И. Кра

АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И КЛЕЙНОВЫ ГРУППЫ

Перевод с английского
Г. А. Маргулиса

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1975

ИЗДАТЕЛЬСТВО МИР

Mathematics Lecture Note Series

Automorphic Forms and Kleinian Groups

Irwin Kra

State University of New York, Stony Brook

1972
W. A. Benjamin, Inc.
Advanced Book Program
Reading, Massachusetts

УДК 517.862 + 513.7

В теории клейновых групп, которая ведет начало от классических работ Ф. Клейна и А. Пуанкаре, в последнее время достигнут значительный прогресс. Однако на русском языке нет книг, посвященных изложению современного состояния этой теории. Перевод работы американского математика Ирвина Кра восполняет указанный пробел. Наряду с новыми достижениями в книге изложены и многие классические результаты теории римановых поверхностей.

Книга хорошо написана, доступна для начинающих и требует от читателей лишь знакомства с основным курсом комплексного анализа и элементами топологии.

Редакция литературы по математическим наукам

К $\frac{20203-010}{041(01)-75}$ 10—75

ПРЕДИСЛОВИЕ ПЕРЕВОДЧИКА

В настоящее время теория автоморфных форм является обширной и бурно развивающейся областью комплексного анализа, имеющей глубокие связи с теорией чисел, алгебраической геометрией, теорией представлений и другими разделами математики. Арифметическим вопросам этой теории посвящены переведенные сравнительно недавно на русский язык книги Жаке и Ленглендса «Автоморфные формы на $GL(2)$» и Шимуры «Введение в арифметическую теорию автоморфных функций». В отличие от них предлагаемая вниманию читателя книга Кра посвящена аналитическим вопросам теории автоморфных форм и ее приложениям к изучению клейновых групп и функций на компактных и открытых римановых поверхностях. Одной из основных целей этой книги, как отмечает сам автор, является доказательство теоремы Альфорса о конечности типа факторпространства по конечно порожденной клейновой группе и неравенства Берса о площадях, которое можно рассматривать как количественный аналог теоремы Альфорса. В ней также доказываются многие классические результаты теории римановых поверхностей, в частности теорема Римана — Роха и теорема Абеля. Отметим, что излагаемое в книге доказательство неравенства Римана является новым и основано на изучении когомологий Эйхлера. Укажем также на доказанную в гл. VII красивую теорему об однозначной определяемости (с точностью до зеркального отображения) римановой поверхности своим кольцом голоморфных или полем мероморфных функций.

Структура книги такова. Первые две главы носят вводный характер. В них, в частности, приводятся, иногда без доказательства, некоторые основные факты из теории римановых поверхностей. В последующих трех главах излагаются результаты об автоморфных формах и когомологиях Эйхлера, а также аппроксимационная теорема Берса о приближении интегрируемых голоморфных функций рациональными. Эти главы, и в особенности гл. V, наиболее трудны для чтения. В последних двух главах аппарат, разработанный в гл. III—V, применяется для получения результатов теории функций на римановых поверхностях. К числу достоинств книги следует отнести достаточно полную библиографию.

Книга Кра написана весьма четко и ясно. Она полезна широкому кругу читателей, интересующихся современными проблемами комплексного анализа.

Г. А. Маргулис

ПРЕДИСЛОВИЕ

Фуксова группа — это группа мёбиусовых (дробно-линейных) преобразований, которая разрывно действует на круге (полуплоскости). Более общо, клейнова группа — это группа мёбиусовых преобразований, которая разрывно действует на комплексной сфере. Различие между этими двумя классами групп было понято уже Пуанкаре. Случай фуксовых групп оказался гораздо более легким для изучения, и вскоре он развился во впечатляющую математическую теорию. Их изучение эквивалентно (по модулю теоретико-числовых вопросов) изучению римановых поверхностей и содержит как частный случай изучение плоских алгебраических кривых. Изучение клейновых групп, однако, продвигалось очень медленно, и здесь все еще не решены основные проблемы.

Наиболее существенный вклад в теорию клейновых групп был сделан Альфорсом, Берсом и Маскитом. В то время как Альфорс и Берс пытались описать конечно порожденные клейновы группы при помощи автоморфных функций, Маскит пытался построить все (конечно порожденные) клейновы группы как комбинации более простых фуксовых и элементарных групп. В этой книге мы ограничимся рассмотрением работ Альфорса и Берса. Как мы надеемся, красивые и глубокие результаты Маскита вскоре будут изложены в книге о построении клейновых групп.

Два наиболее важных средства в нашем исследовании — это теоремы полноты и двойственности для автоморфных форм и теоремы аппроксимации для интегрируемых голоморфных функций. Сразу заметно, что квазиконформные отображения используются в нашем изложении только в примерах (в § 4). Хотя идея квазиконформности послужила толчком к появлению большинства работ Альфорса и Берса о структуре клейновых групп, она совсем необязательна для этой теории и нигде не появляется в их опубликованных работах по этому предмету. Широко известна история о происхождении влияния квазиконформности на клейновы группы. Оказывается, что Л. Гринберг предложил Берсу и Альфорсу доказать, используя квазиконформные отображения, что фуксова группа конечно порождена тогда и только тогда, когда она представляет (топологически) компактную риманову поверхность с конечным числом выколотых точек. Берс доказал это, используя

технику и результаты теории пространства Тейхмюллера и теории квазиконформных отображений. К тому времени как Берс опубликовал этот результат, квазиконформность исчезла из доказательства. Впоследствии Альфорс обобщил (нетривиальным образом) результаты Берса на произвольные клейновы группы. И снова квазиконформные отображения служили только побудителем. Следует указать, что совсем недавно квазиконформные отображения стали более существенным образом использоваться при изучении модулей клейновых групп. Эта область все еще находится в зародыше и не будет излагаться в настоящей книге.

Те же средства, которые используются при описании клейновых групп, дают также все классические и современные результаты, касающиеся теории функций как на компактных, так и на открытых римановых поверхностях. Мы пойдем по этому пути при изучении римановых поверхностей.

Первоначальной целью этой книги было сделать доступной для неспециалиста две наиболее красивые теоремы теории клейновых групп: теорему конечности Альфорса и неравенства Берса о площадях. Моей целью было (и все еще остается) раскрыть перед читателем современную развивающуюся область математики и указать на некоторые нерешенные интересные и трудные проблемы в классической теории функций одного комплексного переменного.

В процессе подготовки этой книги я обнаружил, что для доказательства теоремы конечности нужно доказать теорему Римана — Роха. Таким образом, книга вдобавок стала общим курсом комплексного анализа. Однако я касался только тех вопросов, которые интересовали меня во время написания книги. Поэтому многие важные области совсем не затронуты.

Для чтения книги не требуется никаких предварительных сведений по теории функций комплексного переменного, кроме почерпнутых из первого семестра стандартного университетского курса, а также классификации односвязных римановых поверхностей. Предполагается, кроме того, что читатель знаком с основными свойствами предельных множеств клейновых групп (их можно найти в книгах Форда и Ленера). Предварительной подготовки по топологии не требуется. По существу читатель должен знать только топологическую классификацию поверхностей, т. е. двумерных (вещественных) многообразий со счетной базой. В частности, он дожен быть знаком со структурой их фундаментальных групп π_1 и первых групп гомологий H_1. Эти сведения можно найти в гл. I книги Альфорса и Сарио. Повсюду в книге будут использоваться основы теоретико-множественной топологии и элементарные факты о пространствах $\mathscr{L}^p$.

Я решил сделать записи по рядам Пуанкаре и автоморфным формам (содержание гл. III) после прочтения цикла лекций по этому предмету в Массачусетском технологическом институте

в 1967/1968 учебном году. Весной 1969 г. я прочел лекции на семинаре Берса в Колумбийском университете о когомологиях клейновых групп (гл. V). Записи, на которых основана эта книга, возникли из курса, который я читал весной 1970 г. в Стони Брук.

Глава I содержит предварительные сведения: описание предельного множества клейновой группы, общие факты о функциях и дифференциалах на римановых поверхностях и лемму Вейля. Мы обсуждаем без доказательства классификацию односвязных римановых поверхностей и униформизацию.

В гл. II вводится полная инвариантная метрика (постоянной отрицательной кривизны) на римановых поверхностях, у которых универсальная накрывающая имеет гиперболический тип. Изучается пространство орбит клейновой группы и строятся фундаментальные области.

Автоморфные формы исследуются в гл. III. Устанавливаются теоремы существования автоморфных функций и форм. Здесь мы следуем современным усовершенствованиям в теории, которыми мы обязаны в основном Берсу.

В гл. IV мы устанавливаем аппроксимационную теорему Берса. Эта теорема дает необходимые условия, при которых рациональные функции плотны в пространстве интегрируемых голоморфных функций. Она обобщает классическую теорему Рунге и играет решающую роль в последующих главах.

Глава V посвящена изучению групп когомологий Эйхлера для клейновых групп. Здесь изложение следует работе автора по этому предмету — работе, основанной на результатах Берса и Альфорса.

В гл. VI мы используем описание групп когомологий для фуксовых групп, чтобы доказать неравенство Римана. Используя классические рассуждения, мы выводим теорему Римана — Роха из неравенства Римана. Мы также доказываем теорему Абеля и решаем посредством совершенно классических методов проблему обращения Якоби.

В гл. VII доказывается теорема конечности Альфорса и неравенства Берса о площадях. Эти результаты являются простыми следствиями результатов гл. V и теоремы Римана — Роха. Отправляясь от аппроксимационной теоремы Берса, мы получаем аппроксимационные теоремы Бенке — Штейна и стандартные факты теории функций на открытых римановых поверхностях. Эти результаты об открытых поверхностях дают возможность распространить описание когомологий Эйхлера на более широкий класс клейновых групп. Мы показываем также, как заключительное приложение результатов Бенке — Штейна, что риманова поверхность определяется с точностью до зеркального отображения своим кольцом голоморфных или полем мероморфных функций.

Автор счастлив выразить свою благодарность Л. Берсу за то, что он ознакомил его с этим прекрасным предметом, своим колле-

гам К. Эрлу и Б. Маскиту за многочисленные предложения, которые улучшили изложение, и своему студенту Э. Пуру за чтение первоначального варианта рукописи.

Определение

Закончим предисловие определением римановой поверхности. Мы не включили это определение в основной текст книги, так как оно входит (или должно входить) в университетский курс комплексного анализа, т. е. в число предварительных сведений, необходимых для чтения этой книги.

Пусть M — одномерное комплексное *топологическое многообразие*, т. е. M является хаусдорфовым пространством с *координатным покрытием* $\{U_\alpha, z_\alpha\}_{\alpha\in A}$, где

(i) U_α — открытое подмножество в M,

(ii) $\bigcup\limits_{\alpha\in A} U_\alpha = M$

и

(iii) $z_\alpha : U_\alpha \to \mathbf{C}$ — гомеоморфизм U_α на открытую клетку (гомеоморфный образ круга) в комплексной плоскости $\mathbf{C}$.

Множества U_α называются *координатными окрестностями*, а отображения z_α — *координатными отображениями*, *локальными координатами* или *локальными параметрами*. На любом непустом пересечении $U_\alpha \cap U_\beta$ определены два различных гомеоморфизма. Таким образом, заданы функции перехода

$$f_{\alpha\beta} = z_\alpha \circ z_\beta^{-1} : z_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \to z_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta).$$

Объединение двух координатных покрытий $\{U_\alpha, z_\alpha\}$, $\{U'_\alpha, z'_\alpha\}$ (состоящее из открытых множеств и отображений из обоих покрытий) также является координатным покрытием. Координатное покрытие $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ называется (*комплексно*) *аналитическим координатным покрытием*, если все функции перехода аналитичны. (В этом случае мы будем также говорить, что комплексно аналитическое координатное покрытие $\{U_\alpha, z_\alpha\}$ задает комплексно аналитическую структуру на M.) Два аналитических координатных покрытия называются *эквивалентными*, если их объединение также является аналитическим координатным покрытием. Класс эквивалентности комплексно аналитических координатных покрытий на связном многообразии M называется *римановой поверхностью*.

Отображение

$$f: M \to N$$

римановых поверхностей называется *голоморфным* или *аналитическим*, если для любых локальных координат $\{U, z\}$ на M и $\{V, \zeta\}$

на N отображение

$$\zeta \circ f \circ z^{-1}\colon\ z(U \cap f^{-1}(V)) \to \zeta(V)$$

является голоморфным отображением из $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$. Аналитическое отображение $f\colon M \to N$ называется *конформным*, если оно является взаимно однозначным отображением на все N (в этом случае

$$f^{-1}\colon N \to M$$

также конформно).

Голоморфное отображение в $\mathbf{C}$ (со стандартной структурой римановой поверхности) называется *голоморфной* или *аналитической* функцией. Голоморфное отображение в сферу Римана $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ (с очевидной стандартной структурой римановой поверхности ($1/z$ задает локальные координаты в окрестности ∞)) называется *мероморфной функцией*.

И. Кра

Глава I

КЛЕЙНОВЫ ГРУППЫ И РИМАНОВЫ ПОВЕРХНОСТИ

В этой главе мы приведем необходимые предварительные сведения о клейновых группах и римановых поверхностях. В § 1 мы дадим классификацию преобразований Мёбиуса и определим клейновы группы, обсудим (без доказательств) свойства предельных множеств клейновых групп и определим фундаментальные области клейновых групп. Более полное изложение материала этого параграфа можно найти в книгах Форда и Ленера. В § 2 мы сформулируем классификационные теоремы для односвязных римановых поверхностей и опишем алгебраическую структуру фундаментальных групп и первых групп гомологий римановых поверхностей. Мы также выведем для компактных римановых поверхностей основные свойства голоморфных отображений и голоморфных дифференциалов. Для более детального ознакомления с теорией римановых поверхностей мы отсылаем читателя к книгам Спрингера и Альфорса и Сарио. В гл. VI мы вернемся к изучению некоторых более глубоких классических вопросов теории функций на римановых поверхностях. Параграф 3 посвящен исследованию обобщенных производных и доказательству леммы Вейля. В последнем параграфе мы приводим примеры римановых поверхностей и клейновых групп.

§ 1. Клейновы группы

Мы будем изучать группы Г, элементы которых являются преобразованиями Мёбиуса, т. е. отображениями

$$\gamma: z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}, \quad ad-bc=1. \tag{1.1}$$

Следовательно, элементами группы Г являются конформные преобразования расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Группа всех преобразований Мёбиуса обозначается через Möb. Имеет место естественный изоморфизм

$$\text{Möb} \cong SL(2, \mathbf{C})/\pm I, \tag{1.2}$$

где $SL(2, \mathbf{C})$ — группа матриц второго порядка с определителем единица, а I — единичная матрица

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как $SL(2, \mathbf{C})$ является топологической группой (топология индуцируется естественным вложением $SL(2, \mathbf{C})$ в $\mathbf{C}^4$), то Möb — топологическая группа. Подгруппа Γ группы Möb называется *дискретной*, если она является дискретным подмножеством топологической группы Möb. (*Топологическая группа* — это множество G, являющееся одновременно группой и топологическим пространством, причем отображение

$$G \times G \ni (x, y) \mapsto xy^{-1} \in G$$

непрерывно.

Имеется естественное отображение

$$SL(2, \mathbf{C}) \ni \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto (a, b, c, d) \in \mathbf{C}^4.$$

Таким образом, $SL(2, \mathbf{C})$ можно рассматривать как замкнутое подмножество (но *не как* замкнутую подгруппу) пространства $\mathbf{C}^4$. Группа Möb является факторгруппой группы $SL(2, \mathbf{C})$, снабженной фактортопологией.)

Если Γ — группа конформных преобразований римановой поверхности X, то через Γ_x обозначается *стабилизатор* (или *подгруппа стабильности*) точки $x \in X$, т. е.

$$\Gamma_x = \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma x = x\}.$$

Мы будем говорить, что Γ *разрывна в точке* x, если

(i) Γ_x конечен

и

(ii) существует такая окрестность U точки x, что

$$\gamma(U) = U \text{ для всех } \gamma \in \Gamma_x$$

и

$$\gamma(U) \cap U \text{ пусто для всех } \gamma \in \Gamma - \Gamma_x.$$

Положим

$$\Omega = \Omega(\Gamma) = \{x \in X;\ \Gamma \text{ разрывна в } x\}$$

и назовем Ω *областью разрывности группы* Γ. Группа Γ называется *разрывной*, если Ω непуста. *Предельное множество* Λ определяется равенством

$$\Lambda = \Lambda(\Gamma) = X - \Omega.$$

Очевидно, что Ω является открытым Γ-инвариантным ($\gamma\Omega = \Omega$ для всех γ) множеством.

В частности, мы определили понятие разрывности для групп $\Gamma \subset \text{Möb}$. В оставшейся части этого параграфа мы будем рассматривать только группы преобразований Мёбиуса.

Совершенно ясно, что каждая разрывная группа Γ преобразований Мёбиуса дискретна. Обратное неверно.

Можно показать, что

$$\operatorname{card} \Lambda = 0,\ 1,\ 2 \text{ или } \infty.$$

Если $\operatorname{card} \Lambda \leqslant 2$, то группа Γ называется *элементарной*.

Если Ω непусто и Λ содержит более двух точек, то Γ называется (*неэлементарной*) *клейновой* группой. Такие группы будут основным предметом этой книги. Для любой клейновой группы Γ множество Λ является замкнутым совершенным нигде не плотным подмножеством в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Каждая клейнова группа счетна.

Если $\operatorname{card}\Lambda \leqslant 2$, то Γ на самом деле элементарна. (Более подробно об этих группах см. гл. II, § 3.) Такие группы или конечны ($\operatorname{card} \Lambda = 0$), или счетны ($\operatorname{card} \Lambda = 1$ или 2).

Имеются различные способы классификации преобразований Мёбиуса. Если γ — преобразование Мёбиуса (1.1), то мы при помощи (1.2) отождествим его с некоторой матрицей и можем корректно определить

$$\operatorname{trace}^2 \gamma = (a + d)^2.$$

Если $\gamma \neq \mathrm{id}$, то мы назовем γ

эллиптическим $\Leftrightarrow 0 \leqslant \operatorname{trace}^2 \gamma < 4$,

параболическим $\Leftrightarrow \operatorname{trace}^2 \gamma = 4$,

локсодромическим $\Leftrightarrow \operatorname{trace}^2 \gamma \notin [0,\ 4]$.

Те локсодромические элементы γ, для которых $\operatorname{trace}^2 \gamma > 4$, называются *гиперболическими*.

Элемент γ является параболическим тогда и только тогда, когда он имеет ровно одну неподвижную точку. Совсем легко видеть, что

γ является локсодромическим $\Leftrightarrow \gamma$ сопряжено (в Möb) преобразованию $z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| > 1$,

γ является гиперболическим $\Leftrightarrow \gamma$ сопряжено преобразованию $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 1$,

γ является эллиптическим $\Leftrightarrow \gamma$ сопряжено преобразованию $z \mapsto \lambda z$, $|\lambda| = 1$,

γ является параболическим $\Leftrightarrow \gamma$ сопряжено преобразованию $z \mapsto z + 1$.

Дискретная группа не может содержать эллиптических элементов бесконечного порядка. Если Γ — клейнова группа, то Λ является замыканием множества неподвижных точек локсодромических элементов группы Γ. Если Γ содержит параболические элементы, то Λ также является замыканием множества неподвижных точек параболических элементов. (На самом деле Λ является замыканием орбиты любой локсодромической или параболической неподвижной точки.) Кроме того, орбита Γz произвольной точки $z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ под действием клейновой группы всегда счетна.

Предположим, что Γ — клейнова группа. Условие, что естественная проекция $\pi\colon \Omega \to \Omega/\Gamma$ множества Ω на множество орбит группы Γ в Ω голоморфна, задает единственную конформную (комплексно аналитическую) структуру на пространстве орбит. (Детали см. в гл. II.) Таким образом, Ω/Γ является (счетным) объединением римановых поверхностей.

Если Γ — клейнова группа и если некоторая окружность C в расширенной комплексной плоскости (прямая линия является окружностью, проходящей через ∞) такова, что внутренность C переходит в себя под действием Γ, то Γ называется *фуксовой* группой (а C — ее *стационарной окружностью*). В этом случае $\Lambda \subset C$. Если $\Lambda = C$, то Γ называется группой *первого рода*, в противном случае она называется группой *второго рода*. Фуксова группа не может содержать негиперболических локсодромических элементов.

Пусть Δ — любое открытое подмножество в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, инвариантное относительно группы Γ конформных преобразований, разрывно действующих на Δ (т. е. Γ разрывна в любой точке $x \in \Delta$). Под *фундаментальной областью* ω группы Γ в Δ мы подразумеваем такое открытое подмножество в Δ, что

(i) как только $\gamma z = \zeta$ для некоторых $\gamma \in \Gamma$, $z \in \omega$, $\zeta \in \omega$, то $\gamma = \mathrm{id}$,

(ii) для любой точки $\zeta \in \Delta$ найдутся такие $\gamma \in \Gamma$ и $z \in \mathrm{Cl}\,\omega$ (замыкание ω), что $\gamma z = \zeta$,

и

(iii) (двумерная) лебегова мера границы $\partial\omega$ множества ω равна нулю.

Хорошо известно, что фундаментальная область существует для любой разрывной группы конформных преобразований множества Δ. В гл. II мы опишем метод построения фундаментальных областей.

Чтобы продемонстрировать методы, использующиеся при доказательстве приведенных выше утверждений, мы докажем следующую теорему.

Теорема 1.1. *Пусть G — группа конформных преобразований единичного круга $\Delta = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\}$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(a) *G разрывна на Δ (т. е. $\Delta \subset \Omega(G)$),*

(b) *G разрывна в некоторой точке множества Δ (т.е. $\Delta \cap \Omega(G)$ непусто),*

(c) *G дискретна.*

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Это заключение на самом деле тривиально.

(b) $\Rightarrow$ (c). Предположим, что G недискретна. Тогда существует такая состоящая из различных элементов последовательность $\{g_n\} \subset G$, что $g_n \to g$, где g — преобразование Мёбиуса. Тогда, кроме того, $g_n^{-1} \to g^{-1}$. Рассмотрим теперь

$$h_n = g_{n+1}^{-1} \circ g_n, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Последовательность $\{h_n\}$ содержит состоящую из различных элементов бесконечную подпоследовательность и $h_n \to 1$. Тогда $h_n(z) \to z$ для всех $z \in \Delta$, и $\Delta \cap \Omega(G)$ пусто.

(c) $\Rightarrow$ (a). Если группа G не является разрывной в какой-то точке множества Δ, то в Δ существует такая состоящая из различных элементов последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, эквивалентных под действием G некоторой точке z_0, что $z_n \to z_0$. Пусть $g_n \in G$ таковы, что $g_n(z_n) = z_0$. Рассмотрим преобразование единичного круга, определяемое формулой

$$A_n(z) = \frac{z - z_n}{1 - \bar{z}_n z}, \quad z \in \Delta \qquad (n = 0, 1, \ldots),$$

и положим (для $n = 1, 2, \ldots$)

$$C_n = A_{n+1} \circ g_{n+1}^{-1} \circ g_n \circ A_n^{-1}.$$

Заметим, что $C_n(0) = 0$, и, следовательно (по лемме Шварца), $C_n(z) = \lambda_n z$, $z \in \Delta$, $|\lambda_n| = 1$. Таким образом, существует подпоследовательность (которую можно считать всей последовательностью) последовательности $\{C_n\}$, сходящаяся к C_0, где

$$C_0(z) = \lambda_0 z \text{ с } |\lambda_0| = 1.$$

Так как $A_n \to A_0$, то мы видим, что $h_n = g_{n+1}^{-1} \circ g_n \to A_0^{-1} \circ C_0 \circ A_0$. Но последовательность $\{h_n = g_{n+1}^{-1} \circ g_n\}_{n=1}^{\infty}$ состоит из различных элементов, так как точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ различны (и, следовательно, также различны элементы последовательности $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$).

Следствие. *Если Γ — фуксова группа со стационарной окружностью C, то $\Lambda(\Gamma) \subset C$.*

Доказательство. Так как Г является клейновой группой, то $\Omega(\Gamma)$ плотно в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Поэтому $\Omega(\Gamma) \cap \operatorname{Int} C$ непусто и, следовательно, $\Omega(\Gamma) \supset \operatorname{Int} C$. Аналогично, $\Omega(\Gamma)$ содержит внешность окружности C.

§ 2. Римановы поверхности

Пусть M — риманова поверхность, а $\widetilde{M}$ — ее универсальная накрывающая. Мы можем предположить (и так и сделаем), что $\widetilde{M}$ также есть риманова поверхность. По теореме о классификации односвязных римановых поверхностей $\widetilde{M}$ является (конформно эквивалентна) либо

(1) комплексной сферой $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$,

либо

(2) комплексной плоскостью $\mathbf{C}$,

либо

(3) единичным кругом $U = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\}$.

Пусть $\pi\colon \widetilde{M} \to M$ — голоморфное универсальное накрывающее отображение, а G — накрывающая группа отображения π, т. е. $G = \{$конформные преобразования g поверхности $\widetilde{M}$; $\pi \circ g = \pi\}$. Тогда G разрывна и действует без неподвижных точек. Кроме того, $G \cong \pi_1(M)$ ($\pi_1(M)$ — фундаментальная группа поверхности M) и $M \cong \widetilde{M}/G$ ($\widetilde{M}/G$—пространство орбит поверхности $\widetilde{M}$ под действием группы G) (первый символ $\cong$ обозначает групповой изоморфизм, второй — конформную эквивалентность).

Во всех случаях G является группой преобразований Мёбиуса. Случай $\widetilde{M} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ или $\widetilde{M} = \mathbf{C}$ легко изучить. Если $\widetilde{M} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, то $M = \widetilde{M}$ (риманова поверхность рода 0), так как каждое преобразование Мёбиуса, отличное от единицы, имеет по крайней мере одну неподвижную точку. Если $\widetilde{M} = \mathbf{C}$, то каждый элемент группы G имеет вид

$$z \mapsto z + b, \quad b \in \mathbf{C},$$

и G есть либо тривиальная, либо свободная абелева группа с одной или двумя образующими. В первом случае $M = \mathbf{C}$, а во втором — либо $M = \mathbf{C} - \{0\}$, либо M является тором (римановой поверхностью рода 1).

Во всех других случаях $\widetilde{M} = U$. Мы будем, вообще говоря, исключать случаи, когда G тривиальна или является свободной группой с одной образующей. В последнем случае либо $M = U - \{0\}$, либо M есть круговое кольцо.

Мы исчерпали все случаи, когда $\pi_1(M)$ абелева. Для всех других поверхностей G является фуксовой группой.

Если M компактна и не является ни сферой, ни тором, то $\pi_1(M)$ не свободна. В этом случае поверхность M является сферой с $g \geqslant 2$ (g — род) ручками и $\pi_1(M)$ порождается $2g$ элементами

$$a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$$

с единственным определяющим соотношением

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = 1.$$

Если M открыта, то $\pi_1(M)$ является свободной группой. Если $\pi_1(M)$ конечно порождена, то M — замкнутая поверхность рода g, из которой удалены n точек и m кругов ($n + m > 0$). Мы скажем, что M — поверхность *типа* (g, n, m). В этом случае $\pi_1(M)$ является свободной (некоммутативной, как только $2g + n + m > 2$) группой с $2g + n + m - 1$ образующими. Если $\pi_1(M)$ бесконечно порождена, то либо M является дополнением в компактной римановой поверхности к замкнутому множеству с бесконечным числом (связных) компонент (M — поверхность конечного рода), либо M — поверхность бесконечного рода.

Первая группа гомологий поверхности M (с целыми коэффициентами) может быть определена по формуле

$$H_1(M) = H_1(M, \mathbf{Z}) \cong \pi_1(M)/[\pi_1(M), \pi_1(M)],$$

где $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ — коммутант группы $\pi_1(M)$. Ясно, что ($\mathbf{Z}$ — целые числа)

$$H_1(M) \cong \mathbf{Z}^k,$$

где

$$k = \begin{cases} 2g, & \text{если } M \text{ типа } (g, 0, 0), \\ 2g + n + m - 1, & \text{если } M \text{ типа } (g, n, m) \text{ и } n + m > 0. \\ \infty & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Мы также будем использовать следующие факты: ($H_i(M)$ есть i-я группа гомологий с целыми коэффициентами римановой поверхности M): $H_0(M) \cong \mathbf{Z}$ и

$$H_2(M) \cong \begin{cases} \mathbf{Z}, & \text{если } M \text{ компактна}, \\ \{0\}, & \text{если } M \text{ открыта}. \end{cases}$$

Теперь мы изложим некоторую простую теорию функций на римановых поверхностях. Нам нужно будет знать, что всякая риманова поверхность триангулируема.

Пусть M — риманова поверхность и $q \in \mathbf{Z}$. Мероморфным *q-дифференциалом* на M называется такое сопоставление каждой локальной координате z мероморфной функции μ, что $\mu(z)\, dz^q$ является конформным инвариантом, т. е. если z_j — локальная координата, определенная на $D_j \subset M$ ($j = 1, 2$),

и если $D_1 \cap D_2$ непусто, то

$$\mu_1(z_1(z_2))\left(\frac{dz_1}{dz_2}\right)^q = \mu_2(z_2) \tag{2.1}$$

на $D_1 \cap D_2$. Конечно, 0-дифференциал — это то же самое, что и мероморфная функция; 1-дифференциал называется *абелевым* дифференциалом.

Пусть ω есть q-дифференциал на M. Пусть $p \in M$. Выберем локальную координату z, обращающуюся в нуль в p. Тогда

$$\omega = \mu(z)\, dz^q. \tag{2.2}$$

Мы определим *порядок* дифференциала ω в точке p по формуле

$$\operatorname{ord}_p \omega = \operatorname{ord}_0 \mu.$$

(Если $\mu(z) = z^n g(z)$, где g голоморфна и не обращается в нуль при $z = 0$, то $n = \operatorname{ord}_0 \mu$.) Из (2.1) непосредственно следует, что порядок дифференциала в точке корректно определен.

Если ω является абелевым дифференциалом, то мы можем определить *вычет* дифференциала ω в точке p

$$\operatorname{Res}_p \omega = a_{-1},$$

где ω задается согласно (2.2) при $q = 1$, а лорановское разложение функции μ по z задается формулой

$$\mu(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n z^n, \quad k \in \mathbf{Z}.$$

Вычет дифференциала ω в точке p корректно определен, так как

$$\operatorname{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i}\int_C \omega,$$

где C — простая замкнутая кривая на M, которая ограничивает круг D, причем порядок C относительно p равен 1 и ω голоморфен в $D - \{p\}$.

Предложение 2.1. *Пусть M — компактная риманова поверхность, а ω — абелев дифференциал на M. Тогда*

$$\sum_{p \in M} \operatorname{Res}_p \omega = 0. \tag{2.3}$$

Доказательство. Триангулируем M таким образом, чтобы каждая особая точка дифференциала ω лежала внутри ровно одного треугольника. Пусть $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ — нумерация треугольников триангуляции. Тогда

$$\sum_{p \in M} \operatorname{Res}_p \omega = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{k}\int_{\partial\Delta_j} \omega, \tag{2.4}$$

где $\partial\Delta_j$ есть (положительно ориентированная) граница треугольника Δ_j, $j = 1, \ldots, k$. Так как каждая сторона треугольника появляется в сумме (2.4) дважды (с противоположными знаками), то мы делаем вывод, что равенство (2.3) выполняется.

Пусть

$$f: M \to N$$

— непостоянное голоморфное отображение одной компактной римановой поверхности в другую. Ясно, что f сюрьективно (так как образ отображения f открыт и компактен, а N связна). Пусть $p \in M$. Выберем такую локальную координату z, обращающуюся в нуль в p, и такую локальную координату ζ, обращающуюся в нуль в $f(p)$, чтобы в этих координатах f задавалось формулой

$$\zeta = z^n,$$

где $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$. (Ясно, что это всегда возможно. Действительно, зададим ζ, и пусть $\tilde{z}$ произвольна. Тогда

$$\zeta = f(\tilde{z}) = \sum_{k \geqslant n} a_k \tilde{z}^k, \quad n > 0, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad a_n \neq 0.$$

Поэтому

$$\zeta = \tilde{z}^n (h(\tilde{z}))^n = (\tilde{z} h(\tilde{z}))^n,$$

где функция h голоморфна в точке $\tilde{z} = 0$ и $h(0) \neq 0$. Положим

$$z = \tilde{z} h(\tilde{z})$$

и заметим, что z является искомой локальной координатой в точке p.) Мы будем говорить, что n есть *число ветвления отображения f в точке p* или что f *принимает* в p *значение* $f(p)$ n *раз* ($n-1$ будет называться *числом ответвлений* отображения f в точке p). Ясно, что это число не зависит от выбора локальных координат.

Замечание. Мы будем теперь предполагать, что на всякой римановой поверхности существует непостоянная мероморфная функция. Этот факт будет доказан в гл. III.

Предложение 2.2. *Пусть f: $M \to N$ — непостоянное голоморфное отображение одной компактной римановой поверхности в другую. Тогда существует такое целое $m > 0$, что любое значение $y \in N$ принимается на M ровно m раз (с учетом кратности).*

Доказательство. Первая редукция: достаточно предположить, что $N = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Действительно, в общем случае умножим f на непостоянное мероморфное отображение h: $N \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Согласно частному случаю, h осуществляет n-листное (разветвленное) накрытие N над $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, а $h \circ f$ осуществляет

k-листное накрытие M над $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Поэтому f осуществляет $k/n = m$-листное накрытие M над N. Вторая редукция ($N = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$). Достаточно показать, что у f число нулей и полюсов одинаково. Действительно, тогда для любого $a \in \mathbf{C}$ у $f - a$ число нулей и полюсов одинаково.

Доказательство в частном случае. Рассмотрим дифференциал $\omega = df/f$. Заметим, что

$$\operatorname{Res}_x \omega = \operatorname{ord}_x f, \quad x \in M.$$

Ввиду предложения 2.1

$$\sum_{x \in M} \operatorname{ord}_x f = 0.$$

Предложение 2.3 (соотношение Римана — Гурвица). *Пусть $f\colon M \to N$ — непостоянное голоморфное отображение. Положим*

g — род компактной римановой поверхности M,

γ — род компактной римановой поверхности N,

n — число листов в накрытии M над N, осуществляемом f ($= \operatorname{card}\{f^{-1}(y);\ y \in N\}$),

B — число ветвления отображения $f = \sum_{x \in M} (m(x) - 1)$, где $m(x)$ — число ветвления отображения f в точке x.

Тогда

$$g = n(\gamma - 1) + 1 + B/2. \tag{2.5}$$

Доказательство. Положим $S = \{f(x);\ x \in M$ и $m(x) > 1\}$ и заметим, что S является конечным подмножеством в N. Триангулируем N так, чтобы каждая точка из S была вершиной в триангуляции. Предположим, что эта триангуляция имеет F граней, E ребер и V вершин. Поднимем эту триангуляцию на M при помощи отображения f. Индуцированная триангуляция поверхности M имеет nF граней, nE ребер и $nV - B$ вершин. Теперь мы вычислим характеристику Эйлера — Пуанкаре каждой поверхности двумя способами:

$$F - E + V = 2 - 2\gamma,$$
$$nF - nE + nV - B = 2 - 2g.$$

Отсюда мы сразу получаем, что

$$1 - g = n(1 - \gamma) - B/2. \tag{2.6}$$

Эквивалентность равенств (2.6) и (2.5) очевидна.

Понятие дивизора на компактной поверхности окажется чрезвычайно полезным. Сейчас же это только удобное обозначение.

Пусть M — риманова поверхность, как правило (но не обязательно) компактная. *Дивизор* a на M — это конечная формальная сумма

$$a = \sum_{j=1}^{k} n_j x_j, \quad n_j \in \mathbf{Z}, \quad x_j \in M.$$

Дивизор a называется *положительным* ($a \geqslant 0$), если $n_j \geqslant 0$ для всех j. *Степень* дивизора a определяется так:

$$\deg a = \sum_{j=1}^{k} n_j.$$

Если f — ненулевая мероморфная функция на M, то f определяет дивизор (f) по формуле

$$(f) = \sum_{x \in M} (\operatorname{ord}_x f)\, x.$$

Аналогично мы каждому ненулевому мероморфному q-дифференциалу α сопоставим дивизор (α).

Дивизор ненулевого q-дифференциала называется *q-каноническим* дивизором. Если $q = 1$, то такой дивизор называется *каноническим*; 0-канонический дивизор называется *главным*. Множество дивизоров имеет естественную структуру абелевой группы. Главные дивизоры образуют подгруппу группы дивизоров.

Предложение 2.4. *Пусть M — компактная риманова поверхность рода g. Если d есть q-канонический дивизор на M, то*

$$\deg d = q\,(2g - 2). \tag{2.7}$$

Доказательство. Для $q = 0$ результат вытекает из предложения 2.2. Если α_1 и α_2 — два q-дифференциала, то α_1/α_2 является мероморфной функцией на M. Поэтому

$$0 = \deg(\alpha_1/\alpha_2) = \deg \alpha_1 - \deg \alpha_2.$$

Следовательно, достаточно доказать (2.7) для дивизора какого-нибудь одного ненулевого q-дифференциала. Пусть f — непостоянная мероморфная функция на M. Тогда $(df)^q$ является q-дифференциалом. Так как

$$\deg((df)^q = q \deg(df),$$

то достаточно показать, что

$$\deg(df) = 2g - 2. \tag{2.8}$$

Вспоминая результаты и обозначения предложения 2.3, получаем, что

$$\operatorname{ord}_x df = m(x) - 1, \tag{2.9}$$

если в x функция f голоморфна и не обращается в нуль, и

$$\operatorname{ord}_x df = \operatorname{ord}_x f - 1, \tag{2.10}$$

если $f(x) = 0$ или $f(x) = \infty$. Умножив f на преобразование Мёбиуса, мы можем предположить, что f неразветвлена над 0 и ∞. (Выберем $w_0 \neq w_1 \in \mathbf{C}$ таким образом, чтобы $f^{-1}(w_0)$ и $f^{-1}(w_1)$ состояли в точности из n точек, где f осуществляет n-листное накрытие M над $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Это возможно, так как множество таких точек плотно в $\mathbf{C}$. Заменим f на

$$\frac{1}{f-w_0} - \frac{1}{w_1-w_0}.)$$

Для такой функции f получаем из (2.9) и (2.10), что

$$\deg(df) = B - 2n.$$

Используя (2.5) при $\gamma = 0$, мы получаем (2.8).

Два дивизора a и b называются *эквивалентными* ($a \sim b$), если найдется такой главный дивизор c, что

$$a = c + b.$$

Класс эквивалентности дивизора a обозначается через A. Множество классов эквивалентности дивизоров называется *группой классов дивизоров*.

Пусть $\mathscr{K}(M)$ — поле мероморфных функций на M. Если a — дивизор на M, то *пространство дивизора* a определяется как

$$l(a) = \{f \in \mathscr{K}(M);\ f = 0 \text{ или } (f) + a \geqslant 0\}.$$

Предложение 2.5. *Пусть M — компактная риманова поверхность, и пусть a и b — дивизоры на M. Тогда*

(a) *$l(a)$ является векторным пространством, причем* $\dim a = \dim l(a) < \infty$,

(b) $l(a) \cong l(b)$, *если* $a \sim b$.

Доказательство. Легко проверить, что $l(a)$ — векторное пространство. Действительно, если

$$a = \sum_{i=1}^{I} n_i x_i - \sum_{j=1}^{J} m_j y_j,$$

где $n_i > 0$, а $m_j \geqslant 0$, то $f \in l(a)$ тогда и только тогда, когда

(i) f голоморфна на $M - \{x_1, \ldots, x_I\}$,

(ii) f имеет в x_i ($i = 1, \ldots, I$) полюс порядка не выше, чем n_i, и

(iii) f имеет в y_j ($j = 1, \ldots, J$) нуль порядка $\geqslant m_j$.

Ясно, что пространство $l(a)$ конечномерно. Чтобы убедиться в этом, выберем локальные координаты z_i, обращающиеся в нуль в x_i $(i = 1, \ldots, I)$. Пусть

$$f(z_i) = \sum_{k=-n_i}^{\infty} a_{i,k} z_i^k$$

будет лорановским разложением функции $f \in l(a)$ по степеням z_i. Получаем отображение

$$\varphi\colon l(a) \to \mathbf{C}^{\mu}$$

$\left(\mu = \sum_{i=1}^{I} n_i\right)$, определяемое следующим образом:

$$f \mapsto (a_{1,-n_1}, \ldots, a_{1,-1}, a_{2,-n_2}, \ldots, a_{I,-n_I}, \ldots, a_{I,-1}).$$

Ядро этого отображения состоит из функций, голоморфных на M, и потому оно, самое большее, одномерно. Поэтому

$$\dim l(a) \leqslant 1 + \mu.$$

Наконец, если $a \sim b$, то существует такая функция $h \in \mathscr{K}(M)$, что $a = (h) + b$. Зададим отображение

$$\psi\colon l(a) \to l(b)$$

при помощи формулы $\psi(f) = fh$. Ясно, что ψ является изоморфизмом пространства $l(a)$ на $l(b)$.

Замечание. Мы видим, что dim и deg являются функциями с целыми значениями на группе классов дивизоров.

Главным результатом в этой области является следующая теорема, которая будет доказана в гл. VI.

Теорема 2.6 (Риман — Рох). *Если a — дивизор на компактной римановой поверхности M рода g, то*

$$\dim a = \deg a + 1 - g + \dim(\omega - a), \tag{2.11}$$

где ω — любой канонический дивизор на M.

Замечание. Равенство (2.11) является утверждением о классах дивизоров. Чтобы убедиться в этом, достаточно проверить, что $\dim(\omega - a)$ зависит только от класса дивизора a, т. е. не зависит от выбора абелева дифференциала θ, дивизором которого является ω. Пусть θ_1 и θ_2 — два абелевых дифференциала. Мы должны показать, что $(\theta_1) - a \sim (\theta_2) - a$. Это следует из того, чтобы отображение, переводящее дивизор a в его класс эквивалентности, является групповым гомоморфизмом.

§ 3. Лемма Вейля

Пусть $z = x + iy$ — комплексное переменное, а f — комплекснозначная функция. Примем следующие обозначения:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = f_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(f_x + if_y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = f_z = \frac{1}{2}(f_x - if_y)$$

и заметим, что для функций класса $\mathscr{C}^1$ (т. е. функций с непрерывными частными производными) $f_{\bar{z}} = 0$ тогда и только тогда, когда f голоморфна, и тогда и только тогда, когда f удовлетворяет уравнениям Коши — Римана.

Мы будем часто использовать следующее обобщение интегральной формулы Коши.

Лемма 3.1. *Пусть D — ограниченное открытое подмножество в* $\mathbf{C}$, *граница которого состоит из конечного числа жордановых кривых класса $\mathscr{C}^1$. Если $u \in \mathscr{C}^1(\mathrm{Cl}\, D)$, то для $z \in D$*

$$2\pi i u(z) = \int_{\partial D} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta + \iint_D \frac{\partial u/\partial \bar{\zeta}}{\zeta - z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{3.1}$$

Здесь (и в дальнейшем) $\mathrm{Cl}\, D$ обозначает замыкание множества D, под $u \in \mathscr{C}^1(\mathrm{Cl}\, D)$ подразумевается, что u принадлежит классу $\mathscr{C}^1$ в некоторой окрестности множества D, ∂D обозначает границу множества D, ориентированную таким образом, чтобы D лежало слева от ∂D, а

$$dz \wedge d\bar{z} = -2i\, dx \wedge dy$$

есть произведение двумерной лебеговой меры на константу.

Доказательство леммы 3.1. Начнем с формулы Стокса

$$\int_{\partial D} u\, d\zeta = \int_D \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta. \tag{3.2}$$

Пусть $z \in D$. Выберем $0 < \varepsilon < \delta(z)$, где

$$\delta(z) = \inf\{|z - \zeta|;\ \zeta \in \partial D\} = (\text{расстояние от } z \text{ до } \partial D).$$

Положим

$$D_\varepsilon = \{\zeta \in D;\ |\zeta - z| > \varepsilon\}.$$

Применив (3.2) к $u/(\zeta - z)$ (заметим, что $1/(\zeta - z)$ интегрируема по Лебегу на D), получаем, что

$$\iint_{D_\varepsilon} \frac{\partial u}{\partial \bar{\zeta}} \frac{1}{\zeta - z}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta = \int_{\partial D} u(\zeta) \frac{1}{\zeta - z}\, d\zeta - \int_0^{2\pi} u(z + \varepsilon e^{i\theta})\, i\, d\theta.$$

Устремляя ε к 0 и используя непрерывность функции u в точке z, получаем (3.1).

Замечание. Есть формула, аналогичная (3.1), в которую входит $\partial/\partial\zeta$. Она такова:

$$2\pi i u(z) = -\int_{\partial D} \frac{u(\zeta)}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\, d\bar{\zeta} + \iint_D \frac{\partial u/\partial\zeta}{\bar{\zeta}-\bar{z}}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}. \tag{3.3}$$

Мы можем доказать (3.3), применяя (3.1) к $\bar{u}$ и сопрягая получившееся равенство или повторяя приведенные выше рассуждения и заменяя в соответствующих местах ζ на $\bar{\zeta}$.

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — произвольное открытое множество. Обозначим через $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$ множество всех гладких (бесконечно дифференцируемых) (комплекснозначных) функций на D с компактным носителем. Под *носителем* функции мы подразумеваем замыкание множества точек, в которых функция не обращается в нуль. Пусть $f \in \mathscr{C}^1(D)$, а $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$. Тогда из формулы Стокса (3.2) получаем, что

$$\iint_D d\,[\varphi f\, dz] = \int_{\partial D} \varphi f\, dz = 0. \tag{3.4}$$

Последнее равенство верно, потому что φ обращается в нуль около ∂D (и, следовательно, мы не обязаны делать никаких предположений о гладкости ∂D). Из (3.4) мы заключаем, что

$$\iint_D \left(\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\varphi f\right) dz \wedge d\bar{z} = 0$$

или

$$\iint_D \varphi g\, dz \wedge d\bar{z} = -\iint_D \varphi_{\bar{z}} f\, dz \wedge d\bar{z}, \tag{3.5}$$

где $g = f_{\bar{z}}$. Аналогично,

$$\iint_D \varphi h\, dz \wedge d\bar{z} = -\iint_D \varphi_z f\, dz \wedge d\bar{z}, \tag{3.6}$$

где $h = f_z$.

Определение. Пусть $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$, т. е. f является измеримой функцией, интегрируемой по Лебегу на любом компактном подмножестве множества D. Мы будем говорить, что функция $g \in \mathscr{L}^1(D)$ ($\mathscr{L}^1(D)$ — пространство функций, итегрируемых по Лебегу на D) является *обобщенной $\bar{z}$-производной* функции f, если (3.5) выполняется для всех $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$. Аналогично, (3.6) используется для того, чтобы определить *обобщенную z-производную* функции f.

Для того чтобы показать, что обобщенные производные единственны, если они существуют, мы приведем один хорошо известный факт из вещественного анализа:

Лемма 3.2. *Векторное пространство $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$ плотно в банаховом пространстве $\mathscr{L}^1(D)$. Кроме того, на любом компактном множестве $K \subset D$ пространство $\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$ равномерно (по* sup-*норме) плотно в $\mathscr{C}(K)$, пространстве непрерывных функций на K.*

Для того чтобы доказать единственность обобщенных производных, предположим, что для некоторой функции $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$ заданы функции g_1 и g_2 из $\mathscr{L}^1(D)$, для которых

$$\iint_D \varphi g_1\, dz \wedge d\bar{z} = -\iint_D \varphi_{\bar{z}} f\, dz \wedge d\bar{z} = \iint_D \varphi g_2\, dz \wedge d\bar{z}$$

при всех $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$.

Мы покажем, что $h = g_1 - g_2 = 0$ в $\mathscr{L}^1(K)$, где K — произвольный малый круг в D. Без ограничения общности можно предположить, что K — единичный круг и $\mathrm{Cl}\, K \subset D$. Пусть $\varphi \in \mathscr{C}(K)$. Ввиду двойственности между $\mathscr{C}(K)$ и мерами на K достаточно показать, что

$$\iint_K \varphi h\, dz \wedge d\bar{z} = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in \mathscr{C}(K).$$

Ввиду леммы 3.2 достаточно показать, что

$$\iint_K \varphi h\, dz \wedge d\bar{z} = 0 \quad \text{для всех } \varphi \in \mathscr{C}^\infty(K). \tag{3.7}$$

Пусть η — такая гладкая функция на D, что

$0 \leqslant \eta \leqslant 1$,

$\eta = 1$ на $\left\{ z \in \mathbf{C};\ |z| \leqslant \frac{1}{2} \right\}$,

носитель η принадлежит K.

Для любого $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$, рассмотрим функцию

$$\varphi_n(z) = \begin{cases} \eta(z^n)\varphi(z), & |z| < 1, \\ 0, & z \in D,\ |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

Ясно, что $\varphi_n \in \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(D)$ и, следовательно,

$$0 = \iint_D \varphi_n h\, dz \wedge d\bar{z} = \iint_K \varphi_n h\, dz \wedge d\bar{z}.$$

Но $\varphi_n \to \varphi$ поточечно в K. Отсюда ввиду теоремы сходимости Лебега вытекает (3.7), и, следовательно, $g_1 = g_2$ почти всюду на K. Так как K произвольно, то $g_1 = g_2$ почти всюду на D.

Так как мы доказали единственность, то обозначим обобщенные производные функции f по z и $\bar{z}$ через f_z и $f_{\bar{z}}$ соответственно.

Лемма 3.3. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $D \subset \mathbf{C}$. *Тогда из сходимости голоморфных функций на* D *в пространстве* $\mathscr{L}^p(D)$ *вытекает их равномерная сходимость на компактных подмножествах в* D.

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай $1 \leqslant p < \infty$. Пусть $K \subset D$ — компактное подмножество. Пусть $0 < \varepsilon < \delta(K)$, где $\delta(K)$ — расстояние от K до ∂D. Пусть $z_0 \in K$, тогда по теореме о среднем для голоморфных функций мы для любой голоморфной функции f на D имеем

$$f(z_0) = \frac{-1}{2\pi i \varepsilon^2} \iint\limits_{|z-z_0|<\varepsilon} f(z)\, dz \wedge d\bar{z}.$$

Предположим теперь, что f_n есть последовательность голоморфных функций, сходящаяся в $\mathscr{L}^p$. Тогда

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| \leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \iint\limits_{|z-z_0|<\varepsilon} |(f_n(z) - f_m(z))\, dz \wedge d\bar{z}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \Big(\iint\limits_{K'} |(f_n(z) - f_m(z))^p\, dz \wedge d\bar{z}| \Big)^{1/p} \Big(\iint\limits_{K'} |dz \wedge d\bar{z}| \Big)^{1-1/p},$$

где $K' = \{z \in D;\ |z - K| \leqslant \varepsilon\}$. Так как $K' \subset D$ — компакт, получаем, что

$$|f_n(z_0) - f_m(z_0)| \leqslant \mathrm{const}\, \|f_n - f_m\|_{\mathscr{L}^p(D)}.$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3.4. (лемма Вейля). *Пусть* $f \in \mathscr{L}^1_{\mathrm{loc}}(D)$, *причем* $f_{\bar{z}} = 0$. *Тогда найдется такая голоморфная на* D *функция* g, *что* $g = f$ *почти всюду.*

Доказательство. Зафиксируем такую колоколообразную функцию $J \in \mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$, что

$$0 \leqslant J(z) \leqslant 1,\ z \in \mathbf{C}, \tag{3.8}$$

$$J(z) = 0 \text{ при } |z| \geqslant 1, \tag{3.9}$$

$$J(z) = J(|z|),\ z \in \mathbf{C}, \tag{3.10}$$

$$\frac{-1}{2i} \iint J(z)\, dz \wedge d\bar{z} = 1. \tag{3.11}$$

(Если мы не пишем область интегрирования, то под ней подразумевается вся плоскость.) Такую функцию построить легко (и мы это оставляем читателю). Так как голоморфность является локальным свойством, то мы можем предположить, что f определена на $\mathbf{C}$ и обращается в нуль вне некоторого компактного множества. Тогда $f \in \mathscr{L}^1(\mathbf{C})$, и, следовательно, f интегрируема на любом круге. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим

$$J_\varepsilon(z) = \frac{1}{\varepsilon^2} J(z/\varepsilon), \quad z \in \mathbf{C}.$$

Функция J_ε является гладкой, удовлетворяет равенствам (3.10) и (3.11), обращается в нуль при $|z| \geqslant \varepsilon$ и ограничена константой $1/\varepsilon^2$. Определим *ε-сглаживание* функции f по формуле

$$f_\varepsilon(z) = \frac{-1}{2i} \iint f(\zeta) J_\varepsilon(z-\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in \mathbf{C},$$

и заметим, что по теореме Фубини

$$\begin{aligned}\iint |f_\varepsilon(z)\, dz \wedge d\bar{z}| &\leqslant \frac{1}{2} \iint \iint |f(\zeta) J_\varepsilon(z-\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|\, |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= \frac{1}{2} \iint |f(\zeta)| \iint J_\varepsilon(z-\zeta)\, |dz \wedge d\bar{z}|\, |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\ &= \iint |f(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|.\end{aligned}$$

Поэтому $f \mapsto f_\varepsilon$ является не увеличивающим норму ($\|f_\varepsilon\|_{\mathscr{L}^1(\mathbf{C})} \leqslant \|f\|_{\mathscr{L}^1(\mathbf{C})}$) линейным отображением, образ которого лежит в $\mathscr{C}^\infty(\mathbf{C})$.

Докажем теперь несколько лемм.

Лемма 3.5. *Если f непрерывна и имеет компактный носитель K, то $f_\varepsilon \to f$ равномерно на K, когда $\varepsilon \to 0$.*

Доказательство. Производим выкладки:

$$\begin{aligned}-2i(f_\varepsilon(z) - f(z)) &= \iint f(\zeta) J_\varepsilon(z-\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} - \\ &\quad - \iint f(z) J_\varepsilon(z-\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\ &= \iint (f(\zeta) - f(z)) J_\varepsilon(z-\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.\end{aligned}$$

Поэтому

$$|f_\varepsilon(z) - f(z)| \leqslant \sup_{|z-\zeta|<\varepsilon} |f(z) - f(\zeta)|.$$

Так как f непрерывна на K, то она равномерно непрерывна, и, следовательно, $f_\varepsilon \to f$ равномерно (при $\varepsilon \to 0$).

Лемма 3.6. *Сглаживание коммутирует с дифференцированием, т. е. из $f_{\bar z}=h$ вытекает, что $(f_\varepsilon)_{\bar z}=h_\varepsilon=(f_{\bar z})_\varepsilon$.*

Доказательство. Так как $f_{\bar z}=h$, то

$$\iint f\varphi_{\bar z}\,dz\wedge d\bar z=-\iint h\varphi\,dz\wedge d\bar z \text{ при всех } \varphi\in\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C}).$$

Тогда

$$\begin{aligned}
-2i\iint f_\varepsilon\varphi_{\bar z}\,dz\wedge d\bar z&=\iiiint f(\zeta)\,J_\varepsilon(z-\zeta)\,\varphi_{\bar z}(z)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\,dz\wedge d\bar z=\\
&=\iint f(\zeta)\iint J_\varepsilon(z-\zeta)\,\varphi_{\bar z}(z)\,dz\wedge d\bar z\,d\zeta\wedge d\bar\zeta=\\
&=-\iint f(\zeta)\iint J_{\varepsilon,\bar z}(z-\zeta)\,\varphi(z)\,dz\wedge d\bar z\,d\zeta\wedge d\bar\zeta=\\
&=-\iiiint f(\zeta)\,J_{\varepsilon,\bar z}(z-\zeta)\,\varphi(z)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\,dz\wedge d\bar z=\\
&=\iiiint f(\zeta)\,J_{\varepsilon,\bar\zeta}(z-\zeta)\,\varphi(z)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\,dz\wedge d\bar z=\\
&=-\iiiint f_{\bar\zeta}(\zeta)\,J_\varepsilon(z-\zeta)\,\varphi(z)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\,dz\wedge d\bar z=\\
&=2i\iint h_\varepsilon(z)\,\varphi(z)\,dz\wedge d\bar z.
\end{aligned}$$

Мы показали, что $h_\varepsilon=f_{\varepsilon,\bar z}$.

Доказательство теоремы 3.4 (окончание). Имеем

$$f_{\varepsilon,\bar z}=(f_{\bar z})_\varepsilon=0.$$

Так как функция f_ε является гладкой, то она голоморфна. Покажем теперь, что $f_\varepsilon\to f$ в $\mathscr{L}^1(K)$ для любого компактного множества K. Для заданного $\delta>0$ найдется такая функция $\hat f\in\mathscr{C}^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$, что

$$\iint_K|(f-\hat f)\,dz\wedge d\bar z|<\delta/3.$$

Поэтому

$$\iint_K|(f_\varepsilon-\hat f_\varepsilon)\,dz\wedge d\bar z|<\delta/3.$$

Выберем такое достаточно малое ε, чтобы

$$\iint_K|(\hat f-\hat f_\varepsilon)\,dz\wedge d\bar z|<\delta/3.$$

Тогда

$$\iint_K|(f-f_\varepsilon)\,dz\wedge d\bar z|<\delta.$$

Поэтому f_ε сходится равномерно на компактных подмножествах (из $\mathbf{C}$) к голоморфной функции g, и так как эта сходимость сильнее, чем сходимость в $\mathscr{L}^1(K)$, то $f = g$ почти всюду.

§ 4. Примеры

В этом параграфе мы приведем примеры римановых поверхностей и клейновых групп. Каждый пример, конечно, является теоремой. Доказательства, как правило, будут опущены. Изредка мы будем приводить набросок доказательства теоремы.

Римановы поверхности. Рассмотрим триангуляцию ориентируемой поверхности M (*поверхностью* называется связное двумерное вещественное многообразие со счетной базой открытых множеств). Пусть $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots\}$ — совокупность замкнутых треугольников из этой триангуляции. Тогда

(4.1) Для двух заданных треугольников Δ_j и Δ_k из этой триангуляции выполняется одна из трех возможностей:

(a) Δ_j и Δ_k не пересекаются,

(b) Δ_j и Δ_k имеют общее ребро (естественная ориентация на M индуцирует ориентации на Δ_j и Δ_k, которые индуцируют противоположные ориентации на ребре),

(c) Δ_j и Δ_k имеют общую вершину.

(4.2) Точка $p \in M$ либо

(a) лежит внутри некоторого треугольника,

либо

(b) лежит внутри общего ребра ровно двух треугольников,

либо

(c) является общей вершиной конечного числа треугольников.

Пусть D — некоторая область в M. Функцию

$$f\colon D \to \mathbf{C}$$

будем называть *голоморфной*, если она непрерывна и если она голоморфна в любой точке множества D, являющейся внутренней точкой некоторого треугольника заданной триангуляции. Мы должны объяснить, что означает голоморфность во внутренних точках. Выберем такие гомеоморфизмы z_j замкнутых треугольников Δ_j на треугольники в $\mathbf{C}$, что если $p \in \Delta_j \cap \Delta_k$, то

$$z_j(p) = z_k(p).$$

Голоморфность во внутренних точках означает, конечно, голоморфность по локальным координатам z_j $(j = 1, 2, \ldots)$.

Теорема 4.1. *Поверхность M с определенными выше голоморфными функциями является римановой поверхностью.*

Доказательство. Ясно, как определить локальные координаты во всех точках, кроме вершин. Поэтому пусть $p \in M$ — вершина триангуляции. Предположим, что она является вершиной n ($n \geqslant 3$) треугольников $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$. Пусть z_j ($j = 1, \ldots, n$) — описанный выше гомеоморфизм треугольника Δ_j на треугольник $\widetilde{\Delta}_j$ в $\mathbf{C}$. Мы можем предположить, что $z_j(p) = 0$ и что Δ_j имеет общее ребро с Δ_{j+1}, $j = 1, \ldots, n$ ($n + 1$ « = » 1). Пусть α_j — угол треугольника $\widetilde{\Delta}_j$ в 0. Определим локальные координаты ζ в точке p по формуле

$$\zeta(q) = z_j(q)^{\nu} e^{\nu(\alpha_0 + \cdots + \alpha_{j-1})}, \qquad j = 1, \ldots, n, \ \alpha_0 = 0,$$

где $q \in \Delta_j$, $\nu = 2\pi / \sum_{j=1}^{n} \alpha_j$, а число z_j^{ν} мы выбираем так, чтобы его аргумент равнялся аргументу числа z_j, умноженному на ν, причем

$$0 \leqslant (\text{аргумент } z_j) \leqslant \alpha_j < \pi.$$

Естественно спросить, будет ли всякая ориентируемая поверхность триангулируема. Ответ содержится в следующей теореме:

Теорема 4.2 (Радо). *Любая ориентируемая поверхность триангулируема и, таким образом, может быть превращена в риманову поверхность.*

Верно также обращение этой теоремы: *любая риманова поверхность ориентируема.* Кроме того,

любая риманова поверхность является (гладким) многообразием класса $\mathscr{C}^{\infty}$.

Пусть M — гладкая двумерная вещественная поверхность. Предположим, что на M задан *ковариантный тензор ранга* 2. То есть, если (x_1, x_2) — координатное отображение на M, то мы связываем с этим координатным отображением 4 вещественнозначные гладкие функции g_{ij}, $i, j = 1, 2$. Если $(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2)$ — другой локальный параметр, область определения которого нетривиально пересекается с областью определения параметра (x_1, x_2), то

$$\widetilde{g}_{ij} = \sum_{k, l=1}^{2} g_{kl} \frac{\partial x_k}{\partial \widetilde{x}_i} \frac{\partial x_l}{\partial \widetilde{x}_j}.$$

Если на M задан симметрический ($g_{ij} = g_{ji}$) и положительно определенный (из $(t_1, t_2) \neq 0$ вытекает, что $\sum_{i, j=1}^{2} g_{ij} t_i t_j > 0$) тензор g_{ik}, то мы говорим, что на M задана *риманова метрика* или что M есть *риманово многообразие*. На римановом многообразии можно

измерять длину, определив элемент длины ds равенством

$$ds^2 = \sum_{i,\, j=1}^{2} g_{ij}\, dx_i\, dx_j.$$

Можно также определить угол между кривыми на римановом многообразии. Но мы нигде не будем использовать этого понятия.

