

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ

И

ИНТЕГРАЛЬНОЕ

ИЗЧИСЛЕНИЕ.

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНИЕ УРОКОВЪ
О
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОМЪ
И
ИНТЕГРАЛЬНОМЪ ИЗЧИСЛЕНИИ

ПРЕПОДАВАЕМЫХЪ

ВЪ

Королевской Политехнической школы

Г. А. Л. КОШИ,

Членомъ Парижской Академіи Наукъ и Кавалеромъ ордена Почетнаго Легиона.

Перевелъ съ Французскаго

Императорской Академіи Наукъ Экстраординарный Академикъ и Декпоръ въ Наукахъ

В. БУНЯКОВСКІЙ.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ.
Печатано при Императорской Академіи Наукъ,
1 8 3 1.

Печатаю съ одобренія Академіи. 16 Іюня 1851 г.

Павелъ Фуссъ

НЕПРЕРЫВНЫЙ СЕКРЕТАРЬ.

ЕГО СІЯТЕЛЬСТВУ

ГРАФУ АЛЕКСАНДРУ АЛЕКСАНДРОВИЧУ

ТОРМАСОВУ,

въ знакъ искренней дружбы и признательности

посвящаетъ Переводчикъ.

О Т Ъ П Е Р Е В О Д Ч И К А .

Издавая нынѣ книгу: *Résumé des leçons sur le calcul infinitésimal*, соч. Коши, переведенную мною на Русскій языкъ нѣсколько лѣтъ тому назадъ, я имѣлъ въ виду познакомить моихъ соотечественниковъ съ произведеніемъ автора, коего труды на ученомъ поприщѣ, уже ознаменованы важными открытіями въ Анализѣ. Г. Коши, въ изложеніи правилъ дифференціального и интегрального изчисленія, уклоняется отъ способовъ предшествовавшихъ ему писателей, и почти всегда преимущественно оспариваетъ на его споры. По сей-то причинѣ, да будетъ мнѣ дозволено изъявить желаніе, чѣмъ сей переводъ былъ принятъ за руководство въ Учебныхъ Заведеніяхъ.

Я знаю, что Г. Коши издалъ новѣйшее сочиненіе о дифференціальномъ изчисленіи; но въ составъ онаго вовсе не входило интегральное. Я было намѣревался поручить кому-либо перевести подъ моимъ руководствомъ сію книгу, и замѣнить первые 20^{ти} уроковъ симъ новымъ переводомъ. Но дабы оный могъ вполне соотвѣтствовать интегральному изчисленію, надлежало-бы сдѣлать значительныя измѣненія въ текстъ сочинителя, что, по моему мнѣнію, переводчикъ не долженъ позволять себѣ ни въ какомъ случаѣ. Къ тому жь, сіе новое сочиненіе не содержитъ въ себѣ никакихъ значительныхъ улучшеній противъ перваго.

Если читатели удостоятъ сію книгу своего вниманія; то я обязуюсь издать продолженіе интегрального изчисленія, коего переводъ будетъ сдѣланъ подъ моимъ надзоромъ. Сіе продолженіе не было еще издано на Французскомъ языкѣ, а находясь только въ рукописи, которую, по дружескимъ сношеніямъ, я успѣлъ пріобрѣсти.

ПРЕДУВѢДОМЛЕНИЕ ОТЪ СОЧИНИТЕЛЯ.

Сіе сочиненіе, составленное по порученію Ученаго Совѣща Королевской Политехнической школы, заключаесть въ себѣ краткое изложеніе члпанныхъ мною въ сей школѣ лекцій о дифференціальномъ и интегральномъ изчисленіи. Все сочиненіе будетъ состоять изъ двухъ частей, сообразно съ раздѣленіемъ курса, продолжающагося два года. Нынѣ издаю первую часть, содержащую сорокъ уроковъ; первые двадцать составляютъ дифференціальное изчисленіе, а послѣдніе — интегральное. Излагаемые здѣсь способы, во многомъ различаются отъ тѣхъ, которые приняты въ другихъ сочиненіяхъ о томъ же предметѣ.

Главною моею цѣлью было, соединить строгость въ доказательствѣхъ (которую всегда старался сохранить въ моемъ *Cours d'Analyse*) съ простотою, происходящею отъ непосредственнаго разсуживанія безконечно-малыхъ количествъ. По сей-то причинѣ, я вовсе не употреблялъ разложенія функций въ безконечные ряды, когда сіи ряды были расходящіеся; также, я отношу Тейлорову формулу къ интегральному изчисленію; ибо сія формула вообще справедлива только въ такомъ случаѣ, когда рядъ входящій въ оную, содержитъ конечное число членовъ, съ дополнительнымъ определеннымъ интеграломъ. Я знаю, что знаменитый авторъ *Аналитической Механики*, принялъ сію формулу за основаніе своей теоріи *производныхъ функций*. Но не смотря на глубокое уваженіе, должное имени сего великаго мужа, почти всѣ математикн признають нынѣ, что употребленіе рядовъ расходящихся, можетъ, во многихъ случаяхъ, привести къ выводамъ ошибочнымъ; прибавлю даже, что разлагая нѣкоторыя функции посредствомъ Тейлоровой теоремы, находимъ ряды, которые, хотя и кажутся сходящимися, однако же не выражаютъ разлагаемой функции (смот. конецъ 38го урока). Впрочемъ, надѣюсь, что читатели сей книги, удостоверятся въ томъ, что правила, относящіяся къ дифференціальному изчи-

IV

сленію, и главныя приложенія онаго, могутъ бытъ изложены безъ пособія безконечныхъ рядовъ.

Я счёлъ за нужное, доказавъ въ интегральномъ изчисленіи существованіе *интеграловъ* или *первообразныхъ функций*, прежде нежели изслѣдовалъ ихъ различныя свойства. Для сего, надлежало дать понятіе объ *интегралахъ взятыхъ между данными предѣлами* или объ *опредѣленныхъ интегралахъ*. Но какъ сіи послѣдніе могутъ имѣть, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, величины безконечныя, или неопредѣленныя: по необходимо было разыскать условія, при которыхъ сіи самыя интегралы имѣютъ одну величину, конечную, и совершенно опредѣленную. Прослѣдѣвшій способъ для разрѣшенія сего вопроса, состоитъ въ разсмаприваніи *близкопредѣльныхъ опредѣленныхъ интеграловъ*, о которыхъ говорено въ 25^{мъ} урокъ. Также, между безконечнымъ числомъ значеній интеграла, коего величина неопредѣленна, существуетъ одна примѣчательная величина, которую я назвалъ *главною величиною*. Разсмаприваніе близкопредѣльныхъ интеграловъ и главныхъ величинъ интеграловъ, весьма полезно при рѣшеніи многихъ задачъ. Оно приводитъ къ многоразличнымъ формуламъ, посредствомъ которыхъ можно вывести величины разныхъ опредѣленныхъ интеграловъ, что уже показано мною въ разсужденіи предсавленномъ въ Инспитиуи въ 1814 году. Въ 34^{мъ} и 39^{мъ} урокахъ помѣщена подобная формула, которая и приложена къ разысканію величинъ многихъ опредѣленныхъ интеграловъ, изъ коихъ нѣкоторыя были уже извѣсны.

О Г Л А В Л Е Н И Е .

	Стран.
<i>Отъ перевода</i>	I
<i>Предувѣдомленіе отъ сочинителя</i>	III
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНИЕ.	
УРОКЪ 1-й. <i>О переменныхъ величинахъ, ихъ предѣлахъ, и величинахъ безконечно-малыхъ</i>	3
УРОКЪ 2-й. <i>О непрерывныхъ и прерывныхъ функціяхъ. Геометрическое изображеніе непрерывныхъ функцій</i>	8
УРОКЪ 3-й. <i>О производныхъ функціяхъ одной переменной</i>	13
УРОКЪ 4-й. <i>Дифференцирование функцій одной переменной</i>	18
УРОКЪ 5-й. <i>Дифференціалъ суммы нѣсколькихъ функцій равенъ суммѣ ихъ дифференціаловъ. Слѣдствія выводимыя изъ сего правила. Дифференціалы мнимыхъ функцій</i>	23
УРОКЪ 6-й. <i>Употребленіе дифференціаловъ и производныхъ функцій при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ. Наибольшая и наименьшая величина функцій одной измѣняемой. Величины дробей представляющихся въ видѣ $\frac{0}{0}$</i>	28
УРОКЪ 7-й. <i>О выраженіяхъ представляющихся въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0, и прог. Взаимная зависимость между отношеніемъ конечныхъ разностей и производной функціей</i>	34
УРОКЪ 8-й. <i>Дифференціалы функцій нѣсколькихъ переменныхъ. Частныя производныя функціи и частныя дифференціалы</i>	39
УРОКЪ 9-й. <i>Объ употребленіи частныхъ производныхъ при дифференцировании сложныхъ функцій. Дифференціалы неявныхъ функцій</i>	44

VI

Стран.

Урокъ 10-й. Теорема однородныхъ функций. Наибольшія и наименьшія величины функций нѣсколькихъ переменныхъ	49
Урокъ 11-й. Объ употребленіи неопредѣленныхъ множителей при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ	55
Урокъ 12-й. Дифференціалы и производныя функции разныхъ порядковъ выраженій заключающихъ одну переменную. Объ измѣненіи переменнаго независимаго количества	61
Урокъ 13-й. Дифференціалы разныхъ порядковъ функций многихъ переменныхъ	67
Урокъ 14-й. Способы облегчающіе изысканіе полныхъ дифференціаловъ функций многихъ переменныхъ. Символическія выраженія для сихъ дифференціаловъ	73
Урокъ 15-й. Объ отношеніяхъ существующихъ между функциями одной переменной, ихъ производными и дифференціалами разныхъ порядковъ. Объ употребленіи сихъ дифференціаловъ при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ	79
Урокъ 16-й. Объ употребленіи дифференціаловъ разныхъ порядковъ при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функций многихъ переменныхъ	84
Урокъ 17-й. Объ условіяхъ, кои должны быть выполнены для того, чтобы полный дифференціалъ не перемѣнялъ знака, тогда, какъ измѣняются величины дифференціаловъ переменныхъ независимыхъ количествъ	90
Урокъ 18-й. Дифференціалы какой-либо функции многихъ переменныхъ величинъ, изъ коихъ каждая есть линейная функция другихъ переменныхъ независимыхъ количествъ. Разложеніе цѣлыхъ функций на существенные множители первой и второй степени	96
Урокъ 19-й. Объ употребленіи производныхъ функций и дифференціаловъ разныхъ порядковъ при разложеніи функций	103

УРОКЪ 20-й. *Разложеніе раціональныхъ (соизмѣримыхъ) дробей* 108

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

УРОКЪ 21-й. *Объ опредѣленныхъ (междупредѣльныхъ или частныхъ) интегралахъ* 113

УРОКЪ 22-й. *Формулы опредѣляющія тогныя, или приближенныя величины междупредѣльныхъ интеграловъ* . . 119

УРОКЪ 23-й. *Разложеніе опредѣленнаго интеграла на нѣсколько другихъ. Мнимыя опредѣленные интегралы. Геометрическое значеніе вещественныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Разложеніе функціи находящейся подъ знакомъ f на два множителя, изъ коихъ одинъ удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ* . 125

УРОКЪ 24-й. *О частныхъ интегралахъ, величины коихъ суть или безконечныя, или неопредѣленныя. Главныя величины неопредѣленныхъ интеграловъ* 130

УРОКЪ 25-й. *О близкпредѣльныхъ частныхъ интегралахъ* . . 135

УРОКЪ 26-й. *О неопредѣленныхъ интегралахъ* 141

УРОКЪ 27-й. *Различныя свойства неопредѣленныхъ интеграловъ. Способы служащіе для опредѣленія оныхъ* . . . 147

УРОКЪ 28-й. *О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихся въ себѣ алгебрическія функціи* 153

УРОКЪ 29-й. *Объ интегрированіи и приведеніи въ простѣйшій видъ двучленныхъ дифференціаловъ; о нѣкоторыхъ другихъ дифференціальныхъ выраженіяхъ такого же рода* 159

УРОКЪ 30-й. *О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихся въ себѣ неопредѣленно-степенныя, логарифмическія, тригонометрическія и круговыя функціи* 164

УРОКЪ 31-й. *О разысканіи величинъ, и о приведеніи въ простѣйшій видъ неопредѣленныхъ интеграловъ, въ коихъ функція находящаяся подъ знакомъ f есть произведеніе двухъ множителей равныхъ нѣкоторымъ степенямъ синуса и косинуса переменной* . . . 170

VIII

Стран.

УРОКЪ 32-й.	<i>Переходъ отъ неопредѣленныхъ интеграловъ къ опредѣленнымъ</i>	176
УРОКЪ 33-й.	<i>Дифференцирование и интегрирование подъ знакомъ f. Интегрирование дифференціальныхъ выраженій, заключающихъ въ себѣ нѣсколько перемѣнныхъ независимыхъ величинъ</i>	182
УРОКЪ 34-й.	<i>Сравненіе обоихъ родовъ простыхъ интеграловъ, получаемыхъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ чрезъ двойное интегрирование</i>	188
УРОКЪ 35-й.	<i>Дифференцирование опредѣленныхъ интеграловъ относительно къ перемѣнной входящей въ функцію находящуюся подъ знакомъ f, между предѣлами интегрированія. Интегралы высшихъ порядковъ для функцій содержащихъ одну перемѣнную</i>	194
УРОКЪ 36-й.	<i>Преобразование какихъ нибудь функцій перемѣнной x или $x + h$ въ цѣлыя функціи перемѣнной x или h, съ дополнительнымъ опредѣленнымъ Интеграломъ. Другія выраженія для сихъ самыхъ Интеграловъ</i>	199
УРОКЪ 37-й.	<i>Тейлорова и Маклоренова теоремы. Разпространеніе сихъ теоремъ на функціи нѣсколькихъ перемѣнныхъ</i>	204
УРОКЪ 38-й.	<i>Правила относящіяся къ сходящимся рядамъ. Приложение сихъ правилъ къ Маклореновой теоремѣ</i>	209
УРОКЪ 39-й.	<i>О неопредѣленно-степенныхъ и логарифмическихъ мнимыхъ выраженіяхъ. Употребленіе сихъ выраженій при разысканіи величинъ опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ Интеграловъ</i>	215
УРОКЪ 40-й.	<i>Интегрирование посредствомъ рядовъ</i>	221
	<i>Прибавленіе соизнителя</i>	227
	<i>Примѣганія переводчика</i>	241

КРАТКОЕ ИЗЛОЖЕНІЕ УРОКОВЪ

преподаваемыхъ

въ Королевской политехнической школѣ

Г. А. Л. КОШИ.

ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНІЕ.

УРОКЪ ПЕРВЫЙ.

*О переменныхъ величинахъ, ихъ предѣлахъ, и величинахъ
безконечно - малыхъ.*

Переменнымъ или измѣняемымъ количествомъ называется такое количество, которое послѣдовательно переходитъ чрезъ многія величины различныя между собою. Постоянное же количество есть то, коего величина остается одна и та же. Если величины, приписываемыя какому либо переменному количеству приближаются болѣе и болѣе къ величинѣ определенной, такъ что наконецъ различаются отъ оной столь мало сколько угодно, то сія послѣдняя величина называется *предѣломъ* всѣхъ прочихъ. Такъ, на примѣръ, площадь круга есть предѣлъ, къ коему площади вписанныхъ правильныхъ многоугольниковъ приближаются шѣмъ ближе, чѣмъ болѣе увеличивается число ихъ сторонъ; равнымъ образомъ, радіусы векторы проведенные изъ центра Гиперболы къ ея почкамъ дуаляющимся болѣе и болѣе отъ сего центра, составляютъ

съ осью x углы имѣющіе предѣломъ уголь, соспавленный ассимпшою съ шою же осью, и проч. Для крайности мы будемъ означать предѣль, къ кошорому спремимся данная переменная величина, поспавляя передь оной буквы *пр.*

Иногда предѣлы, къ коимъ приближаются переменныя выраженія предспавляющія въ неопредѣленномъ видѣ; не смотря на сіе, онѣ имѣють однако же совершенно опредѣленныя величины, кошорыя можно найши посредствомъ различныхъ приемовъ. Такъ, напримѣръ, предѣлы къ коимъ безпреспанно приближаются два переменныя выраженія

$$\frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}},$$

по мѣрѣ того, какъ α спремимся къ нулю, предспавляющія въ неопредѣленныхъ видахъ $\frac{0}{0}$, $1^{\pm\infty}$; не смотря на сіе, оба сіи предѣла имѣють величины опредѣленныя, кошорыя можно вычислишь слѣдующимъ образомъ:

Очевидно, что для весьма малыхъ численныхъ величинъ α , будемъ имѣть слѣдующія неравенства

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} > \frac{\sin \alpha}{\alpha} > \frac{\sin \alpha}{\text{tang } \alpha}$$

Слѣдовательно отношеніе $\frac{\sin \alpha}{\alpha}$, заключающееся всегда между двумя количесвами $\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha} = 1$, и $\frac{\sin \alpha}{\text{tang } \alpha} = \cos \alpha$, изъ коихъ первое служить предѣломъ вшорому, будетъ само имѣть предѣломъ единицу.

Теперь будемъ искашь предѣль къ коему спремимся выраженіе $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$, по мѣрѣ того, какъ α приближается къ нулю. Предполагая сперва что α есть количесво положитель-

ное и вида $\frac{1}{m}$, гдѣ m означаетъ число цѣлое, переменное, и могущее сдѣлаться безконечно великимъ, получаемъ

$$\begin{aligned} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} &= (1 + \frac{1}{m})^m \\ &= 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} (1 - \frac{1}{m}) + \frac{1}{1.2.3} (1 - \frac{1}{m}) (1 - \frac{2}{m}) + \dots \\ &\dots + \frac{1}{1.2.3 \dots m} (1 - \frac{1}{m}) (1 - \frac{2}{m}) \dots (1 - \frac{m-1}{m}). \end{aligned}$$

Но такъ какъ во второй части сего уравненія, всѣ члены заключающіе количество m суть положительныя, и при томъ же величина каждаго члена, равно какъ и число членовъ увеличивается вмѣстѣ съ увеличеніемъ количества m , по очевидно, что и выраженіе $(1 + \frac{1}{m})^m$ возрастаетъ будетъ вмѣстѣ съ цѣлымъ числомъ m , заключаясь всегда между двумя предѣлами

$$1 + \frac{1}{1} = 2$$

$$\text{и } 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2.2} + \frac{1}{2.2.2} + \text{и проч.} \dots = 1 + 1 + 1 = 3;$$

такъ что, для возрастающихъ величинъ m , оно приближается поспешенно къ нѣкоторому предѣлу заключающемуся между 2 и 3. Сей предѣлъ есть число весьма важное въ Дифференціальномъ Изчисленіи; оный обыкновенно означающъ буквою e . Взявъ $m = 10000$, найдемъ посредствомъ таблицы десятичныхъ логарифмовъ, слѣдующую приближенную величину числа e :

$$\left(\frac{10001}{10000}\right)^{10000} = 2,7183.$$

которая разнится отъ настоящей не болѣе какъ на одну десятиштысячную часть, какъ мы по въ послѣдствіи увидимъ.

Теперь предположимъ что количество α , оставаясь положительнымъ, не можетъ быть выражено чрезъ дробь $\frac{1}{m}$.

Означимъ чрезъ m и $n = m + 1$, два цѣлыя числа, изъ коихъ одно непосредственно болѣе, а другое непосредственно менѣе $\frac{1}{\alpha}$, въ такомъ случаѣ будемъ имѣть

$$\frac{1}{\alpha} = m + \mu = n - \nu,$$

гдѣ μ и ν суть числа заключающіяся между нулемъ и единицею. Очевидно, что выраженіе $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ будетъ заключаться между двумя слѣдующими:

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right]^{1 + \frac{\mu}{m}}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{1 - \frac{\nu}{n}};$$

и, какъ для величинъ α уменьшающихся до безконечности, или, что все равно, для величинъ m и n безконечно возрастающихъ, количества $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, одно и другое стремятся къ предѣлу e , между тѣмъ какъ $1 + \frac{\mu}{m}$, $1 - \frac{\nu}{n}$, безпрестанно приближаются къ единицѣ, по изъ сего слѣдуетъ, что каждое изъ выраженій

$$\left(1 + \frac{1}{m}\right)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

а также и промежуточное выраженіе $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$ будетъ стремиться къ предѣлу e .

Предположимъ наконецъ, что α сдѣлается количествомъ отрицательнымъ. Въ такомъ предположеніи, пусть будетъ

$$1 + \alpha = \frac{1}{1 + \beta},$$

гдѣ β означаетъ количество положительное, и которое само будетъ стремиться къ нулю; найдемъ

$$\left(1 + \alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} = \left(1 + \beta\right)^{\frac{1 + \alpha}{\alpha}} = \left[\left(1 + \beta\right)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{1 + \alpha},$$

попомъ, переходя къ предѣламъ,

$$\text{пр. } (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e^{\text{пр. } (1 + \alpha)} = e.$$

Ежели переменная величина уменьшаясь безпреспанно сдѣлается наконецъ меньше всякаго данного числа, то въ семь случаѣ сія переменная называется *безконечно-малымъ* количествомъ. Сего рода переменная имѣеть предѣломъ нуль. Упо-
требленное нами количество α въ предъидущихъ вычисленіяхъ, принадлежишь къ величинамъ шакого рода.

Ежели переменная величина безпреспанно увеличивается, такъ что наконецъ сдѣлается болѣе всякой данной величины, въ шакомъ случаѣ сія величина имѣеть предѣломъ положительную или отрицательную *безконечность*, именно: она имѣеть предѣломъ положительную *безконечность*, означаемую чрезъ знакъ ∞ , ежели она сама положительная; и отрицательную *безконечность*, изображаемую знакомъ $-\infty$, ежели идешь дѣло о переменной отрицательной. Таково естъ переменное число m , которое мы предъ симъ употребляли.

УРОКЪ ВТОРЫЙ.

О непрерывныхъ и прерывныхъ функцияхъ. Геометрическое изображение непрерывныхъ функций.

Ежели переменныя количества зависятъ одинъ отъ другихъ такимъ образомъ, что по данной величинѣ одного изъ нихъ, можно вывести величины всѣхъ прочихъ, то всѣ сіи различные количества выражаются обыкновенно посредствомъ одного изъ нихъ, которое и называется въ такомъ случаѣ *переменнымъ независимымъ*; а другія количества, выраженные посредствомъ переменной независимой, называются функциями сей переменной.

Равнымъ образомъ, ежели измѣняемая количества зависятъ одинъ отъ другихъ, такъ что по даннымъ величинамъ нѣкопрыхъ изъ нихъ, можно вывести величины всѣхъ прочихъ, то всѣ сіи различные количества выражаются посредствомъ нѣкопрыхъ изъ нихъ, которыя и принимаютъ тогда названіе *переменныхъ независимыхъ*; а другія выраженные посредствомъ переменныхъ независимыхъ, именуются *функциями* сихъ самыхъ переменныхъ. Различныя Алгебраическія и Тригонометрическія выраженія, составленныя изъ переменныхъ принимаемыхъ за независимыя, суть функции сихъ переменныхъ. Такъ, на примѣръ,

$L(x), \sin x,$ и проч. . . .

суть функции переменной x ;

а $x + y, x^2, x y z, \dots$

суть функции переменныхъ x и y или x, y и z ; и проч. . . .

Когда функции одной или нѣсколькихъ измѣняемыхъ, какъ въ предъидущихъ примѣрахъ, непосредственно выражены чрезъ сіи самыя переменныя, то онѣ называются *функциями явными*. Но когда извѣсны однѣ только отношенія между функциями и измѣняемыми независимыми величинами, то есть, уравненія, копорымъ всѣ сіи количества должны удовлетворять, то, доколѣ сіи уравненія не будутъ рѣшены, функции, не бывъ выражены непосредственно чрезъ переменныя, называются *функциями неявными*. Чтобы сдѣлать ихъ явными, стоимъ только, ежели сіе¹ возможно, рѣшить уравненія ихъ опредѣляющія. На примѣръ, пусть будетъ y функция неявная переменной x , опредѣляемая уравненіемъ

$$L(y) = x,$$

ежели представимъ чрезъ A основаніе разсмащриваемой нами системы логариемовъ, то также самая функция, сдѣлается явною чрезъ рѣшеніе даннаго уравненія, и будетъ

$$y = A^x.$$

Когда потребуешь означить явную функцию одной переменной x , или многихъ $x, y, z \dots$ не опредѣляя именно, какая функция, то употребляють обыкновенно одно изъ слѣдующихъ знаковположеній:

$$f(x), F(x), \phi(x), \chi(x), \psi(x), \omega(x), \dots \text{ и проч.}$$

$$f(x, y, z \dots), F(x, y, z \dots), \phi(x, y, z \dots), \text{ и проч.}$$

Въ вычисленіяхъ употребляють часто букву Δ для означенія приращеній двухъ измѣняемыхъ величинъ, зависящихъ одна отъ другой. И такъ, ежели переменная y выражена чрезъ функцию переменной x уравненіемъ

$$(I) \quad y = f(x),$$

то Δy , или приращеніе переменной y соотвѣствующее приращенію Δx переменной x , опредѣлится формулою

$$(2) \quad y + \Delta y = f(x + \Delta x)$$

И вообще, предполагая

$$(3) \quad F(x, y) = 0$$

будемъ имѣть

$$(4) \quad F(x + \Delta x, y + \Delta y) = 0.$$

Замѣтимъ, что ежели изъ уравненія (2) вычтемъ уравненіе (1), то получимъ

$$(5) \quad \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Пусть будущъ шеперь h и i два различныя количествъ, первое конечное, другое безконечно-малое, а $\alpha = \frac{i}{h}$ безконечно-малое отношеніе сихъ двухъ количествъ. Ежели количеству Δx припишемъ величину конечную h , то величина Δy , взятая въ уравненіи (5) приметъ названіе *конечной разности* функціи $f(x)$ и будетъ почти всегда конечнымъ количествомъ. Напрошивъ того, ежели количеству Δx припишемъ безконечно малую величину, полагая на примѣръ,

$$\Delta x = i = \alpha h,$$

то величина Δy , по-естъ,

$$f(x + i) - f(x) \text{ или } f(x + \alpha h) - f(x),$$

будетъ почти всегда безконечно-малое количество. Въ чемъ легко удостоверимся въ разсужденіи слѣдующихъ функцій:

$$A^x, \sin x, \cos x,$$

коимъ соотвѣтствуютъ разности

$$A^{x+i} - A^x = (A^i - 1) A^x,$$

$$\sin(x + i) - \sin x = 2 \sin \frac{i}{2} \cos(x + \frac{i}{2}),$$

$$\cos(x + i) - \cos x = 2 \sin \frac{i}{2} \sin(x + \frac{i}{2}),$$

изъ коихъ каждая содержитъ или множителя $A^i - 1$, или $\sin \frac{i}{2}$, оба приближающіяся къ нулю вмѣстѣ съ i .

Ежели функция $f(x)$ изменяется съ величиною x такимъ образомъ, что для каждаго значенія сей изменяемой величины, заключающейся въ данныхъ предѣлахъ, она имѣетъ одну (*) совершенно опредѣленную величину, тогда разность

$$f(x+i) - f(x)$$

между предѣлами величины x будетъ количество безконечно-малое; функция же $f(x)$ удовлетворяющая сему условію, называется между двумя предѣлами *непрерывною функциею* изменяемой x .

Равнымъ образомъ, функция $f(x)$ будетъ непрерывною въ сопредѣльности какой либо частной величины количества x , когда сія функция есть непрерывная между двумя предѣлами, заключающими предъидущую частную величину x , хотя бы сіи предѣлы разнспивовали весьма мало отъ оной величины.

Наконецъ, когда функция перестаетъ быть непрерывною въ сопредѣльности какой-бы то ни было частной величины x , то въ такомъ случаѣ она принимается названіе прерывной функции, ибо тогда для оной частной величины x имѣется *разрывъ непрерывности* (*solution de continuité*). Такъ, на примѣръ, для функции $\frac{1}{x}$ разрывъ непрерывности имѣетъ мѣсто когда $x = 0$; для функции $\tan x$, сей разрывъ существуетъ для $x = \pm \frac{(2k+1)\pi}{2}$, гдѣ k есть какое нибудь цѣлое число, и проч.

Изъ сихъ изъясненій легко можно узнать, между какими предѣлами данная функция переменной x будетъ непрерывною. (Подробнѣе о семъ изложено во II главѣ I части *du Cours d'Analyse* изданнаго въ 1821 году.)

(*) Случается иногда что функция $f(x)$ для данной, совершенно опредѣленной величины x , можетъ имѣть нѣсколько различныхъ величинъ; такова есть функция $\frac{1}{x-1}$, которая равняется $\pm \infty$ когда $x = 1$.

Теперь вообразимъ кривую линію данную чрезъ уравненіе $y = f(x)$ между прямоугольными координатами. Ежели функція $f(x)$ будетъ непрерывною между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$, то каждой абсциссѣ x , заключающейся между сими предѣлами будетъ соотвѣтствовать одна только ордината; и сверхъ того, когда x получишь безконечно-малое приращеніе Δx , то y увеличится на безконечно-малое же количество Δy , а посему двумъ безконечно-мало разнспвующимъ абсциссамъ x , $x + \Delta x$, будутъ соотвѣтствовать на кривой линіи двѣ безконечно-близкія точки, ибо разстояніе сихъ точекъ выразишь чрезъ безконечно-малую величину $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. Сими условіямъ можно удовлетворить только тогда, когда кривая линія будетъ непрерывная между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$.

Примѣрб. Построить кривыя линіи выражаемыя уравненіями

$$y = x^m, \quad y = \frac{1}{x^m}, \quad y = A^x, \quad y = L(x), \quad y = \sin x,$$

гдѣ A означаетъ положительное количество, а m цѣлое число.

Опредѣлить общій видъ сихъ кривыхъ линій.

УРОКЪ ТРЕТІЙ.

О производныхъ функціяхъ одной переѣнной.

Положимъ, что функція $y = f(x)$ есть непрерывная между двумя данными предѣлами переѣнной x , и что сей переѣнной дана величина содержащаяся между сими самими предѣлами, но бесконечно-малое приращеніе получаемое измѣняемымъ количествомъ, произведетъ бесконечно же малое приращеніе самой функціи. Слѣдственно, полагая $\Delta x = i$, числитель и знаменатель *отношенія разностей*

$$(1) \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

будутъ количества бесконечно-малыя. Но, между тѣмъ какъ числитель и знаменатель будутъ безпрестанно и въ одно время приближаться къ нулю, самая дробь будетъ стремиться къ другому, или положительному, или отрицательному предѣлу. Сей предѣлъ, для каждой данной величины x , имѣетъ опредѣленную же величину, которая впрочемъ измѣняется вмѣстѣ съ x . Такъ, на примѣръ, полагая $f(x) = x^m$, гдѣ m означаетъ цѣлое число, отношеніе бесконечно-малыхъ разностей будетъ

$$\frac{(x+i)^m - x^m}{i} = mx^{m-1} + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^{m-2} i + \dots + i^{m-1}$$

а предѣлъ онаго количества mx^{m-1} , которое есть новая функція переѣнной x . Точно также и вообще; только видъ новой функціи, которая будетъ служить предѣломъ отношенію $\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$

будешь зависѣшь отъ предложенной функціи $y = f(x)$. Для означенія сей зависимости, дають обыкновенно предѣлу сего отношенія название *производной функціи*, которая и означается чрезъ знаменитіе

$$y' \text{ или } f'(x).$$

При изысканіи производныхъ функцій выраженія $f(x)$, должно различать функціи называемыя *простыми*, и которыя изображаютъ одно какое нибудь дѣйствіе произведенное надъ сею переменною, отъ нѣхъ функцій, кои выводимъ посредствомъ многихъ дѣйствій и которыя по сему именуются *сложными*. Простыя функціи производящія отъ алгебраическихъ и тригонометрическихъ дѣйствій (*Смотри I часть du Cours d'Analyse, Гл. I.*), могутъ быти приведены къ слѣдующимъ

$$a + x, a - x, ax, \frac{a}{x}, x^a, A^x, L(x), \\ \sin x, \cos x, \operatorname{arc} \sin x, \operatorname{arc} \cos x,$$

гдѣ A есть постоянное число, $a = \pm A$ постоянное же количество, а буква L означаетъ логарифмъ взятой въ ней системы, коей основаніе есть A . Полагая величину y равною одной изъ сихъ простыхъ функцій, вообще легко будешь получить производную y' . Такимъ образомъ найдешь,

$$\text{полагая } y = a + x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a+x+i) - (a+x)}{i} = 1, \quad y' = 1;$$

$$\text{полагая } y = a - x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(a-x-i) - (a-x)}{i} = -1, \quad y' = -1;$$

$$\text{полагая } y = ax, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a(x+i) - ax}{i} = a, \quad y' = a;$$

$$\text{полагая } y = \frac{a}{x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\frac{a}{x+i} - \frac{a}{x}}{i} = -\frac{a}{x(x+i)}, \quad y' = -\frac{a}{x^2};$$

$$\text{полагая } y = \sin x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i} \cos(x + \frac{1}{2}i), \quad y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2});$$

$$\text{полагая } y = \cos x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}i} \sin(x + \frac{1}{2}i), \quad y' = -\sin x = \cos(x + \frac{\pi}{2}).$$

Сверхъ того, полагая $i = \alpha x$, $A^i = 1 + \beta$ и $(1 + \alpha)^a = 1 + \gamma$, найдемся

$$\text{полагая } x = L(x), \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{L(x+i) - L(x)}{i} = \frac{L(1+\alpha) - L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha x}}}{\alpha x} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{x}, \quad y' = \frac{L(e)}{x};$$

$$\text{полагая } y = A^x, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{A^{x+i} - A^x}{i} = \frac{A^i - 1}{i} A^x = \frac{A^x}{L(1+\beta)^{\frac{1}{\beta}}}, \quad y' = \frac{A^x}{L(e)};$$

$$\text{полагая } y = x^a, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+i)^a - x^a}{i} = \frac{(1+\alpha)^a - 1}{\alpha} x^{a-1} = \frac{L(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}}{L(1+\gamma)^{\frac{1}{\gamma}}} ax^{a-1}, \quad y' = ax^{a-1}$$

Въ сихъ послѣднихъ формулахъ, буква e означаетъ число

2,7182818..., которое служило предѣломъ выраженію $(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$.

Принявъ сіе число за основаніе системы логарифмовъ, получимъ *Неперова* или *гиперболическіе* логарифмы, которые впредь будемъ означать всегда буквою l . И такъ, очевидно, что $l(e) = 1$,

$$Le = \frac{Le}{LA} = \frac{le}{lA} = \frac{1}{lA};$$

и сверхъ того найдемся

$$\text{полагая } x = l(x), \quad y' = \frac{1}{x},$$

$$\text{полагая } y = e^x, \quad y' = e^x.$$

Предъидущія формулы выведены только для величинъ x , коимъ соотвѣствуютъ вещественныя величины y ; а посему должно, чтобы въ выраженіяхъ $L(x)$, $l(x)$, величина x была положительная, равнымъ образомъ и въ функціи x^a , когда a означаетъ дробь съ четнымъ знаменателемъ, или ирраціональное число.

Теперь пусть будетъ z другая функція x , сопряженная съ первою $y = f(x)$ формулою

$$(2) \quad z = F(y),$$

гдѣ z или $F(fx)$ называется *функциею отъ функции* переменной x ; означивъ чрезъ Δx , Δy , Δz , бесконечно-малыя и одновременныя приращенія прехъ переменныхъ x , y , z , найдемъ

$$\frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta x} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

попомъ, переходя въ предѣламъ,

$$(3) \quad z' = y' \cdot F'(y) = f'(x) \cdot F'(fx).$$

На примѣръ, полагая $z = ay$, а $y = l(x)$, получимъ $z' = ay' = \frac{a}{x}$. Помощію формулы (3) легко опредѣляется производныя функции выраженій A^x , x^a , $\arcsin x$, $\arccos x$, предполагая извѣстными производныя функции количествъ $L(x)$, $\cos x$, $\sin x$. И дѣйствительно, найдемся

$$\text{полагая } y = A^x, \quad L(y) = x, \quad y' \frac{L(e)}{y} = 1, \quad y' = \frac{y}{L(e)} = A^x l(A);$$

$$\text{полагая } y = x^a, \quad l(y) = al(x), \quad y' \frac{1}{y} = \frac{a}{x}, \quad y' = a \frac{y}{x} = ax^{a-1};$$

$$\text{полагая } y = \arcsin x, \quad \sin y = x, \quad y' \cos y = 1, \quad y' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$\text{полагая } y = \arccos x, \quad \cos y = x, \quad -y' \sin y = 1, \quad y' = \frac{-1}{\sin y} = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Сверхъ того, производныя функции сложныхъ количествъ

$$A^y, e^y, \frac{1}{y}$$

будучи соотвѣстственно, въ слѣдствіе формулы (3),

$$y' A^y l(A), \quad y' e^y, \quad -\frac{y'}{y^2},$$

по производныя слѣдующихъ функций

$$A^{B^x}, e^{e^x}, \sec x = \frac{1}{\cos x}, \quad \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

будущъ

$$A^{B^x} B^x l(A) l(B), \quad e^{e^x} e^x, \quad \frac{\sin x}{\cos^2 x}, \quad -\frac{\cos x}{\sin^2 x}.$$

Замѣшимъ, что производныя функціи сложныхъ количествъ опредѣляются иногда съ такою же удобностію, какъ и производныя функціи простыхъ количествъ. Такъ, на примѣръ, находимъ

$$\text{полагая } y = \text{tang } x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\sin(x+i)}{\cos(x+i)} - \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\sin i}{i \cos x \cos(x+i)},$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

$$\text{полагая } y = \text{cot. } x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{i} \left(\frac{\cos(x+i)}{\sin(x+i)} - \frac{\cos x}{\sin x} \right) = \frac{\sin i}{i \sin x \sin(x+i)},$$

$$y' = -\frac{1}{\sin^2 x};$$

изъ сего выводимъ

$$\text{полагая } y = \text{arc tang } x, \quad \text{tang } y = x, \quad \frac{y'}{\cos^2 y} = 1, \quad y' = \cos^2 y = \frac{1}{1+x^2};$$

$$\text{полагая } y = \text{arc cot } x, \quad \text{cot } y = x, \quad \frac{-y'}{\sin^2 y} = 1, \quad y' = -\sin^2 y = \frac{-1}{1+x^2}.$$

УРОКЪ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Дифференцирование функций одной переменной.

Пусть будетъ $y = f(x)$ функция изменяемой x , i бесконечно-малое количество, и h конечная величина. Полагая $i = \alpha h$, гдѣ α будетъ также бесконечно-малое количество, получимъ

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i} = \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha h},$$

откуда произойдетъ

$$(1) \quad \frac{f(x+\alpha h) - f(x)}{\alpha} = \frac{f(x+i) - f(x)}{i} h.$$

Предѣлъ, къ которому приближается первая часть уравненія (1), между тѣмъ какъ α приближается къ нулю, а количество h остается постояннымъ, называется *дифференциаломъ* функции $y = f(x)$. Сей дифференциалъ означаютъ буквою d , слѣдующимъ образомъ:

$$dy \text{ или } df(x).$$

Зная величину производной функции y' или $f'(x)$, легко найти оные дифференциалы. И дѣйствительно, взявъ предѣлы обѣихъ частей уравненія (1), найдется

$$(2) \quad df(x) = hf'(x).$$

Въ частномъ случаѣ, когда $f(x) = x$, уравненіе (2) даетъ

$$(3) \quad dx = h.$$

И такъ дифференциалъ переменной независимой x , равняется постоянному количеству h . Уравненіе (2) можно замѣнить слѣдующимъ

$$(4) \quad df(x) = f'(x) \cdot dx,$$

или, что все равно, уравненіемъ

$$(5) \quad dy = y' dx.$$

Изъ сихъ послѣднихъ уравненій слѣдуетъ, что производная функція $y' = f'(x)$ какой либо функціи $y = f(x)$ равняется отношенію $\frac{dy}{dx}$, дифференціала функціи къ дифференціалу перемѣнной величины, или, что все равно, коэффициенту, на котораго должно умножить дифференціалъ измѣняемой величины, чтобы получить дифференціалъ функціи. По сей-то причинѣ производная функція иногда называется *дифференціальнымъ коэффициентомъ*.

Дифференцировать функцію, значить найти ея дифференціалъ. Дѣйствіе для сего употребляемое называется *дифференцированіемъ*.

По уравненію (4), весьма легко найти дифференціалы шѣхъ функцій, коихъ производныя функціи извѣсны. Приложивъ сіе уравненіе къ простымъ функціямъ, получимъ

$$d(a+x) = dx, \quad d(a-x) = -dx, \quad d(ax) = adx, \quad d\left(\frac{a}{x}\right) = -a \frac{dx}{x^2};$$

$$d(x^a) = ax^{a-1} dx;$$

$$d \cdot A^x = A^x l(A) \cdot dx, \quad d \cdot e^x = e^x dx;$$

$$d \cdot L(x) = L(e) \frac{dx}{x}, \quad d \cdot l(x) = \frac{dx}{x};$$

$$d \cdot \sin x = \cos x \cdot dx = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx;$$

$$d \cdot \cos x = -\sin x \cdot dx = \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) dx;$$

$$d \cdot \arcsin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \cdot \arccos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Такимъ же образомъ найдемъ

$$d \cdot \operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d \cdot \operatorname{cot} x = -\frac{dx}{\sin^2 x};$$

$$d . \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d . \operatorname{arc} \operatorname{cot} x = - \frac{dx}{1+x^2};$$

$$d . \operatorname{sec} x = \frac{\sin x \cdot dx}{\cos^2 x}, \quad d . \operatorname{cosec} x = - \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

Въ сихъ дифференціалахъ количеству x можно приписывать только шѣ величины, для коихъ, въ предъидущемъ урокъ, мы опредѣлили производныя функціи соотвѣтствующія симъ дифференціаламъ.

А посему, простыя функціи, коихъ дифференціалы мы нашли для всѣхъ вещественныхъ величинъ x , суть слѣдующія,

$$a + x, a - x, ax, \frac{a}{x}, A^x, e^x, \sin x, \cos x;$$

въ нимъ можно прибавить и функцію x^a , когда количество a будетъ или цѣлое число или дробь съ нечетнымъ знаменателемъ. Что же касается до дифференціаловъ простыхъ функцій $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $L(x)$, $l(x)$, то въ двухъ первыхъ величина x должна заключаться между предѣлами $+1$, и -1 , а въ двухъ послѣднихъ между предѣлами 0 и ∞ ; между сими послѣдними предѣлами должна заключаться даже величина x въ дифференціалѣ функціи x^a , ежели численная величина количества a будетъ дробь съ четнымъ знаменателемъ или ирраціональное число.

Сообразно съ сказаннымъ нами въ I части *du Cours d'Analyse*, мы будемъ употреблять знакоположенія $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cot} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{sec} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$, для означенія наименьшей изъ дугъ, соотвѣтствующихъ тригонометрической линіи x ; ежели же случится, что одной и той же тригонометрической величинѣ будутъ соотвѣтствовать двѣ равныя дуги, одна положительная, а другая отрицательная, то предъидущія знакоположенія будутъ означать положительную дугу: изъ сего слѣдуетъ, что $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \operatorname{tang} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cot} x$, $\operatorname{arc} \operatorname{cosec} x$, суть дуги, заключающіяся ме-

жду предѣлами $-\frac{\pi}{2}$, $+\frac{\pi}{2}$, а $\arccos x$, $\operatorname{arccsc} x$, заключающагося между предѣлами 0 и π .

Положивъ $y = f(x)$ а $\Delta x = i = ah$, уравненіе (1), коего вторая часть имѣетъ предѣломъ dy , можетъ быть предствлено въ видѣ

$$\frac{\Delta y}{a} = dy + \beta,$$

гдѣ β означаетъ безконечно-малое количество; отсюда выходишь

$$(6) \quad \Delta y = a(dy + \beta).$$

Пусть будетъ z другая функція переменной x . То такимъ же образомъ получимъ

$$\Delta z = a(dz + v),$$

гдѣ v означаетъ количество безконечно-малое. Раздѣливъ послѣднее уравненіе на предпослѣднее, получимъ

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz + v}{dy + \beta}$$

потомъ, переходя къ предѣламъ,

$$(7) \quad \text{пр. } \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z' dx}{y' dx} = \frac{z'}{y'}.$$

Откуда слѣдуетъ, что *отношеніе безконечно-малыхъ разностей двухъ функцій переменной величины x имѣетъ предѣломъ отношеніе ихъ дифференціаловъ или ихъ производныхъ функцій.*

Теперь положимъ что z есть функція y , выраженная уравненіемъ

$$(8) \quad z = F(y).$$

Отсюда выведемъ

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{F(y + \Delta y) - F(y)}{\Delta y},$$

потомъ, переходя къ предѣламъ, и соображаясь съ формулою (7), получимъ

$$\frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'} = f'(y),$$

$$(9) \quad dz = F'(y) dy, \quad z' = y' F'(y).$$

Второе изъ уравненій (9) не разнишя опъ формулы (3) предъидущаго урока. Сверхъ того, ежели въ первомъ изъ уравненій (9) вмѣсто z поставимъ $F(y)$, то получимъ слѣдующее уравненіе

$$(10) \quad dF(y) = F'(y) dy,$$

какого видъ сходенъ съ видомъ формулы (4) и которое служишь для дифференцированія функціи y , даже тогда, когда y будешь зависѣшь опъ другой измѣняемой величины.

Примѣры. $d(a+y) = dy$, $d(a-y) = -dy$, $d(ay) = a dy$, $de^y = e^y dy$,
 $d l(y) = \frac{dy}{y}$, $d l(y^2) = \frac{d(y^2)}{y^2} = \frac{2 dy}{y}$, $d \frac{1}{2} l(y^2) = \frac{dy}{y}$, и проч. . . .

$d \cdot ax^m = a d(x^m) = m ax^{m-1} dx$, $de^e = e^e d(e^x) = e^e e^x dx$,

$d \cdot l \sin x = \frac{d \sin x}{\sin x} = \frac{\cos x dx}{\sin x} = \frac{dx}{\tan x}$, $d \cdot l \tan x = \frac{dx}{\sin x \cdot \cos x}$, и проч. . . .

Первая изъ сихъ формулъ показываетъ, что *присовокупленіе постоянной величины къ функціи не измѣняетъ ея дифференціала, а слѣдовательно и ея производной функціи.*

УРОКЪ ПЯТЫЙ.

Дифференціалъ суммы нѣсколькихъ функцій равенъ суммѣ ихъ дифференціаловъ. Слѣдствія сводимыя изъ сего правила. Дифференціалы мнимыхъ функцій.

Въ предъидущихъ урокахъ, мы показали какимъ образомъ находятся производныя функціи одной переменъной. Теперь войдемъ въ нѣкоторыя подробности по сему предмету.

Пусть будетъ x измѣняемая независимая величина, а $\Delta x = \alpha h = \alpha dx$ безконечно-малое приращеніе сей переменъной. Означивъ чрезъ s, u, v, w, \dots нѣсколько функцій x , а чрезъ $\Delta s, \Delta u, \Delta v, \Delta w, \dots$ приращенія сихъ функцій соотвѣтствующія приращенію Δx измѣняемой x , то изъ самаго опредѣленія дифференціаловъ слѣдуетъ, что сіи дифференціалы будутъ соотвѣтственно равны предѣламъ отношеній

$$\frac{\Delta s}{\alpha}, \frac{\Delta u}{\alpha}, \frac{\Delta v}{\alpha}, \frac{\Delta w}{\alpha}, \dots$$

Предположимъ теперь что

$$(1) \quad s = u + v + w + \text{и проч.} \dots$$

то найдемся

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v + \Delta w + \dots,$$

попомъ, раздѣливъ на α , будетъ

$$\frac{\Delta s}{\alpha} = \frac{\Delta u}{\alpha} + \frac{\Delta v}{\alpha} + \frac{\Delta w}{\alpha} + \text{и проч.},$$

наконецъ, переходя къ предѣламъ,

$$(2) \quad ds = du + dv + dw + \dots$$

Сіе уравненіе будучи раздѣлено на dx , доставишь

$$(3) \quad s' = u' + v' + w' + \dots$$

Сравнивъ формулу (2) или (3) съ уравненіемъ (1) окажешся, что производная функція или дифференціалъ суммы нѣсколькихъ функцій равняется суммѣ ихъ производныхъ функцій или ихъ дифференціаловъ. Изъ сего правила мы выведемъ слѣдующія слѣдствія.

Во первыхъ, означивъ чрезъ m цѣлое число, а чрезъ a, b, c, \dots, p, q, r постоянныя количествя, найдемъ

$$(4) \quad d(u+v) = du+dv, \quad d(u-v) = du-dv, \quad d(au+bv) = adu+bdv;$$

$$(5) \quad d(au+bv+cw+\dots) = adu+bdv+cw+\dots;$$

$$(6) \quad \begin{cases} d(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + px^2 + qx + r) \\ = [max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \dots + 2px + q]dx. \end{cases}$$

Выраженіе $ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + px^2 + qx + r$, въ которомъ всѣ члены пропорціональны цѣлымъ степенямъ переменъной x , называется *цѣлою функціею* сей переменъной. Означивъ сію функцію буквою s , въ силу уравненія (6), получимъ,

$$s' = max^{m-1} + (m-1)bx^{m-2} + (m-2)cx^{m-3} + \dots + 2px + q.$$

И такъ, для полученія производной какой нибудь цѣлой функціи, должно умножить каждый членъ на соответствующаго показателя переменъной, и уменьшить онаго единицею. — Легко видѣшь, что сія теорема существуетъ и для мнимыхъ величинъ x .

Теперь пусть будетъ

$$(7) \quad s = uvw \dots$$

гдѣ функціи $u, v, w \dots$ суть положительныя величины; взявъ логаріемы получишь

$$(8) \quad l(s) = l(u) + l(v) + l(w) + \dots$$

Впрочемъ, каковы бы ни были $u, v, w \dots$, какъ $s = u^2 v^3 w^2 \dots$, то будетъ

$$(9) \quad \frac{1}{2} l(s^2) = \frac{1}{2} l(u^2) + \frac{1}{2} l(v^2) + \frac{1}{2} l(w^2) + \dots,$$

и приложивъ правило выражаемое формулою (8) или формулою (9), найдемъ

$$(10) \quad \frac{ds}{s} = \frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \text{и проч.} \dots$$

откуда выводимъ

$$(11) \quad d(uvw\dots) = uvw\dots \left(\frac{du}{u} + \frac{dv}{v} + \frac{dw}{w} + \dots \right) \\ = vw\dots du + uw\dots dv + uv\dots dw + \dots$$

Примѣры: $d(uv) = u dv + v du$, $d(uvw) = vw du + uv dw + uv dw$,
 $d \cdot xl(x) = [1 + l(x)] dx$, $d(x^a e^{-x}) = x^a e^{-x} \left(\frac{a}{x} - 1 \right) dx$, и проч.

Пусть будетъ

$$(12) \quad s = \frac{u}{v}.$$

То взявъ дифференціалъ $L(s)$ или $\frac{1}{2} l(s^2)$, найдемъ

$$(13) \quad \frac{ds}{s} = \frac{du}{u} - \frac{dv}{v}, \quad ds = \frac{u}{v} \left(\frac{du}{u} - \frac{dv}{v} \right),$$

и наконецъ

$$(14) \quad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v du - u dv}{v^2}$$

Можно дойти до того же самаго вывода, наблюдая что дифференціалъ $d\left(\frac{u}{v}\right)$ равняется $d\left(u \cdot \frac{1}{v}\right) = \frac{1}{v} du + u d\left(\frac{1}{v}\right) = \frac{du}{v} - \frac{u dv}{v^2}$.

Примѣры: $d \cdot \text{tang } x = d \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x \cdot d \sin x - \sin x \cdot d \cos x}{\cos^2 x} = \frac{dx}{\cos^2 x}$,

$d \cdot \text{cot } x = -\frac{dx}{\sin^2 x}$, $d\left(\frac{a}{x}\right) = -\frac{a dx}{x^2}$, $d\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{e^{ax}}{x} \left(a - \frac{1}{x}\right) dx$, $d\left(\frac{l(x)}{x}\right) = \frac{1-l(x)}{x^2} dx$,

$d\left(\frac{b}{a+x}\right) = \frac{-b dx}{(a+x)^2}$.

Ежели функции u , v будутъ цѣлыя, то отношеніе $\frac{u}{v}$ приметъ названіе *раціональной дроби*. Легко опредѣлишь дифференціалъ оной употребляя формулы (6) и (14).

Сыскавъ дифференціалы произведенія $uvw\dots$ и частнаго числа $\frac{u}{v}$, легко будетъ найти дифференціалы многихъ дру-

гихъ выраженій, каковы сущь u^v , $u^{\frac{1}{v}}$, $u^{\frac{w}{v}}$, и проч. . . . Действитель-
но, найдешся

полагая $s = u^v$; $l(s) = vl(u)$, $\frac{ds}{s} = v \frac{du}{u} + l(u)dv$, $ds = vu^{v-1} du + u^v l(u)dv$;

полагая $s = u^{\frac{1}{v}}$, $l(s) = \frac{1}{v} l(u)$, $\frac{ds}{s} = \frac{du}{u v} - l(u) \frac{dv}{v^2}$, $ds = u^{\frac{1}{v}-1} \frac{du}{v} - u^{\frac{1}{v}} l(u) \frac{dv}{v^2}$;

полагая $s = u^{v^w}$, $l(s) = v^w l(u)$, $ds = u^{v^w} v^w \left[\frac{du}{u} + \frac{w}{v} l(u)dv + l(u) \cdot l(v) \cdot dv \right]$;
и проч.

Примѣры: $d(x^x) = x^x [1 + l(x)] dx$, $d(x^{\frac{1}{x}}) = \frac{1-l(x)}{x^2} x^{\frac{1}{x}} dx$,
 $d \cdot x^{xx} =$ и проч.

Мы окончимъ сей урокъ разысканіемъ дифференціала *мнимой функции*; сіе названіе даешся каждому выраженію могущему приняты видъ $u + v \sqrt{-1}$, гдѣ u и v означаютъ вещественныя функции. Назовемъ *предѣломъ* мнимой функции по выраженіе въ которое сія функция превращается, когда замѣняея какъ вещественная ея часть такъ и коэффициентъ у $\sqrt{-1}$ соотвѣтствующими имъ предѣлами; сверхъ того, распространимъ данныя нами опредѣленія касательно производныхъ функций и дифференціаловъ вещественныхъ функций и на мнимыя, по легко окажется, что уравненіе

$$s = u + v \sqrt{-1}$$

доставитъ слѣдующія формулы:

$$\Delta s = \Delta u + \Delta v \sqrt{-1}, \quad \frac{\Delta s}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} + \frac{\Delta v}{\Delta x} \sqrt{-1}, \quad \frac{\Delta s}{\alpha} = \frac{\Delta u}{\alpha} + \frac{\Delta v}{\alpha} \sqrt{-1},$$

$$s' = u' + v' \sqrt{-1}, \quad ds = du + dv \sqrt{-1}.$$

Слѣдовательно

$$(I) \quad d(u + v \sqrt{-1}) = du + dv \sqrt{-1}.$$

Видъ сего послѣдняго уравненія сходень съ видомъ уравненій (4).

Для примѣра положимъ

$$s = \cos x + \sqrt{-1} \sin x;$$

найдемся

$$ds = \left[\cos \left(x + \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{-1} \sin \left(x + \frac{\pi}{2} \right) \right] dx = s \cdot \sqrt{-1} dx.$$

Прибавимъ еще, что формулы (4), (5), (6), (11) и (14) будутъ имѣть мѣсто и тогда, когда постоянныя величины $a, b, c \dots p, q, r$, или функции $u, v, w \dots$, заключающіяся въ сихъ формулахъ сдѣлаются мнимыми.

УРОКЪ ШЕСТОЙ

Употребленіе дифференціаловъ и производныхъ функцій при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ. Наибольшая и наименьшая величина функцій одной измѣняемой. Величины дробей представляющихся въ видѣ $\frac{0}{0}$.

Узнавъ какимъ образомъ сыскиваются производныя функціи и дифференціалы функцій одной переменнѣной, мы покажемъ употребленіе ихъ при рѣшеніи нѣкоторыхъ задачъ.

1-я Задача. Положимъ, что функція $y = f(x)$ есть непрерывная въ опредѣленности частной величины $x = x_0$, спрашивается, оная функція будетъ ли увеличиваться или уменьшаться, съ увеличеніемъ или съ уменьшеніемъ, натуна отъ $x = x_0$, самой измѣняемой величины.

Рѣшеніе. Пусть будутъ Δx , Δy , безконечно-малыя приращенія переменныхъ x , y . Отношеніе $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ будетъ имѣть предѣломъ $\frac{dy}{dx} = y'$. Изъ сего должно заключить, что для весьма малыхъ численныхъ значеній Δx , и для частной величины $x = x_0$, отношеніе $\frac{dy}{dx}$ будетъ положительное, ежели соотвѣтствующая ему величина y' есть количество конечное и положительное, а отрицательное, ежели сія величина y' будетъ

конечное но отрицательное количество. Въ первомъ случаѣ, поелику бесконечно малыя разности Δx , Δy , имѣють одинакой знакъ, то функція y будетъ увеличиваться вмѣстѣ съ переменною x , начиная отъ $x = x_0$. Во второмъ случаѣ, по причинѣ того, что бесконечно малыя разности имѣють противные знаки, функція y будетъ увеличиваться, когда переменная x будетъ уменьшаться, и на противъ того, она функція съ увеличеніемъ изменяемой будетъ уменьшаться.

Положимъ что функція $y = f(x)$ пребываетъ непрерывною между двумя данными предѣлами $x = x_0$ и $x = X$. Ежели изменяемая величина x будетъ нечувствительно увеличиваться переходя отъ перваго предѣла ко второму, то функція y будетъ также увеличиваться, когда ея производная функція будетъ положительною; ежели же сія производная функція будетъ отрицательною, то y будетъ уменьшаться. И такъ, функція y можетъ, переставъ увеличиваться, начать уменьшаться, или, переставъ уменьшаться, начать увеличиваться, тогда только, когда производная ея функція y' перейдетъ изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, или на оборотъ. Но чтобы сей переходъ могъ имѣть мѣсто, то необходимо должно, выключая особый случай, когда y' сдѣлается прерывною функціею, чтобы она функція обратилась въ нуль.

Когда какая нибудь величина функціи $f(x)$ превосходитъ всѣ сопредѣльныя съ нею величины, то-есть, всѣ тѣ, кои получаются, изменяя бесконечно мало переменную x , то сія величина функціи называется *наибольшею*.

Когда же какая нибудь величина функціи $f(x)$ будетъ меньше всѣхъ смежныхъ съ нею величинъ, то она называется *наименшею*.

И такъ ясно, что ежели двѣ функціи $f(x)$, $f'(x)$ суть непрерывныя въ сопредѣльности данной величины переменной x ; то сія величина доставитъ *наибольшую* или *наименшую* величину $f(x)$, не иначе какъ уничтоживъ $f'(x)$.

2-я Задача. *Найти наибольшія и наименшія величины функціи одной переменной.*

Рѣшеніе. Пусть будетъ $f(x)$ предложенная функція. Разыщемъ сперва величины x , для которыхъ функція $f(x)$ сдѣлается прерывною. Каждой изъ сихъ величинъ будетъ соотвѣтствовать извѣстная величина самой функціи; и обыкновенно случается, что величина сія бываетъ или безконечное количество, или *наибольшая* или *наименшая* величина функціи.

Потомъ, найдемъ корни уравненія

$$(1) \quad f'(x) = 0$$

и тѣ величины x , отъ которыхъ $f(x)$ дѣлается прерывною; изъ нихъ самыя примѣчательныя суть корни уравненія

$$(2) \quad f'(x) = \pm \infty \text{ или } \frac{1}{f'(x)} = 0$$

Пусть будетъ $x = x_0$ одинъ изъ сихъ корней. Соотвѣтственная величина $f(x)$, то-есть $f(x_0)$ будетъ *наибольшая*, ежели въ сопредѣльности $x = x_0$, производная функція $f'(x)$ будетъ положительная для $x < x_0$, и отрицательная для $x > x_0$. Напротивъ того, $f(x_0)$ будетъ *наименшая*, когда производная функція $f'(x)$ будетъ отрицательная для $x < x_0$, и положительная для $x > x_0$. Наконецъ, ежели въ сопредѣльности $x = x_0$, производная функція $f'(x)$ будетъ постоянно положительная, или постоянно отрицательная, то количество $f(x_0)$ не будетъ ни *наибольшею* ни *наименшею* величиною.

Примѣры. Функціи $x^{\frac{1}{2}}$, $\frac{1}{l(x)}$, при переходѣ величины x чрезъ нуль въ отрицательное состояніе, дѣлаются прерывными; онѣ изъ вещественныхъ спановятся мнимыми; величина первой изъ сихъ функцій, для $x = 0$, есть *наименшая*, а величина второй функціи для той же величины измѣняемой x есть *наибольшая*.

