В. В. Козлов

Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике

Издательство Удмуртского государственного университета

Ижевск

1995

ББК 22.21
К59
УДК 531.01 + 517.9

КОЗЛОВ В. В. **Симметрии, топология и резонансы в гамильтоновой механике.** — Ижевск: Изд-во Удмуртского гос. университета, 1995. 432 с. — ISBN 5-7029-0126-6

Книга посвящена активно развивающемуся направлению классической механики — теории интегрирования уравнений Гамильтона. Впервые излагается систематический анализ причин неинтегрируемого поведения гамильтоновых систем: сложное строение пространства положений, малые знаменатели, расщепление асимптотических поверхностей, рождение изолированых периодических решений, ветвление решений в плоскости комплексного времени, квазислучайные режимы колебаний. Изложены методы интегрирования гамильтоновых систем, перечислены многие точно решенные задачи. Результаты общего характера проиллюстрированы примерами из небесной механики, динамики твердого тела, гидродинамики и математической физики.

Для специалистов в области механики и математики, занимающихся теорией динамических систем, студентов и аспирантов университетов.

Ил. 39. Библиогр. 238.

Рецензент академик РАН профессор *А. Т. Фоменко.*

Издание осуществлено при финансовой поддержке **Р**оссийского **Ф**онда **Ф**ундаментальных **И**сследований, проект № 95-01-02880

Научное издание

Козлов Валерий Васильевич

СИММЕТРИИ, ТОПОЛОГИЯ И РЕЗОНАНСЫ В ГАМИЛЬТОНОВОЙ МЕХАНИКЕ

Редакторы *М. И. Гринчук, А. А. Ошемков*
Художник *В. Я. Батищев*
Художественный редактор *М. А. Смирнов*
Корректоры *И. К. Мельникова, Ю. Н. Торхов*

Формат 60 × 90/16. Бумага офсетная. Усл. печ. л. 27. Тираж 3000 экз.

Издательская фирма «Удмуртский Государственный Университет», лицензия № 020411 от 12.02.1992 г.

2-я типография издательства «Наука». 121099, Москва Г-99, Шубинский пер., 6
Заказ № 2516

Оригинал-макет подготовлен с использованием макропакета $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX при содействии **АО «Диалог» МГУ**

ISBN 5-7029-0126-6

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Проблема точного интегрирования уравнений динамики — одна из самых популярных тем исследования, начиная со знаменитых "Математических начал натуральной философии" Ньютона. Руководящей идеей в этом круге вопросов является общая идея симметрии. При решении задачи о центральном движении Ньютон уже использовал соображения симметрии: факторизуя орбиты группы вращений, он свел эту задачу к изучению движения по прямой в потенциальном поле. Впоследствии Лагранж и Якоби заметили, что классические интегралы задачи многих гравитирующих тел связаны с инвариантностью уравнений движения относительно группы преобразований Галилея. Это фундаментальное наблюдение обобщено Эмми Нётер: каждой группе преобразований, сохраняющих действие по Гамильтону, отвечает интеграл уравнений движения. Верно и обратное: фазовый поток уравнений Гамильтона, в которых гамильтонианом служит известный интеграл, переводит решения исходных уравнений движения в решения тех же уравнений. На этой идее основано доказательство известной теоремы Лиувилля о полной интегрируемости уравнений Гамильтона: фазовые потоки инволютивных интегралов попарно коммутируют и порождают абелеву группу симметрий максимально возможной размерности на многообразиях их совместных уровней.

Вначале задача интегрирования трактовалась лишь аналитически: найти явные формулы для интегралов и решений уравнений движения. Однако после работ Пуанкаре стало ясно, что свойство интегрируемости тесно связано с особенностями поведения траекторий в целом. При "глобальном" изучении динамических систем существенную роль играют топологические рассмотрения. Сравнительно недавно обнаружено, что сложная топология конфигурационного пространства несовместима с интегрируемостью уравнений движения соответствующей механической системы. С другой стороны, как показал еще Пуанкаре, интегрируемости гамильтоновых систем препятствуют резонансные явления, связанные с разрушением инвариантных резонансных торов при добавлении возмущения. Аналитический аспект этого явления — знаменитая проблема малых знаменателей в небесной механике. Другие известные в настоящее время препятствия к интегрируемости — расщепление асимптотических поверхностей и ветвление решений в плоскости комплексного времени — также тесно связаны с резонансами.

В этой книге впервые предпринята попытка систематизировать результаты по проблеме интегрируемости гамильтоновых систем, полученные за последние 10–15 лет, а также дать современное изложение классических результатов по этой тематике. Структура книги такова. Во введении дан исторический обзор исследований по проблеме интегрируемости уравнений динамики. Основы гамильтоновой механики изложены в гл. I. Глава II посвящена методам точного интегрирования уравнений Гамильтона; в ней обсуждаются различные аспекты понятия интегрируемой гамильтоновой системы. В гл. III указаны грубые препятствия к интегрируемости, выраженные через топологические инварианты конфигурационного пространства. Обсуждение резонансных явлений в связи с проблемой интегрируемости содержится в гл. IV–VIII. Изложенные методы позволяют дать строгие доказательства неинтегрируемости многих актуальных проблем динамики. Особое место занимает обсуждение механизма стохастизации гамильтоновых систем при малом изменении функции Гамильтона.

В книге используется разнообразная математическая техника. Однако, все сведения, выходящие за пределы стандартного университетского курса, изложены в самой книге. Так что от читателя требуются лишь настойчивость и терпение. Книга предназначена в первую очередь для молодых механиков и математиков, которые имеют возможность попробовать свои силы в этой увлекательной области, где имеется еще много важных нерешенных задач.

В. Козлов

М е ф и с т о ф е л ь

Наука эта — лес дремучий.
Не видно ничего вблизи.
Исход единственный и лучший:
Профессору смотрите в рот
И повторяйте, что он врет.
Спасительная голословность
Избавит вас от всех невзгод,
Поможет обойти неровность
И в храм бесспорности введет.
Держитесь слов.

С т у д е н т

Да, но словам
Ведь соответствуют понятья.

Гёте "Фауст"*)

ВВЕДЕНИЕ

1. В 1834 г. Гамильтон представил дифференциальные уравнения классической механики — уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial q}$$

в "канонической" форме:

$$\dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p}, \qquad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}. \tag{1}$$

Здесь $p = \partial L/\partial \dot{q}$ — обобщенный импульс, а функция Гамильтона $H = p\dot{q} - L$ — "полная энергия" механической системы. "Его результаты были частично получены еще ранее французскими математиками. Пуассон уже в 1809 г. сделал первый шаг в этом направлении, он ввел в рассмотрение величину**)

$$\sum_{r=1}^{n} p_r \dot{q}_r - T,$$

*) Перевод Б. Л. Пастернака. — *Примеч. ред.*

**) T — кинетическая энергия системы. — *В. К.*

представил ее как функцию переменных $q_1, q_2, \ldots, q_n$ и получил, таким образом, первую половину системы Гамильтона. Лагранж в 1810 г. ввел специальную систему уравнений (для вариации элементов орбиты) в форме Гамильтона, в которой роль функции H играет функция возмущений. Кроме того, к этой форме уравнений привела и теория нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка, ибо, как это показали Пфафф в 1814 г. и Коши (в дополнении к более ранним работам Лагранжа и Монжа) в 1819 г., дифференциальные уравнения характеристик уравнения в частных производных

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0\ , \tag{2}$$

где $p_s = \dfrac{\partial z}{\partial x_s}$, имеют вид

$$\frac{dx_1}{\partial f/\partial p_1} = \frac{dx_2}{\partial f/\partial p_2} = \ldots = \frac{dx_n}{\partial f/\partial p_n} = \\ = \frac{dp_1}{-\partial f/\partial x_1} = \frac{dp_2}{-\partial f/\partial x_2} = \ldots = \frac{dp_n}{-\partial f/\partial x_n}\ .$$

Исследования Гамильтона были распространены Остроградским (1848–1850 гг.) и Донкином (1854 г.) на те случаи, когда кинетический потенциал содержит явно время" (Е. Уиттекер [163])*).

2. Задача интегрирования гамильтоновых систем (не записанных еще в канонической форме) обсуждалась уже в работах братьев Бернулли, Клеро, Даламбера, Эйлера и, конечно, Лагранжа, связанных с применением идей и принципов Ньютона к различным задачам механики. "Разрешимыми" (интегрируемыми) считались лишь те задачи, которые можно было решить с помощью конечного числа алгебраических операций и "квадратур" — вычислений интегралов известных функций. Однако наиболее актуальные задачи динамики (скажем, задача n тел) оказались "неинтегрируемыми" (точнее, непроинтегрированными). Рассказывают, что Алексис Клеро, потративший много времени на попытки проинтегрировать уравнения задачи трех тел в связи с теорией движения Луны, махнул на это дело рукой, сказав: "Пусть интегрирует, кто сможет". Лишь в самых простых случаях, когда система имела всего одну степень свободы ($n = 1$) или расщеплялась на несколько независимых одномерных систем, интегрирование оказывалось

*) "Было бы весьма желательно дать подробный критический анализ исторического развития исследований по этому вопросу. Имеющиеся в литературе ссылки относительно происхождения фундаментальных математических понятий в аналитической динамике почти все ошибочны" (А. Уинтнер [162]).

возможным благодаря наличию интегралов типа сохранения полной энергии ($H = \mathrm{const}$).

3. Гамильтон (1834 г.) и Якоби (1837 г.) разработали общий метод интегрирования уравнений динамики, основанный на введении специальных канонических координат.

Идея метода Гамильтона — Якоби восходит к работам Пфаффа, Коши (и к более ранним исследованиям Лагранжа и Монжа) по теории характеристик. Его суть заключается в следующем: преобразование независимых переменных $p, q \to P, Q$ вида

$$p = \frac{\partial S}{\partial q}, \quad Q = \frac{\partial S}{\partial P}, \qquad S(P, q) : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R},$$

переводит канонические уравнения (1) в канонические уравнения

$$\dot{P} = -\frac{\partial K}{\partial Q}, \qquad \dot{Q} = \frac{\partial K}{\partial P} \tag{3}$$

с функцией Гамильтона $K(P, Q) = H(p, q)\big|_{P,Q}$. Если функция K не зависит от Q, то уравнения (3) сразу интегрируются:

$$P = P_0, \qquad Q = Q_0 + t\frac{\partial K}{\partial P}\bigg|_{P_0}.$$

Таким образом, задача интегрирования канонических уравнений (1) сводится к отысканию “производящей” функции $S(P, q)$, удовлетворяющей нелинейному уравнению Гамильтона — Якоби

$$H\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) = K(P),$$

которое является частным случаем уравнения (2). Наиболее эффективным способом решения уравнения Гамильтона — Якоби является метод разделения переменных. Этот метод неинвариантен по своей сути, и от исследователя требуется большое искусство в выборе подходящих переменных. Желая подчеркнуть это обстоятельство, Якоби писал: “Главная трудность при интегрировании данных дифференциальных уравнений состоит во введении удобных переменных, для разыскания которых нет никакого общего правила. Поэтому мы должны идти обратным путем и, найдя какую-нибудь замечательную подстановку, разыскивать задачи, в которых она может быть с успехом применена” (“Лекции по динамике”). В качестве такой “замечательной” подстановки Якоби ввел эллиптические координаты. С помощью эллиптических координат (и их вырождений) Якоби и его последователем Карлом Нейманом решен ряд новых задач динамики, среди которых отметим задачу о геодезических на квадриках и задачу движения точки по многомерной сфере в силовом поле с квадратичным потенциалом. Впоследствии Лиувилль (1849 г.) и Штекель (1891 г.) указали довольно общий вид гамильтонианов, допускающих разделение переменных.

Если задача решена методом Гамильтона — Якоби, то функции $P_1(p,q),\ldots,P_n(p,q)$ будут первыми интегралами, которые, как легко проверить, находятся в инволюции, т. е. их скобки Пуассона

$$\{P_i,P_j\}=\sum_{s=1}^{n}\left(\frac{\partial P_i}{\partial q_s}\frac{\partial P_j}{\partial p_s}-\frac{\partial P_j}{\partial q_s}\frac{\partial P_i}{\partial p_s}\right)$$

тождественно равны нулю. Эта идея была развита Буром и Лиувиллем в 1855 г. С помощью метода Гамильтона — Якоби было доказано, что гамильтоновы уравнения с n степенями свободы можно проинтегрировать, если известны n независимых интегралов в инволюции. По существу, это — инвариантная формулировка метода Гамильтона — Якоби. Доказательство теоремы Лиувилля основано на следующем рассуждении. Пусть $H=P_1$, P_2, ..., P_n — набор независимых инволютных интегралов. Если, например, $\det\left\|\dfrac{\partial P_i}{\partial p_j}\right\|\neq 0$, то из уравнений $P_i(p,q)=c_i$ $(1\leqslant i\leqslant n)$ можно найти (по крайней мере локально) $p_j=f_j(q,c)$. Из инволютивности интегралов P_i вытекает, что 1-форма $\sum f_j(q,c)dq_j$ замкнута, и поэтому локально она является дифференциалом (по q) некоторой функции $S(q,c)$. Так как $H\left(\partial S/\partial q,q\right)=c_1$, то функция S представляет полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби.

В рамках этого круга идей в работах Ковалевской, Клебша, Чаплыгина, Стеклова и других авторов был решен ряд новых задач механики, некоторые из которых весьма нетривиальны. Стоит отметить, что в этих классических работах не использовалась гамильтонова структура уравнений движения. Условия интегрируемости и само интегрирование уравнений динамики основаны на методе интегрирующего множителя Эйлера — Якоби. Напомним, что для этого автономная система n дифференциальных уравнений должна иметь интегральный инвариант и обладать $n-2$ независимыми интегралами. Из-за этого обстоятельства не была замечена интегрируемость ряда задач динамики. Самый яркий пример — задача о вращении твердого тела с неподвижной точкой в гравитационном поле удаленных центров. В этой задаче Бруном [183] были найдены три интеграла, чего недостаточно для применения метода Эйлера — Якоби. Однако, ввиду инволютивности найденных Бруном интегралов, задача интегрируема по теореме Лиувилля; явное интегрирование осуществил недавно О. И. Богоявленский [181].

Ясно, что теорема Лиувилля (как и теорема Эйлера — Якоби) указывает лишь на принципиальную возможность точного интегрирования дифференциальных уравнений; их явное интегрирование представляет собой самостоятельную задачу, зачастую весьма нетривиальную. При решении уравнений вращения свободного твердого тела (1758 г.) и уравнений задачи двух неподвижных гравитирующих центров (1760 г.) Эйлер впервые столкнулся с проблемой обращения эллиптических интегралов. Это обстоятельство стимулировало интерес Эйлера к эллиптическим функциям, для которых он получил в те же годы формулу сложения. Явное интегрирование уравнений движения в других классических задачах привело к абелевым функциям. Тот факт, что это обстоятельство в свое время не было самоочевидным, можно понять из письма Ковалевской к Миттаг-Лефлеру (1886 г.): "...Не далее этого лета он [Пикар] отнесся с большим недоверием, когда я ему сказала, что функции вида

$$y = \frac{\theta(Cx + A, C_1x + A_1)}{\theta_1(Cx + A, C_1x + A_1)}$$

могут быть очень полезны при интегрировании некоторых дифференциальных уравнений..." В работах Ковалевской и ее последователя Кеттера техника интегрирования дифференциальных уравнений в абелевых функциях достигла большого совершенства. Затем это искусство было "утрачено". Уже в работах Чаплыгина интегрирование доводится до абелевых интегралов без обсуждения явного выражения переменных задачи через θ-функции. Техника интегрирования в θ-функциях возрождена в настоящее время на новом теоретическом уровне [52,178].

4. Практически во всех проинтегрированных задачах известные первые интегралы оказались либо рациональными функциями, либо полиномами. Поэтому они продолжаются в комплексную область изменения фазовых переменных p, q как однозначные голоморфные или мероморфные функции. Однозначный гамильтониан порождает "комплексифицированную" гамильтонову систему. При этом решения, как функции комплексного времени (или некоторой вспомогательной переменной), часто оказываются мероморфными. В качестве примеров можно указать задачу Якоби о движении точки по трехосному эллипсоиду, волчок Ковалевской, случай Клебша в задаче о движении твердого тела в идеальной жидкости. Более того, исследования Ковалевской и Ляпунова по классической задаче о вращении тяжелого волчка показали, что общее решение уравнений движения представляется однозначными функциями времени только в случаях, когда существует дополнительный полиномиальный интеграл. В связи с этим возникла интересная задача о соотношении между существованием однозначных голоморфных интегралов и ветвлением решений в комплексной плоскости времени; ее постановка восходит к Пенлеве.

5. В более поздних работах внимание сосредоточилось на качественном исследовании движения гамильтоновых систем, решаемых методом Гамильтона — Якоби, в первую очередь — методом разделения переменных. В научном обиходе появляются специфические для интегрируемых систем переменные действие — угол. Они "были введены Делоне для исследования проблем астрономических возмущений в небесной механике. Позднее они оказались чрезвычайно удобными для старой формы квантовой механики, так как квантование Бора — Зоммерфельда состояло в том, что каждая переменная действия полагалась равной целому кратному постоянной Планка" (Дж. Л. Синг [152]). Впервые условия квантования были сформулированы для систем с разделенными переменными, но постепенно стало ясно, что и в самом общем случае совместные уровни полного набора интегралов в инволюции в компактном случае гомеоморфны многомерным торам, что движение по ним в соответствующих угловых переменных происходит по условно-периодическому закону и что переменные действия представляют собой интегралы $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\oint pdq$ по независимым циклам, по-разному охватывающим тор (см. гл. II). Системы с полным набором интегралов в инволюции теперь принято называть вполне интегрируемыми.

В окрестности каждого n-мерного инвариантного тора вполне интегрируемой гамильтоновой системы с n степенями свободы можно ввести канонические переменные действие — угол $I_1, \ldots, I_n$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi$, в которых функция Гамильтона H зависит лишь от I. В этих переменных уравнения Гамильтона принимают следующий простой вид:

$$\begin{gathered} \dot I_1 = 0\,, \quad \dot\varphi_1 = \omega_1(I) = \frac{\partial H}{\partial I_1}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot I_n = 0\,, \quad \dot\varphi_n = \omega_n(I) = \frac{\partial H}{\partial I_n}\,. \end{gathered} \tag{4}$$

Координаты $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — угловые координаты на инвариантном n-мерном торе $I = \mathrm{const}$, равномерно меняющиеся со временем. Гамильтонова система называется невырожденной, если

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} \right\| = \det \left\| \frac{\partial(\omega_1, \ldots, \omega_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \right\| \neq 0\,.$$

В невырожденной системе можно перейти к новым (неканоническим) координатам $\mathcal{J}_k = \omega_k(I)$, $\varphi_j \mod 2\pi$, в которых уравнения (4) принимают "универсальный" вид:

$$\dot{\mathcal{J}}_k = 0\,, \quad \dot\varphi_j = \mathcal{J}_j\,, \qquad k, j = 1, \ldots, n\,.$$

Перефразируя Льва Толстого, можно сказать, что все интегрируемые гамильтоновы системы похожи друг на друга, а каждая неинтегрируемая система неинтегрируема по-своему.

6. К Лагранжу и Якоби восходит фундаментальное замечание о том, что десять классических интегралов задачи многих гравитирующих тел являются следствием инвариантности уравнений движения относительно действия десятипараметрической группы Галилея. Это замечание впоследствии было обобщено Эмми Нётер (1918 г.): если функционал действия

$$\int_{t_1}^{t_2} L(\dot{q}, q)\, dt$$

инвариантен относительно группы $q \to g^\alpha(q)$, то уравнения Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0$$

допускают интеграл $pv = \mathrm{const}$, где $p = \partial L/\partial \dot{q}$ — канонический импульс, и $v(q) \doteq d/d\alpha\big|_{\alpha=0}\big(g^\alpha(q)\big)$ — векторное поле, порождающее группу симметрий.

Факторизацией по орбитам действия группы симметрий можно понизить порядок системы дифференциальных уравнений. Примерами служат переход к барицентрической системе отсчета и знаменитый результат Якоби об “исключении узлов” в задаче многих тел. Развивая эти идеи, Софус Ли доказал интегрируемость в квадратурах системы n дифференциальных уравнений, допускающих $(n-1)$-мерную разрешимую группу симметрий. Алгебраический аналог теории Ли — знаменитая теория Галуа групп подстановок корней многочленов.

В гамильтоновой механике особую роль играют группы симметрий, порождаемые гамильтоновыми системами: если функции H и F находятся в инволюции, то фазовый поток гамильтоновой системы с гамильтонианом F переводит решения уравнений Гамильтона с гамильтонианом H в решения тех же уравнений. Таким образом, задача о группах симметрий уравнений Гамильтона содержит как частный случай задачу о первых интегралах. Нётеровы симметрии порождаются линейными интегралами $F = p \cdot v(q)$.

7. С другой стороны, усилия Клеро, Лагранжа, Пуассона, Лапласа, Гаусса, направленные на приближенное решение прикладных задач небесной механики, привели в конце концов к созданию теории возмущений. Решения уравнений движения предлагается искать в виде рядов по степеням малого параметра (например, в Солнечной системе таким параметром является отношение массы Юпитера к массе Солнца). Впоследствии Делоне, Гильден, Линдштедт модифицировали теорию возмущений с помощью метода

Гамильтона — Якоби. Пусть $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots$ ($\varepsilon \ll 1$) и "невозмущенная" задача с гамильтонианом H_0 интегрируема. Предлагается искать производящую функцию S в виде ряда $S_0 + \varepsilon S_1 + \ldots$, удовлетворяющего уравнению

$$H_0\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) + \varepsilon H_1\left(\frac{\partial S}{\partial q}, q\right) + \ldots = K_0(P) + \varepsilon K_1(P) + \ldots, \qquad (5)$$

где функции K_i пока неизвестны. Функции S_0 и K_0 согласно предположению могут быть найдены из уравнения (5) при $\varepsilon = 0$. Функции S_i и K_i при $i \geqslant 1$ находятся последовательно; возникающий произвол в их определении можно исключить с помощью условия отсутствия так называемых "вековых" членов.

Таким образом, возмущенную задачу можно считать "решенной", если ряды теории возмущений корректно определены и являются сходящимися. Из их сходимости вытекал бы ряд важных следствий (в частности, вечная устойчивость Солнечной системы). Забегая вперед, скажем о разочаровывающем результате Пуанкаре: в общем случае из-за наличия так называемых малых делителей ряды теории возмущений расходятся. Более того, расходятся ряды усовершенствованной теории возмущений, предложенной Пуанкаре и Болином, в которой решения разлагаются в ряды не по степеням ε, а по степеням $\sqrt{\varepsilon}$. Заметим, что если ряды теории возмущений сходятся, то уравнения движения имеют полный набор интегралов в инволюции, которые можно представить в виде сходящихся степенных рядов по ε (или $\sqrt{\varepsilon}$).

Уиттекер, Черри и Биркгоф получили впоследствии (1916–1927 гг.) аналогичные результаты для гамильтоновых систем в окрестности положений равновесия и периодических траекторий. Они показали, что в общем случае существует каноническое преобразование, задаваемое формальными степенными рядами, после которого уравнение Гамильтона просто интегрируется. Гамильтоновы системы со сходящимся преобразованием Биркгофа иногда называются *интегрируемыми по Биркгофу*. В этом случае также существует полный набор независимых коммутирующих интегралов специального вида.

8. После того как математики осознали невозможность решения в замкнутой форме уравнений классической динамики, появились строгие результаты об их неинтегрируемости. Первым среди них была, по-видимому, теорема Лиувилля (1841 г.) о неразрешимости в квадратурах уравнения $\ddot{x}+tx = 0$ Более точно, не существует поля, содержащего все решения уравнения Лиувилля, которое можно получить из поля рациональных функций от t последовательностью конечных алгебраических расширений, присоединений интегралов и присоединений экспонент интегралов [207]. В 1887 г. появилась теорема Брунса о несуществовании в задаче трех тел алгебраических интегралов, независимых от классических [184]. "К сожалению, в его доказательстве содержался большой пробел, восполнить который было делом деликатным", — сообщает Пуанкаре в своем "Аналитическом резюме". — "Я был счастлив поставить прекрасное и искусное доказательство Брунса вне всяких возражений". Пуанкаре здесь имеет в виду свою работу [226]. Теорема Брунса — Пуанкаре была обобщена Пенлеве (1898 г.) на случай, когда интегралы алгебраичны лишь по скоростям трех гравитирующих тел. Впоследствии аналогичные результаты получены Гюссоном (1906 г.) и другими авторами в динамике тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Можно, однако, согласиться с Уинтнером [162], что эти "изящные отрицательные результаты не имеют какого-либо значения в динамике", поскольку они никак не учитывают особенности поведения фазовых траекторий. Что касается первых интегралов, то локально в окрестности неособой точки полный набор независимых интегралов существует всегда. Их алгебраичность или трансцендентность зависит исключительно от выбора независимых переменных. Поэтому задача об интегралах является содержательной лишь тогда, когда она изучается во всем фазовом пространстве или в окрестности инвариантного множества (например, положения равновесия или периодической траектории).

Несмотря на явную недостаточность для целей динамики теорем о несуществовании алгебраических интегралов, результаты подобного рода долгое время оставались весьма популярными. Так, Карл Зигель счел необходимым доказать в 1936 г. теорему Брунса — Пуанкаре для ограниченного варианта задачи трех тел.

9. Плодотворная постановка задачи об интегрируемости уравнений Гамильтона и первые нетривиальные результаты в этом направлении принадлежат Анри Пуанкаре. В работе "О проблеме трех тел и об уравнениях динамики" (1890 г.) он исследовал задачу о полной интегрируемости "основной проблемы динамики". Речь идет о гамильтоновых системах, возникающих в теории возмущений: функция Гамильтона разлагается в ряд по степеням малого параметра $H = H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2 + \ldots$, причем гамильтониану H_0 отвечает вполне интегрируемая система. Пуанкаре нашел необходимые условия существования дополнительных интегралов в виде степенных рядов $\sum F_k \varepsilon^k$, коэффициенты которых F_k суть аналитические функции в окрестности инвариантных торов невозмущенной системы (при $\varepsilon = 0$). Из его результатов вытекает, в частности, расходимость рядов различных вариантов теории возмущений в общем случае. Пуанкаре указал также явления качественного характера в поведении фазовых траекторий, препятствующие появлению новых интегралов; среди них — рождение изолированных периодических решений и расщепление асимптотических поверхностей. Он применил свои общие методы к различным вариантам задачи n тел. Оказалось, что, кроме известных классических законов сохранения, уравнения движения не имеют новых аналитических интегралов, аналитических по массам планет.

К. Зигель в 1941–1954 гг. исследовал вопрос об интегрируемости гамильтоновых систем вблизи устойчивых положений равновесия. Он доказал, что в типичной ситуации уравнения Гамильтона не имеют полного набора аналитических интегралов и преобразование Биркгофа расходится. Доказательство Зигеля расходимости преобразования Биркгофа в идейном отношении восходит к исследованиям Пуанкаре: оно основано на тщательном анализе семейств невырожденных долгопериодических решений.

После работ А. Пуанкаре в XX в. постепенно сложилось отчетливое понимание того, что невозможность продолжить локально существующие интегралы до интегралов "в целом" связана со сложным поведением фазовых траекторий на уровнях тех интегралов (вроде интеграла энергии), которые известны, но имеются в недостаточном числе. Попросту говоря, на интегральном уровне должны существовать траектории, всюду плотные в некоторой области на нем. Системы, обладающие m, но не $m+1$ интегралами "в целом", Леви-Чивита предложил называть m-импримитивными. Здесь проблемы интегрируемости смыкаются с задачами эргодической теории. Примером служит доказанная в 1939 г. теорема Э. Хопфа об эргодичности геодезического потока на любой компактной поверхности отрицательной кривизны. Для исследования геодезических на поверхностях отрицательной кривизны Биркгоф, Морс и Хедлунд создали символическую динамику, позволяющую описывать сложное поведение траекторий в вероятностных терминах. Однако, как отмечает Пуанкаре [147], "...траектории задачи трех тел*) сопоставимы не с геодезическими линиями на поверхностях отрицательной кривизны, а наоборот, с геодезическими линиями на выпуклых поверхностях... К сожалению, эта задача значительно сложнее...". Здесь уже зоны квазислучайного поведения фазовых траекторий чередуются и сосуществуют с областями, составленными из траекторий "регулярного" вида. Обсуждение этих вопросов можно найти в докладе А. Н. Колмогорова [111] и книге Мозера [221]. Непосредственное приложение к проблеме интегрируемости задачи трех тел идея сложного поведения фазовых траекторий нашла в работе В. М. Алексеева [2].

10. В динамике твердого тела усилиями Д. Н. Бобылева, В. А. Стеклова, С. А. Чаплыгина, Д. Н. Горячева и других исследователей были найдены несколько "частных случаев интегрируемости". Речь идет о частных точных решениях, которые удается найти с помощью квадратур. Траектории этих решений, как

*) И многих других задач динамики. — *В. К.*

правило, замкнуты. В начале века была популярна точка зрения, высказанная Ф. Клейном и А. Зоммерфельдом [209]: если известен достаточно большой набор частных решений, то посредством интерполирования можно составить представление о свойствах вращения твердого тела в общем случае. Однако дальнейшее развитие теории динамических систем не подтвердило концепцию Клейна — Зоммерфельда. В фазовом пространстве задачи о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки почти всегда имеются зоны квазислучайного движения, наличие которых никак нельзя вывести из факта существования большого числа периодических или условно-периодических траекторий.

В этой книге мы не будем касаться вопросов, связанных с поиском точных частных решений уравнений динамики.

11. В последнее время получили дальнейшее развитие идеи Пуанкаре, а также найдены новые явления в поведении гамильтоновых систем, препятствующие их интегрируемости. К ним относятся:

— сложное топологическое строение конфигурационного пространства;

— расщепление и трансверсальное пересечение асимптотических многообразий;

— ветвление решений в плоскости комплексного времени;

— квазислучайные колебания;

— малые знаменатели в высших приближениях теории возмущений.

С их помощью удалось строго показать отсутствие нетривиальных интегралов и групп симметрий в ряде классических задач динамики: в ограниченной задаче трех тел, при вращении тяжелого несимметричного тела с неподвижной точкой, при движении твердого тела в идеальной жидкости, в задаче четырех точечных вихрей на плоскости и многих других. В каждой из этих задач результат о неинтегрируемости основывается на анализе особенностей качественного поведения фазовых траекторий. В итоге, на мой взгляд, сложилась самостоятельная часть теории гамильтоновых систем со своими характерными задачами, методами и результатами. Цель книги — дать систематическое изложение современных идей и результатов этой теории.

ГЛАВА I

ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Существуют различные подходы к изложению теории гамильтоновых систем. С ними можно познакомиться по книгам [11, 53, 157, 163]. В этой главе мы напомним определения основных объектов гамильтоновой механики, а также рассмотрим несколько конкретных гамильтоновых систем, которые в качестве примеров неоднократно будут использованы нами в дальнейшем.

§ 1. Уравнения Гамильтона

1. Начнем с аксиоматического определения скобки Пуассона, идея которого восходит, по-видимому, к Дираку [193]. Пусть M — четномерное многообразие. Множество всех бесконечно дифференцируемых функций $f : M \to \mathbb{R}$ обозначим $C^\infty(M)$. Симплектической (канонической) структурой Σ на M называется билинейное отображение $\{\ ,\ \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (кососимметричность);

2) $\{fg, h\} = f\{g, h\} + g\{f, h\}$ (правило Лейбница);

3) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (тождество Якоби);

4) если точка $m \in M$ не является критической для функции f, то существует такая гладкая функция g, что $\{f, g\}(m) \neq 0$ (невырожденность).

Пара (M, Σ) называется симплектическим (каноническим) многообразием. Функция $\{f, g\}$ называется скобкой Пуассона функций f и g. Скобка Пуассона превращает линейное пространство $C^\infty(M)$ в бесконечномерную алгебру Ли над полем $\mathbb{R}$. Ее центр (множество элементов, коммутирующих со всеми элементами алгебры) состоит лишь из постоянных функций.

Т е о р е м а (Дарбу). *В малой окрестности любой точки на M существуют такие локальные координаты $(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n)$*

$(2n = \dim M)$, что $\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\frac{\partial g}{\partial y_i} - \frac{\partial f}{\partial y_i}\frac{\partial g}{\partial x_i}\right)$.

Координаты x, y называются симплектическими (каноническими). Доказательство теоремы Дарбу можно найти в книгах [11, 41].

2. Пусть $H : M \to \mathbb{R}$ — гладкая функция. *Гамильтоновой системой* на (M, Σ) с функцией Гамильтона H называется дифференциальное уравнение

$$\dot{F} = \{F, H\}\,, \qquad F \in C^\infty(M)\,. \tag{1.1}$$

Его решения — такие гладкие отображения $m : \Delta \to M$ (Δ — интервал в $\mathbb{R}$), что для любой функции $F \in C^\infty(M)$ выполнено соотношение $\frac{dF\big(m(t)\big)}{dt} = \{F, H\}\big(m(t)\big)$ $(t \in \Delta)$.

В симплектических координатах x, y уравнение (1.1) эквивалентно $2n$ каноническим *уравнениям Гамильтона*:

$$\dot{x}_i = \{x_i, H\} = \frac{\partial H}{\partial y_i}\,, \quad \dot{y}_i = \{y_i, H\} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,.$$

Эти уравнения можно записать в более компактной форме, если ввести кососимметричную матрицу $J = \begin{Vmatrix} 0 & E \\ -E & 0 \end{Vmatrix}$, где E — единичная $(n \times n)$-матрица. Если $(x, y) = z$, то

$$\dot{z} = J\frac{\partial H}{\partial z}\,. \tag{1.2}$$

Многообразие M называется пространством состояний или фазовым пространством гамильтоновой системы (1.1), а величина $(\dim M)/2$ — числом ее степеней свободы. Часто приходится рассматривать неавтономные гамильтоновы системы, в которых гамильтониан H зависит явно от времени.

Гамильтоново векторное поле (1.2) для краткости будем обозначать $v_H(z)$.

3. Диффеоморфизм $\varphi : M \to M$ называется каноническим, если он сохраняет скобку Пуассона: $\{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}(m) = \{f, g\}(\varphi(m))$. Канонические диффеоморфизмы симплектического многообразия (M, Σ) образуют, конечно, группу*). Фазовый поток g_H^t любой гамильтоновой системы на M является однопараметрической подгруппой группы канонических диффеоморфизмов M.

*) "...Всякий раз, когда приходится иметь дело с некоторым объектом Σ, наделенным структурой, попытайтесь определить группу его автоморфизмов... Вы можете рассчитывать на то, что на этом пути вам удастся глубоко проникнуть во внутреннее строение объекта Σ" (Г. Вейль, "Симметрия").

В локальных симплектических координатах условие каноничности отображения $\varphi : x, y \to X, Y$ можно представить в любом из следующих двух эквивалентных условий:

1) для каждого замкнутого контура γ

$$\oint_\gamma y\,dx = \oint_\Gamma Y\,dX \qquad \left(= \oint_\gamma Y(x,y)\,dX(x,y)\right) ,$$

где Γ — образ контура γ при отображениии φ;

2) $D^T JD = J$, где D — матрица Якоби отображения φ.

В новых координатах $(X, Y) = Z$ уравнения (1.2) снова будут иметь гамильтонов вид $\dot{Z} = J\partial K(Z)/\partial Z$, причем $K(Z) = H(z)$.

Канонические диффеоморфизмы полезно изучать с помощью аппарата производящих функций. Пусть, например, $\det \|\partial X/\partial x\| \neq 0$. В этом случае можно разрешить (по крайней мере локально) уравнение $X = X(x,y)$ относительно x и считать X, y "независимыми" координатами. Тогда $x = x(X,y)$, $Y = Y(X,y)$. Если мы положим $S = \int_{X_0,y_0}^{X,y} x\,dy + Y\,dX$ (значения интеграла не зависят от пути интегрирования), то $x = \partial S/\partial y$, $Y = \partial S/\partial X$. Функция $S(X, y)$ называется производящей функцией канонического отображения φ. Если, например, φ — тождественное отображение, то $S = Xy$.

4. Пусть γ — замкнутая кривая в расширенном фазовом пространстве $M \times \mathbb{R} = \{z, t\}$ гамильтоновой системы $\dot{z} = JH'(z,t)$. Каждая точка $(z_0, t_0) \in \gamma$ определяет единственную регулярную кривую $(z(t), t)$ в $M \times \mathbb{R}$, где $z(\cdot)$ — решение уравнений Гамильтона с начальным условием $z(t_0) = z_0$. Совокупность этих кривых заметает цилиндрическую поверхность Π в $M \times \mathbb{R}$, которая называется трубкой траекторий. Согласно теореме Пуанкаре — Картана [69], интеграл $\int_{\gamma'} y\,dx - H\,dt$ имеет одно и то же значение для всех гомологичных замкнутых кривых γ' на Π (одинаково "охватывающих" трубку траекторий Π).

Пусть две замкнутые кривые γ_1 и γ_2 — сечения поверхности Π соответственно плоскостями $t = t_1$ и $t = t_2$. Тогда $\int_{\gamma_1} y\,dx = \int_{\gamma_2} y\,dx$; этот результат впервые получен Пуанкаре [146, т. III]. В частности, если γ — замкнутая кривая на M и g_H^t — фазовый поток гамильтоновой системы, то интеграл от 1-формы $y\,dx$ по замкнутой кривой $g_H^t(\gamma)$ не зависит от t. Отсюда выводится "основная теорема гамильтоновой механики": фазовый поток уравнений Гамильтона является семейством канонических преобразований.

5. Симплектическую структуру на M можно задать с помощью симплектического атласа — набора совместных друг с другом карт, в котором переход от карты к карте является гладким каноническим отображением. Пусть, например, $M = T^*N$ — кокасательное расслоение гладкого многообразия N. Симплектическая структура на T^*N задается набором локальных координат x, y, где x — локальные координаты на N, y — компоненты линейных дифференциальных форм на T_x^*N в базисе dx.

Имеется еще один распространенный вариант определения симплектической структуры и гамильтоновой системы. Исходным пунктом здесь является замкнутая невырожденная 2-форма Ω на четномерном многообразии M. Форма Ω позволяет построить естественный изоморфизм касательного T_xM и кокасательного T_x^*M пространств: вектору $\xi \in T_xM$ ставится в соответствие ковектор $\varphi_\xi \in T_x^*M$ по правилу $\varphi_\xi(\eta) = \Omega(\xi, \eta)$, $\eta \in T_xM$. Пусть $\mathbf{J}$ — обратное отображение, и пусть H — гладкая функция на M (возможно, зависящая от времени). Дифференциал dH является 1-формой (элементом из T^*M), поэтому $\mathbf{J}\,dH$ — гладкое векторное поле на M. Обозначим его v_H и назовем гамильтоновым векторным полем. Соответствующее дифференциальное уравнение на M

$$\dot{x} = v_H(x) \tag{1.3}$$

эквивалентно (1.1).

Действительно, пусть F и G — гладкие функции на M. Корректно определена функция $\Omega(v_G, v_F)$, которая, как можно проверить, удовлетворяет свойствам 1)–4) скобки Пуассона. Итак, $\Omega(v_G, v_F)$ — скобка Пуассона функций F и G, и мы можем ее обозначить $\{F, G\}$. Ввиду тождества $\{F, H\} = \Omega(v_H, v_F) = dF(\mathbf{J}\,dH) = dF(v_H)$, можно записать уравнение (1.3) в виде (1.1). Обратно, пусть F — функция на M. Из свойств 1) и 3) скобки Пуассона вытекает, что $v_F = \{F, \cdot\}$ является дифференцированием, т. е. касательным вектором к M. В силу невырожденности скобки Пуассона все касательные векторы можно представить в таком виде. Пусть G — еще одна такая функция и $v_G = \{G, \cdot\}$ — соответствующий касательный вектор. Определим 2-форму Ω по формуле $\Omega(v_G, v_F) = \{F, G\}$. Эта форма, очевидно, билинейна, кососимметрична и невырождена. Из тождества Якоби можно вывести, что форма Ω замкнута ($d\Omega = 0$). В симплектических координатах x, y она принимает канонический вид $\Omega = \sum dy_i \wedge dx_i$. Это — одна из эквивалентных формулировок теоремы Дарбу. В координатах x, y уравнения (1.3) имеют вид (1.2). Отметим еще, что J — матрица оператора $\mathbf{J}$ в симплектических координатах.

Таким образом, симплектическую структуру на M можно задавать замкнутой невырожденной 2-формой Ω. Допуская вольность речи, форму Ω также будем называть *симплектической структурой*. В дальнейшем будут использоваться разные способы описания гамильтоновых систем.

6. Предположим, что гладкие функции H и F коммутируют (находятся "в инволюции"): $\{H,F\}=0$. Тогда F — первый интеграл канонической системы с гамильтонианом H, и наоборот. Фазовые потоки g^t_H и g^s_F этих систем также коммутируют на M. Так как $\{\{F,G\},H\}=\{\{F,H\},G\}-\{\{G,H\},F\}$, то интегралы любой гамильтоновой системы образуют подалгебру в алгебре Ли всех гладких функций на M (теорема Пуассона).

7. Натуральная механическая система — это тройка (N,T,V), где N — гладкое многообразие (пространство положений), T — риманова метрика на N (кинетическая энергия), V — гладкая функция на N (потенциал силового поля). Движения такой системы — гладкие отображения $q:\mathbb{R}\to N$, являющиеся экстремалями функционала действия $\int_{t_1}^{t_2} L(\dot q(t),q(t))\,dt$, где $\dot q(t)$ — касательный вектор к N в точке $q(t)$, $L=T-V$ — функция Лагранжа. Изменение со временем локальных координат q на N описывается уравнением Эйлера — Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot q}=\dfrac{\partial L}{\partial q}$.

Рассмотрим естественное отображение $TN\to T^*N$, порожденное римановой метрикой: $(q,\dot q)\to(q,p)$, где $p=\partial T/\partial\dot q$. Очевидно, что p — линейная форма на T_qN. Квадратичная форма T положительно определена, поэтому линейное отображение $\dot q\to p$ — изоморфизм линейных пространств T_qN и T^*_qN.

Рассмотрим полную энергию системы $H:T^*N\to\mathbb{R}$, определенную формулой $H(p,q)=(p\dot q-L)\big|_{\dot q\to p}=\left(\dfrac{\partial T}{\partial\dot q}\dot q-T+V\right)\Big|_{\dot q\to p}=$ $=(T+V)\big|_{p,q}$.

Т е о р е м а (Пуассон — Гамильтон). *Функции $q(t),p(t)$ удовлетворяют каноническим уравнениям $\dot p=-\partial H/\partial q$, $\dot q=\partial H/\partial p$.*

Аналогичная конструкция справедлива и для лагранжианов более общего вида. Предположим, что L как функция от скоростей $\dot q$ выпукла (квадратичная форма $(L''_{\dot q\dot q}\xi,\xi)$ положительно определена) и растет на бесконечности быстрее линейной функции ($L/|\dot q|\to\infty$ при $|\dot q|\to\infty$). Тогда преобразование Лежандра

$$(q,\dot q)\to(q,p)\,,\quad L\to H\,;\quad p=\frac{\partial L}{\partial\dot q}\,,\quad H=(p\dot q-L)\big|_{\dot q\to p}\,,$$

определено в целом, причем гамильтониан H также является выпуклым по импульсам p и растет на бесконечности быстрее линейной функции.

Не следует думать, что уравнения Гамильтона встречаются в механике только как эквивалентная запись уравнений Лагранжа.

Это не так, и вот простой пример. Рассмотрим плоское течение несжимаемой жидкости. Пусть a, b — компоненты поля скоростей v ее частиц в декартовых координатах x, y. Из условия несжимаемости $\operatorname{div} v = 0$ следует, что 1-форма $a\,dy - b\,dx$ при всех значениях t является дифференциалом некоторой функции $\Psi(x, y, t)$. Уравнения движения частиц жидкости можно представить в виде уравнений Гамильтона $\dot{x} = \Psi'_y$, $\dot{y} = -\Psi'_x$ с гамильтонианом Ψ. В гидродинамике функция Ψ называется функцией тока: если течение стационарно, то частицы движутся по кривым Ψ=const.

8. Натуральные системы "обратимы": их лагранжианы инвариантны при подстановке $t \to -t$, так что наряду с движением $q(t)$ всегда имеется движение $q(-t)$.

Непосредственным обобщением обратимых механических систем являются системы с *гироскопическими силами.* Их природа может быть самой различной. Гироскопические силы появляются при переходе во вращающуюся систему отсчета, при понижении числа степеней свободы систем с симметриями (см., например, [12, гл. III], при описании движения заряженных частиц в магнитном поле. Дадим формальное определение.

Пусть N — пространство положений натуральной системы, $x_1, \ldots, x_n$ — локальные координаты на N, а $y_1, \ldots, y_n$ — импульсы. Координаты x, y являются каноническими на T^*N, и в этих переменных симплектическая структура Ω имеет стандартный вид $\Omega = \sum dy_i \wedge dx_i$. Рассмотрим дополнительно некоторую замкнутую 2-форму на N: $\Gamma = \sum \Gamma_{ij}(x)\,dx_i \wedge dx_j$ $(d\Gamma = 0)$; эта форма называется в механике формой гироскопических сил. Сумма двух форм $\Omega + \Gamma$ определяет новую симплектическую структуру на пространстве кокасательного расслоения многообразия N. Если H — некоторая функция на T^*N, то пара $(\Omega + \Gamma, H)$ задает некоторую гамильтонову систему с гамильтонианом H; эту систему назовем системой с гироскопическими силами. Ясно, что наличие гироскопических сил не изменяет полной энергии H. К форме $\Omega + \Gamma$ можно применить теорему Дарбу и представить ее в каноническом виде. Для этого, пользуясь замкнутостью формы Γ, запишем локально: $\Gamma = dF$, $F = \sum F_k(x)\,dx_k$. Тогда в переменных x, y имеем $\Omega + \Gamma = \sum dy_i \wedge dx_i + \sum dF_i \wedge dx_i = \sum d(y_i + F_i) \wedge dx_i$. Следовательно, переменные x', y', определяемые равенствами $x'_k = x_k$, $y'_k = y_k + F_k(x_1, \ldots, x_n)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ будут каноническими координатами для новой симплектической структуры. В новых переменных уравнения Гамильтона имеют канонический вид с функцией Гамильтона $H(x', y' - F) = H(x, y)$.

Рассмотрим случай, когда замкнутая форма гироскопических сил точна: $\Gamma = d\Phi$, где Φ — некоторая 1-форма на N. В этом случае уравнения движения можно представить в виде уравнений Лагранжа с глобально определенным лагранжианом $L = \langle \dot{x}, \dot{x} \rangle / 2 +$

$+ \langle v(x), \dot{x}\rangle - V(x)$. Здесь метрика $\langle\ ,\ \rangle$ задает кинетическую энергию системы, 1-форма $\langle v, \dot{x}\rangle$ совпадает с формой Φ, v — некоторое векторное поле на N. Функция Гамильтона имеет вид $H = H_2 + H_1 + H_0$, где H_s — однородная форма по импульсам степени s, причем $H_0 = \langle v, v\rangle/2 + V$.

9. Рассмотрим восходящее к Лагранжу обобщение вариационной задачи из п. 7. Пусть $q : [t_1, t_2] \to N$ — экстремаль функционала действия $\int_{t_1}^{t_2} L\,dt$, $L = T - V$, в классе кривых с закрепленными концами, удовлетворяющих системе уравнений

$$a_1 \cdot \dot{q} = \ldots = a_m \cdot \dot{q} = 0\,. \tag{1.4}$$

Здесь $a_1, \ldots, a_m$ — гладкие ковекторные поля на N, линейно независимые в каждой точке, и $m < \dim N$. Следуя методу множителей Лагранжа, введем дополнительные координаты $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и лагранжиан $\mathcal{L} = L - \sum \lambda_i (a_i \cdot \dot{q})$. Можно показать (см., например, [19]), что экстремали рассматриваемой вариационной задачи находятся из следующей системы дифференциальных уравнений Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}\,. \tag{1.5}$$

Последняя группа уравнений эквивалентна уравнениям связей (1.4). Систему (1.5) можно представить в виде уравнений Гамильтона. Для этого положим

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} - \sum \lambda_i a_i\,, \qquad a_j \cdot \dot{q} = 0\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m\,. \tag{1.6}$$

Если форма T положительно определена и ковекторы a_j независимы, то из этой системы уравнений можно найти $\dot{q}$ и λ как функции от p и q. Положим

$$H = (p\dot{q} - L)\big|_{\dot{q}\to p} = (T + V)\big|_{\dot{q}\to p}\,. \tag{1.7}$$

Переменные p и q как функции t удовлетворяют каноническим уравнениям Гамильтона с гамильтонианом H. Доказательство можно найти, например, в [85 (I)].

Рассмотрим частный случай интегрируемых связей вида

$$f_1(q) = \ldots = f_m(q) = 0\,. \tag{1.8}$$

Эти уравнения выделяют в пространстве положений N^n подмногообразие размерности $n - m$. Экстремали соответствующей вариационной задачи со связями (1.8) являются движениями голономной механической системы с $n - m$ степенями свободы. Согласно п. 7, уравнения движения можно представить в виде $2(n-m)$ уравнений Гамильтона. Однако можно поступить по-другому. Дифференцируя уравнения (1.8) по t, запишем их в виде (1.4): $\frac{\partial f_1}{\partial q} \cdot \dot{q} = \ldots = \frac{\partial f_m}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0$. Вводя затем канонические переменные по формулам (1.6), уравнения движения можно записать в виде $2n$ дифференциальных уравнений Гамильтона, которые можно трактовать как уравнения в "избыточных" переменных. Этот результат фактически принадлежит Г. К. Суслову [154].

В качестве примера рассмотрим задачу о движении точки единичной массы в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{r\}$ по гладкой регулярной поверхности $\Sigma = \{f(r) = 0\}$ в силовом поле с потенциалом $V(r)$. Положим, согласно (1.5),

$$p = \dot{r} + \lambda \frac{\partial f}{\partial r}, \qquad \lambda = \frac{(p, f'_r)}{(f'_r, f'_r)}. \tag{1.9}$$

Движение точки описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{r} = H'_p, \quad \dot{p} = -H'_r, \quad H = \frac{1}{2}|\dot{r}|^2 + V = \frac{1}{2}(p \times n)^2 + V, \tag{1.10}$$

где n — единичный вектор нормали к поверхности Σ. Следовательно, уравнения (1.10) определяются самóй поверхностью Σ и не зависят от вида уравнения $f = 0$, задающего эту поверхность.

Уравнения (1.10) имеют интеграл энергии H и "геометрический" интеграл $F = f(r)$. В стандартной симплектической структуре $dp \wedge dr$ скобка Пуассона $\{H, F\}$ равна нулю. Пусть $g(\dot{r}, r)$ — первый интеграл "классических" уравнений движения $\ddot{r} = -\partial V/\partial r + \lambda \partial f/\partial r$, $f(r) = 0$, а G — функция g, представленная с помощью (1.9) в канонических переменных. Очевидно, что $\{H, G\} = 0$, и легко проверить инволютивность функций G и F.

В общем случае уравнения (1.4) неинтегрируемы, т. е. их нельзя представить в виде (1.8). Такие связи Герц назвал неголономными. Не следует думать, что в этой ситуации канонические уравнения с гамильтонианом (1.6)–(1.7) описывают движение неголономной системы с лагранжианом L и связями (1.4). Классические неголономные уравнения

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} = \sum \mu_i a_i, \qquad a_j \cdot \dot{q} = 0, \tag{1.11}$$

отличаются от уравнений (1.5). Фазовый поток уравнений (1.11) может не иметь абсолютно непрерывной инвариантной меры, поэтому их в общем случае нельзя привести к уравнениям Гамильтона. Уравнения (1.5) лежат в основе ваконломной динамики, развитой в работе [85].

В обстоятельной монографии Ф. Гриффитса [45] изложена геометрия гамильтонова формализма общей вариационной проблемы Лагранжа и решен ряд конкретных вариационных задач (однако автор неверно полагает, что при этом он решил некоторые задачи неголономной механики).

§ 2. Уравнения Эйлера — Пуанкаре на алгебрах Ли

1. Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — независимые касательные векторные поля на n-мерном многообразии N. В каждой точке коммутаторы $[u_i, u_j]$ можно разложить по векторам $\{u_k\}$ как по базису: $[u_i, u_j] = \sum c_{ij}^k(q) u_k$. Если f — гладкая функция на N, то $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = \sum u_i(f)\omega_i$, где $u_i(f)$ — производная от f вдоль поля u_i. Переменные ω — линейные функции от $\dot{q}$ — называются квазискоростями. Представим лагранжиан в виде функции от q и ω: $\mathcal{L}(\omega, q) = L(\dot{q}, q)$.

В новых переменных уравнения Лагранжа примут вид

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_k} = \sum_{i,j} c_{ik}^j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_j}\omega_i + u_k(\mathcal{L}), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.1}$$

Они впервые получены Пуанкаре [227]. Если в качестве u_k взять независимые векторы $\partial/\partial q_k$, то уравнения Пуанкаре перейдут в обычные уравнения Лагранжа. Следует иметь в виду, что система уравнений (2.1) незамкнута; для замыкания надо добавить соотношения между ω и $\dot{q}$.

2. Считая лагранжиан $\mathcal{L}$ функцией, выпуклой по ω и возрастающей на бесконечности быстрее любой линейной функции, выполним преобразования Лежандра: $m_k = \partial\mathcal{L}/\partial\omega_k$, $\mathcal{H} = (m \cdot \omega - \mathcal{L})\big|_{\omega \to m}$. Тогда, как известно, $\omega_k = \partial\mathcal{H}/\partial m_k$, $u_k(\mathcal{L}) = -u_k(\mathcal{H})$. Уравнения (2.1) в переменных q, m примут вид

$$\dot{m}_k = \sum_{i,j} c_{ik}^j m_j \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m_i} - u_k(\mathcal{H}), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.2}$$

Они отмечены Н. Г. Четаевым [187].

3. Пусть теперь N — группа Ли G и $u_1, \ldots, u_n$ — независимые левоинвариантные поля на G. В этом случае $c_{ij}^k = \mathrm{const}$. Предположим еще, что лагранжиан $\mathcal{L}$ сводится лишь к кинетической энергии, которая является левоинвариантной метрикой $\langle\ ,\ \rangle$ на G. Так как $\dot{q} = \sum u_i(q)\omega_i$, то $L = \frac{1}{2}\langle \dot{q}, \dot{q}\rangle = \frac{1}{2}\left\langle \sum u_i\omega_i, \sum u_j\omega_j\right\rangle = \frac{1}{2}\sum I_{ij}\omega_i\omega_j$, где $I_{ij} = \langle u_i, u_j\rangle = \mathrm{const}$ ввиду предположения о левоинвариантности метрики. В этом случае уравнения (2.1)–(2.2) имеют вид

$$\dot{m}_i = \sum c_{ik}^l m_l \omega_k \ , \qquad m_s = \sum I_{sp}\omega_p \ . \tag{2.3}$$

Представленные в переменных ω, они являются уравнениями на алгебре g группы G, а в переменных m — на двойственном линейном пространстве g^*.

Уравнения (2.3) будем называть *уравнениями Эйлера — Пуанкаре*. В качестве комментария рассмотрим частный случай, когда G есть группа $SO(3)$ вращений твердого тела в трехмерном евклидовом пространстве вокруг неподвижной точки. Хорошо известно, что ее алгебра $g = so(3)$ изоморфна алгебре векторов трехмерного ориентированного евклидова пространства со стандартным векторным произведением. В качестве левоинвариантных базисных векторных полей возьмем поля, порождаемые вращениями твердого тела с единичными угловыми скоростями вокруг трех связанных с телом ортогональных осей. Тогда $[u_1, u_2] = u_3$, $[u_2, u_3] = u_1$, $[u_3, u_1] = u_2$. Уравнения (2.3), как легко понять, будут системой динамических уравнений Эйлера: $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial \omega} = \omega \times \dfrac{\partial T}{\partial \omega}$, или

$$I\dot{\omega} = \omega \times I\omega \ . \tag{2.4}$$

Здесь ω — вектор угловой скорости тела, $I = \|I_{ij}\|$ — тензор инерции. Это наблюдение принадлежит Пуанкаре [227].

4. Уравнения (2.3) являются частью гамильтоновой системы, описывающей движение по геодезическим левоинвариантной метрики I_{ij}. Вычислим скобку Пуассона двух функций F и G, заданных на дуальном пространстве g^*. Для этого надо рассмотреть гамильтонову систему с гамильтонианом F и вычислить производную от функции G в силу этой системы. В переменных m, q эти уравнения Гамильтона имеют вид *уравнений Четаева* (2.2): $\dot{m}_k = \sum c_{ik}^j m_j \dfrac{\partial F}{\partial m_i}$. Так как G не зависит от q, то замыкающую группу уравнений нет смысла записывать. Следовательно,

$$\dot{G} = \{G, F\} = \sum c_{ik}^j m_j \frac{\partial F}{\partial m_i}\frac{\partial G}{\partial m_k} \ . \tag{2.5}$$

Итак, скобка Пуассона функций на g^* также является функцией на g^*. Эта скобка удовлетворяет свойствам 1)–3) скобки Пуассона, но может быть вырожденной (поскольку рассматриваются функции специального вида на $TG = G \times g$). Скобка (2.5) называется *скобкой Ли — Пуассона*; она впервые была рассмотрена Ли в его теории групп преобразований. Если F и G линейны по "моментам" m, то их скобка $\{F, G\}$ также линейна по m. Следовательно, пространство линейных функций на g^* (канонически изоморфное алгебре g) является алгеброй Ли относительно скобки Ли — Пуассона; эта алгебра, конечно, изоморфна алгебре g.

В задаче Эйлера о свободном вращении твердого тела скобка Ли — Пуассона задается соотношениями

$$\{m_1, m_2\} = m_3\ , \quad \{m_2, m_3\} = m_1\ , \quad \{m_3, m_1\} = m_2\ . \tag{2.6}$$

Эта скобка вырождена: функция $k^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2$ коммутирует со всеми функциями на $\bigl(so(3)\bigr)^*$.

Относительно скобки Ли — Пуассона уравнения Эйлера — Пуанкаре имеют гамильтонов вид:

$$\dot{m}_i = \{m_i, H\}\ , \qquad H = \langle I^{-1}m, m\rangle/2\ . \tag{2.7}$$

Эти уравнения, однако, не являются "настоящими" уравнениями Гамильтона ввиду вырожденности скобки $\{\ ,\ \}$. Пусть $F_1, \ldots, F_r$ — интегралы уравнений (2.7), независимые на интегральном многообразии $M_c = \{m \in g^* : F_i = c_i,\ 1 \leqslant i \leqslant r\}$ и коммутирующие со всеми функциями на g^*. Ограничим скобку Ли — Пуассона $\{\ ,\ \}$ и функцию Гамильтона H на M_c; ограничения обозначим $\{\ ,\ \}'$ и H'. Уравнения (2.7) на M_c снова будут иметь гамильтонов вид: $\dot{F} = \{F, H'\}'$, $F : M_c \to \mathbb{R}$. Если скобка $\{\ ,\ \}'$ (удовлетворяющая свойствам 1)–3) скобки Пуассона) окажется невырожденной на M_c, то мы получим обычную гамильтонову систему на симплектическом многообразии $(M_c, \{\ ,\ \}')$ с функцией Гамильтона H'. Общая теория сведения уравнений Эйлера — Пуанкаре к уравнениям Гамильтона изложена, например, в книге [11, добавление 2].

Вернемся вновь к задаче Эйлера. В некоторых ортогональных осях (осях инерции) квадратичная форма $T = (I\omega, \omega)/2$ имеет вид $T = (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)/2$. Запишем в этих осях уравнения Эйлера (2.4): $I_1\dot{\omega}_1 = (I_3 - I_2)\omega_3\omega_2$, $I_2\dot{\omega}_2 = (I_1 - I_3)\omega_1\omega_3$, $I_3\dot{\omega}_3 = (I_2 - I_1)\omega_2\omega_1$. Они имеют интеграл момента $k^2 = (I_1\omega_1)^2 + (I_2\omega_2)^2 + (I_3\omega_3)^2$. Напомним, что эта функция коммутирует со всеми функциями на дуальном пространстве $\bigl(so(3)\bigr)^*$. Поверхность уровня этого интеграла $M_c = \{\omega : k^2 = c^2\}$ при $c > 0$ является двумерной сферой. Покажем, что ограничение скобки Ли — Пуассона (2.6) на M_c задает стандартную симплектическую структуру (2-форму ориентированной площади сферы M_c). Пусть $F = f_1m_1 + f_2m_2 + f_3m_3$ — линейная функция с постоянными коэффициентами. Оператор $v_F = \{F, \cdot\}$ является дифференцированием. Представляя его в виде $\sum\limits_{i=1}^{3} a_i \dfrac{\partial}{\partial m_i}$, получим, что числа a_i являются компонентами вектора

$m \times f$. Аналогично, функции $G = \sum g_j m_j$ отвечает вектор $m \times g$. Так как

$$\Omega(v_G, v_F) = \{F, G\} = \left(m, \frac{\partial F}{\partial m} \times \frac{\partial G}{\partial m}\right) = (m, f \times g) \ , \tag{2.8}$$

то, следовательно, значение 2-формы Ω на векторах $m \times f$ и $m \times \times g$ равно смешанному произведению векторов m, f и g. Пусть f и g касаются сферы $M_c = \{m^2 = c^2\}$. Тогда векторы $\xi = m \times f$ и $\eta = m \times g$ также касаются M_c. По формуле (2.8) имеем

$$\Omega(\eta, \xi) = \left(\frac{n}{|m|}, \xi \times \eta\right) \ , \tag{2.9}$$

где n — единичный вектор нормали к M_c. Эта формула задает (с точностью до постоянного множителя) обычную форму площади на M_c.

Согласно теореме Дарбу, уравнения Эйлера на M_c можно привести к каноническим уравнениям Гамильтона. Это можно осуществить явно, вводя специальные симплектические координаты $l \bmod 2\pi$, L $\ (|L| \leqslant c)$ по формулам $I_1\omega_1 = \sqrt{c^2 - L^2}\sin l$, $I_2\omega_2 = \sqrt{c^2 - L^2}\cos l$, $I_3\omega_3 = L$. В этих переменных уравнения Эйлера имеют канонический вид:

$$\dot{l} = \frac{\partial H'}{\partial L} \ , \quad \dot{L} = -\frac{\partial H'}{\partial l} \ , \qquad H' = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin^2 l}{I_1} + \frac{\cos^2 l}{I_2}\right)(c^2 - L^2) + \frac{L^2}{2I_3} \ .$$

Фазовый портрет функции H' изображен на рис. 1. Отождествляя в полосе $|L| \leqslant c$ точки, l-координаты которых отличаются на 2π, а также точки каждой из прямых $L = -c$ и $L = c$, получим сферу M_c с хорошо известной картиной полодий Пуансо. Можно показать также, что симплектическая структура (2.9) в переменных L, l равна именно $dL \wedge dl$.

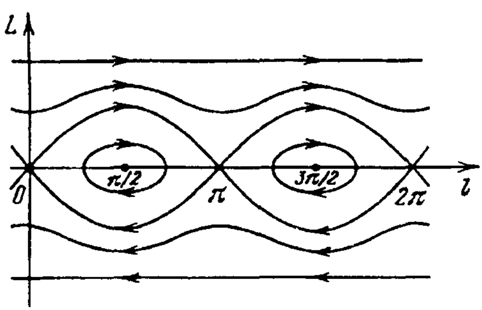

Рис. 1

5. Уравнения Эйлера — Пуанкаре (2.3) не для каждой алгебры Ли g можно привести к гамильтонову виду. Препятствием является отсутствие инвариантной меры. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть $f : \mathbb{R}^n = \{z\} \to \mathbb{R}$ — неотрицательная суммируемая функция. Мера $d\mu = f(z)\, d^n z$ называется абсолютно непрерывной, если для каждой измеримой области $D \subset \mathbb{R}^n$ с положительной лебеговой мерой значение интеграла $\mathrm{mes}(D) = \int_D f\, d^n z$ положительно. Пусть $\dot{z} = v(z)$ — динамическая система и g^t — ее фазовый поток. Мера $d\mu$ называется *инвариантной мерой* этой динамической системы, если $\mathrm{mes}(g^t(D)) = \mathrm{mes}(D)$ для любой измеримой области D и для всех значений времени t. Если f — положительная функция класса C^1, то инвариантная мера называется интегральным инвариантом.

Согласно теореме Лиувилля, мера $f\, d^n z$ является интегральным инвариантом в том и только том случае, когда $\mathrm{div}(fv) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial(fv_i)}{\partial z_i} = 0$. В частности, фазовый поток гамильтоновой системы сохраняет стандартную меру в фазовом пространстве $\mathbb{R}^{2n} = \{x, y\}$ (здесь x, y — канонические координаты).

Следуя [98], рассмотрим задачу о наличии у системы уравнений Эйлера — Пуанкаре (2.3) инвариантной меры на алгебре $g = \{\omega\}$.

Теорема 1. *Уравнения Эйлера — Пуанкаре имеют интегральный инвариант в том и только том случае, когда группа G унимодулярна.*

Напомним, что унимодулярность группы означает наличие двусторонней инвариантной меры. Критерий унимодулярности имеет следующий вид: для каждого i выполнено равенство $\sum_k c_{ik}^k = 0$, где c_{ik}^k — структурные константы алгебры Ли группы G.

Для доказательства достаточности условия теоремы вычислим дивергенцию правой части (2.3) как системы на g^*. Она равна $\sum_{i,k} c_{ik}^k \omega_i$. Следовательно, по теореме Лиувилля, фазовый поток системы (2.3) сохраняет меру $d^n\omega$. Необходимость вытекает из следующего утверждения.

Предложение 1. *Система дифференциальных уравнений с однородными правыми частями имеет интегральный инвариант в том и только том случае, когда ее фазовый поток сохраняет стандартную меру. При этом плотность интегрального инварианта (функция f) является ее первым интегралом.*

Доказательство. Пусть $f > 0$ — плотность интегрального инварианта системы $\dot{z} = v(z)$. Критерий Лиувилля $\mathrm{div}(fv) = 0$ с помощью замены $f = \exp(-w)$ представляется в виде уравнения $\dot{w} = \mathrm{div}\, v$. Его правая часть — однородная форма степени $m - 1$ (m — степень однородности векторного поля v). Так как $w \in C^1$, то

$\dot{w} = O(|z|^m)$. Следовательно, $\dot{w} \equiv 0$ и $\operatorname{div} v \equiv 0$, что и требовалось доказать.

В случае малой размерности g можно дать более точную информацию об инвариантных мерах системы (2.3). Если $n = 2$ и алгебра g неабелева, то уравнения (2.3) не имеют инвариантной меры с суммируемой (а не только гладкой) плотностью.

Действительно, найдутся базисные векторы e_1 и e_2, для которых выполнено коммутационное соотношение $[e_1, e_2] = e_1$ [48]. Поэтому уравнения (2.3) принимают вид

$$\dot{m}_1 = m_1\omega_2 , \qquad \dot{m}_2 = -m_1\omega_1 . \tag{2.10}$$

Все точки прямой $m_1 = I_{11}\omega_1 + I_{12}\omega_2 = 0$, и только они, являются положениями равновесия. Фазовые траектории — дуги эллипсов $\sum I_{ij}\omega_i\omega_j/2 = \text{const}$. Фазовый портрет системы (2.10) изображен на рис. 2. Ясно, что каждая область $D \subset \mathbb{R}^2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ при $t \to \infty$ неограниченно приближается к прямой $m_1 = 0$. Поэтому система (2.10) не может иметь абсолютно непрерывной инвариантной меры.

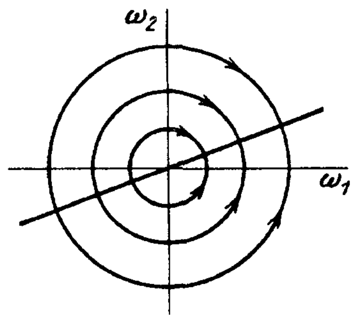

Рис. 2

При $n = 3$ условие теоремы может не выполняться лишь для разрешимых алгебр. Последние можно описать с помощью соотношений $[e_1, e_2] = 0$, $[e_1, e_3] = \alpha e_1 + \beta e_2$, $[e_2, e_3] = \gamma e_1 + \delta e_2$, где $\{e_1, e_2, e_3\}$ — базис в g, матрица $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ невырождена [48]. Будем различать случаи, когда собственные значения матрицы A: (а) вещественные числа одного знака; (б) вещественные числа разных знаков; (в) комплексные числа с ненулевой вещественной частью; (г) чисто мнимые числа.

Предложение 2. *В случае* (г) *уравнения Эйлера — Пуанкаре имеют интегральный инвариант,* в *случае* (б) *нет интегрального инварианта, однако имеется инвариантная мера с плотностью любой конечной гладкости,* в *случаях* (а) *и* (в) *нет инвариантной меры с суммируемой плотностью.*

В случае (г) алгебра g удовлетворяет условию теоремы. Механизм существования инвариантной меры конечной гладкости при условии (б) легко уяснить на примере уравнений $\dot{x} = 2x$, $\dot{y} = -y$, имеющих инвариантную меру с плотностью $|x|^s|y|^{2s+1}$ при всех $s >$ > 0. В случаях (а) и (в) на каждом эллипсоиде интеграла энергии $\sum m_i\omega_i = h > 0$ имеется асимптотически устойчивое положение равновесия. Подчеркнем, что сформулированные выше условия существования инвариантной меры определяются лишь структурой алгебры g и не зависят от выбора левоинвариантной метрики.

Неунимодулярная группа, как известно, всегда имеет унимодулярный нормальный делитель коразмерности единица [34]. Пусть $\{e_k\}$ — базис в g, причем векторы $e_1, \ldots, e_{n-1}$ образуют базис в соответствующем "унимодулярном" идеале алгебры g, а вектор e_n ортогонален $e_1, \ldots, e_{n-1}$ в метрике I_{ij}.

Предложение 3. *Если все собственные числа $(n-$ $-1) \times (n-1)$-матрицы $A = \|c^s_{nk}\|$ (c^s_{nk} — структурные константы, $k, s < n$) лежат в левой (или правой) полуплоскости, то уравнения (2.3) не имеют инвариантной меры с суммируемой плотностью.*

Это утверждение вытекает из того факта, что равновесие $m_s = 0$ $(s < n)$, $m_n = \text{const} \neq 0$ асимптотически устойчиво (при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$) на соответствующей поверхности интеграла энергии.

§ 3. Движение твердого тела

1. Предположим, что твердое тело с неподвижной точкой вращается в силовом поле с потенциалом V. Пусть α, β, γ — векторы неподвижного ортонормированного репера, рассматриваемые как векторы связанного с телом подвижного пространства. Поскольку они однозначно определяют положение тела в неподвижном пространстве, то потенциал V можно считать функцией от α, β, γ. Запишем уравнения Пуанкаре, приняв в качестве пространства положений группу $SO(3)$. Пусть снова (как и в п. 3 § 2) u_1, u_2, u_3 обозначают левоинвариантные векторные поля на группе $SO(3)$, порождаемые постоянными вращениями тела вокруг главных осей инерции с единичной скоростью. Вычислим $u_i(V)$ — производные от потенциала вдоль u_i. Пусть ω' — вектор угловой скорости с координатами (относительно осей инерции) $1, 0, 0$. При вращении со скоростью ω' векторы α, β, γ изменяются в соответствии с геометрическими уравнениями Пуассона: $\dot\alpha = \alpha \times \omega'$, $\dot\beta = \beta \times \omega'$, $\dot\gamma = \gamma \times \omega'$. Следовательно,

$$u_1(V) = \dot V = \left(\frac{\partial V}{\partial \alpha}, \dot\alpha\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta}, \dot\beta\right) + \left(\frac{\partial V}{\partial \gamma}, \dot\gamma\right) =$$
$$= \left(\omega', \frac{\partial V}{\partial \alpha} \times \alpha + \frac{\partial V}{\partial \beta} \times \beta + \frac{\partial V}{\partial \gamma} \times \gamma\right).$$

Аналогичные формулы справедливы и для $u_2(V), u_3(V)$. Полагая в уравнениях (2.1) $\mathcal{L} = T - V$, приходим к уравнениям

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega} + \omega \times \frac{\partial T}{\partial \omega} = \alpha \times \frac{\partial V}{\partial \alpha} + \beta \times \frac{\partial V}{\partial \beta} + \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma} . \tag{3.1}$$

Дополняя их уравнениями Пуассона

$$\dot{\alpha} = \alpha \times \omega , \quad \dot{\beta} = \beta \times \omega , \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega , \tag{3.2}$$

получим замкнутую систему уравнений вращения твердого тела. Эти уравнения получены Лагранжем в его "Аналитической механике" (1788 г.).

Если поле осесимметрично (V зависит, скажем, лишь от γ), то из (3.1), (3.2) получаем замкнутую систему уравнений Эйлера — Пуассона:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \gamma \times \frac{\partial V}{\partial \gamma} , \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega . \tag{3.3}$$

2. Если твердое тело закреплено в его центре масс и на него действуют силы гравитационного притяжения удаленных тел, то с большой точностью потенциал V можно аппроксимировать квадратичной формой

$$\varepsilon_1(I\alpha, \alpha) + \varepsilon_2(I\beta, \beta) + \varepsilon_3(I\gamma, \gamma) , \tag{3.4}$$

где I — оператор инерции твердого тела, постоянные ε_i зависят от распределения масс удаленных гравитирующих тел (см., например, [157]). Если тело вращается в гравитационном поле одного удаленного центра, то в (3.4) надо положить $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Эта задача впервые рассмотрена Тиссераном (1872 г.), установившим ее интегрируемость (по методу интегрирующего множителя Эйлера — Якоби). Общий случай потенциала (3.4) рассмотрен Бруном [183]. Им найдены три инволютивных интеграла, которых достаточно для полной интегрируемости системы (3.1)–(3.2). Явное интегрирование задачи Бруна в θ-функциях выполнено О. И. Богоявленским [181].

Вопросы интегрирования уравнений движения твердого тела (3.1)–(3.2) в различных силовых полях рассмотрены в работах [22, 44, 175].

3. Предположим, что тело вращается в однородном поле силы тяжести. Пусть ε — масса тела, r — радиус-вектор его центра масс в подвижном пространстве. В этой задаче $V = \varepsilon(r, \gamma)$, и уравнения Эйлера — Пуассона (3.3) имеют вид

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \varepsilon\gamma \times r , \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega . \tag{3.5}$$

Эти уравнения зависят от шести параметров: I_1, I_2, I_3, εr_1, εr_2, εr_3, где I_i — главные моменты инерции, а r_i — координаты центра масс относительно осей инерции.

4. Рассмотрим группу $Sp(1)$ — мультипликативную группу кватернионов $q = \chi + \xi i + \eta j + \zeta k$ с единичной нормой: $\chi^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$. Каждому такому кватерниону соответствует линейное отображение T_q алгебры всех кватернионов $\mathbb{K}$ на себя, определенное формулой $T_q(r) = qrq^{-1}$ $(r \in \mathbb{K})$. Легко проверить, что T_q отображает множество чистых кватернионов (у которых $\chi = 0$) на себя. Если отождествить это множество с евклидовым пространством $\mathbb{R}^3$, то T_q будет ортогональным преобразованием $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Рассмотрим теперь твердое тело с закрепленной точкой. Зафиксируем некоторое положение этого тела. Тогда его поворот из начального положения в произвольное задается некоторым ортогональным преобразованием, которому, в свою очередь, соответствует некоторый кватернион $q \in Sp(1)$. Таким образом, каждому кватерниону $q \in Sp(1)$ можно поставить в соответствие положение твердого тела с неподвижной точкой, причем кватерниону $-q$ (и только ему) соответствует то же самое положение тела в $\mathbb{R}^3$. Эти наблюдения восходят к Гауссу. Таким образом, переменные $(\chi, \xi, \eta, \zeta) \in \mathbb{R}^4$ можно считать избыточными координатами в задаче о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки.

Воспользуемся соображениями, изложенными в п. 9 § 1. Известны следующие соотношения [163]:

$$\begin{aligned} \omega_1 &= 2(\chi\dot\xi - \xi\dot\chi + \zeta\dot\eta - \eta\dot\zeta)\,, \\ \omega_2 &= 2(\chi\dot\eta - \eta\dot\chi + \xi\dot\zeta - \zeta\dot\xi)\,, \\ \omega_3 &= 2(\chi\dot\zeta - \zeta\dot\chi + \eta\dot\xi - \xi\dot\eta)\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

Согласно (1.6), обобщенные импульсы $p_\chi, p_\xi, p_\eta, p_\zeta$ определяются по формулам $p_\chi = \partial T/\partial\dot\chi - \lambda\chi$, $p_\xi = \partial T/\partial\dot\xi - \lambda\xi$, $p_\eta = \partial T/\partial\dot\eta - \lambda\eta$, $p_\zeta = \partial T/\partial\dot\zeta - \lambda\zeta$, $\chi\dot\chi + \xi\dot\xi + \eta\dot\eta + \zeta\dot\zeta = 0$. Из этой системы с учетом формул (3.6) можно найти:

$$\begin{aligned} 2I_1\omega_1 f &= p_\xi\chi - p_\chi\xi + p_\eta\zeta - p_\zeta\eta\,, \\ 2I_2\omega_2 f &= p_\eta\chi - p_\chi\eta + p_\zeta\xi - p_\xi\zeta\,, \\ 2I_3\omega_3 f &= p_\zeta\chi - p_\chi\zeta + p_\xi\eta - p_\eta\xi\,, \end{aligned}$$

где $f = \chi^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$.

Следовательно, в новых переменных $\chi, p_\chi, \ldots$ уравнения движения имеют каноническую форму с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{8f^2}\left[\frac{(p_\xi\chi - p_\chi\xi + p_\eta\zeta - p_\zeta\eta)^2}{I_1} + \frac{(p_\eta\chi - p_\chi\eta + p_\zeta\xi - p_\xi\zeta)^2}{I_2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(p_\zeta\chi - p_\chi\zeta + p_\xi\eta - p_\eta\xi)^2}{I_3}\right] + V(\chi, \xi, \eta, \zeta)\,.$$

Рассмотрим случай, когда силовое поле инвариантно относительно группы g поворотов тела вокруг некоторой неподвижной оси l. Направляющие косинусы этой оси относительно осей инерции обозначим $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$. Можно показать, что

$$\gamma_1 = 2(\xi\zeta - \eta\chi)\,, \quad \gamma_2 = 2(\xi\chi + \eta\zeta)\,, \quad \gamma_3 = \chi^2 + \zeta^2 - \xi^2 - \eta^2\,. \quad (3.7)$$

Критерий инвариантности потенциала V относительно действия группы g — постоянство проекции кинетического момента на ось l: $M = I_1\omega_1\gamma_1 + I_2\omega_2\gamma_2 + I_3\omega_3\gamma_3 = \mathrm{const}$. В канонических переменных $\chi, p_\chi, \ldots$ момент M равен $(p_\zeta\chi - p_\chi\zeta + p_\eta\xi - p_\xi\eta)/2$. Используя этот линейный интеграл, можно понизить число степеней свободы рассматриваемой системы на единицу.

5. Рассмотрим некоторые аспекты теории понижения порядка *гамильтоновых систем с симметрией*. Пусть система уравнений Гамильтона $\dot q_i = \partial H/\partial p_i$, $\dot p_i = -\partial H/\partial q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ имеет линейный интеграл $F = \sum f_i(q)p_i$. Ему естественным образом соответствует однопараметрическая группа симметрий g^s пространства положений N — фазовый поток системы уравнений

$$\frac{dq_i}{ds} = \frac{\partial F}{\partial p_i} = f_i(q)\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \qquad (3.8)$$

Орбиты действия группы g^s — фазовые траектории этой системы — локально выпрямляются: в окрестности неособой точки можно так выбрать координаты $Q_1, \ldots, Q_n$, что $dQ_i/ds = 0$ $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$; $dQ_n/ds = 1$. Функции $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ — первые интегралы уравнений (3.8), а $Q_n(q)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum \frac{\partial Q_n}{\partial q_i} f_i = 1\,. \qquad (3.9)$$

Так как $\det \|\partial Q/\partial q\| \neq 0$, то существует каноническое преобразование $(p, q) \to (P, Q)$ с производящей функцией $S(q, P) = \sum P_i Q_i(q)$. В новых координатах $F = \sum f_i p_i = \sum f_i \dfrac{\partial Q_j}{\partial q_i} P_j = P_n$.

Поскольку F — первый интеграл системы с гамильтонианом H, то $H(P, Q)$ не зависит от Q_n. Итак, при фиксированном значении линейного интеграла $F = P_n$ мы понизили (по крайней мере локально) порядок исходной гамильтоновой системы. При этом переменные $Q_1, \ldots, Q_{n-1}$ "нумеруют" орбиты группы g.

Координаты $Q_1, \ldots, Q_n$, участвующие в понижении порядка гамильтоновой системы, определены конечно неоднозначно: к ним можно добавить произвольные первые интегралы уравнения (3.9). Гамильтониан пониженной системы в общем случае зависит от выбора решения Q_n уравнения (3.9). Если же постоянная линейного интеграла F равна нулю, то функция Гамильтона приведенной системы однозначно определена на кокасательном расслоении локального приведенного пространства положений, точки которого являются орбитами действия группы g. Иногда такое приведение при $F = 0$ можно осуществить не только локально, но и в целом.

6. В задаче о вращении твердого тела с неподвижной точкой в осесимметричном силовом поле уравнения (3.8) имеют вид

$$\begin{aligned} \chi' &= \frac{\partial M}{\partial p_\chi} = -\frac{\zeta}{2}, & \zeta' &= \frac{\partial M}{\partial p_\zeta} = \frac{\chi}{2}, \\ \xi' &= \frac{\partial M}{\partial p_\xi} = -\frac{\eta}{2}, & \eta' &= \frac{\partial M}{\partial p_\eta} = \frac{\xi}{2}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Фазовые траектории этой системы (орбиты действия группы g) устроены достаточно просто: они являются большими кругами трехмерных сфер $S^3_r = \{\chi^2 + \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = r^2\} \subset \mathbb{R}^4$. Фактормножество S^3_r/g (множество орбит g на S^3_r) является двумерной сферой $S^2_{r^2}$. Можно считать, что $S^2_{r^2}$ — стандартная сфера $\{\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = r^4\} \subset \mathbb{R}^3$. Действительно, функции $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, определяемые формулами (3.7), образуют независимый набор первых интегралов уравнений (3.10), и точки на сфере $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = r^4$ взаимно однозначно соответствуют большим кругам трехмерной сферы S^3_r. Наше расслоение трехмерной сферы на одномерные известно в геометрии под названием расслоения Хопфа.

Будем считать $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ избыточными координатами приведенной системы. Чтобы выписать ее гамильтониан, надо согласно п. 5 найти решение уравнения (3.9): $-\dfrac{\partial\varphi}{\partial\chi}\zeta + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\chi - \dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi}\eta + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\xi = 2.$

Одним из его решений является функция $\varphi = \operatorname{arctg}(\zeta/\chi) + \operatorname{arctg}(\eta/\xi)$. Отметим, что любое решение этого уравнения имеет особенности в $\mathbb{R}^4$.

Канонические переменные p_1, p_2, p_3, сопряженные с переменными $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, можно найти из системы уравнений

$$\begin{aligned}
2p_1\zeta + 2p_2\chi - 2p_3\xi + M\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} &= p_\xi\,,\\
-2p_1\chi + 2p_2\zeta - 2p_3\eta + M\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} &= p_\eta\,,\\
2p_1\xi + 2p_2\eta + 2p_3\zeta + M\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} &= p_\zeta\,,\\
-2p_1\eta + 2p_2\xi + 2p_3\chi + M\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} &= p_\chi\,.
\end{aligned}$$

С помощью этих формул нетрудно вычислить

$$\begin{aligned}
I_1\omega_1 &= \frac{1}{2f}(p_\xi\chi - p_\chi\xi + p_\eta\zeta - p_\zeta\eta) = \frac{1}{2f}\Bigg[2(p_2\gamma_3 - p_3\gamma_2) +\\
&\qquad + M\left(\chi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \xi\frac{\partial\varphi}{\partial\chi} + \zeta\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - \eta\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)\Bigg] =\\
&= \frac{p_2\gamma_3 - p_3\gamma_2}{f} + \frac{M\gamma_1}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\,,\\
I_2\omega_2 &= \frac{p_3\gamma_1 - p_1\gamma_3}{f} + \frac{M\gamma_2}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}\,, \qquad I_3\omega_3 = \frac{p_1\gamma_2 - p_2\gamma_1}{f}\,.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Здесь $f^2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2$. Гамильтониан приведенной системы равен $H = (I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2)/2 + V$, где вместо $I_1\omega_1$, $I_2\omega_2$ и $I_3\omega_3$ подставлены их выражения через p_i, γ_i с помощью формул (3.11). Наиболее простой вид гамильтониан имеет в случае $M = 0$:

$$\begin{aligned}
H = \frac{1}{2f^2}\Bigg[\frac{(p_2\gamma_3 - p_3\gamma_2)^2}{I_1} + \frac{(p_3\gamma_1 - p_1\gamma_3)^2}{I_2} +\\
+ \frac{(p_1\gamma_2 - p_2\gamma_1)^2}{I_3}\Bigg] + V(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)\,.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

В случае Эйлера ($V \equiv 0$), как известно, сохраняется квадрат модуля кинетического момента

$$\begin{aligned}
&(I_1\omega_1)^2 + (I_2\omega_2)^2 + (I_3\omega_3)^2 =\\
&\qquad = \frac{1}{f^2}\left[(p_2\gamma_3 - p_3\gamma_2)^2 + (p_3\gamma_1 - p_1\gamma_3)^2 + (p_1\gamma_2 - p_2\gamma_1)^2\right]\,.
\end{aligned}$$

Интересно отметить, что эта функция является гамильтонианом канонических уравнений задачи о движении точки массы $m = 2$ по инерции по неподвижной сфере $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$, записанных в естественных избыточных координатах γ_i, p_i $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ (см. (1.10)).

7. Рассмотрим группу $E(3)$ движений твердого тела в трехмерном ориентированном евклидовом пространстве и ее алгебру $e(3)$. Ясно, что $\dim E(3) = 6$. Выберем в твердом теле ортонормированный базис с началом в некоторой точке O. Постоянным вращениям тела с единичной скоростью вокруг векторов базиса отвечают левоинвариантные поля v_1, v_2, v_3 на группе $E(3)$. Точно так же движениям твердого тела, при которых скорость точки O постоянна и равна одному из векторов выделенного базиса, отвечают левоинвариантные поля u_1, u_2, u_3. Ясно, что поля v_i, u_j всюду линейно независимы. Можно показать, что структурные константы алгебры $e(3)$ определяются таблицей

$$[v_i, v_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} v_k\,, \qquad [v_i, u_j] = \sum_k \varepsilon_{ijk} u_k\,, \qquad [u_i, u_j] = 0\,. \quad (3.13)$$

Здесь числа ε_{ijk} равны 1, если перестановка i, j, k — четная, равны -1, если она нечетная, и, наконец, обращаются в нуль, когда среди индексов i, j, k есть совпадающие.

Пусть ω — вектор угловой скорости твердого тела, ν — вектор скорости точки O. Если лагранжиан $\mathcal{L}$ есть функция только от ω и ν, то уравнения Пуанкаре (2.1) с учетом коммутационных соотношений (3.13) можно записать в векторном виде:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega} \times \omega + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} \times \nu\,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \nu} \times \omega\,. \quad (3.14)$$

От уравнений (3.14) можно перейти к уравнениям Четаева:

$$\dot m = m \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m} + p \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}\,, \qquad \dot p = p \times \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial m}\,, \quad (3.15)$$

где $m = \partial\mathcal{L}/\partial\omega$, $p = \partial\mathcal{L}/\partial\nu$, $\mathcal{H}$ — функция от m и p. Как известно из гидродинамики [115], такой вид имеют уравнения движения твердого тела в безграничном объеме идеальной жидкости, покоящейся на бесконечности и совершающей безвихревое движение. При этом функция $\mathcal{H}$ является положительно определенной квадратичной формой:

$$(Am, m)/2 + (Bm, p) + (Cp, p)/2\,. \quad (3.16)$$

Операторы A и C, разумеется, симметричны. Уравнения (3.15) с функцией Гамильтона (3.16) получены Кирхгофом (1870 г.). *Уравнения Кирхгофа* в общем случае содержат 21 параметр. Приводя оператор A (или C) к диагональному виду, их число можно уменьшить на три. Векторы m и p называются соответственно импульсивным моментом и импульсивной силой.

Отметим, что уравнения Эйлера — Пуассона (3.3) можно записать в виде (3.15), если положить $\mathcal{H} = (I^{-1}m, m)/2 + V(p)$. Это замечание принадлежит В. А. Стеклову (1901 г.), указавшему, что задача Тиссерана является частным случаем задачи Кирхгофа.

Скобка Ли — Пуассона для алгебры $e(3)$, порожденная соотношениями (3.13) при соответствии $m_i \leftrightarrow v_i$ и $p_j \leftrightarrow u_j$, вырождена: функции (m, p) и p^2 коммутируют со всеми функциями на $\big(e(3)\big)^*$; они же являются первыми интегралами уравнений Кирхгофа для всех гамильтонианов $\mathcal{H}$, поэтому к уравнениям Кирхгофа можно применить соображения, изложенные в п. 4 § 2. Рассмотрим четырехмерные интегральные поверхности $M_c = \{m, p : (m, p) = c_1,\ (p, p) = c_2\}$ $(c_2 > 0)$, диффеоморфные, как легко видеть, касательному расслоению двумерной сферы. Ограничение скобки Ли — Пуассона на M_c является невырожденной скобкой Пуассона, которая превращает M_c в симплектическое многообразие. Поэтому уравнения Кирхгофа на M_c являются гамильтоновой системой дифференциальных уравнений с гамильтонианом $\mathcal{H}$, ограниченным на M_c; этот факт отмечен в работе [140] и одновременно в работе [84] для случая $c_1 = 0$. Особенно наглядно эта конструкция выглядит при $c_1 = 0$. Положим $m = e \times p$. Если $(m, p) = 0$ и $(p, p) > 0$, то вектор e существует и единственен с точностью до сдвигов вдоль вектора p. Положим $K(p, e) = H(e \times p, p)$. Утверждается, что если функции $e(t)$ и $p(t)$ удовлетворяют каноническим уравнениям $\dot e = -\partial K/\partial p$, $\dot p = \partial K/\partial e$, то функции $m(t) = e(t) \times p(t)$ и $p(t)$ удовлетворяют уравнениям Четаева (3.15). Для доказательства вычислим сначала $\dot p = \dfrac{\partial K}{\partial e} = \dfrac{\partial H}{\partial m}\dfrac{\partial m}{\partial e} = p \times \dfrac{\partial H}{\partial m}$. Так как $m = e \times p$, то $\dot m = \dot e \times p + e \times \dot p = -\dfrac{\partial K}{\partial p} \times p + e \times \left(p \times \dfrac{\partial H}{\partial m}\right)$, $\dfrac{\partial K}{\partial p} = \dfrac{\partial H}{\partial p} + \dfrac{\partial H}{\partial m}\dfrac{\partial m}{\partial p} = \dfrac{\partial H}{\partial p} + \dfrac{\partial H}{\partial m} \times e$. Значит, $\dot m = -\dfrac{\partial H}{\partial p} \times p + p \times \left(\dfrac{\partial H}{\partial m} \times e\right) + e \times \left(p \times \dfrac{\partial H}{\partial m}\right) = p \times \dfrac{\partial H}{\partial p} + (e \times p) \times \dfrac{\partial H}{\partial m} = m \times \dfrac{\partial H}{\partial m} + p \times \dfrac{\partial H}{\partial p}$, что и требовалось доказать. Этот формальный результат дополняет вычисления п. 6.

8. Известно, что "нейтральный" ферромагнетик при вращении становится намагниченным вдоль оси вращения (эффект Барнетта, имеющий квантовомеханическое происхождение [72]). Магнитный момент тела B связан с его угловой скоростью ω соотношением $B = \Lambda\omega$, где Λ — некоторый симметричный линейный оператор. Аналогичное явление имеет место и при вращении сверхпроводящего твердого тела (эффект Лондона). Если тело вращается в однородном магнитном поле с напряженностью H, то на него действуют магнитные силы с моментом $B \times \mathrm{H}$. Применяя теорему моментов, запишем уравнения вращения твердого тела в форме уравнений Эйлера — Пуассона (в подвижном пространстве):

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = (\Lambda\omega) \times \mathrm{H}\ , \qquad \dot{\mathrm{H}} + \omega \times \mathrm{H} = 0\ . \tag{3.17}$$

Мы пренебрегли гиромагнитным эффектом де Гааза — Эйнштейна (двойственным эффекту Барнетта), состоящим в закручивании ферромагнетика вокруг оси при его намагничивании. Полная теория вращения твердого тела в магнитном поле содержится в работе [38]; впрочем, при $\Lambda = \lambda E$, $\lambda = \mathrm{const}$ уравнения (3.17) являются точными. В этом важном частном случае их можно переписать в более удобной форме:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \varepsilon(\omega \times \gamma)\ , \qquad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0\ , \tag{3.18}$$

где $\gamma = \mathrm{H}/|\mathrm{H}|$, $\varepsilon = \lambda|\mathrm{H}|$.

Поскольку $(\omega\times\gamma,\omega) = 0$, магнитные силы не совершают работы и поэтому являются гироскопическими. Введем по обычному правилу 2-форму гироскопических сил Γ, положив $\Gamma(\omega_1,\omega_2) = \varepsilon(\omega_1 \times \gamma,\omega_2) = -\varepsilon(\gamma,\omega_1 \times \omega_2)$. Можно проверить, что форма Γ точна: $\Gamma = d\varphi$, где 1-форма φ задана равенством $\varphi(\omega) = -\varepsilon(\gamma,\omega)$. Отсюда следует возможность представления уравнений (3.18) в форме уравнений Лагранжа с глобально определенным лагранжианом (см. [91]; ср. с замечаниями п. 8 § 1). Действительно, вводя функцию $L = (I\omega,\omega)/2+\lambda(\omega,\gamma)$, уравнения (3.18) можно записать в виде $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial\omega} + \omega\times\dfrac{\partial L}{\partial\omega} = \dfrac{\partial L}{\partial\gamma}\times\gamma$, $\dot{\gamma}+\omega\times\gamma = 0$, и трактовать как уравнения Пуанкаре на группе $SO(3)$ с лагранжианом L. Представим уравнения Пуанкаре в виде уравнений Гамильтона. Для этого положим $m = \partial L/\partial\omega = I\omega + \lambda\gamma$ и введем гамильтониан $H(m,\gamma) = \big[(m,\omega) - L(\omega,\gamma)\big]\big|_{\omega\to m}$. В переменных m,γ уравнения (3.18) приобретают вид уравнений Кирхгофа

$$\dot{m} = m \times \frac{\partial H}{\partial m} + \gamma \times \frac{\partial H}{\partial \gamma}\ , \qquad \dot{\gamma} = \gamma \times \frac{\partial H}{\partial m} \tag{3.19}$$

с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(I^{-1}m,m) - \lambda(I^{-1}m,\gamma) + \frac{\lambda^2}{2}(I^{-1}\gamma,\gamma) = \\ = \big(I^{-1}(m-\lambda\gamma),(m-\lambda\gamma)\big). \tag{3.20}$$

Эта функция неотрицательна, но не является положительно определенной. С точки зрения задачи Кирхгофа, уравнения (3.19) с гамильтонианом (3.20) описывают динамику безмассового твердого тела с винтовой симметрией в безграничном объеме идеальной жидкости.

9. Гиростатом (по Кельвину) называется система, состоящая из твердого тела с неподвижной точкой и симметричного ротора, который может свободно вращаться вокруг некоторой оси, неподвижной относительно твердого тела. Эта система имеет четыре степени свободы; пространством положений является прямое произведение $SO(3) \times S^1$. Кинетический момент ротора как вектор подвижного пространства постоянен; обозначим его λ. Полный кинетический момент системы относительно неподвижной точки равен $m + \lambda = I\omega + \lambda$. Если на систему не действуют внешние силы, то вектор угловой скорости ω удовлетворяет обобщенному уравнению Эйлера

$$I\dot{\omega} + \omega \times (I\omega + \lambda) = 0 . \tag{3.21}$$

Это уравнение впервые получено Жуковским (1885 г.) в задаче о вращении твердого тела с полостями, заполненными идеальной несжимаемой жидкостью. Впоследствии (1895 г.) оно было проинтегрировано в эллиптических функциях Вито Вольтерра в работе, посвященной теории движения полюсов Земли. Уравнение (3.21) есть уравнение Пуанкаре на алгебре $so(3)$ с лагранжианом $T = (I\omega + \lambda, \omega)/2$.

Уравнения движения более общей задачи о вращении твердого тела с несимметричным ротором уже не имеют простой групповой структуры. Гамильтонов формализм в этой задаче изложен в работе [67].

10. В заключение рассмотрим задачу Чаплыгина из неголономной механики — задачу о качении без скольжения уравновешенного, но динамически несимметричного шара по горизонтальной плоскости. Динамика шара описывается в $\mathbb{R}^6 = \{\omega, \gamma\}$ системой

$$\dot{m} + \omega \times m = 0 , \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0 , \qquad m = I\omega + \mu a^2 [\gamma \times (\omega \times \gamma)] . \tag{3.22}$$

Здесь ω — вектор угловой скорости вращения шара, γ — единичный вектор вертикали, I — оператор инерции шара относительно его центра, μ — масса шара, a — его радиус. Формально при $a = 0$ получаем уравнения Эйлера. Уравнения (3.22) имеют четыре интеграла: (m, ω), (m, γ), (m, m), (γ, γ), и интегральный инвариант с плотностью

$$f = \left[(\mu a^2)^{-1} - \left(\gamma, (I + \mu a^2 E)^{-1} \gamma\right) \right]^{-1/2} \tag{3.23}$$

Это обстоятельство позволило Чаплыгину свести интегрирование уравнений (3.22) к гиперэллиптическим квадратурам (детали см. в [172]). Интегрируемые обобщения задачи Чаплыгина даны в работах [90, 124].

§ 4. Колебания маятников

1. Движение математического маятника длины l в поле силы тяжести с ускорением g описывается дифференциальным уравнением $\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0$, $\omega^2 = g/l$, где x — угол отклонения маятника от вертикали. Если энергия маятника $h = \dot{x}^2/2 - \omega^2 \cos x$ отлична от ω^2, то $\sin(x/2)$ и $\cos(x/2)$ — эллиптические функции времени. При $h = \omega^2$ имеем

$$\sin(x/2) = \operatorname{th}\bigl(\omega(t - t_0)\bigr) . \tag{4.1}$$

Эта формула задает двоякоасимптотические движения маятника к верхнему неустойчивому положению равновесия. На фазовом портрете им отвечают движения по сепаратрисам.

2. Пусть точка подвеса математического маятника длины l совершает колебания по периодическому закону $\varepsilon\xi(t)$, $\varepsilon = \mathrm{const}$. Если x — угол отклонения маятника от вертикали, то его кинетическая энергия есть $T = \dfrac{v^2}{2} = \dfrac{l^2\dot{x}^2 + \varepsilon^2\dot{\xi}^2 + 2\varepsilon l\dot{x}\dot{\xi}\,\sin x}{2}$. Потенциальная энергия маятника равна $V = -g\bigl(l\,\cos x + \varepsilon\xi(t)\bigr)$. Уравнение Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dfrac{\partial L}{\partial x}$, $L = T - V$, имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2\bigl(1 + \varepsilon f(t)\bigr)\sin x = 0 , \tag{4.2}$$

где $\omega^2 = g/l$, $f = \xi/g$ — периодическая функция времени.

Это уравнение, конечно, гамильтоново: канонические координаты суть $x \mod 2\pi$, $p = \dot{x}$, а функция Гамильтона имеет вид

$$H = p^2/2 - \omega^2(1 + \varepsilon f)\cos x . \tag{4.3}$$

Пространство положений — окружность $S^1 = \{x \mod 2\pi\}$, фазовое пространство — цилиндр $S^1 \times \mathbb{R}$.

При $\varepsilon = 0$ имеем интегрируемую задачу с одной степенью свободы (математический маятник постоянной длины).

3. Во многих задачах механики встречаются уравнения, похожие на уравнение (4.2). Рассмотрим, например, плоские колебания спутника на эллиптической орбите. Уравнение колебаний можно представить [16] в следующем виде:

$$(1 + e\,\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\,\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\,\sin\delta = 4e\,\sin\nu . \tag{4.4}$$

Здесь e — эксцентриситет орбиты, μ — параметр, характеризующий распределение массы спутника. Смысл переменных δ и ν ясен из рис. 3. Это уравнение можно представить [36] в гамильтоновой форме:

$$\frac{dp}{d\nu} = -\frac{\partial H}{\partial \delta}, \quad \frac{d\delta}{d\nu} = \frac{\partial H}{\partial p},$$

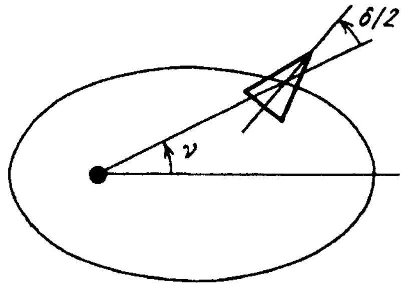

Рис. 3

$$H = \frac{1}{2}\left[\frac{p}{1 + e\cos\nu} - 2(1 + e\cos\nu)\right]^2 - (1 + e\cos\nu)\mu\cos\delta .$$

При движении спутника по почти круговым орбитам ($e \ll 1$) уравнение (4.4) близко к уравнению колебаний обычного маятника.

4. Одномерное движение заряженной частицы в поле волнового пакета описывается уравнением

$$m\ddot{x} = -e\sum_k E_k \sin(\lambda_k x - \omega_k t) . \tag{4.5}$$

Здесь m — масса частицы, e — ее заряд; сумма в правой части представляет собой суперпозицию некоторого числа плоских волн, движущихся с разными фазовыми скоростями ω_k. Эта задача многократно обсуждалась в физической литературе (см., например, [56, 117]).

В случае одной волны после замены $z = \lambda x - \omega t$ уравнение (4.5) переходит в уравнение колебаний обычного маятника: $\ddot{z} + \Omega^2 \sin z = 0$, $\Omega^2 = eE\lambda/m$. Замена $x \to z$ эквивалентна переходу в систему отсчета, движущуюся вместе с волной.

Если имеются две волны ($k = 0$ и $k = 1$), то уравнение (4.5) можно представить в виде

$$\ddot{z} + \Omega_0^2 \sin z = -\varepsilon\Omega_0^2 \sin\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}z - \nu t\right) , \tag{4.6}$$

где $z = \lambda_0 x - \omega_0 t$, $\Omega_0^2 = eE_0\lambda_0/m$, $\varepsilon = E_1/E_0$, $\nu = \omega_1 - \lambda_1(\omega_0/\lambda_0)$. Если безразмерный параметр ε мал, то уравнение (4.6) описывает возмущенное движение математического маятника.

5. Выпишем в явном виде уравнения (3.5), описывающие вращение тяжелого твердого тела с неподвижной точкой:

$$
\begin{aligned}
I_1\dot\omega_1 &= (I_2 - I_3)\omega_2\omega_3 - \varepsilon(r_2\gamma_3 - r_3\gamma_2)\ , \\
I_2\dot\omega_2 &= (I_3 - I_1)\omega_3\omega_1 - \varepsilon(r_3\gamma_1 - r_1\gamma_3)\ , \\
I_3\dot\omega_3 &= (I_1 - I_2)\omega_1\omega_2 - \varepsilon(r_1\gamma_2 - r_2\gamma_1)\ ,
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

$$
\dot\gamma_1 = \omega_3\gamma_2 - \omega_2\gamma_3\ , \quad \dot\gamma_2 = \omega_1\gamma_3 - \omega_3\gamma_1\ , \quad \dot\gamma_3 = \omega_2\gamma_1 - \omega_1\gamma_2\ . \tag{4.8}
$$

Уравнения (4.7), (4.8) имеют три интеграла:

1) $\sum I_i\omega_i^2/2 + \varepsilon\sum r_i\gamma_i$ — интеграл энергии;
2) $\sum I_i\omega_i\gamma_i$ — интеграл "площадей";
3) $\sum \gamma_i^2 = 1$ — геометрическое соотношение.

В случае $I_1 = I_2$ можно, не ограничивая общности, считать, что $r_1 = 0$. В подходящих единицах длины и массы $I_1 = I_2 = 1$. Рассмотрим твердое тело, в котором $I_3 = \delta$, $\varepsilon r_2 = \delta$.

Прежде всего покажем, что такое тело существует. Для этого рассмотрим три взаимно перпендикулярные оси x, y, z и разместим на оси x по разные стороны от начала координат на единичном расстоянии две одинаковые массы $\delta/4$; аналогично на оси z разместим точно так же две массы $(1/2 - \delta/4)$; наконец, на расстоянии $1/2$ от начала координат поместим на оси y точки с массами $\delta(1 + 1/g)$ и $\delta(1 - 1/g)$, $g > 1$. Легко проверить, что все условия, указанные выше, выполнены.

Исключительно для простоты рассмотрим случай $r_3 = 0$. С учетом этих предположений уравнения (4.7) имеют вид

$$
\dot\omega_1 = (1 - \delta)\omega_2\omega_3 - \delta\gamma_3\ , \qquad \dot\omega_2 = (\delta - 1)\omega_1\omega_3\ , \qquad \dot\omega_3 = \gamma_1\ . \tag{4.9}
$$

Устремим δ к нулю. Тогда уравнения (4.9) перейдут в следующие:

$$
\dot\omega_1 = \omega_2\omega_3\ , \qquad \dot\omega_2 = -\omega_1\omega_3\ , \qquad \dot\omega_3 = \gamma_1\ . \tag{4.10}
$$

Эти уравнения вместе с уравнениями (4.8) будут замкнутой системой уравнений ограниченной задачи о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой.

Смысл ограниченной постановки задачи заключается в следующем. При $\delta \to 0$ твердое тело вырождается в прямолинейный отрезок, который вращается вокруг неподвижной точки по закону сферического маятника. Хорошо известная картина движения такого маятника дает ясное представление о нутации и прецессии твердого тела. На первый взгляд может показаться, что при $\delta = 0$ теряет всякий смысл задача о собственном вращении тела. Это, однако, не так: при $\delta \to 0$ одновременно стремятся к нулю момент инерции и момент силы тяжести относительно оси динамической симметрии. В пределе получается нетривиальное уравнение для собственного вращения, которое изучается ниже. Отметим, что переход к ограниченной задаче в динамике твердого тела вполне аналогичен переходу к ограниченной задаче трех тел в небесной механике.

Выпишем интегралы системы (4.8), (4.10), получающиеся из интегралов 1)–3) исходной задачи предельным переходом:

$$\omega_1^2+\omega_2^2=2h\ ,\qquad \omega_1\gamma_1+\omega_2\gamma_2=c\ ,\qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1\ . \tag{4.11}$$

При $2h>c^2$ соотношения (4.11) высекают в шестимерном фазовом пространстве системы (4.8), (4.10) трехмерное интегральное многообразие $M_{h,c}$. Положим $\omega_1=\sqrt{2h}\,\sin\xi$, $\omega_2=\sqrt{2h}\,\cos\xi$. Переменные ξ, $\dot\xi=\omega_3$ и γ_3 являются координатами на $M_{h,c}$. Нетрудно показать, что координата ξ удовлетворяет уравнению

$$\ddot\xi=\frac{c}{\sqrt{2h}}\sin\xi-\sqrt{1-\frac{c^2}{2h}}\,\sin(\sqrt{2h}\,t)\cos\xi\ . \tag{4.12}$$

Представим его в гамильтоновой форме:

$$\begin{gathered}\dot\xi=H'_\eta\ ,\qquad \dot\eta=-H'_\xi\ ,\\ H=\frac{\eta^2}{2}+\frac{c}{\sqrt{2h}}\cos\xi+\sqrt{1-\frac{c^2}{2h}}\,\sin(\sqrt{2h}\,t)\sin\xi\ .\end{gathered} \tag{4.13}$$

Положим $\sqrt{1-c^2/(2h)}=\nu$ и будем считать ν малым параметром. Отметим, что уравнения (4.13) имеют смысл и при $\nu=0$, когда происходит вырождение многообразия $M_{h,c}$. Гамильтониан системы (4.13) представляется в виде

$$\begin{gathered}H=H_0+\nu H_1+o(\nu)\ ,\qquad H_0=\eta^2/2+\cos\xi\ ,\\ H_1=\sin\xi\,\sin(\sqrt{2h}\,t)\ .\end{gathered} \tag{4.14}$$

При $\nu=0$ снова имеем интегрируемую задачу — математический маятник.

6. Рассмотрим задачу Кирхгофа о движении твердого тела в идеальной жидкости в случае отсутствия в гамильтониане (3.16) “перекрестных” членов ($B=0$). При этом можно положить $2L=(I\omega,\omega)+(J^{-1}v,v)$, где I,J — положительно определенные симметричные операторы, и ввести переменные ω, $p=J^{-1}v$. В этих переменных уравнения (3.14) имеют вид

$$I\dot\omega=I\omega\times\omega+p\times Jp\ ,\qquad \dot p=p\times\omega\ . \tag{4.15}$$

По форме уравнения (4.15) имеют вид уравнений Эйлера — Пуассона задачи о движении твердого тела в силовом поле с потенциалом $(Jp, p)/2$. Это наблюдение — один из вариантов уже известной нам аналогии Стеклова (см. п. 7 § 3).

Предположим, что в некотором ортонормированном базисе матрицы операторов I и J имеют диагональный вид с элементами на диагонали I_1, I_2, I_3 и J_1, J_2, J_3. Следуя п. 5, перейдем к ограниченной постановке рассматриваемой задачи. Для этого зафиксируем значения параметров $I_1 = I_2$ и J_3, а параметры I_3, J_1 и J_2 заменим на δI_3, δJ_1 и δJ_2. В уравнениях (4.15) положим затем $\delta = 0$, разделив предварительно на δ обе части уравнения для изменения переменной ω_3. Полученная система будет иметь первые интегралы $\omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha p_3^2 = h$, $\omega_1 p_1 + \omega_2 p_2 = c$, $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = p^2$. Здесь $\alpha = J_3/I_1$; $h, c, p = \mathrm{const}$. С помощью уравнений движения нетрудно установить уравнения для изменения удвоенного угла "собственного вращения" $\varphi = 2\,\mathrm{arctg}(p_1/p_2)$:

$$\ddot{\varphi} + \Lambda(p^2 - u^2)\sin\varphi = \left(\frac{cu}{p^2 - u^2}\right)^{\cdot}, \qquad \Lambda = \frac{J_1 - J_2}{I_3}, \tag{4.16}$$

$$\dot{u}^2 = (h - \alpha u^2)(p^2 - u^2) - c^2 . \tag{4.17}$$

В общем случае переменная u — эллиптическая функция времени, и уравнение (4.16) имеет сложный вид. Положим $hp^2 = c^2 + \nu^2$ и будем считать параметр ν малым. Многочлен в правой части равенства (4.17) имеет два близких к нулю корня, между которыми принимает положительные значения. В этом случае $u(t) = \nu u_0(t) + o(\nu)$, $u_0 = -\cos\left[\sqrt{h + \alpha p^2}\,(t - t_0)\right]$, $t_0 = \mathrm{const}$. При малых ν уравнение (4.16) можно представить в виде

$$\ddot{\varphi} + \Lambda p^2 \sin\varphi = \frac{\nu c\sqrt{h+\alpha p^2}}{p^2}\sin\left[\sqrt{h+\alpha p^2}\,(t - t_0)\right] + o(\nu) . \tag{4.18}$$

Это уравнение описывает колебания маятника под действием малой вынуждающей периодической силы.

§ 5. Некоторые задачи небесной механики

1. Рассмотрим задачу о движении точки по плоскости в гравитационном поле n неподвижных центров. Гамильтониан этой системы с двумя степенями свободы удобно записать с использованием комплексных чисел. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — различные точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Функция Гамильтона задачи n центров имеет вид

$$H(p, z) = |p|^2/2 + V(z), \qquad p \in \mathbb{C}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\}, \tag{5.1}$$

где $V(z) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k/|z - z_k|$ — гравитационный потенциал ($\mu_k > 0$).

При $n = 1$ и $n = 2$ имеем интегрируемые задачи Кеплера и Эйлера. В задаче Кеплера дополнительным интегралом является интеграл момента, а задача Эйлера интегрируется разделением переменных (в эллиптических координатах). Задача Кеплера вполне интегрируема и в многомерном евклидовом пространстве [220]. Наиболее интересный с точки зрения релятивистской механики случай пространства Минковского рассмотрен в работе [93]. В литературе, по-видимому, не отмечалась полная интегрируемость многомерной задачи двух центров.

2. Предположим, что Солнце S и Юпитер J вращаются вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Единицы длины, времени и массы выберем так, чтобы угловая скорость вращения, сумма масс S и J, а также гравитационная постоянная были равны единице. Нетрудно понять, что при этом расстояние SJ тоже равно единице.

Уравнения движения астероида A в подвижной системе координат можно записать в виде двух уравнений:

$$\ddot{x} - 2\dot{y} = -\partial V/\partial x\,, \qquad \ddot{y} + 2\dot{x} = -\partial V/\partial y\,, \tag{5.2}$$

где $-V = (x^2 + y^2)/2 + (1-\mu)/\rho_1 + \mu/\rho_2$, μ — масса Юпитера, ρ_1 и ρ_2 — расстояния от астероида A соответственно до S и J. Уравнения (5.2) имеют интеграл $H = (\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + V(x, y)$, называемый интегралом Якоби. Эти уравнения можно представить в канонической форме: функцией Гамильтона является полная энергия астероида A. Хорошо известно, что система (5.2) имеет пять положений равновесия $L_1, \ldots, L_5$, которые называются точками либрации. Равновесия L_1, L_2, L_3 расположенные на линии Солнце — Юпитер, обнаружены Эйлером; они всегда неустойчивы. Оставшиеся два равновесия L_4 и L_5 (открытые Лагранжем) дополняют точки S и J до вершин равносторонних треугольников (рис. 4); равновесия L_4, L_5 устойчивы в линейном приближении, если выполнено условие $\mu(1-\mu) < 1/27$. Задача об их устойчивости в смысле определения Ляпунова оказалась значительно

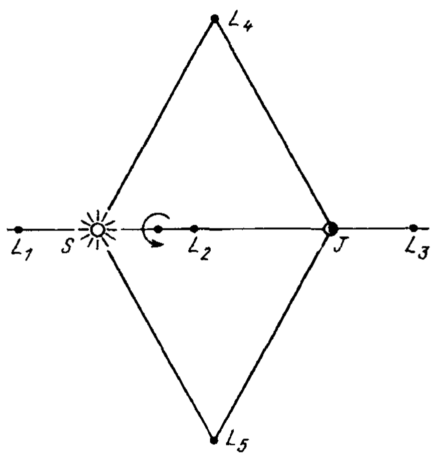

Рис. 4

сложнее. С помощью теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений, различными авторами установлено, что треугольные точки либрации устойчивы при всех μ (удовлетворяющих условию устойчивости в линейном приближении), кроме двух значений: $\mu_1 = 0,0242938\ldots$ и $\mu_2 = 0,013560\ldots$ Если $\mu = \mu_1$ (μ_2), то частоты линейных колебаний находятся в резонансе $1:2$ $(1:3)$. А. П. Маркеев [122] доказал неустойчивость в смысле Ляпунова треугольных точек либрации при этих исключительных значениях параметра.

Можно рассматривать более общую плоскую круговую ограниченную задачу n тел: $n-1$ массивных тел совершают круговое равномерное вращение вокруг их общего центра масс, а n-е тело пренебрежимо малой массы движется в плоскости орбит массивных тел в их гравитационном поле. При $n > 3$ полное описание точек либрации в ограниченной задаче n тел — интересная нерешенная алгебраическая задача.

Уравнения ограниченной задачи n тел являются гамильтоновой системой с гироскопическими силами (в смысле определения п. 8 § 1), причем форма гироскопических сил совпадает с 2-формой обычной площади $dx \wedge dy$.

3. Рассмотрим еще один вариант ограниченной задачи трех тел, в котором две точки одинаковой массы описывают эллиптические орбиты в плоскости x, y, симметричные относительно оси z, а третья точка нулевой массы все время остается на оси z (пылинка в поле двойной звезды, рис. 5). Движение последней описывается дифференциальным уравнением

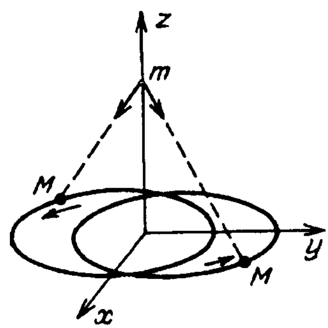

Рис. 5

$$\ddot{z} = -z[z^2 + r^2(t)]^{-3/2}, \tag{5.3}$$

где расстояние r от массивной точки до оси z находится по формуле конического сечения $r = \dfrac{p}{1 + e\cos\varphi}$ $(p, e = \mathrm{const})$, а угол φ как функция времени находится из известных формул Кеплера $\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2} = \sqrt{\dfrac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\dfrac{u}{2}$, $u - e\sin u = nt$, $n = p^{-3/2}$.

При $e = 0$ уравнение (5.3) становится автономным и поэтому просто интегрируется в квадратурах.

§ 6. Системы взаимодействующих частиц

1. Пусть n частиц единичной массы расположены на прямой в точках $x_1, \ldots, x_n$ и взаимодействуют друг с другом с потенциалом парного взаимодействия f. Их динамика описывается гамильтоновой системой с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i<j} f(x_i - x_j) . \tag{6.1}$$

Обычно считается, что потенциал f является четной функцией.

Часто рассматриваются одномерные решетки (цепочки), в которых частицы, их образующие, взаимодействуют только с ближайшими соседями. Динамика "замкнутой" цепочки описывается гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n} f(x_i - x_{i+1}) , \qquad x_{n+1} = x_1 , \tag{6.2}$$

а "разомкнутой" цепочки — гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i - x_{i+1}) . \tag{6.3}$$

В этих случаях потенциал f не всегда предполагается четным.

Кроме интеграла энергии, системы с гамильтонианами (6.1)–(6.3) имеют интеграл импульса $P = \sum y_i$, поэтому они вполне интегрируемы при $n \leqslant 2$. При $n = 3$ системы (6.1) и (6.2) тождественны. Ниже указаны наиболее популярные примеры систем взаимодействующих частиц.

2. Цепочка частиц, последовательно соединенных упругими пружинами с коэффициентом упругости $\varkappa$, описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i} , \quad \dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i} , \qquad i = 1, \ldots, n , \tag{6.4}$$

с функцией Гамильтона (6.3), причем потенциал задается известной формулой Гука $f(z) = \varkappa z^2/2$. В этом случае уравнения (6.4) линейны, поэтому они просто интегрируются. Нормальные моды колебаний взаимно независимы, и обмена энергии между этими модами не происходит.

Ферми, Паста и Улам [164] численно изучали задачу о перераспределении энергии между модами в нелинейных цепочках с потенциалами

$$\frac{\varkappa}{2}z^2 + \frac{\varkappa\alpha}{3}z^3 , \quad \frac{\varkappa}{2}z^2 + \frac{\varkappa\alpha'}{4}z^4 ; \qquad \alpha, \alpha' = \mathrm{const} . \tag{6.5}$$

Ожидавшегося перехода к равнораспределению энергии (естественного с точки зрения статистической механики) не произошло: перераспределяется лишь самая малая часть энергии.

3. Разместим теперь n точек на единичной окружности и снова соединим их последовательно упругими пружинами с коэффициентом упругости $\varkappa$. Если z — угол между соседними точками, то $f(z) = 2\varkappa\sin^2(z/2) = \varkappa(1 - \cos z)$. Потенциал определен с точностью до аддитивной постоянной, поэтому можно положить $f(z) = -\varkappa\cos z$. Пусть x_i — угловые координаты точек. Тогда будем иметь уравнения движения (6.4) с функцией Гамильтона замкнутой цепочки (6.2) и потенциалом $f(z) = -\varkappa\cos z$.

4. Полагая в (6.1) $f(z) = \cos z$, придем к известной в теоретической физике системе Гросс — Невё. Соответствующее стационарное уравнение Шрёдингера удалось решить при некоторых значениях энергии.

5. Положим в (6.1) $f(z) = a/|z|^\alpha$ $(a, \alpha = \text{const})$. Случай $\alpha = 1$, $a < 0$ отвечает гравитационному взаимодействию.

Пусть $I = \sum x_i^2$ — момент инерции системы относительно точки $x = 0$. Тогда

$$\ddot{I} = \left(2\sum x_i\dot{x}_i\right)^{\cdot} = 2\sum x_i\ddot{x}_i + 2\sum \dot{x}_i^2 = 4T - 2\sum x_i\frac{\partial V}{\partial x_i} \ . \qquad (6.6)$$

Поскольку V — однородная функция степени однородности $(-\alpha)$, то по формуле Эйлера $\sum x_i\dfrac{\partial V}{\partial x_i} = -\alpha V$. Полагая $h = T + V$, из (6.6) получим формулу Лагранжа $\ddot{I} = 4h + 2(\alpha - 2)V$. Если $\alpha = 2$, то из этой формулы получим момент инерции системы частиц:

$$I(t) = 2ht^2 + \beta t + \gamma \ ; \qquad \beta, \gamma = \text{const} \ . \qquad (6.7)$$

Таким образом, при $h < 0$ частицы обязательно столкнутся, а при $h > 0$ они разлетятся на бесконечность. Эти наблюдения принадлежат Якоби. Формула (6.7) вместе с интегралами импульса и энергии позволяет проинтегрировать уравнения движения для случая трех частиц.

Полную интегрируемость системы с потенциалом a/z^2 для всех n установил Калоджеро. Затем Мозер [222] нашел интегрируемые случаи, когда $f = a/\sin^2 z$ и $f = a/\operatorname{sh}^2 z$. Применяя технику Мозера, Калоджеро обобщил эти результаты, доказав интегрируемость системы взаимодействующих частиц с потенциалом в виде $\wp$-функции Вейерштрасса [185]. Потенциалы a/z^2, $a/\sin^2 z$ и $a/\operatorname{sh}^2 z$ являются, как известно, вырожденными случаями $\wp$-функции.

6. В 1967 г. японский физик Тода предложил (см. [159]) рассмотреть цепочку с потенциалом

$$f(z) = \frac{a}{b}e^{-bz} + az\,, \qquad ab > 0\,. \tag{6.8}$$

Этот потенциал при $a, b > 0$ дает сильное отталкивание и слабое притяжение (рис. 6), что соответствует природе межатомных сил. При малых z из (6.8) получаем разложение

$$f(z) = \frac{a}{b} + \frac{ab}{2}z^2 - \frac{ab^2}{6}z^3 + \ldots$$

Таким образом, при достаточно малых отклонениях *цепочка Тоды* выглядит как нелинейная цепочка с коэффициентом упругости $\varkappa = ab$ и параметром нелинейности из (6.5) $\alpha = -b/2$.

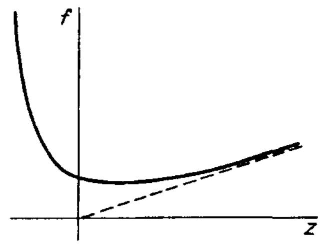

Рис. 6

Для замкнутой цепочки слагаемое az в потенциале (6.8) не играет никакой роли, так как $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - x_{i+1}) = 0$, $x_{n+1} = x_1$. Поэтому цепочку Тоды называют еще системой с экспоненциальным взаимодействием.

О. И. Богоявленский предложил рассмотреть *обобщенные цепочки Тоды*. Их динамика описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{k,l=1}^{n+1} b_{k,l}\exp[(a_k, x) + (a_l, x)]\,. \tag{6.9}$$

Векторы $a_1, \ldots, a_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ и вещественные коэффициенты $b_{k,l}$ удовлетворяют следующим условиям:

а) для всякого $y \in \mathbb{R}^n$ $\max\limits_k(a_k, y) > 0$;

б) для всех k коэффициенты $b_{k,k} > 0$.

Нетрудно показать, что гамильтониан цепочки Тоды после исключения центра масс приводится к виду (6.9). Этот же вид имеют гамильтонианы в ряде задач космологии [20].

§ 7. Неголономные системы

Как было сказано в п. 9 § 1, уравнения движения неголономных систем в общем случае нельзя свести к уравнениям Гамильтона. Однако в некоторых частных случаях это оказывается возможным. Приведем некоторые примеры.

1. Опишем неголономную систему Чаплыгина с двумя (неголономными) степенями свободы. В этом случае лагранжевы координаты $q_1, q_2, \ldots, q_n$ можно выбрать так, чтобы уравнения связей (1.4) приняли вид

$$\dot{q}_j = a_j \dot{q}_1 + b_j \dot{q}_2 \,, \qquad j = 3, \ldots, n \,, \tag{7.1}$$

причем коэффициенты a_j, b_j, а также лагранжиан $L = T - V$ не зависят явно от $q_3, \ldots, q_n$. Нетрудно дать инвариантное описание систем Чаплыгина в геометрических терминах расслоенного пространства.

Уравнения (1.11) для координат q_1, q_2 отделяются, и их можно привести к следующей системе двух уравнений второго порядка:

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_1} - \frac{\partial L^*}{\partial q_1} = \dot{q}_2 S \,, \qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial L^*}{\partial \dot{q}_2} - \frac{\partial L^*}{\partial q_2} = -\dot{q}_1 S \,, \\ S = \sum_{j=3}^{n} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{\partial a_j}{\partial q_2} - \frac{\partial b_j}{\partial q_1} \right) . \end{gathered} \tag{7.2}$$

Здесь L^* — функция от $q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2$, получающаяся из L подстановкой (7.1); в выражении для S также учтены формулы (7.1).

Чаплыгин [170] доказал, что если система (7.2) имеет интегральный инвариант с плотностью $f(q_1, q_2)$, то ее решения $q_1(t)$, $q_2(t)$ являются экстремалями следующей вариационной задачи:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L^* \, dt = 0 \,, \qquad \int_{t_1}^{t_2} f \, dt = \mathrm{const} \,. \tag{7.3}$$

Если $f > 0$, то заменой времени

$$d\tau = f \, dt \tag{7.4}$$

уравнения (7.2) приводятся к каноническим уравнениям Гамильтона. Чтобы получить функцию Гамильтона, надо в выражении для лагранжиана L^* сделать замену времени (7.4), а затем выполнить обычное преобразование Лежандра.

Условия существования интегральных инвариантов гладких динамических систем изучены в работе [95].

2. Упоминавшаяся в п. 10 § 3 задача о качении неоднородного шара по горизонтальной плоскости является системой Чаплыгина с тремя степенями свободы. Фиксируя значение интеграла площадей и исключая вращения шара вокруг вертикальной прямой, проходящей через точку контакта, число степеней свободы можно понизить до двух. Если постоянная площадей равна нулю, то можно показать, что приведенные уравнения имеют вид (7.2). Вспоминая наличие интегрального инварианта с плотностью

(3.23), можно привести эти уравнения с помощью замены времени к уравнениям Гамильтона.

3. Следуя Г. К. Суслову [154, гл. 53], рассмотрим задачу о вращении вокруг неподвижной точки твердого тела с неинтегрируемой связью $(a, \omega) = 0$, где a — вектор, постоянный в подвижном пространстве. Пусть тело вращается в однородном силовом поле; положим $V = (b, \gamma)$, $b = \mathrm{const}$. Запишем неголономные уравнения движения (1.11) в форме уравнений Пуанкаре на алгебре $so(3)$:

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = \gamma \times b + \mu a\ , \quad \dot{\gamma} + \omega \times \gamma = 0\ , \qquad (a, \omega) = 0\ . \quad (7.5)$$

Нетрудно показать, что если вектор a является собственным вектором оператора I, то фазовый поток уравнений (7.5) сохраняет стандартную меру в $\mathbb{R}^6 = \{\omega, \gamma\}$. Как отмечено в [90], если $Ia \neq \lambda a$, то при $b = 0$ система (7.5) не имеет даже абсолютно непрерывной (по отношению к мере Лебега в $\mathbb{R}^6 = \{\omega, \gamma\}$) инвариантной меры. Поэтому будем предполагать, что и в общем случае вектор a направлен вдоль одной из осей инерции тела; без ограничения общности можно считать, что a имеет компоненты $0, 0, 1$.

Уравнения (7.5) проинтегрированы в работе [168] в предположении ортогональности векторов a и b. Мы рассмотрим противоположный случай, когда $b = \varepsilon a$, $\varepsilon \neq 0$.

Два первых динамических уравнения системы (7.5) с учетом уравнения связи $\omega_3 = 0$ имеют вид $I_1\dot{\omega}_1 = \varepsilon\gamma_2$, $I_2\dot{\omega}_2 = -\varepsilon\gamma_1$, откуда $I_1\ddot{\omega}_1 = \varepsilon\dot{\gamma}_2$, $I_2\ddot{\omega}_2 = -\varepsilon\dot{\gamma}_1$. С помощью уравнений Пуассона $\dot{\gamma}_1 = -\omega_2\gamma_3$, $\dot{\gamma}_2 = \omega_1\gamma_3$ получим, что

$$I_1\ddot{\omega}_1 = \varepsilon\gamma_3\omega_1\ , \qquad I_2\ddot{\omega}_2 = \varepsilon\gamma_3\omega_2\ . \quad (7.6)$$

Интеграл энергии $(I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2)/2 + \varepsilon\gamma_3 = h$ позволяет выразить γ_3 через ω_1 и ω_2. После этого уравнения (7.6) можно переписать в виде уравнений Лагранжа $I_i^2\ddot{\omega}_i = -\dfrac{\partial V}{\partial \omega_i}$ $(i = 1, 2)$, $V = \dfrac{1}{2}\left(h - \dfrac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2}{2}\right)^2$. Эти уравнения имеют интеграл энергии $T + V = \mathrm{const}$, $T = \frac{1}{2}(I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2)$, постоянная которого для реальных движений равна $\varepsilon^2/2$.

Замена $I_i\omega_i = m_i$, соответствующая переходу от угловой скорости к кинетическому моменту, сводит рассматриваемую задачу о вращении твердого тела к задаче о движении материальной точки в потенциальном силовом поле:

$$\ddot{m}_i = -\frac{\partial V}{\partial m_i} \quad (i = 1, 2)\ , \qquad V = \frac{1}{2}\left(h - \frac{I_1^{-1}m_1^2 + I_2^{-1}m_2^2}{2}\right)^2\ . \quad (7.7)$$

При $I_1 = I_2$ будем иметь движение точки в центральном поле. В этом случае уравнения движения интегрируются в эллиптических функциях времени.

Подчеркнем, что (в отличие от теории приводящего множителя Чаплыгина) указанное сведéние уравнений (7.5) к уравнениям Лагранжа (или Гамильтона) не использует замену времени. Однако роль лагранжевых координат играют компоненты угловой скорости или момента твердого тела.

§ 8. Некоторые задачи математической физики

1. Из гидромеханики известно [115], что движение n точечных (цилиндрических) вихрей на плоскости (в пространстве) описывается следующей системой $2n$ дифференциальных уравнений:

$$\begin{gathered}\Gamma_s \dot{x}_s = -\frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \Gamma_s \dot{y}_s = \frac{\partial H}{\partial x_s}, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n, \\ H = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \neq k} \Gamma_s \Gamma_k \ln \sqrt{(x_s - x_k)^2 + (y_s - y_k)^2}.\end{gathered} \tag{8.1}$$

Здесь (x_s, y_s) — декартовы координаты s-го вихря интенсивности Γ_s. Предполагается, что все Γ_s отличны от нуля. Уравнения (8.1) гамильтоновы: симплектическая структура в $\mathbb{R}^{2n} = \{x, y\}$ задается скобкой Пуассона $\{f, g\} = \sum\limits_s \frac{1}{\Gamma_s}\left(\frac{\partial f}{\partial y_s}\frac{\partial g}{\partial x_s} - \frac{\partial f}{\partial x_s}\frac{\partial g}{\partial y_s}\right)$. Кроме функции Гамильтона H, они имеют еще три независимых интеграла: $P_x = \sum \Gamma_s x_s$, $P_y = \sum \Gamma_s y_s$, $M = \sum \Gamma_s (x_s^2 + y_s^2)/2$. Легко проверить равенства $\{P_x, P_y\} = -\sum \Gamma_k = \mathrm{const}$, $\{P_x, M\} = -P_y$, $\{P_y, M\} = P_x$. Если сумма интенсивностей системы вихрей равна нулю, то функции P_x и P_y коммутируют.

Уравнения (8.1) можно привести к обычным каноническим уравнениям, если положить $\xi_s = \sqrt{\pm\Gamma_s}\, x_s$, $\eta_s = \sqrt{\pm\Gamma_s}\, y_s$ $(s = 1, \ldots, n)$. Здесь знак "+" выбирается при $\Gamma > 0$, а знак "−" — при $\Gamma < 0$. Через K обозначим функцию H, представленную в переменных ξ, η. В новых координатах уравнения (8.1) имеют вид $\dot{\xi}_s = \mp\partial K/\partial \eta_s$, $\dot{\eta}_s = \pm\partial K/\partial \xi_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$.

Гамильтонова система (8.1) представима в виде градиентной динамической системы. Пусть $(\ ,\ )$ — риманова метрика на многообразии M, Φ — функция на M. Дифференциальные уравнения $\dot{x} = v(x)$ на M называются градиентными (или эволюционными), если

$$(v, \cdot) = d\Phi(\cdot). \tag{8.2}$$

Градиентные системы изучались Ляпуновым в теории устойчивости, С. Смейлом с точки зрения структурной устойчивости, а также Р. Томом и его последователями в теории катастроф.

Полагая (рис. 7)

$$\Phi = \frac{1}{2\pi} \sum_{s \neq k} \Gamma_s \Gamma_k \varphi_{ks} ,$$

$$\varphi_{ks} = \operatorname{arctg} \frac{y_s - y_k}{x_s - x_k} ,$$

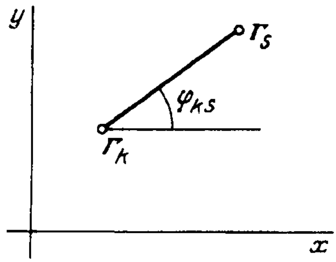

Рис. 7

перепишем уравнения (8.1) в виде (8.2):

$$\Gamma_s \dot{x}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial x_s} , \quad \Gamma_s \dot{y}_s = \frac{\partial \Phi}{\partial y_s} , \qquad 1 \leqslant s \leqslant n . \tag{8.3}$$

Риманова метрика в $\mathbb{R}^{2n} = \{x, y\}$ задается формулой

$$\sum \Gamma_s (dx_s^2 + dy_s^2) .$$

Из (8.2) вытекает, что $\dot{\Phi} = |\partial\Phi/\partial x|_*^2$, где $|\cdot|_*$ — длина ковектора в дуальном пространстве. Следовательно, если Φ — однозначная функция, то $\Phi(x(t))$ при $t \to +\infty$ стремится либо к $+\infty$, либо к некоторой постоянной c (когда M компактно, c — критическое значение функции Φ). Поэтому при $t \to +\infty$ решение $x(t)$ либо уходит на бесконечность, либо неограниченно приближается к множеству критических точек функции Φ.

В нашем случае функция Φ многозначна. Поэтому результат об асимптотическом поведении решений системы (8.3) здесь неприменим. Однако непрерывная ветвь функции Φ с ростом t либо неограниченно возрастает, либо монотонно стремится к некоторой постоянной.

2. Плоские течения однородной идеальной жидкости в потенциальном поле описываются известными уравнениями Эйлера

$$u'_t + u'_x u + u'_y v + f'_x = 0 , \qquad v'_t + v'_x u + v'_y v + f'_y = 0 . \tag{8.4}$$

Здесь u, v обозначают компоненты скорости частицы жидкости в точке с декартовыми координатами x, y в момент времени t; $f = p/\rho + V$, p — давление, ρ — плотность, V — плотность потенциальной энергии силового поля. Уравнения (8.4) следует дополнить уравнением неразрывности

$$u'_x + v'_y = 0 . \tag{8.5}$$

Будем искать решения системы (8.4), (8.5) в следующем виде:

$$\begin{aligned} &u = \Psi'_y\,, && v = -\Psi'_x + \varepsilon\cos\lambda t\,; \\ &\varepsilon, \lambda = \mathrm{const}\,, && f = \xi\sin\lambda t + \eta\cos\lambda t + \zeta\,. \end{aligned} \tag{8.6}$$

Здесь Ψ, ξ, η и ζ — пока неизвестные функции от x и y. При этом движение частиц жидкости описывается уравнениями Гамильтона

$$\dot{x} = H'_y\,, \quad \dot{y} = -H'_x\,; \qquad H = \Psi - \varepsilon x\cos\lambda t\,. \tag{8.7}$$

При $\varepsilon = 0$ система (8.7) интегрируется в простых квадратурах.

Ввиду (8.6) уравнение (8.5) удовлетворяется тождественно. Подставим (8.6) в (8.4) и приравняем коэффициенты при $\sin\lambda t$ и $\cos\lambda t$. Получим шесть уравнений для поиска четырех функций Ψ, ξ, η, ζ:

$$\xi'_x = -\lambda + \xi'_y = 0\,, \tag{8.8}$$

$$\Psi''_{yy} + \eta'_x = -\Psi''_{xy} + \eta'_y = 0\,, \tag{8.9}$$

$$\Psi''_{xy}\Psi'_y - \Psi''_{yy}\Psi'_x + \zeta'_x = -\Psi''_{xx}\Psi'_y + \Psi''_{xy}\Psi'_x + \zeta'_y = 0\,. \tag{8.10}$$

Из (8.8) получаем $\xi = \lambda y + \mathrm{const}$. Оказывается, достаточным условием разрешимости систем уравнений (8.9) и (8.10) является

$$\Delta\Psi = \mathrm{const}\,, \tag{8.11}$$

где Δ — оператор Лапласа. Действительно, $\eta''_{xy} = -\Psi'''_{yyy}$, $\eta''_{yx} = \Psi'''_{xxy}$. Поэтому $\Psi'''_{xxy} + \Psi'''_{yyy} = (\Delta\Psi)'_y = 0$, если выполнено (8.11). Аналогично проверяется условие разрешимости системы (8.10).

В частности, если Ψ — гармоническая функция, то уравнения течения допускают решение вида (8.6). При $\varepsilon = 0$ будем иметь потенциальное течение. Имеется много важных примеров стационарных течений жидкости с гармонической функцией тока Ψ [115]. В простейшем из них $\Psi = (\Gamma/(2\pi))\ln\sqrt{x^2+y^2}$. Эта функция тока задает вихрь интенсивности Γ. Известно, что пара вихрей (с интенсивностями $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma$) движется равномерно в направлении, ортогональном соединяющему их отрезку постоянной длины. Введем подвижную систему отсчета x, y и поместим вихри Γ_1 и Γ_2 в точки с координатами $(0, a)$ и $(0, -a)$. Тогда функция тока будет задана

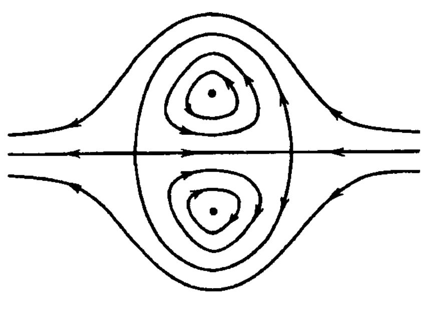

Рис. 8

следующей формулой [115, § 155]: $\Psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{y}{2a} + \ln\sqrt{\frac{x^2+(y-a)^2}{x^2+(y+a)^2}}\right)$.

Линии тока этой задачи изображены на рис. 8.

3. В работе Контопулоса [188], посвященной изучению галактических моделей, рассмотрены некоторые гамильтоновы системы в окрестности положения равновесия, допускающие резонансные соотношения между частотами. Простейшая система такого вида с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + p_2^2 + q_1^2 + q_2^2 + 2q_1^2 q_2 - \frac{2}{3}q_2^3\right), \tag{8.12}$$

описывающая движение звезды в галактике с цилиндрической симметрией, была детально исследована Хеноном и Хейлесом [203] с помощью численных расчетов. В этой задаче частоты малых колебаний равны между собой. В работе Густавсона [199] имеется интересное обсуждение численных результатов Хенона — Хейлеса в связи с построением формальных интегралов гамильтоновых систем.

К системе с гамильтонианом (8.12) можно прийти другим путем, рассматривая динамику замкнутой цепочки из трех частиц с потенциалом

$$f(z) = \frac{z^2}{2} + \frac{\alpha z^3}{3} \tag{8.13}$$

(ср. с (6.5)). Для этого в гамильтониане (6.3) с потенциалом (8.13) при $n = 3$ сделаем каноническую замену переменных $x = A\xi$, $y = A\eta$ с ортогональной матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ -\sqrt{2/3} & 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

В новых переменных ξ, η гамильтониан станет равным

$$H = \frac{1}{2}(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 + 3\xi_1^2 + 3\xi_2^2) + \frac{3\alpha}{\sqrt{2}}\left(\xi_1^2\xi_2 - \frac{1}{3}\xi_2^3\right).$$

Полагая $\eta_3 = 0$ (соглашение о неподвижности центра масс цепочки) и выполняя преобразование подобия $\xi_1 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}q_1$, $\xi_2 = \frac{\sqrt{2}}{\alpha}q_2$, $\eta_1 = p_1$, $\eta_2 = p_2$, $t \to t/\sqrt{3}$, $H \to 6H/\alpha^2$, приходим к гамильтониану (8.12).

4. Изучение однородной двухкомпонентной классической модели *уравнений Янга — Миллса* связано с исследованием гамильтоновой системы с гамильтонианом

$$H = (p_1^2 + p_2^2)/2 + q_1^2 q_2^2 \tag{8.14}$$

[53, 57]. Полагая в (7.7) формально $h = 0$, $I_1 = -I_2 = 1/\sqrt{8}$ и совершая поворот в плоскости переменных m_1, m_2 на угол $\pi/4$, приходим к гамильтоновой системе с гамильтонианом (8.14).

§ 9. Задача распознавания гамильтоновости динамических систем

Если дифференциальные уравнения, представленные в некоторых локальных координатах на гладком многообразии M^{2n}, не имеют канонического вида уравнений Гамильтона, то это еще не означает, что они не гамильтоновы: локальные координаты могут не быть симплектическими. Приведем примеры динамических систем, гамильтоновость которых априори не очевидна.

1. В качестве первого примера рассмотрим линейную систему с постоянными коэффициентами

$$\dot{x} = Ax\,, \qquad x \in \mathbb{R}^n\,, \tag{9.1}$$

имеющую первый интеграл $f = (Bx, x)/2$, где B — невырожденный симметричный оператор. Оказывается, если $\det A \neq 0$, то

1) $(\mathbb{R}^n, \Omega)$, $\Omega(x', x'') = (BA^{-1}x', x'')$ — симплектическое многообразие;

2) векторное поле Ax — гамильтоново с гамильтонианом f.

Докажем это. Так как f — интеграл уравнений (9.1), то $\dot{f} = (Bx, Ax) = (x, BAx) = 0$. Следовательно, BA — кососимметричный оператор. Отсюда вытекает, в свою очередь, кососимметричность оператора BA^{-1}. Из невырожденности A и B следует невырожденность внешней 2-формы Ω. Эта форма замкнута, как всякая внешняя форма с постоянными коэффициентами. Осталось заметить, что $\Omega(Ax, \cdot) = (BA^{-1}(Ax), \cdot) = (Bx, \cdot) = df$.

2. Рассмотрим геометрическое уравнение Пуассона из динамики твердого тела

$$\dot{e} = e \times \omega\,, \tag{9.2}$$

где e и ω — векторы трехмерного ориентированного евклидова пространства, причем ω — известная функция времени. Уравнение (9.2) имеет интеграл $(e, e) = c \geqslant 0$. В динамике твердого тела вектор e является единичным, поэтому положим $c = 1$. Снабдим сферу $\mathbf{S}^2 = \{e : (e, e) = 1\}$ симплектической структурой, положив $\Omega(x', x'') = (e, x' \times x'')$, где x' и x'' — касательные векторы к $\mathbf{S}^2$ в точке e. Форма Ω — ориентированная площадь $\mathbf{S}^2$ — замкнута и невырождена, но не точна: $\int_{S^2}\Omega = 4\pi$. Векторное поле $v = e \times \omega(t)$ является нестационарным касательным полем на $\mathbf{S}^2$.

Покажем, что уравнение (9.2) является уравнением Гамильтона на симплектическом многообразии (S^2, Ω) с гамильтонианом $H = -(e, \omega(t))$. Действительно, $\Omega(v, \cdot\,) = (e, (e\times\omega)\times(\,\cdot\,)) = (\,\cdot\,, e\times(e\times\omega)) = (\,\cdot\,, e(\omega, e) - \omega) = -(\,\cdot\,, \omega) = dH$.

Любопытно отметить, что если $e = \xi(t)$ — решение уравнений (9.2), то функция $f = (\xi(t), e)$ является их первым интегралом. Если ω — p-периодическая функция времени, то отображение за период линейной системы (9.2) сохраняет ориентированную площадь S^2 и, следовательно, имеет по меньшей мере две различные неподвижные точки. В этом случае имеется интеграл, p-периодический по t.

3. Рассмотрим, следуя Биркгофу [18], “обобщенную проблему Пфаффа” о стационарных кривых функционала $P(x(\,\cdot\,)) = \int_{t_1}^{t_2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} u_i\dot x_i + B\right)dt$. Здесь u_i, B — некоторые гладкие функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ и t. Нетрудно показать, что вариационное уравнение $\delta P = 0$ $(\delta x_i(t_1) = \delta x_i(t_2) = 0)$ определяет переменные x_i как функции t, удовлетворяющие системе уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\operatorname{rot} u)\dot x = \frac{\partial B}{\partial x}, \qquad \operatorname{rot} u = \left\| \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right\| . \tag{9.3}$$

Действительно, это уравнение является уравнением Эйлера — Лагранжа $\dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial L}{\partial \dot x} = \dfrac{\partial L}{\partial x}$ с лагранжианом $L = u\dot x + B$, линейным по скоростям.