Теорема 4.3. *Гладкое двумерное ориентируемое риманово многообразие может быть естественным образом превращено в риманову поверхность.*

Доказательство. Свяжем с локальной координатой (x_1, x_2) функцию

$$\mu(z) = \mu(x_1 + ix_2) = \frac{g_{11} - g_{22} + 2ig_{12}}{g_{11} + g_{22} + 2\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}}$$

и назовем функцию f *голоморфной*, если она удовлетворяет *уравнению Бельтрами*

$$f_{\bar z} = \mu f_z. \tag{4.3}$$

Здесь необходимо многое проверять. Одним из наиболее нетривиальных шагов является проверка того, что (4.3) имеет гомеоморфные решения f.

Верно также обращение этой теоремы. Более полная информация будет получена в гл. II. На самом деле

Любая риманова поверхность M является римановым многообразием с полной римановой метрикой постоянной кривизны. Кривизна положительна, если M конформно эквивалентна $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, равна нулю, если голоморфная универсальная накрывающая поверхность поверхности M конформно эквивалентна $\mathbf{C}$, и отрицательна в остальных случаях.

Следующая теорема еще раз показывает, какие двумерные многообразия могут быть превращены в римановы поверхности.

Теорема 4.4. *На любой гладкой ориентируемой поверхности можно задать гладкий симметрический положительно определенный ковариантный тензор ранга* 2.

Таким образом, любое двумерное ориентируемое многообразие M со счетной базой открытых множеств может быть превращено в риманову поверхность. Задав на M одну комплексно аналитическую структуру, естественно спросить, как из нее получить все остальные. Рассмотрим плоскую область D и гомеоморфизм

$$w\colon D \to \mathbf{C},$$

который имеет локально квадратично интегрируемые обобщенные производные и удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$w_{\bar{z}}/w_z = \mu,$$

где $\mu \in \mathscr{L}^\infty(D)$ и $\|\mu\| < 1$. Такое отображение w называется *квазиконформным*. Гомеоморфизм

$$w\colon M \to M'$$

между двумя римановыми поверхностями называется *квазиконформным*, если он квазиконформен во всех локальных координатах и если нормы всех коэффициентов Бельтрами μ равномерно ограничены константой $k < 1$. В этом случае коэффициент Бельтрами является $(-1, 1)$-дифференциалом на M, т. е. таким сопоставлением каждой локальной координате z измеримой функции μ, что

$$\mu \frac{d\bar{z}}{dz}$$

является конформным инвариантом.

Если зафиксирована риманова поверхность M, то для любого коэффициента Бельтрами μ на M мы можем определить риманову поверхность M_μ, объявив функцию f голоморфной на M_μ, если она удовлетворяет уравнению Бельтрами (4.3). Можно проверить, что таким образом вводится новая конформная структура. Множество всех полученных таким образом конформных структур на топологическом многообразии M образует (в некотором смысле) открытое подмножество в банаховом пространстве. Если M компактно, то любая конформная структура на M получается описанным выше способом. Эти рассмотрения естественно приводят к теории модулей римановых поверхностей — работам Тейхмюллера, Альфорса, Берса и Рауха.

Многозначные аналитические функции также приводят к естественным конструкциям римановых поверхностей. Примером таких многозначных функций являются решения неприводимого уравнения

$$\sum_{i,j=0}^{n,m} a_{ij} z^i w^j = 0.$$

Добавив некоторое конечное множество точек, можно получить компактную риманову поверхность. Кроме того, любая риманова поверхность может быть получена таким способом. Интересующийся этим читатель найдет все детали этой конструкции в книге Спрингера.

Клейновы группы. Наиболее важный пример клейновых групп был уже упомянут. Пусть M — любая риманова

поверхность, универсальная накрывающая которой есть единичный круг U. Если накрывающая группа поверхности M некоммутативна, то $M \cong U/G$, где G — фуксова группа, действующая без неподвижных точек.

Кроме того, если $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — дискретная последовательность на произвольной римановой поверхности M и если $\{\nu_1, \nu_2, \ldots\}$ — последовательность целых чисел, $\nu_j \geqslant 2$ для всех j, то при некоторых условиях найдется такая действующая на U фуксова группа G, что $M \cong U/G$ и каноническая проекция

$$\pi\colon U \to U/G$$

разветвлена в точках $\pi^{-1}(x_j)$ с числами ветвления ν_j, $j = 1, 2, \ldots$, и неразветвлена в других точках.

Если G — фуксова группа, действующая на верхней полуплоскости U, то G представляет две римановы поверхности, если она первого рода, и одну, если второго. Если G первого рода, то ее область разрывности Ω состоит из $U \cup L$, где L — нижняя полуплоскость. В этом случае существует очевидное антиконформное отображение на

$$J\colon U/G \to L/G.$$

Если G — группа второго рода, то Ω связна и бесконечно связна и на Ω/G существует антиконформная инволюция J. Если Λ обозначает предельное множество группы G, то J оставляет неподвижными точки множества $(\mathbf{R} \cup \{\infty\} - \Lambda)/G$.

Клейнова группа называется *вырожденной*, если она имеет связную односвязную область разрывности. Имеется недавняя и трудная теорема (Л. Берса) о том, что вырожденные группы существуют. Такая группа представляет единственную риманову поверхность и как группа изоморфна фуксовой группе.

Группы Шоттки являются другим известным классом клейновых групп. Пусть D — область в расширенной плоскости, ограниченная $2g$ $(g \geqslant 2)$ непересекающимися простыми замкнутыми кривыми $C_1, C_1', \ldots, C_g, C_g'$. Для $i = 1, \ldots, g$ пусть A_i есть преобразование Мёбиуса, причем $A_i(C_i) = C_i'$ и $A_i(D) \cap D$ пусто. Пусть G — группа, порожденная преобразованиями $A_1, \ldots, A_g$. Группа G называется группой *Шоттки*, а D является фундаментальной областью для G. Хорошо известно и легко проверяется, что G является свободной группой с g образующими и что область разрывности группы G есть

$$\Omega = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} \gamma(D'),$$

где $D' = D \cup C_1 \cup \ldots \cup C_g$. Кроме того, Ω связна, а Ω/G является компактной римановой поверхностью рода g. Далее, любой элемент из $G - \{\mathrm{id}\}$ является локсодромическим. Совсем легко

проверить, что группы Шоттки существуют. Обычно группы Шоттки строятся путем выбора на расширенной комплексной плоскости D области, ограниченной $2g$ окружностями. Неизвестно, может ли всякая группа Шоттки быть построена таким способом. Недавно Б. Маскит доказал, что любая конечно порожденная свободная чисто локсодромическая группа является группой Шоттки.

Задав две клейновых группы G_1 и G_2, удовлетворяющие некоторым алгебраическим и геометрическим условиям, можно показать, что группа G, порожденная группами G_1 и G_2, снова является клейновой и что фундаментальная область для G и алгебраическая структура группы G определяются соответствующими данными о G_1 и G_2. Такие конструкции возникли впервые под названием «теоремы Клейна о соединении» и явились предметом многих интересных работ Б. Маскита. Мы здесь проиллюстрируем простейший из таких примеров (принадлежащий Ф. Клейну). Пусть G_1 и G_2 — две конечно порожденные разрывные группы преобразований Мёбиуса (G_1 и G_2 — элементарные или клейновы). Пусть ω_1 и ω_2 — фундаментальные области соответственно для G_1 и G_2. Предположим, что внутренность области ω_1 содержит внешность и границу области ω_2, а внутренность области ω_2 содержит внешность и границу области ω_1. Тогда группа G, порожденная группами G_1 и G_2, тоже разрывна, она является свободным произведением групп G_1 и G_2, а $\omega = \omega_1 \cap \omega_2$ — фундаментальной областью для G.

Группа Шоттки может рассматриваться как свободное произведение конечного числа бесконечных циклических групп. Аналогично, можно построить группы *типа Шоттки*, т. е. свободные произведения абелевых разрывных групп преобразований Мёбиуса.

Приведем, наконец, еще одну конструкцию клейновых групп. Пусть G — клейнова группа, а w — квазиконформное отображение $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ на себя с коэффициентом Бельтрами μ. Предположим, что μ удовлетворяет равенству

$$\mu(g(z))\,\overline{g'(z)}/g'(z) = \mu(z)$$

для всех $g \in G$ и почти всюду на $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Тогда

$$G^{\mu} = \{w \circ g \circ w^{-1};\ g \in G\}$$

— снова клейнова группа. Если группа G фуксова, то G^{μ} называется *квазифуксовой*.

Замечания

Большая часть материала этой главы является классической. Содержание § 1 было известно основателям теории разрывных групп и автоморфных функций — Л. Фуксу, Клейну и Пуанкаре.

Окончательный вариант теоремы об униформизации принадлежит Кёбе [К 6—1], [К 6—2] и Пуанкаре [П 5—2]. Понятие универсальной накрывающей поверхности, возможно, принадлежит Г. А. Шварцу. Остальная часть материала § 2 является очень классической и должна быть среди других приписана Абелю, Якоби, Риману.

Лемма Вейля появляется в [В2]. Возможно, что она была известна до ее появления в литературе.

Теорема 4.2 принадлежит Радо [Р2]. Квазиконформные отображения изучались многими авторами (см. Альфорс — Берс [АБ] и цитированную там литературу). За разъяснениями по теории модулей римановых поверхностей следует обращаться к статьям Альфорса [А5—5], Берса [Б4—3], [Б4—10], [Б4—18] и Рауха [Р3]. Самая ранняя форма теоремы Клейна о соединении может быть найдена в статье Клейна [К8]. Относительно более современных вариантов смотри работы Маскита [М6—3], [М6—6], [М6—10].

Глава II

ПРОСТРАНСТВО ОРБИТ КЛЕЙНОВОЙ ГРУППЫ

В этой главе мы опишем структуру пространства орбит клейновой группы Г. Вводится метрика Пуанкаре и вычисляется инвариантная площадь пространства орбит. Строятся фундаментальные области для групп конформных преобразований плоских областей.

§ 1. Метрика Пуанкаре

Пусть D — произвольное открытое множество в расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, граница которого состоит более чем из двух точек. Мы определим на D *метрику Пуанкаре* λ_D следующим образом. Если Δ — открытый единичный круг,

$$\Delta = \{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\},$$

то положим

$$\lambda_\Delta(z) = (1 - |z|^2)^{-1},\ z \in \Delta. \tag{1.1}$$

Простое вычисление показывает, что для любого конформного преобразования A круга Δ имеем

$$\lambda_\Delta(Az)\ |A'(z)| = \lambda_\Delta(z),\ z \in \Delta.$$

(Напоминаем: $A(z) = \dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}$, $|a|^2 - |b|^2 = 1$.) Если D связно, то пусть $\pi\colon \Delta \to D$ — универсальное голоморфное накрывающее отображение. Единичный круг является универсальным накрывающим пространством области D, так как граница множества D состоит более, чем из двух точек. Определим λ_D по формуле

$$\lambda_D(\pi(z))\ |\pi'(z)| = \lambda_\Delta(z),\ z \in \Delta. \tag{1.2}$$

Мы должны проверить, что λ_D корректно определено. Если ρ — другое накрывающее отображение и если $\pi(z) = \rho(\zeta)$ для двух точек z и ζ в Δ, то найдется такое конформное преобразование A круга Δ, что

$$A(\zeta) = z \text{ и } \pi \circ A = \rho.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\lambda_D(\rho(\zeta)) &= \lambda_\Delta(\zeta)\,|\rho'(\zeta)|^{-1} = \\ &= \lambda_\Delta(A\zeta)\,|A'(\zeta)|\,|\pi'(A\zeta)|^{-1}\,|A'(\zeta)|^{-1} = \\ &= \lambda_\Delta(z)\,|\pi'(z)|^{-1} = \lambda_D(\pi(z))\end{aligned}$$

Если $z \in D$ — произвольная точка и если мы так выбираем π, что

$$\pi(0) = z, \tag{1.3}$$

то мы видим, что

$$\lambda_D(z) = |\pi'(0)|^{-1}. \tag{1.4}$$

Если D — объединение (связных) компонент, $D = \bigcup_i D_i$, то положим

$$\lambda_D(z) = \lambda_{D_i}(z) \text{ для } z \in D_i.$$

Предложение 1.1.

(a) Если f — *конформное отображение, то* $\lambda_{f(D)}(f(z))\,|f'(z)| = \lambda_D(z)$, $z \in D$.

(b) *Если* $D_1 \subset D_2$, *то* $\lambda_{D_2}(z) \leqslant \lambda_{D_1}(z)$ *для* $z \in D_1$.

(c) *Пусть* $\delta_D(z) = \inf\{|z - \zeta|;\ \zeta \in \partial D$ (*граница множества* D)$\}$. *Тогда для* $z \in D$

$$\lambda_D(z)\,\delta_D(z) \leqslant 1.$$

(d) *Если* D *связно и односвязно и* $\infty \notin D$, *то*

$$\lambda_D(z)\,\delta_D(z) \geqslant 1/4.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что все множества связны.

(a) Если π — накрывающее отображение для D, то $f \circ \pi$ — накрывающее отображение для $f(D)$.

(b) Пусть $\pi_i\colon \Delta \to D_i$ — накрывающие отображения, причем $\pi_i(0) = z$ $(i = 1, 2)$. Тогда на Δ найдется такая голоморфная функция g, что

$$\pi_1(\zeta) = \pi_2(g(\zeta)),\ \zeta \in \Delta$$

(по теореме монодромии). Мы можем так выбрать g, чтобы $g(0) = 0$. Так как $|g(\zeta)| \leqslant 1$ для $|\zeta| < 1$, то из леммы Шварца следует, что $|g'(0)| \leqslant 1$. Поэтому $|\pi_1'(0)| \leqslant |\pi_2'(0)|$.

(c) Пусть $D_1 = \{\zeta \in \mathbf{C};\ |\zeta - z| < \delta_D(z)\}$. Тогда $D_1 \subset D$ и в силу (b)

$$\lambda_D(z) \leqslant \lambda_{D_1}(z) = \delta_D(z)^{-1}.$$

Замечание. При доказательстве (b) и (c) мы предполагали, что $z \neq \infty$. Утверждения (b) и (c) тривиальны для $z = \infty$, так как

$$\lambda_D(z) = 0(|z|^{-2}), \quad z \to \infty, \text{ если } \infty \in D.$$

(d) Пусть $\pi\colon \Delta \to D$ — конформное отображение, причем $\pi(0) = z$ и $\pi'(0) > 0$. Тогда мы получаем нормализованное однолистное отображение

$$g(\zeta) = \lambda_D(z)(\pi(\zeta) - z), \quad |\zeta| < 1.$$

По теореме Кёбе об 1/4 g осуществляет накрытие круга радиуса 1/4 с центром в нуле. Таким образом, $\lambda_D(z)\,\delta_D(z) \geqslant 1/4$.

§ 2. Сигнатура поверхности и параболические формы

Пусть Ω — открытое множество в расширенной комплексной плоскости, а G — группа конформных преобразований, действующая разрывно на Ω. В частности, G может быть клейновой группой, а Ω — ее областью разрывности. Пусть

$$\pi\colon \Omega \to \Omega/G$$

— естественная проекция множества Ω на его пространство орбит. Нашей первой задачей будет показать, что на Ω/G можно так ввести комплексную структуру, чтобы π стало голоморфным отображением. Это, конечно, легко сделать в точке $z_0 \in \Omega$ с тривиальным G_{z_0} (стабилизатором точки z_0). Ясно, что в этом случае $z - z_0$ является локальным параметром в $\pi(z_0)$. Поэтому мы должны следить только за неподвижными точками элементов из $G - \{\mathrm{id}\}$. Оказывается, что в клейновом случае некоторые параболические неподвижные точки (лежащие вне Ω) также существенно влияют на комплексную структуру пространства Ω/G.

Пусть Δ — инвариантное объединение компонент множества Ω. Пусть $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots\}$ — максимальное множество неэквивалентных компонент множества Δ, т.е. из равенства

$$g(\Delta_i) = \Delta_j$$

для некоторого $g \in G$ и некоторых i, j следует, что $i = j$, и, если $\widetilde{\Delta}$ — компонента из Δ, то найдется такое целое число j и такой элемент $g \in G$, что

$$\widetilde{\Delta} = g(\Delta_j).$$

Для $j = 1, 2, \ldots$ определим

$$G_j = G_{\Delta_j} = \{g \in G;\ g(\Delta_j) = \Delta_j\}. \tag{2.1}$$

Ясно, что имеется естественное взаимно однозначное соответствие

$$\Delta/G \cong \bigcup_j (\Delta_j/G_j). \tag{2.2}$$

Пусть D — произвольная область в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, а G — разрывная группа конформных преобразований области D. Предположим, что ∂D, граница множества D, состоит более чем из двух точек. Пусть

$$\rho\colon U \to D \tag{2.3}$$

есть голоморфное универсальное накрывающее отображение, где U — единичный круг $\{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\}$ или верхняя полуплоскость $\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Пусть K — накрывающая группа отображения ρ, т. е.

$$K = \{k \in \operatorname{Aut} U;\ \rho \circ k = \rho\},$$

где $\operatorname{Aut} U$ есть группа конформных преобразований множества U. Мы также определим

$$H = \{h \in \operatorname{Aut} U;\ \rho \circ h = g \circ \rho \text{ для некоторого } g \in G\},$$

т. е. H состоит из тех элементов группы $\operatorname{Aut} U$, для которых при некотором $g \in G$ имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\rho} & D \\ \downarrow{\scriptstyle h} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ U & \xrightarrow{\rho} & D \end{array}$$

Группы K и H, конечно, являются разрывными и, следовательно, фуксовыми. Заметим, что $K \subset H$ (и K действует без неподвижных точек). Поэтому достаточно показать, что H фуксова.

Выберем такую точку $w_0 \in D$, что $G_{w_0} = \{\mathrm{id}\}$. Подберем такую точку $z_0 \in U$, что $\rho(z_0) = w_0$. Выберем теперь такую окрестность U_0 точки z_0, что

$$\rho \text{ взаимно однозначно на } U_0, \tag{2.4}$$

$$g(\rho(U_0)) \cap \rho(U_0) \text{ пусто для всех } g \in G - \{\mathrm{id}\}. \tag{2.5}$$

Покажем, что $h(U_0) \cap U_0$ пусто для всех $h \in H - \{\mathrm{id}\}$. Предположим, что это не так. Тогда найдется такая точка $z_1 \in U_0$ и такой элемент $h \in H - \{\mathrm{id}\}$, что

$$h(z_1) \in U_0.$$

Выберем такой элемент $g \in G$, что $\rho \circ h = g \circ \rho$. Замечаем, что

$$\rho(z_1) \in \rho(U_0)$$

и

$$\rho \circ h(z_1) = g \circ \rho(z_1) \in \rho(U_0).$$

Поэтому ввиду (2.5) $g = \mathrm{id}$. Значит, $h \in K$ и, следовательно. $\rho(z_1) = \rho(h(z_1))$. Это противоречие показывает, что H разрывна.

Заметим, что мы построили точную последовательность групп и гомоморфизмов

$$\{1\} \to K \xrightarrow{i} H \xrightarrow{\rho^*} G \to \{1\}, \tag{2.6}$$

где i — отображение вложения, а $\rho^*(h)$ определен для $h \in H$ как единственный элемент в G, для которого

$$\rho \circ h = \rho^*(h) \circ \rho.$$

Ясно, что ρ^* корректно определено (так как голоморфное отображение определяется своими значениями на малом круге). Также очевидно, что образ i равен ядру ρ^*. Для того чтобы показать, что ρ^* сюръективно, положим $g \in G$. Тогда $\rho^{-1} \circ g \circ \rho$ локально корректно определено, и поэтому по теореме монодромии оно продолжается до элемента группы H.

Вышеописанная ситуация будет встречаться очень часто. Впредь мы будем называть H *фуксовой моделью* группы G. Ясно, что $D \cong U/K$, и из того, как мы ввели комплексную структуру на соответствующих пространствах, видно, что $D/G \cong U/H$.

Замечание. Используя дискретность группы K, легко показать, что H дискретна (и, следовательно, разрывна). Действительно, если имеется последовательность $h_n \in H$ и $h_n \to \mathrm{id}$, то $\rho \circ h_n \to \rho$ и, следовательно, $g_n \circ \rho \to \rho$, где $g_n = \rho^*(h_n)$. Отсюда заключаем, что $g_n \to \mathrm{id}$. Так как G дискретна, то найдется такое $N \in \mathbf{Z}$, что $g_n = \mathrm{id}$ при $n \geqslant N$ и, следовательно, $h_n \in K$ при $n \geqslant N$. Так как K дискретна, то $h_n = \mathrm{id}$ при $n \geqslant N$.

Лемма 2.1. *Пусть G — группа конформных преобразований, разрывно действующая на открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ с более чем двумя граничными точками. Если $z \in \Omega$, то ее стабилизатор*

$$G_z = \{g \in G;\ g(z) = z\}$$

является конечной циклической группой.

Доказательство. Пусть D — компонента, содержащая $z \in \Omega$. Пусть ρ, K и H определены как в (2.3) и (2.6), U есть верхняя полуплоскость, а G — подгруппа элементов, относительно которых D инвариантна. Мы утверждаем, что для любой точки $\zeta \in U$, такой, что $\rho(\zeta) = z$, имеем

$$\rho^*\colon H_\zeta \xrightarrow{\cong} G_z \tag{2.7}$$

(т. е. H_ζ канонически изоморфно G_z). Выберем такую точку $\zeta \in U$, что $\rho(\zeta) = z$. Пусть $g \in G_z$. Выберем такое $h \in H$, что $\rho^*(h) = g$. Тогда

$$\rho \circ h(\zeta) = g \circ \rho(\zeta) = \rho(\zeta). \tag{2.8}$$

Так как K есть группа накрывающих преобразований полуплоскости U над D, то из (2.8) вытекает существование такого $k \in K$, что

$$k(\zeta) = h(\zeta).$$

Тогда $k^{-1}h \in H_\zeta$ и

$$\rho^*(k^{-1}h) = \rho^*(k^{-1})\,\rho^*(h) = \rho^*(h) = g.$$

Для того чтобы закончить проверку утверждения (2.7), достаточно показать, что если $\hat{h} \in H_\zeta$ и $\rho^*(\hat{h}) = g$, то $\hat{h} = k^{-1}h$. Ясно, что

$$\hat{h}^{-1}k^{-1}h \in (\text{ядро } \rho^*) = K.$$

Но K действует свободно на U, а $\hat{h}^{-1}k^{-1}h$ оставляет ζ неподвижной; поэтому $\hat{h}^{-1}k^{-1}h = 1$.

Заметим, что элементы из H_ζ оставляют неподвижными ζ и $\bar{\zeta}$. Так как H_ζ — конечная группа, то она должна быть циклической.

Следствие. *Если $z_0 \in \Omega$, $m = \operatorname{ord} G_{z_0}$, а g_0 — образующая группы G_{z_0}, то*

$$\zeta = (g_0(z) - g_0(z_0))^m \tag{2.9}$$

является локальной координатой в $\pi(z_0)$, где $\pi\colon D \to D/G$ — естественная проекция. Кроме того, в этих локальных координатах проекция π задается посредством (2.9).

Замечание. Мы сейчас показали, что D/G является объединением римановых поверхностей. Теперь мы распространим действие группы G на некоторые точки в ∂D.

Лемма 2.2. *Пусть Γ — клейнова группа с инвариантной компонентой Δ. Предположим, что $\Delta/\Gamma = S - \{p\}$, где S — риманова поверхность, а $p \in S$. Предположим, далее, что найдется такая проколотая окрестность $\tilde{U}$ точки p в S, что естественная проекция $\pi\colon \Delta \to \Delta/\Gamma$ неразветвлена над $\tilde{U}$. Тогда найдется параболический элемент $\gamma \in \Gamma$ с неподвижной точкой $\zeta \in \Lambda$, где Λ — предельное множество группы Γ, и преобразование Мёбиуса A со следующими свойствами:*

(i) *$A(\infty) = \zeta$ и $A^{-1}\circ\gamma\circ A$ является переносом $z \mapsto z + 1$,*

(ii) *$A^{-1}(\Delta)$ содержит полуплоскость*

$$U_c = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > c\},$$

(iii) *две точки z_1 и z_2 множества $A(U_c)$ эквивалентны относительно Γ тогда и только тогда, когда $z_2 = \gamma^n(z_1)$ для некоторого n, и*

(iv) *образ множества $A(U_c)$ относительно π является проколотой окрестностью точки p, гомеоморфной проколотому кругу.*

(Мы будем называть

(2.10) $$A\ \{z \in \mathbf{C};\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > c\}$$

параболической областью, принадлежащей p, *а* $A\ (U_c)$ — *полуплоскостью, принадлежащей* p. Неподвижная точка $\zeta \in \Lambda$ будет называться *параболической вершиной на* Δ.)

Доказательство. Мы можем предположить, что $\tilde{U}$ есть проколотый круг

$$\{\zeta \in \mathbf{C};\ 0 < |\zeta| < 1\}.$$

Пусть U — компонента множества $\pi^{-1}(\tilde{U})$. Пусть

$$\Gamma_0 = \{\gamma \in \Gamma;\ \gamma(U) = U\}$$

есть группа накрывающих преобразований пространства U над $\tilde{U}$. Ясно, что Γ_0 не является конечной группой, так как иначе Λ содержало бы изолированные точки. Так как Γ_0 является гомоморфным образом фундаментальной группы области $\tilde{U}$, то она порождается одним элементом A (бесконечного порядка), который не является эллиптическим. Аналогично доказывается, что U должно быть односвязно.

Если преобразование A локсодромическое (в частности, гиперболическое), то мы можем считать, что оно имеет вид $A(z) = kz$, $|k| \neq 1$ (для этого надо перевести неподвижные точки преобразования A в 0 и ∞ при помощи сопряжения группы Γ в группе преобразований Мёбиуса). Рассмотрим полуплоскость $H = \{s \in \mathbf{C};\ \operatorname{Re} s < 0\}$. По теореме монодромии

$$\pi^{-1}(e^s)$$

определяет конформное отображение $s \mapsto z$ полуплоскости H на U, где $\pi\colon U \to \tilde{U}$ — естественная проекция. (Отображение z взаимно однозначно, так как U односвязна.) Отображение z коммутирует с проекцией π. (То есть $\pi \circ z$ есть естественная проекция полуплоскости H на $\tilde{U}$, или $\pi \circ z(s) = e^s$.) Поэтому

(2.11) $$z(s + 2\pi i) = kz(s),\ s \in H.$$

Так как $0 \notin U$, то мы заключаем, что

$$\lambda_U(z_0)\,|z_0| \geqslant \lambda_U(z_0)\,\delta_U(z_0) \geqslant 1/4,\ z_0 \in U.$$

Чтобы оценить $\lambda_U(z_0)$, мы зададим отображение U на единичный круг Δ, переводящее z_0 в 0, по формуле

$$z \mapsto s \mapsto \frac{s - i \operatorname{Im} s_0}{-\operatorname{Re} s_0} = w \mapsto \frac{w+1}{w-1} = \rho,$$

где $s_0 = s(z_0)$. Теперь

$$\lambda_U(z_0) = |\rho'(z_0)| = |\rho'(-1)\, w'(s_0)\, s'(z_0)| =$$
$$= \left| -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{-\operatorname{Re} s_0} \cdot s'(z_0) \right| = \left| \frac{1}{2(\operatorname{Re} s_0)(z'(s_0))} \right|.$$

Поэтому

$$\left| \frac{z'(s_0)}{z(s_0)} \right| \leqslant \frac{2}{|\operatorname{Re} s_0|}.$$

Интегрируя от s_0 до $s_0 + 2\pi i$ по вертикальной прямой, получаем

$$\left| \int_{s_0}^{s_0+2\pi i} \frac{z'(s)}{z(s)}\, ds \right| \leqslant \frac{4\pi}{|\operatorname{Re} s_0|}.$$

Но левая часть равна

$$|\log z(s + 2\pi i) - \log z(s)| = |\log k(z(s)) - \log z(s)| =$$
$$= |\log k| \geqslant |\log |k||.$$

Поэтому

$$|\log |k|| \leqslant \frac{4\pi}{|\operatorname{Re} s_0|}.$$

Если $\operatorname{Re} s_0 \to -\infty$, мы видим, что $|k| = 1$. Это противоречие показывает, что преобразование A является параболическим, и мы можем без ограничения общности предположить, что

$$A(z) = z + 1,$$

поэтому (2.11) переписывается в виде

$$z(s + 2\pi i) = z(s) + 1, \quad s \in H.$$

Теперь также ясно, что

$$\tilde{\zeta}(z) = e^{2\pi i z}, \quad z \in U,$$

является локальным параметром на U/Γ_0. Следовательно, отображение $\zeta \mapsto \tilde{\zeta}$ конформно, и потому

$$e^{2\pi i z} = \frac{a}{\zeta} + \sum_{n \geqslant 0} a_n \zeta^n, \quad \zeta \in \tilde{U},\ z \in U,\ a \neq 0,$$

или

$$e^{2\pi i z} = \sum_{n \geqslant 0} b_n \zeta^n,\ \zeta \in \tilde{U},\ z \in U,\ b_1 \neq 0. \tag{2.12}$$

Заменяя Γ на сопряженную группу, мы можем предположить, что (2.12) является соотношением между ζ и $\tilde{\zeta}$ с $b_0 = 0$. Изменив координаты в плоскости, в которой лежит U, мы можем предположить,

что $b_1 = 1$. Поэтому

$$e^{2\pi i z} = \zeta + \sum_{n \geqslant 2} b_n \zeta^n. \tag{2.13}$$

Из (2.13) мы выводим, что U содержит полуплоскость U_c для достаточно больших c и что $\pi(z) \to \rho$ следует из $\operatorname{Im} z \to \infty$. Это завершает доказательство леммы.

Определение. Пусть S — риманова поверхность. Если на S найдется открытое множество U, конформно эквивалентное проколотому кругу, центр которого не принадлежит S, то мы будем говорить, что у S есть *прокол*.

Если у S есть прокол, то она может быть вложена в бо́льшую поверхность $\widetilde{S}$. Ясно, что найдется наименьшая поверхность $\widetilde{S} \supset S$, такая, что $\widetilde{S}$ не имеет проколов.

Определение. Пусть G — группа конформных преобразований, разрывно действующая на открытом множестве $\Omega \subset \mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Пусть $\Delta \subset \Omega$ — инвариантное объединение компонент. Вспоминаем определение максимальной совокупности неэквивалентных компонент $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots\}$ множества Δ и стабилизатора G_j компоненты Δ_j (ср. с (2.1)).

Мы будем говорить, что Δ/G имеет *конечный тип*, если

(i) Δ/G состоит из конечного числа (K) компонент,

(ii) отображение π: $\Delta \to \Delta/G$ разветвлено в конечном числе точек

и

(iii) для любого j ($j = 1, \ldots, K$) найдется такая компактная риманова поверхность $S_j = \overline{\Delta_j / \Gamma_j}$, что

$$S_j - (\Delta_j/\Gamma_j)$$

состоит из конечного числа точек.

Пусть $I = (g; \nu_1, \ldots, \nu_n)$, где g — целое число $\geqslant 0$, а $2 \leqslant \nu_1 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n \leqslant \infty$ (ν_j — целое число $\geqslant 2$ или $\nu_j = \infty$). Пусть k — наибольшее целое число $\leqslant n$, такое, что $\nu_k < \infty$ (если $n = 0$, положим $k = 0$). Будем говорить, что Δ_j/G_j имеет *сигнатуру* I, если

(i) S_j имеет род g,

(ii) область Δ_j содержит ровно k неэквивалентных эллиптических неподвижных точек, причем порядок любой из них есть одно из чисел $\nu_1, \ldots, \nu_k$ (требование о порядке бессодержательно, если $k = 0$),

и

(iii) $S_j - \Delta_j/\Gamma_j$ состоит ровно из $n - k$ точек.

Одним из основных результатов в теории клейновых групп является теорема конечности Альфорса, которая сейчас будет сформулирована как

Теорема 2.3. *Если Γ — конечно порожденная клейнова группа с областью разрывности Ω, то Ω/Γ имеет конечный тип.*

Эта теорема будет доказана в гл. VII.

Замечание. Рассмотрим $\pi\colon \Delta \to \Delta/G$. Если $z \in \Delta$ и $m = \operatorname{ord} G_z$, то m является числом ветвления отображения π в z. Мы будем также говорить, что m является *числом ветвления* точки $\pi(z)$. Аналогично, если $p \in S$ $(= (\bigcup S_j)$, но $p \notin \Delta/G$, то мы будем говорить, что *число ветвления* точки p равно ∞. Ясно, что это понятие корректно определено. (Оно не является корректно определенным для произвольных голоморфных отображений $f\colon M \to N$ римановых поверхностей.)

Хотя следующая теорема не понадобится в дальнейшем, мы приведем ее здесь, так как это очень красивый результат.

Лемма 2.4. *Пусть $A(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{C}$, а $ad - bc = 1$. Пусть $T(z) = z+1$. Тогда подгруппа, порожденная A и T, недискретна, если $0 < |c| < 1$.*

Доказательство. Пусть $A_0 = A$ и для $n \geqslant 0$, $n \in \mathbf{Z}$, положим

$$A_{n+1} = A_n \circ T \circ A_n^{-1}.$$

Покажем, что из $0 < |c| < 1$ вытекает, что $A_n \to T$ при $n \to \infty$. Ясно, что последовательность $\{A_n\}$ не стабилизируется. Напишем

$$A_n(z) = \frac{a_n z + b_n}{c_n z + d_n}, \quad a_n, b_n, c_n, d_n \in \mathbf{C}, \quad a_n d_n - b_n c_n = 1$$

и вычислим

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_n & -b_n \\ -c_n & a_n \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 - a_n c_n & a_n^2 \\ -c_n^2 & 1 + a_n c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \\ c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}.$$

Отсюда мы заключаем, в частности, что

$$c_n = -c^{2^n} \text{ и } \lim_{n\to\infty} c_n = 0. \tag{2.14}$$

Выберем γ так, что $0 < (1-|c|)^{-1} < \gamma$ и $|a| < \gamma$. Имеем $|a_0| = |a| < \gamma$. Предположим, что $|a_n| < \gamma$. Тогда

$$|a_{n+1}| = |1 - a_n c_n| \leqslant 1 + |a_n||c_n| <$$

$$< 1 + \gamma |c|^{2^n} \leqslant 1 + \gamma |c| < \gamma.$$

Поэтому по индукции

$$|a_n| < \gamma \text{ при всех } n.$$

Из

$$a_{n+1} = 1 - a_n c_n$$

и (2.14) мы делаем вывод, что

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} a_{n-1}^2 = 1$$

и

$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} (1 + a_{n-1}c_{n-1}) = 1.$$

Теорема 2.5. *Пусть* Γ — *фуксова группа, действующая на верхней полуплоскости* $U = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$, *и пусть* $T \in \Gamma$, *причем* $T(z) = z + 1$. *Если* $A \in \Gamma$ *и* $A^m \neq T^n$ *для любых* $m, n \in \mathbf{Z}$, *то множество*

$$A(\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 1\}) \cap \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 1\}$$

пусто.

Доказательство. Пусть $A(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, где $a, b, c, d \in \mathbf{R}$, $ad - bc = 1$. Мы можем, конечно, предположить, что $c \geqslant 0$. Если $c = 0$, то A параболично с ∞ в качестве единственной неподвижной точки. (Это довольно легко, но не совсем тривиально проверить.) В этом случае для некоторых $m, n \in \mathbf{Z}$ должно выполняться равенство $A^m = T^n$. Поэтому $c > 0$ и по предыдущей лемме $c \geqslant 1$. Далее, $C = A\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z = 1\}$ является окружностью, касательной к $\mathbf{R}$ в $A(\infty) \neq \infty$. Мы вычислим диаметр окружности C, максимизируя

$$\left|\frac{a(x+i)+b}{c(x+i)+d} - \frac{a}{c}\right|, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Легко вычислить, что написанное выше выражение равно

$$\left|\frac{-1}{c(cx+d+ci)}\right| = \frac{1}{c}\frac{1}{\sqrt{(cx+d)^2+c^2}}.$$

Поэтому максимум достигается в $x = -d/c$ и диаметр окружности C есть $1/c^2 \leqslant 1$. Следовательно, $A(\{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 1\})$ содержится в касательном к $\mathbf{R}$ круге диаметра $\leqslant 1$.

Замечания. (1)' Только что доказанная теорема показывает, что действие группы Γ на $U_1 = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 1\}$ совпадает

с действием на U_1 циклической подгруппы, порожденной T, как только T порождает подгруппу стабильности точки ∞.

(2) Доказанная выше теорема впервые появилась в работе Шимицу. Она также имеется в статье Летбехера.

Следствие 1. *Пусть* Γ — *действующая на* U *фуксова группа. Если* Γ *содержит параболический элемент, то* U/Γ *имеет прокол. Кроме того, проколы на* U/Γ *находятся во взаимно однозначном соответствии с классами сопряженности параболических элементов группы* Γ.

Следствие 2. *Пусть* Γ — *фуксова группа. Если* Γ *является накрывающей группой компактной римановой поверхности рода* $g \geqslant 2$, *то она содержит только гиперболические элементы.*

Доказательство. Так как круг инвариантен относительно любого элемента группы Γ, то Γ не может содержать негиперболических локсодромических элементов. Ни один из ее элементов не является эллиптическим, так как Γ не содержит элементов конечного порядка. Ввиду следствия 1 группа Γ не содержит параболических элементов.

§ 3. Площадь Пуанкаре и построение фундаментальных областей

В этом параграфе мы довольно точно опишем структуру фундаментальной области клейновой группы. Мы будем опускать подробные доказательства, их можно найти в книге Форда, монографии Ленера и работе Кина.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ с более чем двумя граничными точками, а G — разрывная группа конформных преобразований множества Ω.

Метрику Пуанкаре можно использовать, чтобы на Ω ввести новую метрику, согласованную со стандартной топологией. Напомним, что λ_Ω обозначает метрику Пуанкаре на Ω.

Если l есть (спрямляемая) кривая (непрерывный образ интервала) в Ω, то мы определим длину кривой l по формуле

$$|l| = \int_l 2\lambda_\Omega(z)\,|dz|. \tag{3.1}$$

Замечание. При определении расстояний и площади Пуанкаре принято употреблять 2λ, а не λ, так как желательно пользоваться метрикой постоянной отрицательной кривизны -1. Простое вычисление дает выражение для кривизны K:

$$K = \frac{-\Delta \log(2\lambda)}{(2\lambda)^2}.$$

В случае верхней полуплоскости U имеем $\lambda_U(z) = (2 \operatorname{Im} z)^{-1}$, и поэтому

$$K = -\frac{\Delta \log\left(\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{y}\right)^2} = -1,$$

где Δ есть лапласиан, а $y = \operatorname{Im} z$.

Если $(z, \zeta) \subset \Omega$, положим

(3.2) $d(z, \zeta) = \inf \{ |l| ;\ l$ — спрямляемая кривая в Ω, соединяющая z с $\zeta\}$.

Положим $d(z, \zeta) = \infty$, если z и ζ лежат в разных компонентах множества Ω.

Верхняя полуплоскость с расстоянием, определенным по формуле (3.2), является моделью Пуанкаре неевклидовой геометрии. Прямыми линиями в этой геометрии являются дуги окружностей, ортогональных к вещественной оси (сюда входят прямые линии, параллельные мнимой оси). Через любые две точки проходит единственная прямая, и поэтому

$$(3.2)' \qquad d(z, \zeta) = \int_l \frac{|dt|}{\operatorname{Im} t},$$

где l — прямая линия, проходящая через точки z и ζ.

Используя (3.2)′, легко вычислить расстояние между ia и ib, $a > 0$, $b > 0$:

$$(3.3) \qquad d(ia, ib) = |\log(b/a)|.$$

Так как конформные преобразования полуплоскости U являются изометриями в метрике d, то для z и ζ из U и конформного преобразования A полуплоскости U

$$(3.4) \qquad d(Az, A\zeta) = d(z, \zeta).$$

Для того чтобы вычислить расстояние между двумя произвольными точками z и ζ в U, можно проделать следующее.

Посредством конформного преобразования полуплоскости U добъемся того, чтобы евклидова прямая, проходящая через z и ζ, была параллельна мнимой оси (т. е. была неевклидовой прямой). Тогда, используя (3.3) и (3.4), получаем $d(z, \zeta)$. Эта формула в дальнейшем не понадобится. Поэтому вычисления мы опускаем.

Так как накрывающие отображения сохраняют локально неевклидову метрику, то геодезические в Ω всегда являются аналитическими кривыми. На самом деле, если D — компонента области Ω, а

$$\pi\colon U \to D$$

— универсальное накрывающее отображение, то геодезические в D являются образами при отображении π прямых линий (в неевклидовой геометрии) на U.

Определение. Пусть Δ есть G-инвариантное измеримое подмножество в Ω. Определим

$$(3.5)\qquad (\text{площадь } \Delta/G) = 2 \iint\limits_{\Delta/G} \lambda_\Omega(z)^2 \,|dz \wedge d\bar{z}|.$$

Мы сейчас не будем строить фундаментальную область для произвольной клейновой группы Г. Сначала мы рассмотрим фуксовы группы, действующие на U (включая группы второго рода).

Случай фуксовых групп. Пусть Г — фуксова группа, действующая на верхней полуплоскости U.

Для того чтобы получить фундаментальную область ω группы Г в U, выберем точку $z_0 \in U$, не являющуюся неподвижной ни для какого элемента из Г — $\{\mathrm{id}\}$. Пусть

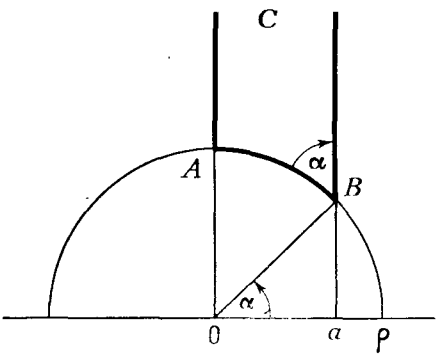
$$(3.6)\quad \omega = \{z \in U;\ d(z, z_0) < d(z, Az_0) \text{ для всех } A \in \Gamma,\ A \neq \mathrm{id}\}.$$

Заметим, что ω является односвязной (выпуклой) фундаментальной областью для Г, а также что ω ограничена дугами окружностей. Поэтому граница области ω представляет собой ломаную (возможно, несвязную и, возможно, состоящую из бесконечного числа сторон), образованную прямыми линиями на U (относительно неевклидовой метрики на U).

Лемма 3.1 (теорема Гаусса — Бонне). *Площадь неевклидова треугольника в U с углами α, β, γ равна*

$$\pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

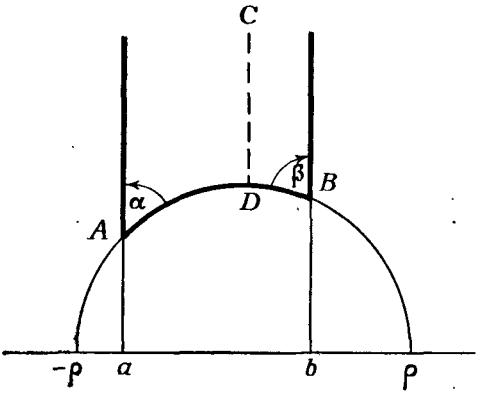
Доказательство (по Ленеру). Рассмотрим случаи:
Случай I:



Треугольник имеет углы 0, $\pi/2$, α. Его площадь равна

$$\int_0^a dx \int_{\sqrt{p^2-x^2}}^{\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{p^2-x^2}} = \arcsin\frac{a}{\rho} =$$
$$= \frac{\pi}{2} - \alpha = \pi - \left(0 + \frac{\pi}{2} + \alpha\right).$$

Случай II:



Треугольник имеет углы 0, α, β. Площадь этого треугольника является суммой площадей двух треугольников и равна

$$\pi - \left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \pi - \left(\frac{\pi}{2} + \beta\right) = \pi - (\alpha + \beta).$$

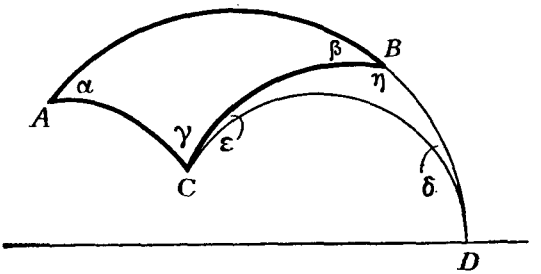
Случай, когда A и B лежат по одну сторону от D, разбирается аналогично.

Случай III. Если у треугольника есть бесконечная параболическая вершина, то он имеет вид, рассмотренный в случае II. Если у треугольника есть параболическая вершина на вещественной оси, то он может быть посредством конформного преобразования полуплоскости U переведен в треугольник с параболической вершиной в ∞. Эти конформные отображения являются изометриями.

Случай IV. Замыкание треугольника содержится в U.

Продолжим AB до пересечения с вещественной осью в точке D. Соединим C и D неевклидовой прямой. Площадь рассматриваемого треугольника есть разность площадей двух треугольников и поэтому равна

$$\{\pi - (\alpha + \gamma + \varepsilon)\} - \{\pi - (\varepsilon + \eta)\} = \eta - (\alpha + \gamma) =$$
$$= \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$



Теорема 3.2. *Пусть* Γ — *фуксова группа, действующая на верхней полуплоскости* U, *а* ω — *фундаментальная область группы* Γ, *определенная посредством* (3.6). *Тогда следующие условия эквивалентны*:

(a) (площадь ω) $< \infty$,

(b) (площадь $\tilde{\omega}$) $< \infty$, *где* $\tilde{\omega}$ — *произвольная измеримая фундаметальная область группы* Γ *в* U,

(c) ω *имеет конечное число сторон и не имеет свободных сторон*,

(d) Γ — *конечно порожденная группа первого рода*,

(e) U/Γ *имеет конечный тип*.

Доказательство. Прежде, чем начинать доказательство, отметим следующие факты. Пусть a — любая вершина области ω, лежащая в U, и пусть $\{\ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n, \ldots\}$ — все вершины области ω, эквивалентные a; тогда, если δ_k есть угол при вершине a_{k+1}, то

$$\sum_k \delta_k = 2\pi/l, \tag{3.7}$$

где l есть порядок подгруппы стабильности точки a.

Если a — лежащая на $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$ вершина области ω, то угол области ω в точке a равен либо 0, либо $\pi/2$. В последнем случае у ω есть свободная сторона, проходящая через a. Под *свободной стороной* мы подразумеваем отрезок на $\mathbf{R}$, ограничивающий ω.

(*a*) ⇒ (*b*). (площадь ω) = (площадь $\tilde{\omega}$) = (площадь (U/Γ)).

(b) ⇒ (c). Положим $\tilde{\omega} = \omega$. Если ω имеет свободную сторону, то из этого следует, что (площадь ω) = ∞. Поэтому достаточно показать, что ω имеет конечное число сторон. Пусть

$$\ldots, \delta_m, \delta_{m+1}, \ldots, \delta_n, \ldots$$

— перечень величин углов в вершинах области ω. Мы покажем, что

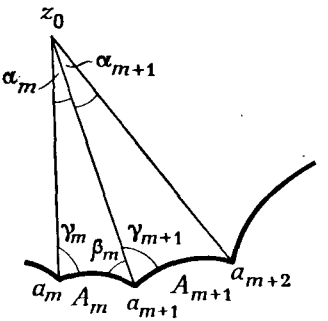
$$\sum_k (\pi - \delta_k) \leqslant (\text{площадь } \omega) + 2\pi. \tag{3.8}$$

Пусть $z_0 \in \operatorname{Int} \omega$, и соединим z_0 прямыми линиями с вершинами области ω. Пусть

$$\ldots, A_m, A_{m+1}, \ldots, A_n, \ldots$$

— связное множество дуг из $\partial\omega$ (граница области ω) с вершинами

$$\ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots, a_n, \ldots$$



Обозначим углы треугольника с дугой A_k, как и на рис. 4, через α_k, β_k, γ_k, а площадь этого треугольника — через I_k. Тогда

$$I_k = \pi - (\alpha_k + \beta_k + \gamma_k)$$

и

$$\delta_k = \beta_k + \gamma_{k+1}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k + \sum_{k=m}^{n} I_k = \pi - \beta_n - \gamma_m + \sum_{k=m}^{n-1} (\pi - \delta_k). \tag{3.9}$$

Левая часть равенства (3.9) ограничена, так как

$$\sum_{k=m}^{n} \alpha_k \leqslant 2\pi$$

и

$$\sum_{k=m}^{n} I_k \leqslant (\text{площадь } \omega) < \infty.$$

Поэтому правая часть также ограничена, и так как $\pi - \delta_k > 0$, то из этого следует, что

$$\sum_k (\pi - \delta_k)$$

сходится и пределы

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \beta_\infty, \quad \lim_{m\to-\infty} \gamma_m = \gamma_{-\infty}$$

существуют. Ясно, что $d(z_0, a_k) \to \infty$ при $k \to \infty$, так как вершины области ω не могут сходиться к точке из U. Поэтому $d(z_0, a_k) >$

$> d(z_0, a_{k-1})$ для бесконечно многих k. При этих значениях k имеем $\gamma_k > \beta_k$. Так как $\beta_k + \gamma_k < \pi$, то $\beta_k < \frac{\pi}{2}$. Поэтому $\beta_\infty \leqslant \leqslant \frac{\pi}{2}$. Аналогично $\gamma_{-\infty} \leqslant \frac{\pi}{2}$. Поэтому

$$\pi - \beta_\infty - \gamma_{-\infty} \geqslant 0. \tag{3.10}$$

Используя (3.10), мы выводим из (3.9), что

$$\sum_k \alpha_k + \sum_k I_k \geqslant \sum_k (\pi - \delta_k). \tag{3.11}$$

Складывая неравенства (3.11) для всех связных компонент границы $\partial\omega$, мы получаем (3.8). Предположим теперь, что в $\partial\omega \cap U$ найдется вершина a, эквивалентная бесконечному числу вершин в $d\omega$. Используя равенство (3.7), мы приходим к противоречию с тем, что левая часть равенства (2.8) ограничена. Если каждая вершина в $d\omega \cap U$ эквивалентна только конечному числу вершин границы $\partial\omega$, то тем не менее может быть бесконечно много неэквивалентных вершин. Так как $\sum_k (\pi - \delta_k)$ сходится, то

$$(2/3)\pi < \delta_k < \pi \tag{3.12}$$

для достаточно больших k.

Поэтому есть только конечное число вершин, являющихся неподвижными точками эллиптических элементов, так как для этих вершин $\delta_k \leqslant 2\pi/l \leqslant (2/3)\pi$, где $l \geqslant 3$ — порядок подгруппы стабильности эллиптической неподвижной точки. Поэтому остаются только вершины, не являющиеся эллиптическими неподвижными точками. Каждый класс эквивалентности таких вершин должен содержать по крайней мере три вершины, и, следовательно, его вклад в левую часть равенства (3.8) должен быть по крайней мере π. Это противоречие показывает, что в $\partial\omega \cap U$ должно быть конечное число вершин.

Так как (3.12) выполняется для всех k, кроме конечного числа, то мы видим, что ω имеет только конечное число вершин на $\mathbf{R} \cup \{\infty\}$.

Замечание. В приведенных рассуждениях мы пренебрегали углами в вершинах области ω, величина которых равна π (эти вершины — как раз неподвижные точки эллиптических элементов порядка 2). Очевидно, это не ограничивает общности. Впредь мы будем включать эти точки в вершины границы $\partial\omega$. Поэтому сторона границы $\partial\omega$, содержащая эллиптическую неподвижную точку порядка 2, будет считаться за две стороны. Эллиптический элемент должен, конечно, отождествлять эти стороны.

(c) $\Rightarrow$ (d). Если бы Γ была группой второго рода, то ω содержала бы по крайней мере одну свободную сторону. Поэтому Γ

является группой первого рода. Элементы, отождествляющие границы области ω, порождают Γ.

(d) $\Rightarrow$ (e). Этот результат будет следовать из теоремы конечности Альфорса. (Мы не будем ее доказывать до гл. VII.)

(e) $\Rightarrow$ (a). На U/Γ, конечно, корректно определена метрика Пуанкаре. Она имеет особенности в точках ветвления. Докажем ограниченность

$$2\iint\limits_{U/\Gamma} \lambda(z)^2 \,|\, dz \wedge d\bar{z} \,|.$$

Ясно, что достаточно рассмотреть подинтегральное выражение в точках ветвления (включая параболические проколы). Заметим, что $\lambda(z)^2 \,|\, dz \wedge d\bar{z} \,|$ является плотностью меры на римановой поверхности $S = U/\Gamma$. Пусть $p \in S$ — точка с числом ветвления $\nu < \infty$. В силу инвариантности мы можем считать, что S является фактором единичного круга U по фуксовой группе, а нуль лежит над p. Поэтому 168 5

$$\lambda_\Delta(z) = \frac{1}{1-|z|^2}, \quad z \in \Delta,$$

и

$$Z = z^\nu$$

является локальным параметром в точке p. Проекция на S метрики λ будет обозначаться через $\tilde{\lambda}$. Таким образом,

$$\tilde{\lambda}(Z) \,|\, dZ \,| = \lambda(z) \,|\, dz \,|$$

и, следовательно,

$$\tilde{\lambda}(Z) = \frac{\nu^{-1} \,|\, Z \,|^{1/\nu - 1}}{1 - |\, Z \,|^{2/\nu}}.$$

Так как $1/\nu - 1 > -1$, то $\tilde{\lambda}(Z)^2 \,|\, dZ \wedge d\bar{Z} \,|$ интегрируема в достаточно малой окрестности точки $Z = 0$.

Остается проверить интегрируемость метрики в окрестности прокола. Здесь достаточно взять $S = U/\Gamma$ и предположить, что прокол соответствует параболическому элементу $A(z) = z + 1$. Локальным параметром в проколе является

$$Z = e^{2\pi i z},$$

и мы получаем, что

$$\tilde{\lambda}(Z) = (2 \,|\, Z \,|\, \log \,|\, 1/Z \,|)^{-1}. \tag{3.13}$$

Таким образом, мы доказали интегрируемость метрики Пуанкаре.

Случай общих клейновых групп

Следствие 1. *Пусть* Γ — (*неэлементарная*) *клейнова группа, а* Δ — *инвариантное объединение компонент ее области разрыв-*

ности. Пусть $\{\Delta_1, \Delta_2, \ldots\}$ — *максимальное множество неэквивалентных компонент из* Δ, *а* Γ_j — *подгруппа стабильности компоненты* Δ_j. *Тогда мы можем взять в качестве фундаментальной области группы* Γ *в* Δ *область*

$$\omega = \bigcup_j \omega_j, \tag{3.14}$$

где ω_j — *фундаментальная область для* Γ_j *в* Δ_j. *Кроме того, мы можем в качестве* ω_j *выбрать гладкий жорданов многоугольник со сторонами, попарно отождествленными при помощи элементов группы* Γ_j. *Если* Δ_j/Γ_j — *пространство конечного типа, то мы можем предположить, что* ω_j *ограничена конечным числом дуг и что она состоит из относительно компактного подмножества компоненты* Δ_j *и конечного числа параболических областей, соответствующих проколам на* Δ_j/Γ_j.

Доказательство. Утверждение (3.14) очевидно. Предположим теперь, что группа Γ_j фуксова. Пусть

$$\rho\colon \Delta_j \to \Delta_j/\Gamma_j = S_j$$

есть естественная проекция. Выберем, как в лемме 2.2, окрестности $D_1, \ldots, D_n$ проколов на S_j, представляемых параболическими элементами $A_1, \ldots, A_n$, т. е.

$$D_k \cong U_k/(A_k),\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

где U_k — полуплоскость в Δ_j, а (A_k) — циклическая подгруппа, порожденная элементом $A_k \in \Gamma_j$. Тогда

$$\rho^{-1}(S_j - (D_1 \cup \ldots \cup D_n)) \cap \omega$$

является относительно компактным подножеством фундаментальной области, определенной посредством (3.6), и

$$\rho^{-1}(D_k) \cap \omega = U_k \cap \omega$$

является параболической областью, соответствующей проколу, определенному элементом A_k. Это заканчивает доказательство в фуксовом случае.

В общем случае пусть

$$\pi\colon U \to \Delta_j$$

— накрывающее отображение, и пусть G — фуксова модель группы Γ_j, т. е.

$G = \{h;\ h$ — конформное преобразование полуплоскости U и $\pi \circ h = \gamma \circ \pi$ при некотором $\gamma \in \Gamma_j\}$.

Мы уже отмечали, что U/G конформно эквивалентна Δ_j/Γ_j. Кроме того, когда U/G — поверхность конечного типа, обе поверхности имеют одинаковую сигнатуру. Если ω_0 является

фундаментальной областью для G в U, то $\pi(\omega_0)$ — фундаментальная область для Γ_j в Δ_j. Так как π локально взаимно однозначно, то аналитические дуги переходят в аналитические дуги. Отображение π также сохраняет параболические области. Таким образом, доказательство следствия закончено.

Следствие 2. В *обозначениях следствия* 1 *имеем*

$$(3.15)\qquad (\text{площадь } (\Delta/\Gamma)) = \sum_j (\text{площадь } (\Delta_j/\Gamma_j)),$$

и если поверхность Δ_j/Γ_j *конечного типа и рода* g_j, *то*

$$(3.16)\quad (\text{площадь } (\Delta_j/\Gamma_j)) = 2\pi\left\{2g_j - 2 + \sum_{p \in \overline{\Delta_j/\Gamma_j}} (1 - 1/\nu(p))\right\},$$

где $\nu(p)$ — *число ветвления в точке* $p \in \overline{\Delta_j/\Gamma_j}$. *Кроме того, для всех поверхностей* Δ_j/Γ_j

$$(3.17)\qquad (\text{площадь } \Delta_j/\Gamma_j)) \geqslant \pi/21.$$

Доказательство. Ясно, что (3.15) верно. Чтобы проверить (3.16), достаточно предположить, что $\Delta_j = U$, где U — верхняя полуплоскость, и что группа Γ_j фуксова. Пусть ω — фундаментальная область для Γ_j в U, определенная как в (3.6). Тогда ω имеет конечное (четное) число сторон. Выберем точку $z_0 \in \omega$ и соединим ее с вершинами области ω неевклидовыми прямыми (ω неевклидово выпукла). Предположим, что ω имеет $2n$ сторон. С каждым классом эквивалентности вершин области ω свяжем число l, равное порядку подгруппы стабильности любой вершины из класса эквивалентности. Ввиду формулы Гаусса — Бонне

$$(\text{площадь } \omega) = 2n\pi - 2\pi - 2\pi \sum 1/l = 2\pi\,(n - 1 - \sum 1/l).$$

Предположим, что ω имеет c классов эквивалентности вершин. Таким образом, мы получаем на поверхности $\overline{\Delta_j/\Gamma_j}$ «триангуляцию» с

1 двумерной клеткой,
n одномерными клетками,
c нульмерными клетками.

(Чтобы получить триангуляцию, мы должны так разбить ω, чтобы никакие две стороны одного треугольника не были эквивалентны относительно группы. Ясно, что для целей вычисления это разбиение не является необходимым.) Поэтому, вычислив двумя способами характеристику Эйлера — Пуанкаре поверхности $\overline{\Delta_j/\Gamma_j}$, получаем, что

$$c - n + 1 = 2 - 2g_j,$$

Поэтому

$$(\text{площадь } (\Delta_j/\Gamma_j)) = 2\pi\,(2g_j - 2 + c - \sum_{i=1}^{c} 1/l_i) =$$

$$= 2\pi\,\{2g_j - 2 + \sum_{i=1}^{c} (1 - 1/l_i)\}.$$

Мы уже видели, что $l = \nu(p)$ равно числу ветвления в точке $p \in \overline{\Delta_j/\Gamma_j}$, соответствующей вершине области ω, определенной при помощи p.

Для того чтобы проверить (3.17), достаточно показать, что для любой сигнатуры $(g;\ \nu_1, \ldots, \nu_n)$

$$\chi = 2g - 2 + \sum_{i=1}^{n} (1 - 1/\nu_i) \geqslant 1/42. \tag{3.18}$$

Конечно, $\chi > 0$ во всех случаях. Заметим, что если $g \geqslant 2$, то $\chi \geqslant 2$. Отметим также, что

$$1/2 \leqslant 1 - 1/\nu_i \leqslant 1.$$

Если $g = 1$, то $n \geqslant 1$ (иначе $\chi = 0$), поэтому $\chi \geqslant 1/2$. Остается рассмотреть случай $g = 0$. Тогда $n \geqslant 3$. Если $n \geqslant 5$, то $\chi \geqslant 1/2$. Если $n = 4$, то по крайней мере одно $\nu_i \geqslant 3$. Поэтому $\chi \geqslant 1/6$. Остается сигнатура $(0;\ \nu_1, \nu_2, \nu_3)$. Напомним, что $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \nu_3$. Итак,

$$\chi = 1 - 1/\nu_1 - 1/\nu_2 - 1/\nu_3$$

и

$$1/\nu_1 + 1/\nu_2 + 1/\nu_3 < 1.$$

Если $\nu_1 = 3$, то ν_2 или ν_3 должны быть $\geqslant 4$. В этом случае $\chi \geqslant 1/12$. Если $\nu_1 = 2$, то $\nu_2 \geqslant 3$. Заполним теперь небольшую таблицу остающихся возможностей:

Сигнатура	*Минимум значения* χ
$(0;\ 2,\ \nu_2,\ \nu_3$ с $\nu_2 \geqslant 5)$	1/10
$(0;\ 2,\ 4,\ \nu_3 \geqslant 5)$	1/20
$(0;\ 2,\ 3,\ \nu_3 \geqslant 7)$	1/42

Конечно, сигнатура $(0;\ 2,\ 3,\ 7)$ дает равенство в (3.18).

Замечания. (1) Если задана сигнатура с $\chi > 0$, то существует фуксова группа с этой сигнатурой. Эта теорема восходит к Пуанкаре. Мы не будем ее доказывать в настоящей книге. Современное доказательство см., например, в статье Кина [K7—1].

(2) Имеются группы с $\chi \leqslant 0$. Они являются элементарными группами (см. книгу Форда [Ф—4].) Если предельное множество состоит из 1 или 2 точек, то $\chi = 0$ и возможные сигнатуры таковы:

(1; — — —),
(0; 2, 2, 2, 2),
(0; 2, 3, 6),
(0; 2, 4, 4),
(0; 3, 3, 3).