Выраженія x^2 , $x^{\frac{2}{3}}$, имѣющія своими производными: первое функцію переходящую чрезъ нуль изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, а второе функцію переходящую чрезъ безконечность изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, имѣють каждое *наименшую* величину равную нулю. Что же касается до функцій x^3 , $x^{\frac{3}{2}}$, коихъ производныя обращаются, для $x = 0$, одна въ нуль, а другая въ безконечность, но сами остаются положительными для всѣхъ возможныхъ величинъ x , по онѣ не имѣють ни *наибольшей*, ни *наименшей* величины.

Функція $x^2 + px + q$, коей производная функція есть $2x + p$, получаетъ *наименшую* величину $q - \frac{1}{4}p^2$, когда $x = \frac{1}{2}p$, что легко можно повѣрить, представивъ данную функцію въ слѣдующемъ видѣ: $(x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2$.

Функція $\frac{Ax}{x}$, коей производная есть $\frac{Ax}{x} \left[\frac{1}{L(e)} - \frac{1}{x} \right]$, получаетъ *наименшую* величину $\frac{e}{L(e)}$, когда $x = L(e)$, и когда A болѣе единицы.

Функція $\frac{L(x)}{x}$, коей производная есть $\frac{1}{x^2} [L(e) - L(x)]$, получаетъ *наибольшую* величину $\frac{L(e)}{e}$, когда $x = e$.

Функція $x^a \cdot e^{-x}$, коей производная есть $x^a \cdot e^{-x} \left(\frac{a}{x} - 1 \right)$, получаетъ *наибольшую* величину $a^a \cdot e^{-a}$, когда $x = a$.

3-я Задача. *Опредѣлить наклонность кривой линіи въ данной точкѣ?*

Рѣшеніе. Представимъ себѣ кривую линію, копорой уравненіе между прямоугольными координатами есть $y = f(x)$. Хорда проведенная въ сей кривой изъ точки (x, y) (*) въ точку $(x + \Delta x, y + \Delta y)$, сосоставляетъ съ осью x продолженною по направленію абсциссъ положительныхъ, два угла, одинъ острый, другой тупой, изъ коихъ первой измѣряетъ наклоненіе хорды къ оси x . Ежели въпорая точка приближися на разстояніе безконечно-малое къ первой, то хорда чувствительнo сольется съ касательною, проведенною къ кривой чрезъ первую точку; и наклоненіе хорды къ оси x , будетъ выражать наклоненіе касательной, или какъ то называютъ, *наклоненіе кривой линіи* къ оси x . И такъ, поелику уголъ наклонности хорды будетъ имѣть своимъ тангенсомъ численную величину отношенія $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, то очевидно, что уголъ наклонности кривой линіи будетъ имѣть своимъ же тангенсомъ предѣлъ упомянушаго отношенія, то-есть, производную функцію $y' = \frac{dy}{dx}$.

Ежели y' равенъ нулю или безконечности, то касательная кривой линіи будетъ параллельна или перпендикулярна къ оси x . Сіе обыкновенно случается тогда, когда ордината y сдѣлается *наибольшею* или *наименшею*.

Примѣры: $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^m$, $y = x^{\frac{2}{3}}$, $y = x^a$, $y = A^x$, $y = \sin x$, и проч. . . .

(*) Мы означаемъ здѣсь точки посредствомъ ихъ координатъ, заключая ихъ между двумя скобками, что будемъ дѣлать и въ послѣдствіи. Часто также будемъ означать кривыя линіи или кривыя поверхности посредствомъ ихъ уравненій.

4-я Задача. Требуется найти величину дроби, въ коей числитель и знаменатель суть функции x , въ тольб случаѣ, когда для данной величины x оная дробь представится въ неопредѣленнои видѣ $\frac{0}{0}$.

Рѣшеніе. Пусть будетъ $s = \frac{z}{y}$ предложенная дробь, въ коей y и z суть двѣ функции x ; положимъ, что для часпной величины $x = x_0$ оная дробь превращается въ $\frac{0}{0}$, шо есть, что ея числитель и знаменатель обращаются въ нули. Означимъ чрезъ Δx , Δy , Δz безконечно-малыя соотвѣшшующія приращенія x , y и z , шо каковъ бы ни былъ x , получимъ

$$s = \frac{z}{y} = \text{пр.} \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y},$$

для часпной же величины $x = x_0$, будетъ

$$(3) \quad s = \text{пр.} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}.$$

И такъ, искомая величина дроби s или $\frac{z}{y}$ будетъ равна отношенію $\frac{dz}{dy}$ или $\frac{z'}{y'}$.

Примѣры. Въ предположеніи $x = 0$, будетъ $\frac{\sin x}{x} = \frac{\cos x}{1} = 1$, $\frac{l(1+x)}{x} = \frac{1}{1+x} = 1$; въ случаѣ $x = 1$, $\frac{l(x)}{x-1} = \frac{1}{x} = 1$, $\frac{x-1}{x^{n-1}} = \frac{1}{n x^{n-1}} = \frac{1}{n}$; и проч. . . .

УРОКЪ СЕДЬМОЙ.

О выраженіяхъ представляющихся въ неопредѣленнои видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 , и проч. Взаимная зависимость между отношеніемъ конечныхъ разностей и производной функции.

Въ предъидущемъ урокѣ мы разсматривали функции изменяемой величины x , которыя, для частнаго значенія сей изменяемой принимали неопредѣленной видѣ 0 . Часто случается что функция представляется въ одномъ изъ слѣдующихъ видовъ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞ , $0 \times \infty$, 0^0 , и проч. . . . И пакъ, предположивъ что $f(x)$ увеличивается до безконечности вмѣстѣ съ x , величины функций

$$\frac{f(x)}{x}, \quad [f(x)]^{\frac{1}{x}},$$

для $x = \infty$, представляются въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{\infty}{\infty}$, ∞^0 . Сія величины могутъ быть опредѣлены помощію двухъ теоремъ доказанныхъ нами въ *Analyse algébrique* (Гл. II. стр. 48 и 53). Мы ограничимся нѣсколькими примѣрами, которые покажутъ какимъ образомъ можно рѣшать задачи сего рода.

Пусть $\frac{A^x}{x}$ будетъ предложенная функция, въ коей A больше единицы; и положимъ что ищемся истинная величина сей функции для $x = \infty$. Поелику для величинъ x превосходящихъ $\frac{1}{\sqrt{A}}$, производная функция есть положительная, то предложенная функция будетъ увеличиваться вмѣстѣ съ x .

Сверхъ того, изобразивъ чрезъ m цѣлое число могущее увеличиваться до безконечности, очевидно что выраженіе

$$\frac{A^m}{m} = \frac{(1+A-1)^m}{m} = \frac{1}{m} + (A-1) + \frac{m-1}{2} (A-1)^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3} (A-1)^3 + \dots$$

будеть имѣть предѣломъ положительную безконечность. Слѣдовательно найдемся

$$(1) \quad \text{пр. } \frac{A^x}{x} = \infty.$$

Изъ сей послѣдней формулы слѣдуетъ, что *неопредѣленно-степенное количество A^x увеличивается несравненно скорѣе нежели самая переменная x , когда A будетъ больше единицы.*

Разыщемъ истинную величину функціи $\frac{L(x)}{x}$ для $x = \infty$, принявъ за основаніе логарифмовъ число A превышающее единицу. Положивъ $y = L(x)$, найдемся $\frac{L(x)}{x} = \frac{y}{Ay}$, и какъ функція $\frac{y}{Ay}$ будетъ имѣть предѣломъ $\frac{1}{\infty} = 0$, то изъ сего заключаемъ что

$$(2) \quad \text{пр. } \frac{L(x)}{x} = 0.$$

И такъ, въ системѣ коей основаніе превышаетъ единицу, логарифмы чиселъ увеличиваются гораздо медленнѣе нежели самыя числа.

Опредѣлимъ еще величину $x^{\frac{1}{x}}$ для $x = \infty$. Ясно что $x^{\frac{1}{x}} = A^{\frac{L(x)}{x}}$ слѣдовательно

$$(3) \quad \text{пр. } x^{\frac{1}{x}} = A^0 = 1.$$

Ежели въ формулахъ (2) и (3), замѣнимъ x дробью $\frac{1}{x}$, то увидимъ, что функціи $xL(x)$ и x^x приближаются, когда x уменьшаясь спремится къ нулю, первая къ предѣлу 0, а другая къ предѣлу 1.

Мы покажемъ теперь отношеніе (*) существующее между производною функціею $f'(x)$ и разностнымъ отношеніемъ $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Положимъ $x = x_0$, и $x_0 + h = X$, по предъидущее разностное отношеніе получимъ слѣдующій видъ $\frac{f(X)-f(x_0)}{X-x_0}$, и попомъ легко будемъ доказывать слѣдующую теорему:

Теорема. Положивъ что функція $f(x)$ есть непрерывная между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$, и означивъ трезъ A наибольшую, а трезъ B наименьшую величину ея производной функціи $f'(x)$ между тѣми же предѣлами, окажется что разностное отношеніе

$$(4) \quad \frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$$

необходимо будетъ заключаться между предѣлами A и B .

Доказательство. Означивъ буквами δ , ε , безконечно малыя числа, изъ коихъ первое пусть будетъ такого рода, что для численныхъ величинъ i меньшихъ нежели δ , и для какой нибудь величины x , заключающейся между предѣлами x_0 , X , отношеніе

$$\frac{f(x+i) - f(x)}{i}$$

пребываетъ всегда болѣе $f'(x) - \varepsilon$, и менѣе $f'(x) + \varepsilon$. Ежели между предѣлами x_0 , X , введемъ $n - 1$ новыхъ величинъ переменнѣй x , а именно,

$$x_1, x_2, \dots, x_{n-1},$$

такимъ образомъ, чтобы разность $X - x_0$ разложена была на части

$$x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1},$$

(*) По сему предмету можно читать Mémoire de M. Ampère, Journal de l'École polytechnique 13-e cahier, page 148—181.

кошорья, будучи всё съ однимъ знакомъ, имѣли бы численныя величины меньшія нежели δ ; шо дроби

$$(5) \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \dots \dots \frac{f(X) - f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}},$$

заключаясь, первая между предѣлами $f'(x_0) - \varepsilon$, $f'(x_0) + \varepsilon$, вторая между предѣлами $f'(x_1) - \varepsilon$, $f'(x_1) + \varepsilon$, и проч. будущъ всё болѣе количества $A - \varepsilon$, но менѣе количества $B + \varepsilon$. Сверхъ того, дроби (5) имѣя знаменателей съ однимъ знакомъ, шо раздѣливъ сумму ихъ числителей на сумму ихъ знаменателей, получимъ среднюю дробь; шо есть, шакую ко-шорая будеть заключашься между наименьшею и наибольшею изъ оныхъ дробей (*смотри* *Analyse algébrique*, примѣчаніе II, теорема 12, или примѣч. I переводчика). Но какъ выраженіе (4) есть ничшо иное какъ средняя дробь, шо слѣдовашельно оно будеть заключашься между предѣлами $A - \varepsilon$ и $B + \varepsilon$: и какъ сіе заключеніе имѣеть мѣсто сколь бы мало ни было число ε , шо можно ушвердишь, что выраженіе (4) будеть заключа-шьясь между предѣлами A и B .

Слѣдствіе. Ежели производная функція $f'(x)$ сама будеть непрерывная между предѣлами $x = x_0$, $x = X$, шо переходя ошь одного предѣла къ другому, сія функція будеть измѣняшьясь, заключаясь всегда между величинами A и B , и приметь послѣдовашельно всё промежуточные величины. Слѣдовашельно, всякое количество между A и B заключающеея, будеть равно нѣкошорой величинѣ $f'(x)$ соошвѣтшующей величинѣ x содержимой между предѣлами x_0 и $X = x_0 + h$, или, что все равно, величинѣ x имѣющей видъ:

$$x_0 + \theta h = x_0 + \theta(X - x_0),$$

гдѣ θ означеть число меньшее единицы. Приложивъ сіе примѣчаніе къ выраженію (4) ошажеться, что всегда сущешвуеть

такая величина θ , которая заключаась между предѣлами 0 и 1, удовлетворяешь уравненію.

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f' [x_0 + \theta (X - x_0)],$$

или, что все равно, слѣдующему

$$(6) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f' (x_0 + \theta h).$$

Сія послѣдняя формула должна существовать, какую бы величину x мы ни изобразили x_0 , лишь бы только функция $f(x)$ и ея производная $f'(x)$ были непрерывными между предѣлами $x = x_0$, $x = x_0 + h$; при семъ условіи будемъ имѣть вообще,

$$(7) \quad \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = f' (x + \theta h),$$

помощь подставивъ Δx вмѣсто h , получимъ:

$$(8) \quad f(x + \Delta x) - f(x) = f' (x + \theta \Delta x) \cdot \Delta x.$$

Замѣшимъ, что въ уравненіяхъ (7) и (8), θ означаетъ всегда неизвѣстное число, но меньшее единицы, какъ было сказано выше.

Примѣры. Приложивъ формулу (7) къ функциямъ x^a , $l(x)$, найдемъся

$$\frac{(x + h)^a - x^a}{h} = a(x + \theta h)^{a-1}, \quad \frac{l(x + h) - l(x)}{h} = \frac{1}{x + \theta h}.$$

УРОКЪ ОСЬМОЙ.

Дифференціалы функций нѣсколькихъ перемѣнныхъ. Частныя производныя функций и частныя дифференціалы.

Пусть $u = f(x, y, z \dots)$ будетъ функция нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ величинъ $x, y, z \dots$. Означимъ буквою i бесконечно-малое количество и чрезъ

$\varphi(x, y, z \dots), \chi(x, y, z \dots), \psi(x, y, z \dots)$ и проч. . . . предѣлы къ коимъ приближаются отношенія

$$\frac{f(x+i, y, z \dots) - f(x, y, z \dots)}{i}, \frac{f(x, y+i, z \dots) - f(x, y, z \dots)}{i},$$

$$\frac{f(x, y, z+i \dots) - f(x, y, z \dots)}{i}, \text{ и проч. . .}$$

въ то время когда i приближается къ нулю. $\varphi(x, y, z \dots)$ будетъ производная функция выраженія $u = f(x, y, z \dots)$, разсмашивая въ ономъ измѣняемомъ одно только количество x ; сія производная называется *частною производною* количества и относительно къ x . Функции $\chi(x, y, z \dots), \psi(x, y, z \dots)$ и проч. называются частными производными функций и относительно къ $y, z \dots$ и проч. . . .

Теперь, вообразимъ что измѣняемая $x, y, z \dots$ получаютъ какія либо приращенія $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$ и пусть Δu будетъ соответствующее приращеніе функции u , такъ что

$$(1) \Delta u = f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z, \dots) - f(x, y, z \dots).$$

Ежели приращеніямъ $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$ припишутся конечныя величины $h, k, l \dots$ по величина Δu , выражаемая ура-

вненіемъ (1) будетъ называться *конечною разностію* функціи u ; она бываетъ обыкновенно количество конечное. Ежели напрошивъ того, положимъ

$$(2) \quad \Delta x = \alpha h, \Delta y = \alpha k, \Delta z = \alpha l, \text{ и проч.} \dots$$

гдѣ α означаешь безконечно-малое число, то величина Δu , именно,

$$f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l, \dots) - f(x, y, z, \dots)$$

будетъ почти всегда количество безконечно-малое; но раздѣливъ сію величину на α , получимся дробь

$$(3) \quad \frac{\Delta u}{\alpha} = \frac{f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l, \dots) - f(x, y, z, \dots)}{\alpha}$$

которая, вообще говоря, будетъ стремиться къ предѣлу разн-свующему ошъ нуля. Предѣлъ сей называется *полнымъ дифференціаломъ* или просто *дифференціаломъ* функціи u . Его означають буквою d , такимъ образомъ

$$du \text{ или } df(x, y, z, \dots)$$

И такъ, сколько бы ни было переменныхъ независимыхъ заключающихся въ функціи u , дифференціалъ оной всегда опредѣлишь формулою

$$(4) \quad du = \text{пр. } \frac{\Delta u}{\alpha}.$$

Полагая послѣдовательно $u = x$, $u = y$, $u = z$, и проч...; получимъ изъ уравненій (2) и (4)

$$(5) \quad dx = h, \quad dy = k, \quad dz = l, \text{ и проч.} \dots$$

Слѣдовательно, дифференціалы переменныхъ независимыхъ количествъ x , y , z ... суть не иное что какъ постоянныя величины h , k , l ...

Ежели частныя производныя функціи $f(x, y, z, \dots)$ будутъ извѣсны, то легко опредѣлишь полный ея дифференціалъ. И дѣйствительно, ежели въ сей функціи переменныя x , y ,

$z \dots$ будуть одна послѣ другой получають какія нибудь приращенія $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$, що изъ формулы (8) предыдущаго урона, введемъ слѣдующія уравненія

$$\begin{aligned} f(x + \Delta x, y, z..) - f(x, y, z..) &= \Delta x \varphi(x + \theta_1 \Delta x, y, z..), \\ f(x + \Delta x, y + \Delta y, z..) - f(x + \Delta x, y, z..) &= \Delta y \chi(x + \Delta x, y + \theta_2 \Delta y, z..), \\ f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z..) - f(x + \Delta x, y + \Delta y, z..) &= \Delta z \psi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \theta_3 \Delta z..), \end{aligned}$$

и проч.; гдѣ $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ суть количества неизвѣстныя, но заключающіяся между нулемъ и единицею. Сложивъ всѣ сіи уравненія почленно, получимъ

$$\begin{aligned} (6) \quad f(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z \dots) - f(x, y, z \dots) &= \\ &= \Delta x \cdot \varphi(x + \theta_1 \Delta x, y, z \dots) \\ &+ \Delta y \cdot \chi(x + \Delta x, y + \theta_2 \Delta y, z \dots) \\ &+ \Delta z \cdot \psi(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \theta_3 \Delta z \dots) + \text{и проч.} \end{aligned}$$

Въ семь послѣднемъ уравненіи вмѣсто перваго члена можно подставивъ Δu ; полагая же послѣ сего подстановленія $\Delta x = ah$, $\Delta y = ak$, $\Delta z = al$, и раздѣляя попомъ обѣ части на a , получимъ слѣдующую формулу

$$\begin{aligned} (7) \quad \frac{\Delta u}{a} &= h \cdot \varphi(x + \theta_1 ah, y, z \dots) + k \cdot \chi(x + ah, y + \theta_2 ak, z \dots) \\ &+ l \cdot \psi(x + ah, y + ak, z + \theta_3 al \dots) + \text{и проч.}, \end{aligned}$$

изъ которой, перейдя къ предѣламъ и подставивъ $dx, dy, dz \dots$, вмѣсто $h, k, l \dots$, найдемъся

$$(8) \quad du = \varphi(x, y, z \dots) dx + \chi(x, y, z \dots) dy + \psi(x, y, z \dots) dz + \text{и проч.}$$

Примѣры: $d(x + y + z \dots) = dx + dy + dz + \dots$,
 $d(x - y) = dx - dy$, $d(ax + by + cz \dots) = adx + bdy + cdz \dots$,
 $d(xyz \dots) = yz \dots dx + xz \dots dy + xy \dots dz + \dots$, $d'(x^a y^b \dots)$
 $= x^a y^b \dots (a \frac{dx}{x} + b \frac{dy}{y} + \dots)$, $d(\frac{x}{y}) = \frac{y dx - x dy}{y^2}$, $d \cdot x^y = yx^{y-1} dx + x^y l(x) dy$,
и проч.

Замѣшимъ, что въ величинѣ du доставляемой уравненіемъ (8), членъ $\varphi(x, y, z \dots) dx$ есть дифференціалъ функціи $u = f(x, y, z \dots)$ разсмащривая въ оной измѣняемымъ одно только количество x , прочія же величины $y, z \dots$ принимая за постоянныя. По сей по причинѣ членъ сей называется *частнымъ дифференціаломъ* функціи u , взявшимъ относительно къ x . Равнымъ образомъ и $\chi(x, y, z \dots) dy, \psi(x, y, z \dots) dz, \dots$ суть частныя дифференціалы функціи u относительно къ y, z, \dots . Означивъ сіи частныя дифференціалы буквою d , и подписавъ подъ оной ту измѣняемую величину, къ коей дифференціалъ относился, слѣдующимъ образомъ

$$d_x u, d_y u, d_z u, \dots \text{ и проч.}$$

получимъ

(9) $\psi'_x(x, y, z \dots) = \frac{d_x u}{dx}, \chi(x, y, z \dots) = \frac{d_y u}{dy}, \psi(x, y, z \dots) = \frac{d_z u}{dz}$, и проч... и уравненіе (8) можно будетъ предсавить или въ видѣ

$$(10) \quad du = d_x u + d_y u + d_z u + \text{ и проч.},$$

или въ слѣдующемъ

$$(11) \quad du = \frac{d_x u}{dx} dx + \frac{d_y u}{dy} dy + \frac{d_z u}{dz} dz + \dots$$

Въ уравненіяхъ (9) буквы поставленныя подъ d для сокращенія не пишутся, а частныя производныя функціи u , взятыя относительно къ $x, y, z \dots$ изображаются знакоположеніями

$$(12) \quad \frac{d u}{d x}, \frac{d u}{d y}, \frac{d u}{d z}, \text{ и проч.}$$

гдѣ $\frac{d u}{d x}$ не будетъ уже выражать полного дифференціала du раздѣленнаго на dx ; и тогда, для означенія частнаго дифференціала количества u взяшаго въ разсужденіи x , должно употребить знакоположеніе $\frac{d u}{d x} dx$ въ коемъ нельзя сократить чи-

слишеля съ знаменателемъ. Въ силу сихъ условій формула (11) приводится къ

$$(13) \quad du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \text{и проч.} \dots$$

Но какъ въ сей послѣдней формулѣ уже нельзя уничтожить дифференціаловъ dx, dy, dz, \dots по уравненіе (10) никакимъ другимъ замѣнить не можно.

Данныя нами опредѣленія и формулы, можно, безъ затрудненія, распространить и на особый случай когда функція сдѣлается мнимою. Такъ, на примѣръ, полагая $u = x + y\sqrt{-1}$, частныя производныя функціи u , и ея полный дифференціалъ будутъ относительно даны уравненіями

$$\frac{du}{dx} = 1, \quad \frac{du}{dy} = \sqrt{-1}, \quad du = dx + \sqrt{-1} dy.$$

Наконецъ, покажемъ весьма простое средство приводить изчисленіе полныхъ дифференціаловъ къ изчисленію производныхъ функцій. Ежели въ выраженіи $f(x+ah, y+ak, z+al, \dots)$ примемъ одно только количество a за переменное, и въ слѣдствіе сего положимъ

$$(14) \quad f(x+ah, y+ak, z+al, \dots) = F(a),$$

то будемъ, не только

$$(15) \quad u = F(0),$$

но и $\Delta u = F(a) - F(0)$, а посему

$$(16) \quad du = \text{пр.} \frac{F(a) - F(0)}{a} = F'(0).$$

И такъ, чшобъ составить полный дифференціалъ du , стоитъ только найти частную величину производной функціи $F'(a)$, для $a = 0$.

УРОКЪ ДЕВЯТЫЙ.

Объ употребленіи частныхъ производныхъ при дифференцированіи сложныхъ функций. Дифференціалы неявныхъ функций.

Пусть будетъ $s = F(u, v, w \dots)$ какая нибудь функция переменныхъ количествъ $u, v, w \dots$ кои сами суть функции изменяемыхъ независимыхъ величинъ $x, y, z \dots$: то s будетъ сложная функция сихъ послѣднихъ переменныхъ; и ежели означимъ чрезъ $\Delta x, \Delta y, \Delta z, \dots$ произвольныя приращенія количествъ $x, y, z \dots$ то соотвѣтствующія имъ приращенія $\Delta u, \Delta v, \Delta w, \dots, \Delta s$ функций u, v, w, \dots, s будутъ имѣть между собою слѣдующее отношеніе:

$$(1) \Delta s = F(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \dots) - F(u, v, w \dots).$$

Сверхъ того означимъ чрезъ $\Phi(u, v, w \dots), X(u, v, w \dots), \Psi(u, v, w \dots), \dots$ частныя производныя функции $F(u, v, w \dots)$ взяшыя относительно къ $u, v, w \dots$. Но какъ уравненіе (б) предыдущаго урока имѣетъ мѣсто для какихъ нибудь величинъ переменныхъ $x, y, z \dots$ и ихъ приращеній $\Delta x, \Delta y, \Delta z \dots$, то замѣнивъ $x, y, z \dots$ величинами $u, v, w \dots$, а функцию f функциею F , получится

$$(2) F(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \Delta w, \dots) - F(u, v, w \dots) = \Delta u \Phi(u + \theta_1 \Delta u, v, w \dots) + \Delta v X(u + \Delta u, v + \theta_2 \Delta v, w \dots) + \Delta w \Psi(u + \Delta u, v + \Delta v, w + \theta_3 \Delta w \dots) + \text{и проч.}$$

Въ семъ послѣднемъ уравненіи $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots$ означаютъ какъ и прежде количества неизвѣстныя, но меньшія единицы. Те-

перь, полагая $\Delta a = ah = adx$, $\Delta y = ah = ady$, $\Delta z = al = adz, \dots$, и раздѣляя на a обѣ части уравненія (2), найдемъ

$$(3) \left\{ \begin{aligned} \frac{\Delta s}{a} &= \Phi(u + \theta_1 ah, v, w \dots) \frac{\Delta u}{a} + X(u + ah, v + \theta_2 ak, w \dots) \frac{\Delta v}{a} \\ &+ \Psi(u + ah, v + ak, w + \theta_3 al \dots) \frac{\Delta w}{a} + \text{и проч.}, \end{aligned} \right.$$

и наконецъ, полагая $a = 0$,

$$(4) ds = \Phi(u, v, w \dots) du + X(u, v, w \dots) dv + \Psi(u, v, w \dots) dw + \text{и проч.}$$

Величина ds данная уравненіемъ (4) сходствуесть съ величиною du доставляемою уравненіемъ (8) предыдущаго урока. Главное различіе состоить въ томъ, что дифференціалы dx, dy, dz, \dots содержащіеся въ величинѣ du суть постоянные произвольные, дифференціалы же $du, dv, dw \dots$ заключающіеся въ величинѣ ds суть функции переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$ и произвольныхъ постоянныхъ величинъ $dx, dy, dz \dots$.

Приложивъ формулу (4) къ нѣкошорымъ частнымъ случаямъ, найдемъ

$$\begin{aligned} d(u+v+w \dots) &= du + dv + dw \dots, \quad d(u-v) = du - dv, \quad d(au + bv + cw \dots) = \\ &= a du + b dv + c dw \dots, \quad d(uvw \dots) = v w \dots du + u w \dots dv + u v \dots dw + \dots, \\ d\left(\frac{u}{v}\right) &= \frac{v du - u dv}{v^2}, \quad du^v = v u^{v-1} du + u^v l(u) dv \dots, \text{ и проч.} \dots \end{aligned}$$

Мы уже прежде вывели сіи уравненія (смотри 5^ѣ урокъ) положивъ ншо $u, v, w \dots$ суть функции одной переменной независимой x ; а теперь видимъ, что сіи уравненія имѣють мѣсто, сколько бы ни было переменныхъ независимыхъ количествъ.

Уравненіе (4) можно вывести изъ формулы (10) предыдущаго урока, въ томъ частномъ случаѣ, когда величины $u, v, w \dots$ будутъ: первая, функция одной изменяемой x , вто-

рая, одной измѣняемой y , шрещья, одной измѣняемой z
И дѣйствительнo, оная формула доставляешъ

$$(5) \quad ds = d_x s + d_y s + d_z s + \text{и проч.} \dots$$

И какъ сверхъ того, по предположенію, количество x заклю-
чаешся въ одной шолько величинѣ u , по разсмапривая s , какъ
функцію x , формула (10) 4^{го} урока дашъ

$$d_x s = d_x F(u, v, w \dots) = \Phi(u, v, w \dots) d_x u = \Phi(u, v, w \dots) du;$$

равнымъ образомъ найдешся

$$d_y s = X(u, v, w \dots) dv, \quad d_z s = \Psi(u, v, w \dots) dw, \text{ и проч.}$$

и подставивъ сіи величины $d_x s$, $d_y s$, $d_z s$... въ формулу (5),
ясно что оная будешъ одинакова съ уравненіемъ (4).

Теперь пусть будешъ r другая функція переменныхъ неза-
висимыхъ x , y , z Ежели, для всѣхъ возможныхъ величинъ
сихъ измѣняемыхъ, будемъ имѣшь

$$(6) \quad s = r,$$

шо можно будешъ заключишь что

$$(7) \quad ds = dr.$$

Въ часномъ случаѣ когда функція r или бываешъ равна нулю,
или постоянной величинѣ c , найдешся $dr = 0$; и попомъ
уравненіе

$$(8) \quad s = 0, \text{ или } s = c,$$

доставишь слѣдующее

$$(9) \quad ds = 0.$$

Уравненія (7) и (9) называются *дифференціальными уравне-
ніями*. Второе можешъ бышь предшавлено въ видѣ

$$(10) \quad \Phi(u, v, w \dots) du + X(u, v, w \dots) dv + \Psi(u, v, w \dots) dw + \dots = 0,$$

и имѣешъ мѣсто и тогда, когда нѣкоторыя изъ функцій
 u , v , w ... сдѣлаются равными нѣкоторымъ изъ измѣняемыхъ
независимыхъ x , y , z ... Такъ, на примѣръ, найдешся

полагая $F(x, v) = 0$, $\Phi(x, v) dx + X(x, v) dv = 0$;

полагая $F(x, y, w) = 0$, $\Phi(x, y, w) dx + X(x, y, w) dy + \Psi(x, y, w) dw = 0$;

и проч. Очевидно что въ сихъ послѣднихъ уравненіяхъ, v есть неявная функція переменной x , а w неявная функція переменныхъ x, y , и проч. . . .

Также, положивъ что переменныя $x, y, z \dots$, вмѣсто того чшобъ быть независимыми, будутъ сопряжены между собою уравненіемъ

$$(11) \quad f(x, y, z \dots) = 0$$

то, упошребивъ знакоположенія принятыя нами въ предъидущемъ урокъ, получимъ дифференціальное уравненіе

$$(12) \quad \varphi(x, y, z \dots) dx + \chi(x, y, z \dots) dy + \psi(x, y, z \dots) dz + \dots = 0,$$

изъ котораго можно будетъ опредѣлить дифференціалъ одной изъ переменныхъ величинъ, принимаемыхъ за неявную функцію всѣхъ прочихъ. Такъ, напримѣръ, найдемся,

$$\text{полагая } x^2 + y^2 = a^2, \quad x dx + y dy = 0, \quad dy = -\frac{x}{y} dx;$$

$$\text{полагая } y^2 - x^2 = a^2, \quad y dy - x dx = 0, \quad dy = \frac{x}{y} dx;$$

$$\text{полагая } x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \quad x dx + y dy + z dz = 0, \quad dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy.$$

Но какъ при томъ имѣемъ, въ первомъ случаѣ, $y = \pm \sqrt{a^2 - x^2}$, а во второмъ, $y = \pm \sqrt{a^2 + x^2}$, то изъ предъидущихъ формулъ выведемъ

$$(13) \quad d(\sqrt{a^2 - x^2}) = -\frac{x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad d(\sqrt{a^2 + x^2}) = \frac{x dx}{\sqrt{a^2 + x^2}};$$

что легко можно повѣршишь.

Означивъ буквою u функцію $f(x, y, z \dots)$, уравненія (11) и (12) могутъ быть выражены слѣдующимъ образомъ: $u = 0$, $du = 0$.

Ежели бы переменныя $x, y, z \dots$, были сопряжены не однимъ уравненіемъ $u = 0$, но двумя условными уравненіями

$$(14) \quad u = 0, \quad v = 0,$$

тогда получили бы два дифференціальных уравненія

$$(15) \quad du = 0, \quad dv = 0,$$

посредствомъ коихъ могли бы опредѣлить дифференціалы двухъ переменныхъ, принимаемыхъ за неявныя функции всѣхъ прочихъ.

И вообще, ежели n переменныхъ $x, y, z \dots$ сопряжены будутъ m условными уравненіями

$$(16) \quad u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \text{ и проч.} \dots$$

то будемъ имѣть m дифференціальныхъ уравненій

$$(17) \quad du = 0, \quad dv = 0, \quad dw = 0, \text{ и проч.} \dots$$

помощію коихъ можно будетъ опредѣлить дифференціалы m изменяемыхъ величинъ, принимаемыхъ за неявныя функции всѣхъ остальныхъ.

УРОКЪ ДЕСЯТЫЙ.

Теорема однородныхъ функций. Наибольшія и наименьшія величины функций нѣсколькихъ переменныхъ.

Вообразимъ функцію нѣсколькихъ измѣняемыхъ величинъ, и положимъ что, увеличивъ или уменьшивъ всѣ измѣняемыя количества въ данномъ отношеніи, получаемъ какую нибудь степень сего отношенія помноженную на самую функцію, по сія функція будетъ называться *однородною*. Степень данного отношенія, будетъ *измѣреніе* или *степень* предложенной функціи. Изъ сказаннаго слѣдуешь, что $f(x, y, z \dots)$ будетъ однородная функція степени a , переменныхъ $x, y, z \dots$ когда означивъ чрезъ t новую измѣняемую, получимъ для всѣхъ возможныхъ величинъ t ,

$$(I) \quad f(tx, ty, tz \dots) = t^a f(x, y, z \dots).$$

Теорему однородныхъ функцій можно выразишь слѣдующимъ образомъ:

Теорема. Когда частныя производныя какой нибудь однородной функціи степени a , относительно ко всѣмъ измѣняемымъ величинамъ, соответственно помножатся на самыя измѣняемыя, то сумма всѣхъ сихъ произведеній будетъ равняться количеству a , помноженному на самую предложенную функцію.

Доказательство. Пусть будемъ $u = f(x, y, z \dots)$ данная функція, и $\varphi(x, y, z \dots)$, $\chi(x, y, z \dots)$, $\psi(x, y, z \dots)$ и проч.... частныя производныя оной относительно къ x , къ y , къ z , и проч.... Возьмъ дифференціалы обѣихъ частей уравненія

(1), принимая въ немъ только t за переменную величину, получимъ

$$\varphi(tx, ty, tz \dots) x dt + \chi(tx, ty, tz \dots) y dt + \psi(tx, ty, tz \dots) z dt + \dots = at^{a-1} f(x, y, z \dots) dt;$$

попомо, раздѣливъ на dt , и положивъ $t = 1$,

$$(2) \quad x\varphi(x, y, z \dots) + y\chi(x, y, z \dots) + z\psi(x, y, z \dots) + \dots = af(x, y, z \dots),$$

или, что все равно,

$$(3) \quad x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} + \dots = au.$$

Слѣдствіе. Для однородной функціи степени нуль, будетъ

$$(4) \quad x \frac{du}{dx} + y \frac{du}{dy} + z \frac{du}{dz} + \dots = 0.$$

Примѣры. Приложимъ теорему къ функціямъ $Ax^2 + Bxy + Cy^2$ $L\left(\frac{x}{y}\right)$.

Когда вещественная функція многихъ переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$ получитъ величину превосходящую всѣ сопредѣльныя съ нею величины, то есть, всѣ тѣ, которыя получились бы, измѣняя безконечно мало $x, y, z \dots$; то сія величина функціи называется *наибольшою величиною*.

Когда же какая нибудь величина вещественной функціи $x, y, z \dots$ будетъ менѣе всѣхъ сопредѣльныхъ съ нею величинъ, то она принимаетъ названіе *наименшей величины*.

Изысканіе *наибольшихъ* и *наименшихъ величинъ* функціи нѣсколькихъ переменныхъ, легко приводится къ изысканію *наибольшихъ* и *наименшихъ величинъ* функціи одной переменной. И въ самомъ дѣлѣ, предположимъ что $u = f(x, y, z \dots)$ сдѣлается *наибольшою величиною* для нѣкоторыхъ определенныхъ величинъ количествъ $x, y, z \dots$; то для сихъ частныхъ значеній, и для безконечно-малыхъ численныхъ величинъ a , получимъ

(5) $f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l, \dots) < f(x, y, z \dots)$,
какія бы впрочемъ ни были конечныя постоянныя $h, k, l \dots$,
лишь бы только онѣ взяты были такимъ образомъ, чтобы
первая часть формулы (5) осмывалась вещественною. Поло-
живъ для краткости

$$(6) \quad f(x + \alpha h, y + \alpha k, z + \alpha l, \dots) = F(\alpha),$$

формула (5) приведетъ къ слѣдующей

$$(7) \quad F(\alpha) < F(0).$$

Сіе неравенство должно имѣть мѣсто для положительныхъ
и отрицательныхъ величинъ α ; откуда слѣдуетъ, что изменяя
одно только количество α , функція $F(\alpha)$ будетъ имѣть
наибольшую величину для $\alpha = 0$.

Такимъ же образомъ докажется, что ежели $f(x, y, z \dots)$
получить *наименьшую величину* для нѣкоторыхъ частныхъ зна-
ченій $x, y, z \dots$, то соответствующая величина функціи
 $F(\alpha)$ будетъ *наименьшая* для $\alpha = 0$.

Теперь замѣшимъ, что ежели объ функціи $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$
будутъ непрерывныя относительно къ α , въ опредѣленности
величины $\alpha = 0$, то сія величина не можетъ дать ни *наибольшей*
ни *наименьшей величины* для первой функціи, ежели
не уничтожить впрочемъ (смотри урокъ 6-й), то есть, долж-
но быть

$$(8) \quad F'(0) = 0.$$

Сверхъ того, подставивъ $dx, dy, dz \dots$ вмѣсто $h, k, l \dots$,
уравненіе (8) получитъ видъ

$$(9) \quad du = 0,$$

(смотри урокъ 8-й). Къ тому же, поелику функціи $F(\alpha)$
и $F'(\alpha)$ суть не иное что какъ u и du , когда въ онія подста-
вимъ $x + \alpha h$ вмѣсто x , $y + \alpha k$ вмѣсто y , $z + \alpha l$ вмѣсто $z \dots$;
то ясно, что ежели объ сіи функціи будутъ прерывныя от-
носительно къ α , въ опредѣленности величины $\alpha = 0$, въ ша-

комъ случаѣ оба выраженія u и du , принимаемыя за функціи переменныхъ $x, y, z \dots$ будутъ также прерывные относительно къ симъ переменнымъ въ сопредѣльности частныхъ величинъ имъ приписанныхъ. Присовокупивъ къ симъ замѣчаніямъ сказанное выше, надлежитъ заключить что величины $x, y, z \dots$ могутъ достигая *наибольшій* или *наименьшій величины* функціи u , суть или тѣ, отъ которыхъ u и du дѣлаются прерывными, или тѣ, которыя удовлетворяютъ уравненію (9) независимо отъ постоянныхъ величинъ $dx, dy, dz \dots$. Теперь легко будетъ рѣшить слѣдующій вопросъ.

Задача. Найти наибольшій и наименьшій величины функціи многихъ переменныхъ.

Рѣшеніе. Пусть будетъ $u = f(x, y, z \dots)$ предложенная функція. Сперва найдемъ величины $x, y, z \dots$ отъ которыхъ функція u или du дѣлается прерывною; къ симъ величинамъ должно отнести тѣ, кои выводятся изъ формулы

$$(10) \quad du = \pm \infty.$$

Помогъ, сыщемъ величины $x, y, z \dots$ удовлетворяющія уравненію (9), независимо отъ постоянныхъ величинъ $dx, dy, dz \dots$. Сіе уравненіе можетъ быть представлено въ слѣдующемъ видѣ:

$$(11) \quad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots = 0,$$

откуда получаемъ

$$(12) \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \text{ и проч. } \dots;$$

и дѣйствительно, $dx, dy, dz \dots$ будучи независимы и какіе нибудь, первое изъ сихъ уравненій получимъ полагая $dx = 1, dy = 0, dz = 0 \dots$; второе, полагая $dx = 0, dy = 1, dz = 0 \dots$; и проч. \dots Замѣшимъ, что какъ число уравненій (12) равно

числу неизвѣстныхъ $x, y, z \dots$, по чаще всего получимъ опредѣленное число сихъ неизвѣстныхъ (*).

Вообразимъ какую нибудь систему величинъ $x, y, z \dots$ удовлетворяющихъ уравненіямъ (12); означимъ чрезъ $x_0, y_0, z_0 \dots$ величины принадлежащія къ сей системѣ. Соотвѣтствующая величина функціи $f(x, y, z \dots)$, именно, $f(x_0, y_0, z_0 \dots)$ будетъ *наибольшая*, когда разность

$$(13) \quad f(x_0 + \alpha l, y_0 + \alpha k, z_0 + \alpha l \dots) - f(x_0, y_0, z_0 \dots)$$

для бесконечно-малыхъ численныхъ величинъ α или какихъ нибудь величинъ $h, k, l \dots$ останется постоянно отрицательною. На оборотъ, $f(x_0, y_0, z_0 \dots)$ будетъ *наименьшая* когда она разность останется постоянно положительною. Если же, измѣняя величины $h, k, l \dots$, сія разность будетъ иногда положительная, а иногда отрицательная, то величина $f(x_0, y_0, z_0 \dots)$ не будетъ ни *наибольшая* ни *наименьшая*.

Примѣръ. Функція $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F$ получаетъ *наибольшую* или *наименьшую величину*, когда $B^2 - 4AC < 0$, но не получаетъ ни той ни другой, когда $B^2 - 4AC > 0$.

Примѣчаніе. Случится можетъ что одна и таже величина функціи u , бѣльшая или мѣньшая всѣхъ смежныхъ величинъ того же количества, будетъ соотвѣтствовать бесконечному множеству различныхъ величинъ приписанныхъ измѣняемымъ $x, y, z \dots$. Она величина u будетъ слѣдовательно *наибольшая* или *наименьшая*. Когда сіе случится въ сопредѣльности тѣхъ значеній $x, y, z \dots$ для которыхъ u и du суть непрерывныя, то сіи количества необходимо будутъ удовлетворять уравненіямъ (12). И такъ, сіи уравненія могутъ иногда относиться къ тѣмъ, кои называются неопредѣленными. И дѣйствительно

(*) Сочинитель предполагаетъ, что функція u чаще всего алгебраическая.

но, можеть случишся что нѣкоторыя изъ нихъ заключають
всѣ остальные.

Примѣрѣ. Положивъ $u = (cy - bz + l)^2 + (az - cx + m)^2 + (bx - ay + n)^2$, уравненія (12) приводяшь только къ двумъ слѣдующимъ

$$\frac{cy - bz + l}{a} = \frac{az - cx + m}{b} = \frac{bx - ay + n}{c}$$

а величина u соотвѣтствующая безконечному множеству величинъ $x, y, z \dots$ удовлетворяющихъ двумъ послѣднимъ уравненіямъ, будеть слѣдующая

$$\frac{(al + bm + cn)^2}{a^2 + b^2 + c^2},$$

и можеть бышь принимаема за наименьшую.

УРОКЪ ОДИНАДЦАТЫЙ.

Объ употребленіи неопредѣленныхъ множителей при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ.

Означимъ чрезъ

$$(1) \quad u = f(x, y, z \dots)$$

функцию, заключающую n переменныхъ величинъ $x, y, z \dots$, и вообразимъ, что сіи измѣняемыя удовлетворяють m условнымъ уравненіямъ

$$(2) \quad v = 0, \quad w = 0, \text{ и проч. } \dots$$

и слѣдовательно зависящъ одинъ отъ другихъ.

Чтобы приложитъ способъ показанный для опредѣленія *наибольшихъ и наименьшихъ величинъ* функции u и къ настоящему случаю, должно сперва посредствомъ формуль (2) исключить изъ сей функции m различныхъ переменныхъ количествъ. Потомъ, разсматривая оставшіяся $n - m$ измѣняемыхъ независимыми, разыскаемъ шѣ величины сихъ переменныхъ, копорыя содѣлываютъ функцию u и ея дифференціалъ du прерывными, или шѣ, кои удовлетворяють уравненію

$$(3) \quad du = 0$$

независимо отъ дифференціаловъ сихъ самыхъ переменныхъ. Разысканіе *наибольшихъ и наименьшихъ величинъ* соотвѣствующихъ уравненію (3) можетъ быть облегчено слѣдующимъ образомъ:

Полный дифференціалъ функции u , разсматривая въ ней независимыми всѣ величины $x, y, z \dots$ будемъ

$$(4) \quad \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \dots = 0,$$

заключаюцїй n дифференціаловъ $dx, dy, dz \dots$. Но надлежитъ замѣнить, что изъ нихъ только $n - m$ будетъ произвольныхъ, остальные же будутъ зависѣть отъ первыхъ и отъ самыхъ измѣняемыхъ $x, y, z \dots$, и сія зависимость опредѣлится уравненіями $du = 0, dv = 0, dw = 0 \dots$ или, что все равно,

$$(5) \quad \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz + \dots = 0, \quad \frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz + \dots = 0, \text{ и проч.} \dots$$

И такъ, поелику уравненіе (4) должно состояться, какіе бы ни были дифференціалы переменныхъ независимыхъ, по ясно, что ежели выключимъ изъ сего уравненія число m дифференціаловъ помощію формулъ (5), то коэффициенты $n - m$ остальныхъ дифференціаловъ должны быть порознь равны нулю. Дабы совершить шаковое выключеніе, спомнишь только къ уравненію (4) придашь формулы (5) помноженные на *неопредѣленныя количества*, $-\lambda, -\mu, -\nu$ и проч. \dots , и опредѣлишь сіи послѣдніе множители такъ, чтобы въ получаемомъ послѣ сего уравненіи, коэффициенты у m зависимыхъ дифференціаловъ уничтожились. Сверхъ того, какъ окончательное уравненіе будетъ имѣть видъ

$$(6) \quad \left(\frac{du}{dx} - \lambda \frac{dv}{dx} - \mu \frac{dw}{dx} - \dots \right) dx + \left(\frac{du}{dy} - \lambda \frac{dv}{dy} - \mu \frac{dw}{dy} - \dots \right) dy + \dots = 0,$$

и какъ придемъ, по уничтоженіи въ ономъ коэффициентовъ m дифференціаловъ, должно будетъ уравнять нулю коэффициенты остальныхъ дифференціаловъ; по можно заключить, что величины $\lambda, \mu, \nu \dots$ выведенныя изъ кошорой нибудь изъ слѣдующихъ формулъ

$$(7) \quad \frac{du}{dx} - \lambda \frac{dv}{dx} - \mu \frac{dw}{dx} - \dots = 0, \quad \frac{du}{dy} - \lambda \frac{dv}{dy} - \mu \frac{dw}{dy} - \dots = 0, \text{ и проч.} \dots$$

должны будутъ удовлетворять всѣмъ прочимъ. Слѣдовательно, величины $x, y, z \dots$ удовлетворяющія формуламъ (4) и (5)

должны также удовлетворять условнымъ уравненіямъ, кои найдутся по исключеніи неопредѣленныхъ $\lambda, \mu, \nu \dots$ изъ формуль (7). Число сихъ условныхъ уравненій будетъ $n - m$. Присовокупляя къ онымъ формулы (2), получимся всего n уравненій, изъ коихъ выведется для данныхъ переменныхъ $x, y, z \dots$ нѣсколько системъ величинъ, между копорыми необходимо будутъ находиться и шѣ, кои не содѣлывая прерывною одну изъ функций u и du , дадутъ для первой *наибольшія* и *наименшія величины*. Не худо замѣшимъ, что условныя уравненія производяція отъ исключенія $\lambda, \mu, \nu \dots$ изъ формуль (7), нисколько неизмѣняюща замѣнивъ функцию u какою нибудь изъ функций v, w, \dots и на оборотъ. Слѣдовательно, условныя уравненія не измѣняюща если вмѣсто того чѣмъ искаемъ *наибольшія* и *наименшія величины* функции u , предполагая $v = 0, w = 0, \dots$, искали бы *наибольшія* и *наименшія величины* функции w , предполагая $u = 0, v = 0, \dots$; и проч. Даже, можно бы было, не измѣняя условныхъ уравненій, подспавимъ $u = a, v = b, w = c, \dots$ вмѣсто функций u, v, w, \dots гдѣ a, b, c, \dots означаютъ постоянныя произвольныя количества.

Въ частномъ случаѣ, когда желаемъ получить *наибольшія* и *наименшія величины* функции u , предполагая что x, y, z, \dots должны удовлетворять одному только уравненію

$$(8) \quad v = 0,$$

формулы (7) примутъ видъ

$$(9) \quad \frac{du}{dx} - \lambda \frac{dv}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} - \lambda \frac{dv}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} - \lambda \frac{dv}{dz} = 0, \quad \text{и проч.} \dots$$

откуда, исключивъ λ , получаемъ

$$(10) \quad \frac{\left(\frac{du}{dx}\right)}{\left(\frac{dv}{dx}\right)} = \frac{\left(\frac{du}{dy}\right)}{\left(\frac{dv}{dy}\right)} = \frac{\left(\frac{du}{dz}\right)}{\left(\frac{dv}{dz}\right)} = \text{и проч.} \dots$$

Сія послѣдняя формула заключаешъ $n - 1$ различныхъ уравнений, кои будучи сопряжены съ уравненіемъ (8), опредѣляшъ искомыя величины переменныхъ $x, y, z \dots$.

1-й *Примѣръ*. Предположимъ что требуется найти наибольшую и наименьшую величину функціи $u = ax + by + cz + \dots$, гдѣ $a, b, c \dots$ суть постоянныя количества, а $x, y, z \dots$ переменныя удовлетворяющія уравненію

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = r^2 \text{ или } x^2 + y^2 + z^2 + \dots - r^2 = 0,$$

гдѣ r означаешъ постоянную величину.

Формула (10) дославивъ

$$(11) \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \text{и проч.} \dots,$$

изъ чего выведешся (смотри *l'Analyse algébrique*, note 11, или примѣч. 11 переводчика).

$$\frac{ax + by + cz + \dots}{x^2 + y^2 + z^2 + \dots} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + \dots)}}, \text{ или } \frac{u}{r^2} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)}}{r},$$

слѣдственно

$$(12) \quad u = \pm r \sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)}.$$

Дабы удостовѣриться въ томъ, что изъ двухъ величинъ функціи u , дославляемыхъ уравненіемъ (12), одна наибольшая, а другая наименьшая величина, надлежитъ только замѣнить, что всегда будемъ имѣть

$$(13) \quad \begin{cases} (ax + by + cz + \dots)^2 + (bx - ay)^2 + (cx - az)^2 + \dots + (cy - bz)^2 + \dots \\ = (a^2 + b^2 + c^2 + \dots)(x^2 + y^2 + z^2 + \dots), \end{cases}$$

и слѣдовательно $u^2 < (a^2 + b^2 + c^2 + \dots) r^2$, исключая только случай, когда величины переменныхъ будутъ удовлетворяшъ формуль (11).

2-й *Примѣръ*. Означимъ чрезъ $a, b, c \dots k$ постоянныя количества, а чрезъ $x, y, z \dots$ переменныя удовлетворяющія уравненію

$$ax + by + cz + \dots = k$$

и спанемъ искашь *наибольшую величину* функции $u = x^2 + y^2 + z^2 + \dots$. Въ семь предположеніи, получимъ опять формулу (11), изъ коей выведемъ

$$\frac{K}{u} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)}}{\sqrt{u}}, \text{ и слѣдовательно}$$

$$(14) \quad u = \frac{K^2}{a^2 + b^2 + c^2 + \dots};$$

ежели число переменныхъ x, y, z, \dots , будетъ равно шремъ, и ежели положимъ, что оныя означаютъ прямоугольныя координаты, то величина \sqrt{u} , слѣдующая изъ уравненій (14), очевидно будетъ изображать кратчайшее разстояніе отъ начала координатъ до опредѣленной плоскости.

3-й *Примѣръ*. Положимъ что пребуемся сыскашь полу-оси эллипса или иперболы опнесенныхъ къ центру, и опредѣляемыхъ уравненіемъ

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = K.$$

Наждая изъ сихъ полу-осей будетъ *наибольшая* или *наименьшая величина* радіуса вектора r , проведеннаго отъ начала координатъ до кривой, и опредѣляемаго формулою $r^2 = x^2 + y^2$. Поелику будемъ имѣшь $dr = \frac{1}{r}(x dx + y dy)$, то нельзя будетъ уничтожишь dr иначе, какъ предположивъ $r = \infty$ или $x dx + y dy = 0$. Первое предположеніе можеть только бышь принято въ иперболѣ. Принявъ же второе, въ слѣдствіе формулы (10) имѣемъ

$$\frac{x}{Ax + By} = \frac{y}{Cy + Bx} = \frac{x^2 + y^2}{x(Ax + By) + y(Cy + Bx)} = \frac{r^2}{K}, \quad \frac{K}{r^2} - A = B \frac{y}{x}, \quad \frac{K}{r^2} - C = B \frac{x}{y},$$

$$(15) \quad \left(\frac{K}{r^2} - A\right) \left(\frac{K}{r^2} - C\right) = B^2.$$

Теперь замѣтимъ, что вещественнымъ величинамъ количества r , будутъ всегда соответствовать положительныя величины r^2 , и что уравненіе (15) доставляетъ двѣ положительныя величины для r^2 когда $AK > 0$, $AC - B^2 > 0$; одну, когда $AC - B^2 < 0$. И дѣйствительно, въ первомъ случаѣ кривая линія есть эллипсъ, и следовательно будетъ имѣть обѣ оси вещественныя; во второмъ же случаѣ, какъ она кривая линія есть гиперболою, но и будетъ имѣть только одну возможную ось.

УРОКЪ ДВѢНАДЦАТЫЙ.

*Дифференціалы и производныя функции разныхъ порядковъ
выраженій заключающихъ одну переменную. Объ измѣненіи
переменнаго независимаго количества.*

Такъ какъ производныя функций одной переменной x обыкновенно бываютъ другія функции сей самой переменной, по очевидно что изъ данной функции $y=f(x)$, можно будетъ вывести вообще множество новыхъ функций, и каждая изъ нихъ будетъ производною предыдущей. Сии новыя функции называются *производными функциями разныхъ порядковъ* количества y или $f(x)$ и оныя означаются знакоположеніями

$$y', y'', y''', y^{IV}, y^V, \dots y^{(n)}$$

или $f'(x), f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), f^V(x), \dots f^{(n)}(x)$.

И такъ y' или $f'(x)$ будетъ производная функция перваго порядка данной функции $y=f(x)$; y'' или $f''(x)$ будетъ производная втораго порядка количества y , или производная перваго порядка функции y' ; и проч. . . . ; наконецъ $y^{(n)}$ или $f^{(n)}(x)$ (гдѣ n означаетъ какое нибудь цѣлое число) будетъ производная $n^{\text{го}}$ порядка количества y , или производная перваго порядка функции $y^{(n-1)}$.

Пусть будетъ шеперь $dx = h$ дифференціалъ переменной x разсмащриваемой независимою. Изъ сказаннаго выше, получился

$$(1) \quad y' = \frac{dy}{dx}, y'' = \frac{dy'}{dx}, y''' = \frac{d^2 y'}{dx^2}, \dots y^{(n)} = \frac{d^{n-1} y'}{dx^{n-1}},$$

или, что все равно,

$$(2) \quad dy = y' \cdot h, \quad dy' = y'' \cdot h, \quad dy'' = y''' \cdot h, \dots, \quad dy^{(n)} = y^{(n-1)} \cdot h.$$

Сверхъ того, какъ дифференціалъ функціи переменнѣной x есть другая функція сей самой переменнѣной, по посему и можно будетъ дифференцировать y нѣсколько разъ сряду. Такимъ образомъ получимъ *дифференціалы разныхъ порядковъ* функціи y , а именно:

$$dy = y' h = y' dx, \quad ddy = h \cdot dy' = y'' h^2 = y'' dx^2, \\ dddy = h^2 dy'' = y''' h^3 = y''' dx^3, \text{ и проч.}$$

Для сокращенія пишется просто d^2y вмѣсто ddy , d^3y вмѣсто ddd и проч....; посему dy изображаетъ дифференціалъ перваго порядка, d^2y дифференціалъ втораго порядка и проч....; и вообще $d^n y$ изображаетъ дифференціалъ $n^{\text{го}}$ порядка. Въ слѣдствіе сихъ условій выйдешь

$$(3) \quad dy = y' dx, \quad d^2y = y'' dx^2, \quad d^3y = y''' dx^3, \quad d^4y = y^{IV} dx^4, \dots, \quad d^n y = y^{(n)} dx^n,$$

ошсюда ,

$$(4) \quad y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad y''' = \frac{d^3y}{dx^3}, \quad y^{IV} = \frac{d^4y}{dx^4}, \dots, \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

По послѣдней изъ формулъ (3) заключаемъ, что производная функція $n^{\text{го}}$ порядка, а именно $y^{(n)}$ есть пошъ самой коэффиціентшъ, на который должно умножишь $n^{\text{ю}}$ степень пошюянной величины $h = dx$, чшобъ получишь дифференціалъ $n^{\text{го}}$ порядка. По сей по причинѣ $y^{(n)}$ называется иногда *дифференціалнвмъ коэффиціентомъ $n^{\text{го}}$ порядка*.

Обьясненныя правила для опредѣленія дифференціаловъ и производныхъ функцій перваго порядка выраженій заключающихъ одну шолько переменную, послужашъ равно и къ опредѣленію ихъ дифференціаловъ и производныхъ высшихъ порядковъ. Вычисленія сего рода очень просшы, чшо можно видѣшь изъ слѣдующихъ примѣровъ.

Возьмемъ сперва $y = \sin y$. Означивъ буквою a постоянное количество, получимъ $d \sin (x + a) = \cos (x + a) d(x + a) = \sin (x + a + \frac{1}{2} \pi) dx$, откуда

$$d \sin x = \sin (x + \frac{1}{2} \pi) dx, \quad d \sin (x + \frac{1}{2} \pi) = \sin (x + \pi) dx, \\ d \sin (x + \pi) = \sin (x + \frac{3}{2} \pi) dx \dots; \text{ слѣдовательно получимъ} \\ \text{полагая } y = \sin x, \quad y' = \sin (x + \frac{1}{2} \pi), \quad y'' = \sin (x + \pi), \\ y''' = \sin (x + \frac{3}{2} \pi), \dots y^{(n)} = \sin (x + \frac{n}{2} \pi).$$

Подобнымъ образомъ найдемъ:

полагая $y = \cos x$, $y' = \cos (x + \frac{1}{2} \pi)$, $y'' = \cos (x + \pi)$, $y''' = \cos (x + \frac{3}{2} \pi)$, ..

$$y^{(n)} = \cos (x + \frac{n}{2} \pi);$$

полагая $y = A^x$, $y' = A^x (lA)$, $y'' = A^x (lA)^2$, $y''' = A^x (lA)^3$, ..

$$y^{(n)} = A^x (lA)^n;$$

полагая $y = x^a$, $y' = a x^{a-1}$, $y'' = a(a-1) x^{a-2}$, ..

$$y^{(n)} = a(a-1)(a-2) \dots (a-n+1) x^{a-n}.$$

Замѣшимъ что каждое изъ выраженій $\sin (x + \frac{1}{2} n \pi)$, $\cos (x + \frac{1}{2} n \pi)$, съ измѣненіемъ n , доспавляешь только четыре величины разнсвуюющія между собою, которыя будутъ всегда возвращаться въ одномъ и томъ же порядкѣ. Сии четыре величины получашся подспавляя вмѣсто n цѣлыя числа вида $4k$, $4k+1$, $4k+2$ и $4k+3$ (гдѣ k цѣлое число), и онны будутъ по порядку $\sin x$, $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, для выраженія $\sin (x + \frac{1}{2} n \pi)$, и $\cos x$, $-\sin x$, $-\cos x$, $\sin x$ для выраженія $\cos (x + \frac{1}{2} n \pi)$. Что касается до выраженій A^x , x^a , то подспавляя въ первомъ вмѣсто A основаніе Неперовой системы логариетомъ e , а во второмъ n вмѣсто a , увидимъ что всѣ производныя функціи e^x будутъ равны e^x ; производная же $n^{\text{го}}$ порядка функціи x^n равна будетъ постоянному количеству $1.2.3 \dots n$, а производныя высшихъ порядковъ уничтожатся.

Вводя дифференціалы вмѣсто производныхъ функцій, въ слѣдствіе доказанныхъ нами формулъ, получимъ

$d^n \sin x = \sin(x + \frac{1}{2}n\pi) dx^n$, $d^n \cos x = \cos(x + \frac{1}{2}n\pi) dx^n$, $d^n A^x = A^x (LA)^n dx^n$,
 $d^n e^x = e^x dx^n$, $d^n(x^a) = a(a-1)\dots(a-n+1)x^{a-n} dx^n$, $d^n(x^n) = 1.2.3\dots n. dx^n$,
 $d^n l(x) = dx. d^{n-1}(x^{-1}) = (-1)^{n-1} \frac{1.2.3\dots(n-1)}{x^n} dx^n$, и проч....

Разсмотримъ еще двѣ функціи $f(x+a)$ и $f(ax)$. Найдется полагая $y=f(x+a)$, $y'=f'(x+a)$, $y''=f''(x+a)$, .. $y^{(n)}=f^{(n)}(x+a)$,
 $d^n y = f^{(n)}(a+x) dx^n$.

