функции $\{x\}$ и (x) — дробная доля x и расстояние от x до ближайшего целого — определяются равенствами

$$\{x\} = x - [x]$$

$$(x) = \begin{cases} \{x\}, & \text{если } \{x\} < \frac{1}{2}, \\ 1 - \{x\}, & \text{если } \{x\} \geqslant \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что обе эти функции имеют период, равный единице. Значения функций $\{x\}$ и (x) при любом x удовлетворяют неравенствам

$$0 \leqslant \{x\} < 1, \quad 0 \leqslant (x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Из определения следует также, что (x) — четная функция и что при $|x| \leqslant \frac{1}{2}$ выполняется равенство $(x) = |x|$.

Отметим еще, что при любых x и y справедлива оценка

$$(x+y) \geqslant (x) - (y).$$

Лемма 3. *Пусть $N>1$ — целое и θ — произвольное действительное число. Тогда*

$$\left| \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \theta k} \right| \leqslant \min\left(N, \frac{1}{2(\theta)}\right).$$

Доказательство. При нецелом θ, проводя суммирование геометрической прогрессии, получим

$$\left| \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \theta k} \right| = \left| \frac{e^{2\pi i \theta (N+1)} - e^{2\pi i \theta}}{e^{2\pi i \theta} - 1} \right| \leqslant \frac{2}{|e^{2\pi i \theta} - 1|} = \frac{1}{|\sin \pi\theta|}.$$

С другой стороны, очевидно, при любом θ

$$\left| \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \theta k} \right| \leqslant \sum_{k=1}^{N} |e^{2\pi i \theta k}| = N.$$

Таким образом, всегда

$$\left| \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \theta k} \right| \leqslant \min\left(N, \frac{1}{|\sin \pi\theta|}\right).$$

Теперь утверждение леммы следует из неравенства

$$|\sin \pi\theta| \geqslant 2(\theta). \tag{8}$$

При $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{1}{2}$ это неравенство очевидно:

$$|\sin \pi\theta| = \sin \pi\theta \geqslant 2\theta = 2(\theta);$$

в силу четности и периодичности функций $|\sin \pi\theta|$ и (θ) оно распространяется и на произвольные значения θ.

Лемма 4. *Пусть $p>1$ и a взаимно просто с p. Тогда при $k=1, 2, \ldots, p-1$ совокупность значений величины $\left\{\frac{ak}{p}\right\}$ совпадает с совокупностью значений $\frac{k}{p}$.*

Доказательство. Очевидно

$$\left\{\frac{ak}{p}\right\} = \frac{r_k}{p} \qquad (k=1, 2, \ldots, p-1), \tag{9}$$

где r_k — остаток от деления ak на p.

Допустим, что при $k_1 \neq k_2 (1 \leqslant k_1, k_2 \leqslant p-1)$ выполняется равенство $r_{k_1} = r_{k_2}$. Тогда при $b = -r_{k_2}$ сравнение $ax + b \equiv 0 \pmod p$ будет иметь два решения $x = k_1$ и $x = k_2$, что невозможно (см. замечание к лемме 2).

Таким образом, различным k из интервала $1 \leqslant k \leqslant p-1$ соответствуют различные значения r_k из этого же интервала. Отсюда следует, что числа $r_1, \ldots, r_{p-1}$ образуют перестановку чисел $1, 2, \ldots, p-1$, чем в силу (9) лемма доказана.

Следствие. *Если a взаимно просто с p, то справедлива оценка*

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\left(\frac{ak}{p}\right)} \leqslant 2p(1 + \ln p).$$

Действительно, так как $\left(\frac{ak}{p}\right) = \left(\left\{\frac{ak}{p}\right\}\right)$, то в силу леммы 4 при $k = 1, 2, \ldots, p-1$ совокупности значений величин $\left(\frac{ak}{p}\right)$ и $\left(\frac{k}{p}\right)$ совпадают. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{p-1}{}' \frac{1}{\left(\frac{ak}{p}\right)} = \sum_{k=1}^{p-1}{}' \frac{1}{\left(\frac{k}{p}\right)} \leqslant 2 \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p}{2}} \frac{1}{\left(\frac{k}{p}\right)} = 2p \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p}{2}} \frac{1}{k}.$$

Отсюда, так как

$$\sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p}{2}} \frac{1}{k} \leqslant 1 + \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x} \leqslant 1 + \ln p,$$

получаем утверждение следствия.

Приведем теперь некоторые сведения о непрерывных дробях.

Известно, что каждое рациональное число θ из интервала $0 < \theta < 1$ можно представить в виде конечной непрерывной дроби

$$\theta = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ddots + \cfrac{1}{q_n}}},$$

где $q_k \geqslant 1$ — целые числа $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Эти целые называются неполными частными числа θ.

Определим величины P_k и Q_k с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{aligned} &P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_k = q_k P_{k-1} + P_{k-2}, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad (k \geqslant 2). \qquad (10) \\ &Q_0 = 1, \quad Q_1 = q_1, \quad Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2}. \end{aligned}$$

Нетрудно показать, что при $k = 1, 2, \ldots, n$ целые P_k и Q_k взаимно просты и что справедливы равенства

$$\theta = \frac{P_n}{Q_n}, \quad \theta = \frac{P_k}{Q_k} + \frac{\theta_k}{Q_k Q_{k+1}} \qquad (0 \leqslant k \leqslant n-1), \qquad (11)$$

где $|\theta_k| \leqslant 1$. Отметим еще, что если $\theta = \frac{a}{p}$, где a и p взаимно просты, то

$$a = P_n \quad \text{и} \quad p = Q_n. \qquad (12)$$

Доказательство этих утверждений можно найти в любом учебнике элементарной теории чисел.

Если при некотором M выполняются неравенства

$$q_k \leqslant M \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

то говорят, что неполные частные числа θ ограничены величиной M. Легко проверить, что в этом случае выполняется оценка

$$Q_k \leqslant (M+1) Q_{k-1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n). \qquad (13)$$

Действительно, при $k = 1$ оценка (13) очевидна:

$$Q_1 = q_1 < M + 1 = (M+1) Q_0;$$

при $k \geqslant 2$ она следует из (10):

$$Q_k = q_k Q_{k-1} + Q_{k-2} \leqslant (q_k + 1) Q_{k-1} \leqslant (M+1) Q_{k-1}.$$

Лемма 5. *Пусть $1 < a < p$ и a взаимно просто с p. Если при некотором M выполняются неравенства*

$$\left(\frac{ax}{p}\right) \geqslant \frac{1}{Mx} \qquad (x = 1, 2, \ldots, p-1), \qquad (14)$$

то неполные частные числа $\frac{a}{p}$ *ограничены величиной* M. *С другой стороны, если неполные частные числа* $\frac{a}{p}$ *ограничены величиной* M', *то неравенства* (14) *выполняются при* $M=4M'$.

Доказательство. Пусть условия (14) выполнены. Запишем число $\frac{a}{p}$ в виде конечной непрерывной дроби

$$\frac{a}{p}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}. \tag{15}$$

Второе из равенств (11) можно записать в виде

$$\frac{a}{p}=\frac{P_{k-1}}{Q_{k-1}}+\frac{\theta_{k-1}}{Q_{k-1}Q_k} \qquad (1\leqslant k\leqslant n,\ |\theta_{k-1}|\leqslant 1).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{aQ_{k-1}}{p}=P_{k-1}+\frac{\theta_{k-1}}{Q_k},$$

$$\left(\frac{aQ_{k-1}}{p}\right)=\left(\frac{\theta_{k-1}}{Q_k}\right)\leqslant\frac{1}{Q_k}. \tag{16}$$

С другой стороны, в силу (14) получим

$$\left(\frac{aQ_{k-1}}{p}\right)\geqslant\frac{1}{MQ_{k-1}}. \tag{17}$$

Пользуясь определением величин Q_k, из оценок (16) и (17) получим первое утверждение леммы:

$$\frac{1}{MQ_{k-1}}\leqslant\frac{1}{Q_k}\leqslant\frac{1}{q_kQ_{k-1}},$$

$$q_k\leqslant M \qquad (1\leqslant k\leqslant n).$$

Пусть теперь неполные частные числа $\frac{a}{p}$ ограничены величиной M' и $M=4M'$.

Если $\frac{p}{4M'}\leqslant x<p$, то неравенство (14) очевидно:

$$\left(\frac{ax}{p}\right)\geqslant\frac{1}{p}\geqslant\frac{1}{4M'x}=\frac{1}{Mx}.$$

Пусть $1\leqslant x<\frac{p}{4M'}$. Воспользуемся представлением числа $\frac{a}{p}$ в виде непрерывной дроби (15). Так как, согласно (12), $Q_n=p$, то, применяя оценку (13), получим

$$x<\frac{Q_n}{4M'}\leqslant\frac{(M'+1)Q_{n-1}}{4M'}\leqslant\frac{Q_{n-1}}{2},$$

$$2x\leqslant Q_{n-1}.$$

Определим k из условия

$$Q_{k-1}<2x\leqslant Q_k \qquad (1\leqslant k\leqslant n-1). \tag{18}$$

Из (11) следует, что при любом x

$$\left(\frac{ax}{p}\right)=\left(\frac{P_kx}{Q_k}+\frac{\theta_kx}{Q_kQ_{k+1}}\right)\geqslant\left(\frac{P_kx}{Q_k}\right)-\left(\frac{\theta_kx}{Q_kQ_{k+1}}\right). \tag{19}$$

Так как здесь в силу (18)

$$\left(\frac{P_kx}{Q_k}\right)\geqslant\frac{1}{Q_k}\quad \text{и} \quad \left(\frac{\theta_kx}{Q_kQ_{k+1}}\right)\leqslant\frac{1}{2Q_{k+1}},$$

то, пользуясь оценками (19) и (13), получим

$$\left(\frac{ax}{p}\right)\geqslant\frac{1}{Q_k}-\frac{1}{2Q_{k+1}}\geqslant\frac{1}{2Q_k}\geqslant\frac{1}{2(M'+1)Q_{k-1}}\geqslant\frac{1}{Mx},$$

чем лемма доказана полностью.

Остановимся еще на некоторых свойствах полиномов Бернулли.

Числа Бернулли $B_0, B_1, \ldots$ *и полиномы Бернулли* $B_0(x), B_1(x), \ldots$ *определяются с помощью рекуррентных соотношений*

$$\begin{aligned} &B_0=1, \quad \sum_{k=0}^{n-1}C_n^kB_k=0 \qquad (n\geqslant 2),\\ &B_0(x)=1, \quad B_n(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_kx^{n-k} \qquad (n\geqslant 1). \end{aligned} \tag{20}$$

Пользуясь этими соотношениями, получим, в частности,

$$C_2^0B_0+C_2^1B_1=0,\quad 1+2B_1=0,\quad B_1=-\frac{1}{2},$$

$$C_3^0B_0+C_3^1B_1+C_3^2B_2=0,\quad 1+3\left(-\frac{1}{2}\right)+3B_2=0,$$

$$B_2=\frac{1}{6}.$$

Так же легко вычисляются и первые полиномы Бернулли:

$$B_1(x)=C_1^0B_0x+C_1^1B_1=x-\frac{1}{2},$$

$$B_2(x)=C_2^0B_0x^2+C_2^1B_1x+C_2^2B_2=x^2-x+\frac{1}{6}.$$

Лемма 6. *Для полиномов Бернулли $B_n(x)$ справедливы следующие равенства:*

$$1^\circ\ B_n(1)-B_n(0)=\begin{cases}0, & \text{если } n\neq 1\\ 1, & \text{если } n=1\end{cases}\quad (n\geqslant 0).$$

$$2^\circ\ B'_n(x)=nB_{n-1}(x)\quad (n\geqslant 1).$$

$$3^\circ\ \int_0^1 B_n(x)\,dx=0\qquad (n\geqslant 1).$$

Доказательство. Так как

$$B_0(x)=1\ \text{ и }\ B_1(x)=x-\frac{1}{2},$$

то при $n=0$ и $n=1$ равенство 1° получаем непосредственной проверкой. При $n\geqslant 2$ это равенство следует из (20):

$$B_n(1)=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k=B_n+\sum_{k=0}^{n-1}C_n^kB_k=B_n=B_n(0).$$

Дифференцируя второе из соотношений (20), получим равенство 2°:

$$B'_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\,C_n^kB_kx^{n-k-1}=$$

$$=n\sum_{k=0}^{n-1}C_{n-1}^kB_kx^{n-1-k}=nB_{n-1}(x).$$

Равенство 3° также непосредственно следует из (20):

$$\int_0^1 B_n(x)\,dx=\sum_{k=0}^{n}C_n^kB_k\,\frac{1}{n+1-k}=$$

$$=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}C_{n+1}^kB_k=0\qquad (n\geqslant 1).$$

§ 2. О классах функций

Пусть функция $f(x_1,\ldots,x_s)$ непрерывна в единичном s-мерном кубе G_s, определенном неравенствами $0\leqslant x_\nu\leqslant 1$ ($\nu=1, 2, \ldots, s$), и имеет период, равный единице по каждой из переменных $x_1,\ldots,x_s$. Обозначим через $C(m_1,\ldots,m_s)$ коэффициенты Фурье этой функции:

$$C(m_1,\ldots,m_s)=$$

$$=\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,e^{-2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}\,dx_1\ldots dx_s.$$

Пусть, далее, для $\nu=1, 2, \ldots, s$ величины $\overline{m}_\nu$ определены равенствами

$$\overline{m}_\nu=\begin{cases}1, & \text{если } m_\nu=0,\\ |m_\nu|, & \text{если } m_\nu\neq 0.\end{cases}$$

Будем говорить, что функция $f(x_1,\ldots,x_s)$ принадлежит классу E_s^α, если выполняется оценка

$$C(m_1,\ldots,m_s)=O\left((\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-\alpha}\right),$$

где α — действительное число, большее единицы, и константа в знаке O не зависит от $m_1,\ldots,m_s$. В тех случаях, когда нужно указать величину этой константы, будем вместо E_s^α писать $E_s^\alpha(C)$ и заменять предыдущую оценку неравенством

$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.\qquad (21)$$

Если $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, то ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ сходится абсолютно, так что при любых $x_1, \ldots, x_s$ будет справедливо равенство

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}.$$

Абсолютная сходимость этого ряда следует из оценки (21), в силу условия $\alpha > 1$:

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} |C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant C \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = CB^s,$$

где

$$B = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{m}^\alpha} = 1 + 2\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^\alpha} \leqslant 3 + 2\int_1^\infty \frac{dx}{x^\alpha} =$$

$$= 3 + \frac{2}{\alpha - 1}. \qquad (22)$$

Легко показать, что при $\alpha > 2$ функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, принадлежащие классу $E_s^\alpha(C)$, будут иметь непрерывную смешанную производную $\frac{\partial^{\nu s} f}{\partial x_1^\nu \ldots \partial x_s^\nu}$, где

$$\nu = \begin{cases} \alpha - 2, & \text{если } \alpha \text{ — целое}, \\ [\alpha] - 1, & \text{если } \alpha \text{ — нецелое}. \end{cases} \qquad (23)$$

Действительно, почленное дифференцирование ряда Фурье функции f дает

$$\frac{\partial^{\nu s} f}{\partial x_1^\nu \ldots \partial x_s^\nu} =$$

$$= (2\pi i)^{\nu s} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} (m_1 \ldots m_s)^\nu C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}.$$

Непрерывность производной и законность почленного дифференцирования следует из равномерной сходимости получающегося ряда Фурье. Равномерная сходимость этого ряда очевидна благодаря оценке

$$|(m_1 \ldots m_s)^\nu C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha - \nu}},$$

где в силу (23) $\alpha - \nu > 1$.

Пусть $\alpha \geqslant 1$ — целое. Будем говорить, что функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу H_s^α, если в единичном s-мерном кубе G_s она имеет непрерывные производные вида

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_s^{n_s}} \qquad (0 \leqslant n \leqslant \alpha s,\ 0 \leqslant n_\nu \leqslant \alpha).$$

Если эти производные непрерывны во всем s-мерном пространстве и функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ имеет период, равный единице по каждой из переменных, то будем говорить, что $f(x_1, \ldots, x_s)$ — периодическая функция из класса H_s^α. Наряду с классом E_s^α класс H_s^α будет рассматриваться на протяжении всей книги; в нескольких случаях встретится также более узкий *класс D_s^α, состоящий из функций, имеющих непрерывные производные вида*

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_s^{n_s}} \qquad (0 \leqslant n \leqslant \alpha s,\ 0 \leqslant n_\nu \leqslant \alpha s).$$

В тех случаях, когда надо указать величину константы C, ограничивающей в единичном кубе модули производных

$$\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_s^{n_s}},$$

вместо H_s^α и D_s^α будем писать соответственно $H_s^\alpha(C)$ и $D_s^\alpha(C)^s$ *).

Обычно в вопросах приближенного анализа рассматриваются функции, принадлежащие классам D_s^α. Однако, как это можно видеть на следующем примере, наряду

*) Существование такой константы следует, очевидно, из непрерывности производных $\frac{\partial^n f}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_s^{n_s}}$.

с классами D_s^α целесообразно рассматривать введенные выше классы E_s^α и H_s^α *).

Действительно, пусть $\alpha > 1$ — целое, $f(x) \in D_1^\alpha$ и $K(x, y) \in D_2^\alpha$, причем $K(x, y) \notin D_2^{\alpha+1}$. Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy + f(x).$$

Известно, что при решении этого уравнения методом итераций возникают интегралы вида

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 K(x, x_1) \ldots K(x_{s-1}, x_s)\, f(x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Обозначим подынтегральную функцию через $F(x_1, \ldots, x_s)$:

$$F(x_1, \ldots, x_s) = K(x, x_1) \ldots K(x_{s-1}, x_s)\, f(x_s).$$

Функция F имеет непрерывную смешанную производную $\dfrac{\partial^{\alpha s} F}{\partial x_1^\alpha \ldots \partial x_s^\alpha}$, но, очевидно, при $s > 1$ не все ее производные порядка αs существуют. Следовательно, эта функция принадлежит классу H_s^α, но не может принадлежать классу D_s^α. В случае периодичности функций $f(x)$ и $K(x, y)$ этот же пример приводит к функциям класса E_s^α.

Отсюда видно, что изучение вопросов приближенного интегрирования функций, принадлежащих классам E_s^α и H_s^α, может, в частности, быть полезным в вопросах приближенного решения интегральных уравнений.

По дифференциальным свойствам класс E_s^α близок к классу H_s^α. Действительно, в силу первого из утверждений (23) при целом $\alpha > 2$ из $f \in E_s^\alpha$ следует, что $f \in H_s^{\alpha-2}$. С другой стороны, нетрудно показать, что при $\alpha > 1$ периодические функции из класса H_s^α принадлежат классу E_s^α. Мы получим этот результат как следствие более общего утверждения.

*) Аналогичный пример для класса H_s^1 был рассмотрен во введении.

Лемма 7. *Пусть $\alpha > 1$, αs — целое и $\nu_1, \ldots, \nu_s$ — произвольная перестановка фиксированных целых $\alpha_1 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_s$, выбранных из интервала $[0, \alpha s]$ так, что $\alpha_1 + \ldots + \alpha_s = \alpha s$. Если функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ имеет период, равный единице, по каждой из переменных, и все ее производные вида $\dfrac{\partial^{\alpha s} f}{\partial x_1^{\nu_1} \ldots \partial x_s^{\nu_s}}$ непрерывны во всем s-мерном пространстве, то $f \in E_s^\alpha$.*

Доказательство. Пусть $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые числа, не равные одновременно нулю. Предположим, что k из них отличны от нуля $(1 \leqslant k \leqslant s)$ и что $j_1, \ldots, j_s$ — такая перестановка индексов этих чисел, при которой $|m_{j_1}| \geqslant \ldots \geqslant |m_{j_s}|$.

Для каждого $\nu = 1, 2, \ldots, k$ в равенстве

$$C(m_1, \ldots, m_s) = \\ = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}\, dx_1 \ldots dx_s \qquad (24)$$

проведем α_ν-кратное интегрирование по частям по x_{j_ν}. В силу непрерывности производных функции f и периодичности самой функции все частные производные, возникающие при таком интегрировании, будут периодичны. Поэтому после подстановки пределов интегрирования проинтегрированные члены обратятся в нуль и равенство (24) примет вид:

$$C(m_1, \ldots, m_s) = \frac{1}{(2\pi i)^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k} m_{j_1}^{\alpha_1} \ldots m_{j_k}^{\alpha_k}} \times \\ \times \int_0^1 \ldots \int_0^1 \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_k} f}{\partial x_{j_1}^{\alpha_1} \ldots \partial x_{j_k}^{\alpha_k}}\, e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Отсюда, обозначая через C константу, ограничивающую модуль функции f и модули всех ее производных вида $\frac{\partial^{\alpha_1+\dots+\alpha_k} f}{\partial x_{j_1}^{\alpha_1}\dots\partial x_{j_k}^{\alpha_k}}$ $(1\leqslant k\leqslant s)$, получим

$$|C(m_1,\dots,m_s)|\leqslant \frac{C}{|m_{j_1}|^{\alpha_1}\dots|m_{j_k}|^{\alpha_k}}. \tag{25}$$

Пусть $1\leqslant r\leqslant s$ и $\beta_r=\frac{1}{r}(\alpha_1+\dots+\alpha_r)$. Легко показать, что при $n_1\geqslant\dots\geqslant n_r\geqslant 1$ справедливо неравенство

$$n_1^{\alpha_1}\dots n_r^{\alpha_r}\geqslant(n_1\dots n_r)^{\beta_r}. \tag{26}$$

Действительно, при $r=1$ это неравенство очевидно. Применим индукцию. Пусть $r\geqslant 2$ и утверждение верно для $r-1$. Тогда, так как $\alpha_1\geqslant\beta_r$ и $\alpha_1+\dots+\alpha_r-\beta_r=(r-1)\beta_r$, получим

$$n_1^{\alpha_1}\dots n_r^{\alpha_r}=n_1^{\beta_r}n_1^{\alpha_1-\beta_r}n_2^{\alpha_2}\dots n_r^{\alpha_r}\geqslant n_1^{\beta_r}n_2^{\alpha_1+\alpha_2-\beta_r}\dots n_r^{\alpha_r}\geqslant$$
$$\geqslant n_1^{\beta_r}(n_2\dots n_r)^{\frac{1}{r-1}(\alpha_1+\dots+\alpha_r-\beta_r)}=(n_1\dots n_r)^{\beta_r}.$$

Применяя неравенство (26) при $n_\nu=|m_{j_\nu}|$ и замечая, что $\beta_k\geqslant\beta_s=\alpha$, получим из (25)

$$|C(m_1,\dots,m_s)|\leqslant\frac{C}{(|m_{j_1}|\dots|m_{j_k}|)^\alpha}=\frac{C}{(\bar m_1\dots\bar m_s)^\alpha}.$$

(Последнее равенство справедливо в силу того, что $m_{j_{k+1}}=\dots=m_{j_s}=0$ и, следовательно, $\bar m_{j_{k+1}}=\dots=\bar m_{j_s}=1$.)

Так как

$$|C(0,\dots,0)|=\left|\int_0^1\dots\int_0^1 f(x_1,\dots,x_s)\,dx_1\dots dx_s\right|\leqslant C,$$

то оценка

$$|C(m_1,\dots,m_s)|\leqslant\frac{C}{(\bar m_1\dots\bar m_s)^\alpha} \tag{27}$$

справедлива при любых целых $m_1,\dots,m_s$, чем лемма доказана.

Следствие 1. *Пусть $\alpha>1$. Тогда всякая периодическая функция из класса $H_s^\alpha(C)$ принадлежит также классу $E_s^\alpha(C)$.*

Действительно, выберем в лемме 7 $\alpha_1=\dots=\alpha_s=\alpha$. Тогда, пользуясь оценкой (27), в силу определения классов $H_s^\alpha(C)$ и $E_s^\alpha(C)$ получим утверждение следствия.

В следствии 1 выделен случай, когда функция $f(x_1,\dots,x_s)$, имеющая смешанную производную высокого порядка, имеет минимальную гладкость по каждой из переменных $x_1,\dots,x_s$. Отметим также другой крайний случай леммы, когда функция $f(x_1,\dots,x_s)$ имеет максимальную гладкость по каждой из переменных.

Следствие 2. *Пусть $\alpha>1$ и αs — целое. Если функция $f(x_1,\dots,x_s)$ имеет период, равный единице, по каждой из переменных и ее производные вида $\frac{\partial^{\alpha s}f}{\partial x_\nu^{\alpha s}}$ $(\nu=1,2,\dots,s)$ непрерывны во всем s-мерном пространстве, то $f(x_1,\dots,x_s)\in E_s^\alpha$.*

Для доказательства этого утверждения достаточно в лемме 7 выбрать $\alpha_1=\alpha s$, $\alpha_2=\dots=\alpha_s=0$.

Само собою разумеется, что и периодические функции из класса D_s^α, состоящего из функций, имеющих все производные порядка αs, также будут принадлежать классу E_s^α *).

Лемма 8. *Функции $f(x_1,\dots,x_s)$ из класса E_s^α, рассматриваемые как функции каких-либо s' своих переменных, где $1\leqslant s'<s$, принадлежат классу $E_{s'}^\alpha$.*

Доказательство. Будем, для определенности, рассматривать функцию $f(x_1,\dots,x_s)$ как функцию ее первых s'-переменных:

$$f(x_1,\dots,x_{s'},x_{s'+1},\dots,x_s)=\varphi(x_1,\dots,x_{s'}).$$

*) Периодические функции из класса D_s^α определяются так же, как это было сделано в случае класса H_s^α (см. стр. 31).

Обозначим соответственно через $C(m_1, \ldots, m_s)$ и $C_1(m_1, \ldots, m_{s'})$ коэффициенты Фурье функций $f(x_1, \ldots, x_s)$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_{s'})$. Тогда из равенства

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_{s'} = -\infty}^{\infty} \Bigg[\sum_{m_{s'+1}, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s) \times$$

$$\times e^{2\pi i (m_{s'+1} x_{s'+1} + \ldots + m_s x_s)} \Bigg] e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_{s'} x_{s'})}$$

следует, что

$$C_1(m_1, \ldots, m_{s'}) =$$

$$= \sum_{m_{s'+1}, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_{s'+1} x_{s'+1} + \ldots + m_s x_s)}.$$

Отсюда, пользуясь тем, что

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha},$$

получим оценку

$$|C_1(m_1, \ldots, m_{s'})| \leqslant \sum_{m_{s'+1}, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} |C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{(\bar m_1 \ldots \bar m_{s'})^\alpha} \sum_{m_{s'+1}, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(\bar m_{s'+1} \ldots \bar m_s)^\alpha} = O\left((\bar m_1 \ldots \bar m_{s'})^{-\alpha}\right),$$

равносильную утверждению леммы.

Замечание. Функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ из класса E_s^α можно рассматривать как функции класса $E_{s'}^\alpha$ не только в тех случаях, когда $s' < s$, но и при $s' > s$.

Действительно, пусть $s' > s$ и $C(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье некоторой функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, принадлежащей классу $E_s^\alpha(C)$. Определим величины $C_1(m_1, \ldots, m_{s'})$ с помощью равенств

$$C_1(m_1, \ldots, m_{s'}) = \begin{cases} C(m_1, \ldots, m_s), & \text{если } (m_{s+1}, \ldots, m_{s'}) = (0, \ldots, 0), \\ 0, & \text{если } (m_{s+1}, \ldots, m_{s'}) \neq (0, \ldots, 0). \end{cases}$$

Тогда очевидно

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_{s'} = -\infty}^{\infty} C_1(m_1, \ldots, m_{s'})\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_{s'} x_{s'})}.$$

Так как при $(m_{s+1}, \ldots, m_{s'}) = (0, \ldots, 0)$ выполняется равенство $\bar m_{s+1} \ldots \bar m_{s'} = 1$, то, пользуясь оценкой

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha},$$

в силу определения $C_1(m_1, \ldots, m_{s'})$ при любых $m_1, \ldots, m_{s'}$ получим

$$|C_1(m_1, \ldots, m_{s'})| \leqslant \frac{C}{(\bar m_1 \ldots \bar m_{s'})^\alpha}.$$

Отсюда следует, что при любом $s' > s$ функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу $E_{s'}^\alpha$.

Лемма 9. *Пусть функции $f_1(x_1, \ldots, x_s)$ и $f_2(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежат соответственно классам $E_s^\alpha(C_1)$ и $E_s^\alpha(C_2)$. Тогда при любых B_1 и B_2*

$$B_1 f_1 + B_2 f_2 \in E_s^\alpha(|B_1| C_1 + |B_2| C_2) \quad \text{и} \quad f_1 f_2 \in E_s^\alpha(A C_1 C_2),$$

где $A \leqslant \left[2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)\right]^s$.

Доказательство. Обозначим через $C_1(m_1, \ldots, m_s)$ и $C_2(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функций f_1 и f_2:

$$f_\nu(x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C_\nu(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \qquad (\nu = 1, 2).$$

Согласно условию леммы

$$|C_1(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C_1}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha},$$

$$|C_2(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C_2}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha},$$

следовательно,

$$\left| B_1C_1(m_1, \ldots, m_s) + B_2C_2(m_1, \ldots, m_s) \right| \leqslant \frac{|B_1|C_1 + |B_2|C_2}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha}.$$

Отсюда, так как

$$B_1f_1 + B_2f_2 = \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} [B_1C_1(m_1, \ldots, m_s) +$$
$$+ B_2C_2(m_1, \ldots, m_s)]\, e^{2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)},$$

получаем первое из утверждений леммы.

Пусть теперь $C(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функции

$$f(x_1, \ldots, x_s) = f_1(x_1, \ldots, x_s) \cdot f_2(x_1, \ldots, x_s).$$

Непосредственно перемножая ряды Фурье функций f_1 и f_2, получим

$$f(x_1, \ldots, x_s) =$$
$$= \sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} \sum_{k_1, \ldots, k_s=-\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s)\, C_2(k_1, \ldots, k_s)\, e^{2\pi i[(n_1+k_1)x_1 + \ldots + (n_s+k_s)x_s]} =$$
$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} \Big[\sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s)\, C_2(m_1 - n_1, \ldots$$
$$\ldots, m_s - n_s)\Big]\, e^{2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)}.$$

Следовательно,

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| =$$
$$= \Big| \sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s)\, C_2(m_1 - n_1, \ldots, m_s - n_s) \Big| \leqslant$$
$$\leqslant C_1C_2 \sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\bar n_1 \ldots \bar n_s (\overline{m_1 - n_1}) \ldots (\overline{m_s - n_s})]^\alpha} =$$
$$= C_1C_2\sigma(m_1) \ldots \sigma(m_s), \tag{28}$$

где через $\sigma(m)$ обозначена сумма

$$\sigma(m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{[\bar n (\overline{m - n})]^\alpha}.$$

Нетрудно показать, что

$$\sigma(m) \leqslant \frac{2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)}{\bar m^\alpha}. \tag{29}$$

Действительно, если $\bar m > 1$, то, пользуясь оценкой (22), получим

$$\sigma(m) = \sum_{|n| \leqslant \frac{|m|}{2}} \frac{1}{[\bar n (\overline{m - n})]^\alpha} + \sum_{|n| > \frac{|m|}{2}} \frac{1}{[\bar n (\overline{m - n})]^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^\alpha}{\bar m^\alpha} \left(\sum_{|n| \leqslant \frac{|m|}{2}} \frac{1}{\bar n^\alpha} + \sum_{|n| > \frac{|m|}{2}} \frac{1}{(\overline{m - n})^\alpha} \right) \leqslant$$
$$\leqslant \frac{2^{\alpha+1}}{\bar m^\alpha} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar n^\alpha} \leqslant \frac{2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)}{\bar m^\alpha}.$$

Если $\bar m = 1$, то оценка (29) очевидна, так как

$$\sigma(m) \leqslant \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar n^\alpha} \leqslant 3 + \frac{2}{\alpha - 1} < \frac{2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)}{\bar m^\alpha}.$$

Выберем $A = \left[2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)\right]^s$, тогда из (28) и (29) следует второе утверждение леммы:

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{\left[2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)\right]^s C_1C_2}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha} = \frac{AC_1C_2}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha}.$$

Замечание 1. Легко показать, что справедливо следующее обобщение леммы 9: если

$$f_1(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_t) \in E^\alpha_{s+t}(C_1)$$

и

$$f_2(x_1, \ldots, x_s, z_1, \ldots, z_{t'}) \in E^\alpha_{s+t'}(C_2),$$

то $f_1f_2 \in E^\alpha_{s+t+t'}(AC_1C_2)$, где $A = \left[2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)\right]^s$, Действительно, обозначим соответственно через

$$C_1(n_1, \ldots, n_s, m_{s+1}, \ldots, m_{s+t}),$$

$$C_2(k_1, \ldots, k_s, m_{s+t+1}, \ldots, m_{s+t+t'}), \quad C(m_1, \ldots, m_{s+t+t'})$$

коэффициенты Фурье функций f_1, f_2 и $f_1 f_2$. Тогда, перемножая ряды Фурье функций f_1 и f_2, получим оценку, аналогичную оценке (28):

$$|C(m_1, \ldots, m_{s+t+t'})| =$$

$$= \Bigl|\sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} C_1(n_1, \ldots, n_s, m_{s+1}, \ldots, m_{s+t}) \times$$

$$\times C_2(m_1 - n_1, \ldots, m_s - n_s, m_{s+t+1}, \ldots, m_{s+t+t'})\Bigr| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_1 C_2 \sigma(m_1) \ldots \sigma(m_s)}{(\overline{m}_{s+1} \ldots \overline{m}_{s+t+t'})^{\alpha}}.$$

Отсюда, пользуясь оценкой (29), получим

$$|C(m_1, \ldots, m_{s+t+t'})| \leqslant \frac{C_1 C_2 \left[2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)\right]^s}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_{s+t+t'})^{\alpha}}$$

и, следовательно, функция $f_1 f_2$ принадлежит классу $E^{\alpha}_{s+t+t'}(AC_1C_2)$, где $A = \left[2^{\alpha+1}\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)\right]^s$.

З а м е ч а н и е 2. Тем же путем, как и в лемме 9, получается следующее утверждение: если $f(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s) \in E^{\alpha}_{2s}$ и $f_1(x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots, x_s, x_1, \ldots, x_s)$, то $f_1(x_1, \ldots, x_s) \in E^{\alpha}_s$.

Действительно, пусть $C(n_1, \ldots, n_s, k_1, \ldots, k_s)$ и $C_1(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функций f и f_1. Очевидно,

$$f_1(x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \sum_{n_1, \ldots, k_s=-\infty}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_s, k_1, \ldots, k_s)\, e^{2\pi i[(n_1+k_1)x_1 + \ldots + (n_s+k_s)x_s]} =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} \Bigl[\sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_s, m_1 - n_1, \ldots$$

$$\ldots, m_s - n_s)\Bigr]\, e^{2\pi i(m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}.$$

Отсюда, как и при выводе оценки (28), получим

$$|C_1(m_1, \ldots, m_s)| =$$

$$= \Bigl|\sum_{n_1, \ldots, n_s=-\infty}^{\infty} C(n_1, \ldots, n_s, m_1 - n_1, \ldots, m_s - n_s)\Bigr| =$$

$$= O(\sigma(m_1) \ldots \sigma(m_s)),$$

где в силу (29) $\sigma(m) = O(\overline{m}^{-\alpha})$. Но тогда

$$C_1(m_1, \ldots, m_s) = O((\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{-\alpha})$$

и, следовательно, $f_1(x_1, \ldots, x_s) \in E^{\alpha}_s$.

Л е м м а 10. *Пусть функция* $\psi(x)$ *определена равенствами*

$$\psi(x+1) = \psi(x),$$

$$\psi(x) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sin \pi n x}{n}\right)^{\alpha-1}, & \text{если } 0 \leqslant x \leqslant \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{если } \dfrac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1, \end{cases} \qquad (30)$$

где $\alpha > 1$ *и* $n \geqslant 1$ — *произвольные целые. Тогда функция*

$$\psi(x_1, \ldots, x_s) = \psi(x_1) \ldots \psi(x_s)$$

принадлежит классу $E^{\alpha}_s(C_0)$, *где* C_0 *не зависит от* n.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Обозначим через $C(m)$ коэффициенты Фурье функции $\psi(x)$:

$$C(m) = \int_0^1 \psi(x)\, e^{-2\pi i m x}\, dx.$$

Замечая, что для $\nu = 0, 1, \ldots, \alpha - 2$ справедливы равенства $\psi^{(\nu)}(0) = \psi^{(\nu)}\left(\frac{1}{n}\right) = 0$, при $m \neq 0$ с помощью интегрирования по частям получим

$$C(m) = \frac{1}{(2\pi i m)^{\alpha-1}} \int_0^{1/n} \psi^{(\alpha-1)}(x)\, e^{-2\pi i m x}\, dx =$$

$$= \frac{-1}{(2\pi i m)^{\alpha}}\, \psi^{(\alpha-1)}(x)\, e^{-2\pi i m x}\Big|_0^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{(2\pi i m)^{\alpha}} \int_0^{1/n} \psi^{(\alpha)}(x)\, e^{-2\pi i m x}\, dx;$$

$$|C(m)| \leqslant \frac{2C_1}{(2\pi |m|)^{\alpha}} + \frac{C_2}{n(2\pi |m|)^{\alpha}},$$

где

$$C_\nu = \max_{0<x<\frac{1}{n}} |\psi^{(\alpha+\nu-2)}(x)| \qquad (\nu = 1, 2).$$

Далее, пользуясь для $0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{n}$ равенством

$$\psi(x) = \left(\frac{\sin \pi n x}{n}\right)^{\alpha-1} = \frac{(e^{\pi i n x} - e^{-\pi i n x})^{\alpha-1}}{(2in)^{\alpha-1}},$$

без труда получим оценки

$$C_1 = \max |\psi^{(\alpha-1)}(x)| \leqslant \frac{[2\pi n(\alpha-1)]^{\alpha-1}}{(2n)^{\alpha-1}} = [\pi(\alpha-1)]^{\alpha-1},$$

$$C_2 = \max |\psi^{(\alpha)}(x)| \leqslant [\pi(\alpha-1)]^\alpha n.$$

Следовательно, при $m \neq 0$

$$|C(m)| \leqslant \frac{2[\pi(\alpha-1)]^{\alpha-1} + [\pi(\alpha-1)]^\alpha}{(2\pi |m|)^\alpha} < \frac{\left(\frac{\alpha}{2}\right)^\alpha}{|m|^\alpha}$$

и, так как в силу (30) $|C(0)| \leqslant 1$, то для любого m получим оценку

$$|C(m)| \leqslant \frac{C'}{\overline{m}^\alpha},$$

где $C' = \left(\frac{\alpha}{2}\right)^\alpha$. Отсюда согласно определению класса E_s^α следует, что $\psi(x) \in E_1^\alpha(C')$.

Рассматривая каждую из функций $\psi(x_\nu)$ как функцию всех переменных $x_1, \ldots, x_s$ и применяя лемму 9, получим утверждение леммы 10:

$$\psi(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^\alpha(C_0),$$

где константа $C_0 = A^{s-1}(C')^s$ зависит только от α и s.

§ 3. О квадратурных формулах

Рассмотрим простейшую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R, \qquad (31)$$

где через $-R$ обозначена погрешность, получающаяся при замене интеграла

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s$$

средним значением функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, вычисленным в точках

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Совокупность точек M_k будем называть сеткой, а сами точки — узлами квадратурной формулы.

Для периодических функций существует тесная связь между вопросом об оценке погрешности простейших квадратурных формул (31) и оценкой тригонометрических сумм вида

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^N e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}, \qquad (32)$$

где $\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)$ — координаты точек сетки M_k.

В свою очередь тригонометрические суммы (32) связаны с различными вопросами теории чисел [8], [9]. Таким образом, устанавливается связь между двумя, казалось бы, далекими друг от друга областями — построением квадратурных формул и вопросами теории чисел.

Лемма 11. *Если функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ задана абсолютно сходящимся рядом Фурье*

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}, \qquad (33)$$

то погрешность квадратурной формулы

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R \qquad (34)$$

удовлетворяет равенству *)

$$R=\frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(m_1,\ldots,m_s)\,S(m_1,\ldots,m_s), \qquad (35)$$

где $S(m_1, \ldots, m_s)$ — *тригонометрическая сумма, определенная равенством* (32).

Доказательство. Так как

$$C(0,\ldots,0)=\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s,$$

то из (34) в силу (33) получим

$$R=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)]-C(0,\ldots,0)=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} C(m_1,\ldots,m_s)\,e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]}-C(0,\ldots,0).$$

Отсюда после выделения слагаемого с $(m_1, \ldots, m_s)=(0, \ldots, 0)$ и перемены порядка суммирования следует равенство

$$R=\frac{1}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(m_1,\ldots,m_s)\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i[m_1\xi_1(k)+\ldots+m_s\xi_s(k)]},$$

которое в силу определения суммы $S(m_1, \ldots, m_s)$ совпадает с утверждением леммы.

Следствие. Если $f(x_1, \ldots, x_s)\in E_s^\alpha(C)$, *то для погрешности квадратурной формулы* (34) *справедлива оценка*

$$|R|\leqslant\frac{C}{N}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{|S(m_1,\ldots,m_s)|}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}. \qquad (36)$$

*) В равенстве (35) и всюду далее Σ' означает суммирование по системам $(m_1, \ldots, m_s)\neq(0, \ldots, 0)$.

Действительно, эта оценка сразу следует из (35) в силу неравенства

$$|C(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Рассмотрим, какую оценку величины R в лучшем случае можно было бы ожидать для функций класса E_s^α. Пусть $C>0$ произвольно и $\alpha>1$ — целое.

Теорема 1. *При любом* $N>1$ *для всякой сетки*

$$M_k=(\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)) \qquad (k=1,2,\ldots,N)$$

найдется функция $f(x_1, \ldots, x_s)\in E_s^\alpha(C)$ *такая, что погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k)]-R \qquad (37)$$

удовлетворяет неравенству

$$|R|>\frac{C_1C}{N^\alpha},$$

где $C_1=C_1(\alpha, s)>0$.

Доказательство. Выберем целое n из условия

$$(n-1)^s\leqslant N<n^s$$

и разобьем каждое из ребер единичного s-мерного куба на n равных частей. Проводя через точки деления плоскости, параллельные координатным плоскостям, разобьем куб на n^s малых кубиков. Так как $n^s>N$, то найдется кубик, не содержащий ни одной точки сетки M_k. Выберем любой такой кубик и обозначим через $\theta_1, \ldots, \theta_s$ координаты той из его вершин, которая будет ближайшей к началу координат.

Определим функцию $\psi(x_1, \ldots, x_s)$, как в лемме 10, и выберем

$$f(x_1,\ldots,x_s)=\frac{C}{C_0}\psi(x_1-\theta_1,\ldots,x_s-\theta_s). \qquad (38)$$

Тогда, обозначая через $C(m_1, \ldots, m_s)$ и $C'(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функций $f(x_1, \ldots, x_s)$ и $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$, из (38) получим

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| = \left|\frac{C}{C_0} C'(m_1, \ldots, m_s)\, e^{-2\pi i(m_1\theta_1 + \ldots + m_s\theta_s)}\right| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}.$$

Отсюда следует, что функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$. Далее в силу периодичности функции $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ из (38) следует, что

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{C}{C_0}\int_0^1 \ldots \int_0^1 \varphi(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$
$$= \frac{C}{C_0}\left[\int_0^{\frac{1}{n}} \left(\frac{\sin \pi n x}{n}\right)^{\alpha-1} dx\right]^s = \frac{C}{C_0 n^{\alpha s}}\left[\int_0^1 (\sin \pi x)^{\alpha-1}\, dx\right]^s > \frac{C}{C_0 (2n)^{\alpha s}}.$$

Теперь, замечая, что $n^{\alpha s} \leqslant [2(n-1)]^{\alpha s} \leqslant 2^{\alpha s} N^\alpha$, получим оценку

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s > \frac{C}{C_0 4^{\alpha s} N^\alpha}. \qquad (39)$$

Согласно определению функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ ее значения в точках сетки M_k равны нулю. Поэтому равенство (37) можно переписать в виде

$$R = -\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s.$$

Отсюда, выбирая $C_1 = \frac{1}{C_0 4^{\alpha s}}$ и пользуясь оценкой (39), получим утверждение теоремы:

$$|R| \geqslant \frac{C}{C_0 4^{\alpha s} N^\alpha} = \frac{C_1 C}{N^\alpha}.$$

Теорема 1 показывает, что на классе E_s^α ни при каком выборе сеток нельзя получить квадратурные формулы вида (37), для которых погрешность имела бы оценку лучшую, чем $O(N^{-\alpha})$.

Путем почти дословного повторения рассуждений теоремы 1 можно убедиться, что для класса E_s^α нельзя уточнить оценку $R = O(N^{-\alpha})$ и в случае квадратурных формул с произвольными весами ρ_k:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \sum_{k=1}^N \rho_k f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R.$$

Аналогичное утверждение справедливо также для класса H_s^α и даже для случая более гладких функций, составляющих класс D_s^α. Отметим, что все эти утверждения следуют из результатов, полученных Н. С. Бахваловым [1] для квадратурных формул самого общего вида.

Пусть $n>1$ — произвольное целое. Разобьем единичный s-мерный куб, как при доказательстве теоремы 1, на n^s малых кубиков. *Совокупность точек*

$$M_k = \left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right) \qquad (1 \leqslant k_\nu \leqslant n,\ \nu = 1, 2, \ldots, s), \qquad (40)$$

лежащих в вершинах этих кубиков, будем называть равномерной сеткой.