При $n = 3$ умножение матрицы $\operatorname{rot} u$ на вектор ξ эквивалентно векторному умножению $\eta \times \xi$, причем η совпадает с ротором векторного поля u. Этим объясняется целесообразность обозначения кососимметричной матрицы $\|\partial u_i/\partial x_j - \partial u_j/\partial x_i\|$ через $\operatorname{rot} u$ в многомерном случае.

Матрица $\operatorname{rot} u$ предполагается невырожденной для всех рассматриваемых значений переменных x и t. Следовательно, n четно, и уравнения (9.3) однозначно определяют нестационарное векторное поле в переменных $x_1, \ldots, x_n$.

Если функции u_j не зависят от t, то уравнения (9.3), очевидно, гамильтоновы с гамильтонианом B. Фазовым пространством служит $\mathbb{R}^n = \{x\}$, а симплектическая структура задается формулой

$$\Omega = d\sum_j u_j dx_j = \sum_{i,j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} dx_i \wedge dx_j = \sum_{i<j} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_i \wedge dx_j .$$

В общем нестационарном случае, когда поле u зависит явно от t, форму Ω также можно привести к стационарному виду. Для этого рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot{x} = v(x,t)$, определяемую (9.3). Пусть $x(t,z)$ — решение этой системы с начальными данными $x(0,z) = z$. Соответствие $z \to x = x(t,z)$ будем трактовать как неавтономную замену переменных. Положим $u(x,t)dx + B(x,t)dt = u_*(z,t)dz + B_*(z,t)dt$. В силу свойства ковариантности уравнений Эйлера — Лагранжа, в новых переменных уравнение (9.3) принимает тот же вид:

$$\frac{\partial u_*}{\partial t} + (\operatorname{rot} u_*)\dot{z} = \frac{\partial B_*}{\partial z} . \tag{9.4}$$

Так как $\dot{z} = 0$, то $\partial u_*/\partial t = \partial B_*/\partial z$. Отсюда следует, что $\partial \Omega_*/\partial t = 0$, где $\Omega_* = d_z(u_*(z,t)dz)$. Итак, в новых переменных z 2-форма Ω_* стационарна. Согласно лемме Пуанкаре, локально найдутся такие ковекторное поле $u'(z)$ и функция $S(z,t)$, что $u_*(z,t)dz = u'(z)dz + d_zS(z,t)$. Уравнение (9.4) принимает при этом вид $(\operatorname{rot} u')\dot{z} = \partial B'/\partial z$, $B' = B + \partial S/\partial t$. Эти уравнения гамильтоновы; гамильтонианом служит функция B'.

Смысл поправки $\partial S/\partial t$ к гамильтониану B ясен из следующего замечания: задача Пфаффа не изменится, если добавить в выражение для P подынтегральное слагаемое $dS = (\partial S/\partial t)dt + (\partial S/\partial x)dx$.

4. Задача о представимости динамической системы в виде уравнений Гамильтона включает отыскание двух объектов: функции Гамильтона и подходящей симплектической структуры. Оказывается, в малой окрестности каждой неособой точки динамическая система на четномерном многообразии является гамильтоновой. Это вытекает из теоремы о выпрямлении фазовых траекторий: в подходящих локальных координатах уравнения приводятся к виду

$$\dot{x}_1 = 1 , \quad \dot{x}_2 = \ldots = \dot{x}_{2n} = 0 . \tag{9.5}$$

Система (9.5), очевидно, гамильтонова: симплектическая структура задается скобкой Пуассона $\{f,g\} = \sum\limits_{i=1}^{n}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\dfrac{\partial g}{\partial x_{i+n}} - \dfrac{\partial f}{\partial x_{i+n}}\dfrac{\partial g}{\partial x_i}\right)$, и функция Гамильтона H равна x_{n+1}. Это замечание принадлежит Биркгофу [18, гл. II].

Таким образом, задача о представимости дифференциальных уравнений в виде уравнений Гамильтона является содержательной либо в окрестности положения равновесия, либо в достаточно большой области фазового пространства, где траектории обладают свойством возвращаемости (например, в окрестности периодической траектории). К сожалению, она пока совсем не изучена.

ГЛАВА II

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

Дифференциальные уравнения, в том числе уравнения Гамильтона, принято разделять на интегрируемые и неинтегрируемые. "Если, однако, мы попытаемся сформулировать точное определение интегрируемости, то оказываются возможными многие различные определения, каждому из которых присущ известный теоретический интерес" (Дж. Биркгоф [18]). В этой главе мы дадим обзор различных подходов к проблеме интегрирования гамильтоновых систем.

§ 1. Интегралы. Классы интегралов гамильтоновых систем

1. Напомним, что непостоянная функция $f : M^n \to \mathbb{R}$ называется *первым интегралом* (или просто интегралом) динамической системы $\dot{x} = v(x)$, $x \in M^n$, если $f(x(t)) \equiv \mathrm{const}$ для всех движений $x(t)$. Если f дифференцируема, то последнее можно записать в виде условия $\dot{f} = \dfrac{\partial f}{\partial x} v \equiv 0$.

Согласно теореме о выпрямлении, в малой окрестности любой точки $x_0 \in M^n$, не являющейся положением равновесия $(v(x_0) \neq \neq 0)$, всегда существуют координаты $x_1, \ldots, x_n$, в которых дифференциальные уравнения приобретают простейший вид $\dot{x}_1 = 1$, $\dot{x}_2 = \ldots = \dot{x}_n = 0$. Поэтому координаты $x_2, \ldots, x_n$ составляют "полный" набор независимых интегралов: любой интеграл — функция от $x_2, \ldots, x_n$. Проблема интегрирования дифференциальных уравнений трактовалась классиками (вплоть до работ Пуанкаре) исключительно с точки зрения явных формул для интегралов. Эта задача, однако, чисто аналитическая, и ее решение никак не связано с особенностями поведения фазовых траекторий. Оказывается, в ряде случаев можно указать простые явные формулы для локальных интегралов, в то время как в целом динамическая система вовсе не имеет первых интегралов.

Вот простой пример. Пусть $M = \mathbf{T}^n$ — n-мерный тор с угловыми координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_n \mod 2\pi$; динамическая система задается уравнениями

$$\dot{\varphi}_k = \omega_k = \mathrm{const}\ , \qquad 1 \leqslant k \leqslant n\ , \tag{1.1}$$

причем частоты $\omega_1, \ldots, \omega_n$ несоизмеримы: если $\sum k_i \omega_i = 0$ с целыми k_i, то все k_i равны нулю. Отметим, что почти все точки $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ обладают этим свойством. Пусть $f : \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$ — гладкий интеграл системы (1.1). Разложим эту функцию в ряд Фурье $f = \sum f_k e^{i(k,\varphi)}$ $(k \in \mathbb{Z}^n)$ и продифференцируем в силу системы (1.1): $\dot{f} = \sum f_k\, i(w, k) e^{i(k,\varphi)} = 0$. Так как $(\omega, k) \neq 0$ при всех $k \neq 0$, то $f \equiv f_0 = \mathrm{const}$. Можно показать, что система (1.1) не имеет непостоянных непрерывных (и даже измеримых) интегралов. Дело в том, что каждая фазовая траектория заполняет тор $\mathbf{T}^n$ всюду плотно.

С другой стороны, для каждого вектора $\omega \neq 0$ найдется $n - 1$ ортогональный ему линейно независимый вектор $a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}^n$: $(a_1, \omega) = \ldots = (a_{n-1}, \omega) = 0$. Но тогда функции $f_1 = (a_1, \varphi), \ldots, f_{n-1} = (a_{n-1}, \varphi)$ составят "полный" набор независимых интегралов. Правда, все они многозначны на $\mathbf{T}^n$.

2. Пусть $F : M^{2n} \to \mathbb{R}$ — первый интеграл гамильтоновой системы $\dot{z} = v_H(z)$. Оказывается, если $dF(z_0) \neq 0$, то в некоторой окрестности точки $z_0 \in M$ существуют такие канонические координаты $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$, что $F(x, y) = y_1$*). Это утверждение — гамильтонов вариант теоремы о выпрямлении фазовых траекторий (доказательство можно найти, например, в [157]).

В этих координатах x, y функция H не зависит от x_1. Таким образом, если зафиксировать значение $F = y_1 = c$, система уравнений $\dot{x}_k = \partial H / \partial y_k$, $\dot{y}_k = -\partial H / \partial x_k$ $(k \geqslant 2)$ будет гамильтоновой с $n - 1$ степенью свободы. Итак, один интеграл позволяет понизить размерность фазового пространства на две единицы (а не на одну, как в общем случае). Одна единица пропадает при фиксировании значения $F = c$, а вторая — за счет исключения сопряженной циклической переменной x_1. Однако эффективное использование интеграла F для понижения порядка упирается в задачу явного интегрирования гамильтоновой системы $\dot{z} = v_F(z)$.

Эти замечания можно обобщить: если система имеет s независимых интегралов, попарные скобки Пуассона которых обращаются в нуль, то локально она приводится к системе с $n - s$ степенями свободы. Понижение порядка гамильтоновых систем с неинволютивным набором интегралов обсуждается в книге [12].

---

*) В частности, локально (за исключением окрестностей положений равновесия) функцию Гамильтона всегда можно свести к виду $H = y_1$.

3. В приложениях обычно имеют дело с аналитическими гамильтоновыми системами: фазовое пространство M^{2n} наделено структурой аналитического многообразия, скобка Пуассона любых двух аналитических функций аналитична на M^{2n}; наконец, гамильтониан также является аналитической функцией. В этой ситуации наиболее естественно рассматривать задачу о наличии интегралов, являющихся аналитическими функциями на M^{2n}. Если аналитические функции независимы в одной точке, то они независимы почти всюду. Класс функций, аналитических на M, будем обозначать $C^\omega(M)$ (или просто C^ω).

Однако следует учитывать, что аналитическая гамильтонова система может иметь интегралы класса C^r, но не иметь интегралов из класса C^{r+1} (мы не исключаем значение $r = 0$: непрерывную функцию назовем интегралом, если она локально непостоянна и принимает постоянные значения на каждой траектории). Покажем это на примере неавтономной гамильтоновой системы с одной степенью свободы с функцией Гамильтона $H = \alpha y + f(x,t)$, где α — вещественный параметр, f — аналитическая 2π-периодическая функция переменных x и t. Так как H периодична по x и t, то естественно принять прямое произведение $\mathbb{R} \times \mathbf{T}^2 = \{y;\ x,t \mod 2\pi\}$ в качестве расширенного фазового пространства.

Запишем в явном виде уравнения Гамильтона:

$$\dot{x} = \alpha\ , \qquad \dot{y} = -\frac{\partial f}{\partial x} = -F(x,t)\ . \tag{1.2}$$

Они, очевидно, интегрируются в квадратурах: $x = \alpha t + x_0$, $y = y_0 - \int_0^t F(\alpha\tau + x_0, \tau)\, d\tau$.

Будем искать первый интеграл системы (1.2) в виде $y + g(x,t)$, где $g : \mathbf{T}^2 \to \mathbb{R}$ — некоторая функция, которая должна удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \alpha \frac{\partial g}{\partial x} = F(x,t)\ . \tag{1.3}$$

Пусть $F = \sum\limits_{m,n} F_{mn} \exp i(mx + nt)$, $g = \sum\limits_{m,n} g_{mn} \exp i(mx + nt)$. Тогда $g_{mn} = F_{mn}/(i(m\alpha + n))$.

Если функция f аналитична, то $|F_{mn}| \leqslant ce^{-\rho(|m|+|n|)}$ с некоторыми положительными постоянными c, ρ. С другой стороны, как известно из теории диофантовых приближений, для почти всех α (в смысле меры Лебега на $\mathbb{R}$) справедлива оценка $|m\alpha + n| \geqslant k(|m| + |n|)^{-\gamma}$ ($k, \gamma = \mathrm{const} > 0$). Поэтому коэффициенты g_{mn} также экспоненциально быстро убывают с ростом $|m| + |n|$. Следовательно, для почти всех α тригонометрический ряд $\sum \frac{F_{mn}}{i(m\alpha + n)} e^{i(mx+nt)}$

сходится к аналитическому решению уравнения (1.3). В частности, уравнения Гамильтона (1.2) допускают однозначный аналитический интеграл.

Однако если α достаточно точно приближается рациональными числами, то уравнение (1.3) может иметь периодические решения лишь конечной гладкости или не иметь их вовсе.

Обобщая эти рассуждения, можно указать такую аналитическую функцию $f : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{R}$ и такие всюду плотные в $\mathbb{R}$ множества M_ω, $M_\infty, \ldots, M_k, \ldots, M_0$, $M_\varnothing$, что:

— при $\alpha \in M_\omega$ уравнения Гамильтона (1.2) имеют аналитический однозначный интеграл;

— при $\alpha \in M_\infty$ существует бесконечно дифференцируемый интеграл, но нет интегралов из класса C^ω;

— при $\alpha \in M_k$ существует интеграл класса C^k, но нет интегралов из класса C^{k+1};

— при $\alpha \in M_0$ уравнения (1.2) имеют только локально непостоянную непрерывную инвариантную функцию;

— при $\alpha \in M_\varnothing$ нет даже непрерывных интегралов.

Это утверждение в качестве гипотезы высказано в работе [88]. Там же доказано, что множества M_ω и $M_\varnothing$ всюду плотны в $\mathbb{R}$. Последнее вытекает из наличия фазовой траектории, плотно заполняющей расширенное фазовое пространство. В полном объеме эта гипотеза доказана в работе Н. Г. Мощевитина [134]; там же указан явный вид функции f и описано строение множеств $M_\infty, \ldots, M_k, \ldots, M_0, M_\varnothing$, имеющих мощность континуума.

4. Как уже говорилось в гл. I, обычно в задачах динамики фазовое пространство M^{2n} совпадает с пространством кокасательного расслоения конфигурационного многообразия N^n, а функция Гамильтона квадратично зависит от канонических импульсов.

Давно подмечено следующее важное обстоятельство: известные интегралы уравнений динамики — полиномы по импульсам (либо функции от этих полиномов). Так, например, нётеровы интегралы линейны по импульсам, а интегралы в гамильтоновых системах, решаемых с помощью разделения переменных, — квадратичные функции от импульсов. Это наблюдение допускает обоснование в некоторых важных частных случаях.

а) Рассмотрим движение по инерции; здесь функция Гамильтона H совпадает с кинетической энергией T. Любой аналитический интеграл F можно представить в виде ряда по однородным формам от импульсов: $F = \sum F_k$, где F_k — однородная форма степени k. Из вида уравнений Гамильтона $\dot{x} = \partial T/\partial y$, $\dot{y} = -\partial T/\partial x$ вытекает, что полная производная от F_k является однородной функцией импульсов $y_1, \ldots, y_n$ степени $k+1$. Следовательно, каждая однородная форма разложения $\sum F_k$ является первым интегралом. Разумеется, не все они независимы.

б) Предположим, что гамильтонова система с функцией Гамильтона $H = T(x, y) + \varepsilon V(x)$ имеет интеграл в виде ряда по степеням параметра ε:

$$F = \sum F_k(x, y)\varepsilon^k . \tag{1.4}$$

Такая ситуация типична для уравнений динамики. После замены переменных

$$x \to x , \quad y \to \sqrt{\varepsilon}\, y , \quad t \to t/\sqrt{\varepsilon} \tag{1.5}$$

уравнения Гамильтона с гамильтонианом $T + \varepsilon V$ перейдут в уравнения с гамильтонианом $T + V$, а интеграл (1.4) перейдет в функцию $\sum F_k(x, \sqrt{\varepsilon}\, y)\varepsilon^k = \sum \Phi_m(x, y)(\sqrt{\varepsilon}\,)^m$, где Φ_m — полиномы по импульсам y. Новая гамильтонова система не зависит от ε, поэтому полиномы Φ_m являются ее интегралами.

Верно и обратное утверждение: если система с гамильтонианом $T + V$ имеет полиномиальный интеграл, то система с гамильтонианом $T + \varepsilon V$ имеет интеграл в виде степенного ряда (1.4). Для доказательства воспользуемся заменой переменных, обратной к (1.5). В результате в уравнениях Гамильтона появится параметр ε. После такой замены полиномиальный интеграл с точностью до несущественного множителя станет равным $F + \sqrt{\varepsilon}\,\Phi$, где F и Φ — аналитические по ε функции. Ясно, что F и Φ — интегралы уравнений Гамильтона с гамильтонианом $T + \varepsilon V$, причем одна из функций $F\big|_{\varepsilon=0}$ или $\Phi\big|_{\varepsilon=0}$ совпадет со старшей однородной формой исходного полиномиального интеграла.

Итак, для уравнений динамики естественно рассматривать классы интегралов в виде полиномов по импульсам с гладкими и однозначными коэффициентами на конфигурационном пространстве. Такие интегралы будем называть *полиномиальными.*

Уиттекер и Биркгоф исследовали задачу о наличии полиномиальных интегралов первой и второй степени [18, 163]. Отметим, что задача о полиномиальных интегралах невысокой фиксированной степени может быть решена вполне элементарными средствами. Однако если степень интеграла заранее не фиксирована, то эта задача существенно усложняется

Биркгоф рассматривал также задачу об *условных* полиномиальных интегралах [18, гл. II]. Это полиномы по импульсам, являющиеся интегралами лишь для некоторых фиксированных значений полной энергии.

§ 2. Инвариантные соотношения

1. Пусть $\dot{x} = v(x)$, $x \in M^n$, — динамическая система, $f_1, \ldots, f_m$ — гладкие функции на M^n. Рассмотрим множество $I_c \subset \subset M$, определяемое уравнениями

$$f_1 = c_1 , \quad \ldots , \quad f_m = c_m . \tag{2.1}$$

Если I_c инвариантно относительно фазового потока g_v^t, то (2.1) называются *инвариантными соотношениями* (а функции $f_1, \ldots, f_m$ — *частными интегралами*). Эквивалентное определение: $\dot{f}_k = 0$ на I_c для всех $k \leqslant m$. Это определение принимается и в неавтономном случае.

Оказывается, теория инвариантных соотношений гамильтоновых систем тесно связана с идеями гидродинамики идеальной жидкости [89, 105].

2. Пусть N^n — конфигурационное многообразие, $H(x, y, t)$: $T^*N \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}$ — функция Гамильтона. Предположим, что уравнения Гамильтона с n степенями свободы

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \qquad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x} \tag{2.2}$$

имеют инвариантное многообразие $y = u(x,t)$, где u — гладкое ковекторное поле на N (или на его части), которое, возможно, зависит от времени. Свяжем с полем u его ротор — кососимметрическую $(n \times n)$-матрицу $\operatorname{rot} u = \partial u/\partial x - (\partial u/\partial x)^{\top}$.

По аналогии со случаем $n = 3$, результат умножения $\operatorname{rot} u$ на вектор w будем обозначать $\operatorname{rot} u \times w$.

Введем гладкое поле скорости v на N, положив $v(x,t) = \dot{x} = \left.\dfrac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u}$. Оказывается, поля u и v удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \operatorname{rot} u \times v = -\frac{\partial B}{\partial x}, \qquad B(x,t) = H\big|_{y=u}, \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} u + \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u \times v) = 0 . \tag{2.4}$$

Действительно, инвариантность многообразия $y = u(x,t)$ эквивалентна дифференциальному уравнению $\dot{u} = -\left.\dfrac{\partial H}{\partial x}\right|_{y=u}$. Его можно представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} v = -\frac{\partial B}{\partial x} + \left.\frac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u} \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial B}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^{\top} v .$$

Отсюда вытекает уравнение (2.3). Уравнение (2.4) следует из (2.3) применением ротора к левой и правой частям.

Обратно, пусть $u(x,t)$ — поле на M; положим $v(x,t) = \left.\dfrac{\partial H}{\partial y}\right|_{y=u}$. Если поля u и v удовлетворяют "уравнению Ламба" (2.3), то многообразие $I = \{y = u(x,t)\}$ является инвариантным многообразием гамильтоновой системы (2.2). Решения, лежащие на I, находятся интегрированием дифференциальных уравнений на N:

$$\dot{x} = v(x,t) . \tag{2.5}$$

Уравнения (2.3) для гамильтоновых систем появились впервые, по-видимому, в вариационном исчислении как условия "согласованности" полей экстремалей (см. [19], а также [116, гл. X]). Обобщение уравнений Ламба на негамильтоновы системы содержится в книге [8].

3. Для системы уравнений (2.5) справедлива "теорема Томсона": интеграл

$$\int_\gamma u\,dx \tag{2.6}$$

сохраняет свое значение вдоль любого замкнутого подвижного контура $\gamma \subset N$. Этот результат вытекает из теоремы Пуанкаре — Картана об интегральном инварианте гамильтоновых систем (см. п. 4 § 1 гл. I): с помощью формулы $y = u(x,t)$ контур γ поднимается до замкнутого контура Γ в фазовом пространстве T^*N; после этого остается воспользоваться сохранностью интеграла $\int_\Gamma y\,dx$ вдоль подвижного контура Γ.

Ковекторное поле u назовем потенциальным, если $\operatorname{rot} u \equiv 0$; локально $u = \partial\varphi/\partial x$, где φ — функция от x и t. Справедлива "теорема Лагранжа": если при $t = 0$ ковекторное поле $u(x,t)$ потенциально, то оно будет потенциальным при всех t. В этом случае интеграл (2.6) будет равен нулю для любого замкнутого контура γ, стягиваемого по N в точку. Теорема Лагранжа — простое следствие этого замечания и теоремы Томсона. Инвариантное n-мерное многообразие $I = \{y = u\}$ с потенциальным полем u называется лагранжевым.

Подставляя $u = \partial\varphi/\partial x$ в уравнение (2.3), получим "интеграл Лагранжа — Коши":

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, t\right) = f , \tag{2.7}$$

где f — некоторая функция времени. После калибровки $\varphi \to \varphi - \int f(t)\,dt$ функцию f можно считать равной нулю. В гамильтоновой механике уравнение (2.7) (когда $f = 0$) называется *уравнением Гамильтона — Якоби.*

4. Вектор $w \neq 0$ называется вихревым, если $\operatorname{rot} u \times w = 0$. При нечетном n вихревые векторы всегда существуют. Поле u назовем неособым, если ранг матрицы $\operatorname{rot} u$ равен $n - 1$. При $n = 3$ критерием неособости поля u является условие $\operatorname{rot} u \neq 0$.

В неособом случае вихревые векторы в каждый момент времени образуют гладкое поле направлений на N. Интегральные кривые этого поля называются вихревыми линиями. Оказывается, фазовый поток уравнения (2.5) переводит вихревые линии в вихревые линии. Это утверждение — следствие теоремы Томсона из п. 3. Оно обобщает известный результат Гельмгольца о "вмороженности" вихревых линий в динамике идеальной жидкости.

Вихревые поля $w(x,t)$ определены с точностью до умножения на функции от x и t. Среди них есть замечательные поля (определенные с точностью до постоянного множителя), характеристическое свойство которых дает

Теорема 1. *При нечетном n в неособом случае найдется вихревое векторное поле $w(x,t)$, удовлетворяющее уравнению*

$$\frac{\partial w}{\partial t} + [v, w] = 0 \,, \tag{2.8}$$

где $[\ ,\ ]$ — коммутатор векторных полей на N.

Уравнение (2.8) — аналог уравнения Эйлера для изменения кинетического момента твердого тела, вращающегося по инерции.

Напомним определение коммутатора векторных полей w и v. Каждому из векторных полей отвечает линейный дифференциальный оператор $L_w = \sum w_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$, $L_v = \sum v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i}$. Оператор $L_v L_w - L_w L_v$ также является линейным дифференциальным оператором. Ему отвечает векторное поле $[v, w]$. Укажем явную формулу для коммутатора $L_{[v,w]}$:

$$L_{[v,w]} = \sum_j \left(\sum_i v_i \frac{\partial w_j}{\partial x_i} - w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial}{\partial x_j} \,.$$

Доказательство теоремы 1. Так как $\operatorname{rot} u \times w = 0$, то $\dfrac{\partial \operatorname{rot} u}{\partial t} \times w + \operatorname{rot} u \times \dfrac{\partial w}{\partial t} = 0$. Учитывая (2.4), получаем соотношение

$$\operatorname{rot} u \times \frac{\partial w}{\partial t} - [\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u \times v)] \times w = 0 \,. \tag{2.9}$$

Поскольку $\operatorname{rot} u \times w = 0$, то $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} u \times v) \times w - \operatorname{rot}(\operatorname{rot} u \times w) \times v = \operatorname{rot} u \times [w, v]$. Следовательно, (2.9) можно представить в виде $\operatorname{rot} u \times (\partial w/\partial t + [v, w]) = 0$. Поле u неособое, поэтому $\partial w/\partial t + [v, w] = \alpha w$, где α — некоторая функция x и t. Положим $w = \rho w_0$, причем функция $\rho(x,t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial x} v = \alpha \rho \,. \tag{2.10}$$

Тогда w_0 — искомое вихревое поле. Остается показать разрешимость уравнения (2.10). Полагая $\rho = \exp \xi$, приходим к уравнению $\dfrac{d\xi}{dt} = \dfrac{\partial \xi}{\partial t} + \dfrac{\partial \xi}{\partial x} v = \alpha$, которое легко решается методом характеристик. Теорема доказана.

Пусть $n = 3$ и N имеет структуру обычного евклидова пространства. Тогда поле u можно отождествить с векторным полем в N, и $\operatorname{rot} u$ будет, очевидно, одним из вихревых полей. Согласно теореме 1, в этом случае существует такое векторное поле w, задаваемое уравнением (2.8), что $\operatorname{rot} u = \alpha w$.

Т е о р е м а 2. *Функция α удовлетворяет уравнению неразрывности $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} + \operatorname{div}(\alpha v) = 0$, где $\operatorname{div} a$ — след матрицы $\dfrac{\partial a}{\partial x}$.*

С л е д с т в и е. *Уравнения (2.5) имеют интегральный инвариант $\int_D \alpha\, d^3x$.*

Доказательство теоремы 2 основано на применении известной формулы векторного анализа $\operatorname{rot}(a \times b) = [b, a] + a \operatorname{div} b - b \operatorname{div} a$. С помощью этой формулы и очевидного соотношения $\operatorname{div} \operatorname{rot} u = 0$ уравнение (2.4) можно представить в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} u + [v, \operatorname{rot} u] + (\operatorname{rot} u) \operatorname{div} v = 0 \, . \tag{2.11}$$

Положим $\operatorname{rot} u = \alpha w$. Тогда из (2.11) получим уравнение

$$\alpha \left(\frac{\partial w}{\partial t} + [v, w] \right) + \left(\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \frac{\partial \alpha}{\partial x} v + \alpha \operatorname{div} v \right) w = 0 \, .$$

Если поле w удовлетворяет (2.8), то $\dfrac{\partial \alpha}{\partial t} + \dfrac{\partial \alpha}{\partial x} v + \alpha \operatorname{div} v = \dfrac{\partial \alpha}{\partial t} +$ $+ \operatorname{div}(\alpha v) = 0$, что и требовалось доказать.

Все результаты п. 4 являются следствием одного лишь уравнения вихря (2.4). Они останутся справедливыми и в том случае, если заменить уравнение (2.4) более общим уравнением

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \operatorname{rot}(A v) = 0 \, , \tag{2.12}$$

где $A = \|A_{ij}\|$ — кососимметрическая матрица, удовлетворяющая условию

$$\frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k} + \frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ki}}{\partial x_j} = 0 \, . \tag{2.13}$$

Вихревые векторы — собственные векторы матрицы A с нулевым собственным значением.

Уравнениями (2.12) описывается, в частности, изменение вектора магнитной напряженности в среде с бесконечной проводимостью. Вихревыми линиями здесь являются силовые линии магнитного поля.

5. Рассмотрим стационарный случай: поле u и функция Гамильтона H не зависят явно от времени. Справедлива "теорема Бернулли": функция B постоянна на линиях тока (интегральных кривых векторного поля $v(x)$) и на вихревых линиях. Действительно, в предположении стационарности уравнение (2.3) принимает вид $\operatorname{rot} u \times v = -\partial B/\partial x$. Если w — вихревое поле, то $(\partial B/\partial x)w = -(\operatorname{rot} u \times v)w = (\operatorname{rot} u \times w)v = 0$. Аналогично, $\dot{B} = (\partial B/\partial x)v = -(\operatorname{rot} u \times v)v = 0$ ввиду кососимметричности матрицы $\operatorname{rot} u$.

Покажем, что если точка $x_0 \in N$ не является критической точкой функции B, то векторы $v(x_0) \neq 0$ и $w(x_0) \neq 0$ линейно независимы. Действительно, если они зависимы, то v — вихревой вектор. Но тогда для любого вектора a имеем $(\partial B/\partial x)a = -(\operatorname{rot} u \times v)a = 0$. Следовательно, $dB(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

Если $B \neq \mathrm{const}$, то естественно рассмотреть распределение касательных к N плоскостей $\Pi(x)$, порожденное линейными комбинациями независимых векторов $v(x)$ и $w(x)$. Так как v и w коммутируют (см. теорему 1), то по теореме Фробениуса (см. [41]) распределение Π интегрируемо. Это означает, что через каждую точку $x \in N$ проходит единственная интегральная поверхность Σ_x этого распределения, которая в каждой своей точке касается векторов v и w. Если поля v и w полны на Σ, то, как известно из топологии, Σ диффеоморфна одной из следующих поверхностей: $\mathbb{R}^2$ (плоскость), $\mathbb{R} \times \mathbf{T}^1$ (цилиндр), $\mathbf{T}^2$ (тор) (см., например, [53]). При этом в некоторых глобальных координатах на Σ линии тока и вихревые линии являются прямыми. В общем случае поверхности Σ могут быть погружены в N весьма сложным образом. Особый интерес поэтому представляет случай, когда Σ замкнуто в N. Это автоматически выполнено при $n = 3$: интегральные поверхности Σ совпадают со связными компонентами поверхностей уровня непостоянной функции B. Эффективное применение этого замечания упирается в нетривиальный вопрос о существовании нужного нам ковекторного поля $u(x)$ на всем N.

Теорема Бернулли обобщается на случай, когда поле u является особым: ранг матрицы $\operatorname{rot} u$ (или, более общо, ранг матрицы A из уравнения (2.12)) падает более чем на единицу. Вихревые векторы в каждой точке $x \in N$ образуют линейное подпространство $W_x \subset T_x N$. В случае постоянства ранга матрицы $\operatorname{rot} u$ (или A) размерность W_x не зависит от x. Таким образом, имеется распределение касательных пространств. Ввиду (2.13), согласно теореме Фробениуса, это распределение интегрируемо. Следовательно, конфигурационное многообразие N расслоено на гладкие регулярные интегральные многообразия распределения W размерности $\dim W = n - \operatorname{rank} A$; эти многообразия естественно назвать вихревыми. Фазовый поток уравнения (2.5) переводит вихревые многообразия в вихревые многообразия, а в стационарном случае функция B постоянна на каждом вихревом многообразии.

6. В качестве примера рассмотрим задачу Эйлера о вращении по инерции твердого тела вокруг неподвижной точки. Пространством положений N служит группа $SO(3)$. Кинетический момент твердого тела постоянен в неподвижном пространстве. Фиксируя его ненулевое постоянное значение, можно представить кинетический момент тела в подвижном пространстве в виде функции от положения твердого тела. В результате на группе $SO(3)$ появляется стационарное трехмерное течение; можно проверить, что оно вихревое. Функция B в нашей задаче постоянна на $SO(3)$ лишь в том вырожденном случае, когда тензор инерции шаровой; поэтому в типичной ситуации $\operatorname{rot} u \times v \neq 0$. Линии тока и вихревые линии лежат на поверхностях Бернулли $I_c = \{x : B(x) = c\}$, которые при некритических значениях c диффеоморфны двумерным торам. Отметим, что критических значений всего три: они совпадают с энергией вращения твердого тела вокруг главных осей инерции (при фиксированном значении кинетического момента).

Векторное поле скоростей v и вихревое поле w, определенные на всей группе $SO(3)$, обладают рядом замечательных свойств. Во-первых, фазовый поток динамической системы $\dot{x} = v(x)$, $x \in SO(3)$, сохраняет двустороннюю инвариантную меру на группе $SO(3)$. Эта мера инвариантна относительно всех левых и правых сдвигов группы. В локальных координатах на $SO(3)$ — углах Эйлера θ, φ, ψ — она имеет следующий вид (см. [135, гл. 1]): $d\mu = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi\, d\psi$. Если положить $\operatorname{rot} u = \alpha w$, то в углах Эйлера функция α равна в точности $\sin\theta$ (ср. с п. 4, следствие из теоремы 2).

Вихревое поле w, коммутирующее с полем скоростей v, можно описать соотношениями $\operatorname{rot} u \times w = 0$, $\xi(w) = \text{const}$, где ξ — это 1-форма $u\,dx$. Поле w имеет простой механический смысл: динамическая система $\dot{x} = w(x)$ порождает вращения твердого тела с постоянной в неподвижном пространстве угловой скоростью, направленной вдоль вектора кинетического момента тела.

Все эти результаты нетрудно доказать с использованием локальных координат на группе $SO(3)$ (скажем, углов Эйлера). Они составляют "вихревую" теорию волчка Эйлера.

Этот пример обобщается на движения по произвольной группе Ли $\mathfrak{G}$, задаваемые левоинвариантным лагранжианом. Роль интеграла момента играют нётеровы интегралы (их число равно $\dim \mathfrak{G}$), отвечающие левоинвариантным полям симметрий.

7. Для гамильтоновых систем с тремя степенями свободы имеется "вихревой" аналог метода Гамильтона — Якоби. Пусть $H(x, y)$ — функция Гамильтона. Запишем автономную систему дифференциальных уравнений в частных производных (2.3):

$$\operatorname{rot} u \times \left(\frac{\partial H}{\partial y}\Big|_{y=u} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left(H\big|_{y=u} \right) . \tag{2.14}$$

Например, в обратимом случае, когда $H = \frac{1}{2}\sum\limits_{i,j} g^{ij}(x) y_i y_j - V(x)$, система (2.14) имеет следующий явный вид:

$$\sum_{j,k} g^{jk} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) u_k = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j,k} g^{jk} u_j u_k \right) + \frac{\partial V}{\partial x_i} ,$$

$$1 \leqslant i, j, k \leqslant 3 .$$

Теорема 3. *Пусть найдено трехпараметрическое семейство решений $u(x, \alpha)$ системы (2.14), обладающее следующими свойствами:* 1) $\det \|\partial u/\partial \alpha\| \neq 0$; 2) $d_x H(x, u(x, \alpha)) \neq 0$.

Тогда уравнения Гамильтона с гамильтонианом H интегрируются в квадратурах.

Предположим, что найдено "полное" потенциальное решение системы (2.14): $u(x, \alpha) = \dfrac{\partial}{\partial x} S(x, \alpha)$. Тогда из (2.14) получаем "интеграл Лагранжа — Коши": $H \left(x, \dfrac{\partial}{\partial x} S(x, \alpha) \right) = h(\alpha)$. Это — стационарное уравнение Гамильтона — Якоби. Функция $S(x, \alpha)$ — его полный интеграл, поскольку $\det \left\| \dfrac{\partial u}{\partial \alpha} \right\| = \det \left\| \dfrac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} \right\| \neq 0$. Однако в потенциальном случае не выполнено условие 2) теоремы.

Доказательство теоремы 3. Согласно предположению 1), из уравнений $y_i = u_i(x_1, x_2, x_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ $(1 \leqslant i \leqslant 3)$ можно найти (по крайней мере локально) α_k как функции от x, y: $\alpha_k = F_k(x, y)$. Из результатов п. 2 вытекает, что функции F_k — интегралы рассматриваемой гамильтоновой системы. Согласно условию 2), функции F_1, F_2, F_3, H независимы. Остается воспользоваться известной теоремой Эйлера — Якоби об интегрируемости автономной системы n дифференциальных уравнений с инвариантной мерой и $n-2$ независимыми интегралами ([174, 12-я лекция]).

8. Уравнение (2.3) совпадает с уравнением Биркгофа (9.3) гл. I. Следовательно, оно описывает экстремали вариационной задачи

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} u\, dx - B\, dt = 0 , \qquad \delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0 .$$

Следовательно, оно описывает экстремали вариационной задачи

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} u\,dx - B\,dt = 0\,, \qquad \delta x(t_1) = \delta x(t_2) = 0\,.$$

Этот вариационный принцип можно вывести из классического принципа стационарного действия Гамильтона.

Если поле u стационарно, то уравнения (2.5) гамильтоновы и к ним снова можно применить развитую выше теорию.

§ 3. Группы симметрий

1. Рассмотрим динамическую систему на n-мерном фазовом пространстве, заданную дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = v(x)\,. \tag{3.1}$$

Векторное поле u, коммутирующее с полем v ($[u,v]=0$, где $[\ ,\ ]$ — коммутатор векторных полей; см. п. 4 § 2), называется *полем симметрий* системы (3.1). Покажем, что фазовый поток системы

$$\frac{dx}{d\tau} = u(x) \tag{3.2}$$

— однопараметрическая группа преобразований g_u^τ — переводит решения системы (3.1) в решения той же системы. Для этого воспользуемся теоремой о выпрямлении: локально приведем уравнения (3.2) к виду

$$\frac{dx_1}{d\tau} = \frac{dx_2}{d\tau} = \ldots = \frac{dx_{n-1}}{d\tau} = 0\,, \qquad \frac{dx_n}{d\tau} = 1\,. \tag{3.3}$$

Так как $[u,v]=0$, то в этих переменных компоненты $v_1,\ldots,v_n$ векторного поля v не зависят от x_n. Следовательно, в результате преобразований $x_1 \to x_1,\ \ldots,\ x_{n-1} \to x_{n-1},\ x_n \to x_n + \tau$ решения системы (3.1) действительно переходят в решения той же системы.

Наличие группы симметрий существенно упрощает исследование динамической системы. Например, в тех же специальных переменных $x_1,\ldots,x_n$ подсистема дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = v_k(x_1,\ldots,x_{n-1})\,, \qquad k \leqslant n-1\,, \tag{3.4}$$

замкнута. Если нам удастся проинтегрировать систему (3.4), то оставшаяся переменная x_n будет найдена простой квадратурой: $x_n = \int_0^t v_n(x_1,\ldots,x_{n-1})\,dt + x_n^0$.

С геометрической точки зрения понижение порядка системы с группой симметрии g^τ означает факторизацию ее фазового пространства по орбитам этой группы. Правда, конструктивное понижение порядка упирается в задачу отыскания траекторий системы (3.2) (орбит группы g_u^τ).

2. Пусть имеется еще одно поле симметрий w, и $[u,w] = \lambda u$, где λ — некоторая функция от x. Воспользуемся локальными координатами $x_1, \ldots, x_n$, в которых система (3.2) принимает вид (3.3); в этих координатах компоненты $w_1, \ldots, w_{n-1}$ поля w не зависят от x_n. Легко понять, что фазовый поток системы уравнений

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = w_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad \ldots, \quad \frac{dx_{n-1}}{d\alpha} = w_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

является группой симметрий системы (3.4). Используя это обстоятельство, можно понизить порядок исходной системы уравнений на две единицы.

Эти наблюдения приводят к следующей важной конструкции, предложенной Софусом Ли. Пусть $u_1, \ldots, u_{n-1}$ — такие линейно независимые поля симметрий системы (3.1), что $[u_i, u_j] = \sum\limits_k c_{ij}^k u_k$, $c_{ij}^k = \mathrm{const}$. Пусть $\mathbf{A}$ — линейное пространство векторных полей вида $\sum\limits_{s=1}^{n-1} c_s u_s$ $(c_s \in \mathbb{R})$. Это $(n-1)$-мерное пространство является алгеброй Ли относительно операции умножения $[\ ,\ ]$.

Напомним определение разрешимой алгебры Ли. Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — подалгебры алгебры $\mathbf{A}$. Множество $\mathbf{C} \subset \mathbf{B}$ называется идеалом алгебры $\mathbf{B}$, если для всех $f \in \mathbf{C}$, $g \in \mathbf{B}$ коммутатор $[f,g]$ лежит в $\mathbf{C}$. Алгебра $\mathbf{A}$ называется разрешимой, если существует такая последовательность $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 \supset \mathbf{A}_1 \supset \ldots \supset \mathbf{A}_k = \{0\}$ подалгебр $\mathbf{A}$, что $\mathbf{A}_{i+1}$ — идеал коразмерности 1 в $\mathbf{A}_i$ $(i = 0, \ldots, k-1)$. В частности, разрешимы коммутативные алгебры ($[f,g] = 0$ для всех $f, g \in \mathbf{A}$).

Теорема (Ли). *Если система дифференциальных уравнений* (3.1) *допускает* $(n-1)$*-мерную разрешимую алгебру полей симметрий, то она интегрируется в квадратурах.*

Интегрирование в квадратурах — это отыскание решений с помощью "алгебраических" операций (включая обращение функций) и "квадратур", т. е. вычисления интегралов известных функций. Это определение интегрируемости формально носит локальный характер. Решение в квадратурах дифференциального уравнения на многообразии означает его интегрирование в любых локальных координатах. Мы считаем, что переход от одних локальных координат к другим является "алгебраической" операцией.

Из теоремы Ли вытекает важное

Следствие. *Пусть* $u_1, \ldots, u_n$ — *линейно независимые коммутирующие поля. Тогда каждая из систем дифференциальных уравнений* $\dot{x} = u_k(x)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ *интегрируется в квадратурах.*

Доказательство теоремы Ли разобьем на несколько этапов.

а) Наша цель — решить "явно" уравнение $V(F) = 0$, где V — оператор дифференцирования $v(x)\,\partial/\partial x$. Более точно, надо найти $n-1$ независимое решение $F_1, \ldots, F_{n-1}$ этого уравнения.

Введем еще $n-1$ линейный дифференциальный оператор $U_k = u_k(x)\,\partial/\partial x$. Алгебра векторных полей $\sum c_k u_k$ разрешима, поэтому с помощью линейной подстановки можно так ввести новые $n-1$ полей (будем обозначать их снова $u_1, \ldots, u_{n-1}$), чтобы имели место соотношения

$$\begin{aligned} [u_1\,, u_j] &= c^1_{1,j} u_1\,,\\ [u_2\,, u_j] &= c^1_{2,j} u_1 + c^2_{2,j} u_2\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ [u_{n-1}, u_j] &= c^1_{n-1,j} u_1 + \ldots + c^{n-1}_{n-1,j} u_{n-1}\,; \end{aligned} \tag{3.5}$$

здесь $c^k_{ij} = \mathrm{const}$.

б) Рассмотрим систему уравнений

$$V(F) = U_1(F) = \ldots = U_{n-2}(F) = 0 \tag{3.6}$$

и покажем, что локально она имеет решение F без критических точек: $dF \neq 0$. Этот результат легко вытекает из теоремы Фробениуса ввиду равенств (3.5). Однако мы дадим его прямое доказательство.

Поля $v, u_1, \ldots, u_{n-1}$ линейно независимы, поэтому $u_{n-2} \neq 0$. По теореме о выпрямлении поле u_{n-2} локально приводится к виду $(0, \ldots, 0, 1)$. Ввиду (3.5), в новых координатах $x_1, \ldots, x_n$ компоненты векторных полей $v, u_1, \ldots, u_{n-3}$ не зависят от x_n, т. е. эти поля можно рассматривать в $(n-1)$-мерном пространстве переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$, и для них снова будут справедливы коммутационные соотношения (3.5). К полю u_{n-3} опять можно применить теорему о выпрямлении и привести $n-1$ первых компонент к виду $(0, \ldots, 0, 1)$, и т. д. В итоге придем к координатам $z_1, \ldots, z_n$, в которых компоненты векторных полей $v, u_1, \ldots, u_{n-2}$ имеют вид

$$\begin{aligned} v &= (0, 1, *, \ \ldots, *)\,,\\ u_1 &= (0, 0, 1, *, \ldots, *)\,,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u_{n-2} &= (0, 0, 0\,, \ \ldots, 1)\,. \end{aligned}$$

В переменных $z_1, \ldots, z_n$ в качестве искомой функции можно принять $F = z_1$.

в) Покажем, что если F — решение системы уравнений (3.6), то $U_{n-1}(F)$ — также решение этой системы. Действительно,

$[V, U_{n-1}] = VU_{n-1} - U_{n-1}V = 0$. Следовательно, $V(U_{n-1}(F)) = U_{n-1}(V(F)) = U_{n-1}(0) = 0$. Далее, согласно (3.5), $U_1U_{n-1}(F) - U_{n-1}U_1(F) = c^1_{1,n-1}U_1(F)$. Поэтому $U_1U_{n-1}(F) = 0$. Аналогично доказывается, что $U_kU_{n-1}(F) = 0$ для всех $k < n-1$.

Пусть G — решение (3.6), $dG \neq 0$. Тогда $\varphi(G) = U_{n-1}(G) \neq 0$ (в противном случае $dG = 0$ ввиду линейной независимости полей $v, u_1, \ldots, u_{n-1}$). Положим $F = \displaystyle\int_{G_0}^{G} \frac{d\xi}{\varphi(\xi)}$. Так как F — функция от G, то F — решение (3.6), причем $U_{n-1}(F) = U_{n-1}(G)\, dF/dG = U_{n-1}(G)/\varphi(G) = 1$.

Итак, система уравнений

$$V(F) = U_1(F) = \ldots = U_{n-2}(F) = 0\,, \quad U_{n-1}(F) = 1 \tag{3.7}$$

имеет решение (по крайней мере локально).

г) Чтобы найти его, положим

$$\begin{aligned}
V(F) &= v_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + v_n\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,\\
U_1(F) &= u_{1,1}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + u_{1,n}\frac{\partial F}{\partial x_n} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U_{n-1}(F) &= u_{n-1,1}\frac{\partial F}{\partial x_1} + \ldots + u_{n-1,n}\frac{\partial F}{\partial x_n} = 1.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Поля $v, u_1, \ldots, u_{n-1}$ линейно независимы, поэтому из линейной системы уравнений (3.8) найдем частные производные

$$\partial F/\partial x_1 = \xi_1(x)\,, \quad \ldots\,, \quad \partial F/\partial x_n = \xi_n(x)\,. \tag{3.9}$$

Эта задача — чисто алгебраическая. Далее, 1-форма $\xi_1\, dx_1 + \ldots + \xi_n\, dx_n$ локально точна. Как хорошо известно из анализа, с помощью квадратур восстанавливается функция F, удовлетворяющая (3.9).

д) Пусть $F_1(x_1, \ldots, x_n)$ — решение системы (3.7). Тогда $dF_1 \neq 0$ и можно считать, что $\partial F_1/\partial x_n \neq 0$. Выполним замену переменных $y_1 = x_1, \ \ldots, \ y_{n-1} = x_{n-1}, \ y_n = F_1(x_1, \ldots, x_n)$. В новых переменных

$$\begin{aligned}
V &= \tilde v_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \tilde v_n\frac{\partial}{\partial y_n},\\
U_1 &= \tilde u_{1,1}\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \tilde u_{1,n}\frac{\partial}{\partial y_n},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
U_{n-2} &= \tilde u_{n-2,1}\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + \tilde u_{n-2,n}\frac{\partial}{\partial y_n}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Так как $V(y_n) = U_1(y_n) = \ldots = U_{n-2}(y_n) = 0$, то $\tilde{v}_n = \tilde{u}_{1,n} = \ldots = \tilde{u}_{n-2,n} = 0$, поэтому в формулы для операторов (3.10) координата y_n входит как параметр. Выполнив еще раз процедуру, описанную в б)–г), получаем, что система уравнений

$$V(F_2) = U_1(F_2) = \ldots = U_{n-3}(F_2) = 0\ , \quad U_{n-2}(F_2) = 1 \qquad (3.11)$$

имеет решение, которое можно найти с помощью квадратур.

е) Аналогично доказывается разрешимость систем уравнений

$$\begin{aligned} &V(F_3) = U_1(F_3) = \ldots = U_{n-4}(F_3) = 0\ , \quad U_{n-3}(F_3) = 1\ ; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &V(F_{n-1}) = 0, \qquad U_1(F_{n-1}) = 1\ . \end{aligned} \qquad (3.12)$$

Из (3.7), (3.11) и (3.12) вытекает, что функции $F_1, \ldots, F_{n-1}$ независимы и являются первыми интегралами исходной системы (3.1). Теорема доказана.

3. Предположим, что поля u, v удовлетворяют соотношению

$$[v, u] = \mu v + \nu u \qquad (3.13)$$

с некоторыми постоянными μ, ν. Покажем, что и в этом случае порядок системы (3.1) можно понизить на единицу.

Воспользуемся координатами $x_1, \ldots, x_n$, в которых уравнения (3.2) приводятся к виду (3.3). Если известно общее решение (3.2), то это осуществляется в явной форме. В переменных $x_1, \ldots, x_n$ коммутационное соотношение (3.13) эквивалентно серии равенств

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_n} = \mu v_i\ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1; \qquad \frac{\partial v_n}{\partial x_n} = \mu v_n + \nu\ , \qquad (3.14)$$

где v_i — компоненты поля v. Из (3.14) получаем

$$v_i = v_i^0 \exp(\mu x_n)\ , \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1; \qquad v_n = v_n^0 \exp(\mu x_n) - \nu/\mu\ , \quad (3.15)$$

где функции v_i^0 ($1 \leqslant i \leqslant n$) не зависят от x_n. Выполним замену времени $dt = [\exp(\mu x_n)]\, ds$ и запишем первое $n-1$ уравнение системы (3.1), обозначая штрихом дифференцирование по s:

$$x_1' = v_1^0\ , \quad \ldots\ , \quad x_{n-1}' = v_{n-1}^0\ ; \qquad (3.16)$$

эту замкнутую систему можно рассматривать как результат понижения порядка исходной системы (3.1).

Покажем, что если известно общее решение системы (3.16), то уравнения (3.1) интегрируются в квадратурах. Так как v_n^0 не зависит от x_n, то достаточно проинтегрировать уравнение

$$x_n' = -\nu\mu^{-1} \exp(-\mu x_n) + f\ , \qquad (3.17)$$

где f — известная функция s (см. (3.15)). Заменой $z = \exp(\mu x_n)$ это уравнение приводится к уравнению $z' = \mu f z - \nu$, которое легко интегрируется. Таким образом, переменные x_i находятся явно как функции s. Для того, чтобы выразить x_i через исходную переменную t, достаточно обратить интеграл $t = \int e^{\mu x_n} ds$.

В (3.15)–(3.17) предполагалось, что $\mu \neq 0$. Случай $\mu = 0$ тривиален.

Рассмотрим более подробно наиболее важный частный случай, когда $\nu = 0$. Из последней формулы (3.15) вытекает, что уравнения (3.16) можно дополнить уравнением для координаты x_n:

$$x'_n = v_n^0 . \tag{3.18}$$

Так как $v_1^0, \ldots, v_n^0$ не зависят от x_n, то фазовый поток g_u^τ системы (3.3) переводит решения системы (3.16), (3.18) в решения той же системы. Возвращаясь к старой переменной времени t, получаем, что g_u^τ переводит траектории (но не решения) исходной системы (3.1) в траектории той же системы. Поэтому поле u можно рассматривать как обобщенное поле симметрий системы (3.1).

В соответствии с последним замечанием, теорема Ли из п. 2 допускает следующее обобщение. Пусть линейно независимые векторные поля $v, u_1, \ldots, u_{n-1}$ порождают разрешимую n-мерную алгебру Ли, причем $[v, u_k] = \lambda_k v$ ($\lambda = \mathrm{const}$). Тогда система дифференциальных уравнений (3.1) интегрируется в квадратурах. Читатель самостоятельно может провести доказательство обобщенной теоремы Ли методом п. 2.

4. Согласно теореме о выпрямлении, в малой окрестности каждой неособой точки векторного поля v система (3.1) имеет n-мерную абелеву группу симметрий. Таким образом, задача о существовании гладкого (или аналитического) поля симметрий является содержательной либо в окрестности равновесия, либо во всем фазовом пространстве.

Приведем два простых примера динамических систем, допускающих нетривиальные аналитические поля симметрий, но не имеющих непостоянных непрерывных интегралов.

а) Рассмотрим условно-периодическое движение на n-мерном торе $\mathbf{T}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) \mod 2\pi\}$, задаваемое системой $\dot{x}_i = \omega_i$ ($1 \leqslant i \leqslant n$) с независимыми над кольцом целых чисел постоянными частотами ω_i (ср. с п. 1 § 1). Эта система эргодична на $\mathbf{T}^n$ и поэтому не допускает даже измеримых (а не только непрерывных) непостоянных первых интегралов. Однако, любое постоянное (в координатах $x_1, \ldots x_n$) векторное поле на T^n является ее полем симметрий.

б) Пусть $v(x) = Ax$, причем все собственные значения постоянного оператора A лежат в левой (или правой) полуплоскости.

Ввиду асимптотической устойчивости равновесия $x = 0$ при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$), соответствующая система (3.1) не имеет непостоянных непрерывных интегралов. Действительно, пусть $f(x)$ — первый интеграл, x_0 — любая точка $\mathbb{R}^n$, а $x(t)$ — решение (3.1) с начальным условием $x(0) = x_0$. Так как $x(t) \to 0$ при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$), то (ввиду непрерывности f) $f(x(t)) \to f(0)$ при $t \to +\infty$ ($t \to -\infty$). Поскольку $f(x(t))$ постоянна как функция t, то $f(x_0) = f(0)$ для всех x_0. Следовательно, $f(x) = \mathrm{const}$. С другой стороны, поле $u(x) = x$ — поле симметрий линейной системы $\dot{x} = Ax$; оно порождает группу растяжений $x \to e^\tau x$, $\tau \in \mathbb{R}$.

Более интересный пример доставляет гамильтонова система из п. 3 § 1, имеющая в целом интегралы лишь конечной гладкости. Однако, нетривиальная группа преобразований $y \to y + \alpha$, $x \to x$, $t \to t$ является ее группой симметрий. Она порождается векторным полем с компонентами $1, 0, 0$ в координатах y, x, t.

Говоря о "нетривиальной" группе симметрий, мы предполагаем, что ее поле u линейно независимо с полем v. Заметим, что если $u = \lambda(x)v$ и $[u, v] = 0$, то λ — первый интеграл системы (3.1).

Следует иметь в виду, что аналитическая система дифференциальных уравнений может иметь векторные поля симметрий конечной гладкости. В качестве примера рассмотрим на двумерном торе $\mathbf{T}^2 = \{x_1, x_2 \mod 2\pi\}$ динамическую систему вида

$$\dot{x}_1 = \omega_1 R \ , \quad \dot{x}_2 = \omega_2 R \ , \tag{3.19}$$

где $\omega_i = \mathrm{const}$, R — положительная аналитическая функция на $\mathbf{T}^2$. Эта система имеет инвариантную меру $\mathrm{mes}(D) = \displaystyle\iint_D \frac{dx_1\,dx_2}{R}$ и поэтому является локально гамильтоновой. А. Н. Колмогоров [108] доказал, что для почти всех значений ω_1/ω_2 система (3.19) приводится к виду

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 \ , \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 \ , \qquad \lambda_i = 4\pi^2\omega_i/\mathrm{mes}(\mathbf{T}^2) \ . \tag{3.20}$$

Следовательно, в этих случаях уравнения (3.19) допускают нетривиальное поле симметрий с аналитическими компонентами. С другой стороны, в [108] показано, что при надлежащем выборе иррационального ω_1/ω_2 и аналитической функции R система (3.19) приводится к виду (3.20) k-кратно дифференцируемым, но не дифференцируемым $(k+1)$-кратно, преобразованием тора $\mathbf{T}^2$ в себя.

Предположим, что система (3.19) имеет поле симметрий с дифференцируемыми компонентами X_1 и X_2. Эти функции 2π-периодичны по x_1 и x_2. Условия коммутирования векторных полей

$(\omega_1 R, \omega_2 R)$ и (X_1, X_2) сводятся к двум соотношениям:

$$\sum \omega_i \frac{\partial X_1}{\partial x_i} = \omega_1 \sum X_i \frac{\partial R}{\partial x_i}\,, \quad \sum \omega_i \frac{\partial X_2}{\partial x_i} = \omega_2 \sum X_i \frac{\partial R}{\partial x_i}\,. \tag{3.21}$$

Положим $\varphi = \omega_2 X_1 - \omega_1 X_2$. Тогда $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}\omega_1 + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}\omega_2 = 0$. Если отношение ω_1/ω_2 иррационально, то $\varphi = \mathrm{const}$. Положим $X_1 = \omega_1 S$. Следовательно, $X_2 = \omega_2 S + \mu$, $\mu = \mathrm{const}$. Ввиду (3.21), функция S удовлетворяет уравнению $\sum \omega_i \dfrac{\partial S}{\partial x_i} = S \sum \omega_i \dfrac{\partial N}{\partial x_i} + \mu \dfrac{\partial N}{\partial x_2}$, $N = \ln R$. Его решение будем искать в виде произведения KR. Для отыскания функции K получим уравнение $\dfrac{\partial K}{\partial x_1}\omega_1 + \dfrac{\partial K}{\partial x_2}\omega_2 = \mu \dfrac{\partial F}{\partial x_2}$, $F = -1/R$. Будем решать его методом Фурье. Положим

$$K = \sum_{m_1, m_2} k_{m_1 m_2} e_{m_1 m_2}\,, \qquad F = \sum_{m_1, m_2} f_{m_1 m_2} e_{m_1 m_2}\,,$$

где $e_{m_1 m_2} = \exp[i(m_1 x_1 + m_2 x_2)]$. При $|m| = |m_1| + |m_2| \neq 0$ имеем $k_{m_1 m_2} = \mu m_2 f_{m_1 m_2}/(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)$.

Если $\mu = 0$, то $K = \mathrm{const}$, поэтому поле симметрий будет отличаться от исходного поля (3.19) постоянным множителем. Оставляя в стороне этот тривиальный случай, будем считать $\mu \neq 0$. Положим при $m_2 \neq 0$ $\quad |m_2 f_{m_1 m_2}| = e^{-|m|}$. Можно показать, что тогда, в зависимости от диофантовых свойств иррационального отношения ω_1/ω_2, числа $k_{m_1 m_2}$ будут коэффициентами Фурье функции из класса C^n, но не C^{n+1} (ср. с п. 3 § 1).

Итак, при подходящем выборе аналитической функции $F = -1/R$ числовая ось значений $\alpha = \omega_1/\omega_2$ разбивается на такие множества M_ω, $M_\infty, \ldots, M_n, \ldots, M_1$, $M_\varnothing$, что:

— при $\alpha \in M_\omega$ система (3.19) имеет аналитическое поле симметрий;

— при $\alpha \in M_\infty$ имеется поле симметрий с бесконечно дифференцируемыми компонентами, но нет аналитического поля симметрий;

— при $\alpha \in M_n$ система (3.19) допускает поле симметрий класса C^n, но нет полей симметрий класса гладкости C^{n+1};

— наконец, при $\alpha \in M_\varnothing$ система (3.19) вообще не допускает поля симметрий с дифференцируемыми компонентами.

Все множества $M_\omega, M_\infty, \ldots, M_n, \ldots, M_\varnothing$ имеют мощность континуума и всюду плотны на числовой прямой, причем мера множеств $M_\infty, \ldots, M_n, \ldots, M_\varnothing$ равна нулю.

Эти замечания следует иметь в виду при решении задачи о наличии нетривиальных групп симметрий динамических систем.

5. Обсудим теперь свойства групп симметрий гамильтоновых систем. Пусть F — первый интеграл гамильтоновой системы

$$\dot{z} = v_H(z)\,. \tag{3.22}$$

Тогда гамильтоново поле $v_F(z)$ — поле симметрий системы (3.22). Действительно, пусть L_H и L_F — операторы дифференцирования, отвечающие гамильтоновым полям v_H и v_F. Из тождества Якоби для скобок Пуассона следует, что

$$[L_H, L_F] = L_{\{F,H\}}\,. \tag{3.23}$$

Таким образом, если $\{H, F\} = 0$, то $[v_H, v_F] = 0$. Заметим, что этот вывод справедлив и в более общем случае $\{H, F\} = \mathrm{const}$.

Векторные поля, порожденные интегралами F гамильтоновой системы (3.22), естественно назвать *гамильтоновыми полями симметрий.* Конечно, далеко не всякое поле симметрий гамильтоновой системы является гамильтоновым.

Эти наблюдения можно обобщить. Пусть f — замкнутая 1-форма в фазовом пространстве системы с гамильтонианом H. Локально $f = dF$, поэтому форме f можно поставить в соответствие локально-гамильтоново поле v_F с функцией гамильтона F. Если $\{H, F\} = 0$, то поле v_F является полем симметрий системы (3.22). Форму f (или многозначную функцию F) можно назвать *многозначным интегралом* гамильтоновой системы с гамильтонианом H. Если форма f точна, то F — "глобальный" однозначный интеграл.

Приведем пример многозначного интеграла. Рассмотрим движение заряженной частицы по плоскому тору $\mathbf{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ в постоянном магнитном поле. Уравнения движения $\ddot{x} - \alpha\dot{y} = 0$, $\ddot{y} + \alpha\dot{x} = 0$ ($\alpha = \mathrm{const}$) гамильтоновы. Они имеют два линейных по скорости интеграла, $\dot{x} - \alpha y$ и $\dot{y} + \alpha x$, которые являются многозначными функциями в фазовом пространстве $\mathbf{T}^2 \times \mathbb{R}^2$.

6. Предположим, что в $2n$-мерном фазовом пространстве $M^{2n} = \{z\}$ заданы такие n независимых функций $F_1 = H$, $F_2, \ldots, F_n$, что $\{F_i, F_j\} = \sum\limits_k c_{ij}^k F_k$, $c_{ij}^k = \mathrm{const}$. Тогда, очевидно, линейное пространство функций $\mathbf{A}$, натянутое на элементы $F_1, \ldots, F_n$, будет n-мерной алгеброй Ли. Числа c_{ij}^k — структурные константы алгебры $\mathbf{A}$ в базисе $F_1, \ldots, F_n$.

Теорема 1 [82]. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *во всех точках множества* $I_a = \{z : F_1(z) = a_1, \ldots, F_n(z) = a_n\}$ *функции* $F_1, \ldots, F_n$ *независимы;*

2) $\sum c_{ij}^k a_k = 0$ *для всех* $i, j = 1, \ldots n$;

3) *алгебра* $\mathbf{A}$ *разрешима, причем* $\{F_1, F_i\} = c_{1i}^1 F_1$.

Тогда решения системы $\dot{z} = v_H(z)$, лежащие на I_a, можно найти в квадратурах.

Множество Π наборов $a = (a_1, \ldots, a_n)$, удовлетворяющих условию 2), является линейным подпространством $\mathbb{R}^n$, размерность которого не меньше $\dim \mathbf{A} - \dim\{\mathbf{A}, \mathbf{A}\}$, где $\{\mathbf{A}, \mathbf{A}\}$ — коммутант алгебры $\mathbf{A}$ (линейное подпространство, порожденное элементами вида $\{f, g\}$, где $f, g \in \mathbf{A}$). Так как $\mathbf{A}$ разрешима, то $\dim \Pi \geqslant 1$.

Следствие (теорема Лиувилля). *Если функции $\{F_k\}_1^n$ независимы и попарно находятся в инволюции, то каждая из гамильтоновых систем $\dot{z} = v_{F_k}(z)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ интегрируется в квадратурах.*

В этом случае, очевидно, $\Pi = \mathbb{R}^n$. Гамильтоновы системы с n степенями свободы, имеющие n независимых интегралов в инволюции, называются *вполне интегрируемыми*.

Доказательство теоремы 1 базируется на применении обобщенной теоремы Ли из п. 3. Естественное отображение алгебры Ли функций $F_1, \ldots, F_n$ на алгебру Ли гамильтоновых векторных полей $v_{F_1}, \ldots, v_{F_n}$ является изоморфизмом ввиду (3.23) и того факта, что линейная комбинация $\sum \lambda_k F_k$ есть тождественная константа только при $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$ (так как $F_1, \ldots, F_n$ функционально независимы).

В силу условия 2) имеем $\{F_i, F_j\} = 0$ на I_a, поэтому поля $v_{F_1}, \ldots, v_{F_n}$ касаются n-мерной поверхности I_a. Легко понять, что ограничения этих полей на I_a удовлетворяют условиям обобщенной теоремы Ли, что и требовалось доказать.

Оказывается, теорему Ли, в свою очередь, можно вывести из теоремы 1. Для этого воспользуемся конструкцией Лиувилля, позволяющей включить фазовый поток динамической системы (3.1) в фазовый поток гамильтоновой системы удвоенной размерности. Пусть u — поле на n-мерном многообразии $N = \{x\}$. Поставим ему в соответствие функцию $F = y \cdot u(x)$ $(y \in T_x N)$, определенную на кокасательном расслоении $M = T^* N$, снабженном естественной симплектической структурой. Координаты $y_1, \ldots, y_n$ — частные интегралы гамильтоновой системы

$$\dot{z} = v_F(z) , \tag{3.24}$$

поскольку $\dot{x} = \partial F / \partial y = u(x)$, $\dot{y} = -\partial F / \partial x = -(\partial u / \partial x)^{\top} y$. Инвариантная поверхность $I = \{y = 0\} \subset M$ диффеоморфна N. Диффеоморфизм $(x, 0) \to x$ позволяет отождествить ограничение гамильтоновой системы (3.24) на поверхность I с исходной динамической системой на N.

Пусть $u_1, \ldots, u_n$ — поля на N, и $F_1 = y \cdot u_1, \ldots, F_n = y \cdot u_n$ — соответствующие функции на M. Нетрудно проверить, что $\{F_i, F_j\} =$

$= y \cdot [u_i, u_j]$. Если $[u_i, u_j] = \sum c_{ij}^k u_k$, то $\{F_i, F_j\} = -\sum c_{ij}^k F_k$. Многообразие $I = \{x, y : F_1 = \ldots = F_n = 0\} = \{y = 0\}$ является инвариантным для гамильтоновой системы с гамильтонианом F_1. Применяя теорему 1 к множеству I и отождествляя I с N, получим обобщенную теорему Ли.

Таким образом, теорему 1 можно рассматривать как гамильтонов вариант теоремы Ли.

7. В качестве примера рассмотрим задачу о движении по прямой трех точек, притягивающихся с силой, обратно пропорциональной кубу расстояния между ними. Пусть x_i — координаты, m_i — массы, $y_i = m_i \dot{x}_i$ — импульсы точек. Потенциальная энергия V имеет вид $\sum\limits_{i<j} \dfrac{a_{ij}}{(x_i - x_j)^2}$ $(a_{ij} = \mathrm{const})$. Рассмотрим три функции $F_1 = \sum y_i^2/2m_i + V$, $F_2 = \sum x_i y_i$, $F_3 = \sum y_i$. Ясно, что F_1 — полная энергия системы, $2F_2 = \frac{d}{dt} \sum m_i x_i^2$, F_3 — суммарный импульс. Нетрудно проверить, что эти функции независимы, и

$$\{F_1, F_3\} = 0\ , \quad \{F_2, F_3\} = -F_3\ , \quad \{F_1, F_2\} = 2F_1\ . \tag{3.25}$$

Соответствующая алгебра Ли **A** разрешима, поскольку $\mathbf{A} \supset \mathbf{B} \supset \mathbf{C} \supset \{0\}$, где одномерная алгебра **C** порождается функцией F_1, а двумерная подалгебра **B** порождается функциями F_1 и F_3. Подалгебры **B** и **C** в силу (3.25) являются идеалами коразмерности 1 соответственно в **A** и **B**.

Согласно теореме 1, движения трех точек, лежащие на нулевых уровнях интегралов энергии и площадей, можно найти квадратурами. Эту возможность нетрудно реализовать непосредственно. Отметим, что в рассмотренном примере потенциал V можно заменить произвольной однородной функцией степени -2 относительно разностей $x_i - x_j$.

8. Современное систематическое изложение применений теории групп Ли к дифференциальным уравнениям (в том числе в частных производных) содержится в [141]. Анализ приемов точного интегрирования уравнений классической динамики с точки зрения теории групп и алгебр Ли проведен в монографии [144].

§ 4. Полная интегрируемость

1. Пусть M — симплектическое многообразие, и $F_1, \ldots, F_n$ — независимые функции на M, порождающие конечномерную подалгебру алгебры Ли $C^\infty(M)$, т. е. $\{F_i, F_j\} = \sum c_{ij}^k F_k$ $(c_{ij}^k = \mathrm{const})$. В каждой точке $x \in M$ векторы $\sum \lambda_i v_{F_i}$ образуют n-мерное линейное подпространство $\Pi(x)$ в $T_x M$. Распределение плоскостей Π "инволютивно", т. е. из $X, Y \in \Pi$ следует $[X, Y] \in \Pi$. Следовательно, по теореме Фробениуса, через каждую точку $x \in M$ проходит максимальное интегральное многообразие N_x распределения П. Многообразия N_x могут быть погружены в M весьма сложным образом; так, они не обязательно замкнуты. При $n = (\dim M)/2$ среди интегральных многообразий распределения П есть замкнутые поверхности $M_a = \left\{x \in M : F_i(x) = a_i, \sum c_{ij}^k a_k = 0\right\}$. Если $x \in M_a$, то N_x совпадает с одной из связных компонент M_a. В случае, когда функции $F_1, \ldots, F_n$ попарно коммутируют, всё M расслоено на замкнутые многообразия M_a, строение которых описывает

Теорема 1. *Пусть гладкие функции $F_1, \ldots, F_n: M \to \mathbb{R}$ находятся в инволюции: $\{F_i, F_j\} = 0$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$ и $\dim M = 2n$. Если*

1) *они независимы на M_a;*

2) *гамильтоновы поля v_{F_i} $(1 \leqslant i \leqslant n)$ нестеснены на M_a,*

то

1) *каждая связная компонента M_a диффеоморфна $\mathbb{R}^k \times \mathbf{T}^{n-k}$;*

2) *на $\mathbb{R}^k \times \mathbf{T}^{n-k}$ существуют такие координаты $y_1, \ldots, y_k$; $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k}$ $\mathrm{mod}\ 2\pi$, в которых уравнение Гамильтона $\dot{x} = v_{F_i}(x)$ имеет вид $\dot{y}_m = c_{mi}$, $\dot{\varphi}_s = \omega_{si}$ $(c_{mi}, \omega_{si} = \mathrm{const})$.*

Укажем схему доказательства теоремы 1 (детали можно найти, например, в книгах [11, 54]). Рассмотрим n однопараметрических групп $g_i^{t_i}$ $(t_i \in \mathbb{R})$, являющихся фазовыми потоками n гамильтоновых полей v_{F_i}. Функции $F_1, \ldots, F_n$ находятся в инволюции, поэтому поля v_{F_i} касаются M_a. Следовательно, группы g_i переводят гладкие многообразия M_a в себя, поэтому определено действие g_i на M_a. В силу условия 2), значения $g_i^{t_i}(x)$ $(x \in M_a)$ определены при всех t_i. Поля v_i и v_j коммутируют на M_a, поэтому группы g_i и g_j также коммутируют. Следовательно, на M_a определено действие абелевой n-мерной группы $\mathbb{R}^n = \{t_1, \ldots, t_n\}$: $g^{t_1, \ldots, t_n}(x) = g_1^{t_1} \ldots g_n^{t_n}(x)$. Согласно условию 1), градиенты функций $F_1, \ldots, F_n$ независимы во всех точках M_a, поэтому на M_a векторные поля $v_1, \ldots, v_n$ также линейно независимы. Отсюда и из предположения о связности M_a выводится, что действие группы $\mathbb{R}^n$ на M_a свободно и транзитивно. Следовательно, M_a диффеоморфно фактормногообразию $\mathbb{R}^n/\Gamma$, где Γ — стационарная группа действия $\mathbb{R}^n$ (она состоит из точек $s \in \mathbb{R}^n$, для которых $g^s x = x$). Поля $v_1, \ldots, v_n$ независимы, поэтому Γ — дискретная подгруппа в $\mathbb{R}^n$, изоморфная, как известно, $\mathbb{Z}^k$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Таким образом, $M_a \simeq \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^k = \mathbf{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Равномерно меняющиеся “глобальные” координаты φ $\mathrm{mod}\ 2\pi$, y линейно выражаются через $t_1, \ldots, t_n$. Полагая $t_j = \mathrm{const}$ при всех $j \neq i$, получаем решения гамильтоновой системы $\dot{x} = v_i(x)$ как линейные функции времени $t_i = t$.

Гамильтонова система с гамильтонианом $H = F_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ называется *вполне интегрируемой*.

2. Наиболее интересен случай, когда M_a компактно. Тогда $k = 0$, следовательно, $M_a \simeq \mathbf{T}^n$. Равномерное движение на $\mathbf{T}^n = \{\varphi \bmod 2\pi\}$ по закону $\varphi_i = \varphi_i^0 + \omega_i t$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ называется условно-периодическим. Числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — его частоты. Тор с набором частот $\omega_1, \ldots, \omega_n$ называется *нерезонансным,* если из равенства $\sum k_i \omega_i = 0$ с целыми $k_1, \ldots, k_n$ вытекает, что все k_i равны нулю. На нерезонансных торах каждая фазовая траектория всюду плотна. Это утверждение является простым следствием следующего общего результата, принадлежащего Г. Вейлю: пусть $f\colon \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$ — интегрируемая по Риману функция, $\omega_1, \ldots, \omega_n$ — рационально независимые числа. Тогда для любой точки $\varphi^0 \in \mathbf{T}^n$ предел $\lim\limits_{s\to\infty} \frac{1}{s}\int_0^s f(\omega t + \varphi^0)\, dt$ существует и равен $\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{T}^n} f(\varphi)\, d\varphi_1 \ldots d\varphi_n$.

Пусть, в частности, f — характеристическая функция измеримой по Жордану области D на $\mathbf{T}^n$. Применяя к f теорему Вейля, получим следующее утверждение: средняя доля времени, которое фазовая траектория проводит в D, пропорциональна мере D. Этот факт характеризует свойство равномерного распределения траекторий на нерезонансных торах. Если тор *резонансный,* фазовые траектории заполняют торы меньшей размерности.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и интегральное многообразие M_a компактно. Тогда:*

1) *малая окрестность многообразия M_a в симплектическом многообразии M диффеоморфна прямому произведению $D \times \mathbf{T}^n$, где D — малая область в $\mathbb{R}^n$;*

2) *в $D \times \mathbf{T}^n$ существуют симплектические координаты I, $\varphi \bmod 2\pi$ $(I \in D, \varphi \in \mathbf{T}^n)$, в которых функции $F_1, \ldots, F_n$ зависят лишь от I, а симплектическая структура имеет вид $dI \wedge d\varphi$.*

В частности, в переменных $I, \varphi \bmod 2\pi$ функция Гамильтона вполне интегрируемой системы с инвариантными торами принимает вид $H = H(I)$. При этом $\dot I = -\partial H/\partial\varphi = 0$, $\dot\varphi = \partial H/\partial I = \omega(I)$. Следовательно, $I(t) = I_0$, $\omega(I) = \omega(I_0)$. Переменные I, "нумерующие" инвариантные торы в $D \times \mathbf{T}^n$, называются *переменными действия,* а равномерно меняющиеся координаты φ — *угловыми переменными;* вместе они называются *переменными действие — угол.*

Доказательство теоремы 2. В окрестности тора $M_a \simeq \mathbf{T}^n$ за координаты можно принять функции $I_i = F_i$ и углы $\varphi_i \bmod 2\pi$, существующие по теореме 1. Ввиду линейной независимости dF_i, функции I_i, φ_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ задают диффеоморфизм окрестности M_a на прямое произведение $D \times \mathbf{T}^n$ (D — область в $\mathbb{R}^n = \{I\}$). Введем в рассмотрение невырожденную матрицу скобок Пуассона $\begin{Vmatrix} \{I_i, I_j\} & \{I_i, \varphi_j\} \\ \{\varphi_i, I_j\} & \{\varphi_i, \varphi_j\} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & a_{ij} \\ -a_{ji} & b_{ij} \end{Vmatrix}$.

Согласно теореме 1, скобки $\{I_i, \varphi_j\}$ постоянны на M_a; следовательно, $a_{ij} = a_{ij}(I)$. Покажем, что b_{ij} тоже зависят лишь от I. Действительно, из тождества Якоби $\{F_m, \{\varphi_i, \varphi_j\}\} + \{\varphi_i, \{\varphi_j, F_m\}\} + \{\varphi_j, \{F_m, \varphi_i\}\} = 0$ следует, что скобки $\{F_m, b_{ij}\} = \alpha_{ij}^m$ не зависят от φ. С другой стороны, $\alpha_{ij}^m = \sum\limits_s \dfrac{\partial b_{ij}}{\partial \varphi_s}\{F_m, \varphi_s\} = \sum\limits_s \dfrac{\partial b_{ij}}{\partial \varphi_s} a_{ms}$. Так как $\det \|a_{ms}\| \neq 0$, то отсюда найдем $\partial b_{ij}/\partial \varphi_s$ как функции только I. Следовательно, $b_{ij} = \{\varphi_i, \varphi_j\} = \sum f_{ij}^s(I)\varphi_s + g_{ij}(I)$. Поскольку $d\varphi_i$ — однозначные 1-формы вблизи M_a, то $f_{ij}^s = 0$.

Выполним замену переменных $I_s = I_s(J_1, \ldots, J_n)$ так, чтобы $\{J_i, \varphi_j\} = \delta_{ij}$. Для этого надо решить систему уравнений $a_{ij}(I) = \{I_i, \varphi_j\} = \sum\limits_s \dfrac{\partial I_i}{\partial J_s}\delta_{sj} = \dfrac{\partial I_i}{\partial J_j}$. Условие разрешимости этой системы

$$\frac{\partial a_{ij}}{\partial J_s} = \frac{\partial a_{is}}{\partial J_j} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial I_k} a_{ks} = \sum_k \frac{\partial a_{is}}{\partial I_k} a_{kj}$$

вытекает из тождества Якоби, примененного к I_i, φ_j и φ_k.

Если переменные φ_i не коммутируют, следует выполнить переход к новым угловым координатам $\psi_i \mod 2\pi$ с помощью сдвига $\varphi_i = \psi_i + f_i(J)$. Функции f_i определяются системой уравнений $b_{ij} = \dfrac{\partial f_i}{\partial J_j} - \dfrac{\partial f_j}{\partial J_i}$. Условием ее локальной разрешимости является замкнутость 2-формы $\sum b_{ij} dI_i \wedge dI_j$, вытекающая из замкнутости исходной симплектической структуры. Итак, существование симплектических переменных действие — угол $J, \psi \mod 2\pi$ полностью доказано.

Замечание. Пусть p, q — симплектические координаты в $\mathbb{R}^{2n}$, и пусть $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — непрерывно зависящие от постоянных $a = (a_1, \ldots, a_n)$ базисные циклы на M_a. Форма $p\,dq - I\,d\varphi$ замкнута, поэтому разность $\oint_{\gamma_s} p\,dq - \oint_{\gamma_s} I\,d\varphi = \oint_{\gamma_s} p\,dq - 2\pi I_s$ постоянна. Следовательно,

$$I_s = \frac{1}{2\pi}\oint_{\gamma_s} p\,dq\,, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n\,, \tag{4.1}$$

поскольку переменные действия сами определены с точностью до аддитивной постоянной. Формулы (4.1) наиболее эффективны при анализе систем с разделенными переменными (см. § 7).

Гамильтонова система с функцией Гамильтона $H(I)$ называется *невырожденной* (в области $D \times \mathbb{T}^n$), если якобиан $\dfrac{\partial \omega}{\partial I} = \det \left\| \dfrac{\partial^2 H}{\partial I^2} \right\|$ не обращается в нуль в области D. В этом случае почти все (в смысле меры Лебега) инвариантные торы нерезонансны, а резонансные торы всюду плотны в $D \times \mathbf{T}^n$.

3. Согласно П. Болю, непрерывная функция $t \to g(t)$, $t \in \mathbb{R}$, называется условно-периодической, если $g(t) = f(\omega_1 t, \ldots, \omega_n t)$, где f — некоторая непрерывная функция на n-мерном торе $\mathbf{T}^n = \{\varphi_1, \ldots, \varphi_n \bmod 2\pi\}$, $\omega_1, \ldots, \omega_n = \mathrm{const}$.

Пусть $F: M^{2n} \to \mathbb{R}$ — непрерывная функция на симплектическом многообразии, $\dot{x} = v_H(x)$ — вполне интегрируемая гамильтонова система с компактными инвариантными поверхностями M_a. Рассмотрим решение $x(t, x_0)$ с начальным условием x_0 на регулярной поверхности $M_a \simeq \mathbf{T}^n$. По теореме 1, $f(t) = F(x(t, x_0))$ — условно-периодическая функция времени; роль чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ играют частоты условно-периодического движения на n-мерном торе M_a. В частности, при $M^{2n} = \mathbb{R}^{2n}$ все глобальные канонические координаты представлены условно-периодическими функциями.

По теореме Г. Вейля существует временно́е среднее

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T F(x(t, x_0))\, dt\,, \tag{4.2}$$

разумеется, зависящее от начального значения x_0. Оказывается, если точка x_0 принадлежит нерезонансному инвариантному тору, то это среднее непрерывно в x_0. В общем случае функция (4.2) разрывна на M^{2n}. Обсуждение этих вопросов можно найти в [83].

4. В ряде задач гамильтоновой механики количество известных интегралов превосходит число степеней свободы, однако не все интегралы коммутируют друг с другом. Некоторые условия интегрируемости гамильтоновых систем с "избыточным" набором интегралов указаны в работах [137, 126].

Т е о р е м а 3. *Предположим, что гамильтонова система на симплектическом многообразии M^{2n} имеет $n + k$ интегралов $F_1, F_2, \ldots, F_{n+k}$, причем на поверхности $M_c = \{x \in M^{2n} : F_i(x) = c_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n + k\}$ эти функции независимы, а в ее окрестности постоянен ранг матрицы скобок Пуассона*

$$\|\{F_i, F_j\}\|. \tag{4.3}$$

Тогда, если поверхность M_c связна и компактна, и ранг матрицы (4.3) не превосходит $2k$, то поверхность M_c диффеоморфна $(n-k)$-мерному тору и на ней можно так выбрать угловые переменные $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-k} \bmod 2\pi$, чтобы уравнения Гамильтона приняли вид $\dot{\varphi}_s = \omega_s = \mathrm{const}$ $(1 \leqslant s \leqslant n - k)$.

С л е д с т в и е. *Пусть гамильтонова система с n степенями свободы имеет $2n - 2$ независимых интеграла. Тогда связные ком-*

пактные поверхности уровня этих интегралов — двумерные торы, и движение на этих торах условно-периодическое.

Действительно, матрица (4.3) кососимметрична и функция Гамильтона коммутирует со всеми интегралами, поэтому ранг матрицы (4.3) не превосходит $2n-4=2(n-2)=2k$. Интегрируемость в квадратурах гамильтоновой системы с n степенями свободы, допускающей $2n-2$ независимых интеграла, установлена Якоби с помощью метода интегрирующего множителя Эйлера [174]. Теорема Якоби уже использовалась нами в п. 7 § 2.

Теорема 3 выводится из теоремы Ли — Картана [12, гл. 3] и результатов работы [137].

§ 5. Примеры вполне интегрируемых систем

1. Уравнения вращения тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки гамильтоновы на интегральных многообразиях $I_c=\{\omega,\gamma:(I\omega,\gamma)=c,\ (\gamma,\gamma)=1\}$.

Один интеграл всегда существует — это интеграл энергии. Таким образом, для полной интегрируемости уравнений на I_c достаточно знать еще один независимый интеграл. Перечислим известные случаи интегрируемости. Как уже отмечалось, задача о тяжелом волчке содержит шесть параметров: три собственных значения оператора инерции I_1, I_2, I_3 и три координаты центра масс r_1, r_2, r_3 относительно его собственных осей.

1) Случай Эйлера (1750 г.): $r_1=r_2=r_3=0$. Новый интеграл: $(I\omega, I\omega)$.

2) Случай Лагранжа (1788 г.): $I_1=I_2$, $r_1=r_2=0$. Новый интеграл: $\omega_3=\mathrm{const}$.

3) Случай Ковалевской (1889 г.): $I_1=I_2=2I_3$, $r_3=0$. Интеграл, найденный Ковалевской, — это $(\omega_1^2-\omega_2^2-\nu\gamma_1)^2+(2\omega_1\omega_2-\nu\gamma_2)^2$, где $\nu=\varepsilon r/I_3$, $r^2=r_1^2+r_2^2$.

4) Случай Горячева — Чаплыгина (1900 г.): $I_1=I_2=4I_3$, $r_3=0$, $c=(I\omega,\gamma)=0$. В отличие от случаев 1)–3), мы имеем здесь интегрируемый случай на одном интегральном уровне I_0.

Отметим, что все перечисленные интегрируемые случаи образуют в шестимерном пространстве параметров I_i, r_j многообразия одной и той же коразмерности, равной трем.

2. Уравнения движения в первых двух случаях подробно изучены с разных точек зрения в классических работах Эйлера, Пуансо, Лагранжа, Пуассона, Якоби. Случай Ковалевской нетривиален во многих отношениях. Он был найден Ковалевской из условия мероморфности решений уравнений Эйлера — Пуассона в комплексной плоскости времени. Случай Горячева — Чаплыгина намного проще: его можно проинтегрировать с помощью разделения переменных. Покажем это.

В специальных канонических переменных L, G, l, g (см. [83]) функция Гамильтона имеет вид

$$H = \frac{G^2 + 3L^2}{8I_3} + \mu\left(\frac{L}{G}\cos l \sin g + \sin l \cos g\right), \qquad \mu = \varepsilon r .$$

Рассмотрим каноническое преобразование $L = -p_1 - p_2$, $G = p_2 - p_1$, $q_1 = -l - g$, $q_2 = g - l$. В новых симплектических координатах

$$H = \frac{p_1^3 - p_2^3}{2I_3(p_1 - p_2)} - \mu\left(\frac{p_1 \sin q_1}{p_1 - p_2} + \frac{p_2 \sin q_2}{p_1 - p_2}\right).$$

Полагая это выражение равным h и умножая на $p_1 - p_2$, видим, что оно разделяется: $hp_1 - p_1^3/(2I_3) + \mu p_1 \sin q_1 = hp_2 - p_2^3/(2I_3) - \mu p_2 \sin q_2$. Положим

$$\frac{p_1^3}{2I_3} - \mu p_1 \sin q_1 - Hp_1 = F, \qquad \frac{p_2^3}{2I_3} + \mu p_2 \sin q_2 - Hp_2 = F. \tag{5.1}$$

Функция F является первым интегралом уравнений движения (см. § 7); в специальных канонических переменных она имеет вид $F = \dfrac{L(L^2 - G^2)}{8I_3} + \dfrac{L^2 - G^2}{2G}\mu \sin l \cos g$, а в традиционных переменных Эйлера — Пуассона ω, γ — вид $F = -2I_3^2 f$, $f = \omega_3(\omega_1^2 + \omega_2^2) + \nu\omega_1\gamma_3$ $(\nu = \mu/I_3)$. Выпишем замкнутую систему уравнений для изменения переменных p_1, p_2:

$$\dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial q_1} = -\frac{\mu p_1}{p_1 - p_2}\cos q_1, \quad \dot p_2 = -\frac{\partial H}{\partial q_2} = -\frac{\mu p_2}{p_1 - p_2}\cos q_2,$$

или, учитывая соотношения (5.1),

$$\dot p_1 = \frac{\pm\sqrt{\Phi(p_1)}}{p_1 - p_2}, \quad \dot p_2 = \frac{\pm\sqrt{\Phi(p_2)}}{p_1 - p_2}, \tag{5.2}$$

где $\Phi(z) = \mu^2 z^2 - \left(F + Hz - z^3/(2I_3)\right)^2$ — многочлен шестой степени. Решения этих уравнений выражаются через гиперэллиптические функции времени. Переменные p_1 и p_2 изменяются в непересекающихся интервалах $[a_1, b_1]$ и $[a_2, b_2]$, где a_i и b_i — соседние корни многочлена Φ, между которыми он принимает положительные значения.

Введем угловые переменные $\varphi_1, \varphi_2 \bmod 2\pi$ по формулам

$$\varphi_i = \frac{\pi}{\tau_i}\int_{a_i}^{p_i} \frac{dz}{\pm\sqrt{\Phi(z)}}, \qquad \tau_i = \int_{a_i}^{b_i} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}. \tag{5.3}$$

В новых переменных уравнения (5.2) примут вид

$$\dot{\varphi}_i = \frac{\pi}{2\tau_i\big(p_1(\varphi_1) - p_2(\varphi_2)\big)}, \qquad i = 1, 2, \tag{5.4}$$

где $p_i(z)$ — действительные гиперэллиптические функции с периодом 2π, определяемые соотношениями (5.3).

Траектории уравнений (5.4) на $\mathbf{T}^2 = \{\varphi \bmod 2\pi\}$ — прямые линии, поэтому отношение частот соответствующих условно-периодических движений равно τ_1/τ_2 — отношению периодов гиперэллиптического интеграла $\displaystyle\int_{z_0}^{z} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}}$. Этот замечательный факт имеет место и для уравнений задачи Ковалевской. Подробности можно найти в работе [83].

3. Задача о движении твердого тела в идеальной жидкости намного богаче интегрируемыми случаями. Напомним, что уравнения Кирхгофа $\dot{m} = m \times \dfrac{\partial H}{\partial m} + p \times \dfrac{\partial H}{\partial p}$, $\dot{p} = p \times \dfrac{\partial H}{\partial m}$, $2H = (Am, m) + 2(Bm, p) + (Cp, p)$, всегда имеют три интеграла: $F_1 = H$, $F_2 = (m, p)$, $F_3 = (p, p)$. Задача об их полной интегрируемости сводится к вопросу о наличии четвертого интеграла, независимого с функциями F_1, F_2 и F_3. Перечислим известные интегрируемые случаи, считая матрицы A, B, C диагональными: $A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3)$, $B = \operatorname{diag}(b_1, b_2, b_3)$, $C = \operatorname{diag}(c_1, c_2, c_3)$.

1) Случай Кирхгофа (1870 г.): $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$. Добавочный интеграл $F_4 = m_3$. Уравнения движения просто интегрируются в эллиптических функциях времени.

2) Случай Клебша (1871 г.): $b_1 = b_2 = b_3 = b$ и

$$a_1^{-1}(c_2 - c_3) + a_2^{-1}(c_3 - c_1) + a_3^{-1}(c_1 - c_2) = 0 \tag{5.5}$$

Из этого соотношения следует, что $c_i = \alpha/a_i + \beta$ $(\alpha, \beta = \mathrm{const})$. Дополнительный интеграл имеет вид $F_4 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 - \dfrac{\alpha}{a_1 a_2 a_3}(a_1 p_1^2 + a_2 p_2^2 + a_3 p_3^2)$. Параметр b является несущественным: он не входит в уравнения движения.

Так как $\{F_1, F_4\} = 0$, то F_1 — интеграл уравнений Кирхгофа с гамильтонианом $H = F_4$. Однако этот случай не является новым, поскольку коэффициенты гамильтониана F_4 также удовлетворяют соотношению (5.5).

В старых работах по гидродинамике принята следующая терминология. Если выполнено (5.5) и среди чисел a_1, a_2, a_3 нет равных, то это — первый случай Клебша. Если $a_1 = a_2 \neq a_3$, то из (5.5) вытекает, что $c_1 = c_2$. Это — второй случай Клебша (частный случай Кирхгофа). Наконец, при $a_1 = a_2 = a_3$ имеем третий случай интегрируемости Клебша (гамильтонианом служит функция λF_4, $\lambda = \mathrm{const}$). Отметим, что первый и третий случаи "двойственны" друг другу.

3) Случай Стеклова—Ляпунова (1893 г.):

$$(b_2 - b_3)/a_1 + (b_3 - b_1)/a_2 + (b_1 - b_2)/a_3 = 0\ , \tag{5.6}$$

$$c_1 - (b_2 - b_3)^2/a_1 = c_2 - (b_3 - b_1)^2/a_2 = c_3 - (b_1 - b_2)^2/a_3\ . \tag{5.7}$$

Из этих соотношений можно найти, что

$$\begin{gathered} b_j = \mu(a_1 a_2 a_3)a_j^{-1} + \nu\ , \qquad c_1 = \mu^2 a_1(a_2 - a_3)^2 + \nu'\ , \quad \ldots\ , \\ \mu, \nu, \nu' = \mathrm{const}\ . \end{gathered} \tag{5.8}$$

Дополнительный интеграл есть $F_4 = \sum\limits_j \left(m_j^2 - 2\mu(a_j + \nu)m_j p_j\right) + {}$ $+\mu^2\left((a_2-a_3)^2+\nu''\right)p_1^2+\ldots$ Параметры ν, ν' и ν'' несущественные: их появление связано с наличием классических интегралов Кирхгофа F_2 и F_3.

В случае несовпадения чисел a_1, a_2 и a_3 интеграл F_4 был найден В. А. Стекловым. При $a_1 = a_2 \neq a_3$ из (5.6) и (5.7) вытекает, что $b_1 = b_2$ и $c_1 = c_2$; это — случай интегрируемости Кирхгофа. Если, наконец, $a_1 = a_2 = a_3$, то формулы (5.8) дают тривиальный вырожденный случай. Однако, как заметил А. М. Ляпунов, здесь в качестве гамильтониана надо взять функцию λF_4, $\lambda = \mathrm{const}$; добавочным интегралом будет, очевидно F_1. Поэтому случаи интегрируемости Стеклова и Ляпунова также "двойственны" друг другу.

4) Частный случай интегрируемости Чаплыгина (1902 г.):

$$2H = a(m_1^2 + m_2^2 + 2m_3^2) + b(m, p) + a\left((d + c)p_1^2 + (d - c)p_2^2 + dp_3^2\right)\ .$$

Параметры b и d несущественные: они не войдут в уравнения движения. В предположении $F_2 = (m, p) = 0$ имеется дополнительный интеграл $F_4 = (m_1^2 - m_2^2 + cp_3^2)^2 + 4m_1^2 m_2^2$, напоминающий по своей структуре интеграл Ковалевской.

Отметим, что в 9-мерном пространстве параметров случаи Кирхгофа, Клебша и Стеклова—Ляпунова задаются алгебраическими многообразиями одинаковой коразмерности, равной трем.

4. Задача о движении n точечных вихрей по плоскости (§ 8, гл. I) вполне интегрируема при $n \leqslant 3$. Случай $n = 1$ тривиален; при $n = 2$ независимыми коммутирующими интегралами являются, например, функции H и M; при $n = 3$ — функции H, M и $P_x^2 + P_y^2$. В задаче четырех вихрей независимых интегралов ровно столько, сколько степеней свободы. Однако они не все коммутируют.

Рассмотрим подробнее частный случай задачи четырех вихрей, когда сумма интенсивностей Γ_s равна нулю. Тогда интегралы P_x

и P_y находятся в инволюции. Если их постоянные равны нулю, то уравнения движения четырех вихрей оказываются интегрируемыми по Лиувиллю. Идея решения основана на применении подходящего линейного канонического преобразования, хорошо известного в небесной механике в связи с "исключением" движения центра масс задачи n тел. Пусть, для определенности, $\Gamma_1 = \Gamma_2 = -\Gamma_3 = -\Gamma_4 = -1$. Рассмотрим линейное каноническое преобразование $x, y \to \alpha, \beta$ согласно формулам

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\beta_4 , & y_1 &= -\alpha_3 - \alpha_4 + \beta_2 , \\
x_2 &= \beta_3 - \beta_4 , & y_2 &= \alpha_3 - \beta_1 + \beta_2 , \\
x_3 &= \alpha_1 + \alpha_2 - \beta_4 & y_3 &= \beta_2 , \\
x_4 &= -\alpha_1 + \beta_3 - \beta_4 , & y_4 &= -\beta_1 + \beta_2 .
\end{aligned}$$

В новых координатах $P_x = \alpha_2$, $P_y = \alpha_4$. Следовательно, функция Гамильтона H не зависит от сопряженных переменных β_2 и β_4. Таким образом, число степеней свободы понижено на две единицы: получено зависящее от двух параметров α_2 и α_4 семейство гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Симплектическими координатами являются переменные $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3$. При $\alpha_2 = \alpha_4 = 0$ функция M является интегралом "приведенной" системы. Следовательно, эта гамильтонова система с двумя степенями свободы вполне интегрируема. В частности, функции $\alpha_1, \alpha_3, \beta_1, \beta_3\big|_t$ можно найти с помощью квадратур. Оставшиеся "циклические" координаты β_2 и β_4 ввиду формул $\dot\beta_2 = \partial K/\partial\alpha_2$, $\dot\beta_4 = \partial K/\partial\alpha_4$; $K(\alpha,\beta) = H(x,y)\big|_{\alpha,\beta}$ находятся простым интегрированием.

5. Рассмотрим еще гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, функция Гамильтона которых имеет вид

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}ax^2 + \frac{1}{2}by^2 - x^2y - \frac{\varepsilon}{3}y^3 ; \qquad a, b, \varepsilon = \text{const} .$$

Соответствующие уравнения Гамильтона описывают движение материальной точки по евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$ в силовом поле с потенциалом третьей степени. Среди таких систем находится уже известная нам система Хенона — Хейлеса ($a = b = -\varepsilon = 1$). Перечислим известные случаи интегрируемости.

1) $a = b$, $\varepsilon = 1$. Уравнения Гамильтона разделяются после перехода к переменным $x - y$ и $x + y$ (И. Айзава и Н. Саито, 1972 г.), поэтому имеется дополнительный интеграл, квадратичный по импульсам.

2) $\varepsilon = 6$, a и b — произвольные. Имеется интеграл, найденный Д. Грином: $x^4 + 4x^2y^2 + 4p_x(p_xy - p_yx) - 4ax^2y + (4a - b)(p_x^2 + ax^2)$. Как заметил И. Трев, при $b = 4a$ уравнения Гамильтона разделяются в параболических координатах.

3) $\varepsilon = 16$, $b = 16a$. Дополнительный интеграл, имеющий четвертую степень по импульсам, найден Л. Холлом [200]. Вот его вид при $b = 1$:

$$\frac{1}{4}p_x^4 + \left(\frac{x^2}{2} + 4x^2 y\right) p_x^2 - \frac{4}{3}x^3 p_x p_y + \frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^4 y - \frac{8}{9}x^6 - \frac{16}{3}x^4 y^2 .$$

§ 6. Изоморфизмы некоторых интегрируемых гамильтоновых систем

Локальные изоморфизмы невырожденных вполне интегрируемых гамильтоновых систем, о которых шла речь в п. 5 введения, в ряде случаев могут быть продолжены до изоморфизмов в целом. Приведем соответствующие примеры.

1. Рассмотрим задачу Якоби о движении материальной точки с единичной массой по инерции по поверхности эллипсоида $ax^2 + by^2 + cz^2 = 1$. Пусть x, y, z, p_x, p_y, p_z — естественные избыточные канонические переменные (см. п. 9, § 1, гл. I). После канонической замены переменных $p_1 = p_x/\sqrt{a}$, $x_1 = x\sqrt{a}$; $p_2 = p_y/\sqrt{b}$, $x_2 = y\sqrt{b}$; $p_3 = p_z/\sqrt{c}$, $x_3 = z\sqrt{c}$; гамильтониан задачи Якоби примет вид

$$H = \frac{abc\,G}{2F}, \qquad F = ax_1^2 + bx_2^2 + cx_3^2,$$

$$G = \frac{(p_2x_3 - p_3x_2)^2}{a} + \frac{(p_3x_1 - p_1x_3)^2}{b} + \frac{(p_1x_2 - p_2x_1)^2}{c}.$$

Вспомним (п. 6, § 3, гл. I), что вращение твердого тела в осесимметричном силовом поле с нулевой постоянной интеграла площадей описывается уравнениями Гамильтона с гамильтонианом

$$E = \frac{1}{2}\left[\frac{(p_2x_3 - p_3x_2)^2}{I_1} + \frac{(p_3x_1 - p_1x_3)^2}{I_2} + \frac{(p_1x_2 - p_2x_1)^2}{I_3}\right] + V(x_1, x_2, x_3).$$

Здесь x_1, x_2, x_3 — направляющие косинусы единичного вектора оси симметрии поля. Мы опустили множитель f^{-2} ($f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$), не влияющий на вид уравнений движения.

Положим $V = \varepsilon(I_1x_1^2 + I_2x_2^2 + I_3x_3^2)$. Получим задачу Бруна, уравнения которой, по аналогии Стеклова, тождественны уравнениям интегрируемого случая Клебша уравнений Кирхгофа. Если положить теперь $I_1 = a$, $I_2 = b$, $I_3 = c$, то гамильтониан E будет равен $G/2 - \varepsilon F$. Ясно, что $\{E = 0\}$ и $\{H = abc\varepsilon\}$ — тождественные гиперповерхности в $\mathbb{R}^6 = \{p, x\}$. Покажем, что возникающие на них динамические системы имеют одни и те же траектории. Действительно,

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{abc}{2F}\frac{\partial G}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x} = -\frac{abc}{2}\left(\frac{\partial G}{\partial x}F^{-1} - G\frac{\partial F}{\partial x}F^{-2}\right), \quad (6.1)$$

$$\dot{x} = \frac{\partial E}{\partial p} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial E}{\partial x} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (6.2)$$

Положим $H = abc\varepsilon$ (т. е. $G/F = 2\varepsilon$). В системе (6.1) выполним замену времени вдоль траекторий: $d\tau = (abc/F)\,dt$. Тогда уравнения (6.1) предстанут в виде

$$\frac{dx}{d\tau} = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}, \quad \frac{dp}{d\tau} = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial x} + \varepsilon\frac{\partial F}{\partial x}. \quad (6.3)$$

Системы (6.2) и (6.3) тождественны, поэтому системы (6.1) и (6.2) имеют одни и те же траектории. В частности, их интегралы совпадают. Итак, задача Якоби является частным случаем задачи Клебша — Тиссерана — Бруна из динамики твердого тела.

2. Рассмотрим задачу о вращении твердого тела в силовом поле с потенциальной энергией $V = (a,\alpha) + (b,\beta) + (c,\gamma)$, где a, b, c — постоянные векторы. Такой вид имеет, например, потенциальная энергия тяжелого заряженного и намагниченного твердого тела, вращающегося в суперпозиции однородных гравитационных, электрических и магнитных полей. Движение описывается уравнениями (3.1)–(3.2) из гл. I.

О. И. Богоявленский [21] установил полную интегрируемость этой задачи в случае шарового тензора инерции, сведя уравнения вращения к уравнениям задачи Неймана о движении точки по трехмерной сфере с квадратичным потенциалом. Для доказательства воспользуемся тождеством Эйлера

$$\begin{aligned}(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2 + \dot\chi^2)(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 + \chi^2) = \\ = (\chi\dot\xi - \xi\dot\chi + \zeta\dot\eta - \eta\dot\zeta)^2 + (\chi\dot\eta - \eta\dot\chi + \xi\dot\zeta - \zeta\dot\xi)^2 + \\ + (\chi\dot\zeta - \zeta\dot\chi + \eta\dot\xi - \xi\dot\eta)^2 + (\xi\dot\xi + \eta\dot\eta + \zeta\dot\zeta + \chi\dot\chi)^2, \quad (6.4)\end{aligned}$$

которое является следствием правила умножения кватернионов. С его помощью Лагранж доказал, что любое натуральное число можно представить в виде суммы четырех квадратов. Из (6.4) и формул (3.6) гл. I вытекает следующая формула для кинетической энергии тела: $T = (I/2)(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) = 2I(\dot\xi^2 + \dot\eta^2 + \dot\zeta^2 + \dot\chi^2)$ (I — момент инерции). Однако тот же вид имеет кинетическая энергия движения точки по трехмерной сфере $\xi^2+\eta^2+\zeta^2+\chi^2 = 1$. Остается заметить, что направляющие косинусы квадратично зависят от компонент кватерниона ξ, η, ζ, χ (см. (3.7) гл. I).

3. Для ряда гамильтоновых систем с алгебраическими правыми частями изоморфизмы задаются дробно-линейными преобразованиями с особенностями. Первый результат подобного рода принадлежит Вито Вольтерра: оказывается, проективным преобразованием уравнения для свободного гиростата Жуковского приводятся к уравнениям Эйлера для одного твердого тела, вращающегося по инерции. Тем самым удается явно проинтегрировать уравнения задачи Жуковского (см. [235]).

Напомним вид уравнений, описывающих вращение гиростата:

$$I\dot{y} = (Iy + \lambda) \times y\,, \qquad \lambda \in \mathbb{R}^3\,. \tag{6.5}$$

Вольтерра нашел замечательное представление этих уравнений:

$$\dot{y}_i = \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(y_j, y_k)}\,, \qquad f_1 = \frac{(Iy, y)}{2\sqrt{I_1 I_2 I_3}}\,, \qquad f_2 = \frac{(Iy + \lambda)^2}{2\sqrt{I_1 I_2 I_3}}\,; \tag{6.6}$$

здесь и далее индексы i, j, k образуют четную перестановку чисел $1, 2, 3$. Функции f_1 и f_2 — интегралы уравнений (6.5); положим их равными соответственно некоторым фиксированным постоянным h_1 и h_2.

Перейдем к проективным компонентам вектора y с помощью формул

$$y_i = z_i/z_4, \quad i = 1, 2, 3\,; \qquad (z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 \setminus \{0\}\,. \tag{6.7}$$

Подставив (6.7) в уравнения (6.6), найдем, что z_k удовлетворяют дифференциальным соотношениям

$$z_4\dot{z}_i - z_i\dot{z}_4 = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(z_j, z_k)}\,, \tag{6.8}$$

$$\varphi_l(z) = z_4^2\left(f_l\left(z_1/z_4, z_2/z_4, z_3/z_4\right) - h_l\right)\,, \qquad l = 1, 2\,.$$

При этом на интересующих нас движениях функции φ_1 и φ_2 обращаются в нуль. Заметим еще, что φ_1 и φ_2 — квадратичные формы от проективных координат z_1, z_2, z_3, z_4.

Кроме (6.8), имеют место также соотношения

$$z_i\dot{z}_j - z_j\dot{z}_i = \frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(z_k, z_4)}\,. \tag{6.9}$$

Воспользуемся теперь известной теоремой о паре квадратичных форм: с помощью подходящего линейного невырожденного преобразования

$$z_r = \sum_{s=1}^{4} c_{rs}\xi_s\,, \qquad c_{rs} \in \mathbb{C}\,, \tag{6.10}$$

приведем квадратичные формы φ_1 и φ_2 к виду $\varphi_1 = \frac{1}{2}\sum \mu_k\xi_k^2$, $\varphi_2 = \frac{1}{2}\sum \xi_k^2$. Преобразование (6.10) сохраняет форму соотношений (6.8), (6.9), однако при этом правые части последних делятся на константу $\varkappa = \det\|c_{rs}\|$. Поэтому в новых переменных ξ_k уравнения (6.8), (6.9) примут вид

$$\begin{aligned} &\xi_4\dot{\xi}_i - \xi_i\dot{\xi}_4 = (\mu_k - \mu_j)\xi_j\xi_k/\varkappa\,, \\ &\dot{\xi}_i\xi_j - \dot{\xi}_j\xi_i = (\mu_k - \mu_4)\xi_k\xi_4/\varkappa\,. \end{aligned} \tag{6.11}$$

Но этот же вид имеют уравнения Эйлера в проективных координатах (6.7). Роль моментов инерции играют числа μ_1, μ_2 и μ_3; они зависят не только от I и λ, но и от постоянных интегрирования h_1 и h_2. Искомый изоморфизм задач Эйлера и Жуковского является композицией двух проективных преобразований и одного линейного. В вещественной области этот изоморфизм имеет особенности, что отвечает разной топологии фазовых кривых двух задач.

4. Недавно найдены другие неожиданные изоморфизмы ряда проинтегрированных задач динамики. Так, например, в [201] указано дробно-линейное преобразование, связывающее уравнения задачи Ковалевской и задачи Клебша, а в работе [179] найден аналогичный изоморфизм волчка Горячева — Чаплыгина и трехчастичной цепочки Тоды. Эти результаты основываются на глубоких свойствах алгебраически вполне интегрируемых гамильтоновых систем (см. [178]).

§ 7. Разделение переменных

1. Самым простым и эффективным методом точного интегрирования уравнений Гамильтона является метод разделения переменных. Согласно Якоби, задача интегрирования канонических уравнений

$$\dot{p} = -\partial H/\partial q\,, \quad \dot{q} = \partial H/\partial p\,; \qquad (p,q) \in \mathbb{R}^{2n}, \tag{7.1}$$

сводится к отысканию полного интеграла уравнения в частных производных Гамильтона — Якоби

$$\frac{\partial V}{\partial t} + H\left(\frac{\partial V}{\partial q}, q, t\right) = 0\,. \tag{7.2}$$

Полный интеграл — это n-параметрическое семейство решений $V(t,q,x)$ уравнения (7.2), удовлетворяющее условию невырожденности $\det\left\|\partial^2 V/\partial q\partial x\right\| \neq 0$. Если гамильтониан H не зависит явно от времени, то подстановкой $V(q,t) = -Kt + W(q)$ уравнение (7.2) приводится к уравнению

$$H(\partial W/\partial q, q) = K(x)\,. \tag{7.3}$$

4 Козлов В. В.

Так как $\det \|\partial^2 W/\partial q \partial x\| = \det \|\partial^2 V/\partial q \partial x\| \neq 0$, то $W(q,x)$ — "полный" интеграл уравнения (7.3) — можно принять в качестве производящей функции канонического преобразования $p, q \to y, x$: $y = \partial W/\partial x$, $p = \partial W/\partial q$. В новых канонических переменных x, y функция H становится равной $K(x)$, поэтому уравнения Гамильтона сразу интегрируются: $x = x_0$, $y = y_0 + \omega(x_0)t$, $\omega(x) = \partial K/\partial x$.

Подчеркнем, что функция K в уравнении (7.3) считается неопределенной, и для ее однозначного задания следует привлекать дополнительные условия. Обычно полагают $K(x_1, \dots, x_n) = x_n$: тогда в фазовом пространстве переменных x, y траектории гамильтоновой системы (7.1) являются прямыми.

2. Если уравнение (7.3) имеет полный интеграл вида $W(q,x) = \sum\limits_{k=1}^{n} W_k(q_k, x_1, \dots, x_n)$, то переменные $q_1, \dots, q_n$ называются *разделенными*.

Приведем примеры гамильтонианов, для которых уравнение (7.3) решается разделением переменных:

(а) $H = f_n(f_{n-1}(\dots f_2(f_1(p_1, q_1), p_2, q_2) \dots, p_{n-1}, q_{n-1}), p_n, q_n)$;

(б) $H = \sum f_s(p_s, q_s) \;/\; \sum g_s(p_s, q_s)$.

В случае (а) можно положить $W = W_1(q_1, x_1) + W_2(q_2, x_1, x_2) + \dots + W_n(q_n, x_{n-1}, x_n)$, где функция W_k удовлетворяет уравнению $f_k(x_{k-1}, \partial W_k/\partial q_k, q_k) = x_k$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$; $f_1(\partial W_1/\partial q_1, q_1) = x_1$. Поскольку W_k зависит лишь от q_k, а $x_1, \dots, x_n$ — параметры, то эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные. Они тривиально интегрируются.

В случае (б) полагаем $K = x_0$ и ищем полный интеграл уравнения $\sum\limits_k [x_0 g_k(\partial W/\partial q_k, q_k) - f_k(\partial W/\partial q_k, q_k)] = 0$ в виде суммы $\sum W_k(q_k, x_0, x_k)$, где W_k, как функция от q_k, удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$x_0 g_k\left(\frac{dW_k}{dq_k}, q_k\right) - f_k\left(\frac{dW_k}{dq_k}, q_k\right) = x_k\,, \qquad \sum x_k = 0\,.$$

В качестве n независимых параметров можно взять x_0 и любые $n-1$ из n параметров $x_1, \dots, x_n$.

Подчеркнем, что мы не ставим целью найти все решения уравнения (7.3); нам достаточно знать хотя бы одно n-параметрическое семейство его решений.

Отметим, что случаи (а) и (б) могут встречаться в сочетании друг с другом; кроме того, возможны более сложные виды разделения переменных. В качестве примера приведем относящийся сюда результат П. Штекеля (1985 г.). Пусть Φ — определитель матрицы $\|\varphi_{ij}(q_j)\|$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$, а Φ_{ij} — алгебраическое дополнение элемента φ_{ij}. Предположим, что в симплектических координатах $p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n$ функция Гамильтона имеет вид

$$H(p,q) = \sum_{s=1}^{n} \Phi_{1s}(q)\, f_s(p_s, q_s) / \Phi(p,q)\ ; \tag{7.4}$$

тогда уравнения Гамильтона интегрируются. Полагая $K(x) = x_1$, запишем уравнение (7.3): $\sum\limits_m \Phi_{1m} \Big[\sum\limits_k x_k \varphi_{km}(q_m) - f_m \left(\partial W / \partial q_m, q_m \right) \Big] = 0$. Его полный интеграл можно найти в виде суммы $W(q,x) = \sum\limits_m W_m(q_m,\ x_1, \ldots, x_n)$, где W_m, как функция q_m, удовлетворяет уравнению $f_m \left(dW_m / dq_m, q_m \right) = \sum\limits_k x_k\, \varphi_{km}(q_m)$.

Частным случаем гамильтоновых систем Штекеля являются лиувиллевы системы; функция Гамильтона имеет вид

$$\frac{1}{2\sum\limits_{i=1}^{n} A_i} \sum_{j=1}^{n} \left[\frac{p_j^2}{B_j} + C_j \right] . \tag{7.5}$$

Функции A_i, B_i, C_i зависят лишь от координаты q_i, причем $\sum A_i$ и B_j не обращаются в нуль. Лиувиллевы системы часто встречаются в приложениях.

3. Задача о разделении переменных в гамильтоновых системах — популярная тема исследований прошлого столетия. Ее актуальность подчеркивает следующее наблюдение: если гамильтонова система с гамильтонианом $H = \sum\limits_{i,j} g^{ij}(q) p_i p_j / 2$ решается разделением переменных, то в уравнении Лапласа — Бельтрами

$$\Delta f = -\frac{1}{\sqrt{g}} \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{g}\, g^{ij} \frac{\partial f}{\partial q_j} \right) = 0\ , \qquad g = \det \| g_{ij} \|\ ,$$

координаты q также разделяются (см. [133]). Здесь g^{ij} — элементы матрицы, обратной к матрице метрики $\| g_{ij} \|$.

Леви-Чивита нашел критерий интегрируемости системы с функцией Гамильтона $H(p,q)$ методом разделения переменных в данных симплектических координатах. Функция H должна удовлетворять следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial p_j} \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial^2 H}{\partial q_j \partial p_k} - \\ - \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial p_k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial q_k} + \frac{\partial H}{\partial q_j} \frac{\partial H}{\partial q_k} \frac{\partial^2 H}{\partial p_j \partial p_k} = 0, \quad 1 \leqslant j < k \leqslant n\,. \tag{7.6}$$

Решения системы (7.6) при $n = 2$ и $n = 3$ изучены в работах Мореры и Дель-Аквы (обзор результатов см. в [144]).

Если в гамильтоновой системе с гамильтонианом $H(p,q)$ переменные p,q не разделяются, то это еще не означает, что ее нельзя решить методом разделения переменных. Возможно, что после надлежащей канонической подстановки $p,q \to y,x$ мы получим разделенные канонические переменные x,y. Вопрос о существовании "скрытых" разделенных переменных в гамильтоновой системе является существенно более трудной задачей.

Пусть H имеет "натуральный" вид $T + V$ и каноническая замена $p,q \to y,x$ является расширением "точечного" преобразования: $q = f(x)$, $y = (\partial f/\partial x)^{\mathrm{T}} p$. Если в некоторых новых симплектических координатах x,y исходная гамильтонова система решается методом разделения переменных, то тогда эта система имеет полный набор инволютивных интегралов, квадратичных по импульсам (см. п. 4). Обсуждение возможности разделения переменных в системах с квадратичными интегралами содержится в работе [143]. Задача о наличии полного набора полиномиальных интегралов гамильтоновых систем будет рассмотрена в гл. VIII.

Отметим, что если мы допускаем произвольные канонические замены переменных в фазовом пространстве, то тогда любая вполне интегрируемая гамильтонова система решается разделением переменных: для этого достаточно перейти к переменным действие — угол. В такой общей постановке задача о существовании разделенных канонических координат по существу эквивалентна задаче о наличии полного набора инволютивных интегралов.

4. Пусть $W(q,x)$ — полный интеграл уравнения (7.3). Положим $p = \partial W/\partial q$. Так как $\det \|\partial^2 W/\partial q \partial x\| \neq 0$, то можно (по крайней мере локально) выразить x через p и q. Положим $x_1 = F_1(p,q), \ldots,$ $x_n = F_n(p,q)$. Нетрудно показать, что функции $F_1, \ldots, F_n$ независимы и их попарные скобки Пуассона равны нулю.

Для того чтобы указать полный набор коммутирующих интегралов в системе с разделенными переменными, вовсе не обязательно выписывать в явном виде полное решение уравнения (7.3). Например, в случае (а) из п. 2 ими будут функции $F_1 = f_1(p_1, q_1)$, $F_2 = f_2(f_1(p_1,q_1), p_2, q_2), \ldots, F_n = H$, а в случае (б) — функции $F_0 = H$, $F_s = f_s(p_s,q_s) - H\, g_s(p_s,q_s)$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$. Функции $F_0, F_1, \ldots, F_n$ находятся в инволюции, однако (ввиду равенства $F_1 + \ldots + F_n = 0$) не все они независимы. Отбрасывая одну из функций F_k $(k \geqslant 1)$, получим набор независимых интегралов.

При решении задачи Горячева — Чаплыгина (п. 2 § 5) мы использовали разделение симплектических координат типа (б). Получающийся при этом дополнительный интеграл — полином третьей (а не второй) степени по импульсам (ср. с п. 3). Дело в том, что переход к специальным каноническим координатам не является расширением преобразования координат в конфигурационном пространстве.

В гамильтоновой системе Штекеля (7.4) n функций $F_k = \sum_s \Phi_{ks} f_s/\Phi$ образуют полный инволютивный набор интегралов.

Итак, если гамильтонова система решается методом Гамильтона — Якоби с использованием разделения переменных, то в этом случае можно сразу же выписать $(\dim M)/2$ независимых интегралов в инволюции.

5. Большое число важных задач гамильтоновой механики решены с использованием *эллиптических координат* в $\mathbb{R}^n$ (или их вырождений). Эллиптические координаты введены и изучены Якоби [174]. При $n = 2$ они были известны еще Эйлеру.

Пусть $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ — различные положительные числа. Для любого $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ уравнение

$$f(\lambda) = \sum_s \frac{x_s^2}{a_s - \lambda} = 1$$

определяет n действительных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, разделяющих $a_1, \ldots, a_n$ (см. рис. 9). Числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ служат криволинейными координатами в $\mathbb{R}^n$. Они называются эллиптическими координатами Якоби.

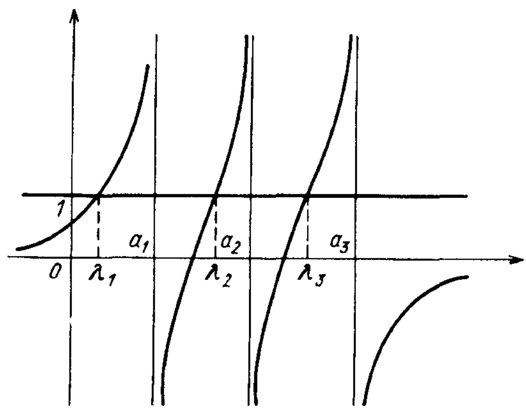

Рис. 9

Можно показать, что

$$x_i^2 = \prod_{s=1}^{n} (a_i - \lambda_s) \Big/ \prod_{\substack{s=1 \\ s \neq i}}^{n} (a_i - a_s). \tag{7.7}$$

С помощью этой формулы нетрудно вывести соотношение $4 \sum \dot{x}_s^2 = \sum M_s \dot{\lambda}_s^2$, где

$$M_s = \prod_{i \neq s} (\lambda_i - \lambda_s) \Big/ \prod (a_i - \lambda_s). \tag{7.8}$$

Отметим любопытную двойственность формул (7.7) и (7.8).

Перейдем теперь к симплектическим координатам λ_s, $\mu_s = M_s\dot{\lambda}_s/4$. Тогда кинетическая энергия свободного движения точки в $\mathbb{R}^n$ примет следующий вид:

$$H = \frac{1}{2}\sum \dot{x}_s^2 = 2\sum \mu_s^2/M_s(\lambda)\,. \tag{7.9}$$

Здесь непосредственно не видно, как симплектические переменные λ, μ могут быть разделены. Воспользуемся следующей формулой Якоби: сумма $\sum\limits_{s=1}^{n}\left(\lambda_s^m \Big/ \prod\limits_{i\neq s}(\lambda_s - \lambda_i)\right)$ равна нулю при $m < n-1$ и единице при $m = n-1$. С помощью этой формулы равенство (7.9) можно представить в виде

$$\sum_s \frac{\sum\limits_{m=0}^{n-1} F_m\lambda_s^m}{\prod\limits_{i\neq s}(\lambda_s - \lambda_i)} = 2\sum_s \frac{\mu_s^2\prod\limits_j(\lambda_s - a_j)}{\prod\limits_{i\neq s}(\lambda_s - \lambda_i)}\,.$$

Здесь $F_{n-1} = H$, а $F_0, F_1, \ldots, F_{n-2}$ пока произвольны. Теперь переменные λ, μ разделяются: можно положить $\sum\limits_{m=0}^{n-1} F_m\lambda_s^m = 2\mu_s^2\prod\limits_{j=1}^{n}(\lambda_s - a_j)$. Из этой системы найдем $F_0, F_1, \ldots, F_{n-2}$ как функции λ, μ; они дадут нам полный набор независимых интегралов в инволюции.

Из этого результата можно вывести теорему Якоби о полной интегрируемости задачи о движении точки по поверхности многомерного эллипсоида при отсутствии внешних сил. Действительно, зафиксируем значение переменной λ_1, положив, например, $\lambda_1 = 0$. Тогда $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ будут криволинейными ортогональными координатами на поверхности $(n-1)$-мерного эллипсоида $\sum\limits_{s=1}^{n}\frac{x_s^2}{a_s^2} = 1$.

Гамильтониан задачи Якоби дается формулой (7.9), в которой надо положить $\lambda_1 = 0$, $\mu_1 = 0$. Разделение переменных $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, $\mu_2, \ldots, \mu_n$ осуществляется по указанной выше схеме. Отметим, что для двумерного эллипсоида гамильтониан принимает вид (7.5): при $n = 3$ получаем лиувиллеву гамильтонову систему. Если зафиксировать значение одной из переменных $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то тем же методом получим полную интегрируемость задачи о геодезических на многомерных гиперболоидах всех возможных типов. Результаты качественного анализа (основанного на формулах Якоби) поведения геодезических на поверхности двумерного эллипсоида можно найти в [11]. Якоби показал, что задача о движении по инерции по эллипсоиду останется интегрируемой, если на точку будет действовать упругая сила, линия действия которой проходит через центр эллипсоида (см. [174]).

В качестве еще одного применения эллиптических координат рассмотрим задачу о плоском движении материальной точки в поле притяжения двух неподвижных центров; эта задача была проинтегрирована Эйлером в 1760 г. Пусть x_1, x_2 — декартовы координаты в плоскости движения, $(0, c)$, $(0, -c)$ — координаты притягивающих центров ($c > 0$). Перейдем к эллиптическим координатам в плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x_1, x_2\}$, считая, что $a_2 - a_1 = 2c$. Это означает, в частности, что при фиксированных значениях λ уравнение $x_1^2/(a_1 - \lambda) + x_2^2/(a_2 - \lambda) = 1$ задает коническое сечение, фокусы которого совпадают с неподвижными центрами. В симплектических координатах λ, μ функция Гамильтона этой задачи равна

$$H = 2\frac{(a_1-\lambda_1)(a_2-\lambda_1)}{\lambda_2 - \lambda_1}\mu_1^2 + 2\frac{(a_1-\lambda_2)(a_2-\lambda_2)}{\lambda_1 - \lambda_2}\mu_2^2 + V(\lambda_1, \lambda_2)\,, \quad (7.10)$$

где V — потенциальная энергия взаимодействия. Пусть r_1, r_2 — расстояния от движущейся точки до притягивающих центров. Используя формулу (7.7) при $n = 2$, нетрудно получить, что

$$r_1^2 = (x_2 + c)^2 + x_1^2 = \left(\sqrt{a_2 + \lambda_1} + \sqrt{a_2 + \lambda_2}\right)^2,$$
$$r_2^2 = (x_2 - c)^2 + x_1^2 = \left(\sqrt{a_2 + \lambda_1} - \sqrt{a_2 + \lambda_2}\right)^2.$$

Следовательно,

$$V = \frac{\gamma_1}{r_1} + \frac{\gamma_2}{r_2} = \frac{\gamma_1 r_2 + \gamma_2 r_1}{r_1 r_2} = \frac{(\gamma_1 + \gamma_2)\sqrt{a_2 + \lambda_1} - (\gamma_1 - \gamma_2)\sqrt{a_2 + \lambda_2}}{\lambda_1 - \lambda_2}\,. \quad (7.11)$$

В итоге переменные λ_1, μ_1 и λ_2, μ_2 разделяются, поэтому задача двух неподвижных центров интегрируема. Лагранж показал, что интегрируемость сохранится, если на точку будет дополнительно действовать упругая сила, направленная на середину отрезка, соединяющего притягивающие центры. Качественное исследование задачи двух центров можно найти в книге Шарлье [173]. Отметим еще, что гамильтониан (7.10) (с учетом формулы (7.11)) имеет вид гамильтониана лиувиллевой системы (7.5).

6. В ряде случаев (например, когда среди чисел $a_1, \ldots, a_n$ есть равные) эллиптические координаты Якоби вырождаются. Исследование вырождений представляет большой теоретический интерес, так как при этом возникают новые случаи разделения переменных.

Положим $n = 3$; этот случай наиболее важен с точки зрения приложений. Здесь имеется 10 различных типов вырождения эллиптических координат; среди них — обычные декартовы координаты в $\mathbb{R}^3$ (см. [133], гл. 5). Укажем два наиболее интересных типа вырождения.

Пусть $\mathbb{R}^3 = \{x, y, z\}$. Эллиптические координаты Якоби задаются уравнением

$$\frac{x^2}{a-\lambda} + \frac{y^2}{b-\lambda} + \frac{z^2}{c-\lambda} = 1\,, \qquad a > b > c > 0\,. \tag{7.12}$$

Положим $a = \alpha d + d^2$, $b = \beta d + d^2$, $c = 2d^2$, $\lambda = \mu d + d^2$ и сместим начало координат в точку $(0, 0, d)$, т. е. сделаем замену $x = x'$, $y = y'$, $z = z' - d$. Перейдем в уравнении (7.12) к новым координатам и затем устремим d к бесконечности. В пределе получим семейство поверхностей

$$\frac{(x')^2}{\alpha - \mu} + \frac{(y')^2}{\beta - \mu} = -\mu + 2z'\,. \tag{7.13}$$

Уравнение (7.13) задает три различных семейства параболоидов. Через каждую точку $\mathbb{R}^3$ проходят три поверхности из этих семейств, ортогонально пересекающие друг друга. Эллиптические координаты Якоби при $d \to \infty$ переходят в новые координаты μ_1, μ_2, μ_3, которые называются *параболическими*.

Укажем две задачи, решаемые методом разделения переменных с использованием параболических координат.

1) Задача Кеплера в однородном силовом поле: речь идет о движении точки под действием гравитационного притяжения неподвижного центра и дополнительной силы, постоянной по величине и направлению; она решена Лагранжем в 1766 году. Есть еще один аспект этой задачи: атом водорода в однородном электрическом поле.

2) Задача о движении тяжелой материальной точки по параболоиду (7.13) с вертикальной осью. Она проинтегрирована Пенлеве (1895 г.). Детальный анализ движения параболоидного маятника можно найти в работе Чаплыгина [171].

Отметим еще один предельный случай эллиптических координат, когда параметры $a > b > c > 0$ неограниченно сближаются (например, $a \to b+0$, $c \to b-0$). В пределе уравнение (7.12) для эллиптических координат λ будет иметь один изолированный корень и двукратный корень $\lambda = -b$. При этом семейство эллипсоидов превратится в семейство концентрических сфер с центром в начале координат, а одно- и двуполостные гиперболоиды вида (7.12) — в эллиптические конусы. В результате возникнут криволинейные ортогональные координаты в $\mathbb{R}^3$, которые называются *коническими* (подробности можно найти, например, в [133, гл. 5]).

С помощью конических координат К. Нейманом решена задача о движении точки по сфере в $\mathbb{R}^3$ в силовом поле, потенциальная энергия которого — квадратичная функция от координат x, y, z (1859 г.). Эта задача вполне интегрируема и в многомерном случае (см. [131]).

§ 8. Представление Гейзенберга

В этом параграфе речь пойдет об эффективном методе интегрирования гамильтоновых систем, основанном на представлении Гейзенберга (эквивалентные термины: представление Лакса, метод изоспектральной деформации, метод L — A-пары).

1. Представлением Гейзенберга системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = v(x,t) , \qquad x \in M^n , \tag{8.1}$$

называется пара квадратных матриц L и A, удовлетворяющих следующим условиям:

(1) элементы матриц L и A — гладкие (комплекснозначные) функции от x и t;

(2) выполнено тождество

$$\dot{L} = [A, L] , \tag{8.2}$$

где элементы матрицы $\dot{L}$ суть производные от элементов L в силу системы (8.1), а $[A, L] = AL - LA$.

Ясно, что решения системы (8.1) удовлетворяют уравнению (8.2). Чтобы исключить тривиальные случаи (например, $L = 0$), введем понятие точного представления, когда все решения уравнения (8.2) удовлетворяют (8.1).

Дифференциальные уравнения вида (8.2) встретились во всей общности впервые, по-видимому, в квантовой механике в связи с анализом гейзенберговой картины движения, когда наблюдаемые зависят от времени, а состояния — не зависят.

Теорема 1 [216]. *Собственные числа матрицы L являются интегралами системы* (8.1).

Доказательство основано на следующем факте: если X и Y — конечномерные матрицы, то $\operatorname{tr} XY = \operatorname{tr} YX$; здесь tr — след матрицы. Вычислим сначала производную:

$$\begin{aligned}(L^k)^{\cdot} &= \dot{L}L^{k-1} + L\dot{L}L^{k-2} + \ldots + L^{k-1}\dot{L} = \\ &= AL^k - LAL^{k-1} + \ldots + L^{k-1}AL - L^kA .\end{aligned}$$

Воспользовавшись равенством $L^kAL^{s+1} - L^{k+1}AL^s = (L^kAL^s)L - L(L^kAL^s)$, получаем, что $(\operatorname{tr} L^k)^{\cdot} = \operatorname{tr}(L^k)^{\cdot} = 0$. Следовательно, следы степеней матрицы L — интегралы системы (8.1). Для завершения доказательства осталось вспомнить, что коэффициенты характеристического уравнения $|L - \lambda E_n| = 0$ однозначно определяются следами $\operatorname{tr} L^k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$.

Теорема 1 хорошо известна в квантовой механике в связи с переходом от картины движения Гейзенберга к картине Шредингера. Следует подчеркнуть, что вопрос о независимости интегралов, получаемых по теореме 1, каждый раз должен решаться отдельно.

2. В качестве простого примера представления Гейзенберга рассмотрим задачу Эйлера о свободном вращении твердого тела, описываемую векторным уравнением момента

$$\dot{m} = m \times \omega\ , \qquad m = I\omega\ . \tag{8.3}$$

Каждому вектору a трехмерного ориентированного евклидова пространства с координатами a_1, a_2, a_3 можно поставить в соответствие кососимметричную матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & -a_1 & a_2 \\ a_1 & 0 & -a_3 \\ -a_2 & a_3 & 0 \end{Vmatrix}$$

При таком соответствии векторное умножение переходит в коммутатор матриц. Следовательно, уравнение (8.3) можно записать в виде матричного коммутационного уравнения $\dot{M} = [\Omega, M]$. В этом случае представление Гейзенберга точное. Следы матриц M, M^2, M^3 равны 0, $-2(m, m)$, 0 соответственно.

Это наблюдение можно распространить на уравнения Пуанкаре (гл. 1, § 2):

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_s}\right)^{\cdot} &= \sum_{ij} c^j_{is} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_j} \omega_i + v_s(\mathcal{L})\ , \\ \dot{x}_s &= \sum_{\alpha} \omega_\alpha v_\alpha(x_s)\ , \qquad 1 \leqslant s \leqslant n\ . \end{aligned} \tag{8.4}$$

Здесь $\mathcal{L}(\omega, x)$ — функция Лагранжа; c^j_{is} — структурные постоянные алгебры Ли g; $v_1, \ldots, v_n$ — базис левоинвариантных полей на соответствующей группе G. Полагая $m_s = \partial\mathcal{L}/\partial\omega_s$, введем две матрицы, L и A, с элементами $L_{ks} = \sum\limits_{\alpha} c^\alpha_{ks} m_\alpha$, $A^s_k = \sum\limits_{\alpha} c^s_{k\alpha}\omega_\alpha$.

Теорема 2. *Решения системы (8.4) удовлетворяют матричному уравнению*

$$\dot{L} = [A, L] + B\ , \tag{8.5}$$

где матрица $B = \|B_{ij}\|$ *составлена из коммутаторов* $B_{ij} = [v_i, v_j](\mathcal{L})$.

Для того чтобы получить уравнение (8.5), надо умножить первые уравнения (8.4) на c^s_{ik}, просуммировать по s и воспользоваться тождеством Якоби для структурных постоянных алгебры g.

Если лагранжиан $\mathcal{L}$ левоинвариантен (т. е. $v_s(\mathcal{L}) = 0$), то $\mathcal{L}$ зависит лишь от переменных ω и матрица B обращается в нуль. В этом случае уравнения Пуанкаре являются замкнутой системой уравнений на алгебре g; матрицы A и L дают их представление Гейзенберга. Такое представление не всегда точное: если группа G абелева, то $c^k_{ij} = 0$ и уравнение (8.5) вырождается в тривиальное тождество. Однако представление Гейзенберга является точным для случая, когда g — простая алгебра (как в задаче Эйлера).

3. Пусть $M = D \times \mathbf{T}^m$, где D — область в $\mathbb{R}^k = \{I_1, \ldots, I_k\}$ и $\mathbf{T}^m$ — m-мерный тор с угловыми координатами $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$.

Предложение. *Система дифференциальных уравнений*

$$\dot{I}_1 = \ldots = \dot{I}_k = 0\,, \qquad \dot{\varphi}_1 = \omega_1(I)\,, \quad \ldots\,, \quad \dot{\varphi}_m = \omega_m(I) \tag{8.6}$$

допускает точное представление Гейзенберга (8.2), *причем элементы матриц L и A — однозначные функции в $D \times \mathbf{T}^m$, а собственные числа матрицы L суть* 0, I_1, $\ldots$, I_k.

Следствие. *Каждая вполне интегрируемая гамильтонова система в окрестности инвариантных торов допускает точное представление Гейзенберга.*

В подавляющем большинстве проинтегрированных гамильтоновых систем точное представление Гейзенберга имеется во всем фазовом пространстве (см. обзоры [55, 68]).

Для доказательства предложения рассмотрим квадратные матрицы

$$L = \left\| \begin{array}{ccc|ccc} I_1 & & 0 & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ 0 & & I_k & & & \\ \hline & & & L_1 & & 0 \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & 0 & & L_m \end{array} \right\| \qquad \text{и} \qquad A = \left\| \begin{array}{c|ccc} 0 & & 0 & \\ \hline & A_1 & & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ & 0 & & A_m \end{array} \right\|$$

где $L_s = \left\| \begin{matrix} \Psi_s & \Psi_s \\ -\Psi_s & -\Psi_s \end{matrix} \right\|$, $A_s = \left\| \begin{matrix} 0 & -i\omega_s/2 \\ -i\omega_s/2 & 0 \end{matrix} \right\|$, $\Psi_s = \exp(i\varphi_s)$ $(1 \leqslant s \leqslant m)$. Нетрудно проверить, что решения системы (8.6) удовлетворяют матричному уравнению (8.2). Собственными числами матрицы L являются I_1, $\ldots$, I_k и 0 (кратности $2m$).

4. Приведем некоторые примеры представлений Гейзенберга в теории систем взаимодействующих частиц.

Рассмотрим замкнутую цепочку Тоды: n частиц на прямой с координатами $x_1, \dots, x_n$, удовлетворяющими уравнениям

$$\ddot{x}_i = -\partial V/\partial x_i\,, \qquad i = 1, \dots, n\,, \tag{8.7}$$

где $V = \sum\limits_{k=1}^{n} \exp(x_k - x_{k+1})$, $x_{n+1} = x_1$. Положим

$$L = \begin{Vmatrix} b_1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & b_2 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_n \end{Vmatrix}$$

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & -a_n \\ -a_1 & 0 & a_2 & & 0 & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \end{Vmatrix} \tag{8.8}$$

где $2a_k = \exp[(x_k - x_{k+1})/2]$, $2b_k = -\dot{x}_k$. Как показали М. Хенон, Г. Фляшка и С. В. Манаков (1974 г.), уравнения (8.7) допускают представление (8.2) с матрицами (8.8). Из теоремы 1 вытекает, что n собственных значений матрицы L являются интегралами системы (8.7). Можно показать, что они независимы и коммутируют. Полный набор независимых коммутирующих интегралов составляют также следы матриц $L, L^2, \dots, L^n$. Например, $\operatorname{tr} L = -\sum \dot{x}_k/2$. Эти интегралы — полиномы по скоростям $\dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n$, коэффициенты которых — суммы конечного числа вещественных экспонент от линейных комбинаций $\sum c_k x_k$ ($c_k = \mathrm{const}$).

Обсудим вопрос о представимости в матричной форме (8.2) дифференциальных уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum\limits_{i<j} V(x_i - x_j)$. Эти уравнения описывают динамику n частиц на прямой, попарно взаимодействующих между собой.

Следуя Мозеру, будем искать представление (8.2) с матрицами

$$L = \begin{Vmatrix} y_1 & \alpha(x_1 - x_2) & \cdots & \alpha(x_1 - x_n) \\ \alpha(x_2 - x_1) & y_2 & \cdots & \alpha(x_2 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha(x_n - x_1) & \alpha(x_n - x_2) & \cdots & y_n \end{Vmatrix}$$

$$A = \begin{Vmatrix} \sum\limits_{i \neq j} V(x_j - x_1) & \beta(x_1 - x_2) & \cdots & \beta(x_1 - x_n) \\ \beta(x_2 - x_1) & \sum\limits_{j \neq 2} V(x_j - x_2) & \cdots & \beta(x_2 - x_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta(x_n - x_1) & \beta(x_n - x_2) & \cdots & \sum\limits_{j \neq n} V(x_j - x_n) \end{Vmatrix}$$

Функция α предполагается нечетной. Искомое представление возможно в том и только том случае, когда $\beta = \alpha'$ и $\alpha'(y)\alpha(z) - \alpha(y)\alpha'(z) = \alpha(y+z)[V(y) - V(z)]$. Это функциональное уравнение решено в работах Ф. Калоджеро, М. А. Ольшанецкого и А. М. Переломова, С. И. Пидкуйко и А. М. Степина (1976 г.). Оказывается,

$$V = -\alpha''/(2\alpha)\,, \tag{8.9}$$

а функция $\alpha(z)$ совпадает с одной из следующих:

$$\begin{array}{llll} z^{-1}\,, & & & \mathrm{I} \\ a\,\mathrm{cth}(az)\,, & a\,\mathrm{sh}^{-1}(az)\,, & & \mathrm{II} \\ a\,\mathrm{ctg}(az)\,, & a\sin^{-1}(az)\,, & & \mathrm{III} \\ a\,\dfrac{\mathrm{cn}(az)}{\mathrm{sn}(az)}\,, & a\,\dfrac{\mathrm{dn}(az)}{\mathrm{sn}(az)}\,, & \dfrac{a}{\mathrm{sn}(az)}\,. & \mathrm{IV} \end{array}$$

Здесь sn, cn и dn — эллиптические функции Якоби. Замена параметра a на ia переводит функции типа II в функции типа III, а предельный переход $a \to 0$ переводит функции типа II и III в функцию типа I.

Пусть функция α имеет тип IV и $a = 1$. Тогда формула (8.9) дает $\wp$-функцию Вейерштрасса:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum{}' \left[\frac{1}{(z - 2m\omega - 2n\omega')^2} - \frac{1}{(2m\omega + 2n\omega')^2} \right]$$

(здесь и далее знак $\sum'$ означает суммирование по всем целым m и n, не равным одновременно нулю). Эта функция — эллиптическая с парой периодов 2ω и $2\omega'$. Инварианты $\wp$-функции $g_2 = 60\sum'(2m\omega + 2n\omega')^{-4}$ и $g_3 = 140\sum'(2m\omega + 2n\omega')^{-6}$ связаны с модулем k функций Якоби соотношениями $g_2 = \frac{4}{3}(k^4 - k^2 + 1)$, $g_3 = \frac{4}{27}(2k^6 - 21k^4 - 21k^2 + 2)$.

§ 9. Алгебраически интегрируемые системы

1. Во многих проинтегрированных задачах гамильтоновой механики решения можно продолжить на плоскость комплексного времени до мероморфных функций. Более того, общее решение выражается с помощью абелевых функций*). В старых учебниках по теоретической механике основное внимание уделялось интегрируемым задачам, решаемым в эллиптических функциях времени (см., например, [163]).

Прежде чем дать общие определения, рассмотрим поучительный пример. Речь пойдет об уравнениях Эйлера, описывающих свободное вращение твердого тела с неподвижной точкой:

$$\begin{aligned} I_1\dot{\omega}_1 + (I_3 - I_2)\omega_2\omega_3 &= 0\ , \\ I_2\dot{\omega}_2 + (I_1 - I_3)\omega_3\omega_1 &= 0\ , \\ I_3\dot{\omega}_3 + (I_2 - I_1)\omega_1\omega_2 &= 0\ . \end{aligned} \tag{9.1}$$

Эти уравнения имеют два полиномиальных интеграла:

$$I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 = J\mu^2\ , \qquad I_1^2\omega_1^2 + I_2^2\omega_2^2 + I_3^2\omega_3^2 = J^2\mu^2\ . \tag{9.2}$$

Здесь J, μ — постоянные интегрирования.

В типичной ситуации поверхности (9.2) (как вещественные поверхности в $\mathbb{R}^3 = \{\omega\}$) пересекаются по двум замкнутым кривым. Рассмотрим теперь комплексификацию $\mathbb{R}^3$, считая ω_k комплексными переменными. Оказывается, система алгебраических уравнений (9.2) определяет в $\mathbb{C}^3$ эллиптическую кривую с некоторыми выколотыми точками. Чтобы это показать, выпишем общее реше-

*) "В мои студенческие годы во время первой мировой войны абелевы функции (под влиянием унаследованных от Якоби традиций) считались неоспоримой вершиной математики. Каждый из нас, естественно, испытывал честолюбивое стремление самостоятельно продвинуться в этой области. А теперь? Молодое поколение вряд ли вообще знакомо с абелевыми функциями." (Клейн Ф. Лекции о развитии математики в XIX столетии. М. — Л.: ОНТИ. 1937).

ние системы (9.1) с помощью эллиптических функций Якоби:

$$\omega_1 = \varepsilon\mu\sqrt{\frac{J(J-I_3)}{I_1(I_1-I_3)}}\,\mathrm{cn}\,\tau\,,$$
$$\omega_2 = \varepsilon'\mu\sqrt{\frac{J(J-I_2)}{I_2(I_2-I_3)}}\,\mathrm{sn}\,\tau\,, \tag{9.3}$$
$$\omega_3 = \varepsilon''\mu\sqrt{\frac{J(I_3-J)}{I_3(I_1-I_3)}}\,\mathrm{dn}\,\tau\,,$$

где $\tau = \mu\sqrt{\dfrac{J(I_1-J)(I_2-I_3)}{I_1I_2I_3}}\,(t-t_0)$, $k^2 = \dfrac{(I_1-I_2)(J-I_3)}{(I_2-I_3)(I_1-J)}$. Здесь $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$ равны ± 1; k — модуль эллиптических функций. Формулы (9.3) дают параметрическое представление комплексных кривых (9.2). В силу двойной периодичности, параметр τ принимает значения на двумерном вещественном торе. Однако кривая (9.2) не диффеоморфна (в вещественном смысле) двумерному тору из-за наличия полюсов у эллиптических функций (9.3).

Хорошо известно, что между любыми двумя эллиптическими функциями f_1 и f_2 с одинаковыми периодами существует соотношение вида $\Psi(f_1, f_2) = 0$, где Ψ — некоторый многочлен от двух переменных. Например, функция Вейерштрасса $\wp$ и ее производная $\wp'$ (имеющая, очевидно, те же периоды) связаны алгебраическим уравнением $(\wp')^2 - 4\wp^3 + g_2\wp + g_3 = 0$, где g_2, g_3 — инварианты $\wp$-функции. Более общо, любые $m \geqslant 2$ эллиптических функций с одинаковыми периодами связаны $m-1$ алгебраическим соотношением. Примером служат уравнения (9.2) для эллиптических функций (9.3).

Уравнения Эйлера (9.1) являются гамильтоновыми (см. § 2 гл. 1): симплектическая структура задается скобкой Ли — Пуассона $\{I_1\omega_1, I_2\omega_2\} = I_3\omega_3$, ..., а гамильтонианом служит кинетическая энергия тела. Однако скобка вырождена: квадрат момента $F = \sum(I_i\omega_i)^2$ коммутирует со всеми функциями на алгебре $so(3)$ (такие функции называются еще функциями Казимира). Как отмечалось в § 2 гл. 1, вырождение снимается ограничением динамической системы (9.1) на интегральную поверхность $F = \mathrm{const} > 0$.