полагая $y=f(ax)$, $y'=af'(ax)$, $y''=a^2f''(ax)$, .. $y^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax)$,
 $d^n y = a^n f^{(n)}(ax) dx^n$.

Прилибры. $d^n(x+a)^n = 1.2.3\dots n. dx^n$, $d^n.e^{ax} = a^n e^{ax} dx^n$,
 $d^n \sin ax =$ и проч....

Теперь пусть будущъ $y=f(x)$ и z двѣ функціи измѣняемой x сопряженныя уравненіемъ

$$(5) \quad z = F(y),$$

Дифференцируя сіе уравненіе нѣсколько разъ сряду, получимся

$$(6) \quad dz = F'(y) dy, \quad d^2z = F''(y) dy^2 + F'(y) d^2y,$$

$$d^3z = F'''(y) dy^3 + 3F''(y) dy \cdot d^2y + F'(y) d^3y, \text{ и проч.}$$

Прилибры. $d^n(a+y) = d^n y$, $d^n(-y) = -d^n y$, $d^n(ay) = ad^n y$,
 $d^n(ax^n) = 1.2.3\dots n. a dx^n$, $de^y = e^y dy$, $d^2e^y = e^y(dy^2 + d^2y)$,
 $d^3e^y = e^y(dy^3 + 3dyd^2y + d^3y)$, и проч....

Полагая же переменную x зависимою, уравненіе

$$(7) \quad y = f(x),$$

будучи дифференцировано нѣсколько разъ сряду, доставитъ новыя формулы совершенно подобныя уравненіямъ (6), именно:

$$(8) \quad dy = f'(x) dx, \quad d^2y = f''(x) dx^2 + f'(x) d^2x,$$

$$d^3y = f'''(x) dx^3 + 3f''(x) dx d^2x + f'(x) d^3x, \text{ и проч....}$$

изъ кошорыхъ получимъ

$$(9) \begin{cases} f'(x) = \frac{dy}{dx}, \\ f''(x) = \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^3} = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dy}{dx}\right), \\ f'''(x) = \frac{dx(dx d^3 y - dy d^3 x) - 3d^2 x(dx d^2 y - dy d^2 x)}{dx^6} = \frac{1}{dx} d\left(\frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^3}\right), \\ \text{и проч. . . .} \end{cases}$$

Дабы перейти къ тому случаю, въ которомъ x полагается переменною независимою, спойшь только принять дифференціалъ dx за постоянную величину; поему $d^2 x = 0$, $d^3 x = 0$ и проч. . . . Слѣдовательно формулы (9) превращаются въ

$$(10) \quad f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad f'''(x) = \frac{d^3 y}{dx^3}, \quad \text{и проч. . . .}$$

которыя сходны съ уравненіями (4). Сравнивая сіи послѣднія съ уравненіями (9) заключаемъ, что ежели послѣдовательныя производныя $f(x)$ будутъ выражены посредствомъ дифференціаловъ переменныхъ x и $y = f(x)$, то одна только производная перваго порядка $f'(x)$ не измѣнилась, будемъ ли принимать x за переменную зависимую, или за переменную независимую. Еще прибавимъ, что дабы перейти осьъ перваго случая ко второму, надобно будетъ подставить $\frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{dx^3}$ вмѣсто $\frac{d^2 y}{dx^2}$, $\frac{dx(dx d^3 y - dy d^3 x) - 3d^2 x(dx d^2 y - dy d^2 x)}{dx^6}$ вмѣсто $\frac{d^3 y}{dx^3}$ и проч. . . . Подобными подстановленіями производятся *измѣненіе переменной независимой*.

Между сложными функціями одной измѣняемой, находящаяся такая, коихъ послѣдовательныя дифференціалы представляются въ весьма простомъ видѣ. Положимъ, на примѣръ, что u, v, w, \dots будутъ означать различныя функціи x . Дифференцируя n разъ каждую изъ сложныхъ функцій

$u + v, \quad u - v, \quad u + v\sqrt{-1}, \quad au + bv + cw + \dots$, найдемъ:

$$(11) \quad d^n(u + v) = d^n u + d^n v, \quad d^n(u - v) = d^n u - d^n v,$$

$$d^n(u + v \sqrt{-1}) = d^n u + d^n v \sqrt{-1}.$$

$$(12) \quad d^n(au + bv + cw + \dots) = a d^n u + b d^n v + c d^n w + \dots$$

Изъ формулы (12) слѣдуетъ, что дифференціалъ $d^n y$ цѣлой функціи

$$y = ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \dots + px^2 + qx + r$$

обращается, для $n = m$, въ постоянное количество $1.2.3\dots m.adx^m$, а для $n > m$, въ нуль.

УРОКЪ ТРИНАДЦАТЫЙ.

Дифференціалы разныхъ порядковъ функций многихъ переменныхъ.

Изобразимъ чрезъ $u = f(x, y, z \dots)$ функцию многихъ переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$. Дифференцируя сію функцию нѣсколько разъ сряду, относительно ко всѣмъ измѣняемымъ, или къ одной только изъ нихъ, получимъ нѣсколько новыхъ функций, изъ коихъ каждая будетъ полная производная предъидущей функции. Даже можно будетъ дифференцировать послѣдовательно функцию $u = f(x, y, z \dots)$, принимая за переменную по одну, по другую изъ величинъ $x, y, z \dots$. Во всѣхъ случаяхъ, выводъ получаемый чрезъ одно, два, три, ... дифференцированій, называется *полнымъ* или *частнымъ дифференціаломъ*, перваго, втораго, третьяго *порядка*. Такъ, напримѣръ, дифференцируя функцию u нѣсколько разъ сряду, относительно ко всѣмъ переменнымъ, составимъ полные дифференціалы $du, ddu, dddu \dots$, кои для краткости означаются знаменами $du, d^2u, d^3u \dots$. Напримѣръ, взявъ дифференціалъ нѣсколько разъ сряду въ разсужденіи измѣняемой x , составимъ частные дифференціалы $d_x u, d_x d_x u, d_x d_x d_x u, \dots$ кои означаются чрезъ $d_x u, d_x^2 u, d_x^3 u \dots$. Вообще, ежели n будетъ какое нибудь цѣлое число, то полный дифференціалъ $n^{\text{го}}$ порядка изобразится чрезъ $d^n u$, а дифференціалъ того же порядка въ разсужденіи одной изъ измѣняемыхъ $x, y, z \dots$ чрезъ $d_x^n u, d_y^n u, d_z^n u$, и проч. . . . Когда будемъ

дифференцировавъ функцію u два или нѣсколько разъ сряду относительно двухъ или нѣсколькихъ переменныхъ, то получимъ частные дифференціалы вшораго или высшихъ порядковъ, которые изображаются такимъ образомъ: $d_x d_y u$, $d_y d_x u$, $d_x d_z u$, \dots , $d_x d_y d_z u$, \dots . Легко усмотрѣшь, что дифференціалы сего рода сохраняютъ однѣ и тѣже величины каковъ бы ни былъ порядокъ дифференцированій относительно переменныхъ x , y , z ... И такъ, на примѣръ, будемъ имѣть

$$(1) \quad d_x d_y u = d_y d_x u.$$

Впрочемъ сіе уравненіе можно доказать слѣдующимъ образомъ.

Означимъ чрезъ Δ_x пославленное впереди функціи $u=f(x, y, z..)$ приращеніе, которое получаетъ сія функція когда увеличиваемъ x количествомъ безконечно-малымъ αdx . Получится

$$(2) \quad \Delta_x u = f(x + \alpha dx, y, z..) - f(x, y, z..), \quad d_x u = \text{пр. } \frac{\Delta_x u}{\alpha},$$

$$(3) \quad \Delta_x d_y u = d_y (u + \Delta_x u) - d_y u = d_y \Delta_x u, \quad \text{слѣдовательно}$$

$$\frac{\Delta_x d_y u}{\alpha} = \frac{d_y \Delta_x u}{\alpha} = d_y \frac{\Delta_x u}{\alpha};$$

помощью, полагая что α приближается къ нулю, въ слѣдствіе вшорой изъ формулъ (2) получится уравненіе (1). Подобнымъ образомъ можно доказать и слѣдующія пожешественныя уравненія: $d_x d_z u = d_z d_x u$, $d_y d_z u = d_z d_y u$, и проч. . . .

Примѣръ. Полагая $u = \text{arc. tang. } \frac{x}{y}$, найдемся

$$d_x u = \frac{y}{x^2 + y^2} dx, \quad d_y u = \frac{-x}{x^2 + y^2} dy, \quad d_y d_x u = d_x d_y u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} dx dy.$$

Доказавъ уравненіе (1), выводимъ изъ онаго по слѣдствіе, что въ выраженіи, имѣющемъ видъ $d_x d_y d_z \dots u$, всегда можно перемѣщать между собою переменныя, къ коимъ относяся два послѣдовательныя дифференцированія. Посему, легко усмотрѣшь, что помощію одного или нѣсколькихъ подобныхъ перемѣщеній, можно будетъ измѣнить по произволу порядокъ

дифференцированій. Такъ, на примѣръ, чшобъ доказать равенство двухъ выраженій $d_z d_y d_x u$ и $d_x d_y d_z u$, должно сперва въ послѣднемъ изъ нихъ чрезъ два послѣдовательныя перемѣщенія, перевести букву x на мѣсто буквы z , потомъ перемѣстивъ буквы y и z , дабы буква y занимала опять второе мѣсто. И пакъ, можно утвердить, что величина дифференціала $d_x d_y d_z \dots u$ совершенно независима отъ порядка, въ которомъ производимы были дифференцированія, относительно къ измѣняемымъ $x, y, z \dots$. Сіе предложеніе справедливо даже и въ томъ случаѣ, когда нѣсколько дифференцированій относятся къ одной изъ переменныхъ, какъ на примѣръ, въ выраженіяхъ $d_x d_y d_x u$, $d_x d_y d_x d_x u$, и проч. Тогда для сокращенія пишется d^2_x вмѣсто $d_x d_x$, d^3_x вмѣсто $d_x d_x d_x$, и проч. Въ слѣдствіе сего условія, будемъ имѣть

$$d^2_x d_y u = d_x d_y d_x u = d_y d^2_x u, \quad d^3_x d_y d_z u = d_x d_y d_x d_z d_x u = d_y d^3_x d_z u = \text{и пр.} \dots$$

$$d^2_x d^3_y u = d^3_y d^2_x u, \quad d_x d^2_y d^3_z u = d_x d^3_z d^2_y u = d^2_y d_x d^3_z u = \text{и пр.} \dots$$

и вообще, означая буквами $l, m, n \dots$ какія нибудь цѣлыя числа, получимъ

$$(4) \quad d^l_x d^m_y d^n_z \dots u = d^l_x d^n_z d^m_y \dots u = d^m_y d^l_x d^n_z \dots u = \text{и проч.} \dots$$

Поелику чрезъ дифференцированіе функціи переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$ относительно къ одной изъ нихъ, получится новая функція сихъ самыхъ переменныхъ, умноженная на постоянную конечную величину dx или dy или $dz \dots$, и какъ сверхъ того при дифференцированіи произведенія, постоянные множители всегда выносятся за знакъ d : то очевидно, что ежели будемъ дифференцировать функцію $u = f(x, y, z \dots)$, l разъ къ разсужденію x , m разъ въ разсужденію y , n разъ въ разсужденію $z \dots$, то окончательный дифференціалъ, а именно $d^l_x d^m_y d^n_z \dots u$, будетъ равенъ произведенію новой функціи измѣняемыхъ $x, y, z \dots$ на множителей $dx, dy, dz \dots$ воз-

вышешныхъ, первой въ степень l , второй въ степень m , третьей въ степень n Новая функція, о коей здѣсь говоримся, называется *частною производною* функціи u , порядка $l + m + n + \dots$. Означая оную чрезъ $\varpi(x, y, z \dots)$, будемъ имѣть

$$(5) \quad d_x^l d_y^m d_z^n \dots u = \varpi(x, y, z \dots) dx^l dy^m dz^n \dots,$$

откуда

$$(6) \quad \varpi(x, y, z \dots) = \frac{d_x^l d_y^m d_z^n \dots u}{dx^l dy^m dz^n \dots}.$$

Легко выразишь полные дифференціалы $d^2 u$, $d^3 u$. . . посредствомъ частныхъ дифференціаловъ функціи u , или ихъ частныхъ производныхъ. И дѣйствительно, изъ формулы (10) (8^{го} урока) получимся

$$\begin{aligned} d^2 u &= d du = d_x du + d_y du + d_z du + \dots \\ &= d_x(d_x u + d_y u + d_z u \dots) + d_y(d_x u + d_y u + d_z u \dots) + d_z(d_x u + d_y u + d_z u \dots) + \dots, \end{aligned}$$

и слѣдовательно

$$(7) \quad d^2 u = d_x^2 u + d_y^2 u + d_z^2 u + \dots + 2d_x d_y u + 2d_x d_z u \dots + 2d_y d_z u + \dots,$$

или, что все равно,

$$(8) \quad \begin{aligned} d^2 u &= \\ &= \frac{d_x^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d_y^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d_z^2 u}{dz^2} dz^2 + \dots \\ &+ 2 \frac{d_x d_y u}{dx dy} dx dy + 2 \frac{d_x d_z u}{dx dz} dx dz \dots + 2 \frac{d_y d_z u}{dy dz} dy dz \dots \end{aligned}$$

Подобнымъ образомъ можно опредѣлить и величины $d^3 u$, $d^4 u$, . . .

Примѣры. $d^2(xy z) = 2(x dy dz + y dz dx + z dx dy)$,
 $d^3(xy z) = 6 dx dy dz$, $d^2(x^2 + y^2 + z^2 \dots) = 2(dx^2 + dy^2 + dz^2 \dots)$,
 $d^3(x^3 + y^3 + z^3 \dots) = 6(dx^3 + dy^3 + dz^3 \dots)$, и проч. . . .

Для сокращенія, буквы находящіяся подъ характеристикою d , какъ напримѣръ въ уравненіяхъ (6), (8), и проч. . . . обыкновенно не пишутся, и второй членъ формулы (6) замѣняется просто слѣдующимъ:

$$(9) \quad \frac{d^{l+m+n \dots} u}{dx^l dy^m dz^n \dots}$$

Посему частныя производныя вшораго порядка изображаются такимъ образомъ: $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dy^2}$, $\frac{d^2 u}{dz^2}$. . . $\frac{d^2 u}{dx dy}$, $\frac{d^2 u}{dx dz}$. . . $\frac{d^2 u}{dy dz}$. . . , частныя производныя прешьяго порядка: $\frac{d^3 u}{dx^3}$, $\frac{d^3 u}{dx^2 dy}$, $\frac{d^3 u}{dx dy^2}$, и проч.; величина же для $d^2 u$ будетъ слѣдующая

$$(10) \quad d^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} dx^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} dy^2 + \frac{d^2 u}{dz^2} dz^2 \dots + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} dx dy + 2 \frac{d^2 u}{dx dz} dx dz \dots + 2 \frac{d^2 u}{dy dz} dy dz \dots$$

Но замѣнимъ, что въ сей величинѣ нельзя сократить на дифференціалы dx , dy , $dz \dots$, пошому что $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dx dy} \dots$ не означаютъ частныхъ чиселъ произшедшихъ отъ раздѣленія $d^2 u$ на dx^2 или на $dx dy \dots$

Ежели, вмѣсто функціи $u = f(x, y, z \dots)$ разсмотримъ слѣдующую:

$$(11) \quad s = F(u, v, w \dots),$$

гдѣ количества $u, v, w \dots$ сами означаютъ какія нибудь функціи переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$, по величины $d^2 s, d^3 s \dots$ опредѣляшся безъ малѣйшаго затрудненія по правиламъ выведеннымъ въ девятомъ урокъ. И дѣйствительно, дифференцируя нѣсколько разъ сряду формулы (11), найдемся:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} ds &= \frac{dF(u, v, w \dots)}{du} du + \frac{dF(u, v, w \dots)}{dv} dv + \frac{dF(u, v, w \dots)}{dw} dw + \dots \\ d^2 s &= \frac{d^2 F(u, v, w \dots)}{du^2} du^2 + \dots + 2 \frac{d^2 F(u, v, w \dots)}{dudv} dudv + \dots + \frac{d^2 F(u, v, w \dots)}{du} d^2 u + \dots \\ &\text{и проч.} \dots \end{aligned} \right.$$

Примѣрси. $d^n(u + v) = d^n u + d^n v$, $d^n(u - v) = d^n u - d^n v$, $d^n(u + v\sqrt{-1}) = d^n u + \sqrt{-1} d^n v$, $d^n(au + bv + cw + \dots) = ad^n u + bd^n v + cd^n w + \dots$

Спось же легко опредѣляюся и дифференціалы неявныхъ функцій, содержащихъ нѣсколько измѣняемыхъ независимыхъ количествъ. Для сего, должно дифференцировать одинъ разъ или нѣсколько разъ сряду уравненія, опредѣляющія сіи самыя функціи, разсматривая постоянными дифференціалы переменныхъ независимыхъ, и принимая другіе дифференціалы за новыя функціи сихъ самыхъ переменныхъ.

УРОКЪ ЧЕТЫРНАДЦАТЫЙ.

Способы облегчающіе изысканіе полныхъ дифференціаловъ функций многихъ переменныхъ. Символическія выраженія для сихъ дифференціаловъ.

Пусть $u = f(x, y, z \dots)$ будетъ функція переменныхъ независимыхъ количествъ $x, y, z \dots$; сверхъ того изобразимъ чрезъ $\varphi(x, y, z \dots)$, $\chi(x, y, z \dots)$, $\psi(x, y, z \dots)$, и проч. ея частныя производныя функціи перваго порядка, взявшы относительно къ $x, y, z \dots$. Предположивъ, какъ въ урокъ 8^{мъ},

$$(1) \quad F(\alpha) = f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz \dots),$$

и дифференцируя попомъ обѣ части уравненія (1) въ разсужденіи переменной α , найдемся:

$$(2) \quad F'(\alpha) = \varphi(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz \dots) dx \\ + \chi(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz \dots) dy \\ + \psi(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz \dots) dz + \dots;$$

полагая въ сей послѣдней формулѣ $\alpha = 0$, получимъ слѣдующую:

$$(3) \quad F'(0) = \varphi(x, y, z \dots) dx + \chi(x, y, z \dots) dy + \psi(x, y, z \dots) dz + \dots = du;$$

которая равнозначуца съ уравненіемъ (16) осьмага урока. Сверхъ того, сравнивая между собою уравненія (1) и (2), легко усмотрѣшь что чрезъ дифференцированіе относительно къ α какой нибудь функціи переменныхъ количествъ

$$(4) \quad x + \alpha dx, \quad y + \alpha dy, \quad z + \alpha dz, \dots$$

получишя производная, которая равна будетъ другой функціи сихъ самыхъ измѣняемыхъ, соединенныхъ извѣстнымъ образомъ

съ постоянными величинами $dx, dy, dz \dots$. Продолжая дифференцировать относительно къ переменнѣй α , получимъ новыя функціи шакого же рода; изъ сего заключаемъ, что кромѣ выраженій (4), не будешь входить другихъ переменныхъ количествъ въ $F(\alpha)$ и $F'(\alpha)$, также и въ $F''(\alpha), F'''(\alpha) \dots$, и вообще въ $F^{(n)}(\alpha)$, изображая чрезъ n какое нибудь цѣлое число. Слѣдовательно разности

$F(\alpha) - F(0), F'(\alpha) - F'(0), F''(\alpha) - F''(0), \dots F^{(n)}(\alpha) - F^{(n)}(0)$, будешь равны приращеніямъ, которыя получаютъ функціи x, y, z, \dots выраженные чрезъ

$$F(0), F'(0), F''(0), \dots F^{(n)}(0),$$

когда припишемъ переменнымъ независимымъ безконечно-малыя приращенія $\alpha dx, \alpha dy, \alpha dz \dots$. На сёмъ основаніи, поелику $F(0) = u$: то предполагая что α приближается къ предѣлу нуль, найдешся поспешенно:

$$F'(0) = \text{пр.} \frac{F(\alpha) - F(0)}{\alpha} = \text{пр.} \frac{\Delta u}{\alpha} = du,$$

$$F''(0) = \text{пр.} \frac{F'(\alpha) - F'(0)}{\alpha} = \text{пр.} \frac{\Delta du}{\alpha} = ddu = d^2u,$$

$$F'''(0) = \text{пр.} \frac{F''(\alpha) - F''(0)}{\alpha} = \text{пр.} \frac{\Delta d^2u}{\alpha} = dd^2u = d^3u,$$

и проч. . . .

$$F^{(n)}(0) = \text{пр.} \frac{F^{(n-1)}(\alpha) - F^{(n-1)}(0)}{\alpha} = \text{пр.} \frac{\Delta d^{n-1}u}{\alpha} = dd^{n-1}u = d^nu.$$

Слѣдовательно

$$(5) u = F(0), du = F'(0), d^2u = F''(0), d^3u = F'''(0), \dots d^nu = F^{(n)}(0).$$

И такъ, для опредѣленія полныхъ дифференціаловъ $du, d^2u \dots d^nu$, стоишь только вычислить частныя величины производныхъ функцій $F'(\alpha), F''(\alpha) \dots F^{(n)}(\alpha)$, въ случаѣ $\alpha = 0$.

Къ способамъ облегчающимъ опредѣленіе полныхъ дифференціаловъ, должно отнести еще и тѣ, которыя основаны на

разсмаприваніи символическихъ величинъ сихъ дифференціаловъ.

Въ анализѣ, *символическиѣмъ выраженіемъ* или просто *символомъ*, называется такое соединеніе алгебраическихъ знаковъ, которое само по себѣ не имѣетъ никакого значенія, или которому условно приписываютъ величину разнсвующую отъ насоящей. Равнымъ образомъ, *символическими уравненіями* называются такія уравненія, которые, будучи разсмаприваемы въ спрогомъ смыслѣ, согласно съ общепринятыми условіями, суть непочны или не имѣють опредѣленнаго смысла, но изъ коихъ однакоже можно вывести заключенія справедливыя, ограничивая или измѣняя, сообразно съ нѣкоторыми правилами, сіи самыя уравненія или знаки входящіе въ оныя. Къ символическимъ уравненіямъ кои могутъ быть полезны (смотри *Analyse algébrique*, Главу VII), отнесемъ и шѣ, которые будутъ доказаны ниже.

Означивъ чрезъ $a, b, c \dots$ постоянныя количества, и чрезъ $l, m, n \dots p, q, r \dots$ цѣлыя числа, полный дифференціалъ выраженія

$$(6) \quad a d^l_x d^m_y d^n_z \dots u + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots u + \text{и проч.} \dots$$

опредѣлится формулою

$$(7) \quad \begin{aligned} & d [a d^l_x d^m_y d^n_z \dots u + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots u + \dots] \\ &= d_x [a d^l_x d^m_y d^n_z \dots u + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots u + \dots] \\ &+ d_y [a d^l_x d^m_y d^n_z \dots u + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots u + \dots] \\ &+ d_z [a d^l_x d^m_y d^n_z \dots u + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots u + \dots] \dots \\ &= a d^{l+1}_x d^m_y d^n_z \dots u + a d^l_x d^{m+1}_y d^n_z \dots u \\ &+ a d^l_x d^m_y d^{n+1}_z \dots u \dots + b d^{p+1}_x d^q_y d^r_z \dots u + \dots \end{aligned}$$

Сличеніе сей формулы съ уравненіемъ (4) 13^{го} урока, непосредственно приводитъ къ слѣдующему предложенію.

Теорема. Для опредѣленія полного дифференціала въ выраженія (6), стоитъ только умножить на d произведеніе двухъ множителей $a d^l_x d^m_y d^n_z \dots + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots + \dots$ и u , полагая $d = d_x + d_y + d_z + \dots$, и производя умноженіе какъ бы знаменителія d, d_x, d_y, d_z, \dots изображали настоящія количества разлитныя между собою, потому въ выводѣ умноженія, поставитъ въ разныхъ тленахъ, множителей $a, b, c \dots$ на первое мѣсто, а букву u на послѣднее; совершивъ сіе, должно предположить что знаки $d_x, d_y, d_z \dots$ перестали изображать количества, а принимаютъ онѣ въ прежнемъ ихъ значеніи.

Примѣры. Опредѣляя, помощію сей теоремы, полный дифференціалъ выраженія

$$(8) \quad d_x u + d_y u + d_z u + \dots,$$

окажешся, что найденная величина для $d d u$ или $d^2 u$ есть самая, которая выражена формулою (7) въ предыдущемъ урокъ. Приложивъ теорему къ найденной величинѣ $d^2 u$, получимся величина $d^3 u$, и такъ далѣе.

Примѣчаніе. Когда означаемъ только умноженія, помощію коихъ, въ слѣдствіе послѣдней теоремы, можно опредѣлишь полный дифференціалъ выраженія (6), то вмѣсто уравненія (7), получимся символическая формула

$$(9) \quad \left\{ \begin{array}{l} d[a d^l_x d^m_y d^n_z \dots u + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots u + \dots] = \\ [a d^l_x d^m_y d^n_z \dots + b d^p_x d^q_y d^r_z \dots + \dots] [d_x + d_y + d_z + \dots] u. \end{array} \right.$$

Поелику въ формуль (9), знаки $d_x, d_y, d_z \dots$, должны изображать дифференціалы, то очевидно, что сія формула въ строгомъ смыслѣ не имѣетъ никакого опредѣленнаго значенія; но она становится прочною, перемноживъ настоящимъ образомъ множителей вшорой ея части, помощію обыкновенныхъ правилъ алгебраическаго умноженія, принимая $d_x, d_y, d_z \dots$ за количества, а не за знаки.

Если выраженіе (6) будетъ замѣнено выраженіемъ (8), то дифференцируя послѣднее нѣсколько разъ сряду, получимъ, помощью тѣхъ же самыхъ способовъ, символическія величины для полныхъ дифференціаловъ d^2u , d^3u . . . , именно, $(d_x + d_y + d_z \dots)(d_x + d_y + d_z \dots)u$, $(d_x + d_y + d_z \dots)(d_x + d_y + d_z \dots)(d_x + d_y + d_z \dots)u$, и проч.

Присовокупивъ къ символическимъ симъ выраженіямъ и символическую величину для du , и означивъ сверхъ того чрезъ $(d_x + d_y + d_z \dots)^2$ выраженіе $(d_x + d_y + d_z \dots)(d_x + d_y + d_z \dots)$, чрезъ $(d_x + d_y + d_z \dots)^3$ выраженіе $(d_x + d_y + d_z \dots)(d_x + d_y + d_z \dots)(d_x + d_y + d_z \dots)$, и проч. . . . сосставимъ слѣдующія символическія уравненія:

(10) $du = (d_x + d_y + d_z \dots)u$, $d^2u = (d_x + d_y + d_z \dots)^2u$, $d^3u = (d_x + d_y + d_z \dots)^3u$, . . . и вообще, означая чрезъ n какое нибудь цѣлое число, будетъ

$$(11) \quad d^n u = (d_x + d_y + d_z \dots)^n u.$$

Теперь возьмемъ

$$(12) \quad s = F(u, v, w \dots),$$

гдѣ u , v , w изображаютъ функціи переменныхъ независимыхъ x , y , z . . . ; найдемся

$$(13) \quad d^n s = (d_x + d_y + d_z \dots)^n s.$$

Весьма легко разложимъ вшорую часть сего послѣдняго уравненія въ шомъ частномъ случаѣ, когда u предполагается функціею одной измѣняемой x , v функціею одной измѣняемой y , w функціею одной измѣняемой z , и проч. . . . Впрочемъ, замѣшимъ, что опъ сего частнаго случая можно перейти и къ общему, подспавляя du , d^2u , d^3u . . . вмѣсто $d_x u$, $d_x^2 u$, $d_x^3 u$. . . , dv , d^2v . . . вмѣсто $d_y v$, $d_y^2 v$. . . , и проч. . . . , или, что все равно, не подписывая подъ буквою d переменныхъ x , y , z . . . И шакъ, во всѣхъ случаяхъ, легко будетъ опредѣлишь помощію формулы (13) величину $d^n s$. Для объясненія сего способа, возьмемъ $s = uv$. По вышесказанному, найдемся послѣдовательно:

$$(14) \quad d^n(uv) = u d_y^n v + \frac{n}{1} d_x u d^{n-1}_y v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d_x^2 u d^{n-2}_y v + \dots \\ + \frac{n}{1} d_y v d^{n-1}_x u + v d_x^n u,$$

$$(15) \quad d^n(uv) = u d^n v + \frac{n}{1} d u d^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} d^2 u d^{n-2} v + \dots \\ + \frac{n}{1} d v d^{n-2} u + v d^n u.$$

Последняя формула имѣеть мѣсто, какія бы ни были величины u , v въ x , y , и даже въ томъ случаѣ, когда u и v будутъ означать двѣ функции одной только изменяемой x .

Примѣръ. $d^n\left(\frac{e^{ax}}{x}\right) = \frac{a^n e^{ax}}{x} \left(1 - \frac{n}{ax} + \frac{n(n-1)}{a^2 x^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{a^3 x^3} + \dots \right. \\ \left. + \frac{n(n-1)\dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{a^n x^n}\right) dx^n.$

УРОКЪ ПЯТНАДЦАТЫЙ.

Объ отношеніяхъ существующихъ между функціями одной переменнѣной, ихъ производными и дифференціалами разныхъ порядковъ. Объ употребленіи сихъ дифференціаловъ при развѣсканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ.

Положимъ что функція $f(x)$ уничтожается для частной величины $x = x_0$. Сверхъ того, допустимъ что сія самая функція и ея послѣдовательныя производныя, до $n^{\text{го}}$ порядка, остающіяся непрерывными въ сопредѣльности той частной величины о которой говоримся, и что сія непрерывность существуетъ для каждой изъ нихъ между двумя предѣлами $x = x_0$, $x = x_0 + h$. Уравненіе (6) урока 7^{го} даетъ

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h) = hf'(x_0 + \theta h),$$

гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы; или, что все равно, положимъ

$$(1) \quad f(x_0 + h) = hf'(x_0 + h_1),$$

изображая чрезъ h_1 количество имѣющее одинакій знакъ съ h , но численную величину меньшую. Если производныя функціи $f'(x)$, $f''(x) \dots f^{(n-1)}(x)$ уничтожатся отъ предположенія $x = x_0$, то найдемся также:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} f'(x_0 + h_1) = h_1 f''(x_0 + h_2), \\ f''(x_0 + h_2) = h_2 f'''(x_0 + h_3), \\ \text{и проч. } \dots \\ f^{(n-1)}(x_0 + h_{n-1}) = h_{n-1} f^{(n)}(x_0 + h_n); \end{array} \right.$$

гдѣ $h_1, h_2, h_3 \dots h_n$ изображаютъ количества съ одинаковыми знаками, но коихъ численныя величины поспешенно уменьшаются. Умноживъ уравненіе (1) на всѣ уравненія (2), по сокращеніи получимся:

$$(3) \quad f(x_0 + h) = hh_1 h_2 \dots h_{n-1} f^{(n)}(x_0 + h_n),$$

гдѣ h_n будешь имѣть одинакій знакъ съ h , произведеніе же $hh_1 h_2 \dots h_{n-1}$ одинакій знакъ съ h^n . Прибавимъ, что численныя величины обоихъ отношеній $\frac{h_n}{h}$, $\frac{hh_1 h_2 \dots h_n}{h^n}$ будутъ содержаться между предѣлами 0 и 1; и ежели означимъ чрезъ θ и Θ два числа сего рода, по уравненіе (3) можно будешь предсавить въ шакомъ видѣ:

$$(4) \quad f(x_0 + h) = \Theta h^n f^{(n)}(x_0 + \theta h).$$

Предположимъ шеперь что количество h дѣлается безконечно малымъ; очевидно что формула (4) будешь имѣть мѣсто и въ семь члучаѣ; посему, подспавляя i вмѣсто h , найдемся:

$$(5) \quad f(x_0 + i) = \Theta i^n f^{(n)}(x_0 + \theta i).$$

Сверхъ того, какъ для безконечно-малыхъ численныхъ величинъ количества i , выраженіе $f^{(n)}(x_0 + \theta i)$ будешь весьма мало разнишься ошь $f^{(n)}(x_0)$, по въ силу уравненія (5), получимъ слѣдующее предложеніе:

1^{-я} Теорема. Положимъ что функція $f(x)$ и ея послѣдовательныя производныя, до $n^{\text{го}}$ порядка, оставаясь непрерывными въ сопредѣльности тастной величины $x = x_0$, всѣ уничтожаются, изклюдая $f^{(n)}(x)$, для сей самой величины $x = x_0$. Въ такоиъ случаѣ, означивъ чрезъ i количество безконечно-малое, и полагая $x = x_0 + i$, полутится для $f(x)$ величина имѣющая одинакій знакъ съ произведеніемъ $i^n f^{(n)}(x_0)$.

Легко повѣришь сію теорему, полагая наприкладъ, что функція $f(x)$ вида: $(x - x_0)^n \varphi(x)$.

Когда функция $f(x)$ не уничтожается отъ предположенія $x = x_0$, то теорема 1-я можетъ быть замѣнена слѣдующею.

2-я Теорема. Положимъ то функции

$$f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x),$$

оставаясь непрерывными относительно къ x въ опредѣленности частной величины $x = x_0$, всѣ уничтожаются, кромѣ первой $f(x)$ и послѣдней $f^{(n)}(x)$, для сей самой величины $x = x_0$. Изобразивъ трезъ i количество безконечно-малое, получится для безконечно же малой разности $f(x_0 + i) - f(x_0)$ величина имѣющая одинакій знакъ съ произведеніемъ $i^n f^{(n)}(x_0)$.

Доказательство. Дабы изъ 1-й теоремы вывести 2-ю, спомнишь только вмѣсто функции $f(x)$ подставивъ $f(x) - f(x_0)$ имѣющую однѣ и тѣже производныя съ $f(x)$, но копорая, сверхъ того, уничтожается для $x = x_0$. Черезъ шаковое подстановленіе, уравненіе (5) приводится къ слѣдующему:

$$(6) \quad f(x_0 + i) - f(x_0) = \Theta i^n f^{(n)}(x_0 + \theta i).$$

Подставивъ x вмѣсто x_0 , и полагая $f(x) = y$, $\Delta x = i = \alpha h$, уравненіе (6) приметъ видъ

$$(7) \quad \Delta y = \Theta \alpha^n (d^n y + \beta),$$

гдѣ β и α означаютъ количества безконечно-малыя. Но не должно забывашь, что формула (7) будетъ имѣть мѣсто только для частной величины $x = x_0$.

Слѣдствіе. Допустивъ тѣ же самыя условія какъ и во 2-й теоремѣ, и замѣнивъ переменную x частною величиною x_0 , положимъ, что сія самая переменная получаетъ безконечно-малое приращеніе. Соотвѣтствующее приращеніе функции $f(x)$ будетъ количество имѣющее одинакій знакъ съ величиною $f^{(n)}(x)$ или $d^n y$, для $x = x_0$, когда n четное число. Напрошивъ того, ежели n будетъ означашь нечетное число, то приращеніе функции переменнншъ знакъ вмѣстѣ съ приращеніемъ измѣняемой.

Мы показали въ 6^{мъ} урокъ что *наибольшія* и *наименшія* *величины* функции $f(x)$ соотвѣтствуютъ всегда величинамъ изменяемой x , удовлетворяющимъ уравненію

$$(8) \quad f'(x) = 0.$$

ежели только для нѣкихъ величинъ переменной x , функции $f(x)$ и $f'(x)$ не дѣлаются прерывными.

Слѣдственно, изъ сказаннаго нами выше, можно будетъ вообще судить, соотвѣтствуютъ ли какой нибудь корень уравненія (8) *наибольшей* или *наименшей* *величинѣ* функции $f(x)$. И дѣйствительно, пусть будетъ x_0 сей корень, а $f^{(n)}(x)$ первая изъ производныхъ функции $f(x)$, не уничтожающаяся вмѣстѣ съ $f'(x)$, для частнаго значенія $x = x_0$. Сверхъ того, положимъ что въ сопредѣльности сей самой частной величины, функции $f(x)$, $f'(x)$, \dots , $f^{(n)}(x)$ остаются всѣ непрерывными относительно къ x . Очевидно изъ 2-й теоремы, что величина $f(x_0)$ будетъ *наибольшая*, когда n будетъ четное число, а величина $f^{(n)}(x_0)$ отрицательная; напротивъ того, $f(x_0)$ будетъ *наименшая*, когда n четное же число, но $f^{(n)}(x_0)$ имѣетъ величину положительную. Если бы n было нечетное число, то приращеніе функции переменяя знакъ вмѣстѣ съ приращеніемъ переменной, величина $f(x_0)$ не была бы ни *наибольшая*, ни *наименшая*. Посему, наблюдая что дифференціалы $df(x)$, $d^2f(x)$, \dots всегда уничтожаются вмѣстѣ съ производными функциями $f'(x)$, $f''(x)$, \dots и что сверхъ того, для четныхъ величинъ n , $d^n f(x) = f^{(n)}(x) dx^n$ имѣетъ одинакій знакъ съ $f^{(n)}(x)$, получимъ слѣдующее предложеніе.

3-я Теорема. Пусть будетъ $y = f(x)$ данная функция переменной x . Дабы узнать будетъ ли соотвѣтствовать наибольшая или наименьшая величина предложенной функции какому нибудь корню уравненія $dy = 0$, вообще достаточно опредѣлить величины для d^2y , d^3y , $d^4y \dots$, соотвѣтствующія сему корню.

Если величина $d^2 y$ положительная или отрицательная, то величина y будет наименьшая в первом случае, а наибольшая во втором. Когда же величина $d^2 y$ обратится в нуль, то должно искать между дифференциалами $d^3 y, d^4 y, \dots$ первого который бы не уничтожился. Представим онный трезв $d^n y$. Если n четное число, то величина y не будет ни наибольшей ни наименьшей. Если же n четное число, то величина y будет наименьшей, когда дифференциал $d^n y$ положительный, а наибольшая, когда сей самый дифференциал будет отрицательный.

Примѣчаніе. Въ 3-мъ теоремѣ, какъ и въ двухъ первыхъ, должно допустить, что функция y и ея послѣдовательныя производныя, до $n^{\text{го}}$ порядка, остаются непрерывными въ определенности частной величины даваемой переменнѣю x .

Если y будетъ неявная функция переменнѣю x , определяемая напримѣръ уравненіемъ $u = 0$, то 3-я теорема будетъ и въ такомъ случаѣ имѣть мѣсто. Только тогда должно будетъ вывести величины $dy, d^2 y, d^3 y, \dots$ изъ дифференціальныя уравненія $du = 0, d^2 u = 0, d^3 u = 0$, и проч. . . .

Примѣръ. Пусть будетъ $y = x^a \cdot e^{-x}$, гдѣ a есть число положительное. Получится $l(y) = al(x) - x$. Дифференцируя два раза сряду послѣднее уравненіе, найдемъ:

$$\frac{dy}{y} = \left(\frac{a}{x} - 1\right) dx, \quad \frac{d^2 y}{y} - \left(\frac{dy}{y}\right)^2 = -a \left(\frac{dx}{x}\right)^2;$$

попомъ полагая $dy = 0$, не принимая въ разсмотрѣніе величины y равной нулю, выйдетъ,

$$(9) \quad 0 = \frac{a}{x} - 1, \quad \frac{d^2 y}{y} = -a \left(\frac{dx}{x}\right)^2.$$

Такъ какъ величина $d^2 y$ доставляемая вшорою изъ формулы (9) есть отрицательная: то изъ сего слѣдуетъ, что опъ величины $x = a$ выведенной изъ перваго уравненія, функция y получаетъ наибольшую величину.

УРОКЪ ШЕСТНАДЦАТЫЙ.

Объ употребленіи дифференціаловъ разныхъ порядковъ при разысканіи наибольшихъ и наименьшихъ величинъ функций многихъ переменныхъ.

Пусть будетъ $u = f(x, y, z \dots)$ функція переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$ и положимъ, какъ въ 10^{мъ} урокъ,

$$(1) \quad f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz \dots) = F(\alpha).$$

Дабы величина u соотвѣтствующая нѣкоторымъ частнымъ значеніямъ измѣняемыхъ $x, y, z \dots$ была *наибольшая* или *наименьшая*, то для сего необходимо и доспапочно будетъ что соотвѣтствующая величина $F(\alpha)$ приводилась къ *наибольшей* или *наименьшей* отъ предположенія $\alpha = 0$. Изъ сего заключаемъ (смотри 10^й урокъ) что системы величинъ для $x, y, z \dots$, отъ которыхъ функція u или du не дѣлаются прерывными, и которыя дають для первой *наибольшія* или *наименшія* величины, необходимо должны удовлетворять уравненію:

$$(2) \quad du = 0$$

каковы бы ни были $dx, dy, dz \dots$; а посему получимъ

$$(3) \quad \frac{du}{dx} = 0, \quad \frac{du}{dy} = 0, \quad \frac{du}{dz} = 0, \text{ и проч.} \dots$$

Пусть будутъ $x_0, y_0, z_0 \dots$ величины $x, y, z \dots$ принадлежація одной изъ сихъ системъ. Соотвѣтствующая величина $F(\alpha)$ будетъ *наибольшая* или *наименьшая* для $\alpha = 0$, каковы бы ни были дифференціалы $dx, dy, dz \dots$, ежели, для всѣхъ возможныхъ величинъ сихъ самыхъ дифференціаловъ, первая

изъ неуничтожающихся производныхъ функций $F'(o)$, $F''(o)$, $F'''(o)$, и проч... будешь чешнаго порядка, и сверхъ шого сохранишь во всѣхъ случаяхъ одинъ и шопъ же знакъ. (Смотри 15-й урокъ). Прибавимъ что $F(o)$ будешь *наибольшая*, когда производная чешнаго порядка о которой предъ симъ упомянули, будешь оприцашешельная, а *наименшая*, когда она будешь положишешельная. Если первая изъ неуничтожающихся производныхъ функций $F'(o)$, $F''(o)$, $F'''(o)$... нечешнаго порядка, для всѣхъ возможныхъ величинъ dx , dy , dz ..., или шолько для часшныхъ величинъ сихъ самыхъ дифференціаловъ, или шакже, когда сія функция будешь шо положишешельная, шо оприцашешельная, въ шакомъ случаѣ $F(o)$ уже не можешь бышь ни *наибольшею*, ни *наименшею*. Въ силу шакowychъ замѣчаній, и принявъ въ соображеніе уравненія (5) 14^{го} урока, именно,

$$F(o) = u, F'(o) = du, F''(o) = d^2u, \text{ и проч...}$$

выведешся слѣдующее предложеніе.

Теорема. *Изобразимъ трезъ $u = f(x, y, z...)$ данную функцию перемѣнныхъ независимыхъ $x, y, z...$ Давы узнатъ, шотвѣтствуетъ ли или нѣтъ система величинъ $x, y, z...$ удовлетворяющая формуламъ (3) наибольшей или наименшей величинъ функции u , должно опредѣлитъ величины дифференціаловъ d^2u , d^3u , d^4u , и проч... для сей самой системы; очевидно, шот сіи дифференціалы представляются въ видѣ полиномій, въ коихъ не будетъ другихъ произвольныхъ количествъ кроми дифференціаловъ $dx = h, dy = k, dz = l...$ Пусть будетъ*

$$(4) \quad d^n u = \frac{d^n u}{d x^n} h^n + \frac{d^n u}{d y^n} k^n + \dots + \frac{n}{1} \frac{d^n u}{d x^{n-1} d y} h^{n-1} k + \dots,$$

первая изъ неуничтожающихся полиномій, въ коей n ознаетъ цѣлое число, могущее зависѣть отъ величинъ дифференціаловъ $h, k, l...$ Ежели, для всѣхъ возможныхъ величинъ сихъ диф-

дифференціаловъ, есть четное число, а $d^n u$ и количество положительное; то найденная величина для функции u будетъ наименьшая. Она же вѣдетъ наибольшая, когда оставаясь попрежнему четнымъ числомъ, знакъ предъ $d^n u$ будетъ постоянно отрицательный. Наконецъ, ежели n будетъ иногда нечетное число, или ежели дифференціалъ $d^n u$ будетъ то положительный, то отрицательный; тогда величина найденная для u не будетъ ни наибольшая, ни наименьшая.

Примѣсаніе. Предъидущая теорема справедлива, въ силу правилъ приведенныхъ въ 15^{мъ} урокъ, когда функции $F(\alpha)$, $F'(\alpha)$, .. $F^{(n)}(\alpha)$ оспаются непрерывными относительно къ α , въ опредѣленности частной величины $\alpha = 0$, или, что все равно, когда u , du , d^2u .. d^nu непрерывны, относительно къ измѣняемымъ x , y , z .. въ опредѣленности ихъ частныхъ значеній, кошорыя мы приписываемъ симъ самымъ переменнымъ.

Слѣдствіе 1^{ое}. Сдѣлаемъ приложеніе для сей теоремы. Опредѣлимъ сперва величину выраженія

$$(5) \quad d^2 u = \frac{d^2 u}{dx^2} h^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} k^2 + \dots + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} h k + \dots,$$

подставляя въ производныя функции $\frac{d^2 u}{dx^2}$, $\frac{d^2 u}{dy^2}$, .. $\frac{d^2 u}{dx dy}$, .. величины x , y , z .. доспавляемыя формулами (3). Искомая величина для $d^2 u$ будетъ равна нулю, если всѣ сіи производныя уничшожащяся. Въ прошивномъ случаѣ, $d^2 u$ будетъ однородная функция произвольныхъ количествъ h, k, l ..; въ семъ предположеніи, измѣняя количества h, k, l .., могутъ произойши при случая. Или дифференціалъ $d^2 u$ будетъ удерживашъ поспоянно одинъ и пошь же знакъ, не обращаясь при помъ въ нуль; или онъ уничшожищяся для нѣкошорыхъ частныхъ величинъ h, k, l .. и примешъ прежній знакъ, когда переспанешъ обращашся въ нуль; или наконецъ, оный диффе-

ренціалъ, будешь шо положительный, шо отрицательный. Величина опредѣленная для u будешь всегда или *наибольшая* или *наименшая* въ первомъ случаѣ, иногда во второмъ, но никогда въ третьемъ. Прибавимъ, что во второмъ случаѣ получился *наибольшая* или *наименшая величина*, ежели для каждой изъ системъ величинъ $h, k, l \dots$ удовлетворяющихъ уравненію $d^2 u = 0$, первый изъ неунничтожающихся дифференціаловъ $d^3 u, d^4 u \dots$ будешь всегда четнаго порядка, имѣя одинакій знакъ съ дифференціалами $d^2 u$, не обращающимися въ нуль.

Слѣдствие 2°. Ежели подстановленіе найденныхъ величинъ для $x, y, z \dots$ обращаетъ въ нуль всѣ производныя вѣсраго порядка, шо какъ въ семъ случаѣ $d^2 u$ будешь пожешвенно равенъ нулю, посему и не можешь быть ни *наибольшей*, ни *наименшей величинѣ*, развѣ что чрезъ шаковое подстановленіе уничтожится и $d^3 u$, когда всѣ производныя третьяго порядка обращающяся въ нули.

Слѣдствие 3°. Ежели бы чрезъ подстановленіе найденныхъ величинъ для $x, y, z \dots$ уничтожились всѣ производныя вѣсраго и третьяго порядка, шо получились бы пожешвенныя уравненія $d^2 u = 0, d^3 u = 0$, и надлежало бы прибѣгнуть къ первому изъ дифференціаловъ $d^4 u, d^5 u \dots$ которой пожешвенно не обращается въ нуль. Ежели сей дифференціалъ будешь нечетнаго порядка, шо функція u не можешь имѣть ни *наибольшей*, ни *наименшей величинѣ*. Полагая же что дифференціалъ четнаго порядка, а посему вида

$$(6) d^{2m} u = \frac{d^{2m} u}{dx^{2m}} h^{2m} + \frac{d^{2m} u}{dy^{2m}} k^{2m} + \dots + \frac{2m}{1} \frac{d^{2m} u}{dx^{2m-1} dy} h^{2m-1} k + \dots,$$

могли бы произойти опять при случая. Или дифференціалъ о которомъ говоримся, удержишь одинъ и шошь же знакъ не обращаясь въ нуль, когда спанемъ измѣняясь величины количесвъ $h, k, l \dots$; или онъ уничтожится для нѣкоторыхъ частныхъ

значеній $h, k, l \dots$, и примешь прежній знакъ, когда перешаешь обращаешь въ нуль; или наконецъ, сей дифференціалъ будешь по положительный, по отрицательный. Найденная величина для u будешь всегда *наибольшая* или *наименьшая* въ первомъ случаѣ, иногда во второмъ, но никогда въ третьемъ. Сверхъ того, дабы судить, имѣются ли или нѣтъ во второмъ случаѣ *наибольшая* или *наименьшая величина*, надлежитъ для каждой системы величинъ $h, k, l \dots$ удовлетворяющихъ уравненію $d^m u = 0$, найти между дифференціалами порядка превышающаго $2m$, первый неунничтожающійся дифференціалъ, и разсмотрѣвъ, будешь ли онъ всегда чешнаго порядка, и сверхъ того, имѣеть ли онъ одинакій знакъ съ величинами $d^{2n} u$ разспвующими опъ нуля.

Необходимо замѣнишь, что поелику величина $d^m u$, доставляемая формулою (6) естъ функція цѣлая опноительно количествъ $h, k, l \dots$, по поему и не можешь переходить, при измѣненіи сихъ количествъ, изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, не обратившись въ нуль въ промежуткѣ. Замѣнимъ еще, что еслибъ u была неявная функція переменныхъ $x, y, z \dots$, или еслибъ нѣкопоры изъ сихъ измѣняемыхъ сдѣлались неявными функціями всѣхъ прочихъ, по каждое изъ количествъ $du, d^2u, d^3u \dots$ опредѣлилось бы посредствомъ одного или нѣсколькихъ дифференціальныхъ уравненій, въ функціи дифференціаловъ переменныхъ независимыхъ.

Примѣръ. Положимъ что $a, b, c, \dots k, p, q, r \dots$ означаютъ постоянныя положительныя количества, а $x, y, z \dots$ переменныя удовлетворяющія уравненію

$$ax + by + cz + \dots = k,$$

и что ищется *наибольшая величина* функціи $u = x^p y^q z^r \dots$; найдемся:

$$\frac{du}{u} = p \frac{dx}{x} + q \frac{dy}{y} + r \frac{dz}{z} + \dots, \quad \frac{d^2u}{u} = \left(\frac{du}{u}\right)^2 = p \left(\frac{dx}{x}\right)^2 + q \left(\frac{dy}{y}\right)^2 + r \left(\frac{dz}{z}\right)^2 + \dots,$$

слѣдовательно изъ формулы (10) (11^{го} урока) выведемъ:

$$\frac{p}{ax} = \frac{q}{by} = \frac{r}{cz} = \dots = \frac{p+q+r..}{k}, \quad x = \frac{p}{a} \cdot \frac{k}{p+q+r..}, \quad y = \frac{q}{b} \cdot \frac{k}{p+q+r..}, \quad z = \dots \text{ и пр.}$$

Такъ какъ предъидущія величины для x , y , $z \dots$ всегда обращаются du въ нуль, а d^2u въ величину отрицательную, по посему заключаемъ, что онѣ соотвѣшствуютъ *наибольшей величинѣ* функции u .

УРОКЪ СЕМНАДЦАТЫЙ.

Объ условіяхъ кои должны быть выполнены для того, чтобы полный дифференціалъ не перемѣнялъ знака, тогда, какъ измѣняются величины дифференціаловъ перемѣнныхъ независимыхъ количествъ.

Мы видѣли въ предыдущихъ урокахъ, что означая чрезъ u функцію перемѣнныхъ независимыхъ количествъ $x, y, z \dots$, и не принимая въ разсмотрѣніе шѣхъ величинъ сихъ перемѣнныхъ отъ копорыхъ одна изъ функцій u, du, d^2u , и проч. . . . дѣлаешся прерывною, функція u будетъ *наибольшею* или *наименшею* только въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ полныхъ ея дифференціаловъ $d^2u, d^4u, d^6u \dots$, а именно, первой изъ шѣхъ кои не будутъ всегда уничтожаться, удержишь одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ возможныхъ величинъ произвольныхъ количествъ $dx = h, dy = k, dz = l \dots$, или по крайній мѣрѣ, для шѣхъ величинъ сихъ количествъ кои не обращашъ его въ нуль. Прибавимъ еще, что въ послѣднемъ предположеніи, каждая изъ системъ величинъ $h, k, l \dots$ обращающая въ нуль полный дифференціалъ ω копоромъ говоримся, должна будетъ перемѣнитъ другой полный дифференціалъ чешнаго порядка, въ количество имѣющее тотъ же самый знакъ какой удерживаетъ первой дифференціалъ, коль скоро оный не уничтожается. Замѣшимъ, что дифференціалы $d^2u, d^4u, d^6u \dots$, для определенныхъ величинъ $x, y, z \dots$, обращаются въ цѣлыя и однородныя функціи произвольныхъ количествъ $h, k, l \dots$. Сверхъ

шого, означая буквами $r, s, t \dots$ отношенія перваго, втораго, прешьяго... изъ сихъ количествъ, къ послѣдному изъ оныхъ, очевидно что дифференціалъ

$$(1) d^m u = \frac{d^{2m} u}{dx^{2m}} h^{2m} + \frac{d^{2m} u}{dy^{2m}} k^{2m} + \frac{d^{2m} u}{dz^{2m}} l^{2m} + \dots + \frac{2m}{1} \frac{d^{2m} u}{dx^{2m-1} dy} h^{2m-1} k + \dots$$

будеть имѣть одинакій знакъ съ цѣлою функціею $r, s, t \dots$, кошорая получится раздѣливъ $d^{2m} u$ на $2m^{\text{ю}}$ степень послѣдняго изъ количествъ $h, k, l \dots$, слѣдовашельно будетъ имѣть одинъ и шопъ же знакъ съ полиноміею

$$(2) \frac{d^{2m} u}{dx^{2m}} r^{2m} + \frac{d^{2m} u}{dy^{2m}} s^{2m} + \frac{d^{2m} u}{dz^{2m}} t^{2m} + \dots + \frac{2m}{1} \frac{d^{2m} u}{dx^{2m-1} dy} r^{2m-1} s + \dots$$

Замѣняя шаковою же полиноміею каждый изъ дифференціаловъ чешнаго порядка, увидимъ что ошкрышіе признаковъ *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ* пребуешь рѣшенія слѣдующихъ вопросовъ.

1-я Задача. *Найти условія которыя должны быть выполнены для того, чтобы цѣлая функція количествъ $r, s, t \dots$ не перемѣняла знака, когда сіи количества измѣняются.*

Рѣшеніе. Пустьъ будетъ $F(r, s, t \dots)$ данная функція, и положимъ сперва что она содержитъ шолько одно количество r . Дабы функція $F(r)$ не могла перемѣнить знака, шо необходимо и доспапочно шого, чшобъ уравненіе

$$(3) F(r) = 0$$

не имѣло корней вещешвенныхъ неравныхъ, а шакже и нечешнаго числа вещешвенныхъ корней равныхъ между собою. И дѣйшвшительшо, еслибъ имѣли

$$F(r) = (r - r_0) R \text{ или } F(r) = (r - r_0)^{2m+1} \bar{R},$$

гдѣ r_0 означаетъ вещешвенный корень уравненія (3), m цѣлое число, а R полиноміею кошорая не дѣлится на $r - r_0$, шо легко усмошрѣшь, что для двухъ величинъ r весьма мало разншшвую-

щихъ опъ r_0 , но изъ коихъ одна болѣе, а другая менѣе r_0 , функція $F(r)$ получила бы двѣ величины съ прошивными знаками. Сверхъ того, поелику непрерывная функція количества r не можеть перемѣнить знака, съ измѣненіемъ r между двумя данными предѣлами, не обращаясь въ нуль въ промежуткѣ: по утвердительно можно сказать, что если уравненіе (3) не будетъ имѣть вещественныхъ корней, то первая часть онаго удержитъ всегда одинъ и тотъ же знакъ, и никогда не обратится въ нуль; если же $F(r)$ иногда и обратится въ нуль, удерживая прежній знакъ, то оная будетъ равна произведенію нѣсколькихъ множителей вида $(r - r_0)^{2m}$ на полиномію, кошо-рая не можеть обратиться въ нуль ни для какой возможной величины r .

Теперь разсмотримъ общій случай, когда имѣемъ функцію содержащую какое ни естъ число количествъ $r, s, t \dots$. Тогда, чтобы $F(r, s, t \dots)$ не могла перемѣнить знака, необходимое и припомъ достаточное условіе будетъ то, чтобы уравненіе

$$(4) \quad F(r, s, t \dots) = 0$$

разрѣшенное относительно къ r , не могло имѣть ни вещественныхъ корней неравныхъ, также и нечетнаго числа вещественныхъ корней равныхъ, полагая впрочемъ $s, t \dots$ совершенно произвольными.

Слѣдствіе 1°. Функція $F(r)$ или $F(r, s, t \dots)$ удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ, когда уравненіе (3) или (4) не имѣетъ вещественныхъ корней. (*Смотри* спашью объ опредѣленіи числа вещественныхъ корней алгебраическихъ уравненій, въ 17^й пешпаради сочиненія *Journal de l'Ecole polytechnique*, стр. 457).

Слѣдствіе 2°. Пусть будетъ $u = f(x, y)$. Полный дифференціалъ

$$(5) \quad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} h^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} hk + \frac{d^2u}{dy^2} k^2$$

удержишь посполно одинъ и шопъ же знакъ, когда уравненіе

$$(6) \quad \frac{d^2u}{dx^2} r^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} r + \frac{d^2u}{dy^2} = 0$$

не будетъ имѣшь вещественныхъ корней, шо-есть когда

$$(7) \quad \frac{d^2u}{dx^2} \cdot \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy} \right)^2 > 0.$$

Топъ же самый дифференціалъ (5) могъ бы обратиться въ нуль, удерживая посполно одинъ и шопъ же знакъ, еслибъ первый членъ формулы (7) уничтожился; но еслибы сей первый членъ сдѣлался отрицательнымъ, шо оный дифференціалъ получилъ бы величины съ противными знаками.

Слѣдствіе 3°. Пустьъ будетъ $u = f(x, y, z)$. Полный дифференціалъ

$$(8) \quad d^2u = \frac{d^2u}{dx^2} h^2 + \frac{d^2u}{dy^2} k^2 + \frac{d^2u}{dz^2} l^2 + 2 \frac{d^2u}{dxdy} hk + 2 \frac{d^2u}{dxdz} hl + 2 \frac{d^2u}{dydz} kl$$

посполно удержишь одинъ и шопъ же знакъ, когда уравненіе

$$(9) \quad \frac{d^2u}{dx^2} r^2 + 2 \left(\frac{d^2u}{dxdy} s + \frac{d^2u}{dxdz} t \right) r + \frac{d^2u}{dy^2} s^2 + 2 \frac{d^2u}{dydz} st + \frac{d^2u}{dz^2} t^2 = 0,$$

разрѣшенное относительно къ r , вовсе не будетъ имѣшь вещественныхъ корней, шо-есть, когда полагая s совершенно произвольнымъ, имѣемъ неравенство

$$(10) \quad \left[\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy} \right)^2 \right] s^2 + 2 \left[\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dydz} - \frac{d^2u}{dxdy} \frac{d^2u}{dxdz} \right] st + \frac{d^2u}{dy^2} \frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dydz} \right)^2 > 0.$$

Сіе послѣднее условіе будетъ выполнено, если слѣдующія два неравенства будутъ имѣшь мѣсто,

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy} \right)^2 > 0, \text{ и} \\ \left[\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dy^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdy} \right)^2 \right] \left[\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dz^2} - \left(\frac{d^2u}{dxdz} \right)^2 \right] - \left[\frac{d^2u}{dx^2} \frac{d^2u}{dydz} - \frac{d^2u}{dxdy} \frac{d^2u}{dxdz} \right]^2 > 0. \end{array} \right.$$

Примѣнаніе. Пустьъ будетъ $u = f(x, y, z, \dots)$ функція n измѣняемыхъ независимыхъ величинъ x, y, z, \dots , и положимъ

$$(12) \quad F(r, s, t \dots) = \frac{d^2 u}{dx^2} r^2 + \frac{d^2 u}{dy^2} s^2 + \frac{d^2 u}{dz^2} t^2 + \dots + 2 \frac{d^2 u}{dx dy} r s + 2 \frac{d^2 u}{dx dz} r t + 2 \frac{d^2 u}{dy dz} s t + \dots$$

Дифференціалъ $d^2 u$ и функція $F(r, s, t \dots)$ всегда будутъ имѣть одинакіе знаки съ количествомъ $\frac{d^2 u}{dx^2}$, если произведение $\frac{d^2 u}{dx^2} F(r, s, t \dots)$ во всѣхъ случаяхъ будетъ имѣть положительный знакъ, что очевидно случится, когда *наименшія* величины каждаго изъ произведеній

$$(13) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} F(r), \quad \frac{d^2 u}{dx^2} F(r, s), \quad \frac{d^2 u}{dx^2} F(r, s, t), \text{ и проч.}$$

будутъ положительныя. Сверхъ того, полагая

$$D_1 = \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad D_2 = \frac{d^2 u}{dx^2} \frac{d^2 u}{dy^2} - \left(\frac{d^2 u}{dx dy} \right)^2, \text{ и проч. } \dots$$

и изображая вообще чрезъ D_n общаго знаменателя входящаго въ величины для $h, k, l \dots$ выведенныя изъ уравненій (смотри *Analyse algebrique* стр. 80)

$$(14) \quad \begin{cases} \frac{d^2 u}{dx^2} h + \frac{d^2 u}{dx dy} k + \frac{d^2 u}{dx dz} l + \dots = 1, \\ \frac{d^2 u}{dx dy} h + \frac{d^2 u}{dy^2} k + \frac{d^2 u}{dx dz} l + \dots = 1, \\ \frac{d^2 u}{dx dz} h + \frac{d^2 u}{dy dz} k + \frac{d^2 u}{dz^2} l + \dots = 1, \end{cases}$$

легко докажется, что *наибольшія* и *наименшія* величины функцій $F(r)$, $F(r, s)$, $F(r, s, t)$, и проч. будутъ соотвѣстственно равны

$$(15) \quad \frac{D_2}{D_1}, \quad \frac{D_3}{D_2}, \quad \frac{D_4}{D_3}, \text{ и проч. } \dots \frac{D_n}{D_{n-1}}.$$

И такъ дифференціалъ $d^2 u$ удержишь постоянно одинъ и тотъ же знакъ, если произведение каждаго изъ дробей (15) на D_1 будетъ положительное, или, что все равно, ежели

$D_2, D_3, D_4 \dots, D_n$ будуть имѣть одинакіе знаки съ количесвами $D^2_1, D^3_1, D^4_1 \dots D^n_1$.