Теорема 2. *Пусть $N = n^s$. Если $f(x_1, \ldots, x_s)$ — периодическая функция из класса D_s^α, то для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k_1=1}^n \ldots \sum_{k_s=1}^n f\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right) - R,$$

построенной с помощью равномерной сетки, справедлива оценка

$$R = O(N^{-\alpha}).$$

Доказательство. Обозначим через $C(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$. Пользуясь леммой 11, получим

$$|R| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)| \, |S(m_1, \ldots, m_s)|,$$

где в силу (32) и (40)

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_s=1}^{n} e^{2\pi i \left(\frac{m_1 k_1}{n} + \ldots + \frac{m_s k_s}{n}\right)}.$$

Согласно лемме 1 отсюда получим

$$S(m_1, \ldots, m_s) = n^s \delta_n(m_1) \ldots \delta_n(m_s), \tag{41}$$

так что

$$|R| \leqslant \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)| \, \delta_n(m_1) \ldots \delta_n(m_s) =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1 n, \ldots, m_s n)|. \tag{42}$$

Применяя к функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ лемму 7 при $\alpha_1 = \alpha s$, $\alpha_2 = \ldots = \alpha_s = 0$, из (25) получим

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{m^{\alpha s}},$$

где $m = \max(|m_1|, \ldots, |m_s|)$. Следовательно,

$$|R| \leqslant \frac{C}{n^{\alpha s}} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{m^{\alpha s}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C}{N^{\alpha}} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}} = O(N^{-\alpha}),$$

чем теорема доказана.

Как уже было отмечено выше, на классе D_s^α ни при каком выборе сеток нельзя построить квадратурные формулы, погрешность которых имела бы оценку, лучшую чем $R = O(N^{-\alpha})$. С другой стороны, согласно теореме 2 эта оценка достигается при квадратурных формулах с равномерными сетками. Таким образом, для периодических функций из класса D_s^α (т. е. для очень гладких функций, обладающих всеми производными порядка αs), квадратурные формулы с равномерными сетками по порядку оценки погрешности являются лучшими из возможных при любом $s \geqslant 1$. Иначе обстоит дело для более широких классов H_s^α и E_s^α, состоящих из функций, обладающих сравнительно небольшой гладкостью по каждой из переменных при сохранении высокой гладкости по совокупности переменных.

Теорема 3. *Если $N = n^s$ и $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k_1=1}^{n} \ldots \sum_{k_s=1}^{n} f\left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right) - R$$

справедлива оценка

$$R = O\left(N^{-\frac{\alpha}{s}}\right);$$

эта оценка на классе $E_s(C)$ является достижимой.

Доказательство. Пользуясь оценкой

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}},$$

из (42) получим

$$|R| \leqslant C \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{m_1 n} \ldots \overline{m_s n})^{\alpha}} =$$

$$= C\left[-1 + \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{mn})^{\alpha}}\right)^s\right] =$$

$$= C\left[\left(1 + \frac{2}{N^{\frac{\alpha}{s}}} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{\alpha}}\right)^s - 1\right] = O\left(N^{-\frac{\alpha}{s}}\right),$$

чем доказано первое утверждение теоремы.

Чтобы убедиться в неулучшаемости полученной оценки, рассмотрим функцию

$$f(x_1, \ldots, x_s) = C \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^\alpha}.$$

Очевидно, $f(x_1, \ldots, x_s) \in E_s^\alpha(C)$. Для этой функции, пользуясь равенством (41), в силу леммы 11 получим

$$R = \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{CS(m_1, \ldots, m_s)}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^\alpha} =$$

$$= C \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_n(m_1) \ldots \delta_n(m_s)}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^\alpha}.$$

Выделяя слагаемое, для которого $m_1 = n$, $m_2 = \ldots = m_s = 0$, получим второе утверждение теоремы:

$$R > \frac{C}{n^\alpha} = CN^{-\frac{\alpha}{s}}.$$

При $s > 1$ порядок оценки величины R в теоремах 3 и 1, равный соответственно $N^{-\frac{\alpha}{s}}$ и $N^{-\alpha}$, не совпадает. Чем больше кратность интеграла s, тем сильнее отклоняется первая из этих оценок от второй. Это обстоятельство позволяет предположить, что в отличие от класса D_s^α при построении квадратурных формул на классе E_s^α выбор равномерных сеток уже не является наилучшим.

В следующей главе будет показано, что на классе E_s^α при $s > 1$ оценку $R = O\left(N^{-\frac{\alpha}{s}}\right)$ действительно можно улучшить с помощью выбора сеток, отличных от равномерной сетки.

Пусть в единичном s-мерном кубе G_s дана некоторая бесконечная последовательность точек

$$M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots$$

Рассмотрим сетку

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{43}$$

составленную из N первых точек этой последовательности. Отметим, что такие сетки обладают двумя особенностями. Во-первых, число точек сетки (43) может быть выбрано произвольным. Во-вторых, если $N_2 > N_1$, то все точки сетки (43), построенной при $N = N_1$, будут вместе с тем точками сетки, построенной при $N = N_2$.

Сетки простейших квадратурных формул (31), очевидно, не всегда обладают этими свойствами. Так, например, при $s > 1$ равномерные сетки (40) имеют смысл не для любого N, а лишь для $N = n^s$, где $n \geqslant 2$ — некоторое целое. Не выполняется для равномерных сеток и второе из указанных свойств (оно имеет место не при всяком $N_2 > N_1$, а лишь при N_2 кратном N_1).

Следующая теорема показывает, что ни при каких требованиях к гладкости функций для квадратурных формул, построенных с помощью сеток (43), составленных из произвольного числа первых точек любой бесконечной последовательности, нельзя получить оценку погрешности, лучшую чем $O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Теорема 4 (Н. Н. Ченцов). *Ни при каком выборе последовательности точек*

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

на классе аналитических функций нельзя получить оценку погрешности квадратурной формулы

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R$$

лучшую, чем $R = O\left(\frac{1}{N}\right)$.

Доказательство. Допустим, что существует последовательность точек M_k такая, что на классе аналитических функций справедливо равенство

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] + o\left(\frac{1}{N}\right).$$

Домножая это равенство на N и выбирая $f(x_1, \ldots, x_s) = \varphi(x_1)$, получим

$$\sum_{k=1}^{N} \varphi[\xi_1(k)] = N \int_0^1 \varphi(x_1)\,dx_1 + o(1).$$

Следовательно,

$$\varphi[\xi_1(N)] = \sum_{k=1}^{N} \varphi[\xi_1(k)] - \sum_{k=1}^{N-1} \varphi[\xi_1(k)] = \int_0^1 \varphi(x_1)\,dx_1 + o(1).$$

Полагая здесь $\varphi(x_1) = \sin 2\pi x_1$, получим

$$\sin 2\pi\xi_1(N) = o(1). \tag{44}$$

Аналогично при $\varphi(x_1) = \cos 2\pi x_1$ получаем равенство

$$\cos 2\pi\xi_1(N) = o(1). \tag{45}$$

Пользуясь равенствами (44) и (45), получим

$$1 = \sin^2 2\pi\xi_1(N) + \cos^2 2\pi\xi_1(N) = o(1),$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает теорему. Отметим, что теорема 4 представляет частный случай более общего утверждения, полученного Н. Н. Ченцовым: «Если для функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ существует сетка вида (43) такая, что

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] + o\left(\frac{1}{N}\right),$$

то задача приближенного интегрирования этой функции не является содержательной».

§ 4. Периодизация функций

Всякая квадратурная формула, полученная для функций, принадлежащих классу E_s^α, будет справедлива и для периодических функций из класса H_s^α, так как согласно первому следствию леммы 7 такие функции принадлежат классу E_s^α. Покажем, что вопрос о построении квадратурных формул для произвольных функций из класса H_s^α можно свести к вопросу о квадратурных формулах на классе E_s^α.

Пусть $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^\alpha$, где $\alpha \geqslant 2$. *Простейшей периодизацией функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ будем называть нахождение функции $\varphi(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^\alpha$, удовлетворяющей условиям.*

1°. $\varphi(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, 1, x_{\nu+1}, \ldots, x_s) =$

$$= \varphi(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, 0, x_{\nu+1}, \ldots, x_s) \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \tag{46}$$

2°. $\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s =$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \varphi(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s.$$

Если эти условия выполняются, причем первое из них справедливо не только для самой функции φ, но и для ее производных по x_ν до $\alpha - 2$-го порядка включительно, то нахождение соответствующей функции φ будем называть полной периодизацией функции f.

Ради краткости записи наряду с обычными обозначениями будем в дальнейшем применять следующие сокращения:

$$(m, Q) = m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s,$$

$$\int_{G_s} f(Q)\,dQ = \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s,$$

$$f^{n_1, \ldots, n_s}(Q) = \frac{\partial^{n_1 + \ldots + n_s}}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_s^{n_s}} f(x_1, \ldots, x_s), \tag{47}$$

$$\frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n} f[Q_\nu(x)] = \frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n} f(x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x, x_{\nu+1}, \ldots, x_s).$$

Пользуясь этими обозначениями, запишем условия периодизации в виде

$$\left.\begin{aligned} &1^\circ.\ \frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n}\varphi[Q_\nu(1)] = \frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n}\varphi[Q_\nu(0)] \\ &\qquad\qquad (\nu=1, 2, \ldots, s;\quad n=0, 1, \ldots, \alpha_1-2), \\ &2^\circ.\ \int\limits_{G_s} f(Q)\,dQ = \int\limits_{G_s}\varphi(Q)\,dQ. \end{aligned}\right\} \tag{48}$$

Выбирая здесь $\alpha_1=2$ или $\alpha_1=\alpha$, получим соответственно условия простейшей или полной периодизации.

В возможности периодизации функций легко убедиться с помощью следующего приема [36]. Пусть $\psi(x)\in H_1^{\alpha+1}$ — произвольная монотонная функция, удовлетворяющая условиям

$$\psi(0)=0,\quad \psi(1)=1,\quad \psi^{(n)}(1)=\psi^{(n)}(0)=0 \qquad (n=1, 2, \ldots, \alpha_1-1). \tag{49}$$

Полагая $x_\nu=\psi(z_\nu)$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$ и проводя замену переменных, получим

$$\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1\ldots dx_s = \int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1 f[\psi(z_1), \ldots, \psi(z_s)]\times \psi'(z_1)\ldots\psi'(z_s)\,dz_1\ldots dz_s. \tag{50}$$

Выберем

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = f[\psi(x_1), \ldots, \psi(x_s)]\,\psi'(x_1)\ldots\psi'(x_s). \tag{51}$$

Так как $f\in H_s^\alpha$ и $\psi\in H_1^{\alpha+1}$, то функция φ имеет непрерывную производную $\varphi^{\alpha,\ldots,\alpha}(Q)$ и, следовательно, принадлежит классу H_s^α. Далее, из (50) следует, что для функции φ выполняется условие 2°. Наконец, в силу (49) при $\nu=1, 2, \ldots, s$ выполняются равенства

$$\frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n}\varphi[Q_\nu(1)] = \frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n}\varphi[Q_\nu(0)] \qquad (n=0, 1, \ldots, \alpha_1-2),$$

чем обеспечено выполнение условия 1°. Таким образом, периодизация функции f может быть проведена с помощью функции φ, определенной равенством (51).

Периодизация функций позволяет свести задачу о построении квадратурных формул на классе H_s^α к аналогичной задаче на классе $E_s^{\alpha_1}$. Возможность такого сведения основана на следующей лемме:

Лемма 12. *Пусть* $\alpha\geqslant 2$, $2\leqslant\alpha_1\leqslant\alpha$ *и* $\varphi(x_1, \ldots, x_s)\in H_s^\alpha(C)$. *Если выполняются равенства*

$$\frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n}\varphi[Q_\nu(1)] = \frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n}\varphi[Q_\nu(0)] \tag{52}$$

$$(\nu=1, 2, \ldots, s;\quad n=0, 1, \ldots, \alpha_1-2),$$

то функция $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$ *принадлежит классу* $E_s^{\alpha_1}(C)$.

Доказательство. Дифференцируя равенства (52) и заменяя n на n_ν, получим

$$\varphi^{n_1, \ldots, n_s}[Q_\nu(1)] = \varphi^{n_1, \ldots, n_s}[Q_\nu(0)], \tag{53}$$

где

$$0\leqslant n_j\leqslant\begin{cases}\alpha_1-2 & \text{при } j=\nu,\\ \alpha_1 & \text{при } j\neq\nu.\end{cases}$$

Пусть величины $\tau_1, \ldots, \tau_s$ определены с помощью равенств

$$\tau_\nu=\begin{cases}0, & \text{если } m_\nu=0,\\ 1, & \text{если } m_\nu\neq 0.\end{cases} \quad (\nu=1, 2, \ldots, s).$$

Обозначим через $C(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функции $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$:

$$C(m_1, \ldots, m_s) = \int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\varphi(x_1, \ldots, x_s)\,e^{-2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}dx_1, \ldots, dx_s$$

и проведем $(\alpha_1-1)\,\tau_\nu$ — кратное интегрирование по частям по каждой из переменных x_ν. Замечая, что в силу

(53) проинтегрированные члены обращаются в нуль, и пользуясь сокращенными обозначениями, получим

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| = \frac{(2\pi)^{-(\alpha_1-1)(\tau_1+\ldots+\tau_s)}}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{\alpha_1-1}} \left| \int_{G_s} \varphi^{(\alpha_1-1)\tau_1, \ldots, (\alpha_1-1)\tau_s}(Q)\, e^{-2\pi i (m, Q)}\, dQ \right|. \tag{54}$$

Снова проведем интегрирование по частям и воспользуемся оценкой

$$|\varphi^{n_1, \ldots, n_s}(Q)| \leqslant C \qquad (0 \leqslant n_\nu \leqslant \alpha, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s),$$

следующей из определения класса $H_s^\alpha(C)$. Так как теперь при каждом интегрировании по частям возникает три новых интеграла, то из (54) получим

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{3^{\tau_1+\ldots+\tau_s} C}{(2\pi)^{\alpha_1(\tau_1+\ldots+\tau_s)} (\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{\alpha_1}} \leqslant \frac{C}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{\alpha_1}}.$$

Отсюда, так как функция $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$ имеет период, равный единице, по каждой из переменных, в силу определения класса $E_s^\alpha(C)$ следует утверждение леммы.

Приведем пример функции, удовлетворяющей условиям леммы 12.

Пусть $B_r(x)$ — r-й полином Бернулли. Так как согласно второму утверждению леммы 6

$$B_r'(x) = rB_{r-1}(x) \qquad (r \geqslant 1),$$

то, очевидно, при $n \leqslant r$

$$B_r^{(n)}(x) = r(r-1) \ldots (r-n+1)\, B_{r-n}(x).$$

Но в силу первого утверждения той же леммы

$$B_{r-n}(1) = B_{r-n}(0) \qquad (r-n \geqslant 2)$$

и, следовательно,

$$B_r^{(n)}(1) = B_r^{(n)}(0) \qquad (n = 0, 1, \ldots, r-2).$$

Пользуясь этими равенствами, легко убедиться, что при $r \geqslant 2$ для функции

$$\varphi(x_1, \ldots, x_s) = B_r(x_1) \ldots B_r(x_s)$$

выполняются условия

$$\frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n} \varphi[Q_\nu(1)] = \frac{\partial^n}{\partial x_\nu^n} \varphi[Q_\nu(0)]$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, s; \quad n = 0, 1, \ldots, r-2),$$

совпадающие при $\alpha_1 = \alpha = r$ с условиями (52). Так как, очевидно, $\varphi(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^r$, то функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ удовлетворяет всем условиям леммы 12 и, следовательно,

$$B_r(\{x_1\}) \ldots B_r(\{x_s\}) \in E_s^r \qquad (s \geqslant 1, \quad r \geqslant 2). \tag{55}$$

Сформулируем теперь одно следствие леммы 12, показывающее, что периодизация функций позволяет свести задачу о построении квадратурных формул на классе H_s^α к аналогичной задаче на классе $E_s^{\alpha_1}$, где $2 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha$.

Следствие. *Пусть $\alpha \geqslant 2$, $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^\alpha$ и функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ получена путем простейшей или путем полной периодизации функции $f(x_1, \ldots, x_s)$. Тогда*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})\, dx_1 \ldots dx_s, \tag{56}$$

где функция $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$ принадлежит соответственно или классу E_s^2, или классу E_s^α.

Действительно, так как функция φ получена путем периодизации функции f, то для нее выполняются условия (48). Пользуясь вторым из этих условий, получим равенство (56); первое из условий (48) совпадает с условием леммы 12 и, следовательно, $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\}) \in E_s^{\alpha_1}$, где соответственно $\alpha_1 = 2$ или $\alpha_1 = \alpha$.

Рассмотрим некоторые способы простейшей периодизации.

Первый способ простейшей периодизации (см. [11] и [1]) основан на использовании очевидного равенства

$$\int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \frac{f(x) + f(1-x)}{2}\, dx. \tag{57}$$

При $s=1$ выберем

$$\varphi(x_1)=\frac{f(x_1)+f(1-x_1)}{2}. \tag{58}$$

Если $f(x_1)\in H_1^\alpha$, то функция $\varphi(x_1)$ также, очевидно, принадлежит классу H_1^α. Так как

$$\varphi(0)=\frac{f(0)+f(1)}{2}=\varphi(1),$$

то первое из условий (48), записанное для случая $\alpha_1=2$, выполнено. В силу (57) выполняется также и второе из этих условий. Следовательно, с помощью функции $\varphi(x_1)$ решается задача о простейшей периодизации функции $f(x_1)$.

При $s>1$ будем последовательно применять равенство (58) по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_s$:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_1(x_1,\ldots,x_s)=\\
&\qquad=\frac{1}{2}[f(x_1,\ldots,x_s)+f(1-x_1,x_2,\ldots,x_s)],\\
&\varphi_2(x_1,\ldots,x_s)=\\
&\qquad=\frac{1}{2}[\varphi_1(x_1,\ldots,x_s)+\varphi_1(x_1,1-x_2,\ldots,x_s)],\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\varphi_s(x_1,\ldots,x_s)=\\
&=\frac{1}{2}[\varphi_{s-1}(x_1,\ldots,x_s)+\varphi_{s-1}(x_1,\ldots,x_{s-1},1-x_s)].
\end{aligned}\right\} \tag{59}$$

Выберем $\varphi(x_1, \ldots, x_s)=\varphi_s(x_1,\ldots,x_s)$. Как и в случае $s=1$, из условия $f(x_1, \ldots, x_s)\in H_s^\alpha$ непосредственно следует, что $\varphi(x_1, \ldots, x_s)\in H_s^\alpha$. Далее из (59) последовательно, применяя равенство (57), получим

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=\int_0^1\ldots\int_0^1\frac{1}{2}[f(x_1,\ldots,x_s)+$$
$$+f(1-x_1,\ldots,x_s)]\,dx_1\ldots dx_s=$$
$$=\int_0^1\ldots\int_0^1\varphi_1(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=\ldots=$$
$$=\int_0^1\ldots\int_0^1\varphi_s(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s,$$

что совпадает со вторым из условий (48). Выполнение первого из этих условий при $\alpha_1=2$ также непосредственно следует из равенств (59). Таким образом, функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s)=\varphi_s(x_1, \ldots, x_s)$ решает задачу о простейшей периодизации функции $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Второй способ простейшей периодизации можно получить, применяя несложную замену переменных, так как это было сделано на стр. 54. Выберем, как указано в равенстве (51),

$$\varphi(x_1,\ldots,x_s)=f[\psi(x_1),\ldots,\psi(x_s)]\,\psi'(x_1)\ldots\psi'(x_s)$$

и положим, например, $\psi(x)=\sin^2\frac{\pi}{2}x$. Так как

$$\psi'(x)=\frac{\pi}{2}\sin\pi x,$$

то

$$\psi(0)=0,\quad \psi(1)=1,\quad \psi'(0)=\psi'(1)=0.$$

Таким образом, условия (49) выполняются с $\alpha_1=2$ и, следовательно, с помощью функции

$$\varphi(x_1,\ldots,x_s)=$$
$$=\left(\frac{\pi}{2}\right)^s\sin\pi x_1\ldots\sin\pi x_s f\left(\sin^2\frac{\pi}{2}x_1,\ldots,\sin^2\frac{\pi}{2}x_s\right)$$

осуществляется простейшая периодизация функции $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Третий способ простейшей периодизации основан на использовании очевидного равенства

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left[f(x)+\left(x-\frac{1}{2}\right)(f(0)-f(1))\right]dx. \tag{60}$$

При $s=1$ выберем

$$\varphi(x_1)=f(x_1)+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)(f(0)-f(1)). \tag{61}$$

Если $f(x_1)\in H_1^\alpha$, то, очевидно, и $\varphi(x_1)\in H_1^\alpha$. Второе из условий (48) совпадает с равенством (60). Так как

$$\varphi(0)=\frac{f(0)+f(1)}{2}=\varphi(1),$$

то первое из этих условий также выполняется и, следовательно, функция $\varphi(x_1)$ решает задачу о простейшей периодизации функции $f(x_1)$.

При $s>1$ путем последовательного применения равенства (61) получим

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x_1,\ldots,x_s) &= f(x_1,\ldots,x_s)+\\ &+\left(x_1-\frac{1}{2}\right)[f(0,x_2,\ldots,x_s)-f(1,x_2,\ldots,x_s)],\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_s(x_1,\ldots,x_s) &= \varphi_{s-1}(x_1,\ldots,x_s)+\\ &+\left(x_s-\frac{1}{2}\right)[\varphi_{s-1}(x_1,\ldots,x_{s-1},0)-\\ &-\varphi_{s-1}(x_1,\ldots,x_{s-1},1)]. \end{aligned}\right\} \quad (62)$$

Выберем $\varphi(x_1, \ldots, x_s)=\varphi_s(x_1, \ldots, x_s)$. Из условия $f\in H_s^\alpha$ в силу определения функции φ непосредственно следует, что и $\varphi\in H_s^\alpha$. Пользуясь равенствами (62), с помощью несложной индукции убеждаемся, что функция φ удовлетворяет условиям (48). Таким образом, с помощью функции $\varphi(x_1, \ldots, x_s)=\varphi_s(x_1, \ldots, x_s)$ осуществляется простейшая периодизация функции $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Рассмотрим теперь подробнее некоторые способы полной периодизации.

Пусть $\alpha\geqslant 2$ и $f(x_1, \ldots, x_s)$ — произвольная функция из класса H_s^α. Выше было показано, что полная периодизация функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ может быть проведена с помощью функции $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$, определенной равенством

$$\varphi(x_1,\ldots,x_s)=f[\psi(x_1),\ldots,\psi(x_s)]\,\psi'(x_1)\ldots\psi'(x_s), \quad (63)$$

где согласно (49) $\psi(x)$ — произвольная монотонная функция из класса $H_s^{\alpha+1}$, удовлетворяющая условиям

$$\psi(0)=0,\ \psi(1)=1,\quad \psi^{(n)}(0)=\psi^{(n)}(1)=0$$
$$(n=1,\ 2,\ldots,\ \alpha-1). \quad (64)$$

Покажем, что в качестве $\psi(x)$ можно выбрать функцию

$$\psi_\alpha(x)=(2\alpha-1)\,C_{2\alpha-2}^{\alpha-1}\int_0^x [t(1-t)]^{\alpha-1}\,dt. \quad (65)$$

Действительно, проводя интегрирование по частям, получим

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt=\frac{\alpha-1}{\alpha}\int_0^1 t^\alpha(1-t)^{\alpha-2}dt=\ldots$$
$$\ldots=\frac{(\alpha-1)\ldots1}{\alpha\ldots(2\alpha-2)}\int_0^1 t^{2\alpha-2}dt=\frac{1}{(2\alpha-1)\,C_{2\alpha-2}^{\alpha-1}}.$$

Следовательно,

$$\psi_\alpha(1)=(2\alpha-1)\,C_{2\alpha-2}^{\alpha-1}\int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\alpha-1}dt=1.$$

Далее, так как

$$\psi_\alpha'(x)=(2\alpha-1)\,C_{2\alpha-2}^{\alpha-1}[x(1-x)]^{\alpha-1},$$

то, очевидно, при $n=1,\ 2,\ \ldots,\ \alpha-1$ будет $\psi_\alpha^{(n)}(0)=$ $=\psi_\alpha^{(n)}(1)=0$.

Наконец непосредственно из (65) следует, что $\psi_\alpha(0)=0$. Таким образом, для функции $\psi_\alpha(x)$, определенной равенством (65), выполняется каждое из условий (64) и, следовательно, эту функцию можно использовать для построения функции φ, осуществляющей полную периодизацию функции f.

В частности, при $\alpha=2,\ 3,\ \ldots$ из (65) получим

$$\psi_2(x)=6\int_0^x t(1-t)\,dt=3x^2-2x^3,$$

$$\psi_3(x)=30\int_0^x [t(1-t)]^2=10x^3-15x^4+6x^5,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Другой способ полной периодизации функций основан на использовании некоторых свойств полиномов Бернулли

Пусть $\varphi_0(x_1, \ldots, x_s)=f(x_1, \ldots, x_s)$. Для $\nu=1,\ 2,\ \ldots,\ s$ определим функции $\varphi_\nu(Q)$ с помощью равенств

$$\varphi_\nu(Q)=\varphi_{\nu-1}(Q)+\sum_{n_\nu=0}^{\alpha-2}\sum_{\varepsilon_\nu=0}^{1}P_{n_\nu,\varepsilon_\nu}(x_\nu)\frac{\partial^{n_\nu}}{\partial x_\nu^{n_\nu}}\varphi_{\nu-1}[Q_\nu(\varepsilon_\nu)], \quad (66)$$

где

$$P_{n,\varepsilon}(x) = \frac{(-1)^{\varepsilon}}{(n+1)!} B_{n+1}(x)$$

и $B_n(x)$ $(n=0, 1, \ldots)$ — полиномы Бернулли.

Покажем, что функция $\varphi_s(x_1, \ldots, x_s)$ осуществляет полную периодизацию функции $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Убедимся прежде всего, что при любом целом $r \geqslant 0$

$$P^{(r)}_{n,\varepsilon}(1) - P^{(r)}_{n,\varepsilon}(0) = \begin{cases} 0, \text{ если } r \neq n, \\ (-1)^{\varepsilon}, \text{ если } r = n. \end{cases} \tag{67}$$

Действительно, при $r > n+1$ это утверждение очевидно, так как в силу определения $P_{n,\varepsilon}(x)$ — многочлен степени $n+1$. Если $r \leqslant n+1$, то, пользуясь леммой 6, получим

$$P'_{n,\varepsilon}(x) = (-1)^{\varepsilon} \frac{B'_{n+1}(x)}{(n+1)!} = (-1)^{\varepsilon} \frac{B_n(x)}{n!}, \ldots$$

$$\ldots, P^{(r)}_{n,\varepsilon}(x) = (-1)^{\varepsilon} \frac{B_{n+1-r}(x)}{(n+1-r)!},$$

$$P^{(r)}_{n,\varepsilon}(1) - P^{(r)}_{n,\varepsilon}(0) = (-1)^{\varepsilon} \frac{B_{n+1-r}(1) - B_{n+1-r}(0)}{(n+1-r)!} =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } r \neq n \ (r \leqslant n+1) \\ (-1)^{\varepsilon}, & \text{если } r = n, \end{cases}$$

чем утверждение (67) доказано полностью.

Пусть $F(x) \in H_1^{\alpha}$ и функция $\Phi(x)$ определена равенством

$$\Phi(x) = F(x) + \sum_{n=0}^{\alpha-2} \sum_{\varepsilon=0}^{1} P_{n,\varepsilon}(x) F^{(n)}(\varepsilon). \tag{68}$$

Пользуясь соотношением (67) для любого $r = 0, 1, \ldots, \alpha-2$, получим

$$\Phi^{(r)}(x) = F^{(r)}(x) + \sum_{n=0}^{\alpha-2} \sum_{\varepsilon=0}^{1} P^{(r)}_{n,\varepsilon}(x) F^{(n)}(\varepsilon),$$

$$\Phi^{(r)}(1) - \Phi^{(r)}(0) = F^{(r)}(1) - F^{(r)}(0) +$$

$$+ \sum_{n=0}^{\alpha-2} \sum_{\varepsilon=0}^{1} \left[P^{(r)}_{n,\varepsilon}(1) - P^{(r)}_{n,\varepsilon}(0)\right] F^{(n)}(\varepsilon) =$$

$$= F^{(r)}(1) - F^{(r)}(0) + \sum_{\varepsilon=0}^{1} (-1)^{\varepsilon} F^{(r)}(\varepsilon) = 0.$$

Таким образом, для функции $\Phi(x)$ выполняются равенства

$$\Phi^{(r)}(1) = \Phi^{(r)}(0) \qquad (0 \leqslant r \leqslant \alpha-2).$$

Выберем, в частности,

$$F(x_\nu) = \varphi_{\nu-1}(x_1, \ldots, x_s).$$

Тогда из (66) и (68) получим

$$\Phi(x_\nu) = \varphi_\nu(x_1, \ldots, x_s)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial^{r_\nu}}{\partial x_\nu^{r_\nu}} \varphi_\nu [Q_\nu(1)] = \frac{\partial^{r_\nu}}{\partial x_\nu^{r_\nu}} \varphi_\nu [Q_\nu(0)] \tag{69}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, s, \quad r_\nu = 0, 1, \ldots, \alpha-2).$$

Теперь, пользуясь индукцией, нетрудно показать, что для всякого $\nu \leqslant s$ будут справедливы равенства

$$\frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}} \varphi_\nu [Q_j(1)] = \frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}} \varphi_\nu [Q_j(0)] \qquad (j \leqslant \nu, 0 \leqslant r_j \leqslant \alpha-2). \tag{70}$$

При $\nu=1$ это утверждение очевидно, так как оно совпадает с первым из равенств (69). Пусть $\nu > 1$ и равенства (70) выполняются при $\nu - 1$:

$$\frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}} \varphi_{\nu-1} [Q_j(1)] = \frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}} \varphi_{\nu-1} [Q_j(0)] \qquad (j \leqslant \nu-1, \ 0 \leqslant r_j \leqslant \alpha-2).$$

Отсюда после дифференцирования по x_ν при $n_\nu = 0, 1, \ldots, \alpha-2$ следует, что

$$\frac{\partial^{r_j+n_\nu}}{\partial x_j^{r_j} \partial x_\nu^{n_\nu}} \varphi_{\nu-1} [Q_j(1)] = \frac{\partial^{r_j+n_\nu}}{\partial x_j^{r_j} \partial x_\nu^{n_\nu}} \varphi_{\nu-1} [Q_j(0)]$$

$$(j \leqslant \nu-1, \ 0 \leqslant r_j \leqslant \alpha-2).$$

Пользуясь этими соотношениями, из (66) после дифференцирования по x_j получим

$$\frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}} \varphi_\nu [Q_j(1)] = \frac{\partial^{r_j}}{\partial x_j^{r_j}} \varphi_\nu [Q_j(0)] \qquad (j \leqslant \nu-1, 0 \leqslant r_j \leqslant \alpha-2).$$

В силу (69) эти равенства будут справедливы и при $j=\nu$, чем утверждение (70) доказано полностью.

Из (70) при $\nu = s$ следует, что функция $\varphi_s(Q)$ удовлетворяет первому из условий (48) с заменой в нем α_1 на α. Так как в силу леммы 6

$$\int_0^1 P_{n,\varepsilon}(x)\,dx = \frac{(-1)^{\varepsilon}}{(n+1)!} \int_0^1 B_{n+1}(x)\,dx = 0 \qquad (n \geqslant 0), \tag{71}$$

то из (66) получим

$$\int\limits_{G_s} \varphi_\nu(Q)\,dQ = \int\limits_{G_s} \varphi_{\nu-1}(Q)\,dQ \qquad (1 \leqslant \nu \leqslant s)$$

и, следовательно,

$$\int\limits_{G_s} \varphi_s(Q)\,dQ = \ldots = \int\limits_{G_s} \varphi_0(Q)\,dQ = \int\limits_{G_s} f(Q)\,dQ,$$

что совпадает со вторым из условий (48). Наконец согласно определению каждая из функций $\varphi_\nu(Q)$ принадлежит классу H_s^α и, в частности, $\varphi_s(Q) \in H_s^\alpha$. Отсюда следует, что функция $\varphi_s(x_1, \ldots, x_s)$ осуществляет полную периодизацию функции $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Согласно следствию леммы 12, если $\alpha \geqslant 2$, $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^\alpha$ и функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ получена путем полной периодизации функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, то $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\}) \in E_s^\alpha$. Пусть теперь указана константа, ограничивающая производные функций $f(x_1, \ldots, x_s)$, и условие $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^\alpha$ записано в виде $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^\alpha(C)$. Утверждение следствия леммы 12 также можно записать, указав константу класса E_s^α:

$$\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\}) \in E_s^\alpha(C').$$

При этом остается открытым вопрос о связи констант C и C'. Не исключена, в частности, возможность того, что константа C', возникающая при периодизации, окажется значительно больше исходной константы C. Такое возрастание константы класса могло бы привести к снижению точности соответствующих квадратурных формул. Следующая лемма показывает, что при периодизации с помощью полиномов Бернулли значение константы C не возрастает.

Лемма 13. *Пусть $\alpha \geqslant 2$, $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^\alpha(C)$ и функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s) = \varphi_s(Q)$ определена равенствами (66), т. е. получена путем периодизации функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ с помощью полиномов Бернулли. Тогда $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\}) \in E_s^\alpha(C)$.*

Доказательство. Воспользуемся тем, что при любом целом m выполняется равенство

$$\int\limits_0^1 P_{n,\varepsilon}^{(\alpha\tau-\tau)}(x)\, e^{2\pi i m x}\,dx = 0 \quad (0 \leqslant n \leqslant \alpha - 2), \tag{72}$$

где

$$\tau = \tau(m) = \begin{cases} 0, & \text{если } m = 0, \\ 1, & \text{если } m \neq 0. \end{cases}$$

(При $m=0$ это равенство совпадает с (71); если $m \neq 0$, то оно получается интегрированием равенств

$$P_{n,\varepsilon}^{(\alpha-1)}(x)\, e^{2\pi i m x} = \begin{cases} 0 & \text{при } n < \alpha - 2, \\ (-1)^\varepsilon e^{2\pi i m x} & \text{при } n = \alpha - 2, \end{cases}$$

следующих из определения полинома $P_{n,\varepsilon}(x)$.)

Из (66) в силу (72) получим

$$\int\limits_{G_s} \varphi_\nu^{(\alpha-1)\tau_1, \ldots, (\alpha-1)\tau_s}(Q)\, e^{-2\pi i (m, Q)}\,dQ = \int\limits_{G_s} \varphi_{\nu-1}^{(\alpha-1)\tau_1, \ldots, (\alpha-1)\tau_s}(Q)\, e^{-2\pi i (m, Q)}\,dQ,$$

где $\tau_\nu = \tau(m_\nu)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. Отсюда, так как $\varphi_s(Q) = \varphi(Q)$ и $\varphi_0(Q) = f(Q)$, следует, что

$$\int\limits_{G_s} \varphi^{(\alpha-1)\tau_1, \ldots, (\alpha-1)\tau_s}(Q)\, e^{-2\pi i (m, Q)}\,dQ = \int\limits_{G_s} f^{(\alpha-1)\tau_1, \ldots, (\alpha-1)\tau_s}(Q)\, e^{-2\pi i (m, Q)}\,dQ.$$

Вычисляя по частям интеграл, стоящий в правой части этого равенства, получим оценку

$$\left| \int\limits_{G_s} \varphi^{(\alpha-1)\tau_1, \ldots, (\alpha-1)\tau_s}(Q)\, e^{-2\pi i (m, Q)}\,dQ \right| \leqslant \frac{3^{\tau_1 + \ldots + \tau_s} C}{(2\pi)^{\tau_1 + \ldots + \tau_s}\, \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}. \tag{73}$$

Обозначим через $C(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функции $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$. Полагая в равенстве (54) $\alpha_1 = \alpha$ и пользуясь оценкой (73), получим утверждение леммы:

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| = \frac{1}{(2\pi)^{(\alpha-1)(\tau_1 + \ldots + \tau_s)} (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha-1}} \times$$
$$\times \left| \int\limits_{G_s} \varphi^{(\alpha-1)\tau_1, \ldots, (\alpha-1)\tau_s}(Q)\, e^{-2\pi i (m, Q)}\,dQ \right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{3^{\tau_1 + \ldots + \tau_s} C}{(2\pi)^\alpha (\tau_1 + \ldots + \tau_s)\, (\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}.$$

ГЛАВА II

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С ТЕОРЕТИКОЧИСЛОВЫМИ СЕТКАМИ

§ 5. Неравномерные сетки

Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ задана абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}.$$

В предыдущей главе (лемма 11, стр. 43) было показано, что для таких функций вопрос о погрешности квадратурных формул

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)] - R, \qquad (74)$$

построенных с помощью сетки

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

сводится к вопросу об оценке тригонометрических сумм

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}. \qquad (75)$$

В частности, на классе $E_s^\alpha(C)$ для погрешности квадратурной формулы (74) согласно следствию леммы 11 справедлива оценка

$$|R| \leqslant \frac{C}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{|S(m_1, \ldots, m_s)|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}. \qquad (76)$$

Оценка (76) будет, очевидно, тем лучше, чем меньше, особенно при небольшой величине произведений $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s$, будут модули тригонометрических сумм $S(m_1, \ldots, m_s)$. Совокупность значений этих сумм зависит только от вида сетки $(\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k))$. Поэтому выбирая сетку так, чтобы суммы $S(m_1, \ldots, m_s)$ имели достаточно хорошие оценки, можно влиять на степень точности соответствующих квадратурных формул.

Пусть N равно простому числу или квадрату простого числа. Обозначим через $b_1, \ldots, b_s$ произвольные целые взаимно простые с N и выберем $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{b_\nu k^\nu}{N}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. Сетки вида

$$M_k = \left(\left\{\frac{b_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{b_s k^s}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

будем называть неравномерными сетками.

Рассмотрим сначала случай $b_1 = \ldots = b_s = 1$. Так как при $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{k^\nu}{N}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ выполняются равенства

$$e^{2\pi i m_\nu \xi_\nu(k)} = e^{2\pi i m_\nu \left\{\frac{k^\nu}{N}\right\}} = e^{2\pi i \frac{m_\nu k^\nu}{N}},$$

то тригонометрические суммы (75), соответствующие неравномерной сетке

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad (77)$$

можно записать в виде

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{N}}. \qquad (78)$$

Суммы (78) называются рациональными тригонометрическими суммами; оценки таких сумм хорошо известны в теории чисел. В частности, если N равно простому числу, большему s, и хотя бы одно из целых $m_1, \ldots, m_s$ не кратно N, то справедлива оценка

$$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{N}}\right| \leqslant (s-1)\sqrt{N}. \qquad (79)$$

При $N>(s-1)^2$ эта оценка точнее тривиальной оценки

$$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{N}}\right| \leqslant N,$$

справедливой при любых целых $m_1, \ldots, m_s$. Такие же оценки имеют место и для случая, когда N равно квадрату простого числа.

Таким образом, суммы $S(m_1, \ldots, m_s)$, соответствующие неравномерной сетке (77), для большей части систем $m_1, \ldots, m_s$ имеют нетривиальную оценку. В частности, за исключением случая $m_1=\ldots=m_s=0$, оценки сумм $S(m_1, \ldots, m_s)$ будут нетривиальны для всех систем $m_1, \ldots, m_s$, имеющих небольшую величину произведения $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s$. Все это указывает на целесообразность изучения квадратурных формул с неравномерными сетками.

Доказательство оценки (79), следующей для простого N из результатов А. Вейля [7], выходит за рамки возможностей настоящей книги. Мы ограничимся здесь доказательством аналогичной оценки лишь для случая, когда N является квадратом простого числа.

Лемма 14. *Пусть $N=p^2$, где p — простое, большее s, и d — общий наибольший делитель целых $m_1, \ldots m_s$. Тогда*

$$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{N}}\right| \leqslant \begin{cases} (s-1)\sqrt{N}, & \textit{если } d\not\equiv 0 \pmod p, \\ N, & \textit{если } d\equiv 0 \pmod p. \end{cases}$$

Доказательство. Введем обозначения

$$\varphi(k) = m_1k+\ldots+m_sk^s, \quad S=\sum_{k=1}^{p^2} e^{2\pi i \frac{\varphi(k)}{p^2}}.$$

Очевидно, при любых целых y и z справедливо равенство

$$m_1(y+pz)+\ldots+m_s(y+pz)^s = $$
$$= m_1y+m_sy^s+(m_1+2m_2y+\ldots+sm_sy^{s-1})pz+p^2t,$$

где t — некоторое целое. Отсюда следует, что

$$e^{2\pi i \frac{\varphi(y+pz)}{p^2}} = e^{2\pi i \frac{\varphi(y)+\varphi'(y)pz+p^2t}{p^2}} = e^{2\pi i \left[\frac{\varphi(y)}{p^2}+\frac{\varphi'(y)z}{p}\right]}. \qquad (80)$$

Пусть целые y и z независимо друг от друга пробегают интервалы $1\leqslant y\leqslant p, 0\leqslant z\leqslant p-1$. Тогда величина $y+pz$ принимает без повторений все целые значения из интервала $[1, p^2]$. Полагая $k=y+pz$, разобьем интервал суммирования суммы S на части и воспользуемся равенством (80):

$$S=\sum_{y=1}^{p}\sum_{z=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{\varphi(y+pz)}{p^2}} = \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{\varphi(y)}{p^2}} \sum_{z=0}^{p-1} e^{2\pi i \frac{\varphi'(y)z}{p}} =$$
$$= \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{\varphi(y)}{p^2}} \sum_{z=1}^{p} e^{2\pi i \frac{\varphi'(y)z}{p}}. \qquad (81)$$

Отсюда, применяя леммы 1 и 2, получим

$$|S| \leqslant \sum_{y=1}^{p}\left|\sum_{z=1}^{p} e^{2\pi i \frac{\varphi'(y)z}{p}}\right| = p\sum_{y=1}^{p}\delta_p[\varphi'(y)] =$$
$$= p\sum_{y=1}^{p}\delta_p(m_1+\ldots+sm_sy^{s-1}) = pA_p(m_1, \ldots, sm_s), \qquad (82)$$

где $A_p(m_1, \ldots, sm_s)$ — число решений сравнения

$$m_1+2m_2y+\ldots+sm_sy^{s-1}\equiv 0 \pmod p.$$

Так как хотя бы одно из чисел $m_1, 2m_2, \ldots, sm_s$ не кратно p, то согласно лемме 2

$$A_p(m_1, \ldots, sm_s) \leqslant s-1.$$

Подставляя эту оценку в (82), получим

$$|S| \leqslant (s-1)p = (s-1)\sqrt{N},$$

что совпадает с первым утверждением леммы. Второе утверждение леммы очевидно, так как при любых $m_1, \ldots, m_s$

$$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{N}}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{N}\left|e^{2\pi i \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{N}}\right| = N.$$

Теорема 5. *Пусть $f \in E_s^\alpha(C)$ и σ — сумма модулей коэффициентов Фурье функции f. Если p — простое, большее s, и $N = p^2$, то для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right) - R$$

справедлива оценка

$$|R| \leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{B^s C}{N^{\frac{\alpha}{2}}},$$

где B — некоторая константа, зависящая только от α.

Доказательство. Пользуясь леммой 11, получим

$$R = \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s) S(m_1, \ldots, m_s), \tag{83}$$

где суммы $S(m_1, \ldots, m_s)$ определены равенством (78) и $C(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$.

Обозначим через d общий наибольший делитель величин $m_1, \ldots, m_s$ и разобьем сумму (83) на две части, относя к первой части слагаемые, для которых $d \not\equiv 0 \pmod p$, и ко второй части слагаемые с $d \equiv 0 \pmod p$. Тогда, так как согласно лемме 14

$$|S(m_1, \ldots, m_s)| = \left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{N}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant \begin{cases} (s-1)\sqrt{N}, & \text{если } d \not\equiv 0 \pmod p, \\ N, & \text{если } d \equiv 0 \pmod p, \end{cases} \tag{84}$$

получим оценку

$$|R| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{d \not\equiv 0 \pmod p} |C(m_1, \ldots, m_s)| \, |S(m_1, \ldots, m_s)| +$$

$$+ \frac{1}{N} \sum_{d \equiv 0 \pmod p}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)| \, |S(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s-1}{\sqrt{N}} \sum_{d \not\equiv 0 \pmod p} |C(m_1, \ldots, m_s)| +$$

$$+ \sum_{d \equiv 0 \pmod p}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)|.$$

Отсюда, замечая, что величины $m_1, \ldots, m_s$, общий наибольший делитель которых кратен p, можно представить в виде $n_1 p, \ldots, n_s p$, получим

$$|R| \leqslant \frac{s-1}{\sqrt{N}} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} |C(m_1, \ldots, m_s)| +$$

$$+ \sum_{n_1, \ldots, n_s = -\infty}^{\infty}{}' |C(n_1 p, \ldots, n_s p)| \leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} +$$

$$+ C \sum_{n_1, \ldots, n_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{n_1 p} \ldots \overline{n_s p})^\alpha}. \tag{85}$$

Так как из определения величин $\overline{m}_\nu$ следует, что

$$\overline{n_\nu p} \begin{cases} = \overline{n}_\nu p & \text{при } n_\nu \neq 0, \\ \geqslant \overline{n}_\nu & \text{при любом } n_\nu, \end{cases} \tag{86}$$

то для всякой системы целых $n_1, \ldots, n_s$, не равных одновременно нулю, справедлива оценка

$$\overline{n_1 p} \ldots \overline{n_s p} \geqslant p \overline{n}_1 \ldots \overline{n}_s.$$

Но тогда

$$\sum_{n_1, \ldots, n_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{n_1 p} \ldots \overline{n_s p})^\alpha} \leqslant \frac{1}{p^\alpha} \sum_{n_1, \ldots, n_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{n}_1 \ldots \overline{n}_s)^\alpha} <$$

$$< \frac{1}{p^\alpha}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{n}^\alpha}\right)^s = \frac{B^s}{N^{\frac{\alpha}{2}}}, \tag{87}$$

где в силу (22)

$$B=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{n}^{\alpha}}<3+\frac{2}{\alpha-1}.$$

Объединяя оценки (85) и (87), получим утверждение теоремы.