С точки зрения геометрического варианта теоремы Лиувилля о вполне интегрируемых системах (см. § 4), уравнения (9.2) задают именно одномерные инвариантные торы, причем угловая координата $u = \tau/(2\mathbf{K}) \bmod 2\pi$ ($\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл) на этих торах равномерно меняется со временем. Как указывают формулы (9.3), фазовые переменные ω_k — эллиптические функции от угловой координаты u.

2. Дадим необходимый для дальнейшего изложения краткий обзор теории абелевых функций (подробности можно найти, например, в [52, 125]). Рассмотрим m-мерное комплексное пространство $\mathbb{C}^m$ с координатами $(z_1, \ldots, z_m) = z$. Напомним, что функция $F(z)$ называется мероморфной, если ее можно представить в виде отношения $f(z)/g(z)$, где f, g — целые функции (представимые сходящимися степенными рядами во всем $\mathbb{C}^m$). Если $g(a) = 0$ и $f(a) \neq 0$, то точка $a \in \mathbb{C}^m$ называется полюсом функции F. Отметим, что при $m \geqslant 1$ полюсы (как и нули) не являются изолированными точками. Если $f(a) = g(a) = 0$ и не существует предела $F(z)$ при $z \to a$, то точка $z = a$ называется точкой неопределенности мероморфной функции F. Точки неопределенности могут быть лишь при $m \geqslant 2$ (при $m = 2$ они изолированы). Вот простой пример: у рациональной функции $F = z_1/z_2$ начало координат — точка неопределенности.

Абелевой функцией F называется мероморфная функция в $\mathbb{C}^m$, обладающая $2m$ линейно независимыми (над полем $\mathbb{R}$) периодами $\omega^{(1)}, \ldots, \omega^{(2m)}$: $F(z + \omega^{(j)}) = F(z)$ для всех $z \in \mathbb{C}^m$ и $j = 1, \ldots, 2m$.

Абелевы функции одного комплексного переменного — это в точности эллиптические функции. Согласно теореме Вейерштрасса — Пуанкаре, между любыми $m + 1$ абелевыми функциями с одинаковыми периодами всегда существует алгебраическое соотношение.

Матрицы периодов абелевых функций

$$W = \left\| \omega^{(1)} \,, \ \ldots \ , \omega^{(2m)} \right\| = \left\| \begin{matrix} \omega_1^{(1)} & \ldots & \omega_1^{(2m)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \omega_m^{(1)} & \ldots & \omega_m^{(2m)} \end{matrix} \right\|$$

называются римановыми матрицами. Далеко не каждая матрица размера $m \times 2m$ является римановой. Для этого необходимо и достаточно, чтобы существовала такая кососимметрическая невырожденная целочисленная матрица N порядка $2m$, что:

1) $WNW^{\top} = 0$;

2) матрица $iWN\overline{W}^{\top}$ задает положительно определенную эрмитову форму.

Пусть Γ — решетка в $\mathbb{C}^m$, порожденная векторами $\omega^{(j)}$; векторь решетки имеют вид

$$k_1\omega^{(1)} + \ldots + k_{2m}\omega^{(2m)} \,, \qquad k_j \in \mathbb{Z} \,. \tag{9 4}$$

Ясно, что Γ — группа по сложению. Полезно ввести факторпространство $\mathbb{C}^m$ по решетке Γ, отождествив точки $\mathbb{C}^m$, отличающиеся на векторы вида (9.4); получим $2m$-мерный тор T^{2m}. Такие торы называются абелевыми. Можно сказать, что абелевы функции — это мероморфные функции на T^{2m}.

Оказывается, с каждой компактной римановой поверхностью рода m естественным образом связано поле абелевых функций от m комплексных переменных. Напомним, что риманова поверхность X — это двумерное многообразие, покрытое комплексными картами, причем переход от карты к карте является голоморфным отображением. Простейший пример компактной римановой поверхности — двумерный тор (факторпространство комплексной плоскости по двумерной решетке). Ее род равен единице.

В приложениях часто встречаются римановы поверхности алгебраических функций. Важный для нас пример — функции $w(z)$, заданные уравнениями

$$w^2 = P_{2m+1}(z) \quad \text{или} \quad w^2 = P_{2m+2}(z)\ , \tag{9.5}$$

где P_k — многочлен степени k без кратных корней. Функция w двузначна: при двукратном обходе нулей многочлена $P_k(z)$ она принимает прежнее значение; поэтому риманова поверхность алгебраической функции $w = \sqrt{P(z)}$ двулистно накрывает почти всю комплексную плоскость $\mathbb{C} = \{z\}$; нули $P(z)$ — точки разветвления этого накрытия. Строение римановых поверхностей функций (9.5) было известно уже самому Риману: естественная компактификация делает их диффеоморфными сфере с m ручками (т. е. это поверхности рода m). С классических позиций результат Римана описан в книге [42]; современное изложение см. в [167].

Пусть $z = x + iy$ — локальная координата на римановой поверхности X. Дифференциальные 1-формы $\varphi = a\,dx + b\,dy = \alpha\,dz + \beta\,d\bar{z}$ принято называть просто дифференциалами. Если в окрестности любой точки X дифференциал φ записывается в виде $f(z)\,dz$, где f — голоморфная функция, то он называется голоморфным дифференциалом (или абелевым дифференциалом первого рода). Голоморфные дифференциалы образуют линейное пространство, размерность которого совпадает с родом римановой поверхности X. Например, если X задается первым уравнением (9.5), то дифференциалы $\varphi_k = z^k/\sqrt{P_{2m+1}(z)}\,dz \quad (1 \leqslant k \leqslant m)$ являются голоморфными и линейно независимыми.

На каждой поверхности рода m можно так выбрать $2m$ замкнутых кривых $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ (циклов), чтобы при разрезании по этим циклам поверхность превратилась в $4m$-угольник (см. рис. 10 для $m = 2$).

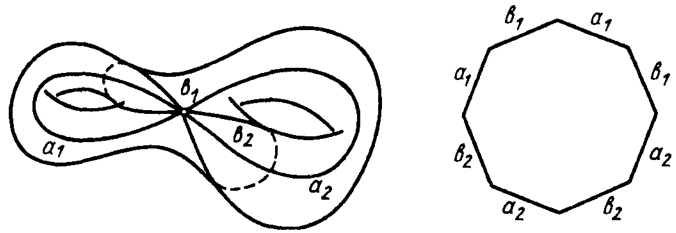

Рис. 10

Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$ — базис голоморфных дифференциалов на X. Они замкнуты ($d\varphi_k = 0$), поэтому корректно определены их периоды:

$$\oint_{a_i} \varphi_k = \omega_k^{(i)}\,, \qquad \oint_{b_i} \varphi_k = \omega_k^{(i+m)}\,. \tag{9.6}$$

По теореме Стокса значения интегралов (9.6) не меняются при непрерывных деформациях контуров a_i, b_j. Оказывается, матрица периодов голоморфных дифференциалов

$$\left\| \omega_k^{(i)}\,,\ \omega_k^{(i+m)} \right\|, \qquad 1 \leqslant i, k \leqslant m \tag{9.7}$$

является римановой. Поэтому с каждой римановой поверхностью рода m можно связать поле абелевых функций от m комплексных переменных. Построенный по матрице периодов (9.7) абелев тор T^{2m} называется многообразием Якоби (или якобианом) римановой поверхности X; он обозначается $J(X)$.

Одним из ключевых пунктов теории римановых поверхностей является задача обращения Якоби: для данной точки $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_m) \in J(X)$ найти m таких точек $z_1, \ldots, z_m$ римановой поверхности X, что

$$\sum_{k=1}^{m} \int_{z_0}^{z_k} \varphi_j \equiv \zeta_j\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m\,. \tag{9.8}$$

Здесь z_0 — фиксированная точка X, знак $\equiv$ обозначает сравнение по модулю решетки периодов. Дело в том, что если в формуле (9.8) выбрать какой-нибудь другой путь интегрирования, идущий из точки z_0 в точку z_k, то к интегралу слева добавится интеграл вида $\oint_\gamma \varphi_j$, где γ — некоторый замкнутый контур (цикл) на X, который можно представить в виде линейной комбинации базисных циклов a_i, b_j с целыми коэффициентами: $\gamma = \sum p_i a_i + \sum q_k b_k$. Поэтому добавок слева в (9.8) имеет вид $\oint_\gamma \varphi_j = \sum p_i \omega_j^{(i)} + \sum q_k \omega_j^{(k+m)}$.

Но это есть j-я компонента некоторого вектора решетки периодов. Тем самым задача обращения Якоби поставлена корректно.

Известна следующая теорема Якоби: пусть f — произвольная мероморфная функция на X; тогда любая рациональная симметрическая функция от $f(z_1), \ldots, f(z_m)$ является абелевой функцией от $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$, (т. е. мероморфной функцией на якобиане $J(X)$).

В качестве примера применения этого результата рассмотрим уравнения (5.2), к которым сводится задача Чаплыгина из динамики твердого тела. Представим эти уравнения в форме (9.8):

$$\begin{gathered} \int_{p_0}^{p_1} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{p_0}^{p_2} \frac{dz}{\sqrt{\Phi(z)}} = c_1 , \\ \int_{p_0}^{p_1} \frac{zdz}{\sqrt{\Phi(z)}} + \int_{p_0}^{p_2} \frac{zdz}{\sqrt{\Phi(z)}} = t + c_2 , \end{gathered} \tag{9.9}$$

где $p_0, c_k = \mathrm{const}$. Так как Φ — многочлен шестой степени, то соответствующая риманова поверхность имеет род 2. В уравнениях (9.9) имеем

$$\zeta_1 = c_1 , \qquad \zeta_2 = c_2 + t . \tag{9.10}$$

В пространстве $\mathbb{C}^2 = \{\zeta_1, \zeta_2\}$ эти уравнения задают комплексную прямую, а на абелевом торе (комплексной размерности 2) получаем комплексную “обмотку”.

Согласно теореме Якоби, любая симметрическая функция от p_1, p_2 будет абелевой функцией от ζ_1, ζ_2. С учетом (9.10) получаем, что эти функции будут мероморфными функциями комплексного времени t. В частности, компонента угловой скорости $\omega_3 = -(p_1 + p_2)/I_3$ однозначна и мероморфна на $\mathbb{C} = \{t\}$. Можно показать, что ω_1^2 и ω_2^2 обладают тем же свойством. Однако ω_1 и ω_2 имеют алгебраические точки ветвления.

Уравнения вида (9.9) встречаются при интегрировании многих задач классической механики. Примерами служат случаи интегрируемости Ковалевской, Клебша и Ляпунова — Стеклова из динамики твердого тела (см. § 5). Причем, в отличие от задачи Горячева — Чаплыгина, в этих случаях фазовые переменные являются однозначными функциями на якобиане римановой поверхности рода 2.

3. Теперь мы готовы дать, следуя М. Адлеру и П. ван Мербеке [178], общее определение *алгебраически интегрируемой* гамильтоновой системы.

Предположим, что в n-мерном пространстве с декартовыми координатами $z_1, \ldots, z_n$ задана скобка Пуассона $\{\ ,\ \}$ (вообще говоря, вырожденная), обладающая тем свойством, что $\{z_i, z_j\}$ является полиномом в $\mathbb{R}^n = \{z\}$. Примером служит уже известная нам скобка Ли — Пуассона. Пусть $F_1, \ldots, F_k$ — полиномиальные функции Казимира (они коммутируют со всеми координатами z_i). Будем считать, что ограничение скобки на поверхность уровня функций Казимира $M_c = \{z : F_i(z) = c_i\}$ невырождено.

Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{z}_i = \{z_i, H\} = f_i(z) , \qquad 1 \leqslant i \leqslant n , \tag{9.11}$$

с полиномиальным гамильтонианом H. Правые части этой системы — многочлены в $\mathbb{R}^n$. Поэтому систему (9.11) можно рассматривать как аналитическую систему дифференциальных уравнений в $\mathbb{C}^n$, считая переменные $z_1, \ldots, z_n$ и t комплексными.

Уравнения Гамильтона (9.11) называются алгебраически вполне интегрируемыми, если выполнены следующие условия:

1) Кроме функций Казимира $F_1, \ldots, F_k$, уравнения (9.11) имеют еще $m = (n-k)/2$ полиномиальных интегралов $F_{k+1} = H$, $F_{k+2}, \ldots, F_{k+m}$, причем функции $F_1, \ldots, F_{k+m}$ почти всюду независимы. Для почти всех вещественных $c_1, \ldots, c_{k+m}$ множество

$$\{z \in \mathbb{R}^n : F_i(z) = c_i \ , \ 1 \leqslant i \leqslant k+m\} \tag{9.12}$$

компактно; следовательно, по геометрической теореме Лиувилля (теорема 1 из § 4), поверхности (9.12) диффеоморфны m-мерным торам с условно-периодическим движением на них.

2) Для почти всех комплексных $c_1, \ldots, c_{k+m}$ найдется абелев тор $\mathbb{T}^{2m}$ с естественными комплексными координатами $\zeta_1, \ldots, \zeta_m$ и n абелевых функций $z_i = z_i(\zeta_1, \ldots, \zeta_m)$, параметризующих некомпактные инвариантные многообразия $A_c = \{z \in \mathbb{C}^n : F_i(z) = c_i,\ 1 \leqslant i \leqslant k+m\}$. Отображение $\mathbb{T}^{2m} \to A_c$, задаваемое функцией $z(\zeta)$, взаимно однозначно всюду, кроме нескольких замкнутых поверхностей комплексной коразмерности 1 в $\mathbb{T}^{2m}$.

3) Фазовый поток комплексифицированной системы (9.11) задается на A_c уравнениями $\dot{\zeta}_i = \mu_i = \mathrm{const}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$.

Простейшим примером алгебраически вполне интегрируемой гамильтоновой системы является задача Эйлера, рассмотренная в п. 1. Более сложные примеры дают интегрируемые случаи Ковалевской, Клебша, Ляпунова — Стеклова из динамики твердого тела.

Рассмотрим также замкнутую цепочку Тоды, которая описывается уравнениями Гамильтона с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2} \sum y_i^2 + e^{x_1 - x_2} + e^{x_2 - x_3} + \ldots + e^{x_n - x_1} .$$

Кроме энергии, в этой системе сохраняется полный импульс $\sum y_i$.

Будем рассматривать движения с неподвижным барицентром, т. е.

$$\sum y_i = 0 . \tag{9.13}$$

Введем новые координаты u, v по формулам

$$v_k = \exp(x_k - x_{k+1}) , \quad u_k = y_k - y_{k+1} ; \qquad 1 \leqslant k \leqslant n \tag{9.14}$$

Здесь $x_{n+1} = x_1$ и $y_{n+1} = y_1$. Эти координаты избыточные:

$$F_1 = v_1 \dots v_n = 1 , \qquad F_2 = u_1 + \dots + u_n = 0 .$$

Скобки Пуассона $\{v_i, v_j\}$, $\{u_i, u_j\}$ равны нулю, а скобки $\{v_i, u_j\}$ линейно выражаются через v_k. В новых переменны динамика цепочки Тоды описывается уравнениями

$$\dot{v}_k = v_k u_k , \qquad \dot{u}_k = v_{k-1} - 2v_k + v_{k+1} . \tag{9.15}$$

Их можно переписать в виде уравнений Гамильтона

$$\dot{v}_k = \{v_k, H\} , \qquad \dot{u}_k = \{u_k, H\} , \tag{9.16}$$

где $H = T + \sum v_k$, а кинетическая энергия T представлена в переменных u_k с помощью соотношений

$$y_1 = [(n-1)u_1 + (n-2)u_2 + \dots + u_{n-1}]/n , \ \dots \tag{9.17}$$

Невыписанные формулы получаются из (9.17) циклической перестановкой индексов $1, 2, \dots n$. Формулы (9.17) можно вывести из второй группы уравнений (9.14) и уравнения (9.13).

Система (9.16) имеет вид (9.11). Функции F_1 и F_2 являются функциями Казимира. Как установлено в работе [177], гамильтонова система (9.16) алгебраически вполне интегрируема. В частности, импульсы y_k и экспоненты v_k — мероморфные функции комплексного времени.

4. Если гамильтонова система (9.11) алгебраически вполне интегрируема, то почти все ее решения будут мероморфными функциями времени. Точнее, уравнения (9.11) допускают решения вида

$$z_j(t) = t^{-k_j}(z_j^{(0)} + z_j^{(1)}t + \dots + z_j^{(p)}t^p + \dots) , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n , \tag{9.18}$$

с целыми $k_j \geqslant 0$, $\sum k_j \geqslant 1$, причем коэффициенты зависят от $n-1$ независимого параметра:

$$z_j^{(p)} = z_j^{(p)}(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}) . \tag{9.19}$$

Еще один свободный параметр возникает при замене в (9.18) t на $t - t_0$. Как правило, в конкретных задачах коэффициенты (9.19) — рациональные функции на некотором $(n-1)$-мерном алгебраическом многообразии.

Заметим, что уравнения (9.11) могут допускать несколько существенно различных семейств мероморфных решений вида (9.18). Это явление легко уяснить на простом примере уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}; \qquad H = \frac{y^2}{2} + f_{n+1}(x), \tag{9.20}$$

где $f_{n+1} = -ax^{n+1} + bx^n + \ldots$ — многочлен с постоянными коэффициентами ($a \neq 0$). Рассмотрим задачу о наличии у этой системы формально-мероморфных решений вида

$$x = \frac{X_{-\alpha}}{t^\alpha} + \frac{X_{-\alpha+1}}{t^{\alpha-1}} + \ldots, \qquad y = \frac{Y_{-\beta}}{t^\beta} + \frac{Y_{-\beta+1}}{t^{\beta-1}} + \ldots \tag{9.21}$$

Здесь α и β — целые неотрицательные числа, причем $\alpha+\beta \geqslant 1$. Коэффициенты $X_{-\alpha}, \ldots, Y_{-\beta}, \ldots$ ($X_{-\alpha} \neq 0$, $Y_{-\beta} \neq 0$) могут принимать комплексные значения. Нас будет интересовать "полное" решение системы (9.20); в этом случае коэффициенты разложения (9.21) должны содержать "модуль" — произвольный параметр.

Числом Ковалевской $\mathbf{k}$ системы (9.20) назовем количество различных однопараметрических семейств мероморфных решений вида (9.21). Числа Ковалевской введены в работе [104]. Оказывается, если $n = -1, 0, 1$ или $n \geqslant 4$, то $\mathbf{k} = 0$; если $n = 2$, то $\mathbf{k} = 1$; наконец, при $n = 3$ число $\mathbf{k}$ равно 2.

Действительно, подставляя ряды Лорана (9.21) в уравнения (9.20) и приравнивая коэффициенты при старших степенях $1/t$, приходим к линейным соотношениям $\beta = \alpha + 1$, $\beta + 1 = n\alpha$. Если $n = -1$ или $n = 0$, то $\beta < 0$, а при $n = 1$ эта система несовместна. Далее, число $\alpha = 2/(n-1)$ должно быть целым; значит, $n \leqslant 3$. Итак, при $n \neq 2$ и $n \neq 3$ гамильтонова система (9.10) вообще не имеет мероморфных решений. На самом деле при $n \leqslant 1$ все решения являются целыми функциями на $\mathbb{C} = \{t\}$, а при $n \geqslant 4$ общее решение многозначно.

Пусть $n = 2$. Тогда $X_{-2} = 6/a$, $Y_{-3} = -12/a$. Подставляя ряды (9.21) в левую и правую части уравнений Гамильтона и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, получим бесконечную цепочку алгебраических соотношений для последовательного нахождения пар коэффициентов X_λ и $Y_{\lambda-1}$. При $\lambda \neq 4$ каждая из таких систем разрешается однозначно, а при $\lambda = 4$ она вырождается в одно уравнение $4X_4 = Y_3$. Поэтому коэффициент X_4 (или Y_3) можно считать произвольным параметром (модулем), и, следовательно, при $n = 2$ число Ковалевской равно 1.

Если $n = 3$, то $\alpha = 1$, $\beta = 2$ и $X_{-1} = \pm\sqrt{2/a}$, $Y_{-2} = \mp\sqrt{2/a}$. При каждом из двух возможных выборов знаков уравнения (9.20) допускают однопараметрические семейства мероморфных решений.

Роль произвольного параметра играет в обоих случаях, например, коэффициент X_3. Эти два семейства различны (у них разные коэффициенты при старших степенях $1/t$), поэтому здесь $\mathbf{k} = 2$.

Отметим, что при $n = 2$ и $n = 3$ общее решение системы (9.21) выражается через эллиптические функции времени, причем в первом случае в параллелограмме периодов у функции $x(t)$ имеется единственный полюс второго порядка, а во втором — два полюса первого порядка, в которых вычеты отличаются знаками. Поэтому ввиду периодичности при $n = 2$ имеется лишь одно семейство мероморфных решений, а при $n = 3$ таких семейств ровно два.

Эти наблюдения обобщаются на случай произвольной системы дифференциальных уравнений в $\mathbb{C}^n = \{z\}$ с полиномиальными правыми частями. Подставляя формальные ряды Лорана вида (9.18) в уравнения и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, можно, во-первых, найти ограничения на кратности полюсов k_j, и во-вторых, получить бесконечную цепочку полиномиальных уравнений на коэффициенты рядов Лорана $z_j^{(p)}$, в каждое из которых будет входить лишь конечное число неизвестных коэффициентов. Совокупность всех этих полиномиальных уравнений выделит в бесконечномерном пространстве коэффициентов формальных рядов Лорана некоторое алгебраическое множество. Ввиду автономности рассматриваемой системы дифференциальных уравнений, его размерность не превосходит $n-1$. Числом Ковалевской $\mathbf{k}$ полиномиальной системы дифференциальных уравнений назовем количество связных компонент этого алгебраического множества, каждая из которых имеет размерность $n-1$. Числа Ковалевской — простейшие топологические инварианты аналитических систем дифференциальных уравнений. Можно рассматривать и более тонкие инварианты построенного выше алгебраического множества (например, группы гомологий). Отметим, что некоторые его связные компоненты могут иметь комплексную коразмерность 2 или больше.

При $\mathbf{k} = 0$ общее решение исходной системы дифференциальных уравнений не может быть мероморфным. В частности, в этом случае гамильтонова система (9.11) не является алгебраически вполне интегрируемой. На этом простом замечании основан метод Ковалевской распознавания алгебраически интегрируемых систем дифференциальных уравнений, впервые примененный ею к уравнениям вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой [73]. Оказалось, что в этой задаче $\mathbf{k} \neq 0$ лишь в интегрируемых случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Метод Ковалевской с успехом используется для отыскания новых интегрируемых задач классической механики и математической физики.

5. В приложениях часто встречаются дифференциальные уравнения с полиномиальными правыми частями

$$\dot{z}_i = f_i(z_1, \ldots, z_n)\,, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,, \tag{9.22}$$

инвариантные относительно преобразований подобия

$$t \to t/\alpha\,, \qquad z_1 \to \alpha^{g_1} z_1\,, \quad \ldots\,, \quad z_n \to \alpha^{g_n} z_n \tag{9.23}$$

с целыми положительными g_j. Критерий инвариантности уравнений (9.22) заключается в выполнении соотношений

$$f_i(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^{g_i+1} f_i(z_1, \ldots, z_n)\,. \tag{9.24}$$

Например, если f_i — однородные многочлены степени $m > 1$, то в (9.23) можно положить $g_1 = \ldots = g_n = g$. Но тогда, ввиду (9.24), $g = 1/(m-1)$, что является целым лишь при $m = 2$. Итак, уравнения с квадратичными правыми частями допускают группу подобий вида (9.23). Важным примером служат уравнения Эйлера — Пуанкаре на алгебрах Ли. Более сложный пример доставляют уравнения (9.15): они допускают группу $t \to t/\alpha$, $u_k \to \alpha u_k$, $v_k \to \alpha^2 v_k$. Сходный пример — уравнения Эйлера — Пуассона, описывающие вращение тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки.

Для "квазиоднородных" уравнений (9.22) задача об однозначности общего решения может быть практически доведена до конца. Мы воспроизведем здесь анализ уравнений (9.22), выполненный в работе X. Иошиды [236] по методу Ковалевской. Сначала заметим, что система (9.22) допускает частные решения вида

$$z_1 = c_1/t^{g_1}\,, \quad \ldots\,, \quad z_n = c_n/t^{g_n}\,, \tag{9.25}$$

где постоянные c_k удовлетворяют алгебраической системе уравнений $f_i(c_1, \ldots, c_n) = -g_i c_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Эти уравнения, как правило, имеют ненулевые комплексные корни.

Общее решение системы (9.22) ищем в виде $z_i = (c_i + x_i)t^{-g_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Выпишем уравнения для новых переменных x_i. Во-первых, мы имеем

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(x_i t^{-g_i}) = \frac{d}{dt}(z_i - c_i t^{-g_i}) = \\
&= f_i\left((c_1 + x_1)t^{-g_1}, \ldots, (c_n + x_n)t^{-g_n}\right) - f_i\left(c_1 t^{-g_1}, \ldots, c_n t^{-g_n}\right) = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \left.\frac{\partial f_i}{\partial z_j}\right|_{z=ct^{-g}} x_j t^{-g_j} + \sum_{|m|\geqslant 2} \left.\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} f_i}{\partial^{m_1} z_1 \cdots \partial^{m_n} z_n}\right|_{z=ct^{-g}} x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}\, t^{-\sum\limits_{j=1}^{n} m_j g_j}
\end{aligned} \tag{9.26}$$

Здесь $|m| = \sum m_j$. Дифференцируя (9.24) по z_j и полагая $\alpha = 1/t$, $z_i = c_i$, получим $t^{-g_j} \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(ct^{-g}) = t^{-g_i - 1} \dfrac{\partial f_i}{\partial z_j}(c)$, и, более общо,

$$t^{-\sum m_j g_j} \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} f_i}{\partial^{m_1} z_1 \ldots \partial^{m_n} z_n} (ct^{-g}) = t^{-g_i - 1} K^{(i)}_{m_1 \ldots m_n} ,$$

$$K^{(i)}_{m_1 \ldots m_n} = \frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n} f_i}{\partial^{m_1} z_1 \ldots \partial^{m_n} z_n} (c) .$$

В итоге уравнения (9.26) принимают вид

$$t\dot{x}_i = \sum_{j=1}^{n} K_{ij} x_j + \sum_{|m|=2}^{\infty} K^{(i)}_{m_1 \ldots m_n} x_1^{m_1} \ldots x_n^{m_n} , \tag{9.27}$$

$$K_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial z_j}(c) + g_j \delta_{ij} ,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера. Пусть $\rho_1, \ldots, \rho_n$ — собственные числа матрицы K. Напомним, что преобразованием подобия $K \to \to C^{-1}KC$ матрица K приводится к диагональной матрице $\mathrm{diag}[\rho_1, \ldots, \rho_n]$ в том и только том случае, когда все ее собственные числа ρ_i имеют простые элементарные делители.

Теорема Ляпунова. *Если решения системы (9.22) являются однозначными функциями комплексного времени, то:*

1) $\rho_i \in \mathbb{Z}$ *для всех* i;

2) $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *имеют простые элементарные делители.*

Для доказательства заметим, что после замены времени $\tau = \ln t$ уравнения (9.27) становятся автономными ($dx/d\tau = t\dot{x}$), и поэтому к ним можно применить известную теорему Ляпунова о разложении решений в сходящиеся ряды по степеням малых параметров $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ (см. [120, гл. II]): $x_i(\tau) = \sum\limits_{|m|=1}^{\infty} X^{(i)}_{m_1 \ldots m_n} \varepsilon_1^{m_1} \ldots \varepsilon_n^{m_n} e^{(m_1\rho_1 + \ldots + m_n\rho_n)\tau}$, где $X^{(i)}_m$ — многочлены от τ с постоянными коэффициентами. Переходя к старой переменной времени t, получим разложения

$$x_i(t) = \sum_{|m|=1}^{\infty} X^{(i)}_{m_1 \ldots m_n} \varepsilon_1^{m_1} \ldots \varepsilon_n^{m_n} t^{m_1\rho_1 + \ldots + m_n\rho_n} , \tag{9.28}$$

где $X^{(i)}_m$ — многочлены от $\ln t$.

Пусть γ — непрерывная кривая в ограниченной области комплексной плоскости, не содержащая точки $t = 0$. Согласно результатам [120, гл. II], ряды (9.28) сходятся при всех $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ из малой окрестности нуля в $\mathbb{C}^n = \{\varepsilon\}$, когда t принадлежит малой окрестности кривой γ. Если γ имеет самопересечения (например, γ — замкнутый контур в $\mathbb{C}$), то формулы (9.28) задают аналитическое продолжение функций $x_i(t)$ вдоль γ. Ясно, что если не все числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$ целые, то функции $x_i(t)$, а вместе с ними и функции $z_i(t)$, ветвятся при обходе точки $t = 0$. Если же все ρ_i целые, но матрица K не приводится к диагональной, то функции $x(t)$ и $z(t)$ также ветвятся: в этом случае многочлены $X_m^{(i)}$ ($|m| = 1$) содержат нетривиальные слагаемые с $\ln t$. Теорема доказана.

Матрица K и условие целочисленности ее собственных значений впервые появились в работах Ковалевской по динамике тяжелого твердого тела [73]. Иошида предложил назвать числа $\rho_1, \ldots, \rho_n$ *показателями Ковалевской*. Если решения (9.28) мероморфны и ряды (9.28) бесконечны, то $\rho_i \geqslant 0$. Исследования Ковалевской были дополнены и усилены Ляпуновым [118], показавшим, что решения уравнений Эйлера — Пуассона ветвятся во всех случая, исключая интегрируемые задачи Эйлера, Лагранжа и Ковалевской.

§ 10. Теория возмущений

1. Пусть множество $M = D \times \mathbf{T}^n$, где $\mathbf{T}^n = \{\varphi \bmod 2\pi\}$, D — область в $\mathbb{R}^n = \{I\}$, снабжено стандартной симплектической структурой. Пусть $H(I, \varphi, \varepsilon) : M \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0) \to \mathbb{R}$ — такая аналитическая функция, что $H(I, \varphi, 0) = H_0(I)$. Канонические уравнения с гамильтонианом H_0 немедленно интегрируются: $\dot{I} = -\partial H_0/\partial\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = \partial H_0/\partial I = \omega(I)$; $I = I^0$, $\varphi = \varphi^0 + \omega(I^0)t$.

Согласно А. Пуанкаре, исследование полной системы

$$\dot{I} = -\frac{\partial H}{\partial \varphi}, \quad \dot{\varphi} = \frac{\partial H}{\partial I}; \qquad H = H_0(I) + \varepsilon H_1(I, \varphi) + \ldots \tag{10.1}$$

при малых значениях параметра ε является основной проблемой динамики [146, п. 13].

Идея классической теории возмущений состоит в следующем: ищется такое аналитически зависящее от параметра ε каноническое преобразование $I, \varphi \to J, \psi$: $I = \partial S/\partial\varphi$, $\psi = \partial S/\partial J$, $S(J, \varphi, \varepsilon) = S_0 + \varepsilon S_1 + \ldots$, что

1) $S_0 = J\varphi$ (оно мало отличается от тождественного);
2) функции $S_k(J, \varphi)$ 2π-периодичны по φ при всех $k \geqslant 1$;
3) в новых переменных $H = K(J, \varepsilon)$.

Следовательно, любая 2π-периодическая по φ функция $f(I, \varphi, \varepsilon)$ в новых канонических переменных J, ψ будет 2π-периодична по ψ.

Если такое преобразование удается найти, то уравнения Гамильтона (10.1) будут полностью проинтегрированы. При этом n функций $J_s = J_s(I, \varphi, \varepsilon)$, $J_s(I, \varphi, 0) = I_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ составят полный набор независимых интегралов в инволюции.

2. Функция $S_1(J, \varphi)$ удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{\partial H_0}{\partial J}, \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right) + H_1(J, \varphi) = K_1(J) \ , \tag{10.2}$$

где $K_1(J)$ — пока неизвестная функция. Разложим "возмущающую" функцию H_1 в кратный ряд Фурье: $H_1 = \sum\limits_{m \in \mathbb{Z}^n} H_m(J) \exp i(m, \varphi)$. Если уравнение (10.2) имеет решение, периодическое по φ, то $K_1(J) = \dfrac{1}{(2\pi)^n} \displaystyle\int_{\mathbf{T}^n} H_1(J, \varphi)\, d^n\varphi$. Пусть $S_1 = \sum\limits_{m \neq 0} S_m(J) \exp i(m, \varphi)$. Тогда

$$S_m(J) = \frac{H_m(J)}{i(m, \omega(J))} \ . \tag{10.3}$$

В дальнейшем анализе важную роль играет *вековое множество* $\mathbf{B} \subset D$ — множество точек $J \in D$, для которых

$$\sum_{m \neq 0} \left| \frac{H_m(J)}{(m, \omega(J))} \right|^2 = \infty \ .$$

В частности, множеству $\mathbf{B}$ принадлежат точки $J \in D$, для которых $(m, \omega(J)) = 0$, $m \neq 0$ и $H_m(J) \neq 0$*). Согласно неравенству Бесселя $\sum\limits_m S_m^2 < \infty$, производящая функция S_1 не определена на множестве $\mathbf{B} \times \mathbf{T}^n \subset D \times \mathbf{T}^n$.

По существу, вековое множество — это множество тех торов невозмущенной интегрируемой задачи, которые распадаются при добавлении возмущения порядка ε. В типичной ситуации $\mathbf{B}$ всюду плотно в D; с этим связана хорошо известная трудность — появление "малых делителей", препятствующих не только сходимости, но даже формальному построению рядов классической схемы теории возмущений.

Из теории диофантовых приближений известно, что для почти всех наборов частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^n$ справедлива оценка

$$|(m, \omega)| \geqslant \mu / |m|^{n+1} \tag{10.4}$$

*) В небесной механике принята следующая терминология: коэффициент Фурье $H_{m_1 \ldots m_n}(J)$ становится вековым, если $J_1, \ldots, J_n$ принимают значения, при которых $m_1\omega_1(J) + \ldots + m_n\omega_n(J) = 0$.

при всех $m \in \mathbb{Z}^n$, $m \neq 0$, где μ — положительная постоянная, зависящая от ω. Пусть $\omega = \partial H_0/\partial J$ и функция Гамильтона H_0 невырождена; тогда оценка (10.4) верна для почти всех J. Известно, что коэффициенты Фурье аналитической функции экспоненциально быстро убывают при $|m| \to \infty$. Пусть J таково, что для всех $m \neq 0$ выполнено (10.4); при этом, согласно (10.3), коэффициенты $S_m(J)$ также экспоненциально быстро убывают. Поэтому для таких значений J функция $S_1(J, \varphi)$ будет аналитической периодической функцией от φ. Аналогично доказывается, что при выполнении (10.4) корректно определены аналитические функции $S_k(J, \varphi)$ $(k \geqslant 1)$. Но для обеспечения сходимости ряда

$$\sum_{k \geqslant 1} S_k(J, \varphi)\varepsilon^k \tag{10.5}$$

нужны дополнительные предположения.

Введем множество $\Omega_\mu = \{\omega \in \Omega : |(m, \omega)| > \mu/|m|^{n+1},\ m \neq 0\}$, где Ω — некоторая ограниченная область в пространстве частот $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$. Можно показать, что при малых μ мера Лебега дополнения $\{\Omega \setminus \Omega_\mu\}$ не превышает величины порядка μ. Пусть Λ_μ — прообраз множества Ω_μ при отображении $J \to \partial H_0/\partial J$.

А. Н. Колмогоров [109] доказал, что при малых ε ряд (10.5) сходится для всех $J \in \Lambda_\mu$ при фиксированном μ. Доказательство теоремы Колмогорова использует процедуру последовательных приближений ньютоновского типа, впервые предложенную С. Ньюкомом в небесной механике; прямое доказательство сходимости, основанное на оценке коэффициентов, пока не найдено.

Соотношения $I_k = \partial S/\partial \varphi_k$ $\left(1 \leqslant k \leqslant n,\ S(J, \varphi, \varepsilon) = \sum\limits_{k \geqslant 0} S_k(J, \varphi)\varepsilon^k,\right.$ $\left. J \in \Lambda_\mu\right)$ задают n-мерные инвариантные торы возмущенной гамильтоновой системы с "сильно" несоизмеримыми частотами. Эти торы называются колмогоровскими; они аналитически зависят от ε. Колмогоровские торы являются n-мерными инвариантными лагранжевыми многообразиями, поскольку ковекторное поле $I = \partial S/\partial \varphi$ потенциально (см. п. 3 § 2).

Различные варианты теоремы Колмогорова о сохранении условно-периодических движений получены В. И. Арнольдом и Ю. Мозером. Обзор результатов теории КАМ (Колмогорова — Арнольда — Мозера) содержится в книге [12, гл. 5].

3. Т е о р е м а 1. *Пусть уравнения* (10.1) *имеют такие* n *первых аналитических интегралов* $F_i : D \times \mathbf{T}^n \times (-\varkappa, \varkappa) \to \mathbb{R}$, *что:*

1) *при всех значениях* ε *функции* $F_1, \ldots, F_n$ *находятся в инволюции;*

2) $F_i(I, \varphi, 0) = f_i(I)$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

3) *якобиан* $\det \left\| \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \right\|$ *отличен от нуля в области* D.

Тогда на множестве $G \times \mathbf{T}^n \times (-\alpha, \alpha)$, *где* G — *компактная подобласть* D, α *мало́, существует аналитическая производящая функция* $S(J, \varphi, \varepsilon)$, *удовлетворяющая условиям* 1)–3) *из п.* 1.

Если уравнения (10.1) имеют интегралы, формально аналитические по ε (формальные ряды по степеням ε с аналитическими в $D \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами) и удовлетворяющие условиям теоремы, то можно (по крайней мере формально) построить ряды теории возмущений, определенные при $(J, \varphi) \in D \times \mathbf{T}^n$. Докажем это.

Пусть $F_s(I, \varphi, \varepsilon) = f_s(I) + \sum\limits_{k \geqslant 1} \varepsilon^k F_{sk}(I, \varphi)$. Рассмотрим систему уравнений

$$F_s\left(\frac{\partial S}{\partial \varphi}, \varphi, \varepsilon\right) = f_s(J) + \sum_{k \geqslant 1} \varepsilon^k f_{sk}(J)\,, \qquad 1 \leqslant s \leqslant n\,, \tag{10.6}$$

пока с неизвестными аналитическими функциями $f_{sk} : D \to \mathbb{R}$. При $\varepsilon = 0$ уравнения (10.6) будут выполнены, если положить $S_0 = J\varphi$. Так как $F_s(I, \varphi, 0) = f_s(I)$ и якобиан $\det \left\| \dfrac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(I_1, \ldots, I_n)} \right\|$ не равен нулю, то при заданных f_{sk} определен формальный ряд

$$I(\varphi, \varepsilon) = \frac{\partial S}{\partial \varphi} = J + \varepsilon \frac{\partial S_1}{\partial \varphi} + \ldots\,, \tag{10.7}$$

удовлетворяющий (10.6). Утверждается, что дифференциальная форма $I(\varphi, \varepsilon)\, d\varphi = (\partial S / \partial \varphi) d\varphi$ точна. Для доказательства потребуется простая

Л е м м а. *Пусть в* $\mathbb{R}^{2n} = \{p, q\}$ *задана система уравнений* $F_s(p, q) = c_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$, *и* $p_s = f_s(q, c_1, \ldots, c_n)$ — *ее решение. Если функции* $F_1, \ldots, F_n$ *коммутируют (в стандартной симплектической структуре* $\mathbb{R}^{2n}$), *то при фиксированных значениях* $c = (c_1, \ldots, c_n)$ *форма* $\sum f_s(q, c)\, dq_s$ — *полный дифференциал.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы. Функции $G_s = p_s - f_s(q, F_1, \ldots, F_n)$, очевидно, постоянны. Так как функции $F_1, \ldots, F_n$ коммутируют, то $\{G_s, G_m\} = \partial f_m / \partial q_s - \partial f_s / \partial q_m = 0$, что и требовалось доказать.

При произвольном выборе $f_{sk}(J)$ функции $S_k(J, \varphi)$ будут многозначны на $\mathbf{T}^n$; это можно устранить, подбирая нужным образом f_{sk}. Пусть сначала $k = 1$. Из уравнения (10.6) получим, что

$$\left(\frac{\partial f_s}{\partial J}, \frac{\partial S_1}{\partial \varphi}\right) = f_{s1}(J) - F_{s1}(J, \varphi)\,. \tag{10.8}$$

Если положить $f_{s1} = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbf{T}^n} F_{s1}(J,\varphi)\,d^n\varphi$, то из (10.8) получим периодическое решение S_1. При $k \geqslant 1$ для определения S_k и f_{sk} будем иметь уравнение вида (10.8), в правую часть которого входят функции S_m и f_{sm} $(m < k)$, которые уже известны.

В новых канонических переменных J, ψ функции $F_1, \ldots, F_n$ зависят лишь от J и ε. Эти функции — первые интегралы гамильтоновой системы (10.1) и независимы, поэтому то же самое справедливо для $J_1, \ldots, J_n$. Следовательно, функция Гамильтона H не зависит от углов ψ, т. е. $\partial H/\partial\psi = -\dot{J} = 0$. Теорема доказана.

§ 11. Нормальные формы

1. Рассмотрим гамильтонову систему $\dot{z} = J\dfrac{\partial H}{\partial z}$, $z = (p,q) \in \mathbb{R}^{2n}$, в окрестности точки $z = 0$. Пусть вещественно-аналитическая функция H представлена сходящимся степенным рядом от z, начинающимся с членов второго порядка: $H = \sum\limits_{k\geqslant 2} H_k$. Точка $z = 0$ является, очевидно, положением равновесия.

Собственные значения линеаризованной системы $\dot{z} = J\dfrac{\partial H_2}{\partial z}$ могут быть четырех типов: вещественные пары $(a, -a)$, $a \neq 0$; чисто мнимые пары $(ib, -ib)$, $b \neq 0$; четверки $(\pm a \pm ib)$, $a \neq 0$, $b \neq 0$; кратные нулевые числа (см., например, [12, гл. 7]). В первом и третьем случаях равновесие $z = 0$ заведомо неустойчиво. Рассмотрим случай, когда собственные значения линеаризованной системы чисто мнимы и различны. Известно [230], что тогда существует линейное каноническое преобразование координат $p, q \to x, y$, приводящее квадратичную форму H_2 к виду

$$\frac{1}{2}\sum \alpha_s(x_s^2 + y_s^2)\,. \tag{11.1}$$

Собственными числами являются $\pm i\alpha_1, \ldots, \pm i\alpha_n$.

Теорема 1 (Дж. Биркгоф). *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ независимы над полем рациональных чисел, то существует формальное каноническое преобразование $x, y \to \xi, \eta$, задаваемое формальными степенными рядами*

$$x = u(\xi,\eta) = \xi + \ldots\,, \qquad y = v(\xi,\eta) = \eta + \ldots\,, \tag{11.2}$$

которое переводит $H(x,y)$ в гамильтониан $K(\rho)$ — формальный степенной ряд от $\rho_s = \xi_s^2 + \eta_s^2$.

Если ряды (11.2) сходятся, то уравнения с функцией Гамильтона H можно просто проинтегрировать. Действительно, функции

$\rho_1, \ldots, \rho_n$ — сходящиеся степенные ряды по x, y — образуют полный набор независимых интегралов в инволюции. Из канонических уравнений $\dot{\xi}_s = \Omega_s \eta_s$, $\dot{\eta}_s = -\Omega_s \xi_s$, $\Omega_s = 2\,\partial K/\partial \rho_s$ следует, что $\xi_s(t)$ и $\eta_s(t)$ являются линейными комбинациями $\sin \Omega_s t$ и $\cos \Omega_s t$. Следовательно, исходные координаты x и y суть условно-периодические функции времени с частотами $\Omega_1, \ldots, \Omega_n$. В частности, равновесие $z = 0$ устойчиво.

Следствие. *Если $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ рационально несоизмеримы, то уравнения Гамильтона допускают n инволютивных формальных интегралов следующего вида:*

$$\rho_s = x_s^2 + y_s^2 + (\text{члены порядка} \geqslant 3), \qquad 1 \leqslant s \leqslant n\,. \tag{11.3}$$

Ряды (11.3) получаются из функций $\xi_s^2 + \eta_s^2$ с помощью формальной канонической замены (11.2). Любой формально аналитический интеграл уравнений Гамильтона является степенным рядом от n интегралов (11.3). Действительно, в новых переменных ξ, η этот интеграл зависит лишь от $\rho_1, \ldots, \rho_n$.

Теорема 2. *Если система с гамильтонианом $H = \sum\limits_{k\geqslant 2} H_k$ имеет n аналитических интегралов в инволюции*

$$G_m = \frac{1}{2}\sum_s \varkappa_{ms}(x_s^2 + y_s^2) + \sum_{k\geqslant 2} G_{mk}\,, \quad 1 \leqslant m \leqslant n,$$

и $\det \|\varkappa_{ms}\| \neq 0$, *то преобразование Биркгофа (11.2) сходится.*

Этот результат показывает, почему мы (следуя Биркгофу) называем интегрируемыми гамильтоновы системы со сходящимся преобразованием Биркгофа. Оставляя обсуждение вопроса сходимости до гл. VI, укажем, что ряды Биркгофа, как правило, расходятся. Теорема 2 сначала была доказана Рюссманом [228] для $n = 2$, а затем Веем [234] в многомерном случае.

Теорема Рюссмана — Вея обобщена в работе Х. Ито [206].

Теорема 3. *Предположим, что числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ рационально несоизмеримы и в окрестности точки $z = 0$ гамильтонова система имеет n аналитических интегралов $G_1 = H, G_2, \ldots, G_n$, независимых почти всюду. Тогда найдется такое аналитическое каноническое преобразование $z = \Phi(\zeta)$, $\zeta = (\xi, \eta)$, что $\Phi(0) = 0$ и в новых переменных ζ интегралы $G_1, \ldots, G_n$ являются аналитическими функциями от $\xi_s^2 + \eta_s^2$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$.*

Подчеркнем, что в теореме Ито квадратичные формы рядов Маклорена функций $G_2, \ldots, G_n$ могут оказаться вырожденными или вообще отсутствовать. Кроме того, отсутствует предположение об инволютивности функций G_k. Дело в том, что в предположении о нерезонансности собственных чисел $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ любые аналитические интегралы уравнений Гамильтона обязательно находятся в инволюции. Поэтому в теореме 2 также можно опустить предположение об инволютивности интегралов G_k.

Теорема 1 допускает обобщение на случай, когда числа $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ рационально зависимы. Введем в рассмотрение все целочисленные векторы $j = (j_1, \ldots j_n)$, для которых $(j, \alpha) = 0$. Они образуют свободную абелеву группу Γ некоторого ранга r. Если числа α_s независимы, то, очевидно, $r = 0$.

Выполним некоторую формальную каноническую замену переменных $x, y \to \xi, \eta$ вида (11.2). В новых переменных ξ, η гамильтониан $H(x, y)$ будет представлен некоторым формальным степенным рядом $K(\xi, \eta)$. Перейдем к комплексным переменным $\zeta_s = \xi_s + i\eta_s$, $\bar{\zeta}_s = \xi_s - i\eta_s$ и разложим K в ряд по произведениям

$$\zeta^k \bar{\zeta}^l = \prod_{s=1}^{n} \zeta_s^{k_s} \bar{\zeta}_s^{l_s} .$$

Будем говорить, что формальный ряд $K(\xi, \eta)$ имеет нормальную форму, если его разложение содержит лишь те члены $\zeta^k \bar{\zeta}^l$, для которых $(k - l) \in \Gamma$.

В частности, если $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ независимы, то в нормальной форме гамильтониана присутствуют только члены вида $\zeta^k \bar{\zeta}^k = (\xi_1^2 + \eta_1^2)^{k_1} \ldots (\xi_n^2 + \eta_n^2)^{k_n}$. Ряд $K(\xi, \eta)$ имеет нормальную форму в том и только том случае, когда $D(K) = 0$, где $D = \sum_{s=1}^{n} \alpha_s \left(\xi_s \dfrac{\partial}{\partial \eta_s} - \eta_s \dfrac{\partial}{\partial \xi_s} \right)$.

Доказательство просто выводится из формулы $D(\zeta^k \bar{\zeta}^l) = i(\alpha, k - l)\zeta^k \bar{\zeta}^l$.

Теорема 4. *Существует такое формальное каноническое преобразование вида (11.2), что исходный гамильтониан $H(x, y)$ преобразуется к нормальной форме, т. е. $D(K) = 0$.*

Доказательство можно найти в [130]. При $\Gamma = \{0\}$ эта теорема совпадает с теоремой Биркгофа.

Покажем, что в рассматриваемом случае можно указать $n - r$ коммутирующих независимых формальных интегралов вида $G = \frac{1}{2} \sum \beta_s(\xi_s^2 + \eta_s^2)$, где вектор $\beta = (\beta_1, \ldots \beta_n)$ ортогонален всем векторам из группы Γ. Действительно, $\dot{G} = \sum \beta_s \left(\xi_s \dfrac{\partial K}{\partial \eta_s} - \eta_s \dfrac{\partial K}{\partial \xi_s} \right) = 0$, если $\beta \perp \Gamma$. Так как $\operatorname{rank} \Gamma = r$, то можно найти $n - r$ таких линейно независимых векторов β.

В качестве примера рассмотрим гамильтонову систему Хенона — Хейлеса, гамильтониан которой равен $H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_1^2 x_2 - \frac{2}{3}x_2^3)$. В этой задаче $n = 2$ и $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$. Группа Γ определяется равенством $j_1 + j_2 = 0$; $\operatorname{rank}\Gamma = 1$. Чтобы получить интеграл, независимый от H, положим $\beta_1 = \beta_2 = 1$. Тогда $G = (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2)/2$. Если H преобразовать к нормальной форме по теореме 3, то $K = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \eta_1^2 + \xi_2^2 + \eta_2^2) + \ldots$ начинается с тех же членов, что и G. Можно показать прямым вычислением, что с учетом слагаемых степени $\geqslant 3$ функции K и G действительно независимы. Обсуждение численных результатов Хенона и Хейлеса в связи с построением формального интеграла можно найти у Густавсона [199] и Мозера [130].

2. Нормализация гамильтоновой системы в окрестности устойчивого равновесия тесно связана с классической схемой теории возмущений. Действительно, вводя с помощью подстановки $x \to \varepsilon x$, $y \to \varepsilon y$ малый параметр ε и переходя к полярным координатам I, φ по формулам $x_s = \sqrt{2I_s}\sin\varphi_s$, $y_s = \sqrt{2I_s}\cos\varphi_s$, получим гамильтонову систему $\dot{I}_s = -\partial H/\partial\varphi_s$, $\dot{\varphi}_s = \partial H/\partial I_s$ с функцией Гамильтона $H = \sum\limits_{m\geqslant 0} \varepsilon^m H_m^*(I,\varphi)$, $H_0^* = \sum \alpha_s I_s$, $H_m^* = H_{m+2}(x,y)\big|_{I,\varphi}$, 2π-периодической по φ. Если частоты α_s рационально независимы, то существуют формальные ряды классической теории возмущений, которым соответствует как раз преобразование Биркгофа. Теорему Рюссмана — Вея можно вывести с помощью этого же приема из теоремы 1 § 10.

3. В приложениях функция H обычно зависит еще от некоторых параметров $\varepsilon \in D$ (D — область в $\mathbb{R}^m$). Будем считать, что функция $H(z,\varepsilon)$ аналитична по z, ε, и $H_z'(0,\varepsilon) = 0$ для всех ε. Если при всех ε собственные числа линеаризованной системы чисто мнимы и различны, то подходящим линейным симплектическим преобразованием, аналитическим по ε, форму H_2 можно привести к "нормальному" виду (11.1). Коэффициенты α_s будут, конечно, аналитичны по ε. Следующая теорема является незначительным усилением результата Рюссмана — Вея.

Теорема 5 [88]. *Пусть существуют n интегралов в инволюции $G_k(x,y,\varepsilon) = \frac{1}{2}\sum\limits_s \varkappa_{ks}(\varepsilon)(x_s^2 + y_s^2) + \sum\limits_{j\geqslant 3} G_{kj}(x,y,\varepsilon)$, аналитических по ε и таких, что $\det\|\varkappa_{ks}(\varepsilon)\| \neq 0$ при всех $\varepsilon \in D$. Тогда существует аналитическое каноническое преобразование $x, y \to \xi, \eta$, аналитическое по ε, которое переводит $H(x,y,\varepsilon)$ в гамильтониан $K(\rho_1,\ldots,\rho_n,\varepsilon)$, $\rho_s = \xi_s^2 + \eta_s^2$.*

Если ряды $\sum G_{kj}$ формальные (не обязательно сходящиеся), то можно найти формальное каноническое преобразование, "нормализующее" гамильтониан H. В частности, в условиях теоремы преобразование Биркгофа существует и при рационально зависимых наборах частот $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Аналог теоремы 4 для гамильтоновых систем, зависящих от параметра, указан в [74]. В работе [142] рассмотрена задача о приводимости к нормальной форме Биркгофа гамильтоновых систем с параметром, допускающих интегралы с вырожденными квадратичными частями. Пусть $n = 2$ и коэффициенты α_1, α_2 в квадратичной форме гамильтониана (11.1) как функции ε удовлетворяют условию $m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 \not\equiv 0$ для всех целых m_1, m_2, не равных одновременно нулю. В [142] доказано, что если гамильтонова система допускает формальный интеграл $F = F_q + F_{q+1} + \ldots$ $(q \geqslant 2)$, аналитический по ε, причем однородные формы F_q и H_2 функционально независимы при всех ε, то существует нормализующее преобразование Биркгофа, аналитически зависящее от ε.

По-видимому, для гамильтоновых систем, зависящих от параметра, справедлив аналог теоремы 3.

4. В общем случае, когда не все собственные числа $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_n$ чисто мнимые, также можно привести уравнения Гамильтона к нормальной форме Биркгофа. Детальное обсуждение этих вопросов содержится, например, в книге [230]. В общем случае уравнения Гамильтона имеют инвариантные асимптотические поверхности Σ, сплошь заполненные траекториями, неограниченно приближающимися к положениям равновесия при $t \to \pm\infty$. Оказывается, преобразование Биркгофа может задаваться расходящимися степенными рядами, однако эти ряды сходятся в точках из Σ.

Рассмотрим более подробно случай, когда собственные числа $\pm\lambda_1, \ldots, \pm\lambda_n$ вещественны и отличны от нуля. Тогда равновесие, очевидно, неустойчиво. Не ограничивая общности, можно считать, что все числа λ_k положительны. Будем предполагать, что среди них нет равных. Тогда в подходящих канонических координатах x, y функция Гамильтона приводится к виду

$$H = \sum_{k\geqslant 2} H_k \ , \qquad H_2 = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j y_j \ . \tag{11.4}$$

Следуя общим идеям § 2 гл. II, будем искать n-мерную инвариантную асимптотическую поверхность Σ в виде

$$y = \partial S/\partial x \ , \tag{11.5}$$

где функция $S(x)$ удовлетворяет уравнению Гамильтона — Якоби

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = 0 \ . \tag{11.6}$$

Выбор нулевой постоянной в правой части этого уравнения связан с тем, что положение равновесия $x = y = 0$ лежит на Σ. Ищем S в виде ряда по однородным формам от $x_1, \ldots, x_n$:

$$S = \sum_{k \geqslant 2} S_k(x) \, . \tag{11.7}$$

Учитывая выражение (11.4) для функции Гамильтона, получим цепочку уравнений для последовательного определения $S_2, \ldots, S_k, \ldots$:

$$\begin{gathered} \sum \lambda_j x_j \frac{\partial S_2}{\partial x_j} = 0 \, , \\ \sum \lambda_j x_j \frac{\partial S_k}{\partial x_j} = W_k \, , \qquad k \geqslant 3 \, . \end{gathered} \tag{11.8}$$

Здесь W_k — некоторые функции, однозначно определяемые величинами H_r и S_r при $r < k$. Поскольку $\lambda_j > 0$, то $S_2 \equiv 0$. Далее, пусть S_k содержит член вида $s x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$, $\sum \alpha_j = k$. Тогда из (11.8) получаем, что

$$s = w / (\lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_n \alpha_n) \, , \tag{11.9}$$

где w — коэффициент при $x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}$ в однородной форме W_k. Таким образом, степенной ряд для S находится однозначно. Знаменатели $\lambda_1 \alpha_1 + \ldots + \lambda_n \alpha_n$ в (11.9) отделены от нуля, поэтому ничто не препятствует сходимости ряда (11.7) в аналитическом случае (см. по этому поводу работы [31, 32], в которых сходимость доказана для обратимых систем, а также для некоторых систем с гироскопическими силами). Можно показать, что если функция Гамильтона бесконечно дифференцируема, то соответствующее уравнение Гамильтона — Якоби имеет решение из класса $C^\infty(\mathbb{R}^n = \{x\})$ с критической точкой $x = 0$ (см. по этому поводу [23]).

Итак, гамильтонова система с гамильтонианом (11.4) имеет n-мерную инвариантную поверхность Σ, причем $x_1, \ldots, x_n$ можно рассматривать как локальные координаты на Σ. Ограничим гамильтонову систему на Σ. В результате получим систему n дифференциальных уравнений с положением равновесия при $x = 0$: $\dot{x} = \left. \dfrac{\partial H}{\partial y} \right|_{y = \partial S / \partial x}$. Эта система имеет вид

$$\dot{x}_j = \lambda_j x_j + \ldots \, , \qquad 1 \leqslant j \leqslant n \, . \tag{11.10}$$

Многоточие означает члены порядка $\geqslant 2$. Так как $\lambda_j > 0$, то все решения (11.10) стремятся к точке $x = 0$ при $t \to -\infty$. Для того, чтобы получить асимптотическую поверхность с траекториями, приближающимися к положению равновесия при $t \to +\infty$, достаточно поменять ролями группы переменных x и y.

В приложениях часто встречаются обратимые системы с гамильтонианом $H = \frac{1}{2}\sum a_{ij}(x)y_i y_j + V(x)$. Пусть $x = 0$ — невырожденный локальный максимум потенциальной энергии V, и $V(0) = 0$. Тогда уравнение Гамильтона—Якоби $\frac{1}{2}\sum a_{ij}\frac{\partial S}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j} + V = 0$ имеет два решения: $\pm S$, определенные в некоторой окрестности точки $x = 0$. Соответствующая система уравнений (11.10) принимает вид градиентной системы: $\dot{x}_j = \sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\frac{\partial S}{\partial x_k}$ $(1 \leqslant j \leqslant n)$.

Согласно теореме Биркгофа, найдется такое формальное каноническое преобразование $x, y \to \xi, \eta$ вида

$$\xi_k = \frac{\partial S}{\partial \eta_k}, \qquad y_k = \frac{\partial S}{\partial x_k},$$
$$S(x,\eta) = S_2 + S_3 + \ldots, \qquad S_2 = \sum_{k=1}^{n} x_k\eta_k, \tag{11.11}$$

что в новых координатах функция Гамильтона будет степенным рядом K от $w_1 = \xi_1\eta_1, \ldots, w_n = \xi_n\eta_n$, начинающимся с линейных членов $\sum \lambda_s w_s$. Ясно, что производящая функция S удовлетворяет уравнению

$$H\left(x, \frac{\partial S}{\partial x}\right) = K(w), \qquad w = \frac{\partial S}{\partial \eta}\eta. \tag{11.12}$$

Одна из асимптотических поверхностей задается уравнениями $\eta_1 = \ldots = \eta_n = 0$, подставляя которые в (11.11) и (11.12), получим уже известные нам соотношения (11.5) и (11.6), определяющие эту асимптотическую поверхность. В частности, нормализующее преобразование Биркгофа (11.11) сходится при $\eta = 0$. Аналогичный результат справедлив и для другой асимптотической поверхности.

Обстоятельный анализ сходимости нормализующих преобразований (причем не только уравнений Гамильтона) можно найти в книге А. Д. Брюно [30].

5. Преобразование к нормальной форме можно производить не только в окрестности положений равновесия, но и, например, в окрестности периодических траекторий. Все сказанное выше с необходимыми изменениями справедливо и в этом случае.

ГЛАВА III

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРЕПЯТСТВИЯ К ПОЛНОЙ ИНТЕГРИРУЕМОСТИ

Анализ причин неинтегрируемости гамильтоновых систем начнем с обсуждения обнаруженных сравнительно недавно "грубых" препятствий топологического характера. В работе [81] доказано, что замкнутая аналитическая поверхность рода $\varkappa$, $\varkappa \geqslant 2$ не может быть конфигурационным пространством аналитической интегрируемой системы; причиной является наличие большого числа неустойчивых периодических траекторий, на которых первые интегралы зависимы. Этот результат (не замеченный классиками из-за пристрастия к локальному рассмотрению динамических систем) обобщен в различных направлениях. Доказательство неинтегрируемости использует вариационные методы и тонкие факты из теории особенностей аналитических отображений.

§ 1. Топология пространства положений интегрируемой системы

1. Рассмотрим обратимую механическую систему с двумя степенями свободы (см. п. 8 § 1 гл. I). Будем предполагать, что ее пространство положений M — компактная ориентируемая аналитическая поверхность. Хорошо известно топологическое строение таких поверхностей — это сферы с некоторым числом $\varkappa$ приклеенных ручек (число $\varkappa$ — род поверхности).

Движения обратимой системы описываются уравнениями Гамильтона в кокасательном расслоении T^*M, которое является ее фазовым пространством. Расслоение T^*M имеет естественную структуру четырехмерного аналитического многообразия. Будем считать, что функция Гамильтона $H : T^*M \to \mathbb{R}$ всюду аналитична. Так как $H = T(p, q) + V(q)$ и $T(p, q)$ при всех $q \in M$ является квадратичной формой от $p \in T^*_q M$, то функции T (кинетическая энергия) и V (потенциальная энергия) аналитичны соответственно на T^*M и M. Решения канонических уравнений

$$\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q}, \qquad \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{1.1}$$

являются аналитическими отображениями из $\mathbb{R} = \{t\}$ в T^*M. На их траекториях полная энергия $H = T + V$, конечно, постоянна.

Теорема 1 [81]. *Если род поверхности M отличен от 0 и 1 (т. е. M не гомеоморфна сфере $\mathbf{S}^2$ и тору $\mathbf{T}^2$), то уравнения (1.1) не имеют первого интеграла, аналитического на T^*M и независимого от интеграла энергии.*

Напомним, что аналитические функции считаются независимыми, если они независимы в какой-то точке (тогда они независимы почти всюду).

Хорошо известны многочисленные примеры интегрируемых систем, конфигурационные пространства которых гомеоморфны $\mathbf{S}^2$ или $\mathbf{T}^2$ (скажем, движение материальной точки по инерции по “стандартной” сфере или тору).

В бесконечно дифференцируемом случае теорема 1, вообще говоря, не справедлива: для любой гладкой поверхности M можно указать такой “натуральный” гамильтониан $H = T + V$, что уравнения Гамильтона (1.1) на T^*M имеют дополнительный бесконечно дифференцируемый интеграл, независимый (точнее, не всюду зависимый) с функцией H. Действительно, рассмотрим стандартную сферу $\mathbf{S}^2$ в $\mathbb{R}^3$; пусть поверхность M получается из $\mathbf{S}^2$ приклеиванием любого числа ручек к некоторой малой области N на $\mathbf{S}^2$. Пусть H — функция Гамильтона задачи о движении точки по инерции ($V \equiv 0$) по поверхности M, вложенной в $\mathbb{R}^3$. Вне области N точка будет двигаться, очевидно, по большим кругам сферы $\mathbf{S}^2$. Следовательно, в фазовом пространстве T^*M существует инвариантная область, диффеоморфная прямому произведению $D \times \mathbf{T}^2$, расслоенная на двумерные инвариантные торы. Точки из области D “нумеруют” эти торы. Пусть $f : D \to \mathbb{R}$ — гладкая функция, обращающаяся в нуль вне некоторой подобласти G, целиком лежащей в D. Функции f соответствует гладкая функция F на $D \times \mathbf{T}^2$, постоянная на инвариантных торах из $D \times \mathbf{T}^2$. Она продолжается до гладкой функции на всем T^*M, если положить $F = 0$ вне множества $G \times \mathbf{T}^2$. Очевидно, что F — первый интеграл канонических уравнений (1.1), и функции H и F (при подходящем выборе f) не всюду зависимы.

2. Теорема 1 следует из более сильного утверждения, устанавливающего неинтегрируемость уравнений движения при фиксированных достаточно больших значениях полной энергии. Точная формулировка состоит в следующем. При всех значениях $h > \max\limits_M V$

уровень полной энергии $\Sigma_h = \{z \in T^*M : T + V = h\}$ является трехмерным аналитическим многообразием, имеющим естественную структуру расслоенного пространства с базой расслоения M и слоем $\mathbf{S}^1$. Локальными координатами на Σ_h являются q и φ, где q — координаты на M, а φ — угловая переменная на "слое" $S^1_q = \{p \in T^*_q M : T(p,q) + V(q) = h\}$ (окружности в кокасательной плоскости). Исходное гамильтоново векторное поле v_H касается Σ_h, поэтому на Σ_h возникает некоторая аналитическая система дифференциальных уравнений. Справедлива

Теорема 2. *Если род поверхности M не равен 0 и 1, то при всех $h > \max V$ поток на Σ_h не имеет непостоянного аналитического интеграла.*

3. В бесконечно дифференцируемом случае в предположениях теорем 1, 2 можно утверждать отсутствие новых гладких интегралов, удовлетворяющих некоторым дополнительным условиям.

Теорема 3. *Если род гладкой поверхности M отличен от 0 и 1, то при всех $h > \max V$ фазовый поток на Σ_h не имеет бесконечно дифференцируемого первого интеграла $f : \Sigma_h \to \mathbb{R}$, который*

а) *имеет конечное число критических значений,*

и при этом

б) *точки $q \in M$, для которых множества $\{\varphi \in S^1_q : f(q,\varphi) = c\}$ конечны или совпадают со всем слоем S^1_q, всюду плотны на M.*

В аналитическом случае условия а), б) выполняются автоматически. При этом свойство б), очевидно, имеет место для всех $q \in M$. Свойство а) нетривиально; его доказательство можно найти в работе [233].

Более общо, если компактная ориентируемая гладкая поверхность M не гомеоморфна сфере и тору, то уравнения движения не имеют нового интеграла $F(p,q)$, являющегося бесконечно дифференцируемой функцией на T^*M, аналитической при фиксированных $q \in M$ на кокасательных плоскостях $T^*_q M$ и имеющей конечное число различных критических значений. Полиномиальные по скоростям функции представляют распространенный пример интегралов, аналитических по импульсам p. Количество различных критических значений гладкой функции на компактном многообразии конечно, если, например, все критические точки изолированы или критические точки образуют невырожденные критические многообразия.

Пример п. 1 не противоречит теореме 3: свойство б) заведомо не выполнено для точек $q \in M$, достаточно удаленных от "особой" области N (и симметричной ей относительно центра сферы).

4. Теоремы 1–3 справедливы и в случае неориентируемых компактных поверхностей, если дополнительно исключить проективную плоскость $\mathbb{RP}^2$ и бутылку Клейна $\mathbf{K}$. Действительно, стандартное регулярное двулистное накрытие $N \to M$, где N — ориентированная поверхность, индуцирует некоторую натуральную механическую систему на N, которая обладает дополнительным интегралом, если новый интеграл есть у системы на M. Остается заметить, что когда M не гомеоморфна $\mathbb{RP}^2$ и $\mathbf{K}$, то род поверхности N больше 1.

5. Согласно принципу Мопертюи, траектории движений механической системы с запасом полной энергии $h > \max\limits_M V$ являются геодезическими линиями римановой метрики $(ds)^2 = 2(h-V)T\,dt^2$ на M. Пусть k — гауссова кривизна метрики Мопертюи ds. По формуле Гаусса — Бонне $\frac{1}{2\pi}\int_M k\,d\sigma = \chi(M)$, где $\chi(M)$ — эйлерова характеристика компактной поверхности M. Если род M больше 1, то $\chi(M) < 0$. Следовательно, средняя кривизна отрицательна. Если кривизна отрицательна всюду, то динамическая система на Σ_h будет У-системой (или системой Аносова) и, следовательно, эргодической на Σ_h [6]. Этот результат справедлив и в многомерном случае (нужно только потребовать отрицательность кривизны по всем двумерным направлениям). При этом дифференциальные уравнения на Σ_h не имеют даже непрерывных непостоянных интегралов, поскольку почти все траектории всюду плотны на Σ_h. Конечно, отрицательная в среднем кривизна далеко не всегда будет отрицательной всюду.

6. Обобщение теорем 1 и 2 на многомерный случай содержится в работах И. А. Тайманова [155, 156].

Напомним сначала определение чисел Бетти. Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n. Дифференциальные k-формы на M образуют линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, замкнутые k-формы — его подпространство, а дифференциалы $(k-1)$-форм — подпространство пространства замкнутых форм. Отождествляя замкнутые формы, отличающиеся друг от друга на дифференциалы, введем факторпространство

$$(\text{замкнутые формы})/(\text{дифференциалы}) = \mathbf{H}^k(M, \mathbb{R}).$$

Размерность пространства $\mathbf{H}^k(M,\mathbb{R})$ называется k-мерным числом Бетти многообразия M; оно обозначается $b_k(M)$ или просто b_k. Например, если M — n-мерный тор $\mathbf{T}^n$, то $b_k = C_n^k$ (см., например, [54]). По теореме двойственности Пуанкаре $b_k = b_{n-k}$. Для связных многообразий $b_0 = b_n = 1$. Эйлерова характеристика выражается через числа Бетти по формуле $\chi(M) = \sum\limits_{j\geqslant 0}(-1)^j b_j$.

Теорема 4. *Предположим, что конфигурационное пространство натуральной системы с n степенями свободы является связным аналитическим многообразием M^n, а функция Гамильтона $H = T + V$ — аналитической функцией в фазовом пространстве. Если эта система имеет n независимых аналитических интегралов, то*

$$b_k(M^n) \leqslant C_n^k . \tag{1.2}$$

Если дополнительно $b_1(M^n) = n$, то в (1.2) неравенства заменяются равенствами.

При $k = 1$ (1.2) дает неравенство

$$b_1 \leqslant n ; \tag{1.3}$$

оно было указано автором в качестве гипотезы в книге [12]. Для двумерных ориентированных поверхностей $b_1 = 2\varkappa$, где $\varkappa$ — род поверхности. В этом случае (1.3) совпадает с неравенством $\varkappa \leqslant 1$, поэтому теорема 4 содержит как частный случай теорему 2.

В работах [155, 156] указаны также топологические препятствия к интегрируемости в терминах фундаментальной группы многообразия M^n: она не должна содержать коммутативных подгрупп конечного индекса.

В теореме 4 предположение об аналитичности можно ослабить. Интегрируемую гамильтонову систему на энергетической поверхности $\Sigma_h = \{H = h\}$ назовем геометрически простой, если:

1) в Σ_h содержится такое замкнутое инвариантное (относительно фазового потока g_H^t) множество Γ, что $\Sigma_h \setminus \Gamma$ всюду плотно в Σ_h и имеет конечное число компонент связности, каждая из которых расслоена на n-мерные торы над $(n-1)$-мерными дисками;

2) для любой точки $z \in \Sigma_h$ и любой ее окрестности W существует область $U \subset W$, содержащая z и такая, что $U \cap (\Sigma_h \setminus \Gamma)$ имеет конечное число компонент связности.

Если гамильтонова система на поверхности Σ_h ($h > \max V$) вполне интегрируема и геометрически проста, то справедливы неравенства (1.2). Аналитически интегрируемые системы геометрически просты [155].

§ 2. Доказательство теорем о неинтегрируемости

1. Сначала докажем теорему 3 из § 1, из которой, в свою очередь, вытекают теоремы 1 и 2. Доказательство использует некоторые факты из алгебраической топологии, с которыми можно ознакомиться, например, по книгам [54, 58].

Пусть ds — метрика Мопертюи на M. Зафиксируем точку $q \in M$, удовлетворяющую условию б). Поскольку (M, ds) — гладкое двумерное компактное ориентируемое риманово многообразие, не гомеоморфное сфере, то, по теореме Е. В. Гайдукова [40], для любого нетривиального класса свободно гомотопных путей на M существуют геодезические полутраектории Γ, выходящие из точки q и асимптотически приближающиеся к некоторой замкнутой геодезической из данного гомотопического класса. Геодезическая Γ сама может быть замкнутой кривой. Геодезические полутраектории Γ будем называть в дальнейшем Γ_q-*геодезическими.*

Предположим, что гамильтонова система имеет на Σ_h бесконечно дифференцируемый первый интеграл $F(q, \varphi)$. Любой его некритический уровень есть объединение некоторого числа двумерных инвариантных торов. Рассмотрим в кокасательной плоскости T_q^*M окружность S_q^1, состоящую из векторов p, для которых $T(p, q) + V(q) = h$. Каждому вектору $p \in S_q^1$ соответствует единственное движение $q(t), p(t)$ с начальными условиями $q(0) = q$, $p(0) = p$; на этом движении функция F постоянна. Импульс p назовем критическим, если критическим является соответствующее значение интеграла F. Покажем, что существует бесконечно много различных критических импульсов. Если число критических импульсов конечно, то окружность S_q^1 так разбивается на конечное число открытых секторов $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$, что любой импульс $p \in \Delta_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ является некритическим.

Каждому $p \in \Delta_i$ можно поставить в соответствие единственный инвариантный тор $\mathbf{T}_p^2$, на котором лежит решение $q(t), p(t)$ уравнений Гамильтона (1.1) с начальным условием $q(0) = q$, $p(0) = p$. Среди значений функции F при $p \in \Delta_i$ нет критических, поэтому естественное отображение $f_i : \Delta_i \times \mathbf{T}^2 \to D_i = \bigcup\limits_{p \in \Delta_i} \mathbf{T}_p^2$ является непрерывным. Пусть $\pi : T^*M \to M$ — проекция кокасательного расслоения T^*M на M. Положим $X_i = \pi(D_i)$. Непрерывное отображение $\pi \circ f_i : \Delta_i \times \mathbf{T}^2 \to X_i$ индуцирует гомоморфизм групп гомологий $g_i : \mathbf{H}_1(\Delta_i \times \mathbf{T}^2) \to \mathbf{H}_1(X_i)$. Так как $X_i \subset M$, существует естественный гомоморфизм $\varphi_i : \mathbf{H}_1(X_i) \to \mathbf{H}_1(M)$. Обозначим через G_i подгруппу группы $\mathbf{H}_1(M)$, являющуюся образом группы $\mathbf{H}_1(\Delta_i \times \mathbf{T}^2)$ при гомоморфизме $\varphi_i \circ g_i : \mathbf{H}_1(\Delta_i \times \mathbf{T}^2) \to \mathbf{H}_1(M)$. Элементы группы $\mathbf{H}_1(M)$ являются классами гомологичных циклов, и в каждом классе есть связный цикл. Свободно гомотопные циклы, очевидно, гомологичны; Γ_q-геодезические, отвечающие некритическим начальным импульсам, замкнуты. При некоторых критических начальных импульсах Γ_q-геодезические могут оказаться незамкнутыми. Эти геодезические "наматываются" на некоторые циклы γ, порождающие одномерные подгруппы $\{n\gamma, n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbf{H}_1(M)$. Согласно предположению, число критических импульсов конечно, поэтому число таких подгрупп тоже конечно. Обозначим их $N_1, \ldots, N_m$. Если $\alpha \in \mathbf{H}_1(M)$ не лежит в объединении $N_1 \cup \ldots \cup$

$\cup N_m$, то в классе гомологичных циклов α содержится некоторая из замкнутых Γ_q-геодезических. При отображении $\pi \circ f_i$ в замкнутые Γ_q-геодезические переходят некоторые замкнутые кривые в областях $\Delta_1 \times \mathbf{T}^2, \ldots, \Delta_n \times \mathbf{T}^2$, поэтому множество $\mathbf{H}_1(M) \setminus \bigcup N_i$ целиком покрыто подгруппами $G_1, \ldots, G_n$. Так как $\mathbf{H}_1(\Delta_i \times \mathbf{T}^2) = \mathbf{H}_1(\mathbf{T}^2) = \mathbb{Z}^2$, то G_i — коммутативные подгруппы, ранг которых не превосходит двух. Если род поверхности M равен $\varkappa$, то $\mathbf{H}_1(M) = \mathbb{Z}^{2\varkappa}$. Поскольку M не гомеоморфно сфере и тору, то $2\varkappa \geqslant 4$, и из соображений размерности следует, что $\mathbf{H}_1(M)$ нельзя покрыть конечным числом одно- и двумерных подгрупп. Полученное противоречие доказывает бесконечность числа критических импульсов.

По условию а) число различных критических значений функции $F : \Sigma_h \to \mathbb{R}$ конечно. Следовательно, при зафиксированном выше значении $q \in M$ функция $F(q, \varphi)$, $\varphi \in S^1_q$, бесконечно много раз принимает одно и то же значение. Тогда, по условию б), $F(q, \varphi)$ постоянна на S^1_q (т. е. не зависит от φ). Поверхность M связна и компактна, поэтому любые две ее точки можно соединить кратчайшей геодезической. Функция F постоянна вдоль каждого движения, поэтому принимает одно и то же значение во всех точках $q \in M$, удовлетворяющих условию б). Согласно предположению, множество таких точек всюду плотно на M, поэтому по непрерывности $F = \mathrm{const}$. Теорема доказана.

2. Для случая движения по инерции ($V \equiv 0$) В. Н. Колокольцов нашел другое доказательство теоремы 1, основанное на введении в M комплексно-аналитической структуры [112]. В идейном отношении оно восходит к Дж. Биркгофу [18, гл. II].

Локально на M всегда можно так ввести координаты q_1, q_2, чтобы метрика приняла конформный вид $ds^2 = \lambda(q_1, q_2)(dq_1^2 + dq_2^2)$ (см., например, [53, гл. 2]). Координаты q_1, q_2 называются *конформными* или *изотермическими*. Пусть p_1, p_2 — канонические импульсы, сопряженные с q_1, q_2. В переменных p, q функция Гамильтона для движения по инерции приобретает вид $H = \frac{1}{2}\Lambda(q_1, q_2)(p_1^2 + p_2^2)$.

Вводя локальную комплексную переменную $z = q_1 + iq_2$, получим $ds^2 = \lambda(z, \bar{z})\, dz\, d\bar{z}$. Пусть $z = f(w)$ — голоморфная функция. Тогда $dz = f'\, dw$, $d\bar{z} = \bar{f}'\, d\bar{w}$, $ds^2 = \lambda |f'|^2\, dw\, d\bar{w}$. Следовательно, конформный вид римановой метрики инвариантен относительно голоморфных замен координат. Введем в M комплексную структуру римановой поверхности так, чтобы хотя бы в одной карте исходная метрика имела конформный вид. Тогда это свойство будет иметь место во всех комплексных картах на M.

Как уже отмечалось в п. 4 § 1 гл. II, для движений по инерции вопрос о существовании аналитического интеграла сводится к вопросу о существовании интеграла в виде однородного полинома по импульсам. Запишем его в явном виде: $F_n = \sum\limits_{k+l=n} f_{k,l}(q_1, q_2) p_1^k p_2^l$.

Л е м м а 1. *Функция*

$R_n = (f_{n,0} - f_{n-2,2} + f_{n-4,4} - \ldots) + i(f_{n-1,1} - f_{n-3,3} + \ldots) = \sum\limits_{k+l=n} i^l f_{k,l}$
является голоморфной функцией от $z = q_1 + iq_2$.

Это утверждение получено Биркгофом [18, гл. II] при $n \leqslant 2$. Для доказательства вычислим скобку Пуассона функций F_n и H:

$$\{F_n, H\} = \sum_{k+l=n} \left[\frac{\partial f_{k,l}}{\partial q_1} \Lambda p_1^{k+1} p_2^l + \frac{\partial f_{k,l}}{\partial q_2} \Lambda p_1^k p_2^{l+1} \right] -$$
$$- \sum_{k+l=n} f_{k,l} \frac{k}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} (p_1^2 + p_2^2) p_1^{k-1} p_2^l - \sum_{k+l=n} f_{k,l} \frac{l}{2} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} (p_1^2 + p_2^2) p_1^k p_2^{l-1} \equiv 0\,.$$

Положим в этом равенстве $p_1 = 1$, $p_2 = i$. Тогда $p_1^2 + p_2^2 = 0$, поэтому $\dfrac{\partial}{\partial q_1} \sum\limits_{k+l=n} f_{k,l} i^l + i \dfrac{\partial}{\partial q_2} \sum\limits_{k+l=n} f_{k,l} i^l = 0$. Это равенство совпадает с условиями Коши — Римана голоморфности функции $R_n(z)$.

Л е м м а 2. $R_n(z) = R_n(w(z))(w'(z))^{-n}$ *для всех голоморфных преобразований* $z \to w(z)$ *независимой переменной* z.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $w = Q_1 + iQ_2$ и P_1, P_2 — новые канонические импульсы. Так как $p_1\,dq_1 + p_2\,dq_2 = P_1\,dQ_1 + P_2\,dQ_2$, то $p_1 = P_1 Q_1' + P_2 Q_2'$, $p_2 = -P_1 Q_2' + P_2 Q_1'$, где $Q_i' = \partial Q_i / \partial q_1$ $(i = 1, 2)$. Отсюда $F_n(p, q) = \sum\limits_{k+l=n} f_{k,l}(w)(P_1 Q_1' + P_2 Q_2')^k (-P_1 Q_2' + P_2 Q_1')^l$. Полагая в этом равенстве $P_1 = 1$, $P_2 = i$, получим

$$R_n(w) = \sum_{k+l=n} f_{k,l}(w(z))(Q_1' + iQ_2')^k (-Q_2' + iQ_1')^l =$$
$$= \Big(\sum_{k+l=n} f_{k,l}(z) i^l \Big) (Q_1' + iQ_2')^n = R_n(z)(w')^n\,,$$

что и требовалось доказать.

Л е м м а 3. *Имеет место тождество* $R_n(z) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $R_n(z) \not\equiv 0$. Тогда, согласно лемме 2, дифференциальная форма

$$(dz)^n / R_n(z) \qquad (2.1)$$

инвариантна относительно голоморфных замен переменных. При $n = 1$ она является обычным абелевым дифференциалом, так как функция R_1^{-1} мероморфна на римановой поверхности M. При $n > 1$ форму (2.1) будем называть n-дифференциалом.

Хорошо известно (см., например, [46, гл. 9]), что для любого абелева дифференциала на компактной римановой поверхности M рода $\varkappa$ разность между числом нулей и числом полюсов равна $2\varkappa-2$. Для n-дифференциала эта разность равна, очевидно, $2n(\varkappa - 1)$ (доказательство дословно повторяет рассуждения для классического случая $n = 1$). Ввиду локальной голоморфности $R_n(z)$ n-дифференциал (2.1) не имеет нулей. Следовательно, число его полюсов равно $2n(1-\varkappa)$; оно отрицательно, так как род $\varkappa$ больше единицы. Получено противоречие.

Лемма 4. *Если* $R_n \equiv 0$, *то* $F_n = HF_{n-2}$.

Действительно, положим $(2/\Lambda)F_{n-2} = a_{n-2,0}p_1^{n-2} + a_{n-3,1}p_1^{n-3}p_2 + \ldots + a_{0,n-2}p_2^{n-2}$. Равенство $F_n = HF_{n-2}$ имеет место в том и только том случае, когда алгебраические системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&a_{n-2,0} = f_{n,0}\,, & &a_{n-3,1} = f_{n-1,1}\,,\\
&a_{n-2,0} + a_{n-4,2} = f_{n-2,2}\,, & &a_{n-3,1} + a_{n-5,3} = f_{n-3,3}\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

разрешимы. Условием разрешимости являются равенства $f_{n,0} - f_{n-2,2} + \ldots = f_{n-1,1} - f_{n-3,3} + \ldots = 0$. Что и требовалось доказать.

Для завершения доказательства неинтегрируемости остается применить индукцию по убыванию n: если имеется полиномиальный интеграл степени $2k$ или $2k+1$, то имеется интеграл степени 0 или 1 соответственно. Первый случай тривиален, а во втором случае $F_1 = a\dot{q}_1 + b\dot{q}_2$ и, согласно лемме 3, $R_1 = a + ib \equiv 0$. Поэтому $F_1 \equiv 0$. Итак, $F_n = 0$ при нечетных n, и $F_n = cH^{n/2}$ при четных n.

Заметим, что в доказательстве несуществования полиномиального интеграла нигде не использовалась аналитичность его коэффициентов: достаточно предположить, что они из класса $C^1(M)$. Поэтому можно подумать, что тем самым доказан более сильный результат по сравнению с теоремой 1. Однако, как показал С. В. Болотин [27], если M, T, V аналитичны, то любой полиномиальный интеграл является аналитической функцией на T^*M.

3. Доказательство теоремы 4 использует сложную топологическую технику и здесь не приводится (см. [155, 156]); в отличие от доказательства п. 1, оно не дает содержательной информации о явлениях качественного характера, препятствующих интегрируемости.

§ 3. Геометрические препятствия к интегрируемости

1. Другой возможный путь обобщения теоремы 1 § 1 состоит в рассмотрении областей с геодезически выпуклой границей. Предположим, что M' — компактное подмногообразие с краем на аналитической двумерной поверхности M. Через Σ' обозначим множество всех точек трехмерной поверхности $\Sigma = \{H = h\}$, которые переходят при проектировании $\pi : TM \to M$ в точки на M'. Будем говорить, что M' — геодезически выпукло, если для любых двух близких точек на границе $\partial M'$ соединяющая их кратчайшая геодезическая целиком лежит в множестве M'.

Теорема 1. *Пусть M' — геодезически выпуклое подмногообразие с отрицательной эйлеровой характеристикой. Тогда геодезический поток на Σ не имеет непостоянного аналитического интеграла. Более того, аналитический интеграл заведомо отсутствует в каждой окрестности множества Σ' в Σ.*

Если $\partial M' = \varnothing$, то мы снова получим теорему 1 § 1. Теорема 1 настоящего параграфа сначала была установлена автором в предположении, что первое число Бетти поверхности M' больше двух. Затем С. В. Болотин заменил это условие более слабым: $\chi(M') < 0$, где χ — эйлерова характеристика [25].

2. Доказательство теоремы 1 основано на методе работы [81] (см. п. 1 § 2). Оно использует тот факт, что в каждом классе свободно гомотопных путей на M' имеется неустойчивая замкнутая геодезическая. Существование замкнутых геодезических (без анализа устойчивости) на многообразиях с выпуклой границей было отмечено в классических работах Уиттекера [163] и Биркгофа [18]. Вместо группы гомологий, примененной для доказательства неинтегрируемости в случае пустого $\partial M'$, здесь используются другие топологические инварианты [25].

3. Из теоремы 1 можно вывести ряд любопытных утверждений, касающихся условий интегрируемости геодезических потоков на сфере и торе. Они сообщены автору С. В. Болотиным.

Следствие 1. *Предположим, что на двумерном аналитическом торе $\mathbf{T}^2$ имеется замкнутая геодезическая, гомотопная нулю. Тогда геодезический поток, порожденный метрикой на $\mathbf{T}^2$, не имеет непостоянного аналитического интеграла.*

Доказательство. Пусть γ — замкнутая геодезическая на $\mathbf{T}^2$, стягиваемая в точку. Предположим сначала, что γ не имеет самопересечений. Тогда γ делит $\mathbf{T}^2$ на две геодезически выпуклые области, одна из которых гомеоморфна диску, а эйлерова характеристика другой области отрицательна. Отсутствие интеграла вытекает из теоремы 1. Рассмотрим теперь общий случай, когда геодезическая γ имеет самопересечения. Реализуем тор как факторпространство $\mathbb{R}^2$ по целочисленной решетке $\mathbb{Z}^2$. Метрика на $\mathbf{T}^2$ индуцирует метрику на $\mathbb{R}^2$, причем геодезическая γ "поднимается" до геодезической γ' на $\mathbb{R}^2$. Поскольку γ гомотопна нулю на $\mathbf{T}^2$, то γ' замкнута. Ясно, что γ' целиком лежит в некотором квадрате с целочисленными вершинами. Пусть p — длина стороны этого квадрата. Рассмотрим новый тор $\mathbf{T}^2_*$, возникающий в результате факторизации $\mathbb{R}^2$ по решетке $p\mathbb{Z}^2$. Ясно, что уравнения геодезических на $\mathbf{T}^2_*$ имеют дополнительный аналитический интеграл, если тем же свойством обладают уравнения геодезических на исходном многообразии $\mathbf{T}^2$. Геодезическая γ' перейдет в геодезическую γ_* на $\mathbf{T}^2_*$, причем среди областей, на которые γ_* делит $\mathbf{T}^2_*$, имеется область, гомеоморфная двумерному тору с вырезанным диском. Она, очевидно, геодезически выпукла, и ее эйлерова характеристика отрицательна. Утверждение доказано полностью.

Конечно, далеко не каждая метрика на двумерном торе имеет гомотопные нулю замкнутые геодезические. Однако в ряде случаев существование таких геодезических можно установить из простых соображений вариационного характера (рис. 11).

Обратимся к случаю, когда M гомеоморфна сфере $\mathbf{S}^2$. Согласно знаменитой теореме Пуанкаре, на $\mathbf{S}^2$ всегда имеются три замкнутые несамопересекающиеся геодезические γ_i (см., например, [72a]). Оказывается, интегрируемость соответствующего геодезического потока зависит от их взаимного расположения.

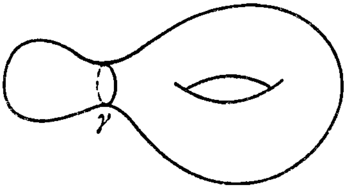

Рис. 11

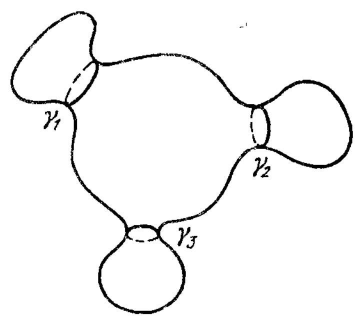

Рис. 12

Следствие 2. *Предположим, что геодезические $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ не пересекаются и каждую из них можно продеформировать в точку, не пересекая при этом двух других геодезических. Тогда уравнения геодезических на $\mathbf{S}^2$ не имеют дополнительного аналитического интеграла.*

Действительно, в этом случае γ_i делят $\mathbf{S}^2$ на несколько геодезически выпуклых областей, одна из которых имеет отрицательную эйлерову характеристику (рис. 12).

4. Применим, следуя С. В. Болотину, эти общие результаты к системам с потенциалом ньютоновского типа. Пусть M — пространство положений натуральной системы с двумя степенями свободы, $V : M \to \mathbb{R}$ — потенциальная энергия. Поверхность M не предполагается ориентируемой. Будем говорить, что функция V — потенциал ньютоновского типа, если она аналитична всюду, кроме конечного числа точек $z_1, \ldots, z_n$, и в конформных координатах z (для метрики, задаваемой кинетической энергией) с началом в особой точке z_s имеет вид $V = -f(z)/|z|$, где f — функция, аналитическая в окрестности точки z_s, $f(0) > 0$.

Теорема 2 [26]. *Пусть M компактно, а потенциал V имеет $n > 2\chi(M)$ особых точек. Тогда при $h > \sup_M V$ не существует непостоянных аналитических интегралов на энергетической поверхности $\Sigma_h = \{H = h\}$.*

При $n = 0$ получаем теорему 1 из § 1. Условие $n > 2\chi(M)$ не выполнено лишь в следующих случаях:

а) M — сфера, $n \leqslant 4$;

б) M — проективная плоскость, $n \leqslant 2$;

в) M — тор или бутылка Клейна, $n = 0$.

В некомпактном случае нужны дополнительные условия на поведение кинетической энергии на бесконечности. Предположим, что $\chi(M) \neq -\infty$; тогда, как известно из топологии, M можно превратить в компактную поверхность M^*, добавляя конечное число бесконечно удаленных точек z_k^*. Пусть $D_k \subset M^*$ — диффеоморфные дискам окрестности точек z_k^*. Дополнительное предположение заключается в том, что каждая замкнутая кривая в D_k, охватывающая точку z_k^*, не может быть стянута к точке z_k^* в классе кривых ограниченной длины (в метрике, определяемой кинетической энергией). Предположим еще, что $\sup_M V < \infty$.

Теорема 3 [26]. *Пусть M некомпактно, кинетическая энергия удовлетворяет сформулированному выше условию на бесконечности, а потенциальная энергия имеет $n > 2\chi(M)$ особых точек. Тогда при $h > \sup_M V$ система не имеет аналитических интегралов на поверхности Σ_h.*

Теоремы 2 и 3 доказываются с помощью теоремы 1 с использованием регуляризации Леви-Чивита. В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о движении точки по плоскости в гравитационном поле n неподвижных центров. Пусть $z_1, \ldots, z_n$ — различные точки комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Гамильтониан задачи n центров имеет вид $H(p, z) = |p|^2/2 + V(z)$ $(p \in \mathbb{C},\ z \in \mathbb{C} \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$, где $V(z) = -\sum\limits_{k=1}^{n} \mu_k |z - z_k|^{-1}$ $(\mu_k > 0)$ есть гравитационный потенциал. Здесь $M = \mathbb{C}$, $\chi(M) = 1$, кинетическая энергия (евклидова метрика на M) удовлетворяет необходимому условию на бесконечности, потенциал $V < 0$. Поэтому, согласно теореме 3, при $n > 2$ задача n центров неинтегрируема на энергетической поверхности $H > 0$. Отметим, что случаям $n = 1$ и $n = 2$ отвечают классические интегрируемые задачи Кеплера и Эйлера.

Укажем схему доказательства. Пусть Λ — риманова поверхность функции $\sqrt{(z - z_1)\ldots(z - z_n)}$, и $\pi : \Lambda \to \mathbb{C}$ — естественная проекция. Можно показать, что регуляризация Леви-Чивита (переход от пространства положений $M = \mathbb{C}$ к римановой поверхности Λ) сводит фазовый поток на энергетической поверхности $H = h > 0$ к геодезическому потоку на Λ с некоторой полной метрикой. Пусть D — диск на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с достаточно большим радиусом. Тогда множество $\Lambda' = \pi^{-1}(D)$ компактно и гомотопически эквивалентно Λ. Согласно формуле Римана — Гурвица, $\chi(\Lambda) = 2 - n < 0$ при $n > 2$. Докажем, что Λ' геодезически выпукло; для этого рассмотрим такое движение $z(t)$ с энергией $h > 0$, что $z(0) \in \partial D$ и $\dot{z}(0)$ касается ∂D. По формуле Лагранжа имеем

$$\frac{(|z|^2)^{\cdot\cdot}}{2} = |p|^2 - (z, V_z') = 2h + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{|z - z_k|} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k(z, z - z_k)}{|z - z_k|^3} =$$
$$= 2h + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{|z - z_k|^3}(z - z_k, z - 2z_k) > 0 \qquad \text{при } |z| \gg |z_k| \,.$$

Поэтому при малых t траектория $z(t)$ лежит вне D, и Λ' геодезически выпукло. Остается воспользоваться заключением теоремы 1.

Оказывается, условия теорем 2 и 3 нельзя ослабить. Пусть M — двумерная поверхность, T — кинетическая энергия на M, $z_1, \ldots, z_n$ — точки из M. Зафиксируем значение полной энергии h. Справедлива

Теорема 4 [27]. *Существует такой потенциал V ньютоновского типа с особенностями в точках $z_1, \ldots, z_n$, что гамильтонова система с гамильтонианом $H = T + V$ имеет дополнительный аналитический интеграл, квадратичный по импульсам, причем*

1) *если M некомпактно, то $V < h$;*

2) *если M компактно и $n > 2\chi(M)$, то $V < h$ всюду, кроме конечного числа точек;*

3) *если M компактно и $n \leqslant 2\chi(M)$, то $\sup_M V < h$;*

4) *если M некомпактно, $n \leqslant 2\chi(M)$ и T евклидова на бесконечности, то $\sup_M V < h$.*

Условие евклидовости римановой метрики T на бесконечности означает следующее. Пусть M получается из компактной римановой поверхности M^* выбрасыванием конечного числа бесконечно удаленных точек z_k^*. Тогда в окрестности каждой точки z_k^* в конформных координатах на M^* метрика T является евклидовой.

§ 4. Системы с гироскопическими силами

1. Пусть M — двумерное ориентированное многообразие и φ — 2-форма площади на M. Любая форма гироскопических сил имеет вид $\lambda\varphi$, где λ — функция на M. Будем говорить, что форма $f = \lambda\varphi$ сохраняет знак, если $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$) всюду на M. Последнее заведомо выполнено, если $f \equiv 0$ (т. е. система обратима).

Следуя Биркгофу, рассмотрим задачу о существовании условных полиномиальных интегралов. Напомним (см. § 1 гл. II), что интеграл, определенный на фиксированной поверхности уровня интеграла энергии, называется условным полиномиальным интегралом, если он продолжается до функции на T^*M, полиномиальной по импульсам с однозначными на M коэффициентами.

Предположим снова, что потенциал V ньютоновского типа имеет n особых точек на M. Все объекты считаем аналитическими.

Теорема 1 [27]. *Пусть M компактно и $n > 2\chi(M)$. Тогда при $h > \sup_M V$ не существует непостоянных полиномиальных по импульсам первых интегралов на уровне энергии $H = h$.*

При $n = 0$ и $f \equiv 0$ снова получаем теорему 1 из § 1. Оказывается, если для любой области $D \subset M$ с непустым краем выполнено неравенство

$$\iint\limits_D f + \int\limits_{\partial D} 2\sqrt{(h-V)T}\, dt > 0\,, \tag{4.1}$$

то в теореме 1 можно заменить полиномиальные интегралы на аналитические [26]. Если форма гироскопических сил точна, то условие (4.1) заведомо выполнено при $h > \sup_M H_0$, где $H_0 = H(p,q)\big|_{p=0}$. При $f \equiv 0$ получаем теорему 2 из § 3.

Теорема 2 [27]. *Пусть M некомпактно, кинетическая энергия евклидова на бесконечности, потенциал V имеет $n > 2\chi(M)$ особых точек $z_1, \ldots, z_n$. Тогда не существует полиномиальных по импульсам первых интегралов на $T^*(M \setminus \{z_1, \ldots, z_n\})$, независимых от функции H.*

Если форма f точна и выполнено условие $h > \sup_M H_0$, то при $n > 2\chi(M)$ не существует даже аналитических непостоянных интегралов на поверхности $H = h$ [26]. При $f \equiv 0$ снова получаем теорему 3 из § 3.

2. В качестве примера рассмотрим плоскую круговую задачу многих тел. Пусть n точек $z_1, \ldots, z_n$ закреплены в плоскости M, вращающейся вокруг некоторой точки O с постоянной угловой скоростью ω (вектор ω ортогонален M), а точка z единичной массы движется в M под действием сил гравитационного притяжения к

точкам $z_1, \ldots, z_n$. Здесь $L = |\dot{z}|^2/2 + (\omega \times z, \dot{z}) - V$, $V = -\sum_{k=1}^{n} \frac{\mu_k}{|z - z_k|} - \frac{\omega^2 |z|^2}{2}$, $\mu_k > 0$. Ограниченная задача многих тел интегрируема при $n = 1$ и всех ω (задача Кеплера), а также при $n = 2$ и $\omega = 0$ (задача Эйлера двух неподвижных центров). Оказывается, при $n > 2$ и всех ω эта задача не имеет дополнительных аналитических интегралов. Действительно, $H_0 = V + |\omega \times z|^2/2 = -\sum \mu_k/|z - z_k| < 0$, и $f = 2|\omega|\varphi$, где φ — стандартная форма площади на плоскости M. Так как $\chi(M) = 1$, то при $n > 2$ и $h > 0$ ограниченная задача n тел не имеет аналитического интеграла на энергетической поверхности $H = T + V = h$.

При $n = 2$ и $\omega \neq 0$ (ограниченная задача трех тел) подобное утверждение не доказано. Более того, известна гипотеза Шази об интегрируемости задачи трех тел при положительных значениях полной энергии [5]. Эта гипотеза связана с более общей концепцией: в задаче рассеяния частиц с некомпактным пространством положений данные на бесконечности (скажем, импульсы частиц) являются кандидатами на роль первых интегралов. Однако реализация этой идеи сталкивается с рядом затруднений принципиального характера, связанных с областью определения и гладкостью "интегралов рассеяния". Одна из таких трудностей — возможность захвата в задаче многих взаимодействующих частиц.

В ограниченной задаче трех тел известны более слабые результаты о неинтегрируемости. Пуанкаре доказал отсутствие дополнительных интегралов, аналитических по массам μ_1 и μ_2 "тяжелых" точек [225]. Либре и Симо [216], используя метод квазислучайных движений по В. М. Алексееву, доказали несуществование нового аналитического интеграла при условии, что масса одного из тел мала. Кроме этого, известен результат К. Зигеля [229] об отсутствии новых алгебраических первых интегралов; это утверждение доказывается методом Брунса. По-видимому, ограниченная задача трех тел не допускает полиномиальных по импульсам первых интегралов, независимых от интеграла энергии.

3. При $n = 2\chi(M)$ структура гироскопических сил — определяющий фактор интегрируемости гамильтоновой системы.

Теорема 3 [27]. *Пусть M компактно, а потенциал ньютоновского типа имеет $2\chi(M)$ особых точек. Если*

$$\int_M f \neq 0\,, \tag{4.2}$$

то не существует условного полиномиального интеграла на уровне $H = h$, где $h > \sup_M V$.

Покажем, что при условиях теоремы 3 могут существовать аналитические первые интегралы. Для этой цели рассмотрим движение заряда по плоскому тору $\mathbf{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$ в постоянном магнитном поле; его динамика описывается уравнениями

$$\ddot{x} + \alpha\dot{y} = \ddot{y} - \alpha\dot{x} = 0\,, \qquad \alpha = \mathrm{const}\ . \tag{4.3}$$

В этом случае $\chi(M) = 0$, особых точек нет. Форма гироскопических сил f равна $-\alpha\, dx \wedge dy$. Следовательно, при $\alpha \neq 0$ выполнено условие (4.2). Поэтому уравнения (4.3) не допускают полиномиальных интегралов с однозначными коэффициентами, независимых от интеграла энергии. Очевидные линейные интегралы $\dot{x} + \alpha y$, $\dot{y} - \alpha x$ многозначны в фазовом пространстве $TM = \mathbb{R}^2 \times \mathbf{T}^2$. Функция $\sin(y + \dot{x}/\alpha)$ — однозначный аналитический интеграл, не являющийся полиномом по $\dot{x}$.

В некомпактном случае условия существования дополнительного полиномиального интеграла не удается представить в виде топологических ограничений.

Доказательство теоремы 3 проведено в § 2 гл. VIII в предположении, что поверхность M гомеоморфна двумерному тору с плоской метрикой.

§ 5. Интегралы общего положения

1. Еще один подход к изучению топологических препятствий к полной интегрируемости гамильтоновых систем предложен А. Т. Фоменко [165, 166а]. Он связывает факт наличия дополнительного гладкого интеграла общего положения с топологией поверхности уровня интеграла энергии и количеством устойчивых замкнутых траекторий.

Перейдем к точным формулировкам. Пусть M^4 — фазовое пространство гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, H — функция Гамильтона. Рассмотрим фиксированную компактную трехмерную поверхность $\Sigma \subset M$ неособого уровня гамильтониана H. Предположим, что гамильтонова система имеет на Σ гладкий интеграл f. Назовем этот интеграл боттовским, если его критические точки образуют на Σ невырожденные критические подмногообразия N, т. е. гессиан $d^2 f$ невырожден на подпространствах, трансверсальных к этим подмногообразиям. Как показывает анализ конкретных проинтегрированных задач классической механики, во всех известных случаях дополнительные интегралы оказываются боттовскими. Некритические поверхности уровня функции f всегда ориентируемы (это вытекает из ориентируемости симплектического многообразия M и некритичности поверхности Σ). Критические поверхности N могут быть и неориентируемыми. В связи с этим обстоятельством естественно назвать интеграл f ориентируемым, если все критические многообразия ориентируемы. Можно показать, что, переходя к подходящему двулистному накрытию над Σ, интеграл f всегда можно делать ориентируемым.

Замкнутую траекторию гамильтоновой системы на Σ назовем устойчивой, если некоторая ее трубчатая окрестность в Σ целиком расслоена на двумерные концентрические инвариантные торы (некритические поверхности уровня функции f). Ясно, что если в точках замкнутой траектории функция f достигает строгого локального максимума или минимума, то эта траектория устойчива. Пример движения по инерции на плоском двумерном торе показывает, что не всякая вполне интегрируемая система имеет устойчивые траектории.

Т е о р е м а 1 [165]. *Предположим, что гамильтонова система имеет на поверхности Σ ориентируемый боттовский интеграл f. Тогда, если группа гомологий $\mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ конечна или ранг фундаментальной группы $\pi(\Sigma)$ равен* 1, *то гамильтонова система имеет на Σ по меньшей мере две устойчивые замкнутые траектории, при этом f достигает на каждой из этих траекторий строгого локального минимума или максимума.*

В случае движения по инерции по плоскому тору $\mathbf{T}^2$ имеем $\Sigma = \mathbf{T}^3$, поэтому $\operatorname{rank}\pi(\Sigma) = 3$. Приведем пример интегрируемой гамильтоновой системы, имеющей на энергетических поверхностях Σ ровно две устойчивые замкнутые траектории. Рассмотрим бигармонический осциллятор, динамика которого описывается уравнениями $\ddot{x}_1 + \omega_1^2 x_1 = 0$, $\ddot{x}_2 + \omega_2^2 x_2 = 0$, $\omega_1/\omega_2 \notin \mathbb{Q}$. Энергетическая поверхность $\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \omega_1^2 x_1^2 + \omega_2^2 x_2^2 = 2h$ при $h > 0$ диффеоморфна трехмерной сфере; поэтому $\mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}) = 0$. При всех $h > 0$ имеются ровно два устойчивых периодических решения:

$$x_1 = \frac{\sqrt{2h}}{\omega_1} \sin \omega_1 t , \quad x_2 = 0 ;$$

$$x_1 = 0 , \quad x_2 = \frac{\sqrt{2h}}{\omega_2} \sin \omega_2 t .$$

2. С л е д с т в и е. *Предположим, что группа $\mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z})$ конечна, и на энергетической поверхности Σ гамильтонова система не имеет устойчивых замкнутых траекторий. Тогда на поверхности Σ гамильтонова система не имеет дополнительного боттовского интеграла.*

Укажем одно из применений этого результата. Рассмотрим движение по инерции по n-мерному замкнутому риманову многообразию M с фиксированной (скажем, единичной) скоростью. Пусть Σ^{2n-1} — расслоенное пространство единичных касательных векторов многообразия M. Риманова метрика на M (кинетическая энергия системы) задает на Σ динамическую систему, которая обычно называется геодезическим потоком. Другими словами, геодезический поток — это ограничение гамильтоновой системы в T^*M с гамильтонианом $H = T$ на инвариантную гиперповерхность $\Sigma = \{H = 1\}$. Известный принцип Мопертюи сводит движение в произвольном потенциальном поле к геодезическому потоку.

Из результатов Аносова, Клингенберга и Такенса следует, что в множестве всех геодезических потоков на гладких замкнутых римановых многообразиях существует открытое всюду плотное подмножество потоков без устойчивых периодических траекторий [7]. Поэтому свойство геодезического потока не иметь устойчивых периодических траекторий является свойством общего положения. Рассмотрим геодезические потоки на двумерной сфере. В этом случае $M = T^*\mathbf{S}^2$, $\Sigma = SO(3)$ и $\mathbf{H}_1(\Sigma, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$. Следовательно, геодезический поток общего положения на двумерной сфере не имеет на неособых энергетических поверхностях дополнительного боттовского интеграла.

3. А. Т. Фоменко [166, 166а] детально исследовал строение трехмерных многообразий уровней интеграла энергии в интегрируемых системах и нашел топологические инварианты интегрируемых систем, которые позволяют эффективно различать неизоморфные системы.

§ 6. Топологические препятствия к существованию линейных интегралов

1. Хорошо известно, что наличие линейных по импульсам (или скоростям) первых интегралов тесно связано с группами симметрий, действующих на пространстве положений (см. п. 6 введения). Оказывается, наличие линейных интегралов налагает ограничения не только на риманову метрику (кинетическую энергию) и потенциал силового поля, но и на топологию пространства положений.

Пусть $H = T + V$ — гамильтониан обратимой системы, а $F = F_1 + F_0$ — ее линейный интеграл (F_k — однородная форма по импульсам степени k). Ясно, что $\{H, F\} = \{T, F_1\} + \{T, F_0\} + \{V, F_1\}$; здесь слагаемые — однородные формы по импульсам степени 2, 1 и 0 соответственно. Функции H и F коммутируют, поэтому все эти формы равны нулю. Следовательно, $F_0 \equiv 0$, а функция F_1 — интеграл обратимой системы (более того, F_1 — интеграл системы с гамильтонианом $H = T$).

Итак, линейные интегралы гамильтоновой системы на T^*M однородны по импульсам. Поэтому их можно представить в виде $F = y \cdot v(x)$, где y — канонический импульс, v — векторное поле на

M. В лагранжевом формализме линейные интегралы имеют вид*)

$$F = \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \cdot v = \langle \dot{x}, v \rangle , \tag{6.1}$$

где $\langle\ ,\ \rangle$ — метрика на M, задаваемая кинетической энергией. Векторное поле v порождает динамическую систему на M; пусть g_v^α — ее фазовый поток:

$$\frac{d}{d\alpha}\, g_v^\alpha(x) = v(g_v^\alpha(x)) . \tag{6.2}$$

Согласно теореме о выпрямлении, в малой окрестности неособой точки поля v система уравнений (6.2) приводится к виду

$$\frac{dx_1}{d\alpha} = 1 , \qquad \frac{dx_k}{d\alpha} = 0 , \quad k \geqslant 2 .$$

В этих специальных координатах $F = \partial T/\partial \dot{x}_1$, а функции T и V не зависят явно от x_1. Локальная координата x_1 называется циклической. Фазовый поток g_v^α сводится к семейству сдвигов $x_1 \to x_1 + \alpha$, $x_2 \to x_2$, $\ldots$, $x_n \to x_n$. В частности, функции T и V инвариантны относительно действия группы g_v^α. Этот результат — обращение теоремы Нётер для натуральных систем. Векторное поле v называется полем симметрий; в римановой геометрии поле v обычно называют полем Киллинга. Функция F является интегралом уравнений геодезических (уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H = T$), поэтому группа g_v^α переводит геодезические на M в геодезические. Далее, учитывая сохранение римановой метрики T относительно действия g^α, получаем, что g^α сохраняет расстояния между точками на M. Следовательно, g^α — однопараметрическая группа изометрий риманова многообразия M.

Поля Киллинга на M^n образуют алгебру Ли размерности $k \leqslant n(n+1)/2$, причем равенство имеет место для римановых многообразий постоянной кривизны. Например, на двумерных сферах $|x| = \mathrm{const}$ в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^3 = \{x\}$ поля $e \times x$, $e = \mathrm{const}$, являются киллинговыми. Их алгебра Ли изоморфна алгебре $so(3)$.

2. Если имеется несколько полей симметрий $v_1, \ldots, v_k$, то уравнения движения допускают столько же линейных интегралов

$$F_1 = y \cdot v_1 , \quad \ldots, \quad F_k = y \cdot v_k .$$

Эти функции независимы и коммутируют в том и только том случае, когда поля $v_1, \ldots, v_k$ линейно независимы и коммутируют на M. Последнее вытекает из тождества $\{F_i, F_j\} = y \cdot [v_i, v_j]$.

*) Здесь и далее через $f \cdot y$ обозначается спаривание ковектора f и вектора y.

Теорема 1 [1]. *Пусть M — связное, компактное, ориентируемое четномерное многообразие. Если гамильтонова натуральная система на T^*M имеет $k \geqslant (\dim M)/2$ независимых линейных интегралов, находящихся попарно в инволюции,* то $\chi(M) \geqslant 0$.

В частности, при $\dim M = 2$ линейный интеграл может быть лишь в тех случаях, когда M диффеоморфно сфере или тору. Доказательство теоремы 1 основано на использовании результатов Кобаяси [210] о действии коммутативных групп изометрий на римановых многообразиях. Поскольку M компактно, то все киллинговы поля $v_1, \ldots, v_k$ полны на M: их фазовые потоки g^α определены при всех значениях α. Каждая группа g^α изоморфна либо окружности $\mathbf{T}^1$ (если ее орбиты замкнуты), либо прямой $\mathbb{R}$ (если орбиты некомпактны). Поля Киллинга $v_1, \ldots, v_k$ независимы и коммутируют, поэтому на римановом многообразии M эффективно действует коммутативная группа Ли изометрий $G = \mathbf{T}^m \times \mathbb{R}^{k-m}$ $(0 \leqslant m \leqslant k)$. Эффективность действия означает, что лишь единичный элемент группы G оставляет на месте все точки M. Однако, если $\chi(M) < 0$, то $\dim G < n/2$ [210].

3. При $n = 2$ можно дать наглядное доказательство теоремы 1, основанное на свойствах индекса особых точек векторного поля. Напомним, что индексом изолированной особой точки x_* поля v (обозначается $\operatorname{ind}_v(x_*)$) называется число оборотов вектора $v(x)$ (отсчитываемых против часовой стрелки) при однократном обходе точки x вокруг x_* в отрицательном направлении.

При $\chi(M) < 0$ поле симметрий v имеет особые точки на M. Фазовый поток g_v^α является группой изометрий поверхности M, поэтому все особые точки x_k изолированы и имеют эллиптический тип. В частности, $\operatorname{ind}_v(x_k) = 1$. Из формулы Пуанкаре

$$\chi(M) = \sum \operatorname{ind}_v(x_k) \tag{6.3}$$

видно, что $\chi(M) > 0$. Получено противоречие.

Из формулы (6.3) следует, что на сфере $(\chi = 2)$ поле симметрий имеет ровно две особые точки, а на торе $(\chi = 0)$ их вообще нет.

4. Д. Л. Абраров [1] рассмотрел более общую задачу о наличии k инволютивных условных интегралов, линейных по импульсам; эти функции являются интегралами уравнений геодезических метрики Мопертюи $(ds)^2 = 2(h - V)T(dt)^2$. Метрика ds риманова внутри области $B_h = \{x : V(x) \leqslant h\}$, но имеет особенности при $h < \max\limits_M V$: длины кривых, лежащих на границе B_h, равны нулю, а длины кривых, расположенных вне B_h, чисто мнимы.

Теорема 2 [1]. *Пусть h — некритическое значение энергии, и на поверхности $\Sigma_h = \{H = h\}$ уравнения движения имеют $k \geqslant$*

$\geqslant (\dim M)/2$ *условно-линейных инволютивных интегралов. Тогда* $\chi(B_h) \geqslant 0$.

При $h > \max\limits_M V$ теорема 2 вытекает из теоремы 1. Пусть область B_h имеет непустую границу. Удвоим B_h, отождествив границы двух экземпляров области B_h. Тогда на $2B_h$ эффективно действует k-мерная группа Ли изометрий G (см. п. 2). Для завершения доказательства осталось воспользоваться известной из топологии формулой $\chi(2B) = 2\chi(B)$.

На самом же деле $2B_h$ не является римановым многообразием, поскольку $ds = 0$ на границе B_h. Чтобы избежать этой трудности, надо сначала отступить от края B_h на небольшое расстояние в метрике Мопертюи, а уже затем произвести склейку. Детали доказательства можно найти в работе [1].

§ 7. Топология пространства положений обратимой системы с нетривиальной группой симметрий

1. Многие результаты этой главы допускают существенное усиление, касающееся топологических препятствий к существованию нетривиальных групп симметрий.

Рассмотрим обратимую систему с двумя степенями свободы; пусть M — компактное пространство положений, T — кинетическая, а V — потенциальная энергия. Все эти объекты считаем аналитическими.

Пусть h — полная энергия системы, $h > \max\limits_M V$. Пусть v — ограничение гамильтонова поля, отвечающего гамильтониану $H = T + V$, на трехмерную аналитическую регулярную поверхность $\Sigma_h = \{H = h\}$. Через u обозначим аналитическое поле симметрий, определенное на Σ_h ($[u, v] = 0$).

Теорема 1. *Если род поверхности M больше единицы, то $u = \lambda v$, где $\lambda = \mathrm{const}$.*

Этот результат усиливает теоремы 1 и 2 § 1, так как любой интеграл, независимый с интегралом энергии, порождает нетривиальное поле симметрий. В частности, из теоремы 1 вытекает отсутствие многозначных аналитических интегралов. Основная трудность в доказательстве теоремы 1 состоит в том, чтобы установить линейную зависимость векторов u, v во всех точках Σ_h. Так как $v \neq 0$, то $u = \lambda v$. Известно (см. § 3 гл. II), что λ — интеграл гамильтоновой системы на Σ_h. Поскольку λ — аналитическая функция и род M больше единицы, то $\lambda = \mathrm{const}$ по теореме 2 из § 1.

2. Рассмотрим более простую задачу, когда $V \equiv \mathrm{const}$. Тогда система движется по геодезическим на M. Вводя изотермические координаты q_1, q_2, функцию Гамильтона можно привести к виду (см. п. 2 § 2) $H = \Lambda(q_1, q_2)(p_1^2 + p_2^2)/2$. При этом оператор дифференцирования вдоль гамильтонова поля v с гамильтонианом H становится равным

$$L_v = \Lambda p_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + \Lambda p_2 \frac{\partial}{\partial q_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}(p_1^2+p_2^2)\frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}(p_1^2+p_2^2)\frac{\partial}{\partial p_2} \,. \quad (7.1)$$

Пусть
$$L_u = Q_1 \frac{\partial}{\partial q_1} + Q_2 \frac{\partial}{\partial q_2} + P_1 \frac{\partial}{\partial p_1} + P_2 \frac{\partial}{\partial p_2} \quad (7.2)$$

— оператор дифференцирования вдоль поля симметрий u. Предположим, что функции Q_j и P_j аналитичны по импульсам p_1 и p_2.

Теорема 2. *Если род поверхности M больше единицы, то $u = \lambda v$, где λ — аналитическая функция от H.*

Этот результат формально не вытекает из теоремы 1, поскольку мы не предполагаем аналитичности поля u по координатам q_1, q_2. Доказательство теоремы 2 основано на методе Биркгофа (см. п. 2 § 2).

Разложим функции Q_j и P_j в ряды по однородным формам от импульсов: $Q_j = \sum\limits_{m\geqslant 0} Q_j^{(m)}$, $P_j = \sum\limits_{m\geqslant 0} P_j^{(m)}$.

Лемма 1. *Если операторы (7.1) и (7.2) коммутируют, то оператор (7.1) коммутирует с каждым из операторов*

$$L^{(0)} = P_1^{(0)} \frac{\partial}{\partial p_1} + P_2^{(0)} \frac{\partial}{\partial p_2} \,, \quad (7.3)$$

$$L^{(m)} = Q_1^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial q_1} + Q_2^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial q_2} + P_1^{(m)} \frac{\partial}{\partial p_1} + P_2^{(m)} \frac{\partial}{\partial p_2} \,, \quad m \geqslant 1 \,. \quad (7.4)$$

Это очевидное утверждение позволяет свести задачу об аналитическом поле симметрий к задаче о поле симметрий с однородными полиномиальными компонентами.

Лемма 2. *Предположим, что операторы (7.1) и (7.3) коммутируют. Тогда $P_1^{(0)} = P_2^{(0)} \equiv 0$.*

Заключение леммы 2 не зависит, разумеется, от рода поверхности M.

Итак, будем предполагать, что $P_i = P_i^{(m)}$, $Q_i = Q_i^{(m-1)}$, где $m \geqslant 1$. Положим $p_1 = 1$, $p_2 = i$. Тогда P_1 и P_2 становятся комплекснозначными функциями от q_1 и q_2. Обозначим их P_1^* и P_2^* соответственно.

Л е м м а 3. *$R = \Lambda(P_1^* + iP_2^*)$ — голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$, приравняем нулю коэффициенты при $\partial/\partial p_1$, $\partial/\partial p_2$ и положим затем $p_1 = 1$, $p_2 = i$. В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} &\Lambda\frac{\partial P_1^*}{\partial q_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}P_1^* + i\left(\Lambda\frac{\partial P_1^*}{\partial q_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}P_2^*\right) = 0\ , \\ &i\left(\Lambda\frac{\partial P_2^*}{\partial q_2} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}P_2^*\right) + \Lambda\frac{\partial P_2^*}{\partial q_1} + \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}P_1^* = 0\ . \end{aligned} \tag{7.5}$$

Из (7.5) вытекает равенство $\dfrac{\partial}{\partial q_1}\Lambda(P_1^* + iP_2^*) + i\dfrac{\partial}{\partial q_2}\Lambda(P_1^* + iP_2^*) = 0$, которое является критерием голоморфности функции $\Lambda(P_1^* + iP_2^*)$. Лемма доказана.

Л е м м а 4. *Справедливо равенство $R(z) = 0$.*

Действительно, пусть $z \to w(z)$ — голоморфная функция. Согласно лемме 2 § 2, имеем $R(z) = R(w(z))(w'(z))^{-m}$, где m — степень однородного многочлена $\Lambda(P_1 + iP_2)$.

Род поверхности M больше единицы, поэтому можно применить лемму 3 § 2, которая утверждает, что $R \equiv 0$. Что и требовалось доказать.

Итак, $P_1^* + iP_2^* = 0$. Из (7.5) получаем равенства $\dfrac{\partial P_1^*}{\partial q_1} + i\dfrac{\partial P_1^*}{\partial q_2} = 0$ и $\dfrac{\partial P_2^*}{\partial q_1} + i\dfrac{\partial P_2^*}{\partial q_2} = 0$. Следовательно, P_1^* и P_2^* — локальные голоморфные функции от $z = q_1 + iq_2$. Очевидно, для них имеет место заключение леммы 4: $P_1^* = P_2^* = 0$.

Согласно лемме 4 § 2, $P_1 = HP_1'$ и $P_2 = HP_2'$, где H — интеграл энергии.

Покажем теперь, что многочлены Q_1, Q_2 также делятся на многочлен H. Пусть Q_j^* — значение функции Q_j при $p_1 = 1$, $p_2 = i$.

Л е м м а 5. *$S = Q_1^* + iQ_2^*$ — голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$, приравняем нулю коэффициенты при $\partial/\partial q_1$, $\partial/\partial q_2$, положим $p_1 = 1$,

$p_2 = i$ и воспользуемся тождествами $P_1^* = P_2^* = 0$. В результате получим соотношения

$$\begin{aligned} Q_1^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + Q_2^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} - \Lambda\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - i\Lambda\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_2} = 0\,, \\ iQ_1^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + iQ_2^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} - \Lambda\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_1} - i\Lambda\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} = 0\,. \end{aligned} \tag{7.6}$$

Из (7.6) вытекает, что $\dfrac{\partial}{\partial q_1}(Q_1^* + iQ_2^*) + i\dfrac{\partial}{\partial q_2}(Q_1^* + iQ_2^*) = 0$. Следовательно, $S = Q_1^* + iQ_2^*$ — локальная голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$, что и требовалось доказать.

Согласно лемме 4, $S \equiv 0$. Но тогда из (7.6) получаем соотношения $\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{Q_1^*}{\Lambda} + i\dfrac{\partial}{\partial q_2}\dfrac{Q_1^*}{\Lambda} = 0$ и $\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{Q_2^*}{\Lambda} + i\dfrac{\partial}{\partial q_2}\dfrac{Q_2^*}{\Lambda} = 0$. Следовательно, Q_1^*/Λ и Q_2^*/Λ — локальные голоморфные функции от z. По лемме 4 они тождественно равны нулю. Применяя лемму 4 из § 2, получаем, что $Q_j = HQ_j'$.

Итак, $u = Hu'$. Множитель H — интеграл уравнений движения, поэтому u' также является полем симметрий. Однако его степень по импульсам на две единицы меньше степени m поля u. Индукцией по убыванию m сведем исходную задачу к задаче о наличии однородного поля симметрий степени $m = 0$ или $m = 1$.

Случай $m = 0$ охватывается леммой 2. При $m = 1$, очевидно, $Q_1 = Q_2 \equiv 0$. Пусть $P_j = \xi_j p_1 + \eta_j p_2$. Как было показано выше, $P_j^* = \xi_j + i\eta_j \equiv 0$. Следовательно, $\xi_j = \eta_j \equiv 0$. Поэтому при $m = 1$ поле симметрий обращается тождественно в нуль. Теорема 2 доказана полностью.

3. Топологические препятствия к существованию нетривиальных групп симметрий обратимых систем впервые получены автором в [106] (теорема 2). Там же сформулирована в виде гипотезы теорема 1. Эта теорема доказана С. В. Болотиным с помощью детального анализа семейства траекторий, двоякоасимптотических к периодическим траекториям из различных гомотопических классов. Более точно, доказано, что в предположениях теоремы 1 § 3 найдется замкнутая гиперболическая траектория с трансверсально пересекающимися асимптотическими поверхностями. Из этого результата вытекает, в частности, стохастизация фазового потока и, как следствие, отсутствие дополнительных интегралов и групп симметрий (см. по этому поводу гл. V).

Отметим еще работу А. Катка [208], в которой доказана положительность *топологической энтропии* геодезического потока на замкнутой гладкой двумерной поверхности с отрицательной эйлеровой характеристикой. Положительность энтропии свидетельствует о сложности поведения фазовых траекторий (см., например, [110]). Однако для перевода этого важного результата на язык теории интегрируемости гамильтоновых систем нужно дополнительное рассмотрение. Действительно, в § 1 приведен пример геодезического потока на гладкой сфере с $g > 1$ ручками, допускающего непостоянный гладкий интеграл. В этом примере энтропия сосредоточена в небольшой области фазового пространства. Было бы полезным связать вопрос о наличии нетривиальных полей симметрий с положительностью топологической энтропии.

§ 8. Симметрии геодезических потоков на торе

1. Пусть теперь поверхность M является двумерным тором $\mathbf{T}^2$, на котором введены угловые изотермические координаты $q_1, q_2 \mod 2\pi$. Оператор дифференцирования вдоль гамильтонова поля v имеет вид (7.1). Пусть u — векторное поле с оператором дифференцирования $L_u = Q_1\dfrac{\partial}{\partial q_1} + Q_2\dfrac{\partial}{\partial q_2} + P_1\dfrac{\partial}{\partial p_1} + P_2\dfrac{\partial}{\partial p_2}$. Если u — поле симметрий, то L_u и L_v, конечно, коммутируют.

Определение. *Если Q_1, Q_2 — многочлены от импульсов степени $n-1$, а P_1, P_2 — многочлены степени n, то поле u назовем однородным полем степени n.*

Степень однородного поля u будем обозначать $\deg\ u$. В частности, $\deg\ v = 2$. Поле симметрий u можно разложить в формальный ряд по однородным полям: $u = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots$ ($\deg\ u_k = k$, $k \geqslant 1$). Согласно лемме 1 из § 7, каждое из однородных полей u_k само является полем симметрий. Кроме того, $u_0 = 0$ (лемма 2 из § 7). Поэтому можно ограничиться рассмотрением лишь однородных полей симметрий положительной степени.

Если поле симметрий u гамильтоново, то $\omega(u, \cdot) = -d(F)$, где F — однозначная функция в фазовом пространстве. Если F — однородный многочлен по импульсам степени m, то $\deg\ u = m$. Поля u, v коммутируют, поэтому $\{H, F\} = \mathrm{const}$. Ввиду квадратичности гамильтониана эта константа равна нулю. Следовательно, гамильтониан F будет интегралом геодезического потока.

Мы назвали поле симметрий u локально гамильтоновым, если 1-форма $\omega(u, \cdot)$ замкнута, но не точна (см. § 3 гл. II). В этом случае уравнения геодезических допускают в качестве инварианта замкнутую 1-форму, которая называется многозначным интегралом.

Не следует думать, что поля симметрий задачи о геодезических всегда гамильтоновы (или локально гамильтоновы). Вот простой контрпример: если $\Lambda = \mathrm{const}$, то квадратичное векторное поле с оператором дифференцирования

$$p_2\frac{\partial}{\partial q_1} - p_1\frac{\partial}{\partial q_2} \tag{8.1}$$

является полем симметрий, однако оно не является даже локально гамильтоновым относительно стандартной симплектической структуры ω.

Теорема 1 [107a)]. *Если $M = \mathbf{T}^2$, то любое поле симметрий первой степени гамильтоново.*

Оно порождается линейным интегралом и поэтому является нётеровым.

Теорема 2 [107a)]. *Если гауссова кривизна метрики на торе не равна тождественно нулю, то любое поле симметрий второй степени гамильтоново.*

Аналитический критерий евклидовости метрики на торе состоит в том, что $\Lambda = \mathrm{const}$. Как показывает пример поля (8.1), предположение $\Lambda \neq \mathrm{const}$ в теореме 2 существенно.

Теоремы 1 и 2 описывают структуру полей симметрий степени $\leqslant 2$. Для полей симметрий степени $\leqslant 3$ теорема 2 не справедлива. Действительно, пусть Λ — непостоянная периодическая функция, зависящая только от угловой переменной q_2. Тогда векторное поле u первой степени, заданное уравнениями $q_1' = 1$, $q_2' = 0$, $p_1' = 0$, $p_2' = 0$, является полем симметрий. Оно гамильтоново, однако поле третьей степени Hu (H — гамильтониан геодезического потока), также являющееся полем симметрий, уже не гамильтоново.

Задача о структуре симметрий геодезического потока на сфере более сложная и пока не изучалась. В следующем параграфе рассмотрен упрощенный ее вариант: если геодезический поток на двумерной поверхности допускает полиномиальное поле симметрий степени n, не коллинеарное полю v, то существует ли дополнительный по импульсам интеграл степени n? Практически во всех случаях ответ положительный.

2. Усложним задачу, заменив стандартную симплектическую структуру $\omega = \sum dp_k \wedge dq_k$ на фазовом пространстве T^* замкнутой невырожденной 2-формой $\omega + \varphi$, где φ — 2-форма на M. В локальных координатах q_1, q_2 она имеет вид $\lambda(q_1, q_2)dq_1 \wedge dq_2$.

Если заменить ω на $\omega + \varphi$, не меняя гамильтониана, получим следующие уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot q_1 &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & \dot q_2 &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, \\ \dot p_1 &= -\frac{\partial H}{\partial q_1} + \lambda\frac{\partial H}{\partial p_2}, & \dot p_2 &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} - \lambda\frac{\partial H}{\partial p_1}. \end{aligned} \tag{8.2}$$

Слагаемые в (8.2), содержащие λ, — гироскопические силы.

Уравнения (8.2) допускают интеграл энергии H. Задача о наличии других интегралов, полиномиальных по импульсам p_1 и p_2, рассмотрена С. В. Болотиным (см. § 4). В частности, для двумерного тора необходимое условие существования дополнительного полиномиального интеграла сводится к равенству

$$\int_{T^2} \lambda dq_1 dq_2 = 0. \tag{8.3}$$

В связи со сказанным, естественно поставить более общую задачу об условиях существования векторных полей симметрий с полиномиальными компонентами для уравнений (8.2). В отличие от обратимого случая ($\lambda = 0$), здесь поле симметрий уже не будет однородным. Его можно представить в виде конечной суммы однородных полей $u = u_m + u_{m-1} + \ldots$, $\deg\ u_k = k$, расположенных в порядке убывания степени. Степенью поля u назовем величину $\deg\ u_m = m$.

Ясно, что u_m — поле симметрий обратимой системы. Это простое замечание позволяет использовать теоремы 1 и 2.

Т е о р е м а 3 [107а]. *Ненулевое поле симметрий первой степени всегда локально гамильтоново. Оно будет гамильтоновым лишь при условии* (8.3).

В случае $\deg u \geqslant 2$ ситуация иная. Справедлива

Т е о р е м а 4 [107а]. *Предположим, что уравнения Гамильтона* (8.2) *допускают поле симметрий u степени $n \geqslant 2$, причем старшие однородные части полей v и u линейно независимы при $p_1 = 1$, $p_2 = i$ ($i^2 = -1$). Тогда имеет место* (8.3).

По-видимому, в теореме 4 достаточно потребовать независимости полей u и v. Пусть поле u гамильтоново с гамильтонианом $F = F_m + F_{m-1} + \ldots$ Тогда условие линейной независимости векторов v и u_m в точке $p_1 = 1$, $p_2 = i$ эквивалентно тому, что полином F_m не делится на H.

Ниже даны доказательства теорем 1–4, основанные на методе Биркгофа.

3. Согласно лемме 3 из § 7, $\Lambda(P_1^* + iP_2^*)$ — голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$.

Так как Λ, P_1^*, P_2^* — гладкие комплекснозначные функции на торе $\mathbf{T}^2 = \{q_1, q_2 \mod 2\pi\}$, то они ограничены. Следовательно, по теореме Лиувилля,

$$\Lambda(P_1^* + iP_2^*) = \gamma_1 + i\gamma_2, \tag{8.4}$$

где γ_1, γ_2 — некоторые вещественные постоянные.

Л е м м а 1. *Имеет место соотношение* $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

Для доказательства вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$ и приравняем нулю коэффициенты при $\partial/\partial q_1$ и $\partial/\partial q_2$. В результате получим соотношения

$$p_1 \sum Q_k \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} - \Lambda \sum p_k \frac{\partial Q_1}{\partial q_k} + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial Q_1}{\partial p_k} + P_1 \Lambda = 0, \quad (8.5)$$

$$p_2 \sum Q_k \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} - \Lambda \sum p_k \frac{\partial Q_2}{\partial q_k} + \frac{p_1^2 + p_2^2}{2} \sum \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} \frac{\partial Q_2}{\partial p_k} + P_2 \Lambda = 0. \quad (8.6)$$

Индекс суммирования k принимает значения 1 и 2.

Полагая в (8.5) и (8.6) $p_1 = 1$, $p_2 = i$, приходим к равенствам

$$\sum Q_k^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_k} + P_1^* \Lambda - \Lambda \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - i\Lambda \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_2} = 0, \quad (8.7)$$

$$i \sum Q_k^* \frac{\partial \Lambda^*}{\partial q_k} + P_2^* \Lambda - \Lambda \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_1} - i\Lambda \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} = 0. \quad (8.8)$$

Умножим (8.8) на i и сложим с (8.7). В результате получим $P_1^* + iP_2^* = \dfrac{\partial}{\partial q_1}(Q_1^* + iQ_2^*) + i\dfrac{\partial}{\partial q_2}(Q_1^* + iQ_2^*)$, или, учитывая (8.4),

$$\frac{\gamma_1 + i\gamma_2}{\Lambda} = \frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1^* + iQ_2^*) + i\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_1^* + iQ_2^*). \quad (8.9)$$

Усредняя по тору, приходим к равенству

$$(\gamma_1 + i\gamma_2) \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dq_1 dq_2}{\Lambda} = 0.$$

Следовательно, $\gamma_1 + i\gamma_2 = 0$. Что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Имеет место соотношение $Q_1^* + iQ_2^* = c_1 + ic_2$, где c_1, c_2 — вещественные постоянные.*

Действительно, равенство (8.9), с учетом заключения леммы 1, является критерием голоморфности функции $Q_1^* + iQ_2^*$. Остается воспользоваться теоремой Лиувилля.

Лемма 3. *Имеет место соотношение $P_1^* = P_2^* = 0$.*

Для доказательства вычислим коммутатор $[L_u, L_v]$ и приравняем нулю коэффициенты при $\partial/\partial p_1$ и $\partial/\partial p_2$. В результате получим соотношения

$$-\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)\left(Q_1\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1^2}+Q_2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\partial q_2}\right)-\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\sum P_k p_k - \\ -\Lambda\sum p_k\frac{\partial P_1}{\partial q_k}+\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)\sum\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}\frac{\partial P_1}{\partial p_k}=0, \quad (8.10)$$

$$-\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)\left(Q_1\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\partial q_2}+Q_2\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_2^2}\right)-\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\sum P_k p_k - \\ -\Lambda\sum p_k\frac{\partial P_2}{\partial q_k}+\frac{1}{2}(p_1^2+p_2^2)\sum\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}\frac{\partial P_2}{\partial p_k}=0. \quad (8.11)$$

Положим $p_1 = 1$, $p_2 = i$ и воспользуемся леммой 1. Из (8.10) и (8.11) вытекают равенства $\dfrac{\partial P_k^*}{\partial q_1}+i\dfrac{\partial P_k^*}{\partial q_2}=0$ ($k=1,2$). Следовательно, P_k^* — голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$. По теореме Лиувилля, $P_k^* = \mu_k = \text{const}$ ($\mu_k \in \mathbb{C}$).

Из соотношения (8.7) с учетом леммы 2 легко выводится равенство $\mu_1 M = \dfrac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1}+\dfrac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2}$, где $M = 1/\Lambda$. Следовательно, $\mu_1\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} M\,dq_1\,dq_2 = 0$, откуда $\mu_1 = 0$. Аналогично выводится $\mu_2 = 0$. Лемма 3 доказана.

Одновременно мы получили соотношение

$$\frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1}+\frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2}=0, \quad (8.12)$$

которое будет использовано в дальнейшем.

Положим $Q_1^* = \Phi_1 + i\Psi_1$, $Q_2^* = \Phi_2 + i\Psi_2$, где Φ_k, Ψ_k — однозначные функции на $\mathbf{T}^2$. В силу леммы 2,

$$\Phi_1-\Psi_2=c_1, \quad \Psi_1+\Phi_2=c_2. \quad (8.13)$$

Равенство (8.12) распадается на два:

$$\frac{\partial\Phi_1 M}{\partial q_1}+\frac{\partial\Phi_2 M}{\partial q_2}=0, \quad \frac{\partial\Psi_1 M}{\partial q_1}+\frac{\partial\Psi_2 M}{\partial q_2}=0. \quad (8.14)$$

Лемма 4. *Функция $\sigma = \Psi_1 - \Phi_2$ удовлетворяет уравнению*

$$2c_1\frac{\partial^2 M}{\partial q_1\partial q_2}=c_2\left(\frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2}-\frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2}\right)+\Delta(\sigma M), \quad (8.15)$$

где Δ — оператор Лапласа.

6 Козлов В. В.

Уравнение (8.15) просто выводится из (8.13) и (8.14). Оно играет существенную роль в дальнейшем рассмотрении.

Из леммы 4 § 2 и леммы 3 вытекает, что

$$P_i = (p_1^2 + p_2^2)K_i, \quad i = 1, 2, \tag{8.16}$$

где K_i — полиномы по импульсам степени $n-2$. Если бы нам удалось доказать, что $Q_1^* = Q_2^* = 0$ (ср. с заключением леммы 2), то поле симметрий u можно было бы представить в виде произведения Hw, где w — поле симметрий степени $n-2$. По индукции задача об однородном поле симметрий свелась бы к задаче о поле симметрий степени $n \leqslant 2$. К сожалению, в общем случае $Q_k^* \neq 0$.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + K_1^* + iK_2^* = \nu_1 + i\nu_2 = \mathrm{const}. \tag{8.17}$$

Доказательство. Ясно, что

$$\frac{\partial P_i}{\partial q_j} = (p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial K_i}{\partial q_j}, \quad \frac{\partial P_i}{\partial p_j} = (p_1^2 + p_2^2)\frac{\partial K_i}{\partial p_j} + 2p_j K_i. \tag{8.18}$$

Подставляя (8.16) и (8.18) в уравнения (8.10) и (8.11), сокращая на $p_1^2 + p_2^2$ и подставляя затем $p_1 = 1$, $p_2 = i$, получим два равенства:

$$\begin{gathered}
\frac{Q_1^*}{2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1^2} + \frac{Q_2^*}{2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\partial q_2} + iK_2^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + \Lambda\frac{\partial K_1^*}{\partial q_1} + i\Lambda\frac{\partial K_1^*}{\partial q_2} - iK_1^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0,\\
\frac{Q_1^*}{2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\partial q_2} + \frac{Q_2^*}{2}\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_2^2} + K_1^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} + \Lambda\frac{\partial K_2^*}{\partial q_1} + i\Lambda\frac{\partial K_2^*}{\partial q_2} - K_2^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} = 0.
\end{gathered} \tag{8.19}$$

Полагая снова $M = 1/\Lambda$, преобразуем сумму

$$Q_1^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1^2} + Q_2^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\partial q_2} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right) - \left(\frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2}\right)\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}.$$

В силу (8.12) последнее слагаемое равно нулю. Аналогично,

$$Q_1^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_1\partial q_2} + Q_2^* M\frac{\partial^2\Lambda}{\partial q_2^2} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right).$$

Умножим первое уравнение (8.19) на M, второе на iM, сложим и воспользуемся только что полученными соотношениями. В результате придем к равенству

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + iQ_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + iQ_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial q_1}(K_1^* + iK_2^*) + i\frac{\partial}{\partial q_2}(K_1^* + iK_2^*) = 0. \quad (8.20)$$

Преобразуем сумму

$$\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right) + i\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) = \\ = i\frac{\partial}{\partial q_1}\left[(Q_1^* + iQ_2^*)M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} - iQ_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right] - \\ - i\frac{\partial}{\partial q_2}\left[(Q_1^* + iQ_2^*)M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} - Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right] = \\ = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) + i\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right) - \\ - i(c_1 + ic_2)\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)\right]. \quad (8.21)$$

Здесь было использовано тождество $Q_1^* + iQ_2^* = c_1 + ic_2$ (лемма 2). Так как $M\Lambda \equiv 1$, то последнее слагаемое в (8.21) равно нулю. С учетом этого замечания сумма первых двух слагаемых в равенстве (8.20) принимает вид

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) + \frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right).$$

Однако, с учетом (8.12),

$$Q_1^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + Q_2^* M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = \frac{\partial Q_1^* M\Lambda}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^* M\Lambda}{\partial q_2} - \\ - \Lambda\left(\frac{\partial Q_1^* M}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^* M}{\partial q_2}\right) = \frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}. \quad (8.22)$$

Итак, получаем окончательно

$$\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + K_1^* + iK_2^*\right] + \\ + i\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + K_1^* + iK_2^*\right] = 0.$$

6*

Следовательно, по теореме Коши — Римана, $\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}+$ $+K_1^*+iK_2^*$ — голоморфная функция от q_1+iq_2. Ввиду ограниченности, она постоянна. Лемма доказана.

Пусть F — полином по p_1, p_2. Для краткости $\left(\frac{\partial F}{\partial p_k}\right)^*$ будем обозначать $\frac{\partial F^*}{\partial p_k}$. Очевидно, $\frac{\partial^2 F^*}{\partial p_k \partial q_j}=\frac{\partial^2 F^*}{\partial q_j \partial p_k}$.

Лемма 6. *Имеет место соотношение* $\nu_1=\nu_2=0$.

Используя (8.16), продифференцируем (8.5) по p_1, а (8.6) — по p_2, и подставим $p_1=1$, $p_2=i$. В результате получим соотношения

$$\sum Q_k^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}+\sum\frac{\partial Q_k^*}{\partial p_1}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}+\sum\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_k}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}+$$

$$+2K_1^*\Lambda-\Lambda\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}-\Lambda\frac{\partial^2 Q_1^*}{\partial q_1\partial p_1}-i\Lambda\frac{\partial^2 Q_1^*}{\partial q_2\partial p_1}=0, \quad (8.23)$$

$$\sum Q_k^*\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}+i\sum\frac{\partial Q_k^*}{\partial p_2}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}+i\sum\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_k}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_k}+$$

$$+2iK_2^*\Lambda-\Lambda\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}-i\Lambda\frac{\partial^2 Q_2^*}{\partial q_2\partial p_2}-\Lambda\frac{\partial^2 Q_2^*}{\partial q_1\partial p_2}=0. \quad (8.24)$$

Так как Q_1 и Q_2 — однородные многочлены по импульсам степени $n-1$, то по теореме Эйлера $\sum\limits_j\frac{\partial Q_k}{\partial p_j}p_j=(n-1)Q_k$ $(k=1,2)$. Подставляя $p_1=1$, $p_2=i$, приходим к соотношениям

$$\frac{\partial Q_k^*}{\partial p_1}+i\frac{\partial Q_k^*}{\partial p_2}=(n-1)Q_k^*, \quad k=1,2. \quad (8.25)$$

Умножим уравнения (8.23) и (8.24) на M, сложим их и воспользуемся формулами (8.22) и (8.25) После несложных преобразований получим соотношение

$$K_1^*+iK_2^*=-\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}-\frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}-\frac{n-1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1}-\frac{n-1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2}+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right)+\frac{i}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1}+\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2}M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1}+i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1}\right)-\frac{1}{2}M\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\left(\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2}+i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right). \quad (8.26)$$

Положим $r = \dfrac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} - \dfrac{\partial Q_2^*}{\partial p_1}$. С учетом (8.25) получим соотношения

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2} = \frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} - i\left(\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2}\right) - ir =$$
$$= (n-1)Q_1^* - i(n-1)Q_2^* - ir,$$

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_1} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} = (n-1)Q_1^* - ir,$$
$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} + i\frac{\partial Q_2^*}{\partial p_2} = (n-1)Q_2^* + r.$$

Подставляя эти соотношения в (8.26) и используя (8.22), получаем:

$$K_1^* + iK_2^* = -\frac{1}{2}\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} - \frac{1}{2}\frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} -$$
$$- \frac{n-1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}(Q_1^* + iQ_2^*) + \frac{n-1}{2}i\frac{\partial}{\partial q_2}(Q_1^* + iQ_2^*) -$$
$$- \frac{i}{2}\frac{\partial r}{\partial q_1} + \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial q_2} + \frac{i}{2}M\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}r - \frac{1}{2}M\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}r. \qquad (8.27)$$

По лемме 2, $Q_1^* + iQ_2^* \equiv \text{const}$. Легко проверить, что сумма последних четырех слагаемых в (8.27) равна $-\dfrac{i}{2}\Lambda\left(\dfrac{\partial rM}{\partial q_1} + i\dfrac{\partial rM}{\partial q_2}\right)$. В итоге равенство (8.27), с учетом (8.17), принимает вид $-\dfrac{i}{2}\Lambda\left(\dfrac{\partial rM}{\partial q_1} + i\dfrac{\partial rM}{\partial q_2}\right) = \nu_1 + i\nu_2$, или $-\dfrac{i}{2}\left(\dfrac{\partial rM}{\partial q_1} + i\dfrac{\partial rM}{\partial q_2}\right) = (\nu_1 + i\nu_2)M$. Усредняя по двумерному тору, получаем соотношение

$$\frac{\nu_1 + i\nu_2}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} M\,dq_1 dq_2 = 0.$$

Поскольку $M > 0$, то $\nu_1 = \nu_2 = 0$. Лемма доказана.