Полагая функцію u зависящею опть шрехъ шолько перемѣнныхъ количесвъ x, y, z , очевидно что найденныя нами условія приведущя къ двумъ слѣдующимъ: $D_2 > 0, D_1 D_3 > 0$, равнозначущія съ шѣми кои дають формулы (II).

2^а Задача. *Даны двѣ цѣлыя функціи перемѣнныхъ $r, s, t \dots$, найти условія необходимыя для того, чтобы вторая функція удерживала опредѣленный знакъ во тѣхъ случаяхъ, когда первая изъ нихъ уничтожается.*

Рѣшеніе. Пустьъ будетъ $F(r, s, t \dots)$ первая функція а $R = \varphi(r, s, t \dots)$ вторая. Изъ двухъ уравненій $F(r, s, t \dots) = 0$ и $R = \varphi(r, s, t \dots)$ исключимъ r . Разрѣшая, опносительно къ R уравненіе получаемое чрезъ исключеніе r , необходимо, чтобы найденная величина для R имѣла пребуемый знакъ, когда перемѣннымъ $s, t \dots$ припишущя вещесвенныя величины коимъ соопвѣшсвуешъ шакже вещесвенная величина для измѣняемой r .

УРОКЪ ОСЬМНАДЦАТЫЙ.

Дифференціалы какой либо функціи многихъ перемѣнныхъ величинъ, изъ коихъ каждая есть линейная функція другихъ перемѣнныхъ независимыхъ количествъ. Разложеніе цѣлыхъ функцій на вещественные множители первой и второй степени.

Пусть будутъ $a, b, c \dots k$ постоянныя количества, а

$$(1) \quad u = ax + by + cz + \dots + k$$

линейная функція переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$

Дифференціалъ

$$(2) \quad du = a dx + b dy + c dz + \dots$$

будетъ постоянное же количество, и следовательно дифференціалы d^2u, d^3u, \dots обращаясь все въ нули. Сие самое приводить насъ къ заключенію что последовательные дифференціалы функцій $f(u), f(u, v), f(u, v, w \dots)$, и проч. сохраняющъ одинъ и тотъ же видъ, когда переменныя $u, v, w \dots$ принимающъ за независимыя, или когда $u, v, w \dots$ изображаютъ линейныя функціи переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$ И такъ, полагая $s = f(u)$, въ томъ и въ другомъ случаѣ найдется :

$$(3) \quad ds = f'(u) du, \quad d^2s = f''(u) du^2, \quad d^3s = f'''(u) du^3, \dots d^n s = f^{(n)}(u) du^n;$$

полагая $s = f(u, v)$,

$$(4) \quad d^n s = \frac{d^n f(u, v)}{d u^n} du^n + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^n f(u, v)}{d u^{n-1} d v} du^{n-1} dv + \dots \\ + \frac{n}{1} \cdot \frac{d^n f(u, v)}{d u d v^{n-1}} du dv^{n-1} + \frac{d^n f(u, v)}{d v^n} dv^n;$$

полагая $s = f(u) \cdot f(v)$,

$$(5) \quad d^n s = f^{(n)}(u) f(v) du^n + \frac{n}{1} f^{(n-1)}(u) f'(v) du^{n-1} dv + \dots \\ + \frac{n}{1} f'(u) f^{(n-1)}(v) du dv^{n-1} + f(u) f^{(n)}(v) dv^n,$$

и проч. . . . Изобразивъ чрезъ $f(u)$, $f(v)$, $f(u, v)$. . . цѣлыя функціи переменныхъ u , v , w . . . , и положивъ чшо u , v , w . . . суть линейныя функціи переменныхъ x , y , z . . . , легко удостовѣришься, чшо формулы (3), (4), (5) . . . будущь справедливы и въ шомъ даже случаѣ, когда постоянныя количества a , b , c . . . k и проч. входящія въ u , v , w . . . сдѣлаюшся мнимыми. Напримѣръ, полагая $s = f(x + y \sqrt{-1})$, получимъ,

$$(6) \quad ds = f'(x + y \sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1} dy), \dots \\ d^n s = f^{(n)}(x + y \sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1} dy)^n;$$

полагая $s = f(x - y \sqrt{-1})$,

$$(7) \quad ds = f'(x - y \sqrt{-1}) (dx - \sqrt{-1} dy), \dots \\ d^n s = f^{(n)}(x - y \sqrt{-1}) (dx - \sqrt{-1} dy)^n;$$

полагая $s = f(x + y \sqrt{-1}) \cdot f(x - y \sqrt{-1})$,

$$(8) \quad d^n s = f^{(n)}(x + y \sqrt{-1}) \cdot f(x - y \sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1} dy)^n \\ + \frac{n}{1} f^{(n-1)}(x + y \sqrt{-1}) \cdot f'(x - y \sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1} dy)^{n-1} (dx - \sqrt{-1} dy) + \dots \\ + \frac{n}{1} f'(x + y \sqrt{-1}) \cdot f^{(n-1)}(x - y \sqrt{-1}) \cdot (dx + \sqrt{-1} dy) (dx - \sqrt{-1} dy)^{n-1} \\ + f(x + y \sqrt{-1}) \cdot f^{(n)}(x - y \sqrt{-1}) \cdot (dx - \sqrt{-1} dy)^n.$$

Изъ сей послѣдней формулы легко вывести слѣдующее предложеніе.

1-я Теорема. Пусть будетъ $f(x)$ вещественная и цѣлая функція измѣняемой x . Полагая

$$(9) \quad s = f(x + y\sqrt{-1}) \cdot f(x - y\sqrt{-1}),$$

всегда можно будет удовлетворить вещественными величинами переменных x и y уравнению

$$(10) \quad s = 0$$

Доказательство. Пусть будет n степень функции $f(x)$; следовательно имеемъ

$$(11) \quad f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_{n-1} x + a_n,$$

гдѣ $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$ означаютъ постоянныя количества, изъ коихъ первое, именно a_0 , не можетъ быть равно нулю. Сверхъ того, принявъ переменныя x, y вещественными, означимъ чрезъ r, ρ, R, R_1, R_2 , и проч. . . . модули (*) мнимыхъ выражений

$$x + y\sqrt{-1}, \quad dx + dy\sqrt{-1}, \quad f(x + y\sqrt{-1}), \quad f'(x + y\sqrt{-1}), \\ f''(x + y\sqrt{-1}), \quad \text{и проч. . . .}$$

и въ слѣдствіе сего, положимъ

$$(12) \quad \begin{aligned} x + y\sqrt{-1} &= r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t), \\ dx + dy\sqrt{-1} &= \rho(\cos \tau + \sqrt{-1} \sin \tau); \end{aligned}$$

$$(13) \quad \begin{cases} f(x + y\sqrt{-1}) = R(\cos T + \sqrt{-1} \sin T), \\ f'(x + y\sqrt{-1}) = R_1(\cos T_1 + \sqrt{-1} \sin T_1), \\ f''(x + y\sqrt{-1}) = R_2(\cos T_2 + \sqrt{-1} \sin T_2) \dots \\ f^{(n)}(x + y\sqrt{-1}) = R_n(\cos T_n + \sqrt{-1} \sin T_n). \end{cases}$$

$r, \rho, R, R_1, R_2 \dots R_n$ будутъ количества положительныя; $t, \tau, T, T_1, T_2 \dots T_n$ вещественныя дуги; посему будемъ имѣть

$$(14) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

(*) Подъ названіемъ: *модуль* мнимаго выраженія $X + Y\sqrt{-1}$, сочинитель разумѣетъ положительную величину $\sqrt{X^2 + Y^2}$.

$$(15) \quad s = R^2 = [a_0 r^n \cos nt + a_1 r^{n-1} \cos(n-1)t + \dots + a_{n-1} r \cos t + a_n]^2 \\ + [a_0 r^n \sin nt + a_1 r^{n-1} \sin(n-1)t + \dots + a_{n-1} r \sin t]^2 \\ = r^{2n} \left[a_0^2 + \frac{2a_0 \cdot a_1 \cos t}{r} + \frac{a_1^2 + 2a_0 a_2 \cos t}{r^2} + \dots \right].$$

Изъ сихъ послѣднихъ формулъ слѣдуетъ, что количество s , изображающее функцію цѣлую и слѣдовательно непрерывную относительно переменныхъ x , y , останется всегда положительнымъ и безпрестанно будетъ возрастать, когда спаянемъ давая симъ двумъ переменнымъ, или только одной изъ нихъ, а слѣдовательно и модулю r , численныя величины постепенно возрастающія. Изъ чего должно заключить, что функція s способна будетъ принять одну или нѣсколько *наименшихъ величинъ* соотвѣствующихъ одной или нѣсколькимъ системамъ конечныхъ величинъ для переменныхъ x и y . Разсмотримъ въ частности одну изъ сихъ системъ, и опредѣлимъ соотвѣствующія онымъ величины выражений

$$(16) \quad f'(x + y\sqrt{-1}), f''(x + y\sqrt{-1}), \dots f^{(n)}(x + y\sqrt{-1}).$$

Нѣкоторыя изъ сихъ величинъ могутъ быть равны нулю; но невозможно чтобы всѣ въ одно время уничтожились, ибо выраженіе $f^{(n)}(x + y\sqrt{-1})$, обращается вмѣстѣ съ $f^{(n)}(x)$ въ произведеніе $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n \cdot a_0$, и слѣдовательно равняется постоянной величинѣ и разнствуетъ отъ нуля. И такъ, пусть будетъ $f^{(m)}(x + y\sqrt{-1})$ первое изъ неуничтожающихся выражений (16). Если самая функція $f(x + y\sqrt{-1})$ не обращена въ нуль, то $d^m s$ будетъ, въ силу формулы (8), первый изъ неуничтожающихся дифференціаловъ функціи s . Напрощивъ того, ежели

$$(17) \quad f(x + y\sqrt{-1}) = 0,$$

то и дифференціалъ $d^m s$ обратится въ нуль. Легко видѣть,

что сей последний только случай можно допустить. Ибо в первом предположении, вывели бы из формулы (8)

$$(18) \quad d^m s = \\ f^{(m)}(x + y\sqrt{-1})f(x - y\sqrt{-1})(dx + \sqrt{-1}dy)^m \\ + f^{(m)}(x + y\sqrt{-1})f^{(m)}(x - y\sqrt{-1})(dx - \sqrt{-1}dy)^m \\ = 2RR_m \rho^m \cos(T_m - T + m\tau);$$

и следовательно, дифференциаль $d^m s$, перемѣняя знакъ когда вмѣсто τ подставимъ $\tau + \frac{\pi}{2}$, не будетъ для всѣхъ возможныхъ величинъ количествъ dx и dy имѣть положительный знакъ, что есть необходимое условіе, когда функція s будетъ *наименьшая*. И такъ всѣ системы величинъ для x и y , соотвѣтствующія *наименьшимъ величинамъ* функціи s , будутъ удовлетворять уравненію (17), которое также можно представить въ видѣ: $R(\cos T + \sqrt{-1} \sin T) = 0$, откуда извлекается $R = 0$, $s = R^2 = 0$. Следовательно функція s обратится въ нуль при вещественныхъ и конечныхъ величинахъ переменныхъ x и y , всякой разъ какъ она достигнетъ одной изъ своихъ *наименьшихъ величинъ*, коимъ существованіе мы выше сего доказали.

Слѣдствіе. Поелику вещественная функція $s = R^2$ не можетъ уничтожиться иначе какъ въ случаѣ $R = 0$; по и минимья функціи

$$f(x + y\sqrt{-1}) = R(\cos T + \sqrt{-1} \sin T), \\ f(x - y\sqrt{-1}) = R(\cos T - \sqrt{-1} \sin T)$$

уничтожатся также въ одно время съ s . Следовательно всѣ вещественныя величины измѣняемыхъ x и y , удовлетворяющія уравненію (10), будутъ также удовлетворять уравненію (17) и еще слѣдующему:

$$(19) \quad f(x - y\sqrt{-1}) = 0.$$

Симъ величинамъ x и y будуть соотвѣшествовать вещественныя величины r и t удовлетворяющія двумъ уравненіямъ

$$(20) \quad f(r \cos t + r \sin t \sqrt{-1}) = 0, \quad f(r \cos t - r \sin t \sqrt{-1}) = 0.$$

Въ частномъ случаѣ, когда величина y обращается въ нуль, уравненія (17), (19) и (20) приводятся къ одному, именно:

$$(21) \quad f(x) = 0,$$

кошорому слѣдовательно удовлетворяешь въ настоящемъ случаѣ вещественная величина x . Сии примѣчанія непосредственно приводятъ насъ къ слѣдующему предложенію.

2-я Теорема. Ежели $f(x)$ означаетъ вещественную функцію переменнй x , то всегда можно удовлетворить уравненію (21), или вещественными величинами сей переменнй, или парными мнимыми величинами вида

$$(22) \quad x = r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t), \quad x = r(\cos t - \sqrt{-1} \sin t).$$

Примѣчаніе. Изобразивъ чрезъ x_0 вещественный или мнимый корень уравненія (20), полиномія $f(x)$ будетъ дѣлиться на множителя первой степени $x - x_0$. И пакъ, двумъ парнымъ мнимымъ корнямъ вида

$$r(\cos t + \sqrt{-1} \sin t), \quad r(\cos t - \sqrt{-1} \sin t),$$

будуть соотвѣшествовать два множителя первой степени $x - r \cos t - r \sin t \sqrt{-1}$, $x - r \cos t + r \sin t \sqrt{-1}$, кои будучи перемножены между собою, даютъ вещественный множитель второй степени, именно: $(x - r \cos t)^2 + r^2 \sin^2 t = x^2 - 2rx \cos t + r^2$. На семъ основаніи, въ силу 2-й теоремы, слѣдуешь, что всякая вещественная и цѣлая функція переменнй x , дѣлится на вещественный множитель или первой, или второй степени. По раздѣленіи, получишься въ частномъ другая вещественная

и цѣлая функція, которая такъ же сама будетъ дѣлиться на другаго множителя. Продолжая такимъ образомъ, данная функція $f(x)$, разложится на вещественные множители первой и второй степени. Уравнивая сихъ множителей нулю, опредѣлятся вещественные или мнимые корни уравненія (21), число коихъ будетъ равно числу единицъ, заключающихся въ степени функціи $f(x)$. (Смотри *Analyse algébrique*, Главу X).

УРОКЪ ДЕВЯТНАДЦАТЫЙ.

*Объ употребленіи производныхъ функций и дифференціаловъ
разныхъ порядковъ при разложеніи функций.*

Легко разложимъ цѣлую функцию количества x по возрастающимъ цѣлымъ степенямъ сей переменнѣй, когда даны частныя величины самой функции и ея послѣдовательныхъ производныхъ для $x=0$. И дѣйствительно, означивъ чрезъ $F(x)$ предложенную функцию, чрезъ n степень сей функции, и чрезъ $a_0, a_1, a_2 \dots a_n$ неизвѣстныя коэффициенты при разныхъ степеняхъ x въ искомомъ разложеніи, будемъ имѣть

$$(1) \quad F(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Дифференцируя n разъ сряду уравненіе (1), получится:

$$(2) \quad \begin{cases} F'(x) = 1 \cdot a_0 + 2 a_1 x + \dots + n a_n x^{n-1}, \\ F''(x) = 1 \cdot 2 \cdot a_1 + \dots + (n-1) n a_n x^{n-2}, \\ \text{и проч.} \dots \\ F^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n a_n. \end{cases}$$

Полагая во всѣхъ сихъ уравненіяхъ $x=0$ найдемъ:

$$(3) \quad a_0 = F(0), \quad a_1 = \frac{1}{1} F'(0), \quad a_2 = \frac{1}{1 \cdot 2} F''(0), \dots, a_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} F^{(n)}(0),$$

слѣдовательно уравненіе (1) дастъ

$$(4) \quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1 \cdot 2} F''(0) + \dots + \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} F^{(n)}(0).$$

Примѣръ. Возьмемъ $F(x) = (1+x)^n$; получимъ извѣстную формулу:

$$(5) (1+x)^n = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n(n-1)}{1.2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}x^3 + \dots + \frac{n}{1}x^{n-1} + x^n.$$

Теперь изобразимъ чрезъ $u = f(x, y, z \dots)$ цѣлую функцію переменныхъ $x, y, z \dots$, а чрезъ n степень сей функціи, по ешь, наибольшую сумму, могущую произойти отъ сложенія показателей разныхъ переменныхъ взятыхъ въ одномъ и томъ же членѣ. Пущь будешь

$$F(\alpha) = f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz \dots),$$

по $F(\alpha)$ можно принимашь за цѣлую функцію количества α , степени n , а посему будемъ имѣшь

$$F(\alpha) = F(0) + \frac{\alpha}{1}F'(0) + \frac{\alpha^2}{1.2}F''(0) + \frac{\alpha^3}{1.2.3}F'''(0) + \dots + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n}F^{(n)}(0).$$

Сія послѣдняя формула, въ силу предложеній доказанныхъ въ 14^{мъ} урокъ, можешь бышь изображена слѣдующимъ образомъ:

$$(6) \quad f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz \dots) \\ = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2u + \frac{\alpha^3}{1.2.3} d^3u + \dots + \frac{\alpha^n}{1.2.3\dots n} d^n u.$$

Прибавимъ, что шакое разложение будешь справедливо для какихъ ни ешь величинъ α , или конечныхъ, или бесконечно-малыхъ. Принимая, для краткости, $\alpha = 1$, найдешя:

$$(7) \quad f(x + dx, y + dy, z + dz \dots) \\ = u + \frac{1}{2} du + \frac{1}{1.2} d^2u + \frac{1}{1.2.3} d^3u + \dots + \frac{1}{1.2.3\dots n} d^n u.$$

Въ частномъ случаѣ, когда вмѣсто функціи $f(x, y, z \dots)$ будемъ разсматривашь функцію одной переменной x , получимъ $u = f(x)$, $du = f'(x)dx$, $d^2u = f''(x)dx^2 \dots d^nu = f^{(n)}(x)dx^n$, въ силу же формулы (7), подставивъ h вмѣсто dx , найдемъ:

$$(8) f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1}f'(x) + \frac{h^2}{1.2}f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3}f'''(x) + \dots + \frac{h^n}{1.2.3\dots n}f^{(n)}(x).$$

Впрочемъ, можно было бы прямо вывести сіе послѣднее уравненіе изъ формулы (4).

Примѣръ. Полагая $f(x) = x^n$, найдѣтся:

$$(9) \quad (x + h)^n = x^n + \frac{n}{1} x^{n-1} h + \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} h^2 + \dots \\ + \frac{n(n-1)}{1.2} x^2 h^{n-2} + \frac{n}{1} x h^{n-1} + h^n.$$

Примѣваніе. Если $f(x)$ дѣлится на $(x - a)^m$, то есть, когда будешь

$$(10) \quad f(x) = (x - a)^m \varphi(x),$$

гдѣ $\varphi(x)$ означаетъ цѣлую функцію переменнѣй x , то разложеніе величины $f(a + h)$, по возрастающимъ степенямъ h , очевидно будешь дѣлиться на h^m . Въ силу доказаннаго выше, сіе разложеніе будешь

$$f(a) + \frac{h}{1} f'(a) + \frac{h^2}{1.2} f''(a) + \dots + \frac{h^m}{1.2.3 \dots m} f^{(m)}(a) + \text{и проч...}$$

И такъ, когда $f(x) = (x - a)^m \varphi(x)$, то докажешь что $f(a) = 0$, такъ же и $f'(a) = 0$, $f''(a) = 0$, \dots , $f^{(m-1)}(a) = 0$. То же самое можно доказать дифференцируя нѣсколько разъ сряду уравненіе (10), изъ котораго, помощію формулы (15) (14^{го} урока) послѣдовательно выводимъ:

$$(11) \quad \begin{cases} f'(x) = (x-a)^m \varphi'(x) + m(x-a)^{m-1} \varphi(x), \\ f''(x) = (x-a)^m \varphi''(x) + 2m(x-a)^{m-1} \varphi'(x) + m(m-1)(x-a)^{m-2} \varphi(x), \\ \text{и проч...} \\ f^{(m-1)}(x) = (x-a)^m \varphi^{(m-1)}(x) + \dots + m(m-1) \dots 3.2(x-a) \varphi(x). \end{cases}$$

И такъ, когда $f(x)$ будешь цѣлая функція переменнѣй x , можно утвердить, что если уравненіе

$$(12) \quad f(x) = 0$$

имѣешь m корней равныхъ, то каждому изъ производныхъ уравненій

$$(13) \quad f'(x) = 0, f''(x) = 0, f'''(x) = 0, \text{ и проч... } f^{(m-1)}(x) = 0$$

будешь удовлетворено величиною для x равною a . Замѣшимъ еще, что поелику $f(x)$ дѣлится на $(x - a)^m$, то $f'(x)$ будешь

дѣлишься на $(x - a)^{m-1}$, $f''(x)$ на $(x - a)^{m-2}$, и проч... наконецъ $f^{(m-1)}(x)$ только на $x - a$. Что касается до функции $f^{(m)}(x)$, то поелику она опредѣляется формулою

$$(14) \quad f^{(m)}(x) = (x - a)^m \varphi^{(m)}(x) + \frac{m}{1} (x - a)^{m-1} \varphi^{(m-1)}(x) + \text{и проч...} \\ + \frac{m}{1} m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot (x - a) \varphi'(x) + m(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \varphi(x),$$

поему для частной величины $x = a$, она изобразится чрезъ

$$(15) \quad f^{(m)}(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m - 1) m \cdot \varphi(a).$$

Всѣ сіи замѣчанія справедливы даже и въ томъ случаѣ, когда въ величинѣ $f(x)$ выраженной уравненіемъ (10), $\varphi(x)$ не будетъ изображать цѣлую функцию переменной x . Впрочемъ, извѣстно какимъ образомъ сіи примѣчанія приводяшь къ опредѣленію равныхъ корней въ алгебраическихъ уравненіяхъ.

Теперь пусть будутъ $y = F(x)$, и $z = f(x)$ двѣ цѣлыя функции переменной x , обѣ дѣлимыя на $(x - a)^m$. Если число m больше единицы, то величины дробей $\frac{z}{y}$, и $\frac{dz}{dy} = \frac{z'}{y'}$, для $x = a$, предсавяшся въ одно и тоже время въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$, и слѣдовательно дробь $\frac{z'}{y'}$ будетъ бесполезна для опредѣленія истиннаго значенія дроби $\frac{z}{y}$ для частной величины $x = a$ (смотри 6^й урокъ). Не смотря на то, истинная величина дроби $\frac{z}{y}$ и въ настоящемъ случаѣ есть предѣлъ къ коему спремишся отношеніе $\frac{\Delta z}{\Delta y}$, погда какъ разности Δy , Δz приближающся къ нулю. Положимъ что x получаетъ безконечно-малое приращеніе $\Delta x = a dx$, то въ силу формулы (6), получимъ:

$$\Delta y = y + \frac{\alpha}{1} dy + \frac{\alpha^2}{1 \cdot 2} d^2 y \dots + \frac{\alpha^{m-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1)} d^{m-1} y \\ + \frac{\alpha^m}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots m} d^m y + \frac{\alpha^{m+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m+1)} d^{m+1} y + \dots$$

$$\Delta z = z + \frac{\alpha}{1} dz + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 z \dots + \frac{\alpha^{m-1}}{1.2.3\dots(m-1)} d^{m-1} z \\ + \frac{\alpha^m}{1.2.3\dots m} d^m z + \frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\dots(m+1)} d^{m+1} z + \dots$$

Теперь, подставляя вместо x частную величину a , очевидно что отъ шаковаго подстановленія производныя функции y' , $y'' \dots y^{(m-1)}$, z' , $z'' \dots z^{(m-1)}$, а слѣдовательно и дифференціалы dy , $d^2 y, \dots d^{(m-1)} y$, dz , $d^2 z, \dots d^{(m-1)} z$, всѣ уничтожатся; посему получимъ:

$$\Delta y = \frac{\alpha^m}{1.2.3\dots m} d^m y + \frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\dots(m+1)} d^{m+1} y + \dots = \frac{\alpha^m}{1.2.3\dots m} (d^m y + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} y + \dots) \\ \Delta z = \frac{\alpha^m}{1.2.3\dots m} d^m z + \frac{\alpha^{m+1}}{1.2.3\dots(m+1)} d^{m+1} z + \dots = \frac{\alpha^m}{1.2.3\dots m} (d^m z + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} z + \dots)$$

откуда

$$\frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{d^m z + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} z + \dots}{d^m y + \frac{\alpha}{m+1} d^{m+1} y + \dots};$$

потомъ, полагая $\alpha = 0$, найдешся:

$$\text{пр. } \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{d^m z}{d^m y} = \frac{z^{(m)}}{y^{(m)}}.$$

И такъ величина дроби $\frac{z}{y}$ или $\frac{f(x)}{F(x)}$, для $x = a$, будетъ равна дроби

$$\frac{d^m z}{d^m y} \text{ или } \frac{f^{(m)}(x)}{F^{(m)}(x)},$$

гдѣ должно такъ же положить $x = a$.

Примѣръ. Ежели $\varphi(x)$ означаетъ цѣлую функцію, которая не дѣлится на $x - a$, а $F(x)$ другую, цѣлую же функцію, дѣлимую на $(x - a)^m$, то для $x = a$, будемъ имѣть

$$(16) \frac{(x-a)^m \varphi(x)}{F(x)} = \frac{1.2.3\dots m \varphi(x) + 2.3\dots m(x-a) \varphi'(x) + \text{и проч.}}{F^{(m)}(x)} = \frac{1.2.3\dots m \varphi(a)}{F^{(m)}(a)}.$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЫЙ.

Разложение рациональных (соизмеримых) дробей.

Изобразимъ чрезъ $f(x)$ и $F(x)$ двѣ цѣлыя функціи переменной x , изъ коихъ первая степени m , а вторая степени n . Частное $\frac{f(x)}{F(x)}$ принимаетъ названіе *раціональной дроби*. Сверхъ того, уравненіе

$$(1) \quad F(x) = 0$$

будетъ имѣть n вещественныхъ или мнимыхъ корней, равныхъ или неравныхъ; предположивъ сперва что они неравны, и означивъ оныя чрезъ $x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$, необходимо будемъ имѣть

$$(2) \quad F(x) = k(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}),$$

гдѣ k есть коэффициентъ стоящій предъ x^n въ $F(x)$, на основаніи пусть будемъ

$$(3) \quad \varphi(x) = k(x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_{n-1}), \text{ и } \frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)} = A_0.$$

Уравненіе (2) приметъ видъ

$$(4) \quad F(x) = (x - x_0)\varphi(x);$$

и поелику разность

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} - A_0 = \frac{f(x) - A_0\varphi(x)}{\varphi(x)}$$

обращится въ нуль для $x = x_0$, по въ семъ предположеніи и полиномія $f(x) - A_0\varphi(x)$ также уничтожится. И такъ сію полиномію можно будемъ раздѣлить алгебраически на $x - x_0$; слѣдовательно будемъ $f(x) - A_0\varphi(x) = (x - x_0)\chi(x)$, или

$$(5) \quad f(x) = A_0\varphi(x) + (x - x_0)\chi(x),$$

гдѣ $\chi(x)$ изображаетъ другую цѣлую функцию переменнѣй x . Раздѣливъ же объ части уравненія (5) на $F(x)$, получимъ:

$$(6) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{\chi(x)}{\varphi(x)} = \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{\chi(x)}{k(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{n-1})}.$$

И такъ можно опъ рациональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ опдѣлить простую дробь вида $\frac{A_0}{x-x_0}$, гдѣ A_0 есть количество постоянное; въ оставшій же получился другая рациональная дробь коей знаменатель будетъ функция въ которую обратишь полиномія $F(x)$ когда оную раздѣлимъ на линейнаго множителя $x-x_0$. Положимъ, что такимъ образомъ, опдѣлили послѣдовательно

опъ $\frac{f(x)}{F(x)}$, попомъ опъ $\frac{\chi(x)}{\varphi(x)}$, и проч...., рядъ простыхъ дробей

$$\frac{A_0}{x-x_0}, \frac{A_1}{x-x_1}, \frac{A_2}{x-x_2}, \dots, \frac{A_{n-1}}{x-x_{n-1}},$$

такъ что наконецъ въ оставшій имѣемъ рациональную дробь, коей знаменатель есть постоянное количество k ; слѣдовательно сей оставшокъ будетъ цѣлая функция переменнѣй x . Назначивъ оную чрезъ Q , получимъ:

$$(7) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = Q + \frac{A_0}{x-x_0} + \frac{A_1}{x-x_1} + \frac{A_2}{x-x_2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{x-x_{n-1}}$$

опкуда

$$(8) \quad f(x) = QF(x) + A_0 \frac{F(x)}{x-x_0} + A_1 \frac{F(x)}{x-x_1} + A_2 \frac{F(x)}{x-x_2} + \dots + A_{n-1} \frac{F(x)}{x-x_{n-1}}.$$

Въ семъ уравненіи всѣ члены слѣдующіе за произведеніемъ $QF(x)$ суть цѣлыя функции переменнѣй x степени низшей чѣмъ n ; поему заключаемъ что Q изображаетъ частное число произшедшее опъ алгебраическаго дѣленія $f(x)$ на $F(x)$. Сверхъ того, поелику каждый изъ членовъ второй части уравненія (8) дѣлится на $x-x_0$, а $f(x)$ не дѣлится, то очевидно будемъ имѣть, для $x=x_0$,

$$(9) \quad f(x) = A_0 \frac{F(x)}{x-x_0} = A_0 \frac{dF(x)}{dx} = A_0 F'(x).$$

И такъ, чтобы получить величину A_0 , сложить только под-
спавивъ x_0 вмѣсто x въ дробь $\frac{f(x)}{F'(x)}$. Такимъ же образомъ опре-
дѣляясь величины для $A_1, A_2 \dots$; слѣдовательно имѣемъ:

$$(10) \quad A_0 = \frac{f(x_0)}{F'(x_0)}, \quad A_1 = \frac{f(x_1)}{F'(x_1)}, \quad A_2 = \frac{f(x_2)}{F'(x_2)}, \quad \dots \quad A_{n-1} = \frac{f(x_{n-1})}{F'(x_{n-1})}.$$

Видъ въ коемъ представляющся сіи величины, показываешь
что онѣ совершенно независимы отъ вида производимаго раз-
ложения $\frac{f(x)}{F(x)}$ на частныя дроби. Прибавимъ, что величина

A_0 , доспавляемая формулою (9), можешь быть представлена
или дробью $\frac{f(x_0)}{F'(x_0)}$ или $\frac{f(x_0)}{\varphi(x_0)}$; откуда слѣдуешь, что первая изъ
формуль (10) равнозначуца со вторымъ изъ уравненій (3).

Когда два корня x_0, x_1 будутъ мнимые и парные, то есь
вида $\alpha + \beta\sqrt{-1}$, и $\alpha - \beta\sqrt{-1}$, то означивъ чрезъ A и B
два вещеспвенныя количесва удовлетворяющія уравненію

$$(11) \quad A - B\sqrt{-1} = \frac{f(\alpha + \beta\sqrt{-1})}{F'(\alpha + \beta\sqrt{-1})},$$

найдемъ, что просшыя дроби, соотвѣстспвуюція симъ корнямъ,
будушь

$$(12) \quad \frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}}.$$

Сложивъ сіи двѣ дроби, получихся слѣдующая:

$$(13) \quad \frac{2A(x - \alpha) + 2B\beta}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

кой числитель будетъ вещеспвенная и линейная функція
перемѣнной x , а знаменатель, множитель второй степенн
полиноми $F(x)$.

Примѣръ. Разложение дробей $\frac{1}{x^2-1}, \frac{x}{x^2-1}, \frac{x^n}{x^n+1}, \frac{x^{n-1}}{x^n+1}$, и проч.

Разсмотримъ случай, когда уравненіе (1) имѣеть равные
корни. Изобразивъ чрезъ $a, b, c \dots$ различные корни, чрезъ

$p, q, r \dots$ цѣлыя числа, и чрезъ k постоянный коэффициентъ, полиномія $F(x)$ будетъ вида

$$(14) \quad F(x) = k(x-a)^p(x-b)^q(x-c)^r \dots$$

Положимъ для сокращенія

$$(15) \quad \varphi(x) = k(x-b)^q(x-c)^r \dots, \quad \text{и} \quad \frac{f(a)}{\varphi(a)} = A,$$

по уравненіе (14) получишь видъ

$$(16) \quad F(x) = (x-a)^p \varphi(x);$$

а какъ объ разности $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = A, f(x) = A\varphi(x)$ уничтожаются въ предположеніи $x = a$, то необходимо будетъ

$$(17) \quad f(x) = A\varphi(x) + (x-a)\chi(x),$$

гдѣ $\chi(x)$ означаетъ новую цѣлую функцію переменнй x . На семъ основаніи, изъ уравненій (14), (16) и (17) выведемъ

$$(18) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{\chi(x)}{(x-a)^{p-1}\varphi(x)} = \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{\chi(x)}{k(x-a)^{p-1}(x-b)^q(x-c)^r \dots}$$

И такъ, опредѣляя опыъ раціональной дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ простую дробь, вида $\frac{A}{(x-a)^p}$, въ оспашкѣ получишь другая раціональная дробь коей знаменатель будетъ равенъ частному производящему опыъ раздѣленія полиномія $F(x)$ на одного изъ множителей равныхъ $x-a$. Положимъ что помощію нѣсколькихъ подобныхъ разложеній, оспдѣлили послѣдовательнй опыъ знаменателя оспальной дроби, во $1^{\text{хб}}$. всѣхъ множителей равныхъ $x-a$; во $2^{\text{хб}}$. всѣхъ множителей равныхъ $x-b$; въ $3^{\text{хб}}$. всѣхъ множителей равныхъ $x-c$, и проч... Послѣдній изъ всѣхъ оспашковъ будетъ раціональная дробь имѣющая постояннаго знаменателя, по есть, цѣлая функція переменнй x : и означивъ чрезъ Q сію цѣлую функцію, а чрезъ $A, A_1, A_2, \dots, A_{p-1}, B, B_1, B_2, \dots, B_{q-1}, C, C_1, C_2, \dots, C_{r-1}$, и проч... постоянныхъ числителей различныхъ простыхъ дробей, получимъ:

$$(19) \quad \frac{f(x)}{F(x)} = Q + \frac{A}{(x-a)^p} + \frac{A_1}{(x-a)^{p-1}} + \dots + \frac{A_{p-1}}{x-a} + \frac{B}{(x-b)^q} + \dots + \frac{C}{(x-c)^r} + \dots$$

Дабы доказать во 1^{хъ}. что полиномія Q есть частное произшедшее отъ алгебраическаго дѣленія $f(x)$ на $F(x)$, во 2^{хъ}. что величины постоянныхъ количествъ $A, A_1, \dots, A_{p-1}, B$, и проч. . . . совершенно независятъ отъ вида производимаго разложенія $\frac{f(x)}{F(x)}$, сшоемъ только разсмотримъ слѣдующую формулу:

$$(20) f(x) = QF(x) + A \frac{F(x)}{(x-a)^p} + A_1 \frac{F(x)}{(x-a)^{p-1}} + \dots + A_{p-1} \frac{F(x)}{x-a} + B \frac{F(x)}{(x-b)^q} + \dots$$

получаемую чрезъ умноженіе уравненія (19) на $F(x)$; въ формулѣ (20) всѣ члены слѣдующіе за произведеніемъ $QF(x)$ суть цѣлыя функціи переменннй x , степенни низшей прошивъ степенни функціи $F(x)$; сверхъ того, если въ сей формулѣ (20) положимъ $x = a + z$, и разложимъ попомъ обѣ часши уравненія по возрастающимъ степенямъ переменннй z , (смотри 19^й урокъ), по сравненіе постоянныхъ членовъ и коэффициентовъ при одинаковыхъ степеняхъ z въ обоихъ разложеніяхъ, досшавимъ слѣдующія уравненія:

$$(21) f(a) = \frac{AF^{(p)}(a)}{1.2.3\dots p}, f'(a) = A \frac{F^{(p+1)}(a)}{1.2.3\dots(p+1)} + A_1 \frac{F^{(p)}(a)}{1.2.3\dots p}, f''(a) = \text{и пр.}$$

изъ коихъ выведемъ для постоянныхъ количествъ A, A_1, A_2, \dots одну только систему величинъ, именно:

$$(22) A = \frac{1.2.3\dots p.f(a)}{F^{(p)}(a)}, A_1 = \frac{1.2.3\dots(p+1)f'(a) - AF^{(p+1)}(a)}{(p+1)F^{(p)}(a)}, \text{ и проч.}$$

Такимъ же почно образомъ получашся величины для $B, B_1, B_2, \dots, C, C_1, C_2, \dots$. Замѣшимъ что первая изъ формулъ (22) даетъ для постоянной A величину получаемую дробью $\frac{(x-a)^p f(x)}{F(x)} = \frac{f(x)}{\varphi(x)}$; когда въ оной положимъ $x = a$, и слѣдовательно равную дробн $\frac{f(a)}{\varphi(a)}$. (Подробнѣе о семъ предметѣ изложено въ *Analyse algébrique*, Гл. XI).

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИЗЧИСЛЕНИЕ.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ПЕРВЫЙ.

Объ опредѣленныхъ (междупредѣльныхъ или частныхъ) интегралахъ.

Положимъ что функция $y = f(x)$ есть непрерывная относительно къ переменнѣй x между двумя конечными предѣлами $x = x_0$, $x = X$, и означимъ чрезъ x_1, x_2, \dots, x_{n-1} другія величины переменнѣй x вставленныя между сими двумя предѣлами, и копорыя поспешенно или возрастающъ, или уменьшающъ сѣ отъ перваго предѣла до втораго. Посредствомъ сихъ промежуточныхъ величинъ, можно будетъ разложить разность $X - x_0$ на элемены

$$(1) \quad x_1 - x_0, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, X - x_{n-1},$$

копорыя будутъ имѣть всѣ одинъ знакъ. Далѣе, положимъ что каждый изъ сихъ элеменовъ помножили на величину $f(x)$, соотвѣтствующую началу сего самаго элемента, именно, элементъ $x_1 - x_0$ на $f(x_0)$, элементъ $x_2 - x_1$ на $f(x_1)$ и проч..., наконецъ элементъ $X - x_{n-1}$ на $f(x_{n-1})$; и пусть будетъ

$$(2) \quad S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

сумма всѣхъ сихъ произведеній. Количество S очевидно будетъ зависѣть, во $1^{\text{хъ}}$. отъ числа n элеменовъ, на копорыя разложена будетъ разность $X - x_0$, во $2^{\text{хъ}}$. отъ самыхъ величинъ сихъ элеменовъ, и слѣдовательно отъ образа произво-

димаго разложенія. Необходимо замѣшишь, что если численныя величины элеменшовъ принимающся весьма малыми, а число n весьма большимъ; шо образъ производимаго разложенія будешъ имѣшь весьма малое вліяніе на величину S , что можешъ бышь доказано слѣдующимъ образомъ.

Если бы, вмѣсто всѣхъ элеменшовъ, разсмапривалась шолько одна разность $X - x_0$, шо имѣли бы

$$(3) \quad S = (X - x_0)f(x_0).$$

Но ежели возьмемъ выраженія (1) за элеменшы разности $X - x_0$, шо величина S , опредѣленная въ семь случаѣ уравненіемъ (2), равна суммѣ всѣхъ элеменшовъ умноженной на среднюю величину функцій

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_{n-1})$$

(смотри предварительныя предложенія въ *Cours d'analyse*, слѣдствіе 3-й теоремы, или III примѣч. перев.). Сверхъ того, поелику сіи коэффициенты равны частнымъ значеніямъ выраженія

$$f[x_0 + \theta(X - x_0)]$$

соотвѣшствующимъ величинамъ θ , заключающимся между предѣлами нуль и единица, шо докажешся, подобно какъ въ 7^{мъ} урокъ, что средняя величина, объ кошорой предъ симъ упомянули, изобразишся шакже чрезъ $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$, гдѣ θ означаешъ, какъ и выше, число большее нуля, но меньшее единицы. И шакъ, вмѣсто уравненія (2), можно будешъ принять слѣдующее:

$$(4) \quad S = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)].$$

Чтобъ перейши ошъ образа разложенія кошорый мы предъ симъ употреблили къ другому, въ коемъ численныя величины элеменшовъ разности $X - x_0$ были бы еще меньше, доспапочно каждую изъ разностей (1) разложишь на новыя элеменшы. Тогда должно будешъ, во второй часши уравненія (2), вмѣсто

произведенія $(x_1 - x_0)f(x_0)$, подставивъ сумму подобныхъ произведеній, и попомъ сію послѣднюю сумму замѣнишь выраженіемъ вида

$$(x_1 - x_0)f[x_0 + \theta(x_1 - x_0)],$$

гдѣ θ будешь означать число меньшее единицы, ибо между сею суммою и произведеніемъ $(x_1 - x_0)f(x_0)$ существуетъ зависимость точно такая, какъ и между величинами S данными уравненіями (4) и (3). По той же причинѣ должно будешь подставивъ вмѣсто произведенія $(x_2 - x_1)f(x_1)$ такую сумму членовъ, которая можетъ быть изображена въ видѣ

$$(x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)],$$

гдѣ θ_1 означаетъ число меньшее единицы. Продолжая такимъ образомъ далѣе, заключимъ наконецъ, что при новомъ образѣ разложенія, величина S будешь вида

$$(5) S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots \\ + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})].$$

Полагая въ семь послѣднемъ уравненіи

$$f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] = f(x_0) \pm \varepsilon_0, \quad f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] = f(x_1) \pm \varepsilon_1, \dots \\ \dots \dots \dots f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})] = f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1},$$

выведемъ

$$(6) S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \dots \\ + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}]$$

попомъ, перемноживъ настоящимъ образомъ, будешь

$$(7) S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) \\ \pm \varepsilon_0(x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1(x_2 - x_1) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1}(X - x_{n-1}).$$

Прибавимъ, что если численныя величины элементовъ $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $X - x_{n-1}$ будутъ весьма малы, то каждое изъ количествъ $\pm \varepsilon_0$, $\pm \varepsilon_1$, ... $\pm \varepsilon_{n-1}$ будешь весьма мало разнѣваясь отъ нуля, а посему и самая сумма

$$\pm \varepsilon_0 (x_1 - x_0) \pm \varepsilon_1 (x_2 - x_1) \pm \dots \pm \varepsilon_{n-1} (X - x_{n-1}),$$

равная произведенію $X - x_0$ на среднюю величину между величинами $\pm \varepsilon_0, \pm \varepsilon_1, \dots, \pm \varepsilon_{n-1}$. Слѣдовательно, чрезъ сравненіе уравненій (2) и (7) заключаемъ, что величина S , определенная по образу разложенія, въ коемъ элементарныя разности $X - x_0$ имѣютъ весьма малыя численныя величины, весьма мало измѣнилась, если перейдемъ къ другому образу разложенія, гдѣ каждый изъ сихъ элементарныхъ подраздѣляея еще на нѣсколько другихъ.

Положимъ теперь, что разсмаприваемся въ одно время два образа разложенія разности $X - x_0$, и что въ каждомъ изъ нихъ элементарныя сей разности имѣютъ весьма малыя численныя величины. Сіи два образа разложенія можно будетъ сравнить съ прешимъ, такимъ, чтобы каждый элементъ, или перваго, или втораго образа разложенія, былъ составленъ изъ суммы нѣсколькихъ элементарныхъ прешяго. Дабы исполнилось сіе условіе, достаточно будетъ чтобы всѣ величины переменной x , введенныя въ двухъ первыхъ разложеніяхъ между предѣлами x_0, X , были введены въ прешій образъ разложенія, и тогда докажется что величина S весьма мало измѣняется, при переходѣ отъ перваго или втораго образа къ прешьему, слѣдовательно также переходя и отъ перваго ко второму. И такъ, когда элементарныя разности $X - x_0$ принимаются безконечно-малыми, по образъ разложенія имѣетъ только безконечно-малое вліяніе на величину S ; и если мы будемъ безпрестанно уменьшать численныя величины сихъ элементарныхъ, увеличивая число оныхъ, то величина S сдѣлается наконецъ почти постоянной, то есть, она достигнетъ нѣкотораго предѣла, который будетъ зависѣть единственно отъ вида функціи $f(x)$, и предѣльныхъ величинъ переменной x , именно:

x_0 , X . Сей-то предѣлъ и называется *опредѣленнымъ*, или *междупредѣленнымъ*, или еще *частнымъ интеграломъ*.

Замѣшимъ шеперь, что изображая чрезъ $\Delta x = h = dx$ конечное приращеніе переменнѣй x , всѣ члены составляющіе величину S , каковы сущь произведенія $(x_1 - x_0)f(x_0)$, $(x_2 - x_1)f(x_1)$, и проч.... будущь заключающься въ общей формулѣ:

$$(8) \quad hf(x) = f(x) dx,$$

изъ коей они выведущься одинъ за другимъ, полагая сперва $x = x_0$ и $h = x_1 - x_0$, пошомъ $x = x_1$, и $h = x_2 - x_1$, и проч... Посему можно приняшь количество S за сумму произведеній подобныхъ выраженію (8); что означаютъ иногда характеристикою Σ такимъ образомъ:

$$(9) \quad \Sigma hf(x) = \Sigma f(x) \Delta x$$

Что касается до опредѣленнаго интеграла, къ коему приближающься количество S , между шѣмъ какъ элементь разноши $X - x_0$ дѣлающься безконечно-малыми: то оный условились изображать знакоположеніемъ $\int hf(x)$ или $\int f(x) dx$, гдѣ буква \int поставленная вмѣсто буквы Σ , означаютъ уже не сумму произведеній подобныхъ выраженію (8), но предѣлъ шаковой суммы. Сверхъ того, поелику величина разсмаприваемаго нами опредѣленнаго интеграла, зависить ошъ предѣльныхъ величинъ переменнѣй x , именно ошъ x_0 и X : то условились также спавишь сіи двѣ величины, первую въ низу, а впорую въ верху буквы \int , или пишеть ихъ съ боку интеграла, въ такомъ видѣ:

$$(10) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx, \quad \int f(x) dx \left[\begin{matrix} x_0 \\ X \end{matrix} \right], \quad \int f(x) dx \left[\begin{matrix} x = x_0 \\ x = X \end{matrix} \right].$$

Первое изъ сихъ знакоположеній, въ первый разъ упошребленное Г. *Фурсе*, ешъ самое удобное. Въ частномъ случаѣ, когда вмѣсто функціи $f(x)$ имѣемъ постоянное количество a ; то

каковъ бы ни былъ образъ разложенія разности $X - x_0$ на элементы, найдется,

$$S = a(X - x_0),$$

слѣдовательно

$$(11) \quad \int_{x_0}^X a dx = a(X - x_0).$$

Полагая въ сей послѣдней формулѣ $a = 1$, получимъ:

$$(12) \quad \int_{x_0}^X dx = X - x_0.$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ВТОРОЙ.

*Формулы опредѣляющія точныя или приближенныя величины
междупредѣльныхъ интеграловъ.*

Изъ сказаннаго нами въ послѣднемъ урокѣ слѣдуетъ, что если разность $X - x_0$, будетъ разложена на безконечно-малые элемены $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$; то сумма

$$(1) S = (x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$$

будетъ стремиться къ предѣлу, который изображается опредѣленнымъ интеграломъ

$$(2) \int_{x_0}^X f(x) dx.$$

Изъ правилъ, на коихъ мы основали сіе предложеніе, слѣдуетъ также, что пошъ же самой предѣлъ получили бы опредѣляя величину для S изъ уравненій (5) и (6) (21^{го} урока), вмѣстѣ со шго чшобы выводилъ оную по формулѣ (1), то есть, предположивъ

$$(3) S = (x_1 - x_0)f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1)f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots + (X - x_{n-1})f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})],$$

гдѣ $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n-1}$ означаютъ какія нибудь числа меньшія единицы, или,

$$(4) S = (x_1 - x_0)[f(x_0) \pm \varepsilon_0] + (x_2 - x_1)[f(x_1) \pm \varepsilon_1] + \dots + (X - x_{n-1})[f(x_{n-1}) \pm \varepsilon_{n-1}],$$

гдѣ $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ означаютъ числа уничтожающіяся вмѣстѣ съ элеменсами разности $X - x_0$. Первая изъ двухъ предѣ-

идущихъ формулъ обратись въ уравненіе (1), когда возьмемъ $\theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_{n-1} = 0$. Напрощивъ шого, полагая $\theta_0 = \theta_1 = \dots = \theta_{n-1} = 0$, найдемся:

$$(5) S = (x_1 - x_0)f(x_1) + (x_2 - x_1)f(x_2) + \dots + (X - x_{n-1})f(X).$$

Ежели въ сей послѣдней формулѣ, перемѣнимъ между собою два количества x_0, X , равно какъ и всѣ члены, находящіеся на равныхъ разстояніяхъ отъ двухъ крайнихъ въ ряду $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X$; то получимъ новую величину для S равную той, которую даетъ уравненіе (1), но только съ прошивнымъ знакомъ. Предѣль, къ коему будешь стремиться сія новая величина S , долженъ быть равенъ интегралу (2), съ прошивнымъ знакомъ; слѣдовательно сей новый интегралъ выводится изъ (2) чрезъ измѣненіе порядка предѣловъ. Посему

$$(6) \int_X^{x_0} f(x) dx = - \int_{x_0}^X f(x) dx.$$

Формулы (1) и (5) часно употребляются при изысканіи приближенныхъ величинъ определенныхъ интеграловъ. Для большей удобности въ выкладкахъ, обыкновенно предполагають, что количества x_0, x_1, \dots, x_{n-1} , заключающіяся въ сихъ формулахъ, составляютъ арифметическую прогрессию. Тогда каждый элементъ разности $X - x_0$ равенъ дроби $\frac{X - x_0}{n}$, и означивъ сію дробь чрезъ i , уравненія (1) и (5) обратятся въ два слѣдующія:

$$(7) S = i[f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \dots + f(X - 2i) + f(X - i)],$$

$$(8) S = i[f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \dots + f(X - 2i) + f(X - i) + f(X)].$$

Можно также положить, что количества $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, X$ составляютъ геометрическую прогрессию, коей знаменатель весьма мало разнится отъ единицы.

Въ семь предположеніи, сдѣлавъ $(\frac{X}{x_0})^{\frac{1}{n}} = 1 + \alpha$, изъ формуль (1) и (5) получимъ двѣ новыя величины для S ; первая изъ нихъ будетъ

$$(9) S = a \{ x_0 f(x_0) + x_0(1 + \alpha) f[x_0(1 + \alpha)] + \dots + \frac{X}{1 + \alpha} f(\frac{X}{1 + \alpha}) \}.$$

Замѣшимъ, что во многихъ случаяхъ, изъ уравненій (7) и (9) можно вывести, не только приближенныя величины интеграла (2), но даже и точную его величину, равную *пр.* S . На примѣръ, найдемъ,

$$(10) \int_{x_0}^X x dx = \text{пр.} \frac{(X-x_0)(X+x_0-i)}{2} = \text{пр.} \frac{X^2 - x_0^2 - i(X-x_0)}{2} = \frac{X^2 - x_0^2}{2};$$

$$(11) \int_{x_0}^X A^x dx = \text{пр.} \frac{i(A^X - A^{x_0})}{A^i - 1} = \frac{A^X - A^{x_0}}{l(A)}, \quad \int_{x_0}^X e^x dx = e^X - e^{x_0};$$

$$(12) \int_{x_0}^X x^a dx = \text{пр.} \frac{a(X^{a+1} - x_0^{a+1})}{(1+\alpha)^{a+1} - 1} = \frac{X^{a+1} - x_0^{a+1}}{a+1}, \quad \int_{x_0}^X \frac{dx}{x} = \text{пр.} na = l\left(\frac{X}{x_0}\right);$$

последнее уравненіе должно быть допускаемо только въ томъ случаѣ, когда количества x_0 , X имѣютъ одинакіе знаки. Прибавимъ еще, что часто легко бываетъ найти зависимость между однимъ определеннымъ интеграломъ и другимъ того же рода. Такъ, на примѣръ, изъ формулы (1) выводимъ:

$$(13) \int_{x_0}^X a \varphi(x) dx = \text{пр.} a [(x_1 - x_0) \varphi(x_0) + \dots + (X - x_{n-1}) \varphi(x_{n-1})] \\ = a \int_{x_0}^X \varphi(x) dx;$$

$$(14) \int_{x_0}^X f(x+a) dx = \text{пр.} [(x_1 - x_0) f(x_0+a) + \dots + (X - x_{n-1}) f(x_{n-1}+a)] \\ = \int_{x_0+a}^{X+a} f(x) dx;$$

$$(15) \int_{x_0}^X f(x-a) dx = \int_{x_0-a}^{X-a} f(x) dx, \quad \int_{x_0}^X \frac{dx}{x-a} = \int_{x_0-a}^{X-a} \frac{dx}{x} = l\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right);$$

последнее уравненіе должно быть допускаемо только въ томъ случаѣ, когда $x_0 - a$ и $X - a$ изображаютъ количества имѣю-

ція одинакіє знаки. Сверхъ того, полагая $x_0 = 0$ въ формуль (8), и подставляя попомъ $f(X - x)$ вмѣсто $f(x)$, получимъ:

$$(16) \int_0^X f(X-x) dx = np \cdot i [f(X-i) + f(X-2i) + \dots + f(2i) + f(i) + f(0)] \\ = \int_0^X f(x) dx;$$

отсюда, соображаясь съ уравненіемъ (14), выводимъ

$$(17) \int_0^{X-x_0} f(X-x) dx = \int_0^{X-x_0} f(x+x_0) dx = \int_{x_0}^X f(x) dx.$$

Также, подставляя въ формуль (9) $\frac{1}{xl(x)}$ вмѣсто $f(x)$ и β вмѣсто $l(1+\alpha)$, получимъ:

$$(18) \int_{x_0}^X \frac{dx}{xl(x)} = np \cdot \beta \left[\frac{1}{l(x_0)} + \frac{1}{l(x_0)+\beta} + \dots + \frac{1}{l(X)-\beta} \right] \left(\frac{e^{\beta}-1}{\beta} \right) = \int_{l(x_0)}^{l(X)} \frac{dx}{x} \\ = l \left[\frac{l(X)}{l(x_0)} \right],$$

гдѣ количества x_0 , X должны быть положительныя, и оба больше, или оба меньше единицы.

Здѣсь необходимо замѣнить, что видъ, въ которомъ представляется величина для S , въ уравненіяхъ (4) и (5) предыдущаго урока, приличествуетъ равно и интегралу (2). И дѣйствительно, сіи уравненія, оба имѣя вмѣсто, тогда какъ или разность $X - x_0$, или количества $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, ... $X - x_{n-1}$ разложены на безконечно-малые элементы, будутъ справедливы и при переходѣ къ предѣлу; посему будемъ имѣть

$$(19) \int_{x_0}^X f(x) dx = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)], \text{ и}$$

$$(20) \int_{x_0}^X f(x) dx = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] \\ + \dots + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})],$$

гдѣ θ , θ_0 , θ_1 , ... θ_{n-1} изображаютъ величины неизвѣстныя, но кои всѣ меньше единицы. Предположивъ, для большей про-

спомы, что количества $x_1 - x_0, x_2 - x_1, \dots, X - x_{n-1}$ равны между собою, и сдѣлавъ $i = \frac{X - x_0}{n}$, найдемъ:

$$(21) \int_{x_0}^X f(x) dx = i [f(x_0 + \theta_0 i) + f(x_0 + i + \theta_1 i) + \dots + f(X - i + \theta_{n-1} i)].$$

Когда функция $f(x)$ будетъ постоянно или возрастать или уменьшаться отъ $x = x_0$ до $x = X$, то вторая часть формулы (21), очевидно будетъ заключаться между двумя величинами S , данными уравненіями (7) и (8); и поелику разность сихъ величинъ есть $\pm i [f(X) - f(x_0)]$, то принявъ въ семь предположеніи, полу-сумму сихъ двухъ величинъ, то есть выраженіе

$$(22) i \left[\frac{1}{2} f(x_0) + f(x_0 + i) + f(x_0 + 2i) + \dots + f(X - 2i) + f(X - i) + \frac{1}{2} f(X) \right]$$

за приближенную величину интеграла (21), возможная погрѣшность будетъ меньше полу-разности $\pm i \left[\frac{1}{2} f(X) - \frac{1}{2} f(x_0) \right]$.

Примѣръ. Возмемъ $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x_0 = 0$, $X = 1$, $i = \frac{1}{4}$; выраженіе (22) обратится въ $\frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \right] = 0,78\dots$. А посему 0,78 есть приближенная величина интеграла $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$. Въ семь случаѣ, возможная погрѣшность не можетъ превышать $\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{16}$. И дѣйствительно, она будетъ меньше одной сотой, какъ мы то въ послѣдствіи увидимъ. Когда же функция $f(x)$, то возрастаетъ, то уменьшается между предѣлами $x = x_0$, $x = X$; то возможная погрѣшность, когда примемъ одну изъ величинъ S доставляемыхъ уравненіями (7) и (8) за приближенную величину интеграла (2), очевидно будетъ меньше произведенія количества n и $i = X - x_0$ на наибольшую численную величину какую можешь получишь разность

$$(23) \quad f(x + \Delta x) - f(x) = \Delta x f'(x + \theta \Delta x)$$

когда x предполагается заключающимся между предѣлами x_0 , X , а Δx между предѣлами o и i . И такъ, изображая буквою k самую большую изъ численныхъ величинъ какую получаешь $f(x)$, тогда какъ x измѣняется отъ $x = x_0$, до $x = X$, возможная погрѣшность въ величинѣ интеграла (2), будетъ заключаться между предѣлами

$$-ki(X - x_0), \quad +ki(X - x_0).$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ТРЕТІЙ.

Разложеніе опредѣленнаго интеграла на нѣсколько другихъ. Мнимые опредѣленные интегралы. Геометрическое знаніе вещественныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Разложеніе функціи находящейся подъ знакомъ \int на два множителя, изъ коихъ второй удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ.