В теореме 5 рассматривается частный случай неравномерных сеток

$$M_k=\left(\left\{\frac{b_1k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{b_sk^s}{N}\right\}\right),$$

получающихся при $b_1=\ldots=b_s=1$. Легко показать, что утверждение теоремы справедливо и в общем случае, когда $b_1, \ldots, b_s$ — произвольные целые, взаимно простые с N.

Действительно, при этом все рассуждения, приведенные в доказательстве теоремы, остаются неизменными, только сумма (78) заменяется суммой

$$S(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=1}^{N}e^{2\pi i\frac{m_1b_1k+\ldots+m_sb_sk^s}{N}}.$$

Рассмотрим теперь случай неравномерных сеток, в которых N равно простому числу.

Пусть, как и раньше,

$$f(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}C(m_1,\ldots,m_s)\,e^{2\pi i\,(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}$$

и σ — сумма модулей коэффициентов Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$:

$$\sigma=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}|C(m_1,\ldots,m_s)|.$$

Теорема 6. *Если $f\in E_s^{\alpha}(C)$ и $N=p$, где p — простое, большее s, то для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\left\{\frac{k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right)-R$$

справедлива оценка

$$|R|<\frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}}+\frac{B^sC}{N^{\alpha}},$$

где $B<3+\frac{2}{\alpha-1}$.

Доказательство. Согласно (79) для тригонометрической суммы

$$S(m_1,\ldots,m_s)=\sum_{k=1}^{N}e^{2\pi i\frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{N}},$$

соответствующей сетке

$$M_k=\left(\left\{\frac{k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right)\qquad(k=1,2,\ldots,N),$$

при простом $N=p$ выполняется оценка

$$|S|\leqslant\begin{cases}(s-1)\sqrt{N}, & \text{если } d\not\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p),\\ N, & \text{если } d\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p),\end{cases}$$

где d — общий наибольший делитель чисел $m_1, \ldots, m_s$. Так как по виду эта оценка не отличается от оценки (84), справедливой при $N=p^2$, то все выкладки в доказательстве теоремы 5, предшествующие оценке (86), остаются в силе и для случая $N=p$. В частности, согласно (85) получим

$$|R|\leqslant\frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}}+C\sum_{n_1,\ldots,n_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(\overline{n_1p}\ldots\overline{n_sp})^{\alpha}}.$$

Оценка (87) несколько изменится:

$$\sum_{n_1,\ldots,n_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{1}{(\overline{n_1p}\ldots\overline{n_sp})^{\alpha}}<\frac{1}{p^{\alpha}}\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\bar{n}^{\alpha}}\right)^s=\frac{B^s}{N^{\alpha}}.$$

Объединяя эти оценки получим утверждение теоремы:

$$|R|\leqslant\frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}}+\frac{B^sC}{N^{\alpha}},$$

где в силу (22) $B<3+\frac{2}{\alpha-1}$.

Нетрудно показать, что при $s \geqslant 2$ с помощью неравномерных сеток на классе $E_s^\alpha(C)$ нельзя получить квадратурные формулы, оценка погрешности которых имела бы порядок лучший, чем в теоремах 5 и 6. Приведем доказательство этого утверждения для случая неравномерных сеток вида

$$M_k = \left(\left\{\frac{b_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{b_s k^s}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

где N равно квадрату простого числа.

Теорема 7. *Пусть p — простое, $N = p^2$ и $p > s \geqslant 2$. При любом выборе целых $b_1, \ldots, b_s$, взаимно простых с p, найдется функция $f \in E_s^\alpha(C)$ такая, что погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{b_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{b_s k^s}{N}\right\}\right) - R \tag{88}$$

удовлетворяет неравенству

$$|R| \geqslant \frac{C}{\sqrt{N}}.$$

Доказательство. Выберем

$$f(x_1, \ldots, x_s) = Ce^{2\pi i x_2}.$$

Очевидно, функция f при любом $\alpha > 1$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$. Применяя к этой функции квадратурную формулу (88) и замечая, что

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = C \int_0^1 \ldots \int_0^1 e^{2\pi i x_2}\, dx_1 \ldots dx_s = 0,$$

получим

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{b_1 k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{b_s k^s}{N}\right\}\right) = \frac{C}{p^2} \sum_{k=1}^{p^2} e^{2\pi i \frac{b_2 k^2}{p^2}}. \tag{89}$$

Воспользуемся равенством

$$\sum_{k=1}^{p^2} e^{2\pi i \frac{\varphi(k)}{p^2}} = \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{\varphi(y)}{p^2}} \sum_{z=1}^{p} e^{2\pi i \frac{\varphi'(y) z}{p}},$$

справедливым в силу (81) для всякого полинома $\varphi(k)$, имеющего целые коэффициенты. Выберем $\varphi(k) = k^2$. Тогда, применяя лемму 1, получим

$$\sum_{k=1}^{p^2} e^{2\pi i \frac{b_2 k^2}{p^2}} = \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{b_2 y^2}{p^2}} \sum_{z=1}^{p} e^{2\pi i \frac{2 b_2 y z}{p}} = p \sum_{y=1}^{p} e^{2\pi i \frac{b_2 y^2}{p^2}} \delta_p(2 b_2 y).$$

Так как b_2 взаимно просто с p, то в последней сумме отлично от нуля только то слагаемое, в котором $y = p$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{p^2} e^{2\pi i \frac{b_2 k^2}{p^2}} = p e^{2\pi i \frac{b_2 p^2}{p^2}} = p.$$

Но тогда из (89) получим

$$R = \frac{Cp}{p^2} = \frac{C}{\sqrt{N}},$$

чем теорема доказана.

Тем же путем, используя тригонометрические суммы вида

$$\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{b_2 k^2}{N}},$$

легко убедиться, что утверждение теоремы 7 справедливо не только при N равном квадрату простого числа, но и при произвольном значении N.

Из теорем 5—7 следует, что для функций $f \in E_s^\alpha$ при $s \geqslant 2$ погрешность квадратурных формул с неравномерными сетками имеет порядок $N^{-\frac{1}{2}}$, не зависящий от кратности интеграла. С другой стороны, как показано в теореме 3, погрешность квадратурных формул с равномерными сетками на том же классе функций имеет порядок $N^{-\frac{\alpha}{s}}$. Из сопоставления этих результатов видно, что при $s>2\alpha$ для функций, принадлежащих классу E_s^α, при достаточно больших значениях N квадратурные формулы, построенные с помощью неравномерных сеток, значительно точнее квадратурных формул с равномерными сетками.

Рассмотрим теперь некоторые результаты, получающиеся с помощью неравномерных сеток при интегрировании непериодических функций.

Теорема 8. *Пусть $\alpha\geqslant 2$, $f\in H_s^\alpha$ и N равно p или p^2, где p простое, большее s. Если функция φ получена путем простейшей периодизации функции f, то*

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\left\{\frac{k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right)+O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right). \quad (90)$$

Доказательство. Согласно следствию леммы 12 справедливо равенство

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$

$$=\int_0^1\ldots\int_0^1\varphi(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})\,dx_1\ldots dx_s, \quad (91)$$

где функция $\varphi(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})$ принадлежит классу E_s^2. Пользуясь теоремами 5 и 6, получим

$$\int_0^1\ldots\int_0^1\varphi(\{x_1\},\ldots,\{x_s\})\,dx_1\ldots dx_s=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\varphi\left(\left\{\frac{k}{N}\right\},\ldots,\left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right)+O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Отсюда в силу (91) следует утверждение теоремы.

Согласно теореме 8 квадратурная формула (90) справедлива для всякой функции $f(x_1,\ldots,x_s)$, имеющей в единичном s-мерном кубе G_s непрерывную производную $\dfrac{\partial^{2s}f}{\partial x_1^2\ldots\partial x_s^2}$.

Покажем, что с помощью неравномерных сеток можно получать квадратурные формулы и для более широкого класса функций, имеющих в единичном кубе непрерывную производную $\dfrac{\partial^s f}{\partial x_1\ldots\partial x_s}$.

Докажем предварительно две леммы.

Лемма 15. *Пусть $p>1$ — нечетное целое, $p_1=\frac{p-1}{2}$ и функция $f(x_1,\ldots,x_s)$ определена в точках*

$$\left(\frac{z_1}{p},\ldots,\frac{z_s}{p}\right)\ (z_\nu=0,1,\ldots,p-1,\ 1\leqslant\nu\leqslant s). \quad (92)$$

Тогда в каждой из этих точек выполняется равенство

$$f\left(\frac{z_1}{p},\ldots,\frac{z_s}{p}\right)=$$

$$=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_1}C_p(m_1,\ldots,m_s)\,e^{2\pi i\frac{m_1z_1+\ldots+m_sz_s}{p}}, \quad (93)$$

где

$$C_p(m_1,\ldots,m_s)=$$

$$=\frac{1}{p^s}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1}f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_s}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{m_1k_1+\ldots+m_sk_s}{p}}. \quad (94)$$

Доказательство. Согласно лемме 1 при любом целом z

$$\sum_{m=-p_1}^{p_1}e^{2\pi i\frac{mz}{p}}=\sum_{m=1}^{p}e^{2\pi i\frac{mz}{p}}=p\delta_p(z).$$

Следовательно, пользуясь соотношением (94), получим равенство

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_1} C_p(m_1,\ldots,m_s)\, e^{2\pi i\frac{m_1z_1+\ldots+m_sz_s}{p}} =$$

$$=\frac{1}{p^s}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_s}{p}\right)\times$$

$$\times\sum_{m_1,\ldots,m_s=-p_1}^{p_1} e^{2\pi i\frac{m_1(z_1-k_1)+\ldots+m_s(z_s-k_s)}{p}}=$$

$$=\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_s}{p}\right)\delta_p(z_1-k_1)\ldots\delta_p(z_s-k_s)=$$

$$=f\left(\frac{z_1}{p},\ldots,\frac{z_s}{p}\right),$$

совпадающее с утверждением леммы.

Равенство (93) *будем называть конечным рядом Фурье функции* $f(x_1, \ldots, x_s)$, *а величины* $C_p(m_1, \ldots, m_s)$ — *конечными коэффициентами Фурье этой функции.*

Лемма 16. *Если функция* $f(x_1,\ldots, x_s)$ *принадлежит классу* $H_s^l(C)$, *то для ее конечных коэффициентов Фурье выполняется оценка*

$$|C_p(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C}{\bar m_1\ldots\bar m_s}.$$

Доказательство. Пусть $n_1, \ldots, n_s$ и $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, принадлежащие соответственно интервалам $[0, p-1]$ и $[-p_1, p_1]$, где $p>1$ — нечетно и $p_1=\frac{p-1}{2}$. Определим величины $B_p(m_1, \ldots, m_s)$ с помощью равенств

$$B_p(m_1,\ldots,m_s)=$$

$$=\frac{1}{p^s}\sum_{k_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{k_s=0}^{n_s} f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_s}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{m_1k_1+\ldots+m_sk_s}{p}} \tag{95}$$

и покажем, что

$$|B_p(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\frac{C}{\bar m_1\ldots\bar m_s}. \tag{96}$$

Действительно, пусть $s=1$ и $m_1\neq 0$. Тогда, применяя преобразование Абеля, играющее здесь роль, аналогичную интегрированию по частям, получим

$$B_p(m_1)=\frac{1}{p}\sum_{k_1=0}^{n_1} f\left(\frac{k_1}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{m_1k_1}{p}}=$$

$$=\frac{1}{p}f\left(\frac{n_1+1}{p}\right)\sum_{k_1=0}^{n_1}e^{-2\pi i\frac{m_1k_1}{p}}-$$

$$-\frac{1}{p}\sum_{z_1=0}^{n_1}\left[f\left(\frac{z_1+1}{p}\right)-f\left(\frac{z_1}{p}\right)\right]\sum_{k_1=0}^{z_1}e^{-2\pi i\frac{m_1k_1}{p}}.$$

Так как $0<|m_1|\leqslant p_1$, то согласно лемме 3 справедлива оценка

$$\left|\sum_{k_1=0}^{z_1}e^{-2\pi i\frac{m_1k_1}{p}}\right|\leqslant\frac{1}{2\left(\frac{m_1}{p}\right)}=\frac{p}{2|m_1|}. \tag{97}$$

Но тогда при некотором θ_1 из интервала (0,1) получим

$$|B_p(m_1)|\leqslant\frac{1}{p}\left|f\left(\frac{n_1+1}{p}\right)\right|\frac{p}{2|m_1|}+$$

$$+\frac{1}{p}\sum_{z_1=0}^{n_1}\left|f\left(\frac{z_1+1}{p}\right)-f\left(\frac{z_1}{p}\right)\right|\frac{p}{2|m_1|}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{2|m_1|}+\frac{1}{2|m_1|}\sum_{z_1=0}^{n_1}\left|f'\left(\frac{z_1+\theta_1}{p}\right)\right|\frac{1}{p}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C}{2|m_1|}+\frac{(n_1+1)C}{2|m_1|p}\leqslant\frac{C}{\bar m_1},$$

Если $m_1=0$, то эта оценка тривиальна, так как

$$|B_p(0)|\leqslant\frac{1}{p}\sum_{k_1=0}^{n_1}\left|f\left(\frac{k_1}{p}\right)\right|\leqslant\frac{(n_1+1)\,C}{p}\leqslant C.$$

Отсюда следует, что оценка (96) выполняется при $s=1$. Применим индукцию. Пусть $s\geqslant 2$ и оценка (96) верна при $s-1$. Пользуясь преобразованием Абеля, получим

$$\sum_{k_s=0}^{n_s} f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_s}{p}\right)e^{-2\pi i\frac{m_sk_s}{p}}=$$

$$=f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_{s-1}}{p},\frac{n_s+1}{p}\right)\sum_{k_s=0}^{n_s}e^{-2\pi i\frac{m_sk_s}{p}}-$$

$$-\sum_{z_s=0}^{n_s}\left[f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_{s-1}}{p},\frac{z_s+1}{p}\right)-\right.$$

$$\left.-f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_{s-1}}{p},\frac{z_s}{p}\right)\right]\sum_{k_s=0}^{z_s}e^{-2\pi i\frac{m_sk_s}{p}}=$$

$$=f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_{s-1}}{p},\frac{n_s+1}{p}\right)\sum_{k_s=0}^{n_s}e^{-2\pi i\frac{m_sk_s}{p}}-$$

$$-\sum_{z_s=0}^{n_s}\left[\int_{\frac{z_s}{p}}^{\frac{z_s+1}{p}}\frac{\partial}{\partial x_s}f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_{s-1}}{p},x_s\right)dx_s\right]\sum_{k_s=0}^{z_s}e^{-2\pi i\frac{m_sk_s}{p}}.$$

Отсюда после домножения на $\frac{1}{p^s}e^{-2\pi i\frac{m_1k_1+\ldots+m_{s-1}k_{s-1}}{p}}$ и суммирования по k_1, ..., k_{s-1} следует, что

$$B_p(m_1,\ldots,m_s)=\Sigma_1-\Sigma_2,$$

где величины $\sum_1$ и $\sum_2$ определены равенствами

$$\sum\nolimits_1=\frac{1}{p^{s-1}}\sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_{s-1}=0}^{n_{s-1}}f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_{s-1}}{p},\frac{n_s+1}{p}\right)\times$$

$$\times e^{-2\pi i\frac{m_1k_1+\ldots+m_{s-1}k_{s-1}}{p}}\left(\frac{1}{p}\sum_{k_s=0}^{n_s}e^{-2\pi i\frac{m_sk_s}{p}}\right),$$

$$\sum\nolimits_2=\frac{1}{p}\sum_{z_s=0}^{n_s}\left[\int_{\frac{z_s}{p}}^{\frac{z_s+1}{p}}\frac{1}{p^{s-1}}\sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_{s-1}=0}^{n_{s-1}}\frac{\partial}{\partial x_s}f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_{s-1}}{p},x_s\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-2\pi i\frac{m_1k_1+\ldots+m_{s-1}k_{s-1}}{p}}dx_s\right]\sum_{k_s=0}^{z_s}e^{-2\pi i\frac{m_sk_s}{p}}.$$

Если $m_s\neq 0$, то, пользуясь индукционным предположением и применяя оценку (97) (с заменой в ней m_1 на m_s), получим

$$\left|\sum\nolimits_1\right|\leqslant\frac{C}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_{s-1}}\,\frac{1}{p}\,\frac{p}{2\,|m_s|}=\frac{C}{2\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s},$$

$$\left|\sum\nolimits_2\right|\leqslant\frac{n_s+1}{p}\,\frac{C}{p\overline{m}_1\ldots\overline{m}_{s-1}}\,\frac{p}{2\,|m_s|}\leqslant\frac{C}{2\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s},$$

$$|B_p(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant\left|\sum\nolimits_1\right|+\left|\sum\nolimits_2\right|\leqslant\frac{C}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}.$$

Если $m_s=0$, то в силу индукционного предположения из (95) следует, что

$$|B_p(m_1,\ldots,m_s)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p}\sum_{k_s=0}^{n_s}\left|\frac{1}{p^{s-1}}\sum_{k_1=0}^{n_1}\cdots\sum_{k_{s-1}=0}^{n_{s-1}}f\left(\frac{k_1}{p},\ldots,\frac{k_s}{p}\right)\times\right.$$

$$\left.\times e^{-2\pi i\frac{m_1k_1+\ldots+m_{s-1}k_{s-1}}{p}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{n_s+1}{p}\cdot\frac{C}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_{s-1}}\leqslant\frac{C}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_{s-1}}=\frac{C}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}.$$

Таким образом, оценка (96) доказана полностью.

Так как согласно определению величин $B_p(m_1, \ldots, m_s)$ и $C_p(m_1, \ldots, m_s)$ при $n_1 = \ldots = n_s = p-1$ выполняется равенство

$$B_p(m_1, \ldots, m_s) = C_p(m_1, \ldots, m_s),$$

то утверждение леммы 16 следует из оценки (96).

Теорема 9. *Пусть* $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^1(C)$ *и* N *равно* p *или* p^2, *где* p — *нечетное простое, большее* s.

Тогда справедлива квадратурная формула

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^s N}{\sqrt{N}}\right).$$

Доказательство. Пусть $N = p$ и $p_1 = \frac{p-1}{2}$. Обозначим через $C_p(m_1, \ldots, m_s)$ конечные коэффициенты Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$. Тогда согласно определению

$$C_p(0, \ldots, 0) = \frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right)$$

и в силу леммы 16

$$|C_p(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}. \tag{98}$$

Так как функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу H_s^1, то в единичном кубе G_s сама она и ее частные производные $\frac{\partial f}{\partial x_\nu}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ ограничены. Следовательно, при

$$\frac{k_\nu}{p} \leqslant x_\nu \leqslant \frac{k_\nu + 1}{p} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s,\ k_\nu = 0, 1, \ldots, p-1)$$

выполняется равенство

$$f(x_1, \ldots, x_s) = f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Но тогда, пользуясь определением величины $C_p(0, \ldots, 0)$, получим

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{p-1} \int_{\frac{k_1}{p}}^{\frac{k_1+1}{p}} \ldots \int_{\frac{k_s}{p}}^{\frac{k_s+1}{p}} f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s = 0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right) =$$

$$= C_p(0, \ldots, 0) + O\left(\frac{1}{p}\right). \tag{99}$$

Теперь, применяя разложение функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ в конечный ряд Фурье (лемма 15), получим

$$\frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right) - \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right) - C_p(0, \ldots, 0) + O\left(\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{p} \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s = -p_1}^{p_1} C_p(m_1, \ldots, m_s) \times$$

$$\times \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{p}} + O\left(\frac{1}{p}\right). \tag{100}$$

Отсюда, так как в силу (79) и (98)

$$\frac{1}{p} \left| \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s = -p_1}^{p_1} C_p(m_1, \ldots, m_s) \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{m_1 k + \ldots + m_s k^s}{p}} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p} \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s = -p_1}^{p_1} \frac{C}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} (s-1) \sqrt{p} = O\left(\frac{\ln^s p}{\sqrt{p}}\right), \tag{101}$$

получим утверждение теоремы для случая $N=p$:

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$
$$=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right)+O\left(\frac{\ln^s p}{\sqrt{p}}\right).$$

Если $N=p^2$, то, заменяя всюду p на p^2, вместо (100) и (101) получим оценку

$$\left|\frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p^2} f\left(\left\{\frac{k}{p^2}\right\},\ldots,\left\{\frac{k^s}{p^2}\right\}\right)-\right.$$
$$\left.-\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{p^2}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\frac{p^2-1}{2}}^{\frac{p^2-1}{2}}{}' \frac{C}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\times$$
$$\times\left|\sum_{k=1}^{p^2} e^{2\pi i\frac{m_1k+\ldots+m_sk^s}{p^2}}\right|+O\left(\frac{1}{p^2}\right).$$

Выделяя здесь суммирование по системам, для которых хотя бы одна из величин $m_1, \ldots, m_s$, не кратна p, и пользуясь леммой 14, получим равенство

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$
$$=\frac{1}{p^2}\sum_{k=1}^{p^2} f\left(\left\{\frac{k}{p^2}\right\},\ldots,\left\{\frac{k^s}{p^2}\right\}\right)+O\left(\frac{\ln^s p}{p}\right),$$

совпадающее с утверждением теоремы для случая $N=p^2$.

§ 6. О сетках с произвольным числом узлов

Как показано в теореме 7, с помощью неравномерных сеток нельзя получить квадратурные формулы, погрешность которых на классе E_s^α была бы меньше, чем $O(N^{-\frac{1}{2}})$. В следующей теореме, принадлежащей

И. И. Пятецкому-Шапиро (см. [10]), доказано существование квадратурных формул, погрешность которых равна $O(N^{-1}\ln N)$.

Лемма 17. *При любом действительном γ и целом $m\neq 0$ справедлива оценка*

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(m\theta+\gamma)k}\right|d\theta\leqslant 2\ln(N+1).$$

Доказательство. Согласно лемме 3

$$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(m\theta+\gamma)k}\right|\leqslant\min\left(N,\frac{1}{2(m\theta+\gamma)}\right). \qquad (102)$$

Пользуясь неравенством

$$\min(x, y)\leqslant\frac{2xy}{x+y},$$

справедливым при любых положительных x и y, из (102) получим

$$\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(m\theta+\gamma)k}\right|\leqslant\frac{2N}{1+2(m\theta+\gamma)N}.$$

Отсюда в силу четности и периодичности функции (x) следует утверждение леммы:

$$\int_0^1\left|\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(m\theta+\gamma)k}\right|d\theta\leqslant\int_0^1\frac{2N\,d\theta}{1+2(m\theta+\gamma)N}=$$
$$=\frac{1}{m}\int_\gamma^{\gamma+m}\frac{2N\,dx}{1+2(x)N}=2\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2N\,dx}{1+2Nx}=2\ln(N+1).$$

Теорема 10 (И. И. Пятецкий-Шапиро). *Для каждой функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, имеющей абсолютно сходящийся ряд Фурье, существует свой набор величин $\theta_1, \ldots, \theta_s$ такой, что для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f(\{\theta_1k\},\ldots,\{\theta_sk\})-R \qquad (103)$$

справедлива оценка

$$R=O(N^{-1}\ln N). \tag{104}$$

Доказательство. Пусть $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ — произвольная точка единичного s-мерного куба. Согласно лемме 11 для погрешности простейшей квадратурной формулы, построенной с помощью сетки

$$M_k=(\{\theta_1 k\}, \ldots, \{\theta_s k\}) \qquad (k=1, 2, \ldots, N),$$

справедлива оценка

$$|R| \leqslant \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)|\,|S(m_1, \ldots, m_s)|, \tag{105}$$

где $C(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ и сумма $S(m_1, \ldots, m_s)$ определена равенством

$$S(m_1, \ldots, m_s)=\sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(m_1\theta_1+\ldots+m_s\theta_s)k}. \tag{106}$$

Рассматривая R как функцию величин $\theta_1, \ldots, \theta_s$, для минимального значения $|R|$ в силу (105) и (106) получим

$$\min_{\theta_1, \ldots, \theta_s} |R(\theta_1, \ldots, \theta_s)| \leqslant \int_0^1 \ldots \int_0^1 |R(\theta_1, \ldots, \theta_s)|\, d\theta_1 \ldots d\theta_s \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)| \int_0^1 \ldots \int_0^1 |S(m_1, \ldots, m_s)|\, d\theta_1 \ldots d\theta_s =$$

$$=\frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)| \int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(m_1\theta_1+\ldots+m_s\theta_s)k} \right| d\theta_1 \ldots d\theta_s.$$

Отсюда, замечая, что в силу леммы 17 для любой системы целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, справедлива оценка

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(m_1\theta_1+\ldots+m_s\theta_s)k} \right| d\theta_1 \ldots d\theta_s \leqslant 2\ln(N+1),$$

получим

$$\min_{\theta_1, \ldots, \theta_s} |R(\theta_1, \ldots, \theta_s)| \leqslant \frac{2\ln(N+1)}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1, \ldots, m_s)| =$$

$$=O(N^{-1}\ln N),$$

что совпадает с утверждением теоремы.

Величины $\theta_1, \ldots, \theta_s$, полученные в теореме 10, зависят, вообще говоря, от того, каким было выбрано число узлов N в квадратурной формуле (103). Поэтому при переходе от N к $N+1$ в формуле (103) не только добавляется новый узел, но, кроме того, может измениться положение всех узлов.

В следующей теореме для класса E_s^α удается доказать существование квадратурных формул с сетками вида

$$M_k=(\{\theta_1 k\}, \ldots, \{\theta_s k\}) \qquad (k=1, 2, \ldots, N)$$

таких, что величины $\theta_1, \ldots, \theta_s$ уже не зависят от выбора N; погрешность этих формул оказывается равной $O(N^{-1})$.

Лемма 18. *Пусть для любого фиксированного* $\varepsilon>0$ *неотрицательная функция* φ *удовлетворяет условию*

$$\sum_{|k_1|<n_1, \ldots, |k_s|<n_s} \varphi(k_1, \ldots, k_s)=O\left((n_1 \ldots n_s)^{1+\varepsilon}\right).$$

Тогда при всяком $\alpha>1$ *справедливы оценки*

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \ldots, m_s)}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^s \sum_{m_1, \ldots, m_s=1}^{\infty} \frac{1}{[(m_1+1)\ldots(m_s+1)]^{\alpha+1}} \sum_{|k_1|<m_1, \ldots, |k_s|<m_s} \varphi(k_1, \ldots, k_s),$$

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1, \ldots, m_s)}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^s \sum_{m_1, \ldots, m_s=1}^{\infty} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1|<m_1, \ldots, |k_s|<m_s} \varphi(k_1, \ldots, k_s).$$

Доказательство. Пользуясь преобразованием Абеля при $s=1$, получим

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{\overline{m}^{\alpha}} = \varphi(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\varphi(m)+\varphi(-m)}{m^{\alpha}} =$$

$$= \varphi(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right] \sum_{k=1}^{m} [\varphi(k)+\varphi(-k)] =$$

$$= \varphi(0) + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right] \left[-\varphi(0) + \sum_{|k|\leqslant m} \varphi(k)\right].$$

Отсюда, так как

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right] = 1,$$

следует, что

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m)}{\overline{m}^{\alpha}} = \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}}\right] \sum_{|k|\leqslant m} \varphi(k).$$

При $s \geqslant 1$ после s-кратного применения этого равенства, замечая, что

$$\frac{1}{m^{\alpha}} - \frac{1}{(m+1)^{\alpha}} = \alpha \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} > \frac{\alpha}{(m+1)^{\alpha+1}} \qquad (m>0),$$

получим первое утверждение леммы:

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1,\ldots,m_s)}{(\overline{m}\ldots\overline{m}_s)^{\alpha}} =$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_s=1}^{\infty} \left[\frac{1}{m_1^{\alpha}} - \frac{1}{(m_1+1)^{\alpha}}\right] \ldots \left[\frac{1}{m_s^{\alpha}} - \frac{1}{(m_s+1)^{\alpha}}\right] \times$$

$$\times \sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s} \varphi(k_1,\ldots,k_s) \geqslant$$

$$\geqslant \alpha^s \sum_{m_1,\ldots,m_s=1}^{\infty} \frac{1}{[(m_1+1)\ldots(m_s+1)]^{\alpha+1}} \sum_{|k_1|\leqslant m_1,\ldots,|k_s|\leqslant m_s} \varphi(k_1,\ldots,k_s).$$

Второе утверждение получается аналогично в силу оценки

$$\alpha \int_{m}^{m+1} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} < \frac{\alpha}{m^{\alpha+1}} \qquad (m>0).$$

Теорема 11. *Если для величин $\theta_1, \ldots, \theta_s$ при любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, выполняется неравенство*

$$(\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s) \geqslant \frac{C_0}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\,[\ln(\overline{m}_1+1)\ldots\ln(\overline{m}_s+1)]^{\gamma}}, \quad (107)$$

где константы $\gamma \geqslant 0$ и $C_0>0$ не зависят от $m_1, \ldots, m_s$, то на классе $E_s^{\alpha}(C)$ справедлива квадратурная формула

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(\{\theta_1 k\},\ldots,\{\theta_s k\}) + O\left(\frac{1}{N}\right). \quad (108)$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что при некотором $C_1 = C_1(s)$ для любых $n_\nu \geqslant 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) выполняется оценка

$$\sum_{|k_1|\leqslant n_1,\ldots,|k_s|\leqslant n_s}{}' \frac{1}{(\theta_1 k_1 + \ldots + \theta_s k_s)} \leqslant$$

$$\leqslant C_1 n_1 \ldots n_s [\ln(n_1+1)\ldots\ln(n_s+1)]^{\gamma+1}. \quad (109)$$

Действительно, допустим, что при

$$M = \frac{1}{C_0} 2^s [\ln(2n_1+1)\ldots\ln(2n_s+1)]^{\gamma}$$

на некотором интервале $\left(\beta, \beta + \frac{1}{Mn_1\ldots n_s}\right)$ лежат точки $\{\theta_1 k_1 + \ldots + \theta_s k_s\}$ и $\{\theta_1 k_1' + \ldots + \theta_s k_s'\}$. Тогда

$$\theta_1 k_1 + \ldots + \theta_s k_s = t_1 + \beta + \frac{\xi_1}{Mn_1\ldots n_s},$$

$$\theta_1 k_1' + \ldots + \theta_s k_s' = t_2 + \beta + \frac{\xi_2}{Mn_1\ldots n_s},$$

где t_1, t_2 — целые и $0 \leqslant \xi_1 < 1$, $0 \leqslant \xi_2 < 1$. Отсюда следует, что

$$\theta_1(k_1 - k_1') + \ldots + \theta_s(k_s - k_s') = t_1 - t_2 + \frac{\xi_1 - \xi_2}{Mn_1 \ldots n_s},$$

$$(\theta_1(k_1 - k_1') + \ldots + \theta_s(k_s - k_s')) < \frac{1}{Mn_1 \ldots n_s}.$$

Очевидно, при $|k_\nu| \leqslant n_\nu$, $|k_\nu'| \leqslant n_\nu$ и $(k_1, \ldots, k_s) \neq (k_1', \ldots, k_s')$ это неравенство противоречиво, так как в силу (107)

$$(\theta_1(k_1 - k_1') + \ldots + \theta_s(k_s - k_s')) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C_0}{\overline{k_1 - k_1'} \ldots \overline{k_s - k_s'}\,[\ln(\overline{k_1 - k_1'} + 1) \ldots \ln(\overline{k_s - k_s'} + 1)]^\gamma} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C_0}{2^s n_1 \ldots n_s [\ln(2n_1 + 1) \ldots \ln(2n_s + 1)]^\gamma} = \frac{1}{Mn_1 \ldots n_s}.$$

Таким образом, при $|k_\nu| \leqslant n_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ на любом интервале длины $\frac{1}{Mn_1 \ldots n_s}$ лежит не более одного значения $\{\theta_1 k_1 + \ldots + \theta_s k_s\}$. Но тогда при $M_1 = [Mn_1 \ldots n_s] + 1$ на любом интервале вида

$$\left(\frac{k}{M_1}, \frac{k+1}{M_1}\right) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, M_1 - 1)$$

лежит не более двух значений $(\theta_1 k_1 + \ldots + \theta_s k_s)$, причем в силу (107) ни одно из них не попадает на интервал $\left(0, \frac{1}{M_1}\right)$. Следовательно, разбивая интервал $(0; 1)$ на M_1 равных частей, получим

$$\sum_{|k_1| \leqslant n_1, \ldots, |k_s| \leqslant n_s}' \frac{1}{(\theta_1 k_1 + \ldots + \theta_s k_s)} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{M_1 - 1} \frac{M_1}{k} \leqslant$$

$$\leqslant 2M_1(1 + \ln M_1) \leqslant C_1 n_1 \ldots n_s [\ln(n_1 + 1) \ldots \ln(n_s + 1)]^{\gamma+1},$$

где $C_1 = C_1(s)$.

Обозначим теперь через $-R$ погрешность квадратурной формулы (108). Согласно следствию леммы 11 (стр. 44)

$$|R| \leqslant \frac{C}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{|S(m_1, \ldots, m_s)|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}, \tag{110}$$

где

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i(\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s)k}.$$

В силу леммы 3 (стр. 23) для суммы $S(m_1, \ldots, m_s)$ выполняется оценка

$$|S(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \min\left(N, \frac{1}{2(\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s)}\right).$$

Следовательно, из (110) получим

$$|R| \leqslant \frac{C}{2N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha (\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s)}.$$

Применим к сумме, стоящей в правой части этого неравенства, лемму 18, выбрав в ней

$$\varphi(m_1, \ldots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } (m_1, \ldots, m_s) = (0, \ldots, 0), \\ \dfrac{1}{(\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s)}, & \text{если } (m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0). \end{cases}$$

Тогда, пользуясь оценкой (109), получим утверждение теоремы:

$$|R| \leqslant \frac{C\alpha^s}{2N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = 1}^{\infty} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{\alpha+1}} \cdot \sum_{|k_1| \leqslant m_1, \ldots, |k_s| \leqslant m_s}' \frac{1}{(\theta_1 k_1 + \ldots + \theta_s k_s)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{CC_1\alpha^s}{2N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = 1}^{\infty} \frac{[\ln(m_1 + 1) \ldots \ln(m_s + 1)]^{\gamma+1}}{(m_1 \ldots m_s)^\alpha} = O\left(\frac{1}{N}\right).$$

Легко видеть, что результат, полученный в теореме 11, является неулучшаемым. Действительно, в сетке

$$M_k = (\{\theta_1 k\}, \ldots, \{\theta_s k\}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \tag{111}$$

использованной в этой теореме, величины $\theta_1, \ldots, \theta_s$ не зависят от выбора N. Следовательно, при любом $N \geqslant 1$ узлы сетки (111) можно рассматривать как первые N членов бесконечной последовательности точек

$$M_1, M_2, \ldots, M_k, \ldots,$$

где $M_k = (\{\theta_1 k\}, \ldots, \{\theta_s k\})$. Согласно теореме 4 (стр. 51) ни при каких сетках, составленных из произвольного числа N первых точек любой бесконечной последовательности, нельзя получить оценку погрешности квадратурной формулы, лучшую чем $O\left(\frac{1}{N}\right)$, т. е. лучшую, чем оценка, полученная в теореме 11.

Следующая лемма показывает, что величины $\theta_1, \ldots, \theta_s$, использованные в теореме 11, действительно существуют.

Лемма 19. *Существуют величины $\theta_1, \ldots, \theta_s$ такие, что для любых целых $m_1, \ldots, m_s$, не равных одновременно нулю, выполняется неравенство*

$$(\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s) \geqslant \frac{C_0}{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s [\ln(\bar{m}_1+1)\ldots\ln(\bar{m}_s+1)]^\gamma},$$

где $C_0 > 0$ и $\gamma \geqslant 0$ — некоторые константы, не зависящие от $m_1, \ldots, m_s$.

Доказательство. Для целых $n \geqslant 1$ определим функции $F_n(x_1, \ldots, x_s)$ с помощью равенства

$$F_n(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s=-n}^{n}{}' \psi(m_1, \ldots, m_s, x_1, \ldots, x_s), \quad (112)$$

где

$$\psi(m_1, \ldots, m_s, x_1, \ldots, x_s) = \frac{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^{-1}[\ln(\bar{m}_1+1)\ldots\ln(\bar{m}_s+1)]^{-2}}{(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)\ln^2(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)}. \quad (113)$$

Пусть минимальное значение функции $F_n(x_1, \ldots, x_s)$ в единичном s-мерном кубе G_s достигается при $x_\nu = \alpha_\nu(n)$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$:

$$\min_{x_1, \ldots, x_s} F_n(x_1, \ldots, x_s) = F_n[\alpha_1(n), \ldots, \alpha_s(n)].$$

Очевидно,

$$F_n[\alpha_1(n), \ldots, \alpha_s(n)] \leqslant F_n[\alpha_1(n+1), \ldots, \alpha_s(n+1)] < \\ < F_{n+1}[\alpha_1(n+1), \ldots, \alpha_s(n+1)].$$

Замечая, что при любом действительном β и целом $m \neq 0$:

$$\int_0^1 \frac{dx}{(mx+\beta)\ln^2(mx+\beta)} = \frac{1}{m}\int_\beta^{\beta+m} \frac{dx}{(x)\ln^2(x)} = 2\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{x\ln^2 x} = \frac{2}{\ln 2},$$

получим

$$F_n[\alpha_1(n), \ldots, \alpha_s(n)] \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m_1, \ldots, m_s=-n}^{n}{}' \int_0^1 \cdots \int_0^1 \psi(m_1, \ldots, m_s, x_1, \ldots, x_s)\,dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{2}{\ln 2} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-n}^{n}{}' \frac{1}{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s [\ln(\bar{m}_1+1)\ldots\ln(\bar{m}_s+1)]^2} < A, \quad (114)$$

где

$$A = \frac{2}{\ln 2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\bar{m}\ln^2(\bar{m}+1)}\right)^s.$$

Из (112) и (114) видно, что $F_n[\alpha_1(n), \ldots, \alpha_s(n)]$ является монотонной ограниченной функцией n. Следовательно, существует предел

$$\lim_{n\to\infty} F_n[\alpha_1(n), \ldots, \alpha_s(n)] = F.$$

Выберем из последовательности точек

$$(\alpha_1(n), \ldots, \alpha_s(n)) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

лежащих в кубе G_s, какую-нибудь сходящуюся подпоследовательность

$$(\alpha_1(n_k), \ldots, \alpha_s(n_k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots)$$

и обозначим ее предел через $(\theta_1, \ldots, \theta_s)$:

$$\lim_{k\to\infty} \alpha_\nu(n_k) = \theta_\nu \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Тогда, пользуясь неравенством

$$F_{n_k}[\alpha_1(n_{k+j}), \ldots, \alpha_s(n_{k+j})] \leqslant \\ \leqslant F_{n_{k+j}}[\alpha_1(n_{k+j}), \ldots, \alpha_s(n_{k+j})] < A \qquad (j \geqslant 1),$$

получим

$$F_{n_k}(\theta_1, \ldots, \theta_s) = \lim_{j\to\infty} F_{n_k}[\alpha_1(n_{k+j}), \ldots, \alpha_s(n_{k+j})] \leqslant A.$$

Отсюда, так как

$$F_{n_k}(\theta_1, \ldots, \theta_s) < F_{n_{k+1}}(\theta_1, \ldots, \theta_s),$$

следует, что $F_{n_k}(\theta_1, \ldots, \theta_s)$ является монотонной ограниченной функцией k. Но тогда, переходя к пределу при $k \to \infty$, получим

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \psi(m_1, \ldots, m_s, \theta_1, \ldots, \theta_s) = \lim_{k \to \infty} F_{n_k}(\theta_1, \ldots, \theta_s) \leqslant A.$$

Так как члены ряда, стоящего в левой части этого неравенства, положительны, то при любых $(m_1, \ldots, m_s) \neq (0, \ldots, 0)$ будет выполняться оценка

$$\psi(m_1, \ldots, m_s, \theta_1, \ldots, \theta_s) < A.$$

Отсюда в силу (113) следует утверждение леммы с некоторым $C_0 = C_0(s)$ и $\gamma = 4$:

$$(\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s) \ln^2 (\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s) >$$

$$> \frac{1}{A\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s [\ln(\bar{m}_1 + 1) \ldots \ln(\bar{m}_s + 1)]^2},$$

$$(\theta_1 m_1 + \ldots + \theta_s m_s) \geqslant \frac{C_0}{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s [\ln(\bar{m}_1 + 1) \ldots \ln(\bar{m}_s + 1)]^4}.$$

Замечание. Из теории интеграла Лебега известно, что если на некотором измеримом множестве E функции $f_n(x)$ положительны, интегрируемы и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n(x)\, dx$$

сходится, то ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

сходится почти для всех $x \in E$. Можно показать, (см. также [1]), что лемма 19 является непосредственным следствием многомерного случая этой теоремы, причем утверждение леммы справедливо почти для всех точек единичного куба G_s.

Отметим одну особенность квадратурных формул, полученных в этом параграфе, связанную с неэффективностью доказательства теоремы 10 и леммы 19. В предыдущих параграфах (теоремы 2, 3, 5, 6, 8 и 9) сетки соответствующих квадратурных формул были полностью определены равенствами

$$M_k = \left(\frac{k_1}{n}, \ldots, \frac{k_s}{n}\right) \qquad (1 \leqslant k_\nu \leqslant n, \quad \nu = 1, 2, \ldots, s)$$

и

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{N}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{N}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

В отличие от этого в теореме 10 доказано лишь существование сетки

$$M_k = (\{\theta_1 k\}, \ldots, \{\theta_s k\}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

приводящей к оценке (104), и остается открытым вопрос о нахождении величин $\theta_1, \ldots, \theta_s$, при которых достигается указанная оценка.

Квадратурная формула, полученная в теореме 11, построена с помощью величин $\theta_1, \ldots, \theta_s$, удовлетворяющих неравенству (107). Существование таких величин $\theta_1, \ldots, \theta_s$ доказано в лемме 19, однако, как и в случае теоремы 10, вопрос об их вычислении остается открытым.

§ 7. Параллелепипедальные сетки

Как было показано в теоремах 3 и 5, для погрешности квадратурных формул с равномерными и, соответственно, неравномерными сетками на классе E_s^α справедливы оценки

$$R = O\left(N^{-\frac{\alpha}{s}}\right) \quad \text{и} \quad R = O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right). \qquad (115)$$

Отсюда видно, что точность результатов, получающихся на классе E_s^α с помощью равномерных сеток, тем выше, чем больше значение α, т. е. чем больше гладкость рассматриваемых функций. Вторая из оценок (115) показывает, что квадратурные формулы с неравномерными сетками не обладают этим свойством — их точность не возрастает с ростом гладкости функций. Поэтому применение неравномерных сеток приводит к лучшим результатам лишь для функций, у которых число переменных велико по сравнению с гладкостью (при $s > 2\alpha$); для достаточно гладких функций $\left(\text{при } \alpha > \frac{s}{2}\right)$ точнее будут результаты, получающиеся с помощью равномерных сеток.

Как показывает теорема 1, не исключена возможность существования сеток, при которых для погрешности соответствующих квадратурных формул на классе E_s^α будет выполняться оценка

$$R = O(N^{-\alpha}).$$

Такие сетки соединяли бы в себе достоинства как равномерных, так и неравномерных сеток, так как точность соответствующих квадратурных формул возрастала бы при возрастании гладкости функций, а порядок погрешности не зависел бы от числа переменных. В этом параграфе будет показано, что на классе E_s^α действительно существуют квадратурные формулы, порядок погрешности которых лишь несущественно отличается от указанной выше величины $N^{-\alpha}$.

Пусть $p>1$ — целое, $a_\nu = a_\nu(p)$ $(\nu=1, 2, \dots, s)$ — целые взаимно простые с p и величина $\delta_p(m)$ равна единице или нулю, смотря по тому, делится m на p или нет. *Если существуют константы $\beta=\beta(s)$ и $C_0=C_0(s)$ такие, что для некоторой бесконечной последовательности значений p выполняется неравенство*

$$\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s} \leqslant C_0\frac{\ln^\beta p}{p}, \qquad (116)$$

то целые $a_1, \dots, a_s$ будем называть оптимальными коэффициентами, а константу β — их индексом.

Из определения видно, что величины $a_1, \dots, a_s$ являются функциями p. Чтобы подчеркнуть эту зависимость от p, мы будем иногда вместо термина «оптимальные коэффициенты» употреблять термин «оптимальные коэффициенты по модулю p».

Следующая лемма показывает, что существуют оптимальные коэффициенты с индексом, равным s.

Лемма 20. *Для всякого простого p существуют взаимно простые с p целые $a_\nu = a_\nu(p)$ $(\nu=1, 2, \dots, s)$ такие, что*

$$\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s} < \frac{2(3+2\ln p)^s}{p}.$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что для любых целых $m_1, \dots, m_s$, не делящихся одновременно на p, выполняется оценка

$$\sum_{z_1,\dots,z_s=1}^{p-1} \delta_p(z_1m_1+\dots+z_sm_s) \leqslant (p-1)^{s-1}. \qquad (117)$$

Действительно, пусть для определенности m_s не кратно p. Тогда, пользуясь следствием леммы 1 (стр. 19), получим

$$\sum_{z_s=1}^{p} \delta_p(z_1m_1+\dots+zm_s) = 1,$$

$$\sum_{z_1,\dots,z_s=1}^{p-1} \delta_p(z_1m_1+\dots+z_sm_s) \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{z_1,\dots,z_{s-1}=1}^{p-1} \sum_{z_s=1}^{p} \delta_p(z_1m_1+\dots+z_sm_s) = (p-1)^{s-1},$$

что совпадает с оценкой (117).