При этом мы получили равенство $\dfrac{\partial rM}{\partial q_1} + i\dfrac{\partial rM}{\partial q_2} = 0$, которое является условием голоморфности функции rM. По теореме Лиувилля, $rM = c_3 + ic_4$.

Итак, справедлива

Лемма 7. *Имеет место соотношение*

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} - \frac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} = (c_3 + ic_4)\Lambda. \qquad (8.28)$$

Отметим наконец, что равенство (8.17) (с учетом заключения леммы 6) можно переписать в эквивалентном виде

$$\frac{\partial Q_1^*}{\partial q_1} + \frac{\partial Q_2^*}{\partial q_2} + \frac{\partial P_1^*}{\partial p_1} + \frac{\partial P_2^*}{\partial p_2} = 0. \tag{8.29}$$

Подведем итоги выкладок п. 3:

$$P_1^* = P_2^* = 0, \quad Q_1^* + iQ_2^* = c_1 + ic_2;$$

кроме того, функции Q_1^* и Q_2^* удовлетворяют уравнениям (8.12), (8.15), (8.28) и (8.29).

4. Доказательство теоремы 1. При $n = 1$ функции Q_k не зависят от импульсов (так что $Q_k^* = Q_k$), а

$$P_k = a_k p_1 + b_k p_2, \quad k = 1, 2.$$

В силу леммы 3, $P_k^* = a_k + ib_k \equiv 0$. Следовательно, $a_k = b_k \equiv 0$ и $P_k \equiv 0$ $(k = 1, 2)$.

Так как Q_k — вещественные функции, то, согласно лемме 2, $Q_k \equiv c_k = \text{const}$ $(k = 1, 2)$.

Поле u с оператором дифференцирования $L_u = c_1 \dfrac{\partial}{\partial q_1} + c_2 \dfrac{\partial}{\partial q_2}$ гамильтоново: гамильтонианом служит линейная функция $F = c_1 p_1 + c_2 p_2$, которая является интегралом уравнений движения. Теорема 1 доказана.

В силу (8.12), функция $M = 1/\Lambda$ удовлетворяет уравнению $c_1 \dfrac{\partial M}{\partial q_1} + c_2 \dfrac{\partial M}{\partial q_2} = 0$. Поле u ненулевое, поэтому $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Если отношение c_1/c_2 иррационально, то $M \equiv \text{const}$. Пусть $c_1/c_2 = k/l$, где k, l — взаимно простые целые числа. В этом случае M есть функция только от переменной

$$\varphi_1 = lq_1 - kq_2. \tag{8.30}$$

По теореме Безу, найдутся два целых числа r, s, для которых $kr + ls = 1$. Положим

$$\varphi_2 = rq_1 + sq_2. \tag{8.31}$$

Соотношения (8.30), (8.31) задают автоморфизм двумерного тора. Расширяя это преобразование до канонического, приходим к случаю, когда гамильтониан H не зависит от угловой координаты φ_2. Таким образом, если имеется нетривиальное поле симметрий первой степени, то имеется скрытая циклическая координата.

5. Доказательство теоремы 2. При $n = 2$ функции Q_1, Q_2 линейны по импульсам: $Q_k = a_k p_1 + b_k p_2$, $(k = 1, 2)$. Ясно, что $\dfrac{\partial Q_1^*}{\partial p_2} = b_1$, $\dfrac{\partial Q_2^*}{\partial p_1} = a_2$. Следовательно, $\sigma = b_1 - a_2$, где σ — функция из леммы 4. Согласно (8.28), имеем $\sigma M = c_3 + ic_4 \equiv \mathrm{const}$, $\Delta(\sigma M) = 0$. Таким образом, уравнение (8.15) упрощается:

$$2c_1 \frac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} = c_2 \left(\frac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} - \frac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} \right). \tag{8.32}$$

Предположим, что $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ (случай $c_1 = c_2 = 0$ будет рассмотрен ниже). Воспользуемся методом Фурье. Пусть

$$M = \sum M_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)}, \quad (m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2.$$

Тогда из (8.32) получим цепочку соотношений

$$[2c_1 m_1 m_2 - c_2(m_1^2 - m_2^2)] M_{m_1 m_2} = 0. \tag{8.33}$$

Рассмотрим множество $B = \{(m_1, m_2) \in \mathbb{Z}^2 : M_{m_1 m_2} \neq 0\}$. Ввиду (8.33), для точек из B имеет место равенство $\dfrac{m_1 m_2}{m_1^2 - m_2^2} \equiv \mathrm{const}$. Пусть $(n_1,\, n_2)$ — еще одна точка из B. Так как $\dfrac{m_1 m_2}{m_1^2 - m_2^2} = \dfrac{n_1 n_2}{n_1^2 - n_2^2}$, то либо $m_1 n_2 - m_2 n_1 = 0$, либо $m_1 n_1 + m_2 n_2 = 0$.

В первом случае точки лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, а во втором случае — на некоторых двух прямых l_1, l_2, ортогонально пересекающихся в начале координат.

Пусть $(m_1^0, m_2^0) \neq (0,0)$ — точка из целочисленной решетки $\mathbb{Z}^2$, лежащая на l_1 и ближайшая к началу координат. Ясно, что все точки множества $l_1 \cap \mathbb{Z}^2$ имеют вид

$$(m_1, m_2) = (\lambda m_1^0, \lambda m_2^0), \quad \lambda \in \mathbb{Z}.$$

Так как $(m_2^0, -m_1^0)$ — ближайшая к началу координат точка из $(l_2 \cap \cap \mathbb{Z}^2) \setminus \{(0,0)\}$, то все точки $l_2 \cap \mathbb{Z}^2$ имеют вид $(m_1, m_2) = (\lambda m_2^0, \lambda m_1^0)$, $\lambda \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} M &= \sum_{(m_1, m_2) \in l_1} M_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} + \sum_{(m_1, m_2) \in l_2} M_{m_1 m_2} e^{i(m_1 q_1 + m_2 q_2)} = \\ &= \sum_{\lambda} M_{\lambda m_1^0, \lambda m_2^0} e^{i\lambda(m_1^0 q_1 + m_2^0 q_2)} + \sum_{\lambda} M_{\lambda m_2^0, -\lambda m_1^0} e^{i\lambda(m_2^0 q_1 - m_1^0 q_2)} = \\ &= f(m_1^0 q_1 + m_2^0 q_2) + g(m_2^0 q_1 - m_1^0 q_2), \end{aligned}$$

где f, g — некоторые 2π-периодические функции.

Перейдем к новым угловым координатам x_1, $x_2 \bmod 2\pi$ по формулам $x_1 = m_1^0 q_1 + m_2^0 q_2$, $x_2 = m_2^0 q_1 - m_1^0 q_2$. Расширим это преобразование до канонического $(q,p) \to (x,y)$, полагая

$$[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2]y_1 = m_1^0 p_1 + m_2^0 p_2,$$
$$[(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2]y_2 = m_2^0 p_1 - m_1^0 p_2.$$

В новых переменных x, y гамильтониан примет вид

$$H = \frac{(m_1^0)^2 + (m_2^0)^2}{2[f(x_1) + g(x_2)]}(y_1^2 + y_2^2). \tag{8.34}$$

Таким образом, переменные x, y разделяются. Функция (8.34) — гамильтониан Лиувиллевой системы с двумя степенями свободы. Уравнение (8.32) появилось в работе [214] в связи с задачей о наличии квадратичного интеграла.

Итак, можно считать, что $M = F(q_1) + G(q_2)$, где F, G — 2π-периодические координаты. Кроме того, в соответствии с предположением теоремы 2, $M \neq \text{const}$.

Уравнение (8.32) дает нам, что $c_2(F'' - G'') = 0$ (здесь штрих обозначает производную функции одной переменной). Функции F и G периодичны и хотя бы одна из них не постоянна, поэтому, очевидно, $c_2 = 0$. В соответствии с заключением леммы 2,

$$a_1 - b_2 = c_1, \quad a_2 + b_1 = 0. \tag{8.35}$$

Кроме того, $\sigma M = c_3 + ic_4 = \text{const}$. Функция $\sigma = b_1 - a_2$ вещественна, поэтому $c_4 = 0$. Учитывая (8.35), заключаем, что

$$c_3 = -2a_2 M = 2b_1 M. \tag{8.36}$$

Воспользуемся теперь равенством (8.12). Из него вытекают соотношения $\dfrac{\partial M a_1}{\partial q_1} + \dfrac{\partial M a_2}{\partial q_2} = 0$ и $\dfrac{\partial M b_1}{\partial q_1} + \dfrac{\partial M b_2}{\partial q_2} = 0$. Учитывая (8.36), приходим к равенствам

$$Mb_2 = \varphi_1(q_1), \quad Ma_1 = \varphi_2(q_2), \tag{8.37}$$

где φ_1, φ_2 — периодические функции одного переменного.

Используя первое равенство (8.35), получаем цепочку равенств

$$c_1 F + c_1 G = c_1 M = (a_1 - b_2)M = \varphi_2(q_2) - \varphi_1(q_1),$$

откуда $\varphi_1 = -c_1 F + c_5$, $\varphi_2 = c_1 G + c_5$, где c_5 — некоторая постоянная, которую можно считать равной нулю. Действительно, положим $F = \widetilde{F} + c_5/c_1$, $G = \widetilde{G} - c_5/c_1$. Тогда

$$\varphi_1 = -c_1\widetilde{F}, \quad \varphi_2 = c_1\widetilde{G}; \quad \widetilde{F} + \widetilde{G} = F + G.$$

Вспоминая, что $M = 1/\Lambda$, из (8.36) и (8.37) получаем искомые равенства

$$a_1 = c_1 G\Lambda,\ a_2 = -c_0\Lambda;\ b_1 = c_0\Lambda,\ b_2 = -c_1 F\Lambda;\ c_0 = c_3/2. \tag{8.38}$$

Воспользуемся, наконец, равенством (8.17) и заключением леммы 6. Получим $\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1 + ib_1) + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial q_2}(a_2 + ib_2) + K_1^* + iK_2^* = 0$. Так как $n = 2$, то K_1^* и K_2^* — вещественные функции. Следовательно,

$$\begin{aligned} K_1^* &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial a_2}{\partial q_2}\right) = \frac{c_0}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} - \frac{1}{2}c_1 G\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}, \\ K_2^* &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial b_1}{\partial q_1} + \frac{\partial b_2}{\partial q_2}\right) = -\frac{c_0}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + \frac{1}{2}c_1 F\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}. \end{aligned} \tag{8.39}$$

Равенства (8.38) и (8.39) приводят к окончательным формулам для поля симметрий u:

$$\begin{aligned} q_1' &= c_1 G\Lambda p_1 + c_0\Lambda p_2\,, \\ q_2' &= -c_0\Lambda p_1 - c_1 F\Lambda p_2\,, \\ p_1' &= -\frac{1}{2}\left(c_1 G\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} - c_0\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\right)(p_1^2 + p_2^2)\,, \\ p_2' &= \ \ \frac{1}{2}\left(c_1 F\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} - c_0\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\right)(p_1^2 + p_2^2)\,. \end{aligned} \tag{8.40}$$

Следовательно, поле u можно представить в виде суммы двух полей: $c_1 u_1 + c_0 u_2$. Легко проверить, что u_1 — гамильтоново поле симметрий с гамильтонианом $\Phi = \dfrac{Gp_1^2 - Fp_2^2}{2(F+G)}$.

Поле u_2 также должно быть полем симметрий. Легко проверить, что условием коммутирования полей v и u_2 является

$$\Lambda\Delta\Lambda - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\right)^2 - \left(\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\right)^2 = 0. \tag{8.41}$$

Так как $\Lambda > 0$, то можно положить $N = \ln\Lambda$. Уравнение (8.41) эквивалентно уравнению $\Delta N = 0$. Ограниченная гармоническая функция постоянна, поэтому $\Lambda = \mathrm{const}$. Следовательно, если Λ — не постоянная функция, то $c_0 = 0$.

Нам осталось рассмотреть оставшийся вырожденный случай $c_1 = c_2 = 0$. Покажем, что при этом поле симметрий коллинеарно гамильтонову полю v. Действительно, соотношение $Q_1^* + iQ_2^* = 0$ приводит к равенствам

$$a_1 - b_2 = 0\,, \quad a_2 + b_1 = 0. \tag{8.42}$$

С учетом соотношений $P_1^* = P_2^* = 0$ получаем, что функции Q_k и P_k имеют следующий вид:

$$Q_1 = a_1 p_1 - a_2 p_2, \quad Q_2 = a_2 p_1 + a_1 p_2;$$
$$P_k = \xi_k (p_1^2 + p_2^2), \qquad k = 1, 2.$$

Далее, равенства (8.29) и (8.42) дают нам, что

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial a_2}{\partial q_2} + 2\xi_1 = 0, \qquad \frac{\partial a_1}{\partial q_2} - \frac{\partial a_2}{\partial q_1} + 2\xi_2 = 0.$$

Кроме того, из (8.28) и (8.42) получаем соотношение

$$a_2 = \alpha_2 \Lambda, \quad \alpha_2 = \mathrm{const}. \tag{8.43}$$

Условие коммутирования полей u и v приводит к уравнениям (см. (8.12)) $\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{a_1}{\Lambda} + \dfrac{\partial}{\partial q_2}\dfrac{a_2}{\Lambda} = 0$ и $-\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{a_2}{\Lambda} + \dfrac{\partial}{\partial q_2}\dfrac{a_1}{\Lambda} = 0$. С учетом (8.43), они приводятся к виду $\dfrac{\partial}{\partial q_1}\dfrac{a_1}{\Lambda} = \dfrac{\partial}{\partial q_2}\dfrac{a_1}{\Lambda} = 0$. Следовательно, $a_1 = \alpha_1 \Lambda$, где $\alpha_1 = \mathrm{const}$.

Таким образом, поле симметрий u имеет вид

$$\begin{aligned} q_1' &= \Lambda(\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2), \\ q_2' &= \Lambda(\alpha_2 p_1 + \alpha_1 p_2), \\ p_1' &= -\frac{1}{2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + \alpha_2 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2}\right)(p_1^2 + p_2^2), \\ p_2' &= -\frac{1}{2}\left(\alpha_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} - \alpha_2 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}\right)(p_1^2 + p_2^2). \end{aligned} \tag{8.44}$$

Слагаемые, содержащие α_1, дают поле, пропорциональное исходному полю v. Поэтому можно положить $\alpha_1 = 0$. Но тогда (8.44) совпадет с полем (8.40), в котором надо положить $c_1 = 0$. Однако, как показано выше, оно коммутирует с полем v лишь при $\alpha_2 = 0$.

Теорема 2 доказана.

6. Доказательство теоремы 3.

С учетом результатов п. 4 поле симметрий первой степени необратимой системы имеет вид

$$q_1' = c_1, \quad q_2' = c_2, \quad p_1' = \xi_1, \quad p_2' = \xi_2, \tag{8.45}$$

где c_1, c_2 — некоторые постоянные, ξ_1, ξ_2 — функции на двумерном торе. При этом, согласно п. 4, функция Λ удовлетворяет уравнению $c_1 \dfrac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + c_2 \dfrac{\partial \Lambda}{\partial q_2} = 0$.

Легко видеть, что условия коммутирования исходного гамильтонова векторного поля v и поля (8.45) приводят к равенствам

$$\zeta_1 = \zeta_2 = 0, \quad c_1\frac{\partial\lambda}{\partial q_1} + c_2\frac{\partial\lambda}{\partial q_2} = 0.$$

Таким образом, вид поля симметрий первой степени в необратимом и обратимом случаях один и тот же; при этом функции λ и Λ удовлетворяют одному и тому же уравнению. Если c_1/c_2 иррационально, то $\Lambda = \mathrm{const}$ и $\lambda = \mathrm{const}$. В противном случае (т. е. $c_1/c_2 = k/l$, где $k, l \in \mathbb{Z}$) можно перейти к новым угловым координатам φ_1 и φ_2 по формулам (8.30) и (8.31). Ясно, что правые части уравнений (8.2) не будут зависеть от координаты φ_2, и поле симметрий примет простейший вид

$$\varphi_1' = 0, \quad \varphi_2' = 1, \quad \psi_1' = 0, \quad \psi_2' = 0, \tag{8.46}$$

здесь ψ_1, ψ_2 — канонические переменные, сопряженные с φ_1, φ_2. Является ли поле (8.46) гамильтоновым? Эта задача сводится к разрешимости уравнений (см. (8.2))

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}, & 1 &= \frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}, \\ 0 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_1} + \lambda(\varphi_1)\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_2}, & 0 &= -\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi_2} - \lambda(\varphi_1)\frac{\partial\Phi}{\partial\psi_1}. \end{aligned} \tag{8.47}$$

Очевидно, $\Phi = \psi_2 + a$, где a — пока не известная функция на торе $\mathbf{T}^2 = \{\varphi_1, \varphi_2 \mod 2\pi\}$. Из последних двух уравнений системы (8.47) получаем искомые соотношения $\dfrac{\partial a}{\partial\varphi_1} = \lambda(\varphi_1)$, $\dfrac{\partial a}{\partial\varphi_2} = 0$. Следовательно, a — функция только от φ_1, причем $a' = \lambda$. Отсюда $a = \langle\lambda\rangle\varphi_1 + A$, где A — однозначная функция на торе, $\langle\lambda\rangle = \dfrac{1}{4\pi^2}\int_{\mathbf{T}^2}\lambda\,d\varphi_1\,d\varphi_2$.

Таким образом, в необратимом случае поле симметрий локально гамильтоново. Гамильтониан Φ будет однозначной функцией в фазовом пространстве, если $\langle\lambda\rangle = 0$.

7. Доказательство теоремы 4. Рассмотрим поле симметрий степени $n \geqslant 2$, задаваемое уравнениями

$$q_k' = Q_k + S_k + \ldots, \quad p_k' = P_k + R_k + T_k + \ldots, \quad k = 1, 2.$$

Здесь P_k, Q_k, R_k, S_k, T_k — однородные многочлены по импульсам p_1, p_2 степени $n, n-1, n-1, n-2, n-2$ соответственно. Многоточия означает слагаемые степени меньше $n-2$.

Если $c_1 + ic_2 \neq 0$, то среднее функции λ равно нулю. При $p_1 = 1$, $p_2 = i$ функции P_1, P_2 обращаются в нуль, поэтому старшие однородные части векторных полей v и u в точке $p_1 = 1$, $p_2 = i$ равны соответственно $(\Lambda, \Lambda i, 0, 0)$ и $(Q_1^*, Q_2^*, 0, 0)$. Эти векторы линейно независимы, если $Q_1^* i - Q_2^* = i(Q_1^* + iQ_2^*) = i(c_1 + ic_2) \neq 0$. Теорема доказана.

Замечание. По индукции можно доказать, что если среднее функции λ по тору отлично от нуля, то $Q_1^* + iQ_2^* = S_1^* + iS_2^* = \ldots = 0$. Если поле симметрий гамильтоново с гамильтонианом $F_m + F_{m-1} + \ldots$, то все полиномы F_k $(k \leqslant m)$ делятся на H. Отсюда, в частности, следует теорема С. В. Болотина (теорема 3 из § 4).

§ 9. Симметрии, интегралы и топология динамических систем с двумя степенями свободы

1. Как уже говорилось, интегралы уравнений Гамильтона порождают поля симметрий (которые называются гамильтоновыми). С другой стороны, пример (8.1) показывает, что не каждое поле симметрий гамильтоновой системы является гамильтоновым (или даже локально гамильтоновым).

Теоремы 1–3 из § 8 приводят к следующему предположению, высказанному в работе [107а]: если геодезический поток на замкнутой поверхности допускает полиномиальное поле симметрий степени n, не коллинеарное гамильтонову полю v, то существует дополнительный по импульсам интеграл степени не выше n. Эта гипотеза практически полностью доказана в [181а] (см. п. 2).

Обсуждение связи между группами симметрий и интегралами гамильтоновых систем начнем с рассмотрения более общей задачи. Пусть Σ^3 — компактное трехмерное многообразие, v — касательное векторное поле на Σ без особых точек. Пусть также динамическая система

$$\dot{x} = v(x), \quad x \in \Sigma \tag{9.1}$$

допускает инвариантную форму объема Ω. Важный пример дают как раз гамильтоновы системы с двумя степенями свободы. В этом случае Σ — регулярная трехмерная поверхность интеграла энергии, v — ограничение гамильтонова поля на Σ, а Ω порождается инвариантной 4-формой Лиувилля. Все перечисленные объекты (Σ, v, Ω) считаются аналитическими.

Теорема 1 [181а]. *Пусть система (9.1) с инвариантной формой объема допускает нетривиальное аналитическое поле симметрий. Тогда она имеет аналитический многозначный интеграл. Если, кроме того,*

$$H^1(\Sigma, \mathbb{R}) = 0, \tag{9.2}$$

то имеется непостоянный однозначный интеграл.

Приравняем нулю коэффициент при $\partial/\partial p_1$ коммутатора операторов L_v, L_u, выпишем однородные слагаемые степени n и положим затем $p_1 = 1$, $p_2 = i$. В результате получим соотношение

$$Q_1^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_1} i + Q_2^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_2} i - R_1^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} - R_2^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} i + P_2^* \lambda \Lambda - \\ - \Lambda \frac{\partial R_1^*}{\partial q_1} - \Lambda i \frac{\partial R_1^*}{\partial q_2} - i \lambda \Lambda \left(\frac{\partial P_1^*}{\partial p_1} + i \frac{\partial P_1^*}{\partial p_2} \right) = 0. \qquad (8.48)$$

По формуле Эйлера для однородных функций, выражение в круглых скобках равно nP_1^*. По лемме 3, $P_1^* = P_2^* = 0$. Поэтому уравнение (8.48) принимает вид

$$Q_1^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_1} i + Q_2^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_2} i - \frac{\partial R_1^* \Lambda}{\partial q_1} - R_2^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} i - \Lambda \frac{\partial R_1^*}{\partial q_2} i = 0. \qquad (8.49)$$

Приравнивая нулю коэффициент при $\partial/\partial p_2$, получаем аналогичное уравнение

$$-Q_1^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_1} - Q_2^* \frac{\partial \lambda \Lambda}{\partial q_2} - i \frac{\partial (R_2^*) \Lambda}{\partial q_2} - R_1^* \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} - \Lambda \frac{\partial (R_2^*)}{\partial q_1} = 0. \qquad (8.50)$$

Умножим (8.50) на i и сложим с (8.49). Получим

$$\frac{\partial (R_1^* + iR_2^*) \Lambda}{\partial q_1} + i \frac{\partial (R_1^* + iR_2^*) \Lambda}{\partial q_2} = 0,$$

т. е. условие Коши — Римана голоморфности функции $(R_1^* + iR_2^*)\Lambda$. Ввиду ограниченности, она постоянна:

$$\Lambda (R_1^* + iR_2^*) = \delta_1 + i\delta_2 = \mathrm{const}\,. \qquad (8.51)$$

Приравнивая нулю однородные члены степени $n-1$ и производя аналогичные преобразования, можно получить соотношение

$$\frac{\partial (T_1^* + iT_2^*) \Lambda}{\partial q_1} + i \frac{\partial (T_1^* + iT_2^*) \Lambda}{\partial q_2} + \lambda n i [\Lambda (R_1^* + iR_2^*)] = 0. \qquad (8.52)$$

При $\delta_1 + i\delta_2 \neq 0$, ввиду (8.51), среднее функции λ по двумерному тору равно нулю.

Рассмотрим теперь случай $\delta_1 = \delta_2 = 0$, т. е.

$$R_1^* + iR_2^* = 0. \qquad (8.53)$$

Приравнивая нулю слагаемые степени $n-1$ в коэффициентах при $\partial/\partial q_1$ и $\partial/\partial q_2$ и учитывая соотношение (8.53), получим уравнение

$$\frac{\partial (S_1^* + iS_2^*)}{\partial q_1} + i \frac{\partial (S_1^* + iS_2^*)}{\partial q_2} + \lambda i (n-1)(c_1 + ic_2) = 0. \qquad (8.54)$$

Следствие 1. *Система (9.1) на замкнутом трехмерном многообразии с нулевым первым числом Бетти, допускающая нетривиальное поле симметрий, не может быть эргодической.*

Примером служит геодезический поток на двумерной сфере. В этом случае Σ диффеоморфно $SO(3)$ и поэтому выполнено (9.2). С другой стороны, на трехмерном торе имеются эрогодические динамические системы с инвариантной мерой и нетривиальными симметриями (см. п. 4 § 3 гл. II).

Доказательство теоремы 1 использует известные факты из теории внешних форм (см., например, [41]). Для векторного поля w и n-формы Φ через $i_w\Phi$ обозначается внешняя $(n-1)$-форма $\Phi(w,\cdot)$. Операторы внешнего дифференцирования d, “внутреннего умножения” i и L_w связаны “формулой гомотопии”:

$$L_w = di_w + i_w d. \tag{9.3}$$

Пусть u — поле симметрий системы (9.1). Так как Ω — форма объема, то

$$L_u\Omega = f\Omega, \tag{9.4}$$

где f — некоторая аналитическая функция на Σ. Далее, $L_vL_u\Omega = L_uL_v\Omega = 0$ ввиду инвариантности Ω. Поэтому $L_v(f\Omega) = (L_vf)\Omega + fL_v\Omega = \dot{f}\Omega = 0$. Так как $\Omega \neq 0$, то $\dot{f} = 0$. Следовательно, f — интеграл системы (9.1). Если функция f непостоянна, то теорема 1 доказана.

Рассмотрим теперь случай $f \equiv c = \mathrm{const}$. Из (9.4) с учетом (9.3) получаем $d(i_u\Omega) = c\Omega$. Интегрируя обе части этого равенства по компактному многообразию Σ и применяя формулу Стокса, приходим к равенству $c\int_\Sigma \Omega = \int_\Sigma d(i_u\Omega) = \int_{\partial\Sigma} i_u\Omega = 0$. Так как Ω — форма объема, то $c = 0$. Итак, в этом случае форма Ω инвариантна относительно фазового потока, порождаемого полем u, т. е. $L_u\Omega = d(i_u\Omega) = 0$.

Рассмотрим теперь 1-форму $\varphi = i_vi_u\Omega = \Omega(u,v,\cdot)$. Покажем, что она замкнута и инвариантна относительно системы (9.1). Действительно,

$$\begin{aligned} d\varphi = di_v(i_u\Omega) = L_v(i_u\Omega) - i_vd(i_u\Omega) = \\ = i_uL_v\Omega + i_{[v,u]}\Omega - i_vL_u\Omega + i_vi_ud\Omega = 0, \\ L_v\varphi = L_vi_v(i_u\omega) = i_vL_v(i_u\Omega) = i_vi_uL_v\Omega + i_vi_{[v,u]}\Omega = 0. \end{aligned}$$

Итак, локально, $\varphi = dg$, где g — аналитическая функция. Поскольку $0 = \Omega(u,v,v) = i_v\varphi = i_vdg = (\partial g/\partial x)v$, то функция g является интегралом системы (9.1). Так как Ω — форма объема, и векторы u, v почти всюду линейно независимы, то $g \not\equiv \mathrm{const}$.

Наконец, если выполнено (9.2), то каждая замкнутая 1-форма (в частности, φ) будет точной. Теорема доказана.

Следствие 2. *В условиях теоремы* 1 *уравнения* (9.1) *интегрируются с использованием дифференцирований и квадратур.*

Дополнительные к квадратурам дифференцирования требуются для отыскания множителя f из соотношения (9.4). Этот результат полезно сравнить с теоремой Ли (§ 3 гл. II), которая гарантирует интегрируемость в квадратурах системы (9.1) при наличии двух коммутирующих полей симметрий. Присутствие второго поля заменяется инвариантной формой объема.

2. Теорема 1 допускает уточнения для задачи о геодезических на замкнутой поверхности M. Если ее род больше 1, то уравнения геодезических линий на M вообще не допускают нетривиальных полей симметрий и интегралов. Остается рассмотреть случаи $M = \mathbf{S}^2$ и $M = \mathbf{T}^2$.

Теорема 2 [181a]. *Если геодезический поток на* $\mathbf{S}^2$ *имеет нетривиальное поле симметрий степени* n, *то найдется дополнительный полиномиальный интеграл степени не выше* n.

Теорема 2 непосредственно не вытекает из теоремы 1. Для ее доказательства требуются дополнительные рассмотрения.

3. Обсудим оставшийся случай: $M = \mathbf{T}^2$. Введем на $\mathbf{T}^2$ глобальные угловые конформные координаты $q_1, q_2 \mod 2\pi$. В этих переменных гамильтониан задачи о геодезических принимает вид $H = (p_1^2 + p_2^2)/(2\Lambda)$, где Λ — положительная функция на $\mathbf{T}^2$.

Теорема 3 [181a]. *Если геодезический поток на* $\mathbf{T}^2$ *имеет нетривиальное поле симметрий степени* n, *то найдется многозначный полиномиальный по импульсам интеграл степени не выше* n. *Кроме того, если* n *нечетно, то обязательно существует однозначный полиномиальный интеграл. Если же* n *четно, то однозначный интеграл существует всегда, кроме тех случаев, когда конформный множитель* Λ *удовлетворяет некоторому дифференциальному уравнению в частных производных.*

Например, при $n = 4$ это нелинейное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial q_1 \partial q_2} = c \Delta \ln \Lambda, \tag{9.5}$$

где c — некоторая постоянная, ненулевая в случае многозначности полиномиального интеграла. Можно показать, что уравнение (9.5) имеет лишь постоянные решения, периодические по q_1 и q_2.

Следствие. *Если геодезический поток на торе имеет нетривиальное поле симметрий степени* $n \leqslant 5$, *то существует независимый от* H *полиномиальный интеграл степени не выше* n.

Вопрос о справедливости этого утверждения для четных $n \geqslant 6$ остается пока открытым. В [181a] даны также некоторые обобщения теорем 2 и 3 для других классов интегралов, отличных от полиномиальных.

ГЛАВА IV

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ, МАЛО ОТЛИЧАЮЩИХСЯ ОТ ИНТЕГРИРУЕМЫХ

Рассмотрение препятствий к интегрируемости аналитического характера мы начнем с анализа "основной проблемы динамики" по Пуанкаре. Речь пойдет о гамильтоновых системах с гамильтонианом

$$H = H_0(y_1, \dots, y_n) + \varepsilon H_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n) + \dots$$

Канонические координаты $x \mod 2\pi$ и y являются переменными действие — угол "невозмущенной" системы с гамильтонианом H_0. Следуя Пуанкаре, мы рассмотрим задачи о существовании для этой системы дополнительных интегралов и нетривиальных полей симметрий в виде рядов по степеням малого параметра ε. Здесь существенное значение имеет классическая схема теории возмущений, изложенная в § 10 гл. II. Оказывается, интегрируемости гамильтоновой системы препятствует разрушение большого числа резонансных инвариантных торов невозмущенной задачи при малых значениях $\varepsilon \neq 0$.

§ 1. Метод Пуанкаре

1. Рассмотрим аналитическую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{y}_j &= \varepsilon\Phi_j + \dots , & 1 \leqslant j \leqslant m , \\ \dot{x}_k &= \omega_k + \varepsilon\Psi_k + \dots , & 1 \leqslant k \leqslant n . \end{aligned} \tag{1.1}$$

Здесь ω_k зависят лишь от "медленных" переменных $y \in \mathbb{R}^m$, переменные x угловые (правые части периодичны по всем x_k с периодом 2π; другими словами, $x \in \mathbb{T}^n$), ε — малый параметр. Многоточие обозначает члены порядка $\geqslant 2$ по ε.

Уравнения Гамильтона, мало отличающиеся от интегрируемых, имеют, очевидно, вид (1.1). В этом случае $m = n$, частоты

ω_k равны $\partial H_0/\partial y_k$. Уравнения (1.1) часто встречаются в приложениях. Многочисленные примеры можно найти, например, в книге [12, гл. 5].

Предположим, что система (1.1) имеет s интегралов в виде рядов по степеням ε:

$$H^{(i)} = H_0^{(i)}(x,y) + \varepsilon H_1^{(i)}(x,y) + \dots , \qquad 1 \leqslant i \leqslant s . \tag{1.2}$$

Функции $H_r^{(i)}$, $r \geqslant 0$, считаются аналитическими по x, y и 2π-периодическими по координатам x, так что интегралы (1.2) являются "однозначными" функциями в фазовом пространстве системы (1.1). Гамильтоновы системы всегда допускают интеграл вида (1.2); это — интеграл энергии.

Рассмотрим задачу о наличии у системы (1.1) дополнительного интеграла в виде ряда

$$F = F_0(x,y) + \varepsilon F_1(x,y) + \dots \tag{1.3}$$

с аналитическими коэффициентами F_r ($r \geqslant 0$), 2π-периодическими по x. Интегралы (1.2)-(1.3) естественно считать независимыми.

Расширим постановку задачи, разыскивая интегралы в виде формальных степенных рядов вида (1.3). В связи с этим следует дать некоторые разъяснения. Формальный ряд $\sum f_i \varepsilon^i$ будем считать равным нулю, если $f_i \equiv 0$ при всех i. Ряд (1.3) — формальный интеграл системы дифференциальных уравнений (1.1), если формальный ряд

$$\dot F = \sum \frac{\partial F_0}{\partial x_k}\omega_k + \varepsilon\left(\sum \frac{\partial F_0}{\partial y_j}\Phi_j + \sum \frac{\partial F_1}{\partial x_k}\omega_k\right) + \dots \tag{1.4}$$

равен нулю. Формальные ряды (1.2), (1.3) считаются независимыми, если хотя бы один минор $(s+1)$-го порядка матрицы Якоби

$$\left\| \frac{\partial\left(H^{(1)}, \dots, H^{(s)}, F\right)}{\partial(x,y)} \right\| ,$$

рассматриваемый как формальный степенной ряд по ε, отличен от нуля.

При $\varepsilon = 0$ имеем интегрируемую невозмущенную систему $\dot y_j = 0$, $\dot x_k = \omega_k(y)$. Ее фазовое пространство $\mathbb{R}^m \times \mathbb{T}^n = \{y, x \bmod 2\pi\}$ расслаивается на n-мерные инвариантные торы $\{x, y : y = y_0, x \bmod 2\pi\}$, заполненные условно-периодическими траекториями. Координаты y "нумеруют" эти торы. Невозмущенную систему назовем невырожденной, если равенство $\sum \alpha_k\omega_k(y) \equiv 0$ с целыми α_k может выполняться лишь при $\alpha_k = 0$. В фазовом пространстве невырожденной системы нерезонансные торы всюду плотны. Например, если $m = n$ и якобиан

$$\det\left\|\frac{\partial(\omega_1,\ldots,\omega_m)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right\|$$

отличен от нуля, то система будет невырожденной. В частности, для гамильтоновых систем достаточным условием невырожденности является $\det\left\|\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y_i\,\partial y_j}\right\| \neq 0$.

Разложим функции Φ_j в кратные ряды Фурье:

$$\Phi_j = \sum \Phi^j_\alpha(y)\exp[i(\alpha,x)]\,,\qquad \alpha\in\mathbb{Z}^n\,. \tag{1.5}$$

В дальнейшем анализе важную роль играет множество Пуанкаре $\mathbf{P}_s \subset \mathbb{R}^m = \{y\}$, которое является аналогом векового множества из § 10 гл. II. По определению *множество Пуанкаре* состоит из тех точек $y\in\mathbb{R}^m$, для которых найдутся такие $m-s$ линейно независимых целочисленных векторов $\alpha,\alpha',\ldots\in\mathbb{Z}^n$, что

(1) $\big(\alpha,\omega(y)\big) = \big(\alpha',\omega(y)\big) = \ldots = 0$;

(2) векторы $\Phi_\alpha = (\Phi^1_\alpha,\ldots,\Phi^m_\alpha)$, $\Phi_{\alpha'} = (\Phi^1_{\alpha'},\ldots,\Phi^m_{\alpha'})$, $\ldots$ линейно независимы.

В типичной ситуации множество $\mathbf{P}_s$ всюду плотно в $\mathbb{R}^m$.

Обозначим через $C^\omega(V)$ класс функций, аналитических в области $V\subset\mathbb{R}^u$. Множество $M\subset V$ назовем *ключевым* (или множеством единственности) для класса $C^\omega(V)$, если любая аналитическая функция, равная нулю на M, тождественно обращается в нуль всюду в V. Таким образом, если аналитические функции совпадают на M, то они совпадают на всем V. Например, множество точек интервала $\Delta\subset\mathbb{R}$ является ключевым для класса $C^\omega(\Delta)$ в том и только в том случае, когда оно имеет предельную точку внутри Δ. Достаточность этого условия очевидна, необходимость вытекает из теоремы Вейерштрасса о бесконечном произведении. Отметим, что если M — множество единственности для класса функций $C^p(V)$ $(0\leqslant p\leqslant\infty)$, то M плотно в V.

Теорема 1. *Предположим, что невозмущенная система невырождена. Пусть в некоторой точке $y^0\in\mathbb{R}^m$ матрица Якоби*

$$\left\|\frac{\partial\big(H_0^{(1)},\ldots,H_0^{(s)}\big)}{\partial(y_1,\ldots,y_m)}\right\| \tag{1.6}$$

имеет максимальный ранг, и в любой ее окрестности U множество Пуанкаре $\mathbf{P}_s$ является ключевым для класса $C^\omega(U)$. Тогда систе-

ма (1.1) *не имеет формального интеграла* (1.3) *с аналитическими коэффициентами, независимого с интегралами* (1.2).

Для доказательства теоремы 1 нам понадобится

Лемма 1. *Пусть функции* $F_r(x,y)$ *непрерывно дифференцируемы, и ряд* $\sum\limits_{r=0}^{\infty} F_r(x,y)\varepsilon^r$ — *формальный интеграл системы* (1.1), *невырожденной при* $\varepsilon = 0$. *Тогда*

1) F_0 *не зависит от* x;

2) *ранг матрицы Якоби*

$$\left\| \frac{\partial\left(F_0, H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}\right)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \right\| \tag{1.7}$$

не превосходит s *в точках* $y \in \mathbf{P}_s$.

Доказательство. Приравнивая нулю правую часть равенства (1.4), получим цепочку уравнений

$$\sum \frac{\partial F_0}{\partial x_k}\omega_k = 0\ , \quad \sum \frac{\partial F_0}{\partial y_j}\Phi_j + \sum \frac{\partial F_1}{\partial x_k}\omega_k = 0\ , \quad \ldots \tag{1.8}$$

Умножим первое уравнение на $\exp[-i(\alpha, x)]$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^n$) и усредним обе его части по n-мерному тору $\mathbf{T}^n$:

$$\frac{1}{(2\pi)^n}\int_{\mathbf{T}^n}\left(\frac{\partial F_0}{\partial x}, \omega\right) e^{-i(\alpha,x)}\, d^n x = 0\ .$$

Интегрируя по частям, приходим к равенству

$$(\alpha, \omega) f_\alpha = 0\ , \qquad \alpha \in \mathbb{Z}^n\ , \tag{1.9}$$

где $f_\alpha = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{\mathbf{T}^n} F_0 e^{i(\alpha,x)}\, d^n x$ — коэффициент Фурье F_0 как функции от x.

Функция $(\alpha, \omega(y))$ аналитична и при всех $\alpha \neq 0$ не обращается тождественно в нуль. Следовательно, на всюду плотном множестве $\mathbb{R}^m = \{y\}$ множитель (α, ω) не равен нулю. Согласно (1.9), $f_\alpha(y) \equiv 0$ для всех $\alpha \neq 0$, и поэтому функция F_0 не зависит от x.

Теперь умножим второе уравнение на $\exp[-i(\alpha, x)]$, усредним его по тору $\mathbf{T}^n$ и проинтегрируем по частям. В результате получим цепочку соотношений $i(\alpha, \omega)F_\alpha^{(1)} + \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial y}, \Phi_\alpha\right) = 0$ ($\alpha \in \mathbb{Z}^n$), где $F_\alpha^{(1)}$ — коэффициенты Фурье функции F_1.

Пусть теперь $y \in \mathbf{P}_s$. Тогда $\left(\frac{\partial F_0}{\partial y}, \Phi_\alpha\right) = \left(\frac{\partial F_0}{\partial y}, \Phi_{\alpha'}\right) = \ldots = 0$. Следовательно, градиент функции F_0 лежит в s-мерной плоскости Π, ортогональной линейно независимым векторам $\Phi_\alpha, \Phi_{\alpha'}, \ldots$ Функции (1.2) являются интегралами (1.1), поэтому градиенты функций $H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}$ лежат в той же плоскости Π. Таким образом, в точках $y \in \mathbf{P}_s$ функции $F_0, H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}$ зависимы: ранг их матрицы Якоби (1.7) падает на единицу. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1. Согласно лемме 1, функции $H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}$ зависят только от переменных y. Следовательно, $s \leqslant m$. Эти функции независимы в точке y^0, поэтому можно считать, что в некоторой малой окрестности точки y^0 функции $H_0^{(r)}$ $(1 \leqslant r \leqslant s)$ составляют часть локальных координат $z_1, \ldots, z_m$: $z_r = H_0^{(r)}$, $r \leqslant s$. Следовательно, $F_0 = G_0(z_1, \ldots, z_m)$, и G_0 аналитична.

По лемме 1, ранг матрицы Якоби (1.7) не превосходит s во всех точках множества Пуанкаре $\mathbf{P}_s$. Все миноры этой матрицы являются аналитическими функциями от x, y, и множество $\mathbf{P}_s$ ключевое для класса аналитических функций, поэтому функции $F_0, H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}$ всюду зависимы. В новых переменных $\{z_j\}$ матрица (1.7) имеет вид

$$\left\| \begin{array}{ccccccc} \frac{\partial G_0}{\partial z_1} & \frac{\partial G_0}{\partial z_2} & \ldots & \frac{\partial G_0}{\partial z_s} & \ldots & \frac{\partial G_0}{\partial z_m} \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & 0 \end{array} \right\|$$

Ее ранг равен s, поэтому функция G_0 не зависит от $z_{s+1}, \ldots, z_m$. Итак, в области $U \times \mathbf{T}^n \subset \mathbb{R}^m \times \mathbf{T}^n$ (U — малая окрестность y^0) имеем равенство $F_0 = G_0\big(H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}\big)$.

Рассмотрим теперь степенной ряд

$$F' = \frac{1}{\varepsilon}\left[F - G_0\big(H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}\big)\right] = F_0' + \varepsilon F_1' + \ldots \tag{1.10}$$

Коэффициенты $F_0', F_1', \ldots$ — аналитические функции в прямом произведении $U \times \mathbf{T}^n$. Ясно, что ряд (1.10) — формальный интеграл уравнений (1.1). Согласно лемме 1, функция F_0' не зависит от угловых переменных x, и функции $F_0', H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}$ зависимы во всех точках множества $\mathbf{P}_s \cap U$. Согласно предположению теоремы 1, множество $\mathbf{P}_s \cap U$ ключевое для класса функций $C^\omega(U)$. Следовательно, эти функции зависимы во всех точках окрестности U. Поэтому в области U справедливо представление $F'_0 = G_1\big(H_0^{(1)}, \ldots, H_0^{(s)}\big)$, где G_1 — некоторая аналитическая функция. Степенной ряд

$$F'' = \frac{1}{\varepsilon}\left[F' - G_1\big(H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}\big)\right] = F''_0 + \varepsilon F''_1 + \ldots \tag{1.11}$$

— формальный интеграл уравнений (1.1), и к нему снова можно применить указанную выше процедуру.

Согласно (1.10), $F = G_0\big(H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}\big) + \varepsilon F'$, а равенство (1.11) дает соотношение $F' = G_1\big(H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}\big) + \varepsilon F''$. Следовательно, $F = G_0(H) + \varepsilon G_1(H) + \varepsilon^2 F''$.

Применяя последовательно лемму 1, приходим к формальному разложению $F = G_0 + \varepsilon G_1 + \varepsilon^2 G_2 + \ldots$, где все коэффициенты G_r являются функциями от интегралов $H^{(1)}, \ldots, H^{(s)}$. Следовательно, любой минор порядка $(s+1)$ матрицы Якоби интегралов (1.2) и (1.3) равен нулю как формальный степенной ряд по ε. Теорема 1 полностью доказана.

2. Т е о р е м а 2. *Предположим, что при $\varepsilon = 0$ система (1.1) невырождена, ранг матрицы Якоби (1.6) равен s в области $D \subset \mathbb{R}^m = \{y\}$, и множество $\mathbf{P}_s$ всюду плотно в D. Тогда (1.1) не имеет формального интеграла (1.3) с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, независимого с интегралами (1.2).*

Это утверждение просто доказывается методом п. 1. Пусть $s = 0$, и множество $\mathbf{P}_0$ всюду плотно в D. Тогда система (1.1) не имеет формальных интегралов вида (1.3) с непостоянными непрерывно дифференцируемыми в области $D \times \mathbf{T}^n \subset \mathbb{R}^m \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами. Действительно, согласно лемме 1, функция F_0 зависит лишь от y, и $dF_0 = 0$ в точках множества $\mathbf{P}_0$. Так как $\mathbf{P}_0$ всюду плотно, то $dF_0 \equiv 0$, поэтому $F_0 \equiv \mathrm{const}$. Далее, формальный ряд $F_1 + \varepsilon F_2 + \ldots$ — интеграл уравнений (1.1). Снова применяя лемму 1, получим, что $F_1 \equiv \mathrm{const}$. Аналогично доказывается, что все остальные коэффициенты ряда (1.1) постоянны.

3. Применим результаты пп. 1 и 2 к уравнениям Гамильтона с гамильтонианом

$$H = H_0(y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon H_1(x_1, \ldots, x_n,\ y_1, \ldots, y_n) + \ldots \tag{1.12}$$

Эти уравнения, очевидно, имеют вид (1.1). Разложим возмущающую функцию H_1 в кратный ряд Фурье:

$$H_1 = \sum H_\alpha(y) e^{i(\alpha, x)}\,, \qquad \alpha \in \mathbb{Z}^n\,.$$

Так как $\dot{y}_j = -\varepsilon \dfrac{\partial H_1}{\partial x_j} - \ldots$, то $\Phi_j = -\dfrac{\partial H_1}{\partial x_j}$. Поэтому векторы

Φ_α из п. 1 равны, очевидно, $-i\alpha H_\alpha$. Как уже отмечалось в п. 1, частоты ω_k совпадают с частными производными $\partial H_0/\partial y_k$.

Рассмотрим задачу о наличии дополнительного к интегралу энергии H формального интеграла в виде ряда (1.3) с аналитическими в области $D \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами. Согласно п. 1, надо положить $s = 1$. В нашем случае множество Пуанкаре $\mathbf{P}_1$ опредено как множество тех точек $y \in D$, для которых найдутся такие $n-1$ линейно независимых векторов $\alpha, \alpha', \ldots \in \mathbb{Z}^n$, что

1) $\big(\alpha, \omega(y)\big) = \big(\alpha', \omega(y)\big) = \ldots = 0$;
2) $H_\alpha(y) \neq 0$, $H_{\alpha'}(y) \neq 0$, ...

Теорема 3. *Предположим, что невозмущенная гамильтонова система невырождена, т. е.* $\det \left\|\partial^2 H_0/\partial y_i \partial y_j\right\| \neq 0$ *в области* D. *Пусть* $y^0 \in D$ *— некритическая точка функции* H_0, *и в любой ее окрестности* U *множество* $\mathbf{P}_1 \cap U$ *является ключевым для класса функций* $C^\omega(U)$. *Тогда уравнения Гамильтона с гамильтонианом* (1.12) *не имеют независимого от функции* H *интеграла в виде формального степенного ряда*

$$\sum_{r \geqslant 0} F_r(x, y)\varepsilon^r \tag{1.13}$$

с аналитическими в области $D \times \mathbf{T}^n$ *коэффициентами.*

Это утверждение — следствие теоремы 1 из п. 1. Из теоремы 2 просто выводится

Теорема 4. *Пусть функция* H_0 *невырождена в области* D *и множество Пуанкаре* $\mathbf{P}_1$ *всюду плотно в* D. *Тогда уравнения Гамильтона не имеют независимого от* H *формального интеграла* (1.13) *с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами* $F_r : D \times \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$.

Для множеств Пуанкаре $\mathbf{P}_s$ имеют место включения $\mathbf{P}_0 \subset \mathbf{P}_1 \subset \subset \mathbf{P}_2 \subset \ldots \subset \mathbf{P}_{n-1} \subset \mathbf{B}$, где $\mathbf{B}$ — вековое множество, введенное в § 10 гл. II. Ясно, что для гамильтоновых систем в общем случае множество $\mathbf{P}_0$ состоит из изолированных точек.

Пусть $\mathbf{P}_{n-1}$ является ключевым для класса $C^\omega(D)$ и гамильтонова система с гамильтонианом (1.12) имеет n формальных интегралов

$$\begin{gathered} F_0^{(1)} + \varepsilon F_1^{(1)} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_0^{(n)} + \varepsilon F_1^{(n)} + \ldots \end{gathered} \tag{1.14}$$

с аналитическими коэффициентами, 2π-периодическими по x. Тогда функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}$ зависимы во всех точках $D \times \mathbf{T}^n$. Этот результат является простым следствием леммы 1. Не исключено, что из ключевого свойства множества $\mathbf{P}_{n-1}$ вытекает зависимость формальных интегралов (1.14), но это пока не доказано.

4. Рассмотрим теперь неавтономную каноническую систему уравнений

$$\dot{y} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial y}; \qquad H = H_0(y) + \varepsilon H_1(y,x,t) + \ldots \tag{1.15}$$

Функция Гамильтона H предполагается аналитической и 2π-периодической по x и t.

Уравнения (1.15) возникают, например, при изучении автономной гамильтоновой системы, когда в качестве новой переменной времени берется одна из угловых координат x. Пусть, например, $\partial H/\partial y_1 \neq 0$. Тогда (по крайней мере локально) можно решить уравнение $H(y,x,\varepsilon) = h$ относительно y_1 и в результате получить, что $y_1 = -K(y_2,\ldots,y_n,\ x_2,\ldots,x_n,\ \tau,\ \varepsilon,\ h)$, $\tau = x_1$. Поскольку $\dot{x}_1 \neq \neq 0$, то решения $y_s(t), x_s(t)$ $(s \geqslant 2)$ исходных уравнений можно считать функцией τ. По теореме Уиттекера, функции $y_s(\tau), x_s(\tau)$ $(s \geqslant 2)$ удовлетворяют каноническим уравнениям

$$\frac{dy_s}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial x_s}, \qquad \frac{dx_s}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial y_s}. \tag{1.16}$$

Действительно, $\dfrac{dy_s}{d\tau} = \dfrac{dy_s}{dx_1} = \dfrac{\dot{y}_s}{\dot{x}_1} = -\left(\dfrac{\partial H}{\partial x_s}\right) \Big/ \left(\dfrac{\partial H}{\partial y_1}\right)$. Дифференцируя тождество $H(-K,y_2,\ldots,y_n,\tau,x_2,\ldots,x_n,\varepsilon) = h$ по x_s, получим $\dfrac{\partial H}{\partial x_s} - \dfrac{\partial H}{\partial y_1}\dfrac{\partial K}{\partial x_s} = 0$. Следовательно, $\dfrac{dy_s}{d\tau} = -\dfrac{\partial K}{\partial x_s}$ $(2 \leqslant s \leqslant n)$. Аналогично выводится вторая группа канонических уравнений.

Уравнения (1.16) имеют необходимый вид (1.15).

Полезно снова ввести множество Пуанкаре $\mathbf{P}_*$ (аналог множества $\mathbf{P}_1$) как множество точек $y \in D$, удовлетворяющих следующим условиям:

1) существуют такие n линейно независимых векторов $\alpha^s \in \mathbb{Z}^n$ и n целых чисел m_s, что $\big(\alpha^s, \omega(y)\big) + m_s = 0$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$;

2) коэффициенты Фурье $H_{k,m_s}(y)$ разложения возмущающей функции $H_1 = \sum H_{km}(y)\exp[i((k,\alpha) + mt)]$ отличны от нуля.

Отметим, что если уравнения (1.15) являются уравнениями Уиттекера, полученными из автономных уравнений Гамильтона с гамильтонианом (1.12) понижением порядка, то множество Пуанкаре $\mathbf{P}_*$ приведенной системы является проекцией на плоскость $\mathbb{R}^{n-1} = \{y_2,\ldots,y_n\}$ пересечения множества Пуанкаре $\mathbf{P}_1$ исходной системы с поверхностью $H_0(y_1,\ldots,y_n) = h$.

Теорема 5. *Если функция H_0 невырождена в области D, и множество $\mathbf{P}_*$ — ключевое для класса $C^\omega(D)$, то уравнения* (1.15) *не имеют формального интеграла $\sum\limits_{s\geqslant 0} F_s(y,x,t)\varepsilon^s$ с аналитическими коэффициентами $F_s : D\times \mathbf{T}^{n+1}\to \mathbb{R}$.*

Доказательство теоремы 5 основано на последовательном применении следующего утверждения, подобного лемме 1 из п. 1:

Лемма 2. *Пусть $F_s : D\times \mathbf{T}^{n+1}\to \mathbb{R}$ — непрерывно дифференцируемые функции, ряд $\sum F_s\varepsilon^s$ — формальный интеграл канонических уравнений* (1.15) *с невырожденной функцией H_0. Тогда*

1) *$F_0(y,x,t)$ не зависит от x и t;*
2) *$dF_0 = 0$ на множестве $\mathbf{P}_*$.*

Если множество Пуанкаре $\mathbf{P}_*$ всюду плотно в области D, то уравнения (1.15) не имеют, очевидно, формального интеграла с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами.

5. Как уже говорилось во введении, постановка задачи об интегралах возмущенных гамильтоновых систем, аналитических по малому параметру, принадлежит Пуанкаре [225; 146, гл. V]. Предполагая множество $\mathbf{P}_1$ всюду плотным, Пуанкаре доказал отсутствие "однозначных" интегралов, независимых с интегралом энергии и аналитических по фазовым переменным и параметру ε. В работе [75] показано, что предположение о плотности множества $\mathbf{P}_1$ можно ослабить: достаточно, чтобы $\mathbf{P}_1$ было ключевым множеством для класса аналитических функций. В докладе автора на семинаре им. И. Г. Петровского [80] было дано распространение метода Пуанкаре на случай, когда интегралы разыскиваются в виде формальных рядов по степеням ε с аналитическими или гладкими коэффициентами (см. теоремы 3 и 4). Распространение метода Пуанкаре на гамильтоновы системы с периодическим гамильтонианом содержится в [75]. Обобщения результатов Пуанкаре на негамильтоновы системы стандартного вида (1.1) (см. теоремы 1 и 2) в литературе, по-видимому, не обсуждались.

Укажем на одну нерешенную задачу: верно ли, что в предположениях теорем 3–5 при малых фиксированных значениях параметра $\varepsilon\neq 0$ гамильтоновы системы не имеют однозначных интегралов соответствующей гладкости? В связи с этой задачей интересно отметить, что при малых значениях ε гамильтонова система (1.15) с полутора степенями свободы ($n = 1$) всегда имеет непостоянный непрерывный интеграл. Это вытекает из теоремы А. Н. Колмогорова о сохранении условно-периодических движений (см. [12, гл. 5], а также § 10 гл. II): при малых значениях ε колмогоровские торы образуют совершенное нигде не плотное множество, причем при $n = 1$ эти торы "делят" фазовое пространство на связные куски. Искомый непрерывный интеграл является "канторовой лестницей": непрерывная функция полагается постоянной в связных щелях между колмогоровскими торами.

При $n > 1$ дополнение к множеству колмогоровских торов связно, поэтому непостоянную канторову лестницу построить уже нельзя: это дополнение всюду плотно в фазовом пространстве возмущенной системы, и любая постоянная на нем непрерывная функция принимает всюду одно и то же значение. В частности, появляется принципиальная возможность наличия траекторий, всюду плотных в связной щели между колмогоровскими торами. Не исключено, что на самом деле такая ситуация является типичной (обсуждение см., например, в [9]). Отсюда вытекало бы несуществование непостоянных непрерывных интегралов возмущенных вполне интегрируемых гамильтоновых систем.

§ 2. Приложения метода Пуанкаре

1. Обратимся к ограниченной задаче трех тел, рассмотренной в § 5 гл. I. Предположим сначала, что масса Юпитера μ равна нулю. Тогда в "неподвижном" пространстве астероид вращается вокруг Солнца единичной массы по кеплеровским орбитам; пусть орбиты — эллипсы. Удобно перейти от прямоугольных координат к каноническим элементам Делоне L, G, l, g: если a и e — большая полуось и эксцентриситет орбиты, то $L = \sqrt{a}$, $G = \sqrt{a(1-e^2)}$, g — долгота перигелия, l — угол, определяющий положение астероида на орбите, — эксцентрическая аномалия [173]. Оказывается, в новых координатах уравнения движения астероида будут каноническими с гамильтонианом $F_0 = -1/(2L^2)$. При $\mu \neq 0$ полный гамильтониан F разлагается в ряд по возрастающим степеням μ: $F = F_0 + \mu F_1 + \ldots$ В подвижной системе координат, связанной с Солнцем и Юпитером, кеплеровские орбиты вращаются с единичной угловой скоростью, поэтому F зависит от L, G, l и $g - t$. Положим $y_1 = L$, $y_2 = G$, $x_1 = l$, $x_2 = g - t$ и $H = F - G$. Функция H теперь зависит лишь от x, y, причем относительно угловых переменных x_1, x_2 она 2π-периодична. В итоге уравнения движения астероида представлены в виде гамильтоновой системы

$$\dot{y}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \ \dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial y_i}; \quad H = H_0 + \mu H_1 + \ldots, \ H_0 = \frac{1}{2y_1^2} + y_2. \qquad (2.1)$$

Разложение возмущающей функции в кратный тригонометрический ряд по углам x_1 и x_2 было изучено еще Леверье (см., например, [173]). Оно имеет вид $H_1 = \sum\limits_{u=-\infty}^{\infty} \sum\limits_{v=-\infty}^{\infty} H_{uv} \cos[ux_1 - v(x_1 + x_2)]$. Коэффициенты H_{uv}, зависящие от y_1 и y_2, вообще говоря, отличны от нуля.

Множество Пуанкаре $\mathbf{P}$ этой задачи состоит из прямых, параллельных оси y_2: $u/y_1^3 - v = 0$, $H_{uv} \neq 0$. Оно всюду плотно заполняет полуплоскость $y_1 > 0$. Однако применить теорему 4 об отсутствии новых аналитических интегралов непосредственно нельзя из-за вырождения невозмущенной задачи: $\det \|\partial^2 H_0/\partial y^2\| \equiv 0$. Эта трудность преодолевается тем, что канонические уравнения с гамильтонианами H и $\exp H$ имеют одни и те же траектории (но не решения). Следовательно, эти уравнения интегрируемы или неинтегрируемы одновременно. Остается заметить, что

$$\exp H = \exp H_0 + \mu(\exp H_0)H_1 + \dots\,, \qquad \det \|\partial^2(\exp H_0)/\partial y^2\| \neq 0\,.$$

Итак уравнения ограниченной задачи трех тел в форме (2.1) не имеют независимого от функции H формально аналитического по параметру μ интеграла $\Phi = \sum \Phi_s \mu^s$, коэффициенты которого — гладкие функции на множестве $D \times \mathbf{T}^2 = \{y, x\}$, где D — произвольная область в полуплоскости $y_1 > 0$.

К автономной гамильтоновой системе (2.1) можно применить процедуру понижения порядка по Уиттекеру. Зафиксируем постоянную энергии $h < 0$ и разрешим уравнение $H(x, y, \mu) = h$ относительно y_2. Получим $-y_2 = K(y_1, x_1, x_2, h, \mu) = K_0 + \mu K_1 + \dots$, $K_0 = -1/(2y_1^2)$.

Если выбрать в качестве новой переменной времени переменную $x_2 = \tau$, функции $x_1 = x(\tau)$ и $y_1 = y(\tau)$ будут удовлетворять *уравнениям Уиттекера*

$$\frac{dy}{d\tau} = -\frac{\partial K}{\partial x}\,, \quad \frac{dx}{d\tau} = \frac{\partial K}{\partial y}\,. \tag{2.2}$$

Для этих уравнений множество Пуанкаре $\mathbf{P}_*$ также будет всюду плотно на полупрямой $y > 0$. Невозмущенная система невырождена ($d^2K_0/dy^2 \neq 0$), поэтому выполнены все условия теоремы 5 из § 1. Таким образом, можно заключить, что уравнения (2.2) при всех значениях полной энергии $h < 0$ не имеют первого интеграла $\sum \Psi_s \mu^s$ с непрерывно дифференцируемыми коэффициентами в области $\Delta \times \mathbf{T}^2 = \{y, x, \tau\}$, где Δ — произвольный интервал полупрямой $y > 0$.

2. "Перейдем к другой задаче, а именно к задаче о движении тяжелого тела вокруг неподвижной точки... Можно спросить, препятствуют ли существованию однозначного интеграла, отличного от интегралов живых сил и площадей, соображения, изложенные в этой главе" (А. Пуанкаре [146, п. 86]).

Группе симметрий, состоящей из поворотов тела вокруг вертикальной прямой, соответствует линейный интеграл $(I\omega, \gamma)$: проекция кинетического момента на вертикаль постоянна. Фиксируя эту постоянную, понизим число степеней свободы до двух: на четырехмерных интегральных уровнях $M_c = \{\omega, \gamma : (I\omega, \gamma) = c,\ (\gamma, \gamma) = 1\}$ возникает гамильтонова система с двумя степенями свободы. Ее функция Гамильтона — полная энергия тела с фиксированным значением проекции $(I\omega, \gamma)$ — равна $H_0 + \varepsilon H_1$, где H_0 — кинетическая энергия (функция Гамильтона интегрируемой задачи Эйлера о движении тела по инерции), а εH_1 — потенциальная энергия тела в однородном поле силы тяжести (ε — произведение массы тела на расстояние от центра масс до точки подвеса). Будем считать параметр ε малым; это эквивалентно изучению быстрых вращений тела в умеренном силовом поле. В невозмущенной интегрируемой задаче Эйлера можно ввести переменные действие — угол $y, x \mod 2\pi$. Формулы перехода от специальных канонических переменных L, G, l, g к переменным действие — угол y, x можно найти, например, в работе [14]. В новых переменных $H = H_0(y) + \varepsilon H_1(y, x)$. Переменные действия y_1, y_2 могут изменяться в области $\Delta = \{|y_1| \leqslant y_2\}$. Гамильтониан $H_0(y_1, y_2)$ — однородная функция степени 2, аналитическая в каждой из четырех связных подобластей Δ, на которые делят область три прямые π_1, π_2 и $y_1 = 0$. Уравнение $2H_0/y_2^2 = I_2^{-1}$ задает прямые π_1 и π_2; они симметричны относительно вертикальной оси и стремятся к прямой $y_1 = 0$ при $I_2 \to I_1$ или к паре прямых $|y_1| = y_2$ при $I_2 \to I_3$ (напомним, что I_1, I_2, I_3 — главные моменты инерции тела, $I_1 \geqslant I_2 \geqslant I_3$). Разложение возмущающей функции H_1 в кратный ряд Фурье по угловым переменным x_1 и x_2

$$\sum H_{m,1} e^{i(mx_1 + x_2)} + \sum H_{m,-1} e^{i(mx_1 - x_2)} + \sum H_{m,0} e^{imx_1} \tag{2.3}$$

фактически содержится в одной из работ Якоби. Он указал разложения направляющих косинусов свободно вращающегося тела в тригонометрические ряды по $\omega_1 t$ и $\omega_2 t$ (ω_1 и ω_2 зависят лишь от постоянных интегрирования). Возмущающая функция сводится к линейной комбинации направляющих косинусов, поэтому разложения Якоби после замены $\omega_1 t$ и $\omega_2 t$ на углы x_1 и x_2 дают именно ряд Фурье (2.3). Если тело несимметрично, то коэффициенты $H_{m,\pm 1}$ отличны от нуля при достаточно больших значениях $|m|$ [83, гл. III]. В частности, отсюда следует, что в этой задаче множество Пуанкаре **P** и вековое множество **B** совпадают. Если главные моменты инерции подчинены неравенству $I_1 > I_2 > I_3$, вековое множество состоит из бесконечного числа прямых, проходящих через точку $y = 0$ и накапливающихся у пары прямых π_1 и π_2. Можно показать, что функция H_0 невырождена в области Δ. Если бы функция H_0 была аналитичной по y во всей области Δ, то можно было бы применить результаты § 1: точки y^0, лежащие на прямых π_1 и π_2, удовлетворяли бы условиям теоремы 3. Трудность, связанную с аналитическими особенностями функции Гамильтона в переменных действие — угол, можно преодолеть, рассматривая задачу о дополнительном интеграле, аналитическом на всем интегральном уровне M_c. Точкам $y \in \mathbf{B}$ отвечают двумерные торы невозмущенной задачи Эйлера, накапливающиеся у сепаратрис неустойчивых постоянных вращений вокруг средней оси инерции. Совокупность этих резонансных торов образует ключевое множество для класса функций, аналитических на поверхности уровня M_c. Пусть $F = \sum F_r \varepsilon^r$ — дополнительный интеграл, причем все функции F_r аналитичны на M_c. С помощью метода Пуанкаре доказывается, что функции F_0 и H_0 зависимы на резонансных торах задачи Эйлера, "занумерованных" переменными действия $y \in \mathbf{B}$. Учитывая ключевое свойство этой совокупности торов, получаем, что H_0 и F_0 всюду зависимы на M_c. По индукции отсюда уже несложно вывести зависимость интегралов H и F (детали можно найти в книге [83]). Итак, справедлива

Теорема [76]. *Если тяжелое твердое тело динамически несимметрично, то уравнения вращения не имеют независимого от функции $H_0 + \varepsilon H_1$ формального интеграла $\sum F_r \varepsilon^r$ с аналитическими на уровне M_c коэффициентами.*

Это утверждение дает отрицательный ответ на вопрос, поставленный Пуанкаре в [146, п. 86].

Возвращаясь к исходной гамильтоновой системе с тремя степенями свободы, получаем, что уравнения вращения тяжелого несимметричного твердого тела с неподвижной точкой не имеют дополнительного интеграла, коммутирующего с интегралом площадей, в виде формального ряда по степеням ε с однозначными и аналитическими во всем фазовом пространстве коэффициентами. Учитывая известную связь между формальными по ε интегралами и полиномиальными интегралами обратимых систем (см. § 1, гл. II), приходим к следующему результату: в несимметричном случае нет дополнительных интегралов в виде многочленов по импульсам с аналитическими на группе $SO(3)$ коэффициентами, коммутирующих с интегралом площадей.

3. В качестве еще одного примера рассмотрим возмущенное движение волчка Лагранжа (см. § 5, гл. II). Более точно, речь пойдет о вращении тяжелого динамически симметричного твердого тела ($I_1 = I_2$), у которого центр масс слегка смещен относительно оси динамической симметрии. Пусть r_1, r_2, r_3 — координаты центра масс относительно осей инерции. Фиксируя значение $r_3 \neq 0$, введем малый параметр $\varepsilon = \sqrt{r_1^2 + r_2^2} \,/\, r_3$.

При $\varepsilon = 0$ имеем вполне интегрируемую задачу Лагранжа. Поставим задачу о наличии дополнительного интеграла в виде формального ряда по степеням ε, коммутирующего с интегралом площадей. Ее решение проводится по схеме, изложенной в работе [76].

Сначала с помощью интеграла площадей понижается порядок гамильтоновой системы и осуществляется переход к переменным действие — угол $x_i \mod 2\pi$, y_i $(i = 1, 2)$ невозмущенной задачи. В этих переменных разложение возмущающей функции H_1 в двойной ряд Фурье имеет вид (2.3) (где надо положить $H_{m,0} = 0$). Если

$$r_3 \neq 0 , \qquad I_1 \neq I_3 , \tag{2.4}$$

то коэффициенты Фурье $H_{m,\pm 1}$ отличны от нуля. Как показано в работе [149], при условиях (2.4) вековое множество **B** в возмущенной задаче состоит из бесконечного числа замкнутых кривых, охватывающих точку y^0, причем замыкание множества **B** состоит из одной точки y^0, которой отвечает неустойчивое вращение волчка Лагранжа вокруг вертикали. Ясно, что вековое множество **B** является ключевым для класса функций, аналитических в любой окрестности точки y^0, поэтому здесь можно было бы воспользоваться теоремой 3. Однако функция Гамильтона H_0 имеет при $y = y^0$ особенность, следовательно, теорема 3 непосредственно не применима. Эта трудность преодолевается так же, как и в работе [76]: функция Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$ аналитична в фазовом пространстве $T^*SO(3) = \mathbb{R}^3 \times SO(3)$, поэтому естественно рассмотреть задачу о наличии дополнительного интеграла в виде формального ряда по степеням ε с аналитическими в $\mathbb{R}^3 \times SO(3)$ коэффициентами, находящегося в инволюции с интегралом площадей.

Оказывается [149], при условиях (2.4) такого интеграла нет. Заметим, что при $I_1 = I_3$ возмущенная задача вполне интегрируема (это снова задача Лагранжа), а при $r_3 = 0$ имеются интегрируемые задачи Ковалевской ($I_1 = 2I_3$) и Горячева — Чаплыгина ($I_1 = 4I_3$, постоянная интеграла площадей равна нулю). Задача о наличии дополнительного интеграла при $r_3 = 0$ значительно сложнее: здесь вековое множество **B** уже не обладает ключевым свойством.

§ 3. Группы симметрий

1. Следуя работе [101], применим метод Пуанкаре к задаче о наличии групп симметрий у систем дифференциальных уравнений (1.1). Будем рассматривать симметрии, порожденные системой уравнений

$$\begin{aligned} y_j' &= Y_j^0 + \varepsilon Y_j^1 + \ldots, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \\ x_k' &= X_k^0 + \varepsilon X_k^1 + \ldots, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Коэффициенты Y_j^r и X_k^s $(r, s \geqslant 0)$ считаются 2π-периодическими по координатам $x_1, \ldots, x_n$.

Ограничимся рассмотрением "невырожденного" случая, когда выполнены следующие условия:

1) $n \geqslant m$ и ранг матрицы $\|\partial\omega_k/\partial y_j\|$ почти всюду равен m;

2) если $\sum \omega_k(y)a_k \equiv 0$ с некоторыми целыми a_k, то все a_k — нули.

Например, при $m = 1$ эти условия заведомо выполнены, когда кривая $y \to \omega(y)$ регулярна и трансверсально пересекает резонансные поверхности $\sum \omega_k a_k = 0$ $(a_k \in \mathbb{Z})$. При $m = n$ условия невырожденности сводятся к единственному: почти всюду $\det \|\partial\omega_k/\partial y_j\| \neq 0$. Заметим, что в § 1 в определении невырожденной системы фигурировало только условие 2).

Все функции, встречающиеся ниже, считаем аналитическими.

Положим сначала $\varepsilon = 0$ и найдём все поля симметрий невозмущенной интегрируемой системы. Нетрудно показать, что условие коммутирования векторных полей (1.1) и (3.1) при $\varepsilon = 0$ сводится к серии равенств

$$\sum \frac{\partial Y_j^0}{\partial x_l}\omega_l = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant m, \tag{3.2}$$

$$\sum \frac{\partial \omega_k}{\partial y_j} Y_j^0 = \sum \frac{\partial X_k^0}{\partial x_l}\omega_l, \qquad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{3.3}$$

Лемма 1. *Если невозмущенная система невырождена, то $Y_j^0 \equiv 0$, а функции X_k^0 не зависят от x.*

Доказательство. Решим уравнения (3.2) методом Фурье. Положим $Y_j^0 = \sum \zeta_\alpha(y) \exp[i(\alpha, x)]$.

Из (3.2) найдем $(\alpha, \omega(y))\zeta_\alpha \equiv 0$. Невозмущенная система невырождена, и в кольце аналитических функций нет делителей нуля, поэтому $\zeta_\alpha = 0$ при всех $\alpha \neq 0$. Следовательно, функции Y_j^0 зависят лишь от y. В частности, левые части равенств (3.3) не содержат координат $x_1, \ldots, x_n$. Усредняя обе части (3.3) по $\mathbf{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$, приходим к соотношению

$$\sum \frac{\partial \omega_k}{\partial y_j} Y_j^0 = 0. \tag{3.4}$$

Согласно определению невырожденности, $\operatorname{rank} \|\partial\omega_k/\partial y_j\| = m \leqslant n$. Поэтому из (3.4) следуют равенства $Y_j^0 \equiv 0$. Применяя к уравнениям $\sum \frac{\partial X_k^0}{\partial x_l}\omega_l = 0$ метод Фурье, получаем, что функции X_k^0 зависят лишь от медленных переменных y. Лемма доказана.

Положим $Y_j^1 = \sum g_\alpha^j(y)\exp[i(\alpha, x)]$. Из условия коммутирования (в первом приближении по ε) векторных полей (1.1) и (3.1) можно вывести равенства

$$(\alpha, \omega)g_\alpha = (\alpha, X^0)\Phi_\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.5}$$

Здесь X^0, Φ_α, g_α — векторы с компонентами X_k^0, Φ_α^j, g_α^j; Φ_α^j — коэффициенты Фурье функции Φ_j (см. § 1). При выводе (3.5) была использована лемма 1.

Лемма 2. *Предположим, что в некоторой открытой области $D \subset \mathbb{R}^m = \{y\}$ вектор частот ω ненулевой, и множество $\mathbf{P}_1 \cap D$ является ключевым. Тогда найдется такая аналитическая в области D функция ξ_0, что $X^0 = \xi_0\omega$.*

Действительно, согласно (3.5), в точках множества Пуанкаре $\mathbf{P}_1$ векторы X^0 и ω линейно зависимы. Так как $\mathbf{P}_1$ — ключевое множество, то X^0 и ω зависимы во всех точках области D: $\mu X_0 = \lambda\omega$, $\mu^2 + \lambda^2 \neq 0$. Поскольку $\omega \neq 0$, то $\mu \neq 0$. Следовательно, $X_0 = \xi_0\omega$, и ξ_0 — аналитическая функция, что и требовалось доказать.

Подставим в (3.5) вместо X_0 векторное поле $\xi_0\omega$ и воспользуемся соотношением $(\alpha, \omega(y)) \not\equiv 0$. Тогда $g_\alpha = \xi_0\Phi_\alpha$ для всех ненулевых α. Положим $\Psi_k = \sum \psi_\alpha^k(y)\exp[i(\alpha, x)]$, $X_k^1 = \sum \eta_\alpha^k(y)\exp[i(\alpha, x)]$.

Из условия коммутирования систем (1.1) и (3.1) в первом приближении по ε наряду с (3.5) выводится цепочка соотношений

$$i(\alpha, \omega)\eta_\alpha^k = (\alpha, X^0)\psi_\alpha^k + \sum \frac{\partial\omega_k}{\partial y_j}g_\alpha^j - \sum \frac{\partial X_k^0}{\partial y_j}\Phi_\alpha^j, \quad \alpha \in \mathbb{Z}^n. \tag{3.6}$$

Полагая в (3.6) $y \in \mathbf{P}_1$, $X_k^0 = \xi_0\omega_k$ и используя неравенство $\omega \neq 0$, приходим к соотношению

$$\sum \frac{\partial\xi_0}{\partial y_j}\Phi_\alpha^j = 0. \tag{3.7}$$

Лемма 3. *Пусть множество Пуанкаре $\mathbf{P}_0$ является ключевым для $C^\omega(D)$. Тогда $\xi_0 = \mathrm{const}$.*

Действительно, $\mathbf{P}_0 \subset \mathbf{P}_1$, поэтому (3.7) справедливо во всех точках $y \in \mathbf{P}_0$. При $y \in \mathbf{P}_0$ найдется m линейно независимых векторов $\Phi_\alpha, \Phi'_\alpha, \Phi''_\alpha, \ldots$, ортогональных $\partial\xi_0/\partial y$, поэтому $d\xi_0 = 0$ на множестве $\mathbf{P}_0$. В силу ключевого свойства $\mathbf{P}_0$ получаем, что $d\xi_0 \equiv 0$, и, следовательно, $\xi_0 = \mathrm{const}$.

Теорема 1. *Предположим, что в области $D \subset \mathbb{R}^m = \{y\}$ невозмущенная система невырождена, $\omega \neq 0$ и множество $\mathbf{P}_0$ — ключевое для $C^\omega(D)$. Тогда при $(x, y) \in \mathbf{T}^n \times D$ векторное поле*

(3.1) *отличается от поля* (1.1) *множителем* $\xi_\varepsilon = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \ldots$, $\xi_r = \mathrm{const}$ $(r \geqslant 0)$.

Доказательство. Пусть v_ε — векторное поле (1.1), а u_ε — векторное поле (3.1). Согласно леммам 1–3, $u_0 = \xi_0 v_0$, где $\xi_0 = \mathrm{const}$. Следовательно, векторное поле $\omega_\varepsilon = (u_\varepsilon - \xi_0 v_\varepsilon)/\varepsilon$ также будет аналитическим полем симметрий. Из лемм 1–3 снова вытекает, что $\omega_0 = \xi_1 v_0$, $\xi_1 = \mathrm{const}$, и т. д. В результате приходим к равенству $u_\varepsilon = \xi_\varepsilon v_\varepsilon$, где $\xi_\varepsilon = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \ldots$

2. Рассмотрим теперь случай, когда система (1.1) имеет интеграл $H = H_0(x,y) + \varepsilon H_1(x,y) + \ldots$ с аналитическими и 2π-периодическими по x коэффициентами. Тогда, согласно результатам § 1, множество Пуанкаре $\mathbf{P}_0$ не может обладать ключевым свойством. В невырожденном случае функция H_0 не зависит от x (см. лемму 1 из § 1).

Теорема 2. *Предположим, что невозмущенная система невырождена. Пусть $dH_0 \neq 0$, $\omega \neq 0$ в некоторой точке $y^0 \in \mathbb{R}^m$, и в любой ее окрестности U множество Пуанкаре $\mathbf{P}_1$ является ключевым для класса функций $C^\omega(U)$. Тогда при $(x,y) \in \mathbf{T}^n \times D$ векторное поле* (3.1) *отличается от поля* (1.1) *множителем* $\xi_\varepsilon = \xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \ldots$, *где* ξ_r — *аналитические функции от* H.

Доказательство. Согласно леммам 1 и 2, $u_0 = \xi_0 v_0$, где ξ_0 — аналитическая функция от y. Так как $[u_0, v_0] = 0$, то ξ_0 — интеграл невозмущенной системы (1.1) (см. § 3 гл. II). По лемме 1 из § 1 функции ξ_0 и H_0 зависимы в точках множества $\mathbf{P}_1 \cap D$; в силу ключевого свойства этого множества они зависимы всюду. В малой области нет критических точек функции H_0, поэтому по теореме о неявной функции в этой области $\xi_0 = \Phi_0(H_0)$, где Φ_0 — некоторая аналитическая функция (см. п. 1 § 1). Следовательно, векторное поле $\omega_\varepsilon = (u_0 - \Phi_0(H)v_\varepsilon)/\varepsilon$ снова будет аналитическим полем симметрий. Аналогично $\omega_0 = \Phi_1(H_0)v_0$ и т. д. В результате имеем $u_\varepsilon = \Phi(H,\varepsilon)v_\varepsilon$, где $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon\Phi_1 + \ldots$ Теорема доказана.

Сделаем ряд замечаний.

1. В предположениях теоремы 2 система уравнений (1.1) не допускает нетривиальных полей симметрий $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots$ с однозначными коэффициентами, аналитическими во всей области $D \times \mathbf{T}^n$.

2. Нигде не предполагалась сходимость фигурировавших выше степенных рядов по ε, так что в предположениях теорем 1 и 2 система (1.1) не допускает полей симметрий в виде формальных рядов по степеням ε.

3. Если множество Пуанкаре $\mathbf{P}_1$ всюду плотно в D, то можно утверждать отсутствие поля симметрий $u_0 + \varepsilon u_1 + \ldots$ с гладкими в области $D \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами.

3. Применим результаты п. 2 к “основной проблеме динамики” по Пуанкаре. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.8}$$

с аналитическим и 2π-периодическим по x гамильтонианом $H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y) + \ldots$ Пусть v_ε — векторное поле (3.8), а u_ε — поле симметрий вида (3.1).

Теорема 3. *Предположим, что y^0 — некритическая точка функции H_0, и в этой точке*

$$\det \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2} \right\| \neq 0. \tag{3.9}$$

Предположим также, что в любой малой окрестности U точки y^0 множество Пуанкаре $\mathbf{P}_1$ является ключевым для класса функций $C^\omega(U)$. Тогда в области $U \times \mathbf{T}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^n$ справедливо равенство $u_\varepsilon = \Phi(H, \varepsilon) v_\varepsilon$, где Φ — некоторая аналитическая функция.

Действительно, согласно (3.9), невозмущенная система (3.8) невырождена. Далее, вектор частот $\omega = \partial H_0 / \partial y$ отличен от нуля в точке $y = y^0$. Остается воспользоваться теоремой 2.

Этот результат усиливает теорему 3 из § 1, которая при тех же предположениях гарантирует отсутствие дополнительного аналитического интеграла, независимого от интеграла энергии. Действительно, как было отмечено в § 3 гл. II, каждый интеграл уравнений Гамильтона порождает гамильтоново поле симметрий. Более того, полям симметрий могут отвечать многозначные интегралы (напомним, что под многозначной функцией на M мы понимаем замкнутую 1-форму φ: локально $\varphi = dF$, где F — функция на M). Из этого замечания и теоремы 3 вытекает

Следствие. *В предположениях теоремы 3 гамильтонова система (3.8) не имеет независимого от H формального интеграла $\sum F_r(x, y)\varepsilon^r$ с многозначными в $\mathbf{T}^n \times \mathbb{R}^n$ коэффициентами.*

4. Теорема 3 применима ко многим задачам гамильтоновой механики. Так, например, плоская ограниченная круговая задача трех тел не допускает нетривиальной группы симметрий в виде ряда по степеням малого параметра μ с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами (ср. с п. 1 § 2; параметр μ равен отношению массы Юпитера к массе Солнца).

В качестве еще одного примера рассмотрим задачу о вращениях тяжелого несимметричного твердого тела, у которого центр масс находится вблизи точки подвеса (см. п. 2 § 2). Эта система с тремя степенями свободы имеет два гамильтоновых поля симметрий — v_ε и u_ε; поле v_ε отвечает интегралу энергии, а u_ε — интегралу момента (u_ε на самом деле не зависит от малого параметра Пуанкаре). С помощью результатов п. 2 § 2 и теоремы 3 можно показать, что уравнения Гамильтона рассматриваемой задачи не допускают еще одного поля симметрий w_ε, независимого с полями u_ε и v_ε, коммутирующего с полем u_ε ($[u_\varepsilon, w_\varepsilon] = 0$) и аналитического по фазовым переменным и параметру ε. Отметим одно из следствий этого результата: уравнения вращения несимметричного твердого тела, у которого центр масс не совпадает с точкой подвеса, не допускают полиномиального по скоростям интеграла с многозначными на группе $SO(3)$ коэффициентами, независимого от интегралов энергии и момента и коммутирующего с последним. Отметим, что на группе $SO(3)$ имеются неоднозначные функции (ввиду неодносвязности $SO(3)$). На самом деле эти функции двузначны: после возвращения в окрестность исходной точки на $SO(3)$ они принимают одно из двух возможных значений.

§ 4. Обратимые системы с торическим пространством положений

1. В этом параграфе изучаются гамильтоновы системы вида

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n; \quad H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x). \quad (4.1)$$

Функция H_0 — невырожденная квадратичная форма по импульсам $y_1, \ldots, y_n$ с постоянными коэффициентами:

$$H_0 = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} y_i y_j, \quad \det \|a_{ij}\| \neq 0. \quad (4.2)$$

Функция H_1 аналитична на торе $\mathbf{T}^n = \{x_1, \ldots, x_n \bmod 2\pi\}$ размерности n. Гамильтонова система (4.1), конечно, является частным случаем систем, о которых говорилось во введении к этой главе. Она сохраняет наиболее существенные черты общего случая, однако ее анализ проще в техническом отношении.

Если форма H_0 положительно определена, то уравнения (4.1) описывают динамику обратимой механической системы на n-мерном торе с кинетической энергией H_0 и малым потенциалом εH_1.

Пусть $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ — векторы из $\mathbb{R}^n$. Введем следующие обозначения: $(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \eta_i$; $\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \xi_i \eta_j$. С их использованием формулу (4.2) можно записать короче: $H_0 = \langle y, y \rangle / 2$. В дальнейшем анализе важную роль будет играть разложение Фурье возмущающей функции:

$$H_1 = \sum h_m e^{i(m,x)}, \quad h_m = \text{const}, \quad m \in \mathbb{Z}^n. \tag{4.3}$$

Следуя Пуанкаре, поставим задачу о наличии у системы (4.1) полного набора независимых интегралов (в количестве n) в виде степенных рядов $\sum F_k(x,y)\varepsilon^k$ с аналитическими и 2π-периодическими по x коэффициентами. Подчеркнем, что совсем необязательно требовать сходимости этих степенных рядов. Используя невырожденность невозмущенной задачи с гамильтонианом H_0, можно показать (см. ниже), что формальные интегралы, составляющие полный набор интегралов, находятся попарно в инволюции.

Как было показано в § 10 гл. II, задача о наличии полного набора независимых формальных интегралов тесно связана с возможностью реализации классической схемы теории возмущений. Укажем некоторые явные формулы, которые будут использованы в дальнейшем.

Основная идея теории возмущений состоит в поиске такого канонического преобразования $y, x \bmod 2\pi \to u, v \bmod 2\pi$, зависящего от ε, чтобы в новых переменных гамильтониан $H_0 + \varepsilon H_1$ принял вид $K_0(u) + \varepsilon K_1(u) + \varepsilon^2 K_2(u) + \ldots$ Если такое преобразование удается найти, исходная система уравнений Гамильтона будет проинтегрирована. Будем искать его в виде $y_i = \dfrac{\partial S}{\partial x_i}$, $v_i = \dfrac{\partial S}{\partial u_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; $S = S_0(u,x) + \varepsilon S_1(u,x) + \ldots$ Положим $S_0 = \sum u_i x_i$; тогда при $\varepsilon = 0$ имеем тождественное преобразование. Производящая функция S должна удовлетворять уравнению Гамильтона — Якоби: $H_0\,(\partial S/\partial x) + \varepsilon H_1(x) = K_0(u) + \varepsilon K_1(u) + \ldots$ Разлагая левую часть этого уравнения в ряд по степеням ε и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим бесконечную цепочку уравнений для последовательного отыскания $S_1, S_2, \ldots$:

$$\begin{gathered}
\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial u_k}\frac{\partial S_1}{\partial x_k} + H_1(x) = K_1(u),\\
\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial u_k}\frac{\partial S_2}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}\frac{\partial S_1}{\partial x_i}\frac{\partial S_1}{\partial x_j} = K_2(u),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\sum_k \frac{\partial H_0}{\partial u_k}\frac{\partial S_m}{\partial x_k} + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\left[a_{ij}\sum_{p+q=m}\frac{\partial S_p}{\partial x_i}\frac{\partial S_q}{\partial x_j}\right] = K_m(u),\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Нетрудно показать, что уравнения (4.4) имеют единственное (формальное) решение $S_1, S_2, \ldots$ в виде тригонометрических рядов по $x_1, \ldots, x_n$ с нулевыми свободными коэффициентами: $S_m = \sum' S_m^\tau(u)e^{i(\tau,x)}$ $(\tau \in \mathbb{Z}^m \setminus \{0\})$. Решим первое уравнение системы (4.4) методом Фурье. Используя формулу (4.3), получим

$$K_1 = h_0; \quad S_1^\tau = ih_\tau/(\omega, \tau), \quad \tau \neq 0, \tag{4.5}$$

где $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)$, $\omega_s = \partial H_0/\partial u_s$. Ясно, что $(\omega, \tau) = \langle u, \tau\rangle$. Из формулы (4.5) видно, что функция S_1 не определена в точках из $\mathbb{R}^n = \{u\}$, лежащих на гиперплоскостях $\langle \tau, u\rangle = 0$, $h_\tau \neq 0$. Множество всех таких точек назовем множеством Пуанкаре первого порядка и обозначим $\mathbf{P}^1$ (в § 1 оно обозначалось $\mathbf{P}_1$).

Решая второе уравнение системы (4.4) методом Фурье, получим формально $S_2^k = ih'_k/\langle u, k\rangle$, где

$$h'_k = \frac{1}{2}\sum_{\tau+\sigma=k} \frac{\langle \tau, \sigma\rangle h_\tau h_\sigma}{\langle u, \tau\rangle\langle u, \sigma\rangle}, \quad k \neq 0. \tag{4.6}$$

Аналогично решаются другие уравнения системы (4.4).

2. Теорема 1$_1$. *Если множество Пуанкаре $\mathbf{P}^1$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей, то система (4.1) не имеет n формальных интегралов $\sum F_k\varepsilon^k$ с аналитическими коэффициентами $F_k : \mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$, независимых при $\varepsilon = 0$.*

Теорема 1_1 просто выводится из следующего утверждения: если система (4.1) имеет n интегралов

$$F_0^{(1)}(x, y) + \varepsilon F_1^{(1)}(x, y) + \ldots,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F_0^{(n)}(x, y) + \varepsilon F_1^{(n)}(x, y) + \ldots,$$

то: 1) функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}$ не зависят от x; 2) якобиан $\dfrac{\partial(F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)}$ обращается в нуль в точках множества $\mathbf{P}^1$.

Это утверждение — простое следствие леммы 1 из § 1.

Докажем теперь теорему 1_1. Воспользуемся следующим наблюдением: объединение бесконечного числа различных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^n$, проходящих через начало координат, является ключевым множеством для класса функций, аналитических в $\mathbb{R}^n$. Действительно, пусть Π — одна из "предельных" гиперплоскостей множества $\mathbf{P}^1$, и пусть точка a не лежит на Π. Через точку a можно провести прямую l, трансверсально пересекающую Π в точке, отличной от начала координат (рис. 13). Тогда l пересекает бесконечное число различных гиперплоскостей из $\mathbf{P}^1$. Пусть f — аналитическая функция в $\mathbb{R}^n$, обращающаяся в нуль на множестве $\mathbf{P}^1$. Ясно, что ограничение f на прямую l будет аналитической функцией, множество нулей которой имеет хотя бы одну конечную предельную точку. Следовательно, $f\big|_l \equiv 0$, и, в частности, $f(a) = 0$. Для завершения доказательства теоремы остается воспользоваться аналитичностью якобиана функций $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}$.

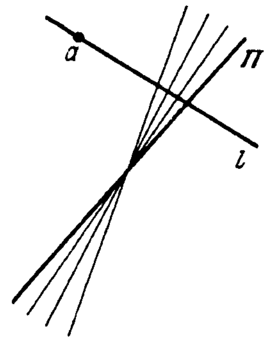

Рис. 13

В условиях теоремы 1_1 можно утверждать отсутствие полного набора независимых интегралов вида $\sum F_k(x, y)\varepsilon^k$, коэффициенты которых F_k аналитичны в прямом произведении $D \times \mathbf{T}^n$, где D — любая открытая область в $\mathbb{R}^n = \{y\}$, имеющая непустое пересечение с $\overline{\mathbf{P}}^1 \backslash \mathbf{P}^1$ (черта обозначает замыкание множества).

Теорема $1_1'$. *Пусть выполнены условия теоремы 1_1. Если гамильтонова система* (4.1) *имеет $n-1$ аналитический интеграл*

$$\begin{gathered} F^{(1)} = F_0^{(1)} + \varepsilon F_1^{(1)} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ F^{(n-1)} = F_0^{(n-1)} + \varepsilon F_1^{(n-1)} + \ldots, \end{gathered} \tag{4.7}$$

причем функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n-1)}$ независимы хотя бы в одной точке из $(\overline{\mathbf{P}}^1 \backslash \mathbf{P}^1) \times \mathbf{T}^n$, то уравнения Гамильтона не имеют независимого от $F^{(1)}, \ldots, F^{(n-1)}$ интеграла в виде формального ряда $\sum F_s \varepsilon^s$ с аналитическими и однозначными в $\mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами.

Это утверждение — следствие теоремы 3 из § 1 и ключевого свойства множества Пуанкаре $\mathbf{P}^1$.

Среди интегралов (4.7) может быть функция Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$. Заметим, что единственной критической точкой функции H_0 является точка $y = 0$. Отсюда вытекает, в частности, что при $n = 2$ заключение теоремы 1_1 можно усилить, заменив условие независимости функций H_0 и F_0 более слабым условием независимости рядов $H_0 + \varepsilon H_1$ и $\sum F_s \varepsilon^s$.

3. Предположим, что условие теоремы 1_1 не выполнено. Тогда имеется решение S_1 первого уравнения системы (4.4), аналитическое в $(\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{P}^1) \times \mathbf{T}^n$. В частности, функции (4.6) определены и аналитичны в области $\mathbb{R}^n \setminus \mathbf{P}^1$. В этой ситуации можно определить множество Пуанкаре второго порядка $\mathbf{P}^2$ как совокупность гиперплоскостей $\langle k, u\rangle = 0, \quad k \neq 0$, на которых соответствующие функции $h'_k \neq 0$.

Теорема 1_2. *Если множество $\mathbf{P}^2$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей, то система* (4.1) *не имеет n формальных интегралов $\sum F_s \varepsilon^s$ с аналитическими коэффициентами $F_s : \mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$, независимых при $\varepsilon = 0$.*

Теорема 1_2 доказывается по той же схеме, что и теорема 1_1. Справедлива также теорема $1'_2$, которая получается из теоремы 1_1 заменой $\mathbf{P}^1$ на $\mathbf{P}^2$.

Отметим интересный частный случай, когда $h'_k \equiv 0$ при всех $k \neq 0$. Тогда $S_2 \equiv 0$. Индукцией из формул (4.4) получаем $S_3 \equiv S_4 \equiv \ldots \equiv 0$; в этом случае уравнения (4.1) вполне интегрируемы. Если точки множества $\{m \in \mathbb{Z}^n : h_m \neq 0\}$ лежат на ортогональных (в евклидовой метрике $\langle\ ,\ \rangle$) прямых, проходящих через начало координат, то, очевидно, $h'_k = 0$ при $k \neq 0$. Как будет показано ниже, в этом случае канонические переменные разделяются.

Множества Пуанкаре бо́льших порядков определяются рекурсивно: если существуют решения $S_1, S_2, \ldots, S_{p-1}$ первых $p-1$ уравнений системы (4.4), аналитические в $\big(\mathbb{R}^n \backslash (\mathbf{P}^1 \cup \ldots \cup \mathbf{P}^{p-1})\big) \times \mathbf{T}^n$, то корректно определено множество Пуанкаре $\mathbf{P}^p$ порядка p и справедливы теоремы 1_p и $1'_p$. В случае, когда возмущающая функция H_1 является тригонометрическим многочленом, каждое из множеств $\mathbf{P}^p$ состоит лишь из конечного числа различных гиперплоскостей (т. е. $\overline{\mathbf{P}}^p = \mathbf{P}^p$), и поэтому теоремы 1_p $(p = 1, 2, \ldots)$ не дают заключения об интегрируемости гамильтоновой системы (4.1). Подобная ситуация часто встречается в анализе. Например, имеются ряды, сходимость или расходимость которых нельзя установить бесконечной серией логарифмических признаков.

Если определены множества Пуанкаре всех порядков, то можно положить $\mathbf{P}^\infty = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} \mathbf{P}^p$. Оказывается, справедливы теоремы 1_∞ и $1'_\infty$. Эти теоремы, правда, неконструктивны: для проверки выполнения их условий необходимо проделать бесконечное число шагов теории возмущений.

Оказывается, для случая тригонометрических многочленов условия теорем 1_∞ и $1'_\infty$ можно сделать эффективными.

§ 5. Критерий интегрируемости для случая, когда потенциал является тригонометрическим многочленом

1. Пусть функция $H_1 : \mathbf{T}^n \to \mathbb{R}$ — тригонометрический многочлен. Тогда, очевидно, множество $\Delta = \{m \in \mathbb{Z}^n : h_m \neq 0\}$ конечно.

Как и в общем случае, оно инвариантно относительно отображения $m \to -m$. Будем считать, что $H_1 \neq \text{const}$; тогда Δ содержит по меньшей мере два элемента.

Теорема 1 [97]. *Предположим, что квадратичная форма H_0 положительно определена. Тогда гамильтонова система с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$ имеет полный набор формально аналитических по ε первых интегралов, независимых при $\varepsilon = 0$, в том и только том случае, когда точки множества Δ расположены на $d \leqslant n$ прямых, ортогонально (в метрике $\langle\ ,\ \rangle$) пересекающихся в начале координат.*

Доказательство достаточности условий теоремы 1 совсем простое. Действительно, пусть $l_1, \ldots, l_d$ — прямые в $\mathbb{R}^n$, о которых идет речь в теореме 1. Через k_i обозначим точку из множества $(\mathbb{Z}^n \cap \cap\, l_i) \setminus \{0\}$, ближайшую к точке 0. Дополним $k_1, \ldots, k_d$ целочисленными векторами $k_{d+1}, \ldots, k_n$ до базиса в $\mathbb{R}^n$. Выполним теперь линейное преобразование $x' = Mx$ с невырожденной целочисленной матрицей $M = \begin{Vmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{Vmatrix}$ и расширим его до канонического преобразования $x, y \to x', y'$, полагая $y' = (M^\top)^{-1} y$. В новых переменных x', y' функция Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$ приводится к виду

$$\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{d} a'_{ii} y_i'^2 + \sum_{j=1}^{n} \sum_{i>d} a'_{ij} y'_i y'_j\right) + \varepsilon \sum_{i=1}^{d} f_i(x'_i), \tag{5.1}$$

где $a'_{ij} = \text{const}$, f_i — 2π-периодические тригонометрические многочлены. Ясно, что переменные x', y' разделяются, поэтому уравнения Гамильтона с гамильтонианом (5.1) имеют следующий набор n независимых коммутирующих интегралов:

$$F_i = \frac{1}{2}(a'_{ii} y_i'^2 + y'_i \sum_{s>d} a'_{is} y'_s) + \varepsilon f_i(x'_i), \quad 1 \leqslant i \leqslant d,$$

$$F_j = {y'}_j, \qquad j > d.$$

Возвращаясь к старым переменным x, y, получим набор интегралов, линейных по ε (или вообще не зависящих от ε), коэффициенты которых — аналитические функции в $\mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^n = \{y, x \mod 2\pi\}$.

Положим теперь $\varepsilon = 1$ и рассмотрим уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H_0 + H_1$. Как уже отмечалось в п. 4 § 1 гл. II, если система с гамильтонианом $H_0 + H_1$ имеет n полиномиальных по импульсам интегралов с независимыми старшими однородными формами, то система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ имеет n аналитических по ε первых интегралов, независимых при $\varepsilon = 0$. С другой стороны, как показал С. Л. Зиглин [66], если рассматриваемая система имеет r независимых полиномиальных интегралов, то она обязательно имеет r интегралов того же вида с независимыми старшими однородными формами. С учетом этих замечаний из теоремы 1 выводится любопытное

Следствие. *Если уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H_0 + H_1$ имеют n независимых полиномиальных интегралов, то они имеют n независимых коммутирующих полиномиальных интегралов не выше второй степени.*

Замечание. По-видимому, это утверждение справедливо и в более общем случае, когда потенциальная энергия H_1 — произвольная аналитическая функция на $\mathbb{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$ (а не только тригонометрический полином). М. Л. Бялый [39] доказал эту гипотезу в частном случае, когда $n = 2$ и гамильтонова система имеет дополнительный полиномиальный интеграл не выше четвертой степени. Отметим, что задача о дополнительном полиномиальном интеграле заданной степени много проще задачи о наличии интеграла в виде полинома, степень которого заранее не фиксирована.

Рассмотрим k ортогональных прямых в $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$, пересекающихся в нуле; на каждой возьмем по две точки, расположенные на равных расстояниях по разные стороны от точки $O \in \mathbb{R}^n$. Выпуклую оболочку этих $2k$ точек назовем k-мерным ромбоидом. Число l-мерных граней k-мерного ромбоида есть $2^{l+1}C_k^{l+1}$; в частности, этот многогранник имеет $2k$ вершин и 2^k граней размерности $k - 1$. Ясно, что k-мерный ромбоид является выпуклым многогранником, двойственным k-мерному параллелепипеду.

Следствие 2. *Если уравнения Гамильтона с гамильтонианом $H_0 + H_1$ имеют n независимых полиномиальных интегралов, то выпуклая оболочка множества Δ является k-мерным ромбоидом ($k \leqslant n$), причем на этом ромбоиде нет точек из Δ, отличных от вершин.*

В качестве примера рассмотрим систему с потенциалом вида

$$H_1 = \sum_{i<j} f(x_i - x_j), \tag{5.2}$$

где $f(\cdot)$ — четная функция, являющаяся непостоянным 2π-периодическим тригонометрическим многочленом (потенциал парного взаимодействия). Можно показать, что здесь выпуклой оболочкой множества Δ является $(n-1)$-мерный многогранник с $2C_n^2$ вершинами. Так как $2C_n^2 > 2(n-1)$ при $n \geqslant 3$, то в этом случае система с потенциалом (5.2) не имеет полного набора полиномиальных интегралов; это не зависит от вида евклидовой метрики $\langle\ ,\ \rangle$.

В работе Адлера и ван Мёрбеке [177] рассмотрен частный случай этой задачи: метрика $\langle\ ,\ \rangle$ — стандартная метрика в $\mathbb{R}^n$, $f = \cos(\cdot)$. Это — классический вариант системы Гросс — Невё, хорошо известной в теоретической физике. Функция Гамильтона имеет вид $H = \dfrac{1}{2}\sum y_s^2 + \sum\limits_{i<j}\cos(x_i - x_j)$.

К этому же виду приводится гамильтониан задачи о движении по окружности n одинаковых точек, попарно связанных упругими пружинами. С помощью метода Ковалевской в [177] доказано, что при $n = 3$ и $n = 4$ для почти всех начальных условий переменные y_s и $\exp(ix_s)$ не будут мероморфными функциями комплексного времени. В частности, система Гросс — Невё алгебраически неинтегрируема. Подчеркнем, что алгебраически неинтегрируемые системы могут быть вполне интегрируемыми (см. § 9 гл. II).

2. Введем в $\mathbb{Z}^n$ стандартное отношение лексикографического порядка, обозначаемое в дальнейшем символом $\prec$: $\sigma \prec \delta$, если для наименьшего индекса s, при котором $\sigma_s \neq \delta_s$, выполнено неравенство $\sigma_s < \delta_s$. Мы скажем, что $\sigma \preccurlyeq \delta$, если $\sigma \prec \delta$ или $\sigma = \delta$.

Определение. *Пусть α — наибольший элемент Δ, а β — наибольший линейно независимый с α элемент множества $\Delta \setminus \{\alpha\}$. Вектор α назовем вершиной Δ, а вектор β — вершиной Δ, примыкающей к α.*

Оставляя в стороне тривиальный случай интегрируемости, когда все точки из Δ лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, будем предполагать в дальнейшем, что примыкающая вершина β всегда существует.

Доказательство теоремы 1 основано на применении следующего утверждения, представляющего самостоятельный интерес.

Теорема 2 [97]. *Пусть α, β — вершины Δ, и*

$$m\langle\alpha,\alpha\rangle + 2\langle\alpha,\beta\rangle \neq 0 \tag{5.3}$$

для всех целых $m \geqslant 0$. Тогда гамильтонова система с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$ не имеет n формально аналитических интегралов, независимых при $\varepsilon = 0$.

Подчеркнем, что для справедливости теоремы 2 нужна лишь невырожденность квадратичной формы H_0. Теорема 2 доказывается с помощью теории возмущений. Оказывается, свободные коэффициенты интегралов — функции $F_0^{(s)}$ — не содержат угловых координат x и зависимы во всех точках гиперплоскостей $\langle y, m\alpha + \beta\rangle = 0$. Ввиду аналитичности и предположения о линейной независимости α и β, функции $F_0^{(s)}$ зависимы всюду на $\mathbb{R}^n = \{y\}$. Точки

$y \in \mathbb{R}^n$, лежащие на гиперплоскости $\langle y, m\alpha + \beta \rangle = 0$, отвечают резонансным торам невозмущенной интегрируемой задачи, которые разрушаются на m-м шаге теории возмущений.

Теорема 3. *Пусть α и β — векторы из Δ, удовлетворяющие условиям теоремы 2. Если гамильтонова система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ имеет $n-1$ однозначный аналитический интеграл*

$$F_0^{(1)} + \varepsilon F_1^{(1)} + \ldots,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$F_0^{(n-1)} + \varepsilon F_1^{(n-1)} + \ldots,$$

причем функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n-1)}$ независимы хотя бы в одной точке из $\Gamma \times \mathbf{T}^n$, где Γ — гиперплоскость $\langle \alpha, y \rangle = 0$, то уравнения Гамильтона не имеют независимого от функций $F_0^{(s)} + \varepsilon F_1^{(s)} + \ldots$ $(1 \leqslant s \leqslant n-1)$ интеграла в виде формального ряда $\sum F_r(y, x)\varepsilon^r$ с аналитическими в $\mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами.

Из теоремы 3 выводится

Следствие. *Пусть векторы $\alpha, \beta \in \Delta$ удовлетворяют условиям теоремы 2 и Γ — гиперплоскость $\langle \alpha, y \rangle = 0$. Предположим, что система с гамильтонианом $H_0 + H_1$ имеет $n-1$ полиномиальный интеграл $F^{(1)}, \ldots, F^{(n-1)}$, старшие однородные формы которых независимы хотя бы в одной точке из $\Gamma \times \mathbf{T}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbf{T}^n$. Тогда уравнения Гамильтона не имеют дополнительного полиномиального интеграла, независимого от функций $F^{(1)}, \ldots, F^{(n-1)}$.*

Оставшаяся часть § 5 посвящена доказательству теорем 1–3.

3. Основная лемма. *Пусть α и β — вершины множества Δ, удовлетворяющие условию (5.3). Тогда множество $\mathbf{P}^k$ содержит гиперплоскость $\langle k\alpha + \beta, y \rangle = 0$. В частности, вековое множество $\mathbf{P}^\infty$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей, и его замыкание содержит гиперплоскость $\langle \alpha, y \rangle = 0$.*

Пусть $S = S_0 + \varepsilon S_1 + \varepsilon^2 S_2 + \ldots$ — производящая функция канонического преобразования из теории возмущений (см. § 3). Положим $S_m = \sum' S_m^\tau(y) e^{i(\tau, x)}$ $(\tau \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\})$. Согласно (4.5),

$$S_1^\tau = ih_\tau / (\omega, \tau), \quad \tau \neq 0. \tag{5.4}$$

Коэффициенты Фурье S_m^τ $(m = 2, 3, \ldots)$ находятся по следующей индуктивной формуле:

$$S_m^\tau = \frac{1}{2i(\omega, \tau)} \sum_{\substack{u+v=m, \\ \sigma+\delta=\tau}} \langle \sigma, \delta \rangle S_u^\sigma S_v^\delta. \tag{5.5}$$

Эта формула — следствие соотношений (4.4). Ясно, что S_r^τ можно представить в виде дробей, в знаменателях которых стоят выражения вида (ω, τ) и их произведения.

Из определения лексикографического порядка следует, что $\alpha \succ 0$ и $\alpha \succ \gamma$ для всех $\gamma \in \Delta \setminus \{\alpha\}$.

Л е м м а 1. *Функции S_r^τ тождественно нулевые при $\tau \succ r\alpha$.*

Доказательство проводится индукцией по r. Для $r = 1$ справедливость леммы вытекает из формулы (5.4) и определения вершины α. Предположим, что лемма справедлива для всех $r \leqslant m$. Функция S_{r+1}^τ вычисляется по формуле (5.5). Пусть $\tau \succ (r+1)\alpha$. Покажем, что в любом слагаемом правой части (5.5) должен присутствовать сомножитель S_ω^τ, где $\tau \succ \omega\alpha$, $\omega \leqslant r$, равный нулю по предположению индукции. Действительно, если $\tau \preccurlyeq u\alpha$ и $\delta \preccurlyeq v\alpha$, то $\sigma + \delta \preccurlyeq (u+v)\alpha = (r+1)\alpha \prec \tau$. Но это противоречит условию суммирования $\sigma + \delta = \tau$. Лемма доказана.

Л е м м а 2. *Справедливо равенство*

$$S_m^{m\alpha} = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2im(\omega, \alpha)} \sum_{u+v=m} uv S_u^{u\alpha} S_v^{v\alpha}. \tag{5.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Выведем (5.6) из (5.5), положив $\tau = m\alpha$. Будем рассматривать в (5.5) лишь ненулевые слагаемые. Согласно лемме 1, справедливы соотношения $\sigma \preccurlyeq u\alpha$, $\delta \preccurlyeq v\alpha$ и $\sigma + \delta = m\alpha = (u+v)\alpha$. Отсюда $\sigma = u\alpha$ и $\delta = v\alpha$, что и требовалось доказать.

Л е м м а 3. *Справедливо равенство*

$$S_m^{m\alpha} = K_m \left(\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{i(\omega, \alpha)} \right)^{m-1} (S_1^\alpha)^m, \tag{5.7}$$

где

$$K_1 = 1, \quad K_m = \sum_{u+v=m} \frac{uvK_uK_v}{2m}. \tag{5.8}$$

Доказательство проводится индукцией по m. При $m = 1$ формула (5.7) тривиальна. Пусть при $m \leqslant r$ лемма 3 справедлива. Тогда

$$S_{r+1}^{(r+1)\alpha} = \frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{2i(r+1)(\omega, \alpha)} \sum_{\substack{u+v=\\=r+1}} \left[uvK_uK_v \left(\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{i(\omega, \alpha)} \right)^{u+v-2} (S_1^\alpha)^{u+v} \right] =$$

$$= K_{r+1} \left(\frac{\langle \alpha, \alpha \rangle}{i(\omega, \alpha)} \right)^r (S_1^\alpha)^{r+1}$$

Лемма 4. *Если вектор τ линейно независим с α, и $(m-1)\alpha+\beta \prec \tau \prec m\alpha$, то $S_m^\tau \equiv 0$.*

Справедливость этого утверждения при $m=1$ вытекает из определения вершин α и β. Пусть оно справедливо при всех $m \leqslant r$. Воспользуемся формулой (5.5) при $m = r+1$. Согласно предположению индукции и лемме 1, произведение $S_u^\sigma S_v^\delta$ может быть отличным от нуля лишь в следующих случаях:

1) векторы α, σ, δ попарно линейно зависимы;
2) $\sigma \preccurlyeq u\alpha$, $\delta \preccurlyeq (v-1)\alpha+\beta$ или $\sigma \preccurlyeq (u-1)\alpha+\beta$, $\delta \preccurlyeq v\alpha$.

В первом случае, очевидно, вектор τ параллелен α, а во втором $\tau = \sigma+\delta \preccurlyeq (u+v-1)\alpha+\beta = r\alpha+\beta$, что и требовалось доказать.

Лемма 5. *Справедливо равенство*

$$S_{m+1}^{m\alpha+\beta} = \frac{1}{i(\omega, m\alpha+\beta)} \sum_{\substack{u+v=m,\\ u>0, v\geqslant 0}} \langle u\alpha, v\alpha+\beta\rangle S_u^{u\alpha} S_{v+1}^{v\alpha+\beta}. \tag{5.9}$$

Формула (5.9) выводится из (5.5) с учетом леммы 4. Сначала заметим, что либо $\sigma \preccurlyeq (u-1)\alpha+\beta$, либо $\delta \preccurlyeq (v-1)\alpha+\beta$. В противном случае векторы σ, δ, $\sigma+\delta$ попарно линейно зависимы. Если одновременно $\sigma \prec u\alpha$ и $\delta \prec v\alpha$, то имеем противоречивое неравенство $m\alpha+\beta = \sigma+\delta \prec (u+v-1)\alpha+\beta = m\alpha+\beta$. Следовательно, согласно лемме 4, в (5.5) надо учитывать лишь следующие пары векторов σ, δ: 1) $\sigma = u\alpha$, $\delta = (v-1)\alpha+\beta$; 2) $\sigma = (u-1)\alpha+\beta$, $\delta = v\alpha$. Для завершения доказательства осталось воспользоваться симметрией формулы (5.5) по σ и δ. Лемма доказана.

Преобразуем формулу (5.9):

$$i(\omega, m\alpha+\beta) S_{m+1}^{m\alpha+\beta} = \sum_{\substack{u+v=m,\\ u>0, v\geqslant 0}} \frac{\langle \alpha, v\alpha+\beta\rangle}{i(\omega, v\alpha+\beta)} u S_u^{u\alpha} i(\omega, v\alpha+\beta) S_{v+1}^{v\alpha+\beta}. \tag{5.10}$$

Вводя обозначения $\lambda_m = mS_m^{m\alpha}$, $\mu_{m+1} = i(\omega, m\alpha+\beta)S_{m+1}^{m\alpha+\beta}$, $l_v = \dfrac{\langle \alpha, v\alpha+\beta\rangle}{i(\omega, v\alpha+\beta)}$, запишем (5.10) в виде $\mu_{m+1} = \sum\limits_{\substack{u+v=m,\\ u>0, v\geqslant 0}} l_v \lambda_u \mu_{v+1}$.

Лемма 6. *Справедливо равенство*

$$\mu_{m+1} = a_m \lambda_1^m \mu_1, \tag{5.11}$$

где $a_0 = 1$, $a_m = \sum\limits_{\substack{u+v=m,\\ u>0, v\geqslant 0}} uK_u h^{u-1} a_v l_v$, $h = \dfrac{\langle \alpha, \alpha\rangle}{i(\omega, \alpha)}$.

Доказательство проводится индукцией по m с применением формулы (5.7).

Положим $uK_u = r_u$. Из формулы (5.8) получаем

$$r_1 = 1, \quad r_m = \sum_{\substack{u+v=m,\\ u>0, v>0}} \frac{r_u r_v}{2}. \tag{5.12}$$

С учетом нового обозначения,

$$a_m = \sum_{\substack{u+v=m,\\ u>0, v\geqslant 0}} r_u h^{u-1} a_v l_v. \tag{5.13}$$

Лемма 7. *Имеет место соотношение* $1 - \sqrt{1-2z} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n z^n$.

Следствие. *При* $m > 1$ $\quad r_m = (2m-3)!!/m!!$

Доказательство леммы 7. Из (5.12) следует, что степенной ряд $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} r_n z^n$ удовлетворяет уравнению $f^2 - 2f + 2z = 0$. Так как $f(0) = 0$, то $f(z) = 1 - \sqrt{1-2z}$, что и требовалось.

Из формулы (5.13) получаем последовательно

$$\begin{aligned}
&a_1 = r_1 l_0,\\
&a_2 = r_2 h l_0 + r_1^2 l_0 l_1,\\
&a_3 = r_3 h^2 l_0 + r_1 r_2 h l_0 l_1 + r_1 r_2 h l_0 l_2 + r_1^3 l_0 l_1 l_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Лемма 8. *При* $m \geqslant 1$ *имеет место соотношение*

$$a_m = \sum_{0=j_0<j_1<\ldots<j_k<m} r_{j_1-j_0} r_{j_2-j_1} \cdots r_{m-j_k} h^{m-k-1} l_{j_0} l_{j_1} \cdots l_{j_k}. \tag{5.14}$$

Формула (5.14) просто выводится из (5.13) индукцией по m.

Приступим к анализу множества Пуанкаре. Векторы α и β по предположению линейно независимы, поэтому гиперплоскости $(\omega, \alpha) = 0$ и $\Gamma_m = \{y : (\omega, m\alpha + \beta) = 0\}$ не совпадают. Согласно лемме 1, функции S_r^σ аналитичны почти всюду на Γ_m при $r < m + 1$. Для того, чтобы выяснить, принадлежит ли гиперплоскость Γ_m множеству $\mathbf{P}^{m+1}$, необходимо проверить условие $\mu_{m+1} \neq 0$. Воспользуемся формулой (5.11). В ней $\lambda_1 = S_1^\alpha$, $\mu_1 = i(\omega, \beta) S_1^\beta$. Коэффициенты S_1^α и S_1^β отличны от нуля согласно формуле (5.4) и определению вершин α и β. Если $(\omega, \beta) \equiv 0$ на гиперплоскости

Γ_m, то векторы α и β должны быть коллинеарными. Это, однако, не так. Следовательно, $\lambda_1 \neq 0$ и $\mu_1 \neq 0$. Поэтому $\mu_{m+1} \neq 0$ при $a_m \neq 0$ и только тогда. Рассмотрим два случая: $\langle\alpha,\alpha\rangle = 0$ и $\langle\alpha,\alpha\rangle \neq 0$. В первом из них $h = 0$, и (по лемме 8) $a_m = l_0 l_1 \dots l_{m-1}$. Согласно предположению (5.3), $\langle\alpha,\beta\rangle \neq 0$, поэтому $l_s \neq 0$ для всех l_s, и, следовательно, $a_m \neq 0$. Во втором случае введем число $\lambda = \langle\alpha,\beta\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$. В точках гиперплоскости Γ_m выполнено равенство $(\omega,\beta) = -m(\omega,\alpha)$, поэтому $l_v = h(\lambda+v)/(v-m)$. В рассматриваемом случае $h \neq 0$, поэтому из (5.14) следует, что $a_m = 0$ тогда и только тогда, когда λ является корнем многочлена

$$P_m(x) = \sum_{0=j_0<j_1<\dots<j_k<m} r_{j_1-j_0}\dots r_{m-j_k}\frac{(x+j_0)\dots(x+j_k)}{(j_0-m)\dots(j_k-m)}. \tag{5.15}$$

Л е м м а 9. *Имеет место соотношение*

$$P_m = \frac{(-1)^m}{m!}x\left(x+\frac{1}{2}\right)\dots\left(x+\frac{m-1}{2}\right). \tag{5.16}$$

Для доказательства леммы 9 рассмотрим новые многочлены

$$Q_n(y) = \left.\frac{P_n(x)}{-x}\right|_{x=y-n}, \quad Q_0 = -\frac{1}{y}. \tag{5.17}$$

Л е м м а 10. *Справедливо рекуррентное соотношение*

$$mQ_m = \sum_{\substack{u+v=m,\\ u>0,v\geqslant 0}} r_u(v-y)Q_v. \tag{5.18}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. В формуле (5.15) сделаем замену $m - j_l = i_{k-l+1}$. Тогда

$$P_m(x) = -\frac{x}{m}r_m +$$

$$+\sum_{0<i_1<\dots<i_k<m} r_{m-i_k}r_{i_k-i_{k-1}}\dots r_{i_1}\frac{x}{-m}\cdot\frac{x+m-i_k}{-i_k}\dots\frac{x+m-i_1}{-i_1}$$

Выделив отдельно суммирование по i_k, получаем

$$P_m(x) = \frac{x}{-m}\sum_{i_k=0}^{m-1} P_{i_k}(x)r_{m-i_k}, \quad P_0 \equiv 1.$$

Это соотношение можно переписать в виде

$$m\frac{P_m}{x} = \sum_{k=0}^{m-1}(k-m-x)\frac{P_k}{x+m-k}r_{m-k}.$$

Полагая $x+m=y$ и $P_n=(n-y)Q_n$, приходим к равенству

$$mQ_m(y) = \sum_{k=0}^{m-1}(k-y)r_{m-k}Q_k(y), \quad Q_0=-1/y,$$

которое эквивалентно (5.18).

Лемма 11. *Справедливо тождество*

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n z^n = -\frac{1}{y}\left(\frac{1+\sqrt{1-2z}}{2}\right)^{2y}. \tag{5.19}$$

Доказательство. Положим $g(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} Q_n z^n$. Соотношение (5.18) приводит к следующему дифференциальному уравнению для функции g: $z\,dg/dz = (z\,dg/dz - yg)f$; здесь f — функция из леммы 7. Решая это линейное дифференциальное уравнение с начальным условием $g(0)=-1/y$, получим

$$g(z) = -\frac{1}{y}\left(\frac{1+\sqrt{1-2z}}{2}\right)^{2y},$$

что и требовалось доказать.

Функция (5.19) аналитична при малых z. Найдем ее ряд Маклорена. Положим $g(z)=F(\varphi^{-1}(z))$, где $F(z) = -\dfrac{1}{y}\left(\dfrac{1+z}{2}\right)^{2y}$, $\varphi = (1-z^2)/2$. Так как $\varphi'(1)\neq 0$, то можно воспользоваться теоремой Бюрмана — Лагранжа [46]:

$$g(z) = g(0) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^m}{m!}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}\bigg|_{z=1}[F'(z)\Psi^m(z)], \tag{5.20}$$

где $\Psi = \dfrac{z-1}{\varphi(z)} = -\dfrac{2}{1+z}$. Из формул (5.19) и (5.20) легко получаем

$$m!Q_m = \left(\frac{2m-1}{2}-y\right)\left(\frac{2m-2}{2}-y\right)\dots\left(\frac{m+1}{2}-y\right).$$

Возвращаясь к старой переменной x и используя соотношение (5.17), приходим к формуле (5.16) для многочлена $P_m(x)$. Лемма 9 доказана.

Продолжим анализ множества Пуанкаре. Лемма 9 дает нам, что $a_m \equiv 0$ на гиперплоскости Γ_m в том и только том случае, когда $\lambda = \langle\alpha,\beta\rangle/\langle\alpha,\alpha\rangle$ совпадает с одним из следующих чисел: 0, $-1/2$, $-1, \ldots, -(m-1)/2$. Однако, согласно предположению (5.3), $\lambda \neq -m/2$ при всех целых $m \geqslant 0$. Следовательно, гиперплоскость $\Gamma_m = \{y : \langle y, m\alpha+\beta\rangle = 0\}$ принадлежит множеству $\mathbf{P}^{m+1} \subset \mathbf{P}^\infty$. При $m \to \infty$ гиперплоскости Γ_m накапливаются у предельной плоскости $\langle y,\alpha\rangle = 0$. Доказательство основной леммы завершено.

4. Докажем теоремы 2 и 3. Пусть n аналитических функций

$$F^{(k)} = \sum_{s=0}^{\infty} F_s^{(k)}(x,y)\varepsilon^s, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{5.21}$$

являются первыми интегралами гамильтоновой системы с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$. Все функции $F_s^{(k)}$, разумеется, 2π-периодичны по переменным $x_1, \ldots, x_n$.

Л е м м а 12. *Функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}$ не зависят от угловых переменных $x_1, \ldots, x_n$, и в точках множества $\mathbf{P}^\infty$ их якобиан*

$$\det \left\| \frac{\partial(F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)})}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right\| \tag{5.22}$$

обращается в нуль.

Из основной леммы и леммы 12 сразу же вытекает справедливость теоремы 2. Действительно, множество $\mathbf{P}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей, проходящих через начало координат, поэтому $\mathbf{P}^\infty$ является ключевым множеством для класса функций, аналитических в $\mathbb{R}^n$. Следовательно, по лемме 12, аналитическая функция (5.22) тождественно равна нулю. Это означает зависимость интегралов (5.21) при $\varepsilon = 0$.

Доказательство теоремы 3 использует еще одну вспомогательную конструкцию, восходящую к Пуанкаре [146, п. 81].

Л е м м а 13. *Предположим, что функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n-1)}$ независимы в некоторой точке $y_0 \in \Gamma$, и уравнения Гамильтона имеют дополнительный формальный интеграл $F = \sum F_s(x,y)\varepsilon^s$, независимый от функций $F^{(1)}, \ldots, F^{(n-1)}$. Тогда существуют такая окрестность V точки y_0 в $\mathbb{R}^n = \{y\}$ и такой формальный интеграл $\Phi = \sum\limits_{s=0}^{\infty} \Phi_s(y,x)\varepsilon^s$ с аналитическими в $V \times \mathbf{T}^n$ коэффициентами, что функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n-1)}$ и Φ_0 независимы в $V \times \mathbf{T}^n$.*

Функции $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n-1)}$ и Φ_0 в силу леммы 12 на самом деле зависят лишь от переменных y. Мы не будем приводить здесь доказательство леммы 13, так как оно по существу повторяет рассуждения Пуанкаре, воспроизведенные в п. 1 § 1. Доказательство теоремы 3 вытекает теперь из леммы 12, основной леммы из п. 3 и того обстоятельства, что пересечение $\mathbf{P}^\infty \cap V$ является ключевым множеством для класса функций, аналитических в области V.

Лемма 12 обобщает известное утверждение Пуанкаре о зависимости функций $F_0^{(1)}, \ldots, F_0^{(n)}$ на множестве $\mathbf{P}^1$ (см. § 1). Первая часть леммы о независимости функций $F_0^{(s)}$ от угловых координат x уже доказана в п. 1 § 1. Вторая часть выводится из теоремы 1 § 10 гл. II: если якобиан (5.22) отличен от нуля в точках области $D \subset \mathbb{R}^n$, то существует производящая функция $S = \sum_{r \geqslant 0} S_r(u, x)\varepsilon^r$ классической схемы теории возмущений, коэффициенты которой аналитичны в прямом произведении $D \times \mathbf{T}^n$.

Выведем отсюда лемму 12. Если якобиан (5.22) отличен от нуля в некоторой точке $y_0 \in \mathbf{P}^\infty$, то он отличен от нуля в целой окрестности V этой точки. Следовательно, в $V \times \mathbf{T}^n$ можно (по крайней мере формально) построить ряды теории возмущений по степеням ε с аналитическими коэффициентами. Однако, по определению множества Пуанкаре $\mathbf{P}^\infty$, в точках из $\{y_0\} \times \mathbf{T}^n \subset V \times \mathbf{T}^n$ хотя бы одна из функций S_r $(r = 1, 2, \ldots)$ не является аналитической.

5. Перейдем к доказательству теоремы 1. Выполним каноническое преобразование $x, y \to x', y'$ по формулам $y' = (B^\top)^{-1}y$, $x' = Bx$, где B — целочисленная унимодулярная матрица. В новых переменных гамильтониан $H_0 + H_1$ будет иметь тот же вид, а множество Δ перейдет в множество $\Delta' = \{m'\}$, $m' = (B^\top)^{-1}m$. Целочисленные векторы m преобразуются так же, как и импульсы y, поэтому выполнение условия интегрируемости (5.3) можно проверять в исходных переменных. Действительно, пусть a, b — векторы из $\mathbb{Z}^n$, и a', b' — их образы при отображении $m \to (B^\top)^{-1}m$. Тогда $\langle a', b'\rangle' = (BAB^\top a', b') = (Aa, b) = \langle a, b\rangle$.

Докажем сначала следствие 2 теоремы 1. Пусть $\mathcal{E}(\Delta)$ — выпуклая оболочка множества Δ. Это — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^n$.

Л е м м а 14. *Пусть α — вершина многогранника $\mathcal{E}(\Delta)$, Γ — примыкающее к ней ребро, β — ближайшая к α точка множества $\Delta \cap \Gamma$. Тогда существует такая целочисленная унимодулярная матрица B, что при отображении $m \to m' = (B^\top)^{-1}m$ точки α и β переходят в вершины множества Δ'.*

Доказательство основано на индуктивном применении следующего известного алгебраического факта: для любого целочисленного вектора $k_1 = (k_1^1, \ldots, k_1^m)$ со взаимно простыми координатами найдется еще $m-1$ таких целочисленных векторов $k_2, \ldots, k_m$, что $\det \|k_j^l\| = \pm 1$. Пусть l — наибольший общий делитель компонент вектора $\alpha-\beta$, и B_1 — целочисленная унимодулярная $(n\times n)$-матрица, нижняя строка которой состоит из компонент вектора $(\alpha-\beta)/l$. При отображении $m \to f(m) = (B_1^\top)^{-1}m$ вектор $(\alpha-\beta)/l$ перейдет в вектор $e_n = (0,\ldots,0,1)^\top$.

Спроектируем теперь выпуклый многогранник $\mathcal{E}(\Delta')$, $\Delta' = f(\Delta)$, на гиперплоскость, порожденную базисными векторами $e_1,\ldots,e_{n-1}$. При этом ребро $\Gamma' = f(\Gamma)$ спроектируется в вершину получившегося выпуклого многогранника. Рассмотрим ребро Λ, примыкающее к этой вершине. С помощью подходящей целочисленной унимодулярной $(n-1)\times(n-1)$-матрицы B_2 ребро Λ можно сделать параллельным $(n-1)$-й координатной оси. Повторим эту операцию еще $n-2$ раза. Можно проверить, что матрица

$$B_1 \left\| \begin{array}{c|c} B_2 & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right\| \cdots \left\| \begin{array}{c|ccc} B_n & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & & 1 \end{array} \right\|$$

будет искомой. Лемма доказана.

Лемма 15. *Пусть α и β — соседние вершины многогранника $\mathcal{E}(\Delta)$. Если гамильтонова система вполне интегрируема, то угол между векторами α и β не меньше $\pi/2$.*

Это утверждение вытекает из леммы 14 и теоремы 2.

Лемма 16. *Предположим, что выпуклый многогранник в $(\mathbb{R}^n, \langle\ ,\ \rangle)$ симметричен относительно начала координат, и угол между радиус-векторами любых двух соседних вершин не меньше $\pi/2$. Тогда этот многогранник является ромбоидом.*

Доказательство проведем индукцией по размерности многогранника M. При $\dim M = 1$ утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что заключение леммы справедливо при $\dim M \leqslant m$. Пусть α — одна из вершин $(m+1)$-мерного многогранника, а Π_α — замкнутое полупространство в $\mathbb{R}^{m+1}$, не содержащее α, граница которого $\partial\Pi_\alpha$ проходит через начало координат ортогонально вектору α. По условию все вершины M, соединенные с α ребром, лежат в Π_α. На самом деле все вершины M, кроме α, лежат в Π_α. Действительно, предположим, что найдется вершина β, не лежащая в Π_α. Выпуклый многогранник M является объединением множества M_α — выпуклой оболочки всех вершин, кроме α, и множества R_α — выпуклой оболочки одномерных ребер M, примыкающих к α. Вершина β, очевидно, не лежит в R_α. Отрезок Γ, соединяющий α и β, целиком расположен в выпуклом многограннике M. Однако Γ имеет с R_α лишь одну общую точку — точку α, так как в противном случае $\Gamma \subset R_\alpha$, и поэтому точка β не была бы вершиной M. С другой стороны, отрезок Γ не весь лежит в M_α, иначе $M = M_\alpha$. Получили противоречие. Аналогично все вершины M, кроме $(-\alpha)$, лежат в $\Pi_{-\alpha}$. Таким образом, M является выпуклой оболочкой точек α, $-\alpha$ и выпуклой оболочки остальных вершин многогранника M, лежащей в $\partial\Pi_\alpha$. Последняя является ромбоидом по предположению индукции. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы 1.

Лемма 17. *Пусть P — гиперплоскость в $\mathbb{R}^n$, причем точки множества $P \cap \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ образуют в $\mathbb{Z}^n$ подгруппу ранга $n-1$. Тогда найдется целочисленная унимодулярная матрица B, последние $n-1$ столбцов (или строк) которой являются векторами из $P \cap \mathbb{Z}^n$.*

Доказательство легко выводится из известных результатов о строении подгрупп $\mathbb{Z}^n$ (см., например, [33, гл. VII]).

Пусть α — одна из вершин ромбоида $\mathcal{E}(\Delta)$, и Π_α — замкнутое полупространство, о котором шла речь в доказательстве леммы 16. Пересечение $\partial\Pi_\alpha \cap \mathbb{Z}^n$ является подгруппой $\mathbb{Z}^n$, ранг которой равен $\dim \mathcal{E}(\Delta) - 1$. Дополним эту подгруппу (если необходимо) до подгруппы ранга $n-1$ так, чтобы вектор α не лежал в ней. В силу леммы 17 найдется матрица B, последние $n-1$ строк которой являются векторами из этой подгруппы, а первая строка — вектор из $\mathbb{Z}^n$ — имеет положительную проекцию на α в метрике $\langle\ ,\ \rangle$. После канонической замены координат $x \to Bx$, $y \to (B^\top)^{-1} y$ имеем:

(i) первая координата каждого вектора $\tau \in \partial\Pi_\alpha \cap \mathbb{Z}^n$ равна нулю;

(ii) первая координата вектора α положительна;

(iii) вектор α — максимальный элемент Δ (относительно стандартного отношения порядка $\prec$ в $\mathbb{Z}^n$);

(iv) если вектор τ не лежит в Π_α, то $0 \prec \tau$.

Лемма 18. *Если система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ вполне интегрируема, то все точки Δ, не лежащие в Π_α, принадлежат отрезку Γ, соединяющему точки 0 и α.*

Предположим противное. В силу свойства (iii) вектор α является вершиной множества Δ. Пусть β — вершина Δ, примыкающая к α. В силу сделанного предположения и определения примыкающей вершины, вектор β не лежит ни в полупространстве Π_α, ни на отрезке Γ. Векторы α и β лежат в одном полупространстве $\mathbb{R}^n \setminus \Pi_\alpha$, поэтоу скалярное произведение $\langle\alpha, \beta\rangle$ положительно. Следовательно, выполнено условие (5.3), и, согласно теореме 2, система уравнений Гамильтона неинтегрируема. Полученное противоречие доказывает лемму.

Применяя лемму 18 ко всем вершинам ромбоида $\mathcal{E}(\Delta)$, убеждаемся в справедливости теоремы 1.

§ 6. Некоторые обобщения

1. Невырожденность квадратичной формы $H_0 = (Ay, y)/2$ в теореме 2 можно заменить более слабыми условиями:

(i) $Am \neq 0$ для всех ненулевых целочисленных векторов m;
(ii) векторы $A\alpha$ и $A\beta$ линейно независимы.

Отметим, что в случае $\det A = 0$ эти два условия могут выполняться одновременно лишь при $n \geqslant 3$.

Приведем простой пример. Если

$$A = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad \alpha = (1,0,0)^\top, \qquad \beta = (1,-1,0)^\top,$$

то матрица A вырождена, однако условия (i) и (ii) выполнены.

2. Отметим, что утверждение теоремы 2 не выполнено в том случае, когда коэффициенты Фурье возмущающей функции H_1 зависят от y. Приведем поучительный контрпример:

$$H = a^2y_1^2 + aby_1y_2 + b^2y_2^2 + \frac{\varepsilon}{ay_1 - by_2}(\sin x_1 - \sin x_2).$$

Гамильтонова система с таким гамильтонианом интегрируется методом разделения переменных: аналитические функции $F_1 = a^3y_1^3 - ay_1H + \varepsilon \sin x_1$ и $F_2 = b^3y_2^3 - by_2H + \varepsilon \sin x_2$ составляют полный набор независимых интегралов.

В этой задаче $\alpha = (1,0)^\top$, $\beta = (0,1)^\top$, поэтому условие (5.3) принимает вид $b/a \neq -m/2$ при всех целых $m \geqslant 0$. “Предельная” прямая $\langle \alpha, y\rangle = 2ay_1 + by_2 = 0$ не совпадает с прямой $ay_1 - by_2 = 0$, в точках которой не определен гамильтониан (ср. с теоремой 3). Однако интегрируемость имеет место для всех (в том числе и иррациональных) значений отношения b/a.

Пусть $\alpha', \alpha'', \ldots$ — элементы множества Δ, расположенные между вершинами α и β (относительно лексикографического порядка $\prec$ в $\mathbb{Z}^n$). Ясно, что каждый из векторов $\alpha', \alpha'', \ldots$ линейно зависим с α. Модифицируя рассуждения § 5, можно доказать справедливость теорем 2 и 3 и в том случае, когда коэффициенты $h_\alpha, h_{\alpha'}, h_{\alpha''}, \ldots, h_\beta$ постоянны (при этом остальные коэффициенты Фурье могут быть непостоянными аналитическими функциями от переменных $y_1, \ldots, y_n$).

3. Если возмущающая функция H_1 не является тригонометрическим полиномом, то задача о наличии дополнительных интегралов гамильтоновой системы существенно упрощается: неинтегрируемость возмущенной системы, как правило, удается установить после конечного числа шагов теории возмущений (см. § 4).

Рассмотрим для определенности случай двух степеней свободы. Итак, пусть $H = H_0 + \varepsilon H_1$, где $H_0 = \frac{1}{2}\sum\limits_{j,k=1}^{2} a_{jk} y_j y_k$, $H_1 = \sum\limits_{m\in\mathbb{Z}^2} h_m e^{i(m,x)}$, $h_m = \mathrm{const}$.

Теорема 1. *Пусть $n = 2$ и множество Пуанкаре $\mathbf{P}^1$ состоит всего из двух прямых. Тогда уравнения Гамильтона имеют дополнительный формальный интеграл в том и только том случае, когда эти прямые ортогональны (в метрике $\langle\ ,\ \rangle$).*

Доказательство достаточности. Так как $\mathbf{P}^1$ состоит из двух прямых, то в формуле (4.6) $\tau = \lambda\tau_0$ и $\sigma = \mu\sigma_0$, где $\tau_0, \sigma_0 \in \mathbb{Z}^2$; λ, μ — целые числа. Ортогональность прямых, составляющих множество $\mathbf{P}^1$, означает ортогональность векторов τ_0 и σ_0. Покажем, что в этом случае гамильтонова система интегрируется методом разделения переменных. Действительно, пусть $\tau_0 = (\tau_1, \tau_2)$, $\sigma_0 = (\sigma_1, \sigma_2)$. Положим $X_1 = (\tau_1 x_1 + \tau_2 x_2)$, $X_2 = (\sigma_1 x_1 + \sigma_2 x_2)$. Это однородное преобразование угловых координат однозначно продолжается до однородного канонического преобразования $x, y \to X, Y$. В новых переменных $H = \frac{1}{2}(A_{11}Y_1^2 + 2A_{12}Y_1Y_2 + A_{22}Y_2^2) + \varepsilon(f(X_1) + g(X_2))$, где $A_{ij} = \mathrm{const}$; f, g — аналитические 2π-периодические функции. Так как $\langle\tau_0, \sigma_0\rangle = 0$, то $A_{12} = 0$. Следовательно, гамильтонова система имеет два линейных по ε интеграла: $\frac{1}{2}A_{11}Y_1^2 + \varepsilon f(X_1)$ и $\frac{1}{2}A_{22}Y_2^2 + \varepsilon g(X_2)$.

Доказательство необходимости. Рассмотрим сначала случай, когда возмущающая функция H_1 — тригонометрический полином. В качестве вершин множества Δ можно взять векторы $\alpha = \pm\lambda_*\tau_0$ и $\beta = \pm\mu_*\sigma_0$, где λ_* и μ_* — некоторые положительные целые числа. Пусть $\langle\alpha, \alpha\rangle \geqslant 0$ (случай $\langle\alpha, \alpha\rangle \leqslant 0$ рассматривается аналогично). Если $\langle\alpha, \beta\rangle \neq 0$, то без ущерба для общности можно считать, что $\langle\alpha, \beta\rangle > 0$ (в противном случае заменим β на $-\beta$). Но тогда $m\langle\alpha, \alpha\rangle + 2\langle\alpha, \beta\rangle > 0$ при всех целых $m > 0$. Следовательно, если гамильтонова система имеет дополнительный интеграл, то (по теореме 2 § 5) $\langle\alpha, \beta\rangle = 0$. Последнее условие, очевидно, эквивалентно условию $\langle\tau_0, \sigma_0\rangle = 0$.

Рассмотрим теперь оставшийся случай, когда функция H_1 не является многочленом. Воспользуемся результатами § 4. Так как τ_0 и σ_0 линейно независимы, то при фиксированном $k = \lambda\tau_0 + \mu\sigma_0$ числа λ и μ определяются однозначно. По условию функция H_1 не полином, следовательно, среди чисел λ и μ бесконечно много различных. Если $\langle\tau_0, \sigma_0\rangle \neq 0$, то из формулы (4.6) вытекает, что $\mathbf{P}^2$ состоит из бесконечного числа различных прямых и поэтому является ключевым множеством для класса функций, аналитических в $\mathbb{R}^2 = \{y_1, y_2\}$. Для завершения доказательства отсутствия формального интеграла осталось воспользоваться теоремой 1 из § 4. Утверждение доказано.

4. Теорема 1 допускает (с некоторыми уточнениями) обобщение на системы с $n > 2$ степенями свободы. Предположим, что все точки множества Δ расположены на $l \leqslant n$ прямых, проходящих через начало координат, причем их направляющие векторы линейно независимы. Тогда можно утверждать, что гамильтонова система с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$ имеет n однозначных аналитических интегралов, независимых при всех достаточно малых значениях ε, в том и только том случае, когда эти l прямых попарно ортогональны (в метрике $\langle\ ,\ \rangle$). При $l = 1$ система, очевидно, интегрируема.

В качестве примера рассмотрим систему с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \varepsilon[f(x_1 - x_2) + \ldots + f(x_{n-1} - x_n)]\,, \qquad (6.1)$$

где f — вещественная аналитическая 2π-периодическая функция. Эта система описывает динамику "непериодической" цепочки n частиц на прямой. Кроме интеграла энергии, уравнения движения имеют еще один интеграл $y_1 + \ldots + y_n$: сохраняется суммарный импульс системы взаимодействующих частиц. Оказывается, при $n > 2$ и $f \neq \mathrm{const}$ система с гамильтонианом (6.1) не имеет полного набора независимых интегралов. Действительно, в этом случае $l = n - 1$ и соответствующие прямые определяются векторами $(1, -1, 0, \ldots, 0)^\top, \ldots, (0, \ldots, 0, 1, -1)^\top$, которые не все попарно ортогональны. Если "замкнуть" цепочку, добавив в гамильтониан (6.1) слагаемое $\varepsilon f(x_n - x_1)$, то сформулированное выше утверждение станет неприменимо: $l = n$ прямых расположены в гиперплоскости, ортогональной вектору $(1, \ldots, 1)^\top$. Задача о полной интегрируемости замкнутой цепочки рассматривается в § 7.

5. По-видимому, теорема 1 справедлива и в случае псевдоевклидовой метрики $\langle\ ,\ \rangle$. По крайней мере справедливо следствие 2 из теоремы 1, в чем можно убедиться с помощью аргументов, изложенных в п. 5 § 5. При $n = 2$ мы имеем только один вид псевдоевклидова пространства. Под ромбом здесь понимается, как обычно, параллелограмм с ортогональными диагоналями. При неограниченном сближении соседних вершин ромб вырождается в отрезок, расположенный на одной из изотропных прямых.

6. В случае двух степеней свободы результаты § 5 можно усилить. Справедлива

Теорема 2. *Гамильтонова система с гамильтонианом $H_0 + \varepsilon H_1$ (форма H_0 положительно определена) допускает нетри-*

виальное поле симметрий $u_\varepsilon = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \ldots$ *с аналитическими и 2π-периодическими по x_1, x_2 коэффициентами u^r $(r \geqslant 0)$ в том и только том случае, когда точки множества Δ лежат на одной или двух ортогональных прямых, проходящих через начало координат.*

В частности, при условиях теоремы 2, и только в этом случае, уравнения Гамильтона допускают дополнительный интеграл в виде ряда по ε с многозначными коэффициентами. Аналогичное утверждение справедливо и для интегралов обратимой системы с гамильтонианом $H_0 + H_1$, являющихся полиномами по импульсам y_1, y_2 с многозначными на пространстве положений $\mathbf{T}^2 = \{x \mod 2\pi\}$ коэффициентами.

Теорема 2 доказывается методом § 3 с использованием результатов § 5 о строении множества Пуанкаре $\mathbf{P}^\infty$.

§ 7. Приложение к системам взаимодействующих частиц

1. Динамика n одинаковых взаимодействующих частиц на прямой описывается гамильтоновой системой с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum y_s^2 + \sum_{i<j} f(x_i - x_j), \tag{7.1}$$

где $f(\cdot)$ — четная функция (потенциал парного взаимодействия). Мозер [222] и Калоджеро [185] показали, что система с гамильтонианом (7.1) вполне интегрируема, если f является $\wp$-функцией Вейерштрасса (или ее вырожденными случаями z^{-2}, $\sin^{-2} z$, $\operatorname{sh}^{-2} z$). В работе [145] показано, что в случае трех частиц это единственный случай, когда имеется полиномиальный интеграл третьей степени, независимый от интегралов H и $P = \sum y_s$.

Будем рассматривать потенциалы f, которые являются аналитическими периодическими функциями с периодом 2π. Примером может служить система трех точек на окружности, соединенных упругими пружинами.

Теорема 1 [100]. *Если $f \neq \text{const}$ и $n > 2$, то уравнения Гамильтона с гамильтонианом (7.1) не имеют полного набора (в количестве n) независимых полиномиальных по импульсам первых интегралов.*

Замечание. При $n = 3$ нет дополнительного интеграла в виде полинома по импульсам, независимого от функций H и P.

Стоит подчеркнуть, что $\wp$-функция Вейерштрасса имеет полюсы на вещественной оси.

2. Укажем схему доказательства теоремы 1 при $n = 3$. Перейдем в инерциальную барицентрическую систему отсчета; в этой системе суммарный импульс равен нулю. Такой переход можно осуществить с помощью канонического преобразования

$$\begin{aligned} &Y_1 = y_1 - y_2, && Y_2 = y_2 - y_3, && Y_3 = y_1 + y_2 + y_3, \\ &X_1 = x_1 + x_3, && X_2 = -x_1 + x_2 + x_3, && X_3 = -x_2 + x_3. \end{aligned}$$

Полагая $Y_3 = 0$, осуществим редукцию к системе с двумя степенями свободы, гамильтониан которой равен

$$Y_1^2 - Y_1 Y_2 + Y_2^2 + f(X_1) + f(X_2) + f(X_1 + X_2). \tag{7.2}$$

Рассмотрим сначала случай, когда f — тригонометрический многочлен. Тогда выпуклая оболочка Δ будет шестиугольником (рис. 14). В этом случае отсутствие нового интеграла вытекает из следствия 2 теоремы 1 § 5.