Для разложенія опредѣленнаго интеграла

$$(1) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx$$

на нѣсколько другихъ шагого же рода, надлежитъ разложить, или функцію споящую подъ знакомъ \int , или разность $X - x_0$, на нѣсколько частей. Положимъ сперва что $f(x) = \varphi(x) + \chi(x) + \psi(x) + \dots$; получимъ:

$$\begin{aligned} (x_1 - x_0)f(x_0) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) &= (x_1 - x_0)\varphi(x_0) + \dots \\ &\quad + (X - x_{n-1})\varphi(x_{n-1}) \\ + (x_1 - x_0)\chi(x_0) + \dots + (X - x_{n-1})\chi(x_{n-1}) &+ (x_1 - x_0)\psi(x_0) + \dots \\ &\quad + (X - x_{n-1})\psi(x_{n-1}) + \text{и проч.} \end{aligned}$$

попомъ, переходя къ предѣламъ,

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^X \varphi(x) dx + \int_{x_0}^X \chi(x) dx + \int_{x_0}^X \psi(x) dx + \text{и проч.}$$

Посему, означая чрезъ $u, v, w \dots$ различныя функціи перемѣнной x , и чрезъ $a, b, c \dots$ постоянныя количества, основываясь на уравненіи (13) (22^{го} урока), получимъ:

$$(2) \quad \int_{x_0}^X (u + v + w + \dots) dx = \int_{x_0}^X u dx + \int_{x_0}^X v dx + \int_{x_0}^X w dx + \dots;$$

$$(3) \int_{x_0}^X (u+v)dx = \int_{x_0}^X udx + \int_{x_0}^X vdx, \quad \int_{x_0}^X (u-v)dx = \int_{x_0}^X udx - \int_{x_0}^X vdx,$$

$$(4) \int_{x_0}^X (au+bv+cw\dots)dx = a\int_{x_0}^X udx + b\int_{x_0}^X vdx + c\int_{x_0}^X wdx + \dots$$

Разпространимъ опредѣленіе данное интегралу (1) и на особый случай, когда функция $f(x)$ будетъ мнимая; поему уравненіе (4) будетъ имѣть мѣсто и для мнимыхъ величинъ постоянныхъ количествъ $a, b, c \dots$; слѣдовательно

$$(5) \int_{x_0}^X (u + v\sqrt{-1})dx = \int_{x_0}^X udx + \sqrt{-1} \int_{x_0}^X vdx.$$

Разложимъ теперь разность $X - x_0$ на конечное число элементовъ $x_1 - x_0, x_2 - x_1 \dots X - x_{n-1}$, и каждый изъ сихъ элементовъ подраздѣлимъ на другіе, коихъ численныя величины безконечно-малы; въ слѣдствіе сего измѣнился и самая величина для S данная уравненіемъ (1) (22^{го} урока). Произведеніе $(x_1 - x_0)f(x_0)$ должно будетъ замѣнишь суммою подобныхъ произведеній, имѣющею предѣломъ интеграль $\int_{x_0}^{x_1} f(x)dx$: Равнымъ образомъ и произведенія $(x_2 - x_1)f(x_1) \dots (X - x_{n-1})f(x_{n-1})$ слѣдуетъ замѣнишь суммами, коихъ совокупившвенными предѣлами будутъ опредѣленные интегралы $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$, и проч... $\int_{x_{n-1}}^X f(x)dx$. Далѣе, сложивъ всѣ сіи различныя суммы, получимъ полную сумму, предѣломъ коей будетъ самый интеграль (1). Но поелику предѣлъ суммы нѣсколькихъ величинъ, равенъ суммѣ ихъ предѣловъ: по будемъ имѣть

$$(6) \int_{x_0}^X f(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^X f(x)dx.$$

Впрочемъ не должно забывать что цѣлое число n изображаетъ величину конечную. Когда между предѣлами x_0, X включимъ одну только величину переменнѣй x , именно ξ : по уравненіе (6) обратится въ

$$(7) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{\xi} f(x) dx + \int_{\xi}^X f(x) dx.$$

Легко доказать что уравненія (6) и (7) имѣють мѣсто даже и въ томъ случаѣ, когда нѣкоторыя изъ количествъ $x_1, x_2 \dots x_{n-1}, \xi$ не заключаются между предѣлами x_0, X , или еще, когда разности $x_1 - x_0, x_2 - x_1 \dots X - x_{n-1}, \xi - x_0, X - \xi$ не всѣ имѣють одинакіе знаки. Положимъ, на примѣръ, что разности $\xi - x_0, X - \xi$ съ прошивными знаками. Въ такомъ случаѣ, смотря по тому, будетъ ли x_0 взято между предѣлами ξ и X , или X между x_0 и ξ , найдется:

$$\int_{\xi}^X f(x) dx = \int_{\xi}^{x_0} f(x) dx + \int_{x_0}^X f(x) dx, \text{ или}$$

$$\int_{x_0}^{\xi} f(x) dx = \int_{x_0}^X f(x) dx + \int_X^{\xi} f(x) dx.$$

Изъ формулы (6) (22^{го} урока) видимъ почему сія два уравненія согласуются съ уравненіемъ (7). И какъ послѣднее доказано во всѣхъ предположеніяхъ: по посему изъ онаго можно будетъ прямо вывести уравненіе (6), каковы бы ни были $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$.

Въ предъидущемъ урокъ видѣли, какъ легко опредѣляются, не только приближенныя величины интеграла (1), но даже и предѣлы возможныхъ погрѣшностей, когда функція $f(x)$ постоянно возрастаетъ или уменьшается отъ $x = x_0$, до $x = X$. Когда сіе условіе не выполнено, то очевидно что помощію формулы (6), можно будетъ разложить интеграль (1) на нѣсколько другихъ, въ разсужденіи которыхъ сему условію будетъ удовлетворено.

Положимъ теперь что предѣлъ X больше предѣла x_0 , и что функція $f(x)$ есть положительная отъ $x = x_0$ до $x = X$; пусть будутъ x и y прямоугольныя координаты, а A площадь заключающаяся съ одной стороны между осью x и кривою линіею $y = f(x)$, а съ другой стороны между ординатами $f(x_0)$, и $f(X)$. Сія площадь, имѣющая основаніемъ линію $X - x_0$,

взяшую на оси абсциссъ, будетъ средняя между площадями двухъ прямоугольниковъ построенныхъ на основаніи $X - x_0$, и имѣющими высоты равныя, первый: мѣньшей, а второй: бѳльшей изъ двухъ ординатъ соотвѣствующихъ крайнимъ точкамъ сего основанія. И такъ сія площадь равна прямоугольнику, коего высота есть средняя ордината выраженная чрезъ $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$; слѣдовательно

$$(8) \quad A = (X - x_0) f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы. Если основаніе $X - x_0$ будетъ разложено на бесконечно-малые элемены $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1 \dots X - x_{n-1}$, то и площадь A также разложится на соотвѣствующіе имъ элемены, коихъ величины будутъ выражены уравненіями подобными формуль (8). Посему, имѣемъ также

$$(9) \quad A = (x_1 - x_0) f[x_0 + \theta_0(x_1 - x_0)] + (x_2 - x_1) f[x_1 + \theta_1(x_2 - x_1)] + \dots \\ + (X - x_{n-1}) f[x_{n-1} + \theta_{n-1}(X - x_{n-1})],$$

гдѣ $\theta_0, \theta_1 \dots \theta_{n-1}$ изображаютъ, какъ выше, числа меньшія единицы. Полагая что въ сѣмъ послѣднемъ уравненіи, численныя величины элеменовъ разности $X - x_0$ бесконечно-малы, и переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$(10) \quad A = \int_{x_0}^X f(x) dx.$$

Примѣры. Приложимъ формулу (10) къ кривымъ даннымъ по уравненіямъ: $y = ax^2$, $xy = 1$, $y = e^x, \dots$

Оканчивая сей урокъ, покажемъ замѣчательное свойство вещественныхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Предположимъ что $f(x) = \varphi(x) \cdot \chi(x)$, гдѣ $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ изображаютъ двѣ новыя функціи перемѣнной x , непрерывныя между предѣлами $x = x_0$, $x = X$, и изъ коихъ, сверхъ того, вторая удерживаетъ постоянно одинъ и тотъ же знакъ между сими предѣлами; вели-

чина S данная уравненіемъ (1) (22^{го} урока) обратится въ слѣдующую:

$$(11) S = (x_1 - x_0) \varphi(x_0) \chi(x_0) + (x_2 - x_1) \varphi(x_1) \chi(x_1) + \dots \\ + (X - x_{n-1}) \varphi(x_{n-1}) \chi(x_{n-1})$$

и будетъ равна суммѣ

$(x_1 - x_0) \chi(x_0) + (x_2 - x_1) \chi(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) \chi(x_{n-1})$
умноженной на среднюю величину между коэффициентами $\varphi(x_0), \varphi(x_1), \dots, \varphi(x_{n-1})$, или, что все равно, на функцію вида $\varphi(\xi)$, гдѣ ξ означаетъ величину переменн \acute{o} й x , заключающуюся между двумя предѣлами x_0 и X . И такъ будетъ

$$(12) S = [(x_1 - x_0) \chi(x_0) + (x_2 - x_1) \chi(x_1) + \dots + (X - x_{n-1}) \chi(x_{n-1})] \cdot \varphi(\xi),$$

откуда, переходя къ предѣлу величины S ,

$$(13) \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^X \varphi(x) \cdot \chi(x) dx = \varphi(\xi) \int_{x_0}^X \chi(x) dx,$$

гдѣ ξ имѣетъ прежнее же значеніе.

Примѣры. Принимая поспешенно

$$\chi(x) = 1, \quad \chi(x) = \frac{1}{x}, \quad \chi(x) = \frac{1}{x-a},$$

получимъ формулы:

$$(14) \int_{x_0}^X f(x) dx = f(\xi) \int_{x_0}^X dx = (X - x_0) f(\xi),$$

$$(15) \int_{x_0}^X f(x) dx = \xi f(\xi) \int_{x_0}^X \frac{dx}{x} = \xi f(\xi) \cdot l\left(\frac{X}{x_0}\right),$$

$$(16) \int_{x_0}^X f(x) dx = (\xi - a) f(\xi - a) \int_{x_0}^X \frac{dx}{x-a} = (\xi - a) f(\xi - a) \cdot l\left(\frac{X-a}{x_0-a}\right),$$

изъ коихъ первая равнозначуща съ уравненіемъ (19) 22^{го} урока. Прибавимъ что отношеніе $\frac{X}{x_0}$ во второй формулѣ и отношеніе $\frac{X-a}{x_0-a}$ въ третьей, предполагаются положительными.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ.

О частныхъ интегралахъ, величины коихъ суть или безконечныя или неопредѣленныя. Главныя величины неопредѣленныхъ интеграловъ.

Въ предъидущихъ урокахъ мы доказали нѣсколько замѣчательныхъ свойствъ опредѣленнаго интеграла

$$(1) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx,$$

но предполагая во $1^{\text{хб}}$: что предѣлы x_0 , X были конечныя количества, во $2^{\text{хб}}$: что функція $f(x)$ оставалась конечною и непрерывною между сими самими предѣлами. Когда сіи два условія выполнены; то означивъ чрезъ $x_1, x_2 \dots x_{n-1}$ новыя величины переменнѣй x , вставленныя между предѣльными величинами x_0, X , получимъ

$$(2) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_{n-1}}^X f(x) dx.$$

Положимъ теперь что имѣемъ только двѣ промежуточныя величины ξ_0 и ξ , изъ коихъ первая, весьма мало разнится отъ x_0 , а вторая, отъ X ; уравненіе (2) обратится въ слѣдующее:

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{\xi_0} f(x) dx + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x) dx + \int_{\xi}^X f(x) dx,$$

которое можно написать такимъ образомъ:

$$\int_{x_0}^X f(x) dx = (\xi_0 - x_0) f[x_0 + \theta_0(\xi_0 - x_0)] + \int_{\xi_0}^{\xi} f(x) dx + (X - \xi) f[\xi + \theta(X - \xi)],$$

гдѣ θ_0 и θ суть два числа меньшія единицы. Если, въ сей послѣдней формулѣ, ξ_0 будетъ стремиться къ предѣлу x_0 , а ξ къ предѣлу X , то, переходя къ предѣламъ, получимъ:

$$(3) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \text{пр.} \int_{\xi_0}^{\xi} f(x) dx.$$

Когда предѣльные величины x_0 , X полагаются безконечными, или когда функція $f(x)$ не будетъ, какъ выше, конечною и непрерывною отъ $x = x_0$ до $x = X$: то въ шакомъ случаѣ нельзя судить, имѣетъ ли количество означенное въ предыдущихъ урокахъ чрезъ S , опредѣленный предѣлъ, и слѣдовательно не знаемъ также какой смыслъ заключаешь въ себѣ знакоположеніе (1), вообще означающее предѣлъ величины S . Для избѣжанія недоразумѣнія, мы разпространимъ, по аналогіи, формулы (2) и (3) и на шѣ случаи, когда оныя не могутъ быть строго доказаны; посему знакоположеніе (1) во всѣхъ случаяхъ будетъ имѣть ясное и опредѣленное значеніе. Нижеслѣдующіе примѣры объяснятъ сіе на самомъ дѣлѣ.

Разсмотримъ, во первыхъ, интеграль

$$(4) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx.$$

Означивъ чрезъ ξ_0 и ξ два переменныя количества, изъ коихъ первое стремится къ предѣлу $-\infty$, а второе къ предѣлу $+\infty$: то изъ формулы (3) получимся

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^x dx = \text{пр.} \int_{\xi_0}^{\xi} e^x dx = \text{пр.} (e^{\xi} - e^{\xi_0}) = e^{\infty} - e^{-\infty} = \infty.$$

И такъ, интеграль (4) равенъ безконечной положительной величинѣ.

Во вторыхъ, рассмотримъ интеграль

$$(5) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x},$$

взяшый между двумя предѣлами, изъ коихъ одинъ есть безконечный, между шѣмъ какъ другой обращаетъ функцію подѣ

знакомъ \int , именно $\frac{1}{x}$, въ безконечную величину. Означимъ чрезъ ξ_0 и ξ два постоянныя количества, изъ коихъ первое стремится къ предѣлу нуль, а второе къ предѣлу ∞ ; изъ формулы (3) выведемъ

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \text{пр.} \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{dx}{x} = \text{пр.} l\left(\frac{\xi}{\xi_0}\right) = l\left(\frac{\infty}{0}\right) = \infty.$$

И такъ, интегралъ (5) имѣеть также безконечную положительную величину.

Замѣтимъ, что если переменная x и функція $f(x)$ остаются обѣ конечными для одного изъ предѣловъ интеграла (1): по формулу (3) можно будетъ замѣнить одною изъ двухъ слѣдующихъ:

$$(6) \int_{x_0}^X f(x) dx = \text{пр.} \int_{x_0}^{\xi} f(x) dx, \int_{x_0}^X f(x) dx = \text{пр.} \int_{\xi_0}^X f(x) dx.$$

Въ слѣдствіе сихъ послѣднихъ формулъ, найдемъ на примѣръ:

$$(7) \begin{cases} \int_{-\infty}^0 e^x dx = e^0 - e^{-\infty} = 1, & \int_0^{\infty} e^x dx = e^{\infty} - e^0 = \infty; \\ \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = l(0) = -\infty, & \int_0^1 \frac{dx}{x} = l\left(\frac{1}{0}\right) = \infty. \end{cases}$$

Разсмотримъ теперь интегралъ

$$(8) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x},$$

въ коемъ функція подъ знакомъ \int , именно $\frac{1}{x}$, обращается въ безконечность для частной величины $x = 0$, заключающейся между предѣлами $x = -1$, $x = +1$. По формуль (2) получимъ:

$$(9) \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} = -\infty + \infty$$

И такъ, величина интеграла (8) кажется неопредѣленною, а чтобы увѣришься, что она дѣйствительно такова, надлежитъ только замѣнить, что если означимъ чрезъ ε безконеч-

но-малое число, а чрезъ μ , ν два количества постоянныя и положительныя, но произвольныя; по въ силу формуль (6), будемъ имѣть

$$(10) \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} = nр. \int_{-1}^{-\varepsilon\mu} \frac{dx}{x}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{x} = nр. \int_{\varepsilon\nu}^1 \frac{dx}{x}.$$

Слѣдовательно, формула (9) обратится въ

$$(11) \quad \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{x} = nр. \left\{ \int_{-1}^{-\varepsilon\mu} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^1 \frac{dx}{x} \right\} = nр. \left[l(\varepsilon\mu) + l\left(\frac{1}{\varepsilon\nu}\right) \right] = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right),$$

и дославивъ для интеграла (8), величину совершенно неопредѣленную, поелику сія величина равняется Неперову логариему постоянного произвольнаго количества $\frac{\mu}{\nu}$.

Положимъ теперь что функція $f(x)$ дѣлается безконечною между предѣлами $x = x_0$, $x = X$, отъ частныхъ величинъ переменннй x , именно, отъ $x = x_1$, $x = x_2 \dots x = x_m$. Означимъ чрезъ ε безконечно-малое количество, а чрезъ $\mu_1, \nu_1, \mu_2, \nu_2, \dots, \mu_m, \nu_m$ постоянныя положительныя количества, но произвольныя; по изъ формуль (2) и (3) выведемъ

$$(12) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_m}^X f(x) dx \\ = nр. \left\{ \int_{x_0}^{x_1 - \varepsilon\mu_1} f(x) dx + \int_{x_1 + \varepsilon\nu_1}^{x_2 - \varepsilon\mu_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \varepsilon\nu_m}^X f(x) dx \right\}.$$

Замѣняя же предѣлы x , X , предѣлами $-\infty$ и $+\infty$, получимъ

$$(13) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \\ nр. \left\{ \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{x_1 - \varepsilon\mu_1} f(x) dx + \int_{x_1 + \varepsilon\nu_1}^{x_2 - \varepsilon\mu_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \varepsilon\nu_m}^1 f(x) dx \right\},$$

гдѣ μ, ν означаютъ оныя количества постоянныя и положительныя, но произвольныя. Прибавимъ, что во второй части формулы (13), должно будетъ поставитъ X вмѣсто $\frac{1}{\varepsilon\nu}$, или x_0 вмѣсто $-\frac{1}{\varepsilon\mu}$, если одинъ только изъ предѣловъ x_0, X , будетъ безконечный. Во всѣхъ случаяхъ, величины интеграловъ

$$(14) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

доставляемые уравнениями (12) и (13), могутъ бытъ, по свойству функціи $f(x)$, или безконечныя, или конечныя и совершенно опредѣленныя количества, или еще величины неопредѣленныя, кои будутъ зависѣть отъ частныхъ значеній постоянныхъ произвольныхъ количествъ $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \dots, \mu_m, \nu_m$.

Положивъ въ формулахъ (12) и (13) что постоянныя произвольныя величины $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1, \dots, \mu_m, \nu_m$ всѣ равны единицѣ, получимъ:

$$(15) \quad \int_x^X f(x) dx = np. \left\{ \int_{x_0}^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \varepsilon}^X f(x) dx \right\},$$

$$(16) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = np. \left\{ \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x) dx \right\}.$$

Когда интегралы (14) дѣлаются неопредѣленными, то уравненія (15) и (16) доставляютъ для каждаго изъ нихъ одну только частную величину, которую и назовемъ *главною величиною*. Если возьмемъ, на примѣръ, интеграль (8), коего общая величина неопредѣленная; то увидимъ, что главная величина сего интеграла обращается въ нуль.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ПЯТЫЙ.

О близкопредѣльныхъ частныхъ интегралахъ.

Положимъ что интегралъ относительный къ x , и въ ко-
емъ функція подъ знакомъ \int означена чрезъ $f(x)$, взявъ между
двумя предѣлами бесконечно близкими къ некоторой частной
величинѣ x , означенной чрезъ a . Если сія величина a есть
количество конечное, и если, сверхъ того, функція $f(x)$ бу-
детъ конечная и непрерывная въ сопредѣльности частнаго
значенія $x = a$: то, въ слѣдствіе формулы (19) (22^{го} урока),
найдемъ, что разсмашиваемый интегралъ равенъ нулю. Но
сей самый интегралъ можетъ получить величину конечную,
разншвующую отъ нуля, или даже величину бесконечную,
если будетъ $a = \pm \infty$, или $f(a) = \pm \infty$. Интегралъ относя-
щійся къ сему послѣднему предположенію, мы назовемъ *близко-*
предѣльными частными интегралами. Величина онаго вообще
легко опредѣлится помощію формулъ (15) и (16) (23^{го} урока),
какъ мы по ниже покажемъ

Пусть будетъ ε бесконечно-малое число, а μ, ν два постано-
янные положительныя количества, но впрочемъ произвольныя.
Если a будетъ количество конечное, удовлетворяющее уравне-
нію $f(x) = \pm \infty$, и если означимъ чрезъ Γ предѣлъ къ коему
приближается произведение $(x - a)f(x)$, между пѣмъ какъ
первый его множитель приближается къ нулю: то величины
близкопредѣльныхъ интеграловъ $\int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x) dx$, $\int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x) dx$,

въ слѣдствіе формулы (16) (23^{го} урока), будучь весьма мало разншвовашь опть

$$(1) \int_{a-\varepsilon}^{a-\varepsilon\mu} f(x) dx = f.l(\mu), \quad (2) \int_{a+\varepsilon\nu}^{a+\varepsilon} f(x) dx = f.l\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Напрощивъ того, полагая $a = \pm \infty$, и изобразивъ буквою f предѣль къ коему приближается произведение $xf(x)$, между шѣмъ какъ переменная x приближается къ предѣлу $\pm \infty$, получимъ для интеграловъ (по уравненію (15), 23^{го} урока) слѣдующія величины, весьма мало разншвующія опть настоящихъ,

$$(3) \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x) dx = f.l(\mu), \quad (4) \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} f(x) dx = f.l\left(\frac{1}{\nu}\right).$$

Необходимо замѣнить, что предѣль произведенія $(x-a)f(x)$ или $xf(x)$, зависить иногда опть знака предѣ первымъ его множителемъ. Такъ напримѣръ, произведение $x(x^2+x^4)^{-\frac{1}{2}}$ приближается къ предѣлу $+1$, или -1 , смотря по тому, будешь ли первый множитель, именно x , приближаясь къ нулю, переходить изъ положительнаго состоянія въ отрицательное, или обратно. Изъ сего замѣчанія слѣдуетъ, что количество f можешь иногда имѣть двѣ различныя величины въ уравненіяхъ (1) и (2), также въ уравненіяхъ (3) и (4).

Разсмашириваніе близкопредѣльныхъ частныхъ интеграловъ приводитъ къ опредѣленію общей величины неопредѣленнаго интеграла, когда главная его величина извѣсна. И дѣйствительно, возьмемъ интеграль

$$(5) \int_{x_0}^X f(x) dx,$$

и, сохранивъ знакоположенія предъидущаго урока, положимъ

$$(6) E = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon\mu_1} f(x) dx + \int_{x_1+\varepsilon\nu_1}^{x_2-\varepsilon\mu_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_m+\varepsilon\nu_m}^X f(x) dx,$$

$$(7) F = \int_{x_0}^{x_1-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1+\varepsilon}^{x_2-\varepsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_m+\varepsilon}^X f(x) dx.$$

Сверхъ того, пусть будетъ $A = \text{пр. } E$ общая величина, а $B = \text{пр. } F$ главная величина интеграла (5). Разность $A - B = \text{пр. } (E - F)$ будетъ равна суммѣ близкопредѣльныхъ интеграловъ

$$(8) \int_{x_1 - \varepsilon}^{x_1 - \varepsilon \mu_1} f(x) dx, \int_{x_1 + \varepsilon \nu_1}^{x_1 + \varepsilon} f(x) dx, \int_{x_2 - \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon \mu_2} f(x) dx, \dots \int_{x_m + \varepsilon \nu_m}^{x_m + \varepsilon} f(x) dx,$$

по еспь, предѣлу къ коему приближается сумма интеграловъ (8), между шѣмъ какъ ε пошепенно уменьшаясь спремится къ нулю. Далѣе, изобразивъ чрезъ $f_1, f_2 \dots f_m$ предѣлы, къ коимъ приближаются произведенія

$$(x - x_1) f(x), \quad (x - x_2) f(x) \dots (x - x_m) f(x),$$

между шѣмъ какъ первые ихъ множителели спремятся къ нулю, найдемъ, что ежели сии предѣлы не зависящъ ошь знаковъ сихъ первыхъ множителелей: по сумма интеграловъ (8) весьма мало будетъ разнствовать ошь величины

$$(9) \quad f_1 \cdot l \left(\frac{\mu_1}{\nu_1} \right) + f_2 \cdot l \left(\frac{\mu_2}{\nu_2} \right) + \dots + f_m \cdot l \left(\frac{\mu_m}{\nu_m} \right).$$

Когда $x_1 = x_0$ или $x_m = X$, по въ разности $A - B$ одинъ близкопредѣльный интегралъ уничтожится, именно, или первый или послѣдній изъ интеграловъ (8). Если возьмемъ $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, по уравненія (6) и (7) обрашяшся въ слѣдующія:

$$(10) \quad E = \int_{-\frac{1}{\varepsilon \mu}}^{x_1 - \varepsilon \mu_1} f(x) dx + \int_{x_1 + \varepsilon \nu_1}^{x_2 - \varepsilon \mu_2} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \varepsilon \nu_m}^{\frac{1}{\varepsilon \nu}} f(x) dx,$$

$$(11) \quad F = \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{x_1 - \varepsilon} f(x) dx + \int_{x_1 + \varepsilon}^{x_2 - \varepsilon} f(x) dx + \dots + \int_{x_m + \varepsilon}^{\frac{1}{\varepsilon}} f(x) dx.$$

Въ шомъ же самомъ предположеніи, къ интеграламъ (8) должно присовокупить еще другіе, именно:

$$(12) \quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon \mu}}^{-\frac{1}{\varepsilon}} f(x) dx, \quad \int_{\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon \mu}} f(x) dx,$$

коихъ сумма будетъ весьма мало разнспвовашь ошь величины
выраженія

$$(13) \quad f \cdot l \left(\frac{\mu}{v} \right),$$

если произведеніе $x f(x)$ спремншся къ предѣлу f , между шѣмъ
какъ перемѣнная x приближается къ одному изъ двухъ предѣ-
ловъ $-\infty$, $+\infty$. Когда же одинъ шолько изъ предѣловъ x , X
равенъ безконечности: шо въ разности $A - B$ должно сохра-
нить одинъ шолько изъ интеграловъ (12).

Когда для безконечно-малыхъ величинъ ε , и для конечныхъ
или безконечно-малыхъ значеній произвольныхъ коэффициен-
товъ $\mu, v, \mu_1, v_1 \dots \mu_m, v_m$, всѣ близкопредѣльные интегралы
(8) и (12), или по крайній мѣрѣ нѣкопорые изъ ихъ, обра-
щающся въ безконечныя величины, или въ конечныя, но разн-
спвующія ошь нуля: шо очевидно что интегралы $\int_{x_0}^X f(x) dx$,
 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ получаютъ величины безконечныя или неопредѣ-
ленныя; а сіе случншся, когда количества $f_1, f_2 \dots f_m$ не будутъ
всѣ въ одно время равны нулю. Но обратное сему предложе-
ніе не справедливо; дѣйствншельно, можешъ случншся что всѣ
величины $f_1, f_2 \dots f_m$ обращаяся въ нули, между шѣмъ какъ
интегралы (8) и (12), или по крайней мѣрѣ нѣкопорые изъ
нихъ, будутъ имѣть величины конечныя, разнспвующія ошь
нуля, для безконечно-малыхъ значеній коэффициентовъ $\mu, v, \mu_1,$
 $v_1 \dots \mu_m, v_m$. Напримѣръ, возьмемъ $f(x) = \frac{1}{x l(x)}$; произведеніе
 $x f(x)$ уничтожншся ошь предположенія $x = 0$, не смощра на
шо, близкопредѣльный интегралъ

$$\int_{\varepsilon}^{\varepsilon v} \frac{dx}{x l(x)} = l \left[1 + \frac{l(v)}{l(\varepsilon)} \right]$$

не обращншся въ нуль для безконечно-малыхъ величинъ коли-
чества v .

Когда близкопредѣльные интегралы, входящіе въ разность $A - B$ всё уничтожаются для бесконечно-малыхъ величинъ количества ε , какія бы впрочемъ ни были конечныя или бесконечно-малыя величины коэффициентовъ $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 \dots \mu_m, \nu_m$: что можно заключить, что общая величина интеграла (5) обращается въ конечное и опредѣленное количество. И дѣйствительно, означимъ въ семь предположеніи чрезъ δ бесконечно-малое число, а чрезъ ε такое количество, что для величинъ коэффициентовъ $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 \dots \mu_m, \nu_m$ меньшихъ единицы, каждый изъ интеграловъ (8) и (12) имѣетъ численную величину меньше $\frac{1}{2(m+1)} \delta$. Приближенная величина для B , изображенная чрезъ F , будетъ количество конечное, не содержащее уже никакой величины произвольной; и уменьшая попомъ коэффициенты $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 \dots \mu_m, \nu_m$ до бесконечности, очевидно что E будетъ болѣе и болѣе приближаться къ равенству съ A , заключаясь между предѣлами $F - \delta$ и $F + \delta$. И такъ A будетъ заключаться между сими же самыми предѣлами; слѣдовательно, можно найти такое конечное количество F , что разность $A - F$ будетъ меньше даннаго числа δ . Изъ сего должно заключить, что общая величина A интеграла (5), въ настоящемъ предположеніи, будетъ равняться конечному и опредѣленному количеству.

Въ силу сихъ правилъ, получимъ слѣдующее предположеніе.

Теорема. Дабы общая величина интеграла (1) была конечная и опредѣленная, то для сего необходимо и при томъ достаточно, чтобъ величины близкопредѣльныхъ интеграловъ (8) и (12) входящихъ въ разность $A - B$, обратились въ нуль, для бесконечно-малыхъ величинъ количества ε , какія бы впрочемъ ни были конечныя или бесконечно-малыя величины коэффициентовъ $\mu, \nu, \mu_1, \nu_1 \dots \mu_m, \nu_m$.

Примѣръ. Пусть $\frac{f(x)}{F(x)}$ будетъ рациональная дробь. Дабы интегралъ $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx$ имѣлъ конечную и определенную величину; то для сего необходимо и доспапочно во 1^{хъ}: чшобъ уравненіе $F(x) = 0$ не имѣло вещеспвенныхъ корней; во 2^{хъ}: чшобъ степень знаменателя $F(x)$, превосходила бы степень числителя $f(x)$, по крайней мѣрѣ двумя единицами.

УРОКЪ ДВА ДЦАТЬ ШЕСТОЙ.

О неопредѣленныхъ интегралахъ.

Если, въ опредѣленномъ интегралѣ $\int_{x_0}^X f(x) dx$, будемъ измѣнять одинъ изъ двухъ предѣловъ, на примѣръ, количество X : то и самая величина сего интеграла будетъ также измѣняться вмѣстѣ съ симъ предѣломъ; поставляя же x вмѣсто предѣла X , полагаемаго переменнымъ, получимся новая функція измѣняемой x , которая называется интеграломъ взятымъ отъ начала $x = x_0$. Пусть будетъ

$$(1) \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^X f(x) dx$$

сія новая функція. Изъ формулы (19) (22^{го} урока) получимъ

$$(2) \quad \Phi(x) = (x - x_0) f[x_0 + \theta(x - x_0)], \quad \Phi(x_0) = 0,$$

гдѣ θ есть число меньше единицы; въ силу же формулы (7) (23^{го} урока), имѣемъ

$$\int_{x_0}^{x+\alpha} f(x) dx - \int_{x_0}^x f(x) dx = \int_x^{x+\alpha} f(x) dx = \alpha f(x + \theta\alpha), \text{ или}$$
$$(3) \quad \Phi(x + \alpha) - \Phi(x) = \alpha f(x + \theta\alpha).$$

Изъ уравненій (2) и (3) слѣдуетъ, что если функція $f(x)$ будетъ конечная и непрерывная въ соприкосновенности какой либо частной величины переменной x ; то новая функція $\Phi(x)$ будетъ не только конечною, но и непрерывною въ соприкосновенности сей же самой величины, ибо безконечно-малому приращенію переменной x , будетъ соотвѣтствовать безконечно же малое приращеніе функціи $\Phi(x)$. И такъ, если функція $f(x)$ есть

конечная и непрерывная ось $x = x_0$ до $x = X$: то и функция $\Phi(x)$ будетъ таковою же между сими самими предѣлами. Прибавимъ, что раздѣливъ ось части формулы (3) на α , и переходя пошомъ къ предѣламъ, получимъ:

$$(4) \quad \Phi'(x) = f(x).$$

Слѣдовашельно производная интеграла (1), принимая оный за функцию переменнй x , равна функции $f(x)$ находящейся подъ интегральнымъ знакомъ \int . Подобнымъ образомъ докажемъ ся что производная интеграла $\int_x^X f(x) dx = -\int_x^X f(x) dx$, принимаемаго за функцию переменнй x , равна функции $-f(x)$; посему

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x f(x) dx = f(x), \text{ и } \frac{d}{dx} \int_x^X f(x) dx = -f(x).$$

Основываясь на предъидущихъ формулахъ, а также и на уравненіи (6) (7^{го} урока), легко будетъ рѣшить слѣдующія задачи.

1^я Задача. *Найти такую функцию $\varpi(x)$, для которой бы производная $\varpi'(x)$ обращалась въ нуль. Или, иначе, рѣшите уравненіе*

$$(6) \quad \varpi'(x) = 0.$$

Рѣшеніе. Ежели допустимъ что функция $\varpi(x)$ остается конечною и непрерывною ось $x = -\infty$ до $x = +\infty$: то означивъ чрезъ x_0 какую ни естъ частную величину переменнй x , изъ формулы (6) (7^{го} урока) выведемъ:

$$(7) \quad \varpi(x) - \varpi(x_0) = (x - x_0) \varpi' [x_0 + \theta(x - x_0)] = 0, \text{ и слѣдовашельно } \varpi(x) = \varpi(x_0),$$

или, изобразивъ чрезъ c пошоянное количество $\varpi(x_0)$,

$$(8) \quad \varpi(x) = c.$$

И такъ, функция $\varpi(x)$ обращается въ пошоянное количество c , и будетъ равна сей величинѣ c , ось $x = -\infty$ до $x = \infty$. Прибавимъ, что сія пошоянная величина совершенно произ-

вольная, поскольку формула (8) удовлетворяетъ уравненію (6), каково бы ни было количество c .

Если допустимъ, что функція $\varpi(x)$ дѣлается прерывною для нѣкошорыхъ частныхъ значеній переменнй x , и означимъ сіи частныя значенія измѣняемой x чрезъ $x_1, x_2 \dots x_m$, предполагая, что оныя поставлены по порядку, ихъ величинъ: по уравненіе (7) будетъ имѣть мѣсто только опъ $x = -\infty$ до $x = x_1$, или опъ $x = x_1$ до $x = x_2$ и проч. . . или наконецъ, опъ $x = x_m$ до $x = +\infty$, смотря по тому, будетъ ли частная величина переменнй x , означенная чрезъ x_0 , заключающяся между предѣлами $-\infty$ и x_1 , или между предѣлами x_1 и x_2 и проч.... или наконецъ между предѣлами x_m и $+\infty$. Слѣдовательно, не будетъ никакой необходимости чшобъ функція $\varpi(x)$ сохраняла одну и ту же величину опъ $x = -\infty$ до $x = +\infty$, но достаточно того, чшобы только она оставалась постоянной между двумя послѣдовательными членами ряда

$$-\infty, x_1, x_2 \dots x_m, +\infty.$$

Сіе можно видѣть, полагая напримѣръ

$$(9) \varpi(x) = \frac{c_0 + c_m}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2} \frac{x - x_1}{\sqrt{(x - x_1)^2}} + \frac{c_2 - c_1}{2} \frac{x - x_2}{\sqrt{(x - x_2)^2}} + \dots + \frac{c_m - c_{m-1}}{2} \frac{x - x_m}{\sqrt{(x - x_m)^2}}$$

гдѣ $c_0, c_1, c_2 \dots c_m$ означаютъ количества постоянныя, но произвольныя. И дѣйствительно, въ семь случаѣ, функція $\varpi(x)$, между предѣлами $x = -\infty, x = x_1$, будетъ равна постоянной величинѣ c_0 ; между предѣлами $x = x_1$ и $x = x_2$, она будетъ равна количеству c_1 , и проч.... наконецъ функція $\varpi(x)$ равна постоянной величинѣ c_m между предѣлами $x = x_m, x = \infty$.

Если пожелаемъ чшобъ $\varpi(x)$ обратилась въ c_0 для отрицательныхъ величинъ переменнй x , и въ c_1 для положительныхъ: то для сего спомощъ только взять

$$(10) \quad \varpi(x) = \frac{c_0 + c_1}{2} + \frac{c_1 - c_0}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

2-я Задача. Найти общую величину функции y , удовлетворяющую уравнению

$$(11) \quad dy = f(x) dx.$$

Рѣшеніе. Означимъ чрезъ $F(x)$ частную величину неизвѣстной функции y , а чрезъ $F(x) + \varpi(x)$ общую ея величину; изъ формулы (11), коей обѣ сіи величины должны удовлетворять, выведемъ $F'(x) = f(x)$, $F'(x) + \varpi'(x) = f(x)$, и слѣдовательно $\varpi'(x) = 0$. Но въ силу перваго изъ уравненій (5) слѣдуешь, что формуль (11) можно удовлетворить взявъ $y = \int_{x_0}^x f(x) dx$. И такъ общая величина неизвѣстной функции y будетъ:

$$(12) \quad y = \int_{x_0}^x f(x) dx + \varpi(x),$$

гдѣ $\varpi(x)$ означаетъ функцию удовлетворяющую уравненію (6). Сія общая величина неизвѣстной y , которая заключаешь въ себѣ, какъ частный случай, интеграль (1), и сохраняетъ пошь же видъ, какое бы ни было *начало* x_0 сего интеграла, изображена просто въ изчисленіяхъ чрезъ $\int f(x) dx$, и называется *неопредѣленнымъ интеграломъ*. Посему, формула (11) приводится къ слѣдующей:

$$(13) \quad y = \int f(x) dx,$$

и обратно, будемъ также имѣть:

$$(14) \quad d \int f(x) dx = f(x) dx.$$

Если функция $F(x)$ разнишя ошь интеграла (1), то общая величина неизвѣстной y , или $\int f(x) dx$, можешь бышь всегда представлена въ видѣ:

$$(15) \quad \int f(x) dx = F(x) + \varpi(x),$$

и должна будешь обратиться въ интеграль (1), для частной величины функции $\varpi(x)$ удовлетворяющей въ одно время, какъ уравненію (6), такъ и слѣдующему:

$$(16) \quad \Phi(x) = \int_{x_0}^x f(x) dx = F(x) + \varpi(x).$$

Сверхъ того, если функции $f(x)$ и $\Phi(x)$ обѣ непрерывны между предѣлами $x = x_0$, $x = X$: то функция $F(x)$ будешь сама такъ же непрерывна, и слѣдовательно $\varpi(x) = \Phi(x) - F(x)$ постоянно сохранишь одну и ту же величину между сими предѣлами, между коими имѣемъ: $\varpi(x) = \varpi(x_0)$,

$$\Phi(x) - F(x) = \Phi(x_0) - F(x_0) = -F(x_0), \quad \Phi(x) = F(x) - F(x_0),$$

$$(17) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx = F(x) - F(x_0).$$

Наконецъ, полагая въ уравненіи (17) $x = X$, найдемъ

$$(18) \quad \int_{x_0}^X f(x) dx = F(X) - F(x_0).$$

Изъ уравненій (15), (17) и (18) слѣдуетъ, что если дана будешь частная величина $F(x)$ неизвѣстной y , удовлетворяющая формулѣ (11); то изъ оной можно вывести, во $1^{\text{хх}}$: величину неопредѣленнаго интеграла $\int f(x) dx$, во $2^{\text{хх}}$: величины двухъ опредѣленныхъ интеграловъ $\int_{x_0}^x f(x) dx$ и $\int_{x_0}^X f(x) dx$, въ томъ случаѣ, когда функции $f(x)$ и $F(x)$ осягаются непрерывными между предѣлами сихъ двухъ интеграловъ.

Примѣръ. Поелику удовлетворяемъ уравненію $dy = \frac{dx}{1+x^2}$ взявъ $y = \arctan x$, и какъ обѣ функции $\frac{1}{1+x^2}$ и $\arctan x$, осягаются конечными и непрерывными между предѣлами $x = -\infty$, $x = \infty$: то изъ формулъ (15), (17) и (18) выводимъ $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + \varpi(x)$, $\int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x$, $\int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} = 0,785\dots$

Приближаніе. Когда въ уравненіи (17) намѣрены разпространить величину переменнѣной x далѣе предѣла для котораго функція $f(x)$ имѣеть разрывъ непрерывности: по обыкновенно должно прибавлять ко второй части сей формулы одинъ или нѣсколько близкпредѣльныхъ интеграловъ.

Прилѣръ. Поелику удовлетворяемъ уравненію $dy = \frac{dx}{x}$ принимая $y = \frac{1}{2} l(x^2)$; по означивъ чрезъ ε безконечно-малое число, а чрезъ μ, ν два положительныхъ коэффициента, для $x < 0$ найдемъ

$$\int_{-1}^x \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) - \frac{1}{2} l(1) = \frac{1}{2} l(x^2); \text{ а для } x > 0,$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^x \frac{dx}{x} &= \int_{-1}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\nu\varepsilon}^x \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} l(x^2) - \frac{1}{2} l(1) + l\left(\frac{\mu}{\nu}\right) \\ &= \frac{1}{2} l(x^2) + \int_{-\varepsilon}^{-\mu\varepsilon} \frac{dx}{x} + \int_{\varepsilon\nu}^{\varepsilon} \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ СЕДЬМОЙ.

Различныя свойства неопредѣленныхъ интеграловъ. Способы служащіе для опредѣленія оныхъ.

Изъ сказаннаго нами въ предъидущемъ урокъ, слѣдуетъ, что неопредѣленной интеграль

$$(1) \quad \int f(x) dx$$

есть не иное что, какъ общая величина неизвѣстной функціи y , удовлетворяющая дифференціальному уравненію

$$(2) \quad dy = f(x) dx.$$

Мы видѣли также, что по данной частной величинѣ $F(x)$ той же самой неизвѣстной функціи y , легко опредѣляется и общая величина для оной, придавъ къ $F(x)$ функцію $\omega(x)$, удовлетворяющую уравненію $\omega'(x) = 0$, или, что все равно, придавая къ $F(x)$ алгебраическое выраженіе, принимающее на себя конечное число постоянныхъ величинъ, изъ коихъ каждая, имѣетъ мѣсто между извѣстными предѣлами, приписанными переменной x . Для краткости, мы будемъ впредь означать буквою C выраженіе такого рода, и назовемъ оное *произвольнымъ постояннымъ количествомъ*, что впрочемъ не будетъ значить, что оно сохраняетъ всегда одну и ту же величину, какова бы ни была измѣняемая x . На семъ основаніи, имѣемъ

$$(3) \quad \int f(x) dx = F(x) + C.$$

Когда вмѣсто функціи $F(x)$ поставимъ интегралъ $\int_{x_0}^x f(x) dx$, который есть частная величина неизвѣстной функціи y : то формула (3) обратится въ слѣдующую:

$$(4) \quad \int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + C.$$

Разпространивъ опредѣленіе данное интегралу (1) и на особый случай, когда функция $f(x)$ предполагается мнимой, удостоверимся, что и в семъ предположеніи, уравненія (3) и (4) будутъ также имѣть мѣсто. Только, тогда произвольное постоянное количество C обратится въ мнимое количество въ одно время съ $f(x)$, то есть, оно приметъ видъ $C_1 + C_2 \sqrt{-1}$, гдѣ C_1 и C_2 будутъ означать два произвольныя постоянныя, но вещественныя количества.

Прежде нежели поступимъ далѣе, замѣтимъ что составивъ сумму или разность, или даже какую нибудь линейную функцию двухъ или нѣсколькихъ произвольныхъ постоянныхъ количествъ, получимъ въ выводѣ новое произвольное постоянное же количество.

Черезъ сличеніе уравненія (4) съ формулами (13) (22^{го} урока) и (2), (3), (4), (5) (23^{го} урока), выводимъ различныя замѣчательныя свойства неопредѣленныхъ интеграловъ. И дѣйствительно, поставивъ x вмѣсто X въ обѣ части каждой изъ сихъ формулъ, и придавъ къ интеграламъ, заключающимся въ сихъ частяхъ, произвольныя постоянныя количества, найдемъ:

$$(5) \quad \int a u dx = a \int u dx,$$

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int (u + v + w \dots) dx = \int u dx + \int v dx + \int w dx \dots, \\ \int (u - v) dx = \int u dx - \int v dx, \\ \int (a u + b v + c w \dots) dx = a \int u dx + b \int v dx + c \int w dx + \dots, \\ \int (u + v \sqrt{-1}) dx = \int u dx + \sqrt{-1} \int v dx, \end{array} \right.$$

гдѣ $a, b, c \dots$ означаютъ данныя постоянныя количества, а $u, v, w \dots$ какія нибудь функции переменной x .

Сии послѣднія уравненія имѣютъ мѣсто даже и въ томъ случаѣ, когда $a, b, c \dots u, v, w$ будутъ изображать величины мнимыя.

Интегрировать дифференціальную функцію $f(x) dx$, или иначе, *интегрировать* уравненіе (2), значить найти величину неопредѣленного интеграла $\int f(x) dx$. Самое же дѣйствіе называется *неопредѣленнымъ интегрированіемъ*. *Опредѣленное же интегрированіе* состоитъ въ изысканіи величины опредѣленного интеграла $\int_{x_0}^X f(x) dx$. Теперь мы покажемъ четыре главные способа, помощію коихъ можно производить, въ нѣкоторыхъ случаяхъ, неопредѣленное интегрированіе.

Непосредственное интегрированіе. Когда въ формулѣ $f(x) dx$ узнаемъ точный дифференціалъ опредѣленной функціи $F(x)$, то величина неопредѣленного интеграла $\int f(x) dx$ непосредственно выводиться изъ уравненія (3). Число случаевъ въ коихъ сей родъ интегрированія удаешся, увеличивается, наблюдая что постоянные множители при функціи $f(x)$, могутъ быть поставлены по произволу подъ знакомъ \int или внѣ онаго (смотри уравненіе (5)).

$$\begin{aligned} \text{Примѣры. } \int a dx &= ax + C, \quad \int (a+1)x^a dx = x^{a+1} + C, \quad \int x^a dx = \frac{x^{a+1}}{a+1} + C, \\ \int x dx &= \frac{1}{2}x^2 + c, \quad \int \frac{dx}{x^2} = -\frac{1}{x} + c, \quad \int \frac{dx}{x^m} = -\frac{1}{(m-1)x^{m-1}} + c, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c, \\ \int \frac{dx}{x} &= \frac{1}{2}l(x^2) + c, \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arctang} x + c, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsin} x + c = c + \frac{1}{2}\pi - \text{arccos} x, \\ \int e^x dx &= e^x + c, \quad \int A^x (l A) dx = A^x + c, \quad \int A^x dx = \frac{A^x}{l(A)} + c, \\ \int \cos x dx &= \sin x + c, \quad \int \sin x dx = -\cos x + c, \\ \int \frac{dx}{\cos^2 x} &= \text{tang} x + c, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\text{cot} x + c. \end{aligned}$$

Интегрированіе чрезъ подстановленіе. Положимъ, что вмѣсто переменнѣй x ввели другую измѣняемую z , сопряженную съ первою такимъ уравненіемъ, которое даетъ $z = \varphi(x)$ и $x = \chi(z)$. Формула (2) замѣнится слѣдующею:

$$(7) \quad dy = f[\chi(z)] \cdot \chi'(z) dz.$$

Сдѣлавъ для краткости $f[\chi(z)] \cdot \chi'(z) = f(z)$, общая величина неизвѣстной y , выведенная изъ уравненія (7), будетъ предшавлена чрезъ неопредѣленной интеграль $\int f(z) dz$. Сверхъ того, сія общая величина должна согласоваться съ интеграломъ (1). Но какъ, въ силу отношенія, существующаго между x и z , имѣемъ непосредственно

$$(8) \quad f(x) dx = f(z) dz,$$

по опсиода заключаемъ

$$(9) \quad \int f(x) dx = \int f(z) dz.$$

Положимъ теперь, что величина интеграла $\int f(z) dz$, дана уравненіемъ вида

$$(10) \quad \int f(z) dz = F(z) + C;$$

изъ сего уравненія выведемъ,

$$(11) \quad \int f(x) dx = F[\varphi(x)] + C.$$

Примѣры. Принимая формулу (10) и полагая послѣдовательно $x \pm a = z$, $ax = z$, $\frac{x}{a} = z$, $x^2 + a^2 = z$, $l(x) = z$, $e^x = z$, $\sin x = z$, $\cos x = z$, по формуль (11), сопряженной съ уравненіемъ (5), выводимъ

$$\int f(x \pm a) dx = F(x \pm a) + c, \quad \int f(ax) dx = \frac{1}{a} F(ax) + c,$$

$$\int f\left(\frac{x}{a}\right) dx = a F\left(\frac{x}{a}\right) + c,$$

$$\int x f(x^2 + a^2) dx = \frac{1}{2} F(x^2 + a^2) + c, \quad \int x^{a-1} f(x^a) dx = \frac{1}{a} F(x^a) + c,$$

$$\int f(lx) \frac{dx}{x} = F(lx) + c,$$

$$\int e^x f(e^x) dx = F(e^x) + c, \quad \int \cos x f(\sin x) dx = F(\sin x) + c,$$

$$\int \sin x f(\cos x) dx = -F(\cos x) + c.$$

Сличеніе сихъ послѣднихъ формуль съ формулами, производящими опъ непосредственнаго интегрированія, приводитъ къ слѣдующимъ:

$$\int \frac{dx}{x-a} = \frac{1}{2} l(x-a)^2 + c, \quad \int \frac{dx}{(x-a)^m} = -\frac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c,$$

$$\int \frac{dx}{1+a^2x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctang}(ax) + c,$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1+(\frac{x}{a})^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctang}(\frac{x}{a}) + c, \quad \int \frac{x dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{2} l(x^2+a^2) + c,$$

$$\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \sqrt{x^2+a^2} + c,$$

$$\int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + c, \quad \int e^{-ax} dx = -\frac{1}{a} e^{-ax} + c, \quad \int \cos ax dx = \frac{1}{a} \sin ax + c,$$

$$\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cos ax + c,$$

$$\int \frac{l(x)}{x} dx = \frac{1}{2} [l(x)]^2 + c, \quad \int \frac{dx}{x l(x)} = l l(x) + c, \quad \int \frac{dx}{x(lx)^m} = -\frac{1}{(m-1)(lx)^{m-1}} + c,$$

$$\int \frac{e^x dx}{e^{2x}+1} = \operatorname{arctang}(e^x) + c, \quad \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} + c = \sec x + c, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin x} + c.$$

Интегрирование чрезъ разложение. Сей родъ интегрированія производился помощію формуль (6), когда функція подъ знакомъ \int можетъ быть разложена на нѣсколько такихъ частей, что каждая изъ нихъ, будучи умножена на dx , даетъ произведение удобно интегрируемое. Сей способъ въ особенности употребляется въ томъ случаѣ, когда функція подъ знакомъ \int будетъ или цѣлая функція, или раціональная дробь.

Примѣры. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin^2 x \cos^2 x} dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \operatorname{tang} x - \operatorname{cot} x + C,$

$$\int (a+bx+cx^2+\dots) dx = a dx + b f x dx + c f x^2 dx + \dots = ax + b \frac{x^2}{2} + c \frac{x^3}{3} + \dots + C.$$

Интегрирование по частямъ. Пусть u и v будутъ двѣ различныя функціи переменной x , а u' , v' соотвѣствующія имъ производныя функціи; uv будетъ частная величина неизвѣстной y , удовлетворяющая дифференціальному уравненію $dy = u dv + v du = uv' dx + vu' dx$, изъ котораго получаемъ

$$y = uv + C = \int uv' dx + \int vu' dx = \int u dv + \int v du,$$

и слѣдовательно $\int u dv = uv - (\int v du - C)$, или, еще проще

$$(12) \quad f u d v = u v - f v d u;$$

можно допустить что въ сей послѣдней формулѣ произвольное поспоянное количество — C заключено въ интегралъ $f v d u$.

Примѣры. $\int l(x) dx = x l(x) - \int x \frac{dx}{x} = x[l(x) - 1] + C$, $\int x e^x dx = e^x(x - 1) + C$, $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$, $\int x \sin x dx = -x \cos x + \sin x + C$, и проч...

Примѣчаніе. Необходимо замѣтить что произвольныя поспоянныя количества, скрытно заключающіяся въ неопредѣленныхъ интегралахъ обѣихъ частей уравненія (12), могутъ имѣть весьма различныя численныя величины. Посему не трудно объяснить, по видимому, несообразную формулу

$$\int \frac{dx}{x l(x)} = 1 + \int \frac{dx}{x l(x)},$$

копорую получаемъ, полагая въ уравненіи (12) $u = \frac{1}{l(x)}$ и $v = l(x)$.

УРОКЪ ДВАДЦАТЬ ОСЬМОЙ.

О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихъ въ себѣ алгебрескія функціи.

Алгебрескіи функціи называются такія функціи, которыя производящъ отъ соединенія переменныхъ и постоянныхъ величинъ между собою, посредствомъ простыхъ алгебрескихъ дѣйствій, каковы суть: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, и еще, возвышеніе переменныхъ количествъ въ опредѣленные степени. Алгебрескія функціи одной переменной называются *раціональными*, когда онѣ содержатъ только цѣлыя степени сей переменной, слѣдовательно, когда сіи функціи или цѣлыя, или представляются въ видѣ раціональныхъ дробей. Въ противномъ случаѣ, функціи именуется *ирраціональными*.

Означимъ теперь чрезъ $f(x)$ алгебрескую функцію переменной x , и положимъ что требуется найти величину неопредѣленнаго интеграла $\int f(x) dx$. Если функція $f(x)$ раціональная, то можно будетъ разложить произведеніе $f(x) dx$ на нѣсколько членовъ, принимающихъ одинъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$(I) \quad Ax^m dx, \quad \frac{A dx}{x-a}, \quad \frac{A dx}{(x-a)^m}, \quad \frac{(A+B\sqrt{-1}) dx}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}}, \quad \frac{(A+B\sqrt{-1}) dx}{(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})^m},$$

гдѣ a , α , β , A , B означаютъ постоянныя вещественныя количества, а m цѣлое число; попомъ опредѣлимъ интегралы сихъ различныхъ членовъ, посредствомъ формулъ

$$\int Ax^m dx = A \frac{x^{m+1}}{m+1} + C, \int \frac{A dx}{x-a} = \frac{1}{m-1} Al(x-a)^2 + C, \int \frac{A dx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C,$$

$$\int \frac{(A \mp B\sqrt{-1}) dx}{x - \alpha \mp \beta\sqrt{-1}} = (A \mp B\sqrt{-1}) \int \frac{(x-\alpha) dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2} + (B \pm A\sqrt{-1}) \int \frac{\beta dx}{(x-\alpha)^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{1}{2} (A \mp B\sqrt{-1}) l[(x-\alpha)^2 + \beta^2] + (B \pm A\sqrt{-1}) \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + C,$$

$$\int \frac{(A \mp B\sqrt{-1}) dx}{(x - \alpha \mp \beta\sqrt{-1})^m} = -\frac{A \mp B\sqrt{-1}}{(m-1)(x - \alpha \mp \beta\sqrt{-1})^{m-1}} + C,$$

изъ коихъ первыя чепыре выводятся изъ правилъ доказанныхъ въ предыдущемъ урокъ, а послѣднее, выведенное по аналогіи, соображаясь съ прещимъ уравненіемъ, можешь быть впрочемъ легко повѣрено *à posteriori*.

Примѣры. $\int \left(\frac{A - B\sqrt{-1}}{x - \alpha - \beta\sqrt{-1}} + \frac{A + B\sqrt{-1}}{x - \alpha + \beta\sqrt{-1}} \right) dx = Al[(x - \alpha)^2 + \beta^2]$
 $+ 2B \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} + C,$

$$\int \frac{dx}{x^2-1} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \frac{1}{2} l \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^2 + C, \int \frac{x dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} l(x^2+1) + C,$$

$$\int \frac{dx}{x^3-1} = \int \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{x+2}{x^2+x+1} \right) dx = \frac{1}{6} l \left[\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1} \right] - \frac{1}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C, \text{ и пр.}$$

Когда функція $f(x)$ будетъ хошя и алгебраическою, но ирраціональною: по въ такомъ случаѣ уже нѣтъ общихъ правилъ, посредствомъ коихъ возмознобъ было опредѣлишь почнымъ образомъ величину интеграла $\int f(x) dx$.

Правда, что опредѣленіе интеграла $\int f(x) dx$ было бы возмозно, еслибъ, вводя вмѣсто переменнй x новую переменную z , выраженіе $f(x) dx$ чрезъ по обратилось въ другое $f(z) dz$, въ кошоромъ функція $f(z)$ была бы раціональною. Но для подобнаго преобразованія не имѣется вѣрнаго способа, исключая только нѣкошорые случаи, коихъ число весьма ограничено. Займемся изслѣдованіемъ сихъ самыхъ случаевъ.

Изобразимъ сперва чрезъ $f(x, z)$ раціональную функцію переменныхъ x и z , гдѣ z естъ ирраціональная функція пере-

мѣнной x , опредѣляемая алгебраическимъ уравненіемъ какой либо степени въ отношеніи къ z , но первой степени въ разсужденіи x . Чшобъ дифференціальная функція $f(x, z) dx$ обратилась въ раціональную, и могла бытъ интегрирована: по для сего, очевидно, надлежитъ подставить выраженіе перемѣнной x въ z . Разсмотримъ въ частности тѣ случаи, когда величина перемѣнной z опредѣляется однимъ изъ слѣдующихъ двучленныхъ уравненій:

(2) $z^n - (ax + b) = 0$, $(a_0 x + b_0) z^n - (a_1 x + b_1) = 0$,
или еще уравненіемъ второй степени

(3) $(a_0 x + b_0) z^2 - 2(a_1 x + b_1) z - (a_2 x + b_2) = 0$;

здѣсь $a, b, a_0, b_0, a_1, b_1, a_2, b_2$ изображаютъ постоянныя вещественныя количества, а n какое нибудь цѣлое число. Поелику

же удовлетворяемъ уравненіямъ (2), полагая $z = (ax + b)^{\frac{1}{n}}$,

или $z = \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_0 x + b_0}\right)^{\frac{1}{n}}$, а уравненію (3), полагая

$$z = \frac{a_1 x + b_1 + \sqrt{(a_1 x + b_1)^2 + (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}}{a_0 x + b_0};$$

по изъ сего слѣдуетъ, что дифференціальная функція

(4) $f[x, (ax + b)^{\frac{1}{n}}] dx$ или $f\left[x, \left(\frac{a_1 x + b_1}{a_0 x + b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] dx$,

обратится въ раціональную, и допуститъ интегрированіе, когда замѣнимъ перемѣнною z радикаль n ой степени входящій въ оную функцію. Равнымъ образомъ и формулы

(5)
$$\begin{cases} f\left[x, \frac{a_1 x + b_1 + \sqrt{(a_1 x + b_1)^2 + (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}}{a_0 x + b_0}\right] dx, \\ f\left[x, \sqrt{(a_1 x + b_1)^2 + (a_0 x + b_0)(a_2 x + b_2)}\right] dx, \end{cases}$$

обращаясь въ раціональныя, когда подставимъ въ оныя вмѣсто x , выраженіе сей перемѣнной въ z , опредѣляемое уравненіемъ (3), или, что все равно, слѣдующимъ:

$$(6) \quad \sqrt{(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}=(a_0x+b_0)z-(a_1x+b_1).$$

Теперь положимъ что требуется обратиться выражение

$$(7) \quad f[x, \sqrt{Ax^2+Bx+C}] dx,$$

въ другое, удобное къ интегрированію; здѣсь A , B , C изображаютъ постоянныя вещественныя количества. Очевидно, что надлежитъ для сего употребить уравнение (6), приводя сперва выражение Ax^2+Bx+C къ виду $(a_1x+b_1)^2+(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)$, что можно произвести многоразличными образами; дѣйствительно, для сего спойти только взявъ такую биномію a_1x+b_1 , чтобы разность $Ax^2+Bx+C-(a_1x+b_1)^2$ могла разложиться на вещественныя множители первой степени; сіе условіе будетъ выполнено, если положимъ

$$(8) \quad Ab_1^2+Ca_1^2-Va_1b_1+\frac{1}{4}B^2-AC > 0.$$

Легко видѣть что самыя простыя величины для a_1 и b_1 удовлетворяющія сему неравенству, будутъ: 1°. когда $\frac{1}{4}B^2-AC > 0$, то $a_1=0$, $b_1=0$; 2°. когда $A > 0$, то $a_1=A^{\frac{1}{2}}$, $b_1=0$; 3°. когда $C > 0$, то $b_1=C^{\frac{1}{2}}$, $a_1=0$. Сверхъ того, поелику имѣемъ

$Ax^2+Bx+C-(A^{\frac{1}{2}}x)^2=1 \cdot (Vx+C)$ и $Ax^2+Bx+C-(C^{\frac{1}{2}})^2=x(Ax+B)$, то можно будетъ взять во второмъ случаѣ $a_0x+b_0=1$, а въ первомъ $a_0x+b_0=x$. Изъ сего усматриваемъ, что если Ax^2+Bx+C разлагается на два вещественныя множителя a_0x+b_0 , a_2x+b_2 : то функція (7) обратится въ рациональную, полагая

$$(9) \quad \sqrt{(a_0x+b_0)(a_2x+b_2)}=(a_0x+b_0)z \text{ или } \frac{a_2x+b_2}{a_0x+b_0}=z^2$$

Въ противномъ случаѣ, радикаль $\sqrt{Ax^2+Bx+C}$ не можетъ быть вещественнымъ количествомъ, развѣ что оба коэф-

фиціента A и C будуть въ одно время положительныя. Во всѣхъ случаяхъ, выраженіе (7) обратимъ въ рациональную функцію, полагая

$$(10) \left\{ \begin{array}{l} \text{когда } A > 0 \dots\dots\dots \sqrt{Ax^2+Bx+C} = z - A^{\frac{1}{2}}x, \\ \text{а когда } C > 0, \sqrt{Ax^2+Bx+C} = xz - C^{\frac{1}{2}} \\ \text{или } \sqrt{A + B\frac{1}{x} + C\frac{1}{x^2}} = z - C^{\frac{1}{2}}\frac{1}{x}. \end{array} \right.$$

Легко повѣришь *à posteriori* сіи различныя слѣдствія формулы (16).