Обозначим теперь через $T(z_1, \dots, z_s)$ сумму

$$T(z_1,\dots,z_s) = \sum_{m_1,\dots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(z_1m_1+\dots+z_sm_s)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s},$$

где $z_1, \dots, z_s$ — произвольные целые. Рассмотрим целые $a_1, \dots, a_s$, при которых достигается минимум функции $T(z_1, \dots, z_s)$ в области $1 \leqslant z_\nu \leqslant p-1$ $(\nu=1, 2, \dots, s)$. Очевидно,

$$T(a_1,\dots,a_s) =$$

$$= \min_{z_1,\dots,z_s} T(z_1,\dots,z_s) \leqslant \frac{1}{(p-1)^s}\sum_{z_1,\dots,z_s=1}^{p-1} T(z_1,\dots,z_s) =$$

$$= \frac{1}{(p-1)^s}\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{1}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s}\sum_{z_1,\dots,z_s=1}^{p-1}\delta_p(z_1m_1+\dots+z_sm_s).$$

Отсюда в силу (117) следует утверждение леммы:

$$T(a_1,\dots,a_s) \leqslant \frac{1}{(p-1)^s}\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{(p-1)^{s-1}}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p-1}\left(1+2\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{m}\right)^s < \frac{2}{p}\left(3+2\int_1^p\frac{dx}{x}\right)^s = \frac{2(3+2\ln p)^s}{p}.$$

Легко видеть, что лемма 20 не только доказывает существование оптимальных коэффициентов, но и позволяет вычислять их для каждого простого p и любого $s \geqslant 1$. Однако обычно для вычисления оптимальных коэффициентов применяются другие способы, требующие значительно меньшего числа действий. Несколько таких способов мы рассмотрим в следующей главе.

Сетки вида

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N), \quad (118)$$

где $N = p$ и целые $a_1, \ldots, a_s$ взаимно просты с p, будем называть произвольными параллелепипедальными сетками.

Сетки (118), *в которых величины $a_1, \ldots, a_s$ являются оптимальными коэффициентами по модулю p, будем называть оптимальными параллелепипедальными сетками или просто параллелепипедальными сетками.*

Покажем, что с помощью параллелепипедальных сеток можно получить квадратурные формулы, погрешность которых на классе E_s^α имеет порядок $N^{-\alpha} \ln^\gamma N$, где γ — некоторая константа, зависящая от α и s. Предварительно докажем две леммы.

Лемма 21. *Пусть $N = p$ и $a_1, \ldots, a_s$ — произвольные целые. Если ряд Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)$ сходится абсолютно, то погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R \qquad (119)$$

удовлетворяет равенству

$$R = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s)\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s),$$

где $C(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функции f. Если, кроме того, $f \in E_s^\alpha(C)$, то

$$|R| \leqslant C \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}.$$

Доказательство. Согласно лемме 11 (стр. 43) для погрешности квадратурной формулы, построенной с помощью сетки

$$M_k = (\xi_1(k), \ldots, \xi_s(k)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N),$$

справедливо равенство

$$R = \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s)\, S(m_1, \ldots, m_s), \quad (120)$$

где

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i [m_1 \xi_1(k) + \ldots + m_s \xi_s(k)]}.$$

Так как сетка квадратурной формулы (119) определяется равенствами $\xi_\nu(k) = \left\{\frac{a_\nu k}{p}\right\}$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, то пользуясь леммой 1 (стр. 18), для соответствующей суммы $S(m_1, \ldots, m_s)$ получим

$$S(m_1, \ldots, m_s) = \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \left(m_1 \left\{\frac{a_1 k}{p}\right\} + \ldots + m_s \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s) k}{p}} = p\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s).$$

Отсюда в силу (120) следует первое утверждение леммы:

$$R = \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s)\, p\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s) =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' C(m_1, \ldots, m_s)\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s).$$

Далее, пользуясь оценкой

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha},$$

справедливой для функций $f \in E_s^\alpha(C)$, получим

$$|R| \leqslant \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' |C(m_1,\ldots,m_s)|\,\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s) \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},$$

чем лемма доказана полностью.

Лемма 22. *Пусть каждое из целых $a_1, \ldots, a_s$ взаимно просто с p. Тогда при $\alpha > 1$ справедливо равенство*

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} =$$

$$= \sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} + R',$$

где $R' < \dfrac{sB^s}{p^\alpha}$ и $B < 3 + \dfrac{2}{\alpha-1}$.

Доказательство. Очевидно,

$$R' = \sum_{m_1,\ldots,m_s} \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},$$

где суммирование в сумме $\sum\limits_{m_1,\ldots,m_s}$ распространено на системы $m_1, \ldots, m_s$, в которых хотя бы одна из величин m_ν по модулю больше или равна p. Следовательно,

$$R' \leqslant \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{m_1,\ldots,m_{\nu-1},\, m_{\nu+1},\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \sum_{|m_\nu| \geqslant p} \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}. \tag{121}$$

Пусть a взаимно просто с p и b — произвольное целое. Применяя следствие леммы 1 (стр. 19), получим

$$\sum_{m \geqslant p} \frac{\delta_p(am+b)}{m^\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=np}^{(n+1)p-1} \frac{\delta_p(am+b)}{m^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(np)^\alpha} \sum_{m=np}^{np+p-1} \delta_p(am+b) = \frac{1}{p^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}.$$

Отсюда следует, что

$$\sum_{|m| \geqslant p} \frac{\delta_p(am+b)}{|m|^\alpha} = \sum_{m \geqslant p} \frac{\delta_p(am+b)+\delta_p(-am+b)}{m^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{p^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} < \frac{1}{p^\alpha} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{m}^\alpha}.$$

Пользуясь этой оценкой, из (121) получим утверждение леммы:

$$R' \leqslant \frac{1}{p^\alpha} \sum_{\nu=1}^{s} \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} = \frac{sB^s}{p^\alpha},$$

где в силу (22)

$$B = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\overline{m}^\alpha} < 3 + \frac{2}{\alpha-1}.$$

Теорема 12. *Пусть $p > 2$, $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс и $N = p$. Если $f \in E_s^\alpha(C)$, то для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - R$$

выполняется оценка

$$|R| \leqslant CC' \frac{\ln^{\alpha\beta} N}{N^\alpha},$$

где C' — некоторая константа, зависящая только от α и s.

Доказательство. Пользуясь леммами 21 и 22, получим

$$|R| \leqslant C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} + C\frac{sB^s}{p^\alpha},$$

где $B < 3 + \dfrac{2}{\alpha-1}$.

Применяя при $u_\nu \geqslant 0$ и $\alpha > 1$ неравенство

$$\sum u_\nu^\alpha \leqslant \left(\sum u_\nu\right)^\alpha, \qquad (122)$$

справедливое для конечных сумм и сходящихся рядов, в силу (116) получим

$$|R| \leqslant C\left[\sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}\right]^\alpha + C\frac{sB^s}{p^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant C\left(C_0^\alpha \frac{\ln^{\alpha\beta} p}{p^\alpha} + \frac{sB^s}{p^\alpha}\right) \leqslant C\left(C_0^\alpha + sB^s\right)\frac{\ln^{\alpha\beta} N}{N^\alpha}. \qquad (123)$$

Отсюда, так как $B < 3 + \frac{2}{\alpha - 1}$ и C_0 зависит только от s, следует утверждение теоремы.

Легко видеть, что результаты, получающиеся с помощью параллелепипедальных сеток на классе E_s^α, не допускают уже дальнейшего существенного улучшения. Действительно, согласно теореме 12, для погрешности квадратурных формул с параллелепипедальными сетками выполняется оценка

$$R = O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right), \qquad (124)$$

где γ не зависит от N. С другой стороны, как показано в теореме 1 (стр. 45), на классе E_s^α ни при каких сетках нельзя получить квадратурные формулы, погрешность которых имела бы оценку, лучшую чем

$$R = O\left(\frac{1}{N^\alpha}\right).$$

Таким образом, в оценке (124) показатель α, определяющий скорость убывания функции $\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}$, является предельно большим и можно ставить вопрос лишь об уточнении показателя γ.

Из теоремы 12 следует, что γ не превосходит произведения $\alpha\beta$, где β — индекс оптимальных коэффициентов. В частности, для оптимальных коэффициентов, указанных в лемме 20, величина β равна s и соответственно $\gamma \leqslant \alpha s$.

Следующая теорема показывает, что ни при каком выборе целых $a_1, \ldots, a_s$ с помощью сеток вида

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

в оценке (124) нельзя получить для γ значение меньшее, чем $s - 1$.

Лемма 23. *Пусть $p > 1$, $a_1, \ldots, a_s$ — произвольные целые, $m_\nu \geqslant 1$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$ и $m_1 \ldots m_s \geqslant 2p$. Тогда справедлива оценка*

$$\sum_{|k_1| \leqslant m_1, \ldots, |k_s| \leqslant m_s}{}' \delta_p(a_1 k_1 + \ldots + a_s k_s) \geqslant \frac{(m_1 + 1) \ldots (m_s + 1)}{2p}.$$

Доказательство. Обозначим через $n(\lambda)$ число систем $x_1, \ldots, x_s$, удовлетворяющих сравнению

$$a_1 x_1 + \ldots + a_s x_s \equiv \lambda \pmod{p}, \qquad (125)$$

где $\lambda, a_1, \ldots, a_s$ — фиксированные целые и величины x_ν независимо друг от друга пробегают интервалы $0 \leqslant x_\nu \leqslant m_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$. Пусть при $\lambda = \lambda_0$ достигается максимальное значение величины $n(\lambda)$. Тогда очевидно,

$$n(\lambda_0) = \max_{1 \leqslant \lambda \leqslant p} n(\lambda) \geqslant \frac{1}{p}\sum_{\lambda=1}^{p} n(\lambda) = \frac{(m_1 + 1) \ldots (m_s + 1)}{p}. \qquad (126)$$

Обозначим через $x_{1j}, \ldots, x_{sj}$ $(j = 1, 2, \ldots, n(\lambda_0))$ системы $x_1, \ldots, x_s$, удовлетворяющие сравнению (125) при $\lambda = \lambda_0$, и образуем разности

$$k_{1j} = x_{1j} - x_{11}, \ldots, k_{sj} = x_{sj} - x_{s1} \qquad (j = 2, 3, \ldots, n(\lambda_0)).$$

Тогда из (125) следует, что

$$a_1 k_{1j} + \ldots + a_s k_{sj} = a_1(x_{1j} - x_{11}) + \ldots +$$
$$+ a_s(x_{sj} - x_{s1}) \equiv 0 \pmod{p},$$
$$\delta_p(a_1 k_{1j} + \ldots + a_s k_{sj}) = 1. \qquad (127)$$

Так как при $j = 2, 3, \ldots, n(\lambda_0)$ системы $k_{1j}, \ldots, k_{sj}$ различны, ни одна из них не совпадает с системой $(0, \ldots, 0)$ и $|k_{\nu j}| = |x_{\nu j} - x_{\nu 1}| \leqslant m_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots, s)$, то, пользуясь равенством (127), получим

$$\sum'_{|k_1|\le m_1,\dots,|k_s|\le m_s} \delta_p(a_1k_1+\dots+a_sk_s) \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{j=2}^{n(\lambda_0)} \delta_p(a_1k_{1j}+\dots+a_sk_{sj}) = n(\lambda_0)-1.$$

Отсюда в силу (126) следует утверждение леммы:

$$\sum'_{|k_1|\le m_1,\dots,|k_s|\le m_s} \delta_p(a_1k_1+\dots+a_sk_s) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{(m_1+1)\dots(m_s+1)}{p} - 1 \geqslant \frac{(m_1+1)\dots(m_s+1)}{2p}.$$

Теорема 13. *Пусть* $p>2^s$, $a_1, \dots, a_s$ — *произвольные целые и* $N=p$. *При любых* $\alpha>1$ *и* $C>1$ *найдется функция* $f\in E_s^\alpha(C)$ *такая, что погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1\dots\int_0^1 f(x_1,\dots,x_s)\,dx_1\dots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - R$$

удовлетворяет неравенству

$$|R| \geqslant CC'\,\frac{\ln^{s-1}N}{N^\alpha},$$

где $C'=C'(\alpha,s)>0$.

Доказательство. Пусть $s\geqslant 2$. Рассмотрим функцию

$$f(x_1,\dots,x_s) = C\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Так как эта функция принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$, то согласно лемме 21

$$R = C\sum'^{\infty}_{m_1,\dots,m_s=-\infty} \frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}. \qquad (128)$$

Определим функцию $\varphi(m_1, \dots, m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1,\dots,m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } m_1=\dots=m_s=0, \\ \delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s) & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Пользуясь первой из оценок леммы 18, получим из (128)

$$R = C\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(m_1,\dots,m_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant C\alpha^s \sum_{m_1,\dots,m_s=1}^{\infty} \frac{1}{[(m_1+1)\dots(m_s+1)]^{\alpha+1}} \times$$

$$\times \sum_{|k_1|\le m_1,\dots,|k_s|\le m_s} \varphi(k_1,\dots,k_s) \geqslant$$

$$\geqslant C\alpha^s \sum_{m_1\dots m_s\geqslant 2p} \frac{1}{[(m_1+1)\dots(m_s+1)]^{\alpha+1}} \times$$

$$\times \sum'_{|k_1|\le m_1,\dots,|k_s|\le m_s} \delta_p(a_1k_1+\dots+a_sk_s). \qquad (129)$$

Но согласно лемме 23 при $m_1\dots m_s\geqslant 2p$ выполняется оценка

$$\sum'_{|k_1|\le m_1,\dots,|k_s|\le m_s} \delta_p(a_1k_1+\dots+a_sk_s) \geqslant \frac{(m_1+1)\dots(m_s+1)}{2p}.$$

Подставляя эту оценку в соотношение (129), получим

$$R \geqslant \frac{C\alpha^s}{2p}\sum_{m_1\dots m_s\geqslant 2p} \frac{1}{[(m_1+1)\dots(m_s+1)]^\alpha} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{C\alpha^s}{2^{\alpha s+1}p}\sum_{m_1,\dots,m_{s-1}=1}^{t} \frac{1}{(m_1\dots m_{s-1})^\alpha}\cdot\sum_{m_s\geqslant 2p(m_1\dots m_{s-1})^{-1}} \frac{1}{m_s^\alpha},$$

где $t=\left[\sqrt[s-1]{2p}\right]$. Отсюда, так как при $m_1\dots m_{s-1}\leqslant 2p$

$$\sum_{m_s\geqslant\frac{2p}{m_1\dots m_{s-1}}} \frac{1}{m_s^\alpha} \geqslant \int_{\frac{4p}{m_1\dots m_{s-1}}}^{\infty} \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{(m_1\dots m_{s-1})^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(4p)^{\alpha-1}},$$

следует утверждение теоремы для случая $s\geqslant 2$:

$$R\geqslant \frac{C\alpha^s}{(\alpha-1)\,2^{\alpha(s+2)}p^\alpha}\sum_{m_1,\ldots,m_{s-1}=1}^{t}\frac{1}{m_1\ldots m_{s-1}}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{C\alpha^s\ln^{s-1}(t+1)}{(\alpha-1)\,2^{\alpha(s+2)}p^\alpha}\geqslant CC'\frac{\ln^{s-1}N}{N^\alpha},$$

где $C'=\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{\alpha}{4^\alpha(s-1)}\right)^s$.

При $s=1$ утверждение теоремы следует, очевидно, из теоремы 1 (стр. 45).

Обозначим через $P(x_1, \ldots, x_s)$ произвольный конечный тригонометрический полином:

$$P(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{m_1,\ldots,m_s}C(m_1,\ldots,m_s)\,e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}. \qquad (130)$$

Степенью полинома $P(x_1, \ldots, x_s)$ будем называть максимальную величину произведения $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s$, где максимум берется по всем системам $m_1, \ldots, m_s$, на которые распространено суммирование в сумме (130).

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс $N=p$, C_0 — константа, связанная согласно условию (116) с выбором оптимальных коэффициентов. Покажем, что для полиномов (130), степень которых не превосходит величины $\frac{N}{C_0\ln^\beta N}$, справедливо равенство

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 P(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}P\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right),$$

т. е. что квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками точны для указанных тригонометрических полиномов. Установим предварительно одно необходимое условие оптимальности, непосредственно следующее из определения оптимальных коэффициентов.

Рассмотрим решения сравнения

$$a_1m_1+\ldots+a_sm_s\equiv 0 \pmod p, \qquad (131)$$

получающиеся при $|m_\nu|\leqslant p-1$ ($\nu=1, 2, \ldots, s$). Решение $m_1=\ldots=m_s=0$ будем называть тривиальным.

Лемма 24. *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс и C_0 — константа, указанная в условии* (116). *Тогда для всякого нетривиального решения сравнения* (131) *выполняется неравенство*

$$\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s>\frac{p}{C_0\ln^\beta p}.$$

Доказательство. Согласно (116) оптимальные коэффициенты удовлетворяют неравенству

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}<C_0\frac{\ln^\beta p}{p}.$$

В силу определения величины $\delta_p(m)$ в левой части этого неравенства отличны от нуля только такие слагаемые, для которых система $m_1, \ldots, m_s$ является нетривиальным решением сравнения (131). Так как любое из этих слагаемых не превосходит всей суммы, то для каждого нетривиального решения сравнения получим

$$\frac{1}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}=\frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}<C_0\frac{\ln^\beta p}{p},$$

и, следовательно,

$$\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s>\frac{p}{C_0\ln^\beta p},$$

что совпадает с утверждением леммы.

Теорема 14. *Пусть C_0 — константа, связанная, согласно условию* (116), *с выбором оптимальных коэффициентов $a_1, \ldots, a_s$, и β — их индекс. Тогда при $N=p$ квадратурная формула*

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)-R$$

точна для тригонометрических полиномов, степень которых не превосходит величины $\frac{N}{C_0 \ln^\beta N}$.

Доказательство. Пусть тригонометрический полином $P(x_1, \ldots, x_s)$ определен равенством

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{m_1, \ldots, m_s} C(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}. \quad (132)$$

Так как по условию степень полинома $P(x_1, \ldots, x_s)$ не превосходит величины $\frac{N}{C_0 \ln^\beta N}$, то в сумме (132) суммирование распространено только на такие системы $m_1, \ldots, m_s$, для которых выполняется неравенство

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \leqslant \frac{N}{C_0 \ln^\beta N}.$$

Следовательно, применяя лемму 21 и замечая, что $N = p$, получим

$$R = \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < \frac{p}{C_0 \ln^\beta p}}' C(m_1, \ldots, m_s)\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s). \quad (133)$$

В силу леммы 24 все нетривиальные решения сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p$$

удовлетворяют условию

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s > \frac{p}{C_0 \ln^\beta p}.$$

Поэтому среди систем $m_1, \ldots, m_s$, на которые распространено суммирование, в равенстве (133) нет ни одной, для которой величина $\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)$ была бы отлична от нуля. Таким образом, $R = 0$, что совпадает с утверждением теоремы.

Результаты, полученные с помощью параллелепипедальных сеток, будут, очевидно, справедливы для периодических функций из класса H_s^α, $(\alpha \geqslant 2)$, так как эти функции принадлежат классу E_s^α. Пользуясь периодизацией функций, квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками можно распространить и на произвольные функции $f \in H_s^\alpha$.

Теорема 15. *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p и $N = p$. Если $\alpha \geqslant 2$, $f \in H_s^\alpha$ и функция φ получена путем полной периодизации функции f, то*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right),$$

где γ зависит только от α и s.

Доказательство. Так как функция $\varphi(x_1, \ldots, x_s)$ получена путем полной периодизации функции $f(x_1, \ldots, x_s)$, то согласно следствию леммы 12 (стр. 57) справедливо равенство

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})\, dx_1 \ldots dx_s, \quad (134)$$

где функция $\varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})$ принадлежит классу E_s^α. Но тогда, применяя теорему 12, получим

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \varphi(\{x_1\}, \ldots, \{x_s\})\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^\gamma N}{N^\alpha}\right),$$

где γ зависит только от α и s. Отсюда в силу (134) следует утверждение теоремы.

Следствие. *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p и $N = p$. Если функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ имеет в единичном s-мерном кубе непрерывную производную $\frac{\partial^{2s} f}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_s^2}$ и функция φ получена путем* *простейшей периодизации функции f, то*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^{\gamma} N}{N^2}\right),$$

где γ зависит только от s.

Действительно, в силу непрерывности производной $\frac{\partial^{2s} f}{\partial x_1^2 \ldots \partial x_s^2}$ функция f принадлежит классу H_s^2. Но на классе H_s^2 простейшая периодизация совпадает с полной периодизацией. Следовательно, к функции f можно применить квадратурную формулу теоремы 15. Полагая в этой формуле $\alpha = 2$, получим утверждение следствия.

В теореме 12 оценка погрешности квадратурной формулы

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R$$

была получена в предположении, что $N = p$. Такое же требование равенства между числом узлов сетки и модулем оптимальных коэффициентов содержится в теореме 15. Рассмотрим, в какой мере это требование является необходимым, и выясним, можно ли применять квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками при фиксированных p, $a_1, \ldots, a_s$ и различных N, не превосходящих p.

Легко видеть, что при произвольных оптимальных коэффициентах $a_1, \ldots, a_s$ переход к значениям $N < p$ может привести к нарушению близости между интегралом

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s$$

и суммой

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right).$$

Действительно, пусть $p > 1$ нечетно и $N = \frac{p-1}{2}$. При $s = 1$ любое целое a_1, взаимно простое с p, можно, очевидно, рассматривать как «оптимальный коэффициент» по модулю p. Выберем $s = 1$, $a_1 = 1$ и $f(x_1) = \sin 2\pi x_1$. Тогда получим

$$\left| \int_0^1 f(x_1)\, dx_1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}\right) \right| =$$
$$= \frac{2}{p-1} \sum_{1 \leqslant k \leqslant \frac{p-1}{2}} \sin 2\pi \frac{k}{p} \geqslant \frac{2}{p-1} \sum_{\frac{p}{12} < k < \frac{5p}{12}} \frac{1}{2} > \frac{1}{3}.$$

Следующая теорема показывает, что при дополнительном условии, состоящем в том, чтобы величины $1, a_1, \ldots, a_s$ были $s+1$-мерными оптимальными коэффициентами по модулю p, выбор $N < p$ не только допустим, но и приводит к результатам, которые нельзя уже существенно усилить.

Теорема 16. *Пусть $p > 1$ нечетно, $1, a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p и функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ имеет в единичном s-мерном кубе непрерывную производную $\frac{\partial^s f}{\partial x_1 \ldots \partial x_s}$. Тогда при любом $N \leqslant p$ для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \cdots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R \qquad (135)$$

справедлива оценка

$$|R| \leqslant C_1 \frac{\ln^{\beta} p}{N},$$

где константы C_1 и β не зависят от p и N.

Доказательство. Пусть $p_1 = \frac{p-1}{2}$. Согласно леммам 15 и 16 функцию f можно представить конечным рядом Фурье

$$f\left(\frac{z_1}{p}, \ldots, \frac{z_s}{p}\right) = \\ = \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1} C_p(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i \frac{m_1 z_1 + \ldots + m_s z_s}{p}}, \quad (136)$$

где

$$|C_p(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \quad (137)$$

и C — константа того класса H_s^1, которому принадлежит функция f.

Пользуясь равенством (136), из (135) получим

$$R = C_p(0, \ldots, 0) - \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s + \\ + \frac{1}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1}{}' C_p(m_1, \ldots, m_s) \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i \frac{(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)k}{p}}.$$

Так как, согласно (99)

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = C_p(0, \ldots, 0) + O\left(\frac{1}{p}\right),$$

то существует не зависящая от p и N константа C' такая, что

$$\left|C_p(0, \ldots, 0) - \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s\right| \leqslant \frac{C'}{p} \leqslant \frac{C'}{N}.$$

Следовательно, применяя лемму 3 (стр. 23) и пользуясь оценкой (137), получим

$$|R| \leqslant \frac{C'}{N} + \frac{C}{N} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1}{}' \frac{1}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \times \\ \times \min\left(N, \frac{1}{2\left(\left(\frac{a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s}{p}\right)\right)}\right). \quad (138)$$

Определим m_0 с помощью условий

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv -m_0 \pmod p, \quad |m_0| \leqslant p_1.$$

Тогда, очевидно,

$$\left(\left(\frac{a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s}{p}\right)\right) = \left(\left(\frac{-m_0}{p}\right)\right) = \frac{|m_0|}{p}.$$

Отсюда следует, что

$$\min\left(N, \frac{1}{2\left(\left(\frac{a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s}{p}\right)\right)}\right) = \min\left(N, \frac{p}{2|m_0|}\right) = \\ = \sum_{m_0=-p_1}^{p_1} \delta_p(m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s) \min\left(N, \frac{p}{2|m_0|}\right) \leqslant \\ \leqslant p \sum_{m_0=-p_1}^{p_1} \frac{\delta_p(m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_0}.$$

Подставляя эту оценку в (138), получим

$$|R| \leqslant \frac{C'}{N} + \frac{Cp}{N} \sum_{m_0, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1}{}' \frac{\delta_p(m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_0 \ldots \overline{m}_s}. \quad (139)$$

Так как по условию целые $1, a_1, \ldots, a_s$ являются $s+1$-мерными оптимальными коэффициентами, то согласно определению существуют константы $C_0 = C_0(s)$ и $\beta = \beta(s)$ такие, что

$$\sum_{m_0, \ldots, m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_0 \ldots \overline{m}_s} \leqslant C_0 \frac{\ln^\beta p}{p}.$$

Но тогда, пользуясь оценкой (139), получим

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1}{}' \frac{1}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \min\left(N, \frac{1}{2\left(\left(\frac{a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s}{p}\right)\right)}\right) \leqslant \\ \leqslant p \sum_{m_0, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1}{}' \frac{\delta_p(m_0 + a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_0 \ldots \overline{m}_s} \leqslant C_0 \ln^\beta p. \quad (140)$$

Подставляя эту оценку в (138), получим утверждение теоремы с константой $C_1 = C' + C_0C$:

$$|R| \leqslant \frac{C'}{N} + \frac{CC_0 \ln^\beta p}{N} < C_1 \frac{\ln^\beta p}{N}. \tag{141}$$

Тем же путем, как и в теореме 4 (стр. 51), легко показать, что ни при каком выборе сетки, содержащей p узлов, для произвольного $N \leqslant p$ оценку (141) нельзя заменить оценкой, лучшей чем

$$|R| < \frac{C_1'}{N},$$

где C_1' — константа, не зависящая от p и N.

ГЛАВА III

СВОЙСТВА, ВЫЧИСЛЕНИЕ И ПРАКТИЧЕСКОЕ ПРИМЕНЕНИЕ ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

§ 8. Необходимые и достаточные условия оптимальности

Из результатов, полученных в предыдущей главе, видно, что как для случая периодических функций (класс E_s^α), так и для случая непериодических функций (класс H_s^α) наиболее точные квадратурные формулы удается получить с помощью параллелепипедальных сеток, т. е. сеток вида

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

где $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты, определенные условием (116).

В связи с этим возникает необходимость более детального изучения оптимальных коэффициентов. Установим, прежде всего, некоторые необходимые и достаточные условия оптимальности.

Лемма 25. *При любом целом $p > 1$ справедливо тождество*

$$\prod_{k=1}^{p-1} \left(2 \sin \frac{\pi k}{p}\right) = p.$$

Доказательство. Пусть $x_1, \ldots, x_{p-1}$ — отличные от единицы корни уравнения $x^p - 1 = 0$:

$$x_k = e^{2\pi i \frac{k}{p}} \qquad (k = 1, 2, \ldots, p-1).$$

Тогда, очевидно,

$$1+x+\ldots+x^{p-1}=(x-x_1)\ldots(x-x_{p-1}).$$

Из этого тождества при $x=1$ получим

$$p=\prod_{k=1}^{p-1}(1-x_k)=\prod_{k=1}^{p-1}\left(1-e^{2\pi i\frac{k}{p}}\right)=$$

$$=\prod_{k=1}^{p-1}\left(\frac{e^{\pi i\frac{k}{p}}-e^{-\pi i\frac{k}{p}}}{i}\right)\left(-ie^{\pi i\frac{k}{p}}\right)=$$

$$=\left[\prod_{k=1}^{p-1}\left(2\sin\frac{\pi k}{p}\right)\right](-i)^{p-1}\prod_{k=1}^{p-1}e^{\pi i\frac{k}{p}}.$$

Отсюда, так как

$$(-i)^{p-1}\prod_{k=1}^{p-1}e^{\pi i\frac{k}{p}}=e^{-\frac{\pi i}{2}(p-1)+\frac{\pi i}{p}\frac{p(p-1)}{2}}=1,$$

следует утверждение леммы.

Лемма 26. *Для любого x из интервала $0<x<1$ справедливо равенство*

$$1-2\ln(2\sin\pi x)=\sum_{m=-(p-1)}^{p-1}\frac{e^{2\pi imx}}{\overline{m}}+\frac{\theta}{p(x)},$$

где (x) — расстояние от x до ближайшего целого и $|\theta|\leqslant 1$.

Доказательство. Применяя известное разложение функции $1-2\ln(2\sin\pi x)$ в ряд косинусов, при $0<x<1$ получим

$$1-2\ln(2\sin\pi x)=1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi mx}{m}=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{\overline{m}}.$$

Отсюда следует, что

$$1-2\ln(2\sin\pi x)=\sum_{m=-(p-1)}^{p-1}\frac{e^{2\pi imx}}{\overline{m}}+r, \tag{142}$$

где

$$|r|=\left|\sum_{m=p}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{m}+\sum_{m=p}^{\infty}\frac{e^{-2\pi imx}}{m}\right|\leqslant 2\left|\sum_{m=p}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{m}\right|.$$

Далее, пользуясь тождеством

$$\frac{e^{2\pi imx}}{m}=\frac{1}{e^{2\pi ix}-1}\left[\frac{e^{2\pi i(m+1)x}}{m+1}-\frac{e^{2\pi imx}}{m}+\frac{e^{2\pi i(m+1)x}}{m(m+1)}\right],$$

после суммирования по m, получим

$$\left|\sum_{m=p}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{m}\right|=\frac{1}{|e^{2\pi ix}-1|}\left|\frac{e^{2\pi ipx}}{p}+\sum_{m=p}^{\infty}\frac{e^{2\pi i(m+1)x}}{m(m+1)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2\sin\pi x}\left[\frac{1}{p}+\sum_{m=p}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right]=\frac{1}{p\sin\pi x}.$$

Так как, согласно (8), $\sin\pi x\geqslant 2(x)$, то

$$|r|\leqslant\frac{2}{p\sin\pi x}\leqslant\frac{1}{p(x)}$$

и, следовательно,

$$r=\frac{\theta}{p(x)}\qquad(|\theta|\leqslant 1).$$

Подставляя этот результат в равенство (142), получим утверждение леммы.

Теорема 17. *Пусть $p>1$ и величины $a_\nu=a_\nu(p)$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$ взаимно просты с p. Необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $a_1, \ldots, a_s$ были оптимальными коэффициентами, является существование констант $\beta_1=\beta_1(s)$ и $C_1=C_1(s)$ таких, чтобы оценка*

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}\right)\right]\ldots\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\right]\leqslant$$

$$\leqslant p+C_1\ln^{\beta_1}p \tag{143}$$

выполнялась для бесконечной последовательности целых p.

Доказательство. Пусть величины u_ν, v_ν и r_ν удовлетворяют условиям

$$u_\nu=v_\nu+r_\nu,\quad |u_\nu|\leqslant u,\quad |r_\nu|\leqslant 1\qquad(\nu=1, 2, \ldots, s). \tag{144}$$

Легко показать, что при $1 \leqslant n \leqslant s$ выполняется соотношение

$$u_1 \dots u_n = v_1 \dots v_n + \theta_0 (u+1)^{n-1} (|r_1| + \dots + |r_n|), \quad (145)$$

где $|\theta_0| \leqslant 1$.

Действительно, в силу первого из условий (144), при $n=1$ это соотношение очевидно. Применим индукцию. Пусть $n \geqslant 2$ и утверждение верно для $n-1$. Тогда, так как $|v_n| = |u_n - r_n| \leqslant u+1$, получим

$$|u_1 \dots u_n - v_1 \dots v_n| =$$
$$= \left| (u_1 \dots u_{n-1} - v_1 \dots v_{n-1}) v_n + u_1 \dots u_{n-1} r_n \right| \leqslant$$
$$\leqslant (u+1)^{n-2} (|r_1| + \dots + |r_{n-1}|) |v_n| + u^{n-1} |r_n| \leqslant$$
$$\leqslant (u+1)^{n-1} (|r_1| + \dots + |r_n|)$$

и, следовательно,

$$u_1 \dots u_n = v_1 \dots v_n + \theta_0 (u+1)^{n-1} (|r_1| + \dots + |r_n|) \qquad (|\theta_0| \leqslant 1).$$

Выберем, в частности,

$$u_\nu = 1 - 2 \ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{a_\nu k}{p} \right\} \right), \quad v_\nu = \sum_{m_\nu = -(p-1)}^{p-1} \frac{e^{2\pi i m_\nu \frac{a_\nu k}{p}}}{\overline{m}_\nu},$$

$$r_\nu = \frac{\theta_\nu}{p \left(\frac{a_\nu k}{p} \right)} \quad (|\theta_\nu| \leqslant 1, \ \nu = 1, 2, \dots, s), \quad u = 1 + 2 \ln p.$$

При этом в силу леммы 26 выполняется первое из условий (144): $u_\nu = v_\nu + r_\nu$. Далее, очевидно, при $k = 1, 2, \dots, p-1$ будет

$$|u_\nu| \leqslant 1 + 2 \left| \ln \left(2 \sin \frac{\pi}{p} \right) \right| \leqslant 1 + 2 \ln p, \quad |r_\nu| \leqslant \frac{1}{p \left(\frac{1}{p} \right)} = 1.$$

Таким образом, условия (144) выполнены и, следовательно, пользуясь соотношением (145), при $n = s$ получим

$$\left[1 - 2 \ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\} \right) \right] \dots \left[1 - 2 \ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \right] =$$
$$= \sum_{m_1, \dots, m_s = -(p-1)}^{p-1} \frac{e^{2\pi i \frac{a_1 m_1 + \dots + a_s m_s}{p} k}}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} +$$
$$+ \theta_0 \frac{(2 + 2 \ln p)^{s-1}}{p} \left(\frac{|\theta_1|}{\left(\frac{a_1 k}{p} \right)} + \dots + \frac{|\theta_s|}{\left(\frac{a_s k}{p} \right)} \right). \quad (146)$$

Так как в силу леммы 1 (стр. 18)

$$\sum_{k=1}^{p-1} e^{2\pi i \frac{mk}{p}} = -1 + \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{mk}{p}} = p \delta_p(m) - 1,$$

то после суммирования по k из (146) получим

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[1 - 2 \ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{a_1 k}{p} \right\} \right) \right] \dots \left[1 - 2 \ln \left(2 \sin \pi \left\{ \frac{a_s k}{p} \right\} \right) \right] =$$
$$= \sum_{m_1, \dots, m_s = -(p-1)}^{p-1} \frac{p \delta_p (a_1 m_1 + \dots + a_s m_s) - 1}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} +$$
$$+ \frac{(2 + 2 \ln p)^{s-1}}{p} \sum_{k=1}^{p-1} \theta_0 \left(\frac{|\theta_1|}{\left(\frac{a_1 k}{p} \right)} + \dots + \frac{|\theta_s|}{\left(\frac{a_s k}{p} \right)} \right). \quad (147)$$

Далее, так как

$$\sum_{m_1, \dots, m_s = -(p-1)}^{p-1} \frac{1}{\overline{m}_1 \dots \overline{m}_s} = \left(1 + 2 \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{m} \right)^s \leqslant (3 + 2 \ln p)^s$$

и согласно следствию леммы 4 (стр. 24)

$$\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{\left(\frac{a_\nu k}{p} \right)} \leqslant 2p (1 + \ln p),$$

то после выделения слагаемого с $m_1=\ldots=m_s=0$ равенство (147) примет вид

$$p\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}=$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}\right)\right]\ldots\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\right]-$$

$$-p+O(\ln^s p). \quad (148)$$

Отсюда, выбирая $\beta=\max(\beta_1, s)$ и пользуясь условием (143), получим

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}=O\left(\frac{\ln^\beta p}{p}\right),$$

чем в силу определения оптимальных коэффициентов доказана достаточность условия (143).

Необходимость условия (143) также непосредственно следует из равенства (148). Действительно, пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты. Тогда согласно (116) для бесконечной последовательности значений p выполняется оценка

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant C_0\frac{\ln^\beta p}{p},$$

где $\beta=\beta(s)$ и $C_0=C_0(s)$. Пользуясь этой оценкой, из (148) получим условие (143) с некоторым $C_1=C_1(s)$ и $\beta_1=\max(\beta, s)$, чем теорема доказана полностью.

Определим функцию $T_p(z_1, \ldots, z_n)$ равенством

$$T_p(z_1,\ldots,z_n)=$$

$$=\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{z_1k}{p}\right\}\right)\right]\ldots\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{z_nk}{p}\right\}\right)\right],$$

где $n\geqslant 1$, $p>1$ и $z_1, \ldots, z_n$ — произвольные целые, каждое из которых взаимно просто с p.

Теорема 18. *Пусть $p>2$ — простое, $a_1=1$ и при заданных $a_1, \ldots, a_n$ $(n\geqslant 1)$ величина a_{n+1} равна одному из значений z $(1\leqslant z\leqslant p-1)$, при которых достигается минимум функции $T_p(a_1, \ldots, a_n, z)$. Тогда целые $a_1, \ldots, a_s$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p и при $N=p$ для функций f, принадлежащих классу E_s^α, будет справедлива квадратурная формула*

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)+O\left(\frac{\ln^{\alpha s}N}{N^\alpha}\right).$$

Доказательство. Покажем сперва, что при любом $n\geqslant 1$ выполняется неравенство

$$T_p(a_1,\ldots,a_n)<p. \quad (149)$$

Действительно, пусть a_1 — произвольное целое, взаимно простое с p. Так как согласно лемме 4 (стр. 23) совокупность значений величины $\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}$ при $k=1, 2, \ldots, p-1$ совпадает с совокупностью значений $\frac{k}{p}$, то

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}\right)\right]=$$

$$=p-1-2\sum_{k=1}^{p-1}\ln\left(2\sin\pi\frac{k}{p}\right)=$$

$$=p-1-2\ln\prod_{k=1}^{p-1}\left(2\sin\frac{\pi k}{p}\right).$$

Но согласно лемме 25

$$\prod_{k=1}^{p-1}\left(2\sin\frac{\pi k}{p}\right)=p. \quad (150)$$

Следовательно, при $n=1$ получим

$$T_p(a_1)=\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}\right)\right]=$$

$$=p-1-2\ln p, \quad (151)$$

$$T_p(a_1)<p.$$

Таким образом, неравенство (149) выполняется при $n=1$. Применим индукцию. Допустим, что утверждение (149) справедливо при некотором $n \geqslant 1$. Тогда

$$T_p(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \min_{1 \leqslant z \leqslant p-1} T_p(a_1, \ldots, a_n, z) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} T_p(a_1, \ldots, a_n, z) =$$

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{z=1}^{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}\right)\right] \ldots$$

$$\ldots \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_n k}{p}\right\}\right)\right]\left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{zk}{p}\right\}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}\right)\right] \ldots$$

$$\ldots \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_n k}{p}\right\}\right)\right] \sum_{z=1}^{p-1} \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{zk}{p}\right\}\right)\right].$$

Отсюда, пользуясь равенством (151), в силу индукционного предположения получим

$$T_p(a_1, \ldots, a_{n+1}) \leqslant \frac{p-1-2\ln p}{p-1} \sum_{k=1}^{p-1} \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}\right)\right] \ldots$$

$$\ldots \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_n k}{p}\right\}\right)\right] =$$

$$= \frac{p-1-2\ln p}{p-1} T_p(a_1, \ldots, a_n) < p,$$

чем утверждение (149) доказано полностью.

Так как, в частности,

$$\sum_{k=1}^{p-1} \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}\right)\right] \ldots \left[1 - 2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right)\right] =$$

$$= T_p(a_1, \ldots, a_s) < p,$$

то, согласно теореме 17, целые $a_1, \ldots, a_s$ будут оптимальными коэффициентами, причем в силу (148) будет выполняться оценка

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} = O\left(\frac{\ln^s p}{p}\right),$$

т. е. условие (116) выполняется при $\beta = s$. Но тогда, пользуясь теоремой 12 (стр. 101), получим

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^{\alpha s} N}{N^\alpha}\right),$$

чем теорема 18 доказана полностью.

Обозначим через q минимальное значение произведения $\overline{m}_1, \ldots \overline{m}_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod{p}. \qquad (152)$$

В следующей теореме, принадлежащей Н. С. Бахвалову [1], устанавливается связь между величиной q и оценкой погрешности квадратурной формулы, построенной при $N=p$ с помощью сетки

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Эта теорема позволяет установить еще одно достаточное условие того, чтобы целые $a_1, \ldots, a_s$ были оптимальными коэффициентами по модулю p *).

Лемма 27. *Если для всякого нетривиального решения сравнения* (152) *выполняется неравенство* $\overline{m}_1, \ldots, \overline{m}_s \geqslant q$, *то при любых целых* λ, λ_ν *и* $n_\nu \geqslant 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$)

*) Доказательство, приведенное здесь, отлично от доказательства, данного в работе [1].

справедлива оценка

$$\sum_{k_1=\lambda_1+1}^{\lambda_1+n_1}\cdots\sum_{k_s=\lambda_s+1}^{\lambda_s+n_s}\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\lambda)\leqslant$$
$$\leqslant\begin{cases}1 & \text{при } n_1\ldots n_s\leqslant q,\\ \dfrac{4n_1\ldots n_s}{q} & \text{при } n_1\ldots n_s>q.\end{cases}\qquad (153)$$

Доказательство. При $n_1\ldots n_s=1$ оценка (153) очевидна. Пусть $n_1\ldots n_s>1$. Утверждение леммы достаточно проверить для суммы

$$S=\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_s=1}^{n_s}\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\mu),\qquad (154)$$

совпадающей с суммой (153) при $\mu=a_1\lambda_1+\ldots+a_s\lambda_s+\lambda$.

Рассмотрим сперва случай $n_1\ldots n_s\leqslant q$. Допустим, что в сумме (154) найдется два слагаемых, отличных от нуля: $\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\mu)=1$ и $\delta_p(a_1k_1'+\ldots+a_sk_s'+\mu)=1$. Тогда согласно определению величины $\delta_p(m)$ числа $a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\mu$ и $a_1k_1'+\ldots+a_sk_s'+\mu$ будут кратны p. Но тогда и их разность также будет кратна p:

$$a_1(k_1-k_1')+\ldots+a_s(k_s-k_s')\equiv 0\ (\mathrm{mod}\, p).$$

Так как системы $k_1,\ldots,k_s$ и $k_1',\ldots,k_s'$ различны, то система $k_1-k_1',\ldots,k_s-k_s'$ будет нетривиальным решением сравнения (152), следовательно,

$$q\leqslant\overline{k_1-k_1'}\ldots\overline{k_s-k_s'}<n_1\ldots n_s\leqslant q,$$

что невозможно. Полученное противоречие доказывает первую из оценок (153).

Пусть теперь $n_1\ldots n_s>q$. Определим величины r, ρ и n из условий

$$n_{r+1}\ldots n_s<q\leqslant n_r\ldots n_s,\quad q=\rho n_{r+1}\ldots n_s,$$
$$n[\rho]\leqslant n_r<(n+1)[\rho]^{*)}.$$

*) В последнем из этих условий n целое и $[\rho]$ — целая часть величины ρ.

Очевидно, здесь $1\leqslant r\leqslant s$, $1<\rho\leqslant n_r$ и $n\geqslant 1$. Отметим еще, что

$$n+1<\frac{(n+1)([\rho]+1)}{\rho}\leqslant$$
$$\leqslant 4\frac{n[\rho]n_{r+1}\ldots n_s}{\rho n_{r+1}\ldots n_s}\leqslant 4\frac{n_r\ldots n_s}{q}.\qquad (155)$$

Разбивая в сумме (154) интервал r-го суммирования на части, получим

$$S\leqslant\sum_{k_1=1}^{n_1}\cdots\sum_{k_{r-1}=1}^{n_{r-1}}\sum_{\nu=0}^{n}\Bigg[\sum_{k_r=\nu[\rho]+1}^{(\nu+1)[\rho]}\sum_{k_{r+1}=1}^{n_{r+1}}\cdots$$
$$\cdots\sum_{k_s=1}^{n_s}\delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s+\mu)\Bigg].$$

Так как $[\rho]n_{r+1}\ldots n_s\leqslant q$, то согласно первой из оценок (153) сумма, стоящая в квадратных скобках, не превосходит единицы. Следовательно, пользуясь оценкой (155), получим

$$S\leqslant n_1\ldots n_{r-1}(n+1)<4\frac{n_1\ldots n_s}{q},$$

чем лемма доказана полностью.

Лемма 28. *При любых действительных* $\alpha>1$ *и* $t\geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\sum_{m_1\ldots m_s\geqslant t}\frac{1}{(m_1\ldots m_s)^\alpha}\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},\qquad (156)$$

где суммирование распространено на все системы целых положительных чисел $m_1,\ldots,m_s$, *для которых произведение* $m_1\ldots m_s$ *больше или равно* t.