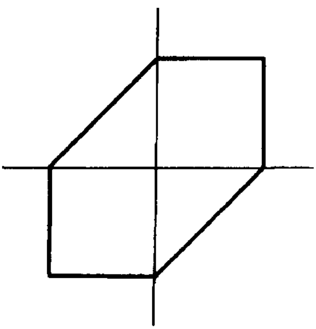

Рис. 14

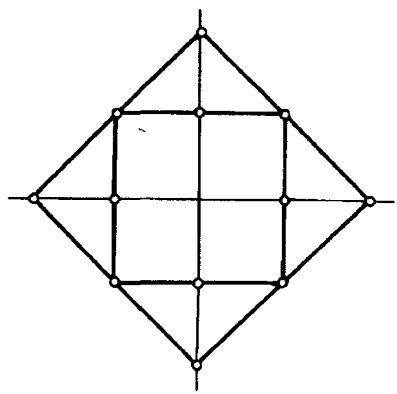

Рис. 15

Предположим теперь, что f не многочлен. Воспользуемся теоремой 1_2 из § 4. Пусть $k = (m, n) \in \mathbb{Z}^2$, причем $m, n \neq 0$, $m \neq n$. Условие обращения в нуль функции h'_k на прямой $\langle k, Y\rangle = 0$ можно представить в виде

$$\frac{f_m}{m}\frac{f_n}{n} = \frac{\bar{f}_n}{n}\frac{f_{m-n}}{m-n} - \frac{\bar{f}_m}{m}\frac{\bar{f}_{m-n}}{m-n} \tag{7.3}$$

(f_s — s-й коэффициент Фурье функции f; черта означает комплексное сопряжение). Для четной функции f, очевидно, $\bar{f}_s = f_s$.

Предположим, что $f_\lambda \neq 0$ при некотором $\lambda \neq 0$. Если множество Пуанкаре $\mathbf{P}^2$ состоит лишь из конечного числа различных прямых, то равенство (7.3) заведомо справедливо при $n = \lambda$ и всех достаточно больших m. Положим $f_m/m = a_m$. Тогда

$$a_{m+\lambda} = \frac{a_m a_\lambda}{a_m + a_\lambda} \,. \tag{7.4}$$

Так как f не полином, то при некотором сколь угодно большом m коэффициент a_m отличен от нуля. Из (7.4) получим по индукции $a_{m+s\lambda} = \dfrac{a_m a_\lambda}{s a_m + a_\lambda}$. Поскольку $a_m \neq 0$, то $\lim\limits_{s\to\infty} f_{m+s\lambda} = \lim\limits_{s\to\infty}(m + s\lambda)a_{m+s\lambda} = f_\lambda \neq 0$. Следовательно, функция f не аналитическая (в действительности, она даже не является суммируемой на отрезке $[0, 2\pi]$). Таким образом, при $f \neq \mathrm{const}$ система с гамильтонианом (7.2) не имеет дополнительного полиномиального интеграла.

3. Результаты § 5 позволяют доказать неинтегрируемость некоторых других известных гамильтоновых систем. В качестве примера рассмотрим систему с двумя степенями свободы и функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + \alpha[f(x_1 - x_2) + f(x_1 + x_2)] + \beta\sum f(x_i) + \gamma\sum f(2x_i) \,.$$

Здесь f — периодическая функция; $\alpha, \beta, \gamma = \mathrm{const}$. В работе М. А. Ольшанецкого и А. М. Переломова [223] установлена полная интегрируемость многомерных систем такого вида, если f является $\wp$-функцией Вейерштрасса (или ее вырожденными случаями).

Рассмотрим сначала случай, когда потенциал f — тригонометрический многочлен. Оказывается, критерием интегрируемости является выполнение равенства

$$\alpha(\beta^2 + \gamma^2) = 0 \,. \tag{7.5}$$

Действительно, при $\gamma \neq 0$ выпуклая оболочка множества Δ — квадрат, изображенный на рис. 15. При $\alpha \neq 0$ середины сторон квадрата являются точками из Δ. В этом случае следствие 2 теоремы 1 § 5 гарантирует отсутствие дополнительного полиномиального по импульсам интеграла с периодическими коэффициентами. Пусть $\gamma = 0$ и $\alpha\beta \neq 0$. Тогда выпуклая оболочка Δ совпадает с внутренним квадратом, изображенным на рис. 15. При $\alpha \neq 0$ середины его сторон принадлежат Δ, поэтому снова применимо следствие 2 теоремы 1 из § 5.

В общем случае, когда "потенциал" f является произвольной четной аналитической функцией, критерием интегрируемости также является равенство (7.5). Доказательство проводится методом, приведенным в п. 2.

§ 8. Рождение изолированных периодических решений как препятствие к интегрируемости

1. Пусть γ — замкнутая траектория периодического решения автономной системы дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = v(z) , \tag{8.1}$$

заданной на $(m+1)$-мерном многообразии M^{m+1}. Через $x \bmod 2\pi$ обозначим угловую координату на γ, равномерно меняющуюся со временем: $\dot{x} = \omega = \mathrm{const}$; период равен $p = 2\pi/\omega$. Ясно, что малая окрестность γ в M^{m+1} диффеоморфна прямому произведению окружности $\mathbf{T}^1 = \{x \bmod 2\pi\}$ на некоторую окрестность нуля m-мерного пространства $\mathbb{R}^m = \{y\}$. В переменных $x \bmod 2\pi$, $y_1, \ldots, y_m$ система (8.1) записывается в следующем виде:

$$\dot{x} = \omega + f(x,y) , \qquad \dot{y} = Y(x,y) . \tag{8.2}$$

Правые части 2π-периодичны по x, причем $f(x,0) = 0$, $Y(x,0) = 0$. Периодическое решение задается простыми формулами

$$x = \omega t + x_0 , \qquad y = 0 . \tag{8.3}$$

Введем квадратную матрицу порядка m с периодическими элементами $\Omega(x) = \left.\dfrac{\partial Y}{\partial y}\right|_{y=0}$ и перепишем систему (8.2) в более удобном виде:

$$\dot{x} = \omega + f(x,y) , \qquad \dot{y} = \Omega y + g(x,y) . \tag{8.4}$$

Ясно, что $g = O(|y|^2)$.

Согласно теореме Ляпунова — Флоке [47], линейной заменой переменных y с 2π-периодическими по x коэффициентами можно привести Ω к постоянной матрице. Впрочем, этот результат нам в дальнейшем не понадобится.

Линейные дифференциальные уравнения

$$\dot{u} = \Omega(x)u, \qquad x = \omega t + x_0 \tag{8.5}$$

называются уравнениями в вариациях периодического решения (8.3). Пусть $\Lambda(t)$ — решение матричного уравнения

$$\dot{\Lambda} = \Omega(t)\Lambda \tag{8.6}$$

с начальным условием $\Lambda(0) = E$. Матрица $P = \Lambda(p)$ называется матрицей монодромии периодического решения (8.3), а ее собственные числа $\rho_1, \ldots, \rho_m$ — мультипликаторами этого решения. Пусть $\Lambda'(t)$ — решение (8.6) с условием $\Lambda'(\tau) = E$. Тогда $\Lambda'(t) = \Lambda(t)\Lambda^{-1}(\tau)$ и $P_\tau = \Lambda'(\tau + p) = \Lambda(\tau + p)\Lambda^{-1}(\tau) = \Lambda(\tau)P\Lambda^{-1}(\tau)$. Следовательно, собственные числа матриц P_τ и P совпадают. В частности, мультипликаторы периодического решения не зависят от x_0.

Так как $\det P \neq 0$, то можно положить $P = \exp(pA)$. Собственные числа $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ матрицы A называются характеристическими показателями периодического решения (8.3). Они связаны с мультипликаторами соотношениями $\rho_s = \exp(p\alpha_s)$ и определены с точностью до аддитивных слагаемых вида $i\omega n$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Периодическое решение называется невырожденным, если все его мультипликаторы отличны от единицы.

Л е м м а 1. *В малой окрестности траектории γ невырожденного периодического решения нет периодических траекторий близкого периода, отличных от γ.*

Для доказательства рассмотрим m-мерную площадку $\Pi = \{x, y : x = x_0\}$, трансверсально секущую γ, и отображение последования $F : \Pi \to \Pi$, которое определяется следующим образом. Траектория решения системы (8.2) с начальными данными $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ ($|y_0|$ мало) снова пересекает площадку Π через промежуток времени, близкий к p, в точке (x_0, y_1). Положим $y_1 = F(y_0)$. Ясно, что $F(0) = 0$ и $\left.\dfrac{\partial F}{\partial y}\right|_{y=0} = P$. Периодическим траекториям системы (8.4) отвечают неподвижные точки отображения F. Однако, по теореме о неявной функции, уравнение $F(y) = y$ при малых $|y|$ не имеет нетривиальных решений ввиду предположения о невырожденности γ.

З а м е ч а н и е. Мультипликаторы периодического решения часто определяются по-другому (см., например, [146, гл. III]). Пусть $z_0(t)$ — p-периодическое решение системы (8.1). Положим $z = z_0(t) + \delta z$ и линеаризуем уравнения (8.1) по δz. В результате получим линейную систему с p-периодическими коэффициентами: $(\delta z)^{\cdot} = A\delta z$, $A = \left.\dfrac{\partial v}{\partial z}\right|_{z_0(t)}$. Пусть $B(t)$ — фундаментальная матрица этой системы ($\dot{B} = AB$, $B(0) = E$), и $C = B(p)$. Ясно, что $Cv_0 = v_0$, где $v_0 = v(z_0(0))$. Следовательно, единица является одним из собственных значений матрицы C. Несложно показать, что остальные ее собственные значения совпадают с мультипликаторами периодического решения $z_0(\cdot)$.

2. Т е о р е м а 1 (Пуанкаре [146]). *Если уравнения* (8.1) *допускают k интегралов, независимых в некоторой точке периодической траектории γ, то по меньшей мере k мультипликаторов равны единице.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $H(z)$ — интеграл системы (8.1). В переменных $x \bmod 2\pi$, y эта функция представляется в виде $H = H_0(x) + (y, h(x)) + o(y)$; здесь функция H_0 и ковектор h 2π-периодически зависят от x. Дифференцируя в силу системы (8.4), получим $\dot{H} = \frac{\partial H_0}{\partial x}\omega + \frac{\partial H_0}{\partial x} f + (\Omega y, h) + \left(y, \frac{\partial h}{\partial x}\right)\omega + o(y) = 0$. Отсюда $H_0 = \text{const}$, и

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial x}\omega = -\Omega^{\top} h\ . \tag{8.7}$$

Линейные системы (8.5) и (8.7) сопряжены друг другу. Поэтому

$$(h(t), u(t)) = \text{const}\ . \tag{8.8}$$

Ясно, что функция h p-периодична по t, и $u(t+p) = Pu(t)$, где P — матрица монодромии. Согласно (8.8), $(h(0), u(0)) = (h(p), u(p)) = (h(0), Pu(0)) = (P^{\top} h(0), u(0))$. Так как $u(0)$ — произвольный вектор, то $P^{\top} h(0) = h(0)$. Следовательно, $h(0)$ — собственный вектор матрицы P с единичным собственным значением. Согласно условию теоремы, имеется k таких линейно независимых векторов. Поэтому по крайней мере k собственных значений матрицы $P^{\top}$ (а, значит, и матрицы P) равны единице.

Теорема 1 подсказывает следующий способ доказательства неинтегрируемости динамических систем. Предположим, что совокупность невырожденных периодических решений аналитической системы (8.1) образует ключевое множество для класса функций, аналитических на M. Тогда, очевидно, система (8.1) не допускает непостоянных интегралов, аналитических на всем M.

Теорема 2. *Предположим, что динамическая система (8.1) допускает такие $k+1$ полей симметрий, которые линейно независимы хотя бы в одной точке периодической траектории γ. Тогда по меньшей мере k мультипликаторов равны единице.*

Действительно, пусть система (8.4) допускает группу симметрий — фазовый поток системы уравнений

$$x' = V(x, y)\ , \qquad y' = W(x, y)\ , \tag{8.9}$$

правая часть которой 2π-периодична по x. Вычислим коммутатор дифференциальных операторов $(\omega + f)\frac{\partial}{\partial x} + (\Omega y + g)\frac{\partial}{\partial y}$ и $V\frac{\partial}{\partial x} + W\frac{\partial}{\partial y}$ и приравняем нулю коэффициент при $\partial/\partial y$, положив $y = 0$. В результате получим равенство

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial x}\omega = \Omega w\ , \tag{8.10}$$

где $w(x) = W(x, 0)$. Уравнения (8.10) совпадают с (8.5). Следовательно, $w(p) = Pw(0)$. Функция $w(t)$ p-периодична, поэтому

$w(0)$ — собственный вектор матрицы монодромии с единичным собственным значением.

При $w(0) = 0$ поле симметрий касается γ. Однако если имеется $k+1$ линейно независимое поле симметрий, то матрица P имеет k линейно независимых векторов с собственным значением единица; тогда k мультипликаторов периодической траектории γ равны 1.

С л е д с т в и е 1. *Во всех точках невырожденной периодической траектории любое поле симметрий линейно зависимо с полем v.*

Это утверждение, отмеченное в работе [101], имеет прозрачный геометрический смысл. Действительно, пусть γ — невырожденная замкнутая траектория. Тогда, согласно лемме 1 из п. 1, в малой окрестности γ система (8.1) не имеет других замкнутых траекторий с близким периодом. Если u — поле симметрий, то $g_u^\tau(\gamma)$ — замкнутая траектория уравнений (8.1), причем при малых τ ее период мало отличается от периода γ. Следовательно, $g_u^\tau(\gamma) \equiv \gamma$ при всех τ, поэтому в точках траектории γ векторы u и v линейно зависимы.

Через Γ обозначим объединение всех невырожденных замкнутых траекторий системы (8.1).

С л е д с т в и е 2. *Пусть M — компактное аналитическое многообразие, v — аналитическое векторное поле на M. Если Γ — ключевое множество для класса $C^\omega(M)$, то любое аналитическое векторное поле симметрий u системы (8.1) во всех точках M линейно зависимо с v. Если, кроме того, $v \neq 0$, то $u = \lambda v$, $\lambda = \mathrm{const}$.*

Действительно, по следствию 1 векторы u, v зависимы во всех точках множества Γ. Пусть теперь Φ — произвольная аналитическая 2-форма на M. Так как $\Phi(u, v)$ — аналитическая функция на M, равная нулю на Γ, и Γ — ключевое множество, то $\Phi(u, v) \equiv 0$. Воспользуемся следующим фактом: пусть Φ_0 — заданная внешняя форма в точке $z_0 \in M$; тогда существует аналитическая дифференциальная форма Φ_z на M, которая при $z = z_0$ совпадает с Φ_0. Отсюда вытекает зависимость полей u, v во всех точках M. Утверждение о возможности продолжения формы Φ_0 на все M доказывается с помощью известного результата о вложении компактного аналитического многообразия M в $\mathbb{R}^k$. Пусть Φ_0 — ограничение 2-формы φ_0, заданной в точке $z_0 \in M \subset \mathbb{R}^k$, на $T_{z_0}M$. Форма φ_0, очевидно, продолжается до аналитической формы φ на всем $\mathbb{R}^k$ (пусть, например, все ее коэффициенты постоянны). Остается ограничить форму φ на M.

Если $v \neq 0$, то $u = \lambda(z)v$, где λ — аналитическая функция на M, которая является интегралом системы (8.1) (см. § 3 гл. II). Согласно теореме 1, $d\lambda = 0$ в точках множества Γ. Так как множество Γ ключевое, то $\lambda = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Замечание. Пусть M — гладкое многообразие, и v — гладкое поле на нем. Если множество Γ всюду плотно в M, то любое дифференцируемое поле симметрий u линейно зависимо с полем v во всех точках M. Если, кроме того, $v \neq 0$, то $u = \lambda v$, $\lambda = \text{const}$. Доказательство очевидно.

В качестве примера рассмотрим обратимую механическую систему с компактным пространством положений M, кинетической энергией T и потенциальной энергией V. Пусть h — постоянная энергии, превосходящая $\max\limits_M V$. Согласно принципу Мопертюи, проекции фазовых траекторий, лежащих на компактной энергетической поверхности $\Sigma_h = \{x, \dot{x} : T + V = h\}$, на многообразие M совпадают с геодезическими линиями метрики $(dp)^2 = 2(h - V)T(dt)^2$. Предположим, что гауссова кривизна любой двумерной поверхности, вложенной в риманово многообразие (M, dp), отрицательна. Тогда уравнения движения на Σ_h порождают У-систему (или систему Аносова [6]). Эта ситуация обсуждалась нами ранее в связи с топологическими препятствиями к интегрируемости (см. § 1 гл. III). Характерный признак У-систем — экспоненциальное разбегание траекторий. В частности, все периодические траектории гиперболичны: мультипликаторы вещественны и отличны от ± 1. Известно [6], что совокупность периодических траекторий всюду плотно заполняет Σ. Гиперболические траектории невырождены, поэтому отсюда вытекает отсутствие нетривиальных дифференцируемых полей симметрий, определенных на всем Σ. В частности, уравнения движения не допускают многозначных интегралов.

3. Предположим, что система (8.4) имеет k независимых интегралов $F_1, \ldots, F_k$ и l полей симметрий $u_1, \ldots, u_l$, линейно независимых в точках периодической траектории γ. Из теорем 1 и 2 вытекает, что характеристическое уравнение $|P - \rho E| = 0$ имеет корень $\rho = 1$ кратности не менее $\max(k, l - 1)$. При некоторых дополнительных предположениях эту оценку можно улучшить.

Теорема 3. *Предположим, что каждая из функций $F_1, \ldots, F_k$ является интегралом каждой из динамических систем $z' = u_1, \ldots, z' = u_l$. Тогда корень $\rho = 1$ характеристического многочлена $|P - \rho E|$ имеет кратность не ниже $k + l - 1$.*

Доказательство. Положим $F_j = F_j^0(x) + (y, f_j(x)) + o(y)$. Как отмечено в п. 2, функция F_j^0 постоянна. Представим динамическую систему $z' = u_r$ в виде (8.9):

$$x' = V_r(x, y), \qquad y' = W_r(x, y). \tag{8.11}$$

Функция F_j — интеграл уравнений (8.11), поэтому $F_j' = (w_r, f_j) + O(y)$, где $w_r(x) = W_r(x, 0)$. Полагая $y = 0$, получим соотношения

$$(f_j, w_r) = 0\,, \qquad 1 \leqslant j \leqslant k\,, \quad 1 \leqslant r \leqslant l\,. \tag{8.12}$$

Согласно результатам п. 2, $Pw_r = w_r$, $P^\top f_j = f_j$, причем ковекторы $\{f_j\}$ линейно независимы, а среди семейства векторов $\{w_r\}$ имеется по крайней мере $l - 1$ линейно независимых.

Приведем матрицу монодромии P к жордановой форме. Ясно, что каждому из линейно независимых векторов w отвечает своя жорданова клетка вида

$$\begin{Vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & & & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{Vmatrix}$$

Пусть ковектор f соответствует той же жордановой клетке. Тогда w и f имеют лишь по одной ненулевой компоненте. Пусть $w_\mu \neq 0$ и $f_\nu \neq 0$; тогда $\nu - \mu + 1$ совпадает с размером жордановой клетки. В частности, $\nu \geqslant \mu$. Ввиду (8.12), $\nu > \mu$. Итак, если пара w, f отвечает одной жордановой клетке, то размер клетки $\geqslant 2$. Следовательно, кратность соответствующего корня $\rho = 1$ характеристического уравнения $|P - \rho E| = 0$ не меньше двух. В итоге получаем, что кратность единичного мультипликатора не ниже $k + l - 1$, что и требовалось показать.

Рассмотрим теперь случай гамильтоновых систем. Пусть γ — замкнутая траектория автономной гамильтоновой систем с гамильтонианом H. Так как $dH \neq 0$ в точках γ, то, по теореме 1, один из мультипликаторов обязательно равен единице. Поэтому периодические решения гамильтоновых систем вырождены в смысле определения п. 1. Предположим, что периодическая траектория γ лежит на энергетической поверхности $\Sigma = \{H = \mathrm{const}\}$, и лишь один из ее мультипликаторов равен единице. Нетрудно показать, что γ, рассматриваемая как периодическая траектория гамильтоновой динамической системы на Σ, невырождена. В этом случае γ естественно назвать *изоэнергетически невырожденной* периодической траекторией.

Т е о р е м а 4 (Пуанкаре [146]). *Предположим, что имеется k инволютивных интегралов $F_1, \ldots, F_k$, причем функции $H, F_1, \ldots, F_k$ независимы хотя бы в одной точке γ. Тогда по меньшей мере $2k + 1$ мультипликаторов периодической траектории γ равны единице.*

Следствие. *Все мультипликаторы периодических траекторий, лежащих на инвариантных торах вполне интегрируемой гамильтоновой системы, равны единице.*

Теорема 4 является следствием теоремы 3. Действительно, уравнения Гамильтона допускают $k+1$ независимых интегралов H, $F_1, \ldots, F_k$ и $k+1$ линейно независимых полей симметрий: ими являются гамильтоновы поля v_H, $v_{F_1}, \ldots, v_{F_k}$. Эти интегралы попарно находятся в инволюции, поэтому каждая из функций H, $F_1, \ldots, F_k$ — интеграл каждой из систем уравнений $\dot z = v_H$, $\dot z = v_{F_1}$, $\ldots, \dot z = v_{F_k}$. Согласно теореме 3, по крайней мере $2(k+1)-1 = 2k+1$ мультипликаторов периодической траектории γ равны единице.

Оригинальное доказательство теоремы 4, данное самим Пуанкаре, основано на другой идее. Пусть $f(\rho) = |P-\rho E|$ — характеристический многочлен матрицы монодромии периодического решения гамильтоновой системы с n степенями свободы. Положим $f(\rho) = (\rho - 1)g(\rho)$. Согласно известной теореме Пуанкаре — Ляпунова, многочлен g возвратный: $\rho^{2n-2}g(1/\rho) = g(\rho)$. Следовательно, если уравнение $g(\rho) = 0$ имеет корень $\rho = 1$, то его кратность четна и не ниже двух. Таким образом, если уравнения Гамильтона допускают независимый интеграл F, то пара мультипликаторов становится равной единице, причем один из этих мультипликаторов равен единице из-за наличия нетривиального гамильтонова поля симметрий v_F.

5. Обратимся теперь к гамильтоновым системам с гамильтонианом

$$H = H_0(y_1, \ldots, y_n) + \varepsilon H_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) + o(\varepsilon) , \tag{8.13}$$

аналитическим по $y, x \mod 2\pi$, ε. Положим сначала $\varepsilon = 0$ и предположим, что при $y = y^0$ частоты

$$\omega_1 = \partial H_0/\partial y_1 , \quad \ldots , \quad \omega_n = \partial H_0/\partial y_n \tag{8.14}$$

связаны $n-1$ независимым резонансным соотношением

$$k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0 , \qquad k_i \in \mathbb{Z} , \quad \sum |k_i| \neq 0 .$$

Другими словами, все траектории невозмущенной системы, лежащие на n-мерном инвариантном торе $\mathrm{T}^n_{y^0} = \{x \mod 2\pi, y^0\}$, замкнуты. Эти периодические траектории, разумеется, изоэнергетически вырождены (см. следствие теоремы 4) и при добавлении возмущения, как правило, перестают быть замкнутыми. Однако, как впервые заметил Пуанкаре, в типичной ситуации при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ возмущенная гамильтонова система имеет несколько невырожденных периодических решений, которые при $\varepsilon \to 0$ переходят в периодические решения, расположенные на резонансном торе $\mathrm{T}^n_{y^0}$.

Перейдем к точным формулировкам. На торе $T^n_{y^0}$ по предположению нет положений равновесия, поэтому хотя бы одна из частот (8.14) отлична от нуля при $y = y^0$. Пусть, например, $\omega_n \neq 0$. При $y = y^0$ функция $H_1(\omega_1 t + \lambda_1, \ldots, \omega_{n-1} t + \lambda_{n-1}, \omega_n t, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ периодична по t с некоторым периодом τ. Ясно, что τ — период невозмущенных периодических решений. Положим $h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = \frac{1}{\tau}\int_0^\tau H_1\, dt$. Эта функция 2π-периодична по $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$.

Теорема 5 (Пуанкаре [146]). *Предположим, что при $y = y^0$*

$$\det\left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial y_i \partial y_j} \right\| \neq 0\,, \qquad \det\left\| \begin{array}{c|c} \omega_1 \ldots \omega_n & 0 \\ \hline \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y_i \partial y_j} & \begin{matrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_n \end{matrix} \end{array} \right\| \neq 0\,. \qquad (8.15)$$

Пусть λ_0 — невырожденная критическая точка функции h :

$$dh(\lambda_0) = 0\,, \qquad \det\left\| \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right\|_{\lambda = \lambda_0} \neq 0\,.$$

Тогда при малых $\varepsilon \neq 0$ существует изоэнергетически невырожденное периодическое решение возмущенной гамильтоновой системы с периодом τ; оно аналитически зависит от ε и при $\varepsilon = 0$ совпадает с периодическим решением невозмущенной системы

$$y = y^0,\ x_1 = \omega_1(y^0)t + \lambda_1^0,\ \ldots,\ x_{n-1} = \omega_{n-1}(y^0)t + \lambda_{n-1}^0,\ x_n = \omega_n(y^0)t.$$

Подробное доказательство этого результата, основанное на теореме о неявных функциях, приведено в книге Пуанкаре [146, гл. III, IV]. Случай двух степеней свободы изложен в [83].

При $n = 2$ второй определитель (8.15) равен

$$-\left(\omega_1^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y_2^2} - 2\omega_1\omega_2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y_1 \partial y_2} + \omega_2^2 \frac{\partial^2 H_0}{\partial y_1^2}\right). \qquad (8.16)$$

Пусть H_0 — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами: $H_0 = \langle y, y\rangle/2 = \sum a_{ij} y_i y_j/2$. Тогда выражение (8.16) равно $-\langle y, y\rangle\delta$, где $\delta = \det\|a_{ij}\|$. Для периодического решения имеем $y^0 \neq 0$, значит, в этом случае второе условие (8.15) заведомо выполнено.

Отметим, что если выражение (8.16) при $y = y^0$ отлично от нуля, то кривая $H_0(y_1, y_2) = H_0(y_1^0, y_2^0)$ на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{y_1, y_2\}$ в точке $y = y^0$ не имеет перегиба.

Пусть $H_1 = \sum h_m(y) \exp[i(m, x)]$ $(m \in \mathbb{Z}^n)$. Через Λ обозначим множество тех $m \in \mathbb{Z}^n$, для которых $(m, \omega(y^0)) = 0$. Положим

$$R(x) = \sum h_m(y^0) \exp[i(m, x)], \quad m \in \Lambda. \tag{8.17}$$

Ясно, что $h(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}) = R(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}, 0)$.

Так как h — функция на $(n-1)$-мерном торе $\mathbf{T}^{n-1} = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1} \mod 2\pi\}$, то она имеет по меньшей мере n различных критических точек; правда, они могут оказаться вырожденными. В типичной ситуации все критические точки h невырождены. Из теории Морса известно, что в этом случае число различных критических точек не меньше 2^{n-1}. При $n = 2$ это максимум и минимум функции h на окружности $\mathbf{T}^1$.

6. Принципиальной основой доказательства неинтегрируемости возмущенных уравнений является следующее утверждение (ср. с леммой 1 из § 1): если функция $F = F_0(x, y) + \varepsilon F_1(x, y) + \ldots$, $(x, y) \in \mathbf{T}^n \times \mathbb{R}^n$, является интегралом невырожденных уравнений Гамильтона с гамильтонианом (8.13), то

1) F_0 не зависит от x;

2) функции H_0 и F_0 зависимы в точках множества Пуанкаре $\mathbf{P}_1$.

Первая часть утверждения легко вытекает из невырожденности невозмущенной системы. Докажем, используя теорему 5, зависимость функций H_0 и F_0 на множестве K невозмущенных торов $y = y^0$, удовлетворяющих условиям этой теоремы. Ясно, что всегда $K \subset \mathbf{P}_1$, однако можно привести примеры, когда множества K и $\mathbf{P}_1$ не совпадают. В общем случае, конечно, K всюду плотно в $\mathbb{R}^n = \{y\}$.

Для доказательства рассмотрим невырожденные периодические решения $\gamma(\varepsilon)$, рождающиеся из семейства периодических решений, расположенных на резонансном торе $y^0 \in K$ (см. теорему 5). Ввиду их невырожденности при $\varepsilon \neq 0$, функции H и F зависимы во всех точках траектории $\gamma(\varepsilon)$ (см. теорему 4). Устремим ε к нулю. Периодическое решение $\gamma(\varepsilon)$ перейдет в одно из периодических решений $\gamma(0)$ невозмущенной задачи, лежащее на торе $y = y^0$, а функции H и F станут равными H_0 и F_0. По непрерывности они будут зависимы во всех точках траектории $\gamma(0)$. Следовательно, ранг матрицы Якоби $\left\| \dfrac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(x, y)} \right\|$ равен единице в точках $(x, y) \in \gamma(0)$. В частности, в этих точках ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial(H_0, F_0)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right\|$ тоже равен единице. Для завершения доказательства остается заметить, что функции H_0 и F_0 не зависят от x.

Эта же идея применима к более общей задаче о наличии поля u_ε, коммутирующего с исходным гамильтоновым полем v_ε: согласно теореме 2, поля u_ε и v_ε линейно зависимы в точках невырожденного периодического решения $\gamma(\varepsilon)$. Устремляя ε к нулю, получаем, что u_0 и v_0 зависимы в точках траектории $\gamma(0)$. Ввиду невырожденности невозмущенной системы, поле u_0 не зависит от x. Следовательно, поля u_0 и v_0 зависимы во всех точках $y \in K$.

Таким образом, рождение большого числа изоэнергетически невырожденных периодических решений возмущенных гамильтоновых систем несовместимо с их интегрируемостью. К сожалению, таким способом удается доказать отсутствие интегралов (или полей симметрий), аналитически зависящих от ε. Дело в том, что при малых, но конечных значениях $\varepsilon \neq 0$ теорема 5 гарантирует наличие лишь конечного числа изоэнергетически невырожденных периодических решений. Этого, конечно, недостаточно для доказательства неинтегрируемости возмущенной системы при малых фиксированных значениях $\varepsilon \neq 0$.

7. Укажем, следуя Пуанкаре [146, п. 75], асимптотические формулы для характеристических показателей τ-периодических решений, существование которых гарантирует теорема 5. Напомним (см. п. 1), что характеристические показатели α связаны с мультипликаторами ρ соотношением $\rho = \exp(\alpha\tau)$. Положим

$$\alpha = \mu\sqrt{\varepsilon}. \tag{8.18}$$

Оказывается, μ — аналитическая функция от $\sqrt{\varepsilon}$: $\mu = \mu_0 + \mu_1\sqrt{\varepsilon} + \ldots$ Свободный коэффициент μ_0 — корень уравнения

$$\left|\begin{array}{ccc|ccc} -\mu_0\tau & & 0 & & & \\ & \ddots & & & B & \\ 0 & & -\mu_0\tau & & & \\ \hline & & & -\mu_0\tau & & 0 \\ & -A & & & \ddots & \\ & & & 0 & & -\mu_0\tau \end{array}\right| = 0, \tag{8.19}$$

где элементы квадратных $(n \times n)$-матриц A и B равны соответственно $\tau\dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y_i \partial y_j}(y^0)$ и $\tau\dfrac{\partial^2 R}{\partial x_i \partial x_j}(x^0)$; здесь функция R определяется равенством (8.17), $x^0 = (\lambda_1^0, \ldots, \lambda_{n-1}^0, 0)$.

Уравнение (8.19) можно представить в более простом виде:

$$|AB + \mu_0^2\tau^2 E| = |BA + \mu_0^2\tau^2 E| = 0. \tag{8.20}$$

По определению функции R, вектор $\omega^0 = (\omega_1(y^0), \ldots, \omega_n(y^0))^\top$ является собственным вектором матрицы B с нулевым собственным значением. Следовательно, $\det B = 0$, и поэтому $\mu_0 = 0$ —

двукратный корень многочлена (8.20). Этот корень отвечает единичному мультипликатору возмущенного периодического решения. Остальные корни разбиваются на пары с противоположными знаками. Этот факт отвечает теореме Пуанкаре — Ляпунова о возвратности характеристического многочлена для мультипликаторов периодического решения гамильтоновой системы.

Матрицы A и B симметричны; однако в общем случае $(AB)^{\top} = BA \neq AB$. Поэтому собственные числа матрицы AB (или BA) в типичной ситуации не являются вещественными. В частности, среди мультипликаторов имеются четверки различных чисел ρ, $\overline{\rho}$, ρ^{-1}, $\overline{\rho}^{-1}$.

Рассмотрим частный случай, когда матрица A пропорциональна единичной: $A = \varkappa E$, $\varkappa \in \mathbb{R}$. Пусть для определенности $\varkappa > 0$. Тогда квадраты корней характеристического многочлена (8.20) — числа μ_0^2 — вещественны. Они пропорциональны ненулевым собственным числам матрицы B. Легко сообразить, что эти числа совпадают с собственными числами матрицы

$$\left\| \frac{\partial^2 h}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right\|_{\lambda=\lambda_0}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n-1. \tag{8.21}$$

В типичной ситуации все критические точки функции $h : \mathbb{T}^{n-1} \to \mathbb{R}$ невырождены. Напомним, что индексом k функции h в критической точке λ_0 называется число отрицательных собственных значений матрицы (8.21). Согласно (8.20), $2k$ мультипликаторов возмущенного периодического решения будут вещественными положительными числами, причем половина из них больше единицы, а другая — меньше единицы. Остальные мультипликаторы с точностью до $O(\varepsilon)$ лежат на единичной окружности, так что индекс k можно назвать степенью неустойчивости периодического решения.

Пусть c_k — количество критических точек функции h индекса k. Из теории Морса известны следующие соотношения (см., например, [54, гл. II]):

$$c_k \geqslant C_{n-1}^k, \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1, \tag{8.22}$$

$$\sum (-1)^k c_k = 0. \tag{8.23}$$

Неравенства (8.22) дают оценки числа возмущенных периодических траекторий заданной степени неустойчивости. В частности, максимуму функции h отвечает периодическое решение с вещественными мультипликаторами.

При $n = 2$ имеются два типа возмущенных изоэнергетически невырожденных периодических решений. В первом из них $\mu_0^2 > 0$;

оба мультипликатора вещественны. Это решение называется *гиперболическим*; оно неустойчиво. Для второго типа $\mu_0^2 < 0$; оба мультипликатора лежат на единичной окружности. Это — *эллиптическое* решение; оно устойчиво в линейном приближении. Соотношение (8.23) показывает, что при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ из семейства периодических решений, лежащих на резонансном невозмущенном торе, рождается четное число невырожденных периодических решений, причем половина из них эллиптична, а половина гиперболична. Этот факт вытекает из того обстоятельства, что локальные минимумы и максимумы периодической функции одного переменного чередуются между собой. Обычно говорят, что при разрушении резонансного инвариантного тора рождаются пары изолированных периодических решений.

Согласно результатам КАМ-теории, траектории типичных эллиптических периодических решений окружены инвариантными торами. Гиперболические периодические решения имеют две инвариантные поверхности (сепаратрисы), заполненные решениями, асимптотически приближающимися к периодической траектории при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Различные асимптотические поверхности могут пересекаться, образуя в пересечении довольно запутанную сеть. Поведение асимптотических поверхностей будет подробно обсуждаться в следующей главе.

Картина траекторий возмущенной задачи изображена на рис. 16. Более точно, на фиксированном трехмерном уровне интеграла энергии взята секущая двумерная поверхность. На рис. 16 изображены инвариантные кривые отображения последования. Изолированным точкам соответствуют невырожденные периодические траектории, а замкнутым кривым, близким к концентрическим окружностям, — колмогоровские торы.

Рис. 16

8. Теорема 5 обобщается на гамильтоновы системы с гамильтонианом

$$H = H_0(u) + \varepsilon H_1(u) + \ldots + \varepsilon^{k-1} H_{k-1}(u) + \varepsilon^k H_k(u, v) + o(\varepsilon^k). \quad (8.24)$$

Системы такого вида появляются в результате применения конечного числа шагов классической схемы теории возмущений к гамильтоновой системе с функцией Гамильтона (8.13) (см., например, § 4).

Предположим, что инвариантный тор $\{u = u^0, v \bmod 2\pi\}$ невозмущенной задачи заполнен периодическими траекториями. Пусть h — функция на $(n-1)$-мерном торе, которая получается в результате усреднения функции $H_k(u^0, v)$ по траекториям невозмущенной задачи. Можно показать, что, если при $u = u^0$ выполнены условия (8.15), и критические точки функции h невырождены, то возмущенная система при малых $\varepsilon \neq 0$ имеет по меньшей мере 2^{n-1} различных невырожденных периодических решений того же периода, аналитических по ε. Их характеристические показатели имеют асимптотику $\alpha = \alpha_0(\sqrt{\varepsilon})^k + o((\sqrt{\varepsilon})^k)$ $(\alpha_0 \neq 0)$.

Укажем, следуя работе [160], одно из возможных применений этого результата. Рассмотрим систему с двумя степенями свободы следующего вида (см. § 4):

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x), \quad H_0 = \frac{1}{2}\sum a_{ij} y_i y_j, \quad a_{ij} = \text{const}. \qquad (8.25)$$

Если возмущающая функция H_1 является тригонометрическим многочленом, то теорема 5 дает лишь конечное число невырожденных семейств периодических решений, аналитических по ε. Применение канонических преобразований теории возмущений позволяет увеличить число таких семейств.

Предположим, что квадратичная форма H_0 положительно определена. Положим $H_1 = \sum h_m \exp[i(m, x)]$, $\Delta = \{m \in \mathbb{Z}^2 : h_m \neq 0\}$. "Внутреннее" скалярное произведение, порождаемое формой H_0, обозначим $\langle\ ,\ \rangle$.

Т е о р е м а 6. *Пусть α, β — вершины множества Δ, удовлетворяющие условиям теоремы 2 из § 5, а $y^0 \neq 0$ — точка из $\mathbb{R}^2$, расположенная на одной из прямых $\langle k\alpha + \beta, y\rangle = 0$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, причем компоненты целочисленного вектора $k\alpha + \beta$ взаимно просты. Тогда по крайней мере два периодических решения на резонансном торе $y = y^0 \neq 0$ невозмущенной задачи при возмущении переходят в изоэнергетически невырожденные периодические решения гамильтоновой системы с тем же периодом.*

Идея доказательства теоремы 6 заключается в следующем. Выполним каноническое преобразование $x, y \to u, v$ по формулам $x_s = \partial S/\partial y_s$, $v_s = \partial S/\partial u_s$ $(s = 1, 2)$, $S = S_0 + \varepsilon S_1 + \ldots + \varepsilon^{k-1} S_{k-1}$, где $S_1, \ldots, S_{k-1}$ удовлетворяют первым $k-1$ уравнениям бесконечной системы (4.4). В результате такого преобразования функция Гамильтона $H_0(y) + \varepsilon H_1(x)$ будет иметь вид (8.24). Предположим, что точка $u^0 \neq 0$ лежит на одной из прямых $\langle u, k\alpha + \beta\rangle = 0$ $(k =$

$= 0, 1, \ldots$), причем компоненты вектора $k\alpha + \beta \in \mathbb{Z}^2$ взаимно просты. Положим

$$H_k = \sum h_m^*(u) \exp[i(m, v)]. \tag{8.26}$$

Несложно показать, что найдется единственный целочисленный вектор $\tau = (\tau_1, \tau_2)$, $\tau_2 > 0$, для которого: а) $h_\tau^*(u^0) \neq 0$; б) $\langle u^0, \tau \rangle = 0$.

Теперь можно воспользоваться обобщенной теоремой 5. Действительно, из разложения (8.26) получаем $h(\lambda) = \sum\limits_{\langle u^0, \tau \rangle = 0} h_\tau(u^0) e^{i\tau_2 \lambda} = h_0 + h_\tau e^{i\tau_2\lambda} + \overline{h}_\tau e^{-i\tau_2\lambda}$. Ввиду периодичности h, при некоторых двух значениях λ производная h' обращается в ноль. Покажем, что $h'' \neq 0$. Если это не так, то $h_\tau e^{i\tau_2\lambda} - \overline{h}_\tau e^{-i\tau_2\lambda} = h_\tau e^{i\tau_2\lambda} + \overline{h}_\tau e^{-i\tau_2\lambda} = 0$. Поскольку $\exp(i\tau_2\lambda) \neq 0$, то $h_\tau \overline{h}_\tau = 0$. Но это противоречит указанному выше свойству а). Условия (8.15) выполняются автоматически ввиду положительной определенности формы H_0 (см. п. 5). Теорема доказана.

Используя теорему 6, получаем, что если выпуклая оболочка Δ не является ромбом, то уравнения Гамильтона с гамильтонианом (8.25) при $\varepsilon > 0$ имеют бесконечно много различных изоэнергетически невырожденных решений с одним и тем же периодом (или энергией). К сожалению, область существования этих решений по ε неограниченно уменьшается при $k \to \infty$. Поэтому при каждом фиксированном $\varepsilon > 0$ мы можем гарантировать существование большого, но конечного числа изоэнергетически невырожденных периодических решений. Это обстоятельство не позволяет доказать неинтегрируемость системы (8.25) при малых фиксированных значениях $\varepsilon > 0$. Однако можно доказать отсутствие аналитического по ε семейства первых интегралов и нетривиальных групп симметрий.

В качестве примера рассмотрим задачу трех частиц единичной массы на гладкой окружности единичного радиуса, которые упруго притягиваются или отталкиваются. Пусть $x_i \mod 2\pi$ — угловые координаты этих точек, y_i — их моменты. Гамильтониан имеет вид (см. § 7)

$$H = \frac{1}{2} \sum y_i^2 + \varepsilon \sum_{i<j} \cos(x_i - x_j). \tag{8.27}$$

Понижая число степеней свободы с использованием интеграла момента, получаем гамильтонову систему с двумя степенями свободы (см. п. 2 § 7). Выпуклая оболочка множества Δ изображена на рис. 14. В качестве вершин возьмем два вектора: $\alpha = (1, 0)$ и $\beta = (0, -1)$. Ясно, что компоненты вектора $k\alpha + \beta = (k, -1)$ взаимно просты, и $\langle \alpha, \beta \rangle > 0$. Следовательно, по теореме 6 система с гамильтонианом (8.27) не интегрируема ввиду наличия бесконечного числа семейств изоэнергетически невырожденных долгопериодических решений.

§ 9. Невырожденные инвариантные торы

1. Предположим, что система дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = v(z), \quad z \in M^{m+k}, \tag{9.1}$$

имеет k-мерный инвариантный тор $\mathbb{T}^k$, заполненный траекториями условно-периодических движений. В малой окрестности этого тора можно ввести координаты $x_1, \ldots, x_k \mod 2\pi$, $y_1, \ldots, y_m$, в которых уравнения (9.1) примут вид

$$\dot{x} = \omega + f(x, y), \quad \dot{y} = \Omega y + g(x, y). \tag{9.2}$$

Здесь $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_k)$ — вектор постоянных частот условно-периодических движений на $\mathbb{T}^k$, $f(x, 0) = 0$, $g(x, y) = O(|y|^2)$. Инвариантный тор задается, очевидно, уравнением $y = 0$. Элементы квадратной матрицы Ω порядка m 2π-периодически зависят от $x_1, \ldots, x_k$.

При $k = 1$ получаем уравнения (8.2). Как уже отмечалось в п. 1 § 8, в этом случае линейной заменой координат y, 2π-периодически зависящей от x, Ω можно привести к постоянной матрице (теорема Ляпунова — Флоке). Однако при $k > 1$ такое приведение не всегда возможно (обсуждение этих вопросов можно найти, например, в [10]). Будем предполагать, что матрица Ω постоянна; именно этот случай встретится в приложениях (см. п. 1 § 10).

Линейные уравнения

$$\dot{\xi} = \Omega \xi, \quad \xi \in \mathbb{R}^m, \tag{9.3}$$

естественно назвать уравнениями в вариациях. Роль характеристических показателей играют собственные числа матрицы Ω. Как и в случае $k = 1$, наличие нетривиальных интегралов и групп симметрий системы (9.2) накладывает существенные ограничения на спектр матрицы Ω.

Пусть H — однозначный интеграл системы (9.2). В окрестности инвариантного тора эту функцию можно представить в виде $H = H_0(x) + (y, h(x)) + O(|y|^2)$; здесь H_0 и h — функция и ковекторное поле на инвариантном торе $\mathbb{T}^k$.

Лемма 1. *Пусть частоты $\omega_1, \ldots, \omega_k$ рационально несоизмеримы. Тогда $H_0 = \mathrm{const}$, а поле h удовлетворяет уравнению*

$$\left(\frac{\partial h}{\partial x}, \omega\right) = -\Omega^{T} h. \tag{9.4}$$

Доказательство этого утверждения повторяет рассуждения п. 2 § 8.

Предположим, что система (9.2) допускает группу симметрий — фазовый поток системы дифференциальных уравнений $x' = V(x, y)$, $y' = W(x, y)$, правые части которых 2π-периодичны по координатам $x_1, \ldots, x_k$.

Лемма 2. *Векторное поле $w(x) = W(x, 0)$ удовлетворяет уравнению*

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}, \omega\right) = \Omega w. \tag{9.5}$$

Лемма 2 просто доказывается методом п. 2 § 8.

Пусть $x(t)$ — условно-периодическое движение на k-мерном инвариантном торе. Вектор-функция $w(x(t))$ удовлетворяет уравнениям в вариациях (9.3). Линейные системы (9.4) и (9.5) сопряжены друг другу: $(h, w) \equiv \mathrm{const}$. Действительно, согласно (9.4) и (9.5), функция $\varphi = (h, w)$ удовлетворяет линейному уравнению

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \omega\right) = 0. \tag{9.6}$$

Положим $\varphi = \sum \varphi_\lambda \exp[i(\lambda, x)]$, $\lambda \in \mathbb{Z}^k$, и воспользуемся уравнением (9.6): $\sum i\varphi_\lambda(\lambda, \omega) \exp[i(\lambda, x)] = 0$. Следовательно, $(\lambda, \omega)\varphi_\lambda = 0$. Так как $(\lambda, \omega) \neq 0$ при $\lambda \neq 0$, то все φ_λ, кроме φ_0, равны нулю. Поэтому $\varphi = \varphi_0 = \mathrm{const}$.

2. Теорема 1. *Предположим, что система (9.2) допускает r интегралов, независимых хотя бы в одной точке инвариантного тора $\mathbf{T}^k$. Тогда матрица Ω имеет (с учетом кратностей) по меньшей мере r собственных чисел вида $i(\lambda, \omega)$, $\lambda \in \mathbb{Z}^k$.*

Пусть $k = 1$. Тогда матрица монодромии $P = \exp(2\pi\Omega/\omega)$ имеет собственное значение $\rho = 1$ кратности $\geqslant r$. Следовательно, теорема 1 содержит как частный случай теорему Пуанкаре из п. 2 § 8.

Доказательство теоремы 1. Разложим функцию $h(x)$ в ряд Фурье:

$$h = \sum h_\lambda \exp[i(\lambda, x)], \quad \lambda \in \mathbb{Z}^k, \quad h_\lambda \in \mathbb{R}^m. \tag{9.7}$$

Подставляя этот ряд в уравнение (9.4) и приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим цепочку соотношений

$$\Omega^\top h_\lambda = -i(\lambda, \omega) h_\lambda. \tag{9.8}$$

Следовательно, h_λ — собственный вектор матрицы $\Omega^\top$ с собственным значением $-i(\lambda, \omega)$.

Предположим, что имеется не более $r-1$ различных ненулевых собственных векторов h_λ, удовлетворяющих (9.8). Частоты $\omega_1, \ldots, \omega_k$ рационально несоизмеримы, поэтому числа (λ, ω) и (λ', ω) $(\lambda, \lambda' \in \mathbb{Z}^k)$ совпадают лишь при $\lambda = \lambda'$. Следовательно, в разложениях (9.7) не более $r-1$ коэффициентов h_λ отличны от нуля. Но тогда ковекторные поля $h(x)$, отвечающие r интегралам системы (9.2), линейно зависимы. Значит, эти интегралы зависимы во всех точках инвариантного тора. Получено противоречие. Для завершения доказательства осталось заметить, что собственные значения матриц Ω и $\Omega^\top$ совпадают.

Теорема 2. *Предположим, что система (9.2) допускает $s+k$ полей симметрий, линейно независимых хотя бы в одной точке инвариантного тора $\mathbf{T}^k$. Тогда матрица Ω имеет (с учетом кратностей) по меньшей мере s собственных значений вида $i(\lambda, \omega)$, $\lambda \in \mathbb{Z}^k$.*

Доказательство этого утверждения вполне аналогично доказательству теоремы 1. При $k=1$ получаем теорему 2 из § 8.

3. Теорема 3. *Предположим, что система (9.2) допускает r интегралов $H_1, \ldots, H_r$ и l полей симметрий $u_1, \ldots, u_l$, независимых в точках инвариантного тора $\mathbf{T}^k$, причем*

$$\left(\frac{\partial H_i}{\partial z}, u_j\right) = 0, \quad 1 \leqslant i \leqslant r, \quad 1 \leqslant j \leqslant l. \tag{9.9}$$

Тогда матрица Ω имеет (с учетом кратностей) не менее $r+l-k$ собственных значений вида $i(\lambda, \omega)$, $\lambda \in \mathbb{Z}^k$.

При $k=1$ это утверждение совпадает с теоремой 3 из § 8. Доказательство основано на тех же идеях.

Применим теорему 3 к гамильтоновой системе с n степенями свободы, обладающей нерезонансным k-мерным инвариантным тором. Предположим, что эта система допускает r независимых интегралов в инволюции. Утверждается, что спектр соответствующей матрицы Ω содержит не менее $2r-k$ чисел вида $i(\lambda, \omega)$, $\lambda \in \mathbb{Z}^k$. При $k=1$ получаем теорему 4 из § 8. Доказательство основано на том факте, что гамильтоновы поля $v_{H_1}, \ldots, v_{H_r}$ являются полями симметрий, причем для них справедливы соотношения (9.9). Для получения нужной оценки остается воспользоваться заключением теоремы 3.

4. Рассмотрим иллюстративный пример. Пусть $2(m+l)$-мерное фазовое пространство снабжено симплектической структурой $dY \wedge dX + dZ_- \wedge dZ_+$, где $X = (X_1, \ldots, X_m) \bmod 2\pi$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$,

$Z_\pm = (Z_1^\pm, \ldots, Z_l^\pm)$. Рассмотрим функцию Гамильтона

$$H = (\omega, Y) + (Y, \Gamma Y)/2 + (Z_-, \Omega Z_+) + G(X, Y, Z). \tag{9.10}$$

Здесь ω — нерезонансный набор чисел $\omega_1, \ldots, \omega_m$, Γ и Ω — постоянные матрицы, функция G 2π-периодична по X, и ее разложение в ряд Маклорена по переменным Y, Z начинается с членов третьего порядка.

Выпишем уравнения Гамильтона:

$$\begin{aligned} \dot X &= \omega + \Gamma Y + O_2(Y, Z), & \dot Z_+ &= \Omega Z_+ + O_2(Y, Z), \\ \dot Y &= O_3(Y, Z), & \dot Z_- &= -\Omega^\top Z_- + O_2(Y, Z). \end{aligned}$$

Очевидно, они имеют m-мерный инвариантный тор $\mathbf{T}^m = \{X, Y, Z\colon Y = Z = 0\}$, заполненный траекториями условно-периодических движений $X = \omega t + X_0$. Согласно (9.3), уравнения в вариациях приобретают вид

$$\dot Y = 0, \quad \dot Z_+ = \Omega Z_+, \quad \dot Z_- = -\Omega^\top Z_-. \tag{9.11}$$

Спектр этой линейной системы с постоянными коэффициентами содержит m нулей, l собственных чисел матрицы Ω и l собственных чисел матрицы $-\Omega^\top$.

Предположим, что матрица Ω не имеет чисто мнимых собственных чисел. Тогда, согласно результатам п. 3, любые $m+1$ интегралов рассматриваемой системы уравнений Гамильтона зависимы в точках m-мерного тора $Y = Z = 0$.

Предположим, например, что для всех $\zeta \in \mathbb{C}^l$

$$\operatorname{Re}(\zeta, \Omega\bar\zeta) \geqslant \mu|\zeta|^2, \quad \mu = \mathrm{const} > 0, \tag{9.12}$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Пусть λ — собственное значение матрицы Ω с собственным вектором $\xi \in \mathbb{C}^l$, $\Omega\xi = \lambda\xi$. Тогда $\operatorname{Re}(\xi, \Omega\bar\xi) = \operatorname{Re}(\xi, \overline{\lambda\xi}) = \operatorname{Re}\bar\lambda|\xi|^2 > 0$. Следовательно, все собственные числа матрицы Ω $(-\Omega^\top)$ лежат в правой (левой) полуплоскости.

5. Рассмотрим более общий случай, когда в разложении гамильтониана (9.10) матрицы Γ и Ω 2π-периодически зависят от $X_1, \ldots, X_m$. Уравнениями в вариациях снова являются линейные уравнения (9.11). Однако в общем случае они не приводятся к системе с постоянными коэффициентами.

Лемма 3. *Пусть матрица Ω при всех значениях X удовлетворяет условию (9.12). Тогда любые $m+1$ интегралов уравнений Гамильтона с гамильтонианом (9.10) зависимы во всех точках m-мерного нерезонансного инвариантного тора $Y = 0$, $Z = 0$.*

Доказательство. В окрестности этого тора любую функцию можно представить в виде $F = F_0(X) + (y(X), Y) + (z_+(X), Z_+) + (z_-(X), Z_-) + O_2(Y, Z)$. Функции F_0, y, $z_\pm$ 2π-периодичны по X. Если F — интеграл уравнений Гамильтона, то

$$\begin{gathered}\left(\frac{\partial F_0}{\partial X}, \omega\right) = 0, \quad \left(\frac{\partial y}{\partial X}, \omega\right) = 0, \\ \left(\frac{\partial z_+}{\partial X}, \omega\right) = -\Omega^\top z_+, \quad \left(\frac{\partial z_-}{\partial X}, \omega\right) = \Omega z_-.\end{gathered} \tag{9.13}$$

Набор частот ω — нерезонансный, поэтому $F_0 = \mathrm{const}$, $y = \mathrm{const}$. Два последних уравнения (9.13) можно представить в форме $\dot z_+ = -\Omega^\top z_+$, $\dot z_- = \Omega^\top z_-$; здесь точка означает полную производную по времени в силу системы $\dot X = \omega$. Ввиду (9.12), $z_\pm(t) \to 0$ при $t \to \pm\infty$. Траектории $X = \omega t + X_0$ всюду плотны на m-мерном торе $\mathbf{T}^m = \{X \mod 2\pi\}$, поэтому $z_\pm(X) \equiv 0$.

Итак, с точностью до несущественного постоянного слагаемого $F = (y_0, Y) + O_2(Y, Z)$, $y_0 = \mathrm{const}$. Ясно, что интегралы независимы в точках тора $\mathbf{T}^m$ в том и только том случае, когда линейно независимы соответствующие постоянные векторы y_0. Поскольку $y_0 \in \mathbb{R}^m$, число независимых интегралов не превосходит m. Лемма доказана.

Отметим, что в приводимом случае заключение леммы 3 вытекает из теоремы 3 настоящего параграфа. Торы, о которых шла речь в лемме 3, можно назвать *гиперболическими*; они являются прямым обобщением гиперболических периодических решений из § 8.

6. Согласно теореме Ляпунова — Флоке, уравнения (9.11) приводимы при $m = 1$. Покажем, что при $l = 1$ они также приводимы, если частоты $\omega_1, \ldots, \omega_m$ сильно несоизмеримы:

$$|(k, \omega)| \geqslant \alpha/|k|^\beta, \quad \alpha, \beta = \mathrm{const} > 0, \tag{9.14}$$

для всех $k \in \mathbb{Z}^m$. В этом случае задача сводится к исследованию одного уравнения

$$\dot z = \Omega(X) z, \quad X \in \mathbf{T}^m. \tag{9.15}$$

Выполним обратимую замену переменных $z \to \zeta$ по формуле $z = \zeta u$, где u — положительная функция на $\mathbf{T}^m$. Предположим, что после такой замены уравнение (9.15) перейдет в уравнение

$$\dot\zeta = c\zeta, \quad c = \mathrm{const}. \tag{9.16}$$

Тогда искомая функция u будет удовлетворять уравнению $(\partial u/\partial X, \omega) = (\Omega - c)u$. По предположению $u > 0$, поэтому можно положить $u = \exp v$. Тогда

$$\left(\frac{\partial v}{\partial X}, \omega\right) = \Omega - c. \tag{9.17}$$

Положим

$$c = \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{\mathbf{T}^m} \Omega \, d^m X. \tag{9.18}$$

Поскольку выполнено (9.14), то в предположении гладкости функции Ω уравнение (9.17) имеет гладкое решение $v : \mathbf{T}^m \to \mathbb{R}$.

Итак, если выполнено условие (9.14), то уравнение (9.15) переходит в (9.16), причем постоянная c определяется формулой (9.18), и $u = \exp v$, где v — решение "гомологического" уравнения (9.17).

§ 10. Рождение гиперболических инвариантных торов

1. Обратимся вновь к "основной проблеме динамики" по Пуанкаре. Речь пойдет о гамильтоновых системах с вещественно-аналитическими гамильтонианами

$$\begin{gathered} H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y) + o(\varepsilon), \\ y \in D \subset \mathbb{R}^n, \quad x \in \mathbf{T}^n, \quad \varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \quad \varepsilon_0 > 0. \end{gathered} \tag{10.1}$$

Предположим, что при $y = y^0$ частоты невозмущенной задачи $\omega_1 = \partial H_0/\partial y_1$, ..., $\omega_n = \partial H_0/\partial y_n$ рационально соизмеримы. Более точно, имеется такая нетривиальная подгруппа Λ группы $\mathbb{Z}^n$, что $(\omega, \tau) = 0$ для всех $\tau \in \Lambda$. Пусть $\operatorname{rank} \Lambda = l$ и $m = n - l$. Согласно теории абелевых групп, найдутся такие n векторов $\tau_1', \dots, \tau_m', \tau_1, \dots, \tau_l$ из $\mathbb{Z}^n$, что матрица K_0, столбцами которой являются компоненты этих векторов, унимодулярна (ее определитель равен единице), и векторы $\tau_1, \dots, \tau_l$ порождают группу Λ.

Положим $K = \|\tau_1, \dots, \tau_l\|$, $K' = \|\tau_1', \dots, \tau_m'\|$. Матрицы K и K' имеют соответственно размеры $n \times l$ и $n \times m$. Ясно, что $\operatorname{rank} K = l$, $\operatorname{rank} K' = m$, $K^\top \omega = 0$.

Инвариантный тор $y = y^0$ невозмущенной системы является резонансным и расслаивается на m-мерные нерезонансные инвариантные торы

$$\mathbf{T}^m(x^0, y^0) = \{x, y : y = y^0, K^\top(x - x^0) \equiv 0 \mod 2\pi\}. \tag{10.2}$$

Оказывается, при выполнении некоторых условий не все торы (10.2) разрушаются при добавлении возмущения, и лишь немного деформируются. Этот результат, полученный Д. В. Трещёвым, является расширением теоремы Пуанкаре о рождении периодических решений (п. 5 § 8).

Перейдем к точным формулировкам. Положим

$$\Pi = \left\| \frac{\partial^2 H_0}{\partial y^2}(y^0) \right\|, \quad H_1(x, y^0) = \sum H^\tau \exp[i(\tau, x)], \quad \tau \in \mathbb{Z}^n. \quad (10.3)$$

Усредним функцию H_1 по невозмущенным траекториям. Для этого перейдем к новым угловым переменным z по формуле $z = K_0^\top x$ и положим $x = \omega t + x^0$. Тогда $z = \omega^* t + z^0$, где $\omega^* = K_0^\top \omega$, $z^0 = K_0^\top x^0$. Поскольку $K_0 = \|K', K\|$ и $K^\top \omega = 0$, то $\omega^* = (\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*, 0, \ldots, 0)^\top$. Ясно, что новые частоты $\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*$ рационально несоизмеримы, так как в противном случае ранг группы Λ был бы больше l. Положим $z^0 = (0, \ldots; 0, \lambda_1, \ldots, \lambda_l)$ и проведем усреднение по времени: $h(\lambda) = \lim\limits_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T H_1(\omega t + x^0, y^0)\, dt$.

Функцию $h : \mathbf{T}^l \to \mathbb{R}$ можно получить по-другому, выбрасывая из ряда Фурье (10.3) все члены, отвечающие векторам τ, не принадлежащим группе Λ: $h(\lambda) = \sum H^{K\mu} \exp[i(\mu, \lambda)]$, $\mu \in \mathbb{Z}^l$.

Пусть $dh(\lambda^0) = 0$ и $V = \left\| \dfrac{\partial^2 h}{\partial \lambda^2}(\lambda^0) \right\|$. Согласно теории Морса, в типичной ситуации функция h имеет не менее 2^l различных критических точек.

Т е о р е м а 1 [161]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det \Pi \neq 0$;

2) *ни одно из собственных чисел матрицы $VK^\top \Pi K$ не является положительным вещественным числом или нулем;*

3) *числа $\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*$ сильно несоизмеримы:*

$$|\nu_1 \mu_1^* + \ldots + \nu_m \mu_m^*| \geqslant c|\nu|^{-N}, \quad c, N > 0, \quad (10.4)$$

для всех целых $\nu_1, \ldots, \nu_m$, не равных одновременно нулю.

Тогда при малых $\varepsilon \geqslant 0$ существует семейство m-мерных инвариантных торов $\mathbf{T}_\varepsilon^m$ гамильтоновой системы с гамильтонианом (10.1), сплошь заполненных траекториями условно-периодических движений с частотами $\omega_1^*, \ldots, \omega_m^*$, причем $\mathbf{T}_0^m$ совпадает с тором $\mathbf{T}^m(x^0, y^0)$, где $K^\top x^0 \equiv \lambda^0 \mod 2\pi$.

Более того, существует такая аналитическая по $x, y, \sqrt{\varepsilon}$ каноническая замена координат $(x; y) \to (X, Z_+; Y, Z_-)$, где

$$X = (X_1, \ldots, X_m) \mod 2\pi, \quad Y = (Y_1, \ldots, Y_m),$$
$$Z_\pm = (Z_1^\pm, \ldots, Z_l^\pm), \quad dx \wedge dy = dX \wedge dY + dZ_+ \wedge dZ_-,$$

что в новых переменных гамильтониан (10.1) *приобретает вид*

$$(\omega^*, Y) + \sqrt{\varepsilon}(Y, \Gamma(\sqrt{\varepsilon})Y)/2 + \sqrt{\varepsilon}(Z_-, \Omega(X, \sqrt{\varepsilon})Z_+) + \\ + \sqrt{\varepsilon}F(X, Y, Z, \sqrt{\varepsilon}) + \varepsilon G(X, Y, Z, \sqrt{\varepsilon}),$$

где $\Gamma = \Gamma_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$, $\Omega = \Omega_0 + O(\sqrt{\varepsilon})$, *причем* $\det \Gamma_0 \neq 0$, *и для всех* $\zeta \in \mathbb{C}^l$ *выполнены неравенства* $\mathrm{Re}(\zeta, \Omega_0\overline{\zeta}) \geqslant \mu|\zeta|^2$ ($\mu = \mathrm{const} > 0$), *функции* F *и* G *аналитичны, их разложение в ряд Маклорена по* Z (*соответственно по* Y, Z) *начинается с членов степени* $\geqslant 3$. *Инвариантные торы* $\mathbf{T}^m_\varepsilon$ *имеют вид* $\{X, Y, Z : Y = 0, Z = 0\}$.

Доказательство теоремы 1 основано на идеях КАМ-теории. Согласно § 9, при малых $\varepsilon > 0$ инвариантные торы $\mathbf{T}^m_\varepsilon$ являются гиперболическими. При $m = 1$ они превращаются в периодические решения, и теорема 1 становится частным случаем теоремы Пуанкаре из п. 5 § 8. Действительно, условие 3) теоремы 1 при этом заведомо выполнено, а условие 1) совпадает с условием невырожденности невозмущенной системы. Далее, невырожденность матрицы $VK^\top \Pi K$ эквивалентна двум условиям: $\det V \neq 0$ и $\det(K^\top \Pi K) \neq 0$. Первое из них сводится к условию невырожденности критической точки функции h, а второе эквивалентно второму из неравенств (8.15). Следовательно, применима теорема Пуанкаре.

Подчеркнем, что все инвариантные торы, существующие в силу теоремы 1, неустойчивы, тогда как по теореме Пуанкаре при $m = 1$ возмущенная система имеет устойчивые в линейном приближении замкнутые траектории (п. 7 § 8). Кроме того, теорема Пуанкаре утверждает, что семейство инвариантных торов $\mathbf{T}^1_\varepsilon$ аналитично по ε, тогда как из теоремы 1 вытекает лишь аналитичность по $\sqrt{\varepsilon}$.

Условие 2) теоремы 1 существенно для наличия невырожденных инвариантных торов возмущенной системы. Дело в том, что при малом возмущении функции Гамильтона изоэнергетически невырожденные периодические решения не исчезают, а переходят в периодические решения того же периода. Для инвариантных торов размерности $m \geqslant 2$ это уже не так. В работах В. К. Мельникова [128], Ю. Мозера [129], С. Граффа [198] показано, что гиперболические приводимые торы с сильно несоизмеримым набором частот (условие (10.4)) сохраняются при возмущении уравнений Гамильтона. Однако аналогичный результат для негиперболических инвариантных торов (например, устойчивых) в общем случае не удается получить даже на формальном уровне (исключение составляют случаи, когда $m = 1$ и $m = n - 1$). Обсуждение этих вопросов можно найти в работе Ю Мозера [129].

2. С точки зрения задачи точного интегрирования канонических уравнений Гамильтона с гамильтонианом (10.1) наибольший интерес представляет случай $m = n - 1$. Здесь имеется всего одно нетривиальное соотношение $\sum k_i\omega_i = 0$ $(k_i \in \mathbb{Z})$.

Единственная угловая переменная λ (см. п. 1) определяется равенством $\lambda = \sum k_i x_i$. Ясно, что $h(\lambda) = \sum H^{\mu k} \exp(i\mu\lambda)$, $\mu \in \mathbb{Z}$.

Резонансный инвариантный тор невозмущенной задачи $y = y^0$, $x \bmod 2\pi$ расслаивается на однопараметрическое семейство $(n - - 1)$-мерных нерезонансных торов

$$\mathrm{T}^{n-1}(\lambda, y^0) = \{x, y : y = y^0, \ \sum k_i x_i = \lambda\}. \tag{10.5}$$

Будем предполагать, что частоты условно-периодических движений на торах (10.5) удовлетворяют условию (10.4).

В рассматриваемом случае матрица $K^\top \Pi K$ сводится к одному вещественному числу

$$\sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 H_0}{\partial y_i \partial y_j}(y^0) k_i k_j. \tag{10.6}$$

Предположим, что сумма (10.6) отлична от нуля и все критические точки функции h невырождены. В частности, число критических точек четно, причем половина из них — локальные минимумы (где $h'' > 0$), а половина — локальные максимумы ($h'' < 0$). Тогда, согласно теореме 1, половина критических точек функции h отвечает $(n-1)$-мерным инвариантным торам невозмущенной задачи, которые при малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ переходят в гиперболические торы $\mathrm{T}_\varepsilon^{n-1}$ возмущенных уравнений Гамильтона. Вопрос о судьбе остальных торов остается пока открытым.

Предположим, что уравнения с гамильтонианом (10.1) имеют полный набор интегралов в виде рядов по ε:

$$\begin{gathered} F_1^0 + \varepsilon F_1^1 + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ F_n^0 + \varepsilon F_n^1 + \ldots \end{gathered} \tag{10.7}$$

Коэффициенты этих рядов — аналитические функции от x, y, 2π-периодически зависящие от x. Ввиду невырожденности невозмущенной задачи, функции $F_1^0, \ldots, F_n^0$ не содержат переменных $x \bmod 2\pi$. Покажем, что они зависимы в точке $y = y^0$. Воспользуемся рассуждением п. 6 § 8. Согласно лемме 3 § 9, на торе $\mathrm{T}_\varepsilon^{n-1}$ интегралы (10.7) зависимы. Устремим ε к нулю. По непрерывности функции $F_1^0, \ldots, F_n^0$ зависимы в точках тора T_0^{n-1}; они не содержат переменных x, поэтому при $y = y^0$ якобиан $\left\| \dfrac{\partial(F_1^0, \ldots, F_n^0)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right\|$ равен нулю, что и требовалось доказать.

Итак, рождение гиперболических инвариантных $(n-1)$-мерных торов возмущенных уравнений Гамильтона является препятствием к их полной интегрируемости. Аналогичные рассуждения показывают, что рождение большого числа m-мерных гиперболических торов несовместимо с наличием $m+1$ независимых интегралов, аналитических по ε.

3. Можно показать, что теорема 1 справедлива для гамильтонианов несколько более общего вида:

$$H_0(y) + \varepsilon H_1(y) + \ldots + \varepsilon^{s-1} H_{s-1} + \varepsilon^s H_s(x, y) + o(\varepsilon^s). \qquad (10.8)$$

Роль возмущающей функции играет H_s, причем для вычисления матрицы V надо усреднить H_s по траекториям гамильтоновой системы с гамильтонианом H_0.

Системы с гамильтонианом (10.8) естественным путем появляются после конечного числа шагов классической теории возмущений, примененной к системе с исходным гамильтонианом (10.1). Обобщенная теорема 1 позволяет установить существование новых гиперболических торов возмущенной задачи.

Продемонстрируем эту идею на примере задачи, рассмотренной нами в § 5. Речь идет о гамильтоновой системе с функцией Гамильтона

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x), \qquad (10.9)$$

где $H_0 = \sum a_{ij} y_i y_j / 2$ — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, H_1 — тригонометрический многочлен по угловым переменным $x_1, \ldots, x_n$. При этом сумма (10.6) заведомо отлична от нуля. Ряд Фурье H_1 имеет конечное число гармоник, поэтому теорема 1 гарантирует лишь наличие конечного числа семейств гиперболических торов возмущенной задачи, что недостаточно для доказательства ее неинтегрируемости.

Угловыми скобками $\langle \ , \ \rangle$ будем обозначать скалярное произведение, задаваемое внутренней метрикой H_0. Пусть Δ — "спектр" многочлена H_1 (см. § 5). Оставляя в стороне тривиальный интегрируемый случай, когда все точки из $\Delta \subset \mathbb{Z}^n$ лежат на одной прямой, будем предполагать, что Δ содержит по крайней мере два линейно независимых элемента. Поэтому можно определить вершину α множества Δ и присоединенную вершину β (см. § 5). Векторы α и β линейно независимы.

Теорема 2 [161]. *Предположим, что*

1) $2\langle \alpha, \beta \rangle / \langle \alpha, \alpha \rangle \notin -\mathbb{Z}_+$, где $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$;

2) *при каждом целом $j \geqslant 0$ компоненты вектора $j\alpha + \beta$ взаимно просты.*

Тогда на каждой плоскости $\pi_j = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, j\alpha + \beta \rangle = 0\}$ имеется такое подмножество $W_j(\varepsilon_0)$, что для всех $y \in W_j(\varepsilon_0)$ при

$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *гамильтонова система с гамильтонианом* (10.9) *обладает гиперболическими инвариантными торами* $\mathbf{T}_y^{n-1}(\varepsilon)$, *непрерывно зависящими от* ε. *При этом для каждого* $j \geqslant 0$ *найдется такое* $\varepsilon_0(j) > 0$, *что мера* $W_j(\varepsilon_0(j))$ *положительна, а мера множества* $\pi_j \setminus \bigcup\limits_{\varepsilon>0} W_j(\varepsilon)$ *равна нулю.*

Этот результат является многомерным аналогом теоремы 6 из § 8 и доказывается по той же схеме. Положим, например, $j = 0$. Компоненты вектора β взаимно просты, поэтому множество Δ содержит лишь одну пару ненулевых векторов, параллельных β: это β и $-\beta$. Но тогда функция $h(\lambda)$ равна $c\cos\lambda + c_1$, где $c, c_1 = \mathrm{const}$, $c \neq 0$. Она имеет ровно две невырожденные критические точки.

Сопоставим подгруппе $\beta\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}^n$ целочисленную унимодулярную матрицу K_0 (см. п. 1). Вектор частот для инвариантных $(n-1)$-мерных торов невозмущенной задачи имеет вид

$$\omega^* = K_0^\top A y, \quad A = \|a_{ij}\|, \tag{10.10}$$

причем $y \in \pi_0 = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle \beta, y\rangle = 0\}$. Матрица $K_0^\top A$ невырождена, поэтому множество тех $y \in \pi_0$, для которых частоты (10.10) не удовлетворяют условию (10.4) ни при каких $c, N > 0$, имеет нулевую меру.

Пусть $W(\varepsilon_0)$ — множество точек из π_0, для которых при всех $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ имеется гиперболический инвариантный тор согласно теореме 1. Мера множества $\pi_0 \setminus \bigcup\limits_{\varepsilon>0} W(\varepsilon)$ равна нулю, поэтому для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ мера $W(\varepsilon_0)$ положительна.

Итак, теорема 2 доказана для $j = 0$. Для доказательства теоремы при $j \geqslant 1$ надо сначала выполнить j шагов теории возмущений и привести гамильтониан (10.9) к виду (10.8), а затем применить обобщенную теорему 1. Все необходимые детали можно найти в работе [161].

4. Теорема 2 применима ко многим известным задачам гамильтоновой механики. В качестве примера рассмотрим систему Гросс — Невё, описывающую динамику взаимодействующих частиц (см. § 6 гл. I). Функция Гамильтона имеет вид $H = \frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} y_i^2 + \varepsilon \sum\limits_{k<j} \cos(x_k - x_j)$. Множество Δ состоит из векторов $e_k - e_j$, где $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$. При $n \geqslant 3$ вершинами α и β будут векторы $(1, 0, \ldots, 0, -1)$ и $(1, 0, \ldots, -1, 0)$. Ясно, что $j\alpha + \beta = (j+1, 0, \ldots, -1, -j)$. При всех $j \geqslant 0$ координаты этих векторов взаимно просты. Следовательно, согласно теореме 2, почти все точки гиперплоскостей $\langle j\alpha + \beta, y\rangle = 0$ отвечают резонансным

n-мерным торам, при разрушении которых рождаются гиперболические $(n-1)$-мерные торы возмущенной системы. Наличие такого большого количества гиперболических торов препятствует полной интегрируемости системы Гросс — Невё.

§ 11. Неавтономные системы

1. Рассмотрим неавтономную систему канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_i = \partial H/\partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial H/\partial x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{11.1}$$

с гамильтонианом $H(x,y,\varphi)$, 2π-периодическим по $\varphi = \omega t$, $\omega = \mathrm{const}$. Вводя две новые сопряженные канонические переменные $\varphi \bmod 2\pi$, ψ и функцию Гамильтона $\mathcal{H} = \omega\psi + H(x,y,\varphi)$, систему (11.1) можно записать в виде автономной гамильтоновой системы с $n+1$ степенью свободы:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\psi} = \omega, \quad \dot{\psi} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial\varphi}, \quad \dot{x} = \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y}, \quad \dot{y} = -\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial x} = -\frac{\partial H}{\partial x}. \tag{11.1$'$}$$

Более точно, проекции интегральных кривых системы (11.1$'$) на фазовое пространство системы (11.1), параметризованные переменной t, являются решениями уравнений (11.1). При этом, конечно, мы полагаем постоянную $\varphi_0 = \varphi - \omega t$ равной нулю.

Так как $\partial\mathcal{H}/\partial\psi = \omega \neq 0$, то к автономной гамильтоновой системе (11.1$'$) можно применить процедуру понижения порядка по Уиттекеру (п. 4 § 1), понизив на единицу число степеней свободы. При этом, разумеется, получим исходную систему (11.1).

Предположим, что уравнения (11.1) допускают условно-периодическое решение $x = f(\omega t, \omega_1 t, \ldots, \omega_k t)$, $y = g(\omega t, \omega_1 t, \ldots, \omega_k t)$. Здесь f и g — гладкие функции на $(k+1)$-мерном торе $\mathrm{T}^{k+1} = \{\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \bmod 2\pi\}$; $\omega, \omega_1, \ldots, \omega_k$ — несоизмеримые постоянные частоты. Покажем, что тогда автономная система (11.1$'$) имеет инвариантный $(k+1)$-мерный тор с теми же частотами условно-периодических движений. Действительно, для этого надо положить

$$x = f(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_k), \quad y = g(\lambda, \lambda_1, \ldots, \lambda_k),$$
$$\varphi = \lambda, \quad \psi = -H(f,g,\lambda)/\omega,$$
$$\dot{\lambda} = \omega, \quad \dot{\lambda}_1 = \omega_1, \quad \ldots, \quad \dot{\lambda}_k = \omega_k.$$

При $k = 0$ имеем периодическое решение. Его мультипликаторами естественно назвать мультипликаторы соответствующей замкнутой траектории автономной системы (11.1$'$).

Пусть функция $F(x, y, \varphi)$, 2π-периодическая по $\varphi = \omega t$, является интегралом системы (11.1). Тогда, очевидно, она является также интегралом системы (11.1′).

Предположим, что гамильтонова система (11.1) допускает такие m инволютивных интегралов $F_1, \ldots, F_m$, что ранг матрицы Якоби $\left\| \dfrac{\partial(F_1, \ldots, F_m)}{\partial(x, y)} \right\|$ равен m хотя бы в одной точке, лежащей на траектории периодического решения $t \to z(t)$. Тогда не менее $2m + 1$ мультипликаторов этого периодического решения равны единице. Для доказательства достаточно сослаться на теорему 4 из § 8 и воспользоваться тем, что ранг матрицы Якоби $\left\| \dfrac{\partial(\mathcal{H}, F_1, \ldots, F_m)}{\partial(\varphi, \psi, x, y)} \right\|$ не меньше $m + 1$.

Аналогичные результаты справедливы и для инвариантных торов при $k \geqslant 1$.

2. Предположим, что неавтономная гамильтонова система зависит от малого параметра ε и при $\varepsilon = 0$ является вполне интегрируемой. В переменных действие — угол невозмущенной задачи $x \mod 2\pi$, y функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y, \varphi) + o(\varepsilon). \tag{11.2}$$

Как и в п. 1, предполагается, что функция H 2π-периодична по φ.

Расширяя фазовое пространство, перейдем к автономной системе с гамильтонианом

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1 + o(\varepsilon), \quad \mathcal{H}_0 = \omega\psi + H_0(y), \quad \mathcal{H}_1 = H_1. \tag{11.3}$$

В теории возмущений гамильтоновых систем существенную роль играет предположение о невырожденности невозмущенной задачи. К сожалению, гессиан функции $\mathcal{H}_0$ по импульсам ψ, y тождественно равен нулю.

Эту трудность можно преодолеть, переходя к системе с гамильтонианом $\exp\mathcal{H}$. Новая система будет иметь те же траектории, однако скорость движения по ним будет отличаться постоянным множителем. Последнее обстоятельство не влияет, например, на свойство замкнутости траектории. Ясно, что

$$\exp\mathcal{H} = \exp\mathcal{H}_0 + \varepsilon\mathcal{H}_1 \exp\mathcal{H}_0 + o(\varepsilon). \tag{11.4}$$

Вычислим вторые производные нового невозмущенного гамильтониана по импульсам ψ, y:

$$\frac{\partial^2 \exp\mathcal{H}_0}{\partial y_i \partial y_j} = e^{\mathcal{H}_0}(a_{ij} + \omega_i\omega_j), \quad \frac{\partial^2 \exp\mathcal{H}_0}{\partial y_i \partial\psi} = e^{\mathcal{H}_0}\omega_i\omega,$$

$$\frac{\partial^2 \exp\mathcal{H}_0}{\partial\psi^2} = e^{\mathcal{H}_0}\omega^2,$$

где $a_{ij} = \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y_i \partial y_j}$, $\omega_i = \dfrac{\partial H_0}{\partial y_i}$. Гессиан функции $\exp \mathcal{H}_0$ по y, ψ равен $(\exp \mathcal{H}_0)^{n+1}\omega^2 \det \|\partial^2 H_0/\partial y_i \partial y_j\|$. Следовательно, если функция H_0 невырождена по импульсам y, то невозмущенная система (11.4) также будет невырожденной. Это наблюдение позволяет применить к системе с гамильтонианом (11.4) полученные выше результаты, касающиеся возмущений автономных гамильтоновых систем. Отметим, что замену гамильтониана его экспонентой впервые применил Пуанкаре в круговой ограниченной задаче трех тел (см. п. 1 § 2).

3. Предположим, что частоты ω, $\omega_1 = \partial H_0/\partial y_1, \ldots, \omega_n = \partial H_0/\partial y_n$ при $y = y^0$ связаны единственным нетривиальным резонансным соотношением $k_0\omega + k_1\omega_1 + \ldots + k_n\omega_n = 0$. Поскольку $\omega \neq 0$, то $\sum\limits_{i \geqslant 1} |k_i| \neq 0$. Естественно считать, что наибольший общий делитель целых чисел $k_0, \ldots, k_n$ равен единице.

Пусть $K = (k_0, k_1, \ldots, k_n)^\top$, $H_1(x, y^0, \varphi) = \sum H^\tau \exp[i(\tau_0\varphi + \tau_1 x_1 + \ldots + \tau_n x_n)]$, $\tau \in \mathbb{Z}^{n+1}$. Введем 2π-периодическую функцию одной переменной $h(\lambda) = \sum H^{K\mu} \exp(i\mu\lambda)$, $\mu \in \mathbb{Z}$. Эта функция — результат усреднения возмущающей функции $H_1 : \mathbf{T}^{n+1} \to \mathbb{R}$ вдоль траекторий невозмущенной задачи (см. п. 1 § 10).

Теорема 1. *Предположим, что функция* (11.2) *аналитична по* x, y, φ, ε, *и при* $y = y^0$ *выполнены следующие условия:*

1) $\det \|\partial^2 H_0/\partial y_i \partial y_j\| \neq 0$;

2) $\delta = \sum\limits_{i,j \geqslant 1} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial y_i \partial y_j} k_i k_j \neq 0$;

3) *при некоторых* $c, N = \mathrm{const} > 0$ *неравенство* $|\omega_0\nu_0 + \omega_1\nu_1 + \ldots + \omega_n\nu_n| \geqslant c|\nu|^{+N}$ *имеет место для всех целых* $\nu_0, \ldots, \nu_n$, *не равных одновременно нулю.*

Пусть $\lambda = \lambda^0$ — *невырожденная критическая точка функции* h, *причем* $h''(\lambda^0)\delta < 0$. *Тогда при малых значениях* $\varepsilon > 0$ *возмущенная система с гамильтонианом* (11.2) *имеет* $(n-1)$-*параметрическое семейство условно-периодических решений*

$$x = \Phi + \sqrt{\varepsilon} f(\Phi, \varphi, \sqrt{\varepsilon}), \quad y = y^0 + \sqrt{\varepsilon} g(\Phi, \varphi, \sqrt{\varepsilon}), \tag{11.5}$$

где f *и* g — *аналитические функции,* 2π-*периодические по* $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ *и* φ, *причем* $\Phi_i = \omega_i t + \lambda_i^0$, $\varphi = \omega t$, $k_1\lambda_1^0 + \ldots + k_n\lambda_n^0 \equiv \lambda^0 \mod 2\pi$.

Для доказательства этой теоремы перейдем к автономной гамильтоновой системе с $n+1$ степенью свободы, задаваемой гамильтонианом (11.3), а затем заменим гамильтониан $\mathcal{H}$ на $\exp \mathcal{H}$.

Согласно результатам п. 2, в предположении 1) система с гамильтонианом $\exp\mathcal{H}_0$ невырождена. Далее, пусть Π — матрица вторых производных функции $\exp\mathcal{H}_0$ по импульсам y, ψ. Несложно показать, что $K^\top \Pi K$ совпадает с числом δ из условия 2), которое (по предположению) отлично от нуля. Теперь можно воспользоваться теоремой 1 из § 10. Условия 1) и 3) этой теоремы заведомо выполнены. Так как $h''(\lambda_0)\delta < 0$, то выполнено условие 2). Следовательно, возмущенная гамильтонова система с гамильтонианом (11.4) при малых значениях $\varepsilon > 0$ имеет n-мерный гиперболический инвариантный тор, заполненный траекториями условно-периодических движений. Этот тор аналитичен по $\sqrt{\varepsilon}$ и при $\varepsilon = 0$ совпадает с замыканием условно-периодических траекторий

$$\varphi = \omega t + \varphi^0, \quad x_i = \omega_i t + x_i^0, \quad \psi = \psi^0, \quad y = y^0,$$

$$k_0\varphi^0 + \sum_{i\geqslant 1} k_i x_i^0 \equiv \lambda^0 \mod 2\pi.$$

Постоянная ψ^0 несущественна; ее можно положить равной нулю. В исходной неавтономной системе $\varphi = \omega t$, поэтому $\varphi^0 = 0$. Проектируя возмущенный n-мерный гиперболический тор на пространство переменных x, y, φ, получим n-мерный инвариантный тор, заполненный условно-периодическими траекториями с n несоизмеримыми частотами. При этом зависимость координат x, y от времени задается соотношениями вида (11.5), что и требовалось доказать.

В типичной ситуации функция h является функцией Морса. Поэтому у нее всегда найдутся критические точки, в которых h'' имеет знак, противоположный знаку δ. При $n = 1$ получаем периодические решения возмущенной задачи, период которых кратен $2\pi/\omega$. Этот случай, по существу, охватывается классической теоремой Пуанкаре о рождении невырожденных периодических решений (см. теорему 5 § 8). Отметим две особенности. Во-первых, зависимость возмущенных решений аналитична по ε, а не по $\sqrt{\varepsilon}$, как в теореме 1. Во-вторых, критическим точкам функции h, в которых $h''(\lambda^0)\delta > 0$, при $\varepsilon > 0$ отвечают возмущенные периодические решения эллиптического типа; они устойчивы в линейном приближении. Условия их устойчивости по Ляпунову указаны в работе [123].

В переменных $x \mod 2\pi$, y, $\varphi \mod 2\pi$ траектории условно-периодических решений (11.5) лежат на n-мерных гиперболических торах, в точках которых зависимы любые n инволютивных однозначных интегралов системы с гамильтонианом (11.2). Поэтому рождение большого числа n-мерных гиперболических торов несовместимо с интегрируемостью возмущенной задачи.

4. Рассмотрим частный случай, когда функция Гамильтона имеет вид

$$H = H_0(y) + \varepsilon H_1(x, \varphi), \quad \varphi = \omega t, \quad \omega > 0, \tag{11.6}$$

где $H_0 = \left(\sum a_{ij} y_i y_j\right)/2$ — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, а возмущающая функция H_1 — тригонометрический многочлен по $x_1, \ldots, x_n, \varphi$.

Изучим, следуя работе [71], задачу о наличии полного набора коммутирующих интегралов в виде формальных степенных рядов

$$\sum F_k(x, y, \varphi)\varepsilon^k \tag{11.7}$$

с однозначными и аналитическими коэффициентами, определенными в прямом произведении $\mathbf{T}_x^n \times \mathbb{R}_y^n \times \mathbf{T}_\varphi^1$.

Пусть $\xi = (\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, $\eta = (\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_n)$ — два вектора из $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим $\langle \xi, \eta \rangle = \omega \xi_0 \eta_0 + \sum a_{ij} \xi_i \eta_j$. Ясно, что $\langle\ ,\ \rangle$ задает скалярное произведение в $\mathbb{R}^{n+1}$.

Положим $H_1 = \sum h_\tau \exp[i(\tau_0 \varphi + \tau_1 x_1 + \ldots + \tau_n x_n)]$ и введем “спектр” Δ функции H_1 как множество тех $\tau \in \mathbb{Z}^{n+1}$, для которых $h_\tau \neq 0$. Множество Δ конечно и инвариантно при подстановке $\tau \to -\tau$.

Теорема 2 [71]. *Гамильтонова система с гамильтонианом (11.6) допускает n коммутирующих интегралов вида (11.7), независимых при $\varepsilon = 0$, в том и только том случае, когда точки множества Δ лежат на n прямых, ортогонально (в метрике $\langle\ ,\ \rangle$) пересекающихся в начале координат.*

Достаточность теоремы 2 очевидна: в этом случае переменные в функции Гамильтона разделяются и уравнения движения имеют n интегралов, квадратичных по импульсам. Например, в условиях теоремы 2 при $n = 1$ функция H_1 имеет вид $f(kx + l\varphi)$, где $f(\cdot)$ — некоторый тригонометрический многочлен от одной переменной, а целые числа k и l взаимно просты. При $k \neq 0$ интегралом служит функция $ly/k + H_0(y) + \varepsilon f(kx + l\varphi)$. Случай $k = 0$ тривиален: функция H_0 — интеграл уравнений движения.

Необходимость условий теоремы 2 установлена в [71] методом работы [97] (см. § 5).

5. Предположим, что точки из Δ не лежат на одной прямой; в противном случае система с гамильтонианом (11.6), очевидно, вполне интегрируема. Введем вершину α множества Δ и присоединенную вершину β; векторы α и β линейно независимы. Положим $Y = (\omega, y_1, \ldots, y_n)$.

Теорема 3. *Предположим, что*

1) *отношение $2\langle\alpha, \beta\rangle / \langle\alpha, \alpha\rangle$ не равно ни одному из чисел $0, -1$,*

$-2, \ldots$;

2) *при всех целых* $j \geqslant 0$ *компоненты каждого вектора* $j\alpha + \beta$ *взаимно просты.*

Тогда на каждой плоскости $\pi_j = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle Y, j\alpha + \beta\rangle = 0\}$ *имеется такое подмножество* $W_j(\varepsilon_0)$, *что для всех* $y \in W_j(\varepsilon_0)$ *при* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *гамильтонова система с гамильтонианом* (11.6) *в переменных* $x \bmod 2\pi$, y, $\varphi \bmod 2\pi$ *обладает гиперболическими* n-*мерными торами, непрерывно зависящими от* ε. *При этом для каждого* $j \geqslant 0$ *найдется такое* $\varepsilon_0(j) > 0$, *что мера* $W_j(\varepsilon_0(j))$ *положительна, а мера множества* $\pi_j \setminus \bigcup\limits_{\varepsilon>0} W_j(\varepsilon)$ *равна нулю.*

Этот результат распространяет на неавтономные системы теорему 2 из § 10. Доказательство использует анализ классической схемы теории возмущений гамильтоновой системы с функцией Гамильтона (11.6), проведенный в [71], а также обобщенный вариант теоремы 1 из п. 3, касающийся аналитических гамильтонианов вида $\sum\limits_{r=0}^{k-1} \varepsilon^r H_r(y) + \varepsilon^k H_k(x, y, \varphi) + o(\varepsilon^k)$.

При $n = 1$ теорема 3 установлена в работе [71]. Точнее, при всех $y \neq 0$ из плоскости π_j резонансные двумерные торы невозмущенной задачи распадаются при добавлении возмущения, причем для малых $\varepsilon \neq 0$ возмущенная задача имеет четное число невырожденных периодических решений. Половина из них имеет гиперболический тип, а половина — эллиптический.

6. Применим результаты п. 5 к системам маятникового типа, рассмотренным в § 4 гл. I.

а) Рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях математического маятника, описываемых уравнением $\ddot{q} + \Omega^2(t)\sin q = 0$, $\Omega^2 = \omega_0^2(1 - \varepsilon\cos\nu t)$. Здесь $\omega_0 = \text{const} > 0$, ε — малый параметр, ν — частота вынуждающей силы. Вводя канонический импульс $p = \dot{q}$, это уравнение можно заменить системой уравнений Гамильтона с гамильтонианом $H_\varepsilon = p^2/2 - \Omega^2\cos q$.

При $\varepsilon = 0$ имеем вполне интегрируемую систему — математический маятник. В этой задаче можно перейти к переменным действие — угол I, $\varphi \bmod 2\pi$:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{2(H_0 + \omega_0^2\cos q)}\, dq, \qquad H_0 = H_0(I), \\ \varphi &= \omega \int_0^q \frac{dx}{\sqrt{H_0(I) + \omega_0^2\cos x}}, \qquad \omega(I) = \frac{dH_0}{dI}. \end{aligned} \tag{11.8}$$

Здесь для определенности рассматривается область вращательных движений, где $H_0 > \omega_0^2$.

Возмущающая функция H_1 равна $\cos q \cos \nu t$. Для разложения H_1 в кратный ряд Фурье по переменным φ и νt заменим во второй формуле (11.8) x на $2u$. Тогда

$$\varphi = \frac{2\omega}{\sqrt{H_0 + \omega_0^2}} \int_0^{q/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}}, \quad k^2 = \frac{2\omega_0^2}{H_0 + \omega_0^2} < 1.$$

Отсюда $\sin \frac{q}{2} = \operatorname{sn} \frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi$, $\cos \frac{q}{2} = \operatorname{cn} \frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi$, $\cos q = \operatorname{cn}^2 \frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi - \operatorname{sn}^2 \frac{\sqrt{a}}{2\omega}\varphi$, $a = H_0 + \omega_0^2$. Так как

$$\omega^{-1} = \frac{dI}{dH_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dq}{\sqrt{H_0 + \omega_0^2 \cos q}} =$$
$$= \frac{1}{\pi\sqrt{a}} \int_0^{\pi} \frac{du}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 u}} = \frac{2\mathbf{K}}{\pi\sqrt{a}}, \tag{11.9}$$

то

$$\cos q = \operatorname{cn}^2 \frac{\mathbf{K}}{\pi}\varphi - \operatorname{sn}^2 \frac{\mathbf{K}}{\pi}\varphi. \tag{11.10}$$

Здесь $\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл первого рода с модулем k.

Воспользуемся известной формулой Якоби: $(k\mathbf{K})^2 \operatorname{sn}^2 \frac{\mathbf{K}x}{\pi} = \mathbf{K}^2 - \mathbf{KE} - 2\pi^2 \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{nq^n}{1 - q^{2n}} \cos 2nx$, где $q = \exp(-\pi\mathbf{K}'/\mathbf{K})$; $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{E}$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулями соответственно $\sqrt{1 - k^2}$ и k. С учетом (11.10) получаем разложение функции H_1 в ряд Фурье: $H_1 = \sum\limits_{-\infty}^{\infty} h_{m,1}(I) \exp[i(2m\varphi + \nu t)] + \sum\limits_{-\infty}^{\infty} h_{m,-1}(I) \exp[i(2m\varphi - \nu t)]$. Коэффициенты $h_{m,\pm 1}$ легко вычисляются с помощью формулы Якоби; они отличны от нуля.

Множество Пуанкаре $\mathbf{P}_*$ (см. § 1) в этой задаче состоит из значений переменной действия I, удовлетворяющих резонансным соотношениям $\pm 2n\omega(I) + \nu = 0$ $(n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\})$. Согласно (11.9), частота ω стремится к нулю при $H_0 \to \omega_0^2$. Заметим, что при $H_0 = \omega_0^2$ имеем движение по сепаратрисам. Следовательно, множество $\mathbf{P}_*$ состоит из бесконечного числа точек $I \in \mathbb{R}$, накапливающихся у точки $I_c = \frac{\omega_0}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{2(1 + \cos q)}\, dq = \frac{4\omega_0}{\pi}$.

Легко проверить, что значения $I \in \mathbf{P}_*$ удовлетворяют условиям теоремы Пуанкаре о рождении пар невырожденных периодических решений при малых $\varepsilon \neq 0$. Наличие бесконечного числа семейств невырожденных периодических решений возмущенной задачи препятствует ее интегрируемости.

б) Движение заряженной частицы в поле двух одинаковых электрических волн, движущихся навстречу друг другу с одной и той же скоростью ω, описывается уравнением

$$\ddot{x} = \varepsilon[\sin(x+\omega t) + \sin(x-\omega t)]. \tag{11.11}$$

Вводя импульс $y = \dot{x}$, уравнение (11.11) можно представить в виде канонических уравнений Гамильтона с гамильтонианом

$$H = y^2/2 - \varepsilon[\cos(x+\omega t) + \cos(x-\omega t)].$$

Множество Δ состоит из четырех векторов $(\pm1, \pm1)$. При стандартном лексикографическом упорядочении $\alpha = (1,1)$, $\beta = (1,-1)$. Векторы $j\alpha + \beta$ имеют компоненты $j+1$ и $j-1$. При всех четных $j \geqslant 0$ эти целые числа взаимно просты. Следовательно, согласно результатам п. 4, резонансные торы $\omega(j+1) + y(j-1) = 0$ ($j = 0, 2, 4, \ldots$) разрушаются при малых значениях $\varepsilon \neq 0$. При $j \to \infty$ эти торы накапливаются у резонансного тора $y = -\omega$, который также разрушается при возмущении. Меняя лексикографический порядок, можно получить последовательность разрушающихся резонансных торов, накапливающихся вблизи прямой $y = \omega$.

Резонансные соотношения $y = \pm\omega$ в задаче о взаимодействии частиц с волнами называются резонансами Ландау; соответствующие торы распадаются уже на первом шаге теории возмущений. Численный анализ уравнения (11.11) при $\varepsilon > 1$ обсуждается в [56].

в) Ограниченная задача о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки при равной нулю постоянной площадей описывается каноническими уравнениями Гамильтона с гамильтонианом $H = \eta^2/2 + \sin\left(\sqrt{2h}\, t\right) \sin\xi$. Здесь h — постоянная энергия. Вводя новую переменную времени $\tau = \sqrt{2h}\, t$, уравнение колебаний можно переписать в виде, аналогичном (11.11):

$$\xi'' + \frac{1}{2h} \sin\tau \cos\xi = 0. \tag{11.12}$$

Роль малого параметра играет величина h^{-1}. Из результатов п. 5 вытекает наличие у уравнения (11.12) бесконечного числа различных семейств невырожденных периодических решений, если энергия h достаточно велика. Этот эффект препятствует интегрируемости уравнения (11.12).

ГЛАВА V

РАСЩЕПЛЕНИЕ АСИМПТОТИЧЕСКИХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Невырожденные гиперболические инвариантные торы гамильтоновых систем имеют асимптотические многообразия, сплошь заполненные траекториями, неограниченно приближающимися к условно-периодическим траекториям на гиперболическом торе при $t \to \pm\infty$. В интегрируемых гамильтоновых системах эти поверхности, как правило, попарно совпадают. В неинтегрируемых случаях ситуация иная: асимптотические поверхности могут трансверсально пересекаться, образуя в пересечении довольно запутанную сеть. "Поражаешься сложности этой фигуры, которую я даже не пытаюсь изобразить. Ничто не является более подходящим, чтобы дать нам представление о сложности задачи трех тел и, вообще, всех задач динамики, в которых нет однозначного интеграла..." (А. Пуанкаре [146]).

В этой главе изложены восходящие к А. Пуанкаре способы доказательства неинтегрируемости, основанные на анализе асимптотических поверхностей гамильтоновых систем, мало отличающихся от вполне интегрируемых.

§ 1. Асимптотические поверхности и условия их расщепления

1. Пусть M^{2n} — фазовое пространство, снабженное симплектической структурой Ω, $H = H_0 + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2)$ — функция Гамильтона. Предположим, что при $\varepsilon = 0$ гамильтонова система имеет m-мерный гиперболический тор $\mathbf{T}_0^m$ (см. п. 5 § 9 гл. IV). Напомним, что в окрестности этого тора можно ввести симплектические координаты $x \bmod 2\pi$, y, z^-, z^+ со следующими свойствами:

а) $x = (x_1, \ldots, x_m), \quad y = (y_1, \ldots, y_m), \quad z^\pm = (z_1^\pm, \ldots, z_{n-m}^\pm)$;

б) $\Omega = dy \wedge dx + dz^- \wedge dz^+$;

в) $\mathbf{T}_0^m = \{(x, y, z^-, z^+) \in M^{2n}: y = 0, \quad z^\pm = 0\}$;

г) $H_0 = (\nu, y) + (Ay, y)/2 + (z^-, Bz^+) + O_3(y, z)$.

Здесь ν — постоянный вектор, удовлетворяющий условиям "сильной" несоизмеримости:

$$|(\nu, k)| \geqslant \alpha |k|^{-\beta}, \qquad k \in \mathbb{Z}^m \setminus 0, \qquad \alpha, \beta > 0\,.$$

Квадратная матрица A постоянна и невырождена, а матрица $B(x)$ размера $(n-m) \times (n-m)$ такова, что для всех $x \bmod 2\pi$ и $\zeta \in \mathbb{C}^{n-m}$ выполняется неравенство

$$\operatorname{Re}(\zeta, B\overline{\zeta}) \geqslant \mu |\zeta|^2, \qquad \mu > 0. \tag{1.1}$$

Координаты x, y, $z^{\pm}$ назовем каноническими для $\Gamma = \mathbf{T}_0^m$.

В дальнейшем наибольший интерес будут представлять случаи $m = 0$ и $m = 1$. При $m = 0$ гиперболический тор превращается в неустойчивое положение равновесия $z^- = z^+ = 0$, причем z^-, z^+ — сопряженные симплектические координаты и $H_0 = (z^-, Bz^+) + \ldots$, $B = \mathrm{const}$. В этих координатах

$$\dot{z}^- = -B^{\mathrm{T}} z^- + \ldots, \qquad \dot{z}^+ = Bz^+ + \ldots \tag{1.2}$$

Ввиду условия (1.1) собственные числа матрицы B $(-B^{\mathrm{T}})$ лежат в правой (левой) полуплоскости (см. п. 4 § 9 гл. IV).

При $m = 1$ будем иметь неустойчивое периодическое решение. Ограничим гамильтонову систему на $(2n-1)$-мерную неособую энергетическую поверхность, на которой лежит траектория этого решения. Уравнения (1.2), по существу, являются уравнениями в вариациях для рассматриваемой периодической траектории. Поэтому половина ее мультипликаторов лежит внутри единичной окружности, а другая половина — вне ее.

Будем предполагать, что функция Гамильтона H аналитически зависит от ε. Тогда по теореме о неявных функциях гиперболические положения равновесия и периодические траектории не исчезнут при добавлении малого возмущения, а лишь немного сместятся. При этом период каждого возмущенного периодического решения не изменится. Оказывается, аналогичный результат справедлив и для многомерных инвариантных гиперболических торов: по теореме Граффа [198] при малых значениях параметра ε возмущенная гамильтонова система будет иметь инвариантный гиперболический тор $\mathbf{T}_\varepsilon^m$ с теми же частотами условно-периодических движений $\nu = (\nu_1, \ldots, \nu_m) = \mathrm{const}$; возмущенные торы $\mathbf{T}_\varepsilon^m$ аналитически зависят от ε.

Можно показать [198], что каждый гиперболический тор $\mathbf{T}_\varepsilon^m$ лежит в пересечении двух инвариантных лагранжевых поверхностей Λ_ε^+ и Λ_ε^-, заполненных траекториями гамильтоновой системы, неограниченно приближающимися к тору $\mathbf{T}_\varepsilon^m$ соответственно при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$. Например, если отбросить в разложении гамильтониана слагаемые $O_3(y, z)$, то вблизи тора $\mathbf{T}^m$ поверхность

Λ^+ задается уравнениями $y = 0$, $z^+ = 0$. Локальными координатами на Λ^+ служат переменные $x \bmod 2\pi$, z^-. Ввиду (1.2) (с учетом (1.1)) переменные z^- экспоненциально быстро стремятся к нулю. Следовательно, решения уравнений Гамильтона, траектории которых лежат на Λ^+, экспоненциально быстро стремятся к условно-периодическим движениям по гиперболическому инвариантному тору. Такие решения естественно назвать асимптотическими. В соответствии с этим инвариантные многообразия $\Lambda_\varepsilon^\pm$ называются *асимптотическими поверхностями*. Поверхность Λ_ε^+ (Λ_ε^-) называют еще устойчивой (неустойчивой) асимптотической поверхностью гиперболического тора $\mathbf{T}_\varepsilon^m$.

В случае двух степеней свободы мы имеем двумерные асимптотические поверхности, лежащие на трехмерном уровне интеграла энергии. Как правило, в интегрируемых системах эти поверхности разделяют области с различным топологическим типом фазовых траекторий (вспомним фазовый портрет простого маятника). Поэтому асимптотические поверхности иногда называются *сепаратрисами*.

Следует иметь в виду, что поверхности $\Lambda_\varepsilon^\pm$ определены "в целом" и аналитически зависят от ε (достаточно продолжить асимптотические траектории на всю ось времени). Напомним (см. п. 3 § 2 гл. II), что n-мерная поверхность $\Sigma \subset M^{2n}$ называется лагранжевой, если значение 2-формы Ω на касательных к Σ векторах равно нулю.

Существование лагранжевых асимптотических поверхностей для гиперболических положений равновесия с разной степенью общности было установлено Ляпуновым, Кнезером, Болем. Случай гиперболических периодических решений рассмотрен впервые Пуанкаре [146, гл. VII].

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ гамильтонова система вполне интегрируема: существуют n аналитических интегралов $F_1, \dots, F_n$, попарно находящихся в инволюции и почти всюду независимых. Так как гиперболический тор $\mathbf{T}_0^m$ нерезонансный, и поверхности $\Lambda_0^\pm$ состоят целиком из асимптотических траекторий, то функции F_j постоянны на $\Lambda_0^\pm$. Таким образом, $\Lambda_0^\pm$ содержатся в некотором замкнутом множестве $\{z \in M^{2n}\colon F_1(z) = c_1, \dots, F_n(z) = c_n\}$, причем, согласно результатам § 9 гл. II, точка $c = (c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ является критическим значением отображения $F : M^{2n} \to \mathbb{R}^n$.

Для типичной интегрируемой системы имеют место две возможности:

1) $\Lambda_0^+ = \Lambda_0^-$;

2) совпадают устойчивая и неустойчивая поверхности различных гиперболических m-мерных торов Γ_1 и Γ_2.

В обоих случаях асимптотические решения будут двоякоасимптотическими. Следуя Пуанкаре, разделим двоякоасимптотические решения на два типа: *гомоклинные* (при $\Gamma_1 = \Gamma_2$) и *гетероклинные* (при $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$). В гетероклинном случае сдвоенные асимптотические поверхности будем по-прежнему обозначать Λ_0^+ и Λ_0^-.

Как заметил впервые Пуанкаре [225], в типичной ситуации при малых значениях параметра $\varepsilon \neq 0$ возмущенные поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^-, рассматриваемые как подмножества в M^{2n}, уже не будут совпадать. Это явление называется *расщеплением асимптотических поверхностей*. Оно препятствует интегрируемости возмущенной гамильтоновой системы (см. § 2).

Может, конечно, оказаться, что возмущенные гиперболические торы $\Gamma_1(\varepsilon)$ и $\Gamma_2(\varepsilon)$ лежат на разных энергетических поверхностях. Поскольку асимптотические поверхности расположены на тех же энергетических уровнях, что и соответствующие гиперболические торы, то в этом случае задача о расщеплении поверхностей Λ_ε^+ и Λ_ε^- тривиальна. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что торы $\Gamma_1(\varepsilon)$ и $\Gamma_2(\varepsilon)$ лежат на одной и той же $(2n-1)$-мерной поверхности уровня интеграла энергии. В гомоклинном случае это условие, очевидно, выполнено автоматически.

Пуанкаре получил условия расщепления асимптотических поверхностей для $m = 1$. Излагаемый ниже анализ задачи о расщеплении выполнен Д. В. Трещёвым.

2. Пусть $t \to \gamma(t)$ — двоякоасимптотическое решение невозмущенной вполне интегрируемой гамильтоновой системы. Положим

$$\begin{aligned} I_i(\gamma) = \lim_{T\to\infty}\Big[\int_{-T}^{T}\{F_i, H_1\}(\gamma(t))\,dt &+ \\ + \{F_i,\chi\}(\gamma(-T)) &- \{F_i,\chi\}(\gamma(T))\Big], \\ J_{ij}(\gamma) = \lim_{T\to\infty}\Big[\int_{-T}^{T}\{F_i,\{F_j,H_1\}\}(\gamma(t))\,dt &+ \\ + \{F_i,\{F_j,\chi\}\}(\gamma(-T)) &- \{F_i,\{F_j,\chi\}\}(\gamma(T))\Big]. \end{aligned} \tag{1.3}$$

В этих формулах χ — аналитическая функция, определяемая в канонических координатах для гиперболических торов уравнением

$$\left(\nu, \frac{\partial\chi}{\partial x}\right) + \eta(x) = \langle\eta\rangle, \tag{1.4}$$

где $\eta(x) = H_1(x, y, z^-, z^+)\big|_{y=0,z^\pm=0}$ и $\langle\eta\rangle = (2\pi)^{-m}\int_{\mathbb{T}^m}\eta(x)\,d^m x$.

Ввиду предположения о сильной несоизмеримости частот $\nu_1, \ldots, \nu_m$ уравнение (1.4), действительно, имеет аналитическое решение, единственное с точностью до аддитивной постоянной. Вопрос об аналитической продолжимости χ на все фазовое пространство не имеет смысла, так как в формулах (1.3) участвуют лишь значения функции в окрестности гиперболических торов.

Т е о р е м а 1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Пределы (1.3) существуют.*

2. *Если $I_s \not\equiv 0$ хотя бы для одного s $(1 \leqslant s \leqslant n)$, то при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- не совпадают.*

3. *Если $I_1(\gamma) = \ldots = I_n(\gamma) = 0$ и ранг матрицы $\|J_{ij}(\gamma)\|$ равен $n-1$, то при малых ε n-мерные поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- пересекаются трансверсально на $(2n-1)$-мерном уровне энергии по двоякоасимптотической траектории γ_ε, причем $\gamma_\varepsilon \to \gamma$ при $\varepsilon \to 0$.*

З а м е ч а н и е. При $F_1 = H_0$ условие $\operatorname{rank}\|J_{ij}\| = n-1$ равносильно невырожденности $(n-1)\times(n-1)$-матрицы $\|J_{ij}\|$ $(2 \leqslant i, j \leqslant n)$.

Для доказательства теоремы 1 воспользуемся следующим результатом симплектической топологии: в некоторой окрестности U каждой точки лагранжева подмногообразия Λ симплектического многообразия (M, Ω) найдутся канонические координаты p, q, в которых $\Omega = dp \wedge dq$, и множество $\Lambda \cap U$ задается уравнением $p = 0$ [13]. Например, пусть лагранжева поверхность Λ задана уравнением $y = \partial S/\partial x$ (см. § 2 гл. II). Тогда координаты p, q вводятся каноническим преобразованием $q = x$, $p = y - \partial S/\partial x$.

Возмущенные асимптотические поверхности $\Lambda_\varepsilon^\pm$ в специальных канонических координатах для поверхности $\Lambda_0^+ = \Lambda_0^-$ имеют вид $p = \varepsilon f^\pm(q, \varepsilon)$. Поскольку $\Lambda_\varepsilon^\pm$ — лагранжевы поверхности, то $df^\pm \wedge dq = \frac{1}{\varepsilon}\Omega\Big|_{\Lambda_\varepsilon^\pm} = 0$. Поэтому $f^\pm = \dfrac{\partial S^\pm(q,\varepsilon)}{\partial q}$. Можно показать, что функции $S^\pm\colon \Lambda_\varepsilon^\pm \to \mathbb{R}$ определены корректно (т. е. не зависят от выбора координат p, q).

Согласно предположению п. 1, асимптотические поверхности $\Lambda_\varepsilon^\pm$ лежат на одной энергетической поверхности $H = H_0(p,q) + \varepsilon H_1(p,q) + o(\varepsilon) = h(\varepsilon)$. Следовательно, функции $S^\pm(q,\varepsilon)$ удовлетворяют уравнению Гамильтона—Якоби $H\left(\varepsilon\dfrac{\partial S^\pm}{\partial q}, q, \varepsilon\right) = h(\varepsilon)$.

В первом приближении по ε имеем

$$\frac{\partial H_0}{\partial p}(0,q)\frac{\partial S_0^\pm}{\partial q} + H_1(0,q) = h_1, \tag{1.5}$$

где $S_0^\pm(q) = S^\pm(q, 0)$, $h_1 = \frac{d}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0} h$. Из (1.5) получаем соотношение

$\frac{d}{dt}[S_0^\pm(\gamma(t))] + H_1(\gamma(t)) = h_1$. Следовательно,

$$S_0^\pm(\gamma(t_2)) - S_0^\pm(\gamma(t_1)) = \int_{t_1}^{t_2} (H_1 - h_1)_{\gamma(t)}\, dt. \qquad (1.6)$$

Лемма 1. *Справедливо соотношение* $S_0^\pm - \chi = \mathrm{const} + O(y, z)$.

Следствие. *Выполняется равенство*

$$\{F_{i_1}, \{F_{i_2}, \dots, \{F_{i_k}, S_0^\pm - \chi\} \dots\}\} = O(y,z)\,. \qquad (1.7)$$

Соотношение (1.7) вытекает из леммы 1 и того факта, что в окрестности гиперболического тора каждый интеграл уравнений Гамильтона имеет вид $\mathrm{const} + (Y_0, y) + O_2(y,z)$, где $Y_0 = \mathrm{const}$ (см. п. 5 § 9 гл. IV). Лемма 1 доказана ниже в п. 3.

Предположим, что асимптотические поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- совпадают. Тогда $\frac{\partial}{\partial q}(S_0^+ - S_0^-) = 0$. Функции $S_0^\pm$ зависят лишь от q, поэтому

$$\{F_i, S_0^+ - S_0^+\} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \qquad (1.8)$$

Используя (1.6) и лемму 1, получаем

$$-\{F_i, S_0^+\}(\gamma(0)) = \int_0^T \{F_i, H_1\}(\gamma(t))\, dt - \{F_i, S_0^+\}(\gamma(T)) =$$
$$= \lim_{T\to\infty} \left[\int_0^T \{F_i, H_1\}(\gamma(t))\, dt - \{F_i, \chi\}(\gamma(T)) \right].$$

Аналогичная формула справедлива и для функции S_0^-. Поэтому

$$\{F_i, S_0^-\}(\gamma(0)) - \{F_i, S_0^+\}(\gamma(0)) = I_i(\gamma). \qquad (1.9)$$

Следовательно, пределы (1.3) для I_i, действительно, существуют, и условия нерасщепления (1.8) принимают вид $I_1 = \ldots = I_n = 0$.

Третье утверждение теоремы 1 доказывается с использованием теоремы о неявной функции. Будем искать решение уравнений

$$\frac{\partial S^-}{\partial q}(q^0) = \frac{\partial S^+}{\partial q}(q^0). \qquad (1.10)$$

В этом случае поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- имеют непустое пересечение. Поскольку функции $S^\pm$ удовлетворяют одному и тому же уравнению Гамильтона — Якоби, то одно из уравнений (1.10) зависит от остальных.

Из (1.10) получаем равенства

$$\{F_i, S^+ - S^-\} = 0, \qquad 1 \leqslant i \leqslant n\,. \tag{1.11}$$

Скобки Пуассона вычисляются в точке (p, q), где

$$q = q^0, \qquad p = \varepsilon\frac{\partial S^\pm}{\partial q}(q^0)\,.$$

Из (1.9) следует, что соотношения (1.11) при $\varepsilon = 0$ имеют вид $I_1(\gamma) = \ldots = I_n(\gamma) = 0$, где γ — двоякоасимптотическая траектория невозмущенной задачи, проходящая через точку $(p, q) = (0, q^0)$. Если они выполнены, то наличие решения уравнений (1.11) зависит от свойств матрицы Якоби $J = \left\|\dfrac{\partial}{\partial q_i}\{F_j, S_0^+ - S_0^-\}\right\|$, вычисленной в точке $(p, q) = (0, q^0)$. Ее элементы равны в точности пределам J_{ij} в (1.3). Матрица J вырождена, так как уравнения (1.11) зависимы. С другой стороны, условие $\operatorname{rank} J = n - 1$ обеспечивает трансверсальное пересечение поверхностей Λ_ε^+ и Λ_ε^- по двоякоасимптотической траектории γ_ε, близкой к γ.

Если $F_1 = H_0$, то $I_1(\gamma) = 0$ для любого двоякоасимптотического решения γ невозмущенной задачи. Действительно,

$$\int_{-T}^{T}\{H_0, H_1\}(\gamma(t))\,dt = \int_{-T}^{T}\frac{d}{dt}\left[H_1(\gamma(t))\right]dt = H_1(\gamma(T)) - H_1(\gamma(-T)).$$

С другой стороны, в координатах, канонических для гиперболического тора Γ, имеем $\{H_0, \chi\} = (\nu, \partial\chi/\partial x) + O(y, z) = \eta(x) - \langle\eta\rangle + O(y, z)$. Остается перейти к пределу при $T \to \infty$.

3. Докажем теперь лемму 1. В окрестности гиперболического тора Γ выберем на асимптотической поверхности $\Lambda^\pm$ координаты $q = (x, z^\mp)$, $p = (y, z^\pm) + O_2(z^\mp)$. В окрестности Γ_ε имеем

$$\Lambda_\varepsilon p^\pm = \left\{(y, x, z)\ :\ y = \varepsilon\frac{\partial S_0^\pm}{\partial x}\Big|_\Gamma + O((z^\mp)^2, \varepsilon z^-, \varepsilon^2),\right.$$
$$\left. z^\pm = \varepsilon\frac{\partial S_0^\pm}{\partial z^\mp}\Big|_\Gamma + O\left((z^\mp)^2, \varepsilon z^\mp, \varepsilon^2\right)\right\}.$$

Поскольку $\Gamma_\varepsilon \subset (\Lambda_\varepsilon^+ \cap \Lambda_\varepsilon^-)$, то

$$\Gamma_\varepsilon = \left\{(y, x, z)\ :\ z^\pm = \varepsilon\frac{\partial S_0^\pm}{\partial z^\mp}\Big|_\Gamma + O(\varepsilon^2),\right.$$
$$\left. y = \varepsilon\frac{\partial S_0^+}{\partial x}\Big|_\Gamma + O(\varepsilon^2) = \varepsilon\frac{\partial S_0^-}{\partial x}\Big|_\Gamma + O(\varepsilon^2)\right\}.$$

Следовательно, $(S_0^+ - S_0^-)_\Gamma = \text{const}$. Соотношение $H|_{\Gamma_\varepsilon} = \text{const}$ в первом приближении по ε имеет вид $\left(\nu, \frac{\partial}{\partial x}(S_0^\pm)_\Gamma\right) + \eta(x) = \langle \eta \rangle$. Поэтому уравнения для функций χ и $(S_0^\pm)_\Gamma$ совпадают. В частности, из-за несоизмеримости частот $\nu_1, \ldots, \nu_m$ они отличаются на константу. Лемма 1 доказана.

4. Наибольший интерес для приложений представляет случай $m = 1$, рассматривавшийся еще Пуанкаре [146]. Обсудим кратко задачу о расщеплении асимптотических поверхностей для неавтономных гамильтоновых систем, периодически зависящих от времени. Пусть $H = H_0(x, y) + \varepsilon H_1(x, y, t) + o(\varepsilon)$. Возмущающая функция H_1 периодична по t с периодом τ. Предположим, что имеются две критические точки (x^-, y^-) и (x^+, y^+) функции H_0, в которых собственные значения линеаризованной гамильтоновой системы $\dot{y} = -\dfrac{\partial H_0}{\partial x}, \dot{x} = \dfrac{\partial H_0}{\partial y}$ отличны от нуля и не являются чисто мнимыми. Следовательно, точки $(x^\pm, y^\pm)$ — гиперболические положения равновесия. Пусть, например, $H_0 = T + V$ — функция Гамильтона обратимой системы. Тогда невырожденные локальные максимумы потенциальной энергии отвечают гиперболическим положениям равновесия с вещественными собственными значениями.

В расширенном фазовом пространстве переменных $x, y, t \bmod \tau$ критическим точкам $(x^\pm, y^\pm)$ соответствуют τ-периодические гиперболические решения.

Пусть λ_0^+ (λ_0^-) — устойчивое (неустойчивое) асимптотическое многообразие в фазовом пространстве невозмущенной системы, проходящее через точку (x^+, y^+) (соответственно (x^-, y^-)). В расширенном фазовом пространстве прямое произведение $\lambda_0^\pm \times \mathbf{T}_t^1$ будет асимптотической поверхностью $\Lambda_0^\pm$ соответствующего τ-периодического гиперболического решения.

Будем предполагать, что невозмущенная система вполне интегрируема: она допускает n почти всюду независимых инволютивных интегралов $F_1, \ldots, F_n$. Среди них может быть функция H_0. Ясно, что $dF_i = 0$ при $x = x^\pm$, $y = y^\pm$.

Предположим, что $\lambda_0^+ = \lambda_0^-$. Тогда, очевидно, $\Lambda_0^+ = \Lambda_0^-$. Пусть $x = x_a(t)$, $y = y_a(t)$ — двоякоасимптотическое решение невозмущенной задачи: $x_a(t) \to x^\pm$, $y_a(t) \to y^\pm$ при $t \to \pm\infty$.

Для решения задачи о расщеплении возмущенных асимптотических поверхностей Пуанкаре ввел τ-периодическую функцию

$$P(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(x_a(t + \alpha), y_a(t + \alpha), t)\, dt = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} H_1(x_a(t), y_a(t), t - \alpha)\, dt \tag{1.12}$$

9*

и доказал, что если $P(\alpha) \neq \text{const}$, то $\Lambda_\varepsilon^+ \neq \Lambda_\varepsilon^-$ при малых $\varepsilon \neq 0$ [146, гл. XXI] (см. также [88]). Эту теорему Пуанкаре легко доказать методом п. 2. Интеграл (1.12) может расходиться. Однако при $H_1(x^+, y^+, t) = H_1(x^-, y^-, t)$ его можно считать сходящимся, вычитая из H_1 функцию времени $H_1(x^\pm, y^\pm, t)$. Это соображение заведомо приводит к цели в гомоклинном случае, когда $x^+ = x^-$, $y^+ = y^-$.

Чтобы избежать вопросов, связанных со сходимостью, продифференцируем функцию P по α:

$$I(\alpha) = \frac{dP}{d\alpha} = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(x_a(t+\alpha), y_a(t+\alpha), t)\, dt.$$

Здесь мы воспользовались очевидным тождеством $\dfrac{d}{d\alpha} f(t+\alpha) = \dfrac{d}{dt} f(t+\alpha)$. Таким образом, условие Пуанкаре приводится к виду $I(\alpha) \not\equiv 0$. Эта форма записи условия расщепления асимптотических поверхностей, по-видимому, впервые появилась в работе В. К. Мельникова [127].

При $n > 1$ естественно ввести интегралы вдоль асимптотических траекторий

$$I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_i, H_1\}(x_a(t),\, y_a(t),\, t)\, dt. \tag{1.13}$$

Поскольку $dF_i = 0$ при $x = x^\pm$, $y = y^\pm$, то подынтегральная функция экспоненциально быстро стремится к нулю при $t \to \pm\infty$; в частности, интегралы (1.13) заведомо сходятся.

Достаточное условие трансверсального пересечения возмущенных асимптотических поверхностей найдено С. В. Болотиным [28]:

$$I_i = 0, \qquad \det \|J_{ij}\| \neq 0; \qquad 1 \leqslant i, j \leqslant n,$$

$$J_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_i, \{F_j, H_1\}\}(x_a(t),\, y_a(t),\, t)\, dt\,.$$

Формулы, удобные для решения задачи о расщеплении асимптотических поверхностей гиперболических периодических решений в автономном случае, указаны в работах [86, 88].

§ 2. Теоремы о неинтегрируемости

1. Пусть M^3 — трехмерное аналитическое многообразие и v — аналитическое векторное поле на M, не имеющее положений равновесия. Примером может служить гамильтонова система с двумя степенями свободы, ограниченная на регулярную трехмерную поверхность интеграла энергии.

Предположим, что имеются две гиперболические траектории γ_1 и γ_2 (не исключается случай, когда γ_1 и γ_2 совпадают). Через Λ_1^+ (Λ_2^-) обозначим устойчивую (неустойчивую) асимптотическую поверхность траектории γ_1 (γ_2). Напомним, что эти поверхности регулярны и аналитичны. Однако они могут быть вложены в M довольно сложным образом.

Теорема 1. *Предположим, что Λ_1^+ и Λ_2^- пересекаются и не совпадают (как множества точек в M). Тогда система*

$$\dot{x} = v(x), \qquad x \in M\ , \tag{2.1}$$

не допускает непостоянных интегралов, аналитических на M, а любое аналитическое поле симметрий u системы (2.1) имеет вид $u = \lambda v$, $\lambda = \mathrm{const}$.

Доказательство. Поскольку Λ_1^+ и Λ_2^- пересекаются, то система (2.1) имеет такую двоякоасимптотическую траекторию $\gamma_a(t)$, что $\gamma_a(t) \to \gamma_1$ при $t \to +\infty$ и $\gamma_a(t) \to \gamma_2$ при $t \to -\infty$. Следовательно, в сколь угодно малой окрестности замкнутой траектории γ_1 (γ_2) имеются точки пересечения Λ_1^+ и Λ_2^-.

Пусть π — двумерная регулярная поверхность в M, трансверсально пересекающая γ_1 по точке x_1. Тогда в окрестности x_1 возникает отображение Пуанкаре $g: \pi \to \pi$, порождаемое фазовым потоком системы (2.1). Секущую поверхность π можно выбрать так, чтобы Λ_2^- пересекала π по отрезку Δ регулярной кривой, причем пересечение $\Delta \cap \cap \Lambda_1^+$ не пусто (рис. 17). Рассмотрим образы отрезка Δ при итерациях отображения Пуанкаре: $g^n(\Delta)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. При $n \to \infty$ отрезки $g^n(\Delta)$ будут растягиваться вдоль "сепаратрисы" $\Lambda_1^- \cap \pi$, неограниченно к ней приближаясь. Этот результат вытекает, например, из теоремы Гробмана — Хартмана, согласно которой в малой окрестности точки x_1 отображение g топологически сопряжено линейному гиперболическому повороту. В качестве следствия получаем, что объединение

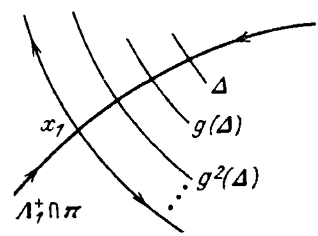

Рис. 17

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} g^n(\Delta) \tag{2.2}$$

будет ключевым множеством для класса функций, аналитических на поверхности π.

Предположим, что система (2.1) допускает аналитический интеграл F. Пусть f — ограничение функции F на π. Ввиду регулярности π, функция f аналитична на π. Хорошо известно, что функция F постоянна на траекториях γ_1 и γ_2, а также на асимптотических поверхностях Λ_1^+ и Λ_2^-, следовательно, постоянна на множестве (2.2). Поскольку это множество ключевое, то $f = \text{const}$ на поверхности π. Варьируя поверхность π, получим, что $F = \text{const}$ на всем многообразии M.

Предположим теперь, что имеется аналитическое поле симметрий u. Пусть g_u — фазовый поток системы дифференциальных уравнений, порождаемой полем u. Преобразования из группы g_u переводят периодические траектории γ_1 и γ_2 в себя, поскольку эти траектории невырождены. Следовательно, преобразования из g_u переводят двоякоасимптотические траектории в двоякоасимптотические траектории. На этих траекториях поля u и v линейно зависимы. В противном случае Λ_1^+ и Λ_2^- пересекались бы по двумерным аналитическим площадкам и поэтому совпадали бы по свойствам регулярности и аналитичности. Отсюда вытекает, в частности, что u и v линейно зависимы во всех точках Λ_1^+ и Λ_2^-. Выше было показано, что в предположениях теоремы 1 объединение $\Lambda_1^+ \cup \Lambda_2^-$ — ключевое множество в M. Следовательно, векторы $u(x)$ и $v(x)$ зависимы при всех $x \in M$. Так как $v \neq 0$, то $u = \lambda v$, и функция λ — интеграл уравнений (2.1). Поскольку λ — аналитическая функция на M, то $\lambda = \text{const}$, что и требовалось доказать.

Отсутствие аналитических интегралов в предположении о несовпадении пересекающихся асимптотических поверхностей фактически доказано Р. Кашменом [189] (он, правда, рассматривал неавтономные гамильтоновы системы с одной степенью свободы). Несуществование нетривиальных групп симметрий установлено в [101]. Ясно, что в гамильтоновом случае из результата об отсутствии групп симметрий вытекает результат об отсутствии новых интегралов.

2. Применим результаты п. 1 к неавтономным гамильтоновым системам с одной степенью свободы. Пусть $z = (x, y)$ — симплектические координаты, и пусть $H = H_0(z) + \varepsilon H_1(z, t) + \ldots$ — функция Гамильтона, периодическая по t. Предполагается, что при $\varepsilon = 0$ имеются две гиперболические критические точки функции Гамильтона H_0, соединенные двоякоасимптотической траекторией $z_0(t)$ (см. п. 4 § 1). Из теоремы 1 и результатов § 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(z_0(t), t)\, dt \neq 0$;

2) *при малых ε возмущенная система имеет двоякоасимптотическое решение $t \to z_\varepsilon(t)$, близкое к $t \to z_0(t)$.*

Тогда при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ возмущенная гамильтонова *система неинтегрируема (не имеет нетривиальных аналитических интегралов и полей симметрии, периодических по t).*

В гомоклинном случае второе условие можно снять. Действительно, как показал Пуанкаре [146], при малых ε возмущенная задача всегда имеет гомоклинные решения (если, конечно, они были при $\varepsilon = 0$). Рассуждение Пуанкаре использует результат о сохранении площади при отображении за период гамильтоновой системы (рис. 18). Пусть $W^{\pm}$ — линии пересечения асимптотических поверхностей $\Lambda_{\varepsilon}^{\pm}$ с плоскостью $t = 0$. Предположим, что при некотором достаточно малом $\varepsilon \neq 0$ эти линии не пересекаются: между ними имеется небольшой зазор. Пусть Δ — некоторый небольшой отрезок, соединяющий две близкие точки, лежащие на W^{+} и W^{-} (см. рис. 18). При отображении за период g отрезок Δ сдвинется в направлении, отмеченном стрелкой. Так как $W^{\pm}$ инвариантны относительно g, то область D, ограниченная участками кривых W^{+}, W^{-} и отрезком Δ, перейдет в собственную подобласть (из D надо выбросить заштрихованный криволинейный четырехугольник). Однако это противоречит равенству $\operatorname{mes} D = \operatorname{mes} g(D)$, где mes — стандартная площадь на плоскости $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$.

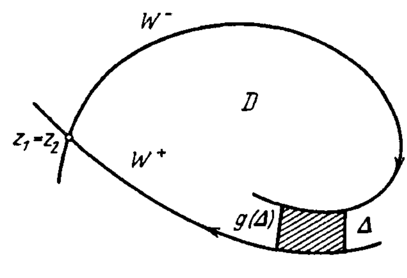

Рис. 18

Пусть теперь имеется аналитическая автономная система с двумя степенями свободы, и пусть $H = H_0 + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon)$ — функция Гамильтона. Предположим, что в невозмущенной системе имеются две гиперболические траектории γ_1 и γ_2, лежащие на одной и той же поверхности уровня интеграла энергии. Пусть F_0 — интеграл невозмущенной задачи, для которого $dF_0 = 0$ в точках траекторий γ_1 и γ_2. В этой ситуации также справедлива теорема 2, только условие 1) надо заменить на следующее:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{F_0, H_1\}\, dt \neq 0. \tag{2.3}$$

Здесь скобка Пуассона вычисляется на двоякоасимптотической траектории невозмущенной системы. Если $dF_0 \neq 0$ на периодических траекториях γ_1 и γ_2, то интеграл (2.3) заменяется более сложным выражением (1.3).

Подчеркнем, что в теореме 2 речь идет о неинтегрируемости возмущенной гамильтоновой системы при малых, но фиксированных значениях параметра ε, $\varepsilon \neq 0$.

Приведем пример, показывающий, что в гетероклиннном случае из условия расщепления асимптотических поверхностей еще не вытекает неинтегрируемость возмущенных уравнений. Другими словами, в теореме 2 нельзя опустить условие 2).

Положим $H = \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{\cos^2 x}{2} + \varepsilon \sin x$. В силу автономности, функция H — первый интеграл уравнений движения при всех значениях ε. Вычислим интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}\, dt, \tag{2.4}$$

взятый вдоль асимптотической траектории $x_a(t)$ невозмущенной системы: $x_a(t) \to \pm\pi/2$ при $t \to \pm\infty$. Так как $\{H_0, H_1\} = y \cos x$ и $y = \dot{x}$, то интеграл (2.4) равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_a \cos x_a \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} d(\sin x_a) = 2 \neq 0.$$

Картина расщепленных сепаратрис показана на рис. 19.

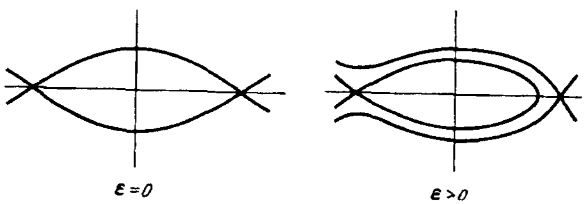

Рис. 19

3. Условия отсутствия полного набора инволютивных интегралов многомерных гамильтоновых систем указаны С. В. Болотиным [28]. Рассмотрим неавтономную гамильтонову систему с аналитическим гамильтонианом $H = H_0(z) + \varepsilon H_1(z, t) + o(\varepsilon)$, периодическим по времени. Здесь $z = (x, y)$ — набор $2n$ симплектических переменных. Предполагается, что невозмущенная система имеет два гиперболических положения равновесия $z^{\pm}$ с различными вещественными собственными значениями, а также, что точки $z^{\pm}$ соединены двоякоасимптотическим решением $t \to z_0(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 3 [28]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z_0(t), t)\, dt \neq 0$;

2) *при малых ε возмущенная система имеет двоякоасимптотическое решение $t \to z_\varepsilon(t)$, близкое к $z_0(t)$.*

Тогда при малых фиксированных $\varepsilon \neq 0$ в любой окрестности замыкания траектории $z_\varepsilon(t)$ возмущенные уравнения Гамильтона не имеют полного набора независимых интегралов в инволюции.

З а м е ч а н и е. Условие 1) можно заменить на следующее: при некотором $m \geqslant 2$ имеет место соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\{H_0, \ldots \{H_0}_{m}, H_1\} \ldots\}(z_0(t), t)\, dt \neq 0.$$

Если выполнено условие 1), то асимптотические поверхности заведомо не совпадают.

Методом нормальных форм Биркгофа в окрестности возмущенных неустойчивых периодических решений $z^{\pm} + O(\varepsilon)$ можно найти периодическую по t формальную каноническую замену переменных $z \to u$, приводящую функцию Гамильтона $H(z, t, \varepsilon)$ к функции $H^{\pm}(u, \varepsilon)$, не зависящей от t. Из-за соизмеримости характеристических показателей это преобразование Биркгофа может расходиться. Однако в случае одной степени свободы ($n = 1$) формальные ряды замены переменных $z \to u$ всегда сходятся и аналитически зависят от параметра ε (Ю. Мозер [217]).

Т е о р е м а 4. *Пусть преобразование Биркгофа сходится и аналитически зависит от ε. Если выполнено условие 1) теоремы 3, то при малых $\varepsilon \neq 0$ уравнения Гамильтона не имеют полного набора независимых аналитических интегралов в инволюции.*

В частности, при $n = 1$ достаточным условием неинтегрируемости является условие 1) теоремы 3 (С. Л. Зиглин [62]).

Условие 1) теоремы 3 можно, конечно, заменить условием непостоянства периодической функции $I(\alpha)$, введенной в п. 4 § 1. Отметим, что в примере, приведенном в п. 2 настоящего параграфа, $I(\alpha) \equiv \mathrm{const}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о теоремы 4. Определим на поверхности $\Lambda_0^{\pm}$ функции $R^{\pm}$ по формулам

$$R^{+}(z) = -\int_{0}^{\infty} \{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z(t), t)\, dt,$$

$$R^{-}(z) = \int_{-\infty}^{0} \{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z(t), t)\, dt,$$

где $t \to z(t)$ — асимптотическое движение невозмущенной системы с начальным условием $z(0) = z$.

Л е м м а 1. *Функции $R^{\pm}$ определяются функцией H_0, семейством поверхностей $\Lambda_\varepsilon^{\pm}$ и симплектической структурой.*

Доказательство. Действительно, согласно результатам § 1, функции

$$S^+(z) = -\varepsilon \int_0^\infty (H_1(z(t),t) - H_1(z^+,t))\,dt\,,$$

$$S^-(z) = \varepsilon \int_{-\infty}^0 (H_1(z(t),t) - H_1(z^-,t))\,dt$$

являются производящими функциями лагранжевых поверхностей $\Lambda_\varepsilon^\pm$ с точностью до $O(\varepsilon^2)$. Но $\varepsilon R^\pm = \{H_0, \{H_0, S^\pm\}\}$, что и требовалось доказать.

Композиция преобразования Биркгофа со степенями отображения за период позволяет продолжить функции $H^\pm$ с окрестностей критических точек $u^\pm(\varepsilon)$ на некоторые окрестности $W^\pm$ асимптотических поверхностей $\Lambda_\varepsilon^\pm$. Так как возможное расщепление поверхностей Λ_ε^+ и Λ_ε^- имеет порядок ε, то при малых ε окрестности W^+ и W^- пересекаются.

Лемма 2. *При $\varepsilon \neq 0$ выполнено соотношение $\{H^+, H^-\} \not\equiv 0$.*

Доказательство. Положим $H^\pm(u,\varepsilon) = H_0^\pm(u) + \varepsilon H_1^\pm(u) + O(\varepsilon^2)$. Так как $H_0^\pm(u) = H_0(u)$, то $\{H^+, H^-\} = \varepsilon\{H_0, H_1^- - H_1^+\} + O(\varepsilon^2)$. Поскольку Λ_0^- — инвариантное асимптотическое многообразие невозмущенной гамильтоновой системы, то, по лемме 1,

$$\{H_0, H_1^-\}(u) = \int_{-\infty}^0 \{H_0, \{H_0, H_1^-\}\}(u_0(t))\,dt = R^-(u), \qquad u \in \Lambda_0^-.$$

Аналогично

$$\{H_0, H_1^+\}(u) = \int_0^\infty \{H_0, \{H_0, H_1^+\}\}(u_0(t))\,dt = R^+(u), \qquad u \in \Lambda_0^+.$$

Следовательно, $\{H^+, H^-\} = \varepsilon \int_{-\infty}^\infty \{H_0, \{H_0, H_1\}\}(z_0(t), t)\,dt + O(\varepsilon^2)$. Согласно условию 1), при малых $\varepsilon \neq 0$ скобка Пуассона $\{H^+, H^-\}$ не равна тождественно нулю.

В новых переменных u интегралы $F_1, \ldots, F_n$ не зависят от t. Пусть при $\varepsilon \neq 0$ в некоторой точке множества $W^+ \cap W^-$ интегралы $F_1, \ldots, F_n$ независимы. Поскольку $\{H^\pm, F_i\} \equiv 0$, то вектор $v_{H^\pm}$ есть линейная комбинация векторов v_{F_i}. Так как $\{F_i, F_j\} \equiv 0$, то, очевидно, в этой точке $\{H^+, H^-\} = 0$. Для завершения доказательства осталось заметить, что на всюду плотном множестве аналитическая функция $\{H^+, H^-\}$ отлична от нуля. Теорема 4 доказана.

По-видимому, стоит подчеркнуть, что доказательство теоремы 4 существенно использовало предположение о вещественности мультипликаторов возмущенных периодических траекторий

$z^{\pm} + O(\varepsilon)$: в противном случае нормализующее преобразование Биркгофа могло бы привести гамильтониан к комплекснозначной функции. Это предположение заведомо выполнено, если характеристические числа линеаризованной невозмущенной системы в окрестности точек $z^{\pm}$ вещественны и различны (см. начало п. 3). Ясно, что при $n = 1$ достаточно предположения о гиперболичности критических точек $z^{\pm}$.

Доказательство теоремы 3 в идейном отношении сходно с доказательством теоремы 4, однако сложнее технически из-за возможной расходимости преобразования Биркгофа. Здесь существенно используется тот факт, что преобразование Биркгофа сходится на асимптотических многообразиях (см. § 11 гл. II). Подробное доказательство теоремы 3 содержится в работе [28]. Там же указан ее автономный вариант. Пусть невозмущенная система с гамильтонианом H_0 имеет аналитический интеграл F_0, причем все интегральные кривые гамильтонова поля v_{F_0} замкнуты (примером может служить квадрат модуля кинетического момента твердого тела в задаче Эйлера). Предположим, что при малых ε возмущенная гамильтонова система с гамильтонианом $H^{\varepsilon} = H_0 + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon)$ имеет две гиперболические траектории, γ_1^{ε} и γ_2^{ε}, соединенные двоякоасимптотической траекторией $\gamma_{\varepsilon}(t)$, гладко зависящей от ε. В [28] доказано, что если несобственный интеграл J_{00} (в (1.3) надо положить $i = j = 0$) отличен от нуля, то при достаточно малых $\varepsilon \neq 0$ система с гамильтонианом H^{ε} не имеет полного набора инволютивных аналитических интегралов на поверхности уровня $H^{\varepsilon} = h$, где $h = H^{\varepsilon}(\gamma_{\varepsilon})$. Доказательство основано на сведéнии (при помощи интеграла F_0) гамильтоновой системы к неавтономной с периодическим гамильтонианом. Было бы интересно выяснить, следует ли из условий теоремы 3 несуществование n аналитических коммутирующих векторных полей у возмущенной гамильтоновой системы.

§ 3. Некоторые приложения

1. Рассмотрим вначале наиболее простую задачу о колебаниях маятника с вибрирующей точкой подвеса. Функция Гамильтона H равна $H_0 + \varepsilon H_1$, где $H_0 = y^2/2 - \omega^2 \cos x$, $H_1 = -\omega^2 f(t) \cos x$, а $f(t)$ — 2π-периодическая функция времени. При $\varepsilon = 0$ верхнее положение маятника — неустойчивое равновесие. Невозмущенная задача имеет два семейства гомоклинных решений:

$$\cos\frac{x_0}{2} = \operatorname{ch}^{-1}[\omega(t - t_0)], \qquad x_0 \to \pm\pi \text{ при } t \to \pm\infty. \tag{3.1}$$

Так как $\{H_0, H_1\} = -\omega^2 f(t)\dot{x}\sin x$, то интеграл (2.4) с точностью до постоянного множителя равен

$$\int_{-\infty}^{\infty} \dot f(t)\cos^2\frac{x_0}{2}\,dt. \qquad (3.2)$$

Пусть $f = \sum f_n e^{int}$. Тогда (3.2) можно представить в виде ряда $\sum\limits_n f_n in J_n e^{int_0}$, где $J_n = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{int}}{\operatorname{ch}^2\omega t}\,dt = \frac{\pi n}{\omega^2\operatorname{sh}(\pi n/2\omega)}$ (интеграл вычисляется с помощью вычетов). Следовательно, если $f(t) \neq \mathrm{const}$ (т. е. $f_n \neq 0$ при некотором $n \neq 0$), то интеграл (2.4) отличен от нуля хотя бы на одном двоякоасимптотическом решении из семейства (3.1). Таким образом, если $f(t) \neq \mathrm{const}$, то, согласно результатам § 2, рассматриваемая задача при достаточно малых (но фиксированных) значениях параметра $\varepsilon \neq 0$ не имеет первого аналитического интеграла $F(y,x,t)$, 2π-периодического по x и t.

2. Применяя этот метод, А. А. Буров исследовал задачу об интегрируемости уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите:

$$(1+e\cos\nu)\frac{d^2\delta}{d\nu^2} - 2e\sin\nu\frac{d\delta}{d\nu} + \mu\sin\delta = 4e\sin\nu. \qquad (3.3)$$

Здесь e — эксцентриситет орбиты; смысл остальных параметров разъяснен в п. 3 § 4 гл. I. При $e = 0$ будем снова иметь интегрируемую задачу о колебаниях обычного маятника. Пусть $\mu \neq 0$. Тогда, как показано в [36], одна из пар сепаратрис невозмущенной задачи расщепляется, и поэтому при достаточно малых значениях $e > 0$ уравнение (3.3) не имеет аналитического интеграла, 2π-периодического по δ и ν.

3. В задаче о быстром вращении несимметричного тяжелого твердого тела функция Гамильтона H равна $H_0 + \varepsilon H_1$, где

$$H_0 = (Am, m)/2, \quad H_1 = r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 + r_3\gamma_3, \quad A = \operatorname{diag}(a_1, a_2, a_3).$$

Здесь $m = I\omega$ — кинетический момент тела; числа a_1, a_2, a_3 обратны главным моментам инерции. При $\varepsilon = 0$ будем иметь интегрируемый случай Эйлера. В этой невозмущенной задаче на всех некритических трехмерных поверхностях уровня

$$M_{h,c} = \{(m,\gamma) : H_0 = h > 0, \quad (m,\gamma) = c, \quad (\gamma,\gamma) = 1\}$$

существует два гиперболических периодических решения: если

$a_1 < a_2 < a_3$, то

$$\begin{gathered} m_1 = m_3 = 0, \qquad m_2 = m_2^0 = \pm\sqrt{2h/a_2}, \\ \gamma_1 = \alpha\cos(a_2 m_2^0 t), \quad \gamma_3 = \alpha\sin(a_2 m_2^0 t), \quad \gamma_2 = \gamma_2^0 = c/m_2^0, \\ \alpha^2 = 1 - \left(c/m_2^0\right)^2. \end{gathered} \tag{3.4}$$

Эти решения имеют прозрачный механический смысл: они совпадают с неустойчивыми стационарными вращениями твердого тела вокруг средней оси инерции в противоположных направлениях. Из неравенства $(m,\gamma)^2 \leqslant (m,m)(\gamma,\gamma)$ и независимости классических интегралов на $M_{h,c}$ вытекает, что $\alpha^2 > 0$.