Если предельное множество пусто, то $\chi < 0$ и возможные сигнатуры таковы:

$$(0;\ s,\ s), \qquad 2 \leqslant s < \infty,$$
$$(0;\ 2,\ 2,\ n), \qquad 2 \leqslant n < \infty,$$
$$(0;\ 2,\ 3,\ e), \qquad e = 3,\ 4,\ 5.$$

Элементарные (клейновы) группы Γ с выписанными выше сигнатурами имеют единственную инвариантную компоненту Ω, и, за исключением сигнатур (1; — — —) и (0; 2, 2, 2, 2), конформный тип поверхности Ω/Γ определяется сигнатурой, т. е. для каждой такой сигнатуры найдется с точностью до сопряжения только одна подгруппа.

В каждом из указанных выше случаев легко построить для группы фундаментальную область.

(3) Вернемся теперь к общему случаю, когда Ω открыто в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$, а $\partial\Omega$ состоит из трех или более точек. Если G — разрывная группа конформных преобразований множества Ω, то мы построили для нее фундаментальную область ω в Ω. Эта область по существу описывается при помощи следствия 1 теоремы 3.2. Интерпретация параболических вершин, данная в следствии 1, применима в общей ситуации.

Предостережение. Мы не доказали в этой главе теорему конечности Альфорса, и поэтому доказательство теоремы 3.2. неполно. В дальнейшем мы должны будем использовать тот факт, что из (е) вытекает (а), и утверждения следствия 1. Все это, конечно, уже доказано.

Как приложение следствия 2 установим следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть S — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 2$. Пусть* Aut S — *группа конформных преобразований поверхности S. Тогда* Aut S — *конечная группа и*

$$(\text{порядок } \operatorname{Aut} S) \leqslant 84\,(g-1).$$

Доказательство. Пусть G — фуксова группа, а $N(G)$ — нормализатор группы G в группе конформных преобразований полуплоскости U. (Предполагаем, что G действует на верхней полуплоскости U.) Если G не является циклической группой, то $N(G)$ также фуксова группа. Если G первого рода, то

$N(G)$ также первого рода. Второе утверждение очевидно. Чтобы проверить первое, заметим, что G должна содержать гиперболический элемент A. Без ограничения общности можно предположить, что $A(z) = kz$, $k > 1$. Кроме того, G должна содержать другой элемент B, неподвижные точки которого отличны от 0 и ∞. Предположим, что $N(G)$ недискретна. Тогда мы можем найти такую нестабилизирующуюся последовательность элементов $g_n \in N(G)$, $n = 1, 2, \ldots$, что

$$g_n \to \mathrm{id}.$$

Рассмотрим последовательности

$$A_n = g_n^{-1} \circ A \circ g_n$$

и

$$B_n = g_n^{-1} \circ B \circ g_n.$$

Имеем $A_n \in G$ и $B_n \in G$. Так как $A_n \to A$, $B_n \to B$, а G дискретна, то найдется такое число N, что из $n \geqslant N$ следует $A_n = A$ и $B_n = B$. Поэтому для достаточно больших n элемент g_n коммутирует с A и B. Это, очевидно, невозможно, так как два коммутирующих элемента не могут иметь различных неподвижных точек. Так как для групп конформных преобразований полуплоскости U дискретность эквивалентна разрывности, то мы показали, что $N(G)$ — фуксова группа.

Представим теперь S как U/G, где G — действующая без неподвижных точек фуксова группа. Тогда

$$(\text{площадь } (U/\Gamma)) = 2\pi(2g - 2).$$

Ясно, что любой элемент $f \in \mathrm{Aut}\, S$ так поднимается до $F \in N(G)$, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{F} & U \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi \\ S & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

коммутативна.

Чтобы показать, что $F \in N(G)$, достаточно проверить, что $F^{-1} \circ g \circ F$ проектируется в тождественное преобразование поверхности S для всех $g \in G$. Но

$$\pi \circ F^{-1} \circ g \circ F = f^{-1} \circ \pi \circ g \circ F = f^{-1} \circ \pi \circ F = f^{-1} \circ f \circ \pi = \pi.$$

У нас есть также голоморфное отображение $U/G \to U/N(G)$. Поэтому группа $N(G)$ конечно порождена и

$$(\text{порядок } \mathrm{Aut}\, S) = (\text{порядок } (N(G)/G)) = \\ = \frac{(\text{площадь } (U/G))}{(\text{площадь } (U/N(G)))}.$$

Так как (площадь $(U/N(G))) \geqslant \pi/21$, то теорема доказана.

Замечания

Верхняя полуплоскость с метрикой Пуанкаре есть модель Пуанкаре неевклидовой геометрии.

Лемма 2.2 принадлежит Альфорсу [А5—9], Лётбехер [Л3] также получил этот результат. Теорема 2.5 была доказана Шимицу [Ш5] и независимо Лётбехером.

Формула Гаусса — Бонне является классической. Классической является также конструкция фундаментальной области, описанная в § 3. Тот факт, что фуксова группа с фундаментальной областью конечной площади имеет фундаментальную область с конечным числом сторон, получен Зигелем [З3—2]. Теорема о том, что группа конформных преобразований римановой поверхности рода $g \geqslant 2$ имеет конечный порядок, была впервые доказана Шварцем. Верхняя оценка порядка этой группы (теорема 3.3) получена Гурвицом [Г12].

Тот факт, что конечно порожденная фуксова группа первого рода представляет поверхность конечного типа ((d) $\Rightarrow$ (e) из теоремы 3.2), конечно, может быть доказан без использования теоремы конечности Альфорса. Современное доказательство смотри, например, у Берса [Б4—12].

Глава III

БАНАХОВЫ ПРОСТРАНСТВА АВТОМОРФНЫХ ФОРМ

В этой главе мы установим основные теоремы существования для автоморфных форм. Для спаривания пространства ограниченных форм с пространством интегрируемых форм используется скалярное произведение Петерсона. Основными орудиями являются оператор проектирования измеримых форм на голоморфные и отображение при помощи рядов Пуанкаре форм для тривиальной группы в формы для произвольной группы.

Изучается связь между автоморфными формами и дифференциалами и доказываются теоремы существования мероморфных функций на римановых поверхностях.

§ 1. Оператор на функциях

Пусть D — открытое множество в расширенной комплексной плоскости. Пусть p и q — целые числа или такие полуцелые числа, что $p+q$ целое. Пусть

$$f\colon D \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

— голоморфное отображение. Для любой функции φ на $f(D)$ определим функцию на D по формуле

$$(1.1) \qquad (f^*_{p,q}\varphi)(z) = \varphi(f(z))\, f'(z)^p\, \overline{f'(z)^q}, \quad z \in D.$$

Очевидно, что если

$$g\colon f(D) \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$$

также голоморфно, то

$$(1.2) \qquad (g \circ f)^*_{p,q} = f^*_{p,q} \circ g^*_{p,q}.$$

Мы будем $f^*_{p,0}$ обозначать через f^*_p.

Пример. Предложение 1.1(а) из гл. II может быть переписано следующим образом:

$$f^*_{1/2,\,1/2}\lambda_{f(D)} = \lambda_D.$$

§ 2. Пространства автоморфных форм

Пусть D — открытое множество в расширенной комплексной плоскости, граница которого состоит более чем из двух точек. Когда это не может привести к путанице, мы будем метрику Пуанкаре λ_D обозначать просто через λ. (Аналогичное соглашение будет применяться ко всем другим функциям, зависящим от D.) Пусть G — разрывная группа преобразований множества D. Зафиксируем целое число

$$g \geqslant 2. \tag{2.1}$$

Измеримая автоморфная форма веса $(-2q)$ есть класс эквивалентности (по модулю функций, обращающихся в нуль почти всюду) измеримых функций μ, удовлетворяющих условию

$$A_q^* \mu = \mu \text{ для всех } A \in G. \tag{2.2}$$

Кроме того, мы потребуем, чтобы все определения были инвариантны относительно отображений f_q^* для всех конформных отображений f. Это условие бессодержательно, если $\infty \notin D$. Таким образом, какое бы условие мы не наложили на автоморфную форму μ на D, оно должно выполняться также для автоморфной формы $(f^{-1})_q^* \mu$ на $f(D)$.

В частности, все условия интегрируемости и голоморфности, наложенные на измеримые автоморфные формы, будут пониматься с учетом этого ограничения. Например, функция φ будет называться голоморфной в $\infty \in D$, если φ голоморфна и

$$\varphi(z) = O(|z|^{-2q}), \quad z \to \infty. \tag{2.3}$$

Для любого вещественного числа

$$p \geqslant 1 \tag{2.4}$$

измеримые автоморфные формы, у которых

$$\|\mu\|_{q,p,G}^p = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-qp} |\mu(z)|^p |dz \wedge d\bar{z}| < \infty, \tag{2.5}$$

образуют банахово пространство $\mathscr{L}_q^p(D, G)$ *p-интегрируемых* форм.

Формы, у которых

$$\|\mu\|_{q,\infty} = \sup_{z \in D} \{\lambda(z)^{-q} |\mu(z)|\} < \infty, \tag{2.6}$$

образуют банахово пространство $\mathscr{L}_q^\infty(D, G)$ *ограниченных* форм. Для $\mu \in \mathscr{L}_q^p(D, G)$ и $\nu \in \mathscr{L}_q^{p'}(D, G)$ с $1/p + 1/p' = 1$ $(1/\infty = 0)$ *скалярное произведение Петерсона* определяется по формуле

$$(\mu, \nu)_{q,G} = \iint\limits_{D/G} \lambda(z)^{2-2q} \mu(z) \overline{\nu(z)}\, dz \wedge d\bar{z}. \tag{2.7}$$

В (2.5) и (2.7) интегрирование производится по произвольной фундаментальной области ω группы G в D (граница которой имеет нулевую площадь). Ясно, что для $1 \leqslant p < \infty$ скалярное произведение Петерсона устанавливает изометричный антилинейный изоморфизм между $\mathcal{L}_q^{p'}(D, G)$ и пространством, двойственным к $\mathcal{L}_q^p(D, G)$, и что (2.7) при $p = 2$ задает обычное (с точностью до константы) (внутреннее) скалярное произведение в гильбертовом пространстве.

При любом p голоморфные функции в $\mathcal{L}_q^p(D, G)$ образуют замкнутое подпространство, которое будет обозначаться через

$$\mathcal{A}_q^p(D, G). \tag{2.8}$$

Если $G = \{\mathrm{id}\}$, то мы обозначим $(\mu, \nu)_{q, G}$, $\mathcal{L}_q^p(D, G), \ldots$ через $(\mu, \nu)_q$, $\mathcal{L}_q^p(D), \ldots$. Ясно, что для $1 \leqslant p < \infty$ имеем $\mathcal{L}_q^p(D, G) \cap \mathcal{L}_q^p(D) = \{0\}$, если G не является конечной группой, в то время как $\mathcal{L}_q^\infty(D, G)$ и $\mathcal{A}_q^\infty(D, G)$ суть замкнутые подпространства соответственно в $\mathcal{L}_q^\infty(D)$ и $\mathcal{A}_q^\infty(D)$.

Замечание. Нас интересуют только случаи $p = 1$ и $p = \infty$. Однако общая и частная теории идентичны. Поэтому мы будем рассматривать более общий случай.

Наша цель состоит в том, чтобы доказать следующее:

Теорема 2.1 (Берс). *Пусть $1 \leqslant p < \infty$ и $1/p + 1/p' = 1$. Тогда скалярное произведение Петерсона задает антилинейный изоморфизм между $\mathcal{A}_q^{p'}(D, G)$ и пространством, двойственным к $\mathcal{A}_q^p(D, G)$. Кроме того, если $\psi \in \mathcal{A}_q^{p'}(D, G)$ и линейный функционал l на $\mathcal{A}_q^p(D, G)$ соответствуют друг другу при этом изоморфизме, то*

$$c_q^{-1} \|\psi\|_{q, p', G} \leqslant \|l\| \leqslant \|\psi\|_{q, p', G}, \tag{2.9}$$

где $\|l\|$ — норма линейного функционала l, а

$$c_q = (2q - 1)/(q - 1). \tag{2.10}$$

§ 3. Теоремы существования автоморфных форм

Теоремы этого параграфа интересны сами по себе, а также представляют собой важные шаги в доказательстве теоремы 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть D — открытое множество в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ с не менее чем тремя граничными точками. Тогда на $D \times D$ существует функция K_D со следующими свойствами:*

(3.1) *при фиксированном $\zeta \in D$ $K_D(\cdot, \zeta)$ (как функция от $z \in D$) принадлежит $\mathcal{A}_q^p(D)$ при любом $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*

(3.2) $K_D(\zeta, z) = -\overline{K_D(z, \zeta)}$ *для всех z, ζ из D,*

(3.3) *для всех* z, ζ *из* D *и любого конформного отображения* $f\colon D \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$,

$$K_{f(D)}(f(z), f(\zeta))\, f'(z)^q\, \overline{f'(\zeta)}^q = K_D(z, \zeta),$$

(3.4) $$\iint\limits_D \lambda(\zeta)^{2-q}\, |K(z, \zeta)|\, |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| \leqslant c_q \lambda(z)^q, \quad z \in D,$$

и

(3.5) $\varphi(z) = \iint\limits_D \lambda(\zeta)^{2-2q} K(z, \zeta)\, \varphi(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$ *для каждого* $z \in D$ *и для всех* $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(D, G)$, *где* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *произвольно, а* G — *разрывная группа конформных преобразований множества* D.

Замечание. Функция K зависит от целого числа q. Когда это не может привести к недоразумениям, мы вместо K_D будем писать K.

Для измеримой функции μ на D определим

(3.6) $$(\beta_q \mu)(z) = \iint\limits_D \lambda(\zeta)^{2-2q} K(z, \zeta)\, \mu(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in D,$$

для всех z, для которых интеграл абсолютно сходится.

Теорема 3.2. *Оператор* β_q *является ограниченной линейной проекцией пространства* $\mathcal{L}_q^p(D, G)$ *на* $\mathcal{A}_q^p(D, G)$ *с нормой* $\leqslant c_q$.

Для функции φ, голоморфной на D, определим *ряд Пуанкаре* функции φ по формуле

(3.7) $$(\Theta_q \varphi)(z) = \sum_{A \in G} \varphi(Az)\, A'(z)^q, \quad z \in D,$$

для всех z, для которых правая часть сходится абсолютно и равномерно на компактных подмножествах множества D.

Теорема 3.3. *Для произвольного* D (*имеющего по крайней мере три граничные точки*) *отображение* Θ_q *является непрерывным линейным отображением пространства* $\mathcal{A}_q^1(D)$ *на* $\mathcal{A}_q^1(D, G)$ *с нормой* $\leqslant 1$. *Кроме того, для любого* $\psi \in \mathcal{A}_q^p(D, G)$ *найдется такое* $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(D)$, *что*

(3.8) $$\psi = \Theta_q \varphi$$

и

(3.9) $$\|\varphi\|_{q,p} \leqslant c_q \|\psi\|_{q,p,G}.$$

Оставшиеся параграфы этой главы посвящены доказательству сформулированных выше четырех теорем. Мы получим также

некоторые следствия из этих теорем. Перед тем, как двигаться дальше, заметим, что если f: $D \to \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ — конформное отображение, то (см. (1.1))

$$f_q^*\colon \mathcal{A}_q^p(f(D), fGf^{-1}) \to \mathcal{A}_q^p(D, G) \tag{3.10}$$

является изометрией на и

$$(f_q^*\varphi, f_q^*\psi)_{q,G} = (\varphi, \psi)_{q, fGf^{-1}} \tag{3.11}$$

для всех $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(f(D), fGf^{-1})$, $\psi \in \mathcal{A}_q^{p'}(f(D), fGf^{-1})$, где $1/p + 1/p' = 1$.

Мы оставляем проверку этих утверждений читателю. Впоследствии мы будем производить много подобных вычислений. Смотри, например, доказательство леммы 4.1.

§ 4. Односвязный случай

На протяжении этого параграфа D конформно эквивалентно единичному кругу Δ. *Кернфункция Бергмана* $k_D(z, \zeta)$, $z \in D$, $\zeta \in D$, может быть определена формулой

$$k_\Delta(z, \zeta) = [\pi(1 - z\bar{\zeta})^2]^{-1} \tag{4.1}$$

и требованием конформной инвариантности выражения

$$k_D(z, \zeta)\, dz \wedge d\bar{\zeta}. \tag{4.2}$$

Для $z \in D$ имеется очевидное соотношение

$$\lambda_D(z)^2 = \pi k_D(z, z). \tag{4.3}$$

Лемма 4.1.

$$\iint_D \lambda(\zeta)^{2-q} \,|\, k(z, \zeta)^q\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \,| = (2\pi^{1-q}/(q-1))\, \lambda(z)^q.$$

Доказательство. Лемму достаточно доказать в предположении, что $D = \Delta$ и $z = 0$. Действительно, если равенство выполняется в этом случае, то, обозначив для произвольного $z \in D$ через f: $\Delta \to D$ конформное отображение на, для которого $f(0) = z$, получаем

$$\begin{aligned}
&(2\pi^{1-q}/(q-1))\, \lambda_\Delta(0)^q = \\
&\quad = \iint_\Delta \lambda_\Delta(\zeta)^{2-q} \,|\, k_\Delta(0, \zeta)^q\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \,| = \\
&\quad = \iint_\Delta \lambda_{f(\Delta)}(f(\zeta))^{2-q} \,|\, k_{f(\Delta)}(f(0), f(\zeta))^q\, f'(0)^q\, \overline{f'(\zeta)}^2\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \,| = \\
&\quad = |f'(0)|^q \iint_D \lambda_D(\zeta)^{2-q} \,|\, k_D(z, \zeta)^q\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} \,|.
\end{aligned}$$

Так как $\lambda_\Delta(0)\,|f'(0)|^{-1}=\lambda_D(z)$, то мы редуцировали лемму к указанному частному случаю. Теперь, положив $\zeta=re^{i\theta}$, получаем

$$\pi^{-q}\int_0^{2\pi}\int_0^1(1-r^2)^{q-2}\,2r\,dr\,d\theta=2\pi^{1-q}/(q-1).$$

Так как $\lambda_\Delta(0)=1$, то лемма доказана.

Доказательство теоремы 3.1. Для z и ζ из D положим

$$K_D(z,\zeta)=\frac{(2q-1)\,\pi^{q-1}i}{2}\,k_D(z,\zeta)^q.$$

Ясно, что K удовлетворяет условиям (3.2) и (3.3). Из доказанной выше леммы и (2.10) следует, что в (3.4) имеет место равенство. Простые вычисления показывают, что (3.1) справедливо. Чтобы проверить (3.5), мы начнем

Доказательство теоремы 3.2. Пусть $\mu\in\mathcal{L}_q^p(D,G)$, где $1\leqslant p<\infty$. Тогда если ω — фундаментальная область для G в D, то

$$\|\beta_q\mu\|_{q,p,G}^p=$$

$$=\iint_\omega\lambda(z)^{2-qp}\left|\iint_D\lambda(\zeta)^{2-2q}K(z,\zeta)\,\mu(\zeta)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta\right|^p|dz\wedge d\bar z|\leqslant$$

$$\leqslant\iint_\omega\lambda(z)^{2-qp}\left(\iint_D\lambda(\zeta)^{2-2q}|K(z,\zeta)\,\mu(\zeta)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta|\right)^p|dz\wedge d\bar z|\leqslant$$

$$\leqslant\iint_\omega\lambda(z)^{2-qp}\iint_D\lambda(\zeta)^{2-(p+1)q}\,|K(z,\zeta)|\,|\mu(\zeta)|^p\,|d\zeta\wedge d\bar\zeta|\times$$

$$\times\iint_D\lambda(\zeta)^{2-q}|K(z,\zeta)\,d\zeta\wedge d\bar\zeta|^{p/p'}\,|dz\wedge d\bar z|.$$

Последнее неравенство получается из неравенства Коши — Шварца для меры $\lambda(\zeta)^{2-q}|d\zeta\wedge d\bar\zeta|$, причем $1/p+1/p'=1$. Используя (3.4) и свойства инвариантности функций K и μ, получаем

$$\|\beta_q\|_{q,p,G}^p\leqslant c_q^{p/p'}\iint_\omega\lambda(z)^{2-q}\iint_D\lambda(\zeta)^{2-(p+1)q}\times$$

$$\times|K(z,\zeta)|\,|\mu(\zeta)|^p\,|d\zeta\wedge d\bar\zeta|\,|dz\wedge d\bar z|=$$

$$=c_q^{p/p'}\iint_\omega\lambda(z)^{2-q}\sum_{A\in G}\iint_{A^{-1}(\omega)}\lambda(\zeta)^{2-(p+1)q}\,|K(z,\zeta)|\times$$

$$\times|\mu(\zeta)|^p\,|d\zeta\wedge d\bar\zeta|\,|dz\wedge d\bar z|=$$

$$= c_q^{p/p'} \sum_{A \in G} \iint_{\omega} \lambda(z)^{2-q} \iint_{A^{-1}(\omega)} \lambda(A\zeta)^{2-(p+1)q} \times$$

$$\times |K(Az, A\zeta) A'(z)^q| |\mu(A\zeta)|^p |A'(\zeta)|^2 |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| |dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= c_q^{p/p'} \sum_{A \in G} \iint_{\omega} \lambda(z)^{2-q} \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-(p+1)q} |K(Az, \zeta) A'(z)^q| \times$$

$$\times |\mu(\zeta)|^p |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| |dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= c_q^{p/p'} \sum_{A \in G} \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-(p+1)q} |\mu(\zeta)|^p \iint_{\omega} \lambda(z)^{2-q} \times$$

$$\times |K(Az, \zeta) A'(z)^q| |dz \wedge d\bar{z}| |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| =$$

$$= c_q^{p/p'} \sum_{A \in G} \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-(p+1)q} |\mu(\zeta)|^p \iint_{\omega} \lambda(Az)^{2-q} \times$$

$$\times |K(Az, \zeta)| |A'(z)|^2 |dz \wedge d\bar{z}| |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| =$$

$$= c_q^{p/p'} \sum_{A \in G} \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-(p+1)q} |\mu(\zeta)|^p \iint_{A(\omega)} \lambda(z)^{2-q} \times$$

$$\times |K(z, \zeta)| |dz \wedge d\bar{z}| d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| \leqslant$$

$$\leqslant c_q^p \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-pq} |\mu(\zeta)|^p |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = c_q^p \|\mu\|_{q,p,G}^p.$$

Мы показали, что $\|\beta_q \mu\|_{q,p,G} \leqslant c_q \|\mu\|_{q,p,G}$. Поэтому по теореме Фубини $\beta_q \mu$ сходится абсолютно для почти всех $z \in D$. Используя обычные свойства инвариантности, мы можем предположить, что $D = \Delta$. При фиксированном $\zeta \in \Delta$ $k_\Delta(\cdot, \zeta)$ ограничено и отграничено от нуля. Поэтому (3.6) абсолютно сходится при всех z. Так как

$$\iint_{\Delta} \lambda(\zeta)^{2-2q} \frac{\partial}{\partial z} K(z, \zeta) \mu(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in D,$$

также сходится абсолютно, то $\beta_q \mu$ голоморфна. Вычисления для $p = \infty$ проще и мы оставляем их читателю. Пусть $\mu \in \mathscr{L}_q^p(D, G)$. Тогда для $A \in G$, $z \in D$

$$(\beta_q \mu)(Az) A'(z)^q =$$

$$= A'(z)^q \iint_{D} \lambda(\zeta)^{2-2q} K(Az, \zeta) \mu(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} =$$

$$= A'(z)^q \iint_{D} \lambda(A\zeta)^{2-2q} K(Az, A\zeta) \mu(A\zeta) |A'(\zeta)|^2 d\zeta \wedge d\bar{\zeta} =$$

$$= \iint_{D} \lambda(\zeta)^{2-2q} K(z, \zeta) \mu(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = (\beta_q \mu)(z).$$

Поэтому $\beta_q\mu \in \mathcal{A}_q^p(D, G)$. Мы закончим доказательство обеих теорем 3.1 и 3.2, как только докажем (3.5).

Формула воспроизведения. Так как интеграл в (3.5) сходится абсолютно при всех z, то мы можем формально производить вычисления. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(D, G)$. Как и прежде, можно предположить, что $D = \Delta$ и $z = 0$. По теореме о среднем для голоморфных функций

$$\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(re^{i\theta})\, d\theta, \quad 0 < r < 1.$$

Поэтому

$$\varphi(0)\int_0^1 (1-r^2)^{2q-2} r\, dr = \frac{1}{2\pi}\iint_\Delta (1-r^2)^{2q-2}\varphi(re^{i\theta})\, r\, dr\, d\theta,$$

или

$$\varphi(0) = \frac{2q-1}{\pi^{1-q}}\iint_\Delta \lambda(\zeta)^{2-2q} k(0, \zeta)^q \varphi(\zeta)\frac{d\zeta\wedge d\bar\zeta}{-2i}.$$

Это завершает доказательство теорем 3.1 и 3.2 в односвязном случае.

«Самосопряженность» оператора β_q. Если $\mu \in \mathcal{L}_q^p(D, G)$ и $\nu \in \mathcal{L}_q^{p'}(D, G)$, где $1/p + 1/p' = 1$, то

$$(\beta_q\mu, \nu)_{q,G} = (\mu, \beta_q\nu)_{q,G}. \tag{4.4}$$

Это равенство получается непосредственными вычислениями

$$(\beta_q\mu, \nu)_{q,G} = \iint_\omega \lambda(z)^{2-2q}\iint_D \lambda(\zeta)^{2-2q} K(z, \zeta)\mu(\zeta)\, d\zeta\wedge d\bar\zeta\, \overline{\nu(z)}\, dz\wedge d\bar z =$$

$$= \sum_{A\in G}\iint_\omega \lambda(z)^{2-2q}\iint_{A^{-1}(\omega)} \lambda(A\zeta)^{2-2q} K(Az, A\zeta)\times$$

$$\times A'(z)^q \mu(A\zeta)\overline{\nu(z)}\,|A'(\zeta)|^2\, d\zeta\wedge d\bar\zeta\, dz\wedge d\bar z =$$

$$= \sum_{A\in G}\iint_\omega \lambda(z)^{2-2q}\overline{\nu(z)}\iint_\omega \lambda(\zeta)^{2-2q} K(Az, \zeta)\, A'(z)^q\times$$

$$\times \mu(\zeta)\, d\zeta\wedge d\bar\zeta\, dz\wedge d\bar z =$$

$$= \sum_{A\in G}\iint_\omega \lambda(\zeta)^{2-2q}\mu(\zeta)\times$$

$$\times\overline{\iint_\omega \lambda(z)^{2-2q} K(\zeta, Az)\overline{A'(z)}^q \nu(z)\, dz\wedge d\bar z}\, d\zeta\wedge d\bar\zeta =$$

$$= \sum_{A \in G} \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-2q} \mu(\zeta) \times$$

$$\times \overline{\iint_{\omega} \lambda(Az)^{2-2q} K(\zeta, Az) \nu(Az) |A'(z)|^2 dz \wedge d\bar{z}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} =$$

$$= \sum_{A \in G} \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-2q} \mu(\zeta) \times$$

$$\times \overline{\iint_{A(\omega)} \lambda(z)^{2-2q} K(\zeta, z) \nu(z) dz \wedge d\bar{z}} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} =$$

$$= \iint_{\omega} \lambda(\zeta)^{2-2q} \mu(\zeta) \overline{(\beta_q \nu)(\zeta)} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = (\mu, \beta_q \nu)_{q, G}.$$

Пусть $\mu \in \mathcal{L}_q^p(D, G)$ и $\psi \in \mathcal{A}_q^{p'}(D, G)$. Тогда из (4.4) и того, что β_q является на голоморфных формах тождественным отображением, выводим

$$(\beta_q \mu, \psi)_{q, G} = (\mu, \psi)_{q, G}. \tag{4.5}$$

Аналогично, для $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(D, G)$ и $\nu \in \mathcal{L}_q^{p'}(D, G)$

$$(\varphi, \nu)_{q, G} = (\varphi, \beta_q \nu)_{q, G}. \tag{4.6}$$

Доказательство теоремы 2.1. Ясно, что для $\psi \in \mathcal{A}_q^{p'}(D, G)$

$$l(\varphi) = (\varphi, \psi)_{q, G}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_q^p(D, G),$$

является непрерывным линейным функционалом на $\mathcal{A}_q^p(D, G)$ с нормой $\|l\| \leqslant \|\psi\|_{q, p', G}$. Обратно, пусть l — непрерывный линейный функционал на $\mathcal{A}_q^p(D, G)$. Ввиду теорем Хана—Банаха и Ф. Рисса найдется такая функция $\nu \in \mathcal{L}_q^{p'}(D, G)$, что

$$l(\varphi) = (\varphi, \nu)_{q, G}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_q^p(D, G).$$

Но тогда в силу (4.6) $l(\varphi) = (\varphi, \beta_q \nu)_{q, G}$ и $\beta_q \nu \in \mathcal{A}_q^{p'}(D, G)$. Далее, если $\psi \in \mathcal{A}_q^{p'}(D, G)$ такова, что $(\varphi, \psi)_{q, G} = 0$ для всех $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(D, G)$, то в силу (4.5) она задает на $\mathcal{L}_q^p(D, G)$ нулевой линейный функционал. Поэтому $\psi = 0$.

Перед тем, как продолжать доказательство первого неравенства в (2.9), отметим два следствия из теоремы 2.1. (Второе неравенство уже доказано.)

Следствие 1. *Пусть* $\mu \in \mathcal{L}_q^p(D, G)$. *Тогда* $\beta_q \mu = 0$ *в том и только в том случае, когда*

$$(\mu, \psi)_{q, G} = 0 \quad \text{для всех} \quad \psi \in \mathcal{A}_q^{p'}(D, G).$$

Следствие 2. *Пусть* $\nu \in \mathcal{L}_q^{p'}(D, G)$. *Тогда* $\nu \in \mathcal{A}_q^{p'}(D, G)$ *в том и только в том случае, когда*

$$(\mu, \nu)_{q, G} = (\beta_q \mu, \nu)_{q, G} \quad \textit{для всех} \quad \mu \in \mathcal{L}_q^p(D, G).$$

Вернемся к неравенству (2.9):

$$\| l \| = \sup_{\beta_q \mu \neq 0} \frac{|(\beta_q \mu, \psi)_{q, G}|}{\| \beta_q \mu \|_{q, p, G}} = \sup_{\beta_q \mu \neq 0} \frac{|(\mu, \psi)_{q, G}|}{\| \beta_q \mu \|_{q, p, G}} \geqslant$$

$$\geqslant \sup_{\beta_q \mu \neq 0} \frac{|(\mu, \psi)_{q, G}|}{c_q \| \mu \|_{q, p, G}} = \sup_{\mu \neq 0} \frac{|(\mu, \psi)_{q, G}|}{c_q \| \mu \|_{q, p, G}} = c_q^{-1} \| \psi \|_{q, p', G}.$$

Предпоследнее равенство вытекает из следствия 1.

Замечание. Если $0 < \dim \mathcal{A}_q^1(D, G) < \infty$, то для $l \neq 0$

$$\| l \| < \| \psi \|_{q, \infty}.$$

Иначе найдется такое $\varphi \in \mathcal{A}_q^1(D, G)$, что $\varphi \neq 0$ и

$$l(\varphi) = \iint_\omega \lambda(\zeta)^{2-2q} \varphi(\zeta) \overline{\psi(\zeta)}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \| \varphi \|_{q, 1, G} \| \psi \|_{q, \infty} =$$

$$= \iint_\omega \lambda(\zeta)^{2-q} |\varphi(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| \sup_{\zeta \in \omega} \{\lambda(\zeta)^{-q} |\psi(\zeta)|\}.$$

Поэтому $|\lambda^{-q} \varphi \bar{\psi}| = |\varphi| \, \| \psi \|_{q, \infty}$, откуда заключаем, что

$$\lambda^{-q} |\bar{\psi}| = \| \psi \|_{q, \infty}.$$

Значит, $|\psi|$ равно произведению λ^q на константу. Предположим теперь, что $D = \Delta$. Тогда мы видим, что ψ является голоморфной функцией, нигде не обращающейся в нуль, причем $|\psi|$ достигает минимума при $z = 0$. Отсюда следует, что ψ — константа. Это невозможно для нетривиальных групп G.

Доказательство теоремы 3.3. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_q^1(D)$. Делаем выкладки:

$$\| \Theta_q \varphi \|_{q, 1, G} = \iint_\omega \lambda(z)^{2-q} \Big| \sum_{A \in G} \varphi(Az) A'(z)^q \Big| \, |dz \wedge d\bar{z}| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{A \in G} \iint_\omega \lambda(Az)^{2-q} |\varphi(Az) A'(z)^2| \, |dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= \sum_{A \in G} \iint_{A(\omega)} \lambda(z)^{2-q} |\varphi(z)| \, |dz \wedge d\bar{z}| = \| \varphi \|_{q, 1}.$$

Произведенные вычисления показывают также, что ряд Пуанкаре функции φ сходится равномерно на компактных подмножествах множества D. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольное

относительно компактное подмножество ω_0 области ω. На ω_0 метрика Пуанкаре λ ограничена и отграничена от нуля. Поэтому

$$\sum_{A\in G}\iint_{\omega_0} |\varphi(Az)A'(z)^q|\,|dz\wedge d\bar{z}|<\infty. \tag{4.7}$$

Пусть K — компактное подмножество в D. Выберем конечное число таких элементов $A_1, \ldots, A_N$ группы G, что

$$K\subset\bigcup_{j=1}^{N} A_j(\omega_0).$$

Из (4.7) непосредственно вытекает, что ряд Пуанкаре сходится в $\mathscr{L}^1$ на $A(\omega_0)$ при любом $A\in G$. Поэтому ряд Пуанкаре сходится в $\mathscr{L}^1$ на K. Так как из $\mathscr{L}^1$-сходимости голоморфных функций вытекает равномерная сходимость на компактных подмножествах, то мы делаем вывод, что $\Theta_q\varphi$ голоморфна на D. Чтобы показать, что $\Theta_q\varphi\in\mathscr{A}_q^1(D, G)$, проделаем выкладки с $B\in G$, $z\in D$:

$$(\Theta_q\varphi)(Bz)B'(z)^q=\sum_{A\in G}\varphi(ABz)A'(Bz)^qB'(z)^q=$$
$$=\sum_{A\in G}\varphi(ABz)(AB)'(z)^q=(\Theta_q\varphi)(z).$$

Чтобы показать, что любая функция $\psi\in\mathscr{A}_q^p(D, G)$ является рядом Пуанкаре некоторой функции $\varphi\in\mathscr{A}_q^p(D)$, рассмотрим характеристическую функцию χ области ω. Тогда для любой функции $\mu\in\mathscr{L}_q^p(D, G)$

$$\beta_q\mu=\Theta_q(\beta_q(\chi\mu)). \tag{4.8}$$

Так как $\chi\mu\in\mathscr{L}_q^p(D)$, то сюръективность доказана. Кроме того, мы уже доказали (3.9), поскольку $\|\beta_q\|\leqslant c_q$.

Замечание. Для $p=1$ сюръективность отображения Θ_q может быть доказана совсем другим способом. Прежде всего, отображение вложения является сопряженным к отображению, задаваемому рядом Пуанкаре, т. е.

$$(\Theta_q\varphi, \psi)_{q,G}=(\varphi, \psi)_q \text{ для всех } \varphi\in\mathscr{A}_q^1(D) \text{ и всех } \psi\in\mathscr{A}_q^\infty(D, G). \tag{4.9}$$

Так как вложение

$$\mathscr{A}_q^\infty(D, G)\to\mathscr{A}_q^\infty(D)$$

непрерывно, а его область значений замкнута, то из (4.9) и теоремы 2.1 вытекает, что Θ_q сюръективно.

Следствие. *Существует ограниченная линейная проекция пространства $\mathscr{A}_q^\infty(D)$ на $\mathscr{A}_q^\infty(D, G)$.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(D)$, а μ равно φ на ω. Продолжим μ так, чтобы почти всюду выполнялось (2.2). Определим

$$P\varphi = \beta_q \mu.$$

Легко проверить, что P обладает требуемыми свойствами.

§ 5. Еще об односвязном случае

Новая формула воспроизведения в односвязном случае. На некоторое время мы снова предположим, что D конформно эквивалентна Δ, а G является разрывной группой конформных преобразований множества D. Для z и ζ из D положим

$$F_D(z, \zeta) = \sum_{A \in G} K_D(Az, \zeta) A'(z)^q, \tag{5.1}$$

и заметим, что $F_D(\cdot, \zeta)$ при фиксированном ζ является рядом Пуанкаре функции $K_D(\cdot, \zeta)$.

Предложение 5.1. *Функция F_D удовлетворяет следующим условиям:*

$$\overline{F_D(\zeta, z)} = -F_D(z, \zeta), \tag{5.2}$$

$$F_D(Az, \zeta) A'(z)^q = F_D(z, \zeta), \quad A \in G, \tag{5.3}$$

$$F_D(Az, A\zeta) A'(z)^q \overline{A'(z)^q} = F_D(z, \zeta), \quad A \in N(G), \tag{5.4}$$

где $N(G)$ — нормализатор группы G в группе всех конформных преобразований множества D,

(5.5) *$F_D(\cdot, \zeta)$ (как функция от первого переменного) принадлежит $\mathcal{A}_q^p(D, G)$ для всех $\zeta \in D$ и всех значений $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*

(5.6) *для всех $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(D, G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,*

$$\varphi(z) = \iint\limits_{D/G} \lambda(\zeta)^{2-2q} F(z, \zeta) \varphi(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in D.$$

Доказательство. Равенство (5.3) очевидно. Далее, пусть $A \in N(G)$. Тогда

$$\begin{aligned} F(Az, A\zeta) A'(z)^q \overline{A'(\zeta)^q} &= \\ &= \sum_{B \in G} K_D(BAz, A\zeta) B'(Az)^q A'(z)^q \overline{A'(\zeta)^q} = \\ &= \sum_{B \in G} K(BAz, A\zeta) (BA)'(z)^q \overline{A'(\zeta)^q} = \\ &= \sum_{B \in G} K(AA^{-1}BAz, A\zeta) (AA^{-1}BA)'(z)^q \overline{A'(\zeta)^q} = \\ &= \sum_{B \in G} K(A^{-1}BAz, \zeta) (A^{-1}BA)'(z)^q = F(z, \zeta). \end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали (5.4). Аналогично проверяется (5.2). Для того чтобы доказать (5.5), достаточно заметить, что $F \in \mathcal{A}_q^1(D, G)$, так как F является рядом Пуанкаре для функции из $\mathcal{A}_q^1(D)$, и что $F \in \mathcal{A}_q^\infty(D, G)$ в силу следующей леммы.

Лемма 5.2. *Пусть G — дискретная группа конформных преобразований единичного круга Δ. Тогда для любого $z \in \Delta$*

$$\sum_{A \in G} (1 - |Az|^2)^q \leqslant c(q, G),$$

где $c(q, G)$ — константа, зависящая только от группы G и целого числа q.

Доказательство. Пусть ω — фундаментальная область для G. Для $z \in \Delta$ положим

$$F(z) = \frac{2q-1}{2\pi} \iint_\omega (1 - |\zeta|^2)^{q-2} |1 - z\bar{\zeta}|^{-2q} |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|.$$

Немедленно получаем, что

$$F(z) = \iint_\omega \lambda(\zeta)^{2-q} |K(z, \zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|.$$

Из инвариантности λ и K вытекает, что

$$\sum_{A \in G} F(Az) |A'(z)|^q = \frac{2q-1}{2\pi} \iint_\Delta (1 - |\zeta|^2)^{q-2} |1 - z\bar{\zeta}|^{-2q} |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|.$$

Ясно также, что найдется такое $\delta > 0$, что $F(z) \geqslant \delta$ (можно выбрать, например, $\frac{2q-1}{2\pi} \iint_\omega (1 - |\zeta|^2)^{q-2} (1 + |\zeta|)^{-2q} |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|$ в качестве δ). Из (3.4) мы заключаем, что

$$\sum_{A \in G} F(Az) |A'(z)|^q \leqslant \frac{2q-1}{q-1} (1 - |z|^2)^{-q}.$$

Поэтому

$$(1 - |z|^2)^q \sum_{A \in G} |A'(z)|^q \leqslant \frac{2q-1}{(q-1)\delta}. \tag{5.7}$$

Так как $(1 - |z|^2) |A'(z)| = 1 - |Az|^2$, то лемма доказана.

Вернемся теперь к доказательству предложения. Если $f: \Delta \to D$ — произвольное конформное отображение, то для $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(f(\Delta))$

$$(\Theta_q \circ f_q^*) \varphi = (f_q^* \circ \Theta_q) \varphi. \tag{5.8}$$

(Здесь G — группа конформных преобразований круга Δ, а Θ_q — оператор, определяемый рядом Пуанкаре.) В силу (5.8) включение $F \in \mathcal{A}_q^\infty(D, G)$ достаточно проверить в предположении, что $D = \Delta$. Теперь для z и ζ из Δ

$$|F_\Delta(z, \zeta)| \leqslant c_1 \sum_{A \in G} |1 - A(z)\bar{\zeta}|^{-2q} |A'(z)|^q \leqslant$$

$$\leqslant c_1 (1 - |\zeta|)^{-2q} \sum_{A \in G} |A'(z)|^q \leqslant c_2 \lambda_\Delta(z)^q,$$

где c_1 и c_2 не зависят от z.

Остается проверить (5.6). Ясно, что интеграл, о котором идет речь, сходится абсолютно. Простое вычисление показывает, что он равен

$$\iint_D \lambda(\zeta)^{2-2q} K(z, \zeta) \varphi(\zeta) d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Поэтому (5.6) эквивалентно (3.5).

§ 6. Связный случай

Сейчас мы начнем изучать случай, когда область D связна (не обязательно односвязна).

Отображение на автоморфных формах. Пусть теперь π: $\Delta \to D$ — универсальное накрывающее отображение для области D. Пусть Γ — накрывающая группа отображения π, т. е. Γ состоит из таких конформных преобразований γ круга Δ, что

$$\pi \circ \gamma = \pi.$$

Пусть G — группа конформных преобразований, разрывно действующая на D, и H — ее фуксова модель, т. е. H состоит из тех конформных преобразований h круга Δ, для которых существует такой элемент $g \in G$, что

$$\pi \circ h = g \circ \pi.$$

Отметим, что $H \subset N(\Gamma)$.

Теперь рассмотрим отображение

$$\pi_q^*: \mathcal{L}_q^p(D, G) \to \mathcal{L}_q^p(\Delta, H).$$

Сначала мы должны показать, что π_q^* отображает $\mathcal{L}_q^p(D, G)$ в $\mathcal{L}_q^p(\Delta, H)$. Пусть $\mu \in \mathcal{L}_q^p(D, G)$, $z \in \Delta$. Если $h \in H$, то $\pi \circ h =$

$= A \circ \pi$ для некоторого $A \in G$ и поэтому

$$\begin{aligned}(\pi_q^* \mu)(hz)\, h'(z)^q &= \mu(\pi \circ h(z))\, h'(z)^q\, \pi'(hz)^q = \\ &= \mu(A \circ \pi(z))\,(A \circ \pi)'(z)^q = \\ &= \mu(\pi(z))\, A'(\pi z)^{-q}\,(A \circ \pi)'(z)^q = \\ &= \mu(\pi(z))\, \pi'(z)^q = (\pi_q^* \mu)(z).\end{aligned}$$

Выберем теперь такую фундаментальную область $\hat{\omega}$ группы H в Δ, что $\pi(\hat{\omega}) =$ (напомним, что ω — фундаментальная область для G в D). Пусть $K \subset H$ содержит ровно по одному представителю из каждого класса смежности группы H по Γ. Тогда

$$\hat{\omega}_0 = \bigcup_{B \in K} B(\hat{\omega})$$

является фундаментальной областью для Γ в Δ, и $\pi(\hat{\omega}_0) = D$ по модулю множества меры нуль (к тому же на дополнении к множеству меры нуль $\pi \mid \hat{\omega}_0$ есть гомеоморфизм). Для $1 \leqslant p < \infty$

$$\begin{aligned}\|\pi_q^* \mu\|_{q,p,H}^p &= \iint_{\hat{\omega}} \lambda_\Delta(z)^{2-qp}\, |\mu(\pi(z))\, \pi'(z)^q|^p\, |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= \iint_{\hat{\omega}} \lambda_D(\pi(z))^{2-qp}\, |\mu(\pi(z))|^p\, |\pi'(z)|^2\, |dz \wedge d\bar{z}| = \\ &= \iint_{\pi(\hat{\omega})} \lambda_D(z)^{2-qp}\, |\mu(z)|^p\, |dz \wedge d\bar{z}| = \|\mu\|_{q,p,G}^p.\end{aligned}$$

(В только что приведенной цепочке равенств мы использовали то, что на дополнении к множеству меры нуль π является гомеоморфизмом области $\hat{\omega}$ на ω.) Вычисления для $p = \infty$ проще и могут быть опущены. Ясно, что π_q^* переводит $\mathcal{A}_q^p(D, G)$ в $\mathcal{A}_q^p(\Delta, H)$. Мы показали, что отображение π_q^* инъективно. Оно сюръективно, так как для $\nu \in \mathcal{L}_q^p(\Delta, H)$ можно определить $\mu \in \mathcal{L}_q^p(D, G)$ по формуле

$$\nu(z) = \mu(\pi(z))\pi'(z)^q.$$

Стандартные рассуждения показывают, что μ корректно определено и лежит в нужном пространстве. Другое простое вычисление показывает, что для $\mu \in \mathcal{L}_q^p(D, G)$ и $\nu \in \mathcal{L}_q^{p'}(D, G)$, где $1/p + 1/p' = 1$,

$$(\pi_q^* \mu, \pi_q^* \nu)_{q,H} = (\mu, \nu)_{q,G}. \tag{6.1}$$

Ясно, что (6.1) распространяет теорему 2.1 на произвольную связную область D, для которой Δ является универсальным накрывающим пространством. Мы, однако, выберем другой подход:

Еще один (очень полезный) подход. Определим K_D на $D \times D$ формулой

$$K_D(\pi(z), \pi(\zeta))\, \pi'(z)^q \overline{\pi'(\zeta)}^q = F_\Delta(z, \zeta), \quad z \in \Delta, \ \zeta \in \Delta, \tag{6.2}$$

где F — функция, определенная по формуле (5.1) для накрывающей группы Γ области D.

Функция K корректно определена. Если $\pi(z_1) = \pi(z_2)$, то найдется такой элемент $A \in \Gamma$, что $Az_1 = z_2$. Теперь

$$\begin{aligned} K(\pi(z_2), \pi(\zeta)) &= F(z_2, \zeta)\, \pi'(z_2)^{-q} \overline{\pi'(\zeta)}^q = \\ &= F(Az_1, \zeta)\, \pi'(Az_1)^{-q} \overline{\pi'(\zeta)}^q = \\ &= F(z_1, \zeta)\, A'(z_1)^{-q}\, \pi'(Az_1)^{-q} \overline{\pi'(\zeta)}^q = \\ &= F(z_1, \zeta)\, \pi'(z_1)^{-q} \overline{\pi'(\zeta)}^q = K(\pi(z_1), \pi(\zeta)). \end{aligned}$$

Второе переменное изучается совершенно аналогично. Функция K также не зависит от выбора π и удовлетворяет условиям, налагаемым на функцию, существование которой утверждается в теореме 3.1. Кроме того, мы, таким образом, доказали теоремы 3.2 и 3.3. Мы должны проверить только (3.4), оставляя остальное читателю. Пусть $z \in \Delta$,

$$\begin{aligned} &\iint_D \lambda_D(\zeta)^{2-q} \, |K_D(\pi z, \zeta)| \, |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\ &= \iint_{\pi^{-1}(D) = \hat{\omega}_0} \lambda_D(\pi\zeta)^{2-q} \, |K_D(\pi z, \pi\zeta)| \, |\pi'(\zeta)^2 \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\ &= \iint_{\hat{\omega}_0} \lambda_\Delta(\zeta)^{2-q} \, |F_\Delta(z, \zeta)| \, |\pi'(z)^{-q}| \, |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\ &= \iint_{\hat{\omega}_0} \lambda_\Delta(\zeta)^{2-q} \, |F_\Delta(\zeta, z)\, \pi'(z)^{-q} \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\ &= |\pi'(z)|^{-q} \iint_{\hat{\omega}_0} \lambda_\Delta(\zeta)^{2-q} \Big| \sum_{A \in \Gamma} K_\Delta(A\zeta, z)\, A'(\zeta)^q \Big| \, |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| \leqslant \\ &\leqslant |\pi'(z)|^{-q} \sum_{A \in \Gamma} \iint_{\hat{\omega}_0} \lambda_\Delta(A\zeta)^{2-q} \, |K_\Delta(A\zeta, z)\, A'(\zeta)^2 \, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\ &= |\pi'(z)|^{-q} \sum_{A \in \Gamma} \iint_{A(\hat{\omega}_0)} \lambda_\Delta(\zeta)^{2-q} \, |K_\Delta(z, \zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = \\ &= |\pi'(z)|^{-q} c_q \lambda_\Delta(z)^q = c_q \lambda_D(\pi z)^q. \end{aligned}$$

Чтобы закончить изучение связных областей D, мы заметим, что

$$\beta_q \circ \pi_q^* = \pi_q^* \circ \beta_q. \tag{6.3}$$

Поэтому все вопросы сходимости достаточно рассмотреть на круге. Доказательство равенства (6.3) мы оставляем читателю.

§ 7. Общий случай

Запишем $D = \bigcup_i D_i$, где D_i — связная компонента области D. Определим

$$K_D(z, \zeta) = \begin{cases} K_{D_i}(z, \zeta), & \text{если } \{z, \zeta\} \subset D_i, \\ 0, & \text{если } z \in D_i \text{ и } \zeta \in D_j, \text{ причем } i \neq j. \end{cases}$$

§ 8. Пространства параболических форм. Второе доказательство (в частных случаях) теоремы двойственности

Заметим сначала, что пространство $\mathcal{A}_q^p(D, G)$ определяются и в случае $q = 1$. Конечно, приведенные нами доказательства применимы только для $q \geqslant 2$. Когда D/G имеет конечный тип, то оказывается, что $\mathcal{A}_q^p(D, G)$ не зависит от p при $q \geqslant 1$. Классическое название этих автоморфных форм — *параболические формы*. Мы будем изучать только клейнов случай. Большинство теорем дословно переносится на случай произвольной группы конформных преобразований плоской области с более чем двумя граничными точками.

Пусть Δ — инвариантное объединение компонент области разрывности Ω клейновой группы Γ. Предположим, что Δ/Γ конечного типа. Тогда

$$(\text{площадь } (\Delta/\Gamma)) = 2 \iint_{\Delta/\Gamma} \lambda(z)^2 \, |dz \wedge d\bar{z}| < \infty.$$

Лемма 8.1. *Для $q \in \mathbf{Z}$, $q \geqslant 1$, и $p \geqslant 1$ имеем*

$$\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) \subset \mathcal{A}_q^p(\Delta, \Gamma) \subset \mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma), \tag{8.1}$$

как только Δ/Γ конечного типа. Кроме того, отображения вложения непрерывны.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$ и $1 \leqslant p < \infty$. Тогда

$$\|\varphi\|_{q,p,\Gamma}^p = \iint_{\Delta/\Gamma} \lambda(z)^{2-qp} \, |\varphi(z)|^p \, |dz \wedge d\bar{z}| \leqslant$$

$$\leqslant \|\varphi\|_{q,\infty}^p \iint_{\Delta/\Gamma} \lambda(z)^2 \, |dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= (1/2) \ (\text{площадь } (\Delta/\Gamma)) \, \|\varphi\|_{q,\infty}^p.$$

Пусть теперь $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(\Delta, \Gamma)$, где $1 < p < \infty$. Тогда

$$\|\varphi\|_{q,\,1,\,\Gamma} = \iint\limits_{\Delta/\Gamma} \lambda(z)^{2-q} |\varphi(z)| |dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= \iint\limits_{\Delta/\Gamma} \lambda(z)^2 |\lambda(z)^{-q} \varphi(z)| |dz \wedge d\bar{z}| \leqslant$$

$$\leqslant \Big(\iint\limits_{\Delta/\Gamma} \lambda(z)^2 |\lambda(z)^{-q} \varphi(z)|^p |dz \wedge d\bar{z}| \Big)^{1/p} \times$$

$$\times \Big(\iint\limits_{\Delta/\Gamma} \lambda(z)^2 |dz \wedge d\bar{z}| \Big)^{1-1/p} =$$

$$= \Big(\frac{1}{2} \text{ площадь } (\Delta/\Gamma) \Big)^{1-1/p} \|\varphi\|_{q,\,p,\,\Gamma}.$$

Рассмотрим теперь какую-нибудь одну компоненту Δ_j/Γ_j пространства Δ/Γ. Предположим, что Δ_j/Γ_j имеет сигнатуру $(g; \nu_1, \ldots, \nu_n)$. Мы видели, что имеется канонический изометрический изоморфизм пространства $\mathcal{A}_q^p(\Delta_j, \Gamma_j)$ на $\mathcal{A}_q^p(U, G)$, где U — верхняя полуплоскость, а G — фуксова модель группы Γ_j.

Мы уже отмечали, что U/G также имеет сигнатуру $(g; \nu_1, \ldots, \nu_n)$. Кроме того, проколы на обеих поверхностях определяются параболическими преобразованиями. Покажем теперь, что $\dim \mathcal{A}_q^\infty(U, G) < \infty$.

Пусть $\pi\colon U \to U/G$ — естественная проекция.

Пусть φ — мероморфная форма на U веса $(-2q)$ относительно группы G, где $q \in \mathbf{Z}$ произвольно. (То есть φ — мероморфная функция на U, удовлетворяющая равенству $g_q^* \varphi = \varphi$ для всех $g \in G$.) Автоморфная форма φ индуцирует q-дифференциал Φ на U/G, который определяется требованием конформной инвариантности $\varphi(z)\, dz^q$. То есть если $p \in U$, а Z — локальный параметр в $\pi(p)$, то мы положим

$$\varphi(z) = \Phi(z) \left(\frac{dZ}{dz}\right)^q. \tag{8.2}$$

Пусть ν — порядок подгруппы стабильности точки p. Тогда можно положить

$$Z = (z - p)^\nu$$

и без ограничения общности предположить, что $p = 0$. Пусть $r = \operatorname{ord}_p \varphi$ и $R = \operatorname{ord}_{\pi(p)} \Phi$. Из (8.2) вытекает, что

$$r = R\nu + q(\nu - 1),$$

или

$$r + q = \nu(R + q). \tag{8.3}$$

Если φ голоморфна в p, то $r \geqslant 0$ и поэтому

$$R \geqslant -q(1-1/\nu).$$

Так как $R \in \mathbf{Z}$, то мы заключаем, что

$$R \geqslant -[q(1-1/\nu)], \tag{8.4}$$

где $[y]$ — наибольшее целое число $\leqslant y$.

Рассмотрим далее случай, когда на U/G имеется прокол. Как и в доказательстве леммы 2.2. главы II, мы можем предположить, что прокол порождается преобразованием $A(z) = z + 1$. Если φ — автоморфная форма веса $(-2q)$, то она удовлетворяет равенству

$$\varphi(z+1) = \varphi(z), \qquad z \in U.$$

Следовательно, φ имеет разложение в ряд Фурье

$$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \qquad z \in U. \tag{8.5}$$

Предположим теперь, что $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(U, G)$, $q \geqslant 1$. Тогда

$$\sup\{\lambda(z)^{-q} \mid \varphi(z) \mid;\ z \in U\} < \infty. \tag{8.6}$$

Так как $\lambda_U(z) = (2 \operatorname{Im} z)^{-1}$, $z \in U$, то из (8.5) и (8.6) вытекает, что

$$a_n = 0 \text{ при } n \leqslant 0. \tag{8.7}$$

Если φ есть (мероморфная) автоморфная форма для G и если

$$\varphi(z) = \sum_{n=r}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \qquad a_r \neq 0,\ z \in U,$$

является разложением в ряд Фурье функции φ в ∞, то по-прежнему можно использовать (8.2), чтобы спроектировать φ в (мероморфный) q-дифференциал Φ на $\overline{U/G}$; локальный параметр Z в проколе задается равенством

$$Z = e^{2\pi i z}.$$

Отсюда мы получаем, что порядок дифференциала Φ в проколе равен

$$r - q. \tag{8.8}$$

В частности,

$$\operatorname{ord}_\infty \varphi = r. \tag{8.8$'$}$$

Для любого целого q мы определим теперь на $\overline{U/G}$ *q-канонический дивизор ветвления* α^q. Положим

$$\alpha^q = \sum_{p \in \overline{U/G}} n_q(p)\, p, \tag{8.9}$$

где

$$n_q(p) = -[q(1 - 1/\nu(p)] \tag{8.10}$$

для точки $p \in U/G$ с числом ветвления $\nu(p)$ и

$$n_q(p) = \begin{cases} 1 - q, & \text{если } q > 0, \\ -q, & \text{если } q \leqslant 0, \end{cases} \tag{8.11}$$

для $p \in \overline{U/G} - U/G$ (точки с числом ветвления ∞). Заметим, что α^q является дивизором на $\overline{U/G}$, так как $\nu(p) > 1$ только для конечного числа точек на $\overline{U/G}$. Отметим также, что значение $n_q(p)$, определяемое равенством (8.11), является пределом при $\nu(p) \to \infty$ значений, задаваемых посредством (8.10). Начиная с этого места, формулы типа (8.10) при $\nu(p) = \infty$ будут интерпретироваться, как в (8.11).

Мы видели, что для $q \geqslant 1$ любая форма $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(U, G)$ проектируется в q-дифференциал Φ на $\overline{U/G}$, дивизор (Φ) которого удовлетворяет неравенству

$$(\Phi) - \alpha^q \geqslant 0. \tag{8.12}$$

Обратно, любой мероморфный q-дифференциал Φ на $\overline{U/G}$, удовлетворяющий неравенству (8.12), поднимается при помощи (8.2) до голоморфной функции $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(U, G)$.

Лемма 8.2. *Для $q \geqslant 1$, $q \in \mathbf{Z}$, и $p \geqslant 1$ имеем*

$$\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) = \mathcal{A}_q^p(\Delta, \Gamma), \tag{8.13}$$

как только Δ/Γ конечного типа. Кроме того, в этом случае

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) < \infty \tag{8.14}$$

и

$$\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) = \bigoplus_{j=1}^{K} \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma_j), \tag{8.15}$$

где $\{\Delta_1, \ldots, \Delta_K\}$ — максимальное множество неэквивалентных компонент области Δ.

Доказательство. Утверждение (8.15) очевидно. Перед тем, как проверить оставшиеся утверждения, мы докажем

Предложение 8.3. *Пусть φ есть автоморфная форма веса $(-2q)$, $q \in \mathbf{Z}$, для фуксовой группы G, действующей на U. Предположим, что U/G конечного типа и что φ проектируется в мероморфный q-дифференциал на $\overline{U/G}$. Тогда*

$$\sum_{p \in \bar{\omega}} \operatorname{red} \operatorname{ord}_p \varphi = q \frac{\text{площадь } (\Delta/\Gamma)}{2\pi}, \tag{8.16}$$

где $\bar{\omega}$ — *фундаментальное множество для* G *в* $\bar{U}$ (*т. е.* $\bar{\omega}$ *находится во взаимно однозначном соответствии с точками из* $\overline{U/G}$ *и состоит из обычных точек из* U *и параболических вершин из* ∂U) *и*

$$\operatorname{red}\operatorname{ord}_p \varphi = \frac{\operatorname{ord}_p \varphi}{\operatorname{ord}\Gamma_p}, \text{ если } p \in U,$$

и $\operatorname{ord}_p \varphi$ *определяется посредством* (8.8)′, *если* p — *параболическая вершина для* G.

Доказательство. Вспомним (8.3) и (8.8) и заметим, что

$$\sum_{p\in\bar{\omega}} \operatorname{red}\operatorname{ord}_p \varphi = \sum_{x\in\overline{U/G}} \left(\operatorname{ord}_x \Phi + q\left(1-\frac{1}{\nu(x)}\right)\right) =$$

$$= q(2q-2) + q \sum_{x\in\overline{U/G}} \left(1-\frac{1}{\nu(x)}\right),$$

где Φ — проекция формы φ на риманову поверхность $\overline{U/G}$ рода g, а $\nu(x)$ — число ветвления точки $x \in \overline{U/G}$. Из (3.16) гл. II мы получаем (8.16).

Доказательство леммы 8.2 (конец). Предположим, что $\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma_j) = \infty$ для некоторого j. Выберем $n > (q/2\pi)$ (площадь (Δ_j/Γ_j)) неэквивалентных неэллиптических неподвижных точек $x_1, \ldots, x_n$ в Δ_j. Заметим, что для $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma_j)$

$$\operatorname{red}\operatorname{ord}_p \varphi \geqslant 0$$

для всех $p \in \Delta_j \cup \{$параболические вершины в $\Delta_j\}$. Переводя элемент $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma_j)$ в набор из n чисел $(\varphi(x_1), \ldots, \varphi(x_n))$, мы получаем отображение

$$\mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma_j) \to \mathbf{C}^n.$$

Если $\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma_j) > n$, то размерность ядра этого отображения положительна. Но это невозможно ввиду (8.16).

Из конечномерности пространства $\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, двойственности при $q \geqslant 2$ между $\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$ и $\mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$ и (8.1) вытекает (8.13). Чтобы закончить доказательство в случае $q = 1$, мы установим следующий факт: любой элемент $\varphi \in \mathcal{A}_q^1(\Delta_j, \Gamma_j)$ проектируется в мероморфный q-дифференциал Φ на $\overline{\Delta_j/\Gamma_j}$, причем $\operatorname{ord}_p \Phi \geqslant 1-q$ для $p \in \overline{\Delta_j/\Gamma_j} - \Delta_j/\Gamma_j$. (Мы, конечно, уже знаем это для $q \geqslant 2$.) Ввиду (8.12) это все, что нам нужно. Для $\varphi \in$

$\in \mathcal{A}_q^1(\Delta_j, \Gamma_j)$ имеем

$$\iint\limits_{\Delta_j/\Gamma_j} \tilde{\lambda}(z)^{2-q} \,|\Phi(z)\, dz \wedge d\bar{z}| < \infty,$$

где $\tilde{\lambda}$ — метрика Пуанкаре на Δ_j/Γ_j.