Доказательство. Определим целое n из условия $n<t\leqslant n+1$. При $s=1$ получим

$$\sum_{m_1\geqslant t}\frac{1}{m_1^\alpha}=\sum_{m_1=n+1}^{\infty}\frac{1}{m_1^\alpha}\leqslant\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\int_{n+1}^{\infty}\frac{dx}{x^\alpha}=$$
$$=\frac{1}{(n+1)^\alpha}+\frac{1}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\leqslant\frac{\alpha}{(\alpha-1)(n+1)^{\alpha-1}}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{1}{t^{\alpha-1}}.\qquad (157)$$

Отсюда следует, что оценка (156) справедлива при $s=1$. Применим индукцию. Пусть $s\geqslant 2$ и утверждение леммы справедливо при $s-1$. Тогда

$$\sum_{m_1\dots m_s\geqslant t}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^\alpha}=\sum_{m_s<t}\frac{1}{m_s^\alpha}\sum_{m_1\dots m_{s-1}\geqslant\frac{t}{m_s}}\frac{1}{(m_1\dots m_{s-1})^\alpha}+$$
$$+\sum_{m_s\geqslant t}\frac{1}{m_s^\alpha}\sum_{m_1,\dots,m_{s-1}=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1\dots m_{s-1})^\alpha}. \quad (158)$$

Далее, пользуясь индукционным предположением и оценкой (157), получим

$$\sum_{m_s<t}\frac{1}{m_s^\alpha}\sum_{m_1\dots m_{s-1}\geqslant\frac{t}{m_s}}\frac{1}{(m_1\dots m_{s-1})^\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{s-1}\sum_{m_s<t}\frac{\left(1+\ln\frac{t}{m_s}\right)^{s-2}}{m_s^\alpha\left(\frac{t}{m_s}\right)^{\alpha-1}}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{s-1}\frac{(1+\ln t)^{s-2}}{t^{\alpha-1}}\sum_{m_s<t}\frac{1}{m_s}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{s-1}\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}},$$

$$\sum_{m_s\geqslant t}\frac{1}{m_s^\alpha}\sum_{m_1,\dots,m_{s-1}=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1\dots m_{s-1})^\alpha}=$$
$$=\sum_{m_s\geqslant t}\frac{1}{m_s^\alpha}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\right)^{s-1}\leqslant\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{1}{t^{\alpha-1}}.$$

Теперь из (158) следует утверждение леммы:

$$\sum_{m_1\dots m_s\geqslant t}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^\alpha}\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^{s-1}\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}}+$$
$$+\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{1}{t^{\alpha-1}}\leqslant\alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln t)^{s-1}}{t^{\alpha-1}}.$$

Теорема 19 (Н. С. Бахвалов). *Пусть для нетривиальных решений сравнения*

$$a_1m_1+\dots+a_sm_s\equiv 0\ (\mathrm{mod}\,p)$$

минимальное значение произведения $\overline{m}_1\dots\overline{m}_s$ *равно* q. *Тогда при* $N=p$ *для* $f\in E_s^\alpha(C)$ *погрешность квадратурной формулы*

$$\int_0^1\dots\int_0^1 f(x_1,\dots,x_s)\,dx_1\dots dx_s=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)-R$$

удовлетворяет неравенству

$$|R|\leqslant 4C\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s\frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Доказательство. Пользуясь леммой 21, получим

$$|R|\leqslant C\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}. \quad (159)$$

В силу условия теоремы при $\overline{m}_1\dots\overline{m}_s<q$ слагаемые суммы (159) равны нулю. Следовательно, оценку (159) можно записать в виде

$$|R|\leqslant C\sum_{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s\geqslant q}\frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}. \quad (160)$$

Определим функцию $\varphi(m_1,\dots,m_s)$ равенствами

$$\varphi(m_1,\dots,m_s)=\begin{cases}0, & \text{если } \overline{m}_1\dots\overline{m}_s<q,\\ \delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s), & \text{если } \overline{m}_1\dots\overline{m}_s\geqslant q.\end{cases}$$

Тогда согласно второму утверждению леммы 18 получим

$$\sum_{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s\geqslant q}\frac{\delta_p(a_1m_1+\dots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}=\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(m_1,\dots,m_s)}{(\overline{m}_1\dots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant$$
$$\leqslant\alpha^s\sum_{m_1,\dots,m_s=1}^{\infty}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^{\alpha+1}}\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\dots,|k_s|\leqslant m_s}\varphi(k_1,\dots,k_s)\leqslant$$
$$\leqslant\alpha^s\sum_{m_1\dots m_s\geqslant q}\frac{1}{(m_1\dots m_s)^{\alpha+1}}\times$$
$$\times\sum_{|k_1|\leqslant m_1,\dots,|k_s|\leqslant m_s}\times\delta_p(a_1k_1+\dots+a_sk_s). \quad (161)$$

Пусть $\lambda=0$, $\lambda_\nu=-(m_\nu+1)$ и $n_\nu=2m_\nu+1$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$. Тогда при $m_1 \ldots m_s \geqslant q$ утверждение леммы 27 можно записать в виде

$$\sum_{|k_1|<m_1} \cdots \sum_{|k_s|<m_s} \delta_p(a_1k_1+\ldots+a_sk_s) \leqslant$$
$$\leqslant 4\,\frac{(2m_1+1)\ldots(2m_s+1)}{q} \leqslant 4\cdot 3^s\,\frac{m_1\ldots m_s}{q}.$$

Пользуясь этой оценкой, получим из (161)

$$\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\geqslant q} \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant 4\,(3\alpha)^s\,\frac{1}{q} \sum_{m_1\ldots m_s\geqslant q} \frac{1}{(m_1\ldots m_s)^\alpha}.$$

Но согласно лемме 28

$$\sum_{m_1\ldots m_s\geqslant q} \frac{1}{(m_1\ldots m_s)^\alpha} \leqslant \alpha\left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^{\alpha-1}}$$

и, следовательно,

$$\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\geqslant q} \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Подставляя эту оценку в (160), получим утверждение теоремы:

$$|R| \leqslant 4C\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Следствие. *Пусть $p>2$ и величины $a_\nu=a_\nu(p)$ при $\nu=1, 2, \ldots, s$ взаимно просты с p. Если существует бесконечная последовательность значений p таких, что для всякого нетривиального решения сравнения*

$$a_1m_1+\ldots+a_sm_s\equiv 0 \pmod p \tag{162}$$

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s > \frac{p}{C_1\ln^{\beta_1}p}, \tag{163}$$

где $C_1>0$ и $\beta_1\geqslant 0$ — константы, зависящие только от s, то целые $a_1, \ldots, a_s$ будут оптимальными коэффициентами.

Действительно, пусть q — минимальное значение произведения $\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения (162). Очевидно,

$$\frac{p}{C_1\ln^{\beta_1}p} < q \leqslant p. \tag{164}$$

Рассмотрим функцию

$$f(x_1,\ldots,x_s) = \sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1} \frac{e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Так как эта функция принадлежит классу $E_s^\alpha(1)$, то согласно лемме 21 при $N=p$

$$\int_0^1\cdots\int_0^1 f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s =$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)-R,$$

где

$$R=\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}.$$

Отсюда в силу теоремы 19 следует, что

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant 4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^\alpha}.$$

Выберем $\alpha=1+\frac{1}{\ln p}$. Тогда, пользуясь оценкой (164) и замечая, что $1<\alpha<2$, получим

$$q^\alpha \geqslant \frac{p^\alpha}{(C_1\ln^{\beta_1}p)^\alpha} \geqslant \frac{p}{C_1^2\ln^{2\beta_1}p},$$

$$4\alpha\left(\frac{3\alpha^2}{\alpha-1}\right)^s \frac{(1+\ln q)^{s-1}}{q^\alpha} \leqslant$$
$$\leqslant 8C_1^2(12)^s\,\frac{(\ln p)^{2\beta_1+s}(1+\ln p)^{s-1}}{p} \leqslant 4C_1^2(24)^s\,\frac{\ln^\beta p}{p},$$

где $\beta=2\beta_1+2s-1$. Следовательно,

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha} \leqslant 4C_1^2(24)^s\frac{\ln^\beta p}{p}. \quad (165)$$

Так как при $|m_\nu|<p$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$, в силу выбора α выполняется оценка

$$\frac{1}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}=\frac{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\alpha-1}}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant\frac{(p^s)^{\frac{1}{\ln p}}}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}=\frac{e^s}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha},$$

то из (165) получим

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant$$

$$\leqslant e^s\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^\alpha}\leqslant 4C_1^2(24e)^s\frac{\ln^\beta p}{p}.$$

Отсюда согласно определению (116) следует, что целые $a_1, \ldots, a_s$ будут оптимальными коэффициентами.

Таким образом доказано, что выполнение неравенства (163) для бесконечной последовательности значений p является достаточным условием оптимальности. Отметим, что в силу леммы 24 это условие является также и необходимым условием оптимальности.

§ 9. Теоретикочисловые свойства оптимальных коэффициентов

Установим прежде всего некоторые связи между двумерными оптимальными коэффициентами и теорией непрерывных дробей.

Лемма 29. *Если a взаимно просто с p, $1\leqslant a<p$ и неполные частные числа $\frac{a}{p}$ ограничены величиной M, то справедлива оценка*

$$\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{m\left(\frac{am}{p}\right)}\leqslant 8(M+1)(1+\ln p)^2.$$

Доказательство. Применяя преобразование Абеля, получим

$$\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{m\left(\frac{am}{p}\right)}=\frac{1}{p}S(p-1)+\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{m(m+1)}S(m), \quad (166)$$

где

$$S(m)=\sum_{x=1}^{m}\frac{1}{\left(\frac{ax}{p}\right)}. \quad (167)$$

Пусть разложение числа $\frac{a}{p}$ в непрерывную дробь имеет вид

$$\frac{a}{p}=\cfrac{1}{q_1+\cfrac{1}{q_2+\ddots+\cfrac{1}{q_n}}}.$$

Тогда согласно (11) справедливы равенства

$$\frac{a}{p}=\frac{P_k}{Q_k}+\frac{\theta_k}{Q_kQ_{k+1}} \qquad (k=1, 2, \ldots, n-1), \quad (168)$$

где P_k и Q_k взаимно просты, $|\theta_k|\leqslant 1$, $1=Q_0\leqslant Q_1<\ldots<Q_n$, $P_n=a$ и $Q_n=p$. Так как, по условию $q_k\leqslant M$, то при любом $k=1, 2, \ldots, n$ справедлива оценка (12):

$$Q_k\leqslant(M+1)Q_{k-1}.$$

Пользуясь этой оценкой и применяя следствие леммы 4 (стр. 24), получим

$$\sum_{x=1}^{Q_k-1}\frac{1}{\left(\frac{P_k}{Q_k}x\right)}\leqslant 2Q_k(1+\ln Q_k)\leqslant$$

$$\leqslant 2(M+1)Q_{k-1}(1+\ln Q_k). \quad (169)$$

Покажем, что при $m=1, 2, \ldots, p-1$ для суммы $S(m)$, определенной равенством (167), справедлива оценка

$$S(m)\leqslant 8(M+1)m(1+\ln p). \quad (170)$$

Действительно, если $m \geqslant \frac{1}{2} Q_{n-1}$, то, пользуясь равенствами $a=P_n$, $p=Q_n$ и применяя оценку (169), получим

$$S(m)=\sum_{x=1}^{m} \frac{1}{\left(\frac{ax}{p}\right)} \leqslant \sum_{x=1}^{Q_n-1} \frac{1}{\left(\frac{P_n}{Q_n} x\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 2(M+1) Q_{n-1}(1+\ln Q_n) \leqslant 4(M+1) m(1+\ln p). \quad (171)$$

Если $m<\frac{1}{2} Q_{n-1}$, то, определяя k из условия

$$\frac{Q_{k-1}}{2} \leqslant m<\frac{Q_k}{2} \qquad (1 \leqslant k \leqslant n-1)$$

и пользуясь соотношением (168), получим

$$\left(\frac{ax}{p}\right)=\left(\frac{P_k x}{Q_k}+\frac{\theta_k x}{Q_k Q_{k+1}}\right) \geqslant\left(\frac{P_k x}{Q_k}\right)-\left(\frac{\theta_k x}{Q_k Q_{k+1}}\right).$$

Так как $m<\frac{1}{2} Q_k$, то при $x=1, 2, \ldots, m$

$$\left(\frac{\theta_k x}{Q_k Q_{k+1}}\right)<\frac{1}{2 Q_{k+1}} \leqslant \frac{1}{2 Q_k}$$

и, следовательно,

$$\left(\frac{ax}{p}\right) \geqslant\left(\frac{P_k x}{Q_k}\right)-\frac{1}{2 Q_k} \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{P_k x}{Q_k}\right).$$

Но тогда, пользуясь оценкой (169), получим

$$S(m)=\sum_{x=1}^{m} \frac{1}{\left(\frac{ax}{p}\right)} \leqslant 2 \sum_{x=1}^{Q_k-1} \frac{1}{\left(\frac{P_k x}{Q_k}\right)} \leqslant$$

$$\leqslant 4(M+1) Q_{k-1}(1+\ln Q_k) \leqslant 8(M+1) m(1+\ln p). \quad (172)$$

Из оценок (171) и (172) следует, что неравенство (170) выполняется при любом $m=1, 2, \ldots, p-1$. Подставляя

оценку (170) в равенство (166), получаем утверждение леммы:

$$\sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{m\left(\frac{am}{p}\right)} \leqslant 8(M+1)(1+\ln p)+$$

$$+8(M+1)(1+\ln p) \sum_{m=1}^{p-1} \frac{1}{m+1} \leqslant$$

$$\leqslant 8(M+1)(1+\ln p)\left(1+\int_1^p \frac{dx}{x}\right)=8(M+1)(1+\ln p)^2.$$

Теорема 20. *Пусть $s=2$, $1<a<p$ и a взаимно просто с p. Целые $a_1=1$ и $a_2=a$ тогда и только тогда будут оптимальными коэффициентами по модулю p, когда неполные частные числа $\frac{a}{p}$ ограничены величиной $M=B_0 \ln^{\beta_0} p$, где $B_0>0$ и $\beta_0 \geqslant 0$ — абсолютные константы.*

Доказательство. Пусть неполные частные $\frac{a}{p}$ ограничены величиной M. Очевидно,

$$\sum_{m_1, m_2=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1+a_2 m_2)}{\bar{m}_1 \bar{m}_2}=\sum_{|m_1|=1}^{p-1} \sum_{|m_2|=1}^{p-1} \frac{\delta_p(m_1+a m_2)}{|m_1||m_2|} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1 \leqslant |m_1|<\frac{p}{2}} \sum_{|m_2|=1}^{p-1} \frac{\delta_p(m_1+a m_2)}{|m_1||m_2|}+\sum_{\frac{p}{2} \leqslant |m_1|<p} \sum_{|m_2|=1}^{p-1} \frac{\delta_p(m_1+a m_2)}{|m_1||m_2|}. \quad (173)$$

Пусть $|m_1| \leqslant \frac{p}{2}$ и $\delta_p(m_1+a m_2)=1$. Тогда

$$a m_2 \equiv-m_1 \pmod{p},$$

$$\left(\frac{a m_2}{p}\right)=\left(\frac{-m_1}{p}\right)=\frac{|m_1|}{p}, \quad |m_1|=p\left(\frac{a m_2}{p}\right). \quad (174)$$

Следовательно, пользуясь леммой 29, получим

$$\sum_{1 \leqslant |m_1|<\frac{p}{2}} \sum_{|m_2|=1}^{p-1} \frac{\delta_p(m_1+a m_2)}{|m_1||m_2|} \leqslant \frac{1}{p} \sum_{|m_2|=1}^{p-1} \frac{1}{|m_2|\left(\frac{a m_2}{p}\right)}=$$

$$=\frac{2}{p} \sum_{m_2=1}^{p-1} \frac{1}{m_2\left(\frac{a m_2}{p}\right)} \leqslant 16 \frac{(M+1)(1+\ln p)^2}{p}. \quad (175)$$

Далее, так как согласно следствию леммы 1

$$\sum_{\frac{p}{2}<|m_1|<p} \delta_p(m_1+am_2) \leqslant \sum_{m_1=-(p-1)}^{p-1} \delta_p(m_1+am_2) \leqslant 2,$$

то

$$\sum_{\frac{p}{2}\leqslant|m_1|<p} \sum_{|m_2|=1}^{p-1} \frac{\delta_p(m_1+am_2)}{|m_1||m_2|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{p}\sum_{|m_2|=1}^{p-1}\frac{1}{|m_2|}\sum_{\frac{p}{2}\leqslant|m_1|<p}\delta_p(m_1+am_2)\leqslant$$

$$\leqslant \frac{4}{p}\sum_{|m_2|=1}^{p-1}\frac{1}{|m_2|}\leqslant\frac{8}{p}\left(1+\int_1^p\frac{dx}{x}\right)=\frac{8(1+\ln p)}{p}. \quad (176)$$

Из (173), пользуясь оценками (175) и (176), получим

$$\sum_{m_1,m_2=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+a_2m_2)}{\overline{m}_1\overline{m}_2} \leqslant \frac{16(M+1)(1+\ln p)^2+8(1+\ln p)}{p}.$$

Но согласно условию $M=B_0\ln^{\beta_0}p$. Следовательно,

$$\sum_{m_1,m_2=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+a_2m_2)}{\overline{m}_1\overline{m}_2}=O\left(\frac{\ln^{\beta_0+2}p}{p}\right),$$

чем в силу определения оптимальных коэффициентов доказана достаточность условий теоремы.

Пусть теперь $a_1=1$ и $a_2=a$ — оптимальные коэффициенты по модулю p. Тогда согласно (116)

$$\sum_{m_1,m_2=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+am_2)}{\overline{m}_1\overline{m}_2}\leqslant\frac{C_0\ln^\beta p}{p}, \quad (177)$$

где $C_0>0$ и $\beta\geqslant 0$ — абсолютные константы. Из (177) в силу необходимого условия оптимальности (лемма 24) следует, что для каждого нетривиального решения сравнения

$$m_1+am_2\equiv 0 \pmod p$$

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1\overline{m}_2\geqslant\frac{p}{C_0\ln^\beta p}. \quad (178)$$

Пусть $1\leqslant m_2\leqslant p-1$. Замечая, что $\delta_p(am_2)=0$, согласно следствию леммы 1 получим

$$\sum_{-\frac{p}{2}<m_1\leqslant\frac{p}{2}}{}' \delta_p(m_1+am_2)=\sum_{-\frac{p}{2}<m_1\leqslant\frac{p}{2}}\delta_p(m_1+am_2)=1.$$

Из этого равенства следует, что каждому значению m_2 из интервала $1\leqslant m_2\leqslant p-1$ соответствует некоторое значение m_1, удовлетворяющее условиям

$$m_1\neq 0,\quad -\frac{p}{2}<m_1\leqslant\frac{p}{2},$$

такое, что выполняется сравнение

$$am_2\equiv -m_1 \pmod p.$$

Но тогда согласно (174)

$$|m_1|=p\left(\frac{am_2}{p}\right). \quad (179)$$

Так как $m_1\neq 0$ и $m_2>0$, то

$$\overline{m}_1=|m_1| \text{ и } \overline{m}_2=m_2.$$

Следовательно, из (178) и (179) получим

$$\frac{p}{C_0\ln^\beta p}\leqslant|m_1|m_2=p\left(\frac{am_2}{p}\right)m_2,$$

$$\left(\frac{am_2}{p}\right)\geqslant\frac{1}{(C_0\ln^\beta p)m_2} \qquad (m_2=1,2,\ldots,p-1).$$

Отсюда в силу леммы 5 (стр. 25) следует, что неполные частные числа $\frac{a}{p}$ ограничены величиной $M=C_0\ln^\beta p$, чем теорема доказана полностью.

Замечание. Пусть $s=2$, $1<a<p$ и a взаимно просто с p. Легко показать, что целые 1, a тогда и только

тогда будут оптимальными коэффициентами по модулю p, когда выполняется неравенство

$$\left(\frac{ax}{p}\right) \geqslant \frac{1}{(B\ln^{\beta} p)\, x} \qquad (x=1, 2, \ldots, p-1), \quad (180)$$

где $B>0$ и $\beta \geqslant 0$ — абсолютные константы.

Действительно, если условие (180) выполнено, то в силу леммы 5 неполные частные числа $\frac{a}{p}$ ограничены величиной $M=B\ln^{\beta} p$ и согласно теореме 20 целые 1, a будут оптимальными коэффициентами по модулю p.

С другой стороны, если 1, a — оптимальные коэффициенты по модулю p, то согласно теореме 20 неполные частные числа $\frac{a}{p}$ ограничены величиной $B_0 \ln^{\beta_0} p$, где $B_0>0$ и $\beta_0 \geqslant 0$ — абсолютные константы. Но тогда в силу леммы 5 условие (180) выполняется при $B=4B_0$ и $\beta=\beta_0$.

Условие

$$\left(\frac{ax}{p}\right) \geqslant \frac{1}{Mx} \qquad (x=1, 2, \ldots, p-1)$$

равносильно утверждению, что при любом целом x_1, не кратном p, и любом целом x_2 выполняется неравенство

$$\left|\frac{a}{p} x_1 - x_2\right| \geqslant \frac{1}{M|x_1|}.$$

Это неравенство представляет собой некоторое утверждение о возможностях приближенного решения в целых числах x_1 и x_2 уравнения

$$\theta_1 x_1 - x_2 = 0,$$

где $\theta_1 = \frac{a}{p}$. Приближенное решение в целых числах $x_1, \ldots, x_s$ уравнений вида

$$\theta_1 x_1 + \ldots + \theta_{s-1} x_{s-1} - x_s = 0$$

является одной из задач теории линейных диофантовых приближений. Таким образом, из замечания к теореме 20 видно, что при $s=2$ существует связь между оптимальными коэффициентами и теорией линейных

диофантовых приближений специального вида. Следующая теорема показывает, что такая связь существует и в общем случае при произвольном $s \geqslant 2$.

Теорема 21. *Пусть $s \geqslant 2$ и $a_\nu b_\nu \equiv 1 \pmod p$ $(\nu=1, 2, \ldots, s)$. Величины $a_1, \ldots, a_s$ тогда и только тогда будут оптимальными коэффициентами по модулю p, когда существуют константы $B=B(s)>0$ и $\beta=\beta(s)\geqslant 0$ такие, что при любых целых $m_\nu, \ldots, m_s$, удовлетворяющих условию $a_\nu m_\nu + \ldots + a_s m_s \not\equiv 0 \pmod p$, выполняются неравенства*

$$\left(\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p} m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p} m_s\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{(B\ln^{\beta} p)\, \overline{m}_\nu \ldots \overline{m}_s} \qquad (\nu=2, 3, \ldots, s). \quad (181)$$

Доказательство. Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p. Тогда согласно лемме 24 существуют константы $B=B(s)>0$ и $\beta=\beta(s)\geqslant 0$ такие, что для любого нетривиального решения сравнения

$$a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p \quad (182)$$

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant \frac{p}{B\ln^{\beta} p}.$$

Пусть $\nu \geqslant 2$ и $m_\nu, \ldots, m_s$ — произвольные целые, удовлетворяющие условию

$$a_\nu m_\nu + \ldots + a_s m_s \not\equiv 0 \pmod p. \quad (183)$$

Тогда $\delta_p(a_\nu m_\nu + \ldots + a_s m_s) = 0$ и согласно следствию леммы 1 получим

$$\sum_{-\frac{p}{2}<m_{\nu-1}<\frac{p}{2}}{}' \delta_p(a_{\nu-1}m_{\nu-1} + \ldots + a_s m_s) =$$
$$= \sum_{-\frac{p}{2}<m_{\nu-1}<\frac{p}{2}} \delta_p(a_{\nu-1}m_{\nu-1} + \ldots + a_s m_s) = 1.$$

Из этого равенства следует, что каковы бы ни были целые $m_\nu, \ldots, m_s$, удовлетворяющие условию (183), существует отличное от нуля целое $m_{\nu-1} \in \left(-\frac{p}{2}, \frac{p}{2}\right]$ такое, что

$$a_{\nu-1}m_{\nu-1} + a_\nu m_\nu + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p. \quad (184)$$

Отсюда, так как $a_{\nu-1}b_{\nu-1} \equiv 1 \pmod p$, после домножения на $b_{\nu-1}$ получим

$$m_{\nu-1} + b_{\nu-1}a_\nu m_\nu + \ldots + b_{\nu-1}a_s m_s \equiv 0 \pmod p.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{b_{\nu-1}a_\nu m_\nu + \ldots + b_{\nu-1}a_s m_s}{p}\right) = \left(\frac{-m_{\nu-1}}{p}\right) = \frac{|m_{\nu-1}|}{p},$$

$$|m_{\nu-1}| = p\left(\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p} m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p} m_s\right). \quad (185)$$

Если $m_{\nu-1}, \ldots, m_s$ — решение сравнения (184), то целые $m_1, \ldots, m_s$, где $m_1 = \ldots = m_{\nu-2} = 0$, будут нетривиальным решением сравнения (182). Но тогда

$$|m_{\nu-1}|\,\overline{m}_\nu \ldots \overline{m}_s = \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant \frac{p}{B \ln^\beta p},$$

чем в силу (185) доказана необходимость условий теоремы:

$$p\left(\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p} m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p} m_s\right)\overline{m}_\nu \ldots \overline{m}_s \geqslant \frac{p}{B \ln^\beta p},$$

$$\left(\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p} m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p} m_s\right) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{m}_\nu \ldots \overline{m}_s} \qquad (\nu = 2, 3, \ldots, s).$$

Перейдем теперь к доказательству достаточности условий (181). Пусть $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения (182). Определим ν с помощью равенств

$$\nu = \begin{cases} 2, & \text{если } m_1 \neq 0, \\ j+2, & \text{если } m_1 = \ldots = m_j = 0, m_{j+1} \neq 0 \quad (1 \leqslant j \leqslant s-2). \end{cases}$$

Тогда, очевидно, $m_{\nu-1} \neq 0$ и

$$a_{\nu-1}m_{\nu-1} + \ldots + a_s m_s \equiv 0 \pmod p.$$

Отсюда при $|m_{\nu-1}| < \frac{p}{2}$ в силу (185) следует, что

$$\frac{|m_{\nu-1}|}{p} = \left(\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p} m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p} m_s\right).$$

Но согласно (181)

$$\left(\frac{b_{\nu-1}a_\nu}{p} m_\nu + \ldots + \frac{b_{\nu-1}a_s}{p} m_s\right) \geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{m}_\nu \ldots \overline{m}_s}$$

и, следовательно,

$$\frac{|m_{\nu-1}|}{p} \geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{m}_\nu \ldots \overline{m}_s},$$

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s = |m_{\nu-1}|\,\overline{m}_\nu \ldots \overline{m}_s \geqslant \frac{p}{B \ln^\beta p}.$$

Если $|m_{\nu-1}| \geqslant \frac{p}{2}$, то

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant |m_{\nu-1}| \geqslant \frac{p}{2}.$$

Таким образом, для любого нетривиального решения сравнения (182) выполняется оценка

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant \min\left(\frac{p}{B \ln^\beta p}, \frac{p}{2}\right).$$

Но тогда в силу следствия теоремы 19 целые $a_1, \ldots, a_s$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p, чем теорема доказана полностью.

Если число измерений равно $s+1$ и оптимальные коэффициенты имеют вид $1, a, \ldots, a^s$, то, как показано в приведенном ниже следствии, утверждение теоремы 21 можно записать в более простой форме.

Следствие. *Пусть $s \geqslant 1$, а взаимно просто с p и $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, удовлетворяющие условию $am_1 + \ldots + a^s m_s \not\equiv 0 \pmod p$. Необходимым и достаточным условием того, чтобы целые $1, a, \ldots, a^s$ были* *оптимальными коэффициентами по модулю p, является выполнение неравенства*

$$\left(\frac{a}{p} m_1 + \ldots + \frac{a^s}{p} m_s\right) \geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}, \qquad (186)$$

где $B = B(s) > 0$ *и* $\beta = \beta(s) \geqslant 0$.

Действительно, заменим в теореме 21 s на $s+1$, выберем

$$a_\nu = a^{\nu-1}, \quad m_\nu = n_{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s+1)$$

и запишем условия (181) в виде

$$\left(\frac{b_\nu a^\nu}{p} n_\nu + \ldots + \frac{b_\nu a^s}{p} n_s\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{n}_\nu \ldots \overline{n}_s} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s), \qquad (187)$$

где $b_\nu a^\nu n_\nu + \ldots + b_\nu a^s n_s \not\equiv 0 \pmod p$ и $b_\nu a^{\nu-1} \equiv 1 \pmod p$. Заменяя в первом из неравенств (187) n_ν на m_ν ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) и замечая, что $b_1 \equiv 1 \pmod p$ при $a_1 m_1 + \ldots + a^s m_s \not\equiv 0 \pmod p$, получим

$$\left(\frac{a}{p} m_1 + \ldots + \frac{a^s}{p} m_s\right) \geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}.$$

Таким образом, выполнение неравенства (186) является необходимым условием оптимальности.

Пусть теперь условие (186) выполнено. Выберем

$$m_1 = n_\nu, \ldots, m_{s-\nu+1} = n_s, \; m_{s-\nu+2} = \ldots = m_s = 0,$$

где ν — произвольное целое из интервала $1 \leqslant \nu \leqslant s$. Тогда при $a n_\nu + \ldots + a^{s-\nu+1} n_s \not\equiv 0 \pmod p$ получим

$$\left(\frac{a}{p} n_\nu + \ldots + \frac{a^{s-\nu+1}}{p} n_s\right) \geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{n}_\nu \ldots \overline{n}_s}.$$

Отсюда, так как $b_\nu a^{\nu-1} \equiv 1 \pmod p$, следует, что при $b_\nu a^\nu n_\nu + \ldots + b_\nu a^s n_s \not\equiv 0 \pmod p$ выполняются неравенства

$$\left(\frac{b_\nu a^\nu}{p} n_\nu + \ldots + \frac{b_\nu a^s}{p} n_s\right) \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\,\overline{n}_\nu \ldots \overline{n}_s} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s),$$

совпадающие с неравенствами (187). Но тогда, согласно теореме 21, целые $1, a, \ldots, a^s$ будут оптимальными коэффициентами, чем утверждение следствия доказано полностью.

Отметим еще, не останавливаясь на этом подробней, что целые $1, a_1, \ldots, a_s$ тогда и только тогда будут оптимальными коэффициентами по модулю p, когда для $x = 1, 2, \ldots, p-1$ выполняется неравенство

$$\left(\frac{a_1 x}{p}\right) \ldots \left(\frac{a_s x}{p}\right) \geqslant \frac{1}{(B \ln^\beta p)\, x},$$

где константы $B > 0$ и $\beta \geqslant 0$ зависят только от s. Отсюда, в частности, следует, что неполные частные чисел $\frac{a_\nu}{p}$ ограничены величиной $M = B \ln^\beta p$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$).

Рассмотрим теперь вопрос о числе попаданий точек параллелепипедальной сетки в заданную часть единичного s-мерного куба. Пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ — произвольные действительные числа из интервала $[0,1]$, $p > 1$ нечетно и $a_1, \ldots, a_s$ взаимно просты с p. Обозначим через $N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s)$ число точек сетки

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

лежащих в области, определенной условиями

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_1, \ldots, 0 \leqslant x_s \leqslant \gamma_s. \qquad (188)$$

Теорема 22. *Целые $a_1, \ldots, a_s$ тогда и только тогда будут оптимальными коэффициентами по модулю p, когда для любой области вида* (188) *выполняется оценка*

$$|N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) - \gamma_1 \ldots \gamma_s p| \leqslant C_1 \ln^{\beta_1} p,$$

где $C_1 = C_1(s)$ *и* $\beta_1 = \beta_1(s)$.

Доказательство. Пусть $\phi(x_1, \ldots, x_s)$ — характеристическая функция области (188) и $C_p(m_1, \ldots, m_s)$ — конечные коэффициенты Фурье функции ϕ. Тогда, определяя целые n_ν с помощью равенств

$$n_\nu = \begin{cases} [\gamma_\nu p], & \text{если } \gamma_\nu < 1, \\ p-1, & \text{если } \gamma_\nu = 1 \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s),$$

согласно лемме 15 (стр. 77) получим

$$N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) = \sum_{k=1}^{p} \psi\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1} C_p(m_1, \ldots, m_s) \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s}{p} k} =$$

$$= p \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1} C_p(m_1, \ldots, m_s)\, \delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s), \quad (189)$$

где $p_1 = \frac{p-1}{2}$ и

$$C_p(m_1, \ldots, m_s) = \frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s=0}^{p-1} \psi\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) \times$$

$$\times e^{-2\pi i \frac{m_1 k_1 + \ldots + m_s k_s}{p}} = \frac{1}{p^s} \sum_{k_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{k_s=0}^{n_s} e^{-2\pi i \frac{m_1 k_1 + \ldots + m_s k_s}{p}}.$$

Так как в силу леммы 3 (стр. 23) при $|m_\nu| \leqslant p_1$ и $n_\nu \leqslant p-1$ справедлива оценка

$$\left|\sum_{k_\nu=0}^{n_\nu} e^{2\pi i \frac{m_\nu k_\nu}{p}}\right| \leqslant \min\left(n_\nu + 1, \frac{1}{2\left(\frac{m_\nu}{p}\right)}\right) \leqslant \frac{p}{\overline{m}_\nu},$$

то, очевидно,

$$|C_p(m_1, \ldots, m_s)| = \frac{1}{p^s} \prod_{\nu=1}^{s} \left|\sum_{k_\nu=0}^{n_\nu} e^{2\pi i \frac{m_\nu k_\nu}{p}}\right| \leqslant \frac{1}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}.$$

Пользуясь этой оценкой и выделяя в равенстве (189) слагаемое с $m_1 = \ldots = m_s = 0$, получим

$$|N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) - pC_p(0, \ldots, 0)| \leqslant$$

$$\leqslant p \sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1} \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}.$$

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p. Тогда согласно (116)

$$\sideset{}{'}\sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1} \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \leqslant C_0 \frac{\ln^\beta p}{p}$$

и, следовательно,

$$|N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) - pC_p(0, \ldots, 0)| \leqslant C_0 \ln^\beta p. \quad (190)$$

Замечая, что в силу определения величин n_ν выполняется оценка

$$\frac{n_1 \ldots n_s}{p^s} \leqslant \gamma_1 \ldots \gamma_s \leqslant \frac{(n_1+1) \ldots (n_s+1)}{p^s},$$

получим

$$|C_p(0, \ldots, 0) - \gamma_1 \ldots \gamma_s| = \left|\frac{(n_1+1) \ldots (n_s+1)}{p^s} - \gamma_1 \ldots \gamma_s\right| \leqslant \frac{2^s}{p}.$$

Но тогда из (190) следует необходимость условий теоремы:

$$|N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) - \gamma_1 \ldots \gamma_s p| \leqslant$$

$$\leqslant |N_p(\gamma_1, \ldots, \gamma_s) - pC_p(0, \ldots, 0)| +$$

$$+ p\,|C_p(0, \ldots, 0) - \gamma_1 \ldots \gamma_s| \leqslant C_1 \ln^{\beta_1} p,$$

где $C_1 = C_0 + 2^s$ и $\beta_1 = \beta$.

Определим функцию $\varphi(n)$ с помощью равенств

$$\varphi(n) = \begin{cases} 1 - 2\ln\left(2 \sin \pi \left\{\frac{n}{p}\right\}\right), & \text{если } n \not\equiv 0 \pmod{p}, \\ 0, & \text{если } n \equiv 0 \pmod{p} \end{cases}$$

и обозначим через $\Delta\varphi(n)$ ее конечную разность:

$$\Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n).$$

Тогда, очевидно,

$$|\Delta\varphi(0)| = |\Delta\varphi(p-1)| < 1 + 2\ln p, \quad (191)$$

$$\Delta\varphi(n) = 2\ln \frac{\sin \pi \frac{n}{p}}{\sin \pi \frac{n+1}{p}} \qquad (n = 1, 2, \ldots, p-2)$$

и, следовательно,

$$|\Delta\varphi(n)| = \begin{cases} -\Delta\varphi(n), & \text{если } 1 \leqslant n \leqslant \frac{p-1}{2}, \\ \Delta\varphi(n), & \text{если } \frac{p+1}{2} \leqslant n \leqslant p-2. \end{cases} \tag{192}$$

Так как в силу (151)

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\frac{k}{p}\right)\right] = p-1-2\ln p,$$

то, пользуясь определением функции $\varphi(n)$, получим

$$\frac{1}{p^{s-1}}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1}\varphi(k_1)\ldots\varphi(k_s) =$$

$$= \frac{1}{p^{s-1}}\left(\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\frac{k}{p}\right)\right]\right)^s < p.$$

Но тогда

$$\sum_{k=1}^{p}\varphi(a_1k)\ldots\varphi(a_sk) =$$

$$= \sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1}\varphi(k_1)\ldots\varphi(k_s)\,\delta_p(a_1k-k_1)\ldots\delta_p(a_sk-k_s) =$$

$$= \frac{1}{p^{s-1}}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1}\varphi(k_1)\ldots\varphi(k_s) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1}\varphi(k_1)\ldots\varphi(k_s)\Big[\delta_p(a_1k-k_1)\ldots\delta_p(a_sk-k_s) -$$

$$-\frac{1}{p^s}\Big] < p + \sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1,\ldots,k_s=0}^{p-1}\varphi(k_1)\ldots\varphi(k_s)\,t_k(k_1,\ldots,k_s),$$

где величина $t_k(k_1,\ldots,k_s)$ определена равенством

$$t_k(k_1,\ldots,k_s) = \delta_p(a_1k-k_1)\ldots\delta_p(a_sk-k_s) - \frac{1}{p^s}.$$

Отсюда, замечая, что в силу равенства $\varphi(p)=0$ преобразование Абеля можно записать в виде

$$\sum_{k_\nu=0}^{p-1}\varphi(k_\nu)\,t_k(k_1,\ldots,k_s) = -\sum_{n_\nu=0}^{p-1}\Delta\varphi(n_\nu)\sum_{k_\nu=0}^{n_\nu}t_k(k_1,\ldots,k_s),$$

получим

$$\sum_{k=1}^{p}\varphi(a_1k)\ldots\varphi(a_sk) < p + (-1)^s\sum_{n_1,\ldots,n_s=0}^{p-1}\Delta\varphi(n_1)\ldots$$

$$\ldots\Delta\varphi(n_s)\sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{k_s=0}^{n_s}t_k(k_1,\ldots,k_s).$$

Пусть условия теоремы выполнены. Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{k_s=0}^{n_s}t_k(k_1,\ldots,k_s)\right| =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{p}\sum_{k_1=0}^{n_1}\ldots\sum_{k_s=0}^{n_s}\delta_p(a_1k-k_1)\ldots\delta_p(a_sk-k_s) -$$

$$-\frac{(n_1+1)\ldots(n_s+1)}{p^{s-1}}\Big| \leqslant \Big|N_p\left(\frac{n_1}{p},\ldots,\frac{n_s}{p}\right) -$$

$$-\frac{n_1\ldots n_s}{p^s}p\Big| + \left|\frac{n_1\ldots n_s}{p^{s-1}} - \frac{(n_1+1)\ldots(n_s+1)}{p^{s-1}}\right| \leqslant$$

$$\leqslant C_1\ln^{\beta_1}p + 2^s \leqslant C_1'\ln^{\beta_1}p$$

и, следовательно,

$$\sum_{k=1}^{p}\varphi(a_1k)\ldots\varphi(a_sk) <$$

$$< p + \sum_{n_1,\ldots,n_s=0}^{p-1}|\Delta\varphi(n_1)|\ldots|\Delta\varphi(n_s)|\,C_1\ln^{\beta_1}p =$$

$$= p + C_1'\left(\sum_{n=0}^{p-1}|\Delta\varphi(n)|\right)^s\ln^{\beta_1}p.$$

Так как в силу (191) и (192)

$$\sum_{n=0}^{p-1} |\Delta\varphi(n)| < 2(1+2\ln p) - \sum_{n=1}^{\frac{p-1}{2}} \Delta\varphi(n) + \\ + \sum_{n=\frac{p+1}{2}}^{p-2} \Delta\varphi(n) < 4(1+2\ln p),$$

то, очевидно,

$$\sum_{k=1}^{p} \varphi(a_1 k)\ldots\varphi(a_s k) < \\ < p + C_1'(4+8\ln p)^s \ln^{\beta_1} p < p + C_2 \ln^{\beta_2} p,$$

где $C_2 = C_2(s)$ и $\beta_2 = \beta_1 + s$.

Пользуясь определением функции φ, перепишем эту оценку в виде

$$\sum_{k=1}^{p-1}\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}\right)\right]\ldots\left[1-2\ln\left(2\sin\pi\left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right)\right] < \\ < p + C_2 \ln^{\beta_2} p.$$

Отсюда согласно теореме 17 следует, что $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, чем теорема 22 доказана полностью.

§ 10. Вычисление оптимальных коэффициентов

Вопрос о вычислении оптимальных коэффициентов при $s=1$ и $s=2$ не представляет каких-либо затруднений.

Действительно, если $s=1$, то условие (116), введенное при определении оптимальных коэффициентов, можно записать в виде

$$\sum_{m_1=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1)}{\overline{m}_1} < C_0 \frac{\ln^\beta p}{p}. \qquad (193)$$

Пусть a_1 — произвольное целое, взаимно простое с p. Тогда сумма, стоящая в левой части неравенства (193), обращается в нуль и, следовательно, условие (193) выполнено. Таким образом, при $s=1$ оптимальным коэффициентом по модулю p будет любое целое a_1, взаимно простое с p. Выбирая, в частности, $a_1=1$, получим одномерную параллелепипедальную сетку

$$M_k = \left(\left\{\frac{k}{p}\right\}\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, p).$$

Эта сетка совпадает с обычной равномерной сеткой, получающейся при разбиении отрезка $[0,1]$ на p равных частей.

Если $s=2$, то для вычисления оптимальных коэффициентов удобно воспользоваться теоремой 20.

Действительно, определим взаимно простые целые a и p с помощью конечной непрерывной дроби, неполные частные которой ограничены какой-нибудь абсолютной константой $M \geqslant 1$:

$$\frac{a}{p} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \ldots + \cfrac{1}{q_n}}},$$

$$q_k \leqslant M \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Тогда согласно теореме 20 целые $a_1=1$, $a_2=a$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p. В частности, при $M=1$ получим

$$q_1 = q_2 = \ldots = q_n = 1.$$

При этом второе из равенств (10) примет вид

$$Q_0 = 1, \quad Q_1 = 1, \quad Q_k = Q_{k-1} + Q_{k-2} \qquad (k \geqslant 2). \qquad (194)$$

Равенство (194) определяет последовательность целых

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13, \ldots$$

в которой первые два члена равны единице и каждый из последующих членов равен сумме двух предыдущих. Эта последовательность называется последовательностью **Фибоначчи**.

Записывая первое из соотношений (10) в виде

$$P_0 = 0, \quad P_1 = 1, \quad P_k = P_{k-1} + P_{k-2} \qquad (k \geqslant 2)$$

и замечая, что $P_2=1$, получим

$$P_k=Q_{k-1} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

В частности, $P_n=Q_{n-1}$ и, согласно (12),

$$a=P_n=Q_{n-1}, \quad p=Q_n.$$

Таким образом, при любом $n>1$ целые 1, Q_{n-1} будут оптимальными коэффициентами по модулю Q_n, где Q_{n-1} и Q_n — соседние члены последовательности Фибоначчи. Соответствующая двумерная параллелепипедальная сетка будет, очевидно, определяться равенством

$$M_k=\left(\left\{\frac{k}{Q_n}\right\}, \left\{\frac{Q_{n-1}k}{Q_n}\right\}\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, Q_n). \tag{195}$$

Отметим (см. [1]), что при $f(x_1, x_2)\in E_2^\alpha$ для квадратурных формул, построенных с помощью сетки (195), удается получить особенно точную оценку погрешности:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2 =$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \left\{\frac{ak}{p}\right\}\right)+O\left(\frac{\ln N}{N^\alpha}\right)^{*)}.$$

При произвольном s для вычисления оптимальных коэффициентов в принципе может быть использовано любое из достаточных условий оптимальности. Однако такой путь не всегда будет практически пригоден в связи с тем, что он может потребовать проведения слишком большой вычислительной работы.

Способ вычисления оптимальных коэффициентов, практически приемлемый при не очень больших значениях p, основан на следующей теореме.

Теорема 23. *Пусть для целых z функция $H(z)$ определена равенством*

$$H(z)=\frac{3^s}{p}\sum_{k=1}^{p}\left(1-2\left\{\frac{k}{p}\right\}\right)^2\cdots\left(1-2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)^2, \tag{196}$$

где p — простое число, большее s.

*) Здесь $N=p=Q_n$ и $a=Q_{n-1}$.

Если при $z=a$ достигается минимум функции $H(z)$ на интервале $1\leqslant z\leqslant p-1$, то целые $a_1=1$, $a_2=a$, ..., $a_s=a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p.