Устойчивые и неустойчивые асимптотические поверхности периодических решений (3.4) можно представить как пересечение многообразия $M_{h,c}$ гиперплоскостями

$$F = m_1\sqrt{a_2 - a_1} \pm m_3\sqrt{a_3 - a_2} = 0. \tag{3.5}$$

В задаче Эйлера асимптотические поверхности "сдвоены": они сплошь заполнены двоякоасимптотическими траекториями, которые при $t \to \pm\infty$ неограниченно приближаются к периодическим траекториям (3.4). Расщепление этих поверхностей изучено в работах [78, 62]. Оказалось, что при возмущении асимптотические поверхности расщепляются всегда, кроме "случая Гесса — Аппельрота":

$$r_2 = 0, \qquad r_1\sqrt{a_3 - a_2} \pm r_3\sqrt{a_2 - a_1} = 0. \tag{3.6}$$

В этом случае одна пара сепаратрис не расщепляется, а другая расщепляется (рис. 20). Причина нерасщепления состоит в том, что при выполнении условия (3.6) возмущенная задача при всех значениях параметра ε имеет "частный" интеграл — функцию F, определяемую соотношением (3.5) ($\dot F = 0$ при $F = 0$). Можно показать, что замкнутые инвариантные поверхности

$$\{H = h, \quad (m,\gamma) = c, \quad (\gamma,\gamma) = 1, \quad F = 0\}$$

при малых значениях ε будут как раз парой сдвоенных сепаратрис возмущенной задачи [78].

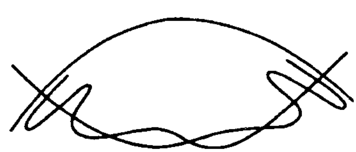

Рис. 20

В задаче о быстром вращении тяжелого несимметричного волчка расщепленные сепаратрисы пересекаются, по-видимому, не всегда. Однако здесь применима теорема 4 из § 2, с помощью которой можно установить отсутствие дополнительного аналитического интеграла возмущенной задачи при малых, но фиксированных значениях параметра ε, $\varepsilon \neq 0$ (С. Л. Зиглин [62]).

Более того, как установил С. А. Довбыш [49], в несимметричном случае при малых $\varepsilon \neq 0$ обязательно существуют двоякоасимптотические траектории (не обязательно гетероклинные, как в невозмущенной задаче), причем соответствующие пересекающиеся асимптотические поверхности не совпадают. С учетом этого обстоятельства из теоремы 1 § 2 вытекает неинтегрируемость возмущенной задачи в существенно более сильном смысле: уравнения движения не допускают нетривиального аналитического поля симметрий. Этот результат получен в работе [101].

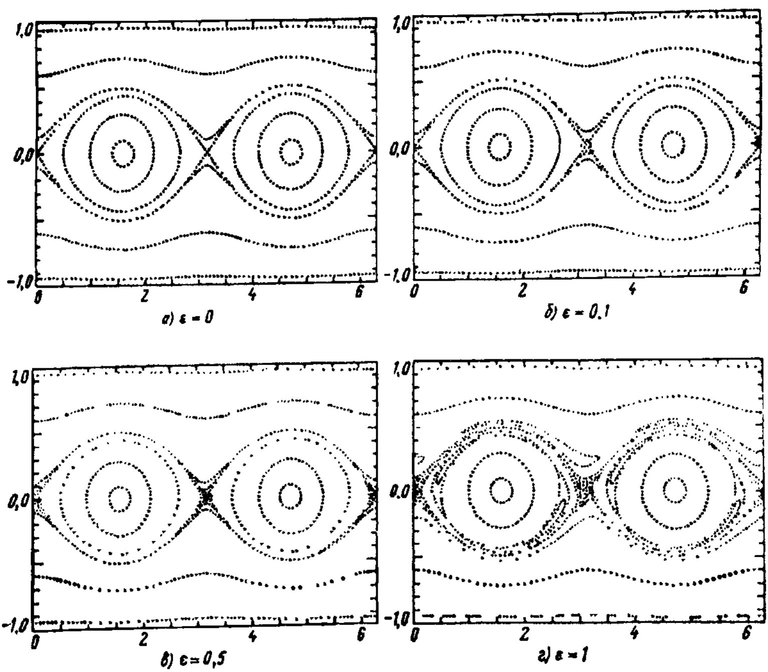

Рис. 21

Поведение решений возмущенной задачи исследовалось численно в работе [196]. На рис. 21 показаны результаты вычислений при разных значениях возмущающего параметра ε. Хорошо видно, что картина инвариантных кривых невозмущенной задачи начинает разрушаться именно в окрестности сепаратрис.

При проведении расчетов для моментов инерции были взяты значения 1, 2, 3, постоянная интеграла энергии h равна 50, а постоянная площадей равна нулю. Были использованы специальные канонические переменные L, G, l, g (см. § 2 гл. I). На рис. 21 изображены сечения фазовых траекторий, лежащих на поверхности $H = 50$, плоскостью $g = \text{const}$. При $\varepsilon = 0$ имеем уже известный нам фазовый портрет задачи Эйлера (см. рис. 1).

А. В. Борисов численно построил возмущенные сепаратрисы неустойчивых периодических траекторий при тех же значениях моментов инерции и постоянной интеграла энергии. Они изображены на рис. 22 (верхний рисунок соответствует координатам центра масс твердого тела r_1, r_2, r_3, равным 0, 1, 0, а нижний — 10, 0, 0). Хорошо видно, как начинают осциллировать расщепленные сепаратрисы при приближении к неустойчивой периодической траектории.

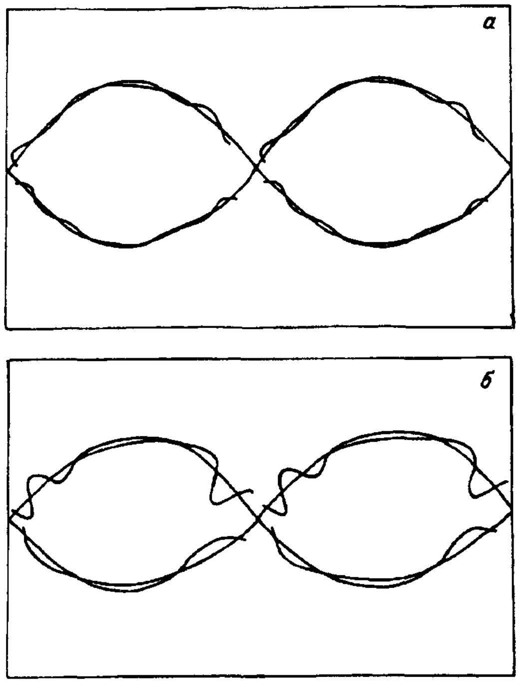

Рис. 22

4. Для динамически симметричного тела невозмущенная задача Эйлера не имеет гиперболических периодических траекторий, поэтому метод расщепления асимптотических поверхностей здесь непосредственно не применим. Однако здесь можно по-другому ввести малый параметр и найти гомоклинные траектории.

Для этого зафиксируем значения $I_1 = I_2$, r_3 и заменим I_3, r_1 соответственно на μI_3, μr_1 $(0 < \mu \leqslant 1)$. В силу динамической симметрии координату r_2 центра масс тела можно считать равной нулю. Устремляя μ к нулю, получим в пределе ограниченную задачу о вращении твердого тела (см. п. 5 § 4 гл. I). Зафиксируем значение интеграла площадей $c = (I\omega, \gamma)$ и сведем уравнения движения к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы.

Покажем, что если $r_1 \neq 0$, а также $c \neq 0$ или $r_3 \neq 0$, то при достаточно малых фиксированных $\mu > 0$ редуцированные уравнения не имеют дополнительного аналитического интеграла и нетривиальной аналитической группы симметрий; это установлено в [92].

Мы докажем это утверждение в частном случае $r_3 = 0$ (при $r_3 \neq \neq 0$ вычисления более громоздкие). В п. 5 § 4 гл. I введена вспомогательная угловая переменная ξ, которая при $\mu = 0$ удовлетворяет дифференциальному уравнению "маятникового" типа:

$$\ddot{\xi} = \frac{c}{\sqrt{2h}} \sin \xi - \sqrt{1 - \frac{c^2}{2h}} \sin(\sqrt{2h}t) \cos \xi. \tag{3.7}$$

Здесь h — постоянная энергии. Предположим, что уравнения ограниченной задачи имеют дополнительный интеграл, аналитический по переменным ω и γ ($|\gamma| = 1$). Учитывая явные формулы, выражающие ω, γ через ξ и t (см. п. 5 § 4 гл. I), получаем, что уравнение (3.7) допускает 2π-периодический по ξ и $(2\pi/\sqrt{2h})$-периодический по t интеграл, аналитический по $\dot{\xi}$, ξ, t. Однако на самом деле уравнение (3.7) неинтегрируемо, если c^2 близко к $2h$.

Положим $1-c^2/(2h) = \varepsilon^2$ и будем считать ε малым параметром. Отметим, что уравнение (3.7) имеет смысл и при $\varepsilon = 0$, когда происходит вырождение исходной задачи. Положив $\eta = \dot{\xi}$, представим (3.7) в гамильтоновой форме: $\dot{\xi} = H'_\eta$, $\dot{\eta} = -H'_\xi$;

$$H = H_0 + \varepsilon H_1 + o(\varepsilon), \quad H_0 = \eta^2/2 + \cos\xi, \quad H_1 = \sin\xi \sin\bigl(\sqrt{2h}\,t\bigr).$$

При $\varepsilon = 0$ имеем невозмущенную интегрируемую задачу — математический маятник — с семейством гомоклинных решений

$$\sin(\xi/2) = \operatorname{ch}^{-1}(t - t_0), \quad \eta = 2\operatorname{ch}^{-1}(t - t_0), \quad t_0 = \text{const}. \tag{3.8}$$

Покажем, что устойчивая и неустойчивая сепаратрисы не совпадают при малых $\varepsilon \neq 0$, что ведет, в свою очередь, к неинтегрируемости (3.7). Действительно, интеграл $\int_{-\infty}^{\infty}\{H_0, H_1\}\,dt$, вычисленный на двоякоасимптотических решениях (3.8), не обращается тождественно в нуль. Так, при $t_0 = \pi/(2\sqrt{2h})$ он равен $-4\pi h \operatorname{ch}^{-1}\bigl(\pi\sqrt{2h}/2\bigr)$, что отлично от нуля при $h \neq 0$.

Поскольку поведение расщепленных сепаратрис устойчиво относительно малых изменений параметров, то при малых значениях $\mu > 0$ уравнения Эйлера — Пуассона будут также иметь гиперболическую периодическую траекторию с пересекающимися асимптотическими поверхностями. Согласно теореме 1 из § 2, это не совместимо с наличием дополнительного интеграла и нетривиальной группы симметрий. Отметим, что при $\mu = 1$ и $\mu = 2$ уравнения Эйлера — Пуассона интегрируемы (случай полной динамической симметрии и случай Ковалевской).

С помощью численных расчетов С. А. Довбыш показал, что уравнение (3.7) имеет пересекающиеся сепаратрисы и при $c = 0$ (c — постоянная площадей); этот результат нельзя, конечно, получить с помощью теории возмущений. Перейдем к новой переменной времени $\tau = \sqrt{2h}\,t$ и положим $\xi = \pi/2 + x$. В новых переменных x, $\tau \bmod 2\pi$ уравнение (3.7) можно записать в виде системы $dx/d\tau = y$, $dy/d\tau = 2h \sin\tau \sin x$, имеющей при всех h тривиальное 2π-периодическое по τ решение

$$x(\tau) \equiv 0, \quad y(\tau) \equiv 0. \tag{3.9}$$

С. А. Довбыш установил, что при $h = 1$ и $h = 5/2$ решение (3.9) гиперболическое, и его устойчивая и неустойчивая сепаратрисы пересекаются (рис. 23). По-видимому, сепаратрисы трансверсально пересекаются для всех значений h, при которых решение (3.9) гиперболическое.

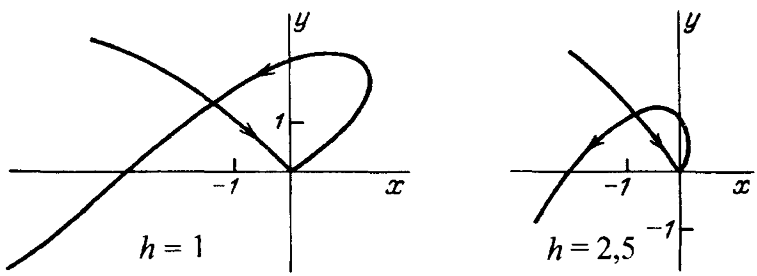

Рис. 23

5. Рассмотрим задачу о вращении твердого тела с несимметричным ротором по инерции вокруг неподвижной точки, считая, что ротор может свободно вращаться вокруг некоторой оси, жестко связанной с твердым телом (см. п. 9 § 3 гл. I). Эта система имеет, очевидно, четыре степени свободы; пространством положений служит прямое произведение $SO(3) \times S^1$.

Гамильтоновы уравнения движения имеют четыре первых интеграла: сохраняются полная энергия H и три проекции (F_1, F_2, F_3) момента импульса системы (тело + ротор) на оси неподвижной ортогональной системы отсчета. Нетрудно проверить, что $\{F_1, F_2\} = F_3$, $\{F_2, F_3\} = F_1$, $\{F_3, F_1\} = F_2$. Следовательно, функции H, F_1, $F^2 = F_1^2 + F_2^2 + F_3^2$ находятся в инволюции, и для полной интегрируемости уравнений движения нужен еще один независимый интеграл, коммутирующий с функциями H, F_1 и F^2. Так, если ротор симметричен относительно своей оси вращения, то дополнительным интегралом является проекция момента импульса маховика на его ось вращения (задача Жуковского — Вольтерра).

Е. А. Ивин [67] методом расщепления сепаратрис доказал, что в общем случае обсуждаемая задача неинтегрируема. Точнее, он рассмотрел вращение твердого тела с ротором малой массы. Невозмущенной задачей является интегрируемая задача Эйлера о свободном вращении твердого тела, имеющая пару сдвоенных асимптотических поверхностей. При добавлении ротора асимптотические поверхности расщепляются "неинтегрируемым" образом, что влечет отсутствие новых аналитических интегралов и групп симметрий.

Результат о расщеплении сепаратрис был ранее получен Ж. Марсденом и П. Холмсом [205] при дополнительных упрощающих предположениях: в точном выражении функции Гамильтона отброшены некоторые слагаемые.

6. Методом расщепления асимптотических поверхностей можно установить неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей [61]. Рассмотрим ограниченную постановку задачи: вихрь нулевой интенсивности (т. е. просто частица идеальной жидкости) движется в "поле" трех вихрей одинаковой интенсивности. Тогда уравнения движения нулевого вихря можно представить в гамильтоновой форме с периодическим по времени гамильтонианом; они имеют гиперболические периодические движения с пересекающимися сепаратрисами. Поэтому задача не будет вполне интегрируемой, хотя (как и в неограниченной постановке) имеет четыре независимых некоммутирующих интеграла.

7. Классические поля Янга — Милса для однородной двухкомпонентной модели (см. § 8 гл. I) являются гамильтоновыми с функцией Гамильтона

$$H = \frac{y_1^2+y_2^2}{2} + \frac{x_1^2x_2^2}{2}. \tag{3.10}$$

Уравнения Гамильтона

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + x_1x_2^2 = 0, \\ \ddot{x}_2 + x_1^2x_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.11}$$

имеют неустойчивые "кноидальные" периодические решения

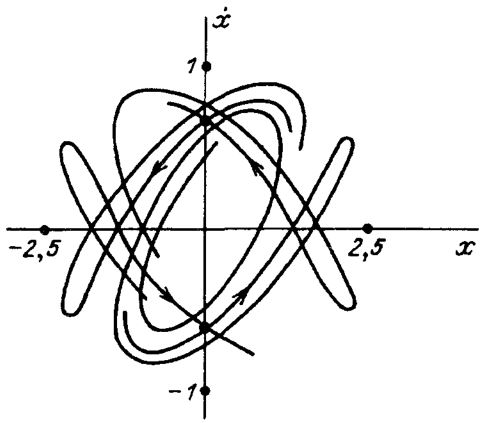

Рис. 24

$$x_1 = x_2 = f, \qquad x_1 = -x_2 = f; \qquad f = \mathrm{cn}(t, 1/\sqrt{2}). \tag{3.12}$$

Рассмотрим двумерное сечение трехмерной поверхности интеграла энергии, на которой расположены решения системы (3.11), гиперплоскостью $x_2 = 0$. Периодические траектории (3.12) пересекают это сечение в точках, которые являются неподвижными при отображении Пуанкаре. Так как они имеют гиперболический тип, то можно ставить вопрос о взаимном расположении их устойчивых и неустойчивых сепаратрис. Эта задача исследована численно в работе [138]. Результат представлен на рис. 24.

Ввиду квазиоднородности гамильтониана (3.10) точно такая же картина трансверсальных сепаратрис имеется на всех энергетических поверхностях с положительным значением полной энергии. В качестве следствия получаем, что уравнения (3.11) не имеют дополнительного аналитического интеграла. Этот результат был получен ранее в работе С. Л. Зиглина [64] с использованием анализа ветвления решений системы (3.11) в плоскости комплексного времени. На самом деле из трансверсальности пересечения сепаратрис вытекает существенно более сильное утверждение об отсутствии нетривиального аналитического поля симметрий гамильтоновой системы (3.11).

8. Рассмотрим, следуя Б. В. Чирикову, "стандартное" симплектическое отображение цилиндра $x \bmod 2\pi$, y, заданное формулами

$$x' = x + y' \pmod{2\pi}, \qquad y' = y + \varepsilon \sin x. \tag{3.13}$$

При $\varepsilon = 0$ будем иметь интегрируемое отображение: координата y будет интегралом, и все точки, расположенные на окружности $y = \text{const}$, поворачиваются при отображении на угол y. Таким образом, невозмущенное отображение (3.13) не имеет гиперболических периодических точек. Однако при всех $\varepsilon > 0$ точка $x = y = 0$ будет неподвижной точкой гиперболического типа. Собственные значения (мультипликаторы) линеаризованного отображения равны

$$1 + \frac{\varepsilon}{2} \pm \sqrt{\varepsilon + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2} = 1 \pm \sqrt{\varepsilon} + o(\sqrt{\varepsilon}). \tag{3.14}$$

Точка $(x, y) = (\pi, 0)$ также будет неподвижной, однако она будет иметь эллиптический тип при всех значениях $\varepsilon > 0$. Эти наблюдения допускают простую интерпретацию с точки зрения теории возмущений: при малых значениях параметра $\varepsilon > 0$ инвариантная окружность невозмущенной задачи $y = 0$ разрушается; из семейства неподвижных точек, составляющих эту окружность, рождается пара невырожденнных неподвижных точек; координаты этих точек аналитически зависят от ε, и одна из них устойчива (в первом приближении), а другая неустойчива; мультипликаторы неподвижных точек можно представить в виде сходящихся рядов по степеням $\sqrt{\varepsilon}$ (ср. с п. 7 § 8 гл. IV).

Ввиду формулы (3.14) устойчивая и неустойчивая сепаратрисы Λ^+ и Λ^- неподвижной гиперболической точки пересекаются в ней под малым (порядка $\sqrt{\varepsilon}$) углом. Оказывается, они пересекаются также вблизи точки $(x, y) = (\pi, 2\sqrt{\varepsilon})$; для угла пересечения В. Ф. Лазуткин [114] получил асимптотическую формулу

$$\varphi = \frac{\pi a}{\varepsilon} e^{-\pi^2/\sqrt{\varepsilon}}[1 + O(\varepsilon^{(1/8)-\delta})], \tag{3.15}$$

где $a = 1118,82770595\ldots$, δ — произвольное положительное число, постоянная в оценке $O(\ldots)$ зависит от δ. Экспоненциальную малость угла φ можно вывести из результата А. И. Нейштадта[136], полученного при весьма общих предположениях.

Из формулы (3.15) вытекает, в частности, трансверсальность пересечения сепаратрис Λ^+, Λ^- и, как следствие, наличие "стохастического" слоя вблизи $\Lambda^+ \cup \Lambda^-$. Б. В. Чириков [186] еще раньше установил наличие этого слоя с помощью численных расчетов и его увеличение с возрастанием ε. При дальнейшем увеличении ε этот слой сливается с другими стохастическими слоями такого же происхождения. Однако, основной результат В. Ф. Лазуткина заключается в получении асимптотической формулы (3.15), пока единственной в задачах подобного рода. Она получена с помощью продолжения отображения (3.13) в комплексную плоскость изменения переменных x, y. Было бы полезным перенести технику В. Ф. Лазуткина на аналитические гамильтоновы системы, у которых при нулевом значении возмущающего параметра отсутствуют гиперболические периодические решения (системы такого вида обсуждались в гл. IV).

9. Метод расщепления асимптотических поверхностей применим и к задаче о плоских течениях однородной идеальной жидкости в потенциальном поле [107]. Речь идет об уравнениях (8.7) из § 8 гл. I, имеющих гамильтонову форму

$$\dot{x} = H'_y, \quad \dot{y} = -H'_x; \qquad H = H_0 + \varepsilon H_1. \tag{3.16}$$

Здесь H_0 — функция тока стационарного течения (напомним, что она удовлетворяет уравнению Лапласа), а H_1 имеет вид $x\cos\lambda t$, $\lambda = \mathrm{const}$. Уравнения (3.16) описывают безвихревое течение в том случае, когда на стационарное поле скоростей налагается малое синусоидальное возмущение постоянного направления.

Пусть у функции H_0 имеются две гиперболические критические точки (не обязательно различные), соединенные сепаратрисой Λ_0; эта кривая — траектория однопараметрического семейства двоякоасимптотических решений невозмущенной задачи — задается уравнениями $x = x_a(t - \mu)$, $y = y_a(t - \mu)$, где μ — вещественный параметр. Функции $x_a(\cdot)$, $y_a(\cdot)$ голоморфны в некоторой полосе комплексной плоскости, содержащей вещественную ось.

Выяснение условий расщепления возмущенных сепаратрис Λ_ε^+ и Λ_ε^- при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ сводится к анализу интеграла

$$I(\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(x_a, y_a)\, dt = c_1(\lambda)\cos\lambda\mu + c_2(\lambda)\sin\lambda\mu,$$

$$c_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_a(t)\cos\lambda t\, dt, \qquad c_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_a(t)\sin\lambda t\, dt.$$

Ясно, что $c_1(\lambda) - ic_2(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{x}_a(t)e^{-i\lambda t}\, dt$ — преобразование Фурье функции $\dot{x}_a(t)$. Так как $\dot{x}_a$ аналитична и экспоненциально быстро убывает с ростом $|t|$, то $c_1 - ic_2$ также аналитически зависит от λ (теорема Пэли — Винера).

Если $I(\mu)$ имеет простые нули, то при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ асимптотические поверхности $\Lambda_\varepsilon^\pm$ трансверсально пересекаются (см. § 1). В рассматриваемом случае среднее значение $(2\pi/\lambda)$-периодической функции I равно нулю, поэтому у нее всегда имеются нули. Эти нули, очевидно, простые, если $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$.

Покажем, что при условии

$$\dot{x}_a(t) \not\equiv 0, \tag{3.17}$$

сумма $c_1^2 + c_2^2$ для почти всех λ отлична от нуля. Действительно, если $c_1^2+c_2^2 \equiv 0$, то по теореме об обращении преобразования Фурье

$$\dot{x}_a(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} (c_1(\lambda) - ic_2(\lambda))e^{i\lambda t}\, d\lambda \equiv 0 .$$

Следовательно, $c_1^2 + c_2^2 \not\equiv 0$. Поскольку c_1 и c_2 аналитичны, то $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ почти всюду.

Итак, если невозмущенная сепаратриса Λ_0 не лежит на прямой, то почти любое синусоидальное возмущение приводит к хаотизации течения вблизи Λ_0. Аналогичный результат справедлив и для прямолинейной сепаратрисы; нужно только дополнительное условие о непараллельности возмущающего поля и прямой, содержащей Λ_0.

В качестве приложения рассмотрим задачу о паре вихрей противоположной интенсивности (см. § 8 гл. I). В некоторой равномерно движущейся системе отсчета движение частиц жидкости описывается уравнениями Гамильтона с гамильтонианом

$$H_0 = \frac{\Gamma}{2\pi}\left(\frac{y}{2a} + \ln\sqrt{\frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2}}\right).$$

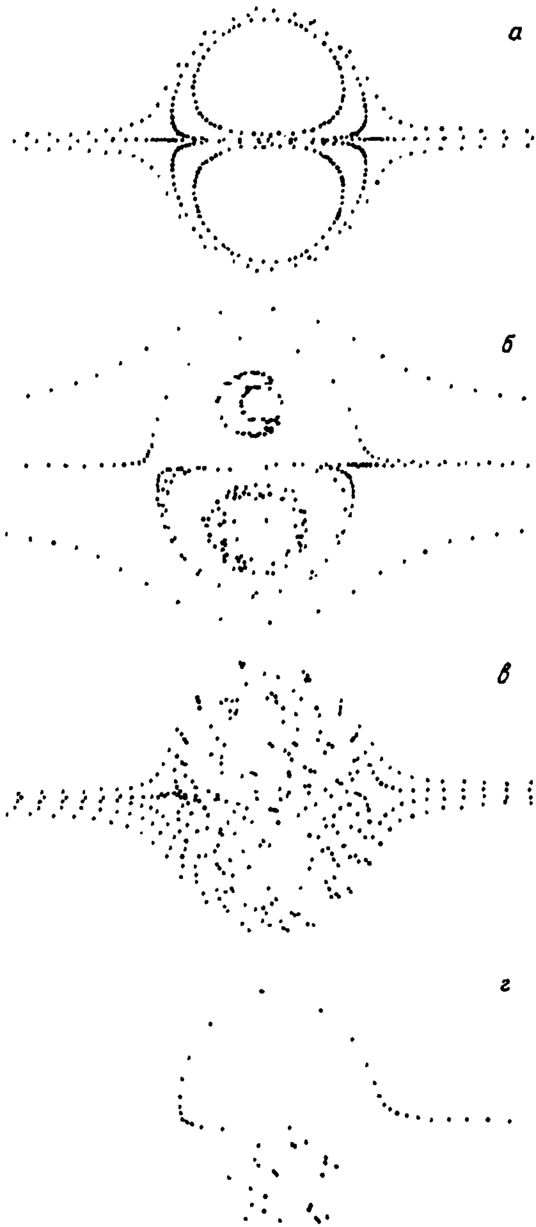

Рис. 25

Вихри с интенсивностями $\Gamma_1 = -\Gamma_2 = \Gamma \neq 0$ расположены в точках с координатами $(0, \pm a)$.

Ясно, что невозмущенное стационарное поле скоростей имеет две гиперболические особые точки $(\pm\sqrt{3}a, 0)$, соединенные тремя парами сдвоенных сепаратрис (фазовый портрет системы изображен на рис. 8). Как показано выше, эти пары сепаратрис расщепляются и трансверсально пересекаются при добавлении малого возмущения $\varepsilon H_1 = \varepsilon x \cos \lambda t$ для почти всех значений λ. При малых $\varepsilon \neq 0$ вблизи расщепленных сепаратрис будем иметь "острова" с хаотическим поведением траекторий частиц жидкости.

На рис. 25 этот результат иллюстрируется численными расчетами для значений Γ, a и λ, равных единице. Отмечены положения выделенных частиц жидкости через промежутки времени, равные 2π. Рис. 25, *а* соответствует невозмущенной задаче. Явления расщепления сепаратрис и образования стохастических слоев хорошо видны на рис. 25, *б*, *в* (им отвечают соответственно значения $\varepsilon = 0,1$ и $\varepsilon = 0,5$). На рис. 25, *г* показана отдельная траектория для значения $\varepsilon = 0,5$.

§ 4. Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа

1. Применим результаты §§ 1, 2 к классической задаче об отыскании новых интегралов уравнений Кирхгофа

$$\begin{gathered} \dot{m} = m \times \frac{\partial H}{\partial m} + p \times \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \dot{p} = p \times \frac{\partial H}{\partial m}, \\ H = (Am, m)/2 + (Bm, p) + (Cp, p)/2, \end{gathered} \tag{4.1}$$

описывающих движение твердого тела в идеальной жидкости. Матрицу A можно считать диагональной, $A = \mathrm{diag}(a_1, a_2, a_3)$. Уравнения (4.1) всегда имеют три интеграла: $F_1 = H$, $F_2 = (m, p)$, $F_3 = (p, p)$. В работах В. А. Стеклова [153] и А. М. Ляпунова [119] была решена задача о наличии дополнительного (к функциям F_1, F_2, F_3) независимого интеграла, имеющего вид квадратичной формы по переменным m, p. Оказалось, что такой интеграл существует лишь в интегрируемых случаях Кирхгофа, Клебша, Стеклова и Ляпунова (ср. с п. 3 § 5 гл. II). Задача о наличии нового аналитического интеграла уравнений (4.1) существенно сложнее.

Теорема 1 [86]. *Пусть числа a_1, a_2, a_3 различны. Если уравнения Кирхгофа имеют дополнительный (к функциям F_1, F_2, F_3) независимый интеграл, аналитический в $\mathbb{R}^6 = (m, p)$, то $B = \mathrm{diag}(b_1, b_2, b_3)$ и*

$$a_1^{-1}(b_2 - b_3) + a_2^{-1}(b_3 - b_1) + a_3^{-1}(b_1 - b_2) = 0. \tag{4.2}$$

При $B = 0$ независимый аналитический интеграл существует лишь в случае, когда $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и

$$a_1^{-1}(c_2 - c_3) + a_2^{-1}(c_3 - c_1) + a_3^{-1}(c_1 - c_2) = 0. \tag{4.3}$$

Заметим, что матрица B в интегрируемом случае Стеклова определяется условием (4.2) (см. соотношение (5.6) гл. II). Условие (4.3) дает интегрируемый случай Клебша (см. (5.5) в гл. II). Интересно отметить совпадение вида условий (4.2) и (4.3).

Следствие. *В общем случае уравнения Кирхгофа неинтегрируемы.*

Доказательство теоремы 1 основано на использовании явления расщепления асимптотических поверхностей. Введем в уравнения (4.1) малый параметр ε, заменяя p на εp. На фиксированной четырехмерной интегральной поверхности $M_{23} = \{(m, p) : F_2 = f_2, F_3 = f_3\}$ уравнения (4.1) будут гамильтоновыми с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1 + \varepsilon^2 H_2$, где H_0, H_1, H_2 — ограничения соответственно функций $(Am, m)/2$, (Bm, p), $(Cp, p)/2$ на M_{23}. Это эквивалентно случаю, когда постоянная энергии f_1 много больше f_2 и f_3 (точнее, отношения f_2/f_1 и f_3/f_2 — малые одинакового порядка). При $\varepsilon = 0$ снова имеем интегрируемую задачу Эйлера о движении свободного твердого тела по инерции. Уравнения допускают два неустойчивых периодических решения, вполне аналогичных (3.4):

$$\begin{gathered} m_1 = m_3 = 0, \qquad m_2 = m_2^0 = \pm\sqrt{2f_1/a_2}, \\ p_2 = p_2^0 = f_2/m_2^0, \quad p_1 = \alpha\cos(a_2 m_2^0 t), \quad p_3 = \alpha\sin(a_2 m_2^0 t), \\ \alpha^2 = f_3 - (f_2/m_2^0)^2 > 0. \end{gathered} \tag{4.4}$$

Пусть F_0 — аналитический интеграл задачи Эйлера. Если несобственный интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_0, H_1\}\, dt, \tag{4.5}$$

вычисленный вдоль решений невозмущенной задачи, асимптотических к периодическим решениям (4.4), не постоянен на асимптотических поверхностях задачи Эйлера, то, согласно результатам § 2, при малых $\varepsilon \neq 0$ уравнения Кирхгофа не имеют непостоянного аналитического интеграла и, более того, не допускают нетривиальной аналитической группы симметрий.

Доказательство теоремы 1, таким образом, сводится к проверке непостоянства интеграла (4.4), в котором удобно положить $F_0 = (m, m)/2$. Когда $B = 0$, в формуле (4.5) вместо H_1 следует взять, конечно, H_2. Если $F_0 = (m, m)/2$, то интеграл J будет существовать лишь в смысле главного значения. В этом случае можно положить, например, $F_0 = [(m,m) - a_2^{-1}(Am,m)]/2$.

В качестве примера мы получим условие Стеклова (4.2) в наиболее простом случае, когда $B = \mathrm{diag}\,(b_1, b_2, b_3)$. Так как

$$\begin{aligned}\{F_0, H_1\} = (b_3 - b_2)(m_1m_2p_3 + m_1m_3p_2) + \\ + (b_1 - b_3)(m_2m_3p_1 + m_1m_2p_3) + \\ + (b_2 - b_1)(m_1m_3p_2 + m_2m_3p_1),\end{aligned}$$

то

$$J = (b_3 - b_2)(J_{123} + J_{132}) + (b_1 - b_3)(J_{231} + J_{123}) + (b_2 - b_1)(J_{132} + J_{231}),$$

где $J_{ijk} = \int_{-\infty}^{\infty} m_i m_j p_k\,dt$. Интегралы J_{ijk} удовлетворяют линейным уравнениям

$$\begin{aligned}a_3J_{132} - a_2J_{123} + (a_3 - a_2)J_{231} = 0, \\ a_1J_{123} - a_3J_{231} + (a_1 - a_3)J_{132} = 0, \\ a_2J_{231} - a_1J_{132} + (a_2 - a_1)J_{213} = 0.\end{aligned} \tag{4.6}$$

Получим, например, первое соотношение. Из уравнений Кирхгофа при $\varepsilon = 0$ следует, что $(m_1p_1)^{\cdot} = a_3m_1m_3p_2 - a_2m_1m_2p_3 + + (a_3 - a_2)m_2m_3p_1$. Так как $m_1 \to 0$ при $t \to \pm\infty$, то

$$a_3J_{132} - a_2J_{123} + (a_3 - a_2)J_{231} = \int_{-\infty}^{\infty} (m_1p_1)^{\cdot}\,dt = 0.$$

Если $a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3 \neq 0$, то из уравнений (4.6) получим

$$J_{132} = \frac{a_1a_3 - a_1a_2 - a_2a_3}{a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3}J_{231}, \quad J_{123} = \frac{a_1a_2 - a_1a_3 - a_2a_3}{a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3}J_{231}.$$

Интеграл J_{231} можно вычислить с помощью вычетов и убедиться в том, что он отличен от нуля. Если не выполнено условие (4.2), то в силу очевидного равенства

$$\frac{J(a_1a_2 + a_1a_3 - a_2a_3)}{2a_1a_2a_3J_{231}} = a_1^{-1}(b_3 - b_2) + a_2^{-1}(b_1 - b_3) + a_3^{-1}(b_2 - b_1)$$

имеем $J \neq 0$; следовательно, возмущенные сепаратрисы расщепляются. В случае $a_2a_3 - a_1a_2 - a_1a_3 = 0$ интеграл J пропорционален интегралу J_{123} или J_{132}. Из соображений симметрии и сохранения на M_{23} меры, порожденной стандартной мерой в $\mathbb{R}^6$, следует пересечение возмущенных сепаратрис. Поэтому уравнения Кирхгофа неинтегрируемы на инвариантных многообразиях M_{23} и, в частности, во всем фазовом пространстве $\mathbb{R}^6$.

Пусть теперь $B = 0$, а матрица C диагональна. Получим условие Клебша (4.3). Полагая $2F_0 = (m, m) - a_2^{-1}(Am, m)$, вычислим скобку Пуассона:

$$\{F_0, H_2\} = m_1 p_2 p_3 (c_3 - c_2)(1 - a_1/a_2) + m_3 p_1 p_2 (c_2 - c_1)(1 - a_3/a_2).$$

Следовательно,

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} \{F_0, H_2\}\, dt = J_1(c_3 - c_2)(a_1^{-1} - a_2^{-1}) + J_3(c_2 - c_1)(a_3^{-1} - a_2^{-1}),$$

где $J_1 = a_1 \int_{-\infty}^{\infty} m_1 p_2 p_3\, dt$, $J_3 = a_3 \int_{-\infty}^{\infty} m_3 p_1 p_2\, dt$. Докажем, что $J_1 = J_3$. Для этого умножим уравнение Кирхгофа $\dot p_2 = a_1 m_1 p_3 - a_3 m_3 p_1$ на p_2 и проинтегрируем вдоль прямой $\mathbb{R} = \{t\}$. Тогда $J_1 - J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} p_2 \dot p_2\, dt = (p_2^2/2)|_{-\infty}^{+\infty} = 0$.

Вычислив интеграл $J_2(J_3)$ с помощью вычетов, можно убедиться, что он отличен от нуля. Если не выполнено условие (4.3), то в силу очевидного равенства $J/J_1 = (c_3 - c_2)a_1^{-1} + (c_1 - c_3)a_2^{-1} + (c_2 - c_1)a_3^{-1}$ имеем $J \neq 0$, и, следовательно, возмущенные асимптотические поверхности расщепляются. Эти поверхности всегда пересекаются. Действительно, гамильтонова система инвариантна при подстановке $p \to -p$. Отождествляя антиподальные точки на сфере $p^2 = f_3 > 0$, приходим к совпадению неустойчивых периодических траекторий (4.4). С другой стороны, как установил Пуанкаре, в гомоклинном случае всегда имеется двоякоасимптотическое решение. Для завершения доказательства отсутствия дополнительного аналитического интеграла остается воспользоваться результатами § 2.

Если не выполнено условие (4.2) (или (4.3), если $B = 0$), то одна из пар сепаратрис задачи Эйлера обязательно расщепляется при добавлении возмущения. Интересно отметить, что при подходящем выборе матриц B и C одна пара сепаратрис остается сдвоенной, а другая — расщепляется. Пусть, например, $B = 0$, а элементы c_{ij} симметричной матрицы C удовлетворяют условиям

$$\sqrt{a_2 - a_1}\, c_{13} \pm \sqrt{a_3 - a_2}\,(c_{22} - c_{11}) = 0,$$
$$\sqrt{a_2 - a_1}\,(c_{33} - c_{22}) \mp \sqrt{a_3 - a_2}\, c_{12} = 0.$$

Тогда при всех значениях ε уравнения Кирхгофа имеют “частный интеграл Гесса — Аппельрота” $F = m_1\sqrt{a_2 - a_1} \pm m_3\sqrt{a_3 - a_2}$. При малых значениях параметра ε сепаратрисы задачи Эйлера $\{F_k = f_k\ (k = 1, 2, 3),\ F = 0\}$ останутся сепаратрисами возмущенных периодических решений (4.4).

2. Ю. В. Баркин и А. В. Борисов провели численный анализ задачи Кирхгофа в случае диагональных матриц A, B и C. Уравнения (4.1) были представлены в специальных канонических переменных L, G, H, l, g, h. Координата H отвечает интегралу F_2. Его постоянная принята равной нулю. Как и в работе [196], была зафиксирована трехмерная поверхность уровня интеграла энергии приведенной системы $F_1 = 50$, а секущая плоскость задана в виде $g = \pi/2$. За координаты на секущей плоскости приняты переменные L/G, $l \bmod 2\pi$. Поскольку $|L| \leqslant G$, то $|L/G| \leqslant 1$.

Некоторые результаты расчетов представлены на рис. 26. Здесь приняты следующие значения для диагональных элементов матриц A и B: $a_1 = 1/3$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 1$; $b_1 = 3$, $b_2 = 2$, $b_3 = 1$. Видно, что условие (4.2) заведомо выполнено. На рис. 26, *а* изображены траектории в интегрируемом случае Стеклова, когда $c_1 = 3$, $c_2 = 8$, $c_3 = 1$. Затем параметр c_1 начинает увеличиваться. Рис. 26, *б* отвечает значению $c_1 = 5$, а рис. 25 *в* — значению $c_1 = 10$. Хорошс видно, что картина интегрируемого поведения фазовых траекторий начинает разрушаться как раз вблизи сепаратрис. По мере удаления от интегрируемой задачи "стохастический" слой около расщепленных сепаратрис начинает "расплываться". На рис. 26, *г* изображена картина пересечения сепаратрис при следующих значениях параметров: $b_1 = 0,1$, $b_2 = b_3 = 0$; $c_1 = 3$, $c_2 = 8$, $c_3 = 1$. Ясно видно, что гетероклинная сеть пересекающихся сепаратрис повторяется с периодом π. Это — следствие инвариантности задачи при подстановке $m \to -m$, $p \to -p$ (ср. с п. 1). Результаты расчетов показывают, в частности, что условие (4.2) не является достаточным для интегрируемости уравнений Кирхгофа.

3. В работе [15] получены некоторые дальнейшие результаты в задаче о наличии дополнительного интеграла уравнений (4.1) в предположении, что всё собственные значения матрицы A различны. Как в п. 1, авторы работы [15] вводят малый параметр ε, заменяя p на εp, и ставят задачу о наличии дополнительного интеграла в виде степенного ряда

$$\Phi_0(m,p) + \varepsilon\Phi_1(m,p) + \varepsilon^2\Phi_2(m,p) + \ldots, \tag{4.7}$$

коэффициенты которого продолжаются до однозначных голоморфных функций в комплексифицированном фазовом пространстве $\mathbb{C}^6 = \{m,p\}$. Применяя метод работы [79] (см. § 1 гл. VII), они получили, что "однозначный" интеграл вида (4.7) существует лишь в известных интегрируемых случаях Клебша и Стеклова. Поскольку речь идет об интегралах в комплексном пространстве, то авторы работы [15] отмечают, что полученный результат имеет лишь формальное отношение к реальной динамике. Это не совсем так. Дело в том, что уравнения (4.1) имеют однородные правые части. Поэтому каждая однородная форма вещественно-аналитического интеграла сама является интегралом уравнений (4.1). Подстановка $p \to \varepsilon p$ переводит каждую такую форму в многочлен по ε, ко-

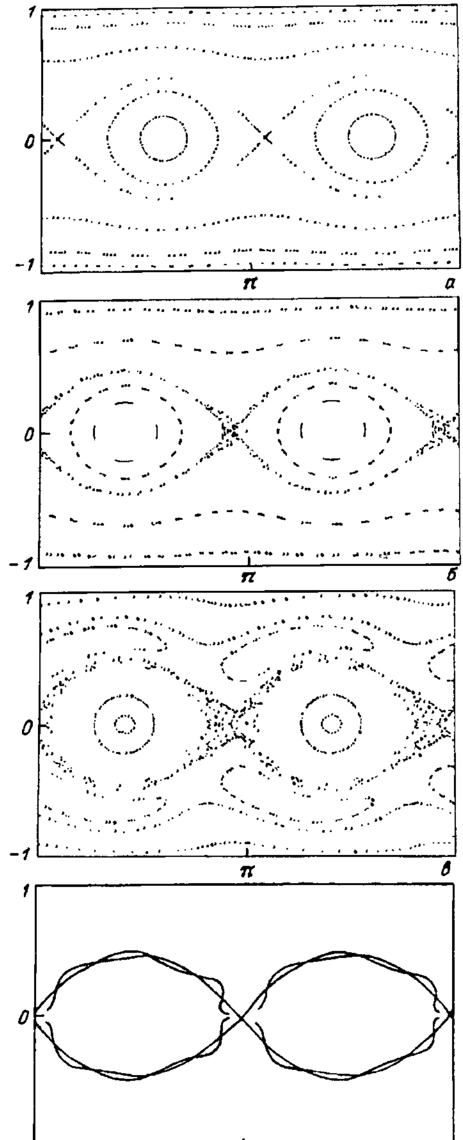

Рис. 26

эффициенты которого — однозначные голоморфные функции от m, p, поскольку они — полиномы от m и p.

Это рассуждение, конечно, не проясняет особенности поведения вещественных траекторий задачи Кирхгофа. Однако оно позволяет полностью решить задачу об аналитических интегралах уравнений Кирхгофа в несимметричном случае.

4. Задача об интегрируемости уравнений (4.1) при $a_1 = a_2$ существенно сложнее. Выше уже отмечалось, что из наличия аналитического интеграла уравнений (4.1) вытекает наличие интеграла в виде однородного многочлена по переменным m, p. Это простое наблюдение позволяет применить к рассматриваемой задаче метод Гюссона, с помощью которого была решена задача о дополнительном алгебраическом интеграле уравнений вращения тяжелого твердого тела с неподвижной точкой (историю вопроса и изложение метода Гюссона можно найти в [113]; см. также [14]). Такая задача рассмотрена С. Т. Садэтовым [148] в предположении о диагональности матриц A, B и C.

Теорема 2. *При $a_1 = a_2 \neq a_3$ дополнительный аналитический интеграл уравнений* (4.1) *существует лишь в случае Кирхгофа* ($b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$).

Отметим, что при $a_1 = a_2 \neq a_3$ известные интегрируемые задачи переходят в случай Кирхгофа (см. п. 3 § 5 гл. II).

В [148] рассмотрена также более сложная задача о дополнительных частных интегралах. По определению, функция F — частный интеграл, если $\dot{F} = 0$ на поверхности $F_2 = 0$, и если на этой поверхности функции F_1, F_3 и F почти всюду независимы.

Теорема 3. *Пусть $B = 0$. Тогда аналитический частный интеграл уравнений* (4.1) *существует лишь в случаях Кирхгофа и Чаплыгина (последний случай интегрируемости — частный, см. п.* 3 § 5 *гл.* II).

В [148] получены некоторые необходимые условия интегрируемости в предположении $a_1 = a_2 = a_3$. Но они, по-видимому, не являются достаточными.

5. Метод Гюссона не дает содержательной информации о поведении вещественных фазовых траекторий. В ряде случаев при $a_1 = a_2$ можно указать гомоклинные структуры, проясняющие механизм неинтегрируемости уравнений Кирхгофа.

Пусть $B = 0$. Тогда уравнения (4.1) можно представить в виде уравнений Эйлера — Пуассона:

$$I\dot{\omega} = I\omega \times \omega + e \times Je, \quad \dot{e} = e \times \omega. \tag{4.8}$$

Здесь I — матрица, обратная к A, $J = C$, $\omega = Am$, $e = p$. Мы предполагаем, что $a_1 = a_2$; следовательно, $I_1 = I_2$.

В уравнениях (4.8) можно перейти к "ограниченной" задаче, заменив I_3, J_1 и J_2 соответственно на μI_3, μJ_1 и μJ_2, где $0 < \mu \leqslant 1$. Оказывается, что в случае $J_1 \neq J_2$ при малых значениях $\mu > 0$ уравнения (4.8) не имеют нетривиального поля симметрий с аналитическими компонентами [92]. Доказательство проводится методом п. 4 § 3.

В уравнениях (4.8) положим $\mu = 0$, разделив предварительно на μ обе части уравнения для изменения ω_3. В результате получим ограниченную задачу о движении твердого тела в жидкости (см. п. 6 § 4 гл. I). Сначала установим ее неинтегрируемость. Интегралы уравнений (4.8) перейдут при $\mu = 0$ в интегралы ограниченной задачи:

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 + \alpha e_3^2 = h, \quad \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2 = c, \quad e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 = e^2.$$

Здесь $\alpha = J_3/I_1$; $h, c, e = \mathrm{const}$. С помощью уравнений движения нетрудно установить уравнение для изменения удвоенного угла "собственного вращения" $\varphi = 2\,\mathrm{arctg}(e_1/e_2)$:

$$\begin{gathered} \ddot{\varphi} + \Lambda(e^2 - u^2)\sin\varphi = \left(cu/(e^2 - u^2)\right)^{\cdot}, \\ \Lambda = (J_1 - J_2)/I_3, \quad \dot{u}^2 = (h - \alpha u^2)(e^2 - u^2) - c^2. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Положим $he^2 = c^2 + \varepsilon^2$. Тогда $u(t) = \varepsilon u_0(t) + o(\varepsilon)$, $u_0 = -\lambda\cos\left[\sqrt{h + \alpha e^2}\,(t - t_0)\right]$; $\lambda, t_0 = \mathrm{const}$. При малых ε уравнение (4.9) можно представить в виде

$$\ddot{\varphi} + \Lambda e^2 \sin\varphi = \frac{\varepsilon c\lambda\sqrt{h + \alpha e^2}}{e^2}\sin\left[\sqrt{h + \alpha e^2}(t - t_0)\right] + o(\varepsilon). \tag{4.10}$$

С помощью методов § 1 нетрудно установить наличие трансверсального пересечения сепаратрис для уравнения (4.10) при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ (см. также [132]). Отсюда вытекает, в частности, неинтегрируемость уравнения (4.10). Поскольку свойство расщепления сепаратрис устойчиво по отношению к малым возмущениям, то исходные уравнения (4.8) также неинтегрируемы при малых значениях $\mu > 0$.

6. Еще один способ обнаружения гомоклинной структуры предложен в [87]. Пусть $a_1 = a_2 \neq a_3$, $B = 0$, $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, c_3)$ и $c_1 = c_2 + \varepsilon$. При $\varepsilon = 0$ имеем интегрируемый случай Кирхгофа. В этой невозмущенной задаче имеются неустойчивые периодические траектории и гомоклинные решения. С помощью результатов § 1 можно установить расщепление сепаратрис при малых ненулевых значениях ε. В [150] рассмотрена более общая задача, в которой матрица C имеет недиагональные элементы порядка ε.

7. С помощью результатов п. 1 можно указать условия интегрируемости ряда задач из динамики твердого тела. Рассмотрим вращение ферромагнетика в магнитном поле (см. п. 8 § 3 гл. I). Оно описывается уравнениями (3.18) гл. I:

$$I\dot{\omega} = I\omega \times \omega + \varepsilon(\omega \times \gamma), \quad \dot{\gamma} = \gamma \times \omega, \quad \varepsilon = \mathrm{const} \neq 0. \tag{4.11}$$

Теорема 4 [91]. *Уравнения (4.11) имеют дополнительный аналитический интеграл в том и только том случае, когда твердое тело динамически симметрично.*

Для доказательства заметим (см. § 3 гл. I), что уравнения (4.11) можно представить в виде уравнений Кирхгофа (4.1), где надо положить

$$A = I^{-1}, \quad B = -\varepsilon I^{-1}, \quad C = \varepsilon^2 I^{-1}. \tag{4.12}$$

Пусть $I = \mathrm{diag}(I_1, I_2, I_3)$. При $I_1 = I_2$ имеем интегрируемый случай Кирхгофа (новым интегралом будет $I_3\omega_3 + \varepsilon\gamma_3$); он отмечен и исследован в [151]. Рассмотрим теперь общий случай, когда все главные моменты инерции I_k различны. Пользуясь теоремой 1, запишем (4.2) в предположении (4.12):

$$\varepsilon I_1 I_2 I_3 (I_3^{-1} - I_2^{-1})(I_1^{-1} - I_3^{-1})(I_1^{-1} - I_2^{-1}) = 0.$$

Для несимметричного тела это соотношение никогда не выполнено, что и требовалось доказать.

В работе [38] исследована интегрируемость уравнений более общей задачи о вращении ферромагнетика с нешаровым тензором намагничивания (при учете гиромагнитных эффектов).

А. А. Буров и А. В. Карапетян [37] применили теорему 1 и результаты п. 3 § 3 к задаче о полной интегрируемости уравнений скольжения тяжелого эллипсоида по горизонтальной плоскости. Предполагалось, что эллипсоид близок к шару, и его моменты инерции различны. Рассматриваемая система имеет пять степеней свободы и четыре интеграла: сохраняются полная энергия, импульсы тела в горизонтальных направлениях и кинетический момент относительно вертикали. Следовательно, для полной интегрируемости недостает всего одного интеграла. В [37] получены необходимые условия интегрируемости:

1) центр масс совпадает с геометрическим центром эллипсоида;

2) главные оси эллипсоида инерции и эллипсоида поверхности совпадают;

3) моменты инерции I_k эллипсоида и полуоси a_k его поверхности связаны соотношением $I_1(a_2 - a_3) + I_2(a_3 - a_1) + I_3(a_1 - a_2) = 0$.

§ 5. Бифуркации сепаратрис

1. Пусть $(x, y) = z$ — декартовы координаты в плоскости $\mathbb{R}^2$. Снабдим ее стандартной симплектической структурой $\Omega = dx \wedge dy$.

Пусть $H = H_0(z) + \varepsilon H_1(z,t) + o(\varepsilon)$ — функция Гамильтона, 2π-периодическая по t и аналитическая на множестве $D \times \mathbf{T}_t^1 \times (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$, где D — область в $\mathbb{R}^2$, $\varepsilon_0 > 0$.

При $\varepsilon = 0$ имеем интегрируемую гамильтонову систему с одной степенью свободы. Предположим, что невозмущенная система имеет в области D три неустойчивых невырожденных положения равновесия z_1, z_2 и z_3, соединенных двоякоасимптотическими траекториями Γ_1 и Γ_2, как показано на рис. 27. Точки z_1 и z_3 могут совпадать, однако мы требуем, чтобы $z_1 \neq z_2$. Точки z_1, z_2 и z_3 — неподвижные точки отображения g_0 за период $t = 2\pi$ невозмущенной системы, а Γ_1 и Γ_2 — инвариантные кривые этого отображения, заполненные точками, которые при положительных (отрицательных) итерациях отображения g_0 стремятся к точке z_2 (z_1) для кривой Γ_1 и к точке z_3 (z_2) для кривой Γ_2. При малых значениях

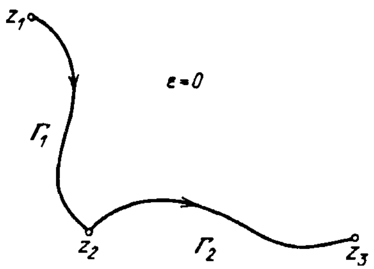

Рис. 27

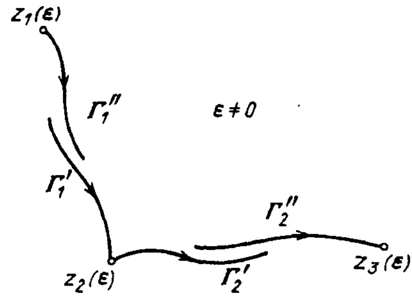

Рис. 28

параметра $\varepsilon \neq 0$ точки z_1, z_2 и z_3 не исчезнут, а перейдут в неподвижные точки $z_1(\varepsilon)$, $z_2(\varepsilon)$ и $z_3(\varepsilon)$ возмущенного отображения за период g_ε. В общем случае неустойчивая сепаратриса Γ_1' точки $z_1(\varepsilon)$ и устойчивая сепаратриса Γ_1'' точки $z_2(\varepsilon)$ уже не будут совпадать при $\varepsilon \neq 0$. Аналогичная ситуация возникает для сепаратрис Γ_2' и Γ_2'' точек $z_2(\varepsilon)$ и $z_3(\varepsilon)$ (рис. 28). Условия несовпадения сепаратрис Γ_s' и Γ_s'' обсуждались в § 1. В случае несовпадения сепаратрисы могут пересекаться или не пересекаться как множества точек в $\mathbb{R}^2$. Если, например, сепаратрисы Γ_1' и Γ_1'' пересекаются, то через точки пересечения проходят траектории гетероклинных асимптотических решений, "связывающих" между собой точки $z_1(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$. Достаточные условия пересечения и непересечения сепаратрис при малых $\varepsilon \neq 0$ в областях $\mathbb{R}^2$, не содержащих точек z_1, z_2 и z_3, указаны в § 1. При этом оставался открытым вопрос о судьбе возмущенных сепаратрис в окрестности точек $z_s(\varepsilon)$. Ниже излагаются результаты С. А. Довбыша о взаимном расположении сепаратрис Γ_1'' и Γ_2'' в окрестности точки $z_2(\varepsilon)$.

Введем некоторые обозначения. Пусть $t \to z_a^{(1)}(t)$ — двоякоасимптотическое решение невозмущенной задачи, для которого $\lim\limits_{t\to-\infty} z_a^{(1)}(t) = z_1$, $\lim\limits_{t\to\infty} z_a^{(1)}(t) = z_2$. Через $z_a^{(2)}(\cdot)$ обозначим другое двоякоасимптотическое решение, связывающее z_2 и z_3. Положим

$$I_s(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(z_a^{(s)}(t-\varphi), t)\, dt, \quad s = 1, 2.$$

Функции I_s встречались при анализе расщепления сепаратрис Γ'_s и Γ''_s в § 1. Отметим, что они аналитические и 2π-периодические. Для случая гомоклинных движений их средние по периоду равны нулю. Однако в рассматриваемой ситуации это вовсе не обязательно. Необходимым условием непересечения возмущенных сепаратрис Γ'_s и Γ''_s является отсутствие перемен знака у функции I_s. Это условие предполагается выполненным. Более точно: будем считать, что $I_1 \geqslant 0$ и $I_2 \leqslant 0$. В этом случае картина расположения расщепленных сепаратрис именно та, что изображена на рис. 28 при малых положительных значениях ε. При $\varepsilon = 0$ в окрестности точки z_2 можно выполнить такое каноническое преобразование Биркгофа $x, y \to \xi, \eta$, что (в новых переменных) $H_0(x, y) = F_0(\zeta)$, $\zeta = \xi\eta$, и

$$\frac{dF_0}{d\zeta}(0) = \Lambda > 0. \tag{5.1}$$

Число Λ — положительное собственное число невозмущенной линеаризованной системы — будет фигурировать в дальнейших рассмотрениях.

Теорема 1 [49]. *Возмущенные сепаратрисы Γ''_1 и Γ''_2 не совпадают при малых значениях параметра $\varepsilon > 0$, если выполнено хотя бы одно из следующих условий:*

1) $\dfrac{d \ln I_1(\varphi)}{d\varphi} \geqslant \Lambda$ *либо* $\dfrac{d \ln(-I_2(\varphi))}{d\varphi} \leqslant -\Lambda$ *при некотором* φ;

2) *области изменения функций I_1 и $-I_2$ не совпадают;*

3) *одна из функций (I_1 или I_2) является однозначной на комплексной плоскости, а другая не сводится к тождественной постоянной и имеет на своей римановой поверхности нуль или полюс;*

4) $\Lambda \neq 0$ *и хотя бы одна из функций (I_1 или I_2) не постоянна.*

Условие 1) заведомо выполнено, если при некотором φ одна из функций I_1 или I_2 обращается в нуль. Аналогично, условие 3) выполнено, если I_1 и I_2 — тригонометрические полиномы от φ и хотя бы один из них не сводится к постоянной. Теорема 1 доказывается с помощью равномерного варианта теоремы Мозера о сходимости нормализующего преобразования Биркгофа в окрестности ги-

10 Козлов В. В.

перболической точки [217] и с помощью техники, примененной в работе [62].

2. Эти общие соображения С. А. Довбыш применил к известной задаче о вращении несимметричного твердого тела с неподвижной точкой в слабом однородном поле силы тяжести. Малым параметром ε здесь служит произведение массы тела на расстояние от центра масс до точки подвеса. Факторизацией по группе вращений вокруг вертикали задача сводится к гамильтоновой системе с двумя степенями свободы. Фиксируя еще положительное значение постоянной интеграла энергии и применяя метод Уиттекера изоэнергетической редукции, уравнения движения можно привести к гамильтоновым уравнениям с 3/2 степенями свободы и периодическим по новой переменной времени гамильтонианом рассмотренного выше типа (все детали можно найти в книге [83]). В этой задаче диаграмма сепаратрис невозмущенной задачи Эйлера (в несимметричном случае) имеет вид, изображенный на рис. 29 (точки z_1 и z_3 совпадают, так как фазовым пространством системы является цилиндр, а не плоскость). Особенностью этой задачи является совпадение характеристических чисел для гиперболических положений равновесия z_1 и z_2. Выделим сепатрисы Γ_1, Γ_2 и Γ_3, как показано на рис. 29.

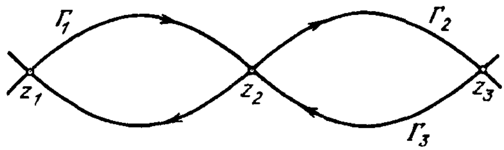

Рис. 29

Расщепление сепаратрис в рассматриваемой задаче при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ обсуждалось в п. 3 § 3. Было показано, что лишь при некоторых значениях параметров расщепленные сепаратрисы пересекаются. Тем не менее, справедливо

П р е д л о ж е н и е 1*). *При всех значениях параметров, кроме удовлетворяющих условию Гесса — Аппельрота (3.6), при малых $\varepsilon \neq 0$ для каждого возмущенного неустойчивого решения существуют по меньшей мере по два двоякоасимптотических (гомоклинных) решения $z_1(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$. В случае Гесса — Аппельрота таких решений нет.*

Доказательство этого утверждения основано на простых соображениях, связанных с применением теоремы Мозера об инвариантных кривых и факта сохранения площади при отображении за пе-

*) Это утверждение — устное сообщение С. Л. Зиглина.

риод. Рассуждения такого рода впервые использовал Пуанкаре для доказательства существования гомоклинных решений при расщеплении петли сепаратрисы (см. п. 2 § 2). Различные случаи взаимного расположения возмущенных сепаратрис приведены на рис. 30; случай *c*) невозможен.

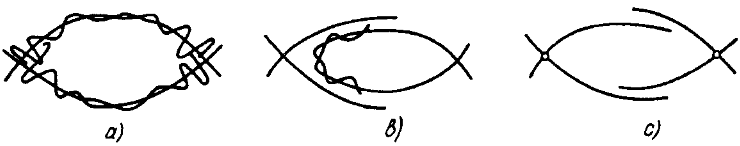

Рис. 30

Оставалось неясным, могут ли какие-либо из указанных гомоклинных траекторий лежать на сдвоенных сепаратрисах. Ответ на этот вопрос дает теорема 1: интегралы $I_s(\varphi)$, вычисленные вдоль двоякоасимптотических решений, отвечающих сепаратрисам Γ_1, Γ_2 и Γ_3, являются непостоянными тригонометрическими многочленами. Следовательно, применимо условие 3) теоремы 1.

Теорема 2 [49]. *Существуют такие области S_1, S_2 и S_3 в пространстве параметров (к которым нужно добавить постоянные интегралов энергии и момента), что:*

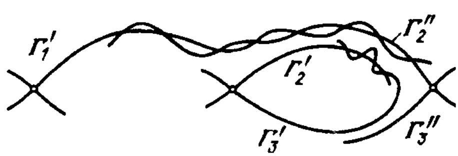

Рис. 31

1) *для значений параметров из области $S_1 \cup \cup S_2 \cup S_3$ возмущенные сепаратрисы Γ_s' и Γ_s'' расщепляются, не пересекаются и расположены так, как показано на рис. 31;*

2) *для параметров из области S_1 при всех малых $\varepsilon > 0$ возмущенные сепартрисы Γ_1' и Γ_3' не пересекаются вблизи невозмущенных сепаратрис Γ_1, Γ_2 и Γ_3;*

3) *для параметров из области S_2 при всех малых $\varepsilon > 0$ сепаратрисы Γ_1' и Γ_3' пересекаются вблизи кривых Γ_1, Γ_2 и Γ_3;*

4) *для параметров из области S_2 существуют такие последовательности положительных чисел $\varepsilon_n^+ \to 0$ и $\varepsilon_n^- \to 0$ $(n \to \infty)$, что при $\varepsilon = \varepsilon_n^+$ сепаратрисы Γ_1' и Γ_3' пересекаются вблизи кривых Γ_1, Γ_2, Γ_3, а при $\varepsilon = \varepsilon_n^-$ не пересекаются.*

Таким образом, для точек из области S_3 наблюдается нетривиальный эффект: при стремлении положительного параметра ε к нулю происходит бесконечное число бифуркаций рождения и исчезнования гетероклинных решений, проходящих вблизи невозмущенных сепаратрис Γ_1, Γ_2 и Γ_3.

Второе утверждение теоремы 2 допускает интересное уточнение, принадлежащее снова С. А. Довбышу.

Предложение 2. *Существует такая область $S_0 \subset S_1$ в пространстве параметров задачи, что при малых $\varepsilon > 0$ имеется замкнутая аналитическая инвариантная кривая, расположенная вблизи невозмущенных сепаратрис и разделяющая возмущенные неподвижные точки $z_1(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$.*

В частности, в этих случаях не существует гетероклинных движений: сепаратрисы гиперболических точек $z_1(\varepsilon)$ и $z_2(\varepsilon)$ не пересекаются, оставаясь расположенными по разные стороны от замкнутой инвариантной кривой. Доказательство предложения 2 основывается на теореме Мозера об инвариантных кривых с использованием техники, развитой при доказательстве теоремы 2.

3. Когда гамильтонова система зависит от параметра, то в типичной ситуации интегрируемым случаям отвечают исключительные изолированные значения параметра. Доказательство изолированности интегрируемых случаев в конкретных задачах может оказаться весьма трудным делом. Следуя [88], мы изучим этот вопрос для гамильтонова уравнения

$$\ddot{x} + \omega^2[1 + \varepsilon f(t)]\sin x = 0\ ; \quad \omega, \varepsilon = \mathrm{const}\ , \tag{5.2}$$

которое описывает колебания математического маятника. Аналитическая функция $f(t)$ считается непостоянной и 2π-периодической по t. При $\varepsilon = 0$ уравнение (5.2) интегрируемо, а при малых $\varepsilon \neq 0$ оно не имеет интеграла, однозначного и аналитического в расширенном фазовом пространстве $\mathbb{R} \times \mathbf{T}^2 = \{\dot{x}\,;\, x, t \bmod 2\pi\}$ (см. п. 1 § 3). Ниже будет показано, что это уравнение может быть интегрируемым лишь при конечном множестве значений параметра ε из интервала $[-a, a]$, где $a^{-1} = \max\limits_{R} |f(t)|$.

При всех значениях $\varepsilon \in [-a, a]$ периодическое решение $x(t) \equiv \pi$ (или, что то же самое, $x(t) \equiv -\pi$) — вертикальные колебания перевернутого маятника — является гиперболическим. Для доказательства положим $x = \pi + \xi$. Тогда уравнением в вариациях периодического решения $x(t) \equiv \pi$ будет уравнение

$$\ddot{\xi} - p(t)\xi = 0, \quad p = \omega^2(1 + \varepsilon f).$$

Поскольку $p(t) \geqslant 0$ и $p(t) \not\equiv 0$, то мультипликаторы этого решения положительны, один из них больше единицы, а другой меньше единицы (А. М. Ляпунов [120]). Таким образом, решение $x(t) = \pi$ действительно гиперболическое. Оно имеет две двумерные асимптотические поверхности Λ^+ и Λ^-, сплошь заполненные траекториями, неограниченно приближающимися к точке $x = \pm\pi$ при $t \to \pm\infty$. Поскольку гамильтониан H аналитичен, то Λ_ε^+, Λ_ε^- — регулярные аналитические поверхности в $\mathbb{R} \times \mathbf{T}^2$, аналитически зависящие от ε.

Оказывается, поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- пересекаются при всех $\varepsilon \in \in (-a, a)$. Это утверждение, очевидно, эквивалентно существованию гомоклинного решения $x(t)$ ($x(t) \to \pm\pi$ при $t \to \pm\infty$). Доказательство можно извлечь, например, из следующего общего утверждения.

Теорема 3 [24]. *Пусть (M, T, V) — обратимая механическая система, M компактно, метрика T не зависит от времени, а потенциальная энергия $V : M \times \mathbb{R}_t \to \mathbb{R}$ периодична по t. Если $V(x,t) < V(x_0,t)$ для всех $x \neq x_0$ и $t \in \mathbb{R}$, то существует такое двоякоасимптотическое (гомоклинное) решение $x(\cdot)$, что $x(t) \to x_0$ при $t \to \pm\infty$.*

В нашем случае $M = \mathbf{T}^1$, $T = \dot{x}^2/2$, $V = -\omega^2(1 + \varepsilon f)(1 + \cos x)$. Если $-a < \varepsilon < a$, то $V(x,t) < V(\pi,t)$ для всех $x \in [0, 2\pi] \setminus \{\pi\}$ и всех t.

Так как поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- не совпадают при малых $\varepsilon \neq 0$, то те значения ε, $|\varepsilon| \leqslant a + \delta$ ($\delta > 0$), при которых $\Lambda_\varepsilon^+ \equiv \Lambda_\varepsilon^-$, изолированы. Поскольку при $|\varepsilon| \leqslant a$ поверхности Λ_ε^+ и Λ_ε^- пересекаются, то уравнение (5.2) интегрируемо лишь при изолированных значениях ε.

Следует подчеркнуть, что интегрируемые случаи изолированы не всегда. Действительно, в § 1 гл. II приведен пример аналитической гамильтоновой системы, аналитически зависящей от параметра ε, которая на всюду плотном множестве значений ε является вполне интегрируемой и одновременно при значениях ε, принадлежащих другому всюду плотному множеству, не допускает даже непостоянных непрерывных интегралов.

§ 6. Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений

1. Рассмотрим снова уравнения Гамильтона

$$\dot{x} = H'_y, \quad \dot{y} = -H'_x; \quad (x, y) = z \in \mathbb{R}^2,$$

с аналитическим гамильтонианом $H_0(z) + \varepsilon H_1(z,t) + o(\varepsilon)$, 2π-периодическим по t. Предположим, что невозмущенная система с функцией Гамильтона H_0 удовлетворяет следующим двум условиям:

(i) точка $z = 0$ — невырожденная критическая точка функции H_0 индекса 1 (седловая точка);

(ii) имеется ограниченная связная компонента σ множества $\{z : H_0(z) = 0\} \setminus \{z : dH_0(z) = 0\}$, замыкание которой есть $\sigma \cup \{0\}$.

Таким образом, точка $z = 0$ — неустойчивое равновесие невозмущенной системы, а кривая σ — ее гомоклинная траектория (петля сепаратрисы).

Пусть g_ε — отображение за период $t = 2\pi$ возмущенной системы. Точка $\zeta \in \mathbb{R}^2$ — периодическая точка g_ε периода $m \in \mathbb{N}$, если $g_\varepsilon^m \zeta = \zeta$. Периодические точки, и только они, являются начальными значениями (при $t = 0$) для периодических решений гамильтоновой системы. Если m — период точки ζ, то $2\pi m$ — период решения $t \to z(t, \zeta)$, $z(0, \zeta) = \zeta$. Периодическая точка ζ называется невырожденной, если собственные значения отображения $z \to g_\varepsilon^m z$, линеаризованного в окрестности точки ζ, отличны от единицы. Ясно, что некритические ограниченные линии уровня функции H_0 составлены сплошь либо из вырожденных периодических, либо из непериодических точек отображения g_0.

Введем функцию $I(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, H_1\}(z_a(t + \lambda), t)\, dt$, где $t \to z_a(t)$ — одно из гомоклинных решений, отвечающее сепаратрисе σ. Поскольку среднее по периоду функции I равно нулю, то I должна где-то обращаться в нуль.

Теорема 1 [94]. *Предположим, что функция I имеет простой нуль λ_0. Тогда существует бесконечное число таких аналитических функций $\zeta_n : (-\varepsilon_n, \varepsilon_n) \to \mathbb{R}^2$, $\varepsilon_n > 0$, что*

1) *$\zeta_n(\varepsilon)$ — периодическая точка отображения g_ε при всех ε, $-\varepsilon_n < \varepsilon < \varepsilon_n$, невырожденная при $\varepsilon \neq 0$;*

2) *$H_0(\zeta_n(0)) < 0$ и расстояния от точек $\zeta_n(0)$ до $z_a(\lambda_0) \in \sigma$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.*

В общем случае последовательность ε_n сходится к нулю. Поэтому при достаточно малых значениях $\varepsilon \neq 0$ теорема гарантирует существование большого, но конечного числа различных невырожденных долгопериодических решений возмущенной гамильтоновой системы.

Заключение теоремы 1 полезно сравнить с результатом о рождении бесконечного числа различных семейств долгопериодических решений в задаче о вынужденных колебаниях маятника, рассмотренной в п. 6 § 11 гл. IV.

Доказательство теоремы 1 основано на применении метода малого параметра Пуанкаре. Для этого перейдем от переменных x, y к симплектическим переменным действие — угол J, $\psi \bmod 2\pi$ невозмущенной интегрируемой системы в области $\mathbb{R}^2$, определенной неравенствами $-c < H_0(z) < 0$, где c — малая положительная постоянная. Напомним, что $J = \frac{1}{2\pi} \iint_{H_0 \leqslant h} dx\, dy$. Функция $h \to J(h)$ монотонная; обратную функцию обозначим $F_0(J)$. В новых переменных $H = F_0(J) + \varepsilon F_1(J, \psi, t) + o(\varepsilon)$, где $H_0(z) = F_0(J)$, $H_1(z,t) = F_1(J,\psi,t)$. Функция Гамильтона, разумеется, 2π-периодична по ψ и t. Пусть $\omega(J) = \dfrac{dF_0}{dJ}$ — частота колебаний в невозмущенной системе. Легко понять, что $\omega(J) \to 0$, если линия уровня $H_0(z) \to F_0(J)$ неограниченно приближается к петле сепаратрисы σ. Следовательно, существует бесконечно много различных значений J_n, для которых $\omega(J_n) = 1/n$. Утверждается, что именно на инвариантных кривых $J = J_n$ при малых значениях ε происходит рождение невырожденных периодических точек $\zeta_n(\varepsilon)$ отображения g_ε, о которых говорится в теореме. Чтобы в этом убедиться, надо проверить выполнение условий неавтономного варианта теоремы Пуанкаре (см. § 11 гл. IV):

а) $\dfrac{d^2F_0}{dJ^2}(J_n) \neq 0$;

б) 2π-периодическая функция $f_n(\lambda) = \int_{-\pi n}^{\pi n} F_1\left(J_n, (t+\lambda)/n, t\right) dt$ имеет невырожденную критическую точку λ_n.

Покажем, что $d^2F_0/dJ^2 < 0$ при $J = J_n$ с достаточно большим значением n. Для этого воспользуемся асимптотическим представлением функции $h \to J(h)$:

$$J = -\Lambda h \ln(-h) + \ldots, \tag{6.1}$$

где положительная постоянная Λ определяется равенством (5.1), а многоточие означает степенной ряд, сходящийся при малых значениях h.

Считая h функцией от J, продифференцируем тождество (6.1):

$$1 + \Lambda h'(\ln(-h) + \ldots) = 0\,. \tag{6.2}$$

Отсюда вытекает, что при значениях J, близких к $J(0)$ ($J(0)$ — величина площади, заключенной внутри сепаратрисы σ), частота $\omega(J) = h'$ отрицательна. Дифференцируя еще раз тождество (6.2), получаем

$$hh''(\ln(-h) + \ldots) + h'^2(1 + \ldots) = 0\,. \tag{6.3}$$

Второе многоточие обозначает ряд без свободного члена по степеням h. Из (6.3) заключаем, что при J, близких к $J(0)$, вторая производная h'' отрицательна, что и требовалось доказать.

Проанализируем теперь условие б). Сначала заметим, что критические точки функции f_n совпадают с нулями функции

$$f_n' = \int_{-\pi n}^{\pi n} \{H_0, H_1\}(z_n(t+\lambda), t)\, dt\,,$$

где $z_n(\cdot)$ есть $2\pi n$-периодическое решение невозмущенной задачи. Если $z_n(0) \to z_a(0)$ при $n \to \infty$, то равномерно по λ последовательность $f_n'(\lambda)$ сходится к $I(\lambda)$. Используя очевидную формулу

$$\frac{d^n I}{d\lambda^n} = \int_{-\infty}^{\infty} \{H_0, \{\ldots \{H_0, H_1 \underbrace{\} \ldots \}\}}_{n+1} \, dt,$$

заключаем, что $f_n'' \to I'$ равномерно по λ. Поскольку согласно предположению теоремы функция I имеет простой нуль, то при достаточно большом n функции f_n будут обладать свойством б). Одновременно мы показали, что последовательность точек $z_n(\lambda_n)$ сходится к $z_a(\lambda_0)$, где λ_0 — простой нуль функции I. Теорема доказана.

Отметим, что возмущенная система может не иметь невырожденных долгопериодических решений периода $2\pi/\omega = 2\pi n/m$ при $m \neq 1$. Точнее, существование таких решений не вытекает, вообще говоря, из рассмотрения возмущения первого порядка по ε. Примером может служить известная задача о плоских колебаниях спутника на эллиптической орбите (см. § 4 гл. I). Трансверсальность пересечения сепаратрис в этой задаче при малых ненулевых значениях эксцентриситета орбиты установлена в работе [36].

С помощью теоремы 1 можно установить наличие семейств невырожденных долгопериодических решений в гамильтоновых системах, неинтегрируемость которых установлена методом расщепления сепаратрис. Ряд примеров таких систем указан в §§ 3, 4.

2. Если ε и $I'(\lambda_0)$ имеют разные знаки, то точки $\zeta_n(\varepsilon)$, о которых идет речь в теореме 1, при малых значениях $\varepsilon \neq 0$ отвечают периодическим решениям эллиптического типа. Следовательно, они устойчивы в линейном приближении. С помощью результатов работы [123] С. А. Довбыш показал, что при выполнении дополнительного условия $[5(I'')^2 - 3I'I'''](\lambda_0) \neq 0$ эти эллиптические периодические решения устойчивы для малых ε [50].

Периодические решения Пуанкаре из теоремы 1 зависят от двух параметров: непрерывного ε и дискретного n. В предположениях теоремы 1 возмущенная система имеет $2\pi n$-периодическое решение при фиксированном n и малом ε. В зависимости от знака произведения $\varepsilon I'(\lambda_0)$ это решение может быть эллиптическим или гиперболическим. Возникает естественный вопрос о поведении возникающих невырожденных периодических решений при увеличении $|\varepsilon|$. Эта задача рассмотрена в работе [50]. Оказывается, найдется такая положительная постоянная c, что с возрастанием $|\varepsilon| < c/n$ мультипликаторы λ, λ^{-1} периодического решения Пуанкаре, появляясь из точки $\lambda = \lambda^{-1} = 1$ при $\varepsilon = 0$, либо монотонно движутся в противоположных направлениях положительной вещественной полуоси (когда $\varepsilon I'(\lambda_0) > 0$), либо обегают единичную окружность на комплексной плоскости, встречаются в точке $\lambda = \lambda^{-1} = -1$ и затем расходятся в противоположных направлениях отрицательной вещественной полуоси (когда $\varepsilon I'(\lambda_0) < 0$). При $|\varepsilon| \geqslant c/n$ монотонный характер движения мультипликаторов может нарушиться.

§ 7. Асимптотические поверхности неустойчивых положений равновесия

1. Следуя Р. Деванею [191], рассмотрим автономную аналитическую гамильтонову систему с двумя степенями свободы. Пусть p — критическая точка гамильтониана H с собственными значениями $\pm(\alpha \pm i\beta)$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Если $\alpha \neq 0$, то p — гиперболическое положение равновесия, обладающее устойчивой асимптотической поверхностью Λ^+ и неустойчивой Λ^-. Пусть γ — гомоклинная траектория; она стремится к точке p при $t \to \pm\infty$. Ясно, что $\gamma \subset (\Lambda^+ \cap \cap \Lambda^-)$. Предположим, что во всех точках траектории γ двумерные поверхности Λ^+ и Λ^- пересекаются трансверсально.

Т е о р е м а 1. *Пусть $\alpha\beta \neq 0$. Тогда в любой окрестности γ гамильтонова система не имеет нетривиальных аналитических полей симметрий.*

С л е д с т в и е. *В предположениях теоремы 1 гамильтонова система не допускает аналитического интеграла, независимого от функции H.*

Формально теорема 1 не содержится в [191]. Однако из теоремы Деванея [191] (ее точная формулировка будет дана в § 8) вытекает существование в малой окрестности γ бесконечного числа долгопериодических гиперболических траекторий, объединение которых составляет ключевое множество для класса аналитических функций. После этого заключение теоремы 1 просто выводится из результатов § 8 гл. IV.

Условие $\alpha\beta \neq 0$ снять нельзя. Это показывает контрпример, указанный Р. Деванеем [192]. Рассмотрим задачу Неймана о движении точки по n-мерной евклидовой сфере $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : |x| = = 1\}$ в силовом поле с квадратичным потенциалом $V = (Ax, x)/2$. Для того чтобы получить равновесия с гомоклинными траекториями, следует отождествить противоположные точки сферы S^n. Собственные значения оператора A будем считать различными. В качестве точки p возьмем неустойчивое равновесие, отвечающее максимуму потенциала V на S^n. Тогда:

(i) равновесие p является гиперболическим;

(ii) оно имеет $2n$ различных трансверсальных гомоклинных траекторий (на энергетической поверхности, содержащей точку p);

(iii) пересечение $\Lambda^+(p) \cap \Lambda^-(p)$ устойчивого и неустойчивого многообразий содержит открытую окрестность каждой из этих гомоклинных траекторий в $\Lambda^+(p)$ и $\Lambda^-(p)$;

(iv) система имеет n почти всюду независимых аналитических интегралов.

В этом примере все собственные значения в точке p вещественны ($\beta = 0$).

Теорема Деванея распространяется и на гетероклинные траектории. В таком виде она имеет интересное приложение к небесной механике. Дело в том, что, согласно гипотезе Стрёмгрена, ограниченная задача трех тел при некоторых рациональных отношениях масс имеет несколько гетероклинных орбит, соединяющих равновесные решения Лагранжа L_4 и L_5. Если бы удалось доказать их трансверсальность, то мы бы получили новое доказательство неинтегрируемости задачи трех тел. Эта идея реализована Ж. Дэнби [190] для так называемого копенгагенского варианта задачи трех тел (т. е. для плоской круговой ограниченной задачи трех тел с равными массами). Обнаружено очень большое число гомо- и гетероклинных орбит, являющихся трансверсальными пересечениями асимптотических поверхностей.

2. С. А. Довбыш [51] применил теорему 1 к изучению возмущений интегрируемой задачи Лагранжа из динамики твердого тела. Выбирая подходящим образом единицы массы, длины и времени, можно считать, что главные моменты инерции тела относительно точки закрепления равны $I_1 = I_2 = 1$, I_3, координаты центра масс относительно осей инерции суть 0, 0, 1, а вес тела равен единице. Пусть c — постоянная интеграла площадей.

Рассмотрим равномерное вращение

$$\omega_1 = \omega_2 = 0, \quad \omega_3 = r_0; \quad \gamma_1 = \gamma_2 = 0, \quad \gamma_3 = 1. \tag{7.1}$$

Оно отвечает положению равновесия уравнений Эйлера — Пуассона. Равновесие (7.1) будет неустойчивым, если выполнено известное условие Маиевского $|c| < 2$. Уравнения в вариациях для (7.1) имеют, очевидно, два нулевых характеристических показателя (ввиду наличия интеграла площадей и геометрического интеграла $\gamma^2 = 1$).

Выпишем формулы двоякоасимптотических решений для равномерного вращения (7.1):

$$\begin{aligned}
&\omega_1 = 2\alpha \operatorname{ch}^{-1}(\alpha t)\cos(\beta t + s), \quad \omega_2 = 2\alpha \operatorname{ch}^{-1}(\alpha t)\sin(\beta t + s),\\
&\gamma_1 = c\alpha \operatorname{ch}^{-1}(\alpha t)\cos(\beta t + s) + 2\alpha^2 \operatorname{ch}^{-2}(\alpha t)\operatorname{sh}(\alpha t)\sin(\beta t + s),\\
&\gamma_2 = c\alpha \operatorname{ch}^{-1}(\alpha t)\sin(\beta t + s) - 2\alpha^2 \operatorname{ch}^{-2}(\alpha t)\operatorname{sh}(\alpha t)\cos(\beta t + s),\\
&\gamma_3 = 1 - 2\alpha^2 \operatorname{ch}^{-2}(\alpha t); \quad \omega_3 = r_0.
\end{aligned} \tag{7.2}$$

Здесь $\alpha^2 = 4 - c^2/2$, $\beta = (I_3 - 2)r_0/2$, s — вещественный параметр, нумерующий гомоклинные траектории.

Ненулевые характеристические показатели для (7.1) равны $\pm\alpha \pm \pm i\beta$. Ввиду неравенства треугольника для моментов инерции имеем $I_3 < 2$. Следовательно, если $r_0 \neq 0$ и выполнено условие Маиевского, то $\alpha\beta \neq 0$. В этом случае равновесие (7.1) для приведенной системы (на фиксированной четырехмерной совместной поверхности уровня интегралов площадей и геометрического интеграла) будет особой точкой типа седло — фокус.

В невозмущенной задаче асимптотические поверхности (7.2) сдвоены и все гомоклинные траектории нетрансверсальны. Оказывается, при малых возмущениях задачи Лагранжа равновесие (7.1) не исчезнет и снова будет точкой типа седло — фокус, но появятся трансверсальные гомоклинные траектории. Таким образом, к возмущенной задаче Лагранжа можно будет применить теорему 1.

Для выяснения вопроса о расщеплении сдвоенных асимптотических поверхностей (7.2) рассмотрим 2π-периодическую функцию от s:

$$I(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F, H_1\}\, dt\,, \tag{7.3}$$

Здесь $F = I_3\omega_3$ — дополнительный интеграл в случае Лагранжа, H_1 — возмущающая функция; скобка Пуассона вычисляется на гомоклинных траекториях из семейства (7.2).

Общее возмущение волчка Лагранжа можно свести к возмущению тензора инерции и сдвигу центра масс вдоль оси динамической симметрии. Второе возмущение несущественно. Поэтому $H_1 = \sum \varepsilon_{ij}\omega_i\omega_j/2$, где ε_{ij} — малые величины. В силу свойств симметрии можно считать, что $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{22} = 0$. В качестве малого параметра удобно принять $\varepsilon = (\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2)^{1/2}$.

Интеграл (7.3) вычисляется с помощью вычетов:

$$2\pi r_0 \left[\operatorname{sh}^{-1}\left(\frac{\pi}{\lambda}\right)\frac{\varepsilon_{11}}{\varepsilon}(2 - I_3)\sin 2s + \operatorname{ch}^{-1}\left(\frac{\pi}{2\lambda}\right)\left(\frac{\varepsilon_{23}}{\varepsilon}\cos s - \frac{\varepsilon_{13}}{\varepsilon}\sin s\right)\right],$$

где $\lambda = \alpha/\beta$. Эта 2π-периодическая функция от s всегда имеет простые нули (если, конечно, $c \neq 0$). Следовательно, согласно теореме 1 из § 1, при малых ненулевых значениях ε возмущенная приведенная задача Лагранжа будет иметь трансверсальную гомоклинную траекторию. По теореме 1 возмущенные уравнения не допускают нетривиальных аналитических полей симметрий (и тем более новых аналитических интегралов).

3. С. В. Болотин [29] получил достаточные условия неинтегрируемости гамильтоновых систем в случае вещественности характеристических показателей, которые формулируются в терминах нормальной формы Биркгофа.

Пусть p — положение равновесия аналитической гамильтоновой системы с вещественными различными характеристическими числами $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_n > 0$, $-\lambda_1, \ldots, -\lambda_n$. Между числами $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ возможны резонансные соотношения

$$(k, \lambda) = 0, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}. \tag{7.4}$$

Предположим, что среди (7.4) нет комбинационных резонансов:

$$\lambda_i = (l, \lambda) \quad \text{или} \quad \lambda_i + \lambda_j = (l, \lambda), \tag{7.5}$$

где $l = (l_1, \ldots, l_n)$, $l_k \geqslant 0$, $|l| = \sum l_k > 1$.

Отметим, что множество векторов $l \in \mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющих (7.4), всюду плотно в $\mathbb{R}^n_+$, а множество векторов, удовлетворяющих резонансным соотношениям вида (7.5), дискретно.

При отсутствии резонансов (7.5) в гамильтоновой системе нет резонансов (7.4) порядка 3 и 4 (когда $|k| = \sum |k_i| = 3$ или $|k| = 4$). Поэтому, согласно классическому результату Биркгофа, вблизи точки p функция Гамильтона приводится к нормальной форме:

$$H = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \sigma_i + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \sigma_i \sigma_j + O(|x|^5 + |y|^5),$$

где x, y — аналитические канонические координаты в окрестности точки p, а $\sigma_i = x_i y_i$. Назовем положение равновесия *слабо нерезонансным*, если среди резонансов (7.4) нет комбинационных резонансов (7.5), а матрица $A = \|a_{ij}\|$ удовлетворяет условию невырожденности

$$Ak \neq 0, \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}, \quad (k, \lambda) = 0. \tag{7.6}$$

Если равновесие нерезонансно или матрица A невырождена, то условие (7.6) выполнено автоматически.

Пусть Λ — одна из асимптотических к точке p поверхностей; она сплошь заполнена траекториями гамильтоновой системы, приближающимися к точке p при $t \to +\infty$ или $t \to -\infty$. Ясно, что в окрестностях точки p на Λ найдутся локальные координаты $x_1, \ldots, x_n$, в которых гамильтонова система на Λ имеет вид

$$\dot{x}_k = \lambda_k x_k + \ldots ;$$

многоточие обозначает нелинейные слагаемые. Пусть γ — одна из асимптотических траекторий к точке p. Траектория γ называется главной, если касается одной из плоскостей $x_s = 0$ при $t \to +\infty$ (или $t \to -\infty$).

Т е о р е м а 2 [29]. *Пусть $p_\pm$ — слабо нерезонансные положения равновесия с вещественными характеристическими показателями. Если существует трансверсальная двоякоасимптотическая к $p_\pm$ траектория γ, не являющаяся главной при $t \to \pm\infty$, то*

***аналитическая** гамильтонова система не допускает аналитических интегралов в окрестности множества $\gamma \cup p_+ \cup p_-$, независимых от интеграла энергии.*

Требование того, чтобы траектория γ не являлась главной, существенно, поскольку в типичном случае задача Неймана (см. п. 1) удовлетворяет остальным условиям теоремы. Доказательство теоремы 2 напоминает доказательство теоремы 3 из § 2. Было бы интересным выяснить, гарантируют ли условия теоремы 2 отсутствие нетривиального аналитического поля симметрий.

С. В. Болотин указал интересное применение теоремы 2 в динамике твердого тела. Речь идет о возмущении приведенной задачи Лагранжа, рассматривавшейся в п. 2. Если постоянная площадей равна нулю, то характеристические числа неустойчивого равновесия оказываются вещественными, и поэтому теорема Деванея неприменима. В [29] показано, что если тензор инерции не шаровой, и центр масс тела несколько смещен относительно оси динамической симметрии (при этом его z-координата отлична от нуля), то возмущенная задача Лагранжа допускает не являющуюся главной *трансверсальную* гомоклинную траекторию к слабо нерезонансному положению равновесия. Для построения нужной траектории используются идеи теории возмущений (см. § 1). Эта задача обсуждается также в работе [51].

§ 8. Символическая динамика

1. Начнем с рассмотрения модельного примера. Пусть S — отображение квадрата $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leqslant x, y \leqslant 1\}$ в себя, определенное формулами:

$$\begin{aligned} &x \to 3x, &&y \to y/3, &&\text{если}\quad 0 \leqslant x \leqslant 1/3,\\ &x \to 3x-2, &&y \to y/3+2/3, &&\text{если}\quad 2/3 \leqslant x \leqslant 1, \end{aligned} \tag{8.1}$$

В полосе $1/3 < x < 2/3$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ отображение S не определено. Геометрический смысл преобразования $S : B \to B$ ясен из рис. 32. Его можно трактовать как отображение Пуанкаре некоторой динамической системы. Нас будут интересовать траектории, целиком лежащие в квадрате B.

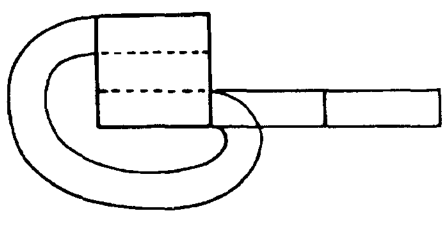

Рис. 32

С этой целью выясним, как устроены множества $S^n(B) \subset B$ при $n > 1$. Для того, чтобы получить $S(B)$, надо из квадрата B

выбросить горизонтальную полосу $[0,1]\times(1/3,2/3)$. Если из оставшихся двух полос выбросить более узкие полосы $[0,1]\times(1/9,2/9)$ и $[0,1]\times(7/9,8/9)$, то получится множество $S^2(B)$, и т. д. Продолжая этот процесс неограниченно, придем к множеству $[0,1]\times K$ (где K — канторово множество на отрезке $[0,1]$), на котором определены все отрицательные степени S. Рассуждая точно так же, мы получим, что на множестве $K\times[0,1]$ определены все положительные степени отображения S. Следовательно, все целые степени S определены на "дырявом" множестве $\Lambda = K\times K\subset B$: траектория любой точки $z\in\Lambda$ (т. е. совокупность точек $S^n(z)$, $n\in\mathbb{Z}$) целиком лежит в $\Lambda\subset B$.

Как же устроено отображение $S:\Lambda\to\Lambda$? Чтобы ответить на этот вопрос, введем пространство Ω последовательностей $\omega=\{\omega_n\}$ нулей и единиц, где n пробегает все целые значения. Зададим в Ω топологию $\mathcal{T}$, определив следующим образом сходимость: последовательность $\omega^{(k)}$ сходится к $\omega\in\Omega$, если при всех n

$$\lim_{k\to\infty}\omega_n^{(k)}=\omega_n\,.$$

Л е м м а 1. *Топологическое пространство $(\Omega,\mathcal{T})$ гомеоморфно Λ.*

Действительно, последовательности $\{\omega_n\}$ можно поставить в соответствие два числа:

$$x=2\sum_{s\geqslant 0}\omega_s/3^{s+1},\qquad y=2\sum_{s\geqslant 0}\omega_{-s}/3^s,\tag{8.2}$$

которые принадлежат, очевидно, $K\subset[0,1]$. Легко сообразить, что это соответствие — гомеоморфизм.

Пусть T — отображение Ω на себя, которое переводит $\omega=\{\omega_n\}$ в $\omega'=\{\omega_{n+1}\}$ (сдвигая влево элементы на единицу).

Т е о р е м а 1. *Существует такой гомеоморфизм $f:\Lambda\to\Omega$, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
\Lambda \arrow[r, "S"] \arrow[d, "f"'] & \Lambda \arrow[d, "f"] \\
\Omega \arrow[r, "T"] & \Omega
\end{tikzcd}$$

(т. е. $T\circ f=f\circ S$).

Искомый гомеоморфизм $\omega\to(x,y)$ задается формулами (8.2). Доказательство основано на простом сопоставлении (8.1) и (8.2).

Итак, каждой траектории $S^n(z)$, $z \in B$, $n \in \mathbb{Z}$, содержащейся в квадрате B сопоставлена последовательность символов $\omega = \{\omega_n\}$, причем действию отображения S отвечает ее сдвиг на один элемент влево. Этот метод кодировки траекторий восходит к работам Адамара, Биркгофа, Морса, Хедлунда по исследованию геодезических на замкнутых поверхностях отрицательной кривизны и составляет содержание "*символической динамики*". Подробнее с этой теорией можно ознакомиться по книгам [4, 221].

Символическое описание траекторий позволяет доказать ряд важных свойств преобразования S. Из леммы 1 и теоремы 1 выводится

Предложение 1. *Отображение $S : \Lambda \to \Lambda$ обладает следующими свойствами:*

1) *периодические точки плотны в Λ;*

2) *любые две периодические точки можно соединить двоякоасимптотической траекторией;*

3) *любая периодическая точка имеет гомоклинную траекторию;*

4) *существуют траектории, всюду плотно заполняющие Λ.*

Доказательство. Периодической траектории отображения S соответствует точка $(a) = (\ldots, a, a, a, \ldots) \in \Omega$, где a — некоторый блок из нулей и единиц. Любому элементу $\omega \in \Omega$ можно сопоставить последовательность периодических траекторий $\omega^{(n)} = (a_n)$, где $a_n = \{\omega_{-n}, \ldots, \omega_n\}$. Очевидно, что $\omega^{(n)} \to \omega$ при $n \to \infty$; т. е. свойство 1) доказано. Далее, пусть точкам $(a), (b) \in \Omega$ отвечают две периодические траектории; тогда последовательности $(\ldots, a, a, b, b, \ldots)$ отвечает искомая двоякоасимптотическая траектория. Гомоклинные траектории соответствуют последовательностям $(\ldots, a, a, c, a, a, \ldots)$. Тем самым доказаны свойства 2) и 3). Рассмотрим, наконец, такую точку $\omega^* \in \Omega$, что в последовательности $\{\omega_n^*\}$, начиная с некоторого места, подряд записаны все конечные блоки из нулей и единиц. Тогда замыкание орбиты $\bigcup T^n\omega^*$ $(n \in \mathbb{Z})$ совпадает с Ω. Предложение доказано.

Обсудим теперь вопрос об интегрируемости дискретной динамической системы (B, S). Эту систему естественно назвать интегрируемой, если найдется локально непостоянная функция F ("интеграл"), инвариантная при подстановке S : $F(S(z)) = F(z)$ для всех $z \in B$.

Предложение 2. *Отображение $S : B \to B$ не имеет непостоянных аналитических интегралов.*

Доказательство (по В. М. Алексееву [2]). По предложению 1 (свойство 4) интеграл F имеет одно и то же значение в точках множества $\Lambda \subset B$. Из построения совершенного множества

Λ вытекает, что для любой точки $z \in \Lambda$ всегда найдутся две последовательности точек из Λ, сходящиеся к z по двум независимым направлениям (например, по горизонтали и вертикали). Поэтому производные всех порядков по x, y в точке z равны нулю. Для завершения доказательства воспользуемся аналитичностью F.

Из этого рассуждения нельзя вывести отсутствие гладких интегралов, ибо Λ нигде не плотно. Можно показать, что периодические точки в Λ являются гиперболическими и, следовательно, невырожденными. С другой стороны, они плотны в Λ, а множество Λ — ключевое подмножество в B для класса аналитических функций. Поэтому отсутствие аналитических интегралов можно также установить с помощью результатов п. 1 § 8 гл. IV. Другой способ доказательства неинтегрируемости основан на применении третьего свойства из предложения 1. Легко видеть, что устойчивая и неустойчивая сепаратрисы периодических точек не совпадают (и пересекаются); это позволяет применить теорему 1 из § 2.

Динамические системы, у которых имеются траектории, всюду плотно заполняющие фазовое пространство, называются транзитивными. Наша система транзитивна на подмножестве $\Lambda \subset B$, поэтому ее можно отнести к "транзитивному типу" (термин Биркгофа). "Любая неинтегрируемая проблема транзитивного типа может, однако, считаться "решенной", если для нее можно указать специальный алгоритм, достаточно могущественный для разрешения всех вопросов о типах и распределении движений".*) В нашем случае этот алгоритм дает символическое представление траекторий в квадрате B, описываемое теоремой 1.

2. Преобразование $T : \Omega \to \Omega$, фигурирующее в теореме 1, обычно называют *сдвигом Бернулли*. Происхождение этого термина имеет прозрачную вероятностную природу. Действительно, выберем "наугад" точку $\omega \in \Omega$ и рассмотрим итерации $T^n\omega$, $n \in \mathbb{Z}$. "Компоненты" $T^n\omega$ с нулевым номером образуют последовательность из нулей и единиц: $\ldots \omega_{-n}, \ldots, \omega_0, \ldots \omega_m, \ldots$. Переходы от ω_n к ω_{n+1} можно трактовать как независимые испытания Бернулли с двумя равновероятными исходами. В связи с этим динамическую систему (Λ, S) часто называют квазислучайной.

Рассмотрим положительную полутраекторию $\{T^n\omega\}$ $(n > 0)$ точки ω. Последовательности $\omega_0, \omega_1, \ldots$ сопоставим точку $x \in [0,1]$ по правилу $x = \omega_0/2 + \omega_1/2^2 + \ldots$ Тогда сдвиг Бернулли можно представить как отображение $f\colon x \to 2x \bmod 1$ единичного отрезка на себя. При этом отображение f не имеет интегралов в виде непостоянных суммируемых функций, однако можно указать "квазиинтегралы" — функции, которые практически сохраняют свои значения на больших, но ограниченных участках траектории точки x.

*) Биркгоф, [18, гл. VIII].

Для этого рассмотрим на отрезке $[0,1]$ ортонормированную систему функций Радемахера

$$\varphi_m(x) = (-1)^{[2^m x]}, \quad m \geqslant 0.$$

Ясно, что $\varphi_m(f(x)) = \varphi_{m+1}(x)$ для всех $x \in [0,1]$. Положим $F_k = (\varphi_1 + \ldots + \varphi_{k-1})/\sqrt{k}$. Легко проверить, что $\int_0^1 F_k\,dx = 0$ и $\int_0^1 F_k^2\,dx = 1$. В частности, колебание каждой функции F_k на отрезке $[0,1]$ заведомо не меньше единицы.

Справедлива очевидная оценка $|F_k(f(x)) - F_k(x)| = |\varphi_k - \varphi_1|/\sqrt{k} \leqslant 2/\sqrt{k}$. Следовательно, $|F_k(f^m(x)) - F_k(x)| \leqslant 2m/\sqrt{k}$. Зафиксируем малое $\varepsilon > 0$ и большое m. Выберем $k > 4m^2/\varepsilon^2$. Тогда значения функции F_k в точках $x, f(x), \ldots, f^m(x)$ при всех значениях $x \in [0,1]$ разнятся не более чем на ε. Функцию F_k при больших значениях k естественно назвать квазиинтегралом отображения f.

По теореме Муавра имеем

$$\lim_{k\to\infty} \operatorname{mes}\{0 \leqslant x \leqslant 1 : a < F_k(x) < b\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-z^2/2}\,dz.$$

Итак, при $k \to \infty$ значения квазиинтегралов распределены по нормальному закону. Это — еще одно проявление квазислучайности в поведении траекторий исходной динамической системы (Λ, S).

3. Методы символической динамики применимы к описанию поведения системы вблизи трансверсальной гомоклинной траектории. Пусть p — гиперболическая неподвижная точка отображения S произвольного многообразия M на себя. Можно считать, что M — фазовое пространство неавтономной периодической гамильтоновой системы, а S — отображение за период (см. п. 4 § 1). Пусть Λ^+ и Λ^- — асимптотические инвариантные поверхности точки p, пересекающиеся трансверсально. Точки $q \in \Lambda^+ \cap \Lambda^-$ естественно назвать трансверсальными гомоклинными точками: $\lim\limits_{n\to\pm\infty} S^n(q) = p$.

Рассмотрим компактное множество в M, состоящее из траектории точки q и точки p. Покроем его конечным числом малых окрестностей: p накрывается окрестностью U_0; при этом U_0 накроет все точки траектории $\{S^n(q)\}$, кроме конечного числа; эти оставшиеся точки накроем по одной непересекающимися окрестностями $U_1, \ldots, U_{N-1}$. Пересечения $S(U_0) \cap U_0$, $S(U_0) \cap U_1, \ldots, S(U_{N-1}) \cap U_0$ непусты: первое из них содержит p, а остальные включают по одной точке из траектории q. Эту ситуацию можно изобразить в виде “графа пересечений” (рис. 33), вершины которого помечены символами $0, 1, \ldots, N-1$, а ребро от вершины i к вершине j проводится при непустом пересечении $S(U_i) \cap U_j$. В зависимости от выбора окрестностей $U_0, \ldots, U_{N-1}$ граф пересечений может иметь дополнительные (к указанным на рис. 33) ребра.

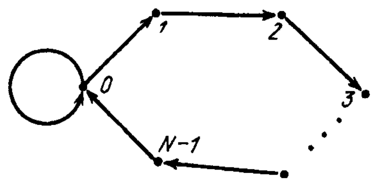

Рис. 33

Лемма 2 [3]. *Для всякого открытого множества $V \subset M$, содержащего замыкание траектории точки q, можно так выбрать окрестности $U_0, \ldots, U_{N-1} \subset \subset V$, чтобы граф пересечений совпал с графом на рис. 33.*

Ясно, что N зависит от выбора окрестности V и растет с ее уменьшением.

Введем пространство Ω^N бесконечных последовательностей из N символов $0, 1, \ldots, N-1$. Пусть $\Omega(N) \subset \Omega^N$ состоит из "допустимых" последовательностей $\{\omega_n\}$ (последовательность допустима, если на соседних местах стоят такие пары символов, которым отвечает ребро в графе пересечений (см. рис. 33)). Снабдим $\Omega(N)$ топологией бесконечного произведения топологических пространств (ср. с п. 1). Пусть T — гомеоморфизм $\Omega(N)$, сдвигающий последовательность $\omega = \{\omega_n\}$ на один символ влево.

Теорема 2 (В. М. Алексеев [3]). *Пусть $U_0, \ldots, U_{N-1}$ — окрестности из леммы 1, $U = U_0 \cup \ldots \cup U_{N-1}$ и $\Lambda = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} S^n(U)$ — наибольшее инвариантное подмножество U. Тогда найдется такой гомеоморфизм $f\colon \Lambda \to \Omega(N)$, что коммутативна диаграмма*

$$\begin{tikzcd} \Lambda \arrow[r, "S"] \arrow[d, "f"'] & \Lambda \arrow[d, "f"] \\ \Omega(N) \arrow[r, "T"] & \Omega(N) \end{tikzcd}$$

Обсудим некоторые следствия теоремы 2. Как и в п. 1, доказывается, что S действует на Λ транзитивно (имеются траектории, всюду плотно заполняющие Λ) и что периодические точки плотны в Λ.

Каждая траектория $\{S^n(x)\}$ $(x \in \Lambda)$ взаимно однозначно кодируется последовательностью $\omega = \{\omega_n\} \in \Omega(N)$. Как же устроена эта последовательность? Ясно, что в ней всегда имеются нули, и после каждого нуля может стоять либо нуль, либо единица, причем последняя всегда служит началом блока $\sigma = (1, 2, \ldots, N-1, 0)$.

Таким образом, ω состоит из нулей, между которыми вкраплены блоки σ. При этом не исключено, что блоки σ (в конечном или бесконечном числе) идут подряд.

Пусть s — целое число, $2 \leqslant s \leqslant N+1$, и $k = N+s-2$. Введем подмножество $\Omega_s \subset \Omega(N)$, инвариантное относительно T^k (сдвига на k символов влево) и состоящее из последовательностей $\{\omega_n\}$, у которых $\omega_0 = 0$. Ввиду инвариантности, на всех местах, номер которых делится на k, тоже должны стоять нули: $\omega_{mk} = 0$ $(m \in \mathbb{Z})$. Поэтому, чтобы описать точки $\omega \in \Omega_s$, достаточно выяснить, какие блоки из $k-1$ символов могут встретиться между двумя нулями. Из рис. 33 с учетом неравенства $s < N+2$ видно, что таковыми могут быть только следующие s блоков:

$$A_0 = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{k-1}\},$$

$$A_1 = \{1, 2, \ldots, N-1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2}\},$$

$$A_2 = \{0, 1, \ldots, N-1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{s-3}\},$$

....

$$A_{s-1} = \{\underbrace{0, \ldots, 0}_{s-2}, 1, \ldots, N-1\}.$$

Таким образом, каждая последовательность $\{\omega_n\} \in \Omega_s$ имеет вид

$$\ldots 0, A_{i_{-1}}, 0, A_{i_0}, 0, A_{i_1}, 0, A_{i_2}, \ldots, \tag{8.3}$$

причем индексы i_m могут принимать независимо любое значение из множества $\{0, 1, \ldots, s-1\}$. Ясно, что Ω_s находится во взаимно однозначном соответствии с множеством Ω^s всех бесконечных последовательностей из s символов. Преобразование T^k сдвигает (8.3) на k символов влево, что приводит к появлению на месте блока A_{i_m} блока $A_{i_{m+1}}$. Но это в точности то же самое, что и сдвиг T на множестве Ω^s. Следовательно, гомеоморфизм $T : \Omega^s \to \Omega^s$ сопряжен с гомеоморфизмом $T^k : \Omega_s \to \Omega_s$, который, в свою очередь, сопряжен с отображением $S^k : \Lambda \to \Lambda$ (теорема 2). Итак, доказано

С л е д с т в и е (Смейл [232]). *Для любой окрестности U и любого натурального s найдутся такие натуральное число k и подмножество $\Lambda \subset U$, что отображение $S^k : \Lambda \to \Lambda$ топологически сопряжено с гомеоморфизмом сдвига в пространстве последовательностей из s символов.*

Этот гомеоморфизм сдвига также называется сдвигом Бернулли. Здесь мы имеем более сложную вероятностную модель: независимые испытания с s равновероятными исходами.

4. Теперь мы можем сформулировать теорему Деванея, упоминавшуюся в п. 1 § 7. Итак, пусть p — точка покоя гамильтоновой системы с двумя степенями свободы, $\pm\alpha \pm i\omega$ — ее характеристические числа, γ — трансверсальная гомоклинная траектория для точки p.

Теорема 3 [191]. *Если $\alpha\omega \neq 0$, то для любого локально трансверсального сечения Σ траектории γ и любого натурального s найдется компактное инвариантное гиперболическое множество $\Lambda \subset \Sigma$, на котором отображение последования Пуанкаре топологически сопряжено сдвигу Бернулли в пространстве бесконечных последовательностей из s символов.*

Таким образом, вблизи гомоклинной траектории к положению равновесия типа седло — фокус гамильтонова система обладает квазислучайным поведением.

5. В. М. Алексеев применил метод символической динамики в задаче о пылинке в поле двойной звезды (см. п. 3 § 5 гл. I). Оказывается, если эксцентриситет орбит массивных тел отличен от нуля, то траектории пылинки выглядят весьма запутанными. Это дает возможность доказать неинтегрируемость уравнений движения [5]. Более точно, квазислучайность траекторий пылинки удается установить при малых значениях эксцентриситета $e \neq 0$. Методом Пуанкаре (см. § 1 гл. IV) можно доказать отсутствие интегралов и нетривиальных групп симметрий в виде формальных рядов по степеням e. Либре и Симо [216] перенесли метод Алексеева на ограниченную круговую задачу трех тел в предположении, что масса Юпитера много меньше массы Солнца.

ГЛАВА VI

НЕИНТЕГРИРУЕМОСТЬ В ОКРЕСТНОСТИ ПОЛОЖЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ

Еще один метод доказательства неинтегрируемости гамильтоновых систем основан на оценках снизу коэффициентов степенных рядов для формальных интегралов, существующих по теореме Биркгофа (см. § 11 гл. II). Причиной расходимости здесь снова оказываются аномально малые знаменатели — почти резонансные соотношения между частотами малых колебаний в окрестности положений равновесия.

§ 1. Метод Зигеля

1. Рассмотрим каноническую систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{1.1}$$

и предположим, что H — аналитическая функция в окрестности точки $x = y = 0$, причем $H(0) = 0$ и $dH(0) = 0$. Пусть $H = \sum\limits_{s \geqslant 2} H_s$, где H_s — однородный полином от x и y степени s.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n}$ — собственные значения линеаризованной канонической системы с гамильтонианом H_2. Можно считать, что $\lambda_{n+k} = -\lambda_k$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Рассмотрим случай, когда числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ чисто мнимы и независимы над полем рациональных чисел, т. е. сумма $m_1\lambda_1 + \ldots + m_n\lambda_n$ с целыми m_i равна нулю только если все m_i — нули. При этом предположении Биркгоф нашел формальное каноническое преобразование, приводящее систему (1.1) к нормальной форме. В частности, уравнения Гамильтона (1.1) имеют n интегралов в виде формальных степенных рядов по x, y, попарно находящихся в инволюции (см. § 11 гл. II).

В этом параграфе мы исследуем полную интегрируемость уравнений (1.1) в окрестности положения равновесия $x = y = 0$ и сходимость нормализующего преобразования Биркгофа. Рассмотрим множество **H** всех степенных рядов

$$H = \sum h_{ks} x^k y^s, \quad k = (k_1, \ldots, k_n), \quad s = (s_1, \ldots, s_n),$$

сходящихся в некоторой окрестности точки $x = y = 0$. Введем в **H** следующую топологию $\mathcal{T}$: окрестностью степенного ряда H^* с коэффициентами h^*_{ks} назовем множество рядов с коэффициентами h_{ks}, удовлетворяющими неравенствам $|h_{ks} - h^*_{ks}| < \varepsilon_{ks}$, где ε_{ks} — произвольная последовательность положительных чисел.

Теорема 1 (К. Зигель [59]). *В любой окрестности любой точки $H^* \in$ **H** найдется такой гамильтониан H, что соответствующая каноническая система* (1.1) *не имеет независимого от H интеграла, аналитического в окрестности равновесия $x = y = 0$.*

Это утверждение доказывается в п. 2. Таким образом, неинтегрируемые системы всюду плотны в **H**. В частности, всюду плотны гамильтоновы системы, для которых расходится преобразование Биркгофа. Относительно расходимости преобразования Биркгофа справедлива более сильная

Теорема 2 (К. Зигель [60]). *Функции Гамильтона H со сходящимся преобразованием Биркгофа образуют* в **H** *подмножество первой категории Бэра*)* в *топологии $\mathcal{T}$.*

Более точно, Зигель доказал существование бесконечного счетного множества аналитически независимых степенных рядов $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$ от бесконечного числа переменных h_{ks}, абсолютно сходящихся при $|h_{ks}| < \varepsilon$ (для всех k, s) и таких, что если точка $H \in$ **H** сходящимся преобразованием Биркгофа приводится к нормальной форме, то в этой точке почти все Φ_r (кроме, может быть, конечного числа) обращаются в нуль. Функции Φ_r аналитичны, поэтому решения нигде не плотны в **H**. Следовательно, множество точек из **H**, удовлетворяющих хотя бы одному уравнению $\Phi_r = 0$, имеет первую категорию в смысле Бэра. Если пытаться исследовать сходимость преобразования Биркгофа в какой-либо конкретной гамильтоновой системе, придется проверить выполнение бесконечного числа условий. Для этого не известно никакого конечного метода, хотя все коэффициенты рядов Φ_r можно явно вычислить.

---

*) Напомним, что подмножество топологического пространства является множеством первой категории Бэра, если оно представимо в виде конечной или счетной суммы нигде не плотных множеств. В свою очередь, нигде не плотное множество характеризуется тем свойством, что в каждой окрестности любой точки топологического пространства найдется открытая непустая область, не содержащая точек из этого множества.

В частности, все еще неизвестно, сходятся ли преобразования Биркгофа в ограниченной задаче трех тел при фиксированном отношении масс в окрестности лагранжевых равновесных решений. По поводу этой задачи К. Зигель заметил, что она, "по-видимому, лежит вне возможностей известных методов анализа" [60].

2. Согласно результатам § 11 гл. II, в некоторых канонических координатах x, y гамильтониан H приобретает вид

$$H = \frac{1}{2}\sum \omega_j(x_j^2 + y_j^2) + \ldots$$

Собственными числами являются $\pm i\omega_1, \ldots, \pm i\omega_n$. Выполним линейное каноническое преобразование $x, y \to u, v$ с комплексными коэффициентами: $y = (iu + v)/\sqrt{2}$, $x = (u + iv)/\sqrt{2}$. В новых координатах $H = i\sum \omega_j u_j v_j + \ldots$ Мы докажем теорему 1 в наиболее простом случае двух степеней свободы. Кроме того, пусть $\omega_1 = 1$, а $\omega_2 = \omega$ — иррациональное число.

Итак, рассмотрим канонические уравнения с функциями Гамильтона следующего вида:

$$H = i(u_1v_1 + \omega u_2v_2) + \sum_{p_1+p_2+q_1+q_2\geqslant 3} h_{p_1p_2q_1q_2} u_1^{p_1} u_2^{p_2} v_1^{q_1} v_2^{q_2}. \qquad (1.2)$$

Коэффициенты h_{pq} могут быть комплексными числами.

Так как ω иррационально, то по теореме Биркгофа уравнения Гамильтона с гамильтонианом (1.2) допускают два формальных интеграла $S_l = u_lv_l + \ldots$ $(l = 1, 2)$. Квадратичные члены этих разложений не определяют однозначно интегралы S_1 и S_2. Причина неоднозначности — наличие слагаемых специального вида

$$c(u_1v_1)^{\alpha_1}(u_2v_2)^{\alpha_2}, \quad \alpha_1 + \alpha_2 = g \geqslant 2. \qquad (1.3)$$

Число g будем называть степенью одночлена (1.3).

Л е м м а 1. *Для гамильтоновых систем с гамильтонианом вида* (1.2) *существует интеграл* $s = u_1v_1 + \ldots$ *без членов вида* (1.3), *причем каждый интеграл такой системы есть ряд по* H *и* s.

Действительно, предположим, что интеграл S_l содержит член специального вида (1.3), и что степень g этого члена — наименьшая из возможных. Тогда интеграл $S_l - cS_1^{\alpha_1}S_2^{\alpha_2}$ не будет содержать членов вида (1.3) степени $\leqslant g$. Применяя последовательно эту операцию, не затрагивающую квадратичных слагаемых, построим два формальных интеграла $s_l = u_lv_l + \ldots$ $(l = 1, 2)$, не содержащих ни одного слагаемого специального вида. Далее, любой интеграл гамильтоновой системы с гамильтонианом (1.2) есть ряд по степеням s_1 и s_2 (см. § 11 гл. II). В частности, это относится к интегралу H. Ввиду (1.2), разложение H по степеням s_1, s_2

имеет вид $H = is_1 + i\omega s_2 + \ldots$ Следовательно, можно представить s_2 в виде ряда по степеням H и $s = s_1$. Лемма доказана.

Пусть F — ряд по степеням u, v, и пусть F_l $(l = 0, 1, \ldots)$ — сумма его членов порядка l. Через $\|F_l\|$ обозначим максимум абсолютных значений коэффициентов однородного многочлена F_l. Следующее утверждение носит технический характер.

Лемма 2. *Пусть ξ, η — комплексные числа, G — однородный полином степени r по переменным u_1, u_2, v_1, v_2. Тогда*

$$(|\xi| + |\eta|)\,\|G\| \leqslant (2r+2)\,\|(\xi u_1 v_1 + \eta u_2 v_2)G\|. \qquad (1.4)$$

Доказательство. Имеем $G = \sum\limits_{l=0}^{r} G_l$, где G_l — однородная часть G степени l относительно u_1, u_2. Так как $\|G\|$ есть максимум значений $\|G_l\|$ $(l = 0, \ldots, r)$ и $\|(\xi u_1 v_1 + \eta u_2 v_2)G\|$ — максимум значений $\|(\xi u_1 v_1 + \eta u_2 v_2)G_l\|$, то неравенство (1.4) выполнено, если оно верно для G_l вместо G при $l = 0, \ldots, r$. Следовательно, можно положить $G = \sum\limits_{k=0}^{l} \varphi_k u_1^k u_2^{l-k}$, где φ_k — однородные полиномы от v_1, v_2 степени $r - l$. Если $|\xi| > |\eta|$, то можно поменять местами ξ, u_1, v_1 и η, u_2, v_2; поэтому ограничимся случаем $|\xi| \leqslant |\eta|$.

Полагая $\varphi_{-1} = 0$, $\varphi_{l+1} = 0$, $\Phi_k = \xi v_1 \varphi_{k-1} + \eta v_2 \varphi_k$ $(k = 0, \ldots, l+1)$, получаем

$$(\xi u_1 v_1 + \eta u_2 v_2)G = \sum_{k=0}^{l+1} \Phi_k u_1^k u_2^{l+1-k},$$

$$(\eta v_2)^{k+1}\varphi_k = \sum_{p=0}^{k} (-\xi v_1)^{k-p}(\eta v_2)^p \Phi_p\,, \qquad k = 0, \ldots, l.$$

Так как мы рассматриваем случай $|\xi| \leqslant |\eta|$, то $|\eta|\,\|\varphi_k\| \leqslant \sum\limits_{p=0}^{k} \|\Phi_p\|$. Теперь $\|G\|$ есть максимум чисел $\|\varphi_k\|$ $(0 \leqslant k \leqslant l)$, и $\|(\xi u_1 v_1 + \eta u_2 v_2)G\|$ — максимум чисел $\|\Phi_k\|$ $(0 \leqslant k \leqslant l+1)$, поэтому имеет место неравенство $|\eta|\,\|G\| \leqslant (l+1)\,\|(\xi u_1 v_1 + \eta u_2 v_2)G\|$. Учитывая дополнительно $|\xi| + |\eta| \leqslant 2|\eta|$ и $l + 1 \leqslant r + 1$, получаем оценку (1.4). Лемма 2 доказана.

Следующее утверждение — ключевое в методе К. Зигеля:

Лемма 3. *Пусть $s_2 = u_1 v_1$, и $s = \sum\limits_{k=2}^{\infty} s_k$ — формальный интеграл из леммы 1. Если уравнения Гамильтона обладают схо-*

дящимся интегралом, независимым от H, то последовательность $\ln \|s_k\|/(k \ln k)$ $(k = 2, 3, \ldots)$ ограничена.

Доказательство. Согласно лемме 1, каждый интеграл $P(u, v)$ гамильтоновой системы можно записать в виде степенного ряда $P = \sum\limits_{\alpha,\beta=0}^{\infty} c_{\alpha\beta} s^{\alpha} H^{\beta}$. Если P и H независимы, то найдется хотя бы один коэффициент $c_{\alpha\beta} \neq 0$ $(\alpha > 0)$ с наименьшим возможным значением $\alpha + \beta = g$. Пусть P — сходящийся интеграл. Тогда то же самое имеет место для выражения $p(u, v) = P - \sum\limits_{\beta=0}^{g-1} c_{0\beta} H^{\beta}$. Разложим этот интеграл в ряд по однородным формам: $p = \sum\limits_{k=2g}^{\infty} p_k$, где $p_{2g} = \sum\limits_{\alpha+\beta=g} c_{\alpha\beta} s_2^{\alpha} H_2^{\beta}$, $H_2 = \lambda_1 u_1 v_1 + \lambda_2 u_2 v_2$; по условию $s_2 = u_1 v_1$. Для симметрии использованы обозначения $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = i\omega$.

Полином

$$\Delta = \frac{\partial P_{2g}}{\partial s_2} = \sum_{\alpha+\beta=g} \alpha c_{\alpha\beta} s_2^{\alpha-1} H^{\beta} \tag{1.5}$$

не равен тождественно нулю. Так как он однороден по $u_1 v_1$ и $u_2 v_2$, его можно записать в виде

$$\Delta = c \prod_{q=1}^{g-1} (\xi_q u_1 v_1 + \eta_q u_2 v_2), \tag{1.6}$$

где $c \neq 0$ и постоянные ξ_q, η_q не равны обе нулю (при каждом q, $q = 1, \ldots, g-1$).

Обозначим через x, y, z какие-нибудь три из переменных u_1, u_2, v_1, v_2. Поскольку p есть ряд по степеням s и H, то $\left| \dfrac{\partial(H, p, s)}{\partial(x, y, z)} \right| \equiv 0$. Вычисляя члены степени $q - 3$, получаем

$$\sum_{\alpha+\beta+\gamma=q} \frac{\partial(H_{\alpha}, p_{\beta}, s_{\gamma})}{\partial(x, y, z)} = 0, \quad q \geqslant 2g + 4.$$

Применим это соотношение к $(x, y, z) = (u_1, u_2, v_1)$ и $(x, y, z) = (u_1, u_2, v_2)$. Обозначая выражения

$$\sum_{\alpha+\beta=l} \frac{\partial(H_{\alpha}, p_{\beta})}{\partial(y, z)}, \quad \sum_{\alpha+\beta=l} \frac{\partial(H_{\alpha}, p_{\beta})}{\partial(z, x)}, \quad \sum_{\alpha+\beta=l} \frac{\partial(H_{\alpha}, p_{\beta})}{\partial(x, y)}, \quad l \geqslant 2g + 2,$$

через A_{1l}, A_{2l}, A_{3l} и B_{1l}, B_{2l}, B_{3l} соответственно, получаем

$$\sum_{l+\gamma=q}\left(A_{1l}\frac{\partial s_\gamma}{\partial u_1}+A_{2l}\frac{\partial s_\gamma}{\partial u_2}+A_{3l}\frac{\partial s_\gamma}{\partial v_1}\right)=0, \tag{1.7}$$

$$\sum_{l+\gamma=q}\left(B_{1l}\frac{\partial s_\gamma}{\partial u_1}+B_{2l}\frac{\partial s_\gamma}{\partial u_2}+B_{3l}\frac{\partial s_\gamma}{\partial v_2}\right)=0. \tag{1.8}$$

В дальнейшем $\mu_1,\ldots,\mu_4$ — некоторые подходящие положительные постоянные, не зависящие от встречающегося в формулах индекса k. Поскольку степенные ряды H и p сходятся, то $\|H_k\|<\mu_1^k$, $\|p_k\|<\mu_1^k$, $k\geqslant 2g$, и, следовательно, $\|\partial H_k/\partial x\|<k\mu_1^k$, $\|\partial p_k/\partial x\|<k\mu_1^k$. Многочлен $\partial H_k/\partial x$ содержит C^3_{k+2} членов, поэтому

$$\left\|\frac{\partial(H_\alpha,p_\beta)}{\partial(x,y)}\right\|<2\alpha\beta C^3_{\alpha+2}\mu_1^{\alpha+\beta}.$$

Пусть ψ_k обозначает один из шести полиномов $A_{1k},\ldots,B_{3k}$. Тогда $\|\psi_k\|<\mu_2^k$, $k\geqslant 2g+2$, откуда, в свою очередь, получаем оценку

$$\left\|\psi_l\frac{\partial s_\gamma}{\partial x}\right\|\leqslant\gamma C^3_{\gamma+2}\mu_2^l\|s_\gamma\|. \tag{1.9}$$

Согласно (1.5), справедливо тождество

$$\frac{\partial(H_2,p_{2g})}{\partial(x,y)}=\Delta\frac{\partial(H_2,s_2)}{\partial(x,y)}.$$

Поэтому при $l=2g+2$ для A_{1l}, A_{2l}, A_{3l}, B_{1l}, B_{2l}, B_{3l} получаем значения $\lambda_2u_1v_2\Delta, 0, -\lambda_2v_1v_2\Delta, 0, \lambda_2v_1u_2\Delta, -\lambda_2v_1v_2\Delta$. Из (1.7)–(1.9) вытекает неравенство

$$\left\|\lambda_2v_2\Delta\left(u_1\frac{\partial s_k}{\partial u_1}-v_1\frac{\partial s_k}{\partial v_1}\right)\right\|+\left\|\lambda_2v_1\Delta\left(u_2\frac{\partial s_k}{\partial u_2}-v_2\frac{\partial s_k}{\partial v_2}\right)\right\|<$$
$$<\sum_{\gamma=2}^{k-1}(\gamma+3)^4\|s_\gamma\|\mu_2^{k+2g+2-\gamma}.$$

Учитывая (1.6) и используя лемму 2, получаем

$$\left\|u_1\frac{\partial s_k}{\partial u_1}-v_1\frac{\partial s_k}{\partial v_1}\right\|+\left\|u_2\frac{\partial s_k}{\partial u_2}-v_2\frac{\partial s_k}{\partial v_2}\right\|<$$
$$<k^{g+3}\sum_{\gamma=2}^{k-1}\|s_\gamma\|\mu_3^{k-\gamma},\quad k\geqslant 3. \tag{1.10}$$

Воспользуемся теперь условием отсутствия членов специального вида у интеграла s. Если $w = au_1^{\alpha_1}v_1^{\beta_1}u_2^{\alpha_2}v_2^{\beta_2}$ — какой-нибудь член s_k, то $|\alpha_1 - \beta_1| + |\alpha_2 - \beta_2| \geqslant 1$,

$$u_1\frac{\partial w}{\partial u_1} - v_1\frac{\partial w}{\partial v_1} = (\alpha_1 - \beta_1)w, \quad u_2\frac{\partial w}{\partial u_2} - v_2\frac{\partial w}{\partial v_2} = (\alpha_2 - \beta_2)w.$$

Но тогда из (1.10) вытекает неравенство

$$\|s_k\| < k^{g+3}\sum_{\gamma=2}^{k-1}\|s_\gamma\|\,\mu_3^{k-\gamma}\,, \quad k \geqslant 3\,. \tag{1.11}$$

Докажем теперь справедливость оценки

$$\|s_l\| \leqslant (2l^{g+3}\mu_3)^{l-2}. \tag{1.12}$$

Для этого воспользуемся индукцией по l. Очевидно, что при $l = 2$ неравенство (1.12) справедливо. Если оно доказано для значений $l = 2, 3, \ldots, k-1$, то из (1.11) вытекает неравенство

$$\|s_k\| < k^{g+3}\sum_{\gamma=2}^{k-1}(2\gamma^{g+3}\mu_3)^{\gamma-2}\mu_3^{k-\gamma} \leqslant (k^{g+3}\mu_3)^{k-2}\sum_{\gamma=2}^{k-1}2^{\gamma-2} < (2k^{g+3}\mu_3)^{k-2}.$$

Таким образом, (1.12) выполняется и при $l = k$.

Следовательно, $\|s_k\| < k^{\mu_4 k}$, $(\ln\|s_k\|)/(k\ln k) < \mu_4$.

Лемма 3 доказана полностью.

Пусть $\varepsilon_{pq} < 1$ — произвольные положительные числа, а иррациональное число ω из (1.2) достаточно хорошо приближается рациональными числами, т. е. неравенство

$$0 < |a - \omega b| < \varepsilon_{pq}/b^{b^2}, \quad p = (a, 0), \quad q = (0, b)\,, \tag{1.13}$$

имеет бесконечно много решений в целых числах a, b ($b > 0$). Из теории диофантовых приближений известно, что мера множества таких чисел ω равна нулю, однако они всюду плотны в $\mathbb{R}$ (см., например, [70]).

Согласно лемме 1, при иррациональном ω уравнения Гамильтона с гамильтонианом (1.2) имеют формальный интеграл $s(u, v) = u_1v_1 + \sum\limits_{p_1+p_2+q_1+q_2\geqslant 3} s_{p_1p_2q_1q_2}u_1^{p_1}u_2^{p_2}v_1^{q_1}v_2^{q_2}$, не содержащий членов специального вида (для которых $p_1 = q_1$ и $p_2 = q_2$).

Лемма 4. *В ε_{pq}-окрестности каждой функции* (1.2) *найдется такая точка $H \in \mathbf{H}$, что при целых a, b из неравенства* (1.13) *коэффициенты s_{a00b} допускают оценку*

$$|s_{a00b}| \geqslant b^{b^2}. \tag{1.14}$$

Следствие. *Множество точек $H \in \mathbf{H}$, для которых преобразование Биркгофа расходится, всюду плотно.*

Доказательство леммы 4. Пусть $s = u_1 v_1 + \sum s_l$, где s_l — однородный полином степени $l \geqslant 3$. Ряд s формально удовлетворяет уравнению

$$\sum_{k=1}^{2} \left(\frac{\partial s}{\partial u_k} \frac{\partial H}{\partial v_k} - \frac{\partial s}{\partial v_k} \frac{\partial H}{\partial u_k} \right) \equiv 0.$$

Приравнивая нулю члены порядка l, придем к уравнению для s_l:

$$u_1 \frac{\partial s_l}{\partial u_1} - v_1 \frac{\partial s_l}{\partial v_1} + \omega \left(u_2 \frac{\partial s_l}{\partial u_2} - v_2 \frac{\partial s_l}{\partial v_2} \right) + i \sum_{p+q=l} (p_1 - q_2) h_{pq} u^p v^q = \ldots,$$

где правая часть — некоторый многочлен g степени l, коэффициенты которого выражаются только через коэффициенты многочленов $s_2, \ldots, s_{l-1}$ и через h_{pq} при $p+q < l$. Для слагаемых $s_{a00b} u_1^a v_2^b$ в функции s_l получим уравнение

$$s_{a00b}(a - \omega b) + i a h_{a00b} = g_{a00b}. \tag{1.15}$$

В итоге g_{a00b} выражаются через коэффициенты h_{pq} при $p + q < l$. Пусть теперь a и b — натуральные числа, удовлетворяющие (1.13). Коэффициент h_{a00b} можно изменить не более чем на ε_{a00b} так, чтобы выполнялось неравенство $|i a h_{a00b} - g_{a00b}| \geqslant \varepsilon_{a00b}$. Тогда, в силу соотношений (1.13) и (1.15), будем иметь нужную нам оценку (1.14), что и требовалось доказать.

Важно подчеркнуть, что при построении "возмущенной" функции Гамильтона мы варьировали только коэффициенты вида h_{a00b}.

Согласно (1.14), $\ln \|s_k\| \geqslant b^2 \ln b$ при $k = a + b$. Из неравенства (1.13) при $\varepsilon < 1$ имеем оценку $a \leqslant \omega b + 1$. Поэтому в неравенстве

$$\frac{\ln \|s_{a+b}\|}{(a+b)\ln(a+b)} \geqslant \frac{b^2 \ln b}{[(\omega+1)b+1]\ln[(\omega+1)b+1]}$$

левая часть не ограничена при $b \to \infty$. В силу леммы 3 уравнения Гамильтона с возмущенным гамильтонианом не допускают дополнительного интеграла в виде сходящегося степенного ряда.

Теорема 1 полностью доказана.

3. Введем на множестве степенных рядов $\mathbf{H}$ новую топологию $\mathcal{T}'$, рассматривая в качестве окрестностей рядов с коэффициентами h_{ks}^* все сходящиеся степенные ряды с коэффициентами h_{ks}, удовлетворяющими неравенствам $|h_{ks} - h_{ks}^*| < \varepsilon$ при $|k| + |s| \leqslant N$ для некоторых $\varepsilon > 0$ и $N \geqslant 3$. Можно показать, что в топологии $\mathcal{T}'$ множество гамильтонианов со сходящимися преобразованиями Биркгофа всюду плотно в $\mathbf{H}$: если в формальных степенных рядах, задающих преобразование Биркгофа, отбросить члены степени выше N, а затем изменить коэффициенты ряда данного гамильтониана при старших членах, то получится сходящееся каноническое преобразование, приводящее модифицированный таким способом гамильтониан к нормальной форме. Отметим, что топология $\mathcal{T}'$, конечно же, много слабее топологии $\mathcal{T}$.

До сих пор неизвестно, имеются ли в топологическом пространстве $(\mathbf{H}, \mathcal{T})$ такие точки, что некоторые их окрестности состоят только из гамильтонианов с расходящимися преобразованиями Биркгофа. Отметим еще одну нерешенную задачу: верно ли, что гамильтоновы системы, допускающие дополнительный аналитический интеграл, образуют в $\mathbf{H}$ подмножество первой категории Бэра в топологии $\mathcal{T}$? По-видимому, это утверждение истинно.

4. В работе Мозера [218] изучена родственная задача о неинтегрируемости гамильтоновых систем с одной степенью свободы и периодическим гамильтонианом в окрестности положения равновесия эллиптического типа. Точнее, рассматривается система уравнений Гамильтона

$$\dot{x} = H'_y, \quad \dot{y} = -H'_x;$$
$$H(x,y,t) = -\frac{\alpha}{2}(x^2+y^2) + \sum_{k+l\geqslant 3} H_{kl}(t)x^k y^l \tag{1.16}$$

($x(t), y(t)$ — функции со значениями в $\mathbb{R}$). Предполагается, что степенной ряд с 2π-периодическими коэффициентами H_{kl} сходится в некоторой окрестности начала координат при всех значениях t. Точка $x = y = 0$ — положение равновесия; это равновесное решение можно трактовать как 2π-периодическое решение уравнений (1.16). Предполагается, что $\alpha \in \mathbb{R}$ отлично от нуля. Тогда $x = y = 0$ — периодическое решение эллиптического типа.

Мозер рассматривает задачу о наличии у гамильтоновой системы (1.16) интеграла

$$G(x,y,t) = x^2 + y^2 + F(x,y,t) \tag{1.17}$$

со следующими свойствами:

1) $F(x,y,t+2\pi) = F(x,y,t)$;

2) функция F определена при малых значениях $|x| + |y|$ и имеет непрерывные производные по x, y;

3) $\lim\limits_{r\to 0}(xF'_x + yF'_y)/r^2 = 0$, $r^2 = x^2 + y^2$.

Ясно, что для аналитической в окрестности нуля функции F свойства 2) и 3) заведомо выполнены.

Теорема 3 [218]. *Для каждого набора положительных* *чисел* ε_2, ε_{kl} $(k,l \geqslant 0,\ k+l \geqslant 3)$ *найдется функция Гамильтона*

$$H^*(x,y,t) = -\frac{\alpha^*}{2}(x^2+y^2) + \sum_{k+l\geqslant 3} H^*_{kl}(t)x^k y^l,$$
$$|\alpha-\alpha^*| < \varepsilon_2, \quad |H_{kl}(t) - H^*_{kl}(t)| < \varepsilon_{kl},$$

для которой система

$$\dot{x} = (H^*)'_y, \quad \dot{y} \doteq -(H^*)'_x \tag{1.18}$$

не имеет интеграла вида (1.17) *со свойствами* 1)–3).

Оказывается, подходящим образом возмущенная система уравнений Гамильтона (1.18) в любой проколотой окрестности точки $x = y = 0$ имеет изолированное периодическое решение; это свойство несовместимо с наличием интеграла вида (1.17).

Ряд Маклорена интеграла (1.17) начинается с невырожденной квадратичной формы. Конечно, уравнения Гамильтона могут допускать "вырожденный" интеграл. По-видимому, теорема 3 справедлива и в том случае, когда вместо непрерывно дифференцируемых интегралов вида (1.17) рассматриваются 2π-периодические по t интегралы, представимые в окрестности точки $x = y = 0$ сходящимися степенными рядами. Этот результат, вероятно, можно доказать методом работы [59]. Необходимо проверить, что изолированные периодические точки отображения за период возмущенной системы (1.18) составляют ключевое множество для класса функций, аналитических в окрестности начала координат.

§ 2. Неинтегрируемость обратимых систем

1. Как уже отмечалось, метод Зигеля не дает возможности доказать неинтегрируемость конкретных гамильтоновых систем. Однако с его помощью можно установить всюду плотность неинтегрируемых систем в некоторых подпространствах $\mathbf{H}$.

В качестве примера рассмотрим обратимое уравнение

$$\ddot{x} = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1}$$

которое описывает движение материальной точки в силовом поле с потенциальной энергией $V(x)$. Уравнение (2.1), разумеется, можно записать в гамильтоновой форме:

$$\dot{x} = H'_y, \quad \dot{y} = -H'_x; \quad H = y^2/2 + V(x). \tag{2.2}$$

Пусть $dV(0) = 0$, $V(0) = 0$. Тогда точка $x = 0$ будет положением равновесия. Положим $V = \sum V_k$ и предположим, что квадратичная форма V_2 положительно определена. Поэтому, в частности, равновесие $x = 0$ устойчиво. С помощью подходящего ортогонального преобразования, не меняющего вида уравнения (2.1), V_2 можно свести к квадратичной форме $\sum \omega_k^2 x_k^2/2$. Числа $\omega_1, \ldots, \omega_n$ будут частотами малых колебаний вблизи устойчивого равновесия $x = 0$.

Пусть $\mathbf{V}$ — пространство степенных рядов

$$\sum_{|k|\geqslant 2} v_k x^k, \quad k = (k_1, \ldots, k_n),$$

сходящихся в некоторой окрестности точки $x = 0$. Снабдим $\mathbf{V}$ топологией $\mathcal{T}$, указанной в § 1 для пространства $\mathbf{H}$.

Теорема 1 [88]. *В пространстве $\mathbf{V}$ с топологией $\mathcal{T}$ всюду плотны точки, для которых уравнения (2.1) не имеют интеграла $F(\dot{x}, x)$, аналитического в окрестности точки $\dot{x} = x = 0$ и независимого от интеграла энергии $\dot{x}^2/2 + V(x)$.*

По-видимому, точки $V \in \mathbf{V}$, для которых преобразование Биркгофа к нормальной форме сходится, образуют в $\mathbf{V}$ подмножество первой категории.

2. Докажем теорему 1 методом Зигеля (см. п. 2 § 1). Ограничимся для простоты случаем двух степеней свободы и, кроме того, положим $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = \omega$. Разложим гамильтониан (2.2) в ряд по однородным формам:

$$H = H_2 + H_3 + \ldots, \quad H_2 = (y_1^2 + x_1^2)/2 + (y_2^2 + \omega^2 x_2^2)/2.$$

Сделаем линейную каноническую замену переменных $x, y \to \xi, \eta$ с комплексными коэффициентами:

$$y_1 = \frac{\xi_1 + i\eta_1}{\sqrt{2}}, \quad x_1 = \frac{i\xi_1 + \eta_1}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \sqrt{\omega}\frac{\xi_2 + i\eta_2}{\sqrt{2}}, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{\omega}}\frac{i\xi_2 + \eta_2}{\sqrt{2}}.$$

В новых переменных гамильтониан имеет вид (1.2):

$$H = i(\xi_1\eta_1 + \omega\xi_2\eta_2) + \sum v_{k_1 k_2} \left(\frac{1}{\omega}\right)^{k_2/2} \left(\frac{i\xi_1 + \eta_1}{\sqrt{2}}\right)^{k_1} \left(\frac{i\xi_2 + \eta_2}{\sqrt{2}}\right)^{k_2}.$$

Коэффициенты h_{pq} при слагаемых $\xi^p \eta^q$ линейно выражаются через v_k, причем

$$h_{a00b} = \frac{i^a v_{ab}}{(\sqrt{\omega})^b (\sqrt{2})^{a+b}} \tag{2.3}$$

В п. 2 § 1 показано, что сколь угодно малым изменением только коэффициентов вида h_{a00b} можно получить гамильтониан неинтегрируемой системы. Согласно (2.3), варьируя коэффициенты v_{ab} в разложении потенциальной энергии V, мы, следовательно, будем варьировать h_{a00b}. Теорема доказана.

§ 3. Неинтегрируемость систем, зависящих от параметра

1. Пусть $x = y = 0$ — положние равновесия аналитической гамильтоновой системы с функцией Гамильтона

$$H(x, y, \varepsilon) = H_2 + H_3 + \ldots, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

Здесь ε — параметр, принимающий значения из некоторой связной области $D \subset \mathbb{R}^r$; функция Гамильтона аналитична по ε. Предположим, что при всех $\varepsilon \in D$ частоты линейных колебаний $\omega(\varepsilon) = (\omega_1(\varepsilon), \ldots, \omega_n(\varepsilon))$ не удовлетворяют ни одному из соотношений $(m, \omega) = m_1\omega_1 + \ldots + m_n\omega_n = 0$ порядка $|m_1| + \ldots + |m_n| \leqslant m - 1$. Применяя метод Биркгофа (см. § 11 гл. II), в окрестности положения равновесия можно найти каноническое преобразование $x, y \to p, q$, аналитическое по ε и такое, что в новых координатах

$$H_2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \omega_i \rho_i, \qquad H_k(\rho_1, \ldots, \rho_n, \varepsilon), \qquad k \leqslant m - 1,$$

где $\rho_i = p_i^2 + q_i^2$.

Теперь перейдем к каноническим переменным действие — угол I, φ по формулам $I_i = \rho_i/2$, $\varphi_i = \operatorname{arctg} p_i/q_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$. В переменных I, φ гамильтониан имеет вид

$$H = H_2(I, \varepsilon) + \ldots + H_{m-1}(I, \varepsilon) + H_m(I, \varphi, \varepsilon) + \ldots.$$

Представим тригонометрический полином H_m в виде конечного ряда Фурье: $H_m = \sum h_k^{(m)}(I, \varepsilon) e^{i(k, \varphi)}$.

Теорема 1 [77]. *Предположим, что $(k, \omega(\varepsilon)) \not\equiv 0$ при всех $k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$. Пусть при некотором $\varepsilon_0 \in D$ выполнено резонансное соотношение $(k_0, \omega(\varepsilon_0)) = 0$; $|k_0| = m$ и $h_{k_0}^{(m)} \not\equiv 0$. Тогда канонические уравнения с гамильтонианом $H = \sum H_s$ не имеют полного набора (формальных) интегралов $F_j = \sum F_s^{(j)}$, квадратичные части которых $F_2^{(j)}(x, y, \varepsilon)$ независимы при всех $\varepsilon \in D$.*

Заметим, что при выполнении условий теоремы могут существовать независимые интегралы с зависимыми (при некоторых значениях ε) квадратичными частями их разложений Маклорена. Вот простой пример: канонические уравнения с гамильтонианом

$$H = (x_1^2 + y_1^2)/2 + \varepsilon(x_2^2 + y_2^2)/2 + 2x_1y_1y_2 - x_2y_1^2 + x_1^2x_2$$

имеют интеграл $F = x_1^2 + y_1^2 + 2(x_2^2 + y_2^2)$, зависимый при $\varepsilon = 2$ с квадратичной формой H_2, однако все условия теоремы выполнены.

2. Теорема 1 доказывается при помощи метода Пуанкаре. Сперва докажем простое вспомогательное утверждение.

Л е м м а. *Пусть функция* $\Phi(I,\varphi,\varepsilon)$ *аналитична по* I, φ, ε *и* 2π*-периодична по* φ. *Если* $\{H_2,\Phi\}\equiv 0$, то Φ *не зависит от* φ.

Действительно, пусть $\Phi=\sum\Phi_k(I,\varepsilon)e^{i(k,\varphi)}$. Поскольку $\{H_2,\Phi\}=$ $=\sum i(k,\omega(\varepsilon))\Phi_k(I,\varepsilon)e^{i(k,\varphi)}\equiv 0$, и $(k,\omega(\varepsilon))\neq 0$ при $k\neq 0$, то $\Phi_k(I,\varepsilon)\neq 0$ только при $k=0$, что и требовалось доказать.