Выберем окрестность прокола x на $\overline{\Delta_j/\Gamma_j}$ и предположим, что локальный параметр Z в точке x выбран так, что метрика Пуанкаре $\tilde{\lambda}$ задается посредством (3.13) из гл. II. Поэтому мы для любого $r > 0$ имеем

$$\iint\limits_{|Z|<r} \tilde{\lambda}(Z)^{2-q} \,|\Phi(Z)\, dZ \wedge d\bar{Z}| < \infty.$$

Мы можем также предположить, что для $|Z| < r$

$$\Phi(Z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n Z^n.$$

Но если $0 < \rho < r$, то

$$\rho^n a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-in\theta} \Phi(\rho e^{i\theta})\, d\theta. \tag{8.17}$$

Из (8.17) мы заключаем, что

$$|a_n| \int_0^r \rho^{n+q-1} \left(\log \frac{1}{\rho}\right)^{q-2} d\rho \leqslant$$

$$\leqslant \text{const} \int_0^r \int_0^{2\pi} \left(\rho \log \frac{1}{\rho}\right)^{q-2} |\Phi(\rho e^{i\theta})|\, \rho\, d\theta\, d\rho < \infty.$$

Если $n < 1 - q$, то $\int_0^r \rho^{n+q-1} \log\left(\frac{1}{\rho}\right)^{q-2} d\rho = \infty$. Поэтому $a_n = 0$ для $n < 1 - q$.

Так как $\mathcal{A}_q^2(\Delta, \Gamma)$ является гильбертовым пространством, то нами также получена

Теорема 8.4. *Для $1 \leqslant p \leqslant \infty$ и $1/p + 1/p' = 1$ скалярное произведение Петерсона устанавливает антилинейный топологический изоморфизм между $\mathcal{A}_1^{p'}(\Delta, \Gamma)$ и пространством, двойственным к $\mathcal{A}_1^p(\Delta, \Gamma)$, как только Δ/Γ имеет конечный тип.*

Замечание. Приведенное выше доказательство устанавливает теорему двойственности (между $\mathcal{A}_q^p(\Delta, \Gamma)$ и $\mathcal{A}_q^{p'}(\Delta, \Gamma)$, где $1/p + 1/p' = 1$) для произвольного $q \geqslant 1$ в предположении, что

Δ/Γ конечного типа. Совершенно ясно, что этот метод не проходит в случае, когда Δ/Γ не является пространством конечного типа.

Сформулируем теперь для последующего использования лемму, которая уже доказана.

Лемма 8.5. *Пусть Δ — инвариантное объединение компонент клейновой группы Γ. Пусть $q \geqslant 1$ — целое число. Предположим, что Δ/Γ конечного типа. Для автоморфной формы φ веса $(-2q)$, которая голоморфна на Δ, эквивалентны следующие условия:*

(i) $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(\Delta, \Gamma)$ *для некоторого* p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

(ii) $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(\Delta, \Gamma)$ *для всех* p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

(iii) *если* $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \zeta$, *где* $\{z_n\}$ *содержится в параболической области, принадлежащей проколу на* Δ/Γ, *а* $\zeta \in \Lambda$ (Λ — *предельное множество для* Γ), *то* $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(z_n) = 0$.

Вообще, из условия (i) вытекает условие (iii). Будем говорить, что мероморфная автоморфная форма веса $(-2q)$, $q \geqslant 1$, удовлетворяет *параболическому условию* в $\zeta \in \Lambda$ или *обращается в нуль* в параболической вершине $\zeta \in \Lambda$, если она удовлетворяет условию (iii) леммы 8.5.

Имеется соотношение между q-каноническими дивизорами ветвления. Мы будем пользоваться им в следующих главах.

Лемма 8.6. *Для любого $q \in \mathbf{Z}$ имеем*

$$-\alpha^q = \alpha^{1-q}. \tag{8.18}$$

Доказательство. Достаточно проверить (8.18) для $q > 0$. Действительно, если $q \leqslant 0$, то $1 - q > 0$, а (8.18) инвариантно относительно отображения $q \mapsto 1 - q$. Поэтому мы предположим, что $q > 0$. Если $\nu(p) = \infty$, то ясно, что

$$n_q(p) + n_{1-q}(p) = 0. \tag{8.19}$$

Предположим теперь, что $1 \leqslant \nu(p) = \nu < \infty$. Тогда

$$n_q(p) + n_{1-q}(p) = -[q(1-1/\nu)] - [(1-q)(1-1/\nu)] \geqslant$$
$$\geqslant -q(1-1/\nu) - (1-q)(1-1/\nu) = -1(1-1/\nu) > -1$$

и

$$n_q(p) + n_{1-q}(p) \leqslant (1-q)(1-1/\nu) + q(1-1/\nu) = 1 - 1/\nu < 1.$$

Так как $n_q(p) + n_{1-q}(p) \in \mathbf{Z}$, то мы видим, что (8.19) верно.

Пусть G — фуксова группа, действующая на U, причем U/G конечного типа. Пусть d — дивизор на $\overline{U/G}$. Для любого целого

q определим

$$\mathcal{A}_q(d)$$

как пространство мероморфных автоморфных форм φ веса $(-2q)$, которые проектируются в дифференциалы Φ на $\overline{U/G}$, удовлетворяющие неравенству

$$(\Phi) \geqslant \alpha^q + d.$$

Мы видим, что

$$\mathcal{A}_q(0) = \mathcal{A}_q^p(U, G), \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty, \quad q \geqslant 1.$$

В гл. VII мы вычислим размерности этих пространств. Сейчас же нам достаточно будет доказать такую лемму.

Лемма 8.7. *Имеем*

$$\mathcal{A}_0(0) = \mathbf{C} \tag{8.20}$$

и

$$\mathcal{A}_q(0) = \{0\} \quad \textit{при} \quad q < 0. \tag{8.21}$$

Доказательство. Утверждение (8.20) является непосредственным следствием того факта, что, как вытекает из (8.10) и (8.11), функции из $\mathcal{A}_0(0)$ проектируются в голоморфные функции на $\overline{U/G}$. Аналогично, если $\varphi \in \mathcal{A}_q(0)$, где $q < 0$, то в силу (8.8)

$$\operatorname{red} \operatorname{ord}_p \varphi \geqslant 0$$

для всех $p \in \overline{U} = U \cup \{$параболические вершины для $G\}$. Поэтому (8.21) вытекает из равенства (8.16) предложения 8.3.

§ 9. Теоремы существования автоморфных функций

Автоморфные формы веса 0 называются *автоморфными функциями*; они проектируются в функции на римановых поверхностях. Сейчас мы постараемся построить непостоянные мероморфные автоморфные функции. Для любого целого q (в частности, для $q \geqslant 2$) отношение любых двух линейно независимых автоморфных форм веса $(-2q)$ является непостоянной мероморфной автоморфной функцией. Мы видели, как построить функции из $\mathcal{A}_q^1(D, G)$ для $q \geqslant 2$. Однако мы еще не знаем, что размерности этих пространств положительны.

Мы начнем с некоторых наблюдений. Пусть D — открытое множество с более чем двумя граничными точками, и пусть G — разрывная группа конформных преобразований множества D. Тогда, как показано в доказательстве теоремы 3.3, ряд Пуанкаре продолжается до корректно определенного отображения

$$\Theta_q\colon \mathcal{L}_q^1(D) \to \mathcal{L}_q^1(D, G), \quad q \geqslant 2.$$

Кроме того, для $\mu \in \mathscr{L}_q^1(D)$ и $\nu \in \mathscr{L}_q^\infty(D, G)$

(9.1) $$(\mu, \nu)_q = (\Theta_q \mu, \nu)_{q, G}.$$

К тому же Θ_q переводит мероморфные (голоморфные) функции в мероморфные (голоморфные) функции. Если $z_0 \in D$ выбрана так, что $\operatorname{ord} G_{z_0} = 1$, и если $\varphi \in \mathscr{L}_q^1(D)$ является мероморфной функцией с простым полюсом в z_0, то $\Theta_q \varphi \in \mathscr{L}_q^1(D, G)$ также является мероморфной функцией с простым полюсом в z_0. (Заметим, что полюсы мероморфных функций из $\mathscr{L}_q^1(D, G)$ в точках множества D могут быть только простыми.)

Лемма 9.1. *Пусть Γ — клейнова группа с областью разрывности Ω. Пусть $q \geqslant 2$. Пусть ζ — параболическая вершина для Γ с соответствующей параболической областью V. Если $\varphi \in \mathscr{L}_q^1(\Omega)$ голоморфна в $\Gamma(V)$, то $\Theta_q \varphi$ удовлетворяет параболическому условию в ζ.*

Доказательство. Заметим, что $\Theta_q \varphi$ голоморфна в $\Gamma(V)$ и

$$\iint\limits_{\Gamma(V)/\Gamma} \lambda(z)^{2-q} |\varphi(z)\, dz \wedge d\bar{z}| < \infty.$$

Поэтому из леммы 8.5 мы получаем требуемый результат.

Лемма 9.2. *Пусть Γ — клейнова группа с областью разрывности Ω. Если $\infty \in \Omega$, то для $q \geqslant 2$*

$$\sum_{A \in \Gamma} |A'(z)|^q$$

равномерно сходится на компактных подмножествах области D.

Доказательство. Пусть $z_0 \in \Omega$, $z_0 \neq \infty$. Выберем такую окрестность U точки z_0, что

$U \subset \Omega$,

$U = \gamma(U)$ для всех $\gamma \in \Gamma_{z_0}$, где Γ_{z_0} — подгруппа стабильности точки z_0,

$U \cap \gamma(U)$ пусто для всех $\gamma \in \Gamma - \Gamma_{z_0}$.

Выберем такую окрестность D точки ∞, что $D \subset \Omega$ и никакие две точки из D не эквивалентны относительно $\Gamma - \Gamma_\infty$. Ясно, что есть только конечное число таких элементов $\gamma \in \Gamma$, что

$$\gamma(U) \cap D$$

непусто. Рассмотрим функцию

$$\nu(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } z \in D, \\ 1, & \text{если } z \in \Omega - D. \end{cases}$$

Ясно, что $\nu \in \mathscr{L}_q^1(\Omega)$ для всех $q \geqslant 2$. Поэтому $\Theta_q\nu$ сходится в $\mathscr{L}^1$ к функции из $\mathscr{L}_q^1(\Omega, \Gamma)$. Но для $z \in U$ ряды $\Theta_q\nu$ и $\Theta_q 1$ отличаются на конечную сумму. Так как любое компактное подмножество в Ω можно покрыть конечным числом множеств U, то мы получаем утверждение леммы.

Следствие. *Пусть Γ — клейнова группа с областью разрывности Ω. Предположим, что $\infty \in \Omega$, а $q \geqslant 2$. Пусть φ — рациональная функция с полюсами в Ω. Тогда ряд Пуанкаре $\Theta_q\varphi$ нормально сходится в Ω к мероморфной автоморфной форме веса $(-2q)$. Кроме того, если $z_0 \in \Omega - \{\infty\}$ не есть эллиптическая неподвижная точка и если φ имеет в точке z_0 полюс порядка $n > 0$, то то же самое верно и для $\Theta_q\varphi$. К тому же $\Theta_q\varphi$ удовлетворяет параболическому условию в любой параболической вершине группы Γ.*

Доказательство. Пусть $S = \{z \in \Omega;\ \varphi$ имеет полюс в $z\}$. Пусть $\mathfrak{M} = \mathrm{Cl}\,\Gamma(\infty) \cup \mathrm{Cl}\,\Gamma(S)$. Если $K \subset \Omega - \mathfrak{M}$ компактно, то φ ограничена на $\Gamma(K)$, так как $\Gamma(K)$ не имеет предельных точек в $\mathfrak{M}$. Поэтому ряд, определяемый $\Theta_q\varphi$, сходится на K равномерно и абсолютно. Ясно, что $\Theta_q\varphi$ — автоморфная форма веса $(-2q)$. Совершенно очевидно, что $\Theta_q\varphi$ имеет полюсы только в тех точках, в которых имеет полюс функция φ. Остается проверить, что $\Theta_q\varphi$ удовлетворяет параболическому условию.

Выберем открытое множество D, содержащее ∞ и все полюсы функции φ. Определим

$$\nu(\zeta) = \begin{cases} \varphi(\zeta), & \text{если } \zeta \in \Omega - D, \\ 0, & \text{если } \zeta \in D. \end{cases}$$

Легко проверить, что $\nu \in \mathscr{L}_q^1(\Omega)$. Пусть V — параболическая область, определяемая проколом на Ω/Γ. Мы можем выбрать D настолько малым, чтобы

$$\Gamma(V) \cap D$$

было пусто. Для $\zeta \in V$ имеем

$$(\Theta_q\nu)(\zeta) = (\Theta_q\varphi)(\zeta).$$

Так как функция $\Theta_q\nu$ принадлежит $\mathscr{L}_q^1(\Omega, \Gamma)$ и голоморфна в в $\Gamma(V)$, то она удовлетворяет параболическому условию в параболических вершинах, соответствующих V.

Теорема 9.3. *На любой римановой поверхности существуют непостоянные мероморфные функции.*

Доказательство. Пусть M — произвольная риманова поверхность. Пусть $M_0 = M$, если универсальная накрывающая поверхности M есть единичный круг U, в противном случае пусть M_0 — поверхность M, проколотая в достаточном ($\geqslant 3$) чис-

ле точек так, что ее универсальная накрывающая есть U. Пусть $M_0 \cong U/\Gamma$, где Γ — действующая без неподвижных точек фуксова группа. Выберем в U такие две точки z_0 и z_1, что $\gamma(z_0) \neq z_1$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Построим мероморфную автоморфную форму φ_j ($j = 0, 1$) любого веса, скажем -4, которая удовлетворяет параболическому условию в любой параболической вершине поверхности U/Γ и такую, что

$$\operatorname{ord}_{z_j} \varphi_j = 1.$$

Тогда φ_0/φ_1 есть искомая функция (ясно, что она продолжается на M).

Замечания

Полнота рядов Пуанкаре (для некоторых фуксовых групп) была впервые доказана Пуанкаре. Скалярное произведение, также как и некоторые доказательства полноты, принадлежит Петерсону [П3—1]. Изложение, данное в этой части, идет от двух работ Берса [Б4—6], [Б4—12] и работы Альфорса [А5—9] и было намечено в дополнении к работе автора [К12—10]. Работы Эрла [Э4—3] и [Э4—7] способствовали упрощению многих рассуждений Берса. Проблема нахождения формул воспроизведения для голоморфных функций была также исследована Иннисом [И1]. Лемма 5.2 принадлежит Годеману [Г9]. Альфорс [А5—7] дал независимое и элегантное доказательство этого неравенства. Большая часть материала § 8 и 9 является классической. Доказательство существования мероморфных функций на произвольной римановой поверхности, данное в § 9, восходит к Пуанкаре.

Глава IV

ТЕОРЕМЫ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы докажем, что (при соответствующих условиях) любая интегрируемая голоморфная функция на открытом множестве $D \subset \mathbf{C}$ может быть аппроксимирована в $\mathscr{L}^1(D)$ рациональными (интегрируемыми) функциями. Приводятся некоторые непосредственные следствия. Однако основные важные приложения теоремы будут изучены в главах V, VI и VII. В главе VII мы покажем также, что полученная в этой главе теорема аппроксимации является почти точной.

§ 1. Теорема Берса об аппроксимации

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ — любое открытое множество. Напомним, что $\mathscr{A}_2^1(D)$ состоит из голоморфных функций φ на D, для которых

$$\|\varphi\|_{2,1} = \iint_D |\varphi(z)\, dz \wedge d\bar{z}| < \infty. \tag{1.1}$$

Пусть Λ — любое подмножество в $\mathbf{C}$. Рассмотрим пространство $\mathscr{A}_2(\Lambda)$ рациональных функций r, *принадлежащих* Λ, т.е. рациональных функций r, регулярных на $\mathbf{C} - \Lambda$ и удовлетворяющих условию

$$\|r\| = \iint_{\mathbf{C}} |r(z)\, dz \wedge d\bar{z}| < \infty. \tag{1.2}$$

Замечания. (1) Рациональная функция r принадлежит $\mathscr{A}_2(\Lambda)$ тогда и только тогда, когда все ее особенности лежат в Λ, все ее полюса простые и она имеет в ∞ нуль по крайней мере порядка 3.

(2) Ясно, что вложение

$$\mathscr{A}_2(\Lambda) \to \mathscr{A}_2^1(D) \tag{1.3}$$

непрерывно, если $\Lambda \subset \mathbf{C} - D$.

Мы приведем достаточные условия того, чтобы у этого вложения была плотная область значений.

Пусть $K \subset \mathbf{C}$ замкнуто. Множество $\Lambda \subset K$ является *множеством единственности* для K тогда и только тогда, когда нулевая функция есть единственная функция, которая

(i) голоморфна на K,
(ii) голоморфна на внутренности множества K, $\operatorname{Int} K$,
(iii) равна нулю на Λ.

Пусть $D \subset \mathbf{C}$ открыто. Множество $\Lambda \subset \mathbf{C} - D$ есть *множество аппроксимации* для D, если $\mathcal{A}_2(\Lambda)$ плотно в $\mathcal{A}_2^1(D)$.

Теорема 1.1. *Пусть $D \subset \mathbf{C}$ открыто. Тогда любое множество единственности Λ для $\mathbf{C} - D$ является множеством аппроксимации для D.*

Доказательство. Предположим, что множество Λ бесконечно. (Если Λ конечно, то из условия теоремы вытекает, что $\Lambda = \mathbf{C} - D$. Ясно, что в этом случае теорема тривиальна.) Пространство $\mathcal{A}_2(\Lambda)$ плотно в $\mathcal{A}_2^1(D)$ в том случае, когда любой непрерывный линейный функционал l на $\mathcal{A}_2^1(D)$, обращающийся в нуль на $\mathcal{A}_2(\Lambda)$, является нулевым линейным функционалом. Пусть l — ограниченный линейный функционал на $\mathcal{A}_2^1(D)$, причем

$$l(\varphi) = 0, \quad \varphi \in \mathcal{A}_2(\Lambda). \tag{1.4}$$

По теореме Хана — Банаха и Ф. Рисса, найдется такая ограниченная измеримая функция μ на D, что

$$l(\varphi) = \iint_D \varphi(z)\,\mu(z)\,dz \wedge d\bar{z}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_2^1(D). \tag{1.5}$$

(Мы могли, конечно, в этом месте воспользоваться теоремой 3.1 из гл. III, но это не привело бы ни к каким упрощениям.)

Пусть a_1, a_2 — две точки из Λ. Положим

$$h(z) = \frac{(z-a_1)(z-a_2)}{2\pi i} \iint_D \frac{\mu(\zeta)\,d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(\zeta - z)(\zeta - a_1)(\zeta - a_2)}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{1.6}$$

Тогда

(1.7) h непрерывна на $\mathbf{C}$,

(1.8) h имеет обобщенную производную по $\bar{z}$ и $\partial h/\partial \bar{z} \,|\, D = \mu$, $\partial h/\partial \bar{z} \,|\, \mathbf{C} - D = 0$ (в частности, h аналитична в $\operatorname{Int}(\mathbf{C} - D)$),

$$h(z) = O(|z| \log |z|), \quad z \to \infty, \tag{1.9}$$

и для любого $R > 0$

$$|h(z) - h(w)| \leqslant C(R)\,|z - w|\,|\log|z - w||, \quad |z| < R, \quad |w| < R. \tag{1.10}$$

Мы покажем сейчас, как из (1.7), (1.8), (1.9) и (1.10) вытекает теорема. Сами же эти утверждения будут проверены после.

Предположим, что выполняется (1.4). Для любых $a \in \Lambda$, $a \neq a_1$, $a \neq a_2$ функция

$$(1.11) \quad \varphi(a, \zeta) = \frac{(a-a_1)(a-a_2)}{2\pi i} \cdot \frac{1}{(\zeta-a)(\zeta-a_1)(\zeta-a_2)}, \quad \zeta \in D,$$

принадлежит $\mathcal{A}_2(\Lambda)$. Ясно, что

$$(1.12) \qquad l(\varphi(a, \cdot)) = h(a) = 0.$$

Поэтому $h = 0$ на Λ, и, следовательно, на $\operatorname{Int}(\mathbf{C} - D)$. В частности,

$$(1.13) \qquad h = 0 \text{ на } \partial D, \text{ границе множества } D.$$

Сейчас мы дадим неправильное «доказательство» теоремы. Для $\varphi \in \mathcal{A}_2^1(D)$ имеем

$$\begin{aligned} l(\varphi) &= \iint_D (\partial h/\partial \bar{z})\, \varphi\, dz \wedge d\bar{z} = \\ &= \iint_D \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (h\varphi)\, dz \wedge d\bar{z} = -\iint_D \bar{\partial}(h\varphi\, dz) = \\ &= -\iint_{\partial D} h\varphi\, dz = 0. \end{aligned}$$

В приведенной выше цепочке первое равенство использует (1.8), второе и третье тривиальны, четвертое «следует» из теоремы Стокса, а пятое использует (1.13). Конечно, у нас есть небольшая проблема. Теорема Стокса не может быть использована, так как φ не непрерывна на ∂D и граница множества D может быть сколь угодно плохой. Заметим также, что неправильное «доказательство» не использует (1.7), (1.9) или (1.10).

Для того чтобы обойти эту трудность, мы используем принадлежащий Альфорсу «сглаживатель».

Пусть $\delta(z)$ обозначает минимум из двух чисел: e^{-2} и расстояния от z до ∂D. В силу (1.10) и (1.13)

$$(1.14) \qquad |h(z)| \leqslant C(R)\, \delta(z)\, |\log \delta(z)|, \text{ если } |z| < R.$$

Пусть теперь j — гладкая функция, $0 \leqslant j(t) \leqslant 1$ для всех $t \in \mathbf{R}$, $j(t) = 0$ для $t \leqslant 1$ и $j(t) = 1$ для $t \geqslant 2$. Для $n = 1, 2, \ldots$ и $z \in D$ положим

$$(1.15) \qquad \omega_n(z) = j\left(\frac{n}{\log\log \dfrac{1}{\delta(z)}}\right).$$

Перед тем, как продолжать доказательство теоремы, мы установим несколько предварительных результатов.

Лемма 1.2. *Если f — функция на* $\mathbf{C}$, *удовлетворяющая условию Липшица с константой* 1, *то f имеет обобщенные производные по z и $\bar{z}$. Кроме того,* $|\partial f/\partial\bar{z}|$ *и* $|\partial f/\partial z| \leqslant 1$.

Доказательство. Вспомним оператор сглаживания, введенный в § 3 гл. I. Мы покажем сначала, что для $\varepsilon > 0$ f_ε также является функцией, удовлетворяющей условию Липшица с константой 1. Используя обозначения гл. I, мы для z и $w \in \mathbf{C}$ получаем

$$f_\varepsilon(z) - f_\varepsilon(w) = -\frac{1}{2i}\left(\iint J_\varepsilon(z-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} - \right.$$
$$\left. - \iint J_\varepsilon(w-\zeta) f(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}\right) =$$
$$= -\frac{1}{2i}\iint J_\varepsilon(\zeta)\,[f(z-\zeta) - f(w-\zeta)]\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Поэтому

$$|f_\varepsilon(z) - f_\varepsilon(w)| \leqslant \frac{1}{2}|z-w| \iint J_\varepsilon(\zeta)\, |d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| = |z-w|.$$

Так как f_ε — гладкая функция, удовлетворяющая условию Липшица с константой 1, то

$$|\partial f_\varepsilon/\partial\bar{z}| \leqslant 1.$$

Кроме того,

$$f_\varepsilon \to f$$

равномерно на $\mathbf{C}$ при $\varepsilon \to 0$.

Положим теперь для $\varphi \in C^\infty_{\text{loc}}(\mathbf{C})$

$$l(\varphi) = \iint f\varphi_{\bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z} = \lim_{\varepsilon\to 0} \iint f_\varepsilon \varphi_{\bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z} =$$
$$= -\lim_{\varepsilon\to 0} \iint f_{\varepsilon,\bar{z}}\varphi\, dz \wedge d\bar{z}.$$

Поэтому

$$|l(\varphi)| \leqslant \iint |\varphi\, dz \wedge d\bar{z}|. \tag{1.16}$$

В частности, l продолжается до непрерывного линейного функционала на $\mathscr{L}^1(\mathbf{C})$. Поэтому найдется такая измеримая функция $\nu \in \mathscr{L}^\infty(\mathbf{C})$, что

$$l(\varphi) = \iint f\varphi_{\bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z} = \iint \varphi\nu\, dz \wedge d\bar{z}.$$

Значит, $-\nu = \partial f/\partial\bar{z}$. Из (1.16) следует, что $|\nu| \leqslant 1$.

Производная по z изучается аналогично.

Лемма 1.3. *Пусть f и g — функции, имеющие обобщенные производные. Если производные локально квадратично интегрируемы, то $f \circ g$ также имеет обобщенные производные.*

Доказательство. Мы оставляем проверку этой леммы читателю. Доказательство основано на том, что $\mathscr{C}^{\infty}_{\mathrm{loc}}$ плотно в $\mathscr{L}^1$.

Доказательство теоремы 1.1 (окончание). Заметим, что δ удовлетворяет условию Липшица с константой 1 и $j'(t) = 0$ вне интервала $1 < t < 2$. Поэтому легко проверить, что

$$\left|\frac{\partial \omega_n}{\partial \bar z}\right| \leqslant \frac{c}{n} \frac{1}{\delta(z)\,|\log \delta(z)|}. \tag{1.17}$$

Имеем

$$\frac{\partial \omega_n}{\partial \bar z} = j'\left(\frac{n}{\log\log\frac{1}{\delta(z)}}\right) \frac{-n}{\left(\log\log\frac{1}{\delta(z)}\right)^2} \frac{1}{\log\frac{1}{\delta(z)}} \frac{1}{-\delta(z)} \frac{\partial \delta}{\partial \bar z}.$$

Так как j' и $\frac{\partial \delta}{\partial \bar z}$ ограничены, то

$$\left|\frac{\partial \omega_n}{\partial \bar z}\right| \leqslant \mathrm{const} \frac{n}{\left|\log\log\frac{1}{\delta(z)}\right|^2} \frac{1}{\log\frac{1}{\delta(z)}} \frac{1}{\delta(z)}.$$

К тому же мы можем предположить, что

$$1 < \frac{n}{\log\log\frac{1}{\delta(z)}} < 2$$

(иначе j' обращается в нуль). Поэтому ясно, что (1.17) выполняется.

Кроме того,

$$\omega_n(z) = 0, \text{ если } \delta(z) \leqslant \exp(-\exp n). \tag{1.18}$$

Для любого $R > 0$ пусть $D(R)$ и $\Gamma(R)$ обозначают пересечения множества D соответственно с кругом $|z| < R$ и окружностью $|z| = R$. Ввиду (1.8) и теоремы Стокса

$$\iint\limits_{D(R)} \omega_n(z)\,\varphi(z)\,\mu(z)\,dz \wedge d\bar z =$$

$$= \iint\limits_{D(R)} \omega_n(z) \frac{\partial}{\partial \bar z}(\varphi(z)\,h(z))\,dz \wedge d\bar z =$$

$$= -\iint\limits_{\Gamma(R)} \omega_n(z)\,\varphi(z)\,h(z)\,dz - \iint\limits_{D(R)} \varphi(z)\,h(z) \frac{\partial \omega_n}{\partial \bar z}\,dz \wedge d\bar z$$

для любой функции $\varphi \in \mathcal{A}_2^1(D)$ (на самом деле, для любой функции φ, аналитической на D). Выше мы использовали то, что $\omega_n = 0$ вблизи ∂D. Теперь в силу (1.14) и (1.17) имеем

$$\left| \iint\limits_{D(R)} \varphi(z)\, h(z)\, \frac{\partial \omega_n}{\partial \bar z}\, dz \wedge d\bar z \right| \leqslant \text{const} \iint\limits_{D(R)} \left| \varphi(z) \frac{dz \wedge d\bar z}{n} \right|.$$

Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \iint\limits_{D(R)} \varphi(z)\, h(z)\, \frac{\partial \omega_n}{\partial \bar z}\, dz \wedge d\bar z = 0.$

Так как $\omega_n \to 1$ ограниченно при $n \to \infty$, то также

$$\left| \iint\limits_{D(R)} \varphi(z)\, \mu(z)\, dz \wedge d\bar z \right| \leqslant \left| \int\limits_{\Gamma(R)} \varphi(z)\, h(z)\, dz \right|.$$

Далее, правая часть меньше, чем

$$\text{const} \cdot R \log R \int\limits_{\Gamma(R)} |\varphi(z)|\, |dz|, \qquad R > 1, \tag{1.19}$$

ввиду (1.9). Так как $\varphi \in \mathcal{A}_2^1(D)$, то выражение (1.19) не может при $R \to \infty$ оставаться больше, чем любое положительное число, потому что

$$\|\varphi\|_{2,1} = 2 \int\limits_0^\infty \left\{ \int\limits_{\Gamma(R)} |\varphi(z)|\, |dz| \right\} dR < \infty.$$

Поэтому, если найдется такое $R_0 > 1$, что (1.19) при $R > R_0$ ограничено снизу числом $M > 0$, то

$$\|\varphi\|_{2,1} \geqslant \int\limits_{R_0}^\infty \left\{ \int\limits_{\Gamma(R)} |\varphi(z)|\, |dz| \right\} dR \geqslant$$

$$\geqslant \text{const} \int\limits_{R_0}^\infty (R \log R)^{-1}\, dR = \infty.$$

Значит,

$$\liminf_{R\to\infty} \int\limits_{\Gamma(R)} |\varphi(z)\, h(z)\, dz| = 0$$

и

$$l(\varphi) = 0 \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{A}_2^1(D).$$

Проблема. Пространство $\mathcal{A}_q(\Lambda)$ можно (другим способом) определить как множество таких рациональных функций r, у которых особенности могут быть только в Λ и

$$\|r\| = \iint\limits_D \lambda(z)^{2-q}\, |r(z)\, dz \wedge d\bar z| < \infty.$$

Будет ли $\mathcal{A}_q(\Lambda)$ плотно в $\mathcal{A}_q^1(D)$, если Λ есть множество единственности для $\mathbf{C}-D$? Мы, конечно, решили проблему в случае $q=2$. Общая проблема не решена.

Остается проверить (1.7), (1.8), (1.9) и (1.10).

Мы изучим несколько более общий случай.

Лемма 1.4. *Пусть μ — измеримая функция на $\mathbf{C}$. Предположим, что μ ограничена на компактных подмножествах в $\mathbf{C}$ и*

$$\mu(z)=O(|z|^{2q-4}),\quad z\to\infty, \tag{1.20}$$

где $q\in\mathbf{Z}$, $q\geqslant 2$. Пусть $a_1,\ldots,a_K$ есть $K=2q-2$ различных точек в $\mathbf{C}$. Положим

$$h(z)=\frac{(z-a_1)\ldots(z-a_K)}{2\pi i}\iint\limits_{\mathbf{C}}\frac{\mu(\zeta)}{(\zeta-z)(\zeta-a_1)\ldots(\zeta-a_K)}d\zeta\wedge d\bar{\zeta}. \tag{1.21}$$

Тогда h непрерывна на $\mathbf{C}$ и

$$h(a_j)=0,\qquad j=1,\ldots,K, \tag{1.22}$$

$$\partial h/\partial\bar{z}=\mu \text{ в смысле обобщенных производных}, \tag{1.23}$$

$$h(z)=O(|z|^{2q-3}\log|z|),\quad z\to\infty, \tag{1.24}$$

(1.25) *для любого $R>0$ найдется такая константа $C(R)$, что*

$$|h(z)-h(w)|\leqslant C(R)\,|z-w|\,|\log|z-w||,\quad \text{если}\quad |z|<R,\ |w|<R.$$

Кроме того, если мы в (1.21) используем $K=2q-1$ различных точек, то (1.24) заменяется на

$$h(z)=O(|z|^{2q-2}),\quad z\to\infty. \tag{1.24$'$}$$

Доказательство. Ясно, что h сходится абсолютно для $z\neq a_j$ $(j=1,\ldots,K)$, так как подинтегральное выражение не больше, чем

$$O(|z|^{-3}),\quad z\to\infty.$$

При $z\to a_j$ подинтегральное выражение в определении h есть

$$O\left(\frac{1}{|z-a_j|^2}\right),\quad z\to a_j.$$

Поэтому интеграл есть (похожие рассуждения см. ниже в доказательстве неравенства (1.25))

$$O\left(\log\frac{1}{|z-a_j|}\right),\quad z\to a_j.$$

Следовательно, $h(a_j)=0$ для $j=1,\ldots,K$, и h непрерывна на $\mathbf{C}$. Проверим теперь (1.23). Положим

$$p(z)=\prod_{j=1}^{K}(z-a_j)$$

и

$$\nu(z) = \mu(z)/p(z).$$

Тогда

$$h(z) = \frac{p(z)}{2\pi i} \iint \frac{\nu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{1.26}$$

Покажем, что для $\varphi \in \mathscr{C}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}, \quad z \in \mathbf{C},$$

определяет на $\mathbf{C}$ гладкую функцию f, причем $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \varphi$. Конечно, это есть шаг в направлении доказательства равенства (1.23). Заметим, что для $z \in \mathbf{C}$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\varphi(\zeta + z)}{\zeta} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} &= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{z}} (\zeta + z)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{1}{\zeta} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} (\zeta + z)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{1}{\zeta - z} \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{\zeta}} (\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \varphi(z),
\end{aligned}$$

согласно лемме 3.1 гл. I.

Докажем теперь равенство (1.23) в общем случае. Для всех $\varphi \in \mathscr{C}^{\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{C})$ имеем (согласно теореме Фубини)

$$\begin{aligned}
-\iint h \varphi_{\bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z} &= -\iint \varphi_{\bar{z}} \frac{p(z)}{2\pi i} \iint \frac{\nu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}\, dz \wedge d\bar{z} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \nu(\zeta) \iint \frac{\varphi_{\bar{z}} p(z)}{z - \zeta} dz \wedge d\bar{z}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \iint \nu(\zeta) \varphi(\zeta) p(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \iint \mu(\zeta) \varphi(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.
\end{aligned}$$

Мы показали, что $\partial h / \partial \bar{z} = \mu$.

Проверим теперь (1.24) для $K = 2q - 2$. Проверка утверждения (1.24) при $K = 2q - 1$ значительно проще, и мы оставляем ее читателю. Мы начнем с

$$R > \max\{|a_1|, \ldots, |a_{2q-2}|\},$$

и заметим, что для фиксированного, но достаточно большого R и $|z|>2R$

$$|h(z)|\leqslant \text{const}\Big[|p(z)|\iint\limits_{|\zeta|<R}\frac{1}{|\zeta-z||p(\zeta)|}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|+$$

$$+|p(z)|\iint\limits_{|\zeta|>R}\frac{|\zeta|^{2q-4}}{|\zeta-z||p(\zeta)|}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|\Big].$$

Заметим, что

$$p(z)=O(|z|^{2q-2}),\quad z\to\infty.$$

Поэтому первый интеграл есть

$$O\left(\frac{1}{|z|-R}\right)=O(|z|^{-1}),\quad z\to\infty.$$

Следовательно, достаточно показать, что второй интеграл есть

$$O\left(\frac{\log|z|}{|z|}\right),\quad z\to\infty.$$

Так как все нули функции p лежат внутри круга радиуса R, то максимум при $|\zeta|\geqslant R$ функции

$$\left|\frac{\zeta^{2-2}}{p(\zeta)}\right|$$

достигается на окружности радиуса R. Поэтому нам остается показать, что

$$=\iint\limits_{|\zeta|>R}\frac{1}{|\zeta-z||\zeta|^2}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|=O\left(\frac{\log|z|}{|z|}\right),\quad z\to\infty.$$

Но

$$\iint\limits_{|\zeta|>R}\frac{1}{|\zeta-z||\zeta|^2}|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|=$$

(полагаем $\zeta=zw$)

$$=\iint\limits_{|w|>\frac{R}{|z|}}\frac{1}{|z||w|^2|w-1|}|dw\wedge d\bar{w}|=$$

$$=\frac{1}{|z|}\iint\limits_{\frac{R}{|z|}<|w|<1/2}\frac{1}{|w|^2|w-1|}|dw\wedge d\bar{w}|+$$

$$+\frac{1}{z|}\iint\limits_{|w|>1/2}\frac{1}{|w|^2|w-1|}|dw\wedge d\bar{w}|\leqslant$$

$$\leqslant O\left(\frac{1}{|z|}\right)+\frac{2}{|z|}\iint\limits_{\frac{R}{|z|}<|w|<1/2}\frac{1}{|w|^2}\,|dw\wedge d\bar{w}|=$$

(полагаем $w=re^{i\theta}$)

$$=O\left(\frac{1}{|z|}\right)+\frac{4\pi}{|z|}\int\limits_{R/|z|}^{1/2}\frac{1}{r}\,dr=$$

$$=O\left(\frac{1}{|z|}\right)+\frac{4\pi}{|z|}(\log 1/2-\log R/|z|)=$$

$$=O\left(\frac{1}{|z|}\right)+O\left(\frac{\log|z|}{|z|}\right).$$

Наконец, проверим (1.25). При $|z|<2R$ функция h отличается на голоморфную функцию от функции

$$\iint\limits_{|\zeta|<2R}\frac{\mu(\zeta)}{\zeta-z}\,d\zeta\wedge d\bar{\zeta}. \tag{1.27}$$

Так как голоморфная функция удовлетворяет условию Липшица на любом компактном множестве (например, $|z|\leqslant R$), то мы можем предположить, что h задается посредством (1.27). Поэтому

$$\iint\limits_{|\zeta|<2R}\left|\frac{1}{\zeta-z}-\frac{1}{\zeta-w}\right||d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|=\iint\limits_{|\zeta|<2R}\frac{|z-w|}{|\zeta-z||\zeta-w|}\,|d\zeta\wedge d\bar{\zeta}|\leqslant$$

(полагаем $\zeta-z=(z-w)\,t$)

$$\leqslant|z-w|\iint\limits_{|t|<\frac{3R}{|z-w|}}\frac{1}{|t||t+1|}\,|dt\wedge d\bar{t}|\leqslant$$

$$\leqslant|z-w|\iint\limits_{|t|<3/2}\frac{1}{|t||t+1|}\,|dt\wedge d\bar{t}|+$$

$$+|z-w|(\mathrm{const})\iint\limits_{3/2<|t|<\frac{3R}{|z-w|}}\frac{1}{|t|^2}\,|dt\wedge d\bar{t}|=$$

$$=O(|z-w|)+O(|z-w||\log|z-w||).$$

Замечание. Доказанная нами теорема применяется, в частности, когда открытое множество D плотно в $\mathbf{C}$, а $\Lambda=\mathbf{C}-D$. Утверждение теоремы нетривиально даже в этом случае. В следующей главе D часто будет областью разрывности клейновой группы, а Λ — ее предельным множеством.

§ 2. Следствия и комментарии

Для нас наиболее важным приложением теоремы Берса об аппроксимации является обсуждавшийся в приведенном выше замечании случай. Мы перечислим ниже несколько нетрудно проверяемых условий того, что множество является множеством единственности. Мы не будем приводить доказательства следующих трех предложений. Они нам не понадобятся в дальнейшем. Мы сделаем краткие замечания о происхождении каждого из цитируемых результатов.

Предложение 2.1. *Пусть $K \subset \mathbf{C}$ замкнуто. Множество $\Lambda \subset K$ является множеством единственности для K тогда и только тогда, когда замыкание $\mathrm{Cl}\,\Lambda$ множества Λ содержит $K - \mathrm{Cl}\,\mathrm{Int}\,K$ и для любой компоненты Δ множества $\mathrm{Int}\,K$ множество $\Delta \cap \mathrm{Cl}\,\Delta$ является множеством единственности для $\mathrm{Cl}\,\Delta$.*

Доказательство. Доказательство очевидно.

Предложение 2.2. *Пусть D — область с границей ∂D, а $\Lambda \subset \partial D$. Тогда Λ является множеством единственности для $\mathrm{Cl}\,D$ в том случае, когда*

(a) *гармоническая мера в D подмножества $\mathrm{Cl}\,\Lambda$ положительна, или*

(b) *∂D является спрямляемой жордановой кривой, а $\mathrm{Cl}\,\Lambda$ имеет положительную линейную меру.*

Доказательство. Это предложение является классическим. Гармоническая мера рассматривается в книге Фукса [Ф5]. Отметим, что (b) является частным случаем утверждения (a).

Предложение 2.3. *Пусть D — область, а $\Lambda \subset D$. Тогда Λ является множеством единственности для $\mathrm{Cl}\,D$ в том случае, когда Λ содержит такую последовательность $\{\zeta_j\}$, что*

(a) $\lim\limits_j \zeta_j \in D$,

или

(b) *D есть единичный круг U, $\zeta_j \neq 0$ для всех j и*

$$\prod_j |\zeta_j| = 0,$$

или

(c) *найдется такое голоморфное сюръективное отображение $\psi\colon U \to D$ и такие точки $z_j \in U$, что $\psi(z_j) = \zeta_j$ и*

$$\prod_j |z_j| = 0.$$

Доказательство. (a) очевидно, (b) вытекает из классической теоремы о произведениях Бляшке, а (c) следует из (b).

Приведем два следствия из теоремы 1.1.

Следствие 1. *Пусть $K \subset \mathbf{C}$ — замкнутое и нигде не плотное подмножество. Тогда $\Lambda \subset K$ является множеством аппроксимации для $\mathbf{C} - K$ тогда и только тогда, когда Λ плотно в K.*

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность вытекает из теоремы.

Следствие 2. *Пусть $\Omega \subset \mathbf{C}$ — открытое и ограниченное множество. Предположим, что Ω и $\operatorname{Int}(\mathbf{C} - \Omega)$ имеют одну и ту же границу. Пусть $D_1, D_2, \ldots$ — ограниченные компоненты множества $\operatorname{Int}(\mathbf{C} - \Omega)$. Выберем точки $\zeta_j \in D_j$. Пусть $f \in \mathcal{A}_2^1(\Omega)$. Тогда существует такая последовательность рациональных функций g_j с полюсами только в $\{\infty, \zeta_1, \zeta_2, \ldots\}$, что*

$$f = \lim_j g_j$$

в $\mathcal{A}_2^1(\Omega)$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon_0 > 0$ настолько мало, что Ω лежит в компактном подмножестве внутренности круга C_0 радиуса $1/\varepsilon_0$ с центром в 0, и пусть $\varepsilon_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots$, настолько малы, что окружность C_j радиуса ε_j с центром в ζ_j и ее внутренность принадлежат D_j. Тогда $\Lambda = C_0 \cup C_1 \cup \ldots$ является множеством единственности для $\mathbf{C} - \Omega$, согласно условию (а) предложения 2.3. Поэтому, согласно теореме, оно является множеством аппроксимации для Ω. Значит, $\mathcal{A}_2(\Lambda)$ плотно в $\mathcal{A}_2^1(\Omega)$. Остается показать, что любая функция из $\mathcal{A}_2(\Lambda)$ может быть равномерно аппроксимирована рациональными функциями с полюсами только в $\infty, \zeta_1, \zeta_2, \ldots$.

Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_2(\Lambda)$. Тогда

$$\varphi(z) = c\frac{(z-a_1)\ldots(z-a_n)}{(z-b_1)\ldots(z-b_m)},$$

причем $m - n \geqslant 3$. Поэтому

$$\varphi(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A_j}{z-b_j}.$$

Значит, достаточно проверить, что $(z-a)^{-1}$ можно равномерно аппроксимировать на компактном множестве K полиномами от $(z-b)^{-1}$, как только a и $b \notin K$. Но для любого $n \geqslant 1$

$$\frac{1}{z-a} = \frac{1}{z-b} + \frac{(a-b)}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{(a-b)^{n-1}}{(z-b)^n} + \frac{(a-b)^n}{(z-a)(z-b)^n}. \tag{2.1}$$

Следовательно,

$$\left|\frac{1}{z-a} - \sum_{j=1}^{n} \frac{(a-b)^{j-1}}{(z-b)^j}\right| \leqslant \frac{|a-b|^n}{|z-a||z-b|^n}. \tag{2.2}$$

В нашем случае $a \in \Lambda$. Поэтому $a \in C_j$ для некоторого j. Если $j > 0$, то мы возьмем $b = \zeta_j$ и можем предположить, что

$$\left| \frac{a-b}{z-b} \right| \leqslant r < 1$$

для всех $z \in K$. Так как

$$\frac{1}{|z-a|} \geqslant \delta > 0$$

для $z \in K$, то мы видим, что (2.2) может быть сделано сколь угодно малым. Если $j = 0$, то мы вместо (2.1) используем разложение функции $(z-a)^{-1}$ в ряд Тейлора в нуле.

Замечание. Так как из $\mathscr{L}^1$-сходимости голоморфных функций вытекает их равномерная сходимость на компактных подмножествах, то приведенное выше следствие содержит в себе классическую теорему Рунге.

Теорема 2.4. *Пусть G — (неэлементарная) конечно порожденная фуксова группа второго рода, действующая на верхней полуплоскости. Пусть Λ_0 — предельное множество для G, а Λ_1 — множество эллиптических неподвижных точек группы G, лежащих в нижней полуплоскости. Тогда $\Lambda_0 \cup \Lambda_1$ не является множеством аппроксимации для верхней полуплоскости.*

Мы отложим доказательство этой теоремы до гл. VII, так как идеи, возникающие при доказательстве этого факта, появятся в следующих главах в значительно более общей ситуации.

Замечания

Материал этой главы близок к работе Берса [Б4—20]. Теорема об аппроксимации впервые появляется в [Б4—11]. Основным элементом в доказательстве является сглаживатель, введенный Альфорсом в [А5—9].

Глава V

КОГОМОЛОГИИ ЭЙХЛЕРА КЛЕЙНОВЫХ ГРУПП

Клейнова группа Г естественным образом действует на некоторых векторных пространствах полиномов. Поэтому можно определить пространство первых когомологий клейновой группы с коэффициентами в этих векторных пространствах. В настоящей главе определяется структура этих пространств когомологий в случае, когда Г представляет поверхности конечного типа. Оказывается, что в фуксовом случае пространство когомологий изоморфно прямой сумме двух пространств автоморфных форм. Так как мы сможем в фуксовом случае вычислить размерность пространств когомологий, то как следствие получим размерность пространства параболических форм. Это будет отправным пунктом для доказательства как теоремы Римана — Роха, так и теоремы конечности Альфорса и неравенства Берса о площадях.

§ 1. Когомологии Эйхлера

Пусть $q \geqslant 1$ — целое число. Обозначим через Π_{2q-2} векторное пространство полиномов от одного комплексного переменного степени $\leqslant 2q-2$. Если Г — любая группа преобразований Мёбиуса, то она действует справа на Π_{2q-2} по формуле

$$p\gamma = \gamma^*_{1-q} p, \quad p \in \Pi_{2q-2}, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.1}$$

Напомним, что линейные операторы * функториальны. Поэтому, чтобы проверить, что (1.1) определяет действие группы Г на Π_{2q-2}, достаточно проверить, что для любого преобразования Мёбиуса γ

$$\gamma^*_{1-q}\colon \Pi_{2q-2} \to \Pi_{2q-2}. \tag{1.2}$$

Пусть $\gamma(z) = (az+b)(cz+d)^{-1}$, причем $ad - bc = 1$, и пусть $p(z) = z^n$. Тогда

$$p\gamma(z) = (az+b)^n (cz+d)^{-n+2q-2}.$$

Поэтому $p\gamma \in \Pi_{2q-2}$, как только $n \leqslant 2q-2$ (т. е. как только $p \in \Pi_{2q-2}$), и мы показали, что γ^*_{1-q} отображает Π_{2q-2} изоморфно на Π_{2q-2}.

Отображение $\chi\colon \Gamma \to \Pi_{2q-2}$ называется *коциклом*, если

$$\chi_{\gamma_1\circ\gamma_2} = \chi_{\gamma_1}\gamma_2 + \chi_{\gamma_2}, \quad \gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma, \tag{1.3}$$

где χ_γ пишется вместо $\chi(\gamma)$. Если $p \in \Pi_{2q-2}$, то его *кограницей* является коцикл

$$\gamma \mapsto p\gamma - p, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.4}$$

Нужно, конечно, проверить, что отображение, определенное посредством (1.4), действительно удовлетворяет (1.3). Но это тривиальное вычисление.

Пространство (первых) когомологий $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ есть пространство коциклов, профакторизованное по пространству кограниц.

Замечание. Пусть B — преобразование Мёбиуса. Для любого коцикла $\chi\colon \Gamma \to \Pi_{2q-2}$ определим отображение $\hat{\chi}\colon B^{-1}\Gamma B \to \Pi_{2q-2}$, положив

$$\hat{\chi}(B^{-1}\Gamma B) = \chi(\gamma) B = B^*_{1-q}\chi(\gamma), \quad \gamma \in \Gamma. \tag{1.5}$$

Легко проверить, что $\hat{\chi}$ — коцикл и что класс когомологий коцикла $\hat{\chi}$ зависит только от класса когомологий коцикла χ. Поэтому мы установили канонический (сюръективный) изоморфизм

$$\hat{}\colon H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \to H^1(B^{-1}\Gamma B, \Pi_{2q-2}).$$

Лемма 1.1. *Если (неэлементарная) клейнова группа* Γ *порождается* N *элементами, то*

$$\dim H^1(\Gamma, \mathbf{C}) \leqslant N$$

и

$$\dim H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \leqslant (2q-1)(N-1) \text{ при } q \geqslant 2.$$

Равенства имеют место всякий раз, когда Γ *является свободной группой с* N *образующими.*

Доказательство. Заметим, что

$$H^1(\Gamma, \mathbf{C}) = \operatorname{Hom}(\Gamma, \mathbf{C}).$$

Поэтому случай $q = 1$ ясен.

Предположим, что $q \geqslant 2$. Пусть $p \in \Pi_{2q-2}$ таков, что его граница равна нулю.

Тогда

$$p(\gamma z)\gamma'(z)^{1-q} = p(z) \text{ для всех } \gamma \in \Gamma.$$

Если p обращается в нуль в точке $z_0 \in \mathbf{C}$, то он обращается в нуль также в $\gamma(z_0)$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Поэтому p имеет бесконечное число нулей (так как Γ неэлементарна) и, следовательно, $p = 0$.

Мы заключаем, что пространство кограниц имеет размерность $2q - 1$. Так как коцикл однозначно определяется своими значениями на образующих группы Γ и так как значения на свободных образующих произвольны, то мы заключаем, что размерность пространства коциклов не больше $N(2q - 1)$ и в точности равна $N(2q - 1)$ для свободной группы с N образующими. Это завершает доказательство леммы.

Пусть Δ — инвариантное объединение компонент области разрывности клейновой группы Γ. Оказывается, что проколы на Δ/Γ играют существенную роль в теории когомологий. Они определяют отмеченные классы когомологий. Класс когомологий $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ называется *Δ-параболическим*, если для любого параболического преобразования $B \in \Gamma$, которое соответствует проколу на Δ/Γ, найдется такой элемент $v \in \Pi_{2q-2}$, что

$$p_B = vB - v \tag{1.6}$$

для некоторого коцикла, представляющего класс p. Ясно, что если равенство (1.6) выполняется для одного коцикла, представляющего p, то оно выполняется для любого коцикла, представляющего p. Полином, конечно, зависит от коцикла. Заметим, что (1.5) показывает, что параболичность класса когомологий инвариантна относительно преобразования подобия. Мы обозначим пространство Δ-параболических классов когомологий через $PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2})$.

Если Γ' является подгруппой в Γ, то существует естественное отображение

$$\xi_{\Gamma'}\colon H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \to H^1(\Gamma', \Pi_{2q-2}).$$

Поэтому ясно, что

$$PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = \bigcap (\text{ядро } \xi_{\Gamma'}), \tag{1.7}$$

где пересечение берется по всем циклическим параболическим подгруппам Γ' группы Γ, определяемым проколами на Δ/Γ. Ясно, что если Δ' — другое инвариантное объединение компонент области разрывности группы Γ и если $\Delta \subset \Delta'$, то

$$PH^1_{\Delta'}(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \subset PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}).$$

Если мы в правой части равенства (1.7) возьмем пересечение по всем циклическим параболическим подгруппам группы Γ, то мы получим группу *параболических* когомологий, обозначаемую через $PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. Заметим, что для всех Δ

$$PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \subset PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \subset H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}).$$

Другие группы коэффициентов. Пусть $\mathcal{A}$ — произвольный Γ-модуль, т. е. $\mathcal{A}$ — модуль над коммутативным

кольцом $\mathcal{R}$, причем задано отображение

$$\mathcal{A} \times \Gamma \to \mathcal{A},$$

которое сопоставляет паре $(a, \gamma) \in \mathcal{A} \times \Gamma$ элемент $a\gamma \in \mathcal{A}$ и таково, что для фиксированного $\gamma \in \Gamma$ отображение $\mathcal{A} \ni a \mapsto a\gamma \in \mathcal{A}$ является $\mathcal{R}$-линейным и

$$(a\gamma_1)\,\gamma_2 = a\,(\gamma_1 \circ \gamma_2) \text{ для } a \in \mathcal{A},\ \gamma_1 \in \Gamma,\ \gamma_2 \in \Gamma.$$

Мы можем использовать (1.3) для того, чтобы определить *$\mathcal{A}$-коциклы*, и (1.4), чтобы определить *$\mathcal{A}$-кограницы*, и, таким образом, определить пространство когомологий $H^1(\Gamma, \mathcal{A})$.

Обычно наши модули будут векторными пространствами над $\mathbf{C}$.

Кроме Π_{2q-2}, имеются два других важных Γ-модуля:

(1) $\mathcal{A}_r(\Delta)$, пространство голоморфных функций на Δ, где $\varphi\gamma = \gamma_r^*\varphi$ ($\varphi \in \mathcal{A}_r(\Delta)$, $\gamma \in \Gamma$). Здесь $r \in \mathbf{Z}$ произвольно.

(2) $\mathcal{C}^\infty_{r,s}(\Delta)$, векторное пространство гладких функций на Δ, где $f\gamma = \gamma^*_{r,s} f$ ($f \in \mathcal{C}^\infty_{r,s}(\Delta)$, $\gamma \in \Gamma$). Здесь r, s — целые числа. Как обычно, мы будем писать $\mathcal{C}^\infty_r$ вместо $\mathcal{C}^\infty_{r,0}$ и $\mathcal{C}^\infty$ вместо $\mathcal{C}^\infty_0$.

Заметим, что $\Pi_{2q-2} \subset \mathcal{A}_{1-q}(\Delta) \subset \mathcal{C}^\infty_{1-q}(\Delta)$. Отметим также, что $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}$ являются подмодулями (соответственно над $\mathbf{Z}$ и $\mathbf{R}$) в $\mathbf{C}$ ($\mathbf{C} = \Pi_0$).

Высшие группы когомологий. В этой книге первая группа когомологий группы Γ с коэффициентами в Γ-модуле $\mathcal{A}$ будет наиболее полезна. Конечно, можно и часто очень полезно определить группу когомологий $H^n(\Gamma, \mathcal{A})$ для любого неотрицательного целого числа n. Приведем определения и основные свойства этих групп.

Пусть $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 0$. Тогда *n-коцепь* есть отображение

$$F\colon \Gamma^{n+1} \to \mathcal{A},$$

которое удовлетворяет равенству

$$F(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)\,\gamma = F(\gamma_0\gamma, \gamma_1\gamma, \ldots, \gamma_n\gamma)$$

для всех $(\gamma, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma^{n+2}$.

Группа (с очевидным образом определенным сложением) n-коцепей обозначается через $C^n(\Gamma, \mathcal{A})$. Имеется естественный кограничный оператор

$$\delta_n\colon C^n(\Gamma, \mathcal{A}) \to C^{n+1}(\Gamma, \mathcal{A}),$$

определяемый равенством

$$(\delta_n F)(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_{n+1}),$$

где $\hat{\gamma}_i$ означает, что γ_i пропущено.

Лемма 1.2. *Имеем*

$$\delta^2 = 0,$$

т. е.

$$\delta_{n+1} \circ \delta_n = 0.$$

Доказательство. Производим вычисления:

$$(\delta_{n+1}(\delta_n F))(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+2}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n+2} (-1)^j (\delta_n F(\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_j, \ldots, \gamma_{n+2}) =$$
$$= \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=0}^{j-1} (-1)^{j+1} F(\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \hat{\gamma}_j, \ldots, \gamma_{n+2}) +$$
$$+ \sum_{j=0}^{n+2} \sum_{i=j+1}^{n+2} (-1)^{j+i-1} F(\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_j, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_{n+2}) = 0.$$

Поэтому мы видим, что для $n \geqslant 0$

$$(\text{образ } \delta_n) \subset (\text{ядро } \delta_{n+1}).$$

Элемент $F \in (\text{ядро } \delta_n)$, называется *n-коциклом*, а элемент $F \in (\text{образ } \delta_{n-1})$ называется *n-кограницей* (положим $C^{-1}(\Gamma, \mathcal{A}) = 0 = \delta_{-1}$). Поэтому мы определим *n*-ю *группу когомологий* группы Γ с коэффициентами в $\mathcal{A}$ равенством

$$H^n(\Gamma, \mathcal{A}) = (\text{ядро } \delta_n)/(\text{образ } \delta_{n-1}), \quad n \geqslant 0.$$

Лемма 1.3. *Имеем*

$$H^0(\Gamma, \mathcal{A}) \cong \mathcal{A}(\Gamma) = \{\mu \in \mathcal{A};\ \mu\gamma = \mu \text{ для всех } \gamma \in \Gamma\}.$$

Доказательство. По определению

$$H^0(\Gamma, \mathcal{A}) = (\text{ядро } \delta_0).$$

Пусть $F \in (\text{ядро } \delta_0)$. Положим $\mu = F(1)$. Тогда для $\gamma \in \Gamma$ имеем $F(\gamma) = F(1\gamma) = \mu\gamma$. Поэтому

$$(\delta_0 F)(1, \gamma) = F(\gamma) - F(1) = \mu\gamma - \mu = 0.$$

Обратно, если $\mu \in \mathcal{A}(\Gamma)$, то мы определим 1-коцепь F равенством

$$F(\gamma) = \mu\gamma$$

и заметим, что F есть 1-коцикл.

Замечания. (1) Мы будем, конечно, пользоваться следующими сокращениями:

$$\mathcal{A}_r(\Delta)(\Gamma) = \mathcal{A}_r(\Delta, \Gamma)$$

и

$$\mathcal{C}^\infty_{r,s}(\Delta)(\Gamma) = \mathcal{C}^\infty_{r,s}(\Delta, \Gamma).$$

(2) Мы должны проверить, что наше новое определение группы $H^1(\Gamma, \mathcal{A})$ согласуется с данным ранее. Пусть $F \in C^1(\Gamma, \mathcal{A})$. Для $\gamma \in \Gamma$ определим

$$f(\gamma) = F(1, \gamma).$$

Из равенства $\delta_1 F = 0$ вытекает, что для $(1, \gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^3$

$$(\delta_1 F)(1, \gamma_1, \gamma_2) = F(\gamma_1, \gamma_2) - f(\gamma_2) + f(\gamma_1) = \\ = f(\gamma_2\gamma_1^{-1})\gamma_1 - f(\gamma_2) + f(\gamma_1) = 0.$$

Поэтому

$$f(\gamma_1\gamma_2) = [f(\gamma_1) - f(\gamma_2^{-1})]\gamma_2 = \\ = f(\gamma_1)\gamma_2 + f(\gamma_2).$$

Аналогично, если f есть 1-коцикл в старом смысле, то

$$F(\gamma_1, \gamma_2) = f(\gamma_2\gamma_1^{-1})\gamma_1, \quad (\gamma_1, \gamma_2) \in \Gamma^2,$$

определяет коцикл в новом смысле. Легко также видеть, что 1-границы совпадают при обоих определениях.

Если $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — два Γ-модуля, то отображение

$$f\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$

называется Γ-*линейным* отображением, если оно является

(1) линейным отображением модулей

и если

(2) $f(a)\gamma = f(a\gamma)$ для всех $a \in \mathcal{A}$, $\gamma \in \Gamma$.

Теорема 1.4. *Пусть*

$$0 \to \mathcal{A} \xrightarrow{f} \mathcal{B} \xrightarrow{g} \mathcal{C} \to 0 \tag{1.8}$$

— точная последовательность Γ-*модулей и* Γ-*линейных отображений* (т. е. (*образ* f) = (*ядро* g) *и т. д.*). *Тогда имеет место точная последовательность групп когомологий*

$$0 \to H^0(\Gamma, \mathcal{A}) \xrightarrow{f_0^*} H^0(\Gamma, \mathcal{B}) \xrightarrow{g_0^*} H^0(\Gamma, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_0^*} H^1(\Gamma, \mathcal{A}) \xrightarrow{f_1^*} \\ \to H^1(\Gamma, \mathcal{B}) \xrightarrow{g_1^*} H^1(\Gamma, \mathcal{C}) \xrightarrow{\delta_1^*} H^2(\Gamma, \mathcal{A}) \xrightarrow{f_2^*} \ldots.$$

Доказательство. Пусть $F \in C^n(\Gamma, \mathcal{A})$. На протяжении доказательства $(r+1)$-наборы $(\gamma_0, \ldots, \gamma_r)$ будут обозначать элементы из Γ^{r+1}. Определим

$$(f_n^* F)(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) = f(F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)). \tag{1.9}$$

Проверим, что $f_n^* F$ является n-коциклом, класс когомологий которого зависит только от класса когомологий коцикла F. Прежде

всего, если F есть n-коцепь, то $f_n^* F$ также есть n-коцепь, так как

$$\begin{aligned}(f_n^* F)(\gamma_0\gamma, \ldots, \gamma_n\gamma) &= f(F(\gamma_0\gamma, \ldots, \gamma_n\gamma)) = \\ &= f(F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)\gamma) = \\ &= (f(F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n)))\gamma = \\ &= ((f_n^* F)(\gamma_0, \ldots, \gamma_n))\gamma.\end{aligned}$$

Отображение f_n^* переводит коциклы в коциклы, а кограницы в кограницы, так как

$$\delta_n \circ f_n^* = f_{n+1}^* \circ \delta_n. \tag{1.10}$$

Проверим (1.10) для $F \in C^n(\Gamma, \mathscr{A})$. Имеем

$$\begin{aligned}&(\delta_n \circ f_n^* F)(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+1}) = \\ &= \sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i f(F(\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_{n+1})) = \\ &= f\Big(\sum_{i=0}^{n+1} (-1)^i F(\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_{n+1})\Big) = \\ &= (f_{n+1}^* \circ \delta_n F)(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n+1}).\end{aligned}$$

Ясно, что отображение f_n^* линейно.