Доказательство. Проводя интегрирование по частям, легко проверить, что при любом целом m справедливо равенство

$$3\int_0^1 (1-2x)^2 e^{-2\pi imx}\,dx=\begin{cases}1, & \text{если } m=0,\\ \dfrac{6}{\pi^2m^2}, & \text{если } m\neq 0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что разложение функции $3(1-2\{x\})^2$ в ряд Фурье можно записать в виде

$$3(1-2\{x\})^2=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi imx}}{\psi(m)}, \tag{197}$$

где

$$\psi(m)=\begin{cases}1 & \text{при } m=0,\\ \dfrac{\pi^2}{6}m^2 & \text{при } m\neq 0.\end{cases} \tag{198}$$

Пользуясь равенством (197), из (196) получим

$$H(z)=\frac{1}{p}\sum_{k=1}^{p}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{e^{2\pi i\frac{(m_1+\ldots+m_sz^{s-1})k}{p}}}{\psi(m_1)\ldots\psi(m_s)}. \tag{199}$$

Выделим во внутренней сумме слагаемое, получающееся при $m_1=\ldots=m_s=0$, и переменим порядок суммирования. Тогда равенство (199) примет вид

$$H(z)=1+\frac{1}{p}\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\psi(m_1)\ldots\psi(m_s)}\sum_{k=1}^{p}e^{2\pi i\frac{(m_1+\ldots+m_sz^{s-1})k}{p}}.$$

Отсюда в силу леммы 1 следует, что

$$H(z)-1=\sideset{}{'}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_sz^{s-1})}{\psi(m_1)\ldots\psi(m_s)}. \tag{200}$$

Согласно определению функции $\psi(m)$ при любом целом m выполняются неравенства

$$\psi(m)\geqslant\overline{m}^2, \quad \psi(m)\leqslant\frac{\pi^2}{6}\overline{m}^2. \tag{201}$$

Применяя первое из этих неравенств и пользуясь леммой 22 (стр. 100), получим

$$H(z)-1\leqslant \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s z^{s-1})}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^2}\leqslant$$

$$\leqslant \sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s z^{s-1})}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^2}+\frac{sB^s}{p^2}, \qquad (202)$$

где $B<5$. Так как в силу (122)

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s z^{s-1})}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^2}\leqslant \left[\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s z^{s-1})}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\right]^2,$$

то из (202) следует, что

$$H(z)-1\leqslant\left[\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s z^{s-1})}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\right]^2+\frac{sB^s}{p^2}. \qquad (203)$$

Пусть z принимает целые значения из интервала $1\leqslant z\leqslant p-1$ и при $z=b$ достигается минимум суммы, стоящей в правой части этого неравенства. Тогда, пользуясь леммой 2 (стр. 20), получим

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s b^{s-1})}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p-1}\sum_{z=1}^{p-1}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s z^{s-1})}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{p-1}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{1}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\sum_{z=1}^{p}\delta_p(m_1+\ldots+m_s z^{s-1})=$$

$$=\frac{1}{p-1}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{A_p(m_1,\ldots,m_s)}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}, \qquad (204)$$

где величина $A_p(m_1,\ldots,m_s)$ равна числу решений сравнения

$$m_1+\ldots+m_s z^{s-1}\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p).$$

Так как хотя бы одно из чисел $m_1,\ldots,m_s$ не кратно p, то согласно лемме 2

$$A_p(m_1,\ldots,m_s)\leqslant s-1.$$

Подставляя эту оценку в (204), получим

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s b^{s-1})}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{s-1}{p-1}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-(p-1)}^{p-1}{}' \frac{1}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant\frac{s}{p}\left(1+2\sum_{m=1}^{p-1}\frac{1}{m}\right)^s\leqslant$$

$$\leqslant\frac{s}{p}\left(3+2\int_1^p\frac{dx}{x}\right)^s=\frac{s(3+2\ln p)^s}{p}.$$

Теперь из (203) при $z=b$ следует, что

$$H(b)-1\leqslant\frac{s^2(3+2\ln p)^{2s}+sB^s}{p^2}\leqslant\frac{B_1\ln^{2s}p}{p^2},$$

где B_1 — некоторая константа, зависящая только от s. Так как, по условию, при $z=a$ достигается минимум функции $H(z)$, то $H(a)\leqslant H(b)$ и, следовательно,

$$H(a)-1\leqslant\frac{B_1\ln^{2s}p}{p^2}.$$

Пусть $m_1,\ldots,m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$m_1+\ldots+a^{s-1}m_s\equiv 0\ (\mathrm{mod}\ p). \qquad (205)$$

Тогда, полагая в равенстве (200) $z=a$, получим:

$$\frac{1}{\psi(m_1)\ldots\psi(m_s)}=\frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_s a^{s-1})}{\psi(m_1)\ldots\psi(m_s)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{n_1,\ldots,n_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(n_1+\ldots+n_s a^{s-1})}{\psi(n_1)\ldots\psi(n_s)}=H(a)-1\leqslant\frac{B_1\ln^{2s}p}{p^2}.$$

Отсюда в силу второго из неравенств (201) следует, что

$$(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^2 \geqslant \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \psi(m_1) \ldots \psi(m_s) \geqslant \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{p^2}{B_1 \ln^{2s} p},$$

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant \frac{p}{B_2 \ln^s p},$$

где B_2 зависит только от s. Так как это неравенство выполняется для всякого нетривиального решения сравнения (205), то, согласно следствию теоремы 19, целые 1, $a, \ldots, a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p.

Легко видеть, что теорема 23 позволяет вычислять оптимальные коэффициенты по модулю p с помощью $O(p^2)$ элементарных операций.

Действительно, минимум функции $H(z)$ можно установить путем сравнения ее значений при $z = 1, 2, \ldots, p-1$. Так как сумма (196) содержит p слагаемых, то для вычисления $H(z)$ при заданном z необходимо проделать $O(p)$ элементарных операций. Таким образом, общее число элементарных операций будет равно $O(p^2)$.

Число операций, необходимых для вычисления оптимальных коэффициентов, можно сократить в несколько раз, если воспользоваться равенствами

$$\left.\begin{aligned} &H(p-z) = H(z), \\ &H(z) = \frac{3^s}{p}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(1 - 2\left\{\frac{k}{p}\right\}\right)^2 \ldots \left(1 - 2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)^2\right]. \end{aligned}\right\} \quad (206)$$

Эти равенства легко получаются в силу четности функции $(1 - 2\{x\})^2$. Действительно, из (198) следует, что $\psi(-m) = \psi(m)$. Пользуясь этим, получим

$$3(1 - 2\{-x\})^2 = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m x}}{\psi(m)} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{-2\pi i m x}}{\psi(-m)} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2\pi i m x}}{\psi(m)} = 3(1 - 2\{x\})^2.$$

Но тогда при любом целом $\nu \geqslant 0$

$$\left(1 - 2\left\{\frac{k(p-z)^\nu}{p}\right\}\right)^2 = \left(1 - 2\left\{\frac{k(-z)^\nu}{p}\right\}\right)^2 = \left(1 - 2\left\{\frac{kz^\nu}{p}\right\}\right)^2$$

и, следовательно,

$$H(p-z) = \frac{3^s}{p} \sum_{k=1}^{p} \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - 2\left\{\frac{k(p-z)^\nu}{p}\right\}\right)^2 =$$

$$= \frac{3^s}{p} \sum_{k=1}^{p} \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - 2\left\{\frac{kz^\nu}{p}\right\}\right)^2 = H(z).$$

Аналогично получается и второе из равенств (206):

$$\sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - 2\left\{\frac{kz^\nu}{p}\right\}\right)^2 = \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - 2\left\{\frac{(p-k)z^\nu}{p}\right\}\right)^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - 2\left\{\frac{kz^\nu}{p}\right\}\right)^2,$$

$$H(z) = \frac{3^s}{p}\left[1 + \sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - 2\left\{\frac{kz^\nu}{p}\right\}\right)^2 + \sum_{k=\frac{p+1}{2}}^{p-1} \prod_{\nu=0}^{s-1} \left(1 - 2\left\{\frac{kz^\nu}{p}\right\}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{3^s}{p}\left[1 + 2\sum_{k=1}^{\frac{p-1}{2}} \left(1 - 2\left\{\frac{k}{p}\right\}\right)^2 \ldots \left(1 - 2\left\{\frac{kz^{s-1}}{p}\right\}\right)^2\right].$$

Первое из равенств (206) позволяет при отыскании минимума $H(z)$ ограничиться значениями $z = 1, 2, \ldots, \frac{p-1}{2}$. Второе из этих равенств облегчает вычисление $H(z)$.

При больших значениях p для вычисления оптимальных коэффициентов удобнее использовать следующую теорему, позволяющую уменьшить число соответствующих элементарных операций до $O\left(p^{1+\frac{1}{3}}\right)$.

Выберем $p = p_1 p_2$, где p_1 и p_2 простые, бо́льшие s, причем p_2 имеет порядок $\sqrt{p_1}$, и определим целое a как в теореме 23, заменив в ней p на p_1.

Теорема 24. *Пусть для целых z функция $\widetilde{H}(z)$ определена равенством*

$$\widetilde{H}(z) = \frac{3^s}{p_1p_2}\sum_{k=1}^{p_1p_2}\left(1-2\left\{\frac{p_1+p_2}{p_1p_2}k\right\}\right)^2\cdots\left(1-2\left\{\frac{p_1z^{s-1}+p_2a^{s-1}}{p_1p_2}k\right\}\right)^2. \quad (207)$$

Если при $z=b$ достигается минимум функции $\widetilde{H}(z)$ на интервале $1\leqslant z\leqslant p_2-1$, то целые $a_1=p_1+p_2$, $a_2=p_1b+p_2a, \dots, a_s=p_1b^{s-1}+p_2a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю $p=p_1p_2$.

Доказательство. Путем дословного повторения выкладок, с помощью которых были выведены соотношения (200) и (203), получим аналогичные соотношения для функции $\widetilde{H}(z)$

$$\widetilde{H}(z)-1 = \sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_{p_1p_2}\left[(p_1+p_2)m_1+\dots+\left(p_1z^{s-1}+p_2a^{s-1}\right)m_s\right]}{\psi(m_1)\dots\psi(m_s)}, \quad (208)$$

$$\widetilde{H}(z)-1 \leqslant \left(\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p_1p_2-1)}^{p_1p_2-1}{}' \frac{\delta_{p_1p_2}\left[(p_1+p_2)m_1+\dots+\left(p_1z^{s-1}+p_2a^{s-1}\right)m_s\right]}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s}\right)^2 + \frac{s5^s}{(p_1p_2)^2}, \quad (209)$$

где функция $\phi(m)$ определена равенствами (198).

Пусть n_1 и n_2 — произвольные целые. Так как при взаимно простых p_1 и p_2 сумма $n_1p_1+n_2p_2$ кратна произведению p_1p_2 тогда и только тогда, когда n_1 кратно p_2 и n_2 кратно p_1, то

$$\delta_{p_1p_2}(n_1p_1+n_2p_2) = \delta_{p_1}(n_2)\,\delta_{p_2}(n_1).$$

Пользуясь этим равенством, получим

$$\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p_1p_2-1)}^{p_1p_2-1}{}' \frac{\delta_{p_1p_2}\left[\left(m_1+\dots+m_sz^{s-1}\right)p_1+\left(m_1+\dots+m_sa^{s-1}\right)p_2\right]}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s} =$$

$$= \sum_{m_1,\dots,m_s=-(p_1p_2-1)}^{p_1p_2-1}{}' \frac{\delta_{p_1}\left(m_1+\dots+m_sa^{s-1}\right)\delta_{p_2}\left(m_1+\dots+m_sz^{s-1}\right)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s}.$$

В последней сумме разобьем системы $m_1,\dots,m_s$ на два класса: к первому классу отнесем системы вида $n_1p_2,\dots,n_sp_2$, ко второму

классу — все остальные системы. Обозначим соответственно через Σ_1 и Σ_2 суммирование по системам 1-го и 2-го классов. Пользуясь тем, что при $n_\nu\neq 0$ выполняется равенство $\overline{n_\nu p_2}=\overline{n}_\nu p_2$, получим *)

$$\sum\nolimits_1 = \sum{}' \frac{\delta_{p_1}\left[p_2\left(n_1+\dots+n_sa^{s-1}\right)\right]\delta_{p_2}\left[p_2\left(n_1+\dots+n_sz^{s-1}\right)\right]}{\overline{n_1p_2}\dots\overline{n_sp_2}} =$$

$$= \sum{}' \frac{\delta_{p_1}\left(n_1+\dots+n_sa^{s-1}\right)}{\overline{n_1p_2}\dots\overline{n_sp_2}} \leqslant \frac{1}{p_2}\sum{}' \frac{\delta_{p_1}\left(n_1+\dots+n_sa^{s-1}\right)}{\overline{n}_1\dots\overline{n}_s}. \quad (210)$$

Так как, согласно выбору a, целые $1, a, \dots, a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю p_1, то в силу (116) выполняется оценка

$$\sum_{n_1,\dots,n_s=-(p_1-1)}^{p_1-1}{}' \frac{\delta_{p_1}\left(n_1+\dots+n_sa^{s-1}\right)}{\overline{n}_1\dots\overline{n}_s} \leqslant C_0\frac{\ln^\beta p_1}{p_1}, \quad (211)$$

где C_0 и β зависят только от s. Но тогда из (210) следует, что

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \frac{C_0\ln^\beta p_1}{p_1p_2}. \quad (212)$$

Оценим теперь величину $\min\limits_{1\leqslant z<p_2}\sum_2$. Так как общий наибольший делитель величин $m_1,\dots,m_s$, на которые распространено суммирование в сумме Σ_2, не кратен p_2, то, пользуясь леммой 2 (стр. 20), получим

$$\min_{1\leqslant z<p_2}\sum\nolimits_2 \leqslant \frac{1}{p_2-1}\sum\nolimits_2 \frac{\delta_{p_1}\left(m_1+\dots+m_sa^{s-1}\right)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s}\times$$

$$\times\sum_{z=1}^{p_2-1}\delta_{p_2}\left(m_1+\dots+m_sz^{s-1}\right) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{p_2-1}\sum\nolimits_2 \frac{\delta_{p_1}\left(m_1+\dots+m_sa^{s-1}\right)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s}A_{p_2}(m_1,\dots,m_s) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s-1}{p_2-1}\sum_{m_1,\dots,m_s=-(p_1p_2-1)}^{p_1p_2-1}{}' \frac{\delta_{p_1}\left(m_1+\dots+m_sa^{s-1}\right)}{\overline{m}_1\dots\overline{m}_s}. \quad (213)$$

*) Сумма Σ' распространена на системы $n_1,\dots,n_s$, удовлетворяющие условиям $|n_\nu|\leqslant p_1-1$ ($\nu=1,2,\dots,s$) и $(n_1,\dots,n_s)\neq(0,\dots,0)$.

Выберем $\alpha = 1 + \frac{1}{\ln p_1 p_2}$. Так как при $|m_\nu| < p_1 p_2$ выполняется оценка

$$\frac{1}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} = \frac{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha-1}}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}} \leqslant \frac{[(p_1 p_2)^s]^{\frac{1}{\ln p_1 p_2}}}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}} = \frac{e^s}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}},$$

то, пользуясь леммой 22, получим

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p_1 p_2 - 1)}^{p_1 p_2 - 1}{}' \frac{\delta_{p_1}(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \leqslant$$

$$\leqslant e^s \sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p_1 p_2 - 1)}^{p_1 p_2 - 1}{}' \frac{\delta_{p_1}(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant e^s \sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p_1 - 1)}^{p_1 - 1}{}' \frac{\delta_{p_1}(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha}} + \frac{sB^s}{p_1^{\alpha}} \leqslant$$

$$\leqslant e^s \sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p_1 - 1)}^{p_1 - 1}{}' \frac{\delta_{p_1}(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} + \frac{sB^s}{p_1},$$

где

$$B < 3 + \frac{2}{\alpha - 1} = 3 + 2 \ln p_1 p_2.$$

Отсюда в силу (211) следует, что

$$\sum_{m_1, \ldots, m_s = -(p_1 p_2 - 1)}^{p_1 p_2 - 1}{}' \frac{\delta_{p_1}(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_0 e^s \ln^{\beta} p_1 + s(3 + 2 \ln p_1 p_2)^s}{p_1} \leqslant \frac{C_1 \ln^{\beta_1} p_1 p_2}{p_1},$$

где величины C_1 и β_1 зависят только от s. Подставляя эту оценку в (213), получим

$$\min_{1 \leqslant z < p_2} \sum\nolimits_2 \leqslant C_1 \frac{s-1}{p_2 - 1} \frac{\ln^{\beta_1} p_1 p_2}{p_1} \leqslant \frac{C_1 s \ln^{\beta_1} p_1 p_2}{p_1 p_2}. \qquad (214)$$

Так как в силу (209)

$$\widetilde{H}(b) - 1 \leqslant \left(\sum\nolimits_1 + \min_{1 \leqslant z < p_2} \sum\nolimits_2 \right)^2 + \frac{s5^s}{(p_1 p_2)^2},$$

то из (212) и (214) следует, что

$$\widetilde{H}(b) - 1 \leqslant \left(\frac{C_0 \ln^{\beta} p_1 + C_1 s \ln^{\beta_1} p_1 p_2}{p_1 p_2} \right)^2 + \frac{s5^s}{(p_1 p_2)^2} \leqslant \frac{C_2 \ln^{\beta_2} p_1 p_2}{(p_1 p_2)^2},$$

где $C_2 = C_2(s)$ и $\beta_2 = \beta_2(s)$.

Пусть $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения

$$(p_1 + p_2) m_1 + \ldots + (p_1 b^{s-1} + p_2 a^{s-1}) m_s \equiv 0 \pmod{p_1 p_2}.$$

Тогда, пользуясь равенством (208), получим

$$\frac{1}{\psi(m_1) \ldots \psi(m_s)} = \frac{\delta_{p_1 p_2}\left[(p_1 + p_2) m_1 + \ldots + (p_1 b^{s-1} + p_2 a^{s-1}) m_s\right]}{\psi(m_1) \ldots \psi(m_s)} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{n_1, \ldots, n_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_{p_1 p_2}\left[(p_1 + p_2) n_1 + \ldots + (p_1 b^{s-1} + p_2 a^{s-1}) n_s\right]}{\psi(n_1) \ldots \psi(n_s)} =$$

$$= \widetilde{H}(b) - 1 \leqslant \frac{C_2 \ln^{\beta_2} p_1 p_2}{(p_1 p_2)^2}.$$

Отсюда в силу второго из неравенств (201) следует, что

$$(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^2 \geqslant \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \psi(m_1) \ldots \psi(m_s) \geqslant \left(\frac{6}{\pi^2}\right)^s \frac{(p_1 p_2)^s}{C_2 \ln^{\beta_2} p_1 p_2},$$

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant \frac{p_1 p_2}{C_3 \ln^{\beta_3} p_1 p_2},$$

где величины C_3 и β_3 зависят только от s. Таким образом, согласно следствию теоремы 19 целые $a_1 = p_1 + p_2$, $a_2 = p_1 b + p_2 a$, ..., $a_s = p_1 b^{s-1} + p_2 a^{s-1}$ будут оптимальными коэффициентами по модулю $p = p_1 p_2$.

Заметим, что как и в случае теоремы 23, при нахождении величины b можно рассматривать только те значения z, которые лежат на интервале $1 \leqslant z \leqslant \frac{p_2 - 1}{2}$.

Легко видеть, что при этом способе для нахождения оптимальных коэффициентов по модулю $p = p_1 p_2$ достаточно проделать $O\left(p^{1 + \frac{1}{3}}\right)$ элементарных операций. Действительно, нахождение величины a с помощью функции $H(z)$ требует $O\left(p_1^2\right)$ элементарных операций. После того как a найдено, для нахождеиия b надо проделать еще $O\left(p_1 p_2^2\right)$ элементарных операций $\left(\frac{p_2 - 1}{2}\right.$ раз вычислить сумму (207), содержащую $p_1 p_2$ слагаемых). Таким образом, общее количество элементарных операций, необходимых для вычисления оптимальных коэффициентов по модулю $p = p_1 p_2$, имеет порядок $p_1^2 + p_1 p_2^2$. Так как, по условию, порядок p_2 равен $\sqrt{p_1}$, то $p_1^2 + p_1 p_2^2 = O\left(p^{1 + \frac{1}{3}}\right)$.

§ 11. О практическом применении оптимальных коэффициентов

Пусть для функций, принадлежащих какому-нибудь заданному классу, справедлива квадратурная формула

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 f(x_1, \dots, x_s)\, dx_1 \dots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f[\xi_{1,N}(k), \dots, \xi_{s,N}(k)] - R, \quad (215)$$

причем для некоторой бесконечной последовательности значений N выполняется оценка

$$R = O(N^{-\alpha} \ln^{\beta} N). \quad (216)$$

Будем говорить, что эта оценка не допускает существенного улучшения, если в ней для всех функций рассматриваемого класса нельзя заменить α на α', где $\alpha' > \alpha$. Если, кроме того, и величину β нельзя заменить на β', где $\beta' < \beta$, то будем говорить, что оценка (216) не допускает логарифмического улучшения.

Из двух квадратурных формул вида (215) первую будем называть лучшей, если соответствующие оценки

$$R_1 = O(N^{-\alpha_1} \ln^{\beta_1} N), \quad R_2 = O(N^{-\alpha_2} \ln^{\beta_2} N) \quad (217)$$

не допускают существенного улучшения и $\alpha_1 > \alpha_2$. Так, например, на классе E_s^2 квадратурные формулы с параллелепипедальными сетками будут лучше квадратурных формул с неравномерными сетками, так как, согласно теоремам 1 и 7 соответствующие оценки погрешности

$$R_1 = O(N^{-2} \ln^{2s} N), \quad R_2 = O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)$$

не допускают существенного улучшения и

$$\alpha_1 = 2 > \frac{1}{2} = \alpha_2.$$

В случае равенства величин α_1 и α_2 будем говорить, что первая из квадратурных формул лучше второй, если оценки (217) не допускают логарифмического улучшения и $\beta_1 < \beta_2$.

Введенное выше деление квадратурных формул на более и менее хорошие оправдывается тем, что в рассматриваемом классе всегда найдется функция, интегрирование которой по худшей формуле для N, больших некоторого N_0, будет приводить к менее точным результатам. Вместе с тем следует отметить, что преимущество лучшей формулы не обязательно обнаруживается сразу. Не исключена, очевидно, возможность того, что это преимущество выявится лишь при весьма больших значениях N, в связи с чем применение лучшей формулы может оказаться нецелесообразным. Поэтому в вычислительной практике при выборе квадратурной формулы необходимы соответствующие эксперименты.

Приведем некоторые результаты таких экспериментов, проведенных в вычислительном центре МГУ для случая четырехкратных интегралов [4].

Различные способы приближенного интегрирования были применены для вычисления интегралов

$$I_\nu = \int_0^1 \dots \int_0^1 f_\nu (x_1, \dots, x_4)\, dx_1 \dots dx_4.$$

Каждый из интегралов I_ν заменялся суммой

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi_\nu [\xi_1(k), \dots, \xi_4(k)] \qquad (N \approx 4 \cdot 10^3),$$

где функции φ_ν были получены путем простейшей периодизации функций f_ν определенных равенствами

$$f_1 = 16 x_1 x_2 x_3 x_4,$$

$$f_2 = \frac{2}{3}(x_1 + x_2 - x_3 + x_4),$$

$$f_3 = \frac{3}{2e-5} x_1^3 x_2^2 x_3 e^{x_1 x_2 x_3 x_4},$$

$$f_4 = 1 + \sin \pi n (x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4),$$

$$f_5 = \frac{16 m^2}{\pi^2} \prod_{j=1}^{4} (1 - x_j)^{-2} e^{-\frac{m x_j^2}{(1-x_j)^2}}.$$

Функции f_ν выбраны так, что значение интеграла от каждой из них равно единице. Ниже приведена таблица результатов приближенного вычисления интегралов I_ν. Первый столбец этой таблицы вычислен методом неравномерных сеток, столбцы II — V соответствуют различным вариантам метода Монте-Карло и в последнем столбце помещены результаты, полученные методом оптимальных коэффициентов.

Таблица результатов вычисления интегралов *)

Интегралы	I	II	III	IV	V	VI
	Метод неравном. сеток	Методы Монте-Карло				Метод оптим. коэффициентов
I_1	0,38	0,78	1,05	1,02	1,01	0,999995
I_2	0,74	0,94	0,997	1,008	1,008	0,999999993
I_3	0,80	0,75	1,07	1,04	0,98	1,0001
I_4, $n = 10$	1,01	1,008	0,997	0,995	0,98	1,000000000
I_4, $n = 30$	1,01	0,98	0,995	0,998	0,990	1,00000002
I_4, $n = 60$	1,01	0,98	0,994	1,008	1,003	1,00000004
I_4, $n = 100$	1,02	1,02	1,003	0,98	0,991	1,0000001
I_4, $n = 200$	0,98	1,01	0,997	1,0001	1,02	1,0000002
I_5, $m = 1$	1,03	1,23	1,02	0,92	0,98	0,9996
I_5, $m = 10$	1,39	1,65	1,13	0,84	0,78	1,002
I_5, $m = 30$	3,22	2,48	0,87	0,91	0,94	0,94
I_5, $m = 60$	7,48	3,87	0,53	0,54	1,16	1,58

*) Пунктирной линией обведены те части таблицы, в которых погрешность полученных результатов превышает 5%.

Из таблицы видно, что в тех случаях, когда метод неравномерных сеток и методы Монте-Карло дают погрешность в пределах от одного до пяти процентов, погрешность метода оптимальных коэффициентов не превосходит сотых долей процента. Преимущество этого

метода утрачивается лишь тогда, когда ни один из рассмотренных методов не приводит уже к удовлетворительным результатам (последние две строки таблицы).

В следующей таблице, составленной в вычислительном центре МГУ, приведены четырехкратные и шестикратные оптимальные коэффициенты *). В этой таблице оптимальные коэффициенты по простому модулю (строки 1—4) вычислены с помощью теоремы 23. В случае модуля, равного произведению двух простых (строки 5—16), вычисления проведены с помощью способа, близкого к способу, изложенному в теореме 24.

Таблица оптимальных коэффициентов

	p	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
1	523	1	178	304	243		
2	523	1	238	160	424		
3	829	1	38	615	158		
4	829	1	98	485	277		
5	4097	258	1533	105	2196		
6	4097	258	2128	751	3590		
7	6023	336	886	2048	4342		
8	6023	336	4886	2288	5164		
9	6023	336	2871	601	4974	3244	5993
10	6023	336	3555	4648	4005	52	4207
11	12029	546	10370	10130	7158		
12	12029	546	6520	5772	1907		
13	12029	546	11082	9057	7693	7168	4840
14	24041	858	8563	12861	7898		
15	24041	858	14448	8262	22955		
16	24041	858	8135	13778	14576	21974	14965

Напомним, что по квадратурной формуле, полученной в теореме 16, можно вычислять лишь интегралы, кратность которых строго меньше кратности оптимальных коэффициентов **). При этом если $a_1 \neq 1$, то оптимальные коэффициенты надо предварительно

*) Более полная таблица оптимальных коэффициентов помещена в конце книги.

**) По всем остальным квадратурным формулам с параллелепипедальными сетками можно вычислять интегралы, кратность которых не превосходит кратности оптимальных коэффициентов.

домножать на величину b_1, являющуюся решением сравнения $a_1 b_1 \equiv 1 \pmod p$.

Так, например, рассмотрим четырехкратные оптимальные коэффициенты, помещенные в пятой строке таблицы:

$$258,\ 1533,\ 105,\ 2196.$$

Решая сравнение

$$258 b_1 \equiv 1 \pmod{4097},$$

получим $b_1 = 397$. Домножая эти коэффициенты на 397 и выделяя остатки от деления получающихся результатов на 4097, приведем оптимальные коэффициенты по модулю 4097 к виду

$$1,\ 2245,\ 715,\ 3248.$$

Теперь согласно теореме 16 интегралы

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 f(x_1, x_2, x_3)\, dx_1\, dx_2\, dx_3$$

можно заменять суммой

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{2245k}{4097}\right\}, \left\{\frac{715k}{4097}\right\}, \left\{\frac{3248k}{4097}\right\}\right),$$

где $N \leqslant 4097$.

До сих пор мы использовали параллелепипедальные сетки только в тех случаях, когда интегрирование проводилось по единичному s-мерному кубу. Покажем теперь, что в некоторых случаях эти сетки можно применять и тогда, когда область интегрирования отлична от единичного куба.

Рассмотрим произвольную область V, ограниченную гиперплоскостями, параллельными координатным плоскостям (если $s=2$, то V — любой многоугольник, стороны которого параллельны координатным осям). Будем предполагать, что подынтегральная функция имеет непрерывную смешанную производную $\dfrac{\partial^s f}{\partial x_1 \ldots \partial x_s}$.

Теорема 25. *Пусть $p > 1$ — нечетно, $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс и*

$N = p$. Обозначим через $\phi(x_1, \ldots, x_s)$ характеристическую функцию области V, лежащей внутри единичного s-мерного куба и ограниченной плоскостями, параллельными координатным плоскостям. Тогда при $f(x_1, \ldots, x_s) \in H_s^1(C)$

$$\int \ldots \int_V f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \psi\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^\beta N}{N}\right).$$

Доказательство. Рассмотрим случай, когда область интегрирования определена условиями

$$0 \leqslant x_1 \leqslant \gamma_1, \ldots, 0 \leqslant x_s \leqslant \gamma_s. \tag{218}$$

Определим целые n_ν с помощью равенств

$$n_\nu = \begin{cases} [\gamma_\nu p], & \text{если } \gamma_\nu < 1, \\ p - 1, & \text{если } \gamma_\nu = 1 \end{cases} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s).$$

Тогда, очевидно,

$$\gamma_\nu = \frac{n_\nu}{p} + \frac{\theta_\nu}{p},$$

где $0 \leqslant \theta_\nu \leqslant 1$. Пользуясь ограниченностью самой функции f и ее частных производных $\dfrac{\partial f}{\partial x_\nu}$, аналогично тому, как это было сделано при выводе равенства (99), легко убедиться, что

$$\int_0^{\gamma_1} \ldots \int_0^{\gamma_s} f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \int_0^{\frac{n_1+1}{p}} \ldots \int_0^{\frac{n_s+1}{p}} f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s + O\left(\frac{1}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{k_s=0}^{n_s} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right).$$

Отсюда, обозначая через $\phi_1(x_1, \ldots, x_s)$ характеристическую функцию области (218), получим

$$\int_0^{\gamma_1} \ldots \int_0^{\gamma_s} f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s=0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) \psi_1\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) + O\left(\frac{1}{p}\right). \quad (219)$$

Пусть $B_p(m_1, \ldots, m_s)$ — конечные коэффициенты Фурье функции $f(x_1, \ldots, x_s)\psi_1(x_1, \ldots, x_s)$:

$$B_p(m_1, \ldots, m_s) =$$

$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s=0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) \psi_1\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{m_1k_1+\ldots+m_sk_s}{p}} =$$

$$= \frac{1}{p^s} \sum_{k_1=0}^{n_1} \ldots \sum_{k_s=0}^{n_s} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) e^{-2\pi i \frac{m_1k_1+\ldots+m_sk_s}{p}}.$$

Замечая, что величины $B_p(m_1, \ldots, m_s)$ совпадают с аналогичными величинами, введенными в лемме 16 (равенство (95)), в силу (96) получим

$$|B_p(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}. \quad (220)$$

Пусть величина R_1 определена равенством

$$\frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s=0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) \psi_1\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \psi_1\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - R_1. \quad (221)$$

Так как

$$\frac{1}{p^s} \sum_{k_1, \ldots, k_s=0}^{p-1} f\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) \psi_1\left(\frac{k_1}{p}, \ldots, \frac{k_s}{p}\right) = B_p(0, \ldots, 0),$$

то, пользуясь разложением функции $f\phi_1$ в конечный ряд Фурье и применяя лемму 1 (стр. 18), получим

$$R_1 = \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \times$$

$$\times \psi_1\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - B_p(0, \ldots, 0) =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1}{}' B_p(m_1, \ldots, m_s) \sum_{k=1}^{p} e^{2\pi i \frac{(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)k}{p}} =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1}{}' B_p(m_1, \ldots, m_s)\, \delta_p(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s),$$

где

$$p_1 = \frac{p-1}{2}.$$

Отсюда в силу (220) и (116) следует, что

$$|R_1| \leqslant C \sum_{m_1, \ldots, m_s=-p_1}^{p_1} \frac{\delta_p(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} = O\left(\frac{\ln^\beta p}{p}\right).$$

Пользуясь этой оценкой, из (219) и (221) получим утверждение теоремы для случая области вида (218):

$$\int_0^{\gamma_1} \ldots \int_0^{\gamma_s} f(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \frac{1}{p} \sum_{k=1}^{p} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \psi_1\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) - R_1 +$$

$$+ O\left(\frac{1}{p}\right) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \times$$

$$\times \psi_1\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) + O\left(\frac{\ln^\beta N}{N}\right).$$

Замечая, что область V, указанную в теореме 25, можно представить в виде конечной комбинации областей вида

(218), получим утверждение теоремы и для общего случая.

Отметим еще, не останавливаясь на этом подробнее, случай, когда область интегрирования с помощью достаточно гладкой замены переменных можно перевести в единичный куб. Пусть, например, надо найти приближенное значение интеграла

$$I=\iint\limits_V f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2,$$

где V — единичный круг с центром в начале координат. Относительно функции f будем предполагать, что все ее частные производные второго порядка непрерывны. Тогда, полагая

$$x_1=y_1\cos 2\pi y_2,$$
$$x_2=y_1\sin 2\pi y_2,$$

получим

$$I=\int\limits_0^1\int\limits_0^1 2\pi y_1 f(y_1\cos 2\pi y_2,\ y_1\sin 2\pi y_2)\,dy_1\,dy_2,$$

причем новая подынтегральная функция

$$f_1(y_1, y_2)=2\pi y_1 f(y_1\cos 2\pi y_2,\ y_1\sin 2\pi y_2)$$

будет, очевидно, иметь непрерывную смешанную производную $\dfrac{\partial^2 f_1}{\partial y_1\,\partial y_2}$. Но тогда, пользуясь теоремой 25, при $N=p$ получим

$$I=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_1\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ \left\{\frac{a_2k}{p}\right\}\right)+O\left(\frac{\ln^\beta N}{N}\right).$$

В общем случае, когда

$$I=\int\limits_V\ldots\int f(x_1,\ldots,x_s)\,dx_1\ldots dx_s \qquad (s\geqslant 2),$$

для функций f, принадлежащих классу D_s^1, переводя область интегрирования в единичный куб, получим аналогично

$$I=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} f_1\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)+O\left(\frac{\ln^\beta N}{N}\right),$$

где f_1 — новая подынтегральная функция, $a_1,\ldots,a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс и $N=p$. Тем же путем в сочетании с периодизацией задачи, для функций $f\in D_s^\alpha$ ($\alpha>2$)

можно получить квадратурные формулы, погрешность которых будет равна $O\left(\dfrac{\ln^{\alpha\beta}N}{N^\alpha}\right)$.

Сведение области интегрирования к единичному кубу можно также проводить и для достаточно быстро сходящихся несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования.

При вычислении интегралов от функций, имеющих в области интегрирования изолированные особые точки (см. [36]), можно применять замены переменных, сходные с теми, которые используются при периодизации функций. В частности, особые точки, лежащие на границе единичного куба G_s, устраняются непосредственно при периодизации с помощью замены переменных, указанной в равенствах (63) и (65).

ГЛАВА IV

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКОЧИСЛОВЫХ СЕТОК В ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ФОРМУЛАХ И ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЯХ

§ 12. Интерполяция функций многих переменных

Часто для задания функции $f(x_1, ..., x_s)$, принадлежащей тому или иному классу A_s, приходится использовать таблицу значений этой функции в узлах некоторой сетки

$$M_k = (\xi_1(k, N), \ldots, \xi_s(k, N)) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Рассмотрим таблицы значений функции $f(x_1, ..., x_s)$, получающиеся с помощью двух различных сеток с одинаковым числом узлов. Очевидно, лучшей будет та из этих таблиц, которая позволит восстановить функцию в точках, не принадлежащих сеткам с большей точностью равномерно для всех $f(x_1, ..., x_s) \in A_s$. В этом параграфе будет показано, что при табличном задании функций, принадлежащих классам E_s^α и H_s^α, теоретикочисловые сетки значительно выгоднее равномерных сеток.

Определим функцию $P(x_1, ..., x_s)$ равенством

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \\ = \sum_{k=1}^{N} f[\xi_1(k, N), \ldots, \xi_s(k, N)]\, \psi_{k,N}(x_1, \ldots, x_s), \qquad (222)$$

где $\varphi_{k,N}(x_1, ..., x_s)$ — некоторые известные функции. Пусть далее функция $R^*(x_1, ..., x_s)$ определена равенством

$$f(x_1, \ldots, x_s) = P(x_1, \ldots, x_s) + R^*(x_1, \ldots, x_s). \qquad (223)$$

Если при неограниченном возрастании N погрешность $R^*(x_1, ..., x_s)$, получающаяся от замены функции $f(x_1, ..., x_s)$ функцией $P(x_1, ..., x_s)$, в той или иной норме стремится к нулю, то будем называть $P(x_1, ..., x_s)$ интерполяционным многочленом, а соотношение (223) — *интерполяционной формулой*).*

При построении интерполяционных формул естественно выбирать сетки M_k и функции $\varphi_{k,N}(x_1, ..., x_s)$ так, чтобы при возрастании N скорость убывания погрешности $R^*(x_1, ..., x_s)$ была возможно большей.

Первые результаты по интерполяции функций с помощью теоретикочисловых сеток были получены В. С. Рябеньким [24] и С. А. Смоляком [29]. В следующей теореме изложен основной результат работы [24], посвященной вопросу об оценке интеграла от квадрата модуля погрешности интерполяционных формул.

Пусть $f \in E_s^\alpha$, $a_1, ..., a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс, $N = p$ и $N_1 = \left[\dfrac{\sqrt{N}}{\ln^{\frac{\beta}{2}} N}\right]$.

Определим функцию $P(x_1, ..., x_s)$ с помощью равенств

$$\tilde{C}(m_1, \ldots, m_s) = \\ = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)k}{p}}$$

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} \tilde{C}(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}. \qquad (224)$$

Подставляя значения $\tilde{C}(m_1, ..., m_s)$ во второе из этих

---

*) Наряду с интерполяционными формулами вида (223) мы будем иногда рассматривать формулы, в которых интерполяционный многочлен P зависит не только от значений самой функции f, но и от значений ее производных в узлах сетки.

равенств и меняя порядок суммирования, получим

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \times$$

$$\times \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s < N_1} e^{2\pi i \left[m_1\left(x_1 - \frac{a_1 k}{p}\right) + \ldots + m_s\left(x_s - \frac{a_s k}{p}\right)\right]} =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \psi_k(x_1, \ldots, x_s), \quad (225)$$

где

$$\psi_k(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s < N_1} e^{2\pi i \left[m_1\left(x_1 - \frac{a_1 k}{p}\right) + \ldots + m_s\left(x_s - \frac{a_s k}{p}\right)\right]}.$$

Таким образом, в равенстве (225) $\psi_k(x_1, \ldots, x_s)$ — известные функции и $f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right)$ — значения f, вычисленные в узлах параллелепипедальной сетки

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N). \quad (226)$$

Обозначая теперь $f - P$ через R^*, получим соотношение

$$f(x_1, \ldots, x_s) = P(x_1, \ldots, x_s) + R^*(x_1, \ldots, x_s),$$

которое, как это видно из теоремы 26, представляет собой интерполяционную формулу.

Теорема 26 (В. С. Рябенький). *Если функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$ и тригонометрический многочлен $P(x_1, \ldots, x_s)$ определен равенствами* (224), *то справедлива оценка*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s)|^2 \, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= O\left(N^{-\alpha + \frac{1}{2}} \ln^\gamma N\right),$$

где $\gamma < \alpha\beta + s$,

Доказательство. Пусть соответственно $C(m_1, \ldots, m_s)$ и $C^*(m_1, \ldots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функций f и R^*. Очевидно,

$$C^*(m_1, \ldots, m_s) =$$

$$= \begin{cases} C(m_1, \ldots, m_s) - \tilde{C}(m_1, \ldots, m_s) & \text{при } \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s < N_1, \\ C(m_1, \ldots, m_s) & \text{при } \bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \geqslant N_1 \end{cases} \quad (227)$$

и, следовательно,

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s)|^2 \, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 |R^*(x_1, \ldots, x_s)|^2 \, dx_1 \ldots dx_s =$$

$$= \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} |C^*(m_1, \ldots, m_s)|^2 =$$

$$= \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s < N_1} |C(m_1, \ldots, m_s) - \tilde{C}(m_1, \ldots, m_s)|^2 +$$

$$+ \sum_{\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s \geqslant N_1} |C(m_1, \ldots, m_s)|^2. \quad (228)$$

Пусть $m_1, \ldots, m_s$ — произвольные целые, удовлетворяющие условию $\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s < N_1$. Легко показать, что если $f \in E_s^\alpha(C)$, то

$$f(x_1, \ldots, x_s) \, e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \in E_s^\alpha(B_1 C N_1^\alpha), \quad (229)$$

где $B_1 = B_1(\alpha, s)$ *).

Действительно, обозначим через $C_1(n_1, \ldots, n_s)$ коэффициенты Фурье функции $e^{-2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}$. Очевидно,

$$C_1(n_1, \ldots, n_s) = \begin{cases} 1, & \text{если } (n_1, \ldots, n_s) = (m_1, \ldots, m_s), \\ 0, & \text{если } (n_1, \ldots, n_s) \neq (m_1, \ldots, m_s). \end{cases}$$

*) Здесь и далее через $B_\nu = B_\nu(\alpha, s)$ обозначены константы, зависящие только от α и s.

Так как, по условию, $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1$, то

$$|C_1(n_1, \ldots, n_s)| < \frac{N_1^\alpha}{(\overline{n}_1 \ldots \overline{n}_s)^\alpha}$$

и, следовательно

$$e^{-2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)} = E_s^\alpha(N_1^\alpha). \qquad (230)$$

Но согласно лемме 9 если $f_1 \in E_s^\alpha(C_1)$ и $f_2 \in E_s^\alpha(C_2)$, то $f_1 f_2 \in E_s^\alpha(B_1C_1C_2)$, где $B_1 = B_1(\alpha, s)$. Так как $f \in E_s^\alpha(C)$, то, пользуясь этой леммой, в силу (230) получим утверждение (229).

Пусть, как и выше, $\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1$. Тогда в силу (229) согласно теореме 12 (стр. 101) получим

$$|C(m_1, \ldots, m_s) - \tilde{C}(m_1, \ldots, m_s)| =$$

$$= \left| \int_0^1 \ldots \int_0^1 f(x_1, \ldots, x_s)\, e^{-2\pi i(m_1x_1 + \ldots + m_sx_s)}\, dx_1 \ldots dx_s - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(a_1m_1 + \ldots + a_sm_s)k}{p}} \right| <$$

$$< \frac{B_2CN_1^\alpha \ln^{\alpha\beta} N}{N^\alpha}. \qquad (231)$$

Пользуясь этой оценкой и замечая, что

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} 1 \leqslant 3^s \sum_{m_1 \ldots m_s < N_1} 1 \leqslant 3^s \sum_{m_1, \ldots, m_{s-1}=1}^{N_1} \frac{N_1}{m_1 \ldots m_{s-1}} \leqslant$$

$$\leqslant B_3N_1 \ln^{s-1} N_1,$$

получим

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} \left| C(m_1, \ldots, m_s) - \tilde{C}(m_1, \ldots, m_s) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{B_2CN_1^\alpha \ln^{\alpha\beta} N}{N^\alpha} \right)^2 \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} 1 \leqslant B_4C^2 \frac{N_1^{2\alpha+1} \ln^{2\alpha\beta+s-1} N}{N^{2\alpha}}.$$

Далее, так как $f \in E_s^\alpha(C)$, то

$$|C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}$$

и согласно лемме 28 (стр. 125)

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant N_1} |C(m_1, \ldots, m_s)|^2 \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant N_1} \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{2\alpha}} \leqslant B_5C^2 \frac{\ln^{s-1} N_1}{N_1^{2\alpha-1}}.$$

Но тогда в силу выбора N_1 из (228) следует утверждение теоремы:

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 |f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s)|^2\, dx_1 \ldots dx_s \leqslant$$

$$\leqslant C^2 \left(\frac{B_4N_1^{2\alpha+1} \ln^{2\alpha\beta+s-1} N}{N^{2\alpha}} + \frac{B_5 \ln^{s-1} N}{N_1^{2\alpha-1}} \right) = O\left(N^{-\alpha+\frac{1}{2}} \ln^\gamma N\right),$$

где

$$\gamma = \frac{(2\alpha-1)\beta}{2} + s - 1 < \alpha\beta + s.$$

Таким же путем, как и в теореме 26, можно получить оценку модуля погрешности интерполяционной формулы.

Теорема 27. *Если функция $f_1(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$ и тригонометрический полином $P(x_1, \ldots, x_s)$ определен равенствами (224), то справедлива оценка*

$$f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s) = O\left(N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{\gamma_1} N\right), \qquad (232)$$

где $\gamma_1 < \frac{\alpha\beta}{2} + s.$

Доказательство. Как и в предыдущей теореме, обозначим соответственно через $C(m_1, \ldots, m_s)$ и $C^*(m_1, \ldots, m_s)$ коэффициенты Фурье функций $f(x_1, \ldots, x_s)$ и $R^*(x_1, \ldots, x_s)$, где

$$R^*(x_1, \ldots, x_s) = f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s).$$

Пользуясь равенством (227), получим

$$|f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s)| =$$

$$= \left| \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} C^*(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\bar m_1 \ldots \bar m_s < N_1} \left| C(m_1, \ldots, m_s) - \tilde C(m_1, \ldots, m_s) \right| +$$

$$+ \sum_{\bar m_1 \ldots \bar m_s \geqslant N_1} |C(m_1, \ldots, m_s)|.$$

Но из (231) и (232) следует, что

$$\sum_{\bar m_1 \ldots \bar m_s < N_1} \left| C(m_1, \ldots, m_s) - \tilde C(m_1, \ldots, m_s) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{B_2 C N_1^{\alpha} \ln^{\alpha\beta} N}{N^{\alpha}} \sum_{\bar m_1 \ldots \bar m_s < N_1} 1 = O\left(N^{-\alpha} N_1^{\alpha+1} \ln^{\alpha\beta + s - 1} N\right).$$

Далее, согласно лемме 28 (стр. 125),

$$\sum_{\bar m_1 \ldots \bar m_s \geqslant N_1} |C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant$$

$$\leqslant C \sum_{\bar m_1 \ldots \bar m_s \geqslant N_1} \frac{1}{(\bar m_1 \ldots \bar m_s)^{\alpha}} = O\left(N_1^{-\alpha+1} \ln^{s-1} N_1\right)$$

и, следовательно,

$$|f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s)| =$$

$$= O\left(N^{-\alpha} N_1^{\alpha+1} \ln^{\alpha\beta + s - 1} N + N_1^{-\alpha+1} \ln^{s-1} N\right).$$

Отсюда, так как $N_1 = \left[\sqrt{N} \ln^{-\frac{\beta}{2}} N\right]$, получаем утверждение теоремы:

$$f(x_1, \ldots, x_s) - P(x_1, \ldots, x_s) = O\left(N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{\gamma_1} N\right),$$

где $\gamma_1 = \frac{(\alpha - 1)\beta}{2} + s - 1 < \frac{\alpha\beta}{2} + s$.

Рассмотрим теперь другой подход к построению интерполяционных формул, основанный на возможности представить функцию многих переменных в виде интеграла от произведений ее частных производных на полиномы Бернулли.