Пусть $F(x,y,\varepsilon)=\sum F_s(I,\varphi,\varepsilon)$ — формальный аналитический интеграл канонических уравнений с гамильтонианом H. Из условия $\{H,F\}\equiv 0$ получим серию уравнений

$$\{H_2,F_2\}=0,\quad \{H_2,F_3\}+\{H_3,F_2\}=0,\quad \ldots,$$
$$\{H_2,F_m\}+\ldots+\{H_m,F_2\}=0,\ldots$$

Покажем, что функции $F_2,\ldots,F_{m-1}$ не зависят от φ. Для функции F_2 это уже доказано в лемме. Так как H_3 не зависит от φ, то $\{H_3,F_2\}=0$, поэтому $\{H_2,F_3\}=0$. Согласно лемме, F_3 тоже не зависит от φ, и т. д. С учетом этого замечания уравнение для F_m можно записать в виде $\{H_2,F_m\}+\{H_m,F_2\}=0$. Если $F_m=$ $=\sum f_k^{(m)}(I,\varphi)e^{i(k,\varphi)}$, то

$$(\omega(\varepsilon),k)\,f_k^{(m)}=\left(\frac{\partial F_2}{\partial I},k\right)h_k^{(m)},\qquad k\in\mathbb{Z}^n.$$

Положим $k=k_0$, $\varepsilon=\varepsilon_0$. Тогда $(\omega,k)=0$, а $h_k^{(m)}\neq 0$. Следовательно, $\left(\left.\dfrac{\partial F_2}{\partial I}\right|_{\varepsilon_0},k_0\right)=0$.

Если наши уравнения имеют n интегралов $F_1,\ldots,F_n$, то при $\varepsilon=\varepsilon_0$ получим n линейных уравнений

$$\left(\frac{\partial F_2^{(1)}}{\partial I},k_0\right)=\ldots=\left(\frac{\partial F_2^{(n)}}{\partial I},k_0\right)=0.$$

Так как $k_0\neq 0$, то квадратичные формы $F_2^{(1)},\ldots,F_2^{(n)}$ зависимы при $\varepsilon=\varepsilon_0$. Теорема 1 доказана.

Хотя доказательство теоремы несложно, ее применение в конкретных задачах наталкивается на довольно громоздкие вычисления, связанные с нормализацией гамильтонианов.

3. В качестве первого примера рассмотрим задачу о вращении вокруг неподвижной точки динамически симметричного ($I_1=I_2$) твердого тела, центр тяжести которого лежит в экваториальной плоскости эллипсоида инерции. Среди таких случаев находится наибольшее число интегрируемых. Единицы измерения массы и длины можно выбрать так, чтобы моменты инерции I_1, I_2 и параметр ε — произведение веса тела на расстояние от центра масс до точки закрепления — стали равны 1. Единственным параметром в этой задаче будет момент инерции I_3.

На всех интегральных многообразиях $\{(I\omega,\gamma) = c,\ (\gamma,\gamma) = 1\}$ приведенная гамильтонова система имеет два положения равновесия; они соответствуют равномерным вращениям тела вокруг вертикальной оси, при которых центр тяжести постоянно находится под (над) точкой подвеса.

Угловая скорость ω такого вращения связана с постоянной площадей c простым соотношением $c = \pm I_3\omega$. Рассмотрим случай, когда центр масс находится под точкой подвеса.

В окрестности этого равновесия функция Гамильтона H редуцированной системы с двумя степенями свободы имеет вид $H_2 + H_4 + \ldots$ (члены третьей степени отсутствуют). Коэффициенты зависят от двух параметров: $x = c^2$, $y = I_3^{-1}$. Можно показать, что характеристические корни векового уравнения чисто мнимы, если $y > x/(x+1)$. Обозначим через Σ область $\mathbb{R}^2 = \{x, y\}$, где выполнено это неравенство. Частоты находятся в отношении $1:3$, если параметры x и y связаны равенством

$$9x^2 - 82xy + 9y^2 + 118x - 82y + 9 = 0. \tag{3.1}$$

Это — уравнение гиперболы; ее ветви при $x > 0$, $y > 0$ целиком лежат в Σ.

Из неравенства треугольника для моментов инерции ($I_1 + I_2 \geqslant I_3$) следует, что $y \geqslant 1/2$. Для любого фиксированного $y_0 \geqslant 1/2$ существует такое x_0, что точка (x_0, y_0) удовлетворяет уравнению (3.1). Условие равенства нулю коэффициента $h^{(4)}_{1,-3}$ в разложении функции H_4 можно привести к виду

$$\begin{aligned} &9x^4 - 10x^3y + x^2y^2 - \\ &\quad - 17x^3 + 58x^2y - 7xy^2 - \\ &\quad - 375x^2 - 86xy - 170y^2 + \\ &\quad + 541x + 1700y - 1530 = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

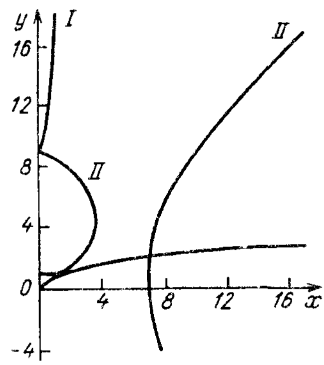

Рис. 34

Алгебраические кривые (3.1) и (3.2) пересекаются в двух точках: $(4/3, 1)$ и $(7, 2)$, которым отвечают интегрируемые случаи Лагранжа ($I_1 = I_3$) и Ковалевской ($I_1 = 2I_3$) (рис. 34).

4. Рассмотрим плоскую круговую ограниченную задачу трех тел. Уравнения движения астероида во вращающейся вместе с Солнцем и Юпитером системе координат можно представить в гамильтоновой форме:

$$\dot{x}_s = \frac{\partial H}{\partial y_s}, \quad \dot{y}_s = -\frac{\partial H}{\partial x_s}, \quad s = 1, 2,$$

$$H = \frac{1}{2}(y_1^2 + y_2^2) + x_2 y_1 - x_1 y_2 - F(x_1, x_2, \mu),$$

$$F = \frac{1-\mu}{\sqrt{(x_1+\mu)^2 + x_2^2}} + \frac{\mu}{\sqrt{(x_1+\mu-1)^2 + x_2^2}}.$$

Эта гамильтонова система имеет положения равновесия в точках $x_1 = 1/2 - \mu$, $x_2 = \pm\sqrt{3}/2$, $y_1 = y_2 = 0$, которые называются лагранжевыми решениями или треугольными точками либрации (см. гл. I). При $0 < 27\mu(1-\mu) < 1$ собственные числа линеаризованной системы чисто мнимы и различны; их отношение — отличная от константы функция параметра μ. В случаях соизмеримостей третьего и четвертого порядка коэффициенты $h_{1,2}^{(3)}$ и $h_{1,3}^{(4)}$ вычислены А. П. Маркеевым при исследовании устойчивости треугольных точек либрации [122]; эти числа отличны от нуля. По-видимому, это же верно для всех (или почти всех) резонансных соотношений. Из теоремы 1 вытекает, в частности, что в окрестности точек либрации не существует даже формального нормализующего пробразования Биркгофа, аналитического по параметру μ.

5. Д. А. Онищенко провел аналогичные вычисления в задаче Кирхгофа о движении твердого тела в жидкости. Точнее, он рассмотрел систему уравнений

$$I\dot{\omega} + \omega \times I\omega = e \times Je, \quad \dot{e} + \omega \times e = 0. \tag{3.3}$$

где $I = \mathrm{diag}(A, B, C)$, $J = \mathrm{diag}(L, M, N)$. Как было показано в § 4 гл. V, критерием интегрируемости уравнений (3.3) в несимметричном случае (когда все числа A, B, C различны) является условие Клебша. При $A = B \neq C$ условие Клебша дает $L = M$.

Итак, рассмотрим симметричный случай: $A = B$. Положим $\alpha = A/C$. Зафиксируем положительную постоянную интеграла (e, e) и будем менять значение интеграла площадей $(I\omega, e) = c$. Если уравнения (3.3) имеют дополнительный аналитический интеграл, независимый от классических, то гамильтоновы уравнения редуцированной системы допускают интеграл, независимый от интеграла энергии и аналитический по параметру c.

Редуцированная система имеет положения равновесия, в которых векторы ω и e коллинеарны. В некоторой области изменения физических параметров рассматриваемой задачи частоты линеаризованной системы чисто мнимы. В окрестности относительных равновесий гамильтониан имеет вид $H = H_2 + H_3 + \ldots$ Оказывается, если $\alpha \neq 1$ и $L \neq M$, то редуцированные уравнения движения не допускают интеграла, аналитического по c, первая нетривиальная форма которого была бы независима от квадратичной формы H_2. Ясно, что значение $\alpha = 1$ отвечает интегрируемому случаю. При $\alpha = 2$ и нулевом значении постоянной интеграла площадей c имеется частный случай интегрируемости, обнаруженный С. А. Чаплыгиным. Однако интеграл Чаплыгина не продолжается в область ненулевых значений параметра c.

Результат Д. А. Онищенко дополняет теорему 2 § 4 гл. V, но устанавливает неинтегрируемость уравнений движения в более слабом смысле.

§ 4. Поля симметрий в окрестности положений равновесия

1. Пусть снова $x = y = 0$ — положение равновесия гамильтоновой системы с гамильтонианом $H = \sum\limits_{k\geqslant 2} H_k$. Предположим, что собственные числа линеаризованной системы $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ рационально несоизмеримы. В частности, в подходящих канонических координатах форма H_2 имеет вид суммы

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j y_j. \tag{4.1}$$

Если числа λ_j чисто мнимы, то для приведения H_2 к виду (4.1) используется линейное каноническое преобразование с комплексными коэффициентами (см. § 1).

Гамильтониану H отвечает оператор дифференцирования вдоль гамильтонова поля v_H:

$$L_v = \sum x_j(\lambda_j + \ldots)\frac{\partial}{\partial x_j} - \sum y_j(\lambda_j + \ldots)\frac{\partial}{\partial y_j} \tag{4.2}$$

(многоточия обозначают слагаемые порядка $\geqslant 1$). Пусть u — векторное поле с аналитическими (или формально аналитическими) компонентами, являющееся полем симметрий для гамильтоновой системы с функцией Гамильтона H. Тогда линейный дифференциальный оператор

$$L_u = \sum_s \left(\sum_r X_r^s \frac{\partial}{\partial x_r}\right) + \sum_s \left(\sum_r Y_r^s \frac{\partial}{\partial y_r}\right) \tag{4.3}$$

коммутирует с оператором (4.2). Здесь X_r^s, Y_r^s — некоторые однородные формы по координатам x, y степени s. Все λ_j отличны от нуля, поэтому положение равновесия рассматриваемой гамильтоновой системы изолировано. Отсюда вытекает, что $u = 0$ при $x = y = 0$. Следовательно, в (4.3) $s \geqslant 1$.

Векторное поле u назовем специальным, если хотя бы одна из форм X_r^s (или Y_r^s) имеет члены вида $a x_r (x_1 y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n y_n)^{\alpha_n}$ (соответственно $b y_r (x_1 y_1)^{\alpha_1} \ldots (x_n y_n)^{\alpha_n}$) с ненулевыми коэффициентами. В дальнейшем нас будут интересовать лишь неспециальные поля симметрий.

В предположении о независимости собственных чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ гамильтонова система имеет n неспециальных линейно независимых гамильтоновых полей. Действительно, согласно лемме 1 § 1, уравнения Гамильтона допускают n независимых формальных интегралов $F_j = x_j y_j + \ldots$, не содержащих специальных слагаемых вида $c x^\alpha y^\alpha$. Очевидно, что гамильтоновы поля v_{F_j} являются неспециальными полями симметрий.

2. Характерное свойство неспециальных полей устанавливает

Предложение 1. *Если u — неспециальное поле симметрий, то формы X_r^s, Y_r^s $(s \geqslant 2)$ однозначно определяются линейными формами $X_1^1, \ldots, X_n^1$, $Y_1^1, \ldots, Y_n^1$.*

Доказательство. Условия коммутирования операторов (4.2) и (4.3) приводят к равенствам

$$\begin{aligned} \sum \lambda_j x_j \frac{\partial X_r^s}{\partial x_j} - \sum \lambda_j y_j \frac{\partial X_r^s}{\partial y_j} - \lambda_r X_r^s = \Phi_r^s, \\ \sum \lambda_j x_j \frac{\partial Y_r^s}{\partial x_j} - \sum \lambda_j y_j \frac{\partial Y_r^s}{\partial y_j} + \lambda_r Y_r^s = \Psi_r^s, \end{aligned} \tag{4.4}$$

где Φ_r^s, Ψ_r^s — однородные формы от x, y степени s, коэффициенты которых зависят от коэффициентов форм X_p^l, Y_q^l $(1 \leqslant l \leqslant s-1)$. Поэтому цепочку уравнений (4.4) надо решать последовательно.

Пусть

$$X_r^s = \sum U_{k,m} x_1^{k_1} \ldots x_n^{k_n} y_1^{m_1} \ldots y_n^{m_n}, \qquad |k| + |m| = s \geqslant 2. \tag{4.5}$$

Тогда из первого уравнения (4.4) получим соотношение

$$\left[\lambda_r - \sum_j (k_j - m_j)\lambda_j\right] U_{k,m} = V_{k,m}\ , \tag{4.6}$$

где $V_{k,m}$ — некоторые известные числа. Поскольку $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ рационально независимы, то коэффициент в квадратных скобках обращается в нуль лишь в том случае, когда $k_j = m_j$ $(j \neq r)$ и $k_r = m_r + 1$. Эти соотношения отвечают слагаемым специального вида в сумме (4.5), которые отсутствуют согласно предположению. Ввиду (4.6), остальные слагаемые в (4.5) находятся однозначно.

Тем же способом решается второе уравнение системы (4.4). Предложение 1 доказано.

3. Найдем вид линейных форм X_r^1 и Y_r^1 в (4.3). Они удовлетворяют уравнениям (4.4) с нулевыми правыми частями. Положим $X_r^1 = \sum \alpha_j x_j + \sum \beta_j y_j$ $(\alpha_j, \beta_j = \mathrm{const})$. Тогда, ввиду первого уравнения (4.4), $\sum(\lambda_j - \lambda_r)\alpha_j x_j - \sum(\lambda_j + \lambda_r)\beta_j y_j \equiv 0$. Следовательно, $(\lambda_j - \lambda_r)\alpha_j = 0$, $(\lambda_j + \lambda_r)\beta_j = 0$. Поскольку $\lambda_j = \lambda_r$ только при $j = r$, и $\lambda_j + \lambda_r \neq 0$, то $\alpha_j = 0$ при $j \neq r$, и $\beta_j = 0$ при всех j. Поэтому $X_r^1 = \alpha_r x_r$. Аналогично доказывается, что $Y_r^1 = \beta_r y_r$.

Итак, линеаризованный оператор (4.3) имеет вид

$$\sum \alpha_r x_r \frac{\partial}{\partial x_r} + \sum \beta_r y_r \frac{\partial}{\partial y_r}. \tag{4.7}$$

Он является оператором дифференцирования вдоль гамильтонова векторного поля лишь при условии $\alpha_r + \beta_r = 0$ $(1 \leqslant r \leqslant n)$.

Предположим, что $H \equiv H_2$. Тогда при всех значениях α_r, β_r операторы (4.2) и (4.7) будут коммутировать. Следовательно, гамильтонова система в окрестности равновесия может иметь негамильтоновы поля симметрий. Отметим, что линейные поля (4.7), очевидно, неспециальные. Оказывается, в типичной ситуации неспециальные поля симметрий являются гамильтоновыми.

Согласно теореме Биркгофа, гамильтониан H можно привести к нормальной форме: $H = K_2 + K_4 + K_6 + \ldots$, где K_{2m} — однородная форма степени m от произведений $\omega_j = x_j y_j$. В частности, $K_4 = \sum a_{kj}\omega_k\omega_j$.

Предложение 2. *Если* $\det \|a_{kj}\| \neq 0$, *то в* (4.7) $\alpha_r = -\beta_r$ *для всех* $r = 1, \ldots, n$.

Неспециальное поле симметрий однозначно определяется своей линеаризацией (см. предложение 1), поэтому при невырожденности формы K_4 оно оказывается гамильтоновым. В частности, вопрос о наличии таких полей сводится к задаче о дополнительных интегралах, аналитических в окрестности равновесия.

Доказательство предложения 2 основано на анализе условий коммутирования операторов (4.4), включающих формы четвертого порядка; несложные, но громоздкие вычисления опущены.

ГЛАВА VII

ВЕТВЛЕНИЕ РЕШЕНИЙ И ОТСУТСТВИЕ ОДНОЗНАЧНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Пусть $M_{\mathbb{C}}^{2n}$ — комплексное симплектическое аналитическое многообразие (все M покрыто некоторым набором комплексных карт из $\mathbb{C}^{2n} = \{p, q\}$, причем переход от карты к карте является обратимым голоморфным каноническим преобразованием). Любая аналитическая (в смысле функций комплексного переменного) функция $H(p,q,t) : M^{2n} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ задает некоторую *комплексно-гамильтонову* систему $dp/dt = -\partial H/\partial q$, $dq/dt = \partial H/\partial p$. Естественно рассмотреть задачу о существовании у этой системы дополнительных голоморфных (или, более общо, мероморфных) первых интегралов. В большинстве проинтегрированных задач гамильтоновой механики известные первые интегралы продолжаются в комплексную область изменения канонических переменных до некоторых голоморфных или меромофных функций. В этой главе будет показано, что ветвление решений гамильтоновых систем в плоскости комплексного времени в общем случае препятствует появлению новых однозначных первых интегралов.

Задачи подобного рода впервые возникли в динамике тяжелого твердого тела в связи с исследованиями Ковалевской, Ляпунова, Гюссона и других авторов: оказалось, что общее решение уравнений движения представляется однозначными мероморфными функциями времени только в классических случаях Эйлера, Лагранжа и Ковалевской — как раз тогда, когда существует дополнительный однозначный полиномиальный интеграл. Долгое время оставалось неясным, является ли это обстоятельство случайным совпадением или же в его основе лежат какие-то глубокие причины.

Основываясь на этих результатах, П. Пенлеве поставил общую задачу о связи между мероморфностью общего решения аналитических систем дифференциальных уравнений и наличием нетривиальных полиномиальных (или, более общо, алгебраических) интегралов. Однако оказалось, что однозначной связи здесь нет. Приведем соответствующие примеры для гамильтоновых систем с двумя степенями свободы. Пусть $H = p_1^2 + q_1^2 + p_2^2 + f(q_2)$, где f — многочлен не ниже пятой степени. Соответствующие уравнения Гамильтона допускают два независимых полиномиальных интеграла $p_1^2 + q_1^2$, $p_2^2 + f(q_2)$, однако почти все их решения неоднозначны на плоскости комплексного времени.

Обратно, пусть $H = p_1 + p_2^2/2 - q_1 q_2 - 2q_2^3$. Можно показать, что все решения уравнений Гамильтона с этим гамильтонианом являются мероморфными функциями, но не существует интеграла в виде полинома по p, q, независимого от H (см. [83], гл. V).

Актуальность задачи Пенлеве неоднократно подчеркивалась в известных книгах В. В. Голубева [42, 43]. Он же предложил естественное расширение этой задачи: выяснить связь между *ветвлением решений* как функций комплексного времени и наличием *однозначных первых интегралов*. Как будет показано ниже, при определенных дополнительных условиях общего характера задача Пенлева — Голубева имеет положительное решение.

§ 1. Метод малого параметра Пуанкаре

1. Сперва напомним некоторые простые факты из аналитической теории дифференциальных уравнений, необходимые нам для дальнейшего. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dz}{dt} = v(z), \tag{1.1}$$

где $z = (z_1, \ldots, z_n)$ — набор n комплексных координат, t — комплексная переменная, играющая роль времени. Предположим для простоты, что компоненты векторного поля v — голоморфные функции в $\mathbb{C}^n$. Приводимые ниже рассуждения с небольшими изменениями переносится и на более общий случай локальных координат z на n-мерном комплексном многообразии.

Согласно известной теореме Коши, уравнение (1.1) имеет единственное решение $z(t)$, принимающее при заданном $t_0 \in \mathbb{C}$ заданное значение $z_0 \in \mathbb{C}^n$, т. е. $z(t_0) = z_0$; это решение голоморфно в некоторой малой окрестности точки t_0. Будем искать $z(t)$ в виде ряда по степеням $t - t_0$, коэффициенты которого однозначно определяются начальным значением z_0, а сам ряд сходится при малых значениях $t - t_0$.

Возникает вопрос: можно ли определить значение функции $z(t)$ в точке t_1, отстоящей от t_0 на достаточно большое расстояние? Ответ на него связан с решением задачи аналитического продолжения локально голоморфной функции. Пусть l — непрерывный путь в комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$, соединяющий точки t_0 и t_1. Говорят, что голоморфная функция $z(\cdot)$ допускает аналитическое продолжение вдоль пути l, если его можно покрыть конечной системой открытых кругов с центрами в точках из l и так задать в этих кругах голоморфные функции, чтобы

1) в пересечении соседних кругов эти функции совпали;

2) голоморфная функция, заданная в первом круге, совпадала в малой окрестности точки t_0 с функцией $z(t)$.

Зная голоморфную функцию, определенную в последнем (содержащем точку t_1) круге, можно найти значение $z(t)$ при $t = t_1$. Однако это значение существенно зависит от выбора пути l, соединяющего точки t_0 и t_1.

Имея локально голоморфное решение $t \to z(t)$, определенное при малых значениях $t - t_0$, можно построить аналитическую функцию, аналитически продолжая $z(\cdot)$ вдоль всех путей с началом в точке t_0, вдоль которых такое продолжение возможно. Ясно, что эта функция будет удовлетворять уравнению (1.1).

Аналитическая функция может оказаться многозначной: аналитическое продолжение вдоль разных путей сопоставляет точкам комплексной плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$ несколько (даже счетное множество) значений. С многозначными функциями оперировать неудобно, и поэтому вместо плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$ обычно рассматривают многолистные поверхности, которые можно представлять себе расположенными над комплексной плоскостью и имеющими столько "листов", сколько значений имеет аналитическая функция в этой точке. На таких поверхностях (называемых римановыми) аналитические функции являются обычными однозначными голоморфными функциями. Детальное изложение этих вопросов можно найти, например, в книге [167].

Рассмотрим теперь аналитическую систему дифференциальных уравнений, содержащую малый параметр:

$$\dot{z} = v(z, \varepsilon), \quad z \in \mathbb{C}^n. \tag{1.2}$$

Оказывается, решения этой системы можно разлагать не только по степеням $t - t_0$, но и по степеням ε.

Теорема Пуанкаре. *Предположим, что выполнены следующие условия:*

1) *система (1.2) при $\varepsilon = 0$ имеет решение $z_0(t)$, аналитическое вдоль некоторого непрерывного пути l, идущего от точки t_0 до точки t_1;*

2) *компоненты векторного поля $v_k(z, \varepsilon)$ $(1 \leqslant k \leqslant n)$ голоморфны в прямом произведении $E \times \{\varepsilon : |\varepsilon| < \varepsilon_0\}$, где E — некоторая окрестность множества $\{z \in \mathbb{C}^n : z = z_0(t),\ t \in l\}$.*

Тогда существует такое аналитическое решение системы (1.2)

$$z(t, \varepsilon) = z_0(t) + \varepsilon z_1(t) + \ldots \tag{1.3}$$

с начальным условием $z(t_0, \varepsilon) = z_0(t_0)$, что ряд (1.3) сходится при всех $t \in l$, если ε достаточно мало.

Доказательство теоремы Пуанкаре можно найти, например, в [146, гл. II] или в [42].

Если $v = v_0(z) + \varepsilon v_1(z) + \ldots$, то функция $z_1(\cdot)$ удовлетворяет уравнению $\dot z_1 = v_0' z_1 + v_1(z_0(t))$, $v_0' = \dfrac{\partial v_0}{\partial z}(z_0(t))$. Эту линейную систему надо решать с нулевыми значениями z_1 при $t = t_0$. В частности, если $v_0 = \mathrm{const}$, то

$$z_1 = \int_{t_0}^{t} v_1(z_0(t))\,dt, \tag{1.4}$$

причем интеграл (1.4) вычисляется вдоль пути l.

Пусть теперь l — контур (замкнутый путь) на плоскости комплексного времени t. Будем говорить, что аналитическая вектор-функция неоднозначна вдоль l, если она имеет ненулевое приращение (скачок) после обхода контура γ. Предположим, что все решения "невозмущенной" системы (1.2) однозначны на плоскости $\mathbb{C} = \{t\}$. Тогда теорема Пуанкаре позволяет эффективно исследовать задачу о ветвлении решений системы (1.2) при малых ненулевых значениях параметра ε. Все сводится к вычислению интегралов вида (1.4) по замкнутым контурам. В приложениях подынтегральные функции обычно являются мероморфными. Поэтому, согласно теореме Коши, задача о ветвлении решений сводится, по существу, к вопросу о наличии полюсов с ненулевыми вычетами.

2. Рассмотрим в комплексной области "основную проблему динамики" по Пуанкаре. Пусть $D_{\mathbb{C},\delta} = \{y \in \mathbb{C}^n : \operatorname{Re} y \in D \subset \mathbb{R}^n, |\operatorname{Im} y| < \delta\}$, $\mathbf{T}^n_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^n/2\pi\mathbb{Z}^n$ — комплексный тор (над полем вещественных чисел это "цилиндр" — прямое произведение $\mathbf{T}^n \times \mathbb{R}^n$) с комплексными угловыми координатами $x_1, \ldots, x_n \mod 2\pi$, E — некоторая окрестность нуля в $\mathbb{C}$. Пусть $H(y, x, \varepsilon) : D_{\mathbb{C},\delta} \times \mathbf{T}^n_{\mathbb{C}} \times E \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, которая при действительных значениях y, x, ε принимает действительные значения, причем $H(y, x, 0) = H_0(y)$.

Прямое произведение $D_{\mathbb{C},\delta} \times \mathbf{T}^n_{\mathbb{C}}$ снабжено простейшей симплектической структурой, в которой уравнения Гамильтона с гамильтонианом H имеют канонический вид

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x}, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\partial H}{\partial y}; \qquad H = H_0 + \varepsilon H_1 + \ldots \tag{1.5}$$

Все решения системы с функцией Гамильтона H_0 однозначны на комплексной плоскости времени $t \in \mathbb{C}$: $y = y^0$, $x = x^0 + \omega(y^0)t$. При $\varepsilon \neq 0$ решения "возмущенных" уравнений (1.5), вообще говоря, уже неоднозначны. Пусть γ — некоторый замкнутый контур на комплексной плоскости времени. Согласно теореме Пуанкаре, решения уравнений (1.5) можно разложить в степенные ряды:

$$y = y^0+\varepsilon y^1(t)+\varepsilon^2 y^2(t)+\ldots, \quad x = x^0+\omega t+\varepsilon x^1(t)+\varepsilon^2 x^2(t)+\ldots,$$
$$y^1(0) = y^2(0) = \ldots = x^1(0) = x^2(0) = \ldots = 0, \tag{1.6}$$

сходящиеся при малых значениях параметра ε, если $t \in \gamma$.

Изучим ветвление переменных действие y при малых значениях параметра $\varepsilon \neq 0$. Согласно (1.6), если вектор-функция $y^1(t)$ испытывает ненулевой скачок при обходе контура γ, то тем же свойством обладает и функция $y(t, \varepsilon)$ при малых значениях $\varepsilon \neq 0$. По формуле (1.4) скачок функции $y^1(\cdot)$ равен

$$\xi = \int_\gamma \Phi(t)\,dt, \quad \Phi = -\frac{\partial H_1}{\partial x}\bigg|_{y=y^0,\, x=x^0+\omega(y^0)t} \tag{1.7}$$

Если при фиксированных значениях y функция $H_1(y, x)$ голоморфна в $\mathbb{C}^n$, то, конечно, $\xi = 0$. Однако в практически важных случаях эта функция имеет особенности (скажем, полюсы). Поэтому функцию $H(x, y, \varepsilon)$ будем считать голоморфной лишь в области $D_{\mathbb{C},\delta} \times \Omega \times E$, где Ω — связная область в $\mathbf{T}^n_{\mathbb{C}}$, содержащая действительный тор $\mathbf{T}^n_{\mathbb{R}}$ и замкнутый контур Γ — образ контура γ при отображении $x = x^0 + \omega(y^0)t, \quad t \in \gamma$.

Зафиксируем начальные данные y^0, x^0 и будем непрерывно деформировать контур γ так, чтобы при этом контур Γ не пересек ни одной особой точки функции H. Тогда, согласно теореме Коши, функция $y^1(t)$ при обходе деформированного контура будет изменяться снова на ту же величину $\xi \neq 0$. С другой стороны, решения (1.6) непрерывны по начальным данным, поэтому неоднозначность функции $y^1(t, y^0, x^0)$ вдоль контура γ будет иметь место и для всех близких значений y^0, x^0.

Теорема 1 [79]. *Пусть выполнены следующие условия:*

1) $\det \|\partial^2 H_0/\partial y^2\| \neq 0$ *в* $D_{\mathbb{C},\delta}$;

2) *для некоторых начальных данных* y^0, x^0 *функция* y^1 *неоднозначна вдоль замкнутого контура* $\gamma \subset \mathbb{C}$.

Тогда у уравнений (1.5) нет полного набора независимых формальных интегралов $F_s = \sum\limits_{i=0}^{\infty} F_i^s(y, x)\varepsilon^i$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$, *коэффициенты которых — однозначные голоморфные функции в прямом произведении* $V \times \Omega \subset D_{\mathbb{C},\delta} \times \mathbf{T}^n_{\mathbb{C}}$, *где* V *— окрестность точки* y^0 *в* $D_{\mathbb{C},\delta}$.

Снова считаем, что формальный ряд $F = \sum F_i\varepsilon^i$ — интеграл канонических уравнений (1.5), если формально $\{H, F\} \equiv 0$. Легко понять, что в этом случае композиция степенных рядов (1.6) и $\sum F_i \varepsilon^i$ будет степенным рядом с постоянными коэффициентами.

Укажем основные моменты доказательства теоремы 1. Покажем сначала, что функции $F_0^s(y, x)$ не зависят от x. Пусть $(y, x) \in D \times \mathbf{T}^n_{\mathbb{R}}$ и $F_0^s = \Phi_0^s + i\Psi_0^s$. Тогда Φ_0^s и Ψ_0^s — первые интегралы невырожденной невозмущенной системы. Согласно лемме Пуанкаре (см. § 1, гл. IV), они не зависят от $x \in \mathbf{T}^n_{R}$. При $x \in \Omega$ постоянство функций F_0^s вытекает из связности области Ω и единственности аналитического продолжения.

Затем докажем, что функции $F_0^1(y), \ldots, F_0^n(y)$ зависимы в области $V \subset D_{\mathbb{C},\delta}$. Действительно, $F_s(y, x, \varepsilon)$ — интеграл канонической системы (1.5), поэтому функция F_0^s постоянна на решениях (1.6). Следовательно, ее значения в момент времени $\tau \in \gamma$ и после обхода контура γ совпадают:

$$\begin{aligned}
&F_0^s(y^0 + \varepsilon y^1(\tau) + \ldots) + \\
&\qquad + \varepsilon F_1^s(y^0 + \varepsilon y^1(\tau) + \ldots, x^0 + \omega\tau + \varepsilon x^1(\tau) + \ldots) + \ldots \equiv \\
&\qquad \equiv F_0^s(y^0 + \varepsilon(y^1(\tau) + \xi(y^0)) + \ldots) + \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \varepsilon F_1^s(y^0 + \ldots, x^0 + \omega\tau + \ldots) + \ldots
\end{aligned}$$

Разлагая это тождество в степенные ряды по ε и приравнивая коэффициенты при первой степени ε, получим $(\partial F_0^s/\partial y, \xi) = 0$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$. Скачок ξ отличен от нуля в окрестности точки y^0, поэтому

$$\det \left\| \frac{\partial(F_0^1, \ldots, F_0^n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \right\| \equiv 0$$

во всей области V, содержащей точку y^0.

С другой стороны, прменяя метод Пуанкаре из гл. IV, можно доказать существование таких независимых интегралов $\Phi_s(y, x, \varepsilon) = \sum\limits_{i \geqslant 0} \Phi_i^s(y, x)\varepsilon^i$ с коэффициентами, голоморфными в области $W \times \Omega$ (W — малая подобласть V), что функции Φ_0^s $(1 \leqslant s \leqslant n)$ независимы.

3. В качестве примера рассмотрим систему с двумя степенями свободы, у которой возмущающая функция имеет вид

$$H_1 = f \sin x_1 + g \cos x_1 + h, \tag{1.8}$$

где f, g и h — мероморфные функции от x_2 с простыми полюсами. Первая компонента подынтегральной функции из (1.7) равна

$$\Phi(t) = -\cos(\omega_1 t + c) f(\omega_2 t) + \sin(\omega_1 t + c) g(\omega_2 t).$$

Здесь ω_1, ω_2 — частоты, c — произвольная постоянная. Пусть при $y = y^0$ частота ω_2 отлична от нуля и хотя бы одна из функций f или g имеет простой полюс. Тогда при надлежащем выборе постоянной c функция Φ также имеет простой полюс и, следовательно, функция $y_1(t, \varepsilon)$ ветвится при малых значениях $\varepsilon \neq 0$. Если, кроме того, невозмущенная задача невырождена, то (по теореме 1) уравнения Гамильтона (1.5) не допускают дополнительного однозначного интеграла.

Возмущающая функция редуцированной задачи о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой в точности имеет вид (1.8). Если тело динамически симметрично, то f, g, h — целые функции, поэтому теорема 1 непосредственно не применима. Однако если среди главных моментов инерции нет равных, то функции f, g и h — эллиптические с простыми полюсами. Следовательно, в случае несимметричного тяжелого твердого тела ветвление решений в плоскости комплексного времени при малых значениях параметра Пуанкаре приводит к несуществованию дополнительных однозначных интегралов. Этот результат, полученный впервые в [79], дает положительный ответ в задаче Пенлеве — Голубева.

4. Используя ветвление решений, можно установить отсутствие однозначных аналитических интегралов при малых, но фиксированных значениях параметра $\varepsilon \neq 0$. Приведем один из результатов в этом направлении, принадлежащий С. Л. Зиглину [63].

Пусть $M^3 = \mathbb{C}^2 \times \mathbf{T}^1_{\mathbb{C}}$, $H(z, t, \varepsilon) : M^3 \times E \to \mathbb{C}$ — некоторая голоморфная функция, принимающая действительные значения при действительных z, t, ε и такая, что $H(z, t, 0) = H_0(z)$. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{z} = JH'_z, \quad H = H_0(z) + \varepsilon H_1(z, t) + \ldots \tag{1.9}$$

Пусть $z = z_0 \in \mathbb{C}^2$, $\operatorname{Im} z_0 = 0$, — неподвижная гиперболическая точка невозмущенной системы $\dot{z} = JH'_0$, $dH_0(z_0) = 0$.

Собственные значения $\pm\lambda$ линеаризованной системы имеют ненулевые вещественные части ($\operatorname{Re}\lambda > 0$). Решение $z(t) = z_0$ можно считать периодическим с периодом 2π. Согласно Пуанкаре, при достаточно малых $|\varepsilon|$ система (1.9) имеет 2π-периодическое решение $z = p(t, \varepsilon)$, $p(t, 0) = z_0$. Аналитически по $t \in \mathbb{C}$ продолжим (возможно, неоднозначно) решения системы (1.9), асимптотические к траектории $p(t, \varepsilon)$ при $t \to -\infty$, на максимально возможную область. При этом получим двумерную комплексную поверхность Λ^-_ε, которую назовем неустойчивой комплексной асимптотической поверхностью гиперболического периодического решения $p(t, \varepsilon)$.

В гл. V было показано, что устойчивая и неустойчивая асимптотические поверхности Λ^+_ε и Λ^-_ε могут трансверсально пересекаться в действительной области, и это приводит к отсутствию аналитического интеграла в $\mathbb{R}^2 \times \mathbf{T}^1_{\mathbb{R}}$ (следовательно, и во всем $\mathbb{C}^2 \times \mathbf{T}^1_{\mathbb{C}}$). В данном случае комплексная асимптотическая поверхность Λ^-_ε (Λ^+_ε), в отличие от вещественной, может иметь трансверсальные самопересечения, которые также препятствуют существованию у системы (1.9) голоморфного интеграла.

Приведем достаточное условие самопересечения. Пусть асимптотическое решение $z = z_a(t)$ $\left(\lim\limits_{t\to-\infty} z_a(t) = z_0\right)$ невозмущенной системы продолжается однозначно и аналитически вдоль замкнутого непрерывного пути $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$, $\gamma(0) = \gamma(1) \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Тогда при достаточно малых $|\varepsilon|$ решение $z(t, t_0, \varepsilon)$ возмущенной системы (1.9) с начальным условием $z(\gamma(0) + t_0, t_0, \varepsilon) = z_a(\gamma(0))$ тоже аналитически (но, вообще говоря, неоднозначно) продолжается вдоль "смещенного" пути $\gamma + t_0$. Пусть $h(t_0, \varepsilon) = H_0\big(z(\gamma(1) + t_0), t_0, \varepsilon\big) - H_0\big(z_a(\gamma(0))\big) = \varepsilon h_1(t_0) + o(\varepsilon)$ — приращение функции $H_0(z(t), t_0, \varepsilon)$ при обходе t вдоль $\gamma + t_0$.

Т е о р е м а 2 [63]. *Если функция h_1 имеет простой нуль, то при достаточно малых $|\varepsilon| \neq 0$ комплексная поверхность Λ^-_ε имеет трансверсальное самопересечение, и система (1.9) не имеет в M^3 однозначного аналитического первого интеграла.*

Отметим, что величину $h_1(t_0)$ можно вычислить по формуле

$$\int_\gamma \frac{\partial H_1}{\partial t}(z_a(t), t + t_0)\, dt = \int_\gamma \{H_0, H_1\}(z_a(t), t + t_0)\, dt.$$

В качестве иллюстрации рассмотрим задачу о колебании маятника, точка подвеса которого совершает гармонические колебания малой амплитуды. Гамильтониан имеет вид $H = H_0 + \varepsilon H_1$, $H_0 = y^2/2 + \cos x$, $H_1 = \cos t \cos x$. Здесь $(x, y) = z$ — симплектические координаты, ε — малый параметр. Невозмущенная задача имеет неподвижную гиперболическую точку $x = y = 0$. Асимптотически выходящее из нее решение

$$y = 2/\operatorname{ch} t, \quad \sin x = -2 \operatorname{sh} t / \operatorname{ch}^2 t, \quad \cos x = 1 - 2/\operatorname{ch}^2 t$$

однозначно, мероморфно и имеет полюсы в точках $a_k = i(\pi/2 + \pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

Пусть γ — замкнутый путь, обходящий полюс a_0 в положительном направлении. С помощью вычетов легко установить, что $h_1(t_0) = -4\pi i \cos(\pi i/2 + t_0)$. Эта функция имеет простые нули, поэтому применима теорема 2.

Укажем еще статью [36], в которой тем же методом установлено отсутствие голоморфных однозначных интегралов в задаче о плоских колебаниях спутника на эллиптической орбите.

5. С. Л. Зиглин в [64] указал обобщение теоремы 1 на негамильтоновы системы.

§ 2. Ветвление решений и полиномиальные интегралы обратимой системы на торе

1. Пусть $\mathbf{T}^n = \{x_1, \ldots x_n \bmod 2\pi\}$ — пространство положений механической системы с n степенями свободы, $T = \frac{1}{2}\sum a_{jk}\dot{x}_j\dot{x}_k$ — ее кинетическая энергия ($a_{jk} = \text{const}$), $F = (F_1, \ldots, F_n)$ — поле сил, заданное на $\mathbf{T}^n$. Уравнения движения этой обратимой системы имеют вид

$$\sum a_{kj}\ddot{x}_j = F_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant n. \tag{2.1}$$

Предположим, что компоненты силы F_s аналитичны на $\mathbf{T}^n$ и продолжаются до мероморфных функций в аффинном пространстве комплексных переменных $x_1, \ldots, x_n$. Тогда (2.1) можно трактовать как систему дифференциальных уравнений в $\mathbb{C}^n$ с комплексным временем $t \in \mathbb{C}$. Следуя работе [96], рассмотрим задачи, связанные с условиями однозначности общего решения системы (2.1) и существования $k \leqslant n$ однозначных полиномиальных по скоростям интегралов.

Полиномиальный по скоростям интеграл назовем однозначной функцией, если его коэффициенты

1) периодичны по $x_1, \ldots, x_n$ с вещественным периодом 2π;

2) голоморфны в области $\mathbb{C}^n \setminus \mathcal{P}$, где $\mathcal{P}$ — объединение полярных множеств мероморфных функций $F_1, \ldots, F_n$.

Рассмотрим прямую

$$x = az + b, \quad a, b \in \mathbb{C}^n, \quad z \in \mathbb{C}, \tag{2.2}$$

в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$. Предположим, что ограничения мероморфных функций $F_1, \ldots, F_n$ на эту прямую являются мероморфными функциями на комплексной плоскости $z \in \mathbb{C}$; обозначим их $f_1, \ldots, f_n$. Мероморфность функций f_s заведомо имеет место, если прямая (2.2) трансверсально пересекает полярное множество $\mathcal{P}$ в точках, не являющихся точками неопределенности функций F_s. Так как $\mathcal{P}$ является комплексной гиперповерхностью в $\mathbb{C}^n$, а множество точек неопределенности имеет комплексную коразмерность два, то указанное свойство имеет место для почти всех значений a и b. Совокупность мероморфных функций $f_1, \ldots f_n$ образует мероморфную вектор-функцию f, поэтому можно говорить о вычетах функции f в ее полюсах. Вычеты являются векторами из $\mathbb{C}^n$; они зависят, разумеется, от выбора значений a и b.

Т е о р е м а 1. *Предположим, что при некоторых $a, b \in \mathbb{C}^n$ функция $z \to f(z)$ имеет полюс с ненулевым вычетом. Тогда общее решение системы (2.1) не является однозначной функцией комплексного времени.*

Т е о р е м а 2. *Предположим, что:*

1) *при некоторых $a, b \in \mathbb{C}^n$ функция f имеет m полюсов, вычеты в которых линейно независимы над полем $\mathbb{C}$;*

2) *система (2.1) имеет k однозначных полиномиальных интегралов, старшие однородные формы которых почти всюду независимы.*

Тогда $m + k \leqslant n$.

Рассмотрим простой пример. Пусть $n = 1$ и $F = \mathrm{sn}(2\mathbf{K}x/\pi, \varkappa)$, где $\mathbf{K}$ — полный эллиптический интеграл с модулем $\varkappa > 0$. Так как f имеет простые полюсы, то применимы теоремы 1 и 2. Следовательно, общее решение многозначно, и уравнения движения не имеют однозначного полиномиального интеграла. Интересно отметить, что в вещественной области имеется однозначный полиномиальный интеграл — интеграл энергии, однако в комплексном фазовом пространстве эта функция имеет логарифмические особые точки. Задача о несуществовании полиномиальных интегралов уравнений (2.1) при вещественных значениях x значительно сложнее; для потенциальных полей с потенциалом в виде тригонометрического многочлена она решена в § 5 гл. IV.

Пусть силы потенциальны ($F_s = -\partial V/\partial x_s$), и потенциал V является периодической мероморфной функцией. Тогда уравнения (2.1) допускают интеграл энергии, являющийся однозначной полиномиальной функцией. Поэтому $m \leqslant n-1$. Легко привести примеры потенциальных силовых полей, для которых $m = n-1$ (см. п. 3).

2. Доказательство теорем 1 и 2 использует искусственное введение малого параметра и основывается на идеях § 1.

П р е д л о ж е н и е 1. *Предположим, что при некоторых a, b функция $z \to f_j(z)$ имеет в точке z_0 полюс с вычетом ζ_j. Тогда при достаточно больших значениях $|\alpha|$, $\alpha \in \mathbb{C}$, решение системы (2.1) с начальными условиями $x(0) = b$, $\dot{x}(0) = \alpha a$ продолжается в некоторую кольцевую окрестность точки $t_0 = z_0/\alpha$, причем при обходе точки t_0 скорость $\dot{x}_s$ испытывает скачок $2\pi i\alpha^{-1}a^{sj}\zeta_j + o(\alpha^{-1})$, где $\|a^{js}\|$ — матрица, обратная к $\|a_{lj}\|$.*

Для доказательства предложения 1 перепишем систему (2.1) в виде системы уравнений первого порядка:

$$\dot{x}_s = v_s, \quad \dot{v}_s = \sum a^{sj} F_j, \quad 1 \leqslant s \leqslant n, \tag{2.3}$$

и сделаем подстановку $v_s = \alpha u_s$, $t = \tau/\alpha$. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, из (2.3) получим уравнения

$$x_s' = u_s, \quad u_s' = \varepsilon \sum a^{sj} F_j, \quad \varepsilon = \alpha^{-2}. \tag{2.4}$$

Считая ε малым параметром, рассмотрим прямую $x = a\tau + b$ как решение невозмущенной системы. Для завершения доказательства предложения остается воспользоваться теоремой Пуанкаре о разложении решений уравнений (2.4) в сходящиеся ряды по степеням ε и теоремой Коши о вычетах. Теорема 1 — очевидное следствие этого утверждения.

Для доказательства теоремы 2 будет использована следующая

Лемма 1. *Старшая однородная форма однозначного интеграла уравнений (2.1) не зависит от переменных x.*

Действительно, старшая однородная форма полиномиального интеграла является интегралом задачи о движении по инерции по n-мерному тору $\mathbf{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$. Будем считать x вещественными угловыми координатами. Тогда действительная и мнимая части однородной формы также являются интегралами уравнений $\ddot{x}_s = 0$. Так как $\dot{x}_s = \mathrm{const}$ и почти все траектории этой системы всюду плотны на $\mathbf{T}^n$, то любой вещественный периодический интеграл зависит от скоростей $\dot{x}_s$, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Предположим, что выполнены условия предложения 1, и пусть $\Phi(v_1, \ldots, v_n)$, $v_s = \dot{x}_s$, — старшая однородная форма однозначного интеграла. Тогда*

$$\sum a^{sj} \frac{\partial \Phi}{\partial v_s} \zeta_j \equiv 0. \tag{2.5}$$

Доказательство использует постоянство интеграла на ветвящихся решениях из предложения 1. Замена $v_s = \alpha u_s$ переводит полиномиальный интеграл системы (2.3) в интеграл системы (2.4), аналитической по α^{-1}: $\Phi(u) + \alpha^{-1}\Psi(u, x) + \ldots$ Эта функция инвариантна при подстановке

$$u_s \to u_s' = u_s + 2\pi i \alpha^{-2} \sum a^{sj} \zeta_j + o(\alpha^{-2}),$$
$$x_s \to x_s' = x_s + O(\alpha^{-2}).$$

Следовательно, $\Phi(u') + \alpha^{-1}\Psi(u', x') + \ldots = \Phi(u) + \alpha^{-1}\Psi(u, x) + \ldots$ Дифференцируя это равенство по α, умножая на α^3 и полагая затем $\alpha \to \infty$, приходим к соотношению (2.5).

Условие (2.5) геометрически означает ортогональность градиента Φ_v' и вычета ζ. Если система имеет m независимых вычетов и k интегралов с независимыми градиентами старших форм, то, очевидно, $m+k \leqslant n$. Эти рассуждения доказывают теорему 2.

3. Приведем пример потенциального силового поля, для которого $m = n-1$. Положим $V = -\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\sin x_j}{\sin(x_n - a_j)}$, где $a_1, \ldots, a_{n-1}$ — вещественные числа, не сравнимые друг с другом по модулю 2π. Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ прямую $x_1 = \ldots = x_{n-1} = 0$, $x_n = z$. Ясно, что

$$f_1 = \sin^{-1}(z - a_1), \quad \ldots, \quad f_{n-1} = \sin^{-1}(z - a_{n-1}).$$

Эти мероморфные функции имеют несовпадающие полюсы первого порядка в точках $a_1, \ldots, a_{n-1}$. Вычеты вектор-функции f в этих точках, очевидно, линейно независимы. Следовательно, $m = n-1$.

§ 3. Интегралы и группы симметрий квазиоднородных систем дифференциальных уравнений

1. Напомним (см. § 9 гл. II), что система дифференциальных уравнений

$$\dot{z}_i = v_i(z_1, \ldots, z_n) \tag{3.1}$$

называется квазиоднородной с показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n \neq 0$, если

$$v_i(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^{g_i + 1} v_i(z_1, \ldots, z_n) \tag{3.2}$$

при всех значениях z и $\alpha > 0$.

Уравнения движения многих важных задач динамики имеют квазиоднородную форму. Примерами могут служить задача многих гравитирующих частиц, задача о вращении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки, а также задача Кирхгофа о движении твердого тела в неограниченной идеальной жидкости.

Дифференцируя тождество (3.2) по α и полагая затем $\alpha = 1$, придем к формуле Эйлера

$$\sum_{j=1}^{n} g_j z_j \frac{\partial v_i}{\partial z_j} = (g_i + 1) v_i. \tag{3.3}$$

Уравнения (3.1) имеют частные решения

$$z_i = c_i t^{-g_i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{3.4}$$

при этом постоянные коэффициенты c_i удовлетворяют алгебраической системе уравнений $v_i(c_1, \ldots, c_n) = -g_i c_i \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$. Как правило, эта система имеет нетривиальные решения.

Выпишем уравнения в вариациях для частного решения (3.4):

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(c_1 t^{-g_1}, \ldots, c_n t^{-g_n})\xi_j. \tag{3.5}$$

Дифференцируя тождество (3.2) по z_j, получим равенство

$$\frac{\partial v_i}{\partial z_j}(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^{g_i - g_j + 1} \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(z_1, \ldots, z_n). \tag{3.6}$$

Подставляя $\alpha = 1/t$ в (3.6), перепишем уравнения (3.5) в виде

$$\dot{\xi}_i = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(\mathrm{c}) t^{g_j - g_i - 1} \xi_j. \tag{3.7}$$

Эта линейная система имеет частные решения

$$\xi_1 = \varphi_1 t^{\rho - g_1}, \quad \ldots, \quad \xi_n = \varphi_n t^{\rho - g_n},$$

где ρ — собственное значение, а φ — собственный вектор матрицы $K = \|K_{ij}\|$, где $K_{ij} = \dfrac{\partial v_i}{\partial z_j}(\mathrm{c}) + \delta_{ij} g_i$ (δ_{ij} — символ Кронекера).

Матрица K называется матрицей Ковалевской, а ее собственные значения — показателями Ковалевской. Если общее решение системы (3.1) представляется однозначными (мероморфными) функциями комплексного времени, то показатели Ковалевской являются целыми (соответственно целыми неотрицательными) числами (см. п. 5 § 9 гл. II).

2. В работе Х. Иошиды [236] рассмотрена задача о наличии квазиоднородных интегралов системы (3.1). Напомним, что $f(z)$ называется квазиоднородной функцией степени m с показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$, если

$$f(\alpha^{g_1} z_1, \ldots, \alpha^{g_n} z_n) = \alpha^m f(z_1, \ldots, z_m). \tag{3.8}$$

Например, функции $v_i(z)/z_i$ — квазиоднородные степени 1.

Теорема 1 [236]. *Пусть f — квазиоднородный интеграл степени m системы (3.1) и $df(c_1, \ldots, c_n) \neq 0$. Тогда $\rho = m$ — показатель Ковалевской.*

Этот результат устанавливает замечательную связь между свойством мероморфности общего решения и наличием непостоянных интегралов. Отметим, что если система (3.1) имеет еще один квазиоднородный интеграл g той же степени m, причем дифференциалы df и dg линейно независимы в точке $z = c$, то $\rho = m$ — множитель Ковалевской кратности $\geqslant 2$.

Доказательство теоремы 1. Так как f — интеграл уравнений (3.1), то $\sum \dfrac{\partial f}{\partial z_i}(ct^{-g})\xi_i$ — интеграл уравнений в вариациях (3.7) (ср. с § 8 гл. IV). Полагая в (3.8) $\alpha = t^{-1}$ и дифференцируя затем по z_i, получаем соотношения

$$\frac{\partial f}{\partial z_i}(ct^{-g}) = t^{g_i - m}\frac{\partial f}{\partial z_i}(c).$$

Следовательно, $\sum \dfrac{\partial f}{\partial z_i}(c)\xi_i t^{g_i-m} = \mathrm{const}$. Продифференцируем это тождество по t и воспользуемся уравнениями (3.7). Получим соотношения

$$\sum_j \frac{\partial f}{\partial z_j}(c)\frac{(g_j - m)\xi_j}{t^{m-g_j+1}} + \sum_{i,j}\frac{\partial f}{\partial z_j}(c)\frac{\partial v_j}{\partial z_i}(c)\frac{\xi_i}{t^{m-g_i+1}} = 0\,.$$

Пусть $\xi_i = \varphi_i t^{\rho - g_i}$ — решение уравнений в вариациях. Тогда

$$\left((K - mE)^{\top}\frac{\partial f}{\partial z}(c),\ \varphi\right) = 0.$$

Это равенство справедливо для всех собственных векторов φ матрицы Ковалевской K. Среди этих векторов имеется n линейно независимых, поэтому $(K - mE)^{\top}\dfrac{\partial f}{\partial z}(c) = 0$.

Теорема 1 доказана.

3. Рассмотрим другую автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dz_i}{d\tau} = u_i(z_1, \ldots, z_n), \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{3.9}$$

Предположим, что правые части удовлетворяют соотношениям $u_j(\alpha^{g_1}z_1, \ldots, \alpha^{g_n}z_n) = \alpha^{g_j+m}u_j(z_1, \ldots, z_n)$, другими словами, $u_j(z)/z_j$ — квазиоднородные функции степени m с теми же показателями квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$. Ясно, что система (3.9) инвариантна при подстановках $z_i \to \alpha^{g_i}z_i$, $\tau \to \alpha^m\tau$.

Функции u_i удовлетворяют тождествам, аналогичным (3.3):

$$\sum_{j=1}^{n} g_j z_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j} = (g_i + m)u_j. \tag{3.10}$$

Векторное поле u является полем симметрий системы (3.1), если линейные дифференциальные операторы

$$L_v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial z_i}, \quad L_u = \sum u_j \frac{\partial}{\partial z_j} \tag{3.11}$$

коммутируют. Ясно, что система (3.1) всегда допускает тривиальное поле симметрий βv, $\beta = \mathrm{const}$.

Теорема 2. *Предположим, что система* (3.1) *допускает квазиоднородное поле симметрий u степени* m, *причем* $u(c) \neq 0$. *Тогда* $\rho = -m$ — *показатель Ковалевской.*

Доказательство. Условие коммутирования операторов (3.11) эквивалентно серии равенств

$$\sum v_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j} = \sum u_j \frac{\partial v_i}{\partial z_j}. \tag{3.12}$$

Подставим в обе части вместо z решение (3.4). Тогда

$$\sum_j v_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j}\bigg|_{z=ct^{-g}} = -\frac{1}{t}\sum g_j \frac{c_j}{t^{g_j}} \frac{\partial u_i}{\partial z_j}(ct^{-g}) =$$
$$= -\frac{1}{t}\sum g_j z_j \frac{\partial u_i}{\partial z_j}\bigg|_{z=ct^{-g}} = -\frac{1}{t}(g_i + m)u_i(ct^{-g}) = -\frac{g_i + m}{t^{g_i+m+1}} u_i(c).$$

Используя (3.6), преобразуем правую часть (3.12):

$$\sum u_j(ct^{-g}) \frac{\partial v_i}{\partial z_j}\bigg|_{ct^{-g}} = \sum \frac{u_j(c)}{t^{g_j+m}\, t^{g_i-g_j+1}} \frac{\partial v_i}{\partial z_j}(c).$$

Следовательно, $\sum\limits_j \dfrac{\partial v_i}{\partial z_j}(c) u_j(c) + (g_i + m)u_i(c) = 0$, или, что то же самое, $(K + mE)\, u(c) = 0$. Следовательно, $u(c) \neq 0$ — собственный вектор матрицы K с собственным значением $\rho = -m$. Теорема 2 доказана.

Следствие 1. *Если* $c \neq 0$, *то* $\rho = -1$ — *показатель Ковалевской.*

Действительно, $u = v$ есть квазиоднородное поле симметрий степени $m = 1$. Остается заметить, что $v_i(c) = -g_i c_i$ и $g_i \neq 0$.

Этот же результат можно получить другим способом. Ввиду автономности система (3.1) имеет семейство решений $z_i(a) = c_i(t + a)^{-g_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$, где a — вещественный параметр. Производные

$$\frac{dz_i(a)}{da}\bigg|_{a=0} = -\frac{c_i g_i}{t^{g_i+1}}$$

удовлетворяют уравнениям в вариациях (3.7). Следовательно, $\rho = -1$ — собственное значение матрицы K с собственным вектором $(-c_1 g_1, \ldots, -c_n g_n)^{\top} \neq 0$.

С л е д с т в и е 2. *Пусть u — квазиоднородное поле симметрий степени 1, и векторы v, u линейно независимы в точке $z = c$. Тогда $\rho = -1$ — показатель Ковалевской кратности $\geqslant 2$.*

Теорема 2 устанавливает любопытную связь между условием однозначности общего решения квазиоднородной системы и наличием нетривиальных полей симметрий.

Рассмотрим подробнее случай, когда v_i — многочлены по $z_1, \ldots, z_n$, причем система (3.1) квазиоднородна с натуральными показателями квазиоднородности g_i. Эти условия заведомо выполняются, если v_i — многочлены второй степени по z; здесь $g_i = 1$. Пусть u — поле симметрий системы (3.1) с аналитическими компонентами. После подстановки $z_i \to \alpha^{g_i} z_i$ система (3.1) перейдет в систему $\dot{z} = \alpha v(z)$, а поле u — в поле $\sum\limits_{m\geqslant 1} \alpha^m u_m(z)$, где u_m — квазиоднородное векторное поле степени m. Если поля u и v коммутируют, то, очевидно, все поля u_m $(m \geqslant 1)$ являются полями симметрий системы (3.1).

С л е д с т в и е 3. *Предположим, что среди показателей Ковалевской нет отрицательных целых чисел, кроме числа $\rho = -1$, которое является однократным корнем характеристического уравнения $\det \|K - \rho E\| = 0$. Тогда система (3.1) не допускает такого поля симметрий u с аналитическими компонентами, что векторы $u(c)$ и $v(c)$ линейно независимы.*

4. Рассмотрим уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_k = \frac{\partial H}{\partial y_k}, \quad \dot{y}_k = -\frac{\partial H}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.13}$$

с квазиоднородным гамильтонианом степени h:

$$H(\alpha^{g_1} x_1, \alpha^{f_1} y_1, \ldots, \alpha^{g_n} x_n, \alpha^{f_n} y_n,) = \alpha^h H(x, y). \tag{3.14}$$

Здесь g_k, f_k — набор показателей квазиоднородности. Нетрудно убедиться в том, что уравнения (3.13) будут квазиоднородными в смысле определения п. 1, если $f_k + g_k = h - 1$ для всех k $(k = 1, \ldots, n)$. В этом случае среди показателей Ковалевской всегда будут числа $\rho_1 = h$ и $\rho_2 = -1$.

Предположим, что (3.13) допускает частные решения

$$x_k = u_k t^{-g_k}, \quad y_k = v_k t^{-f_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.15}$$

причем $\sum(|u_k| + |v_k|) \neq 0$.

Т е о р е м а 3. *Пусть $\Phi(x, y)$ — квазиоднородный интеграл степени m уравнений (3.13), независимый от гамильтониана (3.14)* *в точке $(x,y)=(u,v)$: ранг матрицы Якоби функций H и Φ равен двум. Тогда $\rho_1 = m$ и $\rho_2 = h-m-1$ — показатели Ковалевской.*

Доказательство. Так как Φ — квазиоднородный интеграл уравнений (3.13), то $\rho = m$ — показатель Ковалевской (теорема Иошиды). Гамильтонова система уравнений

$$x_k' = \frac{\partial \Phi}{\partial y_k}, \quad y_k' = -\frac{\partial \Phi}{\partial x_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n, \tag{3.16}$$

квазиоднородна степени $m+1-f_k-g_k = m+1-h$. Функции H и Φ находятся в инволюции, поэтому гамильтоново поле (3.16) является полем симметрий для системы (3.13). Функции H и Φ независимы в точке (x,y), поэтому остается применить теорему 2.

Замечание. При $m \neq h$ условие независимости функций H и Φ можно, очевидно, заменить более слабым: $d\Phi \neq 0$ при $x=u$, $y=v$.

Отметим, что сумма $\rho_1+\rho_2 = h-1$ не зависит от степени квазиоднородности интеграла. Это не случайно: показатели Ковалевской для квазиоднородных гамильтоновых систем разбиваются на пары, сумма которых равна $h-1$. Это утверждение является аналогом известной теоремы Пуанкаре — Ляпунова о возвратности характеристического уравнения для мультипликаторов периодического решения уравнений Гамильтона. Доказательство основано на простом замечании о том, что уравнения в вариациях (3.5) в рассматриваемом случае будут гамильтоновыми:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_i &= \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial x_k}\xi_k + \sum \frac{\partial^2 H}{\partial y_i \partial y_k}\eta_k, \\ \dot{\eta}_i &= -\sum \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_k}\xi_k - \sum \frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_k}\eta_k, \quad i=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{3.17}$$

Здесь в выражения для вторых производных гамильтониана H надо подставить формулы (3.15). Пусть (ξ,η) и (ξ^*,η^*) — два решения уравнений (3.17). Легко проверить, что сумма

$$\sum (\xi_k \eta_k^* - \xi_k^* \eta_k) \tag{3.18}$$

будет постоянной. Положим

$$\xi_k = \varphi_k t^{g_k-\rho_1}, \quad \eta_k = \psi_k t^{f_k-\rho_1}, \quad \xi_k^* = \varphi_k^* t^{g_k-\rho_2}, \quad \eta_k^* = \psi_k^* t^{f_k-\rho_2}.$$

Тогда (3.18) примет вид $t^{f_k+g_k-\rho_1-\rho_2}\sum(\varphi_k\psi_k^* - \varphi_k^*\psi_k) = 0$. Эта сумма не зависит от времени в двух случаях: 1) $\rho_1+\rho_2 = f_k+g_k = h-1$; 2) выполнено соотношение

$$\sum (\varphi_k \psi_k^* - \varphi_k^* \psi_k) = 0. \tag{3.19}$$

В случае 2) векторы $\mu = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1 \ldots, \psi_n)^\top$ и $\mu^* = (\varphi_1^*, \ldots, \varphi_n^*, \psi_1^* \ldots, \psi_n^*)^\top$ кособортогональны, т. е. удовлетворяют (3.19). Предположим, что вектор μ косоортогонален всем собственным векторам матрицы K. Поскольку эти векторы образуют базис в $\mathbb{R}^{2n}$, то μ косоортогонален всем векторам из $\mathbb{R}^{2n}$. Но тогда $\mu = 0$. Итак, всегда найдется такой вектор μ^*, что сумма (3.19) отлична от нуля, что и требовалось доказать.

Предположим, что степени квазиоднородности гамильтониана и дополнительного интеграла являются целыми числами. Тогда среди показателей Ковалевской появляется дополнительная пара целых чисел. Одно из них — степень нового интеграла, а другое — взятая с обратным знаком степень гамильтонова поля симметрий, порождаемого этим интегралом.

5. Для того чтобы лучше понять смысл теорем 1 и 2, перейдем к новой независимой переменной τ по формуле $t = \exp(i\tau)$. Тогда система (3.1) будет иметь частное решение

$$z_j = c_j \exp(-ig_j\tau), \quad 1 \leqslant j \leqslant n. \tag{3.20}$$

В общем случае это решение условно-периодическое; показатели квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$ играют роль постоянных частот. Обозначая штрихом дифференцирование по τ, перепишем уравнения в вариациях (3.7):

$$\xi_j' = i \sum_k \frac{\partial v_j}{\partial z_k}(c) e^{i(g_k - g_j)\tau} \xi_k. \tag{3.21}$$

Эта линейная система приводима: линейная замена с условно-периодическими коэффициентами сводит ее к системе с постоянными коэффициентами; в новых координатах $\eta_j = \xi_j \exp(ig_j\tau)$ она принимает вид

$$\eta' = iK\eta, \tag{3.22}$$

где K — матрица Ковалевской. Характеристические числа линейной системы (3.22) равны, очевидно, $i\rho_1, \ldots, i\rho_n$, где ρ_j — показатели Ковалевской.

Рассмотрим частный случай, когда система (3.1) однородна: $g_1 = \ldots = g_n = g$. Тогда решение (3.20) — периодическое с периодом $p = 2\pi/g$. Его мультипликаторы, как известно, равны $\exp[p(i\rho_j)]$. Если система (3.1) допускает интеграл, не имеющий критических точек на траектории решения (3.21), то хотя бы один из мультипликаторов равен единице. Это утверждение — следствие результатов в § 8 гл. IV (правда, в § 8 рассматривались вещественные системы дифференциальных уравнений; однако полученные там результаты справедливы, очевидно, и для систем с комплексными переменными и вещественным временем). Пусть

s — степень однородного интеграла системы (3.1). Ввиду (3.8), его "квазиоднородная" степень m равна sg. По теореме Иошиды, среди показателей Ковалевской ρ_j имеется число $m = sg$. Но тогда соответствующий мультипликатор $\exp(i\rho m)$ равен единице. Итак, теорема Иошиды аналогична теореме Пуанкаре о вырождении периодических решений систем дифференциальных уравнений с интегралами без критических точек, но теорема Иошиды содержит дополнительную информацию о степени квазиоднородного интеграла. Аналогия распространяется и на случай несоизмеримых показателей квазиоднородности $g_1, \ldots, g_n$ (ср. с § 9 гл. IV).

6. В качестве примера рассмотрим однородную систему трех дифференциальных уравнений [236]:

$$\dot{z}_1 = \varepsilon_1 z_2 z_3, \quad \dot{z}_2 = \varepsilon_2 z_3 z_1, \quad \dot{z}_3 = \varepsilon_3 z_1 z_2, \tag{3.23}$$

где ε_k — отличные от нуля вещественные постоянные. Такой вид имеют, в частности, уравнения Эйлера динамики твердого тела.

В этом примере $g_1 = g_2 = g_3 = 1$. Следовательно, частные решения (3.23) следует искать в виде $z_k = c_k/t$ $(k = 1, 2, 3)$. Постоянные c_k удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\varepsilon_1 c_2 c_3 = -c_1, \quad \varepsilon_2 c_3 c_1 = -c_2, \quad \varepsilon_3 c_1 c_2 = -c_3.$$

Очевидно, что

$$c_1 = \pm(\varepsilon_2\varepsilon_3)^{-1/2}, \quad c_2 = \pm(\varepsilon_3\varepsilon_1)^{-1/2}, \quad c_3 = \pm(\varepsilon_1\varepsilon_2)^{-1/2}. \tag{3.24}$$

Легко вычислить показатели Ковалевской: независимо от выбора знаков в (3.24) характеристическое уравнение $\det \|K - \rho E\| = 0$ имеет тривиальный корень $\rho = -1$ и двукратный корень $\rho = 2$.

Последнее обстоятельство указывает на возможность наличия у уравнений (3.23) двух независимых интегралов, квадратичных по z. Действительно, функция

$$f = \sum a_j z_j^2, \quad \sum a_j \varepsilon_j = 0, \quad \sum a_j^2 \neq 0\,, \tag{3.25}$$

является интегралом системы (3.23), причем среди критических точек этой функции нет точек вида (3.24). Имеется два линейно независимых вектора (a_1, a_2, a_3), удовлетворяющих второму уравнению (3.25), поэтому уравнения (3.23) допускают два независимых квадратичных интеграла.

Аналогичные соображения можно использовать для поиска интегралов и групп симметрий более сложных квазиоднородных систем. Однако такой подход не всегда приводит к цели, поскольку теоремы 1 и 2 дают лишь необходимые условия существования и, более того, содержат информацию лишь об интегралах и полях симметрий с дополнительными свойствами в точках $z = c$.

§ 4. Числа Ковалевской обобщенных цепочек Тоды

1. В § 9 гл. II были введены числа Ковалевской: это — количество различных "полных" семейств мероморфных решений аналитических систем дифференциальных уравнений. Ниже числа Ковалевской будут найдены для одного класса гамильтоновых систем, обобщающих цепочки Тоды. Будет показано, что системы с максимально возможным числом Ковалевской вполне интегрируемы. Этот любопытный результат аналогичен классическому результату Ковалевской в динамике тяжелого твердого тела.

Рассмотрим гамильтоновы системы с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} y_k^2 + \sum_{l=1}^{N} v_l \exp(a_l, x). \tag{4.1}$$

Здесь $v_l \in \mathbb{R}$, $a_1, \ldots, a_N$ — векторы из $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — канонические координаты, сопряженные с $y = (y_1, \ldots, y_n)$; $(\ ,\ )$ — стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Системы такого вида часто встречаются в приложениях (см. [20, 159]).

Систему с гамильтонианом (4.1) назовем *обобщенной цепочкой Тоды*, если выполнены следующие условия:

(i) векторы $a_1, \ldots, a_{n+1}$ таковы, что любые n из них линейно независимы, и $\sum\limits_{s=1}^{n+1} p_s a_s = 0$, где все $p_s > 0$;

(ii) векторы $a_1, \ldots, a_N$ так группируются в семейства F_s $(s = 1, \ldots, n+1)$, что каждый вектор a_j из F_s сонаправлен с a_s, и $|a_j| \leqslant |a_s|$;

(iii) $v_s \neq 0$ для всех s $(s = 1, \ldots, n+1)$.

Сюда относятся обычные замкнутые цепочки Тоды и их интегрируемые обобщения, найденные в работах [176, 180].

Отметим, что во всех проинтегрированных случаях импульсы $y_1, \ldots, y_n$ и экспоненты $\exp(a_1, x), \ldots, \exp(a_N, x)$ оказываются мероморфными функциями комплексифицированного времени t. В связи с этим замечанием возникает интересная задача об условиях существования у гамильтоновой системы $\dot{x} = H'_y$, $\dot{y} = -H'_x$ с функцией Гамильтона (4.1) $\mathbf{k}$ различных семейств формально мероморфных решений вида

$$\begin{gathered} y = \sum_{s=-M}^{\infty} b_s t^s, \quad \exp(a_l, x) = \sum_{s=-M_l}^{\infty} A_s^l t^s, \\ b \in \mathbb{C}^n, \quad A_s^l \in \mathbb{C}, \quad b_{-M} \neq 0, \quad M > 0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

коэффициенты которых зависят от $2n - 1$ "свободных" параметров. Такая задача рассматривалась ранее в работе [182] для некоторых типов цепочек на плоскости ($n = 2$ и $\mathbf{k} = 1$), а также в работе [177] для произвольного n и $\mathbf{k} = n+1$ в предположении, что каждое из множеств F_s состоит из единственного вектора a_s. Было установлено, что если уравнения Гамильтона имеют достаточное количество различных семейств мероморфных решений, то они допускают n независимых и полиномиальных по импульсам интегралов и поэтому являются интегрируемыми по Лиувиллю. Обратное утверждение не имеет смысла. Действительно, при $n = 1$ каждая система интегрируема по Лиувиллю, однако, как будет показано ниже, предположение $\mathbf{k} \geqslant 1$ налагает довольно жесткие ограничения на структуру множества векторов $a_1, \ldots, a_N$.

Т е о р е м а 1 [104]. *Неравенство $\mathbf{k} \geqslant k_0$ имеет место в том и только том случае, когда существует такое множество индексов $I \subset \{1, 2, \ldots, n+1\}$, $\operatorname{card} I = k_0$, что:*

1) *для любого индекса $s \in I$ множество $F_s \setminus \{a_s\}$ либо пусто, либо содержит единственный вектор $a_s/2$;*

2) *для любых s и r ($s \in I$, $1 \leqslant r \leqslant N$, $a_r \notin F_s$) выполнены соотношения*

$$2(a_s, a_r)/(a_s, a_s) \in -\mathbb{Z}_+, \quad \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}. \tag{4.3}$$

С л е д с т в и е. *Имеет место неравенство $\mathbf{k} \leqslant n+1$.*

Рассмотрим более подробно обобщенные цепочки Тоды с максимально возможным числом Ковалевской $\mathbf{k} = n+1$. В этом случае условия 1) и 2) теоремы 1 принимают следующий вид:

1) для любого s ($1 \leqslant s \leqslant n+1$) множество $F_s \setminus \{a_s\}$ либо пусто, либо состоит из одного вектора $a_s/2$;

2) для любых двух линейно независимых векторов a_s и a_r, $1 \leqslant s \leqslant n+1$, выполняется соотношение (4.3).

Эти два свойства позволяют классифицировать обобщенные цепочки Тоды с $\mathbf{k} = n+1$. Цепочку назовем *полной*, если к гамильтониану (4.1) нельзя добавить экспоненциальное слагаемое $u\exp(b, x)$, $u \neq 0$, $b \neq a_j$ ($1 \leqslant j \leqslant N$), не нарушая условий (i)–(iii) из п. 1, а также условий 1), 2) теоремы 1. Ясно, что любая обобщенная цепочка, для которой $\mathbf{k} = n+1$, получается из некоторой полной цепочки, если отбросить часть векторов вида $a_s/2$, $1 \leqslant s \leqslant n+1$.

Пусть $n = 1$. Тогда, согласно теореме 1, набор векторов $\{a_j\}$ полной одномерной цепочки Тоды с максимальным числом Ковалевской $\mathbf{k} = 2$ совпадает с одним из трех множеств:

1) $\{-2\mu, -\mu, \mu, 2\mu\}$; 2) $\{-\mu, \mu, 2\mu\}$; 3) $\{-2\mu, -\mu, \mu\}$,

где μ — некоторое положительное число. Случаи 2) и 3) можно не различать, так как после канонической замены $x \to -x$, $y \to -y$ соответствующие гамильтонианы переходят друг в друга.

2. Теорема 1 позволяет перечислить в явном виде все обобщенные цепочки Тоды с максимально возможным числом Ковалевской. Это перечисление, по существу, сводится к классификации систем $n+1$ векторов $a_1, \ldots, a_{n+1}$ в n-мерном евклидовом пространстве, для которых

а) каждая собственная подсистема линейно независима и $\sum\limits_{s=1}^{n+1} p_s a_s = 0$ $(p_s > 0)$;

б) для любой пары векторов $a_s \neq a_r$ выполняется соотношение (4.3).

В свою очередь, эта задача тесно связана с теорией корневых систем, играющих важную роль в современной математике (конечные группы отражений евклидовых пространств, полупростые алгебры Ли и т. д.; см., например, [35]). Неожиданная связь между вполне интегрируемыми обобщенными цепочками Тоды и корневыми системами, подмеченная впервые О. И. Богоявленским [180], выглядит весьма таинственной.

В связи со сказанным уместно изложить основные идеи теории корневых систем. Пусть V — n-мерное линейное пространство со скалярным произведением $(\ ,\ )$, и α — ненулевой вектор из V. Отражением относительно вектора α называется ортогональное преобразование s пространства V, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $s(\alpha) = -\alpha$;

2) если $s(x) = x$, то $(x, \alpha) = 0$, и наоборот.

Конечное множество S ненулевых векторов из V называется корневой системой, если:

(i) S порождает V;

(ii) для любого $\alpha \in S$ отражение s_α (относительно α) переводит множество S в себя;

(iii) для любых $\alpha, \beta \in S$ $\quad s_\alpha(\beta) - \beta = n\alpha$ $(n \in \mathbb{Z})$.

Элементы множества S — "корни" пространства V. Поскольку $s_\alpha(x) = x - 2\dfrac{(x,\alpha)}{(\alpha,\alpha)}\alpha$ $\quad (x \in V)$, условие (iii) эквивалентно следующему (ср. с (4.3)):

$$2\frac{(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)} \in \mathbb{Z}, \qquad \alpha, \beta \in S. \tag{4.4}$$

Подмножество $B \subset S$ называется базисом (или системой простых корней), если: 1) B — базис векторного пространства V;

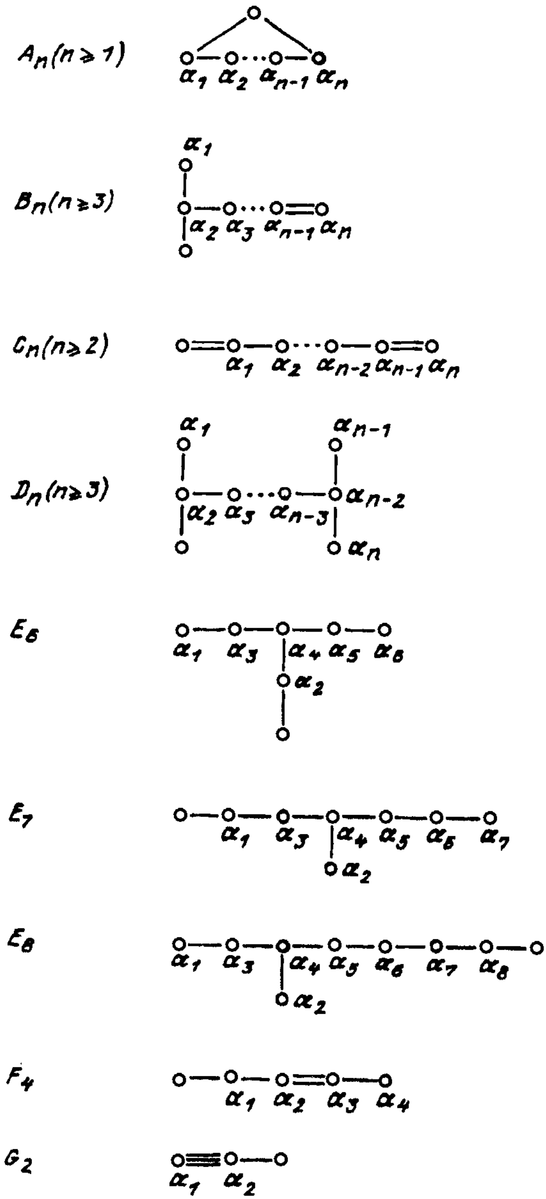
$A_n (n \geq 1)$
α_1 α_2 α_{n-1} α_n
$B_n (n \geq 3)$
α_1
α_2 α_3 α_{n-1} α_n
$C_n (n \geq 2)$
α_1 α_2 α_{n-2} α_{n-1} α_n
$D_n (n \geq 3)$
α_1 α_{n-1}
α_{n-2}
α_2 α_3 α_{n-3}
α_n
E_6
α_1 α_3 α_4 α_5 α_6
α_2
E_7
α_1 α_3 α_4 α_5 α_6 α_7
α_2
E_8
α_1 α_3 α_4 α_5 α_6 α_7 α_8
α_2
F_4
α_1 α_2 α_3 α_4
G_2
α_1 α_2

Рис. 35

2) все корни представимы в виде линейных комбинаций $\sum\limits_{i=1}^{n} m_i\alpha_i$ ($\alpha_i \in B$) с целыми коэффициентами m_i одного знака (т. е. или при всех i $m_i \geqslant 0$, или при всех i $m_i \leqslant 0$). Оказывается, для всякой системы корней базис всегда существует. Полезно ввести максимальный корень

$$\alpha^* = \sum p_i\alpha_i, \quad \alpha_i \in B, \tag{4.5}$$

обладающий тем свойством, что для любого корня $\sum q_i\alpha_i$ справедливы неравенства $p_1 \geqslant q_1, \ldots, p_n \geqslant q_n$.

Ввиду (4.4) и (4.5) система $n+1$ векторов $B^* = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, -\alpha^*\}$ удовлетворяет условиям а) и б), сформулированным выше (в начале п. 2). Классификация "пополненных" систем простых корней B^* использует графы Кокстера: каждый вектор изображается точкой на плоскости, причем точки, отвечающие векторам α и β, соединены $4\cos^2\varphi$ ребрами, где φ — угол между α и β. Так как $\dfrac{2(\alpha,\beta)}{(\alpha,\alpha)}$ и $\dfrac{2(\beta,\alpha)}{(\beta,\beta)}$ — целые числа, то их произведение (равное $4\cos^2\varphi$), также является целым числом, не превосходящим 4. Связный граф Кокстера пополненной системы простых корней изоморфен одному из графов, изображенных на рис. 35.

Граф Кокстера не дает информации о соотношениях длин векторов. Поэтому обычно рассматривают "оснащенный" граф Кокстера (называемый схемой Дынкина): каждой вершине приписывается коэффициент, пропорциональный квадрату длины соответствующего вектора из B^*. Оказывается, "оснащение" указанных выше графов Кокстера восстанавливается однозначно.

Полная интегрируемость обобщенных цепочек Тоды в случае, когда $a_1, \ldots, a_{n+1}$ принадлежат пополненным системам простых корней, установлена в работе [180]. В [176] этот результат обобщен на системы векторов, удовлетворяющих условиям а) и б) п. 2. Классификация таких систем представляет родственную, но более сложную задачу (см., например, [202]). Их графы Кокстера те же самые, однако схемы Дынкина более разнообразны. Так, например, графу G_2 отвечают две различные схемы (см. рис. 36).

Рис. 36

Теорема 2 [104]. *Рассмотрим полную цепочку Тоды с числом Ковалевской* $\mathbf{k} = n+1$. *При* $n \geqslant 2$ *схема Дынкина системы векторов* $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}^n$ *изоморфна одной из схем, изображенных на рис. 37.*

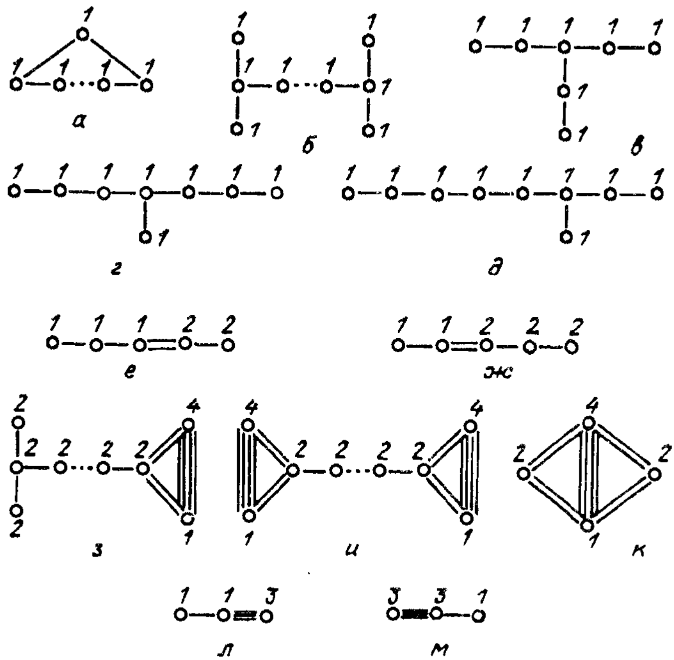

Рис. 37

Доказательство основано на результатах, изложенных в [202, добавление]. Гамильтониан $H = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \sum_{s=1}^{n+1} v_s \exp(a_s, x)$ отвечает "неполной" цепочке с максимальным числом Ковалевской. "Полные" диаграммы Дынкина а)–м) получены из диаграммы работы [177] с учетом возможности добавления векторов вида $a_s/2$.

3. Перейдем к доказательству теоремы 1. Проверим сначала необходимость условий теоремы. Пусть $y(t)$, $x(t)$ — решение вида (4.2). Запишем уравнения Гамильтона в явном виде:

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -\sum_{l=1}^{N} v_l a_l \exp(a_l, x). \tag{4.6}$$

Из первого уравнения находим

$$x = b_{-M} t^{1-M}/(1-M) + \ldots + b_{-1} \ln t + b' + b_0 t + \ldots,$$

где b' — постоянная интегрирования.

Функции $\exp(a_l, x)$ должны быть формально мероморфными, поэтому $b_j = 0$ при всех $j < -1$. Коэффициент b_{-1} отличен от нуля (иначе решение будет голоморфным). В силу равенства

$$\exp(a_l, x) = t^{(a_l, b_{-1})} \exp(a_l, b' + b_0 t + \ldots)$$

все величины (a_l, b_{-1}), $l = 1, \ldots, N$, являются целыми числами. Второе уравнение (4.6) принимает вид

$$-b_{-1}t^{-2} + b_1 + 2b_2 t + \ldots = -\sum_{l=1}^{N} a_l v_l t^{(a_l, b_{-1})} \exp(a_l, b' + b_0 t + \ldots). \quad (4.7)$$

Лемма 1. *Пусть* $m = \min(a_l, b_{-1})$. *Тогда*

1) *если* $(a_j, b_{-1}) = m$, то $j \leqslant n + 1$;
2) $(a_s, b_{-1}) > 0$ *при некотором* $s \leqslant n + 1$;
3) $m = -2$.

Доказательство. 1. Если $(a_j, b_{-1}) = m$ при $j > n + 1$, то в силу условия (ii) существует такой вектор a_s $(s \leqslant n + 1)$, что $a_s = u a_j$, $u > 1$; следовательно, $(a_s, b_{-1}) < m$.

2. Пусть для всех l $(1 \leqslant l \leqslant n + 1)$ выполнено $(a_l, b_{-1}) < 0$. Умножим равенство $\sum p_j a_j = 0$ скалярно на b_{-1}. Получим $\sum p_j (a_j, b_{-1}) = 0$, что противоречит положительности величин p_j.

3. Так как $b_{-1} \neq 0$, то в силу равенства (4.7) $m \leqslant -2$. Пусть векторы $a_{j_1}, \ldots, a_{j_\mu}$ таковы, что $(a_{j_s}, b_{-1}) = m$ $(s = 1, \ldots, \mu)$, $(a_l, b_{-1}) > m$ $(l \notin \{j_1, \ldots, j_\mu\})$. В силу 1), 2) имеем $j_s \leqslant n + 1$, $\mu < n + 1$. Таким образом, можно считать, что $j_s = s$, $s = 1, \ldots, \mu$. Пусть $m < -2$. Тогда из уравнения (4.7) получаем $\sum\limits_{j=1}^{\mu} a_j v_j \exp(b', a_j) = 0$.

В силу свойства (i) это равенство может выполняться лишь в случае $\mu = n + 1$; следовательно, $m \geqslant -2$. Итак, $m = -2$, и лемма 1 полностью доказана.

Пусть $a_1, \ldots, a_\mu$ $(\mu < n + 1)$ — такие векторы, что $(a_1, b_{-1}) = \ldots = (a_\mu, b_{-1}) = -2$, $(a_l, b_{-1}) > -2$ $(l > \mu)$. Пусть множество $W = \{c_1, \ldots, c_\nu\} \subset \{a_1, \ldots, a_N\}$ таково, что $(c_1, b_{-1}) = \ldots = (c_\nu, b_{-1}) = -1$, и для всех $a_j \notin W$ имеем $(a_j, b_{-1}) \neq -1$.

Лемма 2. *При сделанных предположениях* $\nu \leqslant \mu$ *и* $c_j = a_{l(j)}/2$, $j = 1, \ldots, \nu$; $l(j) \leqslant \mu$.

Доказательство. В силу (4.7) выполняется равенство

$$0 = \sum_{j=1}^{\mu} a_j v_j (a_j, b_0) \exp(b', a_j) + \sum_{j=1}^{\nu} c_j v_j' \exp(b', c_j),$$

где v_j' — коэффициенты при $\exp(c_j, x)$ в (4.1). Так как любой вектор c_s параллелен какому-нибудь вектору a_l, $l \in \{1, \ldots, n+1\}$, то последнее равенство имеет вид $\sum\limits_{s=1}^{n+1} a_s\omega_s = 0$, где ω_s — некоторые коэффициенты. Все векторы из множества $\{a_1, \ldots, a_{n+1}\}$ в этой сумме не могут присутствовать с ненулевыми коэффициентами (в силу п. 2 леммы 1 хотя бы для одного из этих векторов его скалярное произведение с b_{-1} положительно); следовательно, все величины ω_s равны нулю. Это может быть лишь в случае

$$\begin{gathered} c_j = a_{l(j)}/2, \quad j = 1, \ldots, \nu; \quad l(j) \leqslant \mu, \\ v_j' = -2v_{l(j)}\left(a_{l(j)}, b_0\right)\exp\left[(b', a_{l(j)})/2\right], \\ (a_s, b_0) = 0, \text{ если } s \leqslant \mu \text{ и } s \neq l(q), \quad q \in \{1, \ldots, \nu\}. \end{gathered} \tag{4.8}$$

Лемма 2 доказана.

Л е м м а 3. *Имеет место соотношение* $\mu = 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Покажем, что в при $\mu > 1$ не удастся "набрать" $2n-1$ произвольную постоянную в решении уравнений (4.6). В самом деле, вектор b_{-1} фиксирован; в силу равенства

$$b_{-1} = \sum_{j=1}^{\mu} a_j v_j \exp(b', a_j) \tag{4.9}$$

(см. (4.7)) на вектор b' наложено μ условий. Значит, b' содержит не более $n-\mu$ свободных параметров. Равенства (4.8) дают μ условий на компоненты вектора b_0, поэтому b_0 также содержит не более $n-\mu$ свободных параметров.

Приравнивая в уравнении (4.7) коэффициенты при t^j, $j = 1, 2, \ldots$, получаем соотношения

$$b_j + G\,b_j/[j(j+1)] = Q_j, \tag{4.10}$$

где линейный оператор G имеет вид

$$G\,b = \sum_{s=1}^{\mu} a_s v_s (a_s, b)\exp(b', a_s), \tag{4.11}$$

а функции Q_j не зависят от b_s $(s \geqslant j)$.

Оператор G переводит пространство, ортогональное линейной оболочке векторов $a_1, \ldots, a_\mu$, в нуль. Следовательно, уравнение $\det(E - \lambda G) = 0$ имеет не более μ действительных корней. Таким образом, из уравнений (4.10) можно извлечь не более μ свободных параметров. Подчеркнем, что мы пока не интересуемся разрешимостью этих уравнений.

Итак, получено не более $n-\mu+n-\mu+\mu=2n-\mu$ свободных параметров; значит, $\mu \leqslant 1$. Из равенства (4.9) следует $\mu \geqslant 1$. Лемма 3 доказана.

Мы показали, что для существования $(2n-1)$-параметрического формально мероморфного решения уравнений (4.6) необходимо выполнение следующих условий:

а) $(b_{-1}, a_s) = -2$ для некоторого $s \in \{1, 2, \ldots, n+1\}$;

б) $(b_{-1}, a_l) \in \mathbb{Z}_+$ для всех $a_l \notin F_s$;

в) семейство F_s может содержать кроме a_s лишь один вектор $a_s/2$.

Из равенства (4.9) и условия а) находим

$$(a_s, a_s) v_s \exp(b', a_s) = -2, \tag{4.12}$$

$$b_{-1} = -2a_s/(a_s, a_s). \tag{4.13}$$

Таким образом, условие б) представляется в виде

$$\frac{2(a_s, a_l)}{(a_s, a_s)} \in -\mathbb{Z}_+ \quad \text{при} \quad a_l \notin F_s.$$

Итак, каждому $(2n-1)$-параметрическому формально мероморфному решению уравнений (4.6) отвечает индекс s, удовлетворяющий условиям 1) и 2) теоремы 1. Тем самым доказана необходимость этих условий.

Теперь проверим достаточность этих условий. Для этого каждому индексу $s \in I$ сопоставим $(2n-1)$-параметрическое формально мероморфное решение. Пусть b_{-1} удовлетворяет равенству (4.13), и пусть величины b', b_0 стеснены соотношениями (4.8), (4.9), в которых $j = l(j) = \mu = 1$. Необходимо доказать, что уравнения (4.10) разрешимы, причем имеется однопараметрическое семейство решений.

Пусть $s = 1$. Будем считать, что $a_1/2 \in \{a_1, \ldots, a_N\}$ (в противном случае коэффициент v_1' при $\exp(a_1/2, x)$ в (4.1) положим равным нулю). Из соотношений (4.11), (4.12) получаем $Gb = -2a_1(a_1, b)/(a_1, a_1)$.

Ранг оператора G равен единице, причем его ненулевое собственное значение равно -2: $Ga_1 = -2a_1$. Таким образом, операторы $E + G/[j(j+1)]$ невырождены при $j = 2, 3, \ldots$, и уравнения (4.10) имеют единственное решение при $j \neq 1$.

Запишем уравнение (4.10) при $j = 1$ подробнее:

$$b_1 - a_1(a_1, b_1)/(a_1, a_1) = -a_1 v_1 \exp(b', a_1) \cdot (a_1, b_0)^2/2 - \\ - \frac{a_1}{2} v_1' \exp\left(b', \frac{a_1}{2}\right) \cdot \left(\frac{a_1}{2}, b_0\right) - \sum f_l v_l'' \exp(f_l, b_{-1}), \tag{4.14}$$

где f_l — векторы из семейства $\{a_1, \ldots, a_N\}$, для которых $(f_l, a_1) = 0$, а v_l'' — соответствующие коэффициенты в гамильтониане (4.7). В силу равенства (4.8), первые два слагаемых правой части уравнения (4.14) взаимно уничтожаются. Следовательно, решением уравнения (4.14) является вектор $b_{-1} = -\sum f_l v_l'' \exp(f_l, b_{-1}) + \xi a_1$, где ξ — нужный нам свободный параметр.

Теорема 1 доказана.

4. Можно указать простые необходимые условия однозначности общего решения систем с экспоненциальным взаимодействием (их частный случай — обобщенные цепочки Тоды из п. 1) и связать их с наличием дополнительных полиномиальных интегралов. Рассмотрим гамильтонову систему с функцией Гамильтона

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} y_i^2 + \sum_{i=1}^{N} c_i \exp(a_i, x), \quad c_i \neq 0.$$

Вводя избыточные координаты $v_j = \exp(a_j, x)$, $u_j = (a_j, y)$ $(1 \leqslant j \leqslant N)$, запишем дифференциальные уравнения Гамильтона

$$\dot{x}_i = \partial H/\partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial H/\partial x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$

в виде системы с полиномиальными правыми частями:

$$\dot{u}_i = \sum_{j=1}^{N} M_{ij} v_j, \quad \dot{v}_i = v_i u_i, \quad M_{ij} = -c_j (a_i, a_j). \tag{4.15}$$

Эти уравнения имеют, кроме интеграла энергии, ряд тривиальных интегралов. В самом деле, пусть $\sum\limits_{k=1}^{N} \alpha_k a_k = 0$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$. Тогда функции

$$F = \sum_{k=1}^{N} \alpha_k u_k, \quad \Phi = \prod_{k=1}^{N} v_k^{\alpha_k} \tag{4.16}$$

являются, очевидно, интегралами (4.15). Для действительных движений $F = 0, \Phi = 1$. Уравнения вида (4.15) использовались ранее в работе [177]. Для цепочек Тоды мы рассмотрели их в § 9 гл. II.

Система уравнений (4.15) квазиоднородна; степень квазиоднородности по переменным u равна единице, а по v — двум. Поэтому для выяснения однозначности ее общего решения можно воспользоваться результатами § 9 гл. II, восходящими к Ляпунову. Уравнения (4.15) имеют частные мероморфные решения

$$\begin{gathered} u_i = U_i/t, \quad v_i = V_i/t^2, \quad 1 \leqslant i \leqslant N; \\ U_i = -2M_{ik}/M_{kk}; \quad V_i = 0, \quad i \neq k, \quad V_k = 2/M_{kk}. \end{gathered} \tag{4.17}$$

Запишем уравнения в вариациях для системы (4.15) в окрестности решений (4.17): $\dot{\xi}_i = \sum\limits_{j=1}^{N} M_{ij}\eta_j$, $\dot{\eta}_i = U_i\eta_i/t + V_i\xi_i/t^2$. Их решения ищем в виде $\xi_i = \varphi_i t^{\rho-1}$, $\eta_i = \psi_i t^{\rho-2}$.

Для отыскания φ_i, ψ_i получаем линейную однородную систему уравнений со спектральным параметром ρ:

$$(\rho-2)\psi_i = \psi_i U_i + \varphi_i V_i, \quad (\rho-1)\varphi_i = \sum_j M_{ij}\psi_j, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant N.$$

С учетом формул (4.17) можно найти все корни соответствующего характеристического уравнения Ковалевской: $\rho = 1$ (кратности $N-1$), $\rho = -1$, $\rho = 2$, а также $\rho = 2 - 2(a_i, a_k)/(a_k, a_k)$, $i \neq k$.

Если общее решение системы (4.15) однозначно при комплексных значениях t, то все корни ρ должны быть целыми числами. Следовательно, для всех значений i, j имеем

$$2(a_i, a_j)/(a_j, a_j) \in \mathbb{Z}. \tag{4.18}$$

Если векторы $a_1, \ldots, a_N$ составляют корневую систему, то условие (4.18) заведомо выполнено. Не исключено, что в этом случае общее решение (4.15), действительно, представляется однозначными (но не обязательно мероморфными) функциями t (ср. с теоремой 1 п. 1).

Обсудим теперь задачу о наличии у системы (4.17) дополнительных первых интегралов, полиномиальных по u и v. Легко видеть, что каждый такой интеграл является конечной суммой квазиоднородных полиномиальных интегралов, степени квазиоднородности которых по переменным u и v равны соответственно 1 и 2. Итак, пусть $F(u, v)$ — квазиоднородный интеграл системы (4.15) степени m. Согласно теореме 1 § 3, если точка $u_i = U_i$, $v_i = V_i$, где U_i, V_i определяются из (4.17), не является критической точкой функции F, то число m совпадает с одним из указанных выше характеристических корней ρ. Следует отметить, что не все интегралы удовлетворяют этому условию; исключение составляют тривиальные интегралы Φ из серии (4.16). Если имеются k квазиоднородных интегралов одной и той же степени m, независимых в точке $(u, v) = (U, V)$, то корень $\rho = m$ имеет кратность не менее k.

Предположим, что имеется "хороший" квазиоднородный интеграл степени $m \geqslant 2$, независимый от интеграла энергии в точках вида $u_i = -2M_{ik}/M_{kk}$, $v_i = 0$ $(i \neq k)$, $v_k = 2/M_{kk}$. Тогда для каждого $i = 1, \ldots, N$ найдется такое $j \neq i$, что $2(a_i, a_j)/(a_j, a_j) \in -\mathbb{Z}_+$, причем все эти величины равны. Неясно, является ли это условие достаточным для существования "хорошего" квазиоднородного интеграла. Все интегралы степени $m = 1$ имеют вид (4.16).

Условия существования k дополнительных "хороших" полиномиальных интегралов степени $m \geqslant 2$ интересно сравнить с условиями существования k "полных" семейств мероморфных решений. Такое сравнение проще всего осуществить для обобщенных цепочек Тоды, у которых $N = n + 1$. С этой целью рассмотрим $(n+1) \times (n+1)$-матрицу L с элементами $L_{ij} = 2(a_i, a_j)/(a_j, a_j)$ $(i \neq j)$, $L_{ii} = 0$. Если имеется k дополнительных к интегралу энергии независимых квазиоднородных интегралов степени $m \geqslant 2$, то, согласно результатам § 9 гл. II, в каждой строке матрицы L найдется по меньшей мере k целых неположительных чисел. Если же число Ковалевской такой системы не меньше k, то по теореме 1 в матрице L имеется по крайней мере k строк, все элементы которых являются целыми положительными числами. Эти условия совпадают лишь при $k = n + 1$.

§ 5. Группы монодромии гамильтоновых систем с однозначными интегралами

1. Наряду с методом малого параметра Пуанкаре (см. § 1), известен еще один эффективный прием исследования ветвления решений аналитических систем дифференциальных уравнений; он предложен А. М. Ляпуновым в 1894 г. [118] и основывается на изучении уравнений в вариациях известных частных решений.

Рассмотрим в $\mathbb{C}^n$ систему уравнений

$$\dot{z} = v(z) \tag{5.1}$$

с голоморфными правыми частями; пусть $z_0(t)$ — некоторое ее частное решение. Подстановка $z = z_0 + \xi$ переводит (5.1) в систему

$$\dot{\xi} = A(t)\xi + \ldots, \quad A = \frac{\partial v}{\partial z}(z_0(t)) \tag{5.2}$$

(многоточие означает члены порядка $\geqslant 2$). Линеаризованная система

$$\dot{\xi} = A(t)\xi, \tag{5.3}$$

как известно, является системой уравнений в вариациях для решения $z_0(\cdot)$. Оказывается, если система (5.3) имеют неоднозначные решения, то такова же и исходная система (5.1). Действительно, заменяя ξ на $\varepsilon\xi$ и считая ε малым параметром, получим систему $\dot{\xi} = A(t)\xi + O(\varepsilon)$. Ее решения представим в виде ряда $\xi_0 + \varepsilon\xi_1 + \ldots$, где ξ_0 — решение уравнений в вариациях (5.3). Следовательно, $z = z_0 + \varepsilon\xi_0 + o(\varepsilon)$. В частности, если при обходе некоторого замкнутого контура на комплексной плоскости функция $\xi_0(\cdot)$ получает ненулевое приращение, то при малых $\varepsilon \neq 0$ это же выполнено и для решения $z(\cdot)$ (теорема Пуанкаре из § 1).

Метод Ляпунова фактически использовался в § 9 гл. II при анализе квазиоднородных систем.

2. Итак, полезно рассмотреть систему n линейных уравнений (5.3), где элементы матрицы A — голоморфные функции, определенные на некоторой связной римановой поверхности X. Например, если элементы $A(t)$ — мероморфные на $\mathbb{C}$ функции, то X — комплексная плоскость с некоторым количеством выколотых точек (полюсов).

Локально при заданном начальном условии $\xi(t_0) = \xi_0$ $(t_0 \in X)$ всегда существует однозначно определенное голоморфное решение системы (5.3). Его можно продолжать вдоль любой кривой на X, однако это продолжение в общем случае уже не будет однозначной функцией. Пусть γ — ориентированный замкнутый путь, начинающийся и заканчивающийся в точке $t_0 \in X$. Система (5.3) линейна, поэтому любое решение $\xi(t)$ (определенное вначале лишь в малой окрестности точки t_0) можно аналитически продолжить вдоль γ. В результате в той же окрестности точки t_0 получим функцию $\xi_*(t)$, которая также удовлетворяет (5.3). Ввиду линейности системы (5.3) найдется такая комплексная $n\times n$-матрица T_γ, что $\xi_*(t) = T_\gamma\xi(t)$. Если T_γ не совпадает с единичной матрицей, то система (5.3) имеет ветвящиеся решения.

Оказывается, множество матриц $G = \{T_\gamma\}$, отвечающих всевозможным замкнутым путям γ на X, образует группу по умножению. Эта группа называется *группой монодромии* линейной системы (5.3).

Отметим, что на самом деле матрицы $T \in G$ зависят от выбора точки $t_0 \in X$, так что группу монодромии следовало бы обозначать $G(t_0)$. Однако при всех значениях $t_0 \in X$ группы $G(t_0)$ изоморфны.

Чтобы понять групповую структуру множества G, рассмотрим фундаментальную группу $\pi_1(X)$ римановой поверхности X. Ее элементы — классы путей на X с началом и концом в некоторой фиксированной точке t_0, переводящихся друг в друга посредством непрерывной деформации. Такие пути называются гомотопными.

Если имеются два пути σ и τ, то им можно сопоставить третий путь γ по следующему правилу: начало γ совпадает с началом σ; конец σ склеивается с началом τ; конец τ совпадает с концом γ. Путь γ называется произведением путей σ и τ и обозначается $\sigma\tau$. Это произведение корректно определяет операцию умножения классов гомотопных путей: если пути σ и τ гомотопны путям σ' и τ', то их произведения $\sigma\tau$ и $\sigma'\tau'$ также являются гомотопными путями. Множество классов гомотопных путей $\pi_1(X, t_0)$ с операцией умножения образует группу: единичный элемент составляют замкнутые пути, стягиваемые в точку на X; путь σ^{-1} получается из пути σ обращением направления обхода. Оказывается, при разных $t_0 \in X$ группы $\pi_1(X, t_0)$ изоморфны. Действительно, пусть

$t_1 \in X$ и λ — путь, ведущий из точки t_0 в точку t_1. Ясно, что замкнутые пути с началом в точке t_1 гомотопны путям вида $\lambda^{-1}\gamma\lambda$, где γ — некоторый замкнутый путь с началом в точке t_0. Соответствие $\gamma \to \lambda^{-1}\gamma\lambda$ определяет изоморфизм групп $\pi_1(X, t_0)$ и $\pi_1(X, t_1)$, поэтому можно говорить о фундаментальной группе поверхности X, не зависящей от выбора точки t_0.

Можно показать, что

1) аналитическое продолжение вдоль гомотопных путей приводит к одному и тому же результату;

2) если $\tau, \sigma \in \pi_1(X)$, то $T_{\tau\sigma} = T_\tau T_\sigma$.

Следовательно, соответствие $\gamma \to T_\gamma$ определяет гомоморфизм групп $\pi_1(X) \to G$.

Пусть $\Xi(t)$ — решение матричного уравнения $\dot{\Xi} = A(t)\Xi$ с начальным условием $\Xi(t_0) = E$. Продолжим аналитически функцию $\Xi(t)$ в окрестность точки t_0 вдоль пути λ, соединяющего точки t_0 и t_1. Положим $\Lambda = \Xi(t_1)$. Пусть $\gamma' = \lambda^{-1}\gamma\lambda$ — путь с началом в точке t_1 и $T_{\gamma'}$ — соответствующая матрица из группы $G(t_1)$. Нетрудно проверить, что $T_{\gamma'} = \Lambda T_\gamma \Lambda^{-1}$, где $T_\gamma \in G(t_0)$ (ср. с § 8 гл. IV). Это соотношение устанавливает изоморфизм групп $G(t_0)$ и $G(t_1)$. В частности, спектр матриц из группы монодромии $G(t)$ не меняется при варьировании $t \in X$.

Подробное изложение этих вопросов можно найти, например, в книге [42].

В § 8 гл. IV рассматривались вещественные системы, у которых X совпадает с обычной окружностью; $\pi_1(X)$ — бесконечная циклическая группа, а группа монодромии состоит из целочисленных степеней матрицы монодромии соответствующего периодического решения.

3. Пусть $f(z)$ — голоморфный интеграл исходных уравнений (5.1). Разложим функцию $f(z_0 + \xi)$ в ряд Тейлора

$$\sum_{m\geqslant 0} F_m(\xi, t). \tag{5.4}$$

Здесь F_m — однородная форма переменных ξ, однозначная на римановой поверхности X частного решения $z_0(t)$, причем $F_0(t) = f(z_0) = \mathrm{const}$. Ряд (5.4) — интеграл уравнений (5.2). Очевидно, что первая ненулевая форма F_m ($m \geqslant 1$) является интегралом линейных уравнений в вариациях (5.3). Так как функция F_m постоянна на решениях (5.3), то при каждом $t_0 \in X$ однородная форма $F_m(\xi, t_0)$ инвариантна относительно действия группы монодромии: $F_m(T\xi, t_0) = F_m(\xi, t_0)$, $T \in G$. Это свойство налагает жесткие ограничения на вид первых интегралов: если группа G достаточно "богатая", то инвариантными функциями (интегралами) являются лишь константы.

Метод Ляпунова позволяет свести задачу об интегрируемости уравнений (5.1) к задаче теории инвариантов: найти все однородные многочлены, не меняющиеся при линейных преобразованиях из заданной группы.

4. Рассмотрим вектор-функцию $v_0(t) = v(z_0(t))$. Она голоморфна на римановой поверхности X и удовлетворяет уравнению в вариациях (5.3). Следовательно, $Tv_0(t) = v_0(t)$, где T — любая матрица из группы монодромии $G(t)$. Таким образом, если $v(z_0) \not\equiv 0$, то хотя бы одно собственное значение матрицы T равно единице.

Это замечание можно обобщить. Пусть $u(z)$ — поле симметрий системы (5.1) с голоморфными компонентами. Тогда вектор-функция $u_0(t) = u(z_0(t))$ также удовлетворяет (5.3). Действительно, поля u, v коммутируют, поэтому

$$\frac{\partial u}{\partial z} v = \frac{\partial v}{\partial z} u. \tag{5.5}$$

Далее, $\dot u_0 = \dfrac{\partial u}{\partial z}(z_0)\dot z_0 = \dfrac{\partial u}{\partial z} v\Big|_{z_0} = \dfrac{\partial v}{\partial z} u\Big|_{z_0} = \dfrac{\partial v}{\partial z}(z_0)u_0$. Следовательно, $Tu_0(t) = u_0(t)$ для всех $T \in G(t)$. В частности, если имеется m полей симметрий $u_1, \ldots, u_m$ с голоморфными компонентами, причем векторы $u_1, \ldots, u_m$ линейно независимы хотя бы в одной точке комплексной кривой $z = z_0(t)$, $t \in X$, то по меньшей мере $m + 1$ собственных значений матрицы T равны единице.

Аналогично доказывается, что если система (5.1) допускает k голоморфных интегралов $f_1, \ldots, f_k$, причем их дифференциалы линейно независимы в точках $z = z_0(t)$, $t \in X$, то k собственных чисел матрицы T заведомо равны единице. Более того, при выполнении условий $(\partial f_i/\partial z, u_j) = df_i(u_j) = 0$ спектр матрицы T содержит не менее $m+k+1$ единиц (ср. с результатами § 8 гл. IV).

5. Наличие у всех матриц из группы монодромии собственного значения, равного единице, создает затруднения технического характера при решении задач об интегралах и группах симметрий. Поэтому полезно понизить число независимых переменных в уравнениях (5.3). С этой целью в окрестности комплексной кривой $\Gamma = \{z = z_0(t),\ t \in X\}$ введем координаты $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}, \xi_n$ так, чтобы координатные линии переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ были трансверсальны Γ, а кривая Γ локально задавалась уравнениями $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$. Линеаризуя исходные дифференциальные уравнения (5.1) по $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, в окрестности Γ получим замкнутую систему $n - 1$ линейных уравнений, коэффициенты которых голоморфны на X. Эту систему будем называть приведенной системой уравнений в вариациях, а ее группу монодромии — приведенной группой монодромии частного решения $z_0(\cdot)$. В § 8 гл. IV с самого начала рассматривались приведенные уравнения в вариациях для вещественных периодических решений. Собственные значения матриц из приведенной группы монодромии в общем случае отличны от единицы.

Пусть F — интеграл уравнений (5.1), голоморфный в окрестности комплексной кривой Γ. Разложим эту функцию в ряд по степеням переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$; его коэффициенты — голоморфные функции от $t \in X$. Ясно, что первая нетривиальная однородная форма этого ряда является интегралом приведенной линейной системы уравнений в вариациях. Следовательно, найдется однородная форма от $n-1$ переменных, инвариантная относительно действия приведенной группы монодромии.

П р е д л о ж е н и е 1. *Если уравнения* (5.1) *допускают непостоянный голоморфный интеграл, то собственные значения* $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ *каждой матрицы из приведенной группы монодромии удовлетворяют соотношению вида*

$$\lambda_1^{m_1} \ldots \lambda_{n-1}^{m_{n-1}} = 1, \tag{5.6}$$

где m_k *— неотрицательные целые числа, сумма которых* $\geqslant 1$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим для простоты, что все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ различны. Тогда в некоторых переменных $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ преобразование монодромии $\xi \to T\xi$ принимает вид

$$\xi_j \to \lambda_j \xi_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant n-1. \tag{5.7}$$

Пусть

$$F(\xi) = \sum a_m \xi_1^{m_1} \ldots \xi_{n-1}^{m_{n-1}} \tag{5.8}$$

— инвариантная однородная форма степени $m = \sum m_j \geqslant 1$. После преобразования (5.7) эта форма становится равной

$$F(T(\xi)) = \sum a_m \lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_{n-1}^{m_{n-1}} \xi_1^{m_1} \cdots \xi_{n-1}^{m_{n-1}}. \tag{5.9}$$

Формы (5.8) и (5.9) должны совпадать, поэтому хотя бы одно произведение $\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_{n-1}^{m_{n-1}}$ равно единице, что и требовалось доказать.

Если среди чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ имеются равные, то для доказательства предложения 1 матрицу T следует привести к жордановой форме.

С л е д с т в и е. *Если уравнения* (5.1) *допускают интеграл, не имеющий критических точек на* Γ, *то* $\lambda = 1$ *— собственное значение каждой матрицы монодромии.*

Действительно, в этом случае уравнение в вариациях допускает интеграл, линейный по $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

Обсудим теперь вопрос об условиях существования полей симметрий системы (5.1) с голоморфными компонентами, линейно независимых с полем v. Как известно, компоненты u_i поля симметрий удовлетворяют соотношениям

$$\sum_j \frac{\partial u_i}{\partial \xi_j} v_j = \sum_j \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} u_j\,, \quad 1 \leqslant i \leqslant n. \tag{5.10}$$

Положим $i = n$ и $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$. Тогда

$$\frac{\partial u_n^0}{\partial \xi_n} v_n^0 = \frac{\partial v_n^0}{\partial \xi_n} u_n^0\,, \tag{5.11}$$

где u_n^0 и v_n^0 — значения функций u_n и v_n на кривой $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$. Так как $v_n^0 \neq 0$, то из (5.11) вытекает, что $u_n^0 = cv_n^0$, $c = \mathrm{const}$.

Поле $u^* = u - cv$ также является полем симметрий; оно обладает тем свойством, что u_n^* обращается в нуль на кривой Γ. Разложим компоненты u_i^* в ряды по степеням $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$; коэффициенты этих рядов — однозначные голоморфные функции на X. Пусть $m \geqslant 0$ — наименьшая степень первой нетривиальной однородной формы функций $u_1^*, \ldots, u_n^*$: $u_j^* = u_j^{(m)} + u_j^{(m+1)} + \ldots$ В дальнейшем, не оговаривая особо, будем рассматривать лишь те поля симметрий, у которых хотя бы одна форма $u_j^{(m)}$ $(j < n)$ не равна тождественно нулю; при этом поля v и u^*, очевидно, независимы.

Соотношения (5.10) можно представить в виде

$$\dot{u}_i = \sum_{j<n} \frac{\partial v_i}{\partial \xi_j} u_j + \frac{\partial v_i}{\partial \xi_n} u_n\,, \quad i < n.$$

Поскольку $v_1 = \ldots = v_{n-1} = 0$ при $\xi_1 = \ldots = \xi_{n-1} = 0$, а разложение u_n в ряд по $\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ начинается с членов порядка m, то векторное поле $u^{(m)} = (u_1^{(m)}, \ldots, u_{n-1}^{(m)})^\top$ удовлетворяет приведенной системе уравнений в вариациях.

Пусть T — некоторая матрица из приведенной группы монодромии, имеющая $n-1$ различное собственное направление. В подходящих координатах преобразование монодромии $\xi \to T\xi$ принимает вид (5.7). Положим $u_j^{(m)} = \sum U_{\alpha j}(t) \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$, $\sum \alpha_k = m$. После обхода соответствующей замкнутой кривой на X j-я компонента поля $u^{(m)}$ станет равной

$$\sum U_{\alpha j}(t) \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}. \tag{5.12}$$

С другой стороны, $u^{(m)}$ удовлетворяет приведенным уравнениям в вариациях, поэтому компоненты $u_j^{(m)}$ умножаются на λ_j:

$$u_j^{(m)} \to \sum U_{\alpha j}(t)\lambda_j \xi_1^{\alpha_1} \cdots \xi_{n-1}^{\alpha_{n-1}}. \tag{5.13}$$

Сопоставляя (5.12) и (5.13), получаем, что хотя бы для одного набора целых неотрицательных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ имеется соотношение

$$\lambda_j = \lambda_1^{\alpha_1} \cdots \lambda_{n-1}^{\alpha_{n-1}}, \qquad \sum \alpha_k = m \geqslant 0. \tag{5.14}$$

Итак, доказано

Предложение 2. *Если имеется поле симметрий системы уравнений (5.1) с голоморфными коэффициентами, независимое с полем v, то собственные значения любой матрицы из приведенной группы монодромии удовлетворяют соотношению вида (5.14).*

Следствие. *Если имеется поле симметрий, линейно независимое с полем v в точках кривой Γ, то $\lambda = 1$ — собственное значение каждой матрицы монодромии.*

Действительно, в этом случае $m = 0$.

Условия вида (5.14) хорошо известны в задаче о приведении систем дифференциальных уравнений к своей линейной части.

6. Рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot z = JH_z', \quad z \in \mathbb{C}^{2n}, \tag{5.15}$$

с голоморфным гамильтонианом $H(z)$. Здесь J — единичная симплектическая матрица $\begin{Vmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{Vmatrix}$. Предположим, что система (5.15) имеет частное решение $z_0(t)$, однозначное на своей римановой поверхности X. Положим $u = z - z_0(t)$. Тогда уравнение (5.15) можно переписать в виде $\dot u = JH''(z_0(t))u + \ldots$ Линейное неавтономное уравнение

$$\dot u = JH''(t)u \tag{5.16}$$

будет уравнением в вариациях для решения $z_0(t)$. Оно, разумеется, гамильтоново: функцией Гамильтона служит квадратичная форма $\big(u, H''(t)u\big)/2$. Интегралу $H(z)$ автономной системы (5.15) соответствует линейный интеграл уравнений в вариациях $\big(H'(z_0(t)), u\big)$.

Система (5.16) гамильтонова, поэтому преобразования группы монодромии являются симплектическими. Действительно, пусть $u_1(t)$ и $u_2(t)$ — два решения системы (5.16). Легко проверить, что функция (u_1, Ju_2) постоянна. Пусть T_γ — матрица из группы монодромии G, отвечающая некоторому замкнутому пути γ на римановой поверхности X. После обхода контура γ функции u_1, u_2 станут равными соответственно Tu_1, Tu_2. Следовательно,

$$(u_1, Ju_2) = (Tu_1, JTu_2) = (u_1, T^\top JTu_2),$$

и поэтому $J = T^\top JT$. Таким образом, линейное преобразование $u \to Tu$ действительно является симплектическим. Согласно п. 4, два собственных значения любой матрицы $T \in G$ всегда равны единице: одно ввиду автономности системы, а другое из-за наличия интеграла энергии.

Зафиксируем значение интеграла энергии, отвечающее частному решению $z_0(\cdot)$, и ограничим уравнения Гамильтона (5.15) на $(2n-1)$-мерную энергетическую поверхность $H(z) = H(z_0(\cdot)) = \mathrm{const}$. В результате получим автономную систему дифференциальных уравнений с тем же частным решением. Этому решению отвечают приведенные уравнения в вариациях (порядка $2n-2$) и приведенная группа монодромии. Из теоремы Уиттекера о понижении с помощью интеграла энергии порядка уравнений Гамильтона вытекает гамильтоновость приведенной системы уравнений в вариациях. Следовательно, матрицы из приведенной группы монодромии также являются симплектическими.

7. Задача о полиномиальных инвариантах групп симплектических преобразований изучалась С. Л. Зиглиным в работе [64]. Ниже излагаются его основные результаты.

Согласно теореме Пуанкаре — Ляпунова, собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_{2n-2}$ симплектического преобразования $g : \mathbb{C}^{2n-2} \to \mathbb{C}^{2n-2}$ разбиваются на пары $\lambda_1 = \lambda_n^{-1}, \ldots, \lambda_{n-1} = \lambda_{2n-2}^{-1}$, поэтому в гамильтоновом случае имеется $n-1$ различных соотношений вида (5.5). Назовем преобразование $g \in G$ нерезонансным, если из равенства $\lambda_1^{m_1} \cdots \lambda_{n-1}^{m_{n-1}} = 1$ с целыми $m_1, \ldots, m_{n-1}$ следует, что все $m_s = 0$. При $n = 1$ это означает, что λ не является корнем из единицы. Пусть T — матрица нерезонансного симплектического отображения g. Ни одно из ее собственных значений не равно 1, поэтому уравнение $Tz = z$ имеет тривиальное решение $z = 0$.

Удобно перейти к симплектическому базису отображения g: если $z = (x, y)$, $x = (x_1, \ldots, x_{n-1})$, $y = (y_1, \ldots, y_{n-1})$ — координаты в этом базисе, то $g : (x, y) \to (\lambda x, \lambda^{-1} y)$. Симплектический базис существует, если все λ_s отличны от единицы $(1 \leqslant s \leqslant n-1)$; это утверждение доказано, например, в книге [230].

Пусть $F(u) = \sum\limits_{s \geqslant 1} F_s(u)$ — интеграл отображения T. Тогда все однородные формы F_s тоже будут интегралами. Пусть $F_s(x, y) = \sum f_{kl} x^k y^l$. Тогда, очевидно, $\sum f_{kl} x^k y^l = \sum \lambda^{k-l} f_{kl} x^k y^l$. Если g

нерезонансно, то s четно и $f_{kl} = 0$ при $k \neq l$.

Теорема 1 [64]. *Предположим, что приведенная группа монодромии частного решения $z_0(\cdot)$ гамильтоновой системы (5.15) содержит нерезонансное преобразование g. Тогда для того, чтобы в связной окрестности кривой $\Gamma = \{z = z_0(t),\ t \in X\}$ уравнения (5.15) имели n голоморфных интегралов, необходимо, чтобы любое другое преобразование g' группы монодромии сохраняло неподвижную точку преобразования g и переводило его собственные направления в собственные направления. Если при этом никакие собственные значения преобразования g' не образуют на комплексной плоскости правильного многоугольника с центром в нуле и числом вершин $\geqslant 2$, то g' должно сохранять собственные направления преобразования g (т. е. должно коммутировать с g).*

(Последнее условие заведомо выполнено, если g' тоже нерезонансно.)

Докажем теорему 1 для простого, но важного для приложений случая $n = 1$. Пусть собственное значение отображения g не является корнем из единицы, и пусть x, y — симплектический базис для g. Собственные направления g — две прямые $x = 0$ и $y = 0$. Выше было показано, что любой однородный интеграл g имеет вид $c(xy)^s$ ($s \in \mathbb{N}$). Пусть g' — другое отображение из группы G. Функция $(xy)^s$ инвариантна относительно действия g', поэтому множество $xy = 0$ остается неподвижным при отображении g'. Так как g' — невырожденное линейное отображение, то точка $x = y = 0$ неподвижна, и отображение g' либо сохраняет собственные направления отображения g, либо переставляет их. В первом случае g', очевидно, коммутирует с g, а во втором случае имеет вид $x \to \alpha y$, $y \to \beta x$. Отображение g' — симплектическое, поэтому его матрица $T' = \begin{Vmatrix} 0 & \alpha \\ \beta & 0 \end{Vmatrix}$ удовлетворяет условию $(T')^\top J T' = J$, откуда $\alpha\beta = -1$. Но в этом случае собственные значения матрицы T' равны $\pm i$. Точки $\pm i$ образуют именно тот исключительный правильный многоугольник, о котором идет речь в заключении теоремы, что и требовалось доказать.

Как показал С. Л. Зиглин [64], условия теоремы являются необходимыми и для существования n независимых интегралов, мероморфных в окрестности комплексной кривой Γ. Было бы интересно найти необходимые условия существования n независимых векторных полей симметрий с голоморфными компонентами.

8. Рассмотрим случай, когда элементы матрицы $A(t)$ — однозначные двоякопериодические мероморфные функции времени $t \in \mathbb{C}$, имеющие внутри параллелограмма периодов только один полюс. Можно считать, что $A(t)$ — мероморфная функция на комплексном торе X, полученном из комплексной плоскости $\mathbb{C}$ факторизацией по решетке периодов. Рассмотрим два симплектических отображения g и g' за периоды матрицы $A(t)$. Предположим, что их собственные значения удовлетворяют условиям теоремы 1. Тогда для того, чтобы уравнение (5.16) имело n независимых аналитических интегралов, необходимо, чтобы g и g' коммутировали. Следовательно, обходу особой точки (элементу $gg'g^{-1}g'^{-1} \in G$) будет отвечать тождественное отображение пространства $\mathbb{C}^{2n-2}$.

Применим это соображение к линейному дифференциальному уравнению

$$\ddot{z} + \big(\omega^2 + \varepsilon f(t)\big)z = 0, \tag{5.17}$$

где ω, ε — действительные постоянные, f — эллиптическая функция с периодами 2π и $2\pi i$, имеющая в прямоугольнике периодов единственный полюс второго порядка. Можно считать, что при действительных t функция f принимает действительные значения. Примером такой функции является известная $\wp$-функция Вейерштрасса.

Уравнение (5.17) можно интерпретировать как линеаризованное уравнение колебаний маятника с вибрирующей точкой подвеса в окрестности положения равновесия.

Найдем собственные значения отображения из группы монодромии, порожденного обходом вокруг полюса функции f. Пусть (для простоты записи) полюсом является точка $t = 0$. Ряд Лорана функции $f(t)$ в окрестности точки $t = 0$ имеет вид $\dfrac{\alpha}{t^2} + \sum\limits_{n\geqslant 0} f_n t^n$ ($\alpha \neq 0$). Будем искать линейно независимые решения уравнения (5.17) в виде рядов

$$z(t) = t^\rho \sum_{n\geqslant 0} c_n t^n, \quad \rho \in \mathbb{C}, \quad c_0 \neq 0.$$

Так как $\ddot{z}(t) = t^\rho \sum\limits_{n\geqslant 0} (\rho + n)(\rho + n - 1)c_n t^{n-2}$, то

$$\sum_{n\geqslant 0} (\rho + n)(\rho + n - 1)c_n t^{n-2} + \left(\omega^2 + \varepsilon\alpha t^{-2} + \varepsilon \sum_{s\geqslant 0} f_s t^s\right) \sum_{n\geqslant 0} c_n t^n = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициент при t^{-2}, получим уравнение $[\rho(\rho - 1) + \varepsilon\alpha]c_0 = 0$. Так как $c_0 \neq 0$, то $\rho(\rho - 1) + \varepsilon\alpha = 0$; это уравнение даст два значения ρ_1 и ρ_2, соответствующих двум линейно независимым решениям линейного уравнения (5.17). При обходе полюса эти решения умножаются соответственно на $e^{2\pi i\rho_1}$ и $e^{2\pi i\rho_2}$. Соответствующая матрица монодромии будет единичной, если ρ_1 и ρ_2 — целые числа. В частности, $\varepsilon\alpha$ должно быть целым числом.

При $\varepsilon = 0$ собственные значения матрицы монодромии уравнения (5.17) при отображении за периоды 2π и $2\pi i$ равны соответственно $\lambda_{1,2} = e^{\pm 2\pi\omega i}$ и $\mu_{1,2} = e^{\pm 2\pi\omega}$. Очевидно, что $|\mu_{1,2}| \neq 1$ при $\omega \neq 0$ и $\lambda_{1,2} \neq \pm i$, если $\omega \neq 1/4 + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Из соображений непрерывности ясно, что при $\omega \neq 1/4 + k\pi$ и малых $\varepsilon \neq 0$ собственные значения $\mu_{1,2}$ не являются корнями из единицы, и $\lambda_{1,2} \neq \pm i$ (это свойство, в действительности, имеет место для почти всех ω и ε). Следовательно, по теореме 1, уравнение (5.17) в этих случаях неинтегрируемо в комплексной области. Отметим, что в действительной области это уравнение вполне интегрируемо: оно имеет аналитический интеграл $F(\dot{z}, z, t)$, 2π-периодический по t. Дело в том, что линейной канонической заменой переменных, 2π-периодической по t, уравнение (5.17) можно привести к линейной автономной гамильтоновой системе с одной степенью свободы; тогда в качестве функции F можно взять функцию Гамильтона автономной системы.

Рассмотрим теперь нелинейное уравнение колебаний математического маятника $\ddot{z} + (\omega^2 + \varepsilon f(t)) \sin z = 0$. Покажем, что оно может иметь аналитический интеграл $F(\dot{z}, z, t)$, двоякопериодический по $t \in \mathbb{C}$, только при тех значениях параметров ω и ε, когда интегрируемо линейное уравнение (5.17). Для доказательства разложим функцию F в сходящийся степенной ряд

$$\sum_{s \geqslant m} \sum_{k+l=s} f_{kl} z^k z^l, \tag{5.18}$$

коэффициенты которого f_{kl} — эллиптические функции с периодами 2π и $2\pi i$. Первая форма разложения (5.18) (для $s = m$) является, очевидно, однозначным интегралом линейного уравнения (5.17). Следовательно, согласно предположению, она должна быть постоянной. Но тогда следующая форма ($s = m + 1$) будет интегралом уравнения (5.17) и потому тоже постоянна, и т. д.

9. С помощью теоремы С. Л. Зиглина удается доказать неинтегрируемость многих гамильтоновых систем, имеющих важное значение для приложений. X. Иошида применил этот метод к обратимым гамильтоновым системам с однородным потенциалом. Функция Гамильтона имеет вид

$$|y|^2/2 + V_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad y \in \mathbb{R}^n, \tag{5.19}$$

где V_k — однородная форма степени k, отличной от 0 и ± 2. Уравнения Гамильтона с гамильтонианом (5.19) квазиоднородны: степени квазиоднородности f, g по переменным y, x равны соответственно $k/(k-2)$, $2/(k-2)$ (см. п. 4 § 3). Это позволяет вычислить

Показатели Ковалевской разбиваются на пары ρ_i и ρ_{i+n}, в сумме дающие $f+g=2g+1$. Положим $\Delta\rho_i=\rho_{i+n}-\rho_i$. Можно считать, что $\rho_n=-1$, $\rho_{2n}=f+g+1$. Поэтому $\Delta\rho_n=(3k-2)/(k-2)$ — рациональное число.

Т е о р е м а 2 [238]. *Если числа $\Delta\rho_1,\ldots,\Delta\rho_n$ рационально несоизмеримы, то гамильтонова система с функцией Гамильтона (5.19) не имеет полного набора независимых интегралов (в количестве n), голоморфных в $\mathbb{C}^{2n}=\{x,y\}$.*

Укажем последовательность вычисления показателей Ковалевской для решения (5.20). Сначала решим систему алгебраических уравнений

$$\frac{\partial V}{\partial x_j}(\mathrm{c})=\mathrm{c}_j,\quad \mathrm{c}=(\mathrm{c}_1,\ldots,\mathrm{c}_n)^{\top},\quad 1\leqslant j\leqslant n. \tag{5.21}$$

Вектор c связан с вектором α из (5.20) соотношением $\alpha=-[-g(g+1)]^{g/2}\mathrm{c}$. Положим $\Gamma=\left\|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(\mathrm{c})\right\|$; пусть $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ — собственные числа матрицы Γ. Тогда пары чисел ρ_i и ρ_{i+n} являются корнями квадратных уравнений $\rho^2-(2g+1)\rho+g(g+1)(1-\lambda_i)=0$, поэтому $\Delta\rho_i=\left[1+8k\lambda_i/(k-2)^2\right]^{1/2}$.

Доказательство теоремы 2 основывается на применении теоремы Зиглина из п. 7. Уравнения Ньютона $\ddot{x}=-\partial V/\partial x$ допускают частное решение

$$x=c\Phi(t), \tag{5.22}$$

где вектор $\mathrm{c}\in\mathbb{R}^n$ определяется соотношениями (5.21), а скалярная функция Φ удовлетворяет уравнению второго порядка $\ddot{\Phi}+\Phi^{k-1}=0$. Достаточно рассмотреть решения этого уравнения с постоянной интеграла энергии, равной $1/k$:

$$\dot{\Phi}^2=(2/k)(1-\Phi^k). \tag{5.23}$$

Любое решение (5.22) однозначно на своей римановой поверхности

$$\zeta^2=(2/k)(1-w^k). \tag{5.24}$$

Уравнения в вариациях для прямолинейного движения (5.22) принимают вид $\ddot{\xi}=-\Phi(t)^{k-2}\Gamma\xi$. Переходя к собственным направлениям матрицы Γ, получим n линейных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\ddot{\xi}_i+\lambda_i\Phi^{k-2}\xi_i=0,\quad 1\leqslant i\leqslant n. \tag{5.25}$$

Среди собственных значений Γ имеется число $\lambda_n = k - 1$. Соответствующее уравнение системы (5.25) имеет частное решение $\xi_n = \dot{\Phi}$, однозначное на римановой поверхности (5.24). Поэтому первые $n - 1$ уравнений (5.25) составляют приведенную систему уравнений в вариациях. Матрицы из приведенной группы монодромии имеют вид $T = \mathrm{diag}[T(\lambda_1), \ldots, T(\lambda_{n-1})]$, где $T(\lambda_i)$ — (2×2)-матрицы с единичным определителем. Уравнения (5.25) преобразуются в гипергеометрическое уравнение Гаусса, которое позволяет вычислить матрицы $T(\lambda_i)$.

Оказывается, на римановой поверхности (5.24) найдутся два замкнутых цикла, для которых соответствующие матрицы монодромии T_1 и T_2 нерезонансны и не коммутируют. По теореме С. Л. Зиглина эти свойства влекут неинтегрируемость гамильтоновой системы с гамильтонианом (5.19). Связь условий нерезонансности со свойствами показателей Ковалевской вытекает из анализа гипергеометрического уравнения Гаусса (детали см. в работе [238], где на самом деле доказано более сильное утверждение об отсутствии в предположениях теоремы 2 дополнительного голоморфного интеграла, независимого от интеграла энергии).

Применим теорему 2 к гамильтоновым уравнениям Янга — Миллса для однородного двухкомпонентного поля (см. § 8 гл. I). Функция Гамильтона имеет вид (5.19), где $V = x_1^2 x_2^2$. Уравнения (5.21) допускают решение $c = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})^\top$; собственные значения матрицы Гессе Γ равны -1 и 3. Следовательно, $\Delta\rho_1 = \sqrt{-7}$ и $\Delta\rho_2 = 5$. Эти числа рационально несоизмеримы, поэтому по теореме 2 уравнения Янга — Миллса не допускают нового голоморфного интеграла. Этот результат получил впервые С. Л. Зиглин в [64].

Аналогичный результат имеет место и для трехкомпонентной модели Янга — Миллса, где $V = x_1^2 x_2^2 + x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2$. Здесь $c = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)^\top$, а числа $\Delta\rho_i$ равны соответственно $\sqrt{17}$, $\sqrt{-7}$, 5. В силу их рациональной несоизмеримости гамильтонова система неинтегрируема.

Основываясь на теореме 1, С. Л. Зиглин доказал неинтегрируемость системы Хенона — Хейлеса (см. § 8 гл. I), функция Гамильтона которой имеет вид $H = (y_1^2 + y_2^2 + x_1^2 + x_2^2)/2 + x_1^3/3 - x_1 x_2^2$. Соответствущие уравнения Гамильтона имеют однопараметрическое семейство эллиптических решений

$$\begin{gathered} x_2 = y_2 = 0, \quad x_1(t,k) = a_1 - (a_1 - a_2)\,\mathrm{sn}^2(\tau, k), \\ y_1(t,k) = -(a_1 - a_2)\sqrt{2(a_1 - a_3)/3}\,\mathrm{sn}(\tau,k)\,\mathrm{cn}(\tau,k)\,\mathrm{dn}(\tau,k), \end{gathered} \tag{5.26}$$

где $\tau = t\sqrt{(a_1 - a_3)/6}$, $k = k(H) = \sqrt{(a_1 - a_2)/(a_1 - a_3)}$, a_1, a_2, a_3 — корни уравнения $z^3 + 3z^2/2 - 3H = 0$.

Следовательно, риманова поверхность решения (5.26) является двумерным тором с выколотой точкой. При малых значениях энергии H матрицы монодромии, отвечающие базисным циклам этого тора, удовлетворяют условиям теоремы 1.

В работе X. Иошиды [237] предложены некоторые общие соображения для исследования интегрируемости обратимых систем с неоднородными потенциалами. Они основаны на изучении группы монодромии при $h \to 0$ или $h \to \infty$, где h — постоянная интеграла энергии. В качестве приложения рассмотрена задача о наличии дополнительного интеграла системы с гамильтонианом

$$H_N = (y_1^2 + \dot{y}_2^2)/2 + V_N(x_1, x_2),$$
$$V_N = \sum_{k=1}^{N} \left[(\sqrt{3}x_1 + x_2)^k + (-\sqrt{3}x_1 + x_2)^k + (-2x_2)^k\right]/k! \tag{5.27}$$

Функция V_N является усечением ряда Маклорена для потенциала цепочки Тоды: $\exp(\sqrt{3}x_1 + x_2) + \exp(-\sqrt{3}x_1 + x_2) + \exp(-2x_2)$; систему с гамильтонианом (5.27) можно назвать "усеченной" цепочкой Тоды. При $N = 2$ имеем гармонический осциллятор, при $N = 3$ — систему Хенона — Хейлеса; в [237] доказано отсутствие нового голоморфного интеграла усеченной цепочки Тоды при $N \geqslant 3$.

Еще один пример обратимой системы с неоднородным потенциалом представляет задача о вращении тяжелого твердого тела с неголомной связью: обращается в нуль проекция угловой скорости на некоторое направление l, жестко связанное с телом (см. § 7 гл. I). Если центр масс тела лежит на оси l, то вращения тела с запасом полной энергии h описываются уравнениями Гамильтона с гамильтонианом $H = \dfrac{1}{2}(p_1^2 + p_2^1) + \dfrac{1}{2}\left[h - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{q_1^2}{I_1} + \dfrac{q_2^2}{I_2}\right)\right]^2$ (см. уравнения (7.7) гл. I). Здесь I_1, I_2 — моменты инерции твердого тела. При $I_1 = I_2$ имеем интегрируемый случай Лагранжа (с нулевой проекцией скорости на ось l).

Опираясь на теорему 1, С. Л. Зиглин исследовал задачу о наличии непостоянного мероморфного интеграла на комплексифицированной поверхности уровня $H = h$ [65]. Он доказал, что при $h \neq 0$, $I_1 \neq I_2$ дополнительного мероморфного интеграла не существует. Аналогичный результат справедлив и при $h = 0$, однако здесь нужно потребовать выполнения одного из двух дополнительных условий: 1) $\omega \neq r$; 2) $\sqrt{2}\cos\pi\omega \neq \cos\pi r$, где $\omega = \sqrt{1+8\alpha}/4$, $\alpha = I_1/I_2$ или $\alpha = I_2/I_1$, r — рациональное число.

Положим формально $I_1 = -I_2$. Тогда при $h = 0$ получим систему Янга — Миллса. В этом случае $\omega = \sqrt{7}\,i/4$, и поэтому заведомо выполнено условие 1).

В заключение отметим еще одно важное применение теоремы 1. С. Л. Зиглин доказал, что дополнительный мероморфный интеграл уравнений Эйлера — Пуассона задачи о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой существует только в трех классических случаях: Эйлера, Лагранжа и Ковалевской. Если зафиксировать нулевое значение постоянной площадей, то к этим случаям надо добавить еще случай Горячева — Чаплыгина. Этот результат также основан на анализе уравнений в вариациях для некоторых частных решений уравнений Эйлера — Пуассона [64].

Отметим, что вопрос о существовании дополнительного интеграла уравнений вращения тяжелого твердого тела в действительной области при произвольном распределении масс остается пока открытым. Ясно, что в системе Хенона — Хейлеса и Янга — Миллса заведомо нет вещественных дополнительных аналитических интегралов, поскольку тогда в малой комплексной окрестности точки $x = y = 0$ эти системы имели бы голоморфный интеграл, независимый от интеграла энергии.

ГЛАВА VIII

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ГАМИЛЬТОНОВЫХ СИСТЕМ

В этой главе излагаются специальные методы поиска гамильтоновых систем, допускающих полиномиальные по импульсам первые интегралы. Актуальность такой задачи определяется прежде всего тем, что все известные интегралы в гамильтоновой механике либо полиномы по импульсам, либо функции от полиномов (см. § 1 гл. II). Задача о наличии линейных и квадратичных интегралов вполне элементарна и обычно решается без труда. Существенные трудности представляет задача о полиномиальных интегралах, степень которых не фиксирована. Ее пока удается решить полностью лишь для некоторых классов гамильтоновых систем.

§ 1. Метод Биркгофа

1. Рассмотрим необратимую систему с двумя степенями свободы. В локальных изотермических координатах x, y функция Лагранжа принимает вид

$$L = \mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)/2 + \alpha\dot{x} + \beta\dot{y} - V. \tag{1.1}$$

Здесь μ, α, β, V — функции от x, y, причем $\mu > 0$. Уравнения Лагранжа с лагранжианом (1.1) имеют интеграл энергии

$$\mu(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2V = 2h.$$

Следуя Биркгофу [18, гл. II], выполним замену времени $t \to \tau$ по формуле

$$d\tau = \mu^{-1}dt. \tag{1.2}$$

Обозначая штрихом дифференцирование по τ, запишем действие по Гамильтону:

$$\int_{t_1}^{t_2} L\,dt = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\frac{x'^2 + y'^2}{2} + \alpha x' + \beta y' - \gamma\right] d\tau,$$

где $\gamma = \mu V$. Функции $x(\tau)$, $y(\tau)$ $(\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_2)$ являются экстремалями следующей условной вариационной задачи:

$$\delta \int_{\tau_1}^{\tau_2} L^* \, d\tau = 0, \qquad \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu \, d\tau = \mathrm{const},$$

где

$$L^* = (x'^2 + y'^2)/2 + \alpha x' + \beta y' - \gamma. \tag{1.3}$$

Согласно известным результатам вариационного исчисления (см., например, [19]) для каждой кривой $x(\tau)$, $y(\tau)$ найдется такая постоянная $\varkappa$, что эта кривая является экстремалью "безусловной" вариационной задачи с лагранжианом $L^* + \varkappa\mu$. Принимая во внимание выражение (1.3), запишем соответствующие уравнения Лагранжа:

$$\begin{gathered} x'' + \lambda y' = -\frac{\partial \gamma}{\partial x} + \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial x}, \quad y'' - \lambda x' = -\frac{\partial \gamma}{\partial y} + \varkappa \frac{\partial \mu}{\partial y}, \\ \lambda = \frac{\partial \alpha}{\partial y} - \frac{\partial \beta}{\partial x}. \end{gathered} \tag{1.4}$$

Чтобы понять механический смысл множителя $\varkappa$, запишем интеграл энергии с учетом замены времени (1.2):

$$(x'^2 + y'^2)/2 + \gamma - h\mu = 0. \tag{1.5}$$

С другой стороны, уравнения (1.4) допускают интеграл

$$(x'^2 + y'^2)/2 + \gamma - \varkappa\mu = \mathrm{const}. \tag{1.6}$$

Из (1.5) и (1.6) вытекает равенство $(h - \varkappa)\mu = \mathrm{const}$. Следовательно, в общем случае (когда $\mu \neq \mathrm{const}$) множитель Лагранжа $\varkappa$ совпадает с полной энергией h.

2. Предположим, что нас интересуют лишь движения $x(t)$, $y(t)$ с фиксированным запасом энергии h. Для простоты записи положим $h = 0$ (в противном случае можно заменить V на $V - h$). Траектории таких движений, параметризованные новым временем τ, найдутся из системы уравнений Биркгофа

$$x'' + \lambda y' = -\partial\gamma/\partial x, \quad y'' - \lambda x' = -\partial\gamma/\partial y, \tag{1.7}$$

дополненных энергетическим соотношением

$$x'^2 + y'^2 + 2\gamma = 0. \tag{1.8}$$

Этот результат установлен Биркгофом в работе [18]. Соотношения (1.7), (1.8) использованы Биркгофом для решения задачи о наличии условных интегралов (см. §§ 7–9 гл. II) в виде полиномов не выше второй степени по скоростям. Оказалось, что наличие условного линейного интеграла связано со "скрытыми" циклическими координатами, а наличие условного квадратичного интеграла позволяет разделить канонические переменные. Ниже приведены глобальные варианты этих утверждений для случая, когда конфигурационное пространство системы является двумерным тором. Отметим, что здесь изотермические координаты можно ввести в целом.

3. Итак, рассмотрим необратимую систему с двумерным тором в качестве конфигурационного пространства. Уточняя классический результат Биркгофа [18, гл. II], укажем критерий существования "многозначного" линейного интеграла. Под многозначным интегралом мы понимаем замкнутую 1-форму на фазовом пространстве, производная от которой вдоль векторного поля обращается в нуль. Целесообразность рассмотрения многозначных интегралов обусловлена двумя причинами:

1) в простых необратимых системах возможны полиномиальные по скорости интегралы с многозначными коэффициентами;

2) теорема Лиувилля о вполне интегрируемых системах легко распространяется на тот случай, когда вместо обычных интегралов рассматриваются замкнутые 1-формы.

Предложение 1. *Предположим, что система имеет условный линейный интеграл (возможно, многозначный) на энергетической поверхности $H = h$, где $h > \max V$. Тогда на пространстве положений можно так выбрать угловые координаты $x_1, x_2 \bmod 2\pi$ и сделать замену времени $dt = \xi(x_1, x_2)d\tau$, чтобы траектории с запасом полной энергии h описывались гамильтоновой системой, у которой*

(i) *кинетическая энергия — квадратичная форма по x_1', x_2' с постоянными коэффициентами;*

(ii) *форма гироскопических сил f имеет вид $\lambda(x_1)\,dx_1 \wedge dx_2$;*

(iii) *потенциал не зависит от переменной x_2.*

В новых переменных x_1, x_2, τ лагранжиан имеет вид $L = \frac{1}{2}\sum a_{ij}x_i'x_j' + \mu(x_1)x_2' - \gamma(x_1)$, где $\mu = \int \lambda(x)\,dx$; эта функция однозначна лишь в случае $\int_{T^2} f = 0$. Переменная x_2 циклическая: она не входит в формулу для функции Лагранжа. Ей отвечает циклический интеграл $\partial L/\partial x_2' = \sum a_{2i}x_i' + \mu(x_1)$, линейный по скоростям. Предложение 1 не утверждает, что этот интеграл совпадает с линейным интегралом, заданным нам первоначально. Укажем простой контрпример: обратимая система с кинетической энергией $T = (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)/2$ и нулевым потенциалом имеет линейный интеграл $\dot{x}_1 + \sqrt{2}\dot{x}_2$, который нельзя сделать циклическим ни при каком выборе угловых координат.