Примѣры. Первое изъ уравненій (10) даетъ:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{Ax^2+Bx+C}} = \int \frac{dz}{A^{\frac{1}{2}}z + \frac{1}{2}B} = \frac{l(Ax + \frac{1}{2}B + A^{\frac{1}{2}}\sqrt{Ax^2+Bx+C})}{A^{\frac{1}{2}}} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = l(x + \sqrt{x^2+1}) + C, \int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = l(x + \sqrt{x^2-1}) + C, \text{ и проч...}$$

Необходимо замѣнить, что если означимъ чрезъ $f(u, v, w\dots)$ цѣлую функцію переменныхъ $u, v, w\dots$ а чрезъ $p, q, r\dots$ дѣлителей цѣлаго числа n : то дифференціальныя выраженія

$$(11) \quad f[x, (ax+b)^{\frac{1}{p}}, (ax+b)^{\frac{1}{q}}, (ax+b)^{\frac{1}{r}} \dots] dx,$$

$$f\left[x, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{p}}, \left(\frac{a_1x+b_1}{a_0x+b_0}\right)^{\frac{1}{q}} \dots\right] dx$$

будутъ одного вида съ выраженіями (4), и могутъ быть интегрированы точно такимъ же образомъ. И такъ, полагая $x = z^6$, найдемся:

$$\int (x^{\frac{1}{3}} + x^{\frac{2}{3}})^{-1} dx = 6 \int \frac{z^2 dz}{1+z} = 6 \left[\frac{1}{2}z^2 - z + \frac{1}{2}l(1+z)^2 \right] + C,$$

Прибавимъ еще, что дифференціальныя выраженія

$$(12) \quad f[x^\mu, (ax^\mu + b)^{\frac{1}{n}}] \cdot x^{\mu-1} dx, \quad f\left[x^\mu, \left(\frac{a_1x^\mu+b_1}{a_0x^\mu+b_0}\right)^{\frac{1}{n}}\right] \cdot x^{\mu-1} dx,$$

въ коихъ μ означаешь какое нибудь постоянное количество, непосредственно приведущя къ виду выражений (4), а выражение

$$(13) \quad f [x, (a_0 x + b_0)^{\frac{1}{2}}, (a_1 x + b_1)^{\frac{1}{2}}] \cdot dx$$

къ виду функціи (7), полагая въ выраженіяхъ (12) $x^\mu = y$, а въ выраженіи (13) $a_0 x + b_0 = y^2$.

Примѣръ. Интеграль функціи $\frac{x^{2m+1}}{\sqrt{x^2-1}}$ найдется, полагая $x^2 = y$, $y - 1 = z^2$, или просто $x^2 - 1 = z^2$; функціи же $\frac{dx}{(x-1)^{\frac{1}{2}} + (x+1)^{\frac{1}{2}}}$, полагая $x - 1 = y^2$, потомъ $(y^2 + 2)^{\frac{1}{2}} = z - y$, или просто $(x - 1)^{\frac{1}{2}} + (x + 1)^{\frac{1}{2}} = z$.

Оканчивая сей урокъ, замѣнимъ, что во всѣхъ случаяхъ, когда только найдемъ величину неопредѣленнаго интеграла заключающаго алгебраическую функцію, сія величина будетъ со-спавлена изъ нѣсколькихъ членовъ, изъ коихъ каждый будетъ имѣшь одинъ изъ слѣдующихъ видовъ:

$$(14) \quad f(x), A \cdot l[f(x)], A \cdot \text{arc tang } f(x),$$

гдѣ $f(x)$ изображаетъ алгебраическую функцію переменнй x , а A постоянное количество. Выраженія $\text{arc sin } x = \text{arctang } \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\text{arc cos } x$, и другія подобныя, очевидно, всегда могутъ быть приведены къ виду $A \cdot \text{arc tang } f(x)$.

УРОКЪ ДВА ДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ.

*Объ интегрированіи и приведеніи въ простѣйшій видѣ двучлен-
ныхъ дифференціаловъ; о нѣкоторыхъ другихъ дифференціаль-
ныхъ выраженіяхъ такого же рода.*

Означимъ чрезъ $a, b, a_1, b_1, \lambda, \mu, \nu$ постоянныя веще-
ственные количества, а чрезъ y переменную величину, и поло-
жимъ $y^\lambda = x$. Выраженіе $(ay^\lambda + b)^\mu dy$, въ коемъ коэффи-
ціентъ $y dx$ будетъ нѣкоторая степень биноміи $ay^\lambda + b$,
называется *двучленныиъ дифференціаломъ*; неопредѣленной
интеграль

$$(1) \quad \int (ay^\lambda + b)^\mu dy = \frac{1}{\lambda} \int (ax + b)^\mu x^{\frac{1}{\lambda} - 1} dx$$

будетъ равенъ произведенію $\frac{1}{\lambda}$ на другой интеграль, который
можетъ быть представлень въ слѣдующемъ, болѣе общемъ видѣ:

$$(2) \quad \int (ax + b)^\mu (a_1x + b_1)^\nu dx.$$

Симъ по послѣднимъ интеграломъ мы теперь займемся.

Интеграль (2) легко опредѣлился, когда численныя вели-
чины показателей μ, ν и ихъ сумма $\mu + \nu$ будутъ всѣ при
раціональныя числа, и сверхъ того одно изъ нихъ цѣлое. Дѣй-
ствительно, означимъ чрезъ l, m, n какія нибудь цѣлыя числа.
Для интегрированія дифференціальныхъ выраженій

$$(ax + b)^{\pm l} (a_1x + b_1)^{\pm \frac{m}{n}} dx, \quad (ax + b)^{\pm \frac{m}{n}} (a_1x + b_1)^{\pm l} dx,$$

$$(ax + b)^{\pm \frac{m}{n}} (a_1x + b_1)^{\pm l \mp \frac{m}{n}} dx,$$

споишь полько положишь послѣдовашельно (смотри 28-й урокъ)

$$a_1 x + b_1 = z^n, \quad ax + b = z^n, \quad \frac{ax + b}{a_1 x + b_1} = z^n.$$

Поелику формула $(ax + b)^\mu (a_1 x + b_1)^\nu dx$ не всегда можешь бышь интегрирована почнымъ образомъ: шо не худо показашь какимъ средшвомъ опредѣленіе интеграла (2) приводишь къ опредѣленію другихъ интеграловъ такога же рода, но въ коихъ показашели биномій $ax + b$, $a_1 x + b_1$ будущъ другіе. Таковое преобразование можно учинишь самымъ простымъ способомъ, посредшвомъ уравненія (12) (27-го урока), копорому дадимъ такой видъ:

$$(3) \quad fuv \cdot \frac{1}{2} dl(v^2) = uv - fuv \cdot \frac{1}{2} dl(u^2);$$

пошомъ, будемъ полагашь послѣдовашельно что функціи u и v пропорціональны нѣкопорымъ степенямъ двухъ изъ слѣдующихъ трехъ выраженій:

$$(4) \quad ax + b, \quad a_1 x + b_1, \quad \frac{ax + b}{a_1 x + b_1}.$$

Поелику сіи три количества, взяшыя по два, дають шесть различныхъ переложеній: шо очевидно что формула (3) дастъ также шесть различныхъ уравненій. Изчисленіе будетъ проще, принимая въ выкладкахъ количества u и v за положишельныя; посему формулу (3) можно будетъ замѣнишь слѣдующею:

$$(5) \quad fuv \cdot dl(v) = uv - fuv \cdot dl(u);$$

также будемъ имѣшь уравненія

$$dl(ax+b) = \frac{adx}{ax+b}, \quad dl(a_1x+b_1) = \frac{a_1 dx}{a_1x+b_1}, \quad dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \frac{(ab_1 - a_1b)dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)},$$

изъ коихъ выведемъ величину количества dx , и подставимъ оную въ интеграль (2). Для краткости, означимъ чрезъ A сей самый интеграль. Найдешся:

1°. Полагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $(ax + b)^\mu$, а v количеству $(a_1 x + b_1)^{\nu+1}$,

$$A = \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{a_1} dl(a_1x+b_1) = \int \frac{(ax+b)^\mu}{(v+1)a_1} (a_1x+b_1)^{\nu+1} dl(a_1x+b_1)^{\nu+1}$$

$$= \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(v+1)a_1} - \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(v+1)a_1} dl(ax+b)^\mu,$$

$$(6) \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx = \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(v+1)a_1} - \frac{\mu a}{(v+1)a_1} \int (ax+b)^{\mu-1} (a_1x+b_1)^{\nu+1} dx.$$

2^е. Полагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $(a_1x+b_1)^\nu$, а v количеству $(ax+b)^{\mu+1}$,

$$(7) \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^\nu}{(\mu+1)a} - \frac{va_1}{(\mu+1)a} \int (ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^{\nu-1} dx.$$

3^е. Полагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^\mu$, а v количеству $(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}$,

$$A = \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{a_1} dl(a_1x+b_1) = \int \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^\mu \frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} dl(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+1}$$

$$= \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} - \int \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^\mu,$$

$$(8) \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx = \frac{(ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+\nu+1)a_1} - \frac{\mu(ab_1-a_1b)}{(\mu+\nu+1)a_1} \int (ax+b)^{\mu-1} (a_1x+b_1)^\nu dx.$$

4^е. Полагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $\left(\frac{a_1x+b_1}{ax+b}\right)^\nu$, а v количеству $(ax+b)^{\mu+\nu+1}$,

$$(9) \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx = \frac{(ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^\nu}{(\mu+\nu+1)a} - \frac{v(a_1b-ab_1)}{(\mu+\nu+1)a} \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^{\nu-1} dx.$$

5^е. Полагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2}$, а v количеству $\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}$,

$$A = \int \frac{(ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{ab_1-a_1b} dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right) = \int \frac{(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} \cdot \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1} dl\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{\mu+1}$$

$$= \frac{(ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} - \int \frac{(ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} dl(a_1x+b_1)^{\mu+\nu+2},$$

$$(10) \int (ax+b)^\mu (a_1x+b_1)^\nu dx =$$

$$\frac{(ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^{\nu+1}}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} - \frac{(\mu+\nu+2)a_1}{(\mu+1)(ab_1-a_1b)} \int (ax+b)^{\mu+1} (a_1x+b_1)^\nu dx.$$

6^е. Полагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $(ax+b)^{\mu+\nu+2}$, а v количеству $\left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1}\right)^{-(\nu+1)}$,

$$(11) \quad \int (ax + b)^\mu (a_1x + b_1)^\nu dx = \frac{(ax + b)^{\mu+1} (a_1x + b_1)^{\nu+1}}{(\nu+1)(a_1b - ab_1)} - \frac{(\mu+\nu+2)a}{(\nu+1)(a_1b - ab_1)} \int (ax + b)^\mu (a_1x + b_1)^{\nu+1} dx.$$

Помощію формуль (6), (7), (8), (9), (10), (11), можно будетъ всегда выразишь интеграль (2) посредствомъ другаго интеграла одинаковаго съ нимъ вида, но въ какомъ видѣ каждая изъ двухъ биномій $ax + b$, $a_1x + b_1$ будетъ имѣть показателя, заключающагося между предѣлами 0 и -1 . Дѣйствительно, для сего, стоить только употребить одинъ или нѣсколько разъ сряду формулы (8) и (9), или только одну изъ нихъ, когда показатели μ и ν будутъ положительныя, или, если одинъ изъ нихъ положительный, а другой заключается между предѣлами 0 и -1 . Напримѣръ того, должно будетъ прибѣгнуть къ формуламъ (10) и (11), или только къ одной изъ нихъ, когда показатели μ и ν будутъ оба отрицательныя. Наконецъ, если одинъ изъ двухъ показателей будетъ положительный, а другой менѣе -1 , тогда, посредствомъ формулы (6) или (7) будемъ въ одно время уменьшать численныя величины обоихъ показателей до нѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не обратится въ количество заключающееся между предѣлами 0 и -1 .

Когда показатели μ и ν будутъ цѣлыя, то посредствомъ вышеозначенныхъ приведеній, обратимъ ихъ всегда или въ 0 или въ -1 ; послѣ сихъ приведеній, очевидно что интеграль (2) будетъ зависѣть отъ одного изъ четырехъ слѣдующихъ:

$$(12) \quad \begin{cases} \int dx = x + C, \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} l(ax+b) + C, \int \frac{dx}{a_1x+b_1} = \frac{1}{a_1} l(a_1x+b_1) + C \\ \int \frac{dx}{(ax+b)(a_1x+b_1)} = \frac{1}{ab_1 - a_1b} \int dl \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \right) = \frac{1}{2(ab_1 - a_1b)} l \left(\frac{ax+b}{a_1x+b_1} \right)^2 + C. \end{cases}$$

Вообще, когда функція $(ax + b)^\mu (a_1x + b_1)^\nu dx$ будетъ допускашь почное интегрированіе: то всегда, помощію найденныхъ нами формуль въ семь урокъ, можно будетъ выразишь инте-

граль (2) посредствомъ другихъ простѣйшихъ интеграловъ, коихъ величины легко опредѣляются.

Для приложенія этихъ же самыхъ способовъ къ приведенію въ простѣйшій видъ интеграла (1), должно будетъ въ формулѣ (5) предположить u и v пропорціональными уже не степенямъ выраженій (4), но степенямъ слѣдующихъ другихъ выраженій:

$$(13) \quad ax + b = ay^2 + b, \quad x = y^2, \quad \frac{ax + b}{x} = \frac{ay^2 + b}{y^2}.$$

Прилѣръ. Положимъ, что требуется привести въ простѣйшій видъ интеграль

$$\int \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \int (1+y^2)^{-n} dy,$$

въ которомъ n означаетъ цѣлое число большее единицы. Должно положить u и v пропорціональными степенямъ количествъ y^2 и $\frac{1+y^2}{y^2}$; и поелику имѣемъ

$$dl\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) = 2\left(\frac{y}{1+y^2} - \frac{1}{y}\right)dy = -\frac{2dy}{y(1+y^2)},$$

то изъ формулы (5) выведемъ:

$$(14) \quad \begin{aligned} \int \frac{dy}{(1+y^2)^n} &= \int \frac{-y(1+y^2)^{-n+1}}{2} dl\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right) \\ &= \int \frac{y^{-2n+3}}{2(n-1)} \left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)^{-n+1} dl\left(\frac{1+y^2}{y^2}\right)^{-n+1} \\ &= \frac{y(1+y^2)^{-n+1}}{2(n-1)} - \int \frac{y(1+y^2)^{n-1}}{2(n-1)} dl(y^{-2n+3}) \\ &= \frac{y}{2(n-1)(1+y^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2} \int \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}}. \end{aligned}$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЫЙ.

О неопредѣленныхъ интегралахъ заключающихъ въ себѣ неопредѣленно-степенныя, логарифмическія, тригонометрическія и круговыя функции.

Неопредѣленно-степенными называются такія функции, въ которыхъ входящаго количества имѣющія переменныхъ показателей; *логарифмическими* такія, которыхъ заключаютъ въ себѣ логарифмы; *тригонометрическія* функции составлены изъ тригонометрическихъ линий, а *круговыя* изъ круговыхъ дугъ. Весьма бы полезно было имѣть средства для интегрированія дифференціальныхъ формулъ, содержащихъ подобныя функции: но не имѣется къ тому вѣрныхъ способовъ; только, въ нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ, весьма ограниченныхъ, такое интегрированіе удастся, что мы теперь и намѣрены показать.

Если означимъ чрезъ f такую функцию, что неопредѣленный интегралъ $\int f(z) dz$ имѣетъ извѣстную величину: то въ семь предположеніи, выведемъ величины интеграловъ

(1) $\int f(lx) \cdot \frac{dx}{x}$, $\int e^x f(e^x) dx$, $\int \cos x \cdot f(\sin x) dx$, $\int \sin x \cdot f(\cos x) dx$, полагая послѣдовательно, какъ въ 27^{мъ} урокъ, $lx = z$, $e^x = z$, $\sin x = z$, $\cos x = z$. Такимъ же образомъ опредѣлятся и слѣдующіе при интеграла:

(2) $\int f(\operatorname{arctang} x) \frac{dx}{1+x^2}$, $\int f(\operatorname{arc} \sin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, $\int f(\operatorname{arc} \cos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$,

полагая въ первомъ $\operatorname{arctang} x = z$, а въ двухъ послѣднихъ $\operatorname{arcsin} x = z$ или $\operatorname{arccos} x = z$.

Еще замѣшимъ, что если $f(u)$, $f(u, v)$, $f(u, v, w \dots)$, будутъ изображать алгебраическія функціи переменныхъ $u, v, w \dots$: то сподобно только положить $e^x = z$, чтобы обратиться въ алгебраическую функцію, выраженіе находящееся подъ знакомъ \int въ интегралѣ

$$(3) \quad \int f(e^x) dx;$$

также, полагая $\cos x = z$ или $\sin x = z$, достигаемъ той же цѣли въ разсужденіи двухъ интеграловъ

$$(4) \quad \int f(\sin x, \cos x) dx,$$

$$\int f(\sin x, \sin 2x, \sin 3x \dots \cos x, \cos 2x, \cos 3x \dots) dx,$$

изъ коихъ второй не будетъ общѣе перваго, ибо можно въ ономъ вмѣсто синусовъ и косинусовъ дугъ $2x, 3x \dots$, поставивъ ихъ величины выраженные посредствомъ $\sin x$ и $\cos x$, что производится помощію извѣстныхъ уравненій:

$$\cos nx + \sqrt{-1} \sin nx = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x)^n,$$

$$\cos nx - \sqrt{-1} \sin nx = (\cos x - \sqrt{-1} \sin x)^n.$$

Прибавимъ, что если въ первомъ изъ интеграловъ (4) положимъ $\sin x$ равнымъ не z , но $\pm z^{\frac{1}{2}}$; то сей интегралъ приметъ весьма простой видъ

$$(5) \quad \int f[\pm z^{\frac{1}{2}}, (1-z)^{\frac{1}{2}}] \cdot \frac{\pm dz}{2z(1-z)^{\frac{1}{2}}}.$$

Напримѣръ, изобразивъ чрезъ μ, ν два положительныя количества, имѣемъ

$$(6) \quad \int \sin^\mu x \cdot \cos^\nu x \cdot dx = \pm \frac{1}{2} \int z^{\frac{\mu-1}{2}} (1-z)^{\frac{\nu-1}{2}} dz.$$

Наконецъ замѣшимъ, что предполагая извѣстными величины интеграловъ (3) и (4), легко вывести изъ оныхъ и величины слѣдующихъ:

$$(7) \quad \int f(e^{ax}) dx,$$

$$(8) \quad \int f(\sin bx, \cos bx) dx,$$

$$\int f(\sin bx, \sin 2bx, \sin 3bx \dots, \cos bx, \cos 2bx, \cos 3bx \dots) dx$$

ибо, надлежишь только раздѣлишь на a , или на b , полученныя функціи, и подставишь попомъ въ оныя ax или bx вмѣсто x .

Теперь пусть будутъ P и z двѣ функціи переменнѣй x ; положимъ, что первая изъ нихъ алгебраическая, а вторая имѣешь алгебраическую производную z' . Если возьмемъ

$$\int P dx = Q, \quad \int Q z' dx = R, \quad \int R z' dx = S \text{ и проч. } \dots,$$

и получимъ для $Q, R, S \dots$ извѣсныя функціи переменнѣй x : то посредствомъ нѣсколькихъ интегрированій по частямъ, легко будешь опредѣлишь величину интеграла

$$(9) \quad \int P z^n dx,$$

гдѣ n изображаетъ цѣлое число. Дѣйствительно найдешь поспешенно:

$$\int P z^n dx = Q z^n - n \int Q z' \cdot z^{n-1} dx,$$

$$\int Q z' z^{n-1} dx = R z^{n-1} - (n-1) \int R z' \cdot z^{n-2} dx,$$

и проч..., и слѣдовашельно

$$(10) \quad \int P z^n dx = Q z^n - n R z^{n-1} + n(n-1) S z^{n-2} \text{ — и проч... } + C.$$

Когда функція z изображена однимъ членомъ, то оная необходимо будешь имѣшь одинъ изъ слѣдующихъ двухъ видовъ: (смотри 28-й урокъ)

$$Al [f(x)], \quad A \operatorname{arc} \operatorname{tang} f(x),$$

гдѣ A означаешь постоянное количество, а $f(x)$ алгебраическую функцію переменнѣй x .

Примѣръ. Предположивъ, что функція P равна единицѣ, а z одной изъ слѣдующихъ функцій: $l(x)$, $\operatorname{arc} \sin x$, $\operatorname{arc} \cos x$, $l(x + \sqrt{x^2 + 1})$, и проч., то изъ формулы (10) выведемъ:

$$(11) \quad \int (lx)^n dx = x (lx)^n \left\{ 1 - \frac{n}{lx} + \frac{n(n-1)}{(lx)^2} - \text{и проч.} \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{(lx)^n} \right\} + C,$$

$$(12) \quad \int (\text{arc sin } x)^n dx = (\text{arc sin } x)^n \left\{ x + \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc sin } x} - \frac{n(n-1)x}{(\text{arc sin } x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\text{arc sin } x)^3} + \dots \right\} + C,$$

$$(13) \quad \int (\text{arc cos } x)^n dx = (\text{arc cos } x)^n \left\{ x - \frac{n\sqrt{1-x^2}}{\text{arc cos } x} - \frac{n(n-1)x}{(\text{arc cos } x)^2} + \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\text{arc cos } x)^3} + \dots \right\} + C,$$

$$(14) \quad \int [l(x + \sqrt{x^2 + 1})]^n dx = [l(x + \sqrt{x^2 + 1})]^n \left\{ x - \frac{n\sqrt{x^2 + 1}}{l(x + \sqrt{x^2 + 1})} + \frac{n(n-1)x}{[l(x + \sqrt{x^2 + 1})]^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{x^2 + 1}}{[l(x + \sqrt{x^2 + 1})]^3} + \dots \right\} + C,$$

и проч. . . .

Предполагая $P = x^{a-1}$, а $z = l(x)$, найдемъ:

$$(15) \quad \int x^{a-1} (lx)^n dx = \frac{x^a}{a} (lx)^n \left[1 - \frac{n}{alx} + \frac{n(n-1)}{a^2(lx)^2} - \text{и проч.} \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{a^n (lx)^n} \right] + C.$$

Вводя z вмѣсто переменнѣй x , предыдущія формулы обратятся въ слѣдующія:

$$(16) \quad \int z^n e^z dz = z^n e^z \left[1 - \frac{n}{z} + \frac{n(n-1)}{z^2} - \text{и проч.} \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{z^n} \right] + C,$$

$$(17) \quad \int z^n \cos z dz = z^n \left\{ \sin z \left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \dots \right] + \cos z \left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \dots \right] \right\} + C,$$

$$(18) \quad -\int z^n \sin z dz = z^n \left\{ \cos z \left[1 - \frac{n(n-1)}{z^2} + \dots \right] - \sin z \left[\frac{n}{z} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \dots \right] \right\} + C,$$

$$(19) \quad \int z^n \left(\frac{e^z + e^{-z}}{2} \right) dz = z^n \left\{ \frac{e^z - e^{-z}}{2} \left[1 + \frac{n(n-1)}{z^2} + \dots \right] - \frac{e^z + e^{-z}}{2} \left[\frac{n}{z} + \frac{n(n-1)(n-2)}{z^3} + \dots \right] \right\} + C,$$

$$(20) \quad \int z^n e^{az} dz = \frac{z^n e^{az}}{a} \left\{ 1 - \frac{n}{az} + \frac{n(n-1)}{a^2 z^2} - \text{и проч.} \dots \pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{a^n z^n} \right\} + C.$$

Можно было бы непосредственно вывести сіи послѣднія формулы, помощію нѣсколькихъ интегрированныхъ по частямъ, чрезъ что уменьшали бы постепенно показателя n , и наконецъ совсѣмъ уничтожили бы оный. Такъ, на примѣръ, формула (20) выводилась изъ уравненій

$$(21) \quad \int z^n e^{az} dz = \frac{z^n e^{az}}{a} - \frac{n}{a} \int z^{n-1} e^{az} dz,$$

$$\int z^{n-1} e^{az} dz = \frac{z^{n-1} e^{az}}{a} - \frac{n-1}{a} \int z^{n-2} e^{az} dz, \text{ и проч.}$$

Сие послѣднее замѣчаніе относится ко всѣмъ интеграламъ, кои опредѣляются посредствомъ интеграла (10) предполагаемаго извѣстнымъ, вводя z вмѣсто переменнѣй x .

Интегрированіе по частямъ можетъ еще служить къ опредѣленію величинъ интеграловъ

$$(22) \quad \int z^n e^{az} \cos bz dz, \quad \int z^n e^{az} \sin bz dz,$$

гдѣ a и b означаютъ постоянныя количесва, а n цѣлое число. Такъ, напримѣръ, чтобъ получить общія величины двухъ интеграловъ $\int e^{az} \cos bz dz$, $\int e^{az} \sin bz dz$, стоить только придашь два постоянныя произвольныя количесва къ величинамъ сихъ самыхъ интеграловъ, выведенныхъ изъ уравненій

$$\int e^{az} \cos bz dz = \frac{e^{az} \cos bz}{a} + \frac{b}{a} \int e^{az} \sin bz dz,$$

$$\int e^{az} \sin bz dz = \frac{e^{az} \sin bz}{a} - \frac{b}{a} \int e^{az} \cos bz dz.$$

Впрочемъ, можно опредѣлить интегралы (22) простѣйшимъ способомъ, какъ мы по сей-часъ покажемъ.

Поелику имѣемъ (*смотри* конецъ пятаго урока),

$$d(\cos x + \sqrt{-1} \sin x) = (\cos x + \sqrt{-1} \sin x) dx \sqrt{-1},$$

по изъ сего выводимъ:

$$(23) \quad d[e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)] = (a + b\sqrt{-1})e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz) dz,$$

$$(24) \quad \int e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz) dz = \frac{e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)}{a + b\sqrt{-1}} + C,$$

гдѣ C вообще изображаетъ мнимое постоянное количесво. Теперь замѣтимъ, что формулы (21), а посему и формула (20) равнозначущая съ формулою (21), будутъ имѣть мѣсто и въ шаномъ случаѣ, когда подставимъ въ оныя вмѣсто неопредѣленно-степенной функціи e^{az} , слѣдующее произведеніе:

$$e^{az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz),$$

а вмѣсто знаменателя a , мнимое количество $a + b\sqrt{-1}$. По-
сему будемъ имѣть

$$(25) \quad \int z^n e^{az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz) dz = \\ \frac{z^n e^{az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)}{a + b\sqrt{-1}} \left\{ 1 - \frac{n}{(a + b\sqrt{-1})z} + \dots + \frac{n(a-1)\dots 3.2.1}{(a + b\sqrt{-1})^n z^n} \right\} + C.$$

Ежели впрочемъ часть сего послѣдняго уравненія приведемъ къ
виду $u + v\sqrt{-1}$, гдѣ u и v означаютъ вещественныя коли-
чества: то сіи количества будутъ изображать величины ин-
теграловъ (22). Двѣ формулы, опредѣляющія сіи величины,
будутъ заключать въ себѣ, какъ частные случаи, уравненія
(16), (17), (18) и (20). Сверхъ того, оныя даютъ и уравне-
ніе (19); предполагая же въ оныхъ $n = 0$, получимъ:

$$(26) \quad \int e^{az} \cos bz dz = \frac{a \cos bz + b \sin bz}{a^2 + b^2} e^{az} + C, \\ \int e^{az} \sin bz dz = \frac{a \sin bz - b \cos bz}{a^2 + b^2} e^{az} + C.$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ПЕРВЫЙ.

О разысканіи величинъ, и о приведеніи въ простѣйшій видъ неопредѣленныхъ интеграловъ, въ коихъ функція находящаяся подъ знакомъ \int есть произведеніе двухъ множителей равныхъ нѣкоторымъ степенямъ синуса и косинуса перемѣнной.

Пусть μ , ν будутъ два постоянныя количества; рассмотримъ интегралъ

$$(1) \quad \int \sin^{\mu} x \cdot \cos^{\nu} x \, dx.$$

Если положимъ $\sin^2 x = z$, или $\sin x = \pm z^{\frac{1}{2}}$, то сей интегралъ приметъ видъ

$$(2) \quad \pm \frac{1}{2} \int z^{\frac{\mu-1}{2}} (1-z)^{\frac{\nu-1}{2}} \, dz.$$

Слѣдовательно оный легко опредѣлился, (смотри 29-й урокъ), когда численныя величины обоихъ показателей $\frac{\mu-1}{2}$, $\frac{\nu-1}{2}$ и суммы ихъ $\frac{\mu+\nu-2}{2}$, будутъ всѣ при рациональныхъ числа, и сверхъ того, одно изъ нихъ цѣлое. Если показатели μ и ν будутъ оба цѣлые: то количества $\frac{\mu-1}{2}$, $\frac{\nu-1}{2}$, $\frac{\mu+\nu-2}{2}$, удовлетворяющіе сему условію, и слѣдовательно интегралъ (1) опредѣляется безъ малѣйшаго затрудненія.

Во всѣхъ случаяхъ, можно будетъ по крайней мѣрѣ привести опредѣленіе интеграла (1) или (2) къ опредѣленію нѣсколькихъ другихъ интеграловъ одинаковаго съ ними вида, но въ коихъ показатели количества $\sin x$ и $\cos x$, или z и $1-z$,

будушь другіе. Для сего, надлежишь упошребить, какъ выше, формулу (5) (29^{го} урока), именно,

$$(3) \quad fuv \cdot dl(v) = uv - fuv \cdot dl(u),$$

предполагая что функціи u и v пропорціональны нѣкоторымъ степенямъ двухъ изъ трехъ количествъ z , $1 - z$, $\frac{1-z}{z}$, или, что все равно, степенямъ двухъ изъ трехъ слѣдующихъ :

$$(4) \quad \sin x, \cos x, \frac{\sin x}{\cos x} = \operatorname{tang} x = \frac{1}{\cot x}.$$

Положимъ, на примѣръ, что желаемъ привести въ простѣйшій видъ интегралъ (1). Для сего, подставимъ сперва въ сей интегралъ величину дифференціала dx , опредѣленнаго однимъ изъ слѣдующихъ уравненій:

$$(5) \quad dl \sin x = \frac{\cos x dx}{\sin x},$$

$$dl \cos x = -\frac{\sin x dx}{\cos x}, \quad dl \operatorname{tang} x = -dl \cot x = \frac{dx}{\sin x \cos x};$$

помощью, изъ формулы (3) выводимъ :

1°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\sin^{\mu-1} x$, а v количеству $\cos^{v+1} x$,

$$\begin{aligned} \int \sin^{\mu} x \cos^v x dx &= \int \sin^{\mu-1} x \cos^{v+1} x dl \cos x = \int \frac{\sin^{\mu-1} x}{v+1} \cos^{v+1} x dl \cos^{v+1} x \\ &= -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{v+1} x}{v+1} + \int \frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{v+1} x}{v+1} dl \sin^{\mu-1} x, \end{aligned}$$

$$(6) \quad \int \sin^{\mu} x \cos^v x dx = -\frac{\sin^{\mu-1} x \cos^{v+1} x}{v+1} + \frac{\mu-1}{v+1} \int \sin^{\mu-2} x \cos^{v+2} x dx.$$

2°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\cos^{v-1} x$, а v количеству $\sin^{\mu+1} x$,

$$(7) \quad \int \sin^{\mu} x \cos^v x dx = \frac{\sin^{\mu+1} x \cos^{v-1} x}{\mu+1} + \frac{v-1}{\mu+1} \int \sin^{\mu+2} x \cos^{v-2} x dx.$$

3°. Предполагая u пропорціональнымъ степенному выраженію $\operatorname{tang}^{\mu-1} x$, а v количеству $\cos^{\mu+v} x$,

$$\int \sin^{\mu} x \cos^v x dx = \int \sin^{\mu-1} x \cos^{v+1} x dl \cos x = \int \frac{\operatorname{tang}^{\mu-1} x}{\mu+v} \cos^{\mu+v} x dl \cos^{\mu+v} x$$

$$= -\frac{\sin^{\mu-1}x \cos^{\nu+1}x}{\mu+\nu} + \int \frac{\sin^{\mu-1}x \cos^{\nu+1}x}{\mu+\nu} dl \operatorname{tang}^{\mu-1} x,$$

$$(8) \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = -\frac{\sin^{\mu-1}x \cos^{\nu+1}x}{\mu+\nu} + \frac{\mu-1}{\mu+\nu} \int \sin^{\mu-2} x \cos^{\nu} x dx.$$

4°. Предполагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $\cot^{\nu-1} x$, а v количеству $\sin^{\mu+\nu-2} x$,

$$(9) \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = \frac{\sin^{\mu+1}x \cos^{\nu-1}x}{\mu+\nu} + \frac{\nu-1}{\mu+\nu} \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu-2} x dx.$$

5°. Предполагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $\cos^{\mu+\nu} x$, а v количеству $\operatorname{tang} x^{\mu+1}$,

$$\int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx =$$

$$\int \sin^{\mu+1} x \cos^{\nu+1} x dl \operatorname{tang} x = \int \frac{\cos^{\mu+\nu+2}x}{\mu+1} \operatorname{tang}^{\mu+1} x dl \operatorname{tang}^{\mu+1} x \\ = \frac{\sin^{\mu+1}x \cos^{\nu+1}x}{\mu+1} - \int \frac{\sin^{\mu+1}x \cos^{\nu+1}x}{\mu+1} dl \cos^{\mu+\nu+2} x;$$

$$(10) \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = \frac{\sin^{\mu+1}x \cos^{\nu+1}x}{\mu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\mu+1} \int \sin^{\mu+2} x \cos^{\nu} x dx.$$

6°. Предполагая u пропорциональнымъ степенному выраженію $\sin^{\mu+\nu+2} x$, а v количеству $\cot^{\nu+1} x$,

$$(11) \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu} x dx = -\frac{\sin^{\mu+1}x \cos^{\nu+1}x}{\nu+1} + \frac{\mu+\nu+2}{\nu+1} \int \sin^{\mu} x \cos^{\nu+2} x dx.$$

Помощію формуль (6), (7), (8), (9), (10), (11) можно будетъ всегда выразить интеграль (1) посредствомъ другаго интеграла, одинаковаго съ нимъ вида, но въ кошоромъ каждое изъ количествъ $\sin x$, $\cos x$, будетъ имѣть показателемъ число содержащееся между предѣлами -1 , $+1$. И дѣйствительно, для подобнаго преобразованія, спойшь только употребить одинъ или нѣсколько разъ сряду формулы (8) и (9), или только одну изъ нихъ, когда показатели μ и ν оба положительные, или если одинъ изъ нихъ положительный, а другой заключаетъ между предѣлами 0 , -1 . Напримѣръ того, должно употреблять формулы (10) и (11), когда показатели μ и ν оба отрицательные, или, если одинъ изъ нихъ отри-

цашельный, а другой заключаешся между предѣлами 0 и 1. Наконецъ, если одинъ изъ показашелей будешъ положишельный, но больше единицы, другой же оприцашельный, но меньше — 1; тогда, посредствомъ формуль (6) и (7), будемъ въ одно время уменьшашъ обоихъ показашелей до шѣхъ поръ, пока одинъ изъ нихъ не обратится въ количештво, заключающееся между предѣлами — 1 и + 1.

Если положимъ $\mu + \nu = 0$, то уравненія (6) и (7) обращающяся въ слѣдующія:

$$(19) \quad \int \operatorname{tang}^{\mu} x dx = \frac{\operatorname{tang}^{\mu-1} x}{\mu-1} - \int \operatorname{tang}^{\mu-2} x dx,$$

$$\int \operatorname{cot}^{\nu} x dx = -\frac{\operatorname{cot}^{\nu-1} x}{\nu-1} - \int \operatorname{cot}^{\nu-2} x dx.$$

Когда показашели μ и ν будущъ цѣлые, то поступая какъ было сказано выше, обратимъ наконецъ каждый изъ нихъ въ одно изъ шрехъ количешствъ + 1, 0, — 1, и интеграль (1) чрезъ то необходимо приведешся къ одному изъ девяти слѣдующихъ:

$$\int dx = x + C, \quad \int \sin x dx = -\cos x + C,$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \quad \int \sin x \cos x dx = \frac{1}{2} \sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos x} = -\frac{1}{2} l \cos^2 x + C, \quad \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \frac{1}{2} l \sin^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x} = \frac{1}{2} l \operatorname{tang}^2 x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{1}{2} dx}{\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \frac{1}{2} l \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2} + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{d(x + \frac{1}{2}\pi)}{\sin(x + \frac{1}{2}\pi)} = \frac{1}{2} l \operatorname{tang}^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C.$$

Приложивъ сіи правила къ опредѣленію интеграловъ

$$\int \sin^n x dx, \quad \int \cos^n x dx, \quad \int \frac{\sin^n x}{\cos^n x} dx, \quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^n x} dx, \quad \int \frac{dx}{\cos^n x}, \quad \int \frac{dx}{\sin^n x},$$

гдѣ n изображаешъ цѣлое число, найдешся: 1° предпологая n чешнымъ числомъ,

$$\int \sin^n x dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n} \left\{ \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \sin^{n-3} x + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-4)(n-2)} \sin x \right\} + \frac{1 \cdot 3 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-2)n} x + C,$$

$$\int \cos^n x dx =$$

$$\frac{\sin x}{n} \left\{ \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \cos^{n-3} x + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-4)(n-2)} \cos x \right\} + \frac{1 \cdot 3 \dots (n-3)(n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-2)n} x + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x dx = \frac{\operatorname{tang}^{n-1} x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3} x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5} x}{n-5} - \text{и проч...} \pm \operatorname{tang} x \mp x + C,$$

$$\int \operatorname{cot}^n x dx = -\frac{\operatorname{cot}^{n-1} x}{n-1} + \frac{\operatorname{cot}^{n-3} x}{n-3} - \frac{\operatorname{cot}^{n-5} x}{n-5} + \text{и проч...} \pm \operatorname{cot} x \mp x + C,$$

$$\int \sec^n x dx = \frac{\sin x}{n-1} \left\{ \sec^{n-1} x + \frac{n-2}{n-3} \sec^{n-3} x + \dots + \frac{2 \cdot 4 \dots (n-4)(n-2)}{1 \cdot 3 \dots (n-5)(n-3)} \sec x \right\} + C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n-1} \left\{ \operatorname{cosec}^{n-1} x + \frac{n-2}{n-3} \operatorname{cosec}^{n-3} x + \dots + \frac{2 \cdot 4 \dots (n-4)(n-2)}{1 \cdot 3 \dots (n-5)(n-3)} \operatorname{cosec} x \right\} + C;$$

2°. предполагая n нечетным числом,

$$\int \sin^n x dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n} \left\{ \sin^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \sin^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \sin^{n-5} x + \dots + \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3)(n-1)}{1 \cdot 3 \dots (n-4)(n-2)} \right\} + C,$$

$$\int \cos^n x dx =$$

$$\frac{\sin x}{n} \left\{ \cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \cos^{n-3} x + \frac{(n-1)(n-3)}{(n-2)(n-4)} \cos^{n-5} x + \dots + \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3)(n-1)}{1 \cdot 3 \dots (n-4)(n-2)} \right\} + C,$$

$$\int \operatorname{tang}^n x dx =$$

$$\frac{\operatorname{tang}^{n-1} x}{n-1} - \frac{\operatorname{tang}^{n-3} x}{n-3} + \frac{\operatorname{tang}^{n-5} x}{n-5} - \text{и проч...} \pm \frac{\operatorname{tang}^2 x}{2} \pm \frac{1}{2} l \cos^2 x + C,$$

$$\int \operatorname{cot}^n x dx =$$

$$-\frac{\operatorname{cot}^{n-1} x}{n-1} + \frac{\operatorname{cot}^{n-3} x}{n-3} - \frac{\operatorname{cot}^{n-5} x}{n-5} + \text{и проч...} \pm \frac{\operatorname{cot}^2 x}{2} \mp \frac{1}{2} l \sin^2 x + C,$$

$$\int \sec^n x dx =$$

$$\frac{\sin x}{n-1} \left\{ \sec^{n-1} x + \frac{n-2}{n-3} \sec^{n-3} x + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (n-2)}{2 \cdot 4 \dots (n-3)} \sec^2 x \right\} + \frac{1 \cdot 3 \dots (n-2)}{2 \cdot 4 \dots (n-1)} \frac{1}{2} l \operatorname{tang}^2 \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + C,$$

$$\int \operatorname{cosec}^n x dx =$$

$$-\frac{\cos x}{n-1} \left\{ \operatorname{cosec}^{n-1} x + \frac{n-2}{n-3} \operatorname{cosec}^{n-3} x + \dots + \frac{3 \cdot 5 \dots (n-2)}{2 \cdot 4 \dots (n-3)} \operatorname{cosec}^2 x \right\} + \frac{1 \cdot 3 \dots (n-2)}{2 \cdot 4 \dots (n-1)} \frac{1}{2} l \operatorname{tang}^2 \frac{x}{2} + C.$$

Оканчивая сей урок, мы покажемъ нѣсколько способовъ, могущихъ служить, подобно предыдущимъ, къ приведенію въ

прощайший видъ и къ опредѣленію интеграла $\int \sin^{\pm m} x \cos^{\pm n} x dx$, въ копоромъ m и n изображаютъ два цѣлыя числа. Во первыхъ, очевидно, что интегралъ $\int \sin^{-m} x \cos^{-n} x dx$ обратится въ другіе прощайшіе, когда умножимъ одинъ или нѣсколько разъ функцію подъ знакомъ \int на $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Сверхъ того, дифференціальное выраженіе $\sin^{\pm m} x \cos^{\pm n} x dx$ можно обратитъ въ рациональное, 1°. когда n есть нечетное число, полагая $\sin x = z$, 2°. когда m есть нечетное число, полагая $\cos x = z$. Наконецъ замѣтимъ, что величины интеграловъ $\int \sin^m x dx$, $\int \cos^n x dx$, $\int \sin^m x \cos^n x dx$, опредѣляются весьма простымъ образомъ по разложеніи $\sin^m x$, $\cos^n x$ и $\sin^m x \cos^n x$ на линейныя функціи количествъ $\sin x$, $\sin 2x$, $\sin 3x \dots \cos x$, $\cos 2x$, $\cos 3x \dots$, что производится посредствомъ извѣстныхъ формулъ, (смотри *Analyse algébrique* Гл. VII).

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ВТОРОЙ.

Переходъ отъ неопредѣленныхъ интеграловъ къ опредѣленнымъ.

Опредѣлимъ интеграль уравненія

$$(1) \quad dy = f(x) dx,$$

или интегрировавъ дифференціальное выраженіе $f(x)dx$, отъ $x = x_0$, значить, найдемъ такую непрерывную функцію переменнѣй x , которая удовлетворяла бы двумъ условіямъ, именно, чтобы ея дифференціалъ былъ равенъ $f(x)dx$, и чтобы она уничтожалась для $x = x_0$. Поскольку сія функція опредѣляется общемою формулою $\int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + C$: то посему она обращается въ интеграль $\int_{x_0}^x f(x) dx$, если самая функція $f(x)$ будетъ непрерывною относительно къ x , между двумя предѣлами сего интеграла. Положимъ теперь, что общая величина для y , выведенная изъ уравненія (1), представлена въ видѣ $\varphi(x) + \int \chi(x) dx$, гдѣ функціи $\varphi(x)$ и $\chi(x)$ обѣ непрерывны между сими же предѣлами x_0 и x . Очевидно, что искомая функція будетъ равна $\varphi(x) - \varphi(x_0) + \int_{x_0}^x \chi(x) dx$. Основываясь на семъ замѣчаніи, легко увидимъ во что обращаются формулы доказанныя въ предъидущихъ урокахъ, когда подчинимъ обѣ части каждой изъ оныхъ, уничтожаясь для данной величины переменнѣй x . Такъ, напримеръ, легко усматриваемъ, что уравненія (9) и (12) (27^{го} урока), именно $\int f(x) dx = \int f(z) dz$, и $\int u dv = uv - \int v du$ или $\int u v' dx = uv - \int v u' dx$, превращаются въ слѣдующія:

(2) $\int_{x_0}^x f(x)dx = \int_{z_0}^z f(z)dz$, и (3) $\int_{x_0}^x uv'dx = uv - u_0v_0 - \int_{x_0}^x vu'dx$,
 гдѣ z_0 , u_0 и v_0 означаютъ величины переменныхъ z , u и v ,
 соотвѣтствующія величинѣ $x = x_0$.

Полагая въ формулахъ (2) и (3) $x = X$, и изобразивъ, въ
 семь предположеніи, чрезъ Z , U и V соотвѣтствующія вели-
 чины переменныхъ z , u и v , найдется:

$$(4) \int_{x_0}^X f(x)dx = \int_{z_0}^Z f(z)dz \text{ и } (5) \int_{x_0}^X uv'dx = UV - u_0v_0 - \int_{x_0}^X vu'dx.$$

Когда желаемъ приложить способъ интегрированія чрезъ под-
 становленіе, или интегрированія по частямъ къ разысканію
 величинъ опредѣленныхъ интеграловъ, или къ приведенію ихъ
 въ простѣйшій видъ: тогда, вмѣсто формулъ (9) и (12)
 (27^{го} урока), употребляются сіи послѣднія двѣ формулы; что
 касается до опредѣленныхъ интеграловъ, выводимыхъ чрезъ
 непосредственное интегрированіе, или чрезъ разложеніе: то
 оныя опредѣляются формулою (18) (26^{го} урока), или форму-
 лою (2) (23^{го} урока). Основываясь на сихъ правилахъ и на
 способахъ изложенныхъ въ предыдущихъ урокахъ, можно
 будетъ найти величины многихъ опредѣленныхъ интеграловъ;
 выведемъ теперь величины замѣчательнѣйшихъ изъ оныхъ.

Означимъ чрезъ m цѣлое число, чрезъ a , β , μ , ν положи-
 тельныя количества, чрезъ a , A , B , C ... какія нибудь по-
 стоянныя величины, наконецъ, чрезъ ε количество безконечно-
 малое; изъ формулъ доказанныхъ въ 27^{мъ} и 28^{мъ} урокахъ, вы-
 водимъ:

$$\int_0^1 x^{a-1} dx = \frac{1}{a}, \quad \int_0^1 x^{-a-1} dx = \infty, \quad \int_0^\infty e^{-x} dx = 1,$$

$$\int_0^\infty e^{ax} dx = \infty, \quad \int_0^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a},$$

$$\int_0^1 (A + Bx + Cx^2 \dots) dx = A + \frac{B}{2} + \frac{C}{3} \dots,$$

$$\int_0^1 \frac{x^m - 1}{x - 1} dx = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \dots + \frac{1}{m}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{\pi}{a}, \quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{x dx}{x^2+a^2} = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right), \quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{x dx}{x^2+a^2} = 0, \quad \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2+\beta^2} = \frac{\pi}{\beta}, \quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{(x-a) dx}{(x-a)^2+\beta^2} = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right), \quad \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{(x-a) dx}{(x-a)^2+\beta^2} = 0,$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \left\{ \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} \right\} dx = 2Al\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + 2\pi B,$$

$$\int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \left\{ \frac{A-B\sqrt{-1}}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} + \frac{A+B\sqrt{-1}}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} \right\} dx = 2\pi B.$$

Сверхъ того, означивъ вообще чрезъ $\frac{f(x)}{F(x)}$ рациональную дробь, коею знаменатель не могъ бы уничтожиться ни для какой вещественной величины переменн \ddot{u} x , чрезъ x_1, x_2 и проч..., шъ изъ мнимыхъ корней уравненія $F(x)=0$, въ коихъ коэффициенты при $\sqrt{-1}$ положительный, и чрезъ $A_1-B_1\sqrt{-1}, A_2-B_2\sqrt{-1}$, и проч... величины дроби $\frac{f(x)}{F(x)}$ соотвѣтствующія симъ самымъ корнямъ, получимъ формула:

$$(6) \int_{-\frac{1}{\varepsilon\mu}}^{\frac{1}{\varepsilon\nu}} \frac{f(x)}{F(x)} dx = 2(A_1 + A_2 + \dots) l\left(\frac{\mu}{\nu}\right) + 2\pi(B_1 + B_2 + \dots).$$

Когда сумма $A_1 + A_2 + \dots$ равна нулю, то вторая часть сей формулы не будетъ заключать въ себя произвольнаго множителя $l\left(\frac{\mu}{\nu}\right)$, въ слѣдствіе чего получимъ:

$$(7) \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx = 2\pi(B_1 + B_2 + \dots);$$

сумма же $A_1 + A_2 + \dots$ уничтожается въ томъ случаѣ, когда степень функціи $F(x)$ превосходитъ по крайней мѣрѣ двумя единицами степень функціи $f(x)$. Можно вывести сіе же заключеніе, основываясь на замѣчаніи оканчивающимъ 25-й урокъ.

Если бы степень функции $F(x)$ превосходила только одною единицею степень функции $f(x)$: то величина интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx$ была бы неопределенная, а общая его величина, доставляемая уравнением (6), заключала бы постоянное произвольное отношение $\frac{\mu}{\nu}$. Но, полагая что сие произвольное постоянное отношение равно единице, получим уравнение (7), которое, в семь случаев, доставит только главную величину упомянутого интеграла. Прибавим, что ся главная величина не изменился, если, сверхъ мнимыхъ корней x_1, x_2 , и проч. . . , уравнение $F(x) = 0$, будетъ имѣть и вещественные корни, что происходитъ отъ того, что всѣ интегралы вида $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{A dx}{x \pm a}$ имѣють главныя величины равныя нулю.

Примѣры. Пусть m и n будутъ два цѣлыя числа, и $m < n$.

Сдѣлавъ $\frac{2m+1}{2n} = a$, найдемъ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1+x^{2n}} = \frac{2\pi}{2n} [\sin a\pi + \sin 3a\pi + \dots + \sin(2n-1)a\pi] = \frac{\pi}{n \cdot \sin a\pi} = \frac{\pi}{n \cdot \sin \frac{(2m+1)\pi}{2n}}$$

откуда, полагая $z = x^{2n}$, получимъ:

$$(8) \quad \int_0^{\infty} \frac{z^{a-1} dz}{1+z} = 2n \int_0^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1+x^{2n}} = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1+x^{2n}} = \frac{\pi}{\sin a\pi}.$$

Также, выводя изъ неопределенныхъ величинъ интеграловъ, главныя ихъ величины, имѣемъ:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1-x^{2n}} = \frac{2\pi}{2n} [\sin 2a\pi + \sin 4a\pi + \dots + \sin(2n-2)a\pi] = \frac{\pi}{n \cdot \tan a\pi} = \frac{\pi}{n \cdot \tan \frac{(2m+1)\pi}{2n}},$$

$$(9) \quad \int_0^{\infty} \frac{z^{a-1} dz}{1-z} = 2n \int_0^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1-x^{2n}} = n \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m} dx}{1-x^{2n}} = \frac{\pi}{\tan a\pi}.$$

Равнымъ образомъ, изъ доказанныхъ формулъ въ 29^{омъ} и 30^{омъ} урокахъ, выведемъ:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(1+x)^n} = \frac{m-1}{n-m} \int_0^{\infty} \frac{x^{m-2} dx}{(1+x)^n} = \frac{(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m) \dots (n-3)(n-2)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^n} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) \times 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^n} = \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y^2)^{n-1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \int_0^{\infty} \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2) 2},$$

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-z} dz = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, \quad \int_0^{\infty} z^n e^{-az} dz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz) dz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}},$$

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-az} \cos bz dz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \cos \left[(n+1) \arctan \frac{b}{a} \right],$$

$$\int_0^{\infty} e^{-az} \cos bz dz = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-az} \sin bz dz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \sin \left[(n+1) \arctan \frac{b}{a} \right],$$

$$\int_0^{\infty} e^{-az} \sin bz dz = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Наконецъ, изъ формулъ доказанныхъ въ 31^{мъ} урокъ, выводимъ: во 1^{хъ}. предполагая n четнымъ числомъ,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-1) \pi}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \dots + \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4};$$

во 2^{хъ}. предполагая n нечетнымъ числомъ,

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (n-2)n} = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^n x dx,$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \tan^n x dx = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-3} + \dots + \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} l \left(\frac{1}{2} \right).$$

Способы интегрированія показанные нами, часто доставляютъ средства къ преобразованію даннаго опредѣленнаго интеграла въ другой простѣйшій. Такъ, напримѣръ, въ слѣдствіе формулъ выведенныхъ въ 27^{мъ} урокъ, имѣемъ, какова бы ни была функція $f(x)$,

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{-\infty}^{\infty} f(x \pm a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx, \\ \int_0^{\infty} f(ax) dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} f(x) dx, \text{ и проч. } \dots \\ \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-ax} dx = \frac{1}{a^{\mu}} \int_0^{\infty} x^{\mu-1} e^{-x} dx, \\ \int_0^{\infty} \frac{\sin ax}{x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx, \text{ и проч. } \dots \end{array} \right.$$

Когда, въ интегралѣ отъ отрицательномъ къ переменнѣй x , функція подъ знакомъ \int заключаешь другое количество μ , коего величина произвольная: по сие количество μ можно принимашь за новую переменнѣю, а самый интегралъ за функцію количества μ . Между функціями сего рода, примѣчательна та, кошую Г. Лежандръ означилъ буквою Γ , и кошая, для положительныхъ величинъ количества μ , опредѣляешь уравненіемъ

$$(11) \quad \Gamma(\mu) = \int_0^1 \left[l\left(\frac{1}{x}\right) \right]^{\mu-1} dx = \int_0^{\infty} z^{\mu-1} e^{-z} dz.$$

Ейлеръ и Г. Лежандръ весьма много занимались изслѣдованіемъ свойствъ сей функціи; въ слѣдствіе выше доказаннаго, она удовлетворяешь уравненіямъ

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Gamma(1) = 1, \Gamma(2) = 1, \Gamma(3) = 1.2, \dots \Gamma(n) = 1.2.3 \dots (n-1), \\ \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} dz = \frac{\Gamma(n)}{a^n}, \end{array} \right.$$

$$(13) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} \cos bz dz = \frac{\Gamma(n) \cos(n \cdot \arctang \frac{b}{a})}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}}, \\ \int_0^{\infty} z^{n-1} e^{-az} \sin bz dz = \frac{\Gamma(n) \sin(n \cdot \arctang \frac{b}{a})}{(a^2 + b^2)^{\frac{n}{2}}}, \end{array} \right.$$

$$(14) \quad \int_0^{\infty} z^{\mu-1} e^{-az} dz = \frac{\Gamma(\mu)}{a^{\mu}}, \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1} dx}{(1+x)^n} = \frac{\Gamma(m) \Gamma(n-m)}{\Gamma(n)},$$

въ коихъ n означашь цѣлое число, m другое цѣлое же число, но меньшее n , а μ какое нибудь количество.

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ТРЕТІЙ.

Дифференцирование и интегрирование подъ знакомъ \int . Интегрирование дифференціальныхъ выраженій заключающихъ въ себѣ нѣсколько переменныхъ независимыхъ величинъ.

Изобразимъ чрезъ x и y двѣ независимыя переменныя величины, чрезъ $f(x, y)$ какую нибудь функцію сихъ двухъ переменныхъ, а чрезъ x_0 и X двѣ частныя величины переменной x . Полагая $\Delta y = \alpha dy$, и упошребляя знакоположенія принятыя въ 13^{мъ} урокѣ, найдемся:

$$\Delta_y \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X f(x, y + \Delta y) dx - \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X \Delta_y f(x, y) dx,$$

попомъ, раздѣливъ на αdy , и переходя къ предѣлу полагая $\alpha = 0$, получимъ:

$$(1) \quad \frac{d}{dy} \int_{x_0}^X f(x, y) dx = \int_{x_0}^X \frac{df(x, y)}{dy} dx.$$

Равнымъ образомъ имѣемъ

$$(2) \quad \frac{d}{dy} \int_{x_0}^x f(x, y) dx = \int_{x_0}^x \frac{df(x, y)}{dy} dx.$$

Изъ сихъ формулъ слѣдуетъ, что для дифференцированія интеграловъ $\int_{x_0}^X f(x, y) dx$, $\int_{x_0}^x f(x, y) dx$ относительно къ y , надлежитъ только дифференцировать подъ знакомъ \int функцію $f(x, y)$. Также, выводимъ и по слѣдствію, что уравненія

$$(3) \quad \int_{x_0}^X f(x, y) dx = F(y), \quad \int_{x_0}^x f(x, y) dx = F(x, y), \\ \int f(x, y) dx = F(x, y) + C,$$

спивовашь вещественнымъ корнямъ. Въ слѣдствие сего, для $F(x) = 1 + x^2$, $x_1 = \sqrt{-1}$, найдешся,

$$(18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = \pi f(\sqrt{-1});$$

а для $F(x) = 1 - x^2$, $x_1 = -1$, $x_2 = +1$,

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [f(-1) - f(1)] \sqrt{-1}.$$

Сія послѣдняя формула даетъ главную величину интеграла входящаго въ оную.

Примѣры. Пусть μ будетъ число заключающееся между 0 и 2. Если возьмемъ $f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1}$, то мнимое выраженіе $f(x + y\sqrt{-1}) = (y - x\sqrt{-1})^{\mu-1}$ будетъ имѣть одну, совершенно опредѣленную величину, для всѣхъ возможныхъ положительныхъ величинъ переменнѣй y (смотри *Analyse algèbrique*, Глав. VII); изъ формулъ же (18) и (19) выведемъ:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} dx &= [(-\sqrt{-1})^{\mu-1} + (\sqrt{-1})^{\mu-1}] \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x^2} = \pi, \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{2 \sin(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{aligned} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2} dx &= \frac{\pi}{2} [(\sqrt{-1})^{\mu} + (-\sqrt{-1})^{\mu}], \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1-x^2} &= \frac{\pi \cos(\frac{1}{2}\mu\pi)}{2 \sin(\frac{1}{2}\mu\pi)} = \frac{\pi}{2 \tan(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{aligned} \right.$$

Подставляя z вмѣсто x^2 и $2a$ вмѣсто μ въ послѣднія изъ уравненій (20) и (21), найдемъ опять формулы (8) и (9) 32^{го} урока, копорыя такимъ образомъ будутъ довазаны, равно какъ и первое изъ уравненій (14) 33^{го} урока, для всѣхъ возможныхъ величинъ количесва a , заключающихся между предѣлами 0 и 1.

$$(6) \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(x, y) dy dx = \int_{y_0}^y F(x, y) dy = \int_{y_0}^y \int_{x_0}^x f(x, y) dx dy.$$

Дѣйствительно, изъ формулы (2) выводимъ $\frac{d}{dy} \int_{x_0}^x \int_{y_0}^y f(x, y) dy dx = \int_{x_0}^x f(x, y) dx$, попомъ, умноживъ объ часпи на dy , и взявъ интегралы относительно къ y , опъ $y = y_0$, получимъ опяшь формулу (6). Слѣдовательно имѣемъ

$$(7) \begin{cases} \int_{x_0}^X \int_{y_0}^y f(x, y) dy dx = \int_{y_0}^y \int_{x_0}^X f(x, y) dx dy, \\ \int_{x_0}^X \int_{y_0}^Y f(x, y) dy dx = \int_{y_0}^Y \int_{x_0}^X f(x, y) dx dy. \end{cases}$$

Формулы (6) и (7) показываютъ, что для интегрированія относительно къ y , и опъ $y = y_0$, выраженій $\int_{x_0}^x f(x, y) dx$, $\int_{x_0}^X f(x, y) dx$, умноженныхъ на дифференціалъ dy , надлежитъ *интегрировать подъ знакомъ* f также опъ $y = y_0$, функцию $f(x, y)$, умноженную на сей самый дифференціалъ.

Часто интегрированіе подъ знакомъ \int , доставляетъ средство находить величины нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ, не смотря на то, что не имѣемъ возможности опредѣлить соотвѣтствующія величины неопредѣленныхъ интеграловъ. И такъ, хотя интегралъ $\int \frac{x^\mu - x^\nu}{l(x)} \cdot \frac{dx}{x}$ (гдѣ μ и ν изображаютъ два положительныя количества), въ функціи x и неизвѣстенъ, однако же можно найти опредѣленный интегралъ $\int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{l(x)} \cdot \frac{dx}{x}$; дѣйствительно, для положительныхъ величинъ количества μ , имѣемъ вообще

$$(8) \int_0^1 x^{\mu-1} dx = \frac{1}{\mu},$$

отсюда выводимъ, умноживъ объ часпи на $d\mu$, попомъ взявъ интегралъ относительно къ μ , опъ $\mu = \nu$,

$$(9) \int_0^1 \frac{x^\mu - x^\nu}{l(x)} \cdot \frac{dx}{x} = l\left(\frac{\mu}{\nu}\right).$$

Между такими интегралами, замечательны многие другие; определим величины некоторых из них.