Отображение g_n^* определяется, конечно, совершенно аналогично.

Мы определили отображения

$$\begin{aligned}f_n^*&: C^n(\Gamma, \mathscr{A}) \to C^n(\Gamma, \mathscr{B}),\\ g_n^*&: C^n(\Gamma, \mathscr{B}) \to C^n(\Gamma, \mathscr{C}).\end{aligned}$$

Утверждаем, что последовательность

$$0 \to C^n(\Gamma, \mathscr{A}) \xrightarrow{f_n^*} C^n(\Gamma, \mathscr{B}) \xrightarrow{g_n^*} C^n(\Gamma, \mathscr{C}) \to 0$$

является точной.

Инъективность отображения f_n^* очевидна. Действительно, если $F \in$ (ядро f_n^*), то из (1.9) и точности последовательности (1.8) вытекает, что $F = 0$. Ясно также, что

$$g_n^* \circ f_n^* = 0.$$

Обратно, если $G \in$ (ядро g_n^*), то для любого $(1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \Gamma^{n+1}$ найдется элемент

$$F(1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathscr{A},$$

такой, что

$$f(F(1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n)) = G(1, \gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Определим

$$F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) = F(1, \gamma_1\gamma_0^{-1}, \ldots, \gamma_n\gamma_0^{-1})\gamma_0. \tag{1.11}$$

Ясно, что (1.11) определяет элемент $F \in C^n(\Gamma, \mathscr{A})$ и $f_n^* F = G$. Сюръективность отображения g_n^* устанавливается аналогично.

Как следствие из (1.10) мы получаем, что следующая диаграмма коммутативна, причем ее строки точны:

$$\begin{tikzcd}
 & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \cdots \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{A}) \arrow[r, "f_{n-1}^*"] \arrow[d, "\delta_{n-1}"] & C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{B}) \arrow[r, "g_{n-1}^*"] \arrow[d, "\delta_{n-1}"] & C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{n-1}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{n}(\Gamma, \mathscr{A}) \arrow[r, "f_{n}^*"] \arrow[d, "\delta_{n}"] & C^{n}(\Gamma, \mathscr{B}) \arrow[r, "g_{n}^*"] \arrow[d, "\delta_{n}"] & C^{n}(\Gamma, \mathscr{C}) \arrow[r] \arrow[d, "\delta_{n}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & C^{n+1}(\Gamma, \mathscr{A}) \arrow[r, "f_{n+1}^*"] \arrow[d] & C^{n+1}(\Gamma, \mathscr{B}) \arrow[r, "g_{n+1}^*"] \arrow[d] & C^{n+1}(\Gamma, \mathscr{C}) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{tikzcd}$$

После всего сказанного мы можем, наконец, определить отображение δ_n^* на уровне когомологий (отображения f_n^* и g_n^* уже определены на уровне когомологий). Пусть $H \in C^n(\Gamma, \mathscr{C})$. Предположим, что $\delta_n H = 0$. Выберем такой элемент $G \in C^n(\Gamma, \mathscr{B})$), что $g_n^* G = H$. Так как $g_{n+1}^* \circ \delta_n G = \delta_n \circ g_n^* G = 0$, то найдется такой элемент $F \in C^{n+1}(\Gamma, \mathscr{A})$, что $f_{n+1}^* F = \delta_n G$. Далее, $\delta_{n+1} \circ f_{n+1}^* F = 0$ и, следовательно, $\delta_{n+1} F = 0$. Поэтому положим $\delta_n^* H$ равным классу когомологий коцикла F в $H^{n+1}(\Gamma, \mathscr{A})$. Мы должны проверить, что $\delta_n^* H$ корректно определен.

Так как отображение f_{n+1}^* взаимно однозначно, то элемент F определяется однозначно. Далее, вообщее говоря, G можно заменить на

$$G + f_n^* F_0, \quad F_0 \in C^n(\Gamma, \mathscr{A}).$$

Тогда

$$f_{n+1}^*(F + \delta_n F_0) = \delta_n G + \delta_n \circ f_n^* F_0 = \delta_n (G + f_n^*(F_0)).$$

Поэтому мы в качестве $\delta_n^* H$ возьмем класс когомологий коцикла $F + \delta_n F_0$, который совпадает с классом когомологий коцикла F. Заменим теперь H на когомологичный ему коцикл

$$H + \delta_{n-1} H_0, \quad H_0 \in C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{C}).$$

Нужно найти такой элемент $G_1 \in C^n(\Gamma, \mathscr{B})$, что $g_n^* G_1 = H + \delta_{n-1} H_0$. Выберем $G_0 \in C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{B})$ так, что $g_{n-1}^* G_0 = H_0$. Тогда

$$g_n^*(G + \delta_{n-1} G_0) = H + g_n^* \circ \delta_{n-1} G_0 = H + \delta_{n-1} \circ g_{n-1}^* G_0 = H + \delta_{n-1} H_0.$$

Поэтому нужно найти такой элемент $F_1 \in C^{n+1}(\Gamma, \mathscr{A})$, что $f_{n+1}^* F_1 = \delta_n (G + \delta_{n-1} G_0)$. Ясно, что F будет таким элементом.

Нужно проверить шесть утверждений о точности. Пусть $F \in$ $\in$ (ядро f_n^*). Если $n=0$, то проверять нечего. Для $n>0$ выберем такой $F \in C^n(\Gamma, \mathscr{A})$, что $\delta_n F = 0$ и $f_n^* F = \delta_{n-1} G$, $G \in C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{B})$. Рассмотрим $(n-1)$-коцикл $g_{n-1}^* G \in C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{C})$. Мы утверждаем, что $F = \delta_{n-1}^* \circ g_{n-1}^* G$ на уровне когомологий. Проверка тривиальна. Поэтому (ядро f_n^*) $\subset$ (образ δ_{n-1}^*) (где $\delta_{-1}^* = 0$).

Обратно, легко видеть, что $f_{n+1}^* \circ \delta_n^* = 0$ $(n \geqslant 0)$. Следуя обозначениям из определения отображения δ_n^*, мы видим, что $f_{n+1}^* F = \delta_n G$, и поэтому $f_{n+1}^* F$ есть нуль на уровне когомологий.

Далее, если $G \in$ (ядро g_n^*), то $G \in C^n(\Gamma, \mathscr{B})$, $\delta_n G = 0$ и $g_n^* G = \delta_{n-1} H$, $H \in C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{C})$. Имеем $H = g_{n-1}^* G_0$, $G_0 \in C^{n-1}(\Gamma, \mathscr{B})$. Таким образом,

$$g_n^*(G - \delta_{n-1} G_0) = \delta_{n-1} H - \delta_{n-1} \circ g_{n-1} G_0 = 0.$$

Поэтому найдется такой $F \in C^n(\Gamma, \mathscr{A})$, что $f_n^* F = G - \delta_{n-1} G_0$. Остается проверить, что $\delta_n F = 0$. Но

$$f_{n+1}^* \circ \delta_n F = \delta_n \circ f_n^* F = \delta_n (G - \delta_{n-1} G_0) = 0.$$

Так как f_{n+1}^* инъективно, то $\delta_n F = 0$.

Обратно, $g_n^* \circ f_n^* = 0$ даже на уровне коциклов.

Наконец, если $H \in$ (ядро δ_n^*), то (опять используем обозначения из определения отображения δ_n^*) $F = \delta_n F_0$, $F_0 \in C^n(\Gamma, \mathscr{A})$. Но $f_{n+1}^* \circ \delta_n F_0 = \delta_n \circ f_n^* F_0 = \delta_n G$. Поэтому $f_n^* F_0 - G \subset C^n(\Gamma, \mathscr{B})$ и $\delta_n (f_n^* F_0 - G) = 0$. Кроме того, $g_n^*(G - f_n^* F_0) = g_n^* G = H$. Мы показали, что (ядро δ_n^*) $\subset$ (образ g_n^*).

Как обычно, проверка обратного утверждния легче. Если $H \in$ (образ g_n^*), то $H = g_n^* G$, $G \in C^n(\Gamma, \mathscr{B})$ и $\delta_n G = 0$. Поэтому для $F \in C^{n+1}(\Gamma, \mathscr{A})$, где $f_{n+1}^* F = \delta_n G$, имеем $f_{n+1}^* F = 0$. Значит, $F = 0$ и $\delta_n^*(H) = 0$. Следовательно, $\delta_n^* \circ g_n^* = 0$.

Замечание. В следующих четырех параграфах этой главы мы опишем группу $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, $q \geqslant 2$, при помощи некоторой точной последовательности. Оказывается, что для конечно порожденных групп Γ пространство $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ является прямой суммой пространства параболических форм и пространства интегралов Эйхлера. Описание группы $H^1(\Gamma, \mathbf{C})$ (случай $q=1$) является неполным и приводится в гл. VI. Некоторые из высших групп когомологий изучаются в гл. VII.

§ 2. Обобщенные коэффициенты Бельтрами

На протяжении этого параграфа Γ — (неэлементарная) клейнова группа, Δ — инвариантное объединение компонент области разрывности Ω группы Γ, λ — метрика Пуанкаре на Δ, а q — положительное целое число.

Напомним, что $\mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$ состоит из (классов эквивалентности) измеримых функций μ на Δ, для которых

(2.1) $$\gamma_q^*\mu = \mu \text{ при всех } \gamma \in \Gamma$$

и

(2.2) $$\lambda^{-q}\mu \text{ ограничена почти всюду.}$$

Под *обобщенным коэффициентом Бельтрами* мы подразумеваем такую измеримую функцию ν на Δ, что

(2.3) $$\gamma_{1-q,1}^*\nu = \nu \text{ для всех } \gamma \in \Gamma$$

и

(2.4) $$|\nu| \leqslant \text{const}\, \lambda^{2-q} \text{ почти всюду.}$$

Заметим, что если $\mu \in \mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, то $\lambda^{2-2q}\overline{\mu}$ является обобщенным коэффициентом Бельтрами. Кроме того, любой обобщенный коэффициент Бельтрами получается таким способом из измеримой ограниченной автоморфной формы.

Замечание. При $q = 2$ обобщенные коэффициенты Бельтрами являются обычными коэффициентами Бельтрами, возникающими в теории квазиконформных отображений.

Задавая обобщенный коэффициент Бельтрами ν, мы будем считать, что его область определения есть $\mathbf{C}$. Мы всюду будем предполагать, что ν обращается в нуль вне Δ. В частности, все обобщенные коэффициенты Бельтрами обращаются в нуль на Λ, предельном множестве группы Γ. Непрерывную функцию F на $\mathbf{C}$ назовем *потенциалом* для обобщенного коэффициента Бельтрами ν, если

(2.5) $$F(z) = O(|z|^{2q-2}), \quad z \to \infty,$$

и

(2.6) $$\frac{\partial F}{\partial \bar{z}} = \nu$$

в смысле обобщенных производных.

Если F — потенциал для обобщенного коэффициента Бельтрами ν, то $F + p$ — также потенциал при любом $p \in \Pi_{2q-2}$. Обратно, если F_1 и F_2 — потенциалы для ν, то в силу (2.6) и леммы Вейля функция $F_1 - F_2$ целая и в силу (2.5) $F_1 - F_2 \in \Pi_{2q-2}$.

Замечание. Если B — любое преобразование Мёбиуса, а ν — обобщенный коэффициент Бельтрами для Γ на Δ, то $B_{1-q,1}^*\nu$ является обобщенным коэффициентом Бельтрами для группы $B^{-1}\Gamma B$ на $B^{-1}\Delta$. Кроме того, отображение $B_{1-q,1}^*$ является изометрией, если мы определим норму коэффициента Бельтрами ν

для Γ на Δ по формуле

$$\|\nu\|_{B,q} = \sup\{\lambda(z)^{q-2}\,|\,\nu(z)\,|;\ z \in \Delta\}. \tag{2.7}$$

Лемма 2.1. *Пусть $q \geqslant 2$, и пусть $\{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}$ — любые $2q-1$ различных точек в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Если ν — обобщенный коэффициент Бельтрами, то найдется такой единственный потенциал F для ν, что*

$$F(a_k) = 0, \quad k = 1, \ldots, 2q-1. \tag{2.8}$$

Доказательство. Если F_1 — другой потенциал для ν, удовлетворяющий (2.8), то $F - F_1 \in \Pi_{2q-2}$ и $F - F_1$ обращается в нуль в $2q-1$ различных точках. Поэтому $F - F_1 = 0$. Таким образом, мы доказали единственность. Перед тем как доказывать существование, мы должны сделать небольшое отступление.

Будем говорить, что потенциал F *обращается в нуль в* ∞, если

$$F(z) = o(|z|^{2q-2}), \quad z \to \infty \tag{2.9}$$

Лемма 2.2. *Пусть F — потенциал для обобщенного коэффициента Бельтрами ν. Если A — произвольное преобразование Мёбиуса, то $A^*_{1-q}F$ является потенциалом для обобщенного коэффициента Бельтрами $A^*_{1-q,1}\nu$. Кроме того, F обращается в нуль в Aa тогда и только тогда, когда $A^*_{1-q}F$ обращается в нуль в a.*

Доказательство. Имеем

$$A^*_{1-q}F(z) = F(Az)\,A'(z)^{1-q}, \quad z \in \mathbf{C}. \tag{2.10}$$

Выберем $z_0 \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ так, что $A(\infty) = z_0$. Если $z_0 = \infty$, то $A'(z) = O(1)$, $z \to \infty$. Поэтому ясно, что в этом случае $A^*_{1-q}F$ удовлетворяет (2.5). Предположим, что $z_0 \neq \infty$. Тогда $Az \to z_0$ при $z \to \infty$. Но

$$F(z) = O(1), \quad z \to z_0,$$

и

$$A'(z) = O(|z|^{-2}), \quad z \to \infty.$$

Поэтому в этом случае $A^*_{1-q}F$ также удовлетворяет (2.5). Цепочка вычислений показывает, что

$$\frac{\partial}{\partial \bar z}(A^*_{1-q}F) = A^*_{1-q,1}\frac{\partial F}{\partial \bar z} = A^*_{1-q,1}\nu. \tag{2.11}$$

Поэтому $A^*_{1-q}F$ является потенциалом для $A^*_{1-q,1}\nu$. Из (2.10) также видно, что $A^*_{1-q}F$ обращается в a в нуль, как только F обращается в нуль в Aa (включая случай $Aa = \infty$). Так как A обратимо и $(A^{-1})^*_{1-q} = (A^*_{1-q})^{-1}$, то лемма доказана.

Лемма 2.3. *Если λ — метрика Пуанкаре для Δ, а $\delta(z)$ — расстояние от $z \in \Delta$ до $\partial\Delta$, границы области Δ, то для компакт-*

ных границ $\partial\Delta$ верно, что для некоторого $C > 0$

$$\lambda(z) \geqslant C \frac{1}{\delta(z) \log 1/\delta(z)}, \quad z \in \Delta. \tag{2.12}$$

Доказательство. Пусть $\Delta_0 = \mathbf{C} \cup \{\infty\} - \{z_0, z_1, z_2\}$, где z_j ($j = 0, 1, 2$) — различные точки в $\partial\Delta$. Пусть λ_0 — метрика Пуанкаре для Δ_0. Тогда, согласно предложению 1.1 гл. II,

$$\lambda(z) \geqslant \lambda_0(z), \quad z \in \Delta.$$

Запишем теперь $\Delta_0 = U/\Gamma_0$, где U — верхняя полуплоскость, а Γ_0—действующая безнеподвижных точек фуксова группа. Прокол z_0 на Δ_0 порождается параболическим элементом, в качестве которого можно выбрать $A(z) = z + 1$. Поэтому $Z = e^{2\pi i z}$, $z \in U$, является локальной координатой на $\overline{\Delta}_0$, обращающейся в нуль в точке z_0. Поэтому из доказательства теоремы 3.2 гл. II мы заключаем, что $\lambda_0(Z) = (2\,|\,Z\,|\log|\,1/Z\,|)^{-1}$ для малых $|\,Z\,|$. Заметим, что $z - z_0$ является голоморфной функцией от Z, причем

$$z - z_0 = \sum_{n=1}^{\infty} b_n Z^n, \quad b_1 \neq 0.$$

Поэтому функция $(z - z_0)/Z$ ограничена и отграничена от нуля для достаточно малых значений модуля $|\,z - z_0\,|$. Следовательно, для малых $|\,z - z_0\,|$

$$\lambda(z) \geqslant c \frac{1}{|\,z - z_0\,| \log(1/|\,z - z_0\,|)}, \quad c > 0. \tag{2.13}$$

Константа c в (2.13) зависит, конечно, от точки $z_0 \in \partial\Delta$. Мы утверждаем, что для c можно выбрать положительную нижнюю границу, не зависящую от z_0, пока z_0 не совпадает с z_1 или z_2. Чтобы проверить это, рассмотрим область $\Delta_0' = \mathbf{C} \cup \{\infty\} - \{z_0', z_1, z_2\}$ с метрикой Пуанкаре λ_0'. Пусть B — преобразование Мёбиуса, переводящее упорядоченную тройку $\{z_0, z_1, z_2\}$ в $\{z_0', z_1, z_2\}$. Тогда

$$\lambda_0'(Bz)\,|\,B'(z)\,| = \lambda_0(z), \quad z \in \Delta_0.$$

Из легко проверяемого равенства

$$Bz - Bz_0 = (z - z_0)\, B'(z)^{1/2}\, B'(z_0)^{1/2}$$

мы заключаем, что

$$\lambda(Bz)\,|\,B'(z)\,| \geqslant c \frac{|\,B'(z)\,|^{1/2}\,|\,B'(z_0)\,|^{1/2}}{|\,Bz - z_0'\,|\,(\log(1/|\,Bz - z_0'\,|) + \log|\,B'(z)^{1/2}\,B'(z_0)^{1/2}\,|)}.$$

Для достаточно малого $|\,z_0 - z_0'\,|$ модуль $|\,B'(z)\,|$ близок к единице, если $|\,z - z_0\,|$ мал. Поэтому обе части неравенства (2.13) квазиинвариантны (умножаются на ограниченную функцию) относительно соответствующего преобразования Мёбиуса.

Так как очевидно, что (2.13) выполняется для любого компактного подмножества множества Δ и так как $\partial\Delta$ можно покрыть конечным числом окрестностей, для которых выполняется (2.13), то мы проверили (2.12).

Замечания. (1) Если $\infty \in \Lambda$, то из (2.13) и инвариантности метрики Пуанкаре относительно конформных отображений $(z \mapsto 1/z)$ мы заключаем, что

$$\lambda(z) \geqslant C \frac{1}{|z| \log |z|}, \quad z \to \infty, \text{ причем } C > 0.$$

Если $\infty \in \Delta$, то более стандартным способом проверяется, что

$$\lambda(z) = O\left(\frac{1}{|z|^2}\right), \quad z \to \infty.$$

(2) В дальнейшем лемма 2.3 не понадобится нам полностью. Мы будем пользоваться лишь тем, что $1/\lambda$ — непрерывная функция на $\mathbf{C}$. Мы уже показали больше — что $1/\lambda$ непрерывно продолжается на $\mathbf{C}$ и

$$1/\lambda \mid \mathbf{C} - \Omega = 0,$$
$$1/\lambda(z) = O(|z|^2), \quad z \to \infty.$$

Эти факты являются, конечно, тривиальными следствиями из (2.13). Однако, для проверки этих фактов независимость c от z_0 не нужна.

(3) Неизвестно, верно ли неравенство типа

$$\lambda(z) \geqslant c/\delta(z), \quad z \in \Delta \quad (\text{где } c > 0).$$

Такое неравенство было бы полезно, так как оно давало бы положительный ответ на проблему, возникшую в гл. IV и касающуюся плотности пространства $\mathcal{A}_q(\Lambda)$ в $\mathcal{A}_q^1(D)$.

Теперь мы можем закончить

Доказательство леммы 2.1. Мы уже доказали единственность. Покажем, что для ν найдется потенциал F, удовлетворяющий (2.8). Ввиду леммы 2.2, можно предположить, что $a_k \neq \infty$ для $k = 1, \ldots, 2q-1$ и что ∞ является обыкновенной точкой для Γ. Положим

$$(2.14)\quad F(z) = \frac{(z-a_1)\ldots(z-a_{2q-1})}{2\pi i} \iint_{\Delta} \frac{\nu(\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}}{(\zeta-z)(\zeta-a_1)\ldots(\zeta-a_{2q-1})}, \quad z \in \mathbf{C}.$$

Так как $\infty \in \Omega$, то $\lambda(z) = O(|z|^{-2})$, $z \to \infty$. Поэтому

$$\nu(z) = O(|z|^{2q-4}), \quad z \to \infty.$$

Из неравенства (2.12) вытекает также, что ν ограничена на компактных подмножествах в $\mathbf{C}$.

Оставшаяся часть леммы является прямым следствием леммы 1.4 гл. IV.

Сейчас мы опишем в несколько иных терминах построение для $\nu = \lambda^{2-2q}\overline{\mu}$ потенциала F, обращающегося в нуль в различных точках $\{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}$.

Для $z \in \mathbf{C}$, $z \neq a_j$, $\zeta \in \Omega$ положим

$$\varphi(z, \zeta) = \varphi_{a_1, \ldots, a_{2q-1}}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{\zeta - z} \prod_{j=1}^{2q-1} \frac{z - a_j}{\zeta - a_j} \tag{2.15}$$

и

$$f(z, \zeta) = f_{a_1, \ldots, a_{2q-1}}(z, \zeta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(z, \gamma\zeta)\, \gamma'(\zeta)^q. \tag{2.16}$$

Мы сразу видим, что φ и f являются мероморфными функциями, $\varphi(z, .) \in \mathscr{L}_q^1(\Omega)$, $f(z, .) = \Theta_q(\varphi(z, .))$ и, следовательно, $f(z, .) \in \mathscr{L}_q^1(\Omega, \Gamma)$. Кроме того, так как $\mu \in \mathscr{L}_q^\infty(\Omega, \Gamma)$, то

$$F(z) = (\varphi(z, .), \mu)_q = (f(z, .), \mu)_{q, \Gamma}. \tag{2.17}$$

Соглашение. В (2.15) мы условимся опускать выражения вида $(z - \infty)$ и $(\zeta - \infty)$. Поэтому a_j может быть при некотором j равно ∞.

Теорема 2.4. (a) *Имеется каноническое антилинейное отображение (отображение Берса)*

$$\beta^*\colon \mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma) \to PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}), \quad q \geqslant 2.$$

(b) $\beta^*(\mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma)) = \beta^*(\mathscr{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma))$, $\quad q \geqslant 2$.

(c) $\beta^* | \mathscr{A}_2^\infty(\Delta, \Gamma)$ *инъективно.*

Доказательство. (a) Пусть $\mu \in \mathscr{L}_q^\infty(\Lambda, \Gamma)$. Положим $\nu = \lambda^{2-2q}\overline{\mu}$. Мы уже отмечали, что ν является обобщенным коэффициентом Бельтрами. Пусть F — потенциал для ν. Определим

$$p_\gamma = \gamma_{1-q}^* F - F, \quad \gamma \in \Gamma. \tag{2.18}$$

Используя (2.3) и (2.11), легко показать, что функция p_γ целая. В силу (2.5)

$$p_\gamma(z) = O(|z|^{2q-2}), \quad z \to \infty.$$

Следовательно, $p_\gamma \in \Pi_{2q-2}$.

Легко проверить, что отображение

$$\gamma \mapsto p_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma, \tag{2.19}$$

является коциклом. (Общая идея совсем проста. Отображение $\gamma \mapsto p_\gamma$ является кограницей цепи с непрерывными коэффициентами. Так как $p_\gamma \in \Pi_{2q-2}$ для всех $\gamma \in \Gamma$, то это отображение является коциклом с полиномиальными коэффициентами.) Класс когомологий коцикла, определяемого посредством (2.19), не зависит от F, а зависит только от ν и обозначается через $\beta^*(\mu)$.

Ясно, что отображение β^* антилинейно. Остается показать, что $\beta^*(\mu)$ является параболическим классом когомологий.

Перед тем, как закончить доказательство теоремы, докажем две леммы.

Лемма 2.5. *Следующие условия эквивалентны для* $\mu \in \mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, $q \geqslant 2$:

(a) $\beta^*(\mu) = 0$,

(b) $\lambda^{2-2q}\overline{\mu}$ *имеет такой потенциал* F, *что* $\gamma_{1-q}^* F = F$ *для всех* $\gamma \in \Gamma$,

(c) $\lambda^{2-2q}\overline{\mu}$ *имеет такой потенциал* F, *что* $F \mid \Lambda = 0$.

Доказательство. (a) $\Rightarrow$ (b). Так как $\beta^*(\mu) = 0$, то для $\lambda^{2-2q}\overline{\mu}$ найдется такой потенциал F_0, что для некоторого $p_0 \in \Pi_{2q-2}$ имеем

$$\gamma_{1-q}^* F_0 - F_0 = \gamma_{1-q}^* p_0 - p_0, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Тогда $F = F_0 - p_0$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Пусть ζ — неподвижная точка локсодромического элемента $\gamma \in \Gamma$. Тогда

$$F(\zeta)\, \gamma'(\zeta)^{1-q} = F(\zeta).$$

Так как $|\gamma'(\zeta)| \neq 1$, то $F(\zeta) = 0$. Так как неподвижные точки локсодромических элементов плотны в предельном множестве группы Γ, то $F \mid \Lambda = 0$.

(c) $\Rightarrow$ (a). Полином p_γ, определенный равенством (2.18), обращается в нуль на Λ. Так как Λ бесконечно, то $p_\gamma = 0$. Поэтому $\beta^*(\mu) = 0$.

Выберем в Λ $2q - 1$ различных точек $a_1, \ldots, a_{2q-1}$. Далее, предположим, что для любого k ($k = 1, \ldots, 2q - 1$) найдется такой локсодромический элемент $\gamma_k \in \Gamma$, что $\gamma_k(a_k) = a_k$. Такие точки всегда можно найти. Рассмотрим потенциал F для $\lambda^{2-2q}\overline{\mu}$, определяемый посредством (2.17) и обращающийся в нуль в точках a_j, $j = 1, \ldots, 2q - 1$.

Предположим теперь, что $\beta^*(\mu) = 0$. Тогда найдется такой элемент $p \in \Pi_{2q-2}$, что

$$\gamma_{1-q}^* F - F = \gamma_{1-q}^* p - p,$$

или

$$\gamma_{1-q}^*(F - p) = F - p. \tag{2.20}$$

Из (2.20) заключаем, что

$$[F(a_k) - p(a_k)]\,\gamma_k'(a_k)^{1-q} = F(a_k) - p(a_k).$$

Так как $F(a_k) = 0$ и $|\gamma'(a_k)| \neq 1$, то $p(a_k) = 0$ и, следовательно, $p = 0$. Но это, как видно из доказательства леммы 2.5, означает, что $F \mid \Lambda = 0$. Поэтому мы получили такое интересное

Следствие. *Пусть* $\mu \in \mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$. *Тогда* $\beta^*(\mu) = 0$ *в том и только в том случае, когда* $(f(z, .), \mu)_{q,\Gamma} = 0$ *для всех* $z \in \Lambda - \{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}$. *В частности, если эти функции плотны в* $\mathscr{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$, *то* $\beta^*(\mu) = 0$ *тогда и только тогда, когда* μ *ортогональна (в смысле скалярного произведения Петерсона) к* $\mathscr{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$.

Лемма 2.6. *Пусть* p — *полином степени* $m \geqslant 0$. *Тогда найдется такой полином* v *степени* $m + 1$, *что* $p(z) = v(z+1) - v(z)$, $z \in \mathbf{C}$.

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\delta\colon \Pi_{m+1} \to \Pi_m,$$

определяемое по формуле

$$\delta v(z) = v(z+1) - v(z), \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{2.21}$$

Достаточно показать, что (ядро δ) $= \mathbf{C}$. Если $v \in$ (ядро δ) и $\deg v > 0$, то у v есть по крайней мере один нуль. Равенство (2.21) показывает, что v имеет бесконечно много нулей. Поэтому $v = 0$.

Продолжим теперь

Доказательство теоремы 2.4. Покажем, что $\beta^*(\mu)$ является параболическим классом когомологий для всех $\mu \in \mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$. Пусть $A \in \Gamma$ — параболический элемент. Так как параболичность класса когомологий инвариантна относительно сопряжения, то можно предположить, что $A(z) = z + 1$, $z \in \mathbf{C}$. Выберем для $\lambda^{2-2q}\overline{\mu}$ потенциал F, обращающийся в нуль в ∞. Тогда из (2.18) мы заключаем, что

$$p_A(z) = o(|z|^{2q-2}), \qquad z \to \infty.$$

Следовательно, p_A имеет степень $\leqslant 2q - 3$. Согласно лемме 2.6, найдется такой полином $v \in \Pi_{2q-2}$, что $v(z+1) - v(z) = p_A(z)$, $z \in \mathbf{C}$. Поэтому $\beta^*(\mu) \in PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$.

(b) Пусть $\mu \in \mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$. Согласно теореме 3.1 гл. III, найдется такая форма $\psi \in \mathscr{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, что

$$(\varphi, \mu)_{q,\Gamma} = (\varphi, \psi)_{q,\Gamma} \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{A}_q^1(\Delta, \Gamma).$$

Ввиду следствия из леммы 5.5 $\beta^*(\mu) = \beta^*(\psi)$.

(c) Мы знаем, что $\beta^*(\psi) = 0$ для $\psi \in \mathcal{A}_2^\infty(\Delta, \Gamma)$ тогда и только тогда, когда

$$(2.22) \qquad (f(z, .), \psi)_{q,\Gamma} = 0 \text{ для всех } z \in \Lambda - \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Из равенства (2.17) заключаем, что функции $\{f(z, .); z \in \Lambda - \{a_1, a_2, a_3\}\}$ плотны в $\mathcal{A}_2^1(\Lambda, \Gamma)$, как только функции $\{\varphi(z, .); z \in \Lambda - \{a_1, a_2, a_3\}\}$ плотны в $\mathcal{A}_2^1(\Delta)$. По теореме Берса об аппроксимации эти функции плотны в $\mathcal{A}_2^1(\Omega) \supset \mathcal{A}_2^1(\Delta)$. Используя (2.22), получаем, что $\beta^*\psi = 0$ тогда и только тогда, когда $\psi = 0$.

Определение. Назовем β^* *отображением Берса*, а $\beta^*(\varphi)$ — *классом когомологий Берса* формы $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$.

Теперь мы можем сделать первый шаг в направлении доказательства теоремы Альфорса.

Следствие. *Если клейнова группа* Γ *порождается* N *элементами, то*

$$\dim \mathcal{A}_2^\infty(\Omega, \Gamma) \leqslant 3(N-1),$$

где Ω — *область разрывности группы* Γ.

Доказательство. Следствие немедленно вытекает из части (c) теоремы и из леммы 1.1.

Замечание. Следующие замечания помогут понять, что такое отображение Берса, тем, кто хорошо знаком с теорией квазиконформных отображений. Пусть M — единичный открытый шар в $\mathcal{L}^\infty(\mathbf{C})$. Для любой функции $\mu \in M$ найдется единственное квазиконформное преобразование w^μ множества $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ на себя, оставляющее неподвижными точки $0, 1, \infty$. Множество всех таких квазиконформных отображений содержится в линейном пространстве F, имеющем много свойств банахова пространства. В частности, есть смысл в высказывании, что отображение

$$\Phi\colon M \ni \mu \mapsto \omega^\mu \in F$$

является голоморфным в нуле. Его дифференциал в нуле является линейным отображением

$$d\Phi'(0)\colon \mathcal{L}^\infty(\mathbf{C}) \to C(\mathbf{C}),$$

задаваемым формулой

$$(d\Phi'(0)\mu)(z) = \frac{z(z-1)}{2\pi i} \iint_{\mathbf{C}} \frac{\mu(\zeta)}{\zeta(\zeta-1)(\zeta-z)}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta},$$

где $C(\mathbf{C})$ — пространство непрерывных функций на $\mathbf{C}$. Поэтому $d\Phi'(0)(\mu)$ является потенциалом для коэффициента Бельтрами μ, обращающимся в нуль в $0, 1, \infty$.

§ 3. Обращение отображения Берса β*

Пусть Δ — инвариантное объединение компонент области разрывности клейновой группы Γ. *Разбиением единицы* для Γ на Δ называется гладкая функция η, удовлетворяющая условиям следующей леммы:

Лемма 3.1. *Найдется такая функция* $\eta \in \mathscr{C}^\infty(\Delta)$, *что*

(1) $0 \leqslant \eta \leqslant 1$,

(2) *для любой точки* $z \in \Delta$ *найдется такая ее окрестность* U *и такое конечное подмножество* J *группы* Γ, *что* $\eta \mid \gamma(U) = 0$ *для любого* $\gamma \in \Gamma - J$,

(3) $\sum_{\gamma \in \Gamma} \eta(\gamma z) = 1, \quad z \in \Delta.$

Кроме того, если ω — *фундаментальная область для* Γ *в* Δ, *то для любого прокола* p *на* Δ/Γ *можно выбрать такую параболическую область* $V \subset \omega$, *принадлежащую точке* p, *что* $\eta \mid \gamma(V) = 0$ *для любого* $\gamma \in \Gamma - \{1, A\}$, *где* A — *параболическое преобразование, соответствующее проколу* p.

Доказательство. Пусть $\pi\colon \Delta \to \Delta/\Gamma$ — естественная проекция. Пусть $\{y_1, y_2, \ldots\} = Y$ — проколы на $\overline{\Delta/\Gamma}$. Выберем такие непересекающиеся координатные окрестности Z_i, W_i точек y_i, что

$$y_i \in Z_i, \qquad \mathrm{Cl}\, Z_i \subset W_i$$

и $\pi^{-1}(W_i)$ содержится в полуплоскости, принадлежащей проколу y_i.

Это можно сделать, так как Y — дискретное подмножество в $\overline{\Delta/\Gamma}$. Пусть $Z = \bigcup_i Z_i$. Заметим, что $\mathrm{Cl}\, Z = \bigcup_i \mathrm{Cl}\, Z_i$. Выберем некоторую фундаментальную область ω.

Для каждой точки $x \in \Delta/\Gamma$ выберем такую координатную окрестность $V(x)$ точки x, что отображение π, ограниченное на любую компоненту множества $\pi^{-1}(V(x))$, является накрытием кратности $n(x)$, где $n(x)$ — порядок подгруппы стабильности любой точки из $\pi^{-1}(x)$. Кроме того, если $x \notin \mathrm{Cl}\, Z$, то мы потребуем, чтобы $V(x) \cap \mathrm{Cl}\, Z$ было пусто; а если $x \in W_i$ для некоторого i и $\pi^{-1}(x) \in \mathrm{Cl}\, \omega$, то мы потребуем, чтобы одна из компонент множества $\pi^{-1}(V(x))$ содержалась в $\omega \cup A_i(\omega)$, где A_i — параболическое преобразование, соответствующее проколу y_i. Очевидно, что такое множество окрестностей может быть выбрано.

Далее $\{V(x);\ x \in \Delta/\Gamma\} = \mathscr{V}$ является открытым покрытием поверхности Δ/Γ, а поверхность Δ/Γ паракомпактна (она является счетным объединением римановых поверхностей). Поэтому мы можем выбрать локально конечное подпокрытие $\{V(x_j);\ j =$

$= 1, 2, \ldots\} = \mathscr{V}_0$ покрытия $\mathscr{V}$. Пусть $\{\widetilde{u}_j\}$ — гладкое разбиение единицы, соответствующее покрытию $\mathscr{V}_0$. То есть $\widetilde{u}_j$ при любом j является гладкой функцией на Δ/Γ, замыкание носителя которой содержится в $V(x_j)$, причем

$$\sum_j \widetilde{u}_j(x) = 1 \text{ для всех } x \in \Delta/\Gamma.$$

Для любого j выберем теперь какую-нибудь одну компоненту $U(x_j)$ множества $\pi^{-1}(V(x_j))$. Как и прежде, если $x_j \in W_i$ для некоторого i, то мы потребуем, чтобы $U(x_j) \subset \omega \cup A_i(w)$. Определим

$$u_j(z) = \begin{cases} u_j(\widetilde{\pi}(z)), & \text{если } z \in U(x_j), \\ 0, & \text{если } z \in \Delta - U(x_j). \end{cases}$$

Ясно, что $u_j \in \mathscr{C}^\infty(\Delta)$ и

$$\eta(z) = \sum_{j=1}^{\infty} [u_j(z)/n(x_j)], \quad z \in \Delta,$$

обладает требуемыми свойствами.

Замечания. (1) Если замыкание фундаментальной области для Γ в Δ компактно в Δ, то можно так выбрать функцию η, чтобы она имела компактный носитель. В этом случае $\eta \in \mathscr{C}^\infty(\mathbf{C} \cup \{\infty\})$.

(2) Разбиение единицы для Γ в Δ является «сглаженной» характеристической функцией фундаментальной области для Γ в Δ.

(3) Приведем еще одну конструкцию функции η, предложенную Куга. Зафиксируем фундаментальную область ω для Γ в Δ типа построенной в § 3 гл. II. Для любой точки $z \in \mathrm{Cl}\,\omega$ выберем такие окрестности $U(z)$ и $V(z)$, что

$$z \in U(z) \subset \mathrm{Cl}\, U(z) \subset V(z)$$

и

$$V(z) \cap \gamma(\omega)$$

пусто для всех, кроме конечного числа, элементов $\gamma \in \Gamma$. Если z — точка параболической области, определенной некоторым проколом на Δ/Γ, то мы потребуем, чтобы $V(z) \cap \gamma(\omega)$ было пусто для $\gamma \notin \{1, A, A^{-1}\}$, где A — параболическое преобразование, определяемое этим проколом. Пусть

$$U = \bigcup_{z \in \mathrm{Cl}\,\omega} U(z), \qquad V = \bigcup_{z \in \mathrm{Cl}\,\omega} V(z).$$

Тогда

$$\mathrm{Cl}\,\omega \subset U \subset \mathrm{Cl}\, U \subset V.$$

Заметим, что, если $z \in \Delta$ — произвольная точка, то найдется такая ее окрестность $W(z)$, что $\gamma(W(z)) \cap V$ непусто для всех, кроме конечного числа, элементов $\gamma \in \Gamma$. Выберем такую функцию $f \in \mathscr{C}^\infty(\Delta)$, что

(i) $f > 0$,

(ii) $f(z) > 0$ для $z \in U$,

(iii) $f \cdot | \Delta - V = 0$.

Положим

$$\eta(z) = \frac{f(z)}{\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} f(\gamma z)}, \quad z \in \Delta.$$

Легко проверить, что η обладает всеми свойствами разбиения единицы. Если V — параболическая область, определенная параболическим преобразованием A, то η обращается в нуль вне

$$V \cup A(V) \cup A^{-1}(V).$$

Следующий результат является теоремой типа теоремы де Рама.

Теорема 3.2. *Если $\mathscr{A} = \mathscr{C}^\infty_{r,s}(\Delta)$, где r и s — любые целые числа, то $H^1(\Gamma, \mathscr{A}) = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть f — коцикл, представляющий класс когомологий из $H^1(\Gamma, \mathscr{A})$. Для $z \in \Delta$ положим

$$\theta(z) = -\sum_{\gamma \in \Gamma} \eta(\gamma z) f_\gamma z, \tag{3.1}$$

где η — разбиение единицы для Γ на Δ. Ясно, что $\theta \in \mathscr{A}$. Производим вычисления для $A \in \Gamma$ и $z \in \Delta$:

$$(\theta A)(z) - \theta(z) = -\sum_{\gamma \in \Gamma} [\eta(\gamma A z) f_\gamma(Az) A'(z)^r \overline{A'(z)}^s - \eta(\gamma z) f_\gamma(z)] =$$

$$= -\sum_{\gamma \in \Gamma} [\eta(\gamma A z(f_{\gamma A}(z) - f_A(z)) - \eta(\gamma z) f_\gamma(z)] =$$

$$= \sum_{\gamma \in \Gamma} \eta(\gamma A z) f_A(z) = f_A(z).$$

Поэтому f является кограницей коцепи θ.

Следствие. *Если $\mathscr{A} = \Pi_{2q-2}$ или $\mathscr{A} = \mathscr{A}_r(\Delta)$, то для любого коцикла φ, представляющего класс когомологий из $H^1(\Gamma, \mathscr{A})$, найдется такой ряд $\theta \in \mathscr{C}^\infty_r(\Delta)$, что*

$$\varphi_\gamma = \theta\gamma - \theta, \quad \gamma \in \Gamma$$

(здесь $r = 1 - q$, когда $\mathscr{A} = \Pi_{2q-2}$).

Доказательство. Вложение $\mathcal{A}$ в $\mathscr{C}_r^\infty(\Delta)$ индуцирует отображение из $H^1(\Gamma, \mathcal{A})$ в $H^1(\Gamma, \mathscr{C}_r^\infty(\Delta))$.

Замечание. В приведенных выше теореме и следствии мы могли заменить Δ на любое Γ-инвариантное подмножество области Δ.

Попытаемся теперь наложить некоторые условия на рост функции θ, представляющей класс когомологий из $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ и определенной по формуле (3.1).

Определение. Пусть p — коцикл, представляющий класс когомологий из $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, $q \geqslant 1$. Зафиксируем фундаментальную область ω для Γ в Δ типа построенной в § 3 гл. II. Мы будем интересоваться элементами $\theta \in \mathscr{C}_{1-q}^\infty(\Delta)$, удовлетворяющими следующим условиям:

(i) $p_\gamma = \theta\gamma - \theta$ на Δ для всех $\gamma \in \Gamma$.

(ii) Если ∞ — неподвижная точка параболического элемента группы Γ, который соответствует некоторому проколу на Δ/Γ, и $\infty \in \mathrm{Cl}\,\omega$ (замыкание области ω в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$), то

$$\theta(z) = O(|z|^{2q-2+\varepsilon}), \quad z \to \infty,$$

в параболической области (содержащейся в ω). принадлежащей точке ∞. Если $\zeta \in \Lambda$ — конечная неподвижная точка параболического элемента группы Γ, который соответствует некоторому проколу на Δ/Γ, и $\zeta \in \mathrm{Cl}\,\omega$, то

$$\theta(z) = O(|z - \zeta|^{-\varepsilon}), \quad z \to \zeta,$$

в параболической области (содержащейся в ω), принадлежащей точке ζ.

(iii) Если $\mu(z) = \partial\theta/\partial\bar{z}$, $z \in \Delta$, то μ является обобщенным коэффициентом Бельтрами для Γ.

Если $\varepsilon = 1$, то скажем, что θ *квазиограниченно представляет* p на Δ; а если $\varepsilon = 0$, то скажем, что θ *ограниченно представляет* p на Δ.

Замечания. (1) Если $\theta \in \mathscr{C}_{1-q}^\infty(\Delta)$ (квази) ограниченно представляет Π_{2q-2}-коцикл p на группе Γ, то для любого преобразования Мёбиуса B функция $B_{1-q}^*\theta \in \mathscr{C}_{1-q}^\infty(B^{-1}\Delta)$ (квази)ограниченно представляет на $B^{-1}(\Delta)$ коцикл p^B на группе $B^{-1}\Gamma B$, который определяется равенством

$$p^B_{B^{-1}\gamma B} = p_\gamma B = B_{1-q}^* p_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Конечно, мы используем фундаментальную область $B^{-1}\omega$ для группы $B^{-1}\Gamma B$ в $B^{-1}\Delta$. Единственное утверждение, которое нуждается в проверке, состоит в том, что $\partial(B_{1-q}^*\theta)/\partial\bar{z}$ является

обобщенным коэффициентом Бельтрами для группы $B^{-1}\Gamma B$. Но

$$\frac{\partial (B^*_{1-q}\theta)}{\partial \bar z} = B^*_{1-q,\,1}\frac{\partial \theta}{\partial \bar z},$$

а мы уже видели, что $B^*_{1-q,\,1}$ является изометрией между пространствами обобщенных коэффициентов Бельтрами, если норма в них введена, как в (2.7).

(2) Если Δ/Γ является объединением конечного числа римановых поверхностей, то функция θ, существование которой утверждается в следствии из теоремы 3.2, ограниченно представляет p на Δ. Условие (i) очевидно, (ii) бессодержательно, а (iii) выполняется, так как $\mathrm{Cl}\,\omega$ компактно в Δ, а из инвариантности обобщенных коэффициентов Бельтрами вытекает, что (2.7) можно переписать как

$$\|\nu\|_{B,\,q} = \sup\{\lambda(z)^{q-2}\,|\,\nu(z)\,|;\ z \in \omega\}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.3. *Пусть Γ — такая клейнова группа, что Δ/Γ имеет конечный тип. Если p — коцикл, который представляет класс когомологий из $H^1(\Gamma, \Pi_{2x-2})$, $q \geqslant 1$, то найдется функция $\theta \in \mathscr{C}^\infty_{1-q}(\Delta)$, квазиограниченно представляющая p на Δ. Если p представляет класс когомологий из $PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, то функцию θ можно выбрать так, чтобы она ограниченно представляла p на Δ.*

Доказательство. Так как Δ/Γ конечного типа, то ω состоит из относительно компактного подмножества области Δ и конечного числа параболических областей, принадлежащих проколам на Δ/Γ.

Если поверхность Δ/Γ компактна, то функция θ, определяемая по коциклу p равенством (3.1), ограниченно представляет p на Δ. Поэтому мы предположим, что на Δ/Γ есть проколы.

Мы заменим приведенное выше условие (iii) на более сильное условие

(iii)′ функция θ голоморфна в полуплоскости, принадлежащей любому проколу на Δ/Γ.

Ясно, что для поверхности Δ/Γ конечного типа условие (iii) следует из (iii)′.

Предположим теперь, что на Δ/Γ есть ровно один прокол. Ввиду первого замечания перед этой леммой можно предположить, что ∞ является неподвижной точкой, соответствующей этому проколу, соответствующее параболическое преобразование есть $A(z) = z + 1$, $z \in \mathbf{C}$, а соответствующая параболическая область —

$$V_c = \{z \in \mathbf{C};\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > c\}.$$

Тогда полуплоскость, определяемая данным проколом, — это

$$U_c = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > c\}.$$

Выберем такой полином v степени $\leqslant 2q-1$, что

$$p_A(z) = v(z+1) - v(z), \quad z \in \mathbf{C}. \tag{3.3}$$

Будем рассматривать v как элемент пространства $\mathscr{C}^{\infty}_{1-q}(\Delta)$ и образуем $\mathscr{C}^{\infty}_{1-q}(\Delta)$-коцикл

$$f_\gamma = p_\gamma - (v\gamma - v), \quad \gamma \in \Gamma.$$

Так как $p_{A^n} = vA^n - v$, то $f_{A^n} = 0$ для $n \in \mathbf{Z}$. По формуле (3.1) определим θ и заметим, что

$$\theta\gamma - \theta = p_\gamma - (v\gamma - v), \quad \gamma \in \Gamma, \tag{3.4}$$

и

$$\theta \mid U_c = 0. \tag{3.5}$$

Утверждение (3.4), конечно, тривиально. Чтобы проверить (3.5), заметим, что если $z \in U_c$, то

$$f_\gamma(z) = 0 \text{ для } \gamma = A^n, \quad n \in \mathbf{Z}$$

и

$$\eta(\gamma z) = 0 \text{ для } \gamma \in \Gamma,\ \gamma \neq A^n \text{ для всех } n \in \mathbf{Z}. \tag{3.6}$$

Для того чтобы выполнялось (3.5), возможно, нужно увеличить c, но это не ограничивает общности.

Мы показали, что

$$\theta + v$$

удовлетворяет условиям (i), (ii) и (iii)′ и поэтому представляет p квазиограниченно на Δ.

Если Δ/Γ имеет $n > 1$ проколов $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset \overline{\Delta/\Gamma}$, то мы покажем, что для любого целого m, $1 \leqslant m \leqslant n$, найдется функция $\theta_m \in \mathscr{C}^{\infty}_{1-q}(\Delta)$, удовлетворяющая условиям (i), (ii) и (iii)′ в полуплоскостях, принадлежащих первым m проколам $\{x_1, \ldots, x_m\}$. Проведем индукцию по m. Мы показали, что θ_1 существует. Построив θ_m $(1 \leqslant m < n)$, возьмем такую функцию $\chi \in \mathscr{C}^{\infty}(\Delta, \Gamma)$, что

$0 \leqslant \chi \leqslant 1$,

$\chi = 1$ в полуплоскостях, принадлежащих проколам $\{x_1, \ldots, x_m\}$ и

$\chi = 0$ в полуплоскости, принадлежащей проколу x_{m+1}.

Пусть θ — функция, построенная в первой части этого доказательства (случай $n = 1$) для прокола x_{m+1}. Положим

$$\theta_{m+1} = \chi\theta_m + (1-\chi)\,\theta.$$

Если p представляет Δ-параболический класс когомологий, то полином v, удовлетворяющий равенству (3.3), лежит в Π_{2q-2}. Поэтому построенная выше функция θ представляет p ограниченно на Δ.

Замечание. Если p возникает из Δ-параболического класса когомологий, то ограничение построенной выше функции θ на некоторую полуплоскость, принадлежащую любому проколу на Δ/Γ, является полиномом из Π_{2q-2}. Если же мы не требуем параболичности коцикла p, то θ является полиномом степени не выше $2q-1$ при ограничении на полуплоскость, принадлежащую «бесконечной параболической вершине», и рациональной функцией при ограничении на полуплоскость, принадлежащую «конечной параболической вершине». Рациональная функция может иметь простой полюс в каждой «конечной параболической вершине».

Теорема 3.4. *Пусть* Γ — (*неэлементарная*) *клейнова группа, а* Δ — *такое инвариантное объединение компонент ее области разрывности, что* Δ/Γ *имеет конечный тип. Тогда найдется антилинейное отображение*

$$\beta\colon H^1(\Gamma,\Pi_{2q-2}) \to \mathcal{A}_q^\infty(\Delta,\Gamma), \quad q\geqslant 1,$$

такое, что

$$\beta\circ\beta^* = \mathrm{id} \quad \text{на} \quad \mathcal{A}_q^\infty(\Delta,\Gamma), \quad q\geqslant 2.$$

В частности, β^* *инъективно, а* β *сюръективно (даже при ограничении на* $PH^1(\Gamma,\Pi_{2q-2})$) *для* $q\geqslant 2$.

Напомним, что отображение Берса β^* определяется при помощи теоремы 2.4.

Доказательство. Пусть ω — фундаментальная область для Γ в Δ ранее рассматривавшегося типа, т. е. ω состоит из конечного числа компонент, каждая из которых односвязна, ограничена конечным числом дуг, попарно отождествляемых посредством элементов группы Γ, и каждая компонента области ω состоит из относительно компактного подмножества области Δ и конечного числа параболических областей, принадлежащих проколам на Δ/Γ. Пусть $\partial\omega$ обозначает (положительно) ориентированную границу области ω. Заметим, что если C и C' — две стороны границы $\partial\omega$, отождествляемые элементом $\gamma\in\Gamma$, то (меняя местами, если надо, C и C') можно предположить, что

$$\gamma(C) = -C'. \tag{3.7}$$

Пусть p — коцикл, представляющий класс когомологий из $H^1(\Gamma,\Pi_{2q-2})$, $q\geqslant 2$. Выберем элемент $\theta\in\mathcal{C}_{1-q}^\infty(\Delta)$, который представляет p квазиограниченно на Δ. Пусть $\mu(z)=\partial\theta/\partial\bar z$, $z\in\Delta$. Для $q\geqslant 1$ положим

$$l(\varphi) = \iint\limits_{\Delta/\Gamma} \varphi(z)\,\mu(z)\,dz\wedge d\bar z, \quad \varphi\in\mathcal{A}_q^1(\Delta,\Gamma). \tag{3.8}$$

Так как μ является обобщенным коэффициентом Бельтрами, то

$$|l(\varphi)| \leqslant \left(\iint\limits_{\Delta/\Gamma} \lambda^{2-q}(z)\,|\varphi(z)\,dz\wedge d\bar{z}|\right)(\sup\{\lambda^{q-2}(z)\,|\mu(z)|;\ z\in\Delta\}) =$$
$$= \|\varphi\|_{q,1,\Gamma}\|\mu\|_{B,q}.$$

Поэтому l является ограниченным линейным функционалом на $\mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$. Отождествим l с элементом $\beta(p)$ пространства $\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$ при помощи скалярного произведения Петерсона.

Так как $\varphi\mu$ является ((1,1)-инвариантной) плотностью, то (3.8) не зависит от выбора фундаментальной области ω, представляющей поверхность Δ/Γ. Покажем теперь, что если мы возьмем другой элемент $\theta \in \mathscr{C}_{1-q}^\infty(\Delta)$, то получим тот же самый линейный функционал. Пусть $\hat{l}$ — линейный функционал, который определен по элементу $\hat{\theta} \in \mathscr{C}_{1-q}^\infty(\Delta)$ и также квазиограниченно представляет p на Δ. Замечая, что

$$l(\varphi) = -\iint\limits_{\omega} \bar{\partial}(\theta\varphi\,dz), \quad \varphi \in \mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma),$$

получаем

$$(l-\hat{l})(\varphi) = \iint\limits_{\omega} \bar{\partial}[(\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz],\ \varphi \in \mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma).$$

Так как

$$\gamma_{1-q}^*(\hat{\theta}-\theta) = \hat{\theta} - \theta, \quad \gamma \in \Gamma,$$

то

(3.9) $$(\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz \quad \Gamma\text{-инвариантен.}$$

Если у Δ/Γ нет проколов, то мы из теоремы Стокса получаем, что

$$(l-\hat{l})(\varphi) = \int\limits_{\partial\omega} (\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz = 0.$$

Последнее равенство вытекает из того, что стороны границы $\partial\omega$ попарно отождествляются элементами группы Γ (равенство (3.7)), и того, что ввиду (3.9) интегралы по отождествленным сторонам взаимно уничтожаются.

Если же проколы есть, то теорему Стокса нельзя применять непосредственно. Мы воспользуемся приемом, принадлежащим Берсу. Предположим, что Δ содержит $k \geqslant 1$ параболических областей. Мы в каждой параболической области проведем гладкую кривую C_s, $s = 1, \ldots, k$, так, что

i) C_s соединяет две точки ζ_s и ζ_s' на $\partial\omega$.

ii) C_s лежит на окружности, инвариантной относительно параболического преобразования A_s, соответствующего s-му проколу,

iii) кривые C_s попарно не пересекаются.

Таким способом мы получаем относительно компактное подмножество ω^* области ω, ограниченное частично сторонами границы $\partial\omega$ и частично кривыми $C_1, \ldots, C_k$. Если точки ζ_s достаточно близки к неподвижным точкам a_s соответствующих параболических элементов A_s, то

$$\iint\limits_{\omega^*} \bar{\partial}\,[(\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz]$$

так близок, как мы потребуем, к

$$(l-\hat{l})(\varphi)$$

для фиксированной функции $\varphi \in \mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$. По теореме Стокса

$$\iint\limits_{\omega^*} \bar{\partial}\,[(\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz] = \sum_{s=1}^{k} \int\limits_{C_s} (\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz.$$

Покажем, наконец, что

$$\text{при } \zeta_s \xrightarrow{\lim} a_s \text{ имеем } \int\limits_{C_s} (\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz = 0.$$

Достаточно рассмотреть случай, когда $s=1$, $A_1(z)=z+1$, $a_1=\infty$, а соответствующая параболическая область есть

$$V_c = \{z \in \mathbf{C};\ 0 \leqslant \operatorname{Re} z < 1,\ \operatorname{Im} z > c\}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{C_1} (\hat{\theta}-\theta)\,\varphi\,dz = \int\limits_0^1 [\hat{\theta}(x+ib)-\theta(x+ib)]\varphi(x+ib)\,dx,$$

где $\zeta_1 = ib$, $b > c$ (и, значит, $\zeta_1' = 1+ib$).

Из (8.5) гл. III заключаем, что

$$|\varphi(x+ib)| \leqslant \text{const}\, e^{-2\pi b}.$$

Так как, кроме того,

$$|(\hat{\theta}-\theta)(x+ib)| \leqslant \text{const}\,(x^2+b^2)^{(1/2)(2q-1)},$$

то

$$\lim_{b\to\infty} \int\limits_0^1 [\hat{\theta}(x+ib)-\theta(x+ib)]\,\varphi(x+ib)\,dx = 0.$$

Так как l, как легко видеть, не зависит от выбора коцикла, представляющего класс когомологий из $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, то отображение β корректно определено.

При $q \geqslant 2$ мы можем пойти дальше. Если $\psi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, то $\lambda^{2-2q}\bar{\psi}$ является обобщенным коэффициентом Бельтрами. Пусть F — потенциал для $\lambda^{2-2q}\bar{\psi}$. Тогда

$$p_\gamma = \gamma^*_{1-q}F - F, \qquad \gamma \in \Gamma,$$

определяет коцикл, который ограниченно представляется на Δ при помощи F. Напомним, что $\beta^*(\psi) \in PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ является классом когомологий этого коцикла. Ясно, что

$$\beta \circ \beta^*(\psi) = \psi \text{ для всех } \psi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma). \tag{3.10}$$

Сказанное выше показывает, что

(1) β^* инъективно на $\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$,

(2) β сюръективно (даже при ограничении на $PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ и

(3) β — каноническое отображение.

Следствие 1. *При $q \geqslant 2$ отображение Берса β^* инъективно, если Δ/Γ является объединением поверхностей конечного типа.*

Доказательство. Для конечного объединения поверхностей конечного типа утверждение содержится в теореме. Пусть $\Delta = \bigcup_j \Delta_j$, где Δ_j — такое инвариантное объединение компонент области Δ, что Δ_j/Γ представляет собой одну риманову поверхность. Тогда $\beta^* \mid \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma)$ инъективно при каждом j. Поэтому функции

$$\{f(z, \cdot\,);\ z \in \Lambda - \{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}\}$$

(определяемые при помощи (2.15) и (2.16)) плотны в $\mathcal{A}_q^1(\Delta_j, \Gamma)$ для любого j. (Вспоминаем обозначения и результат следствия из леммы 2.5.) Поэтому те же самые функции плотны в $\mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$. Следовательно, $\beta^* \mid \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$ инъективно.

Следствие 2. *Пусть Γ — клейнова группа, а Δ — такое инвариантное объединение компонент ее области разрывности, что Δ/Γ имеет конечный тип. Если Γ порождается N элементами, то*

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) \leqslant (2q-1)(N-1), \qquad q \geqslant 2.$$

В гл. III мы ввели проекцию

$$\beta_q\colon \mathcal{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma) \to \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma), \quad q \geqslant 2.$$

В этой главе мы построили отображение этих пространств для Δ/Γ конечного типа:

$$\mathscr{L}_q^\infty(\Delta, \Gamma) \xrightarrow{\beta^*} PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \xrightarrow{\beta} \mathscr{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma), \quad q \geqslant 2.$$

Между этими отображениями имеется связь.

Теорема 3.5. *Пусть* Γ — (*неэлементарная*) *клейнова группа, а* Δ — *такое инвариантное объединение компонент ее области разрывности, что* Δ/Γ *имеет конечный тип. Тогда для* $q \geqslant 2$

$$\beta_q = \beta \circ \beta^*.$$

Доказательство. Ввиду следствия из леммы 3.5 и следствия 1 из теоремы 2.1 гл. III оба отображения имеют одно и то же нулевое подпространство. С другой стороны, оба отображения являются проекциями на $\mathscr{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$ (в частности, тождественны на $\mathscr{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$).

Высшие группы когомологий и резольвенты из тонких модулей

На протяжении этого пункта Δ есть инвариантное открытое подмножество области разрывности клейновой группы Γ. Назовем Γ-модуль $\mathscr{A}$ *тонким*, если

$$H^n(\Gamma, \mathscr{A}) = \{0\} \text{ для всех } n \geqslant 1.$$

Теорема 3.2′. *Для любых* $r, s \in \mathbf{Z}$ Γ-*модуль* $\mathscr{C}_{r,s}^\infty(\Delta)$ *тонок.*

Доказательство. Пусть η — разбиение единицы для Γ на Δ. Пусть $F \in C^n(\Gamma, \mathscr{A})$, $n \geqslant 1$, причем $\delta_n F = 0$. Определим

$$G(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})(z) = \sum_{g \in \Gamma} F(g, \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})(z)\, \eta(gz), \tag{3.11}$$
$$z \in \Delta, \ (\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) \in \Gamma^n.$$

Вместо (3.11) напишем сокращенное равенство

$$G(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}) = \sum_{g \in \Gamma} (\eta \circ g)\, F(g, \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1}). \tag{3.11′}$$

Функция G корректно определена и принадлежит $\mathscr{C}_{r,s}^\infty(\Delta)$. Она является $(n-1)$-коцепью, так как

$$\begin{aligned} G(\gamma_0\gamma, \ldots, \gamma_{n-1}\gamma) &= \sum_{g \in \Gamma} (\eta \circ g)\, F(g, \gamma_0\gamma, \ldots, \gamma_{n-1}\gamma) = \\ &= \sum_{g \in \Gamma} (\eta \circ g\gamma)\, F(g\gamma, \gamma_0\gamma, \ldots, \gamma_{n-1}\gamma) = \\ &= \sum_{g \in \Gamma} (\eta \circ g\gamma)\, F(g, \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})\, \gamma = \\ &= \Big(\sum_{g \in \Gamma} (\eta \circ g)\, F(g, \gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})\Big)\, \gamma = \\ &= G(\gamma_0, \ldots, \gamma_{n-1})\, \gamma. \end{aligned}$$

Вычисляем также

$$\delta G(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i G(\gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_n) =$$

$$= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{g \in G} (\eta \circ g) F(g, \gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_n) =$$

$$= \sum_{g \in G} (\eta \circ g) \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F(g, \gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_n).$$

Так как $\delta F = 0$, то

$$(\delta F)(g, \gamma_0, \ldots, \gamma_n) = F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) -$$

$$- \sum_{i=0}^{n} (-1)^i F(g, \gamma_0, \ldots, \hat{\gamma}_i, \ldots, \gamma_n) = 0.$$

Поэтому

$$\delta G(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) = \sum_{g \in G} (\eta \circ g) F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) =$$

$$= F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n) \sum_{g \in G} \eta \circ g = F(\gamma_0, \ldots, \gamma_n).$$

Тонкой резольвентой Г-модуля $\mathcal{A}$ называется точная последовательность Г-модулей и Г-линейных отображений вида

$$0 \to \mathcal{A} \to \mathcal{A}_0 \xrightarrow{d_0} \mathcal{A}_1 \xrightarrow{d_1} \mathcal{A}_2 \xrightarrow{d_2} \ldots, \tag{3.12}$$

где все Г-модули $\mathcal{A}_j$ $(j \geqslant 0)$ являются тонкими. Для любого Г-линейного отображения d_j имеется индуцированный гомоморфизм

$$d_j^*: \mathcal{A}_j(\Gamma) \to \mathcal{A}_{j+1}(\Gamma).$$

Замечание. Мы несколько изменили обозначения. Указанные выше отображения нужно было бы, конечно, обозначить через $(d_j)_0^*$.