Ради удобства записи при $s > 1$ будем в ряде случаев пользоваться обозначением

$$f^{n_1, \ldots, n_s}(x_1, \ldots, x_s) = \frac{\partial^{n_1 + \ldots + n_s}}{\partial x_1^{n_1} \ldots \partial x_s^{n_s}} f(x_1, \ldots, x_s).$$

Лемма 30. *Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до r-го порядка включительно и принадлежит классу E_1^{α}. Тогда при $\nu = 1, 2, \ldots, r$ выполняется равенство*

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\, dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} \int_0^1 f^{(\nu)}(x + y) B_{\nu}(y)\, dy,$$

где $B_{\nu}(y)$ — ν-й полином Бернулли.

Доказательство. Пользуясь тем, что $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, получим

$$\int_0^1 f'(x + y) B_1(y)\, dy =$$

$$= f(x + y) B_1(y) \Big|_0^1 - \int_0^1 f(x + y)\, dy = f(x) - \int_0^1 f(y)\, dy.$$

Отсюда следует равенство

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\, dy + \int_0^1 f'(x + y) B_1(y)\, dy,$$

совпадающее с утверждением леммы при $\nu = 1$.

Применим индукцию. Пусть $\nu \geqslant 2$ и лемма верна при $\nu - 1$. Так как согласно лемме 6 (стр. 28) при $\nu \geqslant 2$ выполняются равенства

$$B_{\nu}(1) = B_{\nu}(0), \qquad B'_{\nu}(y) = \nu B_{\nu-1}(y),$$

то, проводя интегрирование по частям, получим

$$\frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y)\,B_\nu(y)\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} f^{(\nu-1)}(x+y)\,B_\nu(y)\Big|_0^1 -$$

$$- \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu-1)}(x+y)\,B_\nu'(y)\,dy =$$

$$= \frac{(-1)^{\nu-2}}{(\nu-1)!}\int_0^1 f^{(\nu-1)}(x+y)\,B_{\nu-1}(y)\,dy = f(x) - \int_0^1 f(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$f(x) = \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y)\,B_\nu(y)\,dy,$$

чем лемма доказана полностью.

Легко видеть, что утверждение леммы 30 можно записать в виде

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{\tau=0}^1 f^{(\nu\tau)}(y)\,\varphi_\nu^\tau(y-x)\,dy \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, r), \tag{233}$$

где функция $\varphi_\nu(x)$ определена равенством

$$\varphi_\nu(x) = \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!} B_\nu(\{x\}).$$

Действительно, это утверждение следует из равенства

$$\int_0^1 \sum_{\tau=0}^1 f^{(\nu\tau)}(y)\,\varphi_\nu^\tau(y-x)\,dy =$$

$$= \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(y)\,B_\nu(\{y-x\})\,dy =$$

$$= \int_0^1 f(y)\,dy + \frac{(-1)^{\nu-1}}{\nu!}\int_0^1 f^{(\nu)}(x+y)\,B_\nu(y)\,dy.$$

Лемма 31. *Пусть функция $f(x_1, \ldots, x_s)$ принадлежит классу E_s^α и имеет непрерывные производные $f^{n_1, \ldots, n_s}(x_1, \ldots, x_s)$ $(0 \leqslant n_j \leqslant r)$. Тогда при $\nu = 1, 2, \ldots, r$ справедливо равенство*

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{\tau_1, \ldots, \tau_s = 0}^1 f^{\tau_1\nu, \ldots, \tau_s\nu}(y_1, \ldots, y_s) \times$$

$$\times \varphi_\nu^{\tau_1}(y_1 - x_1)\ldots\varphi_\nu^{\tau_s}(y_s - x_s)\,dy_1\ldots dy_s.$$

Доказательство. При $s=1$ утверждение леммы справедливо, так как оно совпадает с равенством (233).

Применим индукцию. Пусть $s \geqslant 2$ и лемма верна при $s-1$. Тогда для $\nu = 1, 2, \ldots, r$ будет выполняться равенство

$$f(x_1, \ldots, x_s) =$$

$$= \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{\tau_1, \ldots, \tau_{s-1} = 0}^1 f^{\tau_1\nu, \ldots, \tau_{s-1}\nu, 0}(y_1, \ldots, y_{s-1}, x_s) \times$$

$$\times \varphi_\nu^{\tau_1}(y_1 - x_1)\ldots\varphi_\nu^{\tau_{s-1}}(y_{s-1} - x_{s-1})\,dy_1\ldots dy_{s-1}. \tag{234}$$

Пользуясь соотношением (233), получим

$$f^{\tau_1\nu, \ldots, \tau_{s-1}\nu, 0}(y_1, \ldots, y_{s-1}, x_s) =$$

$$= \int_0^1 \sum_{\tau_s = 0}^1 f^{\tau_1\nu, \ldots, \tau_s\nu}(y_1, \ldots, y_s)\,\varphi_\nu^{\tau_s}(y_s - x_s)\,dy_s.$$

Подставляя значение $f^{\tau_1\nu, \ldots, \tau_{s-1}\nu, 0}(y_1, \ldots, y_{s-1}, x_s)$ в равенство (234), получим утверждение леммы:

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \int_0^1 \ldots \int_0^1 \sum_{\tau_1, \ldots, \tau_s = 0}^1 f^{\tau_1\nu, \ldots, \tau_s\nu}(y_1, \ldots, y_s) \times$$

$$\times \varphi_\nu^{\tau_1}(y_1 - x_1)\ldots\varphi_\nu^{\tau_s}(y_s - x_s)\,dy_1\ldots dy_s.$$

Теорема 28. *Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс, $N = p$ и $\alpha > 3$.*

Тогда для функций $f(x_1, \dots, x_s)$, принадлежащих классу $E_s^\alpha(C)$, справедливо равенство

$$f(x_1,\dots,x_s)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\tau_1,\dots,\tau_s=0}^{1} f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\times$$
$$\times\,\varphi_r^{\tau_1}\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}-x_1\right)\dots\varphi_r^{\tau_s}\left(\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}-x_s\right)+$$
$$+\,O\left(N^{-\gamma}\ln^{\beta\gamma}N\right), \qquad (235)$$

где $r=\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$ *и* $\gamma=\min(r,\alpha-r)$.

Доказательство. Так как $\alpha>3$, то

$$\alpha-r\geqslant\alpha-\frac{\alpha+1}{2}=\frac{\alpha-1}{2}>1. \qquad (236)$$

Дифференцируя ряд

$$f(x_1,\dots,x_s)=\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}C(m_1,\dots,m_s)\,e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}$$

получим

$$f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(x_1,\dots,x_s)=$$
$$=(2\pi i)^{(\tau_1+\dots+\tau_s)r}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}m_1^{\tau_1 r}\dots m_s^{\tau_s r}C(m_1,\dots,m_s)\times$$
$$\times\,e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}. \qquad (237)$$

Почленное дифференцирование законно, так как

$$|m_1^{\tau_1 r}\dots m_s^{\tau_s r}C(m_1,\dots,m_s)|\leqslant$$
$$\leqslant C\frac{|m_1|^{\tau_1 r}\dots|m_s|^{\tau_s r}}{(\bar m_1\dots\bar m_s)^{\alpha}}\leqslant\frac{C}{(\bar m_1\dots\bar m_s)^{\alpha-r}}, \qquad (238)$$

и, следовательно, в силу (236) ряд (237) сходится равномерно. Применяя к функции $f(x_1, \dots, x_s)$ лемму 31, при $\nu=r$ получим

$$f(x_1,\dots,x_s)=\sum_{\tau_1,\dots,\tau_s=0}^{1}\int_0^1\dots\int_0^1 f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)\times$$
$$\times\,\varphi_r^{\tau_1}(y_1-x_1)\dots\varphi_r^{\tau_s}(y_s-x_s)\,dy_1\dots dy_s. \qquad (239)$$

Из оценки (238) следует, что

$$f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)\in E_s^{\alpha-r}.$$

Но согласно (55)

$$\varphi_r^{\tau_1}(y_1-x_1)\dots\varphi_r^{\tau_s}(y_s-x_s)=$$
$$=\left[\frac{(-1)^{r-1}}{r!}\right]^{\tau_1+\dots+\tau_s}B_r^{\tau_1}(\{y_1-x_1\})\dots B_r^{\tau_s}(\{y_s-x_s\})\in E_s^r.$$

Следовательно, пользуясь леммой 9 (стр. 37), получим

$$f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)\,\varphi_r^{\tau_1}(y_1-x_1)\dots\varphi_r^{\tau_s}(y_s-x_s)\in E_s^{\gamma},$$

где

$$\gamma=\min(r,\alpha-r). \qquad (240)$$

Пусть $F(y_1, \dots, y_s)$ — произвольная функция, принадлежащая классу E_s^γ. Согласно теореме 12 (стр. 101),

$$\int_0^1\dots\int_0^1 F(y_1,\dots,y_s)\,dy_1\dots dy_s=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}F\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)+O\left(N^{-\gamma}\ln^{\beta\gamma}N\right).$$

Применяя эту квадратурную формулу к функции

$$F(y_1,\dots,y_s)=f^{\tau_1 r,\dots,\tau_s r}(y_1,\dots,y_s)\times$$
$$\times\,\varphi_r^{\tau_1}(y_1-x_1)\dots\varphi_r^{\tau_s}(y_s-x_s)$$

из (239) получим утверждение теоремы.

Так как согласно условию теоремы 28 $r=\left[\frac{\alpha+1}{2}\right]$, то из (240) получим

$$\frac{\alpha-1}{2}\leqslant\gamma\leqslant\frac{\alpha}{2},$$

причем равенство достигается только при целых значениях α (соответственно нечетных или четных). Следовательно, кроме случая целых нечетных α, оценка погрешности в интерполяционной формуле (235) является более точной, чем в формуле (232), построенной без использования производных интерполируемой функции.

Остановимся теперь на вопросе о максимальной возможной точности интерполяционных формул

$$f(x_1,\ldots,x_s)=P(x_1,\ldots,x_s)+R^*(x_1,\ldots,x_s),$$

построенных с помощью произвольной сетки

$$M_k=(\xi_1(k),\ldots,\xi_s(k))\qquad(k=1,2,\ldots,N).$$

Легко показать, что для функций $f(x_1,\ldots,x_s)$, принадлежащих классу E_s^α, ни при каком выборе сеток нельзя получить оценку погрешности $R^*(x_1,\ldots,x_s)$ лучшую, чем $O\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right)$.

Действительно, пусть $s=1$ и $\alpha\geqslant 2$ — целое. Рассмотрим сетку

$$M_k=\xi_1(k)\qquad(k=1,2,\ldots,N).$$

Среди интервалов, на которые точки сетки разбивают отрезок [0,1], найдется, очевидно, интервал с длиной большей или равной $\frac{1}{N+1}$. Следовательно, при $N>1$ можно выбрать θ так, чтобы ни одна из точек сетки не принадлежала отрезку $\left[\theta,\theta+\frac{1}{2N}\right]\in[0,1]$. Выберем, далее, $f(x)=\psi(x-\theta)$, где функция $\psi(x)$ определена равенствами (30) с $n=2N$:

$$\psi(x+1)=\psi(x),\ \psi(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin 2\pi Nx}{2N}\right)^{\alpha-1}, & \text{если } 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2N},\\ 0, & \text{если } \dfrac{1}{2N}\leqslant x\leqslant 1.\end{cases}$$

В силу леммы 10 (стр. 41) функция $f(x)$ принадлежит классу E_1^α. Согласно определению эта функция вместе со всеми производными в точках сетки равна нулю. Но тогда в интерполяционной формуле вида (223)

$$f(x_1)=P(x_1)+R^*(x_1)$$

функция $P(x_1)$, определенная равенством (222), тождественно равна нулю. Следовательно, при $x=\theta+\frac{1}{4N}$ получим

$$R^*\left(\theta+\frac{1}{4N}\right)=f\left(\theta+\frac{1}{4N}\right)=\frac{1}{(2N)^{\alpha-1}}.$$

Таким образом, на классе E_s^α не существует интерполяционных формул, погрешность которых имела бы оценку лучшую, чем

$$R^*(x_1,\ldots,x_s)=O\left(\frac{1}{N^{\alpha-1}}\right).\tag{241}$$

Аналогично выбирая $f(x_1,\ldots,x_s)=\psi_1\left(x_1-\frac{1}{4n}\right)$, где

$$\psi_1(x_1+1)=\psi_1(x_1),\ \psi_1(x_1)=\begin{cases}\left(\dfrac{\sin 2\pi nx_1}{2n}\right)^{\alpha-1}, & \text{если } 0\leqslant x_1\leqslant\dfrac{1}{2n},\\ 0, & \text{если } \dfrac{1}{2n}\leqslant x_1\leqslant 1,\end{cases}$$

получим, что при $f\in E_s^\alpha$ оценка погрешности интерполяционных формул, построенных с помощью равномерных сеток

$$M_k=\left(\frac{k_1}{n},\ldots,\frac{k_s}{n}\right)\qquad(0\leqslant k_\nu<n,\ \nu=1,2,\ldots s;\ N=n^s),$$

не может быть лучшей, чем

$$R^*(x_1,\ldots,x_s)=O\left(\frac{1}{N^{\frac{\alpha-1}{s}}}\right).$$

Из сопоставления этого результата с оценкой

$$R^*(x_1,\ldots,x_s)=O\left(\frac{\ln^{\gamma_1}N}{N^{\frac{\alpha-1}{2}}}\right),\tag{242}$$

полученной в теореме 27, видно, что на классе E_s^α при $s>2$ интерполяционные формулы с параллелепипедальными сетками точнее интерполяционных формул, построенных с помощью равномерных сеток.

Из сравнения оценок (241) и (242) следует, что ни при каком выборе сеток степень N в оценке (242) нельзя увеличить более чем в два раза.

Отметим еще (см. [29]), что если ограничиться рассмотрением интерполяционных формул, построенных при $s \geqslant 2$ без использования производных интерполируемой функции, то ни при каком выборе параллелепипедальных сеток степень N в оценке (242) нельзя увеличить более чем на $\frac{1}{2}$.

Доказательство этого утверждения основано на использовании известной леммы Туэ, согласно которой сравнение

$$a_1x_1 + a_2x_2 \equiv 0 \pmod p$$

имеет в области $|x_1| \leqslant \sqrt{p}$, $|x_2| \leqslant \sqrt{p}$ хотя бы одно нетривиальное решение $(x_1, x_2) = (n_1, n_2)$.

Действительно, так как

$$([\sqrt{p}] + 1)([\sqrt{p}] + 1) > p,$$

то при $x_1, x_2 = 0, 1, \ldots, [\sqrt{p}]$ число пар (x_1, x_2) больше чем p. Следовательно, найдутся две различные пары (x_1', x_2') и (x_1'', x_2'') такие, что

$$a_1x_1' + a_2x_2' \equiv a_1x_1'' + a_2x_2'' \pmod p.$$

Но тогда, выбирая $n_1 = x_1' - x_1''$ и $n_2 = x_2' - x_2''$, получим утверждение леммы Туэ:

$$a_1n_1 + a_2n_2 \equiv o \pmod p, \qquad (243)$$

где $|n_1| \leqslant \sqrt{p}$, $|n_2| \leqslant \sqrt{p}$ и $(n_1, n_2) \neq (0, 0)$.

Пусть теперь $N = p$, $s \geqslant 2$ и $n = \max(|n_1|, |n_2|)$. Очевидно, функция

$$f(x_1, \ldots, x_s) = \frac{e^{2\pi i n_1 x_1} - e^{-2\pi i n_2 x_2}}{n^\alpha}$$

принадлежит классу E_s^α. Рассмотрим интерполяционную формулу вида (223)

$$f(x_1, \ldots, x_s) = P(x_1, \ldots, x_s) + R^*(x_1, \ldots, x_s), \qquad (244)$$

построенную с помощью произвольной параллелепипедальной сетки

$$M_k = \left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \qquad (k = 1, 2, \ldots, N).$$

Согласно (222) интерполяционный полином в этой формуле определяется равенством

$$P(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \psi_k(x_1, \ldots, x_s).$$

Так как в силу (243) для любого целого k выполняется сравнение

$$a_1n_1k \equiv -a_2n_2k \pmod p,$$

то при $k = 1, 2, \ldots, N$

$$f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) = \frac{e^{2\pi i \frac{a_1n_1k}{p}} - e^{-2\pi i \frac{a_2n_2k}{p}}}{n^\alpha} = 0$$

и, следовательно, интерполяционный полином $P(x_1, \ldots, x_s)$ тождественно равен нулю. Выбирая $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{2n_2}$ и замечая, что $n \leqslant \sqrt{N}$, из (244) получим

$$R^*\left(0, \frac{1}{2n_2}, x_3, \ldots, x_s\right) = f\left(0, \frac{1}{2n_2}, x_3, \ldots, x_s\right) = \frac{2}{n^\alpha} > \frac{1}{N^{\frac{\alpha}{2}}}.$$

Таким образом, в случае интерполяционных формул с параллелепипедальными сетками, построенных без использования производных интерполируемой функции, для функций $f \in E_s^\alpha$ при $s \geqslant 2$ нельзя получить оценку погрешности лучшую, чем $O\left(N^{-\frac{\alpha}{2}}\right)$.

Интерполяционные формулы, полученные в этом параграфе для функций, принадлежащих классу E_s^α, справедливы, в частности, для периодических функций из класса H_s^α.

Покажем, что построение интерполяционных формул для непериодических функций из класса H_s^α легко сводится к интерполяции на классе E_s^α.

Действительно, пусть $s \geqslant 1$, $\alpha \geqslant 2$ — целое и $f \in H_s^\alpha$. Ради простоты ограничимся случаем, когда производная $\frac{\partial^{\alpha s} f}{\partial x_1^\alpha \dots \partial x_s^\alpha}$ существует и непрерывна не только в единичном s-мерном кубе, как это следует из определения класса H_s^α, но также и в области, определенной неравенствами

$$-1 \leqslant x_\nu \leqslant 2 \qquad (\nu = 1, 2, \dots, s).$$

Определим функцию $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ равенством

$$\varphi(x_1, \dots, x_s) = \prod_{\nu=1}^{s} [x_\nu (1 - x_\nu)]^{\alpha-1} f(3x_1 - 1, \dots, 3x_s - 1). \quad (245)$$

Легко видеть, что при $\alpha_1 = \alpha$ функция $\varphi(x_1, \dots, x_s)$ удовлетворяет условиям леммы 12 (стр. 55) и, следовательно, $\varphi(\{x_1\}, \dots, \{x_s\}) \in E_s^\alpha$.

Пусть $a_1, \dots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс, $N = p$ и $N_1 = \left[\sqrt{N} \ln^{-\frac{\beta}{2}} N\right]$. Тогда, согласно теореме 27, справедлива интерполяционная формула

$$\varphi(\{x_1\}, \dots, \{x_s\}) = P(x_1, \dots, x_s) + O\left(N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{\gamma_1} N\right), \quad (246)$$

где тригонометрический полином $P(x_1, \dots, x_s)$ определен равенствами

$$P(x_1, \dots, x_s) = \sum_{\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s < N_1} \tilde{C}(m_1, \dots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)},$$

$$\tilde{C}(m_1, \dots, m_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \varphi\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \dots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(a_1 m_1 + \dots + a_s m_s) k}{p}}$$

и величина γ_1 не превосходит $\frac{\alpha\beta}{2} + s$.

Будем использовать интерполяционную формулу (246) при значениях аргументов, удовлетворяющих неравенствам

$$\frac{1}{3} \leqslant x_\nu \leqslant \frac{2}{3} \qquad (\nu = 1, 2, \dots, s).$$

Пользуясь определением функции $\varphi(x_1, \dots, x_s)$, перепишем формулу (246) в виде

$$f(3x_1 - 1, \dots, 3x_s - 1) = \prod_{\nu=1}^{s} [x_\nu (1 - x_\nu)]^{1-\alpha} P(x_1, \dots, x_s) + O\left(N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{\gamma_1} N\right).$$

Отсюда, полагая $x_\nu = \frac{1 + y_\nu}{3}$, получим интерполяционную формулу для функции f:

$$f(y_1, \dots, y_s) = \prod_{\nu=1}^{s} \left[\frac{(1 + y_\nu)(2 - y_\nu)}{9}\right]^{1-\alpha} P\left(\frac{1 + y_1}{3}, \dots, \frac{1 + y_s}{3}\right) + O\left(N^{-\frac{\alpha-1}{2}} \ln^{\gamma_1} N\right).$$

Эта формула справедлива, очевидно, всюду в единичном s-мерном кубе $0 \leqslant y_\nu \leqslant 1$ $(\nu = 1, 2, \dots, s)$.

Рассмотрим теперь один пример *), указывающий на возможность использования теоретикочисловых сеток для приближенного решения некоторых уравнений с частными производными.

Пусть $f \in E_s^\alpha(C)$ и функция v определена рядом

$$v(x_1, \dots, x_s) = \sum_{m_1, \dots, m_s = -\infty}^{\infty} B(m_1, \dots, m_s) \times C(m_1, \dots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \dots + m_s x_s)}, \quad (247)$$

где $C(m_1, \dots, m_s)$ — коэффициенты Фурье функции f и величины $B(m_1, \dots, m_s)$ удовлетворяют условию

$$|B(m_1, \dots, m_s)| \leqslant \frac{1}{(\bar{m}_1 \dots \bar{m}_s)^\omega} \qquad (0 \leqslant \omega \leqslant 1). \quad (248)$$

---

*) Более интересный (и более сложный) пример применения теоретикочисловых сеток к решению уравнений с частными производными рассмотрен в работе [25].

Определим тригонометрический многочлен $Q(x_1, \ldots, x_s)$ с помощью равенств

$$\widetilde{C}(m_1, \ldots, m_s) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) e^{-2\pi i \frac{(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)k}{p}},$$

$$Q(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} B(m_1, \ldots, m_s)\, \widetilde{C}(m_1, \ldots, m_s)\, e^{2\pi i (m_1 x_1 + \ldots + m_s x_s)}, \tag{249}$$

где $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс, $N = p$ и $N_1 = \left[\sqrt{N}(\ln N)^{-\frac{\beta}{2}}\right]$.

Лемма 32. *Если функции v и Q определены соответственно равенствами* (247) *и* (249), *то справедлива оценка*

$$v(x_1, \ldots, x_s) - Q(x_1, \ldots, x_s) = O\left(N^{-\frac{\alpha+\omega-1}{2}} \ln^{\gamma_2} N\right),$$

где $\gamma_2 \leqslant \frac{\alpha\beta}{2} + s$.

Доказательство. Так как $f \in E_s^\alpha(C)$, то

$$|B(m_1, \ldots, m_s)\, C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{|C(m_1, \ldots, m_s)|}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\omega} \leqslant \frac{C}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha+\omega}}.$$

Следовательно, пользуясь леммой 28, получим

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant N_1} |B(m_1, \ldots, m_s)\, C(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant C \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant N_1} \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^{\alpha+\omega}} = O\left(\frac{\ln^{s-1} N_1}{N_1^{\alpha+\omega-1}}\right).$$

Так как согласно (231)

$$|C(m_1, \ldots, m_s) - \widetilde{C}(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{B_2 C N_1^\alpha \ln^{\alpha\beta} N}{N^\alpha},$$

то, пользуясь оценкой (248) и замечая, что при $0 \leqslant \omega \leqslant 1$

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\omega} \leqslant \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} \frac{N_1^{1-\omega}}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} = O\left(N_1^{1-\omega} \ln^s N_1\right),$$

получим

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} |B(m_1, \ldots, m_s)|\, |C(m_1, \ldots, m_s) - \widetilde{C}(m_1, \ldots, m_s)| \leqslant \frac{B_2 C N_1^\alpha \ln^{\alpha\beta} N}{N^\alpha} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} \frac{1}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\omega} = O\left(\frac{N_1^{\alpha-\omega+1} \ln^{\alpha\beta+s} N}{N^\alpha}\right).$$

Но тогда

$$|v(x_1, \ldots, x_s) - Q(x_1, \ldots, x_s)| \leqslant \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant N_1} |B(m_1, \ldots, m_s)|\, |C(m_1, \ldots, m_s)| + \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1} |B(m_1, \ldots, m_s)|\, |C(m_1, \ldots, m_s) - \widetilde{C}(m_1, \ldots, m_s)| = O\left(\frac{N_1^{\alpha-\omega+1} \ln^{\alpha\beta+s} N}{N^\alpha} + \frac{\ln^{s-1} N}{N_1^{\alpha+\omega-1}}\right).$$

Отсюда в силу выбора N_1 следует утверждение леммы:

$$v(x_1, \ldots, x_s) - Q(x_1, \ldots, x_s) = O\left(N^{-\frac{\alpha+\omega-1}{2}} \ln^{\gamma_2} N\right),$$

где

$$\gamma_2 = \max\left[\alpha\beta + s - \frac{(\alpha - \omega + 1)}{2}\beta,\ s - 1 + \frac{(\alpha + \omega - 1)}{2}\beta\right] \leqslant \frac{\alpha\beta}{2} + s.$$

Пусть теперь $f(x_1, \ldots, x_s)$ — произвольная функция, принадлежащая классу $E_s^\alpha(C)$, нечетная по каждой из переменных $x_1, \ldots, x_s$. Обозначим через $u(x_1, \ldots, x_s)$ решение уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \ldots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_s^2} = f, \tag{250}$$

удовлетворяющее на единичном s-мерном кубе G_s нулевым граничным условиям.

Теорема 29. *Пусть $s \geqslant 2$, $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс, $N = p$ и $N_1 = \left[\sqrt{N} \ln^{-\frac{\beta}{2}} N\right]$. Тогда решение уравнения* (250), *удовлетворяющее на G_s нулевым граничным условиям, можно представить в виде*

$$u(x_1, \ldots, x_s) = \sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) \psi_k(x_1, \ldots, x_s) + O\left(\frac{\ln^{\frac{\alpha\beta}{2}+s} N}{N^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{s}}}\right),$$

где

$$\psi_k(x_1, \ldots, x_s) = -\frac{1}{4\pi^2 N} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < N_1}{}' \frac{e^{2\pi i \left[m_1\left(x_1 - \frac{a_1 k}{p}\right) + \ldots + m_s\left(x_s - \frac{a_s k}{p}\right)\right]}}{m_1^2 + \ldots + m_s^2}.$$

Доказательство. Определим функцию $v(x_1,\dots,x_s)$ рядом

$$v(x_1,\dots,x_s)=\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty} B(m_1,\dots,m_s)C(m_1,\dots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)},$$

где $C(m_1,\dots,m_s)$ — коэффициенты Фурье функции $f(x_1,\dots,x_s)$ и

$$B(m_1,\dots,m_s)=\begin{cases}0, & \text{если } (m_1,\dots,m_s)=(0,\dots,0),\\ -\dfrac{1}{4\pi^2}\dfrac{1}{m_1^2+\dots+m_s^2}, & \text{если } (m_1,\dots,m_s)\neq(0,\dots,0).\end{cases} \qquad (251)$$

Непосредственная проверка показывает, что функция $v(x_1,\dots,x_s)$ удовлетворяет уравнению (250). Действительно, из определения величин $B(m_1,\dots,m_s)$ следует, что

$$v(x_1,\dots,x_s)=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{C(m_1,\dots,m_s)}{m_1^2+\dots+m_s^2}e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}.$$

Так как, согласно условию, функция $f(x_1,\dots,x_s)$ нечетна по каждой из переменных $x_1,\dots,x_s$, то справедливы равенства $C(0,\dots,0)=0$ и

$$C(m_1,\dots,-m_\nu,\dots,m_s)=$$
$$=-C(m_1,\dots,m_\nu,\dots,m_s)\qquad(\nu=1,2,\dots,s).$$

Пользуясь этими равенствами, получим

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}+\dots+\frac{\partial^2 v}{\partial x_s^2}=$$
$$=\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' C(m_1,\dots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}=f(x_1,\dots,x_s),$$

$$v(x_1,\dots,-x_\nu,\dots,x_s)=$$
$$=-\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{C(m_1,\dots,m_s)}{m_1^2+\dots+m_s^2}e^{2\pi i(m_1x_1+\dots-m_\nu x_\nu+\dots+m_sx_s)}=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\sum_{m_1,\dots,m_s=-\infty}^{\infty}{}'\frac{C(m_1,\dots,m_s)}{m_1^2+\dots+m_s^2}e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_\nu x_\nu+\dots+m_sx_s)}=$$
$$=-v(x_1,\dots,x_\nu,\dots,x_s).$$

Но тогда

$$v(x_1,\dots,x_{\nu-1},0,x_{\nu+1},\dots,x_s)=0,\qquad(\nu=1,2,\dots,s),$$

Таким образом, функция $v(x_1,\dots,x_s)$ представляет собой решение уравнения (250), удовлетворяющее нулевым граничным условиям и, следовательно,

$$u(x_1,\dots,x_s)=v(x_1,\dots,x_s). \qquad (252)$$

Теперь, пользуясь неравенством

$$m_1^2+\dots+m_s^2\geqslant(\bar m_1\dots\bar m_s)^{\frac{2}{s}},$$

справедливым при $(m_1,\dots,m_s)\neq(0,\dots,0)$, и полагая $\omega=\frac{2}{s}$, получим из (251)

$$|B(m_1,\dots,m_s)|\leqslant\frac{1}{(\bar m_1\dots\bar m_s)^{\omega}}.$$

Так как при $s\geqslant 2$ выполняется условие $0\leqslant\omega\leqslant 1$, то к функции $v(x_1,\dots,x_s)$ можно применить лемму 32. Согласно этой лемме

$$v(x_1,\dots,x_s)=Q(x_1,\dots,x_s)+O\left(\frac{\ln^{\frac{\alpha\beta}{2}+s}N}{N^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{s}}}\right),$$

где

$$Q(x_1,\dots,x_s)=$$
$$=\sum_{\bar m_1\dots\bar m_s<N_1}B(m_1,\dots,m_s)\tilde C(m_1,\dots,m_s)e^{2\pi i(m_1x_1+\dots+m_sx_s)}$$

и

$$\tilde C(m_1,\dots,m_s)=$$
$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)e^{-2\pi i\frac{(a_1m_1+\dots+a_sm_s)k}{p}}.$$

Отсюда, пользуясь определением величин $B(m_1,\dots,m_s)$ и $\psi_k(x_1,\dots,x_s)$, получим

$$Q(x_1,\dots,x_s)=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\times$$
$$\times\sum_{\bar m_1\dots\bar m_s<N_1}B(m_1,\dots,m_s)e^{2\pi i\left[m_1\left(x_1-\frac{a_1k}{p}\right)+\dots+m_s\left(x_s-\frac{a_sk}{p}\right)\right]}=$$
$$=\sum_{k=1}^{N}f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\dots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\psi_k(x_1,\dots,x_s).$$

Следовательно,

$$v(x_1,\ldots,x_s)=\sum_{k=1}^{N} f\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right)\psi_k(x_1,\ldots,x_s)+$$

$$+O\left(\frac{\ln^{\frac{\alpha\beta}{2}+s}N}{N^{\frac{\alpha-1}{2}+\frac{1}{s}}}\right),$$

что в силу (252) совпадает с утверждением теоремы.

§ 13. Приближенное решение интегральных уравнений методом итераций

Рассмотрим кратное уравнение Фредгольма второго рода:

$$\varphi(x_1,\ldots,x_r)=$$

$$=\lambda\int_0^1\cdots\int_0^1 K(x_1,\ldots,x_r,\ y_1,\ldots,y_r)\,\varphi(y_1,\ldots,y_r)\,dy_1\ldots dy_r+$$

$$+f(x_1,\ldots,x_r). \qquad (253)$$

Будем предполагать, что свободный член и ядро этого уравнения принадлежат соответственно классам $E_r^\alpha(C)$ и $E_{2r}^\alpha(C)$. Уравнение (253) будем также записывать кратко в виде

$$\varphi(P)=\lambda\int_{G_r}K(P,Q)\,\varphi(Q)\,dQ+f(P), \qquad (254)$$

где интегрирование распространено на единичный r-мерный куб G_r.

Лемма 33. *Если* $\gamma>0$, $C\geqslant 1$,

$$\gamma_0=\ln C+2r\left[\alpha+\ln\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)\right] \text{ и } |\lambda|=e^{-(\gamma+\gamma_0)},$$

то при $n\to\infty$ решение уравнения (254) удовлетворяет соотношению

$$\varphi(P)=f(P)+\int_{G_{rn}}F(P,Q_1,\ldots,Q_n)\,dQ_1\ldots dQ_n+O\left(e^{-\gamma\cdot n}\right),$$

где функция $F(P,Q_1,\ldots,Q_n)$ определена равенством

$$F(P,Q_1,\ldots,Q_n)=$$

$$=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu K(P,Q_1)\ldots K(Q_{\nu-1},Q_\nu)\,f(Q_\nu) \qquad (255)$$

и принадлежит классу $E_{rn}^\alpha(C)$.

Доказательство. Известно, что при достаточно малом λ решение уравнения (254) можно представить в виде ряда

$$\varphi(P)=f(P)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\lambda^\nu\int_{G_{r\nu}}K(P,Q_1)\ldots K(Q_{\nu-1},Q_\nu)\,f(Q_\nu)\,dQ_1\ldots dQ_\nu,$$

где $G_{r\nu}$ — единичный $r\nu$-мерный куб. Пусть величина R_n определена равенством

$$R_n=\sum_{\nu=n+1}^{\infty}\lambda^\nu\int_{G_{r\nu}}K(P,Q_1)\ldots K(Q_{\nu-1},Q_\nu)\,f(Q_\nu)\,dQ_1\ldots dQ_\nu.$$

Тогда, пользуясь определением функции $F(P,Q_1,\ldots,Q_n)$, получим

$$\varphi(P)=f(P)+$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu\int_{G_{r\nu}}K(P,Q_1)\ldots K(Q_{\nu-1},Q_\nu)\,f(Q_\nu)\,dQ_1\ldots dQ_\nu+R_n=$$

$$=f(P)+\int_{G_{rn}}F(P,Q_1,\ldots,Q_n)\,dQ_1\ldots dQ_n+R_n. \qquad (256)$$

Обозначим через $C(m_1,\ldots,m_r)$ коэффициенты Фурье функции $f(P)$. Так как, по условию, $f(P)\in E_r^\alpha(C)$, то

$$|f(P)|=\left|\sum_{m_1,\ldots,m_r=-\infty}^{\infty}C(m_1,\ldots,m_r)\,e^{2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_rx_r)}\right|\leqslant$$

$$\leqslant C\sum_{m_1,\ldots,m_r=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_r)^\alpha}=C\left(1+2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^\alpha}\right)^r\leqslant$$

$$\leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^r.$$

Аналогичная оценка справедлива, очевидно, и для ядра уравнения (254):

$$|K(P, Q)| \leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2r}.$$

Но тогда

$$|K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)| \leqslant \leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^r\left[C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2r}\right]^\nu$$

и, следовательно,

$$|R_n| \leqslant \sum_{\nu=n+1}^{\infty} \int_{G_{r\nu}} |\lambda|^\nu |K(P, Q_1) \ldots \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)| \, dQ_1 \ldots dQ_\nu \leqslant \leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^r \sum_{\nu=n+1}^{\infty}\left[|\lambda| C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2r}\right]^\nu.$$

Далее, пользуясь соотношением

$$e^{\gamma_0}=Ce^{2r\alpha}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2r},$$

получим

$$|\lambda|=e^{-(\gamma+\gamma_0)}<e^{-\gamma} \frac{1}{C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2r}},$$

$$|R_n| \leqslant C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^r \sum_{\nu=n+1}^{\infty} e^{-\gamma\nu}=O(e^{-\gamma n}).$$

Отсюда в силу (256) следует первое из утверждений леммы:

$$\varphi(P)=f(P)+\int_{G_{rn}} F(P, Q_1, \ldots, Q_n) \, dQ_1 \ldots dQ_n+O(e^{-\gamma n}).$$

Перейдем теперь к доказательству второго утверждения. Так как $f(P) \in E_r^\alpha(C)$ и $K(P, Q) \in E_{2r}^\alpha(C)$, то, пользуясь первым замечанием к лемме 9 (стр. 39), получим

$$K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu) \in E_{r\nu}^\alpha(A^\nu C^{\nu+1}), \qquad (257)$$

где

$$A=\left[2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)\right]^r.$$

(В отличие от остальных сомножителей, первый сомножитель в соотношении (257) рассматривается как функция r переменных, соответствующих величине Q_1, а не как функция всех своих переменных.)

Далее, рассматривая каждую из функций

$$K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu) \qquad (\nu=1, 2, \ldots, n)$$

как функцию всех rn переменных, соответствующих величинам $Q_1, \ldots, Q_n$, согласно первому утверждению леммы 9 получим, что функция

$$F(P, Q_1, \ldots, Q_n)=\sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu K(P, Q_1) \ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)$$

принадлежит классу $E_{rn}^\alpha(C')$, где

$$C'=\sum_{\nu=1}^{n} |\lambda|^\nu A^\nu C^{\nu+1}=C \sum_{\nu=1}^{n}(|\lambda| AC)^\nu.$$

Но в силу (257)

$$e^{\gamma_0}>Ce^{r(\alpha+1)}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2r}>2C\left[2^{\alpha+1}\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)\right]^r=2AC$$

$$|\lambda|<e^{-\gamma_0}<\frac{1}{2AC}$$

и, следовательно,

$$C'<C \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^\nu<C,$$

чем лемма 33 доказана полностью.

Пусть, как и выше, $f(P) \in E_r^\alpha(C)$, $K(P, Q) \in E_{2r}^\alpha(C)$,

$$\varphi(P)=\lambda \int_{G_r} K(P, Q) \varphi(Q) \, dQ+f(P) \qquad (258)$$

и величина γ_0 определена равенством

$$\gamma_0 = \ln C + 2r\left[\alpha + \ln\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)\right].$$

Следующая теорема показывает, что для приближенного решения уравнения (258) можно использовать квадратурные формулы с неравномерными сетками.

Теорема 30. *Пусть p — простое, $N = p$, $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$, $|\lambda| < e^{-\gamma_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$ и величина n определена равенством*

$$n = \left[\frac{\varepsilon - 2\varepsilon^2}{2\gamma_0}\ln N\right].$$

Тогда при произвольно малом ε для решения уравнения (258) выполняется асимптотическое равенство

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu K(P, M_{k,1})\ldots K(M_{k,\nu-1}, M_{k,\nu}) f(M_{k,\nu}) + O\left(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

где

$$M_{k,\nu} = \left(\left\{\frac{k^{r(\nu-1)+1}}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^{r\nu}}{p}\right\}\right).$$

Доказательство. Пусть функция Φ принадлежит классу $E_s^\alpha(C)$ и σ — сумма модулей ее коэффициентов Фурье. Тогда согласно теореме 6 (стр. 72) справедлива квадратурная формула

$$\int_0^1\ldots\int_0^1 \Phi(x_1, \ldots, x_s)\,dx_1\ldots dx_s = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\Phi\left(\left\{\frac{k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^s}{p}\right\}\right) - R, \qquad (259)$$

где

$$|R| \leqslant \frac{(s-1)\sigma}{\sqrt{N}} + \frac{C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s}{N^\alpha}. \qquad (260)$$

Пользуясь тем, что

$$|\sigma| \leqslant C \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty} \frac{1}{(\bar{m}_1 \ldots \bar{m}_s)^\alpha} \leqslant C\left(3 + \frac{2}{\alpha - 1}\right)^s,$$

получим из (260)

$$|R| \leqslant \frac{Cs\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^s}{\sqrt{N}} < \frac{C\left(3 + \frac{2}{\alpha-1}\right)^{2s}}{\sqrt{N}}. \qquad (261)$$

Выберем в лемме 33 $\gamma = \frac{\gamma_0}{\varepsilon}$. Тогда при $|\lambda| \leqslant e^{-\gamma_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$ для решения уравнения (258) получим

$$\varphi(P) = f(P) + \int_{G_{rn}} F(P, Q_1, \ldots, Q_n)\,dQ_1\ldots dQ_n + O\left(e^{-\frac{\gamma_0 n}{\varepsilon}}\right), \qquad (262)$$

где согласно (255) функция $F(P, Q_1, \ldots, Q_n)$ определена равенством

$$F(P, Q_1, \ldots, Q_n) = \sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu K(P, Q_1)\ldots K(Q_{\nu-1}, Q_\nu) f(Q_\nu)$$

и принадлежит классу $E_{rn}^\alpha(C)$.

Пусть при $k = 1, 2, \ldots, N$ и $\nu = 1, 2, \ldots, n$ точки $M_{\nu,k}$ определены равенством

$$M_{k,\nu} = \left(\left\{\frac{k^{r(\nu-1)+1}}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{k^{r\nu}}{p}\right\}\right).$$

Выберем p настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $n \geqslant 1$ и $N \geqslant rn$. Тогда, применяя квадратурную формулу (259), получим

$$\int_{G_{rn}} F(P, Q_1, \ldots, Q_n)\,dQ_1\ldots dQ_n = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} F(P, M_{k,1}, \ldots, M_{k,n}) - R_1 =$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu K(P, M_{k,1})\ldots K(M_{k,\nu-1}, M_{k,\nu}) f(M_{k,\nu}) - R_1, \qquad (263)$$

где в силу (261)

$$|R_1| \leqslant \frac{C\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2rn}}{\sqrt{N}}. \tag{264}$$

Пользуясь определением n и γ_0, получим

$$n=\left[\frac{\varepsilon-2\varepsilon^2}{2\gamma_0}\ln N\right]<\frac{\varepsilon\ln N}{2\gamma_0},$$

$$\gamma_0=\ln C+2r\alpha+2r\ln\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)>r\ln\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right).$$

Следовательно,

$$n<\frac{\varepsilon\ln N}{2r\ln\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)},\quad 2rn\ln\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)<\varepsilon\ln N,$$

$$\left(3+\frac{2}{\alpha-1}\right)^{2rn}<N^{\varepsilon}$$

и в силу (264)

$$|R_1|\leqslant\frac{CN^{\varepsilon}}{\sqrt{N}}=O\left(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Но тогда из (262) и (263) следует, что

$$\varphi(P)=f(P)+$$
$$+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}K(P,M_{k,1})\ldots K(M_{k,\nu-1},M_{k,\nu})f(M_{k,\nu})+$$
$$+O\left(e^{-\frac{\gamma_0 n}{\varepsilon}}+N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right).$$

Отсюда, пользуясь оценкой

$$e^{-\frac{\gamma_0 n}{\varepsilon}}<e^{-\frac{\gamma_0}{\varepsilon}\left(-1+\frac{\varepsilon-2\varepsilon^2}{2\gamma_0}\ln N\right)}=O\left(N^{-\frac{1}{2}+\varepsilon}\right),$$

получаем утверждение теоремы.

Результат, полученный в теореме 30, можно усилить, если воспользоваться методом оптимальных коэффициентов.

Лемма 34. *Для всякого простого p существуют оптимальные коэффициенты $a_1, \ldots, a_s$ такие, что каково бы ни было $\alpha>1$, при любом $\varepsilon_1\in(0,1)$ выполняется оценка*

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1m_1+\ldots+a_sm_s)}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\alpha}}<\frac{\left(6\alpha+\frac{12\alpha^2}{\varepsilon_1}\right)^{2\alpha s}}{p^{\alpha-\varepsilon_1}}.$$

Доказательство. Пусть z — произвольное целое из интервала $1\leqslant z\leqslant p-1$. Определим функцию $T_s(z)$ равенством

$$T_s(z)=\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<p}{}' \frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_sz^{s-1})}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}.$$

Пусть при $z=a$ достигается минимум этой функции. Тогда, очевидно,

$$T_s(a)=\min_{1\leqslant z\leqslant p-1}T_s(z)\leqslant\frac{1}{p-1}\sum_{z=1}^{p-1}\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<p}{}'\frac{\delta_p(m_1+\ldots+m_sz^{s-1})}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{p-1}\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<p}{}'\frac{1}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\sum_{z=1}^{p}\delta_p(m_1+\ldots+m_sz^{s-1}). \tag{265}$$

Так как согласно лемме 2 (стр. 20)

$$\sum_{z=1}^{p}\delta_p(m_1+\ldots+m_sz^{s-1})\leqslant s-1,$$

то при произвольном $\varepsilon>0$ получим из (265)

$$T_s(a)\leqslant\frac{s-1}{p-1}\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<p}{}'\frac{1}{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{s-1}{p-1}p^{\varepsilon}\sum_{\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s<p}{}'\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{1+\varepsilon}}<\frac{s}{p^{1-\varepsilon}}\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{1+\varepsilon}}.$$

Отсюда в силу (22) следует, что

$$T_s(a)<\frac{s\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^{s}}{p^{1-\varepsilon}}. \tag{266}$$

Введем обозначения

$$\sum\nolimits_1 = \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha},$$

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant p} \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha}.$$

Так как из (266) в силу определения величины $T_s(a)$ следует оценка

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} < \frac{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^s}{p^{1-\varepsilon}}, \tag{267}$$

то, пользуясь неравенством (122), получим

$$\sum\nolimits_1 \leqslant \left[\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s}\right]^\alpha < \frac{s^\alpha \left(3 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^{\alpha s}}{p^{\alpha - \alpha\varepsilon}}. \tag{268}$$

Чтобы оценить сумму $\sum_2$, заметим, что для нетривиальных решений сравнения

$$m_1 + \ldots + m_s a^{s-1} \equiv 0 \pmod p \tag{269}$$

выполняется неравенство

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s > \frac{p^{1-\varepsilon}}{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^s}. \tag{270}$$

Действительно, согласно определению величины $\delta_p(m)$, в левой части неравенства (267) отличны от нуля только такие слагаемые, для которых система $m_1, \ldots, m_s$ является нетривиальным решением сравнения (269). Так как любое из этих слагаемых не превосходит всей суммы, то для каждого нетривиального решения сравнения получим

$$\frac{\delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1})}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} = \frac{1}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} < \frac{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^s}{p^{1-\varepsilon}},$$

чем неравенство (270) доказано.