Если означим через a , b , c положительные количества, и умножив на da формулы

$$(10) \int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}, \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2+b^2}, \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2+b^2},$$

спомогем их попомог интегрировать отъ $a = c$, по вышеизложенному правилу, по найдемъ:

$$(11) \begin{cases} \int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} dx = l\left(\frac{a}{c}\right), \int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \cos bx dx = \frac{1}{2} l\left(\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}\right), \\ \int_0^{\infty} \frac{e^{-cx} - e^{-ax}}{x} \sin bx dx = \text{arc tang} \frac{a}{b} - \text{arc tang} \frac{c}{b}. \end{cases}$$

Полагая въ сихъ формулахъ $c = 0$ и $a = \infty$, получимъ

$$(12) \int_0^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty, \int_0^{\infty} \cos bx \frac{dx}{x} = \infty, \int_0^{\infty} \sin bx \frac{dx}{x} = \frac{\pi}{2}.$$

Также, поелику для положительныхъ величинъ количества b (смотри §2^й урокъ), имѣемъ

$$\int_0^{\infty} z^{b-1} e^{-z(1+x)} dz = \frac{\Gamma(b)}{(1+x)^b},$$

а слѣдовательно и

$$\frac{x^{a-1}}{(1+x)^b} = \frac{1}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-zx} z^{b-1} e^{-z} dz,$$

по предполагая a , b и $b-a$ положительными, выведемъ:

$$(13) \int_0^{\infty} \frac{x^{a-1} dx}{(1+x)^b} = \frac{\Gamma(a)}{\Gamma(b)} \int_0^{\infty} z^{b-a-1} e^{-z} dz = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b-a)}{\Gamma(b)};$$

попомогъ, сдѣлавъ $b = 1$, и предполагая a вида $\frac{2m+1}{2n}$, а также наблюдая что $\Gamma(1) = 1$, найдемся (смотри формулу (8) §2^{го} урока):

$$(14) \begin{cases} \Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad [\Gamma(\frac{1}{2})]^2 = \pi, \\ \Gamma(\frac{1}{2}) = \pi^{\frac{1}{2}} = \int_0^{\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx. \end{cases}$$

Теперь пусть будущъ $\varphi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ двѣ функции удовлетворяющія уравненію

$$(15) \quad \frac{d\varphi(x, y)}{dy} = \frac{d\chi(x, y)}{dx}.$$

Подставляя послѣдовательно объ части сего уравненія вмѣсто функціи $f(x, y)$ въ формулу (6), получимъ слѣдующая:

$$(16) \quad \int_{x_0}^x [\varphi(x, y) - \varphi(x, y_0)] dx = \int_{y_0}^y [\chi(x, y) - \chi(x_0, y)] dy.$$

Сія формула справедлива когда функціи $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ осна-
ются объ конечными и непрерывными отношительно къ пере-
мѣннымъ x и y , между предѣлами интегрированія.

Положимъ теперь что ищемъ функцію u двухъ перемен-
ныхъ x и y , удовлетворяющую уравненію

$$(17) \quad du = \varphi(x, y) dx + \chi(x, y) dy,$$

или, что все равно, двумъ слѣдующимъ:

$$(18) \quad \frac{du}{dx} = \varphi(x, y), \quad (19) \quad \frac{du}{dy} = \chi(x, y).$$

Очевидно, что рѣшеніе сего вопроса будетъ только тогда
возможно, когда формула (15), коей каждая часть равна
 $\frac{d^2 u}{dx dy}$, будетъ имѣть мѣсто. Если сіе условіе выполнено: то
предложенный вопросъ легко разрѣшится. Дѣйствительно,
пусть x_0 и y_0 будутъ какія нибудь частныя величины пере-
мѣнныхъ x и y , а C произвольное постоянное количество. Дабы
удовлетворить уравненію (18), сполнитъ только взять

$$(20) \quad u = \int_{x_0}^x \varphi(x, y) dx + v,$$

гдѣ v означаетъ произвольную функцію переменной y ; поелику
же изъ формулы (20) выводимъ

$$\frac{du}{dy} = \int_{x_0}^x \frac{d\varphi(x, y)}{dy} dx + \frac{dv}{dy} = \int_{x_0}^x \frac{d\chi(x, y)}{dx} dx + \frac{dv}{dy} = \chi(x, y) - \chi(x_0, y) + \frac{dv}{dy},$$

то очевидно что удовлетворимъ и уравненію (19), если поло-
жимъ

$$(21) \quad \frac{dv}{dy} - \chi(x_0, y) = 0, \quad v = \int \chi(x_0, y) dy = \int_{y_0}^y \chi(x_0, y) dy + C$$

Слѣдовательно, общая величина для функціи u будетъ:

$$(22) \quad u = \int_{x_0}^x \varphi(x, y) dx + \int \chi(x_0, y) dy = \int_{x_0}^x \varphi(x, y) dx + \int_{y_0}^y \chi(x_0, y) dy + C.$$

Когда въ предыдущихъ урокахъ перемѣнимъ между собою измѣняемыя x и y , то получимъ другое выраженіе для функціи u , которое, въ слѣдствіе формулы (16), окажется равнозначущимъ съ выраженіемъ (22).

Интегрированіе дифференціала функціи трехъ, четырехъ... переменныхъ независимыхъ количествъ, такъ же легко производится какъ и интегрированіе дифференціала функціи содержащей двѣ переменныя независимыя. Такъ, на примѣръ, если при слѣдующія условія

$$(23) \quad \frac{d\chi(x, y, z)}{dz} = \frac{d\psi(x, y, z)}{dy}, \quad \frac{d\psi(x, y, z)}{dx} = \frac{d\varphi(x, y, z)}{dz}, \quad \frac{d\varphi(x, y, z)}{dx} = \frac{d\chi(x, y, z)}{dy}$$

будутъ выполнены: то общая величина функціи u , удовлетворяющая уравненію

$$(24) \quad du = \varphi(x, y, z) dx + \chi(x, y, z) dy + \psi(x, y, z) dz,$$

будетъ:

$$(25) \quad u = \int_{x_0}^x \varphi(x, y, z) dx + \int_{y_0}^y \chi(x_0, y, z) dy + \int_{z_0}^z \psi(x_0, y_0, z) dz + C,$$

гдѣ x_0, y_0, z_0 изображаютъ какія нибудь частныя величины переменныхъ x, y, z .

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ЧЕТВЕРТЫЙ.

Сравненіе обоихъ родовъ простыхъ интеграловъ, получаемыхъ въ нѣкоторыхъ случаяхъ, чрезъ двойное интегрированіе.

Положимъ что функціи $\varphi(x, y)$ и $\chi(x, y)$ удовлетворяють уравненію (15) предыдущаго урока. Интегрируя два раза сіе уравненіе, именно, одинъ разъ опноситеьльно къ x , между предѣлами x_0 и X , а другой разъ опноситеьльно къ y , между предѣлами y_0 и Y , найдемся:

$$(1) \int_{x_0}^X [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)] dx = \int_{y_0}^Y [\chi(X, y) - \chi(x_0, y)] dy.$$

Сія послѣдняя формула показываетъ весьма примѣчательное отношеніе, существующее между интегралами входящими въ оную. Но она переспраешъ бытъ справедливою, когда функціи $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ дѣлаются безконечными для одной, или нѣсколькихъ системъ величинъ переменныхъ x и y , заключающихся между предѣлами $x = x_0$, $x = X$, и $y = y_0$, $y = Y$. Предположимъ сперва что имѣемъ одну только систему обрацающую въ безконечныя величины функціи $\varphi(x, y)$ и $\chi(x, y)$; пусть будутъ $x = a$ и $y = b$, частныя значенія переменныхъ x и y , соотвѣтствующія сей системѣ. Въ семъ частномъ случаѣ, выраженія, получаемыя чрезъ двойное интегрированіе обѣихъ частей формулы (15) (33го урока), могутъ различествовать одно отъ другаго. Но они сдѣлаются опять равными, если въ изчисленіи замѣняли каждый интегралъ, опноситеьльный къ x , общею его величиною. Примѣчанія сего доспашочно, чтобы видѣть какимъ образомъ уравненіе (1)

должно быть изменено. Действительно, означивъ чрезъ ε безконечно-малое число, найдемся, въ насъпомятомъ предположеніи,

$$(2) \left\{ \begin{aligned} & \int_{x_0}^{a-\varepsilon} [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)] dx + \int_{a+\varepsilon}^X [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)] dx \\ & = \int_{y_0}^Y [\chi(X, y) - \chi(a + \varepsilon, y) + \chi(a - \varepsilon, y) - \chi(x_0, y)] dy; \end{aligned} \right.$$

откуда выводимъ, полагая что ε безпрестанно уменьшается, стремишься въ нулю,

$$(3) \int_{x_0}^X [\varphi(x, Y) - \varphi(x, y_0)] dx = \int_{x_0}^X [\chi(X, y) - \chi(x_0, y)] dy - \Delta,$$

гдѣ величина Δ опредѣляется формулой

$$(4) \Delta = n p \cdot \int_{y_0}^Y [\chi(a + \varepsilon, y) - \chi(a - \varepsilon, y)] dy.$$

Въ общемъ случаѣ, количество Δ будетъ равно суммѣ нѣсколькихъ членовъ, подобныхъ второй части уравненія (4).

Примѣры. Полагая $\varphi(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}$, $\chi(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $x_0 = -1$, $X = 1$, $y_0 = -1$, $Y = 1$, уравненія (3) и (4) даютъ:

$$\int_{-1}^1 \frac{-2dx}{1+x^2} = \int_{-1}^1 \frac{2dy}{1+y^2} - \Delta, \quad \Delta = n p \cdot \int_{-1}^1 \frac{2\varepsilon dy}{\varepsilon^2 + y^2} = 2\pi.$$

Легко видѣшь что функціи $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ будутъ удовлетворяють уравненію (15) (33^{го} урока), если $\varphi(x, y)dx + \chi(x, y)dy = f(u) du$, а посему

$$(5) \quad \varphi(x, y) = f(u) \frac{du}{dx}, \quad \chi(x, y) = f(u) \frac{du}{dy},$$

гдѣ u означаетъ какую нибудь функцію переменныхъ x , y .

Также легко удостовериться въ томъ, что формулы (1) и (3) имѣють мѣсто при вышеприведенныхъ условіяхъ, даже въ томъ случаѣ, когда функціи $\varphi(x, y)$, $\chi(x, y)$ будутъ мнимыя. Положимъ, на примѣръ, что функція $f(x)$ есть алгебраическая, и что $u = x + y\sqrt{-1}$. Изъ уравненій (5) выводимъ $\varphi(x, y)$

$= f(x + y\sqrt{-1})$, $\chi(x; y) = \sqrt{-1} f(x + y\sqrt{-1})$, а изъ формулы (3)

$$(6) \quad \begin{cases} \int_{x_0}^X [f(x + Y\sqrt{-1}) - f(x + y_0\sqrt{-1})] dx = \\ \sqrt{-1} \int_{y_0}^Y [f(X + y\sqrt{-1}) - f(x_0 + y\sqrt{-1})] dy - \Delta. \end{cases}$$

Въ сей послѣдней формулѣ, Δ уничтожится, если функція $f(x + y\sqrt{-1})$ будетъ конечная и непрерывная для всѣхъ величинъ переменныхъ x и y , содержащихся между предѣлами $x = x_0$, $x = X$, $y = y_0$, $y = Y$. Но если между сими самими предѣлами, функція $f(x + y\sqrt{-1})$ обращается въ величину безконечную для системы $x = a$, $y = b$: то величина количества Δ опредѣлится уравненіемъ (4); и предположивъ для краткости,

$$(7) \quad (x - a - b\sqrt{-1})f(x) = F(x), \quad y = b + \varepsilon z, \quad z_0 = -\frac{b - y_0}{\varepsilon}, \quad Z = \frac{Y - b}{\varepsilon},$$

найдемся:

$$(8) \quad \begin{aligned} \Delta &= \sqrt{-1} \text{пр.} \int_{y_0}^Y [f(a + \varepsilon + y\sqrt{-1}) - f(a - \varepsilon + y\sqrt{-1})] dy \\ &= \sqrt{-1} \text{пр.} \int_{z_0}^Z \left\{ \frac{F[a + \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1 + z\sqrt{-1}} - \frac{F[a - \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1 + z\sqrt{-1}} \right\} dz. \end{aligned}$$

Теперь пусть будетъ

$$(9) \quad \frac{F[a + \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{1 + z\sqrt{-1}} - \frac{F[a - \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}]}{-1 + z\sqrt{-1}} = \varpi(\varepsilon) + \sqrt{-1} \psi(\varepsilon),$$

$$(10) \quad \frac{\varpi(\varepsilon) - \varpi(0)}{\varepsilon} = \alpha, \quad \frac{\psi(\varepsilon) - \psi(0)}{\varepsilon} = \beta,$$

гдѣ $\varpi(\varepsilon)$, $\psi(\varepsilon)$, а слѣдовательно и α , β , изображаютъ количества вещественныя. Сверхъ того положимъ что Y болѣе y_0 , и что функціи $F(x + y\sqrt{-1})$, $F'(x + y\sqrt{-1})$ остаются конечными и непрерывными относительно къ переменнымъ x и y между предѣлами x_0 , X , y_0 , Y . Коелику, въ слѣдствіе формулы (9) имѣемъ,

$$\begin{aligned}\varpi'(\varepsilon) + \sqrt{-1}\psi'(\varepsilon) &= F[a + \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}] - F[a - \varepsilon + (b + \varepsilon z)\sqrt{-1}] \\ &= F(a + \varepsilon + y\sqrt{-1}) - F(a - \varepsilon + y\sqrt{-1}),\end{aligned}$$

по очевидно, что численные величины количествъ $\varpi'(\varepsilon), \psi'(\varepsilon)$ будутъ также весьма малыя, равно какъ и численные величины двухъ количествъ α и β , которыя могутъ быть предсавлены въ видѣ $\varpi'(\theta\varepsilon)$ и $\psi'(\theta\varepsilon)$, гдѣ θ означаетъ число меньшее единицы. Посему, найдемся:

$$\begin{aligned}\text{пр. } \int_{z_0}^Z \varepsilon(\alpha + \beta\sqrt{-1}) dz &= \text{пр. } \int_{y_0}^Y (\alpha + \beta\sqrt{-1}) dy = 0, \\ \text{пр. } \int_{z_0}^Z [\varpi(\varepsilon) + \sqrt{-1}\psi(\varepsilon)] dz &= \int_{z_0}^Z [\varpi(0) + \sqrt{-1}\psi(0)] dz,\end{aligned}$$

попомъ, сдѣлавъ $f = F(a + b\sqrt{-1}) = \text{пр. } \varepsilon f(a + b\sqrt{-1} + \varepsilon)$, получимъ:

$$(11) \quad \Delta = \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{\infty} [\varpi(0) + \sqrt{-1}\psi(0)] dz = 2f\sqrt{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z}{1+z^2} dz = 2\pi f\sqrt{-1}.$$

Еслибъ имѣли $y_0 = b$ или $Y = b$, то въ такомъ случаѣ слѣдовало бы брать, интегралъ относительный къ z въ формулѣ (11), между предѣлами $z = 0, z = \infty$, или между предѣлами $z = -\infty, z = 0$, а посему величина количества Δ обратилась бы въ $\pi f\sqrt{-1}$. Въ томъ же самомъ предположеніи, первая часть уравненія (6) изображаетъ главную величину интеграла неопредѣленного, (смотри урокъ 24). Замѣшимъ также что $a + b\sqrt{-1}$ есть корень уравненія

$$(12) \quad f(x) = \pm \infty.$$

Если бы сіе уравненіе имѣло нѣсколько такихъ корней, коихъ вещественныя части заключались бы между предѣлами x_0, X , а коэффициенты при $\sqrt{-1}$ между предѣлами y_0, Y : то, означивъ чрезъ x_1, x_2, \dots, x_m сіи самыя корни, а чрезъ f_1, f_2, f_m истинныя величины произведеній

$$(x - x_1)f(x), \quad (x - x_2)f(x) \dots (x - x_m)f(x),$$

соотвѣствующія предположеніямъ $x - x_1 = 0$, $x - x_2 = 0 \dots$
 $x - x_m = 0$, найдется:

$$(13) \quad \Delta = 2\pi [f_1 + f_2 + \dots + f_m] \sqrt{-1}$$

Прибавимъ, что должно брать только половину каждого изъ количествъ $f_1, f_2 \dots f_m$, когда въ соотвѣствующемъ ему корню, коэффициентъ при $\sqrt{-1}$ равенъ одному изъ предѣловъ y_0 или Y .

Когда функція $f(x + y\sqrt{-1})$ уничтожается, 1°. для $x = \pm \infty$, каковъ бы ни былъ y ; 2°. для $y = \infty$, каковъ бы ни былъ x : по взявъ $x_0 = -\infty$, $X = +\infty$, $y_0 = 0$, $Y = \infty$, изъ формулы (6) выведемъ:

$$(14) \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \Delta.$$

Когда функція $f(x)$ представляется въ видѣ $\frac{f(x)}{F(x)}$, и если уничтожающіеся члены изъ ряда $f_1, f_2 \dots f_m$ всѣ соотвѣствуютъ корнямъ уравненія

$$(15) \quad F(x) = 0:$$

то очевидно что выраженіе Δ можетъ быть представлено въ такомъ видѣ:

$$(16) \quad \Delta = 2\pi \left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} + \dots + \frac{f(x_m)}{F'(x_m)} \right] \sqrt{-1},$$

а уравненіе (14) обращается въ слѣдующее:

$$(17) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{F(x)} dx = 2\pi \left[\frac{f(x_1)}{F'(x_1)} + \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} + \dots + \frac{f(x_m)}{F'(x_m)} \right] \sqrt{-1}.$$

Во второй части сей послѣдней формулы должно приниматьъ только вещественные корни уравненія (15) и тѣ мнимые корни, для коихъ коэффициенты при $\sqrt{-1}$ будутъ положительныя, наблюдая по, чтобы брать только половину тѣхъ изъ членовъ ряда $\frac{f(x_1)}{F'(x_1)}, \frac{f(x_2)}{F'(x_2)} \dots \frac{f(x_m)}{F'(x_m)}$, копорые будутъ соотвѣст-

сповоаць вѣщественнымъ корнямъ. Въ слѣдствіе сего, для $F(x) = 1 + x^2$, $x_1 = \sqrt{-1}$, найдется,

$$(18) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1+x^2} dx = \pi f(\sqrt{-1});$$

а для $F(x) = 1 - x^2$, $x_1 = -1$, $x_2 = +1$,

$$(19) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x)}{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} [f(-1) - f(1)] \sqrt{-1}.$$

Сія послѣдняя формула даетъ главную величину интеграла входящаго въ оную.

Примѣры. Пусть μ будетъ число заключающееся между 0 и 2. Если возьмемъ $f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1}$, то мнимое выраженіе $f(x + y\sqrt{-1}) = (y - x\sqrt{-1})^{\mu-1}$ будетъ имѣть одну, совершенно опредѣленную величину, для всѣхъ возможныхъ положительныхъ величинъ переменнѣй y (смотри *Analyse algébrique*, Глав. VII); изъ формулъ же (18) и (19) выведемъ:

$$(20) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} dx &= [(-\sqrt{-1})^{\mu-1} + (\sqrt{-1})^{\mu-1}] \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x^2} = \pi, \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1+x^2} &= \frac{\pi}{2 \sin(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{aligned} \right.$$

$$(21) \quad \left\{ \begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1-x^2} dx &= \frac{\pi}{2} [(\sqrt{-1})^{\mu} + (-\sqrt{-1})^{\mu}], \\ \int_0^{\infty} \frac{x^{\mu-1} dx}{1-x^2} &= \frac{\pi \cos(\frac{1}{2}\mu\pi)}{2 \sin(\frac{1}{2}\mu\pi)} = \frac{\pi}{2 \tan(\frac{1}{2}\mu\pi)}. \end{aligned} \right.$$

Подставляя z вмѣсто x^2 и $2a$ вмѣсто μ въ послѣднія изъ уравненій (20) и (21), найдемъ опять формулы (8) и (9) 32^{го} урока, которыя такимъ образомъ будутъ доказаны, равно какъ и первое изъ уравненій (14) 33^{го} урока, для всѣхъ возможныхъ величинъ количесва a , заключающихся между предѣлами 0 и 1.

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ПЯТЫЙ.

Дифференцирование опредѣленныхъ интеграловъ относительно къ перемѣнной входящей въ функцию находящуюся подъ знакомъ \int , между предѣлами интегрированія. Интегралы высшихъ порядковъ для функций содержащихъ одну перемѣнную.

Пусть будетъ

$$(1) \quad A = \int_{z_0}^Z f(x, z) dz$$

опредѣленный интегралъ относительно къ z . Если въ сему интегралѣ, будемъ измѣнять отдѣльно, и независимо одно отъ другаго, при количествъ Z , z_0 , x : по въ слѣдующіе формулы (5) (26^{го} урока), и формулы (2) (33^{го} урока), получимъ:

$$(2) \quad \frac{dA}{dZ} = f(x, Z), \quad \frac{dA}{dz_0} = -f(x, z_0), \quad \frac{dA}{dx} = \int_{z_0}^Z \frac{df(x, y)}{dx} dz.$$

Полагая же что оба количествъ z_0 и Z , дѣлаются функциями перемѣнной x , и принимая посему A за функцию одной только измѣняемой x , найдемъ:

$$(3) \quad \frac{dA}{dx} = \int_{z_0}^Z \frac{df(x, y)}{dx} dz + f(x, Z) \frac{dZ}{dx} - f(x, z_0) \frac{dz_0}{dx}.$$

Въ частномъ случаѣ, когда z_0 будетъ постоянное количество, а $f(x, Z)$ равна нулю, то просто будетъ:

$$(4) \quad \frac{d}{dx} \int_{z_0}^Z f(x, z) dz = \int_{z_0}^Z \frac{df(x, z)}{dx} dz.$$

Примѣръ. Означимъ чрезъ x_0 частную, постоянную величину перемѣнной x , и положимъ $z_0 = x_0$, $Z = x$, $f(x, z) = (x - z)^m f(z)$; получимъ формулу

$$(5) \quad \frac{d}{dx} \int_{x_0}^x (x-z)^m f(z) dz = m \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} f(z) dz,$$

изъ коей выведемъ

$$(6) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} f(z) dz dx = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x (x-z)^m f(z) dz,$$

и

$$(7) \quad \int \int_{x_0}^x (x-z)^{m-1} f(z) dz dx = \frac{1}{m} \int_{x_0}^x (x-z)^m f(z) dz + C,$$

гдѣ C изображаетъ постоянное произвольное количество. Если возьмемъ m равнымъ единицѣ: то въ силу формулы (6) получимъ:

$$(8) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(z) dz dx = \int_{x_0}^x (x-z) f(z) dz.$$

Теперь легко рѣшимъ слѣдующую задачу:

Задача. Найти общую величину перемѣнной y , удовлетворяющую уравненію

$$(9) \quad \frac{d^n y}{dx^n} = f(x).$$

Рѣшеніе. Поскольку уравненіе (9) можетъ быть изображено въ видѣ

$$d \left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right) = f(x) dx,$$

то интегрируя обѣ части онаго относительно къ x , выведемъ

$$\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int f(x) dx = \int_{x_0}^x f(x) dx + c;$$

или, что все равно,

$$(10) \quad \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} = \int_{x_0}^x f(z) dz + c.$$

Интегрируя опять относительно къ перемѣнной x нѣсколько разъ сряду, между предѣлами x_0 , x , сверхъ того, соображаясь съ формулами (6) и (8), и придавая постоянное произвольное количество послѣ каждаго интегрированія, найдемъ постепенно:

$$(I1) \left\{ \begin{aligned} \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} &= \int_{x_0}^x (x-z) f(z) dz + c(x-x_0) + c_1, \\ \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}} &= \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^2}{1.2} f(z) dz + c \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + c_1(x-x_0) + c_2, \\ &\text{и проч...} \\ \frac{dy}{dx} &= \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-2}}{1.2.3...(n-2)} f(z) dz + c \frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2...(n-2)} + c_1 \frac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2...(n-3)} + c_2 \frac{(x-x_0)^{n-4}}{1.2...(n-4)} + \dots + c_{n-1}; \end{aligned} \right.$$

и наконецъ

$$(I2) \quad y = \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(z) dz + c \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2...(n-1)} + c_1 \frac{(x-x_0)^{n-2}}{1.2...(n-2)} + c_2 \frac{(x-x_0)^{n-3}}{1.2...(n-3)} \dots + c_{n-1} (x-x_0) + c_n,$$

гдѣ $c, c_1, c_2, \dots, c_{n-1}, c_n$ изображаютъ различныя постоянныя произвольныя количества. Замѣнимъ также что опредѣленный интегралъ заключающійся во второй части уравненія (I2), легко можешь быть приведенъ къ другому виду помощью формулы (17) (22^{го} урока). Дѣйствительно, подставивъ въ сію формулу z вмѣсто x , и x вмѣсто X , получимъ

$$(I3) \quad \int_{x_0}^x f(z) dz = \int_0^{x-x_0} f(x_0+z) dz = \int_0^{x-x_0} f(x-z) dz,$$

и слѣдовательно

$$(I4) \quad \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(z) dz = \int_0^{x-x_0} \frac{(x-x_0-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(x_0+z) dz \\ = \int_0^{x-x_0} \frac{z^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(x-z) dz.$$

Полагая, для большей простоты, $x_0=0$, величина переменн^{ой} y , опредѣляемая уравненіемъ (I2), обратится въ слѣдующую:

$$(I5) \quad y = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(z) dz + c \frac{x^{n-1}}{1.2...(n-1)} + c_1 \frac{x^{n-2}}{1.2...(n-2)} + c_2 \frac{x^{n-3}}{1.2...(n-3)} + \dots + c_{n-1} x + c_n,$$

и формула (I4), въ сѣмъ предположеніи, приметъ видъ

$$(I6) \quad \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(z) dz = \int_0^x \frac{z^{n-1}}{1.2.3...(n-1)} f(x-z) dz.$$

Когда упошребляемъ неопредѣленные интегралы, и желаемъ пошьлько показашь послѣдовательныя интегрированія: по величине функций

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}, \frac{d^{n-3}y}{dx^{n-3}}, \text{ и проч. . . . } y,$$

выведенныя изъ уравненія (9), изображаются слѣдующимъ образомъ:

$$\int f(x) dx, \int \int f(x) dx \cdot dx, \int \int \int f(x) dx \cdot dx \cdot dx, \\ \text{ и проч. . . . } \int \int \int \dots \int f(x) dx \dots dx \cdot dx \cdot dx.$$

Сии послѣднія выраженія называются интегралами перваго, втораго, шрешьяго . . . порядка, и наконецъ $n^{\text{го}}$ порядка, отношительно къ переменнй x . Для краткости, мы условимся впредь означашь ихъ знакоположеніями

$$(17) \quad \int f(x) dx, \iint f(x) dx^2, \iiint f(x) dx^3, \dots \int \dots \int f(x) dx^n,$$

и вмѣсто сихъ послѣднихъ будемъ упошребляшь слѣдующія:

$$(18) \quad \int_{x_0}^x f(x) dx, \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx^2, \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x f(x) dx^3, \dots \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx^n,$$

когда каждое интегрированіе отношительно къ x , будетъ произведено между предѣлами x_0, x . Песему имѣемъ:

$$(19) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx^n = \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)} f(z) dz = \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \left\{ x^{n-1} \int_{x_0}^x f(z) dz - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^x z f(z) dz \right. \\ \left. + \frac{(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2} \int_{x_0}^x z^2 f(z) dz \dots \pm \int_{x_0}^x z^{n-1} f(z) dz \right\},$$

или, что все равно,

$$(20) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots \int_{x_0}^x f(x) dx^n = \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \dots (n-1)} \left\{ x^{n-1} \int_{x_0}^x f(x) dx - \frac{n-1}{1} x^{n-2} \int_{x_0}^x x^2 f(x) dx \dots \pm \int_{x_0}^x x^{n-1} f(x) dx \right\}.$$

Сію послѣднюю формулу можно непосредственно вывести по мощію нѣсколькихъ интегрированій по частямъ.

Теперь пусть $F(x)$ будетъ частная величина переменнй y , удовлетворяющая уравненію (9), шакъ что

$$(21) \quad F^{(n)}(x) = f(x).$$

Если $F(x)$, и ея послѣдовательныя производныя, до производной $n^{\text{го}}$ порядка, будутъ непрерывныя между предѣлами x_0 , x : то полагая въ формулахъ (10), (11) и (12) $x = x_0$, найдется:

$$(22) \quad c = F^{(n-1)}(x_0), c_1 = F^{(n-2)}(x_0), c_2 = F^{(n-3)}(x_0), \dots, c_{n-1} = F'(x_0), c_n = F(x_0),$$

и формула (12) даетъ

$$(23) \quad F(x) = F(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F'(x_0) + \dots + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(x_0) \\ + \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^n}{1.2.3 \dots n} f(z) dz.$$

Изъ сей послѣдней, соединенной съ уравненіемъ (19), выводится слѣдующая формула:

$$(24) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots f(x) dx^n = F(x) - F(x_0) - \frac{x-x_0}{1} F'(x_0) - \frac{(x-x_0)^2}{1.2} F''(x_0) \dots \\ - \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(x_0),$$

закрывающая, какъ частный случай, формулу (17) (26^{го} урока).

Предполагая $x_0 = 0$, уравненіе (24) приводится къ

$$(25) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots f(x) dx^n = F(x) - F(0) - \frac{x}{1} F'(0) \\ - \frac{x^2}{1.2} F''(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(0).$$

Примѣръ. Пусть $F(x) = e^x$; имѣемъ $f(x) = F^{(n)}(x) = e^x$, и слѣдственно

$$(26) \quad \int_0^x \int_0^x \dots e^x dx^n = e^x - 1 - \frac{x}{1} - \frac{x^2}{1.2} \dots - \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} = \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} e^z dz.$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ШЕСТОЙ.

Преобразование какихъ ни-есть функций перемѣнной x или $x+h$ въ цѣлыя функции перемѣнной x или h , съ дополнительными опредѣленными Интегралами. Другія выраженія для сихъ самыхъ Интеграловъ.

Если въ уравненіе (23) предыдущаго урока, подставимъ вмѣсто функции $f(z)$ величину оной $F^{(n)}(z)$, выведенную изъ формулы (21): то, при тѣхъ же самыхъ условіяхъ, найдемся:

$$(1) \quad F(x) = F(x_0) + \frac{x-x_0}{1} F'(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{1.2} F''(x_0) \dots \\ + \frac{(x-x_0)^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(x_0) + \int_{x_0}^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n)}(z) dz,$$

попомъ, взявъ $x_0 = 0$,

$$(2) \quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \dots \\ + \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(0) + \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n)}(z) dz.$$

Полагая теперь $F(x) = f(x+h)$, и измѣняя порядокъ буквъ x и h , получимъ уравненіе:

$$(3) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n)}(x+z) dz,$$

въ кошоромъ послѣдній членъ можетъ быть представлень въ различныхъ видахъ, ибо (въ слѣдствіе формулъ (14) и (19) 35^{го} урока) имѣемъ:

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n)}(x+z) dz = \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n)}(x+h-z) dz = \\ \int_0^{x+h} \frac{(x+h-z)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n)}(z) dz = \int_0^h \int_0^h \dots f^{(n)}(x+z) dz^n. \end{array} \right.$$

Въ уравненіи (3) предполагается, что функции $f(x+z)$, $f'(x+z)$, ... $f^{(n)}(x+z)$, суть непрерывныя между предѣлами $z=0$, $z=h$. Можно вывести оное непосредственно изъ формулы (1), полагая $x=x_0+h$, попомъ, поставляя x вмѣсто x_0 , а f вмѣсто F . Въ такомъ случаѣ, послѣдній членъ второй части, обратится въ прешій изъ интеграловъ заключающихся въ формулѣ (4).

Впрочемъ, можно прямо доказать уравненіе (3), посредствомъ нѣсколькихъ интегрированій по частямъ, придерживаясь способа изложеннаго Г. Прони въ разсужденіи напечатанномъ въ 1805 году. Дѣйствительно, подставляя сперва въ формулу (3) предъидущаго урока, x_0+h вмѣсто x , а попомъ x вмѣсто x_0 , получимъ:

$$(5) \quad \int_0^h f(x+z) dz = \int_0^h f(x+h-z) dz;$$

следовательно

$$(6) \quad f(x+h) - f(x) = \int_0^h f'(x+z) dz = \int_0^h f'(x+h-z) dz.$$

Интегрируя по частямъ нѣсколько разъ сряду, имѣемъ:

$$\begin{aligned} (7) \quad \int f'(x+h-z) dz &= \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \int \frac{z}{1} f''(x+h-z) dz \\ &= \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) + \int \frac{z^2}{1.2} f'''(x+h-z) dz \\ &= \text{и проч.} \dots \\ &= \frac{z}{1} f'(x+h-z) + \frac{z^2}{1.2} f''(x+h-z) \dots \\ &+ \frac{z^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x+h-z) + \int \frac{z^{n-1}}{1.2 \dots (n-1)} f^{(n)}(x+h-z) dz, \end{aligned}$$

попомъ, производя каждое интегрированіе между предѣлами $z=0$, $z=h$, и предполагая что функции $f(x+z)$, $f'(x+z)$... $f^{(n)}(x+z)$, остаются непрерывными между сими самыми предѣлами, получимъ:

$$(8) \quad \int_0^h f'(x+h-z) dz = \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) \dots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \int_0^h \frac{z^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n)}(x+h-z) dz.$$

Легко видѣшь шеперь, что изъ формулы (6), выводился уравненіе, которое будешь согласовашься, въ слѣдствіе формулы (4), съ уравненіемъ (3). Сей же самый способъ можешь еще служить для доказательства уравненія (2).

Интегралы заключающіеся во вшорыхъ частяхъ формулъ (2) и (3), не только могутъ быть замѣнены нѣсколькими другими, подобными шѣмъ интеграламъ, которые формула (4) содержишь; но изъ уравненія (13) (23^{го} урока), должно еще заключить, что они равны двумъ произведеніямъ слѣдующаго вида:

$$(9) \quad F^{(n)}(\theta x) \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} dz = \frac{x^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}(\theta x),$$

$$(10) \quad f^{(n)}(x+\theta h) \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} dz = \frac{h^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(x+\theta h),$$

гдѣ θ означаешь неизвѣстное число, которое будучи менѣ единицы, можешь впрочемъ различешивовашь для каждаго произведенія. Слѣдовательно имѣемъ

$$(11) \quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \dots \\ + \frac{x^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n-1)}(0) + \frac{x^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}(\theta x).$$

$$(12) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \dots \\ + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n-1)}(x) + \frac{h^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(x+\theta h).$$

Необходимо замѣшишь, что функція $F(x)$ и ея послѣдовательныя производныя, должны быть непрерывныя, въ формулѣ (11), между предѣлами 0, x ; а функція $f(x+z)$ и ея послѣдовательныя производныя, въ формулѣ (12), между предѣлами $z=0$, $z=h$.

Теперь пусть будетъ $u = f(x, y, z \dots)$ функція нѣсколькихъ переменныхъ независимыхъ величинъ $x, y, z \dots$; и положимъ

$$(13) \quad F(\alpha) = f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \dots).$$

Подставляя α вмѣсто x , въ формулу (11), выведемъ изъ оной, въ силу правилъ доказанныхъ въ 14^{мъ} урокъ,

$$(14) \quad \begin{aligned} & f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \dots) \\ & = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 u \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} d^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1.2.3 \dots n} F^{(n)}(\theta \alpha). \end{aligned}$$

Если предположимъ, что количество α есть бесконечно-малое, то и разность

$$F^{(n)}(\theta \alpha) - F^{(n)}(0) \quad \text{или} \quad F^{(n)}(\theta \alpha) - d^n u$$

будетъ также бесконечно-малая; означивъ оную чрезъ β , получимъ

$$(15) \quad \begin{aligned} & f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \dots) \\ & = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 u \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} d^{n-1} u + \frac{\alpha^n}{1.2.3 \dots n} (d^n u + \beta). \end{aligned}$$

Когда вмѣсто нѣсколькихъ переменныхъ независимыхъ, возьмемъ только одну изменяемую x , и положимъ $y = f(x)$: то получимъ формулу

$$(16) \quad f(x + \alpha dx) = y + \frac{\alpha}{1} dy + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 y + \dots + \frac{\alpha^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} d^{n-1} y + \frac{\alpha^n}{1.2.3 \dots n} (d^n y + \beta).$$

Положимъ теперь, что для частной величины $x = x_0$, функція $f(x)$ и ея послѣдовательныя производныя до производной $n - 1$ порядка, всѣ уничтожаются. Въ семъ случаѣ, изъ формулы (12), выводимъ:

$$(17) \quad f(x_0 + h) = \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(x_0 + \theta h);$$

попомъ, подставляя въ сію послѣднюю формулу вмѣсто конечнаго количества h , бесконечно-малое i , получимъ

$$(18) \quad f(x_0 + i) = \frac{i^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(x_0 + \theta i).$$

Когда, между функциями $f(x), f'(x) \dots f^{(n-1)}(x)$, одна только первая не уничтожается для $x = x_0$, то очевидно, что вмѣсто уравненія (18), должно приниматься слѣдующее:

$$(19) \quad f(x_0 + i) - f(x_0) = \frac{i^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(x_0 + \theta i).$$

Если, въ помощь же самому предположенію, напомнимъ x вмѣсто x_0 , и сдѣлаемъ $f(x) = y, \Delta x = i = \alpha h$: то уравненіе (19) получится видъ

$$(20) \quad \Delta y = \frac{\alpha^n}{1.2.3 \dots n} (d^n y + \beta),$$

гдѣ β , равно какъ и α , означаютъ количества бесконечно-малыя. Изъ уравненія (16) можно также вывести формулу (20), наблюдая что для величины переменной x , обращающей въ нуль производныя функции $f'(x), f''(x) \dots f^{(n-1)}(x)$, равнымъ образомъ уничтожаются и дифференціалы $dy, d^2y \dots d^{n-1}y$.

Уравненіе (20) доставляетъ средство къ рѣшенію 4-ѣй задачи 6-го урока, во многихъ случаяхъ, когда способъ, который мы прежде изложили, недоспашоченъ. И дѣйствительно, предположимъ что y и z означаютъ двѣ функции переменной x , и что для частнаго значенія x , напримѣръ $x = x_0$, не только дробь $s = \frac{z}{y}$ обращается въ $\frac{0}{0}$, но и слѣдующія еще дроби: $\frac{z'}{y'}$, $\frac{z''}{y''} \dots \frac{z^{(m-1)}}{y^{(m-1)}}$. Въ такомъ случаѣ, полагая $\Delta x = \alpha dx$, и изобразивъ чрезъ β, γ , два бесконечно-малыя количества, получимъ, для $x = x_0$,

$$(21) \quad \Delta y = \frac{\alpha^m}{1.2.3 \dots m} (d^m y + \beta), \quad \Delta z = \frac{\alpha^m}{1.2.3 \dots m} (d^m z + \gamma).$$

$$(22) \quad s = \text{пр.} \frac{z + \Delta z}{y + \Delta y} = \text{пр.} \frac{\Delta z}{\Delta y} = \text{пр.} \frac{d^m z + \gamma}{d^m y + \beta} = \frac{d^m z}{d^m y} = \frac{z^{(m)}}{y^{(m)}}.$$

Примѣръ. Для $x = 0$, будемъ имѣть

$$\frac{\sin^2 x}{1 - \cos x} = \frac{d^2(\sin^2 x)}{d^2(1 - \cos x)} = \frac{2(\cos^2 x - \sin^2 x)}{\cos x} = 2.$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ СЕДЬМОЙ.

Тейлорова и Маклоренова теоремы. Распространение сихъ теоремъ на функции нѣсколькихъ перемѣнныхъ.

Безконечный рядъ или *строкою* называется совокупность безконечнаго числа членовъ

(1) $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$, и проч. . . .

выводимыхъ одинъ изъ другаго по извѣстному закону. Изобразимъ чрезъ

$$s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

сумму n первыхъ членовъ, гдѣ n означаетъ какое ни есть цѣлое, положительное число. Если, для величинъ количества n возрастающихъ по произволению, сумма s_n будетъ постепенно приближаться къ нѣкоторому предѣлу s : то безконечный рядъ получаетъ названіе *сходящагося ряда*, а предѣлъ s , изображаемый слѣдующимъ образомъ:

$$u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{и проч.}$$

именуется его *суммою*. Напрощивъ того, если сумма s_n не приближается ни къ какому опредѣленному предѣлу, между тѣмъ какъ n увеличивается до безконечности: то безконечный рядъ называется *расходящимся рядомъ*, и не имѣетъ уже тогда суммы. Въ томъ и другомъ случаѣ, членъ соотвѣтствующій указателью n , именно u_n , именуется *общимъ членомъ*. Сверхъ того, если въ первомъ предположеніи возьмемъ $s = s_n + r_n$: то r_n будетъ изображать *остатокъ* безконечнаго ряда, отъ $n^{\text{го}}$ члена.

Условившись въ сихъ опредѣленіяхъ, изъ формулъ (2) и (3) (36^{го} урока) выводимъ по слѣдствію, что безконечные ряды

$$(2) \quad F(0), \frac{x}{1} F'(0), \frac{x^2}{1.2} F''(0), \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0), \text{ и проч. } \dots,$$

$$(3) \quad f(x), \frac{h}{1} f'(x), \frac{h^2}{1.2} f''(x), \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x), \text{ и проч. } \dots,$$

будуть сходящіеся, и сверхъ того сумма перваго будетъ равна $F(x)$, а втораго $f(x+h)$, когда величины двухъ интеграловъ

$$(4) \quad \int_0^x \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n)}(z) dz = \frac{x^n}{1.2.3\dots n} F^{(n)}(\theta x),$$

$$(5) \quad \int_0^h \frac{(h-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} f^{(n)}(x+z) dz = \frac{h^n}{1.2.3\dots n} f^{(n)}(x+\theta h),$$

будуть спремившяся, для безконечно-возрастающихъ величинъ количесва n , къ предѣлу нуль. Въ слѣдствіе сего найдемъ:

$$(6) \quad F(x) = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \text{ и проч. } \dots,$$

если выраженіе (4) уничтожается для безконечныхъ величинъ количесва n ; шакже

$$(7) \quad f(x+h) = f(x) + \frac{h}{1} f'(x) + \frac{h^2}{1.2} f''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x) + \text{ и проч. } \dots$$

если выраженіе (5) удовлетворяеть сему же самому условію. Формулы (6) и (7) заключають въ себѣ теоремы Маклорена и Тейлора. Когда интегралы (4) и (5) удовлетворяють предписаннымъ условіямъ: по теоремы сіи служатъ къ разложенію двухъ функцій $F(x)$ и $f(x+h)$ въ безконечные ряды, проспирающіеся по цѣлымъ и восходящимъ степенямъ количесва x и h . Оспашки же сихъ безконечныхъ рядовъ опредѣляющяся двумя интегралами, о коихъ мы сей-часъ упомянули.

Изобразимъ шеперь чрезъ $u = f(x, y, z, \dots)$ функцію нѣсколькихъ перемѣнныхъ независимыхъ величинъ x, y, z, \dots ; вмѣсто уравненій (2) и (3) предъидущаго урока, должно будетъ шеперь упошребить уравненіе (14), которое даеть:

$$(8) \quad f(x + \alpha dx, y + \alpha dy, z + \alpha dz, \dots) \\ = u + \frac{\alpha}{1} du + \frac{\alpha^2}{1.2} d^2 u + \frac{\alpha^3}{1.2.3} d^3 u + \text{и проч.} \dots,$$

если только членъ $\frac{\alpha^n}{1.2.3 \dots n} F^{(n)}(\theta \alpha)$, или, лучше, интеграль

$$(9) \quad \int_0^\alpha \frac{(\alpha - v)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n)}(v) dv,$$

изображаемый симъ членомъ, будешь уничтожаться для безконечныхъ величинъ количества n . Посему, полагая $\alpha = 1$, найдется:

$$(10) \quad f(x + dx, y + dy, z + dz, \dots) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{1.2} + \frac{d^3 u}{1.2.3} + \text{и проч.} \dots;$$

сія послѣдняя формула будешь имѣшь мѣсто, если интеграль

$$(11) \quad \int_0^1 \frac{(1-v)^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n)}(v) dv$$

удовлетворяеть вышеупомянутому условію. Когда вмѣсто нѣсколькихъ переменныхъ независимыхъ $x, y, z \dots$ возьмется одна только переменная x ; то уравненіе (10) получишь видъ

$$(12) \quad f(x + dx) = u + \frac{du}{1} + \frac{d^2 u}{1.2} + \frac{d^3 u}{1.2.3} + \text{и проч.} \dots$$

Сіе уравненіе будешь равнозначущее съ уравненіемъ (7), то есть, съ *Тейлоровою* формулою. Полагая въ семъ уравненіи x равнымъ нулю, и поставляя попомъ α вмѣсто dx , получишь теорема *Маклорена*. Прибавимъ, что уравненіе (10), а также и то, которое выведется изъ онаго, когда вмѣсто $x, y, z \dots$ поставимъ нули, а вмѣсто $dx, dy, dz \dots$ величины $x, y, z \dots$ даюшь средство распространить теоремы *Тейлора* и *Маклорена* на функции нѣсколькихъ переменныхъ. Замѣшимъ еще, что уравненія (6), (8), (10), (12) равнозначущи съ уравненіями (4), (6), (7), (8) (19^{го} урока), въ томъ случаѣ, когда $F(x)$ и $f(x)$ изображаютъ цѣлыя функции, степени n относительно къ x .

Поелику, въ слѣдствіе формулы (19) (22^{го} урока), интеграль (4) равенъ произведенію вида

$$(13) \quad x \frac{(x-\theta x)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n)}(\theta x),$$

гдѣ θ есть число меньше единицы: по ясно, что для безконечныхъ величинъ количества n , сей интеграль уничтожается, если функция

$$(14) \quad \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n)}(z)$$

обращишя въ нуль для всѣхъ величинъ количества z , заключающихся между предѣлами 0 и x . Очевидно, что се последнее условіе будетъ выполнено, когда численная величина выраженія $F^{(n)}(\theta x)$ предполагаемаго вещественнымъ, или модуль сего выраженія если оно будетъ мнимое, не будетъ возрасташь до безконечности, между шѣмъ какъ n будетъ увеличивашься. И дѣйствительно, поелику количество $m(n-m) = \left(\frac{n}{2}\right)^2 - \left(\frac{n}{2} - m\right)^2$ возрасташь вмѣстѣ съ числомъ m , между предѣлами $m = 1, m = \frac{n}{2}$, и какъ посему

$1.(n-1) < 2.(n-2) < 3.(n-3) < \dots, 1.2.3\dots(n-1) > (n-1)^{\frac{n-1}{2}}$:
по утвердительно можно сказашь, что численная величина, или модуль выраженія (14), будетъ всегда меньше численной величины, или модуля произведения

$$(15) \quad \left(\frac{x-z}{\sqrt{n-1}}\right)^{n-1} F^{(n)}(z);$$

произведеніе же се обращишя въ нуль въ принятомъ предположеніи, именно для $n = \infty$.

Примѣры. Полагая пошепенно

$$F(x) = e^x, \quad F(x) = \sin x, \quad F(x) = \cos x,$$

найдемъ, для соотвѣствующихъ величинъ функции $F^{(n)}(\theta x)$, слѣдующія выраженія:

$$e^{\theta x}, \quad \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right), \quad \cos\left(\frac{n\pi}{2} + \theta x\right).$$

Такъ какъ сіи послѣднія количества осмашься конечными при всякой величинѣ для x , между шѣмъ какъ n увеличивашься

ся: по изъ сего заключаемъ, что теорема *Маклорена* можетъ быть всегда приложена къ прѣмъ вышеприведеннымъ функциямъ. Въ слѣдствіе сего будемъ имѣть, для какихъ ни естъ величинъ переменнѣй x , и для положительныхъ величинъ количества A ,

$$(16) \begin{cases} e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{и проч.} \dots \\ A^x = e^{x \ln(A)} = 1 + \frac{x \ln(A)}{1} + \frac{x^2 (\ln(A))^2}{1.2} + \frac{x^3 (\ln(A))^3}{1.2.3} + \text{и проч.} \dots \end{cases}$$

$$(17) \sin x = \sin(0) + \frac{x}{1} \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^2}{1.2} \sin\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3} \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \text{и проч.} \\ = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \text{и проч.}$$

$$(18) \cos x = \cos(0) + \frac{x}{1} \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \frac{x^2}{1.2} \cos\left(\frac{2\pi}{2}\right) + \frac{x^3}{1.2.3} \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + \text{и проч.} \\ = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \text{и проч.}$$

Когда функція $F^{(n)}(\theta x)$, для безконечныхъ величинъ количества n , обращается въ безконечность: по выраженіе (14) можетъ иногда приближаться къ предѣлу нуль. Сіе случится, напримѣръ для $F(x) = \ln(1+x)$, когда переменнѣй x припишутся величины меньшія единицы. Дѣйствительно, предполагая $z = \theta x$, $\theta < 1$, $x^2 < 1$, получимъ въ семь случаевъ,

$$(19) \frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3. \dots (n-1)} F^{(n)}(z) = \pm \frac{(x-z)^{n-1}}{(1+z)^n} = \frac{x^{n-1}}{1-\theta} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n;$$

но какъ дробь $\frac{1-\theta}{1+\theta x}$, очевидно будетъ меньше единицы, по ясно, что выраженіе (19) уничтожится, когда возьмемъ $n = \infty$. Слѣдственно, для всѣхъ величинъ переменнѣй x заключающихся между предѣлами -1 и $+1$, будемъ имѣть:

$$(20) \ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{и проч.} \dots$$

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ОСЬМОЙ.

Правила относяціяся къ сходящимся рядамъ. Приложение сихъ правилъ къ Маклореновой теоремѣ.

Займемся изысканіемъ условій при которыхъ какой ни-есть бесконечный рядъ будетъ сходящійся. Сіе изысканіе весьма важно, ибо когда желаемъ разложить какую-либо функцію въ бесконечный рядъ: по необходимо, чтобы сей рядъ былъ сходящійся, иначе оный не будетъ выражать величины данной функціи, по естъ, функція не будетъ равна своему разложенію. Такъ, на примѣръ, уравненія (6) и (7) будутъ имѣть мѣсто только въ такомъ случаѣ, когда ряды (2) и (3) будутъ сходящіеся.

Одинъ изъ простѣйшихъ рядовъ естъ геометрическая прогрессія

$$(1) \quad a, ax, ax^2, \text{ и проч. } \dots$$

которой общій членъ естъ ax^n . Сумма же n первыхъ членовъ сей прогрессіи, равна

$$a(1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1}) = a \frac{1-x^n}{1-x} = \frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}.$$

Ежели предположимъ, что численная величина x , или модуль сей величины когда она будетъ мнимая, меньше единицы: по оная сумма $\frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$, при возрастающихъ величинахъ n , будетъ приближаться къ предѣлу $\frac{a}{1-x}$, и въ семъ случаѣ рядъ (1) будетъ сходящійся. Если же численная величина x , или ея модуль когда она естъ мнимая, будетъ больше единицы:

по сумма $\frac{a}{1-x} - \frac{ax^n}{1-x}$, съ увеличеніемъ n , будетъ непрестанно увеличиваться, и превзойдетъ наконецъ всякую данную величину. Въ семъ послѣднемъ случаѣ, рядъ (1) будетъ непремѣнно расходящійся. Въ обоихъ случаяхъ, величина a можетъ быть вещественная, или мнимая.

Теперь разсмотримъ рядъ

$$(2) \quad u_0, u_1, u_2, u_3 \dots u_n, \text{ и проч. } \dots$$

соспавленный изъ какихъ ни-есть вещественныхъ, или мнимыхъ членовъ. Дабы судить, будетъ ли сей рядъ сходящійся, или расходящійся: по нѣтъ никакой надобности разсматривать первые его члены; можно начать съ слѣдующихъ:

$$(3) \quad u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \text{ и проч. } \dots$$

гдѣ m можетъ означать число, сколько великое, сколько пожелаемъ. Изобразимъ чрезъ ρ численную величину, или модуль общаго члена u_n ; очевидно что рядъ (3) будетъ сходящійся, или расходящійся, при тѣхъ же условіяхъ какъ и рядъ модулей

$$(4) \quad \rho_m, \rho_{m+1}, \rho_{m+2}, \text{ и проч. } \dots$$

На семъ основаніи, легко выведши двѣ слѣдующія теоремы:

1^я Теорема. *Изобразивъ чрезъ λ предѣлъ, или наибольшій изъ предѣловъ, къ которому, или къ которымъ стремится величина $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, между тѣмъ какъ n увеличивается: окажется, что строка (2) будетъ сходящаяся если $\lambda < 1$, а расходящаяся, когда $\lambda > 1$.*

Доказательство. Положимъ сперва $\lambda < 1$; количество $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, съ увеличеніемъ n , не можетъ непрестанно приближаться къ предѣлу λ , не сдѣлавшись меньше такого числа μ , которое удовлетворяетъ условію $\lambda < \mu < 1$. Слѣдовательно, можно всегда дать числу m такую большую величину, что положивъ

$n = m$, будемъ имѣть постоянно $(\rho_n)^{\frac{1}{n}} < \mu$, $\rho_n < \mu^n$. Очевидно, что тогда члены строки (4), будутъ менѣ соотвѣстствующимъ имъ членамъ слѣдующей геометрической прогрессии:

$$(5) \quad \mu^m, \mu^{m+1}, \mu^{m+2}, \text{ и проч. } \dots;$$

но какъ сія послѣдняя строка, по причинѣ $\mu < 1$, есть сходящаяся, то и рядъ (2) непременно долженъ быть также сходящимся.

Предположимъ теперь, что $\lambda > 1$, и возьмемъ число μ такое, чтобы $\lambda > \mu > 1$. Очевидно, что величина $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, съ непрестаннымъ увеличеніемъ количества n , не можетъ бесконечно приближаться къ λ , не превзойди наконецъ μ ; слѣдовательно, при весьма большой величинѣ n , необходимо будетъ $(\rho_n)^{\frac{1}{n}} > \mu$ или $\rho_n > \mu^n > 1$, и окажется, что рядъ (4) будетъ содержать бесконечное число членовъ превышающихъ единицу; сего достаточно для удостоверенія въ томъ, что ряды (2), (3) и (4) расходящіяся.

2^я Теорема. Если отношеніе $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$ приближается, съ непрестаннымъ увеличеніемъ n , къ постоянному предѣлу λ : то рядъ (2) будетъ сходящимся въ томъ случаѣ, когда $\lambda < 1$, а расходящимся, когда $\lambda > 1$.

Доказательство. Выберемъ по произволію число ε меньшее разности между 1 и λ . Очевидно, что можно взять такое число m , что положивъ n равнымъ m , или n болѣе m , соотвѣстствующая величина отношенія $\frac{\rho_{n+1}}{\rho_n}$, будетъ заключаться между предѣлами $\lambda - \varepsilon$, $\lambda + \varepsilon$. слѣдовательно величины членовъ строки (4) будутъ заключаться, между величинами соотвѣстствующимъ имъ членамъ двухъ слѣдующихъ геометрическихъ прогрессій:

$\rho^m, \rho^m(\lambda - \varepsilon), \rho^m(\lambda - \varepsilon)^2, \rho^m(\lambda - \varepsilon)^3,$ и проч....
 $\rho^m, \rho^m(\lambda + \varepsilon), \rho^m(\lambda + \varepsilon)^2, \rho^m(\lambda + \varepsilon)^3,$ и проч....

копорыя, при $\lambda < 1$, суть объ сходящіяся, а когда $\lambda > 1$, то онѣ будутъ объ расходящіяся. Слѣдовашельно, и проч....

Примѣсаніе. Легко доказать, что выраженія $\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}$ и $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, съ увеличеніемъ n , приближаются къ одному и тому же предѣлу, если сей предѣлъ есть опредѣленное количество. (Смотри *Analyse algébrique*, Гл. VI).

Приложивъ теоремы (1) и (2) къ *Маклоренову* ряду

$$(6) \quad F(0), \frac{x}{1} F'(0), \frac{x^2}{1.2} F''(0), \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0), \text{ и проч....}$$

получимъ слѣдующее предложеніе:

3-я Теорема. Означимъ трезъ ρ_n численную величину, или модуль производной функции $F^{(n)}(0)$, и трезъ λ предѣлъ къ которому непрестанно стрелится наибольшая изъ величинъ отношенія $\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}$, при непрестанномъ увеличеніи количества n ; рядъ (6) будетъ сходящійся, когда численная величина, или модуль количества x будетъ менѣ $\frac{1}{\lambda}$, а расходящійся, когда оная величина, или онъи модуль превзойдетъ $\frac{1}{\lambda}$. За число λ можно будетъ взять величину отношенія $\frac{\rho^{n+1}}{\rho^n}$, при $n = \infty$.

Примѣры. Полагая послѣдовашельно

$F(x) = e^x, F(x) = \sin x, F(x) = \cos x, F(x) = l(1+x), F(x) = (1+x)^\mu,$
 гдѣ μ есть количество постоянное, увидимъ что соотвѣш-
 ствующія величины дроби $\frac{1}{\lambda}$ будутъ,

$$\infty, \infty, \infty, 1, 1.$$

Слѣдовашельно, ряды представляемые уравненіями (16), (17), (18) (37^{го} урока) будутъ сходящіяся между предѣлами

$x = -\infty$, $x = +\infty$, то есть, для каких ни-есть величинъ переменнй x . Напрощивъ того, рядъ

$$(7) \quad 1, \frac{\mu}{1} x, \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2, \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^3, \dots \frac{\mu(\mu-1)\dots(\mu-n+1)}{1.2.3\dots n} x^n, \text{ и проч.}$$

и шопь, который предспавлень формулой (20) (37^{го} урока), будущъ сходящїеся при вещеспвенныхъ величинахъ x , шолько между предѣлами $x = -1$, $x = +1$.

Мы уже замѣнили, что когда x есть величина вещеспвенная, когда количество z заключаешя между предѣлами 0 и x , и когда функция $\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n)}(z)$ дѣлаешя равною нулю при n безконечномъ: то сумма ряда (6) равняешя $F(x)$. Изъ сказаннаго же нами въ семь урокъ слѣдуешя, что функция $\frac{(x-z)^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{(n)}(z)$ будешя равняшяся нулю, при $n = \infty$, когда, при n неопредѣленномъ, она будешя общимъ членомъ сходящагося ряда, то есть, когда, по 3^й теоремѣ, численная величина выраженїя

$$(8) \quad \frac{x-z}{n} \frac{F^{(n-1)}(z)}{F^{(n)}(z)}$$

съ увеличеніемъ n , будешя приближашяся къ предѣлу меньшему единицы.

Примѣрб. Пусть будешя $F(x) = (1+x)^\mu$, гдѣ μ есть постоянное количество. Подспавивъ въ выраженїе (8) θx вмѣсто z , получимъ выраженїе

$$x \frac{1-\theta}{1+\theta x} \frac{\mu-n}{n} = -x \frac{1-\theta}{1+\theta x} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right),$$

которое, для возрастающихъ величинъ количества n , будешя приближашяся къ предѣлу имѣющему видъ $-x \times \frac{1-\theta}{1+\theta x}$; численная величина онаго предѣла будешя меньше единицы, предполагая $x^2 < 1$. Слѣдовательно, при семь условїи, имѣемъ

$$(9) \quad (1+x)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} x + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} x^3 + \text{ и проч. } \dots$$

Равнымъ образомъ докажешя, что уравненїе

$$(10) (1+ax)^\mu = 1 + \frac{\mu}{1} ax + \frac{\mu(\mu-1)}{1.2} a^2 x^2 + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{1.2.3} a^3 x^3 + \text{и проч...}$$

имѣешь мѣсто, для вещественныхъ, или мнимыхъ величинъ постояннаго количества a , когда численная величина переменъной x , будетъ меньше численной величины, или модуля дроби $\frac{1}{a}$.

Не должно заключать что рядъ (6), предполагаемый сходящимся, имѣешь всегда суммою $F(x)$, и что $F(x)$ равна нулю, когда всѣ члены сего ряда уничтожаются (*). Въ противномъ можно удостовериться разсмапривая функціи $F(x) =$

$e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$ и $F(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$; первая не будетъ пожешвенно равна нулю, не смотря на то, что каждый членъ ея разложенія

уничтожается отдѣльно; впрочемъ же, именно $F(x) = e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$, даетъ по разложеніи рядъ, имѣющій суммою e^{-x^2} , а не настоящую $e^{-x^2} + e^{-\left(\frac{1}{x}\right)^2}$.

(*) Переводя сіе сочиненіе, я долгомъ поставилъ себѣ ни въ какомъ случаѣ не опустить отъ подлинника; по сему сохранено здѣсь сіе замѣчаніе, хотя въ справедливости онаго Математики и не соглашаются съ г. Коши. Возраженія, сдѣланныя по сему предмету Г. Поассонъ, можно видѣть въ *Bulletin de la Société Philomatique de Paris*, 1822 г. на стран. 84 — 85.