Теорема 3.6. *Если* (3.12) *является тонкой резольвентой* Г-*модуля* $\mathcal{A}$, *то*

$$H^n(\Gamma, \mathcal{A}) \cong (\text{ядро } d_n^*)/(\text{образ } d_{n-1}^*), \quad n \geqslant 1.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{B}_j = (\text{ядро } d_j) \subset \mathcal{A}_j$, $j \geqslant 0$. Длинную точную последовательность (3.12) можно записать в виде системы коротких точных последовательностей

$$0 \to \mathcal{B}_j \xrightarrow{i} \mathcal{A}_j \xrightarrow{d_j} \mathcal{B}_{j+1} \to 0, \quad j \geqslant 0. \tag{3.13}$$

В (3.13) мы для $j > 0$ в качестве i возьмем отображение вложения. Для $j = 0$ мы в качестве i возьмем отображение $\mathcal{A} \to \mathcal{A}_0$ из (3.12) и отождествим $\mathcal{A}$ с $\mathcal{B}_0$.

Заметим, что

$$\mathscr{B}_j(\Gamma)=\{\mu\in\mathscr{A}_j;\quad d_j\mu=0 \text{ и } \mu\gamma=\mu \text{ для всех } \gamma\in\Gamma\}=$$
$$=(\text{ядро } d_j^*),\quad j\geqslant 0.$$

Длинная точная последовательность для $j=0$ содержит при $n\geqslant j+1$ следующую часть:

$$\ldots H^{n-(j+1)}(\Gamma,\mathscr{A}_j)\xrightarrow{(d_j)^*_{n-(j+1)}}H^{n-(j+1)}(\Gamma,\mathscr{B}_{j+1})\to$$
$$\to H^{n-j}(\Gamma,\mathscr{B}_j)\to H^{n-j}(\Gamma,\mathscr{A}_j)\to\ldots.$$

Поэтому, полагая $n=j+1$ и используя то, что $\mathscr{A}_j$ является тонким Г-модулем для любого j, мы из написанной выше точной последовательности получаем, что

$$(3.14)\qquad H^1(\Gamma,\mathscr{B}_{n-1})\cong\mathscr{B}_n(\Gamma)/d^*_{n-1}(\mathscr{A}_j(\Gamma))\cong$$
$$\cong(\text{ядро } d^*_n)/(\text{образ } d^*_{n-1}),\quad n\geqslant 1.$$

Аналогично,

$$(3.15)\qquad H^{n-j}(\Gamma,\mathscr{B}_j)\cong H^{n-(j+1)}(\Gamma,\mathscr{B}_{j+1}),\quad j\geqslant 0,\ n\geqslant j+2.$$

Используя (3.14) и (3.15) мы для $n\geqslant 1$ получаем, что

$$H^n(\Gamma,\mathscr{A})=H^n(\Gamma,\mathscr{B}_0)\cong H^{n-1}(\Gamma,\mathscr{B}_1)\cong\ldots$$
$$\ldots\cong H^1(\Gamma,\mathscr{B}_{n-1})\cong(\text{ядро } d^*_n)/(\text{образ } d^*_{n-1}).$$

Замечание. Полезность приведенного выше аппарата станет ясной в гл. VII, где мы будем использовать его для описания высших групп когомологий.

§ 4. Голоморфные интегралы Эйхлера

Пусть Г — (неэлементарная) клейнова группа с областью разрывности Ω и предельным множеством Λ. Пусть Δ — инвариантное объединение компонент области Ω.

Напомним также, что $\overline{\Delta/\Gamma}$ обозначает пространство, полученное присоединением к Δ/Γ проколов.

Голоморфная функция F на Δ называется (*голоморфным*) *интегралом Эйхлера порядка* $(1-q)$ (на Δ относительно группы Г), если

$$(4.1)\qquad p_\gamma=\gamma^*_{1-q}F-F\in\Pi_{2q-2}\text{ для всех }\gamma\in\Gamma.$$

Здесь q — целое число $\geqslant 1$.

Замечание. Основным в приведенном выше определении является то, что для фиксированного $\gamma\in\Gamma$ p_γ является *одним и тем же* полиномом на всех компонентах области Δ.

Лемма 4.1. *Если ∂^{2q-1} обозначает дифференцирование (мероморфных функций), повторенное $2q-1$ раз, то для любого преобразования Мёбиуса γ имеем*

$$\partial^{2q-1} \circ \gamma_{1-q}^* = \gamma_q^* \circ \partial^{2q-1}. \tag{4.2}$$

Доказательство. Пусть f — мероморфная функция на области D (это не ограничивает общности). Покажем, что обе части равенства (4.2) переводят f в одну ту же функцию. Ясно, что это достаточно доказать для голоморфных на D функций f. Заметим, что для любого преобразования Мёбиуса γ имеет место следующее тождество:

$$(\gamma\zeta - \gamma z)^2 = (\zeta - z)^2 \gamma'(\zeta) \gamma'(z), \tag{4.3}$$

что проверяется прямым вычислением. Пусть $z_0 \in D$, и пусть C — маленькая окружность с центром в z_0, ориентированная по часовой стрелке. Тогда из интегральной формулы Коши и (4.3) получаем

$$\begin{aligned}
(\gamma_q^* \circ \partial^{2q-1})(f)(z_0) &= (\gamma_q^*(f^{(2q-1)}))(z_0) = \\
&= f^{(2q-1)}(\gamma(z_0))\, \gamma'(z_0)^q = \\
&= \left[\frac{(2q-1)!}{2\pi i} \int\limits_{\gamma(C)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - \gamma z_0)^{2q}}\, d\zeta\right] \gamma'(z_0)^q = \\
&= \left[\frac{2q-1)!}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(\gamma\zeta)\, \gamma'(\zeta)}{(\gamma\zeta - \gamma z_0)^{2q}}\, d\zeta\right] \gamma'(z_0)^q = \\
&= \frac{(2q-1)!}{2\pi i} \int\limits_{C} \frac{f(\gamma\zeta)\, \gamma'(\zeta)^{1-q}}{(\zeta - z_0)^{2q}}\, d\zeta = \\
&= (\gamma_{1-q}^* f)^{(2q-1)}(z_0) = \\
&= (\partial^{2q-1} \circ \gamma_{1-q}^*)(f)(z_0).
\end{aligned}$$

Для удобства два интеграла Эйхлера порядка $1-q$ *отождествляются*, если они отличаются на элемент из Π_{2q-2}. Пространство интегралов Эйхлера по модулю Π_{2q-2} обозначается через $\mathscr{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Применяя линейный оператор ∂^{2q-1} к интегралу Эйхлера F, мы из (4.1) заключаем, что

$$0 = (\partial^{2q-1} \circ \gamma_{1-q}^*) F - \partial^{2q-1} F$$

и, используя лемму 4.1, что ∂^{2q-1} переводит интегралы Эйхлера порядка $(1-q)$ в автоморфные формы веса $(-2q)$. Мы зафиксируем этот факт:

Следствие. *Для $q \geqslant 1$ имеем*

$$\partial^{2q-1}\colon \mathscr{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma) \to \mathscr{A}_q(\Delta, \Gamma). \tag{4.4}$$

Замечание. Конечно, тривиально, что

$$\mathscr{A}_{1-q}(\Delta, \Gamma) \subset \mathscr{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma), \quad q \geqslant 2.$$

Нужно проверить только два факта. Ясно, что если $F \in \mathcal{A}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, то в (4.1) $p_\gamma = 0$ для всех $\gamma \in \Gamma$. Кроме того, если $p \in \Pi_{2q-2} \cap \mathcal{A}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, то $p = 0$ (см. доказательство леммы 1.1). Аналогично,

$$\mathcal{A}_0(\Delta, \Gamma)/\mathbf{C} \subset \mathcal{E}_0(\Delta, \Gamma).$$

Отображение (4.4) дает нам возможность определить выделенные классы (голоморфных) интегралов Эйхлера. Интеграл Эйхлера F называется *ограниченным*, если $\varphi = \partial^{2q-1}F$ проектируется на Δ/Γ как мероморфный q-дифференциал Φ, который можно продолжить на $\overline{\Delta/\Gamma}$, положив

(4.5) $\qquad \operatorname{ord}_p \Phi \geqslant -(q-1,)$ как только $\nu(p) = \infty$.

(Напомним, что $\nu(p) = \infty$ тогда и только тогда, когда $p \in \overline{\Delta/\Gamma} - \Delta/\Gamma$.) Интеграл F называется *квазиограниченным*, если

(4.6) $\qquad \operatorname{ord}_p \Phi \geqslant -q$, как только $\nu(p) = \infty$.

Пространство ограниченных интегралов Эйхлера (по модулю Π_{2q-2}) обозначается через $\mathcal{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, а соответствующее пространство квазиограниченных интегралов Эйхлера — через $\mathcal{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Важно также выделить интегралы Эйхлера, которые на каждой компоненте области Δ сводятся к полиномам из Π_{2q-2}, т. е. надо выделить ядро оператора ∂^{2q-1}. Такие интегралы Эйхлера образуют линейное пространство, которое обозначается через $\mathcal{E}^0_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Имеем очевидные отношения включения:

$$\mathcal{E}^0_{1-q}(\Delta, \Gamma) \subset \mathcal{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma) \subset \mathcal{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma) \subset \mathcal{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma).$$

Замечание. Если $F \in \mathcal{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ и $\partial^{2q-1}F \in \mathcal{A}^\infty_q(\Delta, \Gamma)$, то $F \in \mathcal{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Обратное выполняется, когда Δ/Γ имеет конечный тип. Неизвестно, верно ли обратное всегда.

Для последующего использования мы дадим явное описание поведения интеграла Эйхлера Γ в полуплоскости, принадлежащей проколу. Предположим, что ∞ является неподвижной точкой переноса $A(z) = z + 1$, соответствующего проколу на Δ/Γ, и что соответствующая полуплоскость есть

(4.7) $\qquad U_c = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > c\}.$

Мы уже видели, что у $\varphi = \partial^{2q-1}F$ есть разложение Фурье

(4.8) $$\varphi(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}, \quad z \in U_c.$$

Если F квазиограничен, то $a_n = 0$ для $n < 0$, и

(4.9) $$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (2\pi i n)^{1-2q} e^{2\pi i n z} + a_0 \frac{z^{2q-1}}{(2q-1)!} + v(z),$$

где $v \in \Pi_{2q-2}$. Если F ограничен, то в (4.9) $a_0 = 0$.

Если $z_0 \neq \infty$ является неподвижной точкой параболического элемента T, который соответствует проколу на Δ/Γ, то интеграл F имеет похожее разложение в полуплоскости, соответствующей этому проколу. Заметим, что T задается равенством

$$\frac{1}{T(z)-z_0}=\frac{1}{z-z_0}+b, \quad b\neq 0.$$

Выберем такое преобразование Мёбиуса S, что

$$STS^{-1}(z) = z+1,$$

а $S^{-1}(U_c)$ является полуплоскостью, соответствующей проколу. Мы можем выбрать

$$S(z)=\frac{ke^{i\theta}}{z-z_0}, \quad \theta\in\mathbf{R},\ k>0.$$

Далее, для пространства Δ/Γ конечного типа следующая диаграмма коммутативна:

$$(4.10)\qquad \begin{array}{ccc} \mathscr{E}^b_{1-q}(S(\Delta),\ S\Gamma S^{-1}) & \xrightarrow{S^*_{1-q}} & \mathscr{E}^b_{1-q}(\Delta,\Gamma) \\ \downarrow\partial^{2q-1} & & \downarrow\partial^{2q-1} \\ \mathscr{A}^\infty_q(S(\Delta),\ S\Gamma S^{-1}) & \xrightarrow{S^*_q} & \mathscr{A}^\infty_q(\Delta,\Gamma) \end{array}$$

Аналогичная диаграмма имеет место как для квазиограниченных, так и для всех интегралов Эйхлера. Ясно к тому же, что предположение о конечности типа пространства Δ/Γ не имеет большого значения. Из (4.10) мы заключаем, что если F — интеграл Эйхлера, то $\varphi = \partial^{2q-1}F$ имеет разложение в ряд Фурье вида

$$(4.11)\qquad \varphi(z)=\frac{(-ke^{i\theta})}{(z-z_0)^{2q}}\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \exp 2\pi i n\left(\frac{ke^{i\theta}}{z-z_0}\right), \quad z\in S^{-1}(U_c).$$

Если F квазиограничен, то $a_n=0$ для $n<0$ и

$$(4.12)\qquad F(z)=\frac{(-ke^{i\theta})^{1-q}}{(z-z_0)^{2-2q}}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(2\pi i n)^{1-2q}\exp 2\pi i n\left(\frac{ke^{i\theta}}{z-z_0}\right)+$$
$$+a_0\frac{(-1)^{1-q}}{(2q-1)!}\frac{k^q e^{iq\theta}}{(z-z_0)}+v(z),$$

где $v\in\Pi_{2q-2}$. Как и прежде, в (4.12) $a_0=0$, если F является ограниченным интегралом Эйхлера.

Замечание. В (4.11) и (4.12) предполагается, что z принимает только те значения, для которых

$$\left|\exp 2\pi i\left(\frac{ke^{i\theta}}{(z-z_0)}\right)\right|<1.$$

Теорема 4.2. *Пусть* Γ — (*неэлементарная*) *клейнова группа, а* Δ — *такое инвариантное объединение компонент ее области разрывности, что* Δ/Γ *является объединением поверхностей конечного типа. Тогда существует каноническое линейное отображение*

$$\alpha\colon \mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}), \qquad q \geqslant 1,$$

такое, что

$$\alpha(f) \in PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \Leftrightarrow f \in \mathscr{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma).$$

Кроме того, α *инъективно при* $q \geqslant 2$. *При* $q = 1$ *ядро отображения* α *состоит из автоморфных форм веса* 0 (*автоморфных функций*), *постоянных на каждой компоненте области* Δ. *В частности, при* $q = 1$ *ядро отображения* α *имеет размерность, на единицу меньшую, чем число компонент в* Δ/Γ.

Доказательство. Если F представляет элемент f из $\mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, то (4.1) определяет коцикл, класс когомологий которого зависит только от класса эквивалентности функции F в $\mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Это определяет отображение α.

Далее, мы покажем, что если $f \in \mathscr{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, то $\alpha(f) \in PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. Если проколов нет, то доказывать нечего. Предположим, что ∞ является неподвижной точкой параболического преобразования $A(z) = z + 1$, которое соответствует проколу. Мы можем в качестве полуплоскости, соответствующей этому проколу, взять полуплоскость U_c, определяемую посредством (4.7). Так как F имеет разложение в ряд Фурье вида (4.9) с $a_0 = 0$, то ясно, что

$$\alpha(F)_A(z) = v(z+1) - v(z), \qquad z \in \mathbf{C}. \tag{4.13}$$

(Здесь мы через $\alpha(F)$ обозначили коцикл, представляющий класс когомологий коцикла $\alpha(f)$, определенного по функции F.) Поэтому $\alpha(f)$ является Δ-параболическим классом когомологий. Если $f \notin \mathscr{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, то найдется по крайней мере один такой прокол p, что

$$\operatorname{ord}_p \Phi = -q.$$

Здесь Φ есть q-дифференциал, полученный проектированием на $\overline{\Delta/\Gamma}$ функции $\partial^{2q-1}F$. Мы можем предположить, что p снова соответствует ∞. Поэтому ряд Фурье функции F имеет вид (4.9) с $a_0 \neq 0$. Следовательно,

$$\deg \alpha(F)_A = 2q - 2.$$

Значит, $\alpha(F)_A$ нельзя представить в виде приращения полинома (см. (4.13)) и $\alpha(f) \notin PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2})$.

Наконец, предположим, что $\alpha(f) = 0$. Мы можем предположить (заменив F на $F + p$ для некоторого $p \in \Pi_{2q-2}$), что определенный посредством (4.1) коцикл является нулевым коциклом.

Тогда F проектируется в мероморфный $(1-q)$-дифференциал $\widetilde{F}$ на $\overline{\Delta/\Gamma}$. Можно, не ограничивая общности, предположить, что $\overline{\Delta/\Gamma}$ есть одна риманова поверхность рода g. Если $p \in \Delta/\Gamma$, то

$$\operatorname{ord}_p \widetilde{F} \geqslant -[(1-q)(1-1/\nu(p)], \tag{4.14}$$

где $\nu(p)$ — число ветвления точки $p \in \Delta/\Gamma$. Если $p \in \overline{\Delta/\Gamma} - \Delta/\Gamma$, то мы, как обычно, предположим, что F имеет в полуплоскости, определяемой точкой p, разложение в ряд Фурье (4.9). Так как

$$F(z+1) = F(z), \qquad z \in U_c,$$

то также

$$V(z+1) = V(z), \qquad z \in \mathbf{C}, \tag{4.15}$$

где $V(z) = a_0 \dfrac{z^{2q-1}}{(2q-1)!} + v(z)$, $v \in \Pi_{2q-2}$. Так как V — полином, то из (4.15) получаем, что V — константа. Поэтому

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z}.$$

Из (8.8) гл. III заключаем, что

$$\operatorname{ord}_p \widetilde{F} \geqslant -(1-q)$$

(это неравенство, как обычно, является предельным случаем неравенства (4.14), когда $\nu(p) \to \infty$). Поэтому

$$(\text{ядро } \alpha) = \mathcal{A}_{1-q}(0),$$

где $\mathcal{A}_{1-q}(0)$ есть пространство дифференциалов, соответствующее так, как это было определено в § 8 гл. III, $(1-q)$-каноническому дифференциалу α^{1-q}. Поэтому ввиду леммы 8.7 гл. III теорема доказана.

Определение. Мы будем называть α *отображением Эйхлера* или *отображением периодов*, а $\alpha(F)$ — *классом когомологий Эйхлера* интеграла $F \in \mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma)$.

§ 5. Первая структурная теорема для $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 5.1. *Пусть* Γ — (*неэлементарная*) *клейнова группа, а* Δ — *такое инвариантное объединение компонент ее области разрывности, что* Δ/Γ *имеет конечный тип. Тогда для любого целого* $q \geqslant 2$ *следующая диаграмма является коммутативной*

диаграммой с точными строками:

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma) & \xrightarrow{\alpha} & PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) & \xrightarrow{\beta} & \mathscr{A}^\infty_q(\Delta, \Gamma) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & \mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) & \xrightarrow{\beta} & \mathscr{A}^\infty_q(\Delta, \Gamma) & \to & 0 \end{array}$$

Кроме того, отображение Берса β^* *является для каждой строки расщепляющим отображением, т. е.* $\beta \circ \beta^* = \mathrm{id}$ *на* $\mathscr{A}^\infty_q(\Delta, \Gamma)$.

Доказательство. Инъективность отображений α (теорема 4.2) и сюръективность отображений β (теорема 3.4), так же как и тот факт, что β^* расщепляет последовательность в каждой строке, уже доказаны.

Пусть p — коцикл, представляющий класс когомологий из образа отображения α. Тогда на Δ найдется такой интеграл Эйхлера F порядка $1-q$, что

$$p_\gamma = \gamma^*_{1-q}F - F \text{ на } \Delta, \qquad \gamma \in \Gamma.$$

Если F является (квази)ограниченным интегралом Эйхлера, то F (квази)ограниченно представляет p на Δ. Так как $\partial F/\partial \bar z = 0$ на Δ, то $\beta(p) = 0$. Поэтому

$$(\text{образ } \alpha) \subset (\text{ядро } \beta).$$

Остается проверить обратное включение. Пусть p — коцикл, представляющий (параболический) класс когомологий из $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. Выберем функцию $\theta \in \mathscr{C}^\infty_{1-q}(\Delta)$, которая (ограниченно) квазиограниченно представляет p на Δ. Пусть $\mu(z) = \partial\theta/\partial\bar z$, $z \in \Delta$. Предположим, что $\beta(p) = 0$, т. е.

$$(5.1) \qquad l(\varphi) = \iint\limits_{\Delta/\Gamma} \varphi(z)\,\mu(z)\,dz \wedge d\bar z = 0 \text{ для всех } \varphi \in \mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma).$$

Мы знаем, что μ есть обобщенный коэффициент Бельтрами, а $\lambda^{2q-2}\bar\mu = \nu \in \mathscr{L}^\infty_q(\Delta, \Gamma)$. Из (5.1) мы заключаем, что ν ортогональна к $\mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma)$. Поэтому ввиду следствия из леммы 2.5 $\beta^*(\nu) = 0$. Значит, мы можем для обобщенного коэффициента Бельтрами μ выбрать потенциал F, который дает нулевой коцикл. Поэтому $\theta - F$ также (ограниченно) квазиограниченно представляет коцикл p на Δ. Так как $\partial F/\partial\bar z = \mu$ на Δ, то функция $\theta - F$ голоморфна. К тому же, равенство

$$\gamma^*_{1-q}(\theta - F) - (\theta - F) = p_\gamma$$

показывает, что $\theta - F \in \mathscr{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Функция F непрерывна на $\mathbf{C}$ и около ∞ растет как $|z|^{2q-2}$. Поэтому $\theta - F$ является (ограниченным) квазиограниченным интегралом Эйхлера.

Следствие 1. *В предположениях теоремы любой класс когомологий* $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ *можно однозначно представить в виде*

$$p = p_B + p_E, \tag{5.2}$$

где p_B *— класс когомологий ровно одной функции* $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, *а* p_E *— класс когомологий Эйхлера ровно одной функции* $f \in \mathcal{E}_{1-q}^c(\Delta, \Gamma)$. *Кроме того,* $p \in PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ *тогда и только тогда, когда* $f \in \mathcal{E}_{1-q}^b(\Delta, \Gamma)$.

Доказательство. Пусть $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. Тогда

$$p = \beta^* \circ \beta p + (p - \beta^* \circ \beta p).$$

Ясно, что $\beta^*(\beta(p))$ является классом когомологий Берса функции $\beta p \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$. Так как

$$\beta(p - \beta^* \circ \beta p) = \beta p - \beta \circ \beta^* \circ \beta p = \beta p - \beta p = 0,$$

то $p - \beta^* \circ \beta p$ является классом когомологий Эйхлера функции $f \in \mathcal{E}_{1-q}^c(\Delta, \Gamma)$. Так как α инъективно, то этот элемент f является единственным элементом пространства $\mathcal{E}_{1-q}^c(\Delta, \Gamma)$, класс когомологий которого есть $p - \beta^* \circ \beta p$. Аналогично, так как β^* инъективно, то $\beta(p)$ является единственным элементом пространства $\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, у которого класс когомологий Берса есть $\beta^* \circ \beta p$. Мы показали, что разложение (5.2) существует.

Если мы имеем другое разложение

$$p = p'_B + p'_E,$$

то $p_B - p'_B = p'_E - p_E$. Поэтому единственность разложения будет установлена, как только мы проверим, что

$$\alpha(\mathcal{E}_{1-q}^c(\Delta, \Gamma)) \cap \beta^*(\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)) = \{0\}.$$

Пусть $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, причем $p = \alpha(f) = \beta^*(\varphi)$, $f \in \mathcal{E}_{1-q}^c(\Delta, \Gamma)$ и $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$. Тогда

$$\varphi = \beta \circ \beta^*(\varphi) = \beta \circ \alpha(f) = 0$$

и, следовательно, $p = 0$.

Так как $p_B \in PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \subset PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, то мы из теоремы 4.2 заключаем, что $p \in PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ тогда и только тогда, когда $f \in \mathcal{E}_{1-q}^b(\Delta, \Gamma)$.

Применим теперь следствие 1 ко всей области разрывности.

Следствие 2. *Пусть* Γ *— (неэлементарная) клейнова группа с областью разрывности* Ω. *Предположим, что* Ω/Γ *конечного типа и что* $\Omega = \bigcup_{j=1}^{k} \Delta_j$, *где каждое* Δ_j *является таким инвариантным объединением компонент области* Ω, *что* Δ_j/Γ *представляет собой одну риманову поверхность. Тогда при* $q \geqslant 2$ *любой класс когомо-*

логий $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ *однозначно разлагается в сумму*

$$p = \sum_{j=1}^{k} p_j + p_E,$$

где p_j *— класс когомологий Берса ровно одной функции* $\varphi_j \in \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma)$, *которая при этом обращается в нуль вне* Δ_j, *а* p_E *— класс когомологий Эйхлера ровно одной функции* $f \in \mathscr{E}_{1-q}^c(\Omega, \Gamma)$. *Кроме того, если* Δ *есть инвариантное объединение компонент области* Ω, *то* $p \in PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ *тогда и только тогда, когда* $f \mid \Delta \in \mathscr{E}_{1-q}^b(\Delta, \Gamma)$.

Замечание. Если $\Omega - \Delta_j$ непусто ($j = 1, \ldots, k$), то $p_j \in \alpha(\mathscr{E}_{1-q}^b(\Omega - \Delta_j, \Gamma))$, поскольку, как легко видеть, имеет место включение

$$\alpha(\mathscr{E}_{1-q}^b(\Omega - \Delta_j, \Gamma) \supset \beta^*(\mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma)).$$

Следствие 3. *Пусть* Γ *—клейнова группа с такой инвариантной областью* Δ, *что* Δ/Γ *имеет конечный тип. Тогда для* $q \geqslant 2$

$$\dim PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \leqslant 2 \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma), \tag{5.3}$$

и

$$\dim H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \leqslant 2 \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) + n, \tag{5.4}$$

где n *— число проколов на* Δ/Γ. *Кроме того, если* Δ (*связна и*) *односвязна, то*

$$\dim PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = 2 \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma). \tag{5.5}$$

Доказательство. Так как Δ связна, то отображение

$$\partial^{2q-1}\colon \mathscr{E}_{1-q}^b(\Delta, \Gamma) \to \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$$

инъективно. Оно сюръективно, когда Δ к тому же односвязна. Размерность образа пространства $\mathscr{E}_{1-q}^c(\Delta, \Gamma)$ при этом отображении превосходит размерность пространства $\mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$ не больше, чем на n.

Замечания. (1) Мы сможем получить больше информации из теоремы 5.1, как только вычислим размерности пространств параболических форм. Для этого нам нужна теорема Римана — Роха. Мы докажем теорему Римана — Роха в следующей главе, а в гл. VII приведем дополнительные следствия из теоремы 5.1.

(2) Ясно, что для произвольного Δ с факторпространством Δ/Γ конечного типа имеем

$$\dim PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \geqslant \dim H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) - n, \tag{5.6}$$

где n — число проколов на Δ/Γ (так как параболичность коцикла определяется не более чем одним условием на каждый прокол). Поэтому мы можем рассматривать (5.4) как следствие из (5.3) и (5.6).

§ 6. Отображение параболических форм

На протяжении этого параграфа Ω — область разрывности клейновой группы Γ, причем Ω/Γ имеет конечный тип. Предположим, что заданы два таких непустых открытых подмножества Ω_1 и Ω_2 области Ω, что

(a) $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$,

(b) Ω_j Γ-инвариантно $(j = 1, 2)$

и

(c) $\Omega_1 \cap \Omega_2$ пусто.

Определим антилинейный ограниченный оператор

$$\mathscr{L}_{\Omega_1}\colon \mathscr{A}_q^p(\Omega_1, \Gamma) \to \mathscr{A}_q^p(\Omega_2, \Gamma), \quad q \geqslant 2,$$

при любом целом p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Напомним, что $\mathscr{A}_q^p(\Omega_j, \Gamma)$ не зависит от p, и поэтому мы можем, когда нам будет это удобно, рассматривать только случай $p = \infty$. Определим оператор $\mathscr{L}_{\Omega_1}$. Пусть $\varphi \in \mathscr{A}_q^\infty(\Omega_1, \Gamma)$, а F —потенциал для обобщенного коэффициента Бельтрами $\lambda^{2-2q}\overline{\varphi}$. Тогда F голоморфен на Ω_2, а $\partial^{2q-1}F = \psi \in \mathscr{A}_q^\infty(\Omega_2, \Gamma)$. Положим

$$\psi = \mathscr{L}_{\Omega_1}\varphi.$$

Ясно, что $\mathscr{L}_{\Omega_1}$ является ограниченным (так как все пространства конечномерны) антилинейным оператором.

Теорема 6.1. (a) *Если* $\varphi \in \mathscr{A}_q^p(\Omega_1, \Gamma)$, *то* $\psi = \mathscr{L}_{\Omega_1}\varphi$ *задается формулой*

$$\psi(z) = \frac{(2q-1)!}{2\pi i} \iint_{\Omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta - z)^{2q}}\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta}, \quad z \in \Omega_2. \tag{6.1}$$

(b) *Оператор* $\mathscr{L}$ *является самосопряженным в том смысле, что*

$$-(\varphi, \mathscr{L}_{\Omega_1}\psi)_{q,\Gamma} = \overline{(\mathscr{L}_{\Omega_2}\varphi, \psi)}_{q,\Gamma} \tag{6.2}$$

для всех $\varphi \in \mathscr{A}_q^p(\Omega_2, \Gamma)$ *и всех* $\psi \in \mathscr{A}_q^{p'}(\Omega_1, \Gamma)$, *где* $1/p + 1/p' = 1$. (Заметим, что в первом скалярном произведении интегрирование производится по Ω_2/Γ, а во втором — по Ω_1/Γ.)

(c) *Оператор* $\mathscr{L}_{\Omega_1}$ *инъективен, если* Ω_2 *связно, и сюръективен, если* Ω_1 *связно.*

Доказательство. (a) Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Omega_1, \Gamma)$, а F — потенциал для $\lambda^{2-2q}\bar{\varphi}$, определяемый посредством (2.14), причем $\{a_1, \ldots, a_{2q-1}\} \subset \Lambda$ (Λ — предельное множество группы Γ). Разложим на элементарные дроби

$$\frac{(z-a_1)\ldots(z-a_{2q-1})}{(\zeta-z)(\zeta-a_1)\ldots(\zeta-a_{2q-1})} = \frac{A}{\zeta-z} + \sum_{j=1}^{2q-1} \frac{A_j}{\zeta-a_j}.$$

Тогда

$$A = 1$$

и

$$-A_j = \prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{2q-1} \frac{z-a_i}{a_j-a_i}, \quad j = 1, \ldots, 2q-1.$$

Дифференцируя под знаком интеграла и замечая, что для $j = 1, \ldots, 2q-1$ A_j принадлежит Π_{2q-2} как функция от z, мы получаем (6.1).

(b) Доказательство получается вычислениями, в которых используется (4.3). Пусть ω_j — фундаментальная область для Γ в Ω_j, где $j = 1, 2$. Имеем

$$\frac{2\pi i}{(2q-1)!}(\varphi, \mathcal{L}_{\Omega_1}\psi)_{q,\Gamma} =$$

$$= \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}\varphi(z) \iint_{\Omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\psi(\zeta)}{(\bar{\zeta}-\bar{z})^{2q}}\, d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\, dz\wedge d\bar{z} =$$

$$= \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}\varphi(z) \sum_{\gamma\in\Gamma} \iint_{\gamma(\omega_1)} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\psi(\zeta)}{(\bar{\zeta}-\bar{z})^{2q}}\, d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\, dz\wedge d\bar{z} =$$

$$= \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}\varphi(z) \sum_{\gamma\in\Gamma} \iint_{\omega_1} \frac{\lambda(\gamma\zeta)^{2-2q}\psi(\gamma\zeta)\,|\,\gamma'(\zeta)\,|^2}{(\overline{\gamma\zeta}-\overline{\gamma\gamma^{-1}(z)})^{2q}}\, d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\, dz\wedge d\bar{z} =$$

$$= \iint_{\omega_2} \lambda(z)^{2-2q}\varphi(z)\, \overline{\gamma'(\gamma^{-1})(z))}^{-q} \times$$

$$\times \sum_{\gamma\in\Gamma} \iint_{\omega_1} \frac{\lambda(\zeta)^{2-2q}\psi(\zeta)}{(\bar{\zeta}-\overline{\gamma^{-1}(z)}^{2q}}\, d\bar{\zeta}\wedge d\zeta\, dz\wedge d\bar{z} =$$

$$= \iint_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-2q}\psi(\zeta) \sum_{\gamma\in\Gamma} \iint_{\omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-2q}\varphi(z)\,\overline{\gamma'(z)}^{q}}{(\overline{\gamma z}-\bar{\zeta})^{2q}}\, dz\wedge d\bar{z}\, d\bar{\zeta}\wedge d\zeta =$$

$$= \iint_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-2q}\psi(\zeta) \sum_{\gamma\in\Gamma} \iint_{\omega_2} \frac{\lambda(\gamma z)^{2-2q}\varphi(\gamma z)\,|\,\gamma'(z)\,|^2}{(\overline{\gamma z}-\bar{\zeta})^{2q}}\, dz\wedge d\bar{z}\, d\bar{\zeta}\wedge d\zeta =$$

$$= \iint_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-2q}\psi(\zeta) \sum_{\gamma\in\Gamma} \iint_{\gamma(\omega_2)} \frac{\lambda(z)^{2-2q}\varphi(z)}{(\bar{z}-\bar{\zeta})^{2q}}\, dz\wedge d\bar{z}\, d\bar{\zeta}\wedge d\bar{\zeta} =$$

$$= \iint\limits_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-2q}\psi(\zeta) \iint\limits_{\Omega_2} \frac{\lambda(z)^{2-2q}\varphi(z)}{(\bar{z}-\bar{\zeta})^{2q}}\, dz \wedge d\bar{z}\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta =$$

$$= -\frac{-2\pi i}{(2q-1)!} \iint\limits_{\omega_1} \lambda(\zeta)^{2-2q}\, \overline{\mathscr{L}_{\Omega_2}\varphi(\zeta)}\, \psi(\zeta)\, d\bar{\zeta} \wedge d\zeta =$$

$$= \frac{2\pi i}{(2q-1)!}\, \overline{(\mathscr{L}_{\Omega_2}\varphi, \psi)}_{q,\Gamma}.$$

(c) Только первое утверждение нуждается в доказательстве. Второе вытекает из первого и (6.2). Пусть $\varphi \in \mathscr{A}_q^\infty(\Omega_1, \Gamma)$. Предположим, что $\mathscr{L}_{\Omega_1}\varphi = 0$. Тогда для $\lambda^{2-2q}\overline{\varphi}$ найдется такой потенциал F, что $\partial^{2q-1}F = 0$ на Ω_2. Так как Ω_2 связно, то $F \mid \Omega_2 \in \Pi_{2q-2}$. Отсюда вытекает, что $\beta^*(\varphi) = 0$ и, следовательно, $\varphi = 0$.

Следствие. *Пусть Γ — клейнова группа с областью разрывности Ω. Если Ω/Γ имеет конечный тип, а Γ имеет две инвариантные компоненты Δ и $\Omega - \Delta$, то для $q \geqslant 2$, $p \geqslant 1$*

$$\dim \mathscr{A}_q^p(\Delta, \Gamma) = \dim \mathscr{A}_q^p(\Omega - \Delta, \Gamma).$$

Теорема 6.2. *Пусть Γ — клейнова группа с областью разрывности Ω. Предположим, что Γ имеет инвариантную область Δ и что Ω/Γ конечного типа. Если $\Omega - \Delta$ непусто, то для $q \geqslant 2$ любой класс когомологий $p \in PH^1_{\Omega-\Delta}(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ может быть записан (не обязательно единственным способом) в виде суммы класса когомологий Берса некоторой функции $\varphi \in \mathscr{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma)$ и класса когомологий Эйхлера тривиального интеграла Эйхлера $f \in \mathscr{E}^0_{1-q}(\Omega - \Delta, \Gamma)$.*

Доказательство. Напишем

$$p = \beta^*(\varphi_0) + \alpha(f_0),$$

где $\varphi_0 \in \mathscr{A}_q^\infty(\Omega - \Delta, \Gamma)$ и $f_0 \in \mathscr{E}^b_{1-q}(\Omega - \Delta, \Gamma)$. Пусть F_0 — представитель класса f_0, а $\psi = \partial^{2q-1}F_0 \in \mathscr{A}_q^\infty(\Omega - \Delta, \Gamma)$. Пусть $\psi = \mathscr{L}_\Delta\varphi$, где $\varphi \in \mathscr{A}_q(\Delta, \Gamma)$, и пусть F — потенциал для $\lambda^{2-2q}\overline{\varphi}$. Тогда $\partial^{2q-1}F = \psi$, и если f есть класс функции F в $\mathscr{E}^b_{1-q}(\Omega - \Delta, \Gamma)$, то

$$\beta^*(\varphi) = \alpha(f).$$

Поэтому

$$p = \beta^*(\varphi_0 + \varphi) + \alpha(f_0 - f).$$

Так как $\partial^{2q-1}F_0 = \partial^{2q-1}F$ на $\Omega - \Delta$, то $f_0 - f \in \mathscr{E}^0_{1-q}(\Omega - \Delta, \Gamma)$.

Следствие 1. *Пусть Γ — клейнова группа с такой областью разрывности Ω, что Ω/Γ имеет конечный тип. Если Γ имеет две инвариантные компоненты Δ и $\Omega - \Delta$, то для $q \geqslant 2$*

$$PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = \beta^*(A_q(\Omega, \Gamma)).$$

Следствие 2. *Пусть* Γ — *клейнова группа с областью разрывности* Ω. *Тогда* $\mathscr{E}^b_{1-q}(\Omega, \Gamma) = \{0\}$, *если* $q \geqslant 2$, *и*

(a) Γ *имеет две инвариантные компоненты, а* Ω/Γ — *конечного типа,*

или

(b) Γ — *произвольная (неэлементарная) фуксова группа.*

Доказательство. Утверждение (a) очевидно. Утверждение (b) достаточно доказать в случае, когда $\Lambda \subset \mathbf{R} \cup \{\infty\}$, т. е. когда фуксова группа имеет в качестве неподвижного круга верхнюю полуплоскость U. Пусть F — представитель элемента из $\mathscr{E}^b_{1-q}(\Omega, \Gamma)$. Тогда $\varphi = \partial^{2q-1}F \in \mathscr{A}^\infty_q(\Omega, \Gamma)$. Поэтому

$$F(z) = \frac{1}{(2q-2)!}\int_{z_0}^{z}(z-\zeta)^{2q-2}\varphi(\zeta)\,d\zeta, \tag{6.3}$$

где $z \in U$, $z_0 \in U$, и путь интегрирования лежит в U. Ясно, что в этом случае интеграл корректно определен. Далее, для $\zeta \in U$ имеем

$$|\varphi(\zeta)| \leqslant \mathrm{const}\cdot\lambda_\Omega(\zeta)^q \leqslant \mathrm{const}\cdot\lambda_U(\zeta)^q = \mathrm{const}\cdot(\mathrm{Im}\,\zeta)^{-q}. \tag{6.4}$$

(Конечно, совершенно очевидно, что по формуле (6.3) функция F восстанавливается также в точке $z \in \mathbf{R} - \Lambda$.) Для всех $x \in \mathbf{R}$ мы можем определить расширение функции F по формуле (в которой $z_0 = x_0 + iy_0$)

$$F(x) = \frac{1}{(2q-2)!}\int_{x_0}^{x}(x-\xi-iy_0)^{2q-2}\varphi(\xi+iy_0)\,d\xi + \frac{1}{(2q-2)!}\int_{y_0}^{0}(-i\eta)^{2q-2}\varphi(x+i\eta)\,(i\,d\eta). \tag{6.3$'$}$$

Для $x \in \mathbf{R} - \Lambda$ функция F, определяемая по формуле (6.3)$'$, совпадает с функцией F, определенной по (6.3). Из (6.4) вытекает, что для $x \in \Lambda$ второй интеграл сходится. (Первый интеграл всегда сходится.) Это расширение функции F непрерывно на $U \cup \mathbf{R}$. Пусть $w = u + iv \in U$, $x \in \mathbf{R}$. Тогда

$$F(w) - F(x) = \frac{1}{(2q-2)!}\Big[\int_{x_0}^{u}(w-\xi-iy_0)^{2q-2}\varphi(\xi+iy_0)\,d\xi + \int_{y_0}^{v}(iv-i\eta)^{2q-2}\varphi(u+i\eta)\,(i\,d\eta) - \int_{x_0}^{x}(x-\xi-iy_0)^{q2-2}\varphi(\xi+iy_0)\,d\xi -$$

$$-\int_0^0 (-i\eta)^{2q-2}\varphi(x+i\eta))id\eta)\Big]=$$

$$=\frac{1}{(2q-2)!}\Big[\int_{x_0}^{u}\varphi(\xi+iy_0)[(w-\xi-iy_0)^{2q-2}-(x-\xi-iy_0)^{2q-2}]\,d\xi-$$

$$-\int_u^x (x-\xi-iy_0)^{2q-2}\varphi(\xi+iy_0)\,d\xi+$$

$$+\int_{y_0}^{v}(-i\eta)^{2q-2}[\varphi(u+i\eta)-\varphi(x+i\eta)]\,(id\eta)-$$

$$-\int_v^0(-i\eta)^{2q-2}\varphi(x+i\eta)\,(id\eta)+$$

$$+\int_{y_0}^{v}\varphi(u+i\eta)\,[(iv-i\eta)^{2q-2}-(-i\eta)^{2q-2}]\,(id\eta)\Big].$$

Далее, каждый из написанных выше интегралов мал, если $|w-x|$ мал. Только пятый интеграл нуждается в проверке. Мы оценим его сверху интегралом

$$\int_v^{y_0}\eta^{-q}\,|(\eta-v)^{2q-2}-\eta^{2q-2}|\,d\eta=$$

$$=(2q-2)\int_v^{y_0}\eta^{-q}v\,|\eta-v_0|^{2q-3}\,d\eta,\qquad 0<v_0<v.$$

Далее, второй интеграл ограничен сверху числом

$$(2q-2)\,v\int_v^{y_0}\eta^{-q}\eta^{2q-3}\,d\eta=(2q-2)\,v\int_v^{y_0}\eta^{q-3}\,d\eta=$$

$$=(2q-2)\cdot\begin{cases}\dfrac{1}{q-2}\,(y_0^{q-2}-v^{q-2}), & q\geqslant 3,\\ (\log y_0-\log v), & q=2.\end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{v\to 0} v\log v=0$, то мы закончили проверку пятого интеграла.

Аналогично, F непрерывна на $\mathbf{C}-U$. Чтобы доказать, что F непрерывна на $\mathbf{C}$, достаточно показать, что если $x\in\Lambda$, то

$$\lim_{\substack{z\to x\\ z\in U}}F(z)=\lim_{\substack{z\to x\\ \bar z\in U}}F(z).$$

Для $z \in \Omega$, $\gamma \in \Gamma$ найдется такой полином p_γ, что

$$F(\gamma z)\,\gamma'(z)^{1-q} - F(z) = p_\gamma(z). \tag{6.5}$$

Пусть теперь $z \to x$, $z \in U$, где x — неподвижная точка локсодромического элемента $\gamma \in \Gamma$. Используя непрерывность функции F на $U \cup R$, мы из (6.5) выводим, что

$$F(x) = p_\gamma(x)\,[\gamma'(x)^{1-q} - 1]^{-1}. \tag{6.6}$$

(Заметим, что $|\gamma'(x)| \neq 1$). Из (6.6) и того, что неподвижные точки локсодромических элементов плотны в Λ, получаем, что F непрерывна на $\mathbf{C}$. Следовательно, F голоморфна на $\mathbf{C}$. Поэтому функция φ также является целой. Но

$$\varphi(\gamma z)\,\gamma'(z)^q = \varphi(z)$$

выполняется теперь для $z \in \Lambda$. В частности, если $z \in \Lambda$ — неподвижная точка локсодромического элемента, то $\varphi(z) = 0$. Поэтому $\varphi \mid \Lambda = 0$. Так как Λ замкнуто и совершенно, то $\varphi = 0$.

Класс когомологий $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ называется *вещественным*, если его можно представить коциклом (также обозначенным через p) с тем свойством, что p_γ является полиномом с вещественными коэффициентами для любого $\gamma \in \Gamma$. С небольшими модификациями приведенные выше рассуждения дают такую теорему:

Теорема 6.3. *Пусть Γ — фуксова группа первого рода, действующая на верхней полуплоскости U, причем U/Γ имеет конечный тип. Пусть $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, $q \geqslant 2$. Если $p = \alpha(f)$, причем $f \in \mathscr{C}^b_{1-q}(U, \Gamma)$, и p вещественен, то $p = 0$.*

Доказательство. Выберем такой представитель F интеграла f, что

$$p_\gamma(z) = F(\gamma z)\,\gamma'(z)^{1-q} - F(z), \quad z \in U, \quad \gamma \in \Gamma,$$

является полиномом с вещественными коэффициентами. Как и выше, F непрерывен на $U \cup \mathbf{R}$, и равенство (6.6) показывает, что F является вещественным на $\mathbf{R}$. Поэтому F по симметрии продолжается до целой функции. Отсюда, как мы видели, в доказательстве следствия 2 теоремы 6.2, вытекает, что $F \in \Pi_{2q-2}$.

Замечание. Доказанная выше теорема обобщает хорошо известный факт о том, что единственным голоморфным абелевым дифференциалом на компактной римановой поверхности с вещественными периодами является нулевой дифференциал. Мы докажем этот факт в следующей главе.

§ 7. Мероморфные интегралы Эйхлера. Вторая структурная теорема для $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$

Как обычно, Δ — инвариантное объединение компонент клейновой группы Γ. На протяжении этого параграфа мы всюду (кроме леммы 7.2) предполагаем, что Δ/Γ имеет конечный тип. Напомним, что $q \in \mathbf{Z}$, $q \geqslant 1$.

Мероморфная функция F на Δ называется *мероморфным интегралом Эйхлера* на Δ порядка $1-q$, если

(i) для всех $\gamma \in \Gamma$ выполняется (4.1),

(ii) проекция функции $\varphi = \partial^{2q-1}F$ на Δ/Γ является ограничением мероморфного q-дифференциала на $\overline{\Delta/\Gamma}$.

Условие (ii) можно переформулировать в терминах ряда Фурье функции φ в параболической области, принадлежащей Δ. Если (4.8) или (4.11) является рядом Фурье функции $\varphi = \partial^{2q-1}F$, где F — мероморфный интеграл Эйхлера, то найдется такое целое k, что $a_n = 0$ для $n < k$. Оказывается, что коэффициент a_0 играет исключительно полезную роль в нашей теории. Будем говорить, что интеграл Эйхлера является *параболическим* в параболической области, если $a_0 = 0$ в разложении для этой области функции F в ряд Фурье. Будем обозначать пространство мероморфных интегралов Эйхлера на Δ по модулю Π_{2q-2} через $\mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, а соответствующее пространство параболических интегралов Эйхлера — через $P\mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma)$.

Интеграл Эйхлера называется *регулярным* (или *голоморфным*) в проколе, если соответствующий ряд Фурье задается посредством (4.9) или (4.12).

Предложение 7.1. *Отображение периодов α продолжается на мероморфные интегралы Эйхлера, т. е.*

$$\alpha\colon \mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}), \quad q \geqslant 1.$$

Кроме того,

$$\alpha(f) \in PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \Leftrightarrow f \in P\mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma).$$

Замечание. Если $q \geqslant 2$, то мы можем рассматривать пространство (мероморфных) автоморфных форм веса $-2(1-q)$ как подпространство в $P\mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Мы просто проверяем, что не существует полиномиальных автоморфных форм (для любой клейновой группы).

Лемма 7.2. *Пусть Γ — клейнова группа с областью разрывности Ω. Если $\infty \in \Omega$, то*

$$h(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{A \in \Gamma} \frac{A'(\zeta)^q}{z - A\zeta}, \quad q \geqslant 2,$$

сходится на компактных подмножествах области Ω равномерно и абсолютно. Для $z \in \mathbf{C}$ ряд $h(z, \cdot)$ является для Γ мероморфной автоморфной формой веса $(-2q)$, регулярной в проколах поверхности Ω/Γ и имеющей не более чем простой полюс в $z = \zeta$. Для $\zeta \in \Omega$ ряд $h(\cdot, \zeta)$ является мероморфным параболическим интегралом Эйхлера порядка $1 - q$, регулярным в проколах поверхности Ω/Γ и имеющим не более чем простой полюс в $z = \zeta$ (и ее образах относительно Γ).

Доказательство. Свойства ряда Пуанкаре $h(z, \cdot)$ уже изучались в § 8 гл. III.

Зафиксируем теперь $\zeta \in \Omega$. Сходимость ряда $h(\cdot, \zeta)$ ясна. Чтобы показать, что $h(\cdot, \zeta)$ является интегралом Эйхлера, произведем для $A \in \Gamma$, $z \in \mathbf{C}$, $\zeta \in \Omega$ вычисления

$$2\pi i h(Az, \zeta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{\gamma'(\zeta)^q}{Az - \gamma\zeta} = \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{A'(\gamma\zeta)^q \gamma'(\zeta)^q}{Az - A\gamma\zeta} =$$

$$= A'(z)^{-1/2} \sum_{\gamma \in \Gamma} \frac{A'(\gamma\zeta)^{q-1/2} \gamma'(\zeta)^q}{z - \gamma\zeta}.$$

Поэтому

$$(7.1) \quad 2\pi i \left[h(Az, \zeta) A'(z)^{1-q} - h(z, \zeta)\right] = \sum_{\gamma \in \Gamma} \left[\left(\frac{A'(\gamma\zeta)}{A'(z)}\right)^{q-1/2} - 1\right] \frac{\gamma'(\zeta)^q}{z - \gamma\zeta}.$$

Вспоминая, что $A'(z) = (cz + d)^{-2}$ для некоторых $c, d \in \mathbf{C}$, мы видим, что заключенное в квадратных скобках выражение является полиномом от z степени $2q - 1$. Так как этот полином обращается в нуль при $z = \gamma\zeta$, то он делится на $z - \gamma\zeta$. Поэтому при фиксированном ζ ряд h является мероморфным интегралом Эйхлера порядка $1 - q$. Мы должны еще выяснить, как ведет себя функция $h(\cdot, \zeta)$ в параболических проколах. Без ограничения общности можно предположить, что $0 \in \Lambda$ является неподвижной точкой параболического элемента A, который соответствует проколу. Выберем параболическую область и полуплоскость (круг, касающийся нуля), которые соответствуют проколу. Уменьшив, если надо, полуплоскость, мы можем предположить, что точки $\{\gamma(\zeta);\ \gamma \in \Gamma\}$ лежат вне этой полуплоскости. Поэтому для достаточно малых z, лежащих в параболической области, определяемой диаметром круга, проходящего через начало координат, имеем

$$|\gamma\zeta - z| \geqslant |\gamma\zeta|, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Значит,

$$h(z, \zeta) = O(1), \quad z \to 0,$$

когда z принадлежит параболической области. Из (4.12) мы видим, что h регулярна и параболична в нуле.

Ранее мы рассматривали дивизоры только на одной римановой поверхности. Ясно, что можно также определить дивизор на объединении конечного числа римановых поверхностей. Если φ — автоморфная форма на Δ веса $(-2q)$, $q \in \mathbf{Z}$, проекция Φ которой на Δ/Γ продолжается на проколы, то мы определим (*приведенный*) *дивизор* (φ) формы φ на каждой компоненте, на которой $\varphi \neq 0$, равенством

$$(\varphi) = (\Phi).$$

Рассмотрим теперь (φ) с точки зрения порядка формы φ в точках области Δ и параболических вершинах, соответствующих проколам на Δ/Γ. Мы уже видели, что если $z \in \Omega$ и

$$r = \operatorname{ord}_z \varphi, \qquad R = \operatorname{ord}_{\pi(z)} \Phi,$$

где $\pi\colon \Delta \to \Delta/\Gamma$ — естественная проекция, то

$$R = \frac{1}{\nu}(r+q) - q, \tag{7.2}$$

где $\nu = (\text{порядок } \Gamma_z)$. Если $z \in \Lambda$ является неподвижной точкой параболического элемента, соответствующего проколу $\pi(z) \in \overline{\Delta/\Gamma}$, то

$$R = r - q. \tag{7.3}$$

Напомним, что подразумевается под порядком автоморфной формы в проколе. Если ∞ является неподвижной точкой, соответствующей проколу, $z \mapsto z+1$ — соответствующее параболическое преобразование и $\varphi(z) = \sum_{n=r}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z}$ для $\operatorname{Im} z > c$ с $a_r \neq 0$, то положим

$$\operatorname{ord}_\infty \varphi = r.$$

Поэтому можно использовать (7.2) и (7.3) для того, чтобы (φ) определить непосредственно в терминах нулей функции φ. Заметим, что φ голоморфна на $\overline{\Delta}$ ($\overline{\Delta} = \Delta \cup$ {неподвижные точки параболических элементов, соответствующих проколам на Δ/Γ}) тогда и только тогда, когда $(\varphi) \geqslant \alpha^q$, где α^q есть q-канонический дивизор ветвления, введенный в § 8 гл. III. Конечно, это «определяет», что такое регулярность автоморфной функции в проколе.

Если d — любой дивизор на $\overline{\Delta/\Gamma}$, то обозначим через $\mathcal{A}_q(d)$ пространство автоморфных форм φ на Δ, (приведенный) дивизор которых кратен[1]) дивизору $\alpha^q + d$. Заметим, что это определение имеет смысл для любого $q \in \mathbf{Z}$. При $q \geqslant 1$ имеем $\mathcal{A}_q(0) = \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$.

[1]) Дивизор a кратен дивизору b если $a - b \geqslant 0$. —*Прим. перев.*

Если ω есть 1-канонический дивизор, то

$$\mathcal{A}_q(d) \cong l(q\omega - \alpha^q - d)$$

с обычной интерпретацией пространства дивизора на объединении конечного числа компактных поверхностей.

Множество нулей интеграла Эйхлера не инвариантно относительно группы Γ. Поэтому невозможно определить пространство, состоящее из интегралов Эйхлера, которые кратны произвольному дивизору d. Однако для $d \leqslant 0$ можно ввести два пространства:

$\mathscr{E}_{1-q}(d)$, пространство мероморфных интегралов Эйхлера, у которых приведенный полярный дивизор кратен дивизору $\alpha^{1-q} + d$,

$P\mathscr{E}_{1-q}(d)$, соответствующее пространство параболических мероморфных интегралов.

Под *приведенным полярным дивизором* интеграла Эйхлера F мы подразумеваем

$$(F) = \sum_{x \in \overline{\Delta/\Gamma}} n(x)\, x,$$

где $n(x) = n_{1-q}(x)$, если F голоморфна в x, и $n(x)$ вычисляется обычным способом в точках $x \in \overline{\Delta/\Gamma}$, в которых F имеет особенность (т. е. с помощью равенств (7.2) или (7.3), в которых q заменено на $1-q$). В этих обозначениях имеем

$$P\mathscr{E}_{1-q}(0) = \mathscr{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma) \quad (= P\mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma))$$

и

$$\mathscr{E}_{1-q}(0) = \mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma).$$

Мы должны, конечно, проверить, что понятие приведенной степени имеет смысл для интегралов Эйхлера. В обыкновенной точке, которая не является эллиптической неподвижной точкой, как легко видеть, не возникает никаких проблем. Пусть $z_0 \in \Omega$ — эллиптическая неподвижная точка, а F — мероморфный интеграл Эйхлера. Покажем, что главная часть интеграла F в точке z_0 совпадает с главной частью в точке z_0 некоторой автоморфной формы веса $-2(1-q)$. Предположим, что γ_0 порождает Γ_{z_0}, подгруппу стабильности точки z_0. Можно предположить, что $\gamma_0(z) - z_0 = e^{2\pi i/m}(z - z_0)$ для некоторого $m \in \mathbf{Z}$. Тогда

$$(\gamma_0)^*_{1-q} F - F \in \Pi_{2q-2}.$$

Но $F = F_1 + F_2$, где F_1 — полином от $(z - z_0)^{-1}$ с нулевым постоянным членом, а F_2 голоморфен в точке z_0. Следовательно,

$$(\gamma_0)^*_{1-q} F_1 - F_1 = 0.$$

Поэтому сингулярная часть интеграла F в точке z_0 определяет автоморфную форму веса $-2(1-q)$ для Γ_{z_0}.

В параболических формах только коэффициенты Фурье с отрицательными индексами вносят вклад в главную часть, т. е. при определении главной части интеграла Эйхлера его «рациональной частью» пренебрегают.

Теорема 7.3. *Для* $q \geqslant 2$

$$\alpha\colon \mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$$

сюръективно.

Доказательство. На самом деле мы докажем много больше. Пусть $k = \dim \mathscr{A}_q(0)$. Ввиду теоремы 5.1 достаточно построить k линейно независимых мероморфных интегралов Эйхлера, линейная оболочка которых пересекает $\mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ только по нулевому элементу. Поэтому мы можем предположить, что $k > 0$.

Пусть $d > 0$ — положительный дивизор на Δ/Γ. Предположим, что

$$d = \sum_{i=1}^{l} n_i p_i, \quad n_i > 0,$$

где

$$p_i \in \Delta/\Gamma \text{ — неразветвленная точка.}$$

Вспомним функцию, введенную в лемме 7.2. Определим

$$h_\nu(z, \zeta) = \partial^{\nu-1} h / \partial \zeta^{\nu-1}$$

для любого целого $\nu \geqslant 1$ и заметим, что, если $\zeta_0 \in \Delta$ не является эллиптической неподвижной точкой, то $h_\nu(\cdot, \zeta_0)$ является интегралом Эйхлера (см. (7.1)) с полюсом порядка ν в точке $z = \zeta_0$ (и во всех образах точки ζ_0 относительно Γ). Выбирая такие точки $\zeta_i \in \Delta$, что $\pi(\zeta_i) = p_i$, где $\pi\colon \Delta \to \Delta/\Gamma$ — естественная проекция, мы видим, что

$$\sum_{i=1}^{l} h_{n_i}(\cdot, \zeta_i) \tag{7.4}$$

является интегралом Эйхлера с полярным дивизором $\alpha^{1-q} - d$. Построенный выше интеграл, как легко видеть, будет параболическим, однако этот факт нам сейчас не нужен. Мы также видели, что можем предписать интегралу Эйхлера некоторые особенности. В следующем параграфе мы построим интегралы Эйхлера с произвольными заранее заданными особенностями в конечном числе точек, включая эллиптические и параболические неподвижные точки.

Выберем k дивизоров

(7.5) $$0 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_k,$$

(7.6) $$d_i = \sum_{j=1}^{l_i} n_{ij} p_j, \quad \text{где } n_{ij} \geqslant 0, \quad l_i \geqslant 0, \; i = 1, 2, \ldots, k,$$

удовлетворяющих следующим условиям:

(7.7) $p_j \in \Delta/\Gamma$ неразветвлена при любом j,

(7.8) $d_{i+1} = d_i + n_i q_i, \qquad n_i > 0$ для $i = 1, \ldots, k-1$,

и

(7.9) найдется такой базис $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ пространства $\mathcal{A}_q(0)$, что $\operatorname{ord}_{\zeta_j} \varphi_i = n_{ij}, \quad i = 1, 2, \ldots, k, \; j = 1, 2, \ldots, l_i$,

где $\pi(\zeta_j) = p_j$, $(\varphi_i) \not\geqslant \alpha^q + d_i + q_i$, $i = 1, \ldots, k-1$. Очевидно, что такие дивизоры существуют. Для того чтобы показать это, возьмем произвольную точку $\zeta_1 \in \Delta$ (не являющуюся эллиптической неподвижной точкой). Пусть $n_1 \geqslant 0$ — такое наименьшее целое число, что найдется функция $\varphi_1 \in \mathcal{A}_q(0)$, у которой $\operatorname{ord}_{\zeta_1} \varphi_1 = n_1$. Положим $d_1 = n_1 p_1$. Пусть $\zeta_2 \in \Delta$ — другая неразветвленная точка, которая либо есть ζ_1, либо является точкой, в которой φ_1 не обращается в нуль. Пусть φ_2 — такая функция, имеющая в ζ_2 нуль наименьшего порядка (n_2), что

$$(\varphi_2) > \alpha^q + d_1.$$

Положим

$$d_2 = \begin{cases} d_1 + n_2 p_2, & \text{если } p_2 \neq p_1, \\ d_1 + (n_2 - n_1) p_2, & \text{если } p_2 = p_1. \end{cases}$$

Дальше будем продолжать по индукции. На m-м шаге $(m > 1)$ мы выберем точку $\zeta_m \in \Delta$, не являющуюся эллиптической неподвижной точкой, которая либо есть одна из точек $\zeta_1, \ldots, \zeta_{m-1}$, либо является точкой, где ни одна из функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m-1}$ не обращается в нуль. Пусть φ_m — такая функция из $\mathcal{A}_q(0)$, имеющая в ζ_m нуль наименьшего порядка (n_m), что

$$(\varphi_m) > \alpha^q + d_{m-1}.$$

Положим

$$d_m = \begin{cases} d_{m-1} + n_m p_m, & \text{если } p_m \neq p_j, \; j = 1, 2, \ldots, m-1, \\ d_{m-1} + (n_m - n_{j_0}) p_m, & \text{если } p_m = p_j \text{ для некоторого } j < m, \end{cases}$$

где j_0 — наибольшее целое число среди таких j, что $p_m = p_j$.

Рассмотрим линейное пространство интегралов Эйхлера, натянутое на квазиограниченные интегралы Эйхлера и мероморфные

интегралы Эйхлера

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_k,$$

полярные дивизоры которых равны

$$\alpha^{1-q}-(d_1+q_1),\ \alpha^{1-q}-(d_2+q_2),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \alpha^{1-q}-(d_{k-1}+q_{k-1}),\ \alpha^{1-q}-(d_k+q_k),$$

где $q_k \in \Delta/\Gamma$ — такая произвольная неразветвленная точка, что $\varphi_k(\pi^{-1}(q_k)) \neq 0$. [Напомним (для последующего использования), что $-\alpha^{1-q}=\alpha^q$ (лемма 8.6 гл. III).] Совершенно ясно, что это пространство имеет размерность

$$\dim \mathscr{E}_{1-q}(0)+\dim \mathscr{A}_q(0)=\dim H^1(\Gamma,\ \Pi_{2q-2}).$$

Достаточно показать, что ограничение отображения периодов на это подпространство инъективно (даже, если $\mathscr{E}_{1-q}(0)=\infty$). Пусть F — произвольный интеграл из этого пространства. Напишем

$$F=F_0+\sum_{i=1}^{k} c_iF_i,\quad \text{где}\quad F_0\in\mathscr{E}_{1-q}(0).$$

Пусть m — такое наибольшее целое число $\leqslant k$, что $c_m \neq 0$ (положим $m=0$, если $c_i=0$ для $i=1,\ \ldots,\ k$). Если $\alpha(F)=0$, то мы можем и должны предположить, что F индуцирует нулевой коцикл и, следовательно, является автоморфной формой веса $-2(1-q)$. Если $m=0$, то мы уже видели, что $\alpha(F)\neq 0$, если $F\neq 0$. Предположим, что $F\neq 0$ и $m>0$. Если $\alpha(F)=0$, то $F\varphi_m$ является автоморфной формой веса -2, проекция которой на $\overline{\Delta/\Gamma}$ голоморфна всюду, кроме точки q_m, в которой она имеет простой полюс. Так как сумма вычетов абелева дифференциала на компактной римановой поверхности равна нулю, то мы приходим к противоречию.

Следствие. *Найдется такой дивизор $d\leqslant 0$, что для $q\geqslant 2$*

$$\alpha\colon P\mathscr{E}_{1-q}(d)\to PH^1_\Delta(\Gamma,\ \Pi_{2q-2})$$

и

$$\alpha\colon \mathscr{E}_{1-q}(d)\to H^1(\Gamma,\ \Pi_{2q-2})$$

являются (сюръективными) изоморфизмами.

Доказательство. Ясно, что достаточно построить дивизоры $d_1,\ \ldots,\ d_k$, удовлетворяющие (7.5), причем такие, что в (7.8) $n_i=1$ для $i=1,\ \ldots,\ k-1$. Действительно, тогда мы положим $d=-d_k-q_k$ для произвольной точки $q_k\in\Delta/\Gamma$, такой, что $\nu(q_k)=1$ и $\varphi_k(\pi^{-1}(q_k))\neq 0$. Без ограничения общности можно предположить, что Δ/Γ связно. Покажем, что в этом слу-

чае для почти всех $z \in U$, у которых Γ_z тривиальна, можно построить дивизоры

$$d_j = (j-1)\,\pi(z), \quad j = 1, \ldots, k, \tag{7.10}$$

удовлетворяющие (7.6), (7.7), (7.8) и (7.9). Пусть $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ — произвольный базис в $\mathcal{A}_q(0)$. Рассмотрим *вронскиан*

$$W = \det \begin{vmatrix} \varphi_1 & \ldots & \ldots & \varphi_k \\ \varphi_1' & \ldots & \ldots & \varphi_k' \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \varphi_1^{(k-1)} & \ldots & \ldots & \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix}.$$

Можно показать, что если взять другой базис, то W умножится на константу, и что W является автоморфной формой веса $-2k\,\{q + {}^1/_2\,(k-1)\}$. Кроме того, если

$$\mu_0 \leqslant \mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_{k-1}$$

— возможные порядки нулей в точке z функций $\varphi \in \mathcal{A}_q(0)$, то

$$\operatorname{ord}_z W = \sum_{j=0}^{k-1} (\mu_j - j).$$

Точка $z \in \Delta$ называется *q-точкой Вейерштрасса*, если $\operatorname{ord}_z W > 0$. Точки, не являющиеся точками Вейерштрасса,— это в точности те точки, в которых порядки нулей функций из $\mathcal{A}_q(0)$ являются минимально возможными, а именно

$$0,\ 1,\ \ldots,\ k-1.$$

Эти точки плотны в Δ, так как W не является нулевой формой, и, следовательно, нули формы W изолированы.

Также легко показать, что вместо (7.10) можно взять дивизоры (здесь нам не надо предполагать связность пространства Δ/Γ)

$$d_j = \sum_{i=1}^{j-1} p_i, \quad j = 1, \ldots, k,$$

где $p_i \in \Delta/\Gamma$, $\nu(p_i) = 1$. Нас устраивают почти все $(k-1)$-наборы $\{p_1, \ldots, p_{k-1}\} \in ((\Delta/\Gamma)')^{k-1}$, где $(\Delta/\Gamma)' = \{p \in \Delta/\Gamma$, такие, что $\nu(p) = 1\}$.

Мы видели, что найдутся два отображения

$$\mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma) \xrightarrow{\alpha} H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \xrightarrow{\beta} \mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma)^*,$$

где $\mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma)^*$ есть дуальное к $\mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma)$ пространство, и мы рассматриваем β как отображение классов когомологий в (ограниченные) линейные функционалы на $\mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma)$. Заметим, что при этом β является линейным отображением.

Теорема 7.4. *Пусть* $F \in \mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma)$, $q \geqslant 2$, *и положим*

$$F^* = (\beta \circ \alpha)(F).$$

Если $\varphi \in \mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma)$, *то*

$$F^*(\varphi) = -2\pi i \sum_{p \in \overline{\Delta/\Gamma}} \operatorname{Res}_p F\varphi. \tag{7.11}$$

Так как $F\varphi$ не является автоморфной формой, то мы должны объяснить, что подразумевается под вычетом интеграла $F\varphi$.

Пусть $z_0 \in \Delta$ и $F \in \mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma)$. Тогда F разлагается в ряд Лорана

$$\sum_{n=k}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

который сходится при малых $|z - z_0|$. Пусть γ порождает Γ_{z_0}, подгруппу стабильности точки z_0. Нормализуем γ так, что $\gamma(z) - z_0 = e^{2\pi i/m}(z - z_0)$. Тогда сингулярная часть F_1 интеграла F в точке z_0 удовлетворяет равенству

$$\gamma^*_{1-q} F_1 = F_1.$$

Поэтому если $\varphi \in \mathscr{A}^1_q(\Delta, \Gamma)$, то $F_1\varphi$ в окрестности точки z_0 можно рассматривать как автоморфную форму веса -2. Под вычетом интеграла $F\varphi$ мы подразумеваем вычет проекции на риманову поверхность интеграла $F_1\varphi$. Если $m =$ (порядок Γ_{z_0}), а σ — простой замкнутый путь в Δ с числом вращения 1 относительно точки z_0 и такой, что F голоморфен в $\operatorname{Int}\sigma - \{z_0\}$, то

$$\operatorname{Res}_{z_0} F\varphi = \frac{1}{2\pi i m} \int_\sigma F(z)\,\varphi(z)\,dz. \tag{7.12}$$

В частности «обычный» вычет в точке z_0 интеграла $F\varphi$, разделенный на m, используется в (7.11).

Чтобы определить вычет интеграла $F\varphi$ в параболической вершине, мы приведем другую интерпретацию формулы (7.12). Рассмотрим неподвижные относительно элемента γ окружности

с центром в z_0. Пусть σ_ε — дуга длины $2\pi\sigma\varepsilon/m$ на неподвижной относительно γ окружности радиуса ε. Легко видеть, что мы также имеем равенство

$$(7.12)' \qquad \operatorname{Res}_{z_0} F\varphi = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\sigma_\varepsilon} F(z)\, \varphi(z)\, dz.$$

Пусть теперь $z_0 \in \Lambda$, $z_0 \neq \infty$, есть неподвижная точка параболического элемента A, который соответствует проколу p на Δ/Γ. Пусть V — параболическая область, принадлежащая точке p. Тогда V ограничена тремя дугами окружностей, одна из которых лежит на неподвижной относительно A окружности. Обозначим эту дугу через σ_ε, где ε — расстояние от σ_ε до z_0. Теперь формулу (7.12)′ можно опять использовать для определения вычета. Если $z_0 = \infty$, то можно по-прежнему использовать (7.12)′. Однако утверждение «$\varepsilon \to 0$» должно пониматься как «$\sigma_\varepsilon \to z_0$».

Чтобы получить более ясное представление о том, что мы подразумеваем под (7.12)′, положим $z_0 = \infty$. Пусть $A(z) = z + 1$ — соответствующий параболический элемент, а

$$U_c = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > c\}$$

— верхняя полуплоскость, соответствующая проколу, определяемому точкой ∞. Используя для φ и F разложения типа (4.8) и (4.9), мы видим, что

$$(F\varphi)(z) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n e^{2\pi i n z} + v(z) \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{2\pi i n z}, \quad z \in U_c.$$

Поэтому

$$\operatorname{Res}_\infty F\varphi = \frac{1}{2\pi i} \lim_{y \to \infty} \int_0^1 (F\varphi)(x + iy)\, dx = \frac{a_0}{2\pi i}.$$

Из (4.9) мы видим, что F имеет сингулярную часть

$$F_1(z) = \sum_{n=k}^{-1} a_n e^{2\pi i n z}, \quad z \in U_c,$$

инвариантную относительно $\Gamma_\infty = (A)$. Поэтому в окрестности прокола $F_1\varphi$ проектируется в абелев дифференциал. Вычет интеграла $F\varphi$ в ∞ есть вычет этого дифференциала в проколе. Аналогичные рассмотрения можно, конечно, провести для любого прокола.

Доказательство теоремы 7.4. Выберем фундаментальную область ω для Γ в Δ типа построенной в § 3 гл. III.

Предположим сначала, что F регулярен как на $\partial\omega$, так и в параболических вершинах. Выберем на Δ такую функцию χ, что

$0 \leqslant \chi \leqslant 1$,

$\gamma_0^* \chi = \chi$ для всех $\gamma \in \Gamma$,

$\chi = 0$ в окрестности особенностей интеграла $F\varphi$ и

$\chi = 1$ в окрестности границы $\partial\omega$.

Пусть $\theta \in \mathscr{C}_{1-q}^{\infty}(\Delta)$ квазиограниченно представляет коцикл $\alpha(F)$ на Δ. Ясно, что

$$\theta_1 = \chi F + (1-\chi)\,\theta_1 \in \mathscr{C}_{1-q}^{\infty}(\Delta)$$

также квазиограниченно представляет этот коцикл на Δ. Полагая $\mu_1(z) = \partial\theta_1/\partial\bar{z}$, $z \in \Delta$, имеем

$$F^*(\varphi) = \iint\limits_{\omega} \mu_1(z)\,\varphi(z)\,dz \wedge d\bar{z}.$$

Стандартным применением теоремы Стокса (см. доказательство теоремы 3.4) получаем

$$F^*(\varphi) = \lim_{n\to\infty}\left(-\int\limits_{\partial\omega_n} \theta_1(z)\,\varphi(z)\,dz\right),$$

где $\{\omega_n\}$ — соответствующим образом выбранная последовательность подмножеств области ω, причем

$$\omega_1 \subset \omega_2 \subset \ldots \subset \omega_n \ldots,$$

и

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \omega_n = \omega.$$

Так как $\theta_1 = F$ на $\partial\omega_n$ для достаточно больших n, а θF регулярен на $\partial\omega$, то для больших n имеем

$$F^*(\varphi) = -\int\limits_{\partial\omega_n} F(z)\,\varphi(z)\,dz = -2\pi i \sum_{p\in\overline{\Delta/\Gamma}} \operatorname{Res}_p F\varphi.$$

Предположим теперь, что F — автоморфная форма веса $-2(1-q)$. Тогда $\alpha(F) = 0 = F^*$. Интеграл $F\varphi$ есть автоморфная форма веса (-2). Ее проекция на $\overline{\Delta/\Gamma}$ является абелевым дифференциалом. Следовательно,

$$\sum_{p\in\overline{\Delta/\Gamma}} \operatorname{Res}_p F\varphi = 0.$$

Если F произволен, то выберем интеграл F_0, все особенности которого принадлежат внутренности области ω и такой, что

$\alpha(F) = \alpha(F_0)$. Это возможно ввиду следствия из теоремы 7.3. Поэтому

$$\alpha(F) = \alpha(F_0) + \alpha(F - F_0).$$

Можно предположить, что $F - F_0$ является автоморфной формой веса $-2(1-q)$. Так как мы также имеем

$$F^* = F_0^* + (F - F_0)^*,$$

то теорема доказана.

§ 8. Интегралы Эйхлера с особенностями. Теорема Римана — Роха для интегралов Эйхлера

В этом параграфе Δ является инвариантным объединением компонент для клейновой группы Γ. Мы *не* будем, вообще говоря, предполагать, что Δ/Γ имеет конечный тип. Присоединим к Δ неподвижные точки параболических элементов, которые соответствуют проколам на Δ/Γ, и обозначим это множество через $\overline{\Delta}$. Пусть $z_0 \in \overline{\Delta}$. Под *выделенной окрестностью* точки z_0 мы подразумеваем такой открытый круг (или верхнюю полуплоскость) $U \subset \Delta$, что $z_0 \in U$, если $z_0 \in \Delta$, и $z_0 \in \mathrm{Cl}\, U$, если $z_0 \notin \Delta$,

$$\gamma(U) = U \text{ для } \gamma \in \Gamma_{z_0} \text{ (стабилизатор точки } z_0)$$

и

$$\gamma(U) \cap U$$

пусто для $\gamma \in \Gamma - \Gamma_{z_0}$.

Под *сингулярным интегралом Эйхлера* (*порядка* $1-q$, $q \geqslant 2$) мы подразумеваем функцию E, голоморфную на Δ всюду, кроме изолированных особенностей, и такую, что для любого $\gamma \in \Gamma$ найдется $p_\gamma \in \Pi_{2q-2}$, для которого

$$\gamma_{1-q}^* E - E = p_\gamma \mid \Delta',$$

где $\Delta' = \{z \in \Delta;\ E \text{ голоморфна в } z\}$.

В этом случае $\gamma \mapsto p_\gamma$ определяет класс когомологий, называемый *периодом* (или *классом когомологий Эйхлера*) функции E.

Если интеграл Эйхлера голоморфен в полуплоскости, принадлежащей некоторому проколу на Δ/Γ, то ясно, что мы можем использовать определения из § 7, чтобы охарактеризовать как параболические интегралы, так и интегралы Эйхлера, которые голоморфны или мероморфны в этом проколе. Интеграл Эйхлера E будем называть *строго* параболическим, если период интеграла E является кограницей на каждой циклической параболической подгруппе группы Γ.

Пусть $z_0 \in \overline{\Delta}$. Под *главной* (или *сингулярной*) *частью* интеграла Эйхлера в точке z_0 мы подразумеваем пару (U, h), где

(8.1) U — выделенная окрестность точки z_0,

(8.2) h голоморфна в $U - \{z_0\}$

и

(8.3) $$\gamma_{1-q}^{*}h = h \quad \text{для} \quad \gamma \in \Gamma_{z_0}.$$

Две главные части (U_1, h_1) и (U_2, h_2) *эквивалентны*, если функция $h_1 - h_2$ является (может быть продолжена до) голоморфной в точке z_0.

Опишем теперь ряды Лорана или Фурье (классов эквивалентности) главных частей. Если $z_0 \in \Delta$, то мы можем предположить, что $z_0 = 0$, а U есть круг $\{z \in \mathbf{C};\ |z| < 1\}$. В этом случае можно предположить, что

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n}$$

сходится при $z \neq 0$. Если $m = \operatorname{ord} \Gamma_0$, то легко видеть, что

$$a_n = 0 \quad \text{для} \quad n \neq 1 - q \pmod{m}.$$

Если $z_0 \in \overline{\Delta} - \Delta$, то мы можем предположить, что $z_0 = \infty$, $\Gamma_\infty = (A)$, $A(z) = z + 1$ и $U = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 0\}$. Тогда

(8.4) $$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi i n z}, \quad z \in U.$$

Совершенно ясно, что любой сингулярный интеграл Эйхлера E определяет главную часть в любой точке $z_0 \in \Delta$, а также в параболической вершине z_0 при условии, что E голоморфен в полуплоскости, принадлежащей этой параболической вершине.

Нужно заметить, что в определении главной части можно заменить (8.3) условием

(8.3)′ $\gamma_{1-q}^{*}h - h$ является ограничением на U элемента пространства Π_{2q-2}.

Однако в исходной формулировке некоторые вычисления упрощаются.

Пусть H — главная часть интеграла Эйхлера в точке $z_0 \in \overline{\Delta}$. Мы *ассоциируем* с H *линейный функционал* l на пространстве автоморфных форм φ веса $(-2q)$, регулярных в z_0. Если $z_0 \in \overline{\Delta} - \Delta$, то мы рассмотрим только те автоморфные формы, которые обращаются в нуль в точке z_0. Положим

(8.5) $$l(\varphi) = 2\pi i \operatorname{Res}_{z_0} h\varphi,$$

где (U, h) — представитель для H, а вычет на $\overline{\Delta/\Gamma}$ вычисляется, как обычно.

В § 7 мы привели дополнительные описания линейного функционала l. Здесь мы дадим еще одно описание. Прежде всего предположим, что U выбрана так, что φ голоморфна в U. Если

$z_0 \in \Delta$, то ясно, что

$$(8.5)' \qquad l(\varphi) = \frac{1}{m} \int_\sigma \varphi(z) h(z)\, dz,$$

где $m = (\text{порядок } \Gamma_{z_0})$, а σ — простая замкнутая кривая в U с числом вращения 1 относительно точки z_0. Если $z_0 \in \overline{\Delta} - \Delta$, то из (8.3) ясно, что

$$(8.5)'' \qquad l(\varphi) = \int_\sigma \varphi(z) h(z)\, dz,$$

где σ — кривая, идущая из точки z_1 на границе параболической области, принадлежащей z_0, в точку $\gamma_0(z_1)$, также лежащую на границе, где $\Gamma_{z_0} = (\gamma_0)$. По теореме Коши l корректно определен в (8.5)′ и (8.5)″.

Замечание. Ввиду (8.3), формулу (8.5)′ можно переписать как

$$(8.5)''' \qquad l(\varphi) = \int_{\sigma^*} \varphi(z) h(z)\, dz,$$

где σ^* — дуга, соответствующая углу $2\pi/m$ и лежащая на неподвижной относительно Γ_{z_0} окружности с центром в z_0 и с числом вращения 1 относительно z_0.

Лемма 8.1. *Ограничение функционала* $\boldsymbol{l}$ *на* $\mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$ *непрерывно.*

Доказательство. Предположим сначала, что $z_0 \in \Delta$, $z_0 \neq \infty$. Второе ограничение не уменьшает общности. Тогда найдутся открытое множество G с компактным замыканием и фундаментальные множества $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$, такие, что

$$\sigma \subset G \subset (\omega_1 \cup \ldots \cup \omega_m).$$

Пусть M обозначает максимум функции $|h(z)|$ при $z \in \sigma$, k — длину кривой σ, r — расстояние от σ до границы множества G, $1/c$ — верхнюю границу функции $\lambda(z)$ при $z \in G$, а $\|\varphi\|_{q,1,\Gamma}$ — норму формы $\varphi \in \mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$. Тогда

$$|l(\varphi)| \leqslant \frac{M}{m} \int_\sigma |\varphi(z)|\,|dz| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M}{m} \int_\sigma \frac{1}{2\pi r^2} \iint_{|\zeta|<r} |\varphi(z+\zeta)\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta}|\,|dz| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mk}{2\pi r^2 m} \iint_G |\varphi(z)\, dz \wedge d\bar{z}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mkc^{2-q}}{2\pi r^2 m} \iint\limits_G \lambda(z)^{2-q} |\varphi(z)\, dz \wedge d\bar{z}| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Mkc^{2-q}}{2\pi r^2 m} \iint\limits_{\omega_1 \cup \ldots \cup \omega_m} \lambda(z)^{2-q} |\varphi(z)\, dz \wedge d\bar{z}| =$$

$$= \frac{Mkc^{2-q}}{2\pi r^2} \|\varphi\|_{q,\,1,\,\Gamma}.$$

Предположим теперь, что $z_0 \in \overline{\Delta} - \Delta$, $z_0 = \infty$. Мы можем предположить, что h задается рядом (8.4). Поэтому

$$l(\varphi) = \int\limits_0^1 h(\xi + i\eta_0)\, \varphi(\xi + i\eta_0)\, d\xi, \quad n_0 > 0.$$

Приведенные выше вычисления при $\sigma = \{\xi + i\eta_0;\ 0 \leqslant \xi \leqslant 1\}$, $m = 3$, $G = \{\xi + i\eta:\ -1 \leqslant \xi \leqslant 2,\ {}^1/_2\eta_0 < \eta < 2\eta_0\}$ показывают, что и в этом случае l непрерывен на $\mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma)$.

Пусть теперь задана система $\mathcal{H} = \{H_1, \ldots, H_r\}$, состоящая из конечного числа главных частей в неэквивалентных точках $z_1, \ldots, z_r$ множества $\overline{\Delta}$. Если E — интеграл Эйхлера, который регулярен во всех точках множества $\overline{\Delta}$, не эквивалентных точкам $z_1, \ldots, z_r$, а H_j — главная часть интеграла E в z_j, $j = 1, \ldots, r$, то мы назовем $\mathcal{H}$ *полной системой* главных частей для E.

Мы *ассоциируем* с $\mathcal{H}$ *линейный функционал* на пространстве автоморфных форм, которые голоморфны в $z_1, \ldots, z_r$ и обращаются в нуль в параболических вершинах (каждая из которых является одной из точек $z_1, \ldots, z_r$). Определение функционала l просто:

$$l = l_1 + \ldots + l_r,$$

где l_j — линейный функционал, ассоциированный с H_j. Найдется такая единственная форма $\psi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$, что

$$l(\varphi) = (\varphi, \psi)_{q,\,\Gamma}, \quad \varphi \in \mathcal{A}_q^1(\Delta, \Gamma).$$

Назовем ψ *автоморфной формой, ассоциированной с* $\mathcal{H}$.

Теорема 8.2. *Пусть задана конечная система $\mathcal{H}$ главных частей в неэквивалентных точках множества $\overline{\Omega}$, где Ω — область разрывности клейновой группы Γ. Пусть l — линейный функционал, ассоциированный с $\mathcal{H}$, а ψ — ассоциированная с $\mathcal{H}$ ограниченная автоморфная форма. Пусть $a_1, \ldots, a_{2q-1}$ суть $2q - 1$ различных точек из Λ, предельного множества группы Γ. Для $z \in \mathbf{C}$, $z \neq a_j$, $j = 1, \ldots, 2q - 1$, положим*

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(z - a_1) \ldots (z - a_{2q-1})}{(\zeta - z)(\zeta - a_1) \ldots (\zeta - a_{2q-1})}, \quad \zeta \in \Omega, \tag{8.6}$$

и

$$f(z, \zeta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(z, \gamma\zeta)\, \gamma'(\zeta)^q.$$

Пусть F — потенциал для $\lambda^{2-2q}\overline{\psi}$, обращающийся в нуль в $a_1, \ldots, a_{2q-1}$. Для $z \in \mathbf{C}$, $z \neq \gamma(a_j)$, $j = 1, \ldots, 2q-1$, $\gamma \in \Gamma$, положим

$$E(z) = -l(f(z, \cdot)).$$

Тогда E является строго параболическим сингулярным интегралом Эйхлера и $\mathscr{H}$ является его полной системой главных частей. Период интеграла E совпадает с периодом интеграла F и, если Ω_0 — такая компонента области Ω, что E регулярен во всех точках из $\overline{\Omega}_0$, то $E \mid \overline{\Omega}_0 = F \mid \overline{\Omega}_0$.

Соглашение. В (8.6) мы опускаем выражения вида $z - \infty$ и $\zeta - \infty$.

Доказательство. Ясно, что в силу линейности можно предположить, что $\mathscr{H}$ содержит единственную главную часть H, определенную в точке $z_0 \in \overline{\Omega}$. Сопрягая Γ, мы можем предположить, что имеет место одна из следующих стандартных ситуаций:

1) Если $z_0 \in \Omega$, то $z_0 = 0$ и Γ_{z_0} порождается элементом $\gamma_0(z) = e^{2\pi i/m} z$.

В этом случае мы можем в качестве представителя (U, h) главной части H взять

$$U_{\varepsilon_0} = \{z \in \mathbf{C},\ |z| < \varepsilon_0\} \tag{8.7}$$

и функцию

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^{-n},$$

которая сходится при всех $z \neq 0$.

2) Если $z_0 \in \overline{\Omega} - \Omega$, то мы можем предположить, что Γ_{z_0} порождается преобразованием $\gamma_0(z) = z + 1$. В этом случае можно предположить, что H представляется посредством

$$U_{\varepsilon_0} = \{z \in \mathbf{C};\ \operatorname{Im} z > 1/\varepsilon_0\} \tag{8.8}$$

и функции

$$h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi i n z},$$

которая сходится при всех z.

Определим для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ очевидным образом (см. (8.7) или (8.8)) множество U_ε. Для $z \in U_\varepsilon \cup \partial U_\varepsilon$ положим

$$\theta_\varepsilon(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varepsilon^{-2n} \overline{z}^n \qquad \text{(в случае 1)},$$

$$\theta_\varepsilon(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-2\pi n(i\overline{z} - 2/\varepsilon)} \qquad \text{(в случае 2)}.$$

Заметим, что

(8.9) $\theta_\varepsilon(z) = h(\varepsilon^2/\bar{z})$ (в случае 1),

(8.9)′ $\theta_\varepsilon(z) = h(\bar{z} + 2i/\varepsilon)$ (в случае 2).

Так как для $z \in \partial U_\varepsilon$

$$\varepsilon^2/\bar{z} = z \quad \text{(в случае 1)},$$

$$\bar{z} + 2i/\varepsilon = z \quad \text{(в случае 2)},$$

то мы заключаем, что

$$\theta_\varepsilon \,|\, \partial U_\varepsilon = h \,|\, \partial U_\varepsilon.$$

Проверим теперь, что

(8.10) $$(\gamma_0)^*_{1-q}\theta_\varepsilon = \theta_\varepsilon.$$

Мы знаем, что $(\gamma_0)^*_{1-q}h = h$. Но

$$\begin{aligned}\theta_\varepsilon(\gamma_0 z)\,\gamma_0'(z)^{1-q} &= h(\varepsilon^2/\overline{\gamma_0 z})\,\gamma_0'(z)^{1-q} = \\ &= h(e^{2\pi i/m}\varepsilon^2/\bar{z})\,\gamma_0'(z)^{1-q} = \\ &= h(\gamma_0(\varepsilon^2/\bar{z}))\,\gamma_0'(z)^{1-q} = h(\varepsilon^2/\bar{z}) = \theta_\varepsilon(z)\end{aligned}$$

(в случае 1),

$$\theta_\varepsilon(z+1) = \theta_\varepsilon(z) \quad \text{(в случае 2)}.$$

Определим μ_ε на U_ε по формуле

$$\mu_\varepsilon(z) = \partial\theta_\varepsilon/\partial\bar{z}, \quad z \in U_\varepsilon.$$

Как следствие из (8.10) имеем

(8.11) $$(\gamma_0)^*_{1-q,\,1}\mu_\varepsilon = \mu_\varepsilon \text{ на } U_\varepsilon.$$

Функция $\lambda^{q-2}\mu_\varepsilon$ ограничена на U_ε, так как

$$\mu_\varepsilon(z) = O(1) = \lambda(z), \quad z \to 0 \qquad \text{(в случае 1)},$$

$$\mu_\varepsilon(z) = O(e^{-2\pi \operatorname{Im} z}),$$

$$\lambda(z) = O((|z|\log|z|)^{-1}), \ \operatorname{Im} z \to \infty \quad \text{(в случае 2)}.$$

Используя группу Γ, мы по инвариантности продолжим обобщенный коэффициент Бельтрами μ_ε на ΓU_ε. Ввиду (8.11), это продолжение корректно определено. Положим теперь μ_ε равным нулю вне ΓU_ε.

Пусть F_ε — потенциал для μ_ε, обращающийся в нуль в $a_1, \ldots, a_{2q-1}$. (Мы используем символы и определения, введенные в формулировке теоремы.) Мы утверждаем, что

$$E(z) = F_\varepsilon(z) \quad \text{для} \quad z \notin \Gamma U_\varepsilon.$$

Действительно, в случае 1 мы можем выбрать m (= порядок Γ_0) непересекающихся фундаментальных областей $\omega_1, \ldots, \omega_m$, таких, что

$$U_\varepsilon \subset \omega_1 \cup \ldots \cup \omega_m.$$

Для $z \notin \Gamma U_\varepsilon$ имеем (сравниваем с (2.17))

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(z) &= (f(z, \cdot), \lambda^{2q-2}\overline{\mu}_\varepsilon)_{q,\Gamma} = \\
&= \iint\limits_{\omega_1} f(z, \zeta)\, \mu_\varepsilon(\zeta)\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \\
&= \frac{1}{m} \iint\limits_{\bigcup\limits_{j=1}^{m} \omega_j} f(z, \zeta)\, \mu_\varepsilon(\zeta)\, d\zeta \wedge d\overline{\zeta} = \\
&= -\frac{1}{m} \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} (f(z, \zeta)\, \theta_\varepsilon(\zeta)\, d\zeta) = \\
&= -\frac{1}{m} \iint\limits_{\partial U_\varepsilon} f(z, \zeta)\, \theta_\varepsilon(\zeta)\, d\zeta = -\frac{1}{m} \int\limits_{\partial U_\varepsilon} f(z, \zeta)\, h(\zeta)\, d\zeta = \\
&= -l(f(z, \cdot)) = E(z).
\end{aligned}$$

В случае 2 мы так выберем фундаментальную область ω, чтобы

$$\{z \in U_\varepsilon;\ 0 < \operatorname{Re} z < 1\} \subset \omega,$$

и для $z \notin \Gamma U_\varepsilon$ вычисляем

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(z) &= (f(z, \cdot), \lambda^{2q-2}\overline{\mu}_\varepsilon)_{q,\Gamma} = \\
&= \iint\limits_{\substack{0<\operatorname{Re}\zeta<1 \\ 1/\varepsilon<\operatorname{Im}\zeta}} f(z, \zeta)\, \mu_\varepsilon\, d\zeta = \\
&= -\lim_{R\to\infty} \iint\limits_{\substack{0<\operatorname{Re}\zeta<1 \\ 1/\varepsilon<\operatorname{Im}\zeta<R}} \frac{\partial}{\partial \overline{\zeta}} (f(z, \zeta)\, \theta_\varepsilon(\zeta)\, d\zeta) = \\
&= -\int\limits_0^1 f(z, \xi + i/\varepsilon)\, \theta_\varepsilon(\xi + i/\varepsilon)\, d\xi + \\
&\qquad + \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^1 f(z, \xi + i/R)\, \theta_\varepsilon(\xi + i/R)\, d\xi = \\
&= -\int\limits_0^1 f(z, \xi + i/\varepsilon)\, h(\xi + i/\varepsilon)\, d\xi = E(z).
\end{aligned}$$

Так как, кроме того,

$$\frac{\partial F_\varepsilon}{\partial \bar z} = \mu_\varepsilon,$$

то мы заключаем, что F_ε (и, следовательно, E) голоморфна вне замыкания множества ΓU_ε. Из равенства

$$\bigcap_{\varepsilon_0 > \varepsilon > 0} U_\varepsilon = \Gamma z_0$$

получаем, что E голоморфна на $\Omega - \Gamma z_0$. Кроме того, для любого $\varepsilon > 0$ и любого $\gamma \in \Gamma$

$$\gamma^*_{1-q} E - E = \gamma^*_{1-q} F_\varepsilon - F_\varepsilon = \gamma^*_{1-q} F - F.$$

Первое равенство очевидно, второе следует из (сравниваем со следствием из леммы 5.5 гл. IV) того, что

$$F(z) = (f(z, \cdot), \psi)_{q,\Gamma} = -l(f(z, \cdot)) = E(z)$$

для $z \in \Lambda - \{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}$.

(Строго параболический) интеграл Эйхлера E регулярен в любой параболической вершине (не эквивалентной вершине z_0), так как в полуплоскости, принадлежащей такой параболической вершине, E совпадает с потенциалом F_ε при достаточно малых ε.

Остается проверить, что H является сингулярной частью интеграла E. В случае 1 покажем, что для любого целого $n \geqslant 0$

$$\int_{|z|=\varepsilon} E(z) z^n \, dz = 2\pi i a_{n+1}.$$

Вычисляем при $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$

$$\int_{|z|=\varepsilon} E(z) z^n \, dz = \int_{\partial U_\varepsilon} F_\varepsilon(z) z^n \, dz = \iint_{U_\varepsilon} \bar\partial (F_\varepsilon(z) z^n \, dz) =$$

$$= -\iint_{U_\varepsilon} \mu_\varepsilon(z) z^n \, dz \wedge d\bar z = \iint_{U_\varepsilon} \bar\partial (\theta_\varepsilon(z) z^n \, dz) =$$

$$= \int_{|z|=\varepsilon} \theta_\varepsilon(z) z^n \, dz = \int_{|z|=\varepsilon} h(z) z^n \, dz = 2\pi i a_{n+1}.$$

В случае 2 имеем

$$E(z) = \sum_{r \neq 0} c_r e^{2\pi i r z} + p(z),$$

где p — полином степени $\leqslant 2q-1$ (напомним, что $\partial^{2q-1} E$ является автоморфной формой веса $-2q$). На самом деле $p \in \Pi_{2q-2}$, так как E параболичен. Однако этот факт не нужен. Покажем, что

$c_{-n}=a_n$ для $n>0$. Заметим, что для $n>0$

$$\lim_{y\to\infty}\int_0^1 p(x+iy)\,e^{2\pi in(x+iy)}\,dx=0.$$

Следовательно,

$$c_{-n}=\lim_{y\to\infty}\int_0^1 E(x+iy)\,e^{2\pi in(x+iy)}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 [E(x+i/\varepsilon)-p(x+i/\varepsilon)]\,e^{2\pi in(x+i/\varepsilon)}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 [F_\varepsilon(x+i/\varepsilon)-p(x+i/\varepsilon)]\,e^{2\pi in(x+i/\varepsilon)}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 \theta_\varepsilon(x+i/\varepsilon)\,e^{2\pi in(x+i/\varepsilon)}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^1 h(x+i/\varepsilon)\,e^{2\pi in(x+i/\varepsilon)}\,dx=a_n.$$

Только четвертое равенство нуждается в доказательстве. Заметим, что для $z\in U_\varepsilon$

$$E(z+1)-E(z)=p(z+1)-p(z)=F_\varepsilon(z+1)-F_\varepsilon(z),$$

т. е. $F_\varepsilon-p$ инвариантна относительно $z\mapsto z+1$. Поэтому при фиксированном $\varepsilon>0$

$$\int_0^1 [F_\varepsilon(x+i/\varepsilon)-p(x+i/\varepsilon)]\,e^{2\pi in(x+i/\varepsilon)}\,dx=$$

$$=\int_0^1 [F_\varepsilon(x+i/\varepsilon)-p(x+i/\varepsilon)]\,e^{2\pi in(x+i/\varepsilon)}\,dx-$$

$$-\lim_{R\to\infty}\int_0^1 [F_\varepsilon(x+iR)-p(x+iR)]\,e^{2\pi in(x+iR)}\,dx=$$

$$=\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{\substack{0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1\\ 1/\varepsilon\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant R}}\bar\partial\,[(F_\varepsilon(z)-p(z))\,e^{2\pi inz}\,dz]=$$

$$=-\lim_{R\to\infty}\iint\limits_{\substack{0\leqslant \operatorname{Re} z\leqslant 1\\ 1/\varepsilon\leqslant \operatorname{Im} z\leqslant R}}\mu_\varepsilon(z)\,e^{2\pi inz}\,dz\wedge d\bar z=$$

$$= \lim_{R\to\infty} \iint\limits_{\substack{0\leq \operatorname{Re} z\leq 1\\ 1/\varepsilon\leq \operatorname{Im} z\leq R}} \bar{\partial}\,[\theta_\varepsilon(z)\, e^{2\pi i n z}\, dz] =$$

$$= \int_0^1 \theta_\varepsilon(x+i/\varepsilon)\, e^{2\pi i n(x+i/\varepsilon)}\, dx -$$

$$- \lim_{R\to\infty} \int_0^1 \theta_\varepsilon(x+iR)\, e^{2\pi i n(x+iR)}\, dx =$$

$$= \int_0^1 \theta_\varepsilon(x+i/\varepsilon)\, e^{2\pi i n(x+i/\varepsilon)}\, dx.$$

Закончим доказательство. Пусть Ω_0 — такая компонента области Ω, что E регулярен на $\bar{\Omega}_0$. Пусть $D = \bigcup_{\gamma\in\Gamma} \gamma(\Omega_0)$. Тогда E регулярен на $\bar{D}$ и, следовательно, $\mu_\varepsilon | D = 0$. Поэтому также $\psi | D = 0$ (так как ψ индуцирует на $\mathcal{A}_q^1(D, \Gamma)$ нулевой линейный функционал). Пусть $z \in D$. Тогда $f(z, \zeta)$ — голоморфная по ζ функция на $\Omega - D$. Положим

$$\hat{f}(z, \zeta) = \begin{cases} f(z, \zeta) & \text{для} \quad \zeta \in \Omega - D, \\ 0 & \text{для} \quad \zeta \in D. \end{cases}$$

Тогда для $z \in D$

$$E(z) = F_\varepsilon(z) = (f(z, \cdot), \lambda^{2q-2}\bar{\mu}_\varepsilon)_{q,\Gamma} =$$
$$= (\hat{f}(z, \cdot), \lambda^{2q-2}\bar{\mu})_{q,\Gamma} =$$
$$= (\hat{f}(z, \cdot), \psi)_{q,\Gamma} = (f(z, \cdot), \psi)_{q,\Gamma} = F(z).$$

Поэтому $E \mid \bar{\Omega}_0 = F \mid \bar{\Omega}_0$.

Следствие. *Пусть Δ — такое инвариантное объединение компонент клейновой группы Γ, что Δ/Γ имеет конечный тип. Пусть задана конечная система $\mathcal{H}$ главных частей в неэквивалентных точках из $\bar{\Delta}$. Пусть l — линейный функционал, ассоциированный с $\mathcal{H}$, а ψ — ассоциированная ограниченная форма веса $(-2q)$. Тогда $\mathcal{H}$ является полной системой главных частей мероморфной автоморфной формы веса $-2(1-q)$ в том и только в том случае, когда $\psi = 0$.*

Предположим теперь, что $\infty \in \Omega$. Напомним, что в предыдущем параграфе мы определили функцию

$$h(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{\gamma'(\zeta)^q}{\gamma(\zeta) - z}, \quad z \in \mathbf{C}, \ \zeta \in \Omega - \{\infty\}. \tag{8.12}$$

При фиксированной точке z ряд $h(z, .)$ является автоморфной формой веса $(-2q)$, имеющей, быть может, простой полюс в $\zeta = z$ (если $z \in \Omega$). При фиксированной точке ζ ряд $h(., \zeta)$ является мероморфным интегралом Эйхлера, имеющим, быть может, простой полюс в $z = \zeta$.

Зафиксируем точку $\zeta \in \Omega - \{\infty\}$ и положим $\operatorname{ord} \Gamma_\zeta = m$. Если h — главная часть интеграла Эйхлера в точке ζ, то

$$2\pi i h(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-\zeta)^{-n}.$$

Если φ — мероморфная автоморфная форма веса $(-2q)$ и если φ голоморфна в ζ, то

$$l(\varphi) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{\infty} a_n \frac{\varphi^{(n-1)}(\zeta)}{(n-1)!},$$

где l — линейный функционал, ассоциированный с h. Поэтому соответствующий сингулярный интеграл Эйхлера есть

$$E(z, \zeta) = -\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(n-1)!} \frac{\partial^{n-1} f(z, \zeta)}{\partial \zeta^{n-1}}, \tag{8.13}$$

где $f(z, \zeta)$ — функция, определенная при формулировке теоремы 8.2. Ясно, что мы должны исследовать связь между этими двумя методами построения интегралов Эйхлера.

Теорема 8.3. *Зафиксируем целое число* $\nu \geqslant 1$. *Пусть*

$$h_\nu(z, \zeta) = \partial^{\nu-1} h(z, \zeta)/\partial \zeta^{\nu-1}, \quad z \in \mathbf{C}, \quad \zeta \in \Omega - \{\infty\},$$

и пусть

$$E(z, \zeta_0), \quad z \in \mathbf{C}, \quad \zeta_0 \in \Omega - \{\infty\}$$

есть сингулярный интеграл Эйхлера, соответствующий главной части h *в* ζ_0, *где*

$$2\pi i h(z) = \begin{cases} -m(\nu-1)!\,(z-\zeta_0)^{-\nu}, & \text{если } \nu \equiv 1-q \pmod m, \\ 0, & \text{если } \nu \not\equiv 1-q \pmod m. \end{cases} \tag{8.14}$$

Тогда

$$\alpha(E(., \zeta_0)) = \alpha(h_\nu(., \zeta_0)) \text{ при всех } \zeta_0 \in \Omega - \{\infty\}, \tag{8.15}$$

где α — *отображение периодов. Кроме того, при фиксированном* $\zeta_0 \in \Omega - \{\infty\}$ *и главной части* $h \neq 0$

$$p_{\zeta_0} = E(., \zeta_0) - h_\nu(., \zeta_0) \in \Pi_{2q-2} \tag{8.16}$$

и

$$p_{\zeta_0}(a_j) = -h_\nu(a_j, \zeta_0), \quad j = 1, \ldots, 2q-1. \tag{8.17}$$

Замечание. Для того чтобы h было главной частью интеграла Эйхлера в точке ζ_0, мы должны потребовать, чтобы Γ_ζ порождалась мёбиусовым преобразованием γ_0, где

$$\gamma_0(z) - \zeta_0 = e^{2\pi i/m}(z - \zeta_0), \quad z \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}. \tag{8.18}$$

Этого всегда можно добиться при помощи сопряжения. (Это условие, конечно, бессодержательно при $m = 1$.)

Доказательство теоремы 8.3. Заметим, что ввиду (8.13) при $z \neq \zeta_0$

$$E(z, \zeta_0) = \partial^{\nu-1} f(z, \zeta)/\partial\zeta^{\nu-1}\big|_{\zeta=\zeta_0},$$

если главная часть h не равна нулю, и

$$E(z, \zeta_0) = 0,$$

если $h = 0$. Вычисляем

$$2\pi i\,(f(z, \zeta) - h(z, \zeta)) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \left\{ \prod_{j=1}^{2q-1} \frac{z - a_j}{\gamma\zeta - a_j} - 1 \right\} \frac{\gamma'(\zeta)^q}{\gamma\zeta - z}.$$

Так как выражение, заключенное в фигурные скобки, является полиномом по z степени $\leqslant 2q-1$, который обращается в нуль при $z = \gamma\zeta$, то мы получаем, что

$$f(z, \zeta) - h(z, \zeta) = \sum_{j=0}^{2q-2} \varphi_j(z)\, z^j, \tag{8.19}$$

где φ_j аналитичны в Ω. Поэтому мы проверили (8.15) и (8.16) в случае $h \neq 0$. Чтобы проверить (8.17), зафиксируем $\zeta_0 \in \Omega - \{\infty\}$ и заметим, что

$$2\pi i p_{\zeta_0}(z) = \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial\zeta^{\nu-1}} \sum_{\gamma\in\Gamma} \left\{ \prod_{j=1}^{2q-1} \frac{z - a_j}{\gamma\zeta - a_j} - 1 \right\} \frac{\gamma'(\zeta)^q}{\gamma\zeta - z}\Bigg|_{\zeta=\zeta_0}.$$

Отметим, что

$$\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial\zeta^{\nu-1}} \left\{ \prod_{j=1}^{2q-1} \frac{z - a_j}{\gamma\zeta - z} \right\}\Bigg|_{z=a_k,\ \zeta=\zeta_0} = 0, \quad k = 1, \ldots, 2q-1,$$

и заключаем, что

$$p_{\zeta_0}(a_k) = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{\gamma\in\Gamma} \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial\zeta^{\nu-1}} \frac{\gamma'(\zeta)^q}{\gamma\zeta - z}\Bigg|_{z=a_k,\ \zeta=\zeta_0} = -h_\nu(a_k, \zeta_0).$$

Нужно еще рассмотреть случай, когда главная часть есть нуль. Мы должны показать, что

$$\partial h^{\nu-1}(\,.\,,\,\zeta)/\partial\zeta^{\nu-1}\big|_{\zeta=\zeta_0}\in\Pi_{2q-2} \tag{8.20}$$

при $\nu\not\equiv 1-q \pmod m$.

Теперь мы опять рассмотрим равенство (7.1) при фиксированном $A\in\Gamma$ и перепишем его в виде

$$h(Az,\,\zeta)\,A'(z)^{1-q}-h(z,\,\zeta)=\sum_{j=1}^{2q-1}\Phi_j(\zeta)\,z^j,$$

где функции Φ_j голоморфны на Ω. Так как $h(Az,\,.)\,A'(z)^{1-q}$ и $h(z,\,.)$ — автоморфные формы веса $(-2q)$, то Φ_j — также автоморфная форма веса $(-2q)$. В частности, Φ_j имеет разложение в ряд Тейлора вида

$$\Phi_j(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}b_n(\zeta-\zeta_0)^n.$$

Пусть γ_0 порождает подгруппу стабильности точки z_0. Мы предположили, что γ_0 имеет вид (8.18).

Используя равенство $\Phi_j(\gamma_0\zeta_0)\,\gamma_0'(\zeta_0)^q=\Phi_j(\zeta_0)$, мы видим, что

$$b_n=0 \quad \text{при} \quad n\not\equiv -q \pmod m. \tag{8.21}$$

Теперь

$$h_\nu(Az,\,\zeta_0)\,A'(z)^{1-q}-h_\nu(z,\,\zeta_0)=\sum_{j=0}^{2q-1}\Phi_j^{(\nu-1)}(\zeta_0)\,z^j.$$

Из (8.21) и (8.14) выводим, что $\Phi^{(\nu-1)}(\zeta_0)=0$. Поэтому $h_\nu(.,\,\zeta)$ дает нулевой коцикл. Мы проверили (8.15) в случае $h=0$ и закончили доказательство теоремы.

Следствие. *При любом* $\zeta\in\Omega-\{\infty\}$ $\alpha(h(.,\,\zeta))$ *является классом когомологий Берса некоторой формы* $\varphi\in\mathcal{A}_q^\infty(\Omega,\,\Gamma)$.

Наш следующий результат является аналогом для интегралов Эйхлера теоремы Римана — Роха.

Теорема 8.4. *Пусть* Δ — *инвариантное объединение компонент клейновой группы* Γ. *Если* Δ/Γ *конечного типа, а* $d\leqslant 0$ *есть дивизор на* $\overline{\Delta/\Gamma}$, *то при* $q\geqslant 2$ *имеет место следующая коммутативная диаграмма с точными строками*:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & \mathcal{A}_{1-q}(d) & \xrightarrow{i} & P\mathcal{E}_{1-q}(d) & \xrightarrow{\alpha} & PH^1_\Delta(\Gamma,\,\Pi_{2q-2}) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{A}_q(-d)^* & \to 0\\
 & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}} & \\
0\to & \mathcal{A}_{1-q}(d) & \xrightarrow{i} & \mathcal{E}_{1-q}(d) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(\Gamma,\,\Pi_{2q-2}) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{A}_q(-d)^* & \to 0,
\end{array}$$

где i — отображение вложения, α — отображение периодов, а β — отображение Берса (рассматриваемое как отображение классов когомологий на ограниченные линейные функционалы на подпространствах пространства интегрируемых форм).

Доказательство. Ясно, что i инъективно (нет автоморфных полиномов). Также очевидно, что (образ i) = (ядро α), (образ α) $\subset$ (ядро β) (ввиду теоремы 7.4) и β сюръективно. Остается проверить, что (ядро β) $\subset$ (образ α). Предположим, что $\dim \mathcal{A}_q(-d) = 0$. Мы должны показать, что в этом случае α сюръективно. Выберем $k = \dim \mathcal{A}_q(0)$ дивизоров

$$0 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_k < -d,$$

удовлетворяющих (7.6), (7.7), (7.8) и (7.9). Рассмотрим пространства $\mathscr{E}_{1-q}(d)$ интегралов Эйхлера. Ясно (из теоремы 8.2), что $\alpha(\mathscr{E}_{1-q}(d)) = H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ и $\alpha(P\mathscr{E}_{1-q}(d)) = PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. Если $\dim \mathcal{A}_q(-d) > 0$, то мы выберем k таких дивизоров, что

$$0 = d_0 \leqslant d_1 < d_2 < \ldots < d_k,$$

и для некоторого j, $0 \leqslant j < k$, имеем

$$d_j < -d \leqslant d_{j+1}.$$

Рассмотрим мероморфные интегралы Эйхлера

$$F_1, \ldots, F_k$$

с дивизорами

$$\alpha^{1-q} - (d_1 + q_1), \ldots, \alpha^{1-q} - (d_{k-1} + q_{k-1}), \alpha^{1-q} - (d_k + q_k),$$

где q_i определяется равенством (7.8) при $i = 1, \ldots, k-1$, $q_k \in \overline{\Delta/\Gamma}$ произвольно (но подчиняется обычному ограничению). Мы наложим еще одно условие на точку q_j. Потребуем, чтобы

$$d_j + q_j \leqslant -d.$$

Очевидно, что это условие совместимо с нашими предыдущими предположениями. Мы видели, что периоды линейных комбинаций интегралов $F_1, \ldots, F_k$ и элементов из $\mathscr{E}_{1-q}(0)$ ($P\mathscr{E}_{1-q}(0)$) порождают $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ ($PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2})$).

Если F является интегралом Эйхлера этого типа, то $\beta \circ \alpha(F) = 0$ тогда и только тогда, когда $F \in \mathscr{E}_{1-q}(d)$ ($P\mathscr{E}_{1-q}(d)$).

Замечания

Материал этой главы основан на двух работах автора [К12—4] и [К12—5]. Использование когомологий как средства изучения автоморфных функций для фуксовых групп восходит к Эйхлеру [Э2—1]. Фуксов случай также изучался Ганнингом [Г3—3]

и [Г3—4], Берсом [Б4—12], Хуссейни и Кноппом [ХК], Кноппом [К11—6] и Ленером [Л5—2] и [Л5—4]. Более общий клейнов случай рассматривался Альфорсом [А5—12] и [А5—13], Берсом [Б4—15] и [Б4—19] и Ленером [Л5—5].

Содержание § 2 взято из работы Берса [Б4—15]. Результаты § 3 принадлежат автору [К12—4]. Исправленное определение интегралов Эйхлера (в клейновом случае) принадлежит Альфорсу [А5—13]. Материал § 5 содержится в [К12—5], а § 6 — в [Б4—15]. Описание пространства $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ при помощи мероморфных интегралов Эйхлера впервые появилось в [А5—13]. Сингулярные интегралы Эйхлера возникли в [Б4—19].

Материал § 6—8 не понадобится в дальнейшем.

Глава VI

ПРИЛОЖЕНИЯ К КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИИ

В этой главе мы получим классическую теорему Римана — Роха и решение проблемы обращения Якоби. Доказательство неравенства Римана — первой части теоремы Римана — Роха — основано на результатах предыдущей главы о когомомологиях накрывающей группы римановой поверхности. Методы, используемые в остальных местах этой главы, являются вполне классическими.

§ 1. Теорема Римана — Роха

Начнем со слабого варианта основного результата этого параграфа.

Лемма 1.1 (неравенство Римана). *Если a — произвольный дивизор на компактной римановой поверхности M рода g, то*

$$\dim a \geqslant \deg a + 1 - g. \tag{1.1}$$

Доказательство. Запишем

$$a = \sum_{i=1}^{I} n_i x_i - \sum_{j=1}^{J} m_j y_j,$$

где n_i и m_j — неотрицательные целые числа и $x_i \neq y_j$ для всех i и j. Ясно, что если $\deg a < 0$, то $\dim a = 0$ (так как любая функция $f \in l(a)$ должна иметь больше нулей, чем полюсов). В случае когда $\deg a = 0$, имеем $\dim a = 0$, если a не есть главный дивизор, и $\dim a = 1$, если a — главный дивизор. Поэтому если $\deg a = 0$, то (1.1) выполняется при $g \geqslant 1$. Так как для $g = 0$ любой дивизор степени нуль является главным, то мы можем предположить, что $\deg a > 0$.

Проверим теперь (1.1) при $g = 0$. Совершенно ясно, что в этом случае имеется по крайней мере $\sum_{i=1}^{I} n_i + 1$ рациональных функций с полюсами порядка $\leqslant n_i$ в точках x_i и голоморфных на $M - \{x_1, \ldots, x_I\}$. Так как для того, чтобы такая функция принадлежала $l(a)$, она должна иметь в y_j нуль порядка не меньше

m_j, то мы накладываем не больше чем $\sum_{j=1}^{J} m_j$ условий. Таким образом, нам осталось рассмотреть случай $\deg a > 0$, $g > 0$.

Пусть $M' = M - \{x\}$, где $x \in M$, $x \neq x_i$, $x \neq y_j$ для всех i, j. Заметим, что универсальная накрывающая поверхности M' является единичным кругом U. Поэтому $M' = U/G$, где G — фуксова группа с сигнатурой $(g;\ \infty)$. Кроме того, G является свободной группой с $2g$ образующими. Из леммы 1.1 гл. V имеем

$$\dim H^1(G,\ \Pi_2) = 3(2g-1).$$

Так как U/G имеет единственный параболический прокол, то мы заключаем, что

$$\dim PH^1_U(G,\ \Pi_2) \geqslant 6g-4. \tag{1.2}$$

Из следствия 3 теоремы 5.1 гл. V получаем

$$\dim \mathcal{A}_2^\infty(U,\ G) \geqslant 3g-2 > 0. \tag{1.3}$$

Заметим, что из следствия 3 теоремы 5.1 гл. V вытекает, что размерность $\dim PH^1_U(G,\ \Pi_2)$ четна. Следовательно, в (1.2) и (1.3) мы имеем равенство. Однако, этот факт не нужен для доказательства неравенства Римана.

Мы видели, что любой элемент $\varphi \in \mathcal{A}_2^\infty(U,\ G)$ проектируется в квадратичный дифференциал Φ на M'. Дифференциал Φ голоморфен всюду, кроме точки x, где он имеет самое большее простой полюс. Кроме того,

$$\deg(\Phi) = 2(2g-2) \geqslant 0.$$

В следствии из леммы 9.2 гл. III мы видели, как построить квадратичный дифференциал с полюсом произвольного порядка в произвольной точке $z \in M'$ и имеющий в точке x самое большее простой полюс.

Поэтому рассмотрим пространство

$$Q = \{\Phi;\ \Phi \text{ — квадратичный дифференциал на } M \text{ и } (\Phi) + \sum_{i=1}^{I} n_i x_i + x \geqslant 0\}.$$

Мы показали, что

$$\dim Q = \sum_{i=1}^{I} n_i + (3g-2).$$

Выберем элемент $\varphi_0 \in \mathcal{A}_2^\infty(U,\ G)$, $\varphi_0 \neq 0$, и рассмотрим пространство

$$Q_0 = \{\Phi \in Q;\ (\Phi) \geqslant (\Phi_0)\}.$$

Так как $\deg(\Phi) = 4g - 4$ и так как некоторые элементы из Q проектируются на дифференциалы с простым полюсом в точке x, то мы видим, что

$$\dim Q_0 \geqslant \sum_{i=1}^{I} n_i + (3g-2) - (4g-3) = \sum_{i=1}^{I} n_i + (1-g).$$

Так как любая мероморфная функция из Q_0/Φ_0 имеет полюс в x_i порядка не больше n_i и голоморфна во всех остальных точках (включая x) поверхности M, то мы видим, что функция из Q_0/Φ_0 принадлежит $l(a)$, если она имеет в y_j нуль порядка не меньше m_j.

Теперь мы готовы доказать теорему 2.6 гл. I.

Теорема 1.2 (Риман — Рох). *Пусть M — компактная риманова поверхность рода g, а a — дивизор на M. Тогда*

$$\dim a = \deg a + 1 - g + \dim(\omega - a)$$

где ω — канонический дивизор.

Доказательство. Теперь мы следуем классическому доказательству. Оно разбивается на несколько шагов:

(1) Если $\deg a < 0$, то $\dim a = 0$.

(2) Для всех a $\dim a \geqslant \deg a + 1 - g$. Утверждение (2) есть неравенство Римана. Утверждение (1) мы уже получили при доказательстве неравенства Римана.

(3) Если $p \in M$, то $\dim(a + p) \leqslant \dim a + 1$.

Чтобы проверить (3), положим

$$a = \sum_{x \in M} n_a(x)\, x.$$

Пусть f_1 и $f_2 \in l(a + p) - l(a)$. Тогда

$$\operatorname{ord}_p f_j = -n_a(p) - 1 = \mu \quad (j = 1, 2).$$

Пусть z — локальная координата, обращающаяся в нуль в точке p. Тогда

$$f_j(z) = \sum_{n=\mu}^{\infty} b_{j,n} z^n, \cdot b_{j,\mu} \neq 0 \quad (j = 1, 2).$$

Поэтому $f_1 - \frac{b_{1,\mu}}{b_{2,\mu}} f_2 \in l(a)$. Мы доказали (3).

(4) Пусть $p \in M$. Предположим, что $\dim(a + p) = \dim a + \varepsilon$ и $\dim(\omega - a) = \dim(\omega - a - p) + \varepsilon'$. Тогда $0 \leqslant \varepsilon + \varepsilon' \leqslant 1$.

Предположим противное. Тогда ввиду (3) $\varepsilon = \varepsilon' = 1$. Положим $\omega = (\alpha)$, где α — абелев дифференциал на M. Мы предположим существование функций

$$f \in l(a + p) - l(a)$$

и

$$g \in l(\omega - a) - l(\omega - a - p).$$

Тогда

$$(f) + a + p \geqslant 0, \quad \text{но} \quad (f) + a \not\geqslant 0,$$

и

$$(g) + (\alpha) - a \geqslant 0 \quad \text{и} \quad (g) + (\alpha) - a - p \not\geqslant 0.$$

Поэтому

$$(f) + a = b - p, \quad \text{где} \quad b \geqslant 0, \quad \text{и} \quad n_b(p) = 0$$

и, аналогично,

$$(g) + (\alpha) - a = c, \quad \text{где} \quad c \geqslant 0, \quad \text{и} \quad n_c(p) = 0.$$

Следовательно,

$$(fg\alpha) = (f) + (g) + (\alpha) = b + c - p.$$

Так как $b + c \geqslant 0$ и $n_{b+c}(p) = 0$, то мы показали, что $fg\alpha$ является абелевым дифференциалом на M с единственным полюсом порядка 1 в точке p. Так как сумма вычетов дифференциала $fg\alpha$ должна быть равна нулю (предложение 2.1 гл. I), то мы пришли к противоречию.

Определим теперь

$$\varphi(a) = \dim a - \deg a - \dim(\omega - a).$$

(5) Для всех $p \in M$ имеем $\varphi(a + p) \leqslant \varphi(a)$. Действительно, распишем

$$\begin{aligned}\varphi(a + p) &= \dim(a + p) - \deg(a + p) - \dim(\omega - a - p) = \\ &= \dim a + \varepsilon - \deg a - 1 - \dim(\omega - a) + \varepsilon' = \\ &= \varphi(a) + \varepsilon + \varepsilon' - 1 \leqslant \varphi(a).\end{aligned}$$

(6) Имеем $\varphi(a) \geqslant 1 - g$.

Выберем $k \in \mathbf{Z}$ настолько большим, что $\deg(\omega - a - kp) < 0$, где $p \in M$ произвольно. Тогда

$$\varphi(a) \geqslant \varphi(a + kp) = \dim(a + kp) - \deg(a + kp)$$

ввиду (1). Отсюда и из (2) получаем (6).

(7) Имеем $\varphi(a) \leqslant 1 - g$.

Опять выберем k настолько большим, что $\deg(a - kp) < 0$. Тогда ввиду (1) и (5)

$$\varphi(a) \leqslant \varphi(a - kp) = -\deg(a - kp) - \dim(\omega - a + kp). \tag{1.4}$$

Теперь мы используем (2) и предложение 2.4 гл. I,

$$\begin{aligned}\dim(\omega - a + kp) &\geqslant 2g - 2 - \deg(a - kp) + 1 - g = \\ &= g - 1 - \deg(a - kp).\end{aligned} \tag{1.5}$$

Комбинируя (1.4) и (1.5), получаем утверждение (7).
Утверждения (6) и (7) дают нужный результат.

Приведем несколько полезных следствий из теоремы Римана — Роха. В этих следствиях мы предполагаем, что выполняются условия теоремы.

Следствие 1. *Если* $\deg a > 2g - 2$, *то*

$$\dim a = \deg a + 1 - g.$$

Доказательство. В этом случае $\deg(\omega - \alpha) < 0$. Поэтому $\dim(\omega - a) = 0$.

Следствие 2. *Размерность пространства голоморфных абелевых дифференциалов на M равна g.*

Доказательство. Положим $\omega = (\alpha)$. Сначала вычисляем

$$\begin{aligned}\dim \omega &= \deg \omega + 1 - g + \dim 0 = \\ &= (2g - 2) + 1 - g + 1 = g\end{aligned}$$

(так как 0 является главным дивизором).

Далее, $f \in l(\omega)$ тогда и только тогда, когда

$$(f\alpha) = (f) + (\alpha) \geqslant 0.$$

Но $f\alpha$ является абелевым дифференциалом, а всякий абелев дифференциал можно записать в виде $f\alpha$, где f — мероморфная функция на M. Мы показали, что $l(\omega)$ состоит из всех голоморфных абелевых дифференциалов.