Пусть функция $\varphi(m_1, \ldots, m_s)$ определена равенствами

$$\varphi(m_1, \ldots, m_s) = \begin{cases} 0, & \text{если } \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p, \\ \delta_p(m_1 + \ldots + m_s a^{s-1}), & \text{если } \overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s \geqslant p. \end{cases}$$

Тогда, пользуясь леммой 18 (стр. 87), получим

$$\sum\nolimits_2 = \sum_{m_1, \ldots, m_s = -\infty}^{\infty}{}' \frac{\varphi(m_1, \ldots, m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^s \sum_{m_1, \ldots, m_s = 1}^{\infty} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1| \leqslant m_1, \ldots, |k_s| \leqslant m_s} \varphi(k_1, \ldots, k_s) \leqslant$$

$$\leqslant \alpha^s \sum_{m_1 \ldots m_s \geqslant p} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{\alpha+1}} \sum_{|k_1| \leqslant m_1, \ldots, |k_s| \leqslant m_s} \delta_p(k_1 + \ldots + k_s a^{s-1}). \tag{271}$$

Обозначим через q минимальное значение произведения $m_1 \ldots m_s$, где $m_1, \ldots, m_s$ — произвольное нетривиальное решение сравнения (269). Тогда, выбирая в лемме 27 (стр. 123) $\lambda = 0$, $\lambda_\nu = -(m_\nu + 1)$, $n_\nu = 2m_\nu + 1$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$), получим, что при любых $m_1, \ldots, m_s$, удовлетворяющих условию $m_1 \ldots m_s \geqslant p$, выполняется оценка

$$\sum_{|k_1| \leqslant m_1, \ldots, |k_s| \leqslant m_s} \delta_p(k_1 + \ldots + k_s a^{s-1}) \leqslant 4\,\frac{(2m_1+1) \ldots (2m_s+1)}{q} \leqslant$$

$$\leqslant 4 \cdot 3^s\,\frac{m_1 \ldots m_s}{q}.$$

Пользуясь этой оценкой и замечая, что в силу (270)

$$q > \frac{p^{1-\varepsilon}}{s\left(3 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^s},$$

при любом положительном $\varepsilon \leqslant \alpha - 1$ получим из (271)

$$\sum\nolimits_2 \leqslant \frac{4(3\alpha)^s}{q} \sum_{m_1 \ldots m_s \geqslant p} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^\alpha} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4(3\alpha)^s}{qp^{\alpha-1-\varepsilon}} \sum_{m_1 \ldots m_s \geqslant p} \frac{1}{(m_1 \ldots m_s)^{1+\varepsilon}} \leqslant \frac{4s\left[3\alpha\left(3 + \frac{2}{\varepsilon}\right)\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^s}{p^{\alpha-2\varepsilon}}. \tag{272}$$

Выберем

$$a_\nu = a^{\nu-1} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, s). \tag{273}$$

Тогда, пользуясь оценками (268) и (272), при $\varepsilon = \frac{\varepsilon_1}{2\alpha}$ получим неравенство, указанное в лемме:

$$\sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} = \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s^\alpha\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)^{\alpha s}}{p^{\alpha-\alpha\varepsilon}} + \frac{4s\left[3\alpha\left(3+\frac{2}{\varepsilon}\right)\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\right]^s}{p^{\alpha-2\varepsilon}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left(6\alpha + \frac{12\alpha^2}{\varepsilon_1}\right)^{2\alpha s}}{p^{\alpha-\varepsilon_1}}.$$

Для завершения доказательства леммы остается убедиться, что величины $a_1, \ldots, a_s$, определенные равенством (273), являются оптимальными коэффициентами.

Действительно, из (265), пользуясь леммой 2 (стр. 20), получим

$$T_s(a) \leqslant \frac{s-1}{p-1} \sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}{}' \frac{1}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{s}{p}\left(1 + 2\sum_{m=1}^{p} \frac{1}{m}\right)^s \leqslant \frac{s(3+2\ln p)^s}{p}.$$

Переписывая эту оценку в виде

$$\sum_{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s < p}{}' \frac{\delta_p(m_1 + \ldots + a^{s-1} m_s)}{\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s} \leqslant \frac{s(3+2\ln p)^s}{p},$$

тем же путем, как и при доказательстве неравенства (270), убедимся, что для нетривиальных решений сравнения

$$m_1 + \ldots + a^{s-1} m_s \equiv 0 \pmod p$$

выполняется оценка

$$\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s > \frac{p}{s(3+2\ln p)^s}.$$

Но тогда согласно следствию теоремы 19 (стр. 128) целые $a_\nu = a^{\nu-1}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, s$) будут оптимальными коэффициентами, чем лемма 34 доказана полностью.

Следствие. *Если* $\Phi \in E_s^\alpha(C)$, *то, каково бы ни было* $\varepsilon_1 \in (0, \alpha-1)$ *для погрешности квадратурной формулы*

$$\int_0^1 \ldots \int_0^1 \Phi(x_1, \ldots, x_s)\, dx_1 \ldots dx_s = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \Phi\left(\left\{\frac{a_1 k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_s k}{p}\right\}\right) - R,$$

построенной при $N = p$ *с помощью оптимальных коэффициентов, указанных в лемме 34, справедлива оценка*

$$|R| \leqslant C \frac{\left(6\alpha + \frac{12\alpha^2}{\varepsilon_1}\right)^{2\alpha s}}{p^{\alpha-\varepsilon_1}}.$$

Действительно, пользуясь леммами 21 (стр. 98) и 34, получим утверждение следствия

$$|R| \leqslant C \sum_{m_1,\ldots,m_s=-\infty}^{\infty}{}' \frac{\delta_p(a_1 m_1 + \ldots + a_s m_s)}{(\overline{m}_1 \ldots \overline{m}_s)^\alpha} \leqslant C \frac{\left(6\alpha + \frac{12\alpha^2}{\varepsilon_1}\right)^{2\alpha s}}{p^{\alpha-\varepsilon_1}}.$$

Пусть $\alpha > 1$, $0 < \varepsilon < \alpha - 1$, p — простое, $N = p$, $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, удовлетворяющие условию леммы 34, и величины γ_0, n определены равенствами

$$\gamma_0 = \ln C + 4r\alpha^2 \ln\left(6\alpha + \frac{24\alpha^2}{\varepsilon}\right), \quad n = \left[\frac{\alpha\varepsilon \ln N}{\gamma_0}\right]. \tag{274}$$

Теорема 31. *Если* $f(P) \in E_r^\alpha(C)$, $K(P, Q) \in E_{2r}^\alpha(C)$ *и* $|\lambda| \leqslant e^{-\gamma_0\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)}$, *то при произвольно малом* ε *для решения уравнения*

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_r} K(P, Q)\, \varphi(Q)\, dQ + f(P) \tag{275}$$

выполняется равенство

$$\varphi(P) = f(P) + \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sum_{\nu=1}^{n} \lambda^\nu K(P, M_{k,1}) \ldots$$

$$\ldots K(M_{k,\nu-1}, M_{k,\nu}) f(M_{k,\nu}) + O(N^{-\alpha+\varepsilon}),$$

где

$$M_{k,\nu}=\left(\left\{\frac{a_{r(\nu-1)+1}k}{p}\right\},\ldots,\left\{\frac{a_{r\nu}k}{p}\right\}\right). \qquad (276)$$

Доказательство. Выберем в лемме 33 $\gamma=\frac{\gamma_0}{\varepsilon}$, где γ_0 определено первым из равенств (274). Тогда для решения уравнения (275) получим

$$\varphi(P)=f(P)+\int\limits_{G_{rn}}F(P,Q_1,\ldots,Q_n)\,dQ_1\ldots dQ_n+O\left(e^{-\frac{\gamma_0 n}{\varepsilon}}\right), \qquad (277)$$

где функция $F(P, Q_1,\ldots,Q_n)$ определена равенством

$$F(P,Q_1,\ldots,Q_n)=\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu K(P,Q_1)\ldots K(Q_{\nu-1},Q_\nu)f(Q_\nu)$$

и принадлежит классу $E^\alpha_{rn}(C)$.

Пусть при $k=1,2,\ldots,N$ и $\nu=1,2,\ldots,n$ точки $M_{k,\nu}$ определены равенством (276). Тогда согласно квадратурной формуле, указанной в следствии леммы 34, при $s=rn$ и $\varepsilon_1=\frac{\varepsilon}{2}$ справедливо равенство

$$\int\limits_{G_{rn}}F(P,Q_1,\ldots,Q_n)\,dQ_1\ldots dQ_n=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}F(P,M_{k,1},\ldots,M_{k,n})-R_1=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}\lambda^\nu K(P,M_{k,1})\ldots K(M_{k,\nu-1},M_{k,\nu})f(M_{k,\nu})-R_1, \qquad (278)$$

где

$$|R_1|<C\frac{\left(6\alpha+\frac{24\alpha^2}{\varepsilon}\right)^{2\alpha rn}}{N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}. \qquad (279)$$

Пользуясь равенствами (274), получим

$$n\leqslant\frac{\alpha\varepsilon\ln N}{\gamma_0}<\frac{\varepsilon\ln N}{4\alpha r\ln\left(6\alpha+\frac{24\alpha^2}{\varepsilon}\right)},$$

$$2\alpha rn\ln\left(6\alpha+\frac{24\alpha^2}{\varepsilon}\right)<\frac{\varepsilon}{2}\ln N.$$

Но тогда

$$\left(6\alpha+\frac{24\alpha^2}{\varepsilon}\right)^{2\alpha rn}<N^{\frac{\varepsilon}{2}}$$

и, следовательно, в силу (279)

$$R_1=O\left(N^{-\alpha+\varepsilon}\right).$$

Пользуясь этой оценкой, из (277) и (278) получим

$$\varphi(P)=f(P)+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\nu=1}^{n}K(P,M_{k,1})\ldots$$

$$\ldots K(M_{k,\nu-1},M_{k,\nu})f(M_{k,\nu})+O\left(e^{-\frac{\gamma_0 n}{\varepsilon}}+N^{-\alpha+\varepsilon}\right).$$

Отсюда, так как в силу выбора n выполняется оценка

$$e^{-\frac{\gamma_0 n}{\varepsilon}}=O\left(N^{-\alpha}\right),$$

следует утверждение теоремы.

§ 14. Сведение интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений

Способ приближенного решения интегральных уравнений, рассматриваемый в этом параграфе, основан на сведении интегрального уравнения к системе алгебраических уравнений путем применения квадратурных формул с теоретикочисловыми сетками.

Доказательству основной теоремы предпошлем три леммы.

Лемма 35. *Пусть G_{rs} — единичный rs-мерный куб, $F(P_1,\ldots,P_r)$ — произвольная функция rs переменных, принадлежащая классу E^α_{rs}, $\lim\limits_{n\to\infty}\varepsilon(n)=0$ и точки M_k выбраны в единичном s-мерном кубе так, что квадратурная формула*

$$\int\limits_{G_{rs}}F(P_1,\ldots,P_r)\,dP_1\ldots dP_r=$$

$$=\frac{1}{n^r}\sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{n}F\left(M_{k_1},\ldots,M_{k_r}\right)+O\left(\varepsilon(n)\right) \qquad (280)$$

справедлива при $r=1$. *Тогда эта формула будет справедлива и при любом фиксированном* $r>1$.

Доказательство. Согласно условию леммы формула (280) верна при $r=1$. Применим индукцию. Пусть $r\geqslant 2$ и равенство (280) выполняется при $r-1$. Согласно лемме 8 (стр. 35) при фиксированном значении P_r

$$F(P_1, \ldots, P_{r-1}, P_r) \in E^{\alpha}_{s(r-1)}$$

и при фиксированных $P_1, \ldots, P_{r-1}$

$$F(P_1, \ldots, P_{r-1}, P_r) \in E^{\alpha}_{s}.$$

Следовательно, пользуясь индукционным предположением, получим равенство

$$\int\limits_{G_{rs}} F(P_1, \ldots, P_r)\, dP_1 \ldots dP_r =$$

$$= \int\limits_{G_s} dP_r \int\limits_{G_{s(r-1)}} F(P_1, \ldots, P_{r-1}, P_r)\, dP_1 \ldots dP_{r-1} =$$

$$= \frac{1}{n^{r-1}} \sum_{k_1, \ldots, k_{r-1}=1}^{n} \int\limits_{G_s} F(M_{k_1}, \ldots, M_{k_{r-1}}, P_r)\, dP_r + O(\varepsilon(n)) =$$

$$= \frac{1}{n^r} \sum_{k_1, \ldots, k_r=1}^{n} F(M_{k_1}, \ldots, M_{k_r}) + O(\varepsilon(n)),$$

совпадающее с утверждением леммы.

Лемма 36. *Пусть* a_{ij} — *произвольные числа,* $n\geqslant 1$, $0\leqslant k\leqslant n$ *и величина* $\widetilde{A}_n(k)$ *определена равенством*

$$\widetilde{A}_n(k) = \begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & \ldots & a_{2k} & a_{2k+1} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & 1+a_{kk} & a_{k,k+1} & \ldots & a_{kn} \\ a_{k+1,1} & a_{k+1,2} & \ldots & a_{k+1,k} & a_{k+1,k+1} & \ldots & a_{k+1,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (281)$$

Обозначим через $A_n(k)$ *максимум модуля* $\widetilde{A}_n(k)$ *при условии* $|a_{ij}|\leqslant \frac{\gamma}{n}$, *где* γ — *некоторая константа. Тогда существуют константы* γ_1 *и* γ_2 *такие, что при любом* n *справедливы оценки*

$$A_n(n-1)\leqslant \frac{\gamma_1}{n}, \quad A_n(n)\leqslant \gamma_2.$$

Доказательство. Представим $\widetilde{A}_n(k)$ в виде суммы двух определителей, у которых первые столбцы будут соответственно образованы элементами $1, 0, \ldots, 0$ и $a_{11}, \ldots, a_{n1}$. Приводя эти определители к виду (281) и переходя к максимальным значениям их модулей, получим

$$A_n(k)\leqslant A_{n-1}(k-1)+A_n(k-1). \quad (282)$$

Из этого неравенства после применения его к величинам, стоящим в его правой части, следует, что

$$A_n(k)\leqslant A_{n-2}(k-2)+A_{n-1}(k-2)+A_{n-1}(k-2)+$$
$$+A_n(k-2)=A_{n-2}(k-2)+2A_{n-1}(k-2)+A_n(k-2).$$

Продолжая этот процесс, после $k-1$-кратного применения неравенства (282) получим

$$A_n(k)\leqslant A_{n-k}(0)+C_k^1 A_{n-k+1}(0)+\ldots+A_n(0). \quad (283)$$

Выберем $k=n-1$. Тогда неравенство (283) примет вид

$$A_n(n-1)\leqslant A_1(0)+C^1_{n-1}A_2(0)+\ldots+A_n(0)=$$
$$=\sum_{\nu=1}^{n} C^{\nu-1}_{n-1} A_\nu(0).$$

Отсюда, пользуясь для оценки определителей $A_\nu(0)$ неравенством Адамара и замечая, что $|a_{ij}|\leqslant \frac{\gamma}{n}$, получим первое из утверждений леммы:

$$A_\nu(0)\leqslant \nu^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\gamma}{n}\right)^{\nu},$$

$$A_n(n-1)\leqslant \sum_{\nu=1}^{n} C^{\nu-1}_{n-1}\nu^{\frac{\nu}{2}}\left(\frac{\gamma}{n}\right)^{\nu}\leqslant \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\gamma^{\nu}\nu^{\frac{\nu}{2}}}{(\nu-1)!}=\frac{\gamma_1}{n}.$$

Второе утверждение леммы непосредственно следует из неравенства Адамара. Действительно, выбирая $\gamma_2 = e^{\gamma + \frac{1}{2}\gamma^2}$, получим

$$A_n(n) \leqslant [(|1 + a_{11}|^2 + \ldots + |a_{1n}|^2) \ldots (|a_{n1}|^2 + \ldots + |1 + a_{nn}|^2)]^{\frac{1}{2}} \leqslant \left[\left(1 + \frac{\gamma}{n}\right)^2 + (n-1)\frac{\gamma^2}{n^2}\right]^{\frac{n}{2}} = \left(1 + \frac{2\gamma + \gamma^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant \gamma_2.$$

Пусть $s \geqslant 1$ и G_s — единичный s-мерный куб. Рассмотрим кратное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$\varphi(P) = \lambda \int_{G_s} K(P, Q)\, \varphi(Q)\, dQ + f(P). \tag{284}$$

Обозначим через $D(\lambda)$ его знаменатель Фредгольма:

$$D(\lambda) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \int_{G_{s\nu}} K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ P_1, \ldots, P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \ldots dP_\nu, \tag{285}$$

где

$$K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ Q_1, \ldots, Q_\nu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(P_1, Q_1) \ldots K(P_1, Q_\nu) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ K(P_\nu, Q_1) \ldots K(P_\nu, Q_\nu) \end{vmatrix}. \tag{286}$$

Пусть, далее,

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{n} K(M_1, M_1) \ldots - \frac{\lambda}{n} K(M_1, M_n) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ -\frac{\lambda}{n} K(M_n, M_1) \ldots 1 - \frac{\lambda}{n} K(M_n, M_n) \end{vmatrix}. \tag{287}$$

Лемма 37. *Если* $K(P, Q) \in E^\alpha_{2s}$, $D(\lambda) \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$ *и точки* M_k *выбраны так, что при* $F \in E^\alpha_s$ *справедлива квадратурная формула*

$$\int_{G_s} F(P)\, dP = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} F(M_k) + O(\varepsilon(n)), \tag{288}$$

то при всяком достаточно большом n *выполняется оценка*

$$|\Delta(\lambda)| \geqslant \frac{1}{2} |D(\lambda)|.$$

Доказательство. Пусть M — константа, ограничивающая в единичном $2s$-мерном кубе функцию $K(P, Q)$. Тогда, применяя к определителю (286) неравенство Адамара, получим

$$\left| K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ P_1, \ldots, P_\nu \end{pmatrix} \right| \leqslant \nu^{\frac{\nu}{2}} M^\nu. \tag{289}$$

Выберем $r = r(\lambda, M)$ настолько большим, чтобы выполнялись условия

$$r \geqslant (2e|\lambda|M)^2, \quad \frac{3}{2^r} \leqslant \frac{1}{2}|D(\lambda)| \tag{290}$$

и обозначим через $D_r(\lambda)$ сумму

$$D_r(\lambda) = 1 + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \int_{G_{s\nu}} K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ P_1, \ldots, P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \ldots dP_\nu.$$

Тогда, пользуясь равенством (285) и оценкой (289), получим

$$|D(\lambda) - D_r(\lambda)| = \left| \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \int_{G_{s\nu}} K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ P_1, \ldots, P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \ldots dP_\nu \right| \leqslant \sum_{\nu=r+1}^{\infty} \frac{(|\lambda|M)^\nu \nu^{\frac{\nu}{2}}}{\nu!}.$$

Легко видеть, что в силу первого из условий (290) отношение соседних членов полученного ряда не превосходит $\frac{1}{2}$:

$$\frac{(|\lambda|M)^{\nu+1}(\nu+1)^{\frac{\nu+1}{2}} \nu!}{(\nu+1)!\,(|\lambda|M)^\nu \nu^{\frac{\nu}{2}}} = \frac{|\lambda|M}{\sqrt{\nu+1}}\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\frac{\nu}{2}} \leqslant \frac{|\lambda|M\sqrt{e}}{\sqrt{r+2}} \leqslant \frac{1}{2\sqrt{e}} < \frac{1}{2}.$$

Следовательно, пользуясь тем, что $r! > r^r e^{-r}$ и снова применяя первое из условий (290), получим

$$|D(\lambda) - D_r(\lambda)| \leqslant \frac{(|\lambda| M)^{r+1}(r+1)^{\frac{r+1}{2}}}{(r+1)!} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{2^\nu} \leqslant$$

$$\leqslant 2\,\frac{(e|\lambda| M)^{r+1}}{(r+1)^{\frac{r+1}{2}}} \leqslant \frac{1}{2^r}. \qquad (291)$$

Воспользуемся теперь известным представлением определителя $\Delta(\lambda)$ в виде конечной суммы определителей $K\begin{pmatrix} M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \end{pmatrix}$:

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1, \ldots, k_\nu = 1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \end{pmatrix}.$$

Выберем $n > r$ и определим $\Delta_r(\lambda)$ равенством

$$\Delta_r(\lambda) = 1 + \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1, \ldots, k_\nu = 1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \end{pmatrix}.$$

Тогда тем же путем, как при выводе оценки (291), получим

$$|\Delta(\lambda) - \Delta_r(\lambda)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \sum_{\nu=r+1}^{n} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1, \ldots, k_\nu = 1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \end{pmatrix} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\nu=r+1}^{n} \frac{(|\lambda| M)^\nu \nu^{\frac{\nu}{2}}}{\nu!} \leqslant \frac{1}{2^r}. \qquad (292)$$

Оценим еще разность $D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda)$. Очевидно,

$$D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{r} \frac{(-1)^\nu}{\nu!} \lambda^\nu \left[\int_{G_{s\nu}} K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ P_1, \ldots, P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \ldots dP_\nu - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1, \ldots, k_\nu = 1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \end{pmatrix} \right]. \qquad (293)$$

Согласно второму замечанию к лемме 9 (стр. 40) из $K(P, Q) \in E_{2s}^\alpha$ следует, что $K(P, P) \in E_s^\alpha$. Будем рассматривать каждую из функций $K(P_i, P_j)$ $(i, j = 1, 2, \ldots, \nu)$ как функцию всех $s\nu$ переменных, соответствующих величинам $P_1, \ldots, P_\nu$. Тогда, пользуясь леммой 9, получим, что при любом ν из интервала $1 \leqslant \nu \leqslant r$ функция

$$K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ P_1, \ldots, P_\nu \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(P_1, P_1) \ldots K(P_1, P_\nu) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(P_\nu, P_1) \ldots K(P_\nu, P_\nu) \end{vmatrix}$$

принадлежит классу $E_{s\nu}^\alpha$. В частности, $K\begin{pmatrix} P_1 \\ P_1 \end{pmatrix} \in E_s^\alpha$ и следовательно, в силу (288) при $\nu = 1$ справедливо равенство

$$\int_{G_{s\nu}} K\begin{pmatrix} P_1, \ldots, P_\nu \\ P_1, \ldots, P_\nu \end{pmatrix} dP_1 \ldots dP_\nu =$$

$$= \frac{1}{n^\nu} \sum_{k_1, \ldots, k_\nu = 1}^{n} K\begin{pmatrix} M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \\ M_{k_1}, \ldots, M_{k_\nu} \end{pmatrix} + O(\varepsilon(n)).$$

Но тогда согласно лемме 35 это равенство будет справедливо и при любом ν из интервала $1 \leqslant \nu \leqslant r$. Отсюда в силу (293) получим

$$D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda) = O(\varepsilon(n))$$

и, следовательно, при $n > n_0$

$$|D_r(\lambda) - \Delta_r(\lambda)| \leqslant \frac{1}{2^r}.$$

Объединяя эту оценку с оценками (291) и (292), в силу выбора r получим утверждение леммы:

$$|D(\lambda)-\Delta(\lambda)|\leqslant\frac{3}{2^r}\leqslant\frac{1}{2}|D(\lambda)|,$$

$$|\Delta(\lambda)|\geqslant|D(\lambda)|-|D(\lambda)-\Delta(\lambda)|\geqslant\frac{1}{2}|D(\lambda)|.$$

Пусть $a_1, \ldots, a_s$ — оптимальные коэффициенты по модулю p, β — их индекс, $N=p$ и точки M_k определены равенством

$$M_k=\left(\left\{\frac{a_1k}{p}\right\}, \ldots, \left\{\frac{a_sk}{p}\right\}\right) \qquad (k=1, 2, \ldots, N).$$

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 32. *Пусть ядро и свободный член уравнения*

$$\varphi(P)=\lambda\int\limits_{G_s}K(P, Q)\,\varphi(Q)\,dQ+f(P) \qquad (294)$$

принадлежат соответственно классам E_{2s}^{α} *и* E_s^{α}. *Если знаменатель Фредгольма* $D(\lambda)\neq 0$, *то*

$$\varphi(P)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(P, M_k)\,\tilde{\varphi}(M_k)+f(P)+O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}N),$$

где величины $\tilde{\varphi}(M_k)$ *удовлетворяют системе алгебраических уравнений*

$$\tilde{\varphi}(M_j)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(M_j, M_k)\,\tilde{\varphi}(M_k)+f(M_j) \quad (j=1, 2, \ldots, N).$$

Доказательство. Покажем прежде всего, что решение уравнения (294) принадлежит классу E_s^{α}.

Действительно, обозначим соответственно через $C_1(m_1, \ldots, m_s)$ и $C_2(n_1, \ldots, n_{2s})$ коэффициенты Фурье функций $\varphi(x_1, \ldots, x_s)-f(x_1, \ldots, x_s)$ и $K(x_1, \ldots, x_s, y_1, \ldots, y_s)$. Из

(294) следует, что

$$C_1(m_1, \ldots, m_s)=$$
$$=\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1[\varphi(x_1, \ldots, x_s)-f(x_1, \ldots, x_s)]\times$$
$$\times e^{-2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}\,dx_1\ldots dx_s=$$
$$=\lambda\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1\varphi(y_1, \ldots, y_s)\Big[\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1K(x_1, \ldots, y_s)\times$$
$$\times e^{-2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}\,dx_1\ldots dx_s\Big]\,dy_1\ldots dy_s. \qquad (295)$$

Так как

$$C_2(m_1, \ldots, m_s, n_{s+1}, \ldots, n_{2s})=O\left((\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s\,\overline{n}_{s+1}\ldots\overline{n}_{2s})^{-\alpha}\right),$$

то, очевидно,

$$\left|\int\limits_0^1\ldots\int\limits_0^1K(x_1, \ldots, y_s)\,e^{-2\pi i(m_1x_1+\ldots+m_sx_s)}\,dx_1\ldots dx_s\right|=$$
$$=\Bigg|\sum_{n_{s+1}, \ldots, n_{2s}=-\infty}^{\infty}C_2(m_1, \ldots, m_s, n_{s+1}, \ldots, n_{2s})\times$$
$$\times e^{2\pi i(n_{s+1}y_1+\ldots+n_{2s}y_s)}\Bigg|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{C}{(\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{\alpha}}\sum_{n_{s+1}, \ldots, n_{2s}=-\infty}^{\infty}\frac{1}{(\overline{n}_{s+1}\ldots\overline{n}_{2s})^{\alpha}}=O((\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-\alpha}).$$

Пользуясь этой оценкой, из (295) получим

$$C_1(m_1, \ldots, m_s)=O\left((\overline{m}_1\ldots\overline{m}_s)^{-\alpha}\right).$$

Следовательно, $\varphi(P)-f(P)\in E_s^{\alpha}$ и, замечая, что $f(P)\in E_s^{\alpha}$, согласно лемме 9 получим

$$\varphi(P)=[\varphi(P)-f(P)]+f(P)\in E_s^{\alpha}.$$

Так как согласно лемме 8 (стр. 35) функция $K(P, Q)$, рассматриваемая как функция переменных интегрирования, также принадлежит классу E_s^{α}, то, пользуясь леммой 9, получим, что и функция $K(P, Q)\varphi(Q)$ принадлежит тому же классу. Но тогда в силу теоремы 12 (стр. 101) из (294) следует, что

$$\varphi(P)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(P,M_k)\varphi(M_k)+ f(P)+O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}N). \tag{296}$$

Выпишем это равенство для точек $P=M_j$ $(j=1, 2, \ldots, N)$:

$$\varphi(M_j)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(M_j, M_k)\varphi(M_k)+ f(M_j)+O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}N).$$

Вычитая отсюда равенства

$$\tilde{\varphi}(M_j)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(M_j,M_k)\tilde{\varphi}(M_k)+f(M_j),$$

после замены N на n и введения обозначений

$$z_j=\varphi(M_j)-\tilde{\varphi}(M_j),\quad a_{jk}=\frac{-\lambda}{n}K(M_j, M_k),$$
$$b_j=O(n^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}n) \tag{297}$$

получим систему линейных уравнений

$$z_j+\sum_{k=1}^{n}a_{jk}z_k=b_j \qquad (j=1, 2, \ldots, n).$$

Введем обозначения

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & 1+a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & 1+a_{nn}\end{vmatrix},$$

$$\Delta_k=\begin{vmatrix} 1+a_{11}, \ldots, a_{1k-1} & b_1 & a_{1k+1} & \ldots & a_{1n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{n1} \quad \ldots \quad a_{nk-1} & b_n & a_{nk+1} & \ldots & 1+a_{nn}\end{vmatrix}.$$

Тогда, очевидно,

$$z_k=\frac{\Delta_k}{\Delta} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Так как из (287) в силу определения величин a_{jk} следует, что определитель $\Delta(\lambda)$ совпадает с Δ, то, пользуясь леммой 37, получим

$$|\Delta|=|\Delta(\lambda)|>\frac{1}{2}|D(\lambda)|. \tag{298}$$

Разложим определитель Δ_k по элементам k-го столбца. Тогда, обозначая через B_k алгебраическое дополнение элемента b_k, получим

$$\Delta_k=\sum_{j=1}^{n}b_jB_j.$$

Определители вида B_j были рассмотрены в лемме 36. Так как согласно (297)

$$|a_{jk}|=\left|-\frac{\lambda}{n}K(M_j, M_k)\right|\leqslant\frac{|\lambda|M}{n},$$

где M — константа, ограничивающая модуль функции $K(P, Q)$, то, выбирая в лемме 36 $\gamma=|\lambda|M$ и пользуясь третьим из равенств (297), получим

$$|\Delta_k|\leqslant|b_kB_k|+\sum_{j=1}^{k-1}|b_jB_j|+\sum_{j=k+1}^{n}|b_jB_j|\leqslant$$
$$\leqslant\gamma_2|b_k|+\frac{\gamma_1}{n}\left(\sum_{j=1}^{k-1}|b_j|+\sum_{j=k+1}^{n}|b_j|\right)=O(n^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}n).$$

Отсюда в силу (298) следует, что

$$z_k=\frac{\Delta_k}{\Delta}=O(n^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}n).$$

Заменяя здесь n на N и пользуясь первым из равенств (297), получим

$$\varphi(M_k)=\tilde{\varphi}(M_k)+z_k=\tilde{\varphi}(M_k)+O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}N).$$

Подставляя значения $\varphi(M_k)$ в равенство (296), получим утверждение теоремы:

$$\varphi(P)=\frac{\lambda}{N}\sum_{k=1}^{N}K(P, M_k)\tilde{\varphi}(M_k)+f(P)+O(N^{-\alpha}\ln^{\alpha\beta}N).$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Бахвалов Н. С., О приближенном вычислении кратных интегралов, Вестн. Моск. ун-та, № 4 (1959), 3—18.

[2] Бахвалов Н. С., Оценка в среднем остаточного члена квадратурных формул, Ж. вычисл. матем. и матем. физики 1, № 1 (1961), 64—77.

[3] Бахвалов Н. С., Коробов Н. М., Ченцов Н. Н., Применение теоретикочисловых сеток к задачам приближенного анализа. Доклад на IV математическом съезде.

[4] Брушлинская О. В., Практическое применение метода оптимальных коэффициентов для вычисления кратных интегралов. Вопросы вычисл. матем. и вычисл. техн., Машгиз, 1963.

[5] Ван Юань (Wang Yuan), A note of interpolation of certain class of functions, Sci. sinica, vol. 10, № 6 (1961), 632—636.

[6] Ван Юань (Wang Yuan), О методах приближенного интегрирования, Тр. ин-та матем. Акад. наук КНР (1962).

[7] Вейль А. (Weil A.), On some exponential sums, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 34 (1948).

[8] Вейль Г. (Weyl H.), Über die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins, Math. Ann. 77 (1916).

[9] Виноградов И. М., Избранные труды, Изд-во АН СССР (1952).

[10] Гельфанд И. М., Фейнберг С. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., Применение метода случайных испытаний (метода Монте-Карло) для решения кинетического уравнения, Тр. II Международн. конференции по мирному использованию атомной энергии (Женева, 1958, Доклад 2141), Атомиздат, 1959, т. 2, 628—633.

[11] Гельфанд И. М., Фролов А. С., Ченцов Н. Н., Вычисление континуальных интегралов методом Монте-Карло, Изв. высш. уч. завед., сер. Математика, № 5 (6), 1958, 32—45.

[12] Главка Е. (Hlawka E.), Monatshefte für Math. 66, 2 (1962), 140—151.

[13] Коробов Н. М., Приближенное вычисление кратных интегралов с помощью методов теории чисел, Докл. АН СССР 115, № 6 (1957), 1062—1065.

[14] Коробов Н. М., О приближенном вычислении кратных интегралов, Докл. АН СССР 124, № 6 (1959), 1207—1210.

[15] Коробов Н. М., О приближенном решении интегральных уравнений, Докл. АН СССР, 128, № 2 (1959), 235—238.

[16] Коробов Н. М., О некоторых теоретикочисловых методах приближенного вычисления кратных интегралов (резюме доклада на Моск. матем. об-ве), Успехи матем. наук 14, 2 (86), (1959), 227—230.

[17] Коробов Н. М., Вычисление кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов, Вестн. Моск. ун-та, № 4 (1959), 19—25.

[18] Коробов Н. М., Свойства и вычисление оптимальных коэффициентов, Докл. АН СССР 132, № 5 (1960), 1009—1012.

[19] Коробов Н. М., Применение теоретикочисловых сеток в интегральных уравнениях и интерполяционных формулах, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 60 (1961), 195—210.

[20] Коробов Н. М., О применении теоретикочисловых сеток, Сб. «Вычислительные методы и программир.», Изд-во МГУ, 1962, 80—102.

[21] Коробов Н. М., О теоретикочисловых методах в приближенном анализе, Вопросы вычисл. матем. и вычисл. техн., Машгиз, 1963.

[22] Коробов Н. М., О некоторых задачах теории чисел, возникающих из потребностей приближенного анализа, Сообщение на IV математическом съезде.

[23] Рот К. (Roth K. F.), On irregularites distribution, Mathematika, № 1 (1954), 73—79.

[24] Рябенький В. С., О таблицах и интерполяции функций из некоторого класса, Докл. АН СССР 131, № 5 (1960), 1025—1027.

[25] Рябенький В. С., Об одном способе получения разностных схем и об использовании теоретикочисловых сеток для решения задачи Коши методом конечных разностей, Тр. матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 60 (1961), 232—237.

[26] Рябенький В. С., Об экономном выборе сетки для табулирования функций, Сообщение на IV математическом съезде.

[27] Салтыков А. И., Таблицы для вычисления кратных интегралов методом оптимальных коэффициентов, Ж. вычисл. матем. и матем. физики, № 1 (1963).

[28] Смоляк С. А., ε-энтропия классов $E_s^{\alpha,k}(B)$ и $W_s^{\alpha}(B)$ в метрике L_2, Докл. АН СССР 131, № 1 (1960), 1028—1031.

[29] Смоляк С. А., Интерполяционные и квадратурные формулы на классах W_s^{α} и E_s^{α}, Докл. АН СССР 131, № 5 (1960), 1028—1031.

[30] Соболь И. М., Точная оценка погрешности многомерных квадратурных формул для функций класса S_p, Докл. АН СССР 132, № 5 (1960), 1061—1041.

[31] Солодов В. М., О вычислении кратных интегралов, Докл. АН СССР 127, № 4 (1959), 753—756.

[32] Хасельгров (Haselgrove), Math. of Comp., vol. 15, № 76 (1961), 323—337.

[33] Холтон (Halton J. H.), On the efficiency of certain quasirandom sequences of points in evaluating multidimensional integrals, Numeriche Math. 27, № 2 (1960), 84—90.

[34] Хуа Ло-ген и Ван Юань (Hua Loo-keng and Wang Yuan), Sci. Record. vol. 4, № 1 (1960).

[35] Ченцов Н. Н., О квадратурных формулах для функций бесконечно большого числа переменных, Ж. вычисл. матем. и матем. физики I, № 3 (1961), 418—424.

[36] Шарыгин И. Ф., О применении теоретикочисловых методов интегрирования в случае непериодических функций, Докл. АН СССР 132, № 1 (1960), 71—74.

[37] Шахов Ю. Н., О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций, Докл. АН СССР 128, № 6 (1959), 1136—1139.

[38] Шахов Ю. Н., О приближенном решении уравнений Вольтерра II рода методом итераций, Докл. АН СССР 136, № 6 (1961), 1302—1305.

[39] Шахов Ю. Н., О численном решении многомерных линейных уравнений Вольтерра II рода методом итераций, Сообщение на IV математическом съезде.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ТАБЛИЦА ОПТИМАЛЬНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Таблица вычислена А. И. Салтыковым [27] в Вычислительном центре Сибирского отделения АН СССР. Вычисления были проведены с помощью функций $H(z)$ и $\tilde{H}(z)$ (см. теоремы 23, стр. 148 и 24, стр. 154).

Для составного $p=p_1p_2$, где p_1 и p_2 — простые, оптимальные коэффициенты, были умножены на корень сравнения $(p_1+p_2)x_1 \equiv 1 \pmod{p_1p_2}$, так что коэффициент a_1 стал всюду равным 1. Поэтому в таблице опущено значение $a_1=1$ и помещены лишь значения $a_2, \ldots, a_s$.

Первая часть таблицы содержит s-кратные оптимальные коэффициенты для $3 \leqslant s \leqslant 6$ по некоторым простым модулям p, лежащим в пределах от 100 до 10 000. Вторая часть содержит оптимальные коэффициенты для $3 \leqslant s \leqslant 10$ по составным модулям $p=p_1p_2$, лежащим в пределах от 15 000 до 155 000.

Для простых p в таблице помещено по два равноправных набора оптимальных коэффициентов, каждому из которых соответствует одно и то же значение величины $H(a)$. Для составных $p=p_1p_2$ таблица содержит по одному набору оптимальных коэффициентов. При этом для каждого набора указаны величины p_1, p_2, a, b и $\tilde{H}(b)$.

Величины $H(a)-1$ и $\tilde{H}(b)-1$ позволяют судить о качестве оптимальных коэффициентов: чем ближе эти величины к нулю, тем, вообще говоря, точнее соответствующие квадратурные формулы.

При $s=2$ в качестве оптимальных коэффициентов по модулю $p=Q_n$ можно, например (см. стр. 148), взять числа $a_1=1$, $a_2=Q_{n-1}$, где Q_n — любой член последовательности Фибоначчи.

p	$s=3$			$s=4$			
	$H(a)$	$a_2=a$	a_3	$H(a)$	$a_2=a$	a_3	a_4
101	1,0703	40	85				
101	1,0703	48	82				
199	1,0214	30	104				
199	1,0214	73	155				
307	1,0114	75	99	1,0906	42	229	101
307	1,0114	131	276	1,0906	95	122	231
523	1,00454	78	331	1,0412	178	304	243
523	1,00454	114	444	1,0412	238	160	424
701	1,00319	215	660	1,0281	82	415	382
701	1,00319	313	530	1,0281	265	125	178
1069	1,00142	136	323	1,0150	71	765	865
1069	1,00142	338	930	1,0150	271	749	938
1543	1,00075	355	1042	1,00837	128	954	215
1543	1,00075	552	733	1,00837	663	1357	122
2129	1,00044	359	1141	1,00500	766	1281	1906
2129	1,00044	937	821	1,00500	970	2011	506
3001	1,00025	276	1151	1,00303	174	266	1269
3001	1,00025	772	1786	1,00303	1466	440	2826
4001	1,00015	722	1154	1,00200	113	766	2537
4001	1,00015	1934	3422	1,00200	956	1708	440
5003	1,000105	1476	2271	1,001480	792	1889	191
5003	1,000105	1949	1324	1,001480	2053	2283	4191
6007	1,000070	592	2058	1,001009	1351	5080	3086
6007	1,000070	2831	1223	1,001009	2610	162	2330
8191	1,000044	739	5515	1,000622	2488	5939	7859
8191	1,000044	3303	7588	1,000622	3842	782	6538
10007	1,000033	544	5733	1,000486	1206	3421	2842
10007	1,000033	3072	583	1,000486	1784	430	6588

p	$s=5$					$s=6$					
	$H(a)$	$a_2=a$	a_3	a_4	a_5	$H(a)$	$a_2=a$	a_3	a_4	a_5	a_6
1069	1,0962	63	762	970	177						
1069	1,0962	526	874	54	610						
1543	1,0580	58	278	694	134						
1543	1,0580	133	716	1105	380						
2129	1,0383	618	833	1705	1964	1,186	41	1681	793	578	279
2129	1,0383	720	1053	236	1729	1,186	727	537	792	954	1633
3001	1,0237	408	1409	1681	1620	1,123	233	271	122	1417	51
3001	1,0237	890	2837	1089	2888	1,123	322	1650	123	593	1883
4001	1,0154	1534	568	3095	2544	1,086	1751	1235	1945	844	1475
4001	1,0154	1651	1120	658	2087	1,086	1780	3609	2415	1626	1557
5003	1,0114	840	177	3593	1311	1,063	2037	1882	1336	4803	2846
5003	1,0114	1352	1809	4304	519	1,063	2208	2342	3037	1676	3391
6007	1,0085	509	780	558	1693	1,050	312	1232	5943	4060	5250
6007	1,0085	1487	593	4769	3243	1,050	1521	746	5350	3872	2452
8191	1,0055	1386	4302	7715	3735	1,034	1632	1349	6380	1399	6070
8191	1,0055	2228	238	6040	7498	1,034	3699	3631	6020	4842	5032
10007	1,0042	198	9183	6967	8507	1,027	2240	4093	1908	931	3984
10007	1,0042	1870	4457	8766	954	1,027	2399	1176	9257	2010	8623

$p=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=3$					$s=4$					
			a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a_4
20039	691	29	176	20	1,000016	5704	12319	320	6	1,000276	19668	17407	14600
28117	907	31	402	12	1,000008	19449	5600	316	3	1,000108	17549	1900	24455
39029	1259	31	535	5	1,000005	10607	26871	483	9	1,000077	30699	34367	605
57091	1543	37	355	14	1,000002	48188	21101	128	13	1,000056	52590	48787	38790
82001	1907	43	275	10	1,000001	21252	67997	60	37	1,000031	57270	58903	17672
100063	2129	47	359	4	1,000001	53584	37334	766	5	1,000019	92313	24700	95582

$p=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=5$							$s=6$							
			a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a_4	a_5	a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
15019	653	23	193	15	1,0032	10641	2640	6710	784	254	3	1,0197	8743	8358	6559	2795	772
20039	691	29	271	17	1,0022	11327	11251	12076	18677	29	18	1,0123	5557	150	11951	2461	9179
33139	1069	31	63	17	1,0011	32133	17866	21281	32247	63	8	1,0069	18236	1831	19143	5522	22910
51097	1381	37	480	13	1,0006	44672	45346	7044	14242	264	15	1,0031	9931	7551	29682	44446	17340
71053	1733	41	828	12	1,0003	33755	65170	12470	6878	680	11	1,0026	18010	3155	50203	6605	13328
100063	2129	47	618	31	1,0002	90036	77477	27253	6222	727	20	1,0015	43307	15440	39114	43534	39955

$p=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=7$								
			a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
15019	653	23	32	19	1,0835	12439	2983	8607	7041	7210	6741
18101	787	23	173	7	1,0730	17487	14976	44	9186	7308	1936
24041	829	29	175	6	1,0463	1833	18190	21444	23858	1135	12929
33139	1069	31	159	16	1,0339	7642	9246	5584	23035	32241	30396
46213	1249	37	430	12	1,0210	37900	17534	41873	32280	15251	26909
57091	1543	37	82	14	1,0168	35571	45299	51436	34679	1472	8065
71053	1733	41	680	17	1,0131	31874	36082	13810	6605	68784	9848
100063	2129	47	718	30	1,0085	39040	62047	89839	6347	30892	64404

$p=p_1p_2$	p_1	p_2	$s=8$									
			a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8
24041	829	29	32	12	1,1999	17441	21749	5411	12326	3144	21024	6252
33139	1069	31	313	17	1,1345	3520	29553	3239	1464	16735	19197	3019
46213	1249	37	351	19	1,0900	5347	30775	35645	11403	16894	32016	16600
57091	1543	37	438	21	1,0688	17411	46802	9779	16807	35302	1416	47755
71053	1733	41	104	38	1,0557	60759	26413	24409	48215	51048	19876	29096
100063	2129	47	86	20	1,0359	4344	58492	29291	60031	10486	22519	60985

$s = 9$

$p=p_1p_2$	p_1	p_2	a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9
33139	1069	31	68	6	1,4915	68	4624	16181	6721	26221	26661	23442	3384
46213	1249	37	128	28	1,3262	8871	40115	20065	30352	15654	42782	17966	33962
57091	1543	37	117	11	1,2664	20176	12146	23124	2172	33475	5070	42339	36122
71053	1733	41	459	9	1,2021	26454	13119	27174	17795	22805	43500	45665	49857
100063	2129	47	636	17	1,1136	70893	53211	12386	27873	56528	16417	17628	14997
159053	3001	53	108	26	1,0846	60128	101694	23300	43576	57659	42111	85501	93062

$s = 10$

$p=p_1p_2$	p_1	p_2	a	b	$\tilde{H}(b)$	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}
85633	4507	19	1611	9	1,614	37667	35345	3864	54821	74078	30354	57935	51906	56279
103661	4507	23	1611	3	1,499	45681	57831	80987	9718	51556	55377	37354	4353	27595
115069	5003	23	431	12	1,431	65470	650	95039	77293	98366	70366	74605	55507	49201
130703	4507	29	1611	10	1,377	64709	53373	17385	5244	29008	52889	66949	51906	110363
145087	5003	29	431	16	1,333	55464	120722	105045	102309	58342	5327	59596	60510	119243
155093	5003	31	431	27	1,316	90485	20662	110048	102308	148396	125399	124635	10480	44198

УКАЗАТЕЛЬ ОПРЕДЕЛЕНИЙ, НЕКОТОРЫХ ЛЕММ И ОСНОВНЫХ ТЕОРЕМ