Для доказательства предложения воспользуемся уравнениями Биркгофа (1.7). Пусть

$$lx' + my' + n \tag{1.9}$$

— условный линейный интеграл. Дифференциалы dl, dm и dn однозначны на $\mathbf{T}^2 = \{x, y \bmod 2\pi\}$. Вычислим в силу системы (1.7) производную интеграла (1.9):

$$\frac{\partial l}{\partial x}x'^2 + \left(\frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial m}{\partial x}\right)x'y' + \frac{\partial m}{\partial y}y'^2 + \\ + \left(m\lambda + \frac{\partial n}{\partial x}\right)x' + \left(-l\lambda + \frac{\partial n}{\partial y}\right)y' - l\frac{\partial \gamma}{\partial x} - m\frac{\partial \gamma}{\partial y}. \tag{1.10}$$

Функция (1.9) — интеграл уравнений (1.7) на энергетической поверхности $x'^2 + y'^2 + 2\gamma = 0$, поэтому старшая форма многочлена (1.10) должна делиться на функцию Гамильтона. Отсюда получаем, что $\partial l/\partial x - \partial m/\partial y = 0$, $\partial l/\partial y + \partial m/\partial x = 0$. Следовательно, формы dl и dm гармонические на $\mathbf{T}^2$, и поэтому

$$m = ax + by + m_0, \quad l = bx - ay + l_0; \quad a, b, m_0, l_0 = \mathrm{const}.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при x' и y' в формуле (1.10), получим

$$\frac{\partial n}{\partial x} = -m\lambda, \quad \frac{\partial n}{\partial y} = l\lambda. \tag{1.11}$$

Форма dn однозначна, поэтому при условии $\lambda \not\equiv 0$ имеем $a = b = 0$ и, следовательно, $m = m_0$, $l = l_0$. Ниже рассматривается именно этот случай. Приравнивая нулю (1.10), получим также соотношение для потенциала:

$$l_0\frac{\partial \gamma}{\partial x} + m_0\frac{\partial \gamma}{\partial y} = 0. \tag{1.12}$$

Из (1.11) получим аналогичное соотношение для функции λ:

$$l_0\frac{\partial \lambda}{\partial x} + m_0\frac{\partial \lambda}{\partial y} = 0. \tag{1.13}$$

Если l_0 и m_0 рационально несоизмеримы, то из (1.12) и (1.13) вытекает постоянство функций γ, λ, и предложение доказано. Пусть $m_0/l_0 = p/q$, а числа p и q взаимно просты. Из (1.12) и (1.13) легко выводится, что $\gamma = \varphi(px - qy)$, $\lambda = \psi(px - qy)$, где функции φ и ψ 2π-периодичны. Выполним линейное преобразование $x_1 = px - qy$, $x_2 = ux + vy$ с целыми u, v, удовлетворяющими соотношению $pv + qu = 1$. Ввиду взаимной простоты p и q такие числа u и v существуют. Переменные $x_1, x_2 \bmod 2\pi$ — искомые.

4. Рассмотрим теперь обратимую систему с двумя степенями свободы, пространством положений которой снова является двумерный тор.

Предложение 2. *Пусть система имеет условный квадратичный интеграл с однозначными коэффициентами на поверхности $H = h$, где $h > \max V$. Тогда на пространстве положений можно так выбрать угловые координаты $x_1, x_2 \mod 2\pi$ и сделать замену времени $dt = \xi(x_1, x_2)d\tau$, чтобы траектории движений с энергией h описывались лагранжевой системой с лагранжианом*

$$(x_1'^2 + x_2'^2)/2 + \eta(px_1 + qx_2) + \zeta(qx_1 - px_2), \tag{1.14}$$

где $\eta(\cdot)$ и $\zeta(\cdot)$ — 2π-периодические функции, p и q — целые числа.

Сделаем линейную замену переменных $x = px_1 + qx_2$, $y = qx_1 - px_2$. В новых переменных лагранжиан (1.14) примет вид

$$\varkappa(x'^2 + y'^2)/2 + \eta(x) + \zeta(y), \quad \varkappa^{-1} = p^2 + q^2.$$

Переменные x и y разделяются: функции $\varkappa x'^2/2+\eta(x)$, $\varkappa y'^2/2+\zeta(y)$ являются независимыми квадратичными интегралами.

Предложение 2 — глобальный вариант известного результата Биркгофа об условных квадратичных интегралах [18, гл. II].

Для доказательства снова воспользуемся уравнениями (1.7), полагая $\lambda \equiv 0$. Предположим, что уравнения (1.7) имеют квадратичный интеграл

$$(ax'^2 + 2bx'y' + cy'^2)/2 + dx' + ey' + f \tag{1.15}$$

на поверхности

$$x'^2 + y'^2 + 2\gamma = 0. \tag{1.16}$$

Выпишем члены третьей степени по скоростям в выражении для производной интеграла (1.15) по новому времени τ:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial x}x'^3 + \left(\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{1}{2}\frac{\partial a}{\partial y}\right)x'^2y' + \left(\frac{\partial b}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial x}\right)x'y'^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial c}{\partial y}y'^3.$$

Так как (1.15) — условный интеграл, то этот полином должен делиться на $x'^2 + y'^2$. Следовательно, $\dfrac{\partial(a-c)}{\partial x} - \dfrac{\partial(2b)}{\partial y} = 0$, $\dfrac{\partial(a-c)}{\partial y} + \dfrac{\partial(2b)}{\partial x} = 0$, поэтому функции $a - c$ и b — гармонические функции на двумерном торе. Ввиду предположения об их однозначности $a - c = \text{const}$, $b = \text{const}$.

Отсюда, используя интеграл энергии (1.16), квадратичный интеграл (1.15) можно преобразовать к виду, в котором коэффициенты a, b и c будут постоянными. Дифференцируя еще раз интеграл

(1.15) в силу системы и приравнивая нулю коэффициенты при x' и y', получим соотношения $a\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}+b\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $b\dfrac{\partial\gamma}{\partial x}+c\dfrac{\partial\gamma}{\partial y}=\dfrac{\partial f}{\partial y}$. Следовательно,

$$(a-c)\frac{\partial^2\gamma}{\partial x\partial y}+b\left(\frac{\partial^2\gamma}{\partial y^2}-\frac{\partial^2\gamma}{\partial x^2}\right)=0. \tag{1.17}$$

Представляя потенциал γ в виде ряда Фурье $\sum v_{mn}\exp[i(mx+ny)]$, из (1.17) получим серию равенств $\left[(a-c)mn+b(n^2-m^2)\right]v_{mn}=0$. Предположим, что $v_{m_1n_1}\neq 0$ и $v_{m_2n_2}\neq 0$. Тогда

$$(a-c)m_1n_1+b(n_1^2-m_1^2)=(a-c)m_2n_2+b(n_2^2-m_2^2)=0. \tag{1.18}$$

Ясно, что среди чисел $a-c$ и b есть не равное нулю: в противном случае интеграл (1.15) сводится к линейному. Из (1.18) получаем, что $\dfrac{m_1n_1}{n_1^2-m_1^2}=\dfrac{m_2n_2}{n_2^2-m_2^2}$. Отсюда следует, что либо $m_1/n_1=m_2/n_2$, либо $(m_1/n_1)(n_2/m_2)=-1$. Следовательно, целочисленные векторы (m_1,n_1) и (m_2,n_2) либо параллельны, либо ортогональны. Предложение доказано.

5. Уравнения Биркгофа (1.7) содержат две произвольные функции λ и γ. Можно по-другому упростить исходные уравнения движения, приводя к простейшему виду 2-форму гироскопических сил, а не кинетическую энергию.

Пусть $f=F\,dx\wedge dy$ — 2-форма на двумерном торе, причем $F\neq 0$. Положим $F_0=\dfrac{1}{4\pi^2}\displaystyle\int_{T^2}f\neq 0$. Оказывается, существует такой диффеоморфизм тора $(x,y)\to(u,v)$, что в новых переменных

$$f=F_0\,du\wedge dv. \tag{1.19}$$

Действительно, пусть α и β — "сильно" несоизмеримые вещественные числа, а $g:\mathbf{T}^2\to\mathbb{R}$ — решение дифференциального уравнения $\alpha\partial g/\partial x+\beta\partial g/\partial y=F-F_0$. Положим $u=x+(\alpha/F_0)g$, $v=y+(\beta/F_0)g$. Так как

$$\left|\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\right|=\frac{F}{F_0}\neq 0,$$

то $f=F\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}du\wedge dv=F_0\,du\wedge dv$, что и требовалось доказать.

Этот результат является частным случаем теоремы Мозера о сводимости друг к другу любых двух форм объема на компактном многообразии M, если их интегралы по M совпадают [219].

Если привести форму гироскопических сил к виду (1.19), то преобразованные уравнения Биркгофа (1.7) снова будут содержать две "произвольные" функции: g и λ.

§ 2. Влияние гироскопических сил на существование полиномиальных интегралов

Рассмотрим на n-мерном торе $\mathbf{T}^n = \{x \bmod 2\pi\}$ уравнения с дополнительными силами гироскопического типа:

$$\ddot{x} = \Lambda(x)\dot{x} - \frac{\partial V}{\partial x}. \tag{2.1}$$

Здесь Λ — кососимметричная матрица, 2π-периодическая по x, V — потенциал силового поля. Уравнения Биркгофа (1.7), очевидно, имеют вид (2.1). Исследуем задачу о существовании полиномиальных по скоростям интегралов с однозначными коэффициентами, независимых от интеграла энергии

$$H = (\dot{x}, \dot{x})/2 + V(x). \tag{2.2}$$

Положим $\Lambda_0 = \dfrac{1}{(2\pi)^n}\displaystyle\int_{T^n} \Lambda(x)\, d^n x$. Матрица Λ_0, как всякая кососимметричная матрица, приводится к виду $\operatorname{diag}[a_1, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0]$, где $a_j = \begin{Vmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{Vmatrix}$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$. В частности, спектр Λ_0 состоит из чисел $\pm i\lambda_1, \ldots, \pm i\lambda_m, 0, \ldots, 0$. Если $\det \Lambda_0 \neq 0$, то $n = 2m$.

Введем группу по сложению, состоящую из чисел вида $\alpha_1\lambda_1 + \ldots + \alpha_m\lambda_m$, $\alpha_j \in \mathbb{Z}$; через k обозначим ее ранг, т. е. среди $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ имеется k чисел, независимых над полем $\mathbb{Q}$.

Теорема 1 [214]. *Предположим, что уравнения (2.1) имеют l независимых полиномиальных интегралов. Тогда $l + k \leqslant n$.*

Для доказательства теоремы 1 примéним метод Пуанкаре и воспользуемся замечанием работы [66]. Для этого введем новую переменную времени $t \to t/\varepsilon$, где ε — параметр. После такой подстановки уравнения (2.1) перейдут в уравнения

$$\ddot{x} = \varepsilon\Lambda\dot{x} - \varepsilon^2 \partial V/\partial x, \tag{2.3}$$

содержащие малый параметр ε. Скорости $\dot{x}$ перейдут в $\dot{x}/\varepsilon$, поэтому полиномиальный интеграл уравнений (2.1) перейдет в интеграл уравнений (2.3), аналитический по ε: $F_0(\dot{x}, x) + \varepsilon F_1(\dot{x}, x) + \ldots$ Функции F_s, очевидно, периодичны по x с периодом 2π. Функция F_0 — первый интеграл невозмущенной системы $\ddot{x} = 0$. Следовательно, $\dot{F}_0 = \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}, \ddot{x}\right) + \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial x}, \dot{x}\right) = \left(\dfrac{\partial F_0}{\partial x}, \dot{x}\right) \equiv 0$. Отсюда заключаем, что F_0 не зависит от угловых переменных x. Функция F_1 удовлетворяет уравнению $\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}, \Lambda\dot{x}\right) + \left(\dfrac{\partial F_1}{\partial x}, \dot{x}\right) = 0$. Усредняя это уравнение по $x_1, \ldots, x_n$, получим $\left(\dfrac{\partial F_0}{\partial \dot{x}}, \Lambda_0 \dot{x}\right) = 0$. Следовательно, функция $u \to F_0(u)$ является первым интегралом линейной системы с постоянными коэффициентами $\dot{u} = \Lambda_0 u$.

Линейной подстановкой эта система приводится к виду

$$\dot{u}_1 = \lambda_1 u_2, \ \dot{u}_2 = -\lambda_1 u_1, \quad \ldots, \quad \dot{u}_{2m-1} = \lambda_m u_{2m}, \ \dot{u}_{2m} = -\lambda_m u_{2m-1},$$
$$\dot{u}_{2m+1} = \ldots = \dot{u}_n = 0.$$

Полагая $u_1 = \rho_1 \sin\varphi_1$, $u_2 = \rho_1 \cos\varphi_1, \ldots, u_{2m-1} = \rho_m \sin\varphi_m$, $u_{2m} = \rho_m \cos\varphi_m$, получим

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}_1 = \lambda_1, \quad \ldots, \quad \dot{\varphi}_m = \lambda_m, \\ \dot{\rho}_1 = \ldots = \dot{\rho}_m = \dot{u}_{2m+1} = \ldots = \dot{u}_n = 0. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Функция F_0 — интеграл этих уравнений, 2π-периодический по $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Если числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ рационально несоизмеримы, то F_0 не зависит от $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Но тогда система (2.4) может иметь самое большое $n - m$ независимых интегралов. В общем случае функция F_0 не содержит k независимых целочисленных линейных комбинаций угловых переменных $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Следовательно, система (2.4) имеет не более $n - k$ независимых интегралов, что и требовалось доказать.

При $n = 2$ теорему 1 можно уточнить. Справедлива

Теорема 2. *Пусть $n = 2$ и $\Lambda_0 \neq 0$. Тогда система (2.1) не имеет независимого от функции (2.2) полиномиального интеграла с однозначными на $\mathbf{T}^2$ коэффициентами.*

Действительно, если уравнения (2.3) имеют интеграл, независимый от интеграла энергии $(\dot{x}, \dot{x})/2 + \varepsilon^2 V$, то (согласно § 1 гл. IV) при $n = 2$ система уравнений (2.3) имеет интеграл в виде ряда по ε, независимый при $\varepsilon = 0$ от функции $(\dot{x}, \dot{x})/2$. Теорема 2 является частным случаем теоремы 3 из § 4 гл. III.

§ 3. Полиномиальные интегралы систем с полутора степенями свободы

1. В этом параграфе обсуждается задача об интегрируемости одного неавтономного уравнения второго порядка

$$\ddot{x} = -\partial V / \partial x \tag{3.1}$$

с 2π-периодическим по x потенциалом $V(x, t)$. Уравнение (3.1) описывает, в частности, колебания маятниковых систем. Примером служит уравнение Чаплыгина

$$\ddot{x} = k t^2 \sin x, \quad k = \mathrm{const} \neq 0, \tag{3.2}$$

описывающее вращение тяжелой пластинки в безграничном объеме идеальной жидкости.

Следуя работе [103], рассмотрим задачу о наличии у уравнения (3.1) интеграла в виде полинома по скорости

$$a_0(x,t) + a_1(x,t)\dot{x} + \ldots + a_n(x,t)\dot{x}^n \tag{3.3}$$

с 2π-периодическими по x коэффициентами a_k, $(0 \leqslant k \leqslant n)$. Интеграл (3.3) — однозначная функция на расширенном фазовом пространстве $(\dot{x}, x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbf{T}^1 \times \mathbb{R}$.

Дифференцируя функцию (3.3) в силу уравнения (3.1), получим следующую систему уравнений в частных производных первого порядка для отыскания потенциальной энергии V интегрируемой системы и коэффициентов a_k:

$$
\begin{aligned}
(a_n)_x &= 0, && (3.4.n+1)\\
(a_n)_t + (a_{n-1})_x &= 0, && (3.4.n)\\
(a_{n-1})_t + (a_{n-2})_x &= na_nV_x, && (3.4.n-1)\\
(a_{n-2})_t + (a_{n-3})_x &= (n-1)a_{n-1}V_x, && (3.4.n-2)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \\
(a_1)_t + (a_0)_x &= 2a_2V_x, && (3.4.1)\\
(a_0)_t \qquad &= a_1V_x. && (3.4.0)
\end{aligned}
$$

Эта система состоит из $n+2$ уравнений и содержит столько же неизвестных функций $V, a_0, a_1, \ldots, a_n$.

Отметим, что уравнение (3.1) сохраняет свой вид при подстановке $x \to x + \alpha t$, $V(x,t) \to V(x+\alpha t, t) + f(t)$, где $\alpha = \text{const}$, f — произвольная функция времени. Этой тривиальной калибровкой мы будем постоянно пользоваться.

Лемма 1. *Выполнены равенства* $a_n = a_n^0 = \text{const} \neq 0$, $a_{n-1} = a_{n-1}^0 = \text{const}$, $a_{n-2} = na_n^0V$ *(при подходящей калибровке* V*)*.

Доказательство. Из (3.4.n+1) вытекает, что функция a_n не зависит от x. Следовательно, $a_n = \langle a_n \rangle$, где $\langle g \rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(x,t)\,dt$. Усредняя обе части уравнения (3.4.n) по x, получаем $\big(\langle a_n \rangle\big)_t = 0$. Следовательно, $a_n = \text{const}$. Но тогда из (3.4.n) вытекает, что a_{n-1} не зависит от x, поэтому $a_{n-1} = \langle a_{n-1} \rangle$. Усредняя уравнение (3.4.$n-$ -1) по x, придем к равенству $a_{n-1} = \langle a_{n-1} \rangle = \text{const}$. Следовательно, уравнение (3.4.$n-1$) приобретает вид $(a_{n-2})_x = na_n^0V_x$, откуда получаем, что разность $a_{n-2} - na_n^0V$ зависит лишь от времени, что и требовалось доказать.

Делением интеграла (3.3) на ненулевую постоянную a_n^0 приходим к равенству $a_n \equiv 1$. Выполняя затем подстановку $x \to x - (a_{n-1}^0/n)t$, получаем уравнение вида (3.1) с интегралом (3.3), в котором $a_{n-1} \equiv 0$. Итак, можно считать, что $a_n = 1$ и $a_{n-1} = 0$.

С помощью леммы 1 легко получить условия существования линейного и квадратичного интегралов. При $n = 1$ из соотношения $a_{n-2} = nV$ получаем $V \equiv 0$. Следовательно, линейный интеграл сводится к интегралу момента $\dot{x}$. При $n = 2$ из уравнения (3.4.0) получаем соотношение $V_t = 0$, откуда $V = f(t)$, где $f(\cdot)$ — произвольная гладкая 2π-периодическая функция. Интеграл (3.3) превращается при этом в обычный интеграл энергии автономной системы с одной степенью свободы.

При $n = 3$ уравнения (3.4.0) и (3.4.1) дают систему $(a_0)_x = -3V_t$, $(a_0)_t = 3VV_x$, из которой для функции V получаем уравнение второго порядка:

$$V_{tt} + (VV_x)_x = 0, \tag{3.5}$$

которое совпадает с интегрируемым стационарным уравнением Хохлова — Заболоцкого. Метод его точного интегрирования изложен, например, в [211] (там же можно найти ссылки на работы по этой тематике). Нас интересуют лишь 2π-периодические по переменной x решения (3.5). Применяя известную теорему Коши — Ковалевской, получаем, что для произвольных аналитических 2π-периодических функций f и g существует аналитическое решение $V(x,t)$ уравнения (3.5), периодическое по x с периодом 2π и такое, что $V(x,0) = f(x)$, $V_t(x,0) = g(x)$. Следует отметить, что на самом деле в теореме Коши — Ковалевской ничего не говорится о периодичности по переменной x, однако легко доказать, что если начальные данные периодичны по x, то тем же свойством обладает и решение рассматриваемого уравнения. Таким образом, имеется семейство потенциалов (зависящее от двух произвольных периодических функций), при которых уравнение (3.1) имеет нетривиальный интеграл третьей степени по скорости.

2. Эти наблюдения обобщаются на случай полиномиальных интегралов произвольной степени: для любого $n \geqslant 1$ существует семейство аналитических потенциалов $V(x,t)$, 2π-периодических по x, зависящее от $n - 1$ произвольной аналитической 2π-периодической функции, для которых уравнение (3.1) имеет полиномиальный интеграл степени n с однозначными аналитическими коэффициентами. Доказательство основано на применении теоремы Коши — Ковалевской. Однако эту теорему непосредственно нельзя применить к системе (3.4). Преобразуем (3.4), пользуясь леммой 1 и полагая $a_n = 1$:

$$nV_t = -(a_{n-3})_x + (n-1)a^0_{n-1}V_x, \tag{3.6.$n-2$}$$

$$(a_{n-3})_t = -(a_{n-4})_x + (n-2)nVV_x, \tag{3.6.$n-3$}$$

$$(a_{n-4})_t = -(a_{n-5})_x + (n-3)a_{n-3}V_x, \tag{3.6.$n-4$}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$(a_1)_t = -(a_0)_x + 2a_2V_x, \tag{3.6.1}$$

$$(a_0)_t = \qquad a_1V_x. \tag{3.6.0}$$

Эта система состоит из $n-1$ уравнения и содержит $n-1$ неизвестную функцию $a_0, \dots, a_{n-3}$ и V. К ней применима теорема Коши — Ковалевской: при $t = 0$ надо задать значения $n-1$ функции $a_0, \dots, a_{n-3}$, V в виде произвольных аналитических 2π-периодических функций переменной x; тогда уравнения (3.6) при малых t будут иметь аналитические решения, 2π-периодические по x.

Из результатов работ [211, 212] можно вывести, что нелинейная эволюционная система уравнений в частных производных (3.6) относится к числу интегрируемых. Однако в явном виде ее решения выписать не удается. Пока остается неясным вопрос о продолжимости решений системы (3.6) на всю ось времени t.

3. Исследуем разрешимость системы (3.6) в классе потенциалов, являющихся тригонометрическими многочленами по переменной x. В качестве примера укажем уравнение Чаплыгина (3.2).

Здесь уже не предполагается, что $a^0_{n-1} = 0$. Поэтому в правую часть (3.6.$n-2$) надо добавить $(n-1)a^0_{n-1}V_x$.

Теорема 1. *Предположим, что уравнение (3.1) с потенциалом*

$$V = \sum_{k=-m}^{m} v_k(t)\exp(ikx) \tag{3.7}$$

имеет полиномиальный интеграл степени $n \geqslant 1$. Тогда:

1) *если n нечетно, то V не зависит от x;*
2) *если n четно, то $v_m = \mathrm{c}\exp(i\beta t)$, где $\mathrm{c} \in \mathbb{C}$, $\beta = a^0_{n-1}/n$.*

Следствие 1. *Предположим, что $|v_m| \neq \mathrm{const}$. Тогда уравнение (3.1) не имеет нетривиальных полиномиальных интегралов с однозначными (2π-периодическими по x) коэффициентами.*

Следствие 2. *Уравнение Чаплыгина (3.2) не имеет однозначных полиномиальных интегралов.*

В своей работе [169] С. А. Чаплыгин пишет о важности изучения уравнения (3.2), "...интеграции которого, однако же, я не выполнил".

С л е д с т в и е 3. *Уравнение* (3.1) *с потенциалом* $V = \lambda(t)\sin mx + \mu(t)\cos mx$ $(m \in \mathbb{N})$ *имеет нетривиальный однозначный полиномиальный интеграл в том и только том случае, когда оно имеет полиномиальный интеграл степени* $\leqslant 2$.

Действительно, если уравнение (3.1) допускает интеграл нечетной степени, то имеется линейный интеграл (см. первое утверждение теоремы 1). Если же степень полиномиального интеграла четная, то из второго утверждения теоремы легко выводится, что V является 2π-периодической функцией от переменной $x+\alpha t$ ($\alpha = \mathrm{const}$). В этом случае уравнение (3.1) допускает обобщенный интеграл энергии, степень которого равна двум (см. п. 1).

Пока остается неясным, справедливо ли следствие 3 для полиномиальных потенциалов (3.7) общего вида (ср. с § 5 гл. IV).

4. Перейдем к доказательству теоремы 1. Если V — тригонометрический многочлен по переменной x, то из соотношений (3.4) по индукции легко показать, что функции $a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ также являются тригонометрическими многочленами, причем

$$\begin{aligned}
a_{n-2} &= \overline{A}_{n-2}\exp(-\ imx) + \ldots + A_{n-2}\exp(\ imx),\\
a_{n-3} &= \overline{A}_{n-3}\exp(-\ imx) + \ldots + A_{n-3}\exp(\ imx),\\
a_{n-4} &= \overline{A}_{n-4}\exp(-2imx) + \ldots + A_{n-4}\exp(2imx),\\
a_{n-5} &= \overline{A}_{n-5}\exp(-2imx) + \ldots + A_{n-5}\exp(2imx),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Разлагая левые и правые части соотношений (3.4) в ряды Фурье и приравнивая коэффициенты при старших гармониках, получим цепочку уравнений для отыскания $A_{n-2}, A_{n-3}, \ldots$:

$$A_{n-2} = nv_m, \tag{3.8.$n-2$}$$

$$\dot{A}_{n-2} + imA_{n-3} = (n-1)ima^0_{n-1}v_m, \tag{3.8.$n-3$}$$

$$2A_{n-4} = (n-2)A_{n-2}v_m, \tag{3.8.$n-4$}$$

$$\dot{A}_{n-4} + 2imA_{n-5} = (n-3)imA_{n-3}v_m, \tag{3.8.$n-5$}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Здесь точка над буквой означает дифференцирование по t. При выводе уравнений (3.8) предполагалось $m \neq 0$.

Рассмотрим сначала случай нечетного n. Тогда подсистема уравнений $(3.8.n-2)$, $(3.8.n-4)$, ..., $(3.8.1)$ замкнута:

$$\begin{aligned}
A_{n-2} &= nv_m,\\
2A_{n-4} &= (n-2)A_{n-2}v_m,\\
3A_{n-6} &= (n-4)A_{n-4}v_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\tfrac{n-1}{2}A_1 &= 3A_3v_m,
\end{aligned}$$

откуда

$$\left(\tfrac{n-1}{2}\right)!\,A_1 = n!!\,(v_m)^{(n-1)/2}. \tag{3.9}$$

Последнее уравнение системы (3.4)

$$(a_0)_t = a_1V_x \tag{3.10}$$

влечет $imA_1v_m = 0$. По предположению $m \neq 0$, поэтому с учетом соотношения (3.9) имеем равенство $v_m = 0$. Применяя индукцию (уменьшая m), получаем, что V вообще не зависит от x.

Рассмотрим теперь случай четного n ($n \geqslant 2$). Сначала из уравнений $(3.8.n-2)$, $(3.8.n-4)$, ..., $(3.8.0)$ найдем

$$\begin{aligned}
A_{n-2} &= nv_m,\\
2A_{n-4} &= (n-2)A_{n-2}v_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
lA_{n-2l} &= (n-l+2)A_{n-l+2}v_m,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(n/2)A_0 &= 2A_2v_m,
\end{aligned}$$

откуда

$$A_{n-2l} = \frac{n(n-2)\dots(n-l+2)}{l!}(v_m)^l, \quad 1 \leqslant l \leqslant n/2. \tag{3.11}$$

Для отыскания $A_{n-3}, A_{n-5}, \dots$ используем уравнения $(3.8.n-3)$, $(3.8.n-5)$, ... :

$$\begin{aligned}
A_{n-3} &= (n-1)a^0_{n-1}v_m - \dot{A}_{n-2}/im,\\
2A_{n-5} &= (n-3)A_{n-3}v_m - \dot{A}_{n-4}/im,\\
&\dots\dots\dots\dots\\
\tfrac{n-2}{2}A_1 &= 3A_3v_m - \dot{A}_2/im.
\end{aligned}$$

Из этих уравнений, с учетом соотношений (3.11), получаем

$$\left(\tfrac{n-2}{2}\right)!\,A_1 = (n-1)!!\,a^0_{n-1}(v_m)^{(n-2)/2} + \tfrac{iF(n)}{m} v_m^{n/2-2}\dot v_m, \tag{3.12}$$

где F — положительное число (зависящее лишь от n).

При четном n из уравнения (3.10) вытекает соотношение

$$\dot A_0 = imA_1 v_m. \tag{3.13}$$

Полагая в (3.12) $l = n/2$, получаем

$$A_0 = \frac{n!!}{(n/2)!!} v_m^{n/2}. \tag{3.14}$$

Из соотношений (3.12)–(3.14) можно получить для v_m уравнение

$$G(n)\dot v_m = ima^0_{n-1} v_m, \tag{3.15}$$

где $G(\cdot)$, равно как и F, принимает вещественные значения, и $G > 0$. Из линейного уравнения (3.15) вытекает искомая формула $v_m = c\exp(i\beta t)$, $\beta = ma^0_{n-1}/G(n)$. Попутно установлено, что β линейно зависит от параметра a^0_{n-1}. Остается доказать, что $G(n) = n$. Для этого выполним подстановку $x \to x - (a^0_{n-1}/n)t$. В результате получим уравнение вида (3.1) с потенциалом

$$V^*(x,t) = V\big(x - (a^0_{n-1}/n)t, t\big), \tag{3.16}$$

допускающее интеграл (3.3), в котором $a_{n-1} = 0$. Функция V^* — тригонометрический многочлен по x, причем, согласно (3.15), коэффициент при старшей гармонике равен некоторому комплексному числу c. Из формулы (3.16) тогда следует, что старший коэффициент Фурье многочлена V равен $c\exp(ima^0_{n-1}/n)t$. Следовательно, $G(n) = n$.

Теорема доказана.

§ 4. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием

1. Пусть W, W^* — двойственные n-мерные линейные пространства над полем вещественных чисел. Их элементы будем обозначать соответственно через x, y. Пусть (y, x) — значение ковектора y на векторе x. Рассмотрим функцию $V : W \to \mathbb{R}$, определенную формулой

$$V(x) = \sum_{k=1}^{m} v_k \exp(a_k, x), \tag{4.1}$$

где v_k — отличн‵‵е от нуля вещественные числа, $a_1, \dots, a_m$ — ненулевые векторы из W^*; функция V играет роль потенциальной энергии экспоненциального взаимодействия. Набор векторов $a_1, \dots, a_m$ — "спектр" суммы экспонент (4.1) — обозначим символом Δ. Пусть $\langle\ ,\ \rangle$ — скалярное произведение в пространстве W^*. Метрика $\langle\ ,\ \rangle$ позволяет отождествить двойственные пространства W и W^*, точнее, существует такой линейный изоморфизм $A: W^* \to W$, что $(y, x) = \langle y, A^{-1}x\rangle$ при всех $x \in W$, $y \in W^*$. Зная метрику $\langle\ ,\ \rangle$ и потенциал V, можно записать уравнения движения "системы с экспоненциальным взаимодействием" $(W, \langle\ ,\ \rangle, V)$:

$$\dot{x} = Ay, \quad \dot{y} = -\sum_k [v_k \exp(a_k, x)] a_k. \tag{4.2}$$

Пусть $e_1, \dots, e_n$; $e_1^*, \dots, e_n^*$ — сопряженные базисы в W и W^*: $(e_i^*, e_j) = \delta_{ij}$ (δ_{ij} — символ Кронекера). Положим $x = \sum x_i e_i$ и $y = \sum y_i e_i^*$. В координатах $x_1, \dots, x_n$, $y_1, \dots, y_n$ на фазовом пространстве $W \times W^*$ уравнения (4.2) можно представить в виде канонических уравнений Гамильтона

$$\dot{x}_i = \partial H/\partial y_i, \quad \dot{y}_i = -\partial H/\partial x_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{4.3}$$

с гамильтонианом $H = T + V$, где $T = \langle y, y\rangle/2$ — кинетическая энергия системы.

Пусть $D: W \to W$ — невырожденный линейный оператор, а $D^*: W^* \to W^*$ — оператор, сопряженный с D. Отображение $W \times W^* \to W \times W^*$, задаваемое формулами $x' = Dx$, $y' = (D^*)^{-1}y$, является каноническим. В частности, в новых переменных $x'_1, \dots, x'_n$, $y'_1, \dots, y'_n$ уравнения Гамильтона (4.3) будут снова иметь канонический вид с тем же гамильтонианом. Подходящим выбором оператора D кинетическую энергию можно привести к сумме квадратов: $T = (y_1^2 + \dots + y_n^2)/2$.

Гамильтоновы системы вида (4.2) часто встречаются в приложениях. Так, динамика конечной периодической цепочки Тоды описывается системой уравнений (4.3) с функцией Гамильтона

$$H = \sum_{s=1}^{n} y_s^2/2 + \sum_{s=1}^{n} \exp(x_s - x_{s+1}), \quad x_{n+1} = x_1. \tag{4.4}$$

Уравнения (4.2) встречаются также при изучении некоторых однородных космологических моделей в общей теории относительности [20].

Поиску случаев интегрируемости гамильтоновых систем (4.2) посвящено значительное число работ. М. Эно [204], Г. Флашка [194], С. В. Манаков [121] установили полную интегрируемость цепочки Тоды: уравнения Гамильтона с гамильтонианом (4.4) имеют n независимых полиномиальных по импульсам первых интегралов, попарно находящихся в инволюции. Этот результат обобщен в работах [180, 224, 213] на случай, когда спектр Δ является системой простых корней простой алгебры Ли. С этой точки зрения гамильтониан (4.4) соответствует алгебре типа A_n. Е. К. Склянин [231] указал еще одно интегрируемое обобщение цепочки Тоды:

$$H = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \exp(x_{s+1} - x_s) + \alpha_1 \exp x_1 + \\ + \frac{\beta_1}{2}\exp(2x_1) + \alpha_n \exp(-x_n) + \frac{\beta_n}{2}\exp(-2x_n), \quad (4.5)$$

где $\alpha_1, \beta_1, \alpha_n, \beta_n$ — произвольные вещественные постоянные. Метод работы [180] основан на представлении уравнений Гамильтона (4.2) в виде $L - A$ пары Лакса (для классической цепочки Тоды $L - A$ пара указана в п. 4 § 8 гл. II). Элементы матриц L и A являются линейными функциями импульсов $y_1, \dots, y_n$, коэффициенты которых — конечные суммы вещественных экспонент:

$$\sum f_\lambda \exp(c_\lambda, x), \quad f_\lambda \in \mathbb{R}, \quad c_\lambda \in \mathbb{R}^n. \quad (4.6)$$

Следовательно, следы степеней матрицы L — интегралы уравнений Гамильтона — являются полиномами по импульсам с коэффициентами вида (4.6).

До работы [177] было мало что известно об интегрируемости системы (4.2) в общем случае. В [177] рассмотрена система, "спектр" которой состоит из $n+1$ векторов $a_1, \dots, a_{n+1}$, любые n из которых линейно независимы. Доказано, что при этих предположениях критерием алгебраической интегрируемости уравнений (4.2) является выполнение условий

$$\frac{2\langle a_i, a_j\rangle}{\langle a_i, a_i\rangle} \in -\mathbb{Z}_+, \quad \mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \dots\},$$

при всех $i \neq j$. Алгебраическая интегрируемость в данном случае означает, в частности, что переменные y_s, $\exp x_s$ $(1 \leqslant s \leqslant n)$ мероморфны на плоскости комплексного времени для почти всех начальных данных. Поиск необходимых условий алгебраической интегрируемости основан на классическом методе С. В. Ковалевской, примененном ею в динамике твердого тела. Обобщению этого результата посвящен § 4 гл. VII. Там же (в п. 4) рассмотрена более простая задача о полиномиальных интегралах системы (4.3), обладающих некоторыми дополнительными свойствами.

Отметим, что далеко не каждая вполне интегрируемая система вида (4.2) будет алгебраически интегрируемой в смысле определения работы [177]. Вот простой пример системы с одной степенью свободы: $H = [y^2 + e^{-2x} f_m(e^x)]/2$, где $f_m(\cdot)$ — многочлен степени m с простыми корнями. Эта система алгебраически неинтегрируема при $m \geqslant 5$. Действительно, функции $\int (2hq^2 - f_m(q))^{-1/2}\, dq = t$, $q = \exp x$, $y = \dot q/q$ являются ее решениями с запасом полной энергии h. Ясно, что при $m \geqslant 5$ для почти всех h функция $q(t)$ многозначна на комплексной плоскости.

Следуя работе [102], изучим интегрируемость уравнений (4.2) в вещественной области.

2. Гамильтонову систему уравнений (4.2) назовем интегрируемой по Биркгофу, если она имеет n полиномиальных по импульсам интегралов с коэффициентами вида (4.6), независимых (как функции в $W \times W^*$) почти всюду.

Вектор из Δ назовем максимальным, если он имеет наибольшую длину среди всех векторов Δ, имеющих с ним одинаковое направление.

Строение интегрируемых систем определяет

Теорема 1. *Предположим, что гамильтонова система (4.2) интегрируема по Биркгофу. Пусть a_i — максимальный вектор из Δ, векторы $a_j \in \Delta$ и a_i линейно независимы. Тогда*

$$\frac{2\langle a_i, a_j\rangle}{\langle a_i, a_i\rangle} \in -\mathbb{Z}_+. \tag{4.7}$$

Следствие 1. *Если система (4.2) интегрируема по Биркгофу, то любые два линейно независимых максимальных вектора $a_i, a_j \in \Delta$ удовлетворяют условию (4.7).*

Это утверждение полезно сравнить с результатом работы [177], где рассмотрен случай, когда Δ состоит из $n+1$ векторов $a_1, \ldots, a_{n+1}$, причем любые n из них линейно независимы. В [177] показано, что критерием алгебраической интегрируемости системы (4.2) является именно выполнение условия (4.7). Следствие 1 утверждает, что в этом случае критерием интегрируемости по Биркгофу также является (4.7). Эта ситуация аналогична имеющей место в классической задаче о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой: уравнения движения алгебраически интегрируемы в том и только том случае, когда они имеют полный набор независимых полиномиальных интегралов.

Следствие 2. *Если система интегрируема по Биркгофу, то:*

1) *угол между любыми двумя векторами из Δ равен одному из следующих:* 0, $\pi/2$, $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$, π;

2) *пусть* $a, a' \in \Delta$ *и вектор* a — *максимальный; если угол* φ *между* a *и* a' *равен* $2\pi/3$, то $|a| = |a'|$; *если* $\varphi = 3\pi/4$, то $|a| = \sqrt{2}|a'|$ *или* $|a| = |a'|/\sqrt{2}$; *если* $\varphi = 5\pi/6$, *то* $|a|$ *есть* $\sqrt{3}|a'|$, $2|a'|/\sqrt{3}$ *или* $|a'|/\sqrt{3}$.

Действительно, угол между векторами из Δ совпадает с углом между двумя соответствующими максимальными векторами. Пусть a_i, a_j — максимальные векторы, φ — величина угла между ними. Согласно теореме 1, имеем

$$\frac{2\langle a_j, a_i\rangle}{\langle a_j, a_j\rangle} \in -\mathbb{Z}_+. \tag{4.8}$$

Используя (4.7) и (4.8), получаем, что $4\cos^2\varphi = \dfrac{4\langle a_i, a_j\rangle^2}{\langle a_i, a_i\rangle\langle a_j, a_j\rangle} = l$ — целое число. Поскольку $l \leqslant 4$, то $\cos\varphi$ может принимать одно из следующих значений: 0, $\pm 1/2$, $\pm\sqrt{2}/2$, $\pm\sqrt{3}/2$, ± 1. Первое утверждение следствия доказано. Вывод второго содержится в п. 5.

Ниже приводится классификация интегрируемых по Биркгофу гамильтоновых систем, основанная на теореме 1.

3. Пусть W^* есть прямая сумма ортогональных подпространств $W_1^*, \ldots, W_p^*$ и спектр Δ лежит в их объединении $\bigcup W_i^*$. Через $W_1, \ldots, W_p$ обозначим образы $W_1^*, \ldots, W_p^*$ при отображении $A : W^* \to W$. Легко понять, что система (4.2) распадается на p замкнутых подсистем с фазовыми пространствами $W_i \times W_i^* \subset W \times W^*$. Пусть H_i — ограничение функции Гамильтона H на $W_i \times W_i^*$. Тогда $H = \sum H_i$. Если базисные векторы $e_1, \ldots, e_n$ принадлежат объединению $W_1 \cup \ldots \cup W_p$, то в соответствующих канонических переменных $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_n$ уравнения (4.3) разбиваются на p замкнутых гамильтоновых систем с функциями Гамильтона H_i (т. е. происходит частичное разделение переменных); при этом говорят, что исходная гамильтонова система есть прямая сумма своих подсистем. Если такое разложение (в сумму нетривиальных подпространств W_i) невозможно, назовем гамильтонову систему неприводимой. Имеет место очевидное

Предложение 1. *Каждая гамильтонова система* (4.2) *есть прямая сумма своих неприводимых подсистем.*

Пусть α и β — векторы из Δ, φ — угол между ними. Если гамильтонова система интегрируема по Биркгофу, то, по следствию 2 теоремы 1, величина $4\cos^2\varphi$ может иметь одно из следующих значений: 0, 1, 2, 3, 4. Это обстоятельство подсказывает нам ввести в рассмотрение граф Кокстера интегрируемой по Биркгофу гамильтоновой системы, т. е. граф, вершинами которого служат векторы из Δ, причем вершины α и β соединены $4\cos^2\varphi$ ребрами. Ясно, что если интегрируемая система неприводима, то ее граф Кокстера связен и непуст.

При $\dim W_i^* = 1$ множество $\Delta \cap W_i^*$ может быть любым конечным множеством векторов; это вытекает из факта полной интегрируемости гамильтоновых систем с одной степенью свободы. Оставляя в стороне эти тривиальные случаи, будем далее предполагать $\dim W_i^* > 1$.

Итак, рассмотрим строение интегрируемой неприводимой гамильтоновой системы с $n > 1$ степенями свободы.

Предложение 2. *Любые два линейно зависимых вектора из Δ сонаправлены.*

Доказательство. Положим $\Pi_a = \{b \in W^* : \langle a, b\rangle \leqslant \leqslant 0\}$. Пусть α, β — линейно зависимые векторы из Δ. Если $\gamma \in \Delta$ и $\gamma \neq k\alpha$ ($k \in \mathbb{R}$), то, по теореме 1, $\gamma \in \Pi_\alpha$ и $\gamma \in \Pi_\beta$. Если α и β направлены в противоположные стороны, то пересечение $\Pi_\alpha \cap \Pi_\beta$ является гиперплоскостью в W^*, ортогональной α и β. В этом случае вектор γ ортогонален α и β, что противоречит предположению о неприводимости. Предложение доказано.

Интегрируемую систему со спектром Δ назовем полной, если не существует такого ненулевого вектора $a \in W^*$, что множество $\Delta \cup \{a\}$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Спектр каждой интегрируемой по Биркгофу гамильтоновой системы получается из некоторого полного спектра отбрасыванием части элементов; при этом уменьшении множества Δ связность графа Кокстера не нарушится, а число вершин не может стать меньше, чем $\dim W^* = n$.

Понятно, что граф Кокстера определяет лишь углы между парами векторов из Δ. Для возможности восстановления отношений длин векторов припишем каждой его вершине коэффициент, пропорциональный квадрату длины $\langle a, a\rangle$ соответствующего вектора $a \in \Delta$. Так доопределенный граф Кокстера назовем (как принято в теории корневых систем) схемой Дынкина. Не будем различать схемы Дынкина, отличающиеся лишь положительным коэффициентом пропорциональности. Этому соглашению можно придать прозрачный динамический смысл.

Рассмотрим две гамильтоновы системы, у которых векторы из их спектров отличаются положительным множителем k. Нетрудно проверить, что подстановка $x \to kx, t \to kt$ переводит уравнения движения (4.2) одной системы в уравнения движения другой. С помощью следствия 2 из теоремы 1 и предложения 2 легко показать, что схема Дынкина однозначно (с точностью до изоморфизма) определяет спектр интегрируемой неприводимой гамильтоновой системы.

Теорема 2. *Схема Дынкина полной неприводимой гамильтоновой системы, интегрируемой по Биркгофу, изоморфна одной из схем, изображенных на рис. 38.*

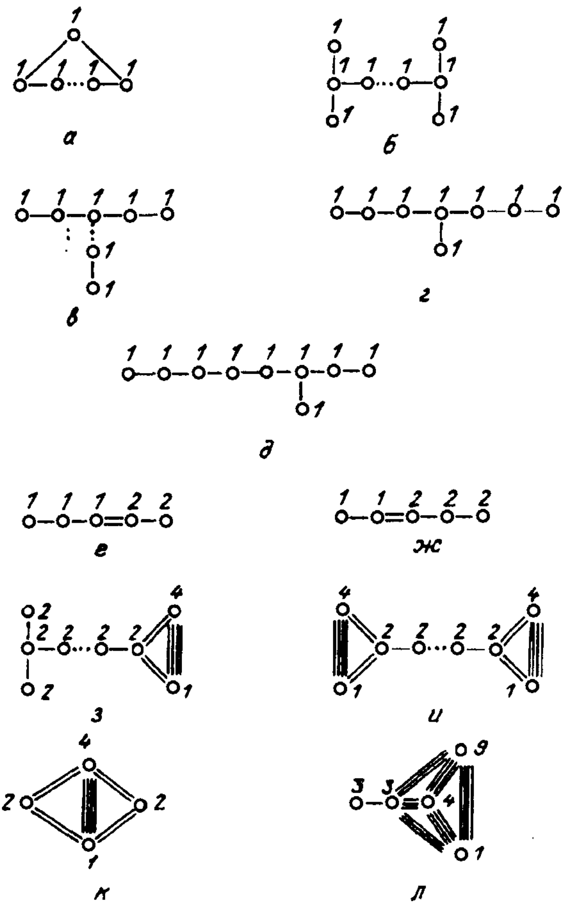

Рис. 38

Следствие. *Спектр неприводимой гамильтоновой системы с $n \geqslant 2$ степенями свободы, интегрируемой по Биркгофу, содержит не более $n+3$ различных векторов.*

Оценка $\operatorname{card} \Delta \leqslant n+3$ неулучшаема; это показывает пример системы с функцией Гамильтона (4.5).

Для доказательства теоремы 2 нам понадобится

Лемма 1. *Пусть векторы $a_\lambda \in \Delta$ попарно линейно независимы, и $\sum x_\lambda a_\lambda = 0$ при некоторых вещественных $x_\lambda \neq 0$. Если a — вектор из Δ, линейно независимый с каждым a_λ, то $\langle a, a_\lambda \rangle = 0$.*

Доказательство. Равенство $\sum x_\lambda a_\lambda = 0$ $(x_\lambda \neq 0)$ можно переписать в следующем виде: $\sum y_\mu a_\mu = \sum z_\nu a_\nu$ $(y_\mu > 0,\ z_\nu > 0)$. Положим $b = \sum y_\mu a_\mu$ и вычислим $\langle b, b\rangle = \sum y_\mu z_\nu \langle a_\mu, a_\nu\rangle$. Векторы a_λ попарно линейно независимы, следовательно, по теореме 1, $\langle b, b\rangle \leqslant 0$, т. е. $b = 0$. Так как $0 = \langle a, b\rangle = \sum y_\mu \langle a, a_\mu\rangle$ $(y_\mu > 0)$ и $\langle a, a_\mu\rangle \leqslant 0$ (теорема 1), то, очевидно, $\langle a, a_\mu\rangle = 0$. Аналогично $\langle a, a_\nu\rangle = 0$, что и требовалось доказать.

Предложение 3. *Множество Δ содержит не более $n+1$ попарно линейно независимых векторов, причем любые n из них линейно независимы.*

Доказательство. Пусть Δ имеет $n+1$ попарно независимых векторов $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Так как $\dim W^* = n$, то

$$\sum_{i=1}^{n+1} x_i a_i = 0, \quad \sum x_i^2 \neq 0.$$

Обозначим через Δ' множество векторов из Δ, линейно зависимых с теми $a_1, \ldots, a_{n+1}$, для которых $x_i \neq 0$. Согласно лемме 1, множества Δ' и $\Delta \setminus \Delta'$ взаимно ортогональны. По предположению система неприводима, поэтому $\Delta = \Delta'$ и все x_i — ненулевые. В частности, каждые n векторов из совокупности $a_1, \ldots, a_{n+1}$ линейно независимы. Предложение доказано.

В n-мерном евклидовом пространстве для тех систем из $n+1$ вектора, в которых каждая собственная подсистема линейно независима и выполнено условие (4.7), имеется полная классификация [202] (см. также [177]). Такие системы являются системами простых корней градуированных алгебр Каца — Муди. Полные диаграммы Дынкина *а*)–*л*), перечисленные в теореме 2, получены из известных диаграмм систем корней алгебр Каца — Муди с учетом возможности существования в спектре интегрируемой системы сонаправленных векторов (относящиеся сюда простые рассуждения опущены). Пусть теперь Δ содержит n линейно независимых максимальных векторов, удовлетворяющих условию (4.7). Такая система не будет полной в смысле нашего определения: к этим n векторам можно так добавить еще один, чтобы сохранилось условие (4.7) и любая подсистема из n векторов была линейно независима. Это вытекает, например, из того факта, что диаграмма Дынкина системы простых корней получается из диаграммы системы корней некоторой алгебры Каца — Муди отбрасыванием одной вершины [202].

4. Рассмотрим теперь вопрос об интегрируемости по Биркгофу гамильтоновых систем, перечисленных в теореме 2. В случаях *а*)–*ж*) полная интегрируемость установлена в работах [180, 176]. Гамильтониан системы со схемой Дынкина *и*) можно всегда привести к виду (4.5). Эта система проинтегрирована в работе [231].

Графу *к*) отвечает гамильтонова система с двумя степенями свободы и функцией Гамильтона

$$H = (y_1^2 + y_2^2)/2 + v_1e_1 + v_2e_2 + v_3e_3 + v_4e_4,$$
$$e_1 = \exp x_1, \qquad e_2 = \exp x_2,$$
$$e_3 = \exp(-x_1 - x_2), \qquad e_4 = \exp(-(x_1 + x_2)/2).$$

При всех значениях коэффициентов $v_1, \ldots, v_4$ она имеет дополнительный интеграл четвертой степени по импульсам:

$$F = y_1^2y_2^2 + 2v_2y_1^2e_2 + 2v_3y_1y_2e_3 + 2v_4y_1y_2e_4 + 2v_1y_2^2e_1 +$$
$$+ 2v_2v_3e_2e_3 + 2v_1v_3e_1e_3 + 4v_1v_2e_1e_2 + v_3^2e_3^2 + 2v_3v_4e_3e_4 + v_4^2e_4^2.$$

Это — новая интегрируемая цепочка. При $v_3 = 0$ или $v_4 = 0$ получаем интегрируемые цепочки из работ [180, 176]. Ясно, что старшие однородные формы функций H и F независимы.

Функция Гамильтона со схемой Дынкина *з*) в подходящих канонических переменных имеет вид

$$H = \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n} y_s^2 + \sum_{s=1}^{n-1} \exp(x_s - x_{s+1}) + \exp(-x_1 - x_2) +$$
$$+ \alpha_n \exp x_n + \beta_n \exp(2x_n); \qquad \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{R}, \quad n \geqslant 4. \tag{4.9}$$

При $\alpha_n = 0$ или $\beta_n = 0$ полная интегрируемость этой системы установлена в работах [176, 180]: если $\beta_n = 0$, это — система типа B_n (по классификации [180]), а при $\alpha_n = 0$ получаем систему типа $b_1^{(1)}$ (по классификации [176]). Остается невыясненным, интегрируемы ли уравнения Гамильтона с гамильтонианом (4.9) в общем случае ($\alpha_n \neq 0$ и $\beta_n \neq 0$); по-видимому, это верно.

Вопрос об интегрируемости гамильтоновой системы с графом *л*) оказался более сложным. В работах [176, 180] проинтегрированы гамильтоновы системы с двумя степенями свободы, ориентированный граф Кокстера которых имеет указанный на рис. 39 вид.

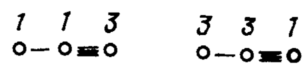

Рис. 39

Они получаются из графа *л*) отбрасыванием двух вершин. В [102] рассмотрена задача об интегрируемости по Биркгофу системы с гамильтонианом

$$H = (y_1^2 + y_2^2)/2 + v_1 \exp x_1 +$$
$$+ v_2 \exp\left(-\frac{x_1+\sqrt{3}x_2}{2}\right) + v_3 \exp\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x_2\right) + v_4 \exp(\sqrt{3}x_2). \quad (4.10)$$

Ее граф Кокстера получается из графа *л*) отбрасыванием одной вершины. Этот случай отличается от общего тем, что все линейно независимые векторы из Δ удовлетворяют условию (4.7). Если все коэффициенты v_i отличны от нуля, то уравнения Гамильтона с гамильтонианом (4.10) не имеют дополнительного интеграла, степень которого не превышает шести; число 6 выбрано не случайно — это ранг группы Кокстера, порожденной отражениями относительно векторов из спектра Δ. Отметим, что в остальных интегрируемых системах с двумя степенями свободы степень дополнительного полиномиального интеграла равна именно рангу соответствующей группы Кокстера.

По-видимому, система с гамильтонианом (4.10) — и тем более система с графом *л*) — не имеет дополнительного аналитического интеграла. Это предположение подтверждается численными расчетами, выполненными А. В. Борисовым для системы с гамильтонианом (4.10) с дополнительным слагаемым $v_5 \exp x_2$, в котором $v_1 = \ldots = v_5 = 1$. Отметим, что интегрируемость замкнутой цепочки Тоды из трех частиц впервые была подмечена в результате численных расчетов [195].

Стоит также подчеркнуть, что, согласно результатам § 4 гл. VII, гамильтонова система с графом *л*) алгебраически интегрируема лишь при соблюдении условий $v_3 = v_5 = 0$ или $v_4 = v_5 = 0$.

5. Перейдем к доказательству теоремы 1. Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $e_1^*, \ldots, e_n^*$ — сопряженные базисы в W и W^*. Введем отношение порядка в W^*, которое обозначим символом $\prec$: пусть $\sigma = \sum \sigma_i e_i^*$ и $\delta = \sum \delta_i e_i^*$; запись $\sigma \prec \delta$ означает, что для наименьшего индекса k, при котором $\sigma_k \neq \delta_k$, выполнено неравенство $\sigma_k < \delta_k$. Ясно, что $\prec$ является обычным отношением лексикографического порядка в W^* в базисе $e_1^*, \ldots, e_n^*$. Это отношение естественным образом индуцирует отношение порядка в W. Пусть запись $\sigma \preccurlyeq \delta$ означает $\sigma \prec \delta$ или $\sigma = \delta$.

Доказательство теоремы 1 основано на применении следующего утверждения, представляющего самостоятельный интерес.

Теорема 3. *Пусть α — максимальный элемент в Δ относительно отношения порядка $\prec$. Предположим, что найдется вектор $\beta \in \Delta$, удовлетворяющий следующим условиям:*

(1) *$\beta \succ 0$ и β линейно независим с α;*

(2) *из равенства $s\alpha + \beta = \tau_1 + \ldots + \tau_{s+1}$, где $\tau_i \in \Delta$, вытекает,*

что $\tau_k = \beta$ *и* $\tau_j = \alpha$ $(j \neq k)$;

(3) $m\langle\alpha,\alpha\rangle + 2\langle\alpha,\beta\rangle \neq 0$ *при всех целых* $m \geqslant 0$.

Тогда гамильтонова система (2) *неинтегрируема по Биркгофу.*

Сделаем некоторые замечания.

1. Для выполнения условия (2) теоремы 3 достаточно потребовать, чтобы β был максимальным линейно независимым с α вектором из Δ.

2. Теорема 3 справедлива и для псевдоевклидовой метрики $\langle\ ,\ \rangle$.

Теорема 3 будет доказана в § 5; сейчас мы выведем из нее теорему 1.

На векторном пространстве W^* можно ввести естественную аффинную структуру, поэтому Δ можно рассматривать как конечный набор точек аффинного пространства. Через $\mathcal{E}(\Delta)$ обозначим выпуклую оболочку множества Δ. Ясно, что $\mathcal{E}(\Delta)$ — выпуклый многогранник в n-мерном аффинном пространстве. Необходимые для дальнейшего сведения из теории выпуклых тел можно найти, например, в [17].

Лемма 2. *Пусть α и β — две соседние (соединенные ребром) вершины многогранника $\mathcal{E}(\Delta)$, линейно независимые как векторы из W^*. Если гамильтонова система интегрируема, то при некотором целом $m \geqslant 0$ выполнено равенство $m\langle\alpha,\alpha\rangle + 2\langle\alpha,\beta\rangle = 0$.*

Доказательство. Пусть γ — отрезок, соединяющий точки α и β. Ясно, что γ — ребро выпуклого многогранника $\mathcal{E}(\Delta)$.

Векторы α и β линейно независимы как элементы пространства W^*, и $\mathcal{E}(\Delta)$ — выпуклый многогранник, поэтому существует гиперплоскость Γ, не проходящая через точку $O \in W^*$ и такая, что пересечение $\Gamma \cap \mathcal{E}(\Delta)$ совпадает с ребром γ. При этом гиперплоскость Γ может отделять или не отделять многогранник $\mathcal{E}(\Delta)$ от точки $O \in W^*$. В первом случае выберем в W^* следующий базис: $e_1^* = \alpha$, e_2^* — вектор с началом в точке β и концом в точке α, $e_3^*, \ldots, e_n^*$ — векторы в гиперплоскости Γ, линейно независимые с e_2^*. Во втором случае в качестве базиса выберем набор векторов $(-e_1^*), e_2^*, \ldots, e_n^*$.

Ясно, что в выбранном базисе вектор α является максимальным элементом множества Δ. Пусть α' — наибольший элемент в $\Delta \setminus \{\alpha\}$. Очевидно, что α', как точка аффинного пространства, является ближайшей к α точкой из множества $(\Delta \setminus \{\alpha\}) \cap \gamma$. Тогда угол между векторами α и α' не меньше $\pi/2$: в противном случае α и α' удовлетворяют условиям (1)–(3) теоремы 3, и, следовательно, рассматриваемая гамильтонова система неинтегрируема. Пусть β' — ближайшая к вершине β точка из множества $(\Delta \setminus \{\beta\}) \cap \gamma$; аналогично доказывается, что угол между векторами β и β' не меньше $\pi/2$. Векторы α и β по предположению независимы, поэтому угол между ними строго меньше π. Следовательно, точка α' совпадает с вершиной β, а β' — с вершиной α. Тем самым векторы α и β удовлетворяют условиям (1) и (2) теоремы 3. Если будет выполнено условие (3), то система окажется неинтегрируемой вопреки предположению. Лемма доказана.

Лемма 3. *Пусть исходная гамильтонова система интегрируема по Биркгофу. Тогда*

1) *все точки Δ лежат на лучах с началом в точке $O \in W^*$, проходящих через вершины выпуклого многогранника $\mathcal{E}(\Delta)$;*

2) *углы между этими лучами не меньше $\pi/2$.*

Доказательство. Пусть δ — точка из Δ. Тогда найдется такая вершина σ многогранника $\mathcal{E}(\Delta)$, что угол между σ и δ острый — в противном случае все вершины лежат в полупространстве $\Pi_\delta = \{y \in W^* : \langle y, \delta\rangle \leqslant 0\}$. Следовательно, $\mathcal{E}(\Delta) \subset \Pi_\delta$, поэтому $\delta \notin \mathcal{E}(\Delta)$. Получаем противоречие. Будем считать, что δ не лежит на луче, задаваемом вектором σ, т. е. угол между σ и δ не равен нулю. Можно считать также, что σ имеет максимальную длину среди всех векторов Δ, сонаправленных с σ.

Пусть Γ — гиперплоскость, проходящая через точку σ (как точку аффинного пространства) ортогонально вектору σ. Через Π обозначим замкнутое полупространство с границей Γ, не содержащее точки O. Покажем, что $\mathcal{E}(\Delta)$ имеет с Π лишь одну общую точку σ. Действительно, в противном случае имеется еще одна такая точка $\tau \neq \sigma$. Но тогда найдется точка μ — вершина $\mathcal{E}(\Delta)$, соединенная с σ ребром и лежащая в Π.

Докажем это утверждение от противного. Ясно, что $\mathcal{E}(\Delta) = M_1 \cup M_2$, где M_1 — выпуклая оболочка вершин $\mathcal{E}(\Delta)$, кроме σ, а M_2 — выпуклая оболочка ребер, выходящих из σ. Рассмотрим отрезок γ, соединяющий σ и τ. Пусть указанной точки μ не существует. Тогда $\gamma \cap M_2 = \Pi \cap M_2 = \sigma$, множество $\gamma \cap M_1$ замкнуто и не содержит σ, а это противоречит соотношению $\gamma \subset (M_1 \cup M_2)$. Итак, точка μ существует. Угол между σ и μ — острый и отличен от нуля. Поэтому, согласно лемме 2, система неинтегрируема.

Итак, $\mathcal{E}(\Delta) \cap \Pi = \{\sigma\}$. Рассмотрим в W^* базис $\{e_i^*\}$: $e_1^* = \sigma$, а $e_2^*, \ldots, e_n^*$ — независимые векторы в Π. Пусть $\prec$ — соответствующее отношение лексикографического порядка. Очевидно, что σ — максимальный элемент Δ и $\delta \succ 0$. Пусть δ' — максимальный линейно независимый с σ элемент множества Δ. Так как $\delta' \succcurlyeq \delta$, то $\langle \sigma, \delta'\rangle > 0$, и поэтому угол между σ и δ' также острый. По замечанию 1 к теореме 3 система неинтегрируема. Лемма доказана.

Теперь уже несложно доказать теорему 1. Согласно утверждению леммы 3, для любых двух линейно независимых векторов σ и

τ из Δ имеем $\langle\sigma,\tau\rangle \leqslant 0$. Пусть α, β — линейно независимые векторы из Δ, причем вектор α является максимальным. Выберем в W^* базис $\{e_i^*\}$: $e_1^* = \alpha$, $e_2^* = \beta$, векторы $e_3^*, \ldots, e_n^*$ ортогональны α и β. Пусть $\tau = \sum \tau_i e_i^* \in \Delta$. Покажем, что $\tau_1 \leqslant 0$, если τ и α линейно независимы. Действительно,

$$\langle\tau,\alpha\rangle = \tau_1\langle e_1^*, e_1^*\rangle + \tau_2\langle e_2^*, e_1^*\rangle \leqslant 0,$$
$$\langle\tau,\beta\rangle = \tau_1\langle e_1^*, e_2^*\rangle + \tau_2\langle e_2^*, e_2^*\rangle \leqslant 0.$$

При $\tau_1 > 0$ из первого неравенства получаем $\tau_2 > 0$. Следовательно, $\tau_1\langle\tau, e_1^*\rangle + \tau_2\langle\tau, e_2^*\rangle \leqslant 0$. С другой стороны, последнее неравенство можно записать в виде $\tau_1^2\langle e_1^*, e_1^*\rangle + 2\tau_1\tau_2\langle e_1^*, e_2^*\rangle + \tau_2^2\langle e_2^*, e_2^*\rangle \leqslant 0$; это, однако, противоречит свойству положительной определенности матрицы Грама $\|\langle e_i^*, e_j^*\rangle\|$ $(i,j = 1,2)$.

Таким образом, отношение порядка $\prec$, соответствующее базису $\{e_i^*\}$, таково, что α — наибольший элемент множества Δ и $\beta \succ 0$. Более того, если $\tau \succcurlyeq \beta$, то τ сонаправлен с вектором α или β. Из этих свойств векторов α и β вытекает справедливость условий (1) и (2) теоремы 3. Таким образом, если гамильтонова система интегрируема, то — по теореме 3 — при некотором целом $m \geqslant 0$ выполнено равенство

$$m\langle\alpha,\alpha\rangle + 2\langle\alpha,\beta\rangle = 0. \tag{4.11}$$

Пусть теперь β — максимальный по длине из сонаправленных с α векторов Δ. При некотором целом $k \geqslant 0$ получаем аналогичное соотношение

$$k\langle\beta,\beta\rangle + 2\langle\beta,\alpha\rangle = 0. \tag{4.12}$$

Из (4.11) и (4.12) заключаем, что угол φ между векторами α и β равен одному из следующих: $2\pi/3$, $3\pi/4$, $5\pi/6$; при этом, если $\varphi = 2\pi/3$, то $|\alpha| = |\beta|$; если $\varphi = 3\pi/4$, то $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$ или $|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$; если, наконец, $\varphi = 5\pi/6$, то $|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|$ или $|\beta| = \sqrt{3}|\alpha|$ (ср. со следствием 2 теоремы 1).

Рассмотрим теперь случай, когда имеется вектор $\beta' \in \Delta$, сонаправленный с β, причем $|\beta'| < |\beta|$. При некотором целом $l \geqslant 0$ по доказанному выше должно выполняться соотношение

$$l\langle\alpha,\alpha\rangle + 2\langle\alpha,\beta'\rangle = 0. \tag{4.13}$$

Пусть $\varphi = 2\pi/3$. Из (4.13) получаем соотношение $|\beta'| = l|\alpha|$. В этом случае $|\alpha| = |\beta| > |\beta'|$ и $l \geqslant 1$, поэтому приходим к противоречию. Итак, если $\varphi = 2\pi/3$, то вектор β' не существует.

Пусть теперь $\varphi = 3\pi/4$. Из (4.13) получаем равенство $|\beta'| = l|\alpha|/\sqrt{2}$. Если $|\alpha| = \sqrt{2}|\beta|$, то $|\beta'| = l|\beta|$. Так как $l \geqslant 1$, то это равенство противоречит исходному предположению $|\beta'| < |\beta|$. Если же $|\beta| = \sqrt{2}|\alpha|$, то $|\beta'| = l|\beta|/2$. Так как $|\beta'| < |\beta|$, то $l = 1$. Следовательно, при $\varphi = 3\pi/4$ имеем $\beta' = \beta/2$.

Рассмотрим последний случай: $\varphi = 5\pi/6$. Равенство (4.13) дает $|\beta'| = l|\alpha|/\sqrt{3}$. Если $|\alpha| = \sqrt{3}|\beta|$, то $|\beta'| = l|\beta|$. Ввиду неравенства $l \geqslant 1$ этот случай невозможен. Пусть теперь $|\beta| = \sqrt{3}|\alpha|$, тогда $|\beta'| = l|\beta|/3$. Так как $|\beta'| < |\beta|$, то либо $l = 1$, либо $l = 2$. Итак, если $\varphi = 5\pi/6$, то β' может быть одним из двух векторов, $\beta/3$ или $2\beta/3$. Теорема 1 доказана полностью.

Читатель, вероятно, уже заметил, что условия интегрируемости обратимых систем, у которых потенциалы являются тригонометрическими многочленами, аналогичны условиям для случая конечных сумм вещественных экспонент (это соотношения (5.3) гл. IV и (4.7) гл. VIII); эта аналогия, разумеется, не случайна. Ее происхождение обсуждается в § 5.

§ 5. Возмущения гамильтоновых систем с некомпактными инвариантными поверхностями

1. Геометрический вариант теоремы Лиувилля о полной интегрируемости (см. теорему 1 § 4 гл. II) утверждает, что некритические совместные поверхности уровня n коммутирующих интегралов гамильтоновой системы с n степенями свободы диффеоморфны $\mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ $(0 \leqslant k \leqslant n)$, причем в некоторых переменных $x_1, \ldots, x_k \bmod 2\pi$, $x_{k+1}, \ldots, x_n$ уравнения Гамильтона имеют совсем простой вид: $\dot{x}_s = \omega_s = \mathrm{const}$. В компактном случае $(k = n)$ имеется достаточно подробная теория поведения гамильтоновых систем, мало отличающихся от интегрируемых. Ниже, следуя работе [99], обсуждаются некоторые аналитические аспекты этой теории для некомпактного случая и ее связь с задачей о существовании полного набора независимых интегралов.

Пусть $M^n = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ — конфигурационное пространство обратимой гамильтоновой системы с функцией Гамильтона $H_0 + \varepsilon H_1$, где $H_0 = \frac{1}{2}\sum a_{ij} y_i y_j$ — положительно определенная квадратичная форма с постоянными коэффициентами, H_1 — однозначная функция на $M^n = \{x\}$, ε — малый параметр. Введем в $\mathbb{R}^n$ два скалярных произведения:

$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum a_{ij} \xi_i \eta_j, \quad (\xi, \eta) = \sum \xi_i \eta_i.$$

С учетом этих обозначений $H_0 = \langle y, y \rangle / 2$.

Следуя известной схеме классической теории возмущений, попытаемся найти зависящее от ε каноническое преобразование $x, y \to u, v$ вида $y = \partial S/\partial x$, $u = \partial S/\partial v$; $S = S_0(v, x) + \varepsilon S_1(v, x) + \ldots$, переводящее гамильтониан $H_0 + \varepsilon H_1$ в функцию $K_0(v) + \varepsilon K_1(v) + \ldots$

Положим $S_0 = (v, x)$; тогда при $\varepsilon = 0$ будем иметь тождественное преобразование. Производящая функция S должна удовлетворять уравнению Гамильтона в частных производных $H_0(\partial S/\partial x) + \varepsilon H_1(x) = K_0(v) + \varepsilon K_1(v) + \ldots$ Отсюда получаем бесконечную цепочку уравнений для последовательного определения $S_1, S_2, \ldots$ и $K_1, K_2, \ldots$:

$$\left\langle v, \frac{\partial S_1}{\partial x} \right\rangle + H_1(x) = K_1(v),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left\langle v, \frac{\partial S_m}{\partial x} \right\rangle + \frac{1}{2} \sum_{p+q=m} \left\langle \frac{\partial S_p}{\partial x}, \frac{\partial S_q}{\partial x} \right\rangle = K_m(v), \tag{5.1}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

В компактном случае ($k = n$) обычно предполагается, что средние значения функций S_m ($m \geqslant 1$) на $\mathbf{T}^n$ равны нулю. Это позволяет (на формальном уровне) из системы (5.1) однозначно найти $S_1, S_2, \ldots$ и $K_1, K_2, \ldots$ (см. § 10 гл. II). Возникающие при этом малые знаменатели препятствуют сходимости формальных рядов.

Каждое из уравнений (5.1) можно записать в виде

$$\left(w, \frac{\partial f}{\partial x} \right) = g, \tag{5.2}$$

где w — постоянное векторное поле на M^n (его компоненты линейно выражаются через v_i), g — известная, а f — неизвестная функции.

Имеет место простое

Предложение 1. *Если интегральные кривые векторного поля w не ограничены на M^n, то уравнение* (5.2) *разрешимо в целом.*

Действительно, функция f находится интегрированием g по траекториям поля w, при этом f однозначно определяется своими значениями в $(n-1)$-мерном сечении $x_j = \mathrm{const}$, где x_j — любая из линейных координат в M^n, монотонно меняющаяся со временем. Каждая траектория поля w пересекает это сечение лишь в одной точке.

Будем теперь рассматривать решение уравнения (5.2) как функцию от x и v. В общем случае оно имеет очевидную сингулярность в точке $v = 0$. Стоит отметить, что при $M \neq \mathbb{R}^n$ уравнение (5.2) не имеет решения, аналитического по v в области $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$; причина состоит в том, что на некоторых поверхностях M поле w имеет замкнутые траектории.

2. Для гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием цепочка уравнений (5.1) легко решается в явном виде. Положим $H_1 = \sum h^a \exp(a, x)$; суммирование идет по конечному множеству векторов $a \in \Delta$. Мы считаем, что $a \neq 0$: постоянные слагаемые в этой формуле можно отнести к функции K_1. Будем искать решение в виде суммы экспонент $S_1 = \sum S_1^a \exp(a, x)$. Тогда очевидно, что

$$S_1^a = -h^a / \langle v, a \rangle . \tag{5.3}$$

Коэффициенты суммы S_1 не определены на "резонансных" гиперплоскостях $\langle v, a \rangle$ ($a \in \Delta$), объединение которых обозначим $\mathbf{B}_1$ и назовем резонансным множеством первого порядка.

Уравнение для S_2 имеет тот же вид, что и уравнение для S_1. Функция

$$\frac{1}{2}\left\langle \frac{\partial S_1}{\partial x}, \frac{\partial S_1}{\partial x} \right\rangle \tag{5.4}$$

есть конечная сумма экспонент, однако ее коэффициенты зависят от новых импульсов. Будем искать S_2 в виде суммы $\sum S_2^\tau \exp(\tau, x)$. Слагаемые в (5.4), не зависящие от x, отнесем к функции K_2. Из второго уравнения системы (5.1) с учетом соотношений (5.3) найдем, что

$$S_2^\tau = -\frac{1}{2\langle v, \tau \rangle} \sum_{\sigma+\delta=\tau} \frac{\langle \sigma, \delta \rangle h^\sigma h^\delta}{\langle v, \sigma \rangle \langle v, \delta \rangle}.$$

Резонансным множеством второго порядка $\mathbf{B}_2$ назовем множество всех тех $v \in \mathbb{R}^n$, для которых $\langle v, \tau \rangle = 0$ ($\tau \neq 0$) и $\langle v, \tau \rangle S_2^\tau \not\equiv 0$.

Уравнения для $S_3, S_4, \ldots$ решаются последовательно по той же схеме. Положим

$$S_m = \sum S_m^\tau(v) \exp(\tau, x), \qquad S_m^\tau \not\equiv 0. \tag{5.5}$$

Коэффициенты S_m^τ находятся по рекуррентной формуле

$$S_m^\tau = -\frac{1}{2\langle v, \tau \rangle} \sum_{\substack{p+q=m \\ \sigma+\delta=\tau}} \langle \sigma, \delta \rangle S_p^\sigma S_q^\delta. \tag{5.6}$$

Эта формула — следствие системы (5.1) и формулы (5.5).

Введем резонансное множество m-го порядка $\mathbf{B}_m$; оно состоит из всех $v \in \mathbb{R}^n$, для которых 1) $\langle v, \tau \rangle = 0$, $\tau \neq 0$; 2) $\langle v, \tau \rangle S_m^\tau(v) \not\equiv 0$.

Положим $\mathbf{B} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} \mathbf{B}_k$ и назовем это множество резонансным множеством гамильтоновой системы; резонансное множество определено в $\mathbb{R}^n = \{v\}$. Отождествляя декартовы пространства

$\mathbb{R}^n=\{v\}$ и $\mathbb{R}^n=\{y\}$, получим множество точек в пространстве $\{y\}$. Это множество в дальнейшем также будет обозначаться через $\mathbf{B}$.

С аналитической точки зрения причина появления "малых знаменателей" для потенциалов с вещественными экспонентами та же, что и в случае компактной поверхности M^n; разница лишь в том, что аналитическое предположение о представимости решения системы (5.1) в виде кратного ряда Фурье обычно формулируют геометрически как условие однозначности на M^n.

Резонансное множество $\mathbf{B}$ играет ту же роль, что и множество Пуанкаре $\mathbf{P}$ в классической схеме теории возмущений инвариантных торов (ср. с § 4 гл. IV). Целесообразность введения и изучения резонансного множества ясна из следующего утверждения.

Предложение 2. *Пусть гамильтонова система* (4.3) *имеет n полиномиальных по импульсам интегралов с коэффициентами вида* (4.6). *Тогда их старшие однородные формы не зависят от координат x и являются зависимыми функциями во всех точках множества* $\mathbf{B}$.

Доказательство предложения 2 повторяет соответствующие рассуждения из § 1 и § 5 гл. IV (с учетом специфики рассматриваемой задачи они приведены в работе [102]).

Строение резонансного множества гамильтоновых систем с экспоненциальным воздействием описывает

Лемма (основная). *Пусть выполнены все условия теоремы 3 из § 4. Тогда множество $\mathbf{B}_k$ содержит гиперплоскость $\langle k\alpha + \beta, y\rangle = 0$. В частности, резонансное множество $\mathbf{B}$ состоит из бесконечного числа различных гиперплоскостей, и его замыкание содержит гиперплоскость $\langle y, \alpha\rangle = 0$.*

Старшие однородные формы полиномиальных интегралов являются аналитическими функциями в $\mathbb{R}^n = \{y\}$ (предложение 2), поэтому из предложения 2 и основной леммы вытекает теорема 3 § 4. Действительно, якобиан старших однородных форм есть аналитическая функция в $\mathbb{R}^n = \{y\}$, обращающаяся в нуль на бесконечном множестве гиперплоскостей, проходящих через начало координат. Следовательно, якобиан тождественно равен нулю, поэтому старшие однородные формы n полиномиальных интегралов всюду зависимы.

Доказательство леммы 1 с незначительным усложнением повторяет доказательство основной леммы из § 5 гл. IV (изменения касаются только леммы 5; все детали доказательства леммы 1 содержатся в [102]).

3. Не следует думать, что каждое решение уравнений системы (5.1) обязательно имеет сингулярности на "резонансных" плоскостях. Рассмотрим простой пример. Уравнение $v_1 \dfrac{\partial S}{\partial x_1} + v_2 \dfrac{\partial S}{\partial x_2} = e^{x_1}$.

имеет очевидное решение e^{x_1}/v_1; прямая $v_1 = 0$ будет резонансной. Однако можно указать решение без сингулярностей в области $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$:

$$S = \begin{cases} \dfrac{1}{v_1}\left(\exp x_1 - \exp\left(\dfrac{v_2(v_2x_1 - v_1x_2)}{v_1^2 + v_2^2}\right)\right), & v_1 \neq 0, \\ \dfrac{x_2}{v_2}\exp x_1; & v_1 = 0,\ v_2 \neq 0. \end{cases}$$

Оно, конечно, не является многочленом экспонент при всех $v_1^2 + v_2^2 \neq 0$.

Это замечание позволяет обойти проблему "малых знаменателей". Оно указывает на возможность наличия у гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием нетривиальных интегралов другой аналитической природы. В подтверждение сошлемся на работу [197], в которой установлено существование аналитических интегралов некоторых гамильтоновых систем вида (4.2), не подпадающих под классификацию теоремы 2 § 4: они, конечно, не являются полиномами по импульсам, коэффициенты которых — ряды от вещественных экспонент. Эти интегралы не удается выписать в явном виде, хотя они существуют благодаря особым свойствам поведения решений системы (4.2) при $t \to \pm\infty$.

4. Метод решения системы (5.1), развитый в п. 2, применим и в более общем случае, когда $M^n = \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$. Возмущающая функция H_1 будет 2π-периодической по первым k координатам x, поэтому представление H_1 в виде суммы экспонент следует модифицировать: первые k компонент каждого вектора a должны быть числами из $i\mathbb{Z}$ (i — мнимая единица). Поскольку H_1 — вещественная функция, то для каждого a найдется такой вектор a', что: 1) первые k компонент вектора $a + a'$ равны нулю; 2) $\overline{h}_a = h_{a'}$.

И в этом более общем случае систему (5.1) можно решать методом п. 2, надо только иметь в виду, что уравнение $\langle a, v\rangle = 0$ задает не одну, а две гиперплоскости: $\langle a', v\rangle = \langle a'', v\rangle = 0$. Здесь $a' + a'' = a$, причем компоненты вектора a' вещественны, а вектора a'' — чисто мнимы, поэтому в общем случае коразмерность резонансных плоскостей больше единицы.

§ 6. Полиномиальные интегралы геодезических потоков

1. Как уже отмечалось (§ 2 гл. II), если уравнения геодезических допускают интеграл, независимый от гамильтониана $H = T$, то найдется дополнительный интеграл в виде однородного многочлена по импульсам. Полиномиальный интеграл наименьшей степени, независимый от функции H, назовем *неприводимым*. Степень неприводимого интеграла является характеристикой сложности интегрируемого геодезического потока.

Если геодезический поток вообще не допускает дополнительного полиномиального интеграла, то степень неприводимого интеграла можно считать равной нулю. Ясно, что любой интеграл уравнений геодезических есть функция от неприводимого интеграла и гамильтониана H.

Список интегрируемых метрик можно расширить с помощью принципа Мопертюи. С этой целью рассмотрим обратимую систему с гамильтонианом

$$H = T + V, \tag{6.1}$$

где V — потенциальная энергия. Полиномиальные по импульсам интегралы этой системы уже не однородны:

$$F = F_n + F_{n-1} + \ldots + F_0. \tag{6.2}$$

Предложение [107a]. *Пусть система с гамильтонианом* (6.1) *имеет полиномиальный интеграл* (6.2) *степени n, независимый от гамильтониана* (6.1). *Тогда система с гамильтонианом*

$$H' = T/(h - V), \quad h > \max V, \tag{6.3}$$

допускает однородный полиномиальный интеграл степени $\leqslant n$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что скобка Пуассона двух однородных по импульсам полиномов степени r и s будет однородным полиномом степени $r + s - 1$. Отсюда вытекает следующий факт: если сумма (6.2) — интеграл гамильтоновой системы с гамильтонианом (6.1), то функции $F_n + F_{n-2} + \ldots$ и $F_{n-1} + F_{n-3} + \ldots$ также будут интегралами этой системы. Наконец, однородные по импульсам полиномы

$$\begin{gathered} F_n + F_{n-2}\left(\frac{T}{h - V}\right) + F_{n-4}\left(\frac{T}{h - V}\right)^2 + \ldots\ ; \\ F_{n-1} + F_{n-3}\left(\frac{T}{h - V}\right) + \ldots \end{gathered} \tag{6.4}$$

являются интегралами геодезического потока с метрикой (6.3). Поскольку функции (6.1) и (6.2) независимы, то один из полиномов (6.4) независим от гамильтониана (6.3), что и требовалось доказать.

2. Имеются многочисленные примеры метрик, допускающих интегралы первой и второй степени. Однако не так просто привести примеры метрик с интегралами степени $\geqslant 3$ (особенно в тех случаях, когда речь идет об интегралах, заданных во всем фазовом пространстве).

Пользуясь предложением 1, укажем метрики на двумерной сфере, для которых уравнения геодезических допускают неприводимые интегралы 3-й и 4-й степени. С этой целью рассмотрим задачу о вращении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой. Эта система с тремя степенями свободы инвариантна относительно группы вращений вокруг вертикали. Фиксируя нулевую постоянную соответствующего интеграла Нётер (интеграл площадей) и проводя факторизацию по орбитам действия группы симметрий, сведем эту задачу к системе с двумя степенями свободы на фазовом пространстве $T^*\mathbf{S}^2$. Гамильтониан имеет вид (6.1), где T — гамильтониан приведенной задачи Эйлера, а $V : \mathbf{S}^2 \to \mathbb{R}$ — потенциальная энергия силы тяжести. Если выполнены условия Горячева — Чаплыгина или Ковалевской (см. § 5 гл. II), то уравнения с гамильтонианом $T+V$ допускают дополнительный интеграл соответственно третьей и четвертой степени по скоростям. Предложение 1 дает метрики на двумерной сфере с интегралами степени 3 и 4. При $V = 0$ эти интегралы приводимы. А. В. Болсинов и А. Т. Фоменко дали доказательство неприводимости интегралов Горячева — Чаплыгина и Ковалевской, основанное на глубоких идеях теории топологической эквивалентности интегрируемых гамильтоновых систем.

Не известны примеры римановых метрик на двумерной сфере, допускающих неприводимые интегралы степени $m \leqslant 5$. Не исключено, что таких метрик не существует.

3. Какие значения может принимать степень неприводимого полиномиального интеграла? Сначала рассмотрим локальный аспект этой задачи. В локальных изотермических координатах гамильтониан геодезического потока приводится к виду

$$H = \frac{p_1^2 + p_2^2}{2\Lambda}, \tag{6.5}$$

где $\Lambda = \Lambda(q_1, q_2)$ — некоторая положительная функция, заданная в окрестности точки $q_1 = q_2 = 0$.

Теорема 1. *Для любого целого $n \geqslant 1$ найдется такая аналитическая функция Λ, что система с гамильтонианом (6.5) допускает неприводимый интеграл степени n с аналитическими (в малой окрестности точки $q_1 = q_2 = 0$) коэффициентами.*

Укажем схему доказательства теоремы 1 (ср. с п. 2 § 3). Пусть $F = a_n p_1^n + a_{n-1} p_1^{n-1} p_2 + a_{n-2} p_1^{n-2} p_2^2 + \ldots + a_1 p_1 p_2^{n-1} + a_0 p_2^n$ — интеграл системы с гамильтонианом (6.5). Приравнивая нулю производную функции F, получаем систему $n+2$ уравнений первого порядка в частных производных относительно $n+2$ функций Λ,

$a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial a_n}{\partial q_1}\Lambda + \frac{n}{2}a_n\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + \frac{a_{n-1}}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} &= 0, \\ \frac{\partial a_n}{\partial q_2}\Lambda + \frac{a_{n-1}}{q_1}\Lambda + \frac{n-1}{2}a_{n-1}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + a_{n-2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \frac{a_1}{2}\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + \frac{a_0}{\partial q_2}\Lambda + \frac{n}{2}a_0\frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} &= 0. \end{aligned} \tag{6.6}$$

При $a_1 \neq 0$ эту систему можно разрешить относительно производных $\frac{\partial \Lambda}{\partial q_1}, \frac{\partial a_n}{\partial q_1}, \ldots, \frac{\partial a_0}{\partial q_1}$. Следовательно, применима теорема Коши — Ковалевской: набор функций $\Lambda, a_n, \ldots, a_0$, как аналитическое решение системы (6.6), однозначно определяется своими значениями на прямой $q_1 = 0$.

Итак, системы с аналитическими гамильтонианами (6.5), допускающие полиномиальные интегралы степени n, параметризуются семейством $n+2$ аналитических функций одной переменной. Можно показать, что среди этих систем найдутся такие, которые не имеют интегралов степени $\leqslant n-1$.

Было бы интересным указать явный вид метрик с неприводимым интегралом произвольной степени $n \geqslant 5$. Метрику с интегралом шестой степени можно построить следующим образом. Рассмотрим обобщенную цепочку Тоды с гамильтонианом (4.10), в котором коэффициенты v_3 или v_4 равны нулю. Этот гамильтониан имеет вид (6.1), а соответствующие уравнения Гамильтона допускают полиномиальный по импульсам интеграл степени $n = 6$. Остается применить предложение 1. Пока не известны явные примеры метрик с интегралами степени $n \geqslant 7$.

4. Обсудим теперь вопрос о неприводимых интегралах геодезических потоков на замкнутых поверхностях. Анализ примеров и известных результатов из этой области приводит к следующей гипотезе: степень неприводимого интеграла геодезического потока на ориентированной поверхности рода p не превосходит $4-2p$.

При $p \geqslant 2$ эта оценка установлена в § 1 гл. III. Для тора ($p = 1$) получаем, что степень неприводимого интеграла не превосходит двух. В п. 2 указаны примеры метрик на сфере, допускающих интегралы степени 3 и 4.

Ниже рассматривается случай $p = 1$. Хорошо известно, что для тора изотермические координаты можно ввести в целом, поэтому будем считать, что в (6.5) q_1 и q_2 — угловые координаты на двумерном торе.

5. Т е о р е м а 2 [107a]. *Предположим, что уравнения Га-*

мильтона с гамильтонианом (6.5) допускают однородный по импульсам интеграл F, независимый от интеграла энергии H, причем выполнено одно из следующих дополнительных условий:

а) *F — четная функция по p_1 и p_2;*

б) *F четна по p_1 (p_2) и нечетна по p_2 (p_1).*

Тогда найдется дополнительный интеграл степени $\leqslant 2$.

Доказательство теоремы 2 опирается на результаты § 8 из гл. III. Рассмотрим гамильтоново поле симметрий, порожденное однородным гамильтонианом степени m: $F = f_{m,0}p_1^m + f_{m-1,1}p_1^{m-1}p_2 + \ldots + f_{0,m}p_2^m$. Поскольку $Q_k = \partial F/\partial p_k$ $(k = 1, 2)$, то

$$Q_1^* = mf_{m,0} + (m-1)f_{m-1,1}i + (m-2)f_{m-2,2}i^2 + \ldots,$$
$$Q_2^* = f_{m-1,1} + 2f_{m-2,2}i + 3f_{m-3,3}i^2 + \ldots$$

Напомним (см. п. 3 § 8 гл. III), что $\sigma = \Psi_1 - \Phi_2$, где $Q_1^* = \Phi_1 + i\Psi_1$, $Q_2^* = \Phi_2 + i\Psi_2$. Следовательно, $\sigma = (m-2)f_{m-1,1} - (m-6)f_{m-3,3} + \ldots$ Пусть выполнено условие а) или условие

б$_1$) F четна по p_2 и нечетна по p_1.

Тогда, очевидно, $f_{m-1,1} = f_{m-3,3} = \ldots = 0$, и, в частности, $\sigma = 0$. Но тогда, согласно лемме 4 из § 8 гл. III, функция $M = \Lambda^{-1}$ удовлетворяет уравнению $2c_1 \dfrac{\partial^2 M}{\partial q_1 \partial q_2} = c_2 \left(\dfrac{\partial^2 M}{\partial q_1^2} - \dfrac{\partial^2 M}{\partial q_2^2} \right)$. Если $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$, то, как доказано в п. 5 § 8 гл. III, уравнения Гамильтона допускают интеграл не выше второй степени.

Рассмотрим теперь случай $c_1 = c_2 = 0$. По лемме 2 из § 8 гл. III имеем $Q_1^* + iQ_2^* = \left(\dfrac{\partial F}{\partial p_1} p_1 + \dfrac{\partial F}{\partial p_2} p_2 \right)^* = mF^* = 0$. Следовательно, $F = H\Phi$, где Φ — однородный интеграл степени $m - 2$, имеющий вид а) или б$_1$). Индукция по убыванию m приводит к интегралу степени $\leqslant 2$.

В случае, когда F четна по p_1 и нечетна по p_2, функция σ, как правило, отлична от нуля; однако этот случай сводится к б$_1$) простым переобозначением переменных.

6. Изучим теперь уравнения Гамильтона с гамильтонианом (6.5), где функция Λ — тригонометрический многочлен. Этот случай представляет значительный теоретический интерес, так как по теореме Вейерштрасса системы такого вида образуют всюду плотное множество.

Положим $\Lambda = \sum \Lambda_{k_1 k_2} e^{i(k_1 q_1 + k_2 q_2)}$, $S = \{k = (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 : \Lambda_{k_1 k_2} \neq 0\}$. Ясно, что S — конечное множество, инвариантное при отображении $k \to -k$.

Теорема 3 [107б]. *Пусть уравнения Гамильтона с гамильтонианом (6.5) допускают полиномиальный по импульсам интеграл F, независимый от интеграла H. Тогда:*

1) если степень F четна, то S лежит на двух прямых, ортогонально пересекающихся в начале координат;

2) если степень F нечетна, то S лежит на одной прямой, проходящей через начало координат.

В первом случае уравнения геодезических интегрируются с помощью разделения переменных, а во втором — существует скрытая циклическая координата.

Следствие. *Если уравнения геодезических на торе допускают дополнительный полиномиальный интеграл F, то найдется независимый от функции H полиномиальный интеграл степени $\leqslant 2$. Если при этом степень F нечетна, то существует линейный интеграл.*

Из теоремы 3 с учетом предложения 1 вытекает теорема 1 из § 5 гл. IV (но в частном случае: когда имеется всего две степени свободы и матрица $\|a_{ij}\|$ единичная).

Ниже дано доказательство теоремы 3. Пусть F_m — однородный интеграл степени m. Как и раньше, через F_m^* будем обозначать значение функции F_m при $p_1 = 1$, $p_2 = i$. Пусть $m \geqslant 3$.

Лемма 1. *Найдется такой многочлен F_{m-2}, что $F_m = a_0 p_1 p_2^{m-1} + b_0 p_2^m + H F_{m-2}$.*

Действительно, положим $F_m^* = (i)^{m-1}(a_0 + b_0 i)$. Тогда, по лемме 4 из § 2 гл. III, однородный многочлен $F_m - a_0 p_1 p_2^{m-1} - b_0 p_2^m$ степени m делится нацело на H, что и требовалось доказать.

Лемма 2. *Полином степени $2n+1$ по импульсам можно представить в виде*

$$F_{2n+1} = a_0 p_1 p_2^{2n} + b_0 p_2^{2n+1} + H(a_1 p_1 p_2^{2n-2} + b_1 p_2^{2n-1}) + \ldots$$
$$\ldots + H^n(a_n p_1 + b_n p_2), \qquad (6.7)$$

где a_0, b_0, …, a_n, b_n — гладкие вещественные функции на $\mathbf{T}^2$.

Доказательство основано на индуктивном применении леммы 1. Так как F_{2n+1} — интеграл геодезического потока, то F_{2n+1}^* — голоморфная функция от $z = q_1 + iq_2$ (лемма 1 из § 2 гл. III).

Лемма 3. *Справедливо соотношение $a_0 + ib_0 = c_1 + ic_2 = \mathrm{const}$.*

Действительно, ввиду периодичности коэффициентов интеграла F, голоморфная функция F^* ограничена. Следовательно, она постоянна.

Далее полагаем $a_0 = c_1$, $b_0 = c_2$. Так как (6.7) — интеграл дифференциальных уравнений Гамильтона $\dot q_k = \Lambda^{-1}p_k$, $\dot p_k = \Lambda^{-1}H\dfrac{\partial\Lambda}{\partial q_k}$ $(k = 1, 2)$, то

$$\begin{aligned}\dot F_{2n+1} = \Lambda^{-1}H^{n+1}\left(a_n\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + b_n\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right) + \\ + \Lambda^{-1}H^n\left(\frac{\partial a_n}{\partial q_1}p_1^2 + \frac{\partial a_n}{\partial q_2}p_1p_2 + \frac{\partial b_n}{\partial q_1}p_1p_2 + \frac{\partial b_n}{\partial q_2}p_2^2\right) + \ldots \\ \ldots + \Lambda^{-1}H\left(c_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1}p_2^{2n} + 2nc_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}p_1p_2^{2n-1} + (2n+1)c_2\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}p_2^{2n}\right) \equiv 0. \quad (6.8)\end{aligned}$$

Отсюда получаем цепочку уравнений в частных производных, которым удовлетворяют коэффициенты полинома (6.7):

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_2} + \frac{\partial b_1}{\partial q_1} + 2nc_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0,$$

$$-\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial b_1}{\partial q_2} + c_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + (2n+1)c_2\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0, \quad (6.9.1)$$

$$\frac{\partial a_2}{\partial q_2} + \frac{\partial b_2}{\partial q_1} + 2(n-1)a_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0,$$

$$-\frac{\partial a_2}{\partial q_1} + \frac{\partial b_2}{\partial q_2} + 2\Lambda\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + a_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + (2n-1)b_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0, \quad (6.9.2)$$

. . . .

$$\frac{\partial a_n}{\partial q_2} + \frac{\partial b_n}{\partial q_1} + 2a_{n-1}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0,$$

$$-\frac{\partial a_n}{\partial q_1} + \frac{\partial b_n}{\partial q_2} + 2\Lambda\frac{\partial a_{n-1}}{\partial q_1} + a_{n-1}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + 3b_{n-1}\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0, \quad (6.9.n)$$

$$2\Lambda\frac{\partial a_n}{\partial q_1} + a_n\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} + b_n\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2} = 0. \quad (6.9.0)$$

Уравнения (6.9.1) получаются из (6.8) после сокращения на $\Lambda^{-1}H$ и подстановки $p_1 = 1$, $p_2 = i$. Выведем уравнения (6.9.2). Для этого перепишем уравнение (6.8) после сокращения на $\Lambda^{-1}H$ и некоторой перегруппировки слагаемых:

$$\begin{aligned}(\cdots)H + \frac{\partial a_1}{\partial q_1}p_1^2p_2^{2n-2} + \left(\frac{\partial a_1}{\partial q_2} + \frac{\partial b_1}{\partial q_1} + 2nc_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)p_1p_2^{2n-1} + \\ + \left(\frac{\partial b_1}{\partial q_2} + c_1\frac{\partial\Lambda}{\partial q_1} + (2n+1)c_2\frac{\partial\Lambda}{\partial q_2}\right)p_2^{2n} \equiv 0. \quad (6.10)\end{aligned}$$

Воспользуемся тривиальным тождеством $p_1^2 p_2^{2n-2} = 2\Lambda H p_2^{2n-2} - p_2^{2n}$. С учетом уже полученных уравнений (6.9.1), соотношение (6.10) принимает вид $(\cdots)H + 2\Lambda H \dfrac{\partial a_1}{\partial q_1} p_2^{2n-2} \equiv 0$. Снова сокращая на H и подставляя $p_1 = 1$, $p_2 = i$, получаем уравнения (6.9.2). Остальные уравнения цепочки (6.9) выводятся тем же способом.

Для решения системы уравнений (6.9) воспользуемся методом Фурье. Положим $a_m = \sum [a_m]_{uv} e^{i(uq_1 + vq_2)}$, $b_m = \sum [b_m]_{uv} e^{i(uq_1+vq_2)}$.

Уравнения (6.9.1) линейные и поэтому легко решаются:

$$(u^2+v^2)\begin{pmatrix}[a_1]_{uv}\\ [b_1]_{uv}\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} u^2 - 2nv^2 & (2n+1)uv \\ -(2n+1)uv & -(2n+1)v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}[\Lambda]_{uv}. \qquad (6.11.1)$$

Уравнения (6.9.2) нелинейны, поэтому здесь нельзя получить простые формулы вида (6.11.1). Воспользуемся приемом, примененным в § 5 гл. IV.

Пусть $\mathcal{E}(S)$ — выпуклая оболочка множества S. Это выпуклый многоугольник, причем начало координат является его центром симметрии. Пусть (u, v) — одна из вершин $\mathcal{E}(S)$. Легко понять, что коэффициенты Фурье $[a_2]_{2u,2v}$ и $[b_2]_{2u,2v}$ выражаются только через коэффициенты Фурье функций a_1, b_1, Λ с номерами u, v:

$$2(u^2+v^2)\begin{pmatrix}[a_2]_{2u,2v}\\ [b_2]_{2u,2v}\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} 3u^2 - 2(n-1)v^2 & (2n-1)uv \\ -(2n+1)uv & -(2n-1)v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}[a_1]_{uv}\\ [b_1]_{uv}\end{pmatrix}[\Lambda]_{uv}. \qquad (6.11.2)$$

Этот метод позволяет получить аналогичные формулы для коэффициентов $[a_k]_{ku,kv}$ и $[b_k]_{ku,kv}$. Выпишем, например, явные формулы при $k = n$:

$$n(u^2+v^2)\begin{pmatrix}[a_n]_{nu,nv}\\ [b_n]_{nu,nv}\end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (2n-1)u^2 - 2v^2 & 3uv \\ -(2n+1)uv & -3v^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}[a_{n-1}]_{(n-1)u,(n-1)v}\\ [b_{n-1}]_{(n-1)u,(n-1)v}\end{pmatrix}[\Lambda]_{uv}. \qquad (6.11.n)$$

Уравнение (6.9.0) дает еще одно соотношение:

$$(2n+1)u[a_n]_{nu,nv} + v[b_n]_{nu,nv} = 0. \qquad (6.11.0)$$

Учитывая (6.11.1)–(6.11.n) и (6.11.0), окончательно получаем

$$((2n+1)u, v)\begin{pmatrix}(2n-1)u^2-2v^2 & 3uv\\ -(2n+1)uv & -3v^2\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}(2n-3)u^2-4v^2 & 5uv\\ -(2n+1)uv & -5v^2\end{pmatrix}\cdots\begin{pmatrix}3u^2-(2n-2)v^2 & (2n-1)uv\\ -(2n+1)uv & -(2n-1)v^2\end{pmatrix}\times$$

$$\times\begin{pmatrix}u^2-2nv^2 & (2n+1)uv\\ -(2n+1)uv & -(2n+1)v^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\end{pmatrix}=0. \quad (6.12)$$

Л е м м а 4. *Левая часть соотношения* (6.12) *равна*

$$(2n+1)!!\,(c_1\cos m\alpha + c_2\sin m\alpha), \quad (6.13)$$

где $m = 2n+1$, $\operatorname{tg}\alpha = v/u$.

Это любопытное матричное тождество доказано в п. 7. Ясно, что α — угол между лучом, проходящим через вершину $(u, v) \in S$, и горизонтальной координатной осью.

Сопоставляя (6.12) и (6.13), получаем

$$\operatorname{tg} m\alpha = -c_1/c_2. \quad (6.14)$$

Это соотношение, очевидно, справедливо для всех вершин выпуклой оболочки спектра S. Решениями уравнения (6.14) являются m углов α, $\alpha+\pi/m$, $\alpha+2\pi/m, \ldots, \alpha+(m-1)\pi/m$, отсчитываемых от горизонтальной оси. Следовательно, многоугольник $\mathcal{E}(S)$ может иметь не более $2m$ вершин, расположенных на прямых $l_1, \ldots, l_m$, которые проходят через начало координат и образуют между собой углы

$$\pi/m, 2\pi/m, \ldots, (m-1)\pi/m. \quad (6.15)$$

Л е м м а 5 (см., например, [173а]). *Пусть* $0 < \beta < \pi/2$, $\beta \neq \pi/4$ *и* $\beta = p\pi/q$, *где* p, q — *натуральные числа. Тогда* $\operatorname{tg}\beta$ — *иррациональное число.*

С л е д с т в и е. *Если m нечетно, то тангенсы углов* (6.15) *иррациональны.*

Предположим теперь, что множество S не лежит на одной прямой. Тогда найдутся две различные прямые l_1 и l_2, проходящие через начало координат и содержащие две вершины выпуклой оболочки S. Тангенс угла между l_1 и l_2 рационален (рациональны тангенсы углов, которые составляют прямые l_1, l_2 с координатной осью; остается воспользоваться известной формулой для тангенса разности). С другой стороны, угол между прямыми l_1 и l_2 равен одному из углов (6.15). Согласно следствию из леммы 5, тангенс этого угла иррационален, если m нечетно. Полученное противоречие доказывает теорему 3 для случая интеграла нечетной степени.

Пусть теперь $m = 2n$. С учетом лемм 1 и 3 интеграл четной степени можно представить в виде

$$F_n = c_1 p_1 p_2^{2n-1} + c_2 p_2^{2n} + H(a_1 p_1 p_2^{2n-3}) + b_1 p_2^{2n-2}) + \ldots$$
$$\ldots + H^{n-1}(a_{n-1} p_1 p_2 + b_{n-1} p_2^2) + H^n b_n. \quad (6.16)$$

Здесь c_1, $c_2 = \mathrm{const}$, $a_1, b_1, \ldots, b_n$ — гладкие функции на $\mathbf{T}^2$.

Приравнивая нулю производную F_{2n}, получим цепочку уравнений для коэффициентов полинома (6.16):

$$\frac{\partial a_1}{\partial q_2} + \frac{\partial b_1}{\partial q_1} + (2n-1)c_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} = 0,$$
$$-\frac{\partial a_1}{\partial q_1} + \frac{\partial b_1}{\partial q_2} + c_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + 2nc_2 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} = 0, \quad (6.17.1)$$
$$\frac{\partial a_2}{\partial q_2} + \frac{\partial b_2}{\partial q_1} + (2n-3)a_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} = 0,$$
$$-\frac{\partial a_2}{\partial q_1} + \frac{\partial b_2}{\partial q_2} + 2\Lambda \frac{\partial a_1}{\partial q_1} + a_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + (2n-2)b_1 \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} = 0, \quad (6.17.2)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{\partial b_n}{\partial q_1} + a_{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} = 0,$$
$$\frac{\partial b_n}{\partial q_2} + 2\Lambda \frac{\partial a_{n-1}}{\partial q_1} + a_{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_1} + 2b_{n-1} \frac{\partial \Lambda}{\partial q_2} = 0. \quad (6.17.n)$$

Пусть (u, v) — вершина выпуклой оболочки множества S. Применяя тот же метод, получаем равенство, аналогичное (6.12):

$$((2n-1)u^2 - v^2, 2uv)\times$$
$$\times \begin{pmatrix} (2n-3)u^2 - 3v^2 & 4uv \\ -2nuv & -4v^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2n-5)u^2 - 5v^2 & 6uv \\ -2nuv & -6v^2 \end{pmatrix} \times \cdots$$
$$\cdots \times \begin{pmatrix} u^2 - (2n-1)v^2 & 2nuv \\ -2nuv & -2nv^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = 0.$$

Его можно преобразовать к виду (см. п.7)

$$(2n-1)!!\,(c_1 \cos m\alpha + c_2 \sin m\alpha) = 0, \quad (6.18)$$

где $\operatorname{tg} \alpha = v/u$. Отсюда $\operatorname{tg} m\alpha = -c_1/c_2 = \mathrm{const}$.

Следовательно, и в этом случае вершины выпуклой оболочки S лежат на m прямых, которые проходят через начало координат и образуют между собой углы (6.15). При четном $m \geqslant 4$ среди них есть $\pi/2$, а также $\pi/4$. Отсюда, используя лемму 5, легко вывести, что при четном m многоугольник $\mathcal{E}(S)$ может иметь 2, 4, 6 или 8 вершин, причем его главные диагонали (проходящие через начало координат) либо ортогональны, либо пересекаются под углом $\pi/4$. Этот результат интересен сам по себе, но из него, конечно, нельзя вывести заключение теоремы 3.

Воспользуемся понятием примыкающей вершины, введенным в § 5 гл. IV. Для этого рассмотрим стандартное отношение лексикографического порядка в $\mathbb{R}^2$: будем говорить, что (k_1, k_2) больше (s_1, s_2), если выполнено одно из условий: 1) $k_1 > s_1$; 2) $k_1 = s_1$, $k_2 > s_2$.

Пусть $\alpha = (u, v)$ — наибольший элемент S. Ясно, что эта точка является одной из вершин выпуклого многоугольника $\mathcal{E}(S)$. Вершиной $\beta \in S$, примыкающей к α, назовем максимальный линейно независимый с α вектор из S. Если множество S не лежит на одной прямой, то примыкающая вершина заведомо существует. В противном случае уравнения Гамильтона допускают линейный интеграл. Наша задача заключается в том, чтобы доказать ортогональность векторов α и β.

Л е м м а 6. *Пусть $s\alpha + \beta = \tau_1 + \ldots + \tau_{s+1}$, где $\tau_i \in S$. Тогда $\tau_k = \beta$ и $\tau_j = \alpha$ для всех $j \neq k$.*

Рассмотрим сначала частный случай, когда наибольший элемент $\alpha = (u, v)$ множества S лежит на горизонтальной координатной оси, т. е. $u > 0$, $v = 0$. Пусть $\beta = (k, l)$ — примыкающая вершина. Покажем, что $k = 0$. Множество S инвариантно при симметрии относительно начала координат, поэтому точки S лежат на координатных прямых.

Так как $v = 0$, то угол α из равенства (6.18) равен нулю. Следовательно, постоянная c_1 равна нулю. Ясно, что $c_2 \neq 0$ — в противном случае интеграл F делится нацело на H.

Решая методом Фурье систему (6.17.1), получим

$$\begin{gathered}[a_1]_\alpha = [b_1]_\alpha = 0,\\ [a_1]_\beta = \frac{mklc_2}{(k^2 + l^2)}[\Lambda]_\beta, \quad [b_1]_\beta = -\frac{ml^2c_2}{(k^2 + l^2)}[\Lambda]_\beta.\end{gathered} \tag{6.19.1}$$

Из (6.17.2) выводятся равенства $[a_2]_{2\alpha} = [b_2]_{2\alpha} = 0$. С их помощью, а также применяя лемму 6, получим

$$\begin{pmatrix} [a_2]_{\alpha+\beta} \\ [b_2]_{\alpha+\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2k + u)(k + u) \\ -l(2k + u) \end{pmatrix} \frac{[a_1]_\beta[\Lambda]_\alpha}{l^2 + (k + u)^2}. \tag{6.19.2}$$

Аналогично выводятся формулы для коэффициентов Фурье

$[a_s]_{\beta+(s-1)\alpha}$, $[b_s]_{\beta+(s-1)\alpha}$. Выпишем их в явном виде для $s = n-1$:

$$[a_{n-1}]_{(n-1)\alpha} = [b_{n-1}]_{(n-1)\alpha} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} [a_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} \\ [b_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} (k+(n-2)u)(2k+(2n-5)u) \\ -l(2k+(2n-5)u) \end{pmatrix} \times \\ \times \frac{[a_{n-2}]_{\beta+(n-3)\alpha}[\Lambda]_\alpha}{l^2+(k+(n-2)u)^2} \tag{6.19.$n-1$}$$

Наконец, из последней системы (6.17.n) выводятся равенства

$$[b_n]_{\beta+(n-1)\alpha} = 0, \quad (2k+(2n-3)u)[\Lambda]_\alpha[a_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} = 0. \tag{6.19.n}$$

Так как $m = 2n \geqslant 4$, то $n \geqslant 2$. Поскольку β — примыкающая вершина, то $k > 0$. Следовательно, $2k + (2n-3)u > 0$, и из последнего равенства (6.19.n) вытекает, что

$$[a_{n-1}]_{\beta+(n-2)\alpha} = 0. \tag{6.20}$$

При $n = 2$ коэффициенты a_2, $b_2, \ldots$ не определены. Из (6.20) следует $[a_1]_\beta = 0$. Так как $l \neq 0$, $c_2 \neq 0$ и $[\Lambda]_\beta \neq 0$, то из (6.19.1) получаем искомое равенство $k = 0$.

Если $n \geqslant 3$, то $2k+(2n-5)u > 0$, и из равенств (6.19.2)–(6.19.$n-1$) получаем последовательно $[a_{n-2}]_{\beta+(n-3)\alpha} = 0, \ \ldots, \ [a_1]_\beta = 0$. Но тогда из (6.19.1) снова вытекает $k = 0$, что и требовалось доказать.

Вернемся к общему случаю. Пусть $\alpha = (u, v)$ — вершина $\mathcal{E}(S)$, наиболее удаленная от начала координат. Если имеется несколько таких вершин, находящихся на одинаковых расстояниях от нуля, то возьмем одну из них. Положим $A = \begin{pmatrix} u/s & v/s \\ -v/s & u/s \end{pmatrix}$, где $s = \sqrt{u^2+v^2}$.

Матрица A ортогональна, она задает поворот плоскости на угол $\alpha = \operatorname{arctg}(v/u)$. Рассмотрим линейное преобразование плоскости $\mathbb{R}^2 = \{q_1, q_2\}$: $q' = A^\top q$. Его можно расширить до канонического преобразования $(q,p) \to (q',p')$, если положить $p' = A^{-1}p$.

Так как матрица A ортогональна, то в новых переменных p', q' гамильтониан (6.5) имеет тот же вид. В знаменателе будет функция $\Lambda(q)$, где $q = (A^\top)^{-1}q' = Aq'$. Ясно, что функция $\Lambda'(q') = \Lambda(Aq')$ периодична по новым координатам с периодом $2\pi/s$; следовательно, ее можно разложить в ряд Фурье. Этот ряд будет иметь столько же гармоник, сколько ряд Фурье функции $\Lambda(q_1, q_2)$. Множество S' для тригонометрического многочлена Λ', очевидно, получается из множества S с помощью линейного преобразования, задаваемого матрицей A. Вектор $A\alpha$ имеет компоненты $(s, 0)$, поэтому наибольшая вершина S' лежит на горизонтальной оси.

Заметим, что уравнения (6.17) линейны и однородны относительно производных, поэтому формулы (6.18) и (6.19), которые являются следствием (6.17), не зависят от периода функции Λ; таким образом, выполнены условия частного случая, рассмотренного выше. Следовательно, множество S' лежит на координатных осях. Совершая обратное преобразование с ортогональной матрицей A^{-1}, получим, что точки исходного множества S лежат на двух прямых, ортогонально пересекающихся в начале координат. Теорема 3 полностью доказана.

7. Положим

$$B_m = \begin{bmatrix} (2m+1)x^2 - 2(n-m)y^2 & (2n-2m+1)xy \\ -(2n+1)xy & -(2n-2m+1)y^2 \end{bmatrix}$$

$$C_m = \begin{bmatrix} (2m+1)x^2 - (2n-2m-1)y^2 & 2(n-m)xy \\ -2nxy & -2(n-m)y^2 \end{bmatrix}$$

Теорема 4. *Имеют место соотношения*

$$[(2n+1)x, y]B_{n-1}\dots B_1B_0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (2n+1)!!\,(x+iy)^{2n+1}, \quad (6.21)$$

$$[(2n-1)x^2-y^2, 2xy]C_{n-2}\dots C_0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (2n-1)!!\,(x+iy)^{2n}. \quad (6.22)$$

Заключение леммы 4 вытекает из матричного биномиального тождества (6.21). Для этого достаточно положить $c_1 = 1$, $c_2 = \pm i$ ($i^2 = -1$). В свою очередь, равенство (6.18) является следствием тождества (6.22). Не исключено, что тождества (6.21)–(6.22) имеют нетривиальную комбинаторную интерпретацию.

Приведем доказательство теоремы 4, найденное Д. В. Трещёвым. Для определенности рассматривается тождество (6.21). Левая и правая части (6.21) — однородные полиномы по x, y степени $2n+1$. Следовательно, достаточно доказать равенство (6.21) для случая $x^2 + y^2 = 1$. С этой целью положим $x = \cos\alpha$, $y = \sin\alpha$. Тогда равенство (6.21) примет вид

$$u_nA_{n-1}\dots A_1A_0 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = (2n+1)!!\,e^{(2n+1)i\alpha}, \quad (6.23)$$

где

$$u_n = \left[\frac{2n+1}{2}(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}),\ -\frac{i}{2}(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha})\right]$$

$$A_m = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} \frac{2n+1}{2}(e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha})-(2n-1-4m) & -\frac{2n-2m+1}{2}i(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}) \\ \frac{2n+1}{2}i(e^{2i\alpha}-e^{-2i\alpha}) & \frac{2n-2m+1}{2}(e^{2i\alpha}+e^{-2i\alpha}-2) \end{bmatrix}$$

Положим $v_1 = 2A_0\left[\begin{smallmatrix}1\\ i\end{smallmatrix}\right]$; $v_{k+1} = 2A_k v_k$ $(k = 1,\dots,n-1)$. В этих обозначениях равенство (6.23) имеет вид

$$2^{-n}u_n v_n = (2n+1)!!\,e^{(2n+1)i\alpha}. \tag{6.24}$$

Введем следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
&a_0^m = a_1^m = 1, && a_s^m = 2n\dots(2n-s+2),\\
&p_0^m = 1, && p_s^m = (2n+1)a_s^m,\\
&b_0^m = b_1^m = 1, && b_s^m = (2n-2m+s)\dots(2n-2m+2),\\
&q_0^m = 1, && q_s^m = (2n-2m+1)b_s^m,\\
&f_0^m = f_m^m = 1, && f_s^m = (2n-2m+2s+1).
\end{aligned}$$

Здесь $s = 1,2,\dots,m-1$.

Лемма 7. *Имеет место соотношение*

$$v_m = \begin{bmatrix} \sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k p_{m-k}^m q_k^m e^{2(m-k)i\alpha} \\ (2n+1)i\sum\limits_{k=0}^{m}(-1)^k C_m^k a_{m-k}^m f_k^m b_k^m e^{2(m-k)i\alpha} \end{bmatrix}$$

Это утверждение несложно доказывается индукцией по m. Любопытно отметить, что v_m не содержит экспонент $e^{2i\alpha}$ в отрицательных степенях.

Выведем теперь из леммы 7 формулу (6.24). Имеем

$$u_n v_n = \frac{2n+1}{2}\left\{\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k p_{n-k}^n q_k^n\left[e^{(2n-2k+1)i\alpha}+e^{(2n-2k-1)i\alpha}\right]+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k a_{n-k}^n f_k^n b_k^n\left[e^{(2n-2k+1)i\alpha}+e^{(2n-2k-1)i\alpha}\right]\right\}.$$

Обозначим в этом выражении коэффициент при $(-1)^k(2n+ +1)\exp(2n-2k+1)i\alpha$ символом μ_k. Тогда равенство (6.24) эквивалентно серии равенств $\mu_0 = 2^n(2n-1)!!$, $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_{n+1} = 0$.

Выпишем в явном виде выражение для μ_k:

$$\mu_k = \frac{1}{2}\Big(C_n^k p_{n-k}^n q_k^n - C_n^{k-1} p_{n+1-k}^n q_{k-1}^n + \\ + C_n^k a_{n-k}^n f_k^n b_k^n + C_n^{k-1} a_{n+1-k}^n f_{k-1}^n b_{k-1}^n\Big)$$

(при $k = 0$ в этой сумме надо оставить только первое и третье слагаемые, а при $k = n+1$ — только второе и четвертое).

Вычислим μ_0:

$$\mu_0 = \frac{1}{2}(p_n^n + a_n^n) = \frac{1}{2}[(2n+1)+1]a_n^n = 2^n(2n-1)!!$$

При $k = n+1$ получаем $\mu_{n+1} = \frac{1}{2}(-q_n^n + b_n^n) = 0$. Используя очевидные равенства $b_k^n = kb_{k-1}^n$, $a_{n-1+k}^n = (n+k+1)a_{n-k}^n$ и явные формулы для биномиальных коэффициентов, нетрудно показать, что $\mu_k = 0$ при всех k $(0 < k < n+1)$.

Теорема 4 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абраров Д. Л. Топологические препятствия к существованию условно-линейных интегралов // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1984, № 6, 72–75.

2. Алексеев В. М. Квазислучайные динамические системы. I, II, III // Матем. сб. — 1968, т. 76, № 1, 72–134; 1968, т. 77, № 4, 545–601; 1969, т. 78, № 1, 3–50.

3. Алексеев В. М. Перроновские множества и топологические цепи Маркова // УМН. — 1969, т. 24, № 5, 227–228.

4. Алексеев В. М. Символическая динамика // В кн. Одиннадцатая математическая школа. — Киев: Ин-т мат. АН СССР, 1976. 210 стр.

5. Алексеев В. М. Финальные движения в задаче трех тел и символическая динамика // УМН. — 1981, т. 36, № 4, 161–176.

6. Аносов Д. В. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Тр. МИАН СССР. — 1967, т. 90, 3–210.

7. Аносов Д. В. О типичных свойствах замкнутых геодезических // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1982, т. 46, № 4, 675–709.

8. Аржаных А. С. Поле импульсов. — Ташкент: Изд-во "Наука" Уз. ССР, 1965. 231 стр.

9. Арнольд В. И. О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы // ДАН СССР. — 1964, т. 156, № 1, 9–12.

10. Арнольд В. И. Дополнительные главы теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978. 304 стр.

11. Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, 1979. 431 стр.

12. Арнольд В. И., Козлов В. В., Нейштадт А. И. Математические аспекты классической и небесной механики // В кн. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 3. — М.: ВИНИТИ, 1985. 304 стр.

13. Арнольд В. И., Гивенталь А. Б. Симплектическая геометрия // В кн. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 4. — М.: ВИНИТИ, 1985. 5–139.

14. Архангельский Ю. А. Аналитическая динамика твердого тела. — М.: Наука, 1977. 328 стр.

15. Баркин Ю. В., Борисов А. В. Неинтегрируемость уравнений Кирхгофа и родственных задач динамики // Деп. в ВИНИТИ СССР. — 1989, № 5037–1389, 104 стр.

16. Белецкий В. В. Движение искусственного спутника вокруг центра масс. — М.: Наука, 1965. 416 стр.

17. Берже М. Геометрия. Т. I, II. — М.: Мир, 1984. 559 стр.; 336 стр.

18. Биркгоф Дж. Д. Динамические системы. — М.–Л.: Гостехиздат, 1941. 320 стр.

19. Блисс Дж. А. Лекции по вариационному исчислению. — М.: ИЛ, 1950. 348 стр.

20. Богоявленский О. И. Методы качественной теории динамических систем в астрофизике и газовой динамике. — М.: Наука, 1980. 319 стр.

21. Богоявленский О. И. Интегрируемые случаи динамики твердого тела и интегрируемые системы на сферах S^n // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1985, т. 49, № 5, 899–915.

22. Богоявленский О. И. Интегрируемые случаи уравнений врещения твердого тела в осесимметричных силовых полях // ДАН СССР. — 1986, т. 288, № 3, 593–596.

23. Болотин С. В., Козлов В. В. Об асимптотических решениях уравнений динамики // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1980, № 4, 84–89.

24. Болотин С. В. Существование гомоклинических движений // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1983, № 6, 98–103.

25. Болотин С. В. Неинтегрируемость задачи n центров при $n > 2$ // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1984, № 3, 65–68.

26. Болотин С. В. Влияние особенностей потенциальной энергии на интегрируемость механических систем // ПММ. — 1984, т. 48, № 3, 356–362.

27. Болотин С. В. О первых интегралах систем с гироскопическими силами // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1984, № 6, 75–82.

28. Болотин С. В. Условие неинтегрируемости по Лиувиллю гамильтоновых систем // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1986, № 3, 58–64.

29. Болотин С. В. Двоякоасимптотические траектории и условия интегрируемости гамильтоновых систем // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1990, № 1, 55–63.

30. Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979. 255 стр.

31. Булатович Р. М. Существование решений уравнения Гамильтона — Якоби в окрестности невырожденных положений равновесия // ПММ. — 1983, т. 47, № 2, 330–333.

32. Булатович Р. М. Аналитические решения уравнения Гамильтона — Якоби необратимой системы в окрестности невырожденного максимума потенциальной энергии // ПММ. — 1989, т. 53, № 5, 739–742.

33. Бурбаки Н. Алгебра. Модули. Кольца. Формы. — М.: Наука, 1966. 555 стр.

34. Бурбаки Н. Интегрирование. — М.: Наука, 1970. 320 стр.

35. Бурбаки Н. Группы и алгебра Ли. — М.: Мир, 1972. 331 стр.

36. Буров А. А. Неинтегрируемость уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1984, № 1, 71–73.

37. Буров А. А., Карапетян А. В. О несуществовании дополнительного интеграла в задаче о движении тяжелого твердого эллипсоида по гладкой плоскости // ПММ. — 1985, т. 49, № 3, 501–503.

38. Буров А. А., Субханкулов Г. И. О движении твердого тела в магнитном поле // ПММ. — 1986, т. 50, № 6, 960–966.

39. Бялый М. Л. О полиномиальных по импульсам первых интегралах для механической системы на двумерном торе // Функц. анализ и его прил. — 1987, т. 21, № 4, 64–65.

40. Гайдуков Е. В. Асимптотические геодезические на римановом многообразии, негомеоморфном сфере // ДАН СССР. — 1966, т. 169, № 5, 999–1001.

41. Годбийон К. Дифференциальная геометрия и аналитическая механика. — М.: Мир, 1973. 188 стр.

42. Голубев В. В. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. — М.-Л.: Гостехиздат, 1950. 436 стр.

43. Голубев В. В. Лекции по интегрированию уравнений движения тяжелого твердого тела около неподвижной точки. — М.-Л.: Гостехиздат, 1953. 287 стр.

44. Горячев Д. Н. Новые случаи интегрируемости динамических уравнений Эйлера // Варшав. унив. изв. — 1916, кн. 3, 1–15.

45. Гриффитс Ф. Внешние дифференциальные системы и вариационное исчисление. — М.: Мир, 1986. 360 стр.

46. Гурвиц А., Курант Р. Теория функций. — М.: Наука, 1968. 618 стр.

47. Демидович Б. П. Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967. 472 стр.

48. Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: ИЛ, 1964. 355 стр.

49. Довбыш С. А. Пересечение асимптотических поверхностей возмущенной задачи Эйлера — Пуансо // ПММ. — 1987, т. 51, № 3, 363–370.

50. Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // УМН. — 1989, т. 44, № 2, 229–230.

51. Довбыш С. А. Расщепление сепаратрис неустойчивых равномерных вращений и неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1990, № 3, 70–77.

52. Дубровин Б. А. Тэта-функции и нелинейные уравнения // УМН. — 1981, т. 36, № 2, 11–80.

53. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. — М.: Наука, 1979. 759 стр.

54. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы теории гомологий. — М.: Наука, 1984. 343 стр.

55. Дубровин Б. А., Кривечер И. М., Новиков С. П. Интегрируемые системы. I // В кн. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 4. — М.: ВИНИТИ, 1985. 179–288.

56. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. От маятника до турбулентности и хаоса. — М.: Наука, 1988. 368 стр.

57. Захаров В. Е., Иванов М. Ф., Шур П. Н. Об аномально медленной стохастизации в некоторых двумерных моделях теории поля // Письма в ЖЭТФ. — 1979, т. 30, № 1, 39–44.

58. Зейферт Г., Трельфалль В. Топология. — М.–Л.: Гостехиздат, 1938. 400 стр.

59. Зигель К. Л. Об интегралах гамильтоновых систем // Математика. Период. сб. перев. ин. статей. — 1961, т. 5, № 2, 103–117.

60. Зигель К. Л. О существовании нормальной формы аналитических дифференциальных уравнений Гамильтона // Математика. Период. сб. перев. ин. статей. — 1961, т. 5, № 2, 129–156.

61. Зиглин С. Л. Неинтегрируемость задачи о движении четырех точечных вихрей // ДАН СССР. — 1979, т. 250, № 6, 1296–1300.

62. Зиглин С. Л. Расщепление сепаратрис, ветвление решений и несуществование интеграла в динамике твердого тела // Труды Моск. Мат. О-ва. — 1980, т. 41, 287–303.

63. Зиглин С. Л. Самопересечение комплексных сепаратрис и несуществование интегралов в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // ПММ. — 1981, т. 45, № 3, 564–566.

64. Зиглин С. Л. Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I, II // Функц. анализ и его прил. — 1982, т. 16, № 3, 30–41; 1983, т. 17, № 1, 8–23.

65. Зиглин С. Л. Об отсутствии дополнительного первого интеграла в одной задаче динамики твердого тела // ДАН СССР. — 1987, т. 292, № 4, 804–807.

66. Зиглин С. Л. О полиномиальных первых интегралах гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Функц. анализ и его прил. — 1991, т. 25, № 3, 88–89.

67. Ивин Е. А. К вопросу об интегрируемости задачи о движении по инерции связки двух твердых тел // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1986, № 2, 63–66.

68. Интегрируемые системы. II // В кн. Совр. пробл. мат. Фундаментальные направления. Т. 16. — М.: ВИНИТИ, 1987. 86–226.

69. Картан Э. Интегральные инварианты. — М.–Л.: Гостехиздат, 1940. 216 стр.

70. Касселс Д. В. С. Введение в теорию диофантовых приближений. — М.: ИЛ, 1961. 216 стр.

94. Козлов В. В. Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы // УМН. — 1986, т. 41, № 5, 177–178.

95. Козлов В. В. О существовании интегрального варианта гладких динамических систем // ПММ. — 1987, т. 51, № 4, 538–545.

96. Козлов В. В. Ветвление решений и полиномиальные интегралы в обратимой системе на торе // Матем. заметки. — 1988, т. 44, № 1, 100–104.

97. Козлов В. В., Трещёв Д. В. Об интегрируемости гамильтоновых систем с торическим пространством положений // Матем. сб. — 1988, т. 135, № 1, 119–138.

98. Козлов В. В. Об инвариантных мерах уравнений Эйлера — Пуанкаре на алгебрах Ли // Функц. анализ и его прил. — 1988, т. 22, № 1, 69–70.

99. Козлов В. В. К теории возмущений гамильтоновых систем с некомпактными инвариантными поверхностями // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1988, № 2, 55–61.

100. Козлов В. В. О полиномиальных интегралах системы взаимодействующих частиц // ДАН СССР. — 1988, т. 301, № 4, 785–788.

101. Козлов В. В. О группах симметрий динамических систем // ПММ. — 1988, т. 52, № 4, 531–541.

102. Козлов В. В., Трещёв Д. В. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем с экспоненциальным взаимодействием // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1989, т. 51, № 3, 537–556.

103. Козлов В. В. О полиномиальных интегралах динамических систем с полутора степенями свободы // Матем. заметки. — 1989, т. 45, № 4, 46–51.

104. Козлов В. В., Трещёв Д. В. Числа Ковалевской обобщенных цепочек Тоды // Матем. заметки. — 1989, т. 46, № 5, 17–28.

105. Козлов В. В. Вихревая теория волчка // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1990, № 4, 56–62.

106. Козлов В. В. О группах симметрий геодезических потоков на замкнутых поверхностях // Матем. заметки. — 1990, т. 48, № 5, 62–67.

107. Козлов В. В. О стохастизации плоскопараллельных течений идеальной жидкости // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1991, № 1, 72–76.

107а. Козлов В. В., Денисова Н. В. Симметрии и топология динамических систем с двумя степенями свободы // Матем. сб. — 1993, т. 184, № 9, 125–148.

107б. Козлов В. В., Денисова Н. В. Полиномиальные интегралы геодезических потоков на двумерном торе // Матем. сб., в печати.

108. Колмогоров А. Н. О динамических системах с интегральным инвариантом на торе // ДАН СССР. — 1953, т. 93, № 5, 763–766.

109. Колмогоров А. Н. О сохранении условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. — 1954, т. 98, № 4, 527–530.

110. Колмогоров А. Н. Новый метрический инвариант транзитивных динамических систем и автоморфизмов пространств Лебега // ДАН СССР. — 1958, т. 119, № 5, 861–864.

111. Колмогоров А. Н. Общая теория динамических систем и классическая механика // В кн. Международный математический конгресс в Амстердаме. — М.: Физматгиз, 1961. 187–208.

112. Колокольцов В. Н. Геодезические потоки на двумерных многообразиях с дополнительным полиномиальным по скорости первым интегралом // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1982, т. 46, № 5, 994–1010.

113. Кочина П. Я. Об однозначных решениях и алгебраических интегралах задачи о вращении тяжелого твердого тела около неподвижной точки // В кн. Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. Сборник, посвященный памяти С. В. Ковалевской. — М.-Л.: Изд-во АН СССР, 1940. 157–186.

114. Лазуткин В. Ф. Об аналитическом интеграле вдоль сепаратрис полустандартного отображения: существование и экспоненциальные оценки для расстояния между устойчивой и неустойчивой сепаратрисами // Алгебра и анализ. — 1992, т. 4, № 4, 110–142.

115. Ламб Г. Гидродинамика. — М.: Гостехиздат, 1947. 928 стр.

116. Леви-Чивита Т., Амальди У. Курс теоретической механики. Т. II, часть 2. — М.: ИЛ, 1951. 555 стр.

117. Лихтенберг А., Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. — М.: Мир, 1984. 528 стр.

118. Ляпунов А. М. Об одном свойстве дифференциальных уравнений задачи о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку // В кн. Собр. соч. Т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. 402–417.

119. Ляпунов А. М. Новый случай интегрируемости уравнений движения твердого тела в жидкости // В кн. Собр. соч. Т. I. — М.: Изд-во АН СССР, 1954. 320–324.

120. Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. — М.–Л.: Гостехиздат, 1950. 471 стр.

121. Манаков С. В. О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах // ЖЭТФ. — 1974, т. 67, № 2, 543–555.

122. Маркеев А. П. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. — М.: Наука, 1978. 312 стр.

123. Маркеев А. П., Чуркина Н. И. О периодических решениях Пуанкаре канонической системы с одной степенью свободы // Письма в астрон. журн. — 1985, т. 11, № 8, 634–639.

124. Маркеев А. П. Об интегрируемости задачи о качении шара с многосвязной полостью, заполненной идеальной жидкостью // Изв. АН СССР. МТТ. — 1986, № 1, 64–65.

125. Маркушевич А. И. Введение в классическую теорию абелевых функций. — М.: Наука, 1979. 239 стр.

126. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Обобщенный метод Лиувилля интегрирования гамильтоновых систем // Функц. анализ и его прил. — 1978, т. 12, № 2, 46–56.

127. Мельников В. К. Об устойчивости центра при периодических по времени возмущениях // Труды Моск. Мат. О-ва. — 1963, т. 12, 3–52.

128. Мельников В. К. О некоторых случаях сохранения условно-периодических движений при малом изменении функции Гамильтона // ДАН СССР. — 1965, т. 165, № 6, 1245–1248.

129. Мозер Ю. О разложении условно-периодических решений в сходящиеся степенные ряды // УМН. — 1969, т. 24, № 2, 165–211.

130. Мозер Ю. Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973. 168 стр.

131. Мозер Ю. Некоторые аспекты интегрируемых гамильтоновых систем // УМН. — 1981, т. 36, № 5, 109–151.

132. Морозов А. Д., Шильников Л. П. К математической теории синхронизации колебаний // ДАН СССР. — 1975, т. 223, № 6, 1340–1343.

133. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. Т. I. — М.: ИЛ, 1958. 930 стр.

134. Мощевитин Н. Г. О существовании и гладкости интеграла гамильтоновой системы определенного вида // Матем. заметки. — 1991, т. 49, № 5, 80–85.

135. Наймарк М. А. Линейные представления группы Лоренца. — М.: Гостехиздат, 1958. 376 стр.

136. Нейштадт А. И. О точности теории возмущений для систем с одной быстрой переменной // ПММ. — 1981, т. 45, № 1, 80–87.

137. Нехорошев Н. Н. Переменные действие — угол и их обобщения // Труды Моск. Мат. О-ва. — 1972, т. 26, 181–198.

138. Николаевский Е. С., Щур Л. Н. Неинтегрируемость классических полей Янга — Миллса // Письма в ЖЭТФ. — 1982, т. 36, № 5, 176–179.

139. Нитецки З. Введение в дифференциальную динамику. — М.: Мир, 1975. 304 стр.

140. Новиков С. П., Шмельцер И. Периодические решения уравнений Кирхгофа для свободного движения твердого тела в жидкости и расширенная теория Люстерника — Шнирельмана — Морса (ЛШМ), I // Функц. анализ и его прил. — 1981, т. 15, № 3, 54–66.

141. Олвер П. Приложения групп Ли к дифференциальным уравнениям. — М.: Мир, 1989. 637 стр.

142. Онищенко Д. А. Приведение к нормальной форме уравнений канонической системы, зависящей от параметра // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1982, № 3, 78–81.

143. Орехов В. И. Топологический анализ натуральных систем с квадратичными интегралами // ПММ. — 1985, т. 49, № 1, 10–15.

144. Переломов А. М. Интегрируемые системы классической механики и алгебры Ли. — М.: Наука, 1990. 238 стр.

145. Пидкуйко С. И., Степин А. М. Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем // ДАН СССР. — 1978, т. 239, № 1, 50–51.

146. Пуанкаре А. Новые методы небесной механики // В кн. Избр. труды. Т. I–II. — М.: Наука, 1971. 771 стр. 1972. 9–356.

147. Пуанкаре А. О геодезических линиях на выпуклых поверхностях // В кн. Избр. труды. Т. II. — М.: Наука, 1972. 733–774.

148. Садэтов С. Т. Условия интегрируемости уравнений Кирхгофа // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1990, № 3, 56–62.

149. Сальникова Т. В. Неинтегрируемость возмущенной задачи Лагранжа // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1984, № 4, 62–66.

150. Сальникова Т. В. Об интегрируемости уравнений Кирхгофа в симметричном случае // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1985, № 24, 68–71.

151. Самсонов В. А. О вращении тела в магнитном поле // Изв. АН СССР. МТТ. — 1984, № 4, 32–34.

152. Синг Дж. Л. Классическая динамика. — М.: Физматгиз, 1963. 448 стр.

153. Стеклов В. А. О движении твердого тела в жидкости. — Харьков, 1893. 234 стр.

154. Суслов Г. К. Теоретическая механика. — М.–Л.: Гостехиздат, 1946. 655 стр.

155. Тайманов И. А. О топологических свойствах интегрируемых геодезических потоков // Матем. заметки. — 1988, т. 44, № 2, 283–284.

156. Тайманов И. А. Топологические препятствия к интегрируемости геодезических потоков на неодносвязных многообразиях // Изв. АН СССР, Сер. матем. — 1987, т. 51, № 2, 429–435.

157. Татаринов Я. В. Лекции по классической динамике. — М.: изд-во МГУ, 1984. 295 стр.

158. Татаринов Я. В. Разделяющиеся переменные и новые топологические явления в голономных и неголономных системах // Тр. семинара по вект. и тенз. анализу. — 1968, № 22, 160–174.

159. Тода М. Теория нелинейных решеток. — М.: Мир, 1984. 262 стр.

160. Трещёв Д. В. О существовании бесконечного количества невырожденных периодических решений гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой // В кн. Геометрия, дифференциальные уравнения и механика. — М.: изд-во МГУ, 1986. 121–127.

161. Трещёв Д. В. Механизм разрушения резонансных торов гамильтоновых систем // Матем. сб. — 1989, т. 180, № 10, 1325–1346.

162. Уинтнер А. Аналитические основы небесной механики. — М.: Физматгиз, 1967. 524 стр.

163. Уиттекер Е. Т. Аналитическая динамика. — М.–Л.: Гостехиздат, 1937. 500 стр.

164. Ферми Э., Паста Дж., Улам С. Исследование нелинейных задач // В кн. Энрико Ферми. Научные труды. Т. II. — М.: Наука, 1972. 647–656.

165. Фоменко А. Т. Теория Морса интегрируемых гамильтоновых систем // ДАН СССР. — 1986, т. 287, № 5, 1071–1075.

166. Фоменко А. Т. Топологические инварианты гамильтоновых систем, интегрируемых по Лиувиллю // Функц. анализ и его прил. — 1988, т. 22, № 4, 38–51.

166а. Фоменко А. Т. Симплектическая геометрия. Методы и приложения. — М.: изд-во МГУ, 1988. 416 стр.

167. Форстер О. Римановы поверхности. — М.: Мир, 1980. 248 стр.

168. Харламова-Забелина Е. И. Быстрое вращение твердого тела вокруг неподвижной точки при наличии неголономной связи // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1957, № 6, 25–34.

169. Чаплыгин С. А. О движении тяжелых тел в несжимаемой жидкости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 133–150.

170. Чаплыгин С. А. К теории движения неголономных систем. Теорема о приводящем множителе // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 207–215.

171. Чаплыгин С. А. О параболоидном маятнике // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 194–199.

172. Чаплыгин С. А. О катании шара по горизонтальной плоскости // В кн. Полн. собр. соч. Т. 1. — Л.: Изд-во АН СССР, 1933. 216–234.

173. Шарлье К. Небесная механика. — М.: Наука, 1966. 627 стр.

173а. Шклярский Д. О., Ченцов Н. Н., Яглом И. М. Избранные задачи и теоремы элементарной математики. — М.: Наука, 1965. ??? стр.

174. Якоби К. Лекции по динамике. — М.-Л.: Гостехиздат, 1936. 271 стр.

175. Яхья Х. М. Новые интегрируемые случаи задачи о движении гиростата // Вестник Моск. ун-та, Сер. матем., механ. — 1987, № 4, 88–90.

176. Adler M., van Moerbeke P. Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves // Adv. Math. — 1980, v. 38, 267–317.

177. Adler M., van Moerbeke P. Kowalewski's asymptotic method, Kac — Moody Lie algebras and regularization // Commun. Math. Phys. — 1982, v. 83, 83–106.

178. Adler M., van Moerbeke P. A systematic approach towards solving integrable systems // In Perspectives in Mathematics. — New York: Academic Press, 1987. ???? p.

179. Bechlivandis C., van Moerbeke P. The Goryachev — Chaplygin top and the Toda lattice // Commun. Math. Phys. — 1987, v. 110, 317–324.

180. Bogoyavlensky O. I. On perturbation of the periodic Toda lattice // Commun. Math. Phys. — 1976, v. 51, № 3, 201–209.

181. Bogoyavlensky O. I. New integrable problem of classical mechanics // Commun. Math. Phys. — 1984, v. 94, 255–269.

181а. Bolotin S. V., Kozlov V. V. Symmetry fields of geodesic flows // Russian J. of Math. Phys., в печати.

182. Bountis T., Segur H., Vivaldi F. Integrable Hamiltonian systems and the Painleve property // Phys. Rew. A. General Physics. — 1982, v. 25, № 3, 1257–1264.

183. Brun F. Rotation kring fix punkt. II, III // Ark. mat., astron., fis. — 1907, v. 4, № 4, 1–4; 1909, v. 6, № 1, 1–10.

184. Bruns H. Über die Integrale des Vielkorperproblems // Acta Math. — 1887, v. 11, 25–96.

185. Calogero F. Exactly solvable one-dimentional many body problems // Letters al Nuovo Cimento. — 1975, v. 13, № 11, 411–416.

186. Chiricov B. V. A universal instability of many-dimensional oscillator systems // Phys. Rep. — 1979, v. 52, № 5, 263–389.

187. Četajev N. Sur les equations de Poincare // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1927, v. 185, 1577–1578.

188. Contopoulos G. On the existence of a third integral of motion // Astr. J. — 1963, v. 68, 1–14.

189. Cushman R. Examples of nonintegrable analytic Hamiltonian vector fields with no small divisors // Trans. Amer. Math. Soc. — 1978, v. 238, 45–55.

190. Danby J. M. A. Two notes on the Copenhagen problem // Cel. Mech. — 1984, v. 33, № 3, 251–260.

191. Devaney R. L. Homoclinic orbits in Hamiltonian systems // J. Diff. Equations. — 1976, v. 21, № 2, 431–438.

192. Devaney R. L. Transversal homoclinic orbits in an integrable system // Amer. J. Math. — 1978, v. 100, № 3, 631–642.

193. Dirac P. A. On generalized Hamiltonian dynamics // Can. J. Math. — 1950, v. 2, № 2, 129–148.

194. Flashka H. The Toda lattice. I. Existence of integrals // Phys. Rev. — 1974, № 9, 1924–1925.

195. Ford J., Stoddard S. D., Turner J. S. On the integrability of the Toda lattice // Prog. Theor. Phys. — 1973, v. 50, № 5, 1547–1560.

196. Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M. Chaotic motions and transition to stochasticity in the classical problem of the heavy rigid body with a fixed point // Nouvo Cimento. — 1981, v. 61B, № 1, 1–20.

197. Gorni G., Zampieri G. Complete integrability for Hamiltonian systems with a cone potential // J. Diff. Equations. — 1990, v. 85, № 2, 302–337.

198. Graff S. M. On the conservation of hyperbolic tori for Hamiltonian systems // J. Diff. Equations. — 1974, v. 15, № 1, 1–69.

199. Gustavson F. On constructing formal integrals of a Hamiltonian system near an equilibrium point // Astr. J. — 1966, v. 71, 670–686.

200. Hall L. A theory of exact and approximate configurational invariants // Phys. D. — 1983, v. 8, 90–116.

201. Haine L., Horozov E. A lax pair for Kowalewski's top // Phys. D. — 1987, v. 29, 173–180.

202. Helgason S. Differential geometry, Lie groups and symmetric spaces. — New York: Academic Press, 1978. 486 p.

203. Henon M., Heiles C. The applicability of the third integral of motion; some numerical experiments // Astr. J. — 1964, v. 69, 73–79.

204. Henon M. Integrals of the Toda lattice // Phys. Rev. — 1974, № 9, 1921–1923.

205. Holms P. J., Marsden J. E. Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups // Indiana Univ. Math. — 1983, № 32, 273–309.

206. Ito H. Convergence of Birkhoff normal forms for integrable systems // Comment. Math. Helvetici. — 1989, v. 64, 412–461.

207. Kaplansky I. An introduction to differential algebra. — Paris: Hermann, 1957. 92 p.

208. Katok A. Entropy and closed geodesics // Ergod. Th. and Dynam. Syst. — 1982, v. 2, 339–367.

209. Klein F., Sommerfeld A. Über die Theorie des Kreisels. — Leipzig: Teubner, 1910. 906 p.

210. Kobayashi S. Fixed points of isometries // Nagoya Math. J. — 1958, v. 13, 63–68.

211. Kodama Y., Gibbons J. A method for solving the dispersionless KP hierarchy and its exact solutions. II // Phys. Lett. A. — 1989, v. 135, № 3, 167–170.

212. Kodama Y. Exact solutions of hydrodynamic type equations having infinitely many conserved densities // Phys. Lett. A. — 1989, v. 135, № 3, 171–174.

213. Kostant B. The solution of a generalized Toda lattice and representation theory // Adv. Math. — 1979, v. 34, 195–338.

214. Kozlov V. V. Integrable and non-integrable Hamiltonian systems // Sov. Sci. Rev. C. Math. Phys. — 1989, v. 8, 1–81.

215. Lax P. D. Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves // Commun. Pure and Appl. Math. — 1968, v. 21, 467–490.

216. Llibre J., Simo C. Oscillatory solutions in the planar restricted three-body problem // Math. Ann. — 1980, v. 248, № 2, 153–184.

217. Moser J. The analytical invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point // Commun. Pure and Appl. Math. — 1956, v. 9, № 4, 673–692.

218. Moser J. Nonexistence of integrals for canonical systems of differential equations // Commun. Pure and Appl. Math. — 1955, v. 8, № 3, 409–436.

219. Moser J. On the volume elements of a manifold // Trans. Amer. Math. Soc. — 1965, v. 120, № 2, 286–294.

220. Moser J. Regularization of the Kepler's problem and the averaging method on a manifold // Commun. Pure and Appl. Math. — 1970, v. 23, 609–636.

221. Moser J. Stable and random motions in dynamical systems // In Ann. Math. Studies. — Princeton, New York: Princeton Univ. Press, 1973, № 77. 198 p.

222. Moser J. Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations // Adv. Math. — 1975, v. 16, 197–220.

223. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras // Invent. Math. — 1976, v. 37, № 2, 93–108.

224. Olshanetsky M. A., Perelomov A. M. Explicit solutions of classical generalized Toda models // Invent. Math. — 1979, v. 54, № 3, 261–269.

225. Poincare H. Sur le probleme des trois corps et les equations de la Dynamique // Acta Math. — 1890, v. 13, 1–270.

226. Poincare H. Sur le methode de Bruns // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1896, v. 123, 1224–1228.

227. Poincare H. Sur une forme nouvelle des equations de la mecanique // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1901, v. 132, 369–371.

228. Russmann H. Über das Verhalten analytischer Hamiltonscher Differentialgleichungen in der Nahe einer Gleichgewichtslosung // Math. Ann. — 1964, v. 154, 284–300.

229. Siegel C. L. Über die algebraischen Integrale des restrigierten Dreikorperproblems // Trans. Amer. Math. Soc. — 1936, v. 39, № 2, 225–233.

230. Siegel C. L., Moser J. K. Lectures on celestial mechanics. — Berlin — Heidelberg — New Vork: Springer-Verlag, 1971. 290 p.

231. Sklyanin E. K. Boundary conditions for integrabe quantum systems. Preprint. — LOMI. L., 1986. 36 p.

232. Smale S. Diffeomorphisms with many periodic points // In Differential and Combinatorial Topology. — Princeton, New York: Princeton Univ. Press, 1965. 63–80.

233. Souček J., Souček V. Morse — Sard theorem for real-analytic functions // Comment. Math. Univ. Carolinae. — 1972, v. 13, № 1, 45–51.

234. Vey J. Sur certain systemes dynamiques separables // Amer. J. Math. — 1978, v. 100, 591–614.

235. Volterra V. Sur la theorie des variations des latitudes // Acta Math. — 1899, v. 22, 201–358.

236. Yoshida H. Necessary condition for the existence of algebraic first integrals // Celestial Mechanics. — 1983, v. 31, 363–399.

237. Yoshida H. Non-integrability of the truncated Toda lattice Hamiltonian at any order // Commun. Math. Phys. — 1988, v. 116, 529–538.

238. Yoshida H. A criterion for the non-existence of an additional analytic integral in Hamiltonian systems with n degrees of freedom // Phys. Lett. A. — 1989, v. 141, № 3-4, 108–112.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