Следствие 3. *Пусть $p_1, \ldots, p_n$ суть $n \geqslant 1$ различных точек на M. Тогда пространство абелевых дифференциалов на M, которые голоморфны на $M - \{p_1, \ldots, p_n\}$ и имеют простые полюсы в точках p_j, $j = 1, \ldots, n$, имеет размерность $g + n - 1$.*

Доказательство. Пространство таких дифференциалов изоморфно $l(\omega + p_1 + \ldots + p_n)$. Поэтому заключение следствия вытекает из следствия 1.

Теорема Римана — Роха имеет много важных приложений. В качестве примера получаемых результатов приведем еще одно следствие.

Компактная риманова поверхность M называется *гиперэллиптической*, если на M найдется мероморфная функция с двумя полюсами.

Теорема 1.3. *Любая компактная риманова поверхность рода $g \leqslant 2$ является гиперэллиптической.*

Доказательство. Выберем P и $Q \in M$ и вычислим

$$\dim (P + Q) = 2 + 1 - g + \dim (\omega - P - Q) = \\ = 3 - g + \dim (\omega - P - Q).$$

Утверждение теоремы тривиально, если $g = 0$. Если $g = 1$, то

$$\dim (P + Q) \geqslant 2.$$

Ясно, что $\mathbf{C} \subset l(P + Q)$. Так как на поверхности рода $\geqslant 1$ нет функций с ровно одним простым полюсом, то мы получаем требуемый результат для $g = 1$.

Для $g = 2$ точки P и Q не могут быть произвольными. Заметим, что для канонического дивизора ω на M

$$\dim \omega = 2 = \deg \omega.$$

Пусть α — голоморфный абелев дифференциал на M. Тогда $\alpha \in l(\omega)$ и $(\alpha) = P + Q$ для некоторых P и $Q \in M$. При этом $l(\omega - P - Q)$ изоморфно пространству голоморфных абелевых дифференциалов на M с нулями в P и Q. Так как α есть такой дифференциал, то $\dim (\omega - P - Q) \geqslant 1$.

§ 2. Случай $q = 1$

Вернемся теперь к группам когомологий Эйхлера, которые изучались в предыдущей главе в предположении, что $q \geqslant 2$.

Для $q = 1$ наши результаты совсем не полны. Основным препятствием является то, что в теореме 5.1 гл. V не существует расщепляющего отображения β^* для точной последовательности когомологий. Мы, однако, можем доказать такой результат:

Теорема 2.1. *Пусть Γ — клейнова группа с такой односвязной инвариантной компонентой Δ, что Δ/Γ конечного типа. Тогда следующая диаграмма коммутативна и имеет точные строки:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathscr{E}_0^b(\Delta, \Gamma) & \xrightarrow{\alpha} & PH_\Delta^1(\Gamma, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta} & \mathscr{A}_1^\infty(\Delta, \Gamma) & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \mathrm{id} & & \\ 0 & \to & \mathscr{E}_0^c(\Delta, \Gamma) & \xrightarrow{\alpha} & H^1(\Gamma, \mathbf{C}) & \xrightarrow{\beta} & \mathscr{A}_1^\infty(\Delta, \Gamma) & \to & 0. \end{array}$$

Доказательство. Предположим, что Δ/Γ имеет сигнатуру

$$(g;\ \nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_n),$$

где $0 \leqslant g < \infty$, $0 \leqslant n < \infty$, $2 \leqslant \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n \leqslant \infty$. Пусть k — такое наибольшее целое число, что $\nu_k < \infty$ ($k = 0$, если $n = 0$). Так как Γ изоморфна конечно порожденной фуксо-

вой группе первого рода, то она порождается образующими

$$\{a_i,\ b_i,\ c_j,\quad i=1,\ \ldots,\ g,\quad j=1,\ \ldots,\ n\},$$

которые удовлетворяют соотношениям

$$a_1b_1a_1^{-1}b_1^{-1}\ldots a_gb_ga_g^{-1}b_g^{-1}c_1\ldots c_n=1,$$
$$c_j^{\nu_j}=1,\quad j=1,\ \ldots,\ k.$$

Кроме того, элементы c_j, $j=k+1,\ \ldots,\ n$, являются несопряженными эллиптическими элементами, соответствующими проколам на Δ/Γ. Приведенные выше факты хорошо известны (но они в этой книге не доказываются, так как мы заинтересованы в более «абстрактном» доказательстве теоремы). Нам нужна

Лемма 2.2. *Имеем*

$$\dim PH^1_\Delta(\Gamma,\ \mathbf{C})=2g$$

и

$$\dim H^1(\Gamma,\mathbf{C})=\begin{cases}2g, & \text{если}\quad n-k=0,\\ 2g+(n-k-1), & \text{если}\quad n-k\geqslant 1.\end{cases}$$

Доказательство. Так как $\mathbf{C}$ коммутативно и $H^1(\Gamma,\ \mathbf{C})=\mathrm{Hom}(\Gamma,\ \mathbf{C})$, то проверять нечего.

Доказательство теоремы 2.1 (конец). Мы уже доказали

1) инъективность отображений α,
2) существование отображений β

и

3) тот факт, что

$$(\text{образ }\alpha)\subset(\text{ядро }\beta).$$

Чтобы доказать, что β сюръективно, возьмем $\varphi\in\mathcal{A}_1^\infty(\Delta,\ \Gamma)$. Пусть F — такая голоморфная функция на Δ, что $F'=\varphi$. Тогда $\bar\partial\bar F=\bar\varphi$. Ясно, что $\bar F$ индуцирует элемент пространства $PH^1_\Delta(\Gamma,\ \mathbf{C})$ по формуле

$$p_\gamma=\gamma_0^*\bar F-\bar F,\quad \gamma\in\Gamma,$$

и что $\bar F$ ограниченно представляет коцикл p_γ на Δ.

Из сюръективности отображений β и теоремы Римана — Роха ($\dim\mathcal{A}_1^\infty(\Delta,\ \Gamma)=g$) мы заключаем, что размерность ядра первого отображения β есть g, а второго —

$$g,\qquad \text{если } n-k=0,$$
$$g+(n-k-1),\ \text{если } n-k\geqslant 1.$$

Из инъективности отображений α и теоремы Римана — Роха мы заключаем, что

$$\dim(\text{образ }\alpha)=\dim(\text{ядро }\beta).$$

Поэтому

$$(\text{образ } \alpha) = (\text{ядро } \beta).$$

Следствие. *Пусть F — интеграл Эйхлера порядка 0 с вещественными периодами (т. е. $\gamma_0^* F - F \in \mathbf{R}$ для всех $\gamma \in \Gamma$). Если $F \in \mathscr{E}_0^b(\Delta, \Gamma)$, то $F = 0$.*

Доказательство. Найдется такой элемент $\varphi \in \mathcal{A}_1^\infty(\Delta, \Gamma)$, что $\alpha(F) = \beta^*(\varphi)$, где β^* — расщепляющее отображение для отображения β, построенного в приведенном выше доказательстве. Следовательно, $F = 0$.

§ 3. Дифференциалы на компактных римановых поверхностях

На протяжении этого параграфа (если не оговорено противное) M обозначает риманову поверхность рода $g > 0$. Напомним, что

$$H_1(M) \cong \mathbf{Z}^{2g}.$$

Голоморфные абелевы дифференциалы называются дифференциалами *первого* рода; мероморфные дифференциалы с нулевыми вычетами называются дифференциалами *второго* рода; все остальные дифференциалы называются дифференциалами *третьего* рода.

Лемма 3.1. *Пусть x и $y \in M$, $x \neq y$. Найдется такой голоморфный на $M - \{x, y\}$ дифференциал ω_{xy}, что*

$$\operatorname{ord}_x \omega = -1 = \operatorname{ord}_y \omega, \quad \operatorname{Res}_x \omega_{xy} = 1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_y \omega_{xy} = -1.$$

Кроме того, ω_{xy} единствен по модулю дифференциалов первого рода.

Доказательство. Единственность очевидна. Существование вытекает из следствия 3 теоремы Римана — Роха при $n = 2$, т. е. среди $g + 1$ линейно независимых дифференциалов, дивизоры которых кратны $x + y$, найдется дифференциал третьего рода. Такой дифференциал должен ввиду предложения 2.1 гл. I иметь один и тот же вычет в точках x и y.

Следствие. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ суть $n \geqslant 2$ различных точек на M, а $c_1, \ldots, c_n$ — комплексные числа. Тогда (единственный по модулю дифференциалов первого рода) дифференциал ω, регулярный на $M - \{x_1, \ldots, x_n\}$ и такой, что*

$$\operatorname{ord}_{x_j} \omega = -1 \quad \text{и} \quad \operatorname{Res}_{x_j} \omega = c_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

найдется в том и только в том случае, когда

$$\sum_{i=1}^{n} c_j = 0. \tag{3.1}$$

Доказательство. Необходимость равенства (3.1) очевидна. Чтобы доказать достаточность, выберем $y \in M$, $y \neq x_j$, $j = 1, \ldots, n$, и определим

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} c_j \omega_{x_j y}.$$

Лемма 3.2. *Пусть $x_1, \ldots, x_n$ суть $n \geqslant 1$ различных точек на M. Пусть z_j — локальный параметр, обращающийся в нуль в точке x_j, и пусть*

$$\{a_{j,k_j}, \ldots, a_{j,-1}\} \text{ — комплексные числа } \quad (k_j \leqslant -1,\ k_j \in \mathbf{Z})$$

для $j = 1, \ldots, n$. Если $\sum_{j=1}^{n} a_{j,-1} = 0$, то найдется дифференциал ω, регулярный на $M - \{x, \ldots, x_n\}$ и такой, что

$$\omega(z_j) = \Big(\sum_{\nu=k_j}^{\infty} a_{j,\nu} z_j^{\nu}\Big) dz_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Кроме того, ω единствен по модулю дифференциалов первого рода.

Доказательство. Рассмотрим пространство абелевых дифференциалов, дивизоры которых кратны дивизору

$$\sum_{j=1}^{n} k_j x_j.$$

Мы можем предположить, что $-\sum_{j=1}^{n} k_j > 1$ (иначе $n = 1$ и $k_1 = 1$ и, следовательно, $a_{1,-1} = 0$). Согласно теореме Римана — Роха, это пространство имеет размерность

$$g - \sum_{j=1}^{n} k_j - 1.$$

Если ω — дифференциал из этого пространства, то положим

$$\omega(z_j) = \Big(\sum_{\nu=k_j}^{\infty} b_{j,\nu} z_j^{\nu}\Big) dz_j, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Отобразим этот дифференциал в $\mathbf{C}^{\mu}$:

$$\omega \mapsto (b_{1,k_1}, \ldots, b_{1,-1}, b_{2,k_2}, \ldots, b_{n,k_n}, \ldots, b_{n,-2}),$$

где $\mu = -\sum_{j=1}^{n} k_j - 1$. Если ω лежит в ядре этого отображения, то также $b_{n,-1} = 0$ (иначе ω имел бы единственный полюс порядка 1). Поэтому ядро имеет размерность g. Следовательно, образ имеет размерность μ. Это завершает доказательство леммы.

Мы будем пользоваться дифференциальными формами на римановой поверхности M. При этом мы можем игнорировать комплексную структуру на M и рассматривать M как 2-мерное вещественное дифференцируемое многообразие.

Пусть $z = x + iy$ — локальная координата на M. Тогда 0-*форма* есть гладкая (класса $\mathscr{C}^\infty$) функция на M; 1-*форма* есть такое сопоставление каждой локальной координате z двух гладких функций f и g, что

$$f\,dx + g\,dy \tag{3.2}$$

инвариантно относительно замен координат (класса $\mathscr{C}^\infty$); 2-*форма* есть такое сопоставление каждой локальной координате z гладкой функции f, что

$$f\,dx \wedge dy$$

инвариантно относительно замен координат. При $n \geqslant 3$ на M нет ненулевых n-форм. Если f — гладкая функция, то *дифференциал* функции f

$$df = f_x\,dx + f_y\,dy$$

есть 1-форма. Если ω есть 1-форма, заданная посредством (3.2), то

$$d\omega = \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

является 2-формой. Для любой 2-формы θ имеем $d\theta = 0$. Если ω есть 1-форма, то *сопряженная* к ω форма $*\omega$ определяется равенством

$$*\omega = -g\,dx + f\,dy,$$

если ω задается посредством (3.2). Здесь мы ограничиваемся комплексно аналитическими координатами $z = x + iy$.

1-форма ω *замкнута*, если она локально является дифференциалом функции. Заметим, что 1-форма ω замкнута тогда и только тогда, когда $d\omega = 0$, 1-форма *гармонична*, если она и сопряженная к ней форма замкнуты.

Если ω есть 1-форма на M и α — дифференцируемый путь в M, то

$$\int_\alpha \omega$$

корректно определен. Аналогично, если θ есть 2-форма, а D — область в M с кусочно гладкой границей, то

$$\iint_D \theta$$

корректно определен. Кроме того, верна теорема Стокса

$$\int_{\partial D} \omega = \iint_D d\omega.$$

Отметим также, что 1-форма ω может быть записана через комплексно аналитическую локальную координату z в виде

$$\omega = f\,dz + g\,d\bar{z}. \tag{3.3}$$

Введем теперь два оператора

$$\partial\omega = g_z\,dz \wedge d\bar{z},$$
$$\bar{\partial}\omega = -f_{\bar{z}}\,dz \wedge d\bar{z},$$

и заметим, что

$$d = \partial + \bar{\partial}.$$

Отметим также, что если ω задана посредством (3.3), то

$$*\omega = -if\,dz + ig\,d\bar{z}.$$

Ясно, что операторы ∂ и $\bar{\partial}$ продолжаются на 0- и 2-формы.

Приведем теперь несколько простых фактов о введенных выше дифференциальных формах и операторах.

1) $d^2 = \partial^2 = \bar{\partial}^2 = 0$.

2) $\partial\bar{\partial} + \bar{\partial}\partial = 0$.

3) $\bar{\partial}\partial f = \frac{1}{4}(f_{xx} + f_{yy})\,dx \wedge dy = f_{z\bar{z}}\,d\bar{z} \wedge dz = \frac{1}{4}\,d^*df$.

4) Функция f гармонична тогда и только тогда, когда $\bar{\partial}\partial f = 0$.

5) 1-форма ω гармонична, если и только если она локально записывается в виде $\omega = df$, где $\bar{\partial}\partial f = 0$.

6) 1-форма ω называется *голоморфной*, если ω гармонична и $*\omega = -i\omega$. Легко проверить, что 1-форма ω голоморфна тогда и только тогда, когда $\omega = \varphi\,dz$, причем $\bar{\partial}\omega = 0$, а также тогда и только тогда, когда $\omega = \varphi\,dz$, причем $d\omega = 0$. В частности, абелев дифференциал первого рода является голоморфной 1-формой.

7) Если ω — гармоническая 1-форма, то $\omega + i*\omega$ является голоморфной формой. Аналогично, $\omega - i*\omega$ является *антиголоморфной* формой.

8) Если ω — голоморфная форма, то $\omega + \bar{\omega}$ — вещественная гармоническая форма.

9) Если ω есть 1-форма, заданная посредством (3.3), то ω гармонична тогда и только тогда, когда f и $\bar{g}$ голоморфны.

Пусть ω — замкнутая 1-форма на M и a — замкнутый путь на M. Определим *период* формы ω на a формулой

$$\langle \omega, \alpha \rangle = \int_a \omega. \tag{3.4}$$

Замечание. Так как ω замкнута, то нам не надо предполагать гладкость пути a, чтобы определить интеграл в (3.4). Действительно, $M = U/G$, где U — односвязная риманова поверхность ($\mathbf{C}$ или круг), а G — фуксова группа. Поднимем ω и a до замкнутой формы $\hat{\omega}$ на U и пути $\hat{a}$ на U. Определим

$$\int_a \omega = \int_{\hat{\hat{a}}} \hat{\omega},$$

где $\hat{\hat{a}}$ — геодезическая в U, соединяющая начальную точку пути $\hat{a}$ с его конечной точкой. Непосредственно проверяется, что приведенное только что определение согласуется со стандартным определением для дифференцируемых путей a на M.

Исследуем теперь спаривание (3.4). Ясно, что $\langle \omega, a \rangle$ зависит только от класса гомотопий замкнутого пути a, и так как $\langle \omega, a \rangle \in \mathbf{C}$, а $\mathbf{C}$ — коммутативная группа, то $\langle \omega, a \rangle$ зависит только от класса гомологий пути a. Мы можем ввести группу $H^1(M)$, группу *когомологий де Рама* поверхности M, определяемую следующим образом:

$$H^1(M) = \frac{\text{гладкие замкнутые 1-формы на } M}{\text{гладкие точные 1-формы на } M}.$$

Поэтому (3.4) определяет спаривание

$$H^1(M) \times H_1(M) \to \mathbf{C},$$

раз мы уже отметили, что $\langle \omega, a \rangle$ при фиксированном a зависит только от класса когомологий формы ω. Если мы рассмотрим лишь вещественнозначные формы, то (3.4) определяет спаривание

$$H^1_{\mathbf{R}}(M) \times H_1(M) \to \mathbf{R}.$$

Лемма 3.3. *Вещественные части периодов абелева дифференциала первого рода на базисе гомологий поверхности M могут принимать любые предписанные значения.*

Доказательство. (Пусть $M = U/\Gamma$, где U — верхняя полуплоскость, а Γ — фуксова группа. Тогда $H^1(M) \cong H^1(\Gamma, \mathbf{C})$. Поэтому мы можем лемму 3.3 вывести из следствия теоремы 2.1.

Доказательство, которое мы приведем ниже, не использует изоморфизм между группой когомологий и группой когомологий де Рама.) Рассмотрим пространство вещественных частей абелевых

дифференциалов первого рода. Размерность над $\mathbf{R}$ этого пространства равна $2g$. (Этот факт легко проверить. Пусть A — векторное пространство абелевых дифференциалов, а $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — базис пространства A над $\mathbf{C}$. Локально

$$\omega_j = \varphi_j\, dz, \quad j = 1, \ldots, g,$$

где φ_j голоморфны. Тогда

$$\begin{aligned}\omega_j &= (u_j + iv_j)(dx + i\, dy) = \\ &= (u_j\, dx - v_j\, dy) + i\,(v_j\, dx + u_j\, dy).\end{aligned}$$

Пусть B — векторное пространство (над $\mathbf{R}$) вещественных частей абелевых дифференциалов. Ясно, что B линейно порождается над $\mathbf{R}$ векторами

$$\{\operatorname{Re}\omega_j, \quad \operatorname{Im}\omega_j; \quad j = 1, \ldots, g\}.$$

Эти векторы линейно независимы над $\mathbf{R}$. Предположим, что

$$\sum_{j=1}^{g} \alpha_j \operatorname{Re}\omega_j + \sum_{j=1}^{g} \beta_j \operatorname{Im}\omega_j = 0,$$

где

$$\alpha_j \in \mathbf{R}, \quad b_j \in \mathbf{R}, \quad j = 1, \ldots, g.$$

Положим

$$\theta_1 = \sum_{j=1}^{g} \alpha_j \omega_j \quad \text{и} \quad \theta_2 = \sum_{j=1}^{g} \beta_j \omega_j$$

и заметим, что

$$\operatorname{Re}(\theta_1 - i\theta_2) = 0.$$

Так как $\theta_1 - i\theta_2$ — голоморфный дифференциал с нулевой вещественной частью, то мы заключаем, что $\theta_1 - i\theta_2 = 0$. Поэтому

$$\theta_1 = i\theta_2$$

и в силу линейной независимости (над $\mathbf{C}$) форм ω_j мы получаем, что

$$\alpha_j = i\beta_j, \quad j = 1, \ldots, g.$$

Так как формы α_j и β_j вещественны, то

$$\alpha_j = 0 = \beta_j, \quad j = 1, \ldots, g.)$$

Так как $H_1(M) \cong \mathbf{Z}^{2g}$, то достаточно показать, что если ω — голоморфный абелев дифференциал, у которого вещественные части периодов равны нулю, то $\omega = 0$. Положим

$$u(p) = \operatorname{Re}\int_{p_0}^{p} \omega$$

и заметим, что функция u корректно определена. Так как u — гармоническая функция на M (ибо u есть вещественная часть голоморфной функции), то u удовлетворяет принципу максимума модуля. Так как M компактна, то u — константа. Поэтому $u(p) = u(p_0) = 0$.

Мы показали, что

$$H^1_{\mathbf{R}}(M) \cong \mathbf{R}^{2g}. \tag{3.5}$$

Аналогично,

$$H^1(M) \cong \mathbf{C}^{2g} \tag{3.5$'$}$$

как следствие такой леммы:

Лемма 3.3′. *Периоды гармонической 1-формы на базисе гомологий поверхности M могут принимать любые предписанные значения.*

Доказательство. Доказательство является незначительной модификацией доказательства леммы 3.3 и может быть опущено. Мы только напомним, что как абелевы дифференциалы, так и комплексно сопряженные к ним являются гармоническими 1-формами.

Переформулируем приведенные выше леммы на более стандартном языке. Поле в каждом случае есть $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$.

Теорема 3.4 (Ходж). *На компактной римановой поверхности существует ровно одна гармоническая 1-форма с заранее заданными периодами.*

Теорема 3.4′ (де Рам). *Любая замкнутая гладкая 1-форма на компактной римановой поверхности когомологична гармонической форме.*

Мы ввели на M при помощи (3.4) спаривание. Теперь мы введем другое билинейное спаривание. Пусть α и β — две 1-формы на M. Предположим, что хотя бы одна из них имеет компактный носитель (это требование автоматически выполняется, если M компактна). Тогда

$$\iint_M \alpha \wedge \beta$$

является билинейным спариванием.

Лемма 3.5. *Пусть a — цикл на римановой поверхности M. Тогда на M найдется такая гладкая 1-форма α с компактным носителем, что $d\alpha = 0$ и*

$$\int_a \beta = \iint_M \alpha \wedge \beta \tag{3.6}$$

для любой гладкой 1-формы β, *у которой* $d\beta = 0$. *Кроме того,* α *зависит только от класса гомологий цикла* a, *и ее класс когомологий однозначно определен.*

Доказательство. Докажем сначала единственность, предположив, что существование доказано. Предположим, что как α, так и $\hat{\alpha}$, удовлетворяют (3.6). Пусть $\gamma = \alpha - \hat{\alpha}$. Тогда

$$\iint_M \gamma \wedge \beta = 0 \tag{3.7}$$

для всех замкнутых 1-форм β. Пусть d — цикл. Тогда найдется такая замкнутая 1-форма δ с компактным носителем, что

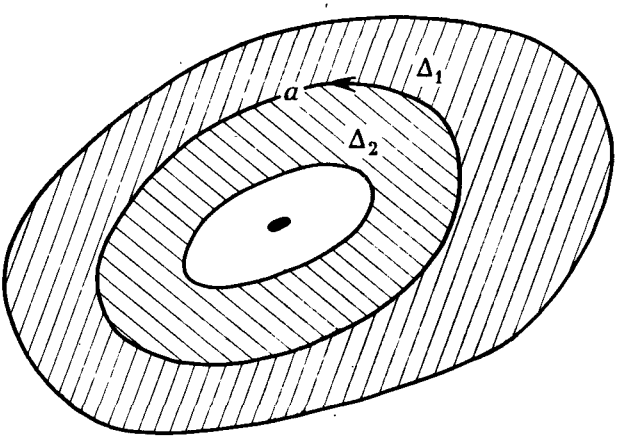
$$\int_d \beta = \iint_M \delta \wedge \beta.$$

Поэтому

$$\int_d \gamma = \iint_M \delta \wedge \gamma = -\iint_M \gamma \wedge \delta = 0$$

в силу (3.7). Следовательно, γ есть точная 1-форма, $\gamma = df$.

Докажем существование. Без ограничения общности можно предположить, что a есть простая замкнутая кривая, которая разделяет M. Возьмем кольцевую окрестность цикла a. Кривая a делит эту кольцевую окрестность на два кольца Δ_1 и Δ_2, замыкание каждого из которых компактно.



Построим на M такую функцию χ, что χ гладкая на $M - a$, имеет компактный носитель, $\chi = 1$ в Δ_2 и $\chi = 0$ в Δ_1. Определим $d\chi$ на $M - a$ и заметим, что $d\chi$ продолжается до гладкой 1-формы

α на M. Кроме того, α имеет компактный носитель. Мы утверждаем, что α удовлетворяет равенству (3.6).

Триангулируем M так, чтобы каждый треугольник либо не пересекался с a, либо имел с a общее ребро. Заметим, что тогда каждый треугольник лежит по «одну сторону» от a. Обозначим множество треугольников из этой триангуляции через $\{T_j\}_{j=1}^N$, $1 \leqslant N \leqslant \infty$, и вычислим для гладкой 1-формы β

$$\iint_M \alpha \wedge \beta = \sum_{j=1}^N \iint_{T_j} \alpha \wedge \beta.$$

Так как α имеет компактный носитель, то написанная сумма конечна. Применим теперь теорему Стокса,

$$\iint_{T_j} \alpha \wedge \beta = \iint_{T_j} d\chi \wedge \beta = \int_{\partial T_j} \chi\beta - \iint_{T_j} \chi\, d\beta = \int_{\partial T_j} \chi\beta.$$

Следовательно,

$$\iint_M \alpha \wedge \beta = \sum_{j=1}^N \int_{\partial T_j} \chi\beta. \tag{3.8}$$

Но каждое ребро появляется в триангуляции ровно два раза, причем интегралы в правой части равенства (3.8) взаимно уничтожаются для всех пар, кроме тех, которые лежат на a. Поэтому мы выводим (3.6) из того факта, что χ «существенно» равна 1 на a.

Определение. Если для α выполняется утверждение леммы, то мы скажем, что α есть 1-форма, *индуцированная* циклом a.

Определение. Пусть a и b — два цикла на римановой поверхности M, а α и β — индуцированные 1-формы. Тогда *число пересечения* циклов a и b есть

$$a \cdot b = \iint_M \alpha \wedge \beta. \tag{3.9}$$

Предложение 3.6. *Число пересечения корректно определено и обладает следующими свойствами:*

(3.10) *$a \cdot b$ зависит только от классов гомологий циклов a и b,*

$$a \cdot b = -b \cdot a, \tag{3.11}$$

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c \tag{3.12}$$

и

$$a \cdot b \in \mathbf{Z}. \tag{3.13}$$

Кроме того, $a \cdot b$ «показывает», сколько раз a пересекает b.

Доказательство. Чтобы показать, что (3.9) корректно определено, мы должны показать, что

$$\iint\limits_M dg \wedge \beta = 0$$

для всех гладких функций g на M. Выберем такую область $D \subset M$, что носитель формы β содержится в D. Тогда

$$\iint\limits_M dg \wedge \beta = \iint\limits_D dg \wedge \beta = \int\limits_{\partial D} g\beta - \iint\limits_D g \wedge d\beta = 0.$$

Проверка утверждений (3.10), (3.11) и (3.12) стандартна, и ее можно оставить читателю. Проверим (3.13). Мы можем предположить, что a и b — простые замкнутые кривые. Пусть $\alpha = d\chi$, как и в доказательстве леммы 3.5. Тогда

$$a \cdot b = \iint\limits_M \alpha \wedge \beta = -\iint\limits_M \beta \wedge d\chi = -\int\limits_b d\chi.$$

Но вклад каждого «пересечения» a с b в интеграл $\int\limits_b d\chi$ есть или $+1$, или -1.

Нормальные многоугольники. Мы видели, что любая риманова поверхность может быть топологически представлена как топологический многоугольник с отождествлениями и проколами. Этот многоугольник есть, конечно, фундаментальная область накрывающей группы рассматриваемой поверхности. Если M — компактная поверхность, то ее можно представить конечным многоугольником (без проколов). Эта конструкция (из гл. II) применяется только в случае, когда род поверхности M больше 1. Проверка для маленького рода оставляется читателю.

Пусть компактная риманова поверхность M представлена как многоугольник Π с отождествлениями. Упорядочим вершины $P_1, \ldots, P_n$ этого многоугольника так, чтобы при этом упорядочении мы обходили многоугольник (скажем, против часовой стрелки) ровно один раз. Если ребро P_iP_{i+1} отождествляется с P_kP_{k+1} ($n + 1$ «=» 1), то отождествление должно быть таким, чтобы P_i отождествлялось с P_{k+1}, а P_{i+1} — с P_k.

Сопоставим многоугольнику Π некоторый символ следующим образом. Каждому ребру приписывается буква. Если два ребра отождествляются и одному приписана, скажем, буква a, то другому приписывается буква a^{-1}. Тогда, обходя многоугольник, мы получаем последовательность букв, называемую *символом* топологического многоугольника. Любой конечный топологический многоугольник можно представить символом, имеющим одну

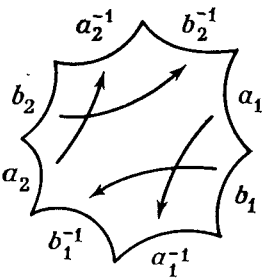
из следующих *нормальных форм*

$$aa^{-1} \qquad \text{(род 0)}$$

$$\coprod_{j=1}^{g} a_j b_j a_j^{-1} b_j^{-1} \quad (\text{род } g \geqslant 1).$$

Посредством разрезания и склеивания можно от любого многоугольника перейти к многоугольнику, имеющему одну из нормальных форм. Мы оставляем проверку этого факта читателю.

Заметим, что если мы начинаем с фундаментальной области Π фуксовой группы G, изоморфной фундаментальной группе римановой поверхности, то $\widetilde{\Pi}$, нормальная форма многоугольника Π, также будет фундаментальной областью для G. В частности, ребра многоугольника $\widetilde{\Pi}$ попарно отождествляются при помощи элементов группы G.



Нормальный многоугольник при $g=2$

Ребра любого многоугольника проектируются на риманову поверхность как замкнутые кривые. Совсем легко видеть, что нормальный многоугольник задает на любой римановой поверхности рода $g \geqslant 1$ *канонический* базис гомологий, т. е. базис с матрицей пересечения

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

где I — единичная матрица порядка g. (Коэффициенты матрицы пересечения суть, конечно, числа попарных пересечений кривых из базиса гомологий.)

Выберем на компактной римановой поверхности M рода $g > 0$ раз и навсегда такой канонический базис гомологий $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$, что

$$-b_i \cdot a_i = a_i \cdot b_i = 1, \quad i = 1, \ldots, g,$$

$$a_i \cdot a_j = b_i \cdot b_j = 0, \quad i = 1, \ldots, g, \quad j = 1, \ldots, g,$$

$$a_i \cdot b_j = b_j \cdot a_i = 0, \quad i = 1, \ldots, g, \quad j = 1, \ldots, g, \quad i \neq j.$$

Лемма 3.7. *Пусть c — цикл на M. Предположим, что $c \cdot d = 0$ для всех циклов d на M. Тогда $c = 0$ в $H_1(M)$.*

Доказательство. На уровне гомологий

$$c = \sum_{i=0}^{g} n_i a_i + \sum_{j=1}^{g} m_j b_j, \quad n_i \in \mathbf{Z}, \quad m_j \in \mathbf{Z}.$$

Так как $0 = c \cdot a_i = -m_i$ и $0 = c \cdot b_j = n_j$, то $n_i = m_j = 0$.

Лемма 3.8. *Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$, $\beta_1, \ldots, \beta_g$ суть 1-формы, индуцированные каноническим базисом гомологий. Тогда эти 1-формы линейно порождают классы гомологий из $H^1(M)$.*

Доказательство. Рассмотрим 1-форму

$$\theta = \sum_{i=1}^{g} \mu_i \alpha_i + \sum_{j=1}^{g} \nu_j \beta_j, \quad \mu_i \in \mathbf{C}, \quad \nu_j \in \mathbf{C}. \tag{3.14}$$

Достаточно показать, что $\langle \theta, a_i \rangle = \nu_i$ и $\langle \theta, b_j \rangle = -\mu_j$. Но

$$\int_{a_k} \theta = \sum_{i=1}^{g} \mu_i \int_{a_k} \alpha_i + \sum_{j=1}^{g} \nu_j \int_{a_k} \beta_j =$$

$$= \sum_{i=1}^{g} \mu_i a_k \cdot a_i + \sum_{j=1}^{g} \nu_j a_k \cdot b_j = \nu_k.$$

Теорема 3.9. *Если θ и $\hat{\theta}$ — две замкнутые 1-формы на M, то*

$$\iint_M \theta \wedge \hat{\theta} = \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{a_i} \theta \int_{b_i} \hat{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \hat{\theta} \right]. \tag{3.15}$$

Доказательство. Используя обозначения из предыдущей леммы, мы разложим θ и $\hat{\theta}$, как в (3.14). Тогда

$$\iint_M \theta \wedge \hat{\theta} = \sum_{i,\, j=0}^{g} \Big[\mu_i \hat{\mu}_j \iint_M \alpha_i \wedge \alpha_j + \nu_i \hat{\mu}_j \iint_M \beta_i \wedge \alpha_j +$$

$$+ \mu_i \hat{\nu}_j \iint_M \alpha_i \wedge \beta_j + \nu_i \hat{\nu}_j \iint_M \beta_i \wedge \beta_j \Big] =$$

$$= \sum_{i=0}^{g} [-\nu_i \hat{\mu}_i + \mu_i \hat{\nu}_i] =$$

$$= \sum_{i=0}^{g} [\langle \theta, a_i \rangle \langle \hat{\theta}, b_i \rangle - \langle \theta, b_i \rangle \langle \hat{\theta}, a_i \rangle].$$

Замечание. Имеется другое доказательство равенства (3.15), не использующее кратко изложенную выше теорию пересечений. Представим M как U/Γ, где U — единичный круг (или комплексная плоскость), а Γ — фуксова (или афинная) группа. Выберем нормальный многоугольник Π, являющийся фундаментальной областью для Γ в U. Обозначим ребра многоугольника Π так же, как и в лемме. Ясно, что θ и $\hat{\theta}$ поднимаются на U как замкнутые дифференциалы. Так как U односвязен, то $\theta = df$. Поэтому

$$\iint_M \theta\wedge\hat{\theta} = \iint_\Pi \theta\wedge\hat{\theta} = \iint_\Pi df\wedge\hat{\theta} = \iint_\Pi d(f\hat{\theta}) =$$

$$= \int_{\partial\Pi} f\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{g}\left[\int_{a_i} f\hat{\theta} + \int_{b_i} f\hat{\theta} + \int_{a_i^{-1}} f\hat{\theta} + \int_{b_i^{-1}} f\hat{\theta}\right].$$

Пусть $z_0 \in \omega$ произвольно. Тогда для $z \in U$

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \theta.$$

Обозначив через z и z' две точки на сторонах границы $\partial\Pi$, эквивалентные относительно Γ, имеем

$$\int_{a_i} f\hat{\theta} + \int_{a_i^{-1}} f\hat{\theta} = \int_{a_i}\left[\int_{z_0}^{z}\theta - \int_{z_0}^{z'}\theta\right]\hat{\theta} = -\int_{a_i}\left[\int_{b_i}\theta\right]\hat{\theta} = -\int_{b_i}\theta\int_{a_i}\hat{\theta}.$$

Остальные члены изучаются аналогично.

Применим теперь теорему 3.9 к голоморфным формам. Предположим, что θ и $\hat{\theta}$ — голоморфные 1-формы. Тогда локально $\theta = \varphi\, dz$ и $\hat{\theta} = \hat{\varphi}\, dz$. Значит, $\iint_M \theta\wedge\hat{\theta} = 0$. Поэтому получаем

$$0 = \sum_{i=1}^{g}\left[\int_{a_i}\theta\int_{b_i}\hat{\theta} - \int_{b_i}\theta\int_{a_i}\hat{\theta}\right]. \tag{3.16}$$

Следствие 1. *«а»-периоды однозначно определяют абелев дифференциал первого рода.*

Доказательство. Пусть θ и $\hat{\theta}$ голоморфны. Тогда форма $\overline{\hat{\theta}}$ замкнута. Следовательно,

$$\iint_M \theta\wedge\overline{\hat{\theta}} = \sum_{i=1}^{g}\left[\int_{a_i}\theta\overline{\int_{b_i}\hat{\theta}} - \int_{b_i}\theta\overline{\int_{a_i}\hat{\theta}}\right].$$

Возьмем теперь $\theta = \hat{\theta}$ и заметим, что

$$-\frac{1}{2i}\iint\limits_M \theta \wedge \hat{\theta}$$

является вещественным и неположительным числом, которое обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\theta = 0$ ($\theta \wedge \hat{\theta}$ локально есть $|\varphi|^2 dz \wedge d\bar{z} = -2i|\varphi|^2 dx \wedge dy$). Поэтому

$$\sum_{i=1}^{g}\left[\int\limits_{a_i}\theta\overline{\int\limits_{b_i}\theta} - \int\limits_{b_i}\theta\overline{\int\limits_{a_i}\theta}\right] \tag{3.17}$$

обращается в нуль тогда и только тогда, когда $\theta = 0$.

Предположим теперь, что «a»-периоды обращаются в нуль, т. е. $\int\limits_{a_i}\theta = 0$ для $i = 1, \ldots, g$. Тогда (3.17) обращается в нуль, и, следовательно, $\theta = 0$.

Следствие 2. *Для абелевых дифференциалов первого рода найдется такой (нормализованный) базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$, что*

$$\int\limits_{a_i}\omega_j = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, g,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера δ ($\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$).

Определим теперь *матрицу периодов*

$$Z = (Z_{ij})_{i,\, j=1,\, \ldots,\, g},$$

где

$$Z_{ij} = \int\limits_{b_i}\omega_j.$$

Следствие 3. *Матрица периодов симметрична, а ее мнимая часть положительно определена.*

Доказательство. Применим (3.16) к $\theta = \omega_j$ и $\hat{\theta} = \omega_k$. Тогда

$$0 = \int\limits_{b_i}\omega_k - \int\limits_{b_k}\omega_j,$$

или

$$Z_{jk} = Z_{kj}.$$

Поэтому Z симметрична.

Чтобы показать, что $\operatorname{Im} Z > 0$, возьмем

$$\theta = \sum_{k=1}^{g} \xi_k \omega_k, \quad \text{где } \xi_k \in \mathbf{R}, \ \sum_{k=1}^{g} \xi_k^2 \neq 0.$$

Вспоминая (3.17), мы видим, что для некоторого $P > 0$

$$-2iP = \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{a_i} \sum_{j=1}^{g} \xi_j \omega_j \int_{b_i} \sum_{k=1}^{g} \xi_k \bar{\omega}_k - \int_{b_i} \sum_{j=1}^{g} \xi_j \omega_j \int_{a_i} \sum_{k=1}^{g} \xi_k \bar{\omega}_k \right] =$$

$$= \sum_{j,\, k=1}^{g} \xi_j \xi_k \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{a_i} \omega_j \int_{b_i} \bar{\omega}_k - \int_{b_i} \omega_j \int_{a_i} \bar{\omega}_k \right] =$$

$$= \sum_{j,\, k=1}^{\infty} \xi_j \xi_k [\bar{Z}_{jk} - Z_{kj}] = \sum_{j,\, k=1}^{\infty} \xi_j \xi_k [-2i \operatorname{Im} Z_{jk}].$$

Заметим, что период абелева дифференциала второго рода корректно определен. Кроме того, можно также говорить о периодах абелева дифференциала третьего рода с целыми вычетами, если под периодами подразумевать периоды по модулю $2\pi i$.

Мы продолжаем использовать введенные выше канонический многоугольник Π и нормализованный базис $\omega_1, \ldots, \omega_g$.

Выведем теперь различные

Соотношения двойственности между абелевыми дифференциалами.

Мы показали (в замечании после теоремы 3.9), что если θ и $\hat{\theta}$ — два мероморфных дифференциала на M (и, следовательно, на Π), которые регулярны на $\partial\Pi$, и если $\theta = df$ в U ($\Pi \subset U$, U — универсальная накрывающая для M), то

$$\int_{\partial\Pi} f\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{a_i} \theta \int_{b_i} \hat{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \hat{\theta} \right] = 2\pi i \sum_{p \in \operatorname{Int} \Pi} \operatorname{Res}_p f\hat{\theta}.$$

Если как θ, так и $\hat{\theta}$ являются абелевыми дифференциалами первого рода, то мы получаем, что

$$0 = \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{a_i} \theta \int_{b_i} \hat{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \hat{\theta} \right]$$

и, полагая $\theta = \omega_k$ и $\hat{\theta} = \omega_l$ $(l, k = 1, \ldots, g)$

$$\int_{b_k} \omega_l = \int_{b_l} \omega_k \tag{3.18}$$

(ранее выведенное соотношение).

Далее, предположим, что θ — дифференциал первого рода, а $\hat{\theta}$ — дифференциал второго рода с полюсом порядка $n \geqslant 2$ в точке $P \in \operatorname{Int} \Pi$. Если

$$\hat{\theta} = \frac{dz}{z^n}, \quad n \geqslant 2, \text{ в } P$$

и

$$\theta = \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha_j z^j)\, dz \text{ в } P,$$

то

$$2\pi i \frac{\alpha_{n-2}}{n-1} = \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{a_i} \theta \int_{b_i} \hat{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \hat{\theta} \right].$$

Предположим, что $\hat{\theta}$ нормализован $\left(\text{т. е. } \int_{a_i} \hat{\theta} = 0,\ i = 1, \ldots, g \right)$ и $\theta = \omega_l$. Тогда

$$\int_{b_l} \hat{\theta} = \frac{2\pi i}{n-1} \alpha_{n-2}^{(l)}. \tag{3.19}$$

Возьмем теперь дифференциал θ первого рода и дифференциал $\hat{\theta}$ третьего рода. Предположим, что $\hat{\theta}$ имеет в $P_j \in \operatorname{Int} \Pi$ простой полюс с вычетом c_j $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда

$$2\pi i \sum_{j=1}^{n} c_j \int_{Q}^{P_j} \theta = \sum_{i=1}^{n} \left[\int_{a_i} \theta \int_{b_i} \hat{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \hat{\theta} \right],$$

где $Q \in \operatorname{Int} \Pi$, $Q \neq P_j$, $j = 1, \ldots, n$. Возьмем $\theta = \omega_l$ и $\hat{\theta} = \tau_{P_1 P_2}$ ($\hat{\theta}$ нормализован) и получим

$$\int_{b_l} \tau_{P_1 P_2} = 2\pi i \int_{P_2}^{P_1} \omega_l. \tag{3.20}$$

Мы уже разобрали все случаи, которые будут для нас полезны. Однако, так как это очень занятно, продолжим. Выберем две точки $P \neq Q$ из $\operatorname{Int} \Pi$. Предположим, что

$$\theta = \frac{dz}{z^n}, \quad n \geqslant 2, \text{ в } P,$$

$$\theta = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j z^j \right) dz \text{ в } Q,$$

$$\hat{\theta} = \frac{dz}{z^m}, \quad m \geqslant 2, \text{ в } Q,$$

$$\hat{\theta} = \left(\sum_{j=0}^{\infty} \beta_j z^j \right) dz \text{ в } P$$

и что θ и $\hat{\theta}$ регулярны всюду, кроме соответственно точек P и Q. (Заметим, что $\theta = df$, где f мероморфна.) Имеем

$$2\pi i\left[\frac{\beta_{n-2}}{n-1}+\frac{\alpha_{m-2}}{m-1}\right]=\sum_{i=1}^{g}\left[\int_{a_i}\theta\int_{b_i}\hat{\theta}-\int_{b_i}\theta\int_{a_i}\hat{\theta}\right].$$

Для нормализованных θ и $\hat{\theta}$ мы получаем

$$(m-1)\,\beta_{n-2}+(n-1)\,\alpha_{m-2}=0. \tag{3.21}$$

В следующем случае θ регулярен всюду, кроме точки P,

$$\theta=\frac{dz}{z^n},\quad n\geqslant 2,\quad \text{в } P$$

и $\hat{\theta}$—дифференциал, регулярный всюду, кроме точек P_i $(i=1,\ldots,k)$, в которых он имеет простые полюсы с вычетами c_i, если $P_i\neq P$, и

$$\hat{\theta}=\Big(\sum_{j=0}^{\infty}\alpha_j z^j\Big)\,dz \quad \text{в } P.$$

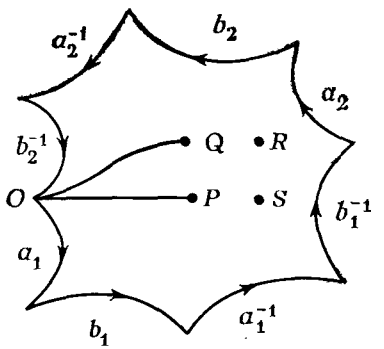
Выберем $Q\neq P$, $Q\neq P_i$ $(i=1,\ldots,k)$. Тогда

$$2\pi i\left[\frac{\alpha_{n-2}}{n-1}+c_i\int_Q^P\theta\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{a_i}\theta\int_{b_i}\hat{\theta}-\int_{b_i}\theta\int_{a_i}\hat{\theta}\right].$$

Для нормализованных дифференциалов при $k=2$, $c_1=1$, $c_2=-1$ имеем

$$\frac{\alpha_{n-2}}{n-1}=\int_{P_1}^{P_2}\theta. \tag{3.22}$$

Мы рассмотрим еще один случай, когда заданы нормализованные дифференциалы $\theta=\tau_{PQ}$, $\hat{\theta}=\tau_{RS}$. Здесь мы не можем утверждать, что $\theta=df$, где f мероморфна на U. Разделим П, соединив точку O на границе с точкой P одной кривой и с точкой Q другой кривой. Таким образом мы получаем односвязную область П′.



В области Π' имеем $\theta = df$, где

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} \theta.$$

Теперь

$$\int_{\partial\Pi'} f\hat{\theta} = 2\pi i\,[\mathrm{Res}_R\, f\hat{\theta} + \mathrm{Res}_S\, f\hat{\theta}] = 2\pi i \left[\int_{z_0}^{R} \theta - \int_{z_0}^{S} \theta\right] = 2\pi i \int_{S}^{R} \theta.$$

Далее,

$$\int_{\partial\Pi'} f\hat{\theta} = \sum_{i=1}^{g} \left[\int_{a_i} \theta \int_{b_i} \hat{\theta} - \int_{b_i} \theta \int_{a_i} \hat{\theta}\right] + \int_{c} f\hat{\theta}, \tag{3.23}$$

где c — кривая, идущая от O до Q, потом обратно к O («по другой стороне»), далее к P и обратно к O. Сумма в (3.23) обращается в нуль, так как θ и $\hat{\theta}$ нормализованы. Далее, значения функции f на одной стороне кривой, идущей от O к Q, отличаются на $2\pi i$ от значений функции f на другой стороне. Поэтому

$$\int_{c} f\hat{\theta} = 2\pi i \left[\int_{O}^{P} \hat{\theta} - \int_{O}^{Q} \hat{\theta}\right] = 2\pi i \int_{Q}^{P} \hat{\theta}.$$

Мы заключаем, что

$$\int_{S}^{R} \tau_{PQ} = \int_{Q}^{P} \tau_{RS}. \tag{3.24}$$

§ 4. Проблема обращения Якоби

Пусть M — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 1$. Выберем канонический базис гомологий поверхности M, т. е. базис гомологий, представляемый замкнутыми кривыми $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$ с матрицей пересечений

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & 0 & I \\ b & -I & 0 \end{array}$$

Здесь (и в дальнейшем) I есть единичная матрица порядка g. Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — нормализованный базис пространства абелевых дифференциалов первого рода на M, т. е.

$$\int_{a_k} \omega_j = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \ldots, g,$$

где δ_{jk} — дельта-функция Кронекера.

Рассмотрим группу периодов $\Gamma(M)$, или, что то же, модуль над $\mathbf{Z}$, порожденный столбцами $g \times 2g$-матрицы

$$(I, Z) = \left(\delta_{jk}, \int_{b_k} \omega_j\right), \quad j, k = 1, \ldots, g.$$

Мы будем обозначать столбцы этой матрицы через

$$e^1, \ldots, e^g, \quad Z^1, \ldots, Z^g.$$

Ввиду леммы 3.3 эти $2g$ векторов ($\in \mathbf{C}^n$) линейно независимы над полем вещественных чисел. Таким образом мы получаем *якобиево многообразие* поверхности M

$$J(M) = \mathbf{C}/\Gamma(M).$$

Совершенно ясно, что $J(M)$ является g-мерным комплексно аналитическим многообразием. Для $g = 1$, как мы увидим, $M \cong J(M)$, и поэтому, $J(M)$ можно назвать g-мерным *тором*. Он является комплексно аналитическим многообразием и группой.

Определим теперь отображение

$$\varphi\colon M \to J(M)$$

следующим образом. Выберем базисную точку $x_0 \in M$ и положим

$$\varphi(x) = \int_{x_0}^{x} \omega, \tag{4.1}$$

где ω обозначает вектор-столбец

$$\omega = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \vdots \\ \omega_g \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Отображение φ из M в $\mathbf{C}^g$ не является корректно определенным, так как в (4.1) интеграл зависит от пути интегрирования. Если c_1 и c_2 — две кривые, соединяющие x_0 и x, то

$$\int_{c_1} \omega - \int_{c_2} \omega = \int_{c_1 - c_2} \omega.$$

Но на уровне гомологий $c = c_1 - c_2 = \sum_{j=1}^{g} n_j a_j + \sum_{j=1}^{g} m_j b_j$, где $n_j \in \mathbf{Z}$ и $m_j \in \mathbf{Z}$ для $j = 1, \ldots, g$. Поэтому

$$\int_c \omega = \sum_{j=1}^{g} n_j e^j + \sum_{j=1}^{g} m_j Z^j \in \Gamma(M).$$

Значит, φ является корректно определенным отображением в якобиево многообразие поверхности M.

Отображение φ продолжается на $D_0(M)$, т. е. на дивизоры на M степени нуль. Если

$$a=\sum_{j=1}^{J} n_j x_j, \text{ причем } \sum_{j=1}^{J} n_j=0,$$

то положим

$$\varphi(a)=\sum_{j=1}^{J} n_j \varphi(x_j).$$

Отображение

$$\varphi\colon D_0(M)\to J(M)$$

не зависит от выбора базисной точки x_0. Действительно, если x_0' — другая базисная точка, то

$$\sum_{j=1}^{J} n_j \int_{x_0}^{x_j} \omega-\sum_{j=1}^{J} n_j \int_{x_0'}^{x_j} \omega=\sum_{j=1}^{J} n_j \int_{x_0}^{x_0'} \omega=\int_{x_0}^{x_0'} \omega \sum_{j=1}^{J} n_j=0.$$

Также непосредственно проверяется, что

$$\varphi(a)+\varphi(b)=\varphi(a+b)$$

для любых двух дивизоров a, b степени нуль.

Предложение 4.1. *Отображение*

$$\varphi\colon M\to J(M)$$

голоморфно и имеет ранг 1.

Доказательство. Тот факт, что φ голоморфно, очевиден. Выберем локальную координату $z=z(p)$, обращающуюся в нуль в $x\in M$. Тогда для p из z-координатной окрестности точки x

$$\varphi(p)=\int_{x_0}^{x} \omega+\int_{0}^{z} \omega.$$

Для локальной координаты ζ в $J(M)$ имеем

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial z}=\varphi_i(z),$$

где $\omega_i=\varphi_i(z)\,dz$ в x.

Мы должны показать, что пространство голоморфных дифференциалов, обращающихся в нуль в точке $p\in M$, имеет размерность меньше чем g. Пусть ω — канонический дивизор (это

обозначение не вызовет путаницы). Тогда

$$\begin{aligned}\dim(\omega - p) &= \deg(\omega - p) + 1 - g + \dim p = \\ &= 2g - 3 + 1 - g + \dim p = \\ &= g - 2 + \dim p.\end{aligned}$$

Ясно, что $l(\omega - p)$ изоморфно пространству голоморфных дифференциалов, обращающихся в нуль в точке p. Но $1 \in l(p)$. Если $\dim l(p) > 1$, то на M найдется мероморфная функция f, имеющая в p простой полюс и регулярная во всех остальных точках. Тогда f является взаимно однозначным отображением из M на $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$. Это противоречит тому, что род поверхности M больше или равен 1.

Замечание. Если M имеет род 1, то

$$\varphi\colon M \xrightarrow{\cong} J(M)$$

является голоморфным гомеоморфизмом. Чтобы проверить это утверждение, представим M как $\mathbf{C}/G$, где $G = \{A, B\}$, $A(z) = z + 1$ и $B(z) = z + \tau$, $\operatorname{Im}\tau > 0$. Тогда $\omega = dz$ и ясно, что φ является тождественным отображением, если мы выберем $x_0 = 0$ (0 есть проекция начала координат на M).

Теорема 4.2 (теорема Абеля). *Пусть a — дивизор степени нуль на компактной римановой поверхности рода $g > 0$. Тогда $\varphi(a) = 0$ в том и только в том случае, когда a есть главный дивизор.*

Доказательство. Сначала переформулируем теорему Абеля следующим образом:

Пусть a — дивизор степени нуль на компактной римановой поверхности рода $g > 0$. Тогда a является дивизором мероморфной функции на M в том и только в том случае, когда на M найдется такая 1-цепь c, что $\partial c = a$ и $\int_c \omega = 0$ для любого абелева дифференциала ω первого рода.

(Отметим, что 0-цепь ∂c есть граница цепи c.)

Чтобы показать эквивалентность двух формулировок, возьмем

$$a = P_1 + \ldots + P_r - Q_1 - \ldots - Q_r, \tag{4.3}$$

где $r \geqslant 1$ и $P_i \neq Q_j$, $i, j = 1, \ldots, r$. (Случай $r = 0$ тривиален.)

Соединим Q_i с P_i путем c_i в M.

Рассмотрим

$$\sum_{i=1}^{r} \int_{c_i} \omega, \tag{4.4}$$

где ω — вектор-столбец, определяемый посредством (4.2). Если (4.4) равно нулю, то ясно, что $\varphi(a) = 0$. Обратно, если $\varphi(a) = 0$, то (4.4) лежит в $\Gamma(M)$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{r} \int_{c_i} \omega = \int_{c_0} \omega,$$

где c_0 — цикл на M. Положим

$$c = c_1 + \ldots + c_r - c_0,$$

и заметим, что

$$\partial c = a - \partial c_0 = a.$$

Докажем теперь достаточность условия для существования мероморфной функции. Мы используем другую формулировку этого условия. Найдется такая цепь $c = c_1 + \ldots + c_r$, что $\partial c = a$ и (4.4) обращается в нуль. Выберем для M такой нормальный многоугольник Π, что $c \subset \operatorname{Int} \Pi$. Пусть τ_{PQ} обозначает нормализованный (т. е. с нулевыми «a»-периодами) абелев дифференциал третьего рода, регулярный всюду, кроме точек P и Q, в которых он имеет простые полюсы, причем вычет в P равен $+1$, а в Q равен -1. Определим на универсальной накрывающей U поверхности M функцию

$$F(z) = \exp \sum_{j=1}^{r} \int_{z_0}^{z} \tau_{P_j Q_j},$$

где z_0 — произвольная точка, не равная точке (точнее, ее поднятию) P_j и точке Q_j при любом j, а τ рассматривается как поднятие дифференциала на U. Заметим, что F мероморфна и корректно определена (потому что дифференциалы τ_{PQ} имеют только целые вычеты) на U и $(F) = a$.

Поэтому надо только проверить, что если z_1 и z_2 — эквивалентные точки на $\partial\Pi$, то $F(z_1) = F(z_2)$. Предположим, что $z_1 \in b_k$ $(k = 1, \ldots, g)$. Тогда

$$F(z_1) = F(z_2) \exp \sum_{j=1}^{r} \int_{z_2}^{z_1} \tau_{P_j Q_j} = F(z_2) \exp \sum_{j=1}^{r} \int_{a_k} \tau_{P_j Q_j} = F(z_2).$$

Далее, предположим, что $z_1 \in a_k$ $(k = 1, \ldots, g)$. Используя (3.20), получаем, что

$$F(z_2) = F(z_1) \exp \sum_{j=1}^{r} \int_{z_1}^{z_2} \tau_{P_j Q_j} = F(z_1) \exp \sum_{j=1}^{r} \int_{b_k} \tau_{P_j Q_j} =$$

$$= F(z_1) \exp \sum_{j=1}^{r} 2\pi i \int_{Q_j}^{P_j} \omega_k = F(z_1).$$

Наконец, проверим необходимость. Предположим, что найдется такая мероморфная функция F, что $(F) = a$, где a задан посредством (4.3). Тогда dF/F есть абелев дифференциал третьего рода с простыми полюсами в точках носителя дивизора a. Кроме того,

$$\frac{dF}{F} = \sum_{j=1}^{r} \tau_{P_jQ_j} + \theta,$$

где θ — абелев дифференциал первого рода,

$$\theta = \sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j.$$

Но при $k = 1, \ldots, g$

$$\int_{a_k} \frac{dF}{F} = 2\pi i n_k, \text{ где } n_k \in \mathbf{Z},$$

и

$$\int_{a_k} \tau_{P_jQ_j} = 2\pi i l_k, \text{ где } l_k \in \mathbf{Z}.$$

Следовательно,

$$\int_{a_k} \theta = c_k = 2\pi i m_k, \text{ где } m_k \in \mathbf{Z}.$$

Но

$$\varphi(a) = \sum_{j=1}^{r} \int_{Q_j}^{P_j} \omega,$$

и для любого k вычисляем

$$\sum_{j=1}^{r} \int_{Q_j}^{P_j} \omega_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{r} \int_{b_k} \tau_{P_jQ_j} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{b_k} \left(\frac{dF}{F} - \theta\right) = \hat{n}_k - \frac{1}{2\pi i} \int_{b_k} \theta = \hat{n}_k - \sum_{j=1}^{g} m_j \int_{b_k} \omega_j.$$

Поэтому

$$\varphi(a) = \sum_{j=1}^{g} \hat{n}_j e^j - \sum_{j=1}^{g} m_j Z^j = \begin{pmatrix} \hat{n} \\ -m \end{pmatrix} (I, Z) \in \Gamma(M),$$

где

$$n = \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \vdots \\ \hat{n}_g \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad m = \begin{pmatrix} m_1 \\ \vdots \\ m_g \end{pmatrix}.$$

Следствие. *Отображение*

$$\varphi\colon M \to J(M)$$

взаимно однозначно.

Доказательство. Пусть P и $Q \in M$. Если $\varphi(P) = \varphi(Q)$, то $\varphi(P - Q) = 0$. Поэтому $P - Q$ — главный дивизор. Следовательно, на M найдется однолистная мероморфная функция, и потому род поверхности M должен быть равен нулю.

Пусть M — компактная риманова поверхность рода $g \geqslant 1$. Реализуем M как U/G, где U есть или $\mathbf{C}$, или единичный круг, а G — действующая без неподвижных точек свободная группа конформных преобразований поверхности U. Конечно, G порождается элементами $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g$, которые удовлетворяют соотношению

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} \ldots a_g b_g a_g^{-1} b_g^{-1} = \mathrm{id}.$$

Пусть χ — *характер* на G, т. е. χ есть гомоморфизм группы G в мультипликативную группу комплексных чисел $\mathbf{C}^*$. Характер χ является *нормализованным*, если $|\chi(g)| = 1$ для всех $g \in G$. Пусть $q \in \mathbf{Z}$. Мероморфная функция φ на U называется *мультипликативной автоморфной формой веса* $(-2q)$, *принадлежащей характеру* χ, если

$$\chi(g)\, g_q^* \varphi = \varphi \quad \text{для всех} \quad g \in G.$$

Мультипликативная автоморфная форма веса 0 называется *мультипликативной функцией*, а мультипликативная автоморфная форма веса (-2) *прим-дифференциалом*.

Лемма 4.3. *Если* $\varphi \neq 0$ *есть мультипликативная автоморфная форма веса* $(-2q)$, *то*

$$\sum_{p \in M} \mathrm{ord}_p\, \varphi = q(2q-2). \tag{4.5}$$

Доказательство. Так как φ можно разделить на ненулевую автоморфную веса $(-2q)$ (принадлежащую нулевому характеру), то достаточно проверить (4.5) при $q = 0$ (т. е. для мультипликативных функций). Если φ— мультипликативная функция, то $d\varphi/\varphi$ есть абелев дифференциал. Пусть Π — фундаментальная область для G в U, выбранная так, что φ голоморфна и равна нулю на $\partial\Pi$. Тогда

$$\sum_{p \in M} \mathrm{ord}_p\, \varphi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial\Pi} \frac{d\varphi}{\varphi} = \sum_{p \in M} \mathrm{Res}_p \frac{d\varphi}{\varphi} = 0.$$

Пусть $\omega_1, \ldots, \omega_g$ — нормализованный базис пространства абелевых дифференциалов первого рода. Рассмотрим эти дифференциалы как замкнутые дифференциалы на U, т. е. возьмем такие голоморфные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_g \in \mathcal{A}_1^\infty(U, G)$, что

$$\omega_j = \varphi_j\, dz, \quad j = 1, \ldots, g.$$

Для $z \in U$ рассмотрим

$$f(z) = \exp \int_{z_0}^{z} \sum_{j=1}^{g} c_j \varphi_j(\zeta)\, d\zeta, \tag{4.6}$$

где $z_0 \in U$ фиксирована, а $c_1, \ldots, c_g$ — константы. Выберем такую голоморфную функцию F_j, что $\partial F_j = \varphi_j$ $(j = 1, \ldots, g)$. Функция F_j является, конечно, голоморфным интегралом Эйхлера порядка 0. Если мы отождествим сторону a_k (соответственно b_k) $\subset \Pi$ с элементом группы G, который отождествляет ее с a_k^{-1} (соответственно b_k^{-1}) для $k = 1, \ldots, g$, то получим

$$\int_{a_k^{-1}} \omega_j = \int_{a_k^{-1}} \varphi_j(\zeta)\, d\zeta = F_j(b_k z) - F_j(z)$$

и

$$\int_{b_k} \omega_j = \int_{b_k} \varphi_j(\zeta)\, d\zeta = F_j(a_k z) - F_j(z),$$

где $z \in U$ произвольно. Поэтому

$$f(a_k z) = f(z) \exp \int_{z}^{a_k z} \sum_{j=1}^{g} c_j \varphi_j(\zeta)\, d\zeta = f(z) \exp \int_{b_k} \sum_{j=1}^{g} c_i \omega_j =$$

$$= f(z) \exp \sum_{j=1}^{g} c_j Z_{jk},$$

где Z_{ij} определяются так же, как и в § 3. Аналогично,

$$f(b_k z) = f(z) \exp \int_{a_k^{-1}} \