УРОКЪ ТРИДЦАТЬ ДЕВЯТЫЙ.

*О неопредѣленно-степенныхъ и Логарифмическихъ мнимыхъ
выраженіяхъ. Употребленіе сихъ выраженій при разысканіи
величинъ опредѣленныхъ и неопредѣленныхъ Интеграловъ.*

Въ 37^{мъ} урокъ уже доказано, что неопредѣленно-степенное выраженіе A^x (въ копоромъ A изображаетъ постоянное, положительное количество, а x переменную вещественную), имѣетъ суммою рядъ состоящій изъ членовъ

$$(1) \quad 1, \frac{x1A}{1}, \frac{x^2(1A)^2}{1.2}, \frac{x^3(1A)^3}{1.2.3}, \text{ и проч. } \dots,$$

слѣдовательно, для какихъ ни-есть вещественныхъ величинъ x , имѣемъ формулу,

$$(2) \quad A^x = 1 + \frac{x1A}{1} + \frac{x^2(1A)^2}{1.2} + \frac{x^3(1A)^3}{1.2.3} + \text{ и проч. } \dots$$

Въ силу же 5^й. теоремы 38^{го} урока, рядъ (1) будетъ сходящійся для какихъ ни-есть мнимыхъ величинъ переменной x : по сему условились распространить формулу (2) на всѣ возможные случаи, и употребить оную даже при мнимыхъ величинахъ изменяемой x , дабы составивъ себѣ ясное понятіе о функціи A^x . На семъ основаніи, легко будетъ вывести, изъ уравненія (2), различныя замѣчательныя формулы, копорыя теперь приведемъ.

Полагая въ уравненіи (2) $A = e$; получимъ

$$(3) \quad e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \text{ и проч. } \dots$$

Изобразивъ чрезъ z переменную вещественную, и взявъ $x = z \sqrt{-1}$, уравненіе (3) обратится въ слѣдующее:

$$e^{z\sqrt{-1}} = 1 + \frac{z\sqrt{-1}}{1} - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3\sqrt{-1}}{1.2.3} + \text{и проч.} \dots$$

$$= 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \text{и проч.} \dots + \left(\frac{z}{1} - \frac{z^3}{1.2.3} + \text{и проч.} \dots \right) \sqrt{-1},$$

которое даешь

$$(4) \quad e^{z\sqrt{-1}} = \cos z + \sqrt{-1} \cdot \sin z.$$

Такимъ же точно образомъ найдется:

$$(5) \quad e^{-z\sqrt{-1}} = \cos z - \sqrt{-1} \cdot \sin z;$$

соединяя между собой уравненія (4) и (5), получимъ:

$$(6) \quad \cos z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Также, означимъ чрезъ a и b двѣ вещественныя постоянныя величины, и возьмемъ $x = (a + b\sqrt{-1})z$. Въ такомъ предположеніи, вторая часть формулы (3) будетъ изображать не иное что какъ разложеніе мнимой функции $e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \cdot \sin bz)$, получаемое посредствомъ *Маклореновой* теоремы. Посему

$$(7) \quad e^{(a+b\sqrt{-1})z} = e^{az}(\cos bz + \sqrt{-1} \cdot \sin bz) = e^{az} \cdot e^{bx\sqrt{-1}}.$$

Сія послѣдняя формула подобна вещественному уравненію $e^{(a+b)z} = e^{az} \cdot e^{bz}$; изъ сего послѣдняго можно вывести, по ана-

логіи, уравненіе $e^{(a+b\sqrt{-1})z} = e^{az} \cdot e^{bx\sqrt{-1}}$, замѣняя вещественную постоянную величину b , мнимую $b\sqrt{-1}$. Легко усмотрѣшь, основываясь на формуль (7), что уравненіе

$$(8) \quad e^{x+y} = e^x \cdot e^y$$

имѣетъ мѣсто для какихъ ни-есть мнимыхъ величинъ переменныхъ x и y . Также, сличеніе формулы (2) съ (3), приведетъ насъ къ заключенію, что при всякой величинѣ x , имѣемъ

$$(9) \quad A^x = e^{x \cdot A}.$$

Изобразимъ теперь чрезъ u и v два количества вещественныя, и будемъ искашь различныя величины x , удовлетворяющія двумъ уравненіямъ:

$$(10) \quad A^x = u + v \sqrt{-1}, \quad (11) \quad e^x = u + v \sqrt{-1}.$$

Сии величины x будутъ изображать различныя *логариѳмы* количества $u + v \sqrt{-1}$, при основаніи A въ формулѣ (10), и при основаніи e въ формулѣ (11), слѣдовательно Неперовы логариѳмы въ послѣднемъ случаѣ. Но какъ въ слѣдствіе уравненія (9), логариѳмъ выраженія $u + v \sqrt{-1}$ для системы коей основаніе есть A , равенъ Неперову логариѳму того же самаго выраженія раздѣленному на $l(A)$, по очевидно, что достаточнo будетъ опредѣлить x изъ уравненія (11). И такъ, означивъ чрезъ α и β двѣ величины вещественныя, и положивъ $x = \alpha + \beta \sqrt{-1}$ въ формулѣ (11), получимъ:

$$e^{\alpha + \beta \sqrt{-1}} = u + v \sqrt{-1};$$

откуда (въ силу формулы (7)), $e^\alpha \cos \beta = u$, $e^\alpha \sin \beta = v$, слѣдовательно

$$(12) \quad e^\alpha = (u^2 + v^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(13) \quad \cos \beta = \frac{u}{\sqrt{u^2 + v^2}}, \quad \sin \beta = \frac{v}{\sqrt{u^2 + v^2}}.$$

Уравненію (12) удовлетворяемъ одною только вещественною величиною количества α , именно, полагая $\alpha = \frac{1}{2} l(u^2 + v^2)$. Уравненіямъ же (13), удовлетворимъ, когда u положительное, всѣми величинами заключающимися въ формулѣ

$$(14) \quad \beta = 2n\pi + \arctan \frac{v}{u},$$

разумѣя подъ n произвольное цѣлое число; когда же u отрицательное, тогда величины β опредѣлятся формулой

$$(15) \quad \beta = (2n + 1)\pi + \arctan \frac{v}{u}.$$

Слѣдовательно, выраженіе $u + v\sqrt{-1}$ имѣетъ безконечное множество мнимыхъ логарифмовъ. Простѣйшій изъ сихъ логарифмовъ, полагая u положительнымъ, соотвѣтствуетъ предположенію $v=0$, и равняется величинѣ $\frac{1}{2}l(u^2+v^2) + \sqrt{-1} \cdot \text{arctang}\left(\frac{v}{u}\right)$.

Сію-то величину мы будемъ изображать чрезъ $l(u + v\sqrt{-1})$ (смотри *Analyse algébrique*, Гл. IX); поему, для положительныхъ величинъ количества u , будемъ имѣть

$$(16) \quad l(u + v\sqrt{-1}) = \frac{1}{2}l(u^2 + v^2) + \sqrt{-1} \cdot \text{arctang}\frac{v}{u};$$

сей самый логарифмъ, для $v=0$, имѣетъ вещественную величину равную $l(u)$.

Изобразимъ теперь чрезъ r величину положительную, и чрезъ t вещественную дугу, заключающуюся между предѣлами $-\frac{\pi}{2}$ и $+\frac{\pi}{2}$; уравненіе

$$(17) \quad x = r(\cos t + \sqrt{-1} \cdot \sin t) = r e^{t\sqrt{-1}},$$

доставитъ слѣдующее:

$$(18) \quad l(x) = l(r) + t\sqrt{-1}.$$

Формулы, употребляемыя при дифференцированіи вещественныхъ неопредѣленно-степенныхъ и логарифмическихъ выраженій, справедливы и въ томъ случаѣ, когда сіи выраженія будутъ мнимыя. И пакъ, легко видѣшь, что имѣемъ во $1^{\text{хх}}$. для мнимыхъ величинъ переменѣной x ,

$$(19) \quad d e^x = e^x dx, \quad (20) \quad dl(\pm x) = \frac{dx}{x};$$

во $2^{\text{хх}}$. для вещественныхъ величинъ переменныхъ x, y, z , и постоянныхъ количествъ α, β, a, b , пакже вещественныхъ,

$$(21) \quad d e^{x+y\sqrt{-1}} = e^{x+y\sqrt{-1}} (dx + dy\sqrt{-1}),$$

$$(22) \quad dl[\pm(x + y\sqrt{-1})] = \frac{dx + dy\sqrt{-1}}{x + y\sqrt{-1}},$$

$$(23) \quad dl[\pm(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})] = \frac{dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}}, \quad dl[\pm(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})] = \frac{dx}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}},$$

$$(24) \quad d e^{(a+b\sqrt{-1})z} = e^{(a+b\sqrt{-1})z} (a + b\sqrt{-1}) dz.$$

Въ сихъ формулахъ, должно принимашь выраженіе, котораго берешся Неперовъ логариѣмъ, или съ +, или съ —, смотря по тому, будешь ли вещественная часть сего выраженія положительная, или отрицательная. Изъ сихъ самыхъ формулъ, непосредственно выводимъ и слѣдующія:

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \int \frac{(A-B\sqrt{-1})dx}{x-\alpha-\beta\sqrt{-1}} &= (A-B\sqrt{-1})l[\pm(x-\alpha-\beta\sqrt{-1})] + C, \\ \int \frac{(A+B\sqrt{-1})dx}{x-\alpha+\beta\sqrt{-1}} &= (A+B\sqrt{-1})l[\pm(x-\alpha+\beta\sqrt{-1})] + C, \end{aligned} \right.$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{aligned} \int e^{(a+b\sqrt{-1})z} dz &= \frac{e^{(a+b\sqrt{-1})z}}{a+b\sqrt{-1}} + C, \\ \int z^n e^{(a+b\sqrt{-1})z} dz &= \frac{z^n e^{(a+b\sqrt{-1})z}}{a+b\sqrt{-1}} \left\{ 1 - \frac{n}{(a+b\sqrt{-1})z} + \frac{n(n-1)}{(a+b\sqrt{-1})^2 z^2} - \dots \right\} + C, \end{aligned} \right.$$

которыя согласуются съ формулами выведенными въ 28^{мъ} и 30^{мъ} урокахъ.

Неопредѣленно-степенныя и логариѣмическія мнимыя выраженія, могутъ быть съ выгодою употребляемы при разысканіи нѣкоторыхъ опредѣленныхъ интеграловъ. Напримѣръ, по второй изъ формулъ (26) видимъ, что можно замѣнить вещественное постоянное количество a , мнимою величиною $a + b\sqrt{-1}$ въ интегралъ

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-az} dz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{a^{n+1}},$$

найденномъ въ 32^{мъ} урокъ. Въ слѣдствіе сего получимъ формулу

$$(27) \quad \int_0^{\infty} z^n e^{-(a+b\sqrt{-1})z} dz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(a+b\sqrt{-1})^{n+1}},$$

которая равнозначуща съ одною изъ сихъ, кои выведены были въ 32^{мъ} же урокъ, именно съ слѣдующею:

$$\int_0^{\infty} z^n e^{-az} (\cos bz + \sqrt{-1} \cdot \sin bz) dz = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(a + b\sqrt{-1})^{n+1}}.$$

Равнымъ образомъ очевидно, что формула (18) 34^{го} урока, имѣеть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда предположимъ, что функция $f(x)$ не алгебраическая, а опредѣляется послѣдователь-но уравненіями

$$f(x) = e^{ax\sqrt{-1}}, \quad f(x) = (-x\sqrt{-1})^{\mu-1} e^{ax\sqrt{-1}}, \quad f(x) = \frac{(-x\sqrt{-1})e^{ax\sqrt{-1}}}{l(1-rx\sqrt{-1})},$$

гдѣ μ , a , r изображаютъ при постоянныя положительныя количества, изъ коихъ первое, заключается между предѣлами 0 и 2. Въ семъ предположеніи, найдемся:

$$(28) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ax\sqrt{-1}}}{1+x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos ax dx}{1+x^2} = \pi e^{-a},$$

$$(29) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})^{\mu-1}}{1+x^2} e^{ax\sqrt{-1}} dx = 2 \int_0^{\infty} x^{\mu-1} \sin\left(\frac{\mu\pi}{2} - ax\right) \frac{dx}{1+x^2} = \pi e^{-a},$$

$$(30) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(-x\sqrt{-1})e^{ax\sqrt{-1}}}{l(1-rx\sqrt{-1})} \cdot \frac{dx}{1+x^2} =$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cdot l(1+r^2x^2) + 2\cos ax \cdot \text{arc tang } rx}{[\frac{1}{2}l(1+r^2x^2)]^2 + [\text{arc tang } rx]^2} \cdot \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-a}}{l(1+r)}.$$

УРОКЪ СОРОКОВОЙ.

Интегрирование посредствомъ рядовъ.

Разсмотримъ рядъ

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, u_3, \dots u_n, \text{ и проч.} \dots$$

каго различные члены изображаютъ функции переменн \acute{o} й x , непрерывныя между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$. Помноживъ на dx каждый изъ сихъ членовъ, и интегрируя пошомъ между сими самыми предѣлами, получимъ другой рядъ, составленный изъ опредѣленныхъ интеграловъ

$$(2) \quad \int_{x_0}^X u_0 dx, \int_{x_0}^X u_1 dx, \int_{x_0}^X u_2 dx, \int_{x_0}^X u_3 dx, \dots \int_{x_0}^X u_n dx, \text{ и проч.} \dots$$

Сравнивая сей послѣдн \acute{i} й рядъ съ рядомъ (1), легко будетъ доказать слѣдующую теорему.

1-я Теорема. Положимъ что предѣлы x_0 и X оба конечныя количества, и что рядъ (1) есть сходящ \acute{i} йся, не только для частныхъ значен \acute{i} й $x = x_0$ и $x = X$, но и для всѣхъ величинъ переменн \acute{o} й x , заключающихся между предѣлами x_0 и X . Въ семъ предположен \acute{i} и, рядъ (2) будетъ также сходящ \acute{i} йся; и если изобразимъ грѣзъ s сумму ряда (1): то рядъ (2) будетъ имѣть суммою интегралъ $\int_{x_0}^X s dx$. Или, что все равно, уравнен \acute{i} е

$$(3) \quad s = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \text{ и проч.} \dots$$

необходимо доставляетъ и слѣдующее:

$$(4) \int_{x_0}^X s dx = \int_{x_0}^X u_0 dx + \int_{x_0}^X u_1 dx + \int_{x_0}^X u_2 dx + \int_{x_0}^X u_3 dx + \text{и проч.} \dots$$

Доказательство. Означимъ чрезъ

$$(5) \quad s_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$$

сумму n первыхъ членовъ ряда (1), и чрезъ r_n оспашожь она-го, начиная опшь $n^{\text{го}}$ члена. Получимъ

$$(6) \quad s = s_n + r_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + r_n$$

и слѣдовашельно

$$(7) \int_{x_0}^X s dx = \int_{x_0}^X u_0 dx + \int_{x_0}^X u_1 dx + \int_{x_0}^X u_2 dx + \dots + \int_{x_0}^X u_{n-1} dx + \int_{x_0}^X r_n dx.$$

Но поелику въ слѣдствіе формулы (14), 23^{го} урока, интеграль $\int_{x_0}^X r_n dx$ будешъ равенъ произведенію $r_n(X - x_0)$, соопвѣпшпвую-щему нѣкошорой величинѣ x , заключающейся между предѣла-ми x_0 и X , и какъ сверхъ того, сіе произведение, для беско-нечныхъ величинъ n обращается въ нуль въ насшоящемъ пред-положеніи: шо и очевидно, что полагая въ формуль (7) $n = \infty$, получнтся уравненіе (4).

Слѣдствіе 1^е. Поставляя въ формулу (4) x вмѣсто X , получимъ слѣдуюшую :

$$(8) \int_{x_0}^X s dx = \int_{x_0}^X u_0 dx + \int_{x_0}^X u_1 dx + \int_{x_0}^X u_2 dx + \text{и проч.} \dots,$$

которая справедлива, подобно формуль (3), между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$.

Слѣдствіе 2^е. Положимъ что рядъ (1) ешь сходящійся для $x = x_0$, и для всѣхъ величинъ перемѣнной x , заключающихся между предѣлами x_0 и X ; но дѣлаешся расходящимся для вшораго предѣла, шо ешь для $x = X$. И въ сешь предположеніи, уравненія (3) и (8) будупъ имѣшь мѣсто между предѣлами x_0 и X . Уравненіе (4) будешъ шакже имѣшь мѣсто, если шоль-

ко интегралы, входящие во вторую его часть, будут сами составлять ряд сходящийся. Действительно, легко видеть, что при сем условии, обе части уравнения (8) будут изображать функции переменной x , непрерывныя в сопредельности частнаго значения $x = X$ (смотри *Analyse algébrique*, на стран. 131); предполагая же что x приближается къ сему предѣлу X , и наконецъ дѣлается оному равнымъ, получимъ уравненіе (4). Напрощивъ того, уравненіе (4) не будетъ имѣть мѣста, если интегралы, входящие во вторую часть оного, будутъ составлять расходящийся рядъ.

Слѣдствіе 3°. Положимъ что рядъ (1) есть сходящийся между предѣлами $x = x_0$ и $x = X$, но дѣлается расходящимся для одного изъ двухъ предѣловъ, или для обоихъ. Означивъ, въ семъ предположеніи, чрезъ ξ_0 и ξ два количествъ, содержащихся между величинами x_0 и X , получимъ уравненіе

$$(9) \int_{\xi_0}^{\xi} s dx = \int_{\xi_0}^{\xi} u_0 dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_1 dx + \int_{\xi_0}^{\xi} u_2 dx + \text{и проч. . . ,}$$

помощью, предположивъ что ξ_0 спремится къ предѣлу x_0 , а ξ къ X , получимъ опять формулу (4), лишь бы только интегралы входящие во вторую часть оной, сами составляли рядъ сходящийся.

Сие замѣчаніе справедливо даже и въ томъ случаѣ, когда одинъ изъ предѣловъ x_0 , или X , или даже оба въ одно время обращаются въ безконечность. Такъ, напримѣръ, можно взять $x_0 = -\infty$, $X = \infty$.

Слѣдствіе 4°. Пустьъ будетъ $u_n = a_n x^n$, гдѣ a_n изображаетъ коэффициентъ вещественный, или мнимый. Означимъ чрезъ ρ_n численную величину, или модуль количествъ a_n , и чрезъ λ наибольшую величину выраженія $(\rho_n)^{\frac{1}{n}}$, при $n = \infty$. Рядъ (1)

будешь сходящийся между предѣлами $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$ (смотри 3-ю теор. 38го урока). Следовательно, положивъ что x заключается между сими предѣлами, и взявъ

$$(10) \quad s = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \text{и проч. . . . ,}$$

получимъ

$$(11) \quad \int_0^x s dx = a_0 x + a_1 \frac{x^2}{2} + a_2 \frac{x^3}{3} + \text{и проч. . . .}$$

Сие послѣднее уравненіе будешь имѣшь мѣсто (смотри 2-ю слѣдствіе) даже для частныхъ значеній $x = -\frac{1}{\lambda}$, $x = +\frac{1}{\lambda}$, если только сіи частныя величины не обращашь рядъ $a_0 x$, $\frac{1}{2} a_1 x^2$, $\frac{1}{3} a_2 x^3$, и проч. въ расходящийся.

Посредствомъ изложенныхъ въ семь урокъ правилъ, можно будешь разложить многіе интегралы въ сходящіеся ряды, копорые доставяшъ величины для сихъ интеграловъ до какой степени точности, какой пожелаемъ. Въ этомъ и состоишъ способъ *Интегрированія посредствомъ рядовъ*. Сей способъ съ удобностію можетъ бытъ приложенъ къ разложенію въ ряды различныхъ функцій. Для сего, чаще всего, функцію выражающъ посредствомъ опредѣленнаго интеграла, копорый уже потомъ, разлагается въ рядъ по изъясненнымъ правиламъ.

Примѣры. Для разложенія въ ряды функцій $l(1+x)$, $\text{arc tang } x$, $\text{arc sin } x$, употребимъ слѣдующія формулы:

$$l(1+x) = \int_0^x \frac{dx}{1+x}, \quad \text{arc tang } x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2},$$

$$\text{arc sin } x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int_0^x (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx;$$

послику же, между предѣлами $x = -1$, $x = +1$, имѣемъ:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \text{и проч. . . .}$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - \text{и проч. . . .}$$

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \text{и проч. . . . ,}$$

но и найдемъ, между сими самыми предѣлами, посредствомъ интегрированія по рядамъ,

$$(12) \left\{ \begin{array}{l} l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \text{и проч.} \dots \\ \text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \text{и проч.} \dots \\ \text{arc sin } x = x + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \text{и проч.} \end{array} \right.$$

Полагая въ уравненіяхъ (12) $x=1$, получаемъ ряды сходящіеся; слѣдовательно имѣемъ (слѣдствіе 2^е),

$$(13) \left\{ \begin{array}{l} l(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \text{и проч.} \dots \\ \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \text{и проч.} \dots \\ \frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \text{и проч.} \dots \end{array} \right.$$

Легко доказать (*смотри Analyse algébrique*, на стран. 163), что два сходящіеся ряда, проспирающіеся по возрастающимъ и цѣлымъ степенямъ переменнѣй x , не могутъ имѣть суммъ равныхъ для весьма малыхъ величинъ сей переменнѣй, если коэффициенты при одинакихъ степеняхъ x не равны между собою въ обоихъ рядахъ. Изъ сего замѣчанія, совокупно съ 5^{-ю} теоремою (38^{го} урока), слѣдуетъ, что если два ряда будутъ сходящіеся, и будутъ имѣть одинакія суммы для величинъ x , заключающихся между предѣлами $-r$, $+r$ [полагая что r означаетъ величину положительную]: то они удовлетворяютъ сему же самому условію при ихъ мнимыхъ величинахъ x , для коихъ модуль будетъ меньше r . Основываясь на сихъ замѣчаніяхъ, легко вывести слѣдующую теорему.

2^{-я} Теорема. Положимъ то функціи $f(x, z)$ и

$$(14) \quad F(x) = \int_{z_0}^Z f(x, z) dz$$

могутъ быть разложены посредствомъ Маклореновой теоремы въ ряды сходящіеся, простирающіеся по возрастающимъ и убывающимъ степенямъ переменной x : для вещественныхъ величинъ z , содержащихся между предѣлами z_0 и Z , и для величинъ x , заключающихся между предѣлами $-r$, $+r$; если для мнимыхъ величинъ x , суммы сихъ рядовъ будутъ, какъ и прежде, равняться функциямъ $f(x, z)$, $F(x)$: то уравненіе (14) будетъ имѣть мѣсто при всякой мнимой величинѣ x , коей модуль будетъ менѣе r .

Примѣръ. Такъ какъ, при какой ни-есть величинѣ x , имѣемъ

$$\pi^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(z+x)^2} dz = e^{-x^2} \int_0^{\infty} e^{-z^2} (e^{-2zx} + e^{2zx}) dz,$$

и слѣдовательно

$$(15) \quad \int_0^{\infty} e^{-z^2} \left(\frac{e^{2zx} + e^{-2zx}}{2} \right) dz = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-x^2},$$

по поемому, замѣняя величину x количествомъ $x \sqrt{-1}$, получимъ:

$$(16) \quad \int_0^{\infty} e^{-z^2} \cos 2zx \cdot dz = \frac{1}{2} \pi^{\frac{1}{2}} e^{-x^2}.$$

Сія послѣдняя формула, найденная Г. Лапласомъ, весьма полезна при рѣшеніи многихъ задачъ.

ПРИБАВЛЕНІЕ СОЧИНТЕЛЯ.

По напечатаніи сего сочиненія, я усмотрѣлъ, что помощію весьма простой формулы, можно привести къ дифференціальному изчисленію рѣшеніе многихъ задачъ, копорыя были описаны къ интегральному. Сперва я приведу сію формулу; потомъ покажу главныя приложенія оной.

Въ урокъ 7^{мъ} было доказано, что ежели функціи $f(x)$ и $f'(x)$ будутъ непрерывныя между двумя предѣлами $x = x_0$ и $x = X$: то изобразивъ чрезъ θ число меньшее единицы, будемъ имѣть формулу

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0} = f'[x_0 + \theta(X - x_0)].$$

Совершенно подобнымъ образомъ, можно будетъ доказать и слѣдующую:

$$(1) \quad \frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)} = \frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]}$$

гдѣ θ означаетъ, какъ и выше, число меньшее единицы, а $F(x)$ такую функцію переменнѣй x , копорая, или постоянно увеличивается, или постоянно уменьшается отъ предѣла $x = x_0$, до предѣла $x = X$, и остается непрерывною, вмѣстѣ съ ея производною $F'(x)$, между сими самими предѣлами.

Можно также прямо доказать формулу (1), основываясь на правилахъ изложенныхъ въ 6^{мъ} урокъ (стр. 28). Дѣйствительно, изъ сихъ правилъ слѣдуетъ, что въ наспоющемъ предположеніи, функція $F(x)$ будетъ постоянно удерживать одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ величинъ x , отъ $x = x_0$ до $x = X$.

Слѣдовательно, если изобразимъ чрезъ A и B наибольшую и наименьшую изъ величинъ, которыя опношение $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ способно принять между сими предѣлами: шо оба произведенія $F'(x) \times \left[\frac{f'(x)}{F'(x)} - A \right] = f'(x) - AF'(x)$, $F'(x) \times \left[B - \frac{f'(x)}{F'(x)} \right] = BF'(x) - f'(x)$ останутся поспоянно положительными, или поспоянно отрицательными, между шими же предѣлами $x = x_0$ и $x = X$. Слѣдовательно, объ функціи

$$f(x) - AF(x), \quad BF(x) - f(x),$$

коихъ производныя равны двумъ вышеприведеннымъ произведеніямъ, будущъ въ одно время, или возрасташъ, или уменьшашъ, опъ перваго предѣла до втораго. И шакъ, разность между крайними величинами первой функціи, именно,

$$f(X) - f(x_0) - A[F(X) - F(x_0)],$$

и разность между крайними величинами другой, именно,

$$B[F(X) - F(x_0)] - [f(X) - f(x_0)],$$

будущъ два количесва съ одинаковыми знаками; опсюда заключаемъ, что величина разности

$$f(X) - f(x_0)$$

будеть заключающъ между величинами двухъ произведеній

$$A[F(X) - F(x_0)], \quad B[F(X) - F(x_0)],$$

а дробь

$$\frac{f(X) - f(x_0)}{F(X) - F(x_0)},$$

между предѣлами A и B . Поелику же предполагается, что объ функціи $f'(x)$ и $F'(x)$ суть непрерывныя между предѣлами $x = x_0$, $x = X$: шо посему, всякое количество, заключающееся между величинами A и B , будетъ равно выраженію вида

$$\frac{f'[x_0 + \theta(X - x_0)]}{F'[x_0 + \theta(X - x_0)]},$$

гдѣ θ означаешь число меньшее единицы. И шакъ, необходимо будешь существовать такое число θ , которое, будучи меньше единицы, удовлетворитъ уравненію (1), что и следовало доказать.

Полагая $X = x_0 + h$, уравненіе (1) приметъ видъ:

$$(2) \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{F(x_0 + h) - F(x_0)} = \frac{f'(x_0 + \theta h)}{F'(x_0 + \theta h)}$$

Сие послѣднее уравненіе, заключающее въ себѣ, какъ частный случай, уравненіе (6) 7^{го} урока, можетъ быть приложено къ рѣшенію многихъ замѣчательныхъ вопросовъ, что мы теперь вкратчѣ покажемъ.

Положимъ сперва, что объ функціи $f(x)$ и $F(x)$ уничтожаются при $x = x_0$; возьмемъ для краткости $\theta h = h_1$. Въ семъ предположеніи, формула (2) даетъ

$$(3) \quad \frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)}$$

гдѣ h_1 есть количество имѣющее одинакій знакъ съ h , но численную величину меньшую численной величины сего самаго количества h . Еслибъ всѣ функціи

$$\begin{aligned} f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n-1)}(x), \\ F(x), F'(x), F''(x), \dots, F^{(n-1)}(x), \end{aligned}$$

уничтожались при $x = x_0$ и оставались непрерывными, равно какъ и функціи $f^{(n)}(x)$ и $F^{(n)}(x)$, между предѣлами $x = x_0$, $x = x_0 + h$: то, предполагая что каждая изъ функцій

$$F(x), F'(x), F''(x) \dots F^{(n-1)}(x)$$

увеличивается, или уменьшается отъ перваго предѣла до втораго, и означивъ чрезъ h_1, h_2, \dots, h_n количества съ одинаковыми знаками, удовлетворяющія условіямъ $h_1 > h_2 > \dots > h_n$, получимъ сверхъ уравненія (3), рядъ подобныхъ уравненій, именно:

$$(4) \quad \frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f'(x_0 + h_1)}{F'(x_0 + h_1)} = \frac{f''(x_0 + h_2)}{F''(x_0 + h_2)} = \dots = \frac{f^{(n)}(x_0 + h_n)}{F^{(n)}(x_0 + h_n)}$$

Сравнивъ въ формулѣ (4) только двѣ крайнія дроби, и замѣнивъ величину h_n произведеніемъ θh , получимъ:

$$(5) \quad \frac{f(x_0 + h)}{F(x_0 + h)} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{F^{(n)}(x_0 + \theta h)},$$

гдѣ θ означаетъ, какъ и выше, число меньшее единицы. Наконецъ, подставимъ въ уравненіе (5), вмѣсто конечнаго количества h , другое бесконечно-малое i ; будемъ имѣть

$$(6) \quad \frac{f(x_0 + i)}{F(x_0 + i)} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta i)}{F^{(n)}(x_0 + \theta i)}.$$

Полагая въ формулахъ (5) и (6), $F(x) = (x - x_0)^n$, найдемъ $F^{(n)}(x) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$, и слѣдовательно

$$(7) \quad \frac{f(x_0 + h)}{h^n} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta h)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}, \quad (8) \quad \frac{f(x_0 + i)}{i^n} = \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta i)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}.$$

Сія послѣднія уравненія равнозначущи съ формулами (4) и (5) (15^{го} урока), и совершенно подобны формуламъ (17) и (18) (36^{го} урока). Оныя съ удобностію могутъ быть приложены къ разысканію *наибольшихъ* и *наименьшихъ величинъ*, а также и къ опредѣленію истинныхъ значеній дробей представляющихся въ видѣ $\frac{0}{0}$. Впрочемъ, для рѣшенія сей послѣдней задачи, по большой части, достаточно будетъ формулы (6). Дѣйствительно, положимъ, что оба члена дроби

$$\frac{f(x)}{F(x)}$$

и ихъ послѣдовательныя производныя, до производной $n - 1$ порядка, уничтожаются для $x = x_0$. Формула (6) вообще будетъ имѣть мѣсто для весьма малыхъ численныхъ величинъ количества i , ибо, чаще всего, каждая изъ функций

$$F(x), F'(x), F''(x), \dots, F^{(n-1)}(x)$$

будетъ непрестанно возрастать, или уменьшаться, начиная отъ часной величины $x = x_0$, до другой величины, весьма мало различающейся отъ x_0 ; посему, полагая въ формулѣ (6) i бесконечно-малымъ, получимъ

$$(9) \quad \text{пр. } \frac{f(x_0 + i)}{F(x_0 + i)} = \text{пр. } \frac{f^{(n)}(x_0 + \theta i)}{F^{(n)}(x_0 + \theta i)} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{F^{(n)}(x_0)}.$$

Поставляя въ формулу (7) нуль вмѣсто x_0 , также букву φ вмѣсто f , будемъ имѣть

$$(10) \quad \varphi(h) = \frac{h^n}{1.2.3\dots n} \varphi^{(n)}(\theta h).$$

Замѣтимъ, что сія послѣдняя формула имѣетъ мѣсто въ томъ предположеніи, что функціи

$$\varphi(h), \varphi'(h), \varphi''(h), \dots, \varphi^{(n)}(h),$$

всѣ непрерывныя, начиная отъ предѣла $h = 0$, и всѣ уничтожаются, за исключеніемъ функціи $\varphi^{(n)}(h)$, для $h = 0$.

Изобразимъ теперь чрезъ $f(x)$ произвольную функцію перемѣнной x , но такую, что функціи

$$f(x+h), f'(x+h), f''(x+h), \dots, f^{(n)}(x+h),$$

всѣ остающіяся непрерывными относительно къ h , начиная отъ $h = 0$. Помощію формулы (10), легко будетъ изъ $f(x+h)$, или, что все равно, изъ разности $f(x+h) - f(x)$, извлечь рядъ членовъ, пропорціональныхъ цѣлымъ положительнымъ степенямъ количества h ; дѣйствительно, поелику разность $f(x+h) - f(x)$, принимаемая за функцію количества h , уничтожается при $h = 0$, и какъ производная перваго порядка сей разности относительно къ h равняется $f'(x+h)$: по очевидно что формула (10) обратится въ слѣдующую:

$$(11) \quad f(x+h) - f(x) = \frac{h}{1} f'(x + \theta h),$$

когда въ оной вмѣсто $\varphi(h)$, поставимъ $f(x+h) - f(x)$, и положимъ сверхъ того $n = 1$.

Ежели во второй части послѣдняго уравненія, положимъ $\theta = 0$; то получимъ членъ $\frac{h}{1} f'(x)$, и вычтя оный изъ первой части, останется будетъ новая функція количества h , именно:

$$f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x).$$

Поелику сія новая функція количества h , уничтожается при $h = 0$, равно какъ и ея производная первого порядка, и какъ сверхъ того, ея производная второго порядка есть функція $f''(x+h)$: по взявъ $\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x)$, и положивъ $n = 2$, получимъ, въ слѣдствіе формулы (10),

$$(12) \quad f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) = \frac{h^2}{1.2} f''(x + \theta h).$$

Ежели во второй части уравненія (12), положимъ, какъ выше, $\theta = 0$, то получимъ членъ $\frac{h^2}{1.2} f''(x)$, и вычтя оный изъ первой части, остатокъ будетъ третья функція количества h , именно:

$$f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{1.2} f''(x).$$

Поелику же сія третья функція количества h уничтожается при $h = 0$, равно какъ и ея производныя первого и второго порядковъ, и какъ сверхъ того ея производная третьего порядка есть функція $f'''(x+h)$: по взявъ $\varphi(h) = f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{1.2} f''(x)$, и положивъ $n = 3$, получимъ, въ слѣдствіе формулы (10),

$$(13) \quad f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{1.2} f''(x) = \frac{h^3}{1.2.3} f'''(x + \theta h);$$

и проч. Продолжая далѣе точно такимъ же образомъ, выведемъ формулу

$$(14) \quad f(x+h) - f(x) - \frac{h}{1} f'(x) - \frac{h^2}{1.2} f''(x) - \dots \\ - \frac{h^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} f^{(n-1)}(x) = \frac{h^n}{1.2.3 \dots n} f^{(n)}(x + \theta h),$$

которая совершенно подобна уравненію (12), 36^{го} урока. Если

въ сей формулѣ положимъ $x = 0$, поставимъ x вмѣсто h , и F вмѣсто f (разумея подъ $F(x)$ произвольную функцію переменн-ной x), шо найдемъ:

$$(15) F(x) - F(0) - \frac{x}{1} F'(0) - \frac{x^2}{1.2} F''(0) - \dots - \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(0) = \frac{x^n}{1.2.3 \dots n} F^{(n)}(\theta x).$$

Сие послѣднее уравненіе совершенно подобно формулѣ (11) (36^{го} урока). Впрочемъ, оную можно и прямо доказать слѣ-дующимъ образомъ.

Пусть $F(x)$ будетъ какая-либо функція переменн-ной x , а $\varpi(x)$ цѣлая алгебраическая функція степени $n-1$, удовлеств-ряющая условнымъ уравненіямъ

$$\varpi(0) = F(0), \varpi'(0) = F'(0), \varpi''(0) = F''(0), \text{ и проч. } \dots \\ \varpi^{(n-1)}(0) = F^{(n-1)}(0).$$

Функція же $\varpi^{(n)}(x)$ очевидно будетъ равна нулю. Подставляя теперь, въ формулу (10), x вмѣсто h , также $F(x) - \varpi(x)$ вмѣсто $\varphi(x)$, получимъ:

$$(16) F(x) - \varpi(x) = \frac{x^n}{1.2.3 \dots n} F^{(n)}(\theta x);$$

но какъ въ 19^{мъ} урокъ было доказано, что

$$(17) \varpi(x) = \varpi(0) + \frac{x}{1} \varpi'(0) + \frac{x^2}{1.2} \varpi''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} \varpi^{(n-1)}(0) \\ = F(0) + \frac{x}{1} F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \dots + \frac{x^{n-1}}{1.2.3 \dots (n-1)} F^{(n-1)}(0);$$

шо и очевидно, что формула (16) доставляетъ уравненіе (15).

Замѣшимъ, что когда вшорыя часши уравненій (14) и (15) будутъ приближаться къ предѣлу нуль для возрастающихъ величинъ количества n : шо въ шакомъ случаѣ, можно изъ сихъ уравненій вывести *Тейлорову* и *Маклоренову* теоремы.

Полагая въ формулѣ (8) $x_0 = 0$, получимъ:

$$(18) \frac{f(i)}{i^n} = \frac{f^{(n)}(\theta i)}{1.2.3 \dots n}.$$

Сія послѣдняя формула имѣетъ мѣсто въ шомъ предположеніи, что функція

$f(i), f'(i), f''(i), \dots, f^{(n-1)}(i), f^{(n)}(i)$, непрерывны для весьма малых численных величин количества i , и сверхъ того, что онѣ всѣ уничтожающяся, за исключеніемъ послѣдней, для $i = 0$. Въ такомъ случаѣ и отношенія

$$\frac{f(i)}{i}, \frac{f'(i)}{i^2}, \dots, \frac{f^{(n-1)}(i)}{i^{n-1}},$$

которыя соотвѣстственно равны выраженіямъ вида

$$\frac{f'(\theta i)}{1}, \frac{f''(\theta i)}{1.2}, \dots, \frac{f^{(n-1)}(\theta i)}{1.2.3 \dots (n-1)},$$

всѣ уничтожающяся, при $i = 0$. Слѣдовательно, когда i и $f(i)$ будутъ изображать два количества безконечно-малыя: по отношенію

$$\frac{f(i)}{i^n}$$

будетъ первое изъ неумножающихся въ ряду членовъ геометрической прогрессіи

$$(19) \quad f(i), \frac{f(i)}{i}, \frac{f(i)}{i^2}, \frac{f(i)}{i^3}, \text{ и проч. } \dots$$

если только функція $f^{(n)}(0)$ будетъ также первая изъ неумножающихся въ ряду количествъ

$$(20) \quad f(0), f'(0), f''(0), f'''(0), \text{ и проч. } \dots$$

Прибавимъ, что въ настоящемъ предположеніи, выраженіе

$$\frac{f^{(n)}(0)}{1.2.3 \dots n}$$

будетъ изображать (въ слѣдствіе формулы (18)) истинную величину дроби $\frac{f(i)}{i^n}$, соотвѣствующую частному значенію $i = 0$.

Сказанное предъ симъ, приводитъ насъ къ раздѣленію безконечно-малыхъ количествъ на различные классы. Для сего, изобразимъ чрезъ i весьма малое число, и чрезъ $f(i)$ функцію сего числа. Разсмотримъ двѣ слѣдующія функціи: $\frac{f(i)}{i^{n-1}}, \frac{f(i)}{i^n}$, предположивъ, что n есть цѣлое число, большее нуля. Если,

при $i = 0$, $\frac{f(i)}{i^{n-1}} = 0$, а $\frac{f(i)}{i^n} = \infty$: по мы назовемъ $f(i)$ безконечно-малою величиною $n^{\text{го}}$ класса. Если же послѣдняя функція, по есть $\frac{f(i)}{i^n}$, при $i = 0$, будетъ какая нибудь опредѣленная величина: по $f(i)$ именуется безконечно-малою величиною $n^{\text{го}}$ порядка; пакъ что безконечно-малая величина $n^{\text{го}}$ порядка будетъ, нѣкопорымъ образомъ, предѣль безконечно-малой величины $n^{\text{го}}$ класса. Такъ, напримѣръ, $\text{tang}(i^2)$ будетъ безконечно-малая величина $3^{\text{го}}$ класса; ибо, при $i = 0$, $\frac{\text{tang}(i^2)}{i^2} = 0$, а $\frac{\text{tang}(i^2)}{i^3} = \infty$. Функція же $\text{tang}(i^3)$ есть безконечно-малая величина $3^{\text{го}}$ порядка, ибо, при $i = 0$, $\frac{\text{tang}(i^3)}{i^2} = 0$, а $\frac{\text{tang}(i^3)}{i^3} = 1$.

Условившись въ сихъ опредѣленіяхъ, легко выведши, въ слѣдствіе изложенныхъ правилъ, слѣдующія предложенія:

1-я Теорема. Если изобразимъ трезъ $f(i)$ безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ класса: то первый изъ неунитожакующихся членовъ ряда (20), будетъ членъ $f^{(n)}(0)$, который въ себѣ предположеніи обратится въ безконечность. Если же членъ $f^{(n)}(0)$ имѣетъ какую-либо опредѣленную величину, разнствующую отъ нуля: то $f(i)$ будетъ безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ порядка.

2-я Теорема. Если изобразимъ трезъ $f(i)$ безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ класса, и положимъ, что функція $f(x)$ и послѣдовательныя ея производныя, до производной $n^{\text{го}}$ порядка, всѣ непрерывны между предѣлами $x = 0$, $x = h$: то получили формулу

$$(21) \quad f(h) = \frac{h^m}{1.2.3\dots m} f^{(m)}(\theta h),$$

въ которой m можетъ изображать число меньшее, или равное количеству n .

Если въ послѣднее уравненіе поставимъ i вмѣсто h , также n вмѣсто m : то получимъ формулу (18). Посредствомъ сей послѣдней, легко вывести слѣдующую теорему:

3-я Теорема. Пусть $f(i)$ будетъ безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ порядка. Сіе количество переѣнитъ знакъ влѣстѣ съ i , если n будетъ число четное, и постоянно будетъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ съ количествомъ $f^{(n)}(0)$, когда n будетъ четное число.

Въ сей послѣдней теоремѣ, подобно какъ и въ формулѣ (18) предполагается, что функція $f(i)$ и ея послѣдовательныя производныя, до производной $n^{\text{го}}$ порядка, оспаются непрерывными относительно къ i , въ опредѣленности частной величины $i=0$. Если бы сіе условіе не удовлетворялось, то количество $f^{(n)}(0)$ могло бы имѣть нѣсколько величинъ; и если сіи величины не всѣ съ одинакими знаками, то 3-я теорема не будетъ имѣть мѣста. Сіе случится, на примѣръ, для безконечно-малого количества $f(i) = \sqrt{i^2}$. Въ семъ предположеніи, производная

$$f'(i) = \frac{i}{\sqrt{i^2}}$$

будетъ имѣть разрывъ непрерывности при $i=0$, и получитъ двѣ величины, именно, $+1$ и -1 , смотря по тому, будетъ ли количество i положительное, или отрицательное. Впрочемъ, очевидно, что выраженіе $\sqrt{i^2}$, которое можно принимать за безконечно-малое количество перваго порядка, удерживаетъ постоянно положительный знакъ, будетъ ли количество i положительное, или отрицательное. То же самое должно разумѣть и о безконечно-маломъ количествѣ $\sqrt{i^6}$, которое можно принимать за безконечно-малое количество шестаго порядка, и проч. . . .

Помощію 1-й теоремы, легко будетъ судить, къ какому классу, или порядку относится данное безконечно-малое количе-

ство. Такъ, напримѣръ, посредствомъ сей теоремы, увидимъ, что изъ чепырехъ слѣдующихъ функцій:

$$\frac{1}{l(i)}, \quad \sqrt{(i)}, \quad i^{\frac{3}{2}}, \quad \sin i,$$

первыя три изображаютъ безконечно-малыя количества перваго класса, а послѣдняя, безконечно-малое количество перваго порядка. Такимъ же точно образомъ увидимъ, что изъ чепырехъ функцій

$$\frac{i}{l(i)}, \quad i^{\frac{3}{2}}, \quad \sin^2 i, \quad 1 - \cos i,$$

первыя двѣ изображаютъ безконечно-малыя величины втораго класса, а двѣ послѣднія, безконечно-малыя величины втораго порядка; окажешся также, что изъ трехъ функцій

$$\frac{i^2}{l(i)}, \quad i^{\frac{3}{2}}, \quad i - \sin i,$$

первая есть безконечно-малое количество третьяго класса, а двѣ послѣднія, безконечно-малыя количества третьяго порядка; и такъ далѣе.

Когда безконечно-малое количество $n^{\text{го}}$ класса, или $n^{\text{го}}$ порядка помножится на величину постоянную, или на такую функцію количества i , кошорой предѣлъ есть величина опредѣленная, разнспвующая ошъ нуля: то въ шакомъ случаѣ, очевидно, получимъ въ произведеніи безконечно-малую величину того же самаго класса, или порядка, именно, $n^{\text{го}}$.

Легко также докажемъ, что безконечно-малыя количества высшихъ классовъ имѣютъ численныя величины мѣньшія, прошивъ численныя величины безконечно-малыхъ количествъ низшихъ классовъ. Дѣйствительно, изобразимъ чрезъ $\varphi(i)$ и $\chi(i)$ два безконечно-малыя количества, первое $n^{\text{го}}$ класса, второе $m^{\text{го}}$; и положимъ $m < n$. Очевидно, что изъ двухъ дробей $\frac{\varphi(i)}{i^m}$, $\frac{\chi(i)}{i^m}$, одна только первая обращится въ нуль, при $i = 0$; слѣдовательно отношеніе $\frac{\varphi(i)}{\chi(i)}$ будетъ также спремиться къ нулю; а для сего необходимое условие есть то, чтобы чи-

сленная величина числителя сей дроби, была меньше численной величины ея знаменателя, ибо самая дробь должна бысть меньше единицы.

Докажемъ наконецъ слѣдующую теорему:

4-я Теорема. *Изобразивъ трезъ i и $f(i)$ двѣ величины безконечно-малыя, окажется, что отношеніе*

$$(22) \quad \frac{f(i)}{f'(i)},$$

при $i=0$, будетъ имѣть, или одну величину равную нулю, или нѣсколько величинъ, между которыми необходимо будетъ заключаться величина сего отношенія равная нулю.

Доказательство. Очевидно, что доспашочно будетъ доказать 4-ю теорему только въ томъ случаѣ, когда производная функція $f'(i)$ обращается въ нуль вмѣстѣ съ функціей $f(i)$, при $i=0$; ибо отношеніе $\frac{f(i)}{f'(i)}$, во всякомъ другомъ предположеніи, будетъ равно нулю, по причинѣ, что $f(i)=0$, для $i=0$. Но если также $f'(i)=0$, то дробь $\frac{f(i)}{f'(i)}$ представляется въ неопредѣленномъ видѣ $\frac{0}{0}$. Когда функціи $f(i)$ и $f'(i)$ будутъ обѣ непрерывныя относительно къ i , въ сопредѣльности частнаго значенія $i=0$: то легко будетъ доказать, помощію формулы (18), что отношеніе $\frac{f(i)}{f'(i)}$ обращается въ нуль въ настоящемъ случаѣ. Дѣйствительно, при такомъ условіи, выводимъ изъ формулы (18), полагая въ оной $n=1$

$$(23) \quad f(i) = i f'(\theta i),$$

и слѣдовательно

$$(24) \quad \frac{f(i)}{f'(i)} = i \frac{f'(\theta i)}{f'(i)},$$

разумѣя подъ θ число меньшее единицы. Положимъ теперь, что въ формулѣ (24), численная величина количества i уменьшается до безконечности. Такъ какъ, въ настоящемъ пред-

положеніи, $f'(0) = 0$, що легко видѣшь, что изъ двухъ функцій $f'(\theta i)$ и $f'(i)$, первая будетъ стремиться къ нулю скорѣе нежели вторая, ибо произведеніе θi заключається между двумя предѣлами 0 и i . Слѣдовательно, всѣ величины дроби $\frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$ будутъ менѣ единицы, а величины произведенія $i \frac{f'(\theta i)}{f'(i)}$, весьма мало будутъ разниться отъ нуля. Посему предѣлы, или одинъ изъ предѣловъ величинъ дроби $i \frac{f'(\theta i)}{f'(i)} = \frac{f(i)}{f'(i)}$, будутъ равняться нулю.

Примѣчаніе 1^о. Легко удостовѣришься въ справедливости 4^й теоремы въ разсужденіи слѣдующихъ функцій:

$$\sin i, \quad 1 - \cos i, \quad e^{-\left(\frac{1}{i}\right)^2}, \quad i^3 \sin \frac{1}{i}, \quad \text{и проч.} \dots$$

Сія самая теорема справедлива даже и въ томъ случаѣ, когда функція $f(i)$ будетъ только вещественною и безконечно-малою, при опредѣленномъ знакѣ количествъ i ; можно сіе видѣшь, принимая послѣдовательно за функцію $f(i)$, одну изъ слѣдующихъ:

$$l(i), \quad \sqrt{i}, \quad e^{-\frac{1}{i}}, \quad e^{-\left(\frac{1}{i}\right)^3}, \quad \text{и проч.} \dots$$

изъ которыхъ 1^a , 3^a и 4^a не будутъ изображать безконечно-малыхъ количествъ, а 2^a , обратятся въ мнимую величину, при i отрицательномъ. Наконецъ, сія теорема можетъ быть справедлива, когда функція $f'(i)$ дѣлается прерывною, для $i = 0$. Такъ, на примѣръ, полагая

$$(25) \quad f(i) = i \sin \frac{1}{i},$$

увидимъ, что производная функція

$$(26) \quad f'(i) = \sin \frac{1}{i} - \frac{1}{i} \cos \frac{1}{i},$$

дѣлается неопредѣленною, слѣдовательно прерывною, при $i = 0$; отношеніе (22), опредѣляемое посредствомъ уравненій (25) и (26), шо есть

$$(27) \quad \frac{f(i)}{f'(i)} = \frac{i}{1 - \frac{1}{i} \cot \frac{1}{i}},$$

для $i = 0$, имѣешь безчисленное множество величинъ, изъ коихъ одна будетъ равна нулю.

Приближеніе 2-е. Положимъ, что функція $f(i)$ и ея производныя, до $(n - 1)$ го порядка, всѣ непрерывны относительно къ i , въ сопридѣльности частнаго значенія $i = 0$, и что сверхъ того, количества

$$(28) \quad f(0), f'(0), f''(0), \dots f^{(n-1)}(0),$$

всѣ уничтожаются. Когда спланируемъ уменьшая количество i до безконечности, то каждое изъ отношеній

$$(29) \quad \frac{f(i)}{f'(i)}, \frac{f'(i)}{f''(i)}, \frac{f''(i)}{f'''(i)}, \dots \frac{f^{(n-1)}(i)}{f^{(n)}(i)},$$

будетъ стремиться къ одному предѣлу, или къ нѣсколькимъ предѣламъ, изъ коихъ одинъ будетъ равенъ нулю; слѣдовательно также и произведеніе всѣхъ сихъ дробей, именно

$$(30) \quad \frac{f(i)}{f^{(n)}(i)},$$

будетъ приближаться къ тому же предѣлу нуль.

То-же самое должно разумѣть и о произведеніяхъ

$$(31) \quad \frac{f'(i)}{f^{(n)}(i)}, \frac{f''(i)}{f^{(n)}(i)}, \dots \frac{f^{(n-1)}(i)}{f^{(n)}(i)},$$

получаемыхъ чрезъ умноженіе нѣкоторыхъ изъ дробей (29), одинъ на другія.

К О Н Е Ц Ъ.

ПРИМЪЧАНІЯ ПЕРЕВОДЧИКА.

Примъчаніе I.

Положимъ что дроби

$$\frac{a'}{b'}, \frac{a''}{b''}, \frac{a'''}{b'''}, \dots, \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}},$$

поставлены по порядку ихъ величинъ, и что всѣ знаменатели оныхъ $b', b'', b''', \dots, b^{(n)}$ имѣють одинакіе знаки; посему будемъ

$$\begin{array}{ll} \frac{a'}{b'} = \frac{a'}{b'} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} > \frac{a'}{b'} \\ \frac{a'}{b'} < \frac{a''}{b''} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} > \frac{a''}{b''} \\ \frac{a'}{b'} < \frac{a'''}{b'''} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} > \frac{a'''}{b'''} \\ \dots & \dots \\ \frac{a'}{b'} < \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} & \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} = \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}} \end{array}$$

по уничтоженіи знаменателей, выйдемъ:

$$\begin{array}{ll} a' b' = a' b' & a^{(n)} b' > a' b^{(n)} \\ a' b'' < a'' b' & a^{(n)} b'' > a'' b^{(n)} \\ a' b''' < a''' b' & a^{(n)} b''' > a''' b^{(n)} \\ \dots & \dots \\ a' b^{(n)} < a^{(n)} b' & a^{(n)} b^{(n)} = a^{(n)} b^{(n)}. \end{array}$$

Сложивъ сіи послѣднія неравенства, получимъ два слѣдующія:

$$\begin{array}{l} a' (b' + b'' + b''' + \dots + b^{(n)}) < b' (a' + a'' + a''' + \dots + a^{(n)}) \\ a^{(n)} (b' + b'' + b''' + \dots + b^{(n)}) > b^{(n)} (a' + a'' + a''' + \dots + a^{(n)}). \end{array}$$

Раздѣляя первое изъ нихъ на $b' (b' + b'' + b''' + b^{(n)})$, а второе на $b^{(n)} (b' + b'' + b''' + \dots + b^{(n)})$, имѣемъ:

$$\frac{a'}{b'} < \frac{a' + a'' + a''' + \dots + a^{(n)}}{b' + b'' + b''' + \dots + b^{(n)}} < \frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}.$$

И такъ, дробь $\frac{a' + a'' + a''' + \dots + a^{(n)}}{b' + b'' + b''' + \dots + b^{(n)}}$ будетъ болѣе наименьшей, и менѣе наибольшей изъ дробей $\frac{a'}{b'}$, $\frac{a''}{b''}$, $\frac{a'''}{b'''}$, \dots , $\frac{a^{(n)}}{b^{(n)}}$; слѣдовательно, она выразитъ среднюю между сими дробями.

Примѣчаніе II.

Должно доказать, что имѣя

(а) $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z} = \dots$,

или, что все равно,

$$\frac{ax}{x^2} = \frac{by}{y^2} = \frac{cz}{z^2} = \dots,$$

будетъ также

(б) $\frac{ax + by + cz + \dots}{x^2 + y^2 + z^2 + \dots} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + \dots}}$.

Для сего, положивъ

$$\begin{aligned} ax &= m \cdot x^2 & x^2 &= x^2 \\ by &= m' \cdot x^2 & y^2 &= m' \cdot x^2 \\ cz &= m'' \cdot x^2 & z^2 &= m'' \cdot x^2 \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

получимъ:

(с) $\frac{ax + by + cz + \dots}{x^2 + y^2 + z^2 + \dots} = \frac{ax + m \cdot x^2 + m' \cdot x^2 + \dots}{x^2 + m \cdot x^2 + m' \cdot x^2 + \dots} = \frac{a}{x}$.

Также, уравненія (а) даютъ

$$\frac{a^2}{x^2} = \frac{b^2}{y^2} = \frac{c^2}{z^2} = \dots,$$

и полагая

$$\begin{aligned} a^2 &= n \cdot x^2 & x^2 &= x^2 \\ b^2 &= n' \cdot x^2 & y^2 &= n' \cdot x^2 \\ c^2 &= n'' \cdot x^2 & z^2 &= n'' \cdot x^2 \\ \dots & & \dots & \end{aligned}$$

получимъ:

$$\frac{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}{x^2 + y^2 + z^2 + \dots} = \frac{a^2 + n \cdot x^2 + n' \cdot x^2 + \dots}{x^2 + n \cdot x^2 + n' \cdot x^2 + \dots} = \frac{a^2}{x^2};$$

слѣдовательно

$$\frac{a}{x} = \pm \frac{\sqrt{(a^2 + b^2 + c^2 + \dots)}}{\sqrt{(x^2 + y^2 + z^2 + \dots)}}.$$

Сравнивъ сію послѣднюю величину для $\frac{a}{x}$ съ величиною определяемою уравненіемъ (с), получимъ уравненіе (b), которое слѣдовало доказать.

Примѣчаніе III.

Разсмотримъ рядъ количествъ

$$f(x_0), f(x_1), f(x_2) \dots f(x_{n-1}),$$

который можешь быть также представлень въ такомъ видѣ:

$$\frac{(x_1 - x_0)f(x_0)}{x_1 - x_0}, \quad \frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{x_2 - x_1}, \quad \frac{(x_3 - x_2)f(x_2)}{x_3 - x_2}, \quad \dots \quad \frac{(X - x_{n-1})f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}}.$$

Но какъ, по предположенію, всѣ разности $x_1 - x_0$, $x_2 - x_1$, $x_3 - x_2$, . . . $X - x_{n-1}$ имѣють одинакіе знаки: по сумма числителей всѣхъ сихъ дробей, раздѣленная на сумму ихъ знаменателей, будетъ *средняя* между величинами дробей $\frac{(x_1 - x_0)f(x_0)}{x_1 - x_0}$,

$\frac{(x_2 - x_1)f(x_1)}{x_2 - x_1}$, $\frac{(x_3 - x_2)f(x_2)}{x_3 - x_2}$, . . . $\frac{(X - x_{n-1})f(x_{n-1})}{X - x_{n-1}}$, или, что все равно, средняя между величинами функций $f(x_0), f(x_1), f(x_2) \dots f(x_{n-1})$,

которую можно выразишь чрезъ $f[x_0 + \theta(X - x_0)]$ (разумѣя подъ θ количество положительное, меньшее единицы). Посему получимъ уравненіе

$$\frac{(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1})}{X - x_0} = f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

которое доставляешь

$$(x_1 - x_0)f(x_0) + (x_2 - x_1)f(x_1) + (x_3 - x_2)f(x_2) + \dots + (X - x_{n-1})f(x_{n-1}) = (X - x_0)f[x_0 + \theta(X - x_0)],$$

что и надлежало доказать.

ЗАМѢЧЕННЫЯ ПОГРѢШНОСТИ.

страни.	строк.	Напечатано:	Надобно поправить.
3.	посл.	дуаляющимся	удаляющимся
8.	4.	однѣ	одни
8.	13.	однѣ	одни
8.	8 низ.	Алгебраическія	Алгебрическія
9.	3.	онѣ	они
9.	4.	однѣ	одни
22.	1.	$f'(y)$	$F'(y)$
24.	2 низ.	s	s^2
28.	3 низ.	$\frac{dy}{dx}$	$\frac{\Delta y}{\Delta x}$
31.	7.	$x^2 \cdot x^3,$	$x^2, x^3,$
31.	18.	$x = \frac{1}{2}p$	$x = -\frac{1}{2}p$
34.	4.	функции.	функцией.
34.	9.	$\frac{\infty}{\infty}, \infty,$	$\frac{\infty}{\infty}, \infty^0,$
38.	3.	$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$	$\frac{f(X) - f(x_0)}{X - x_0}$
38.	5.	$\frac{f(x_0 - h) - f(x_0)}{h}$	$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$
38.	9.	$x = x^0 + h$	$x = x_0 + h$
41.	1.	Δa	Δx
47.	14.	принимаемыхъ	принимаемой
62.	1.	$dy^{(n)} = y^{(n-1)} \cdot h.$	$dy^{(n-1)} = y^{(n)} \cdot h.$
67.	8.	будеть полная	будеть полная, или частная
69.	5 низ.	чшо	чшо
76.	2 низ.	$d_x,$	$d_x,$
79.	14.	чшо	чшо
80.	15.	члучаѣ	случаѣ
90.	15.	крайній	крайней
91.	4.	$d^m u =$	$d^m u =$

страница.	строк.	Напечатано:	Надобно поправить.
108.	6 с низ.	$f(x) - A\bar{\rho}(x)$	$f(x) - A_0\bar{\rho}(x)$
115.	4.	θ	θ_0
115.	5.	θ	θ_0
120.	3.	$\dots = \theta_{n-1} = 0.$	$\dots = \theta_{n-1} = 1.$
132.	2.	постоянные	положительные
135.	4 с низ.	$f(x) = \pm \infty,$	$f(a) = \pm \infty,$
141.	10.	$\int_{x_0}^X$	$\int_{x_0}^x$
143.	6.	порядку,	порядку
155.	9 с низ.	$(ab + b)^{\frac{1}{n}}$	$(ax + b)^{\frac{1}{n}}$
194.	12.	$\frac{df(x, y)}{dx}$	$\frac{df(x, z)}{dx}$
194	16.	$\frac{df(x, y)}{dx}$	$\frac{df(x, z)}{dx}$
206.	11 с низ.	α	x
208.	6 с низ.	$= \frac{x^{n-1}}{1-\theta} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n;$	$= \frac{x^{n-1}}{1-\theta} \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n;$
212.	3.	сходящиеся,	сходящиеся,
212.	4.	расходящиеся.	расходящиеся.
232.	2 с низ.	$f^{(n-1)}(x)$	$f^{(n-1)}(x)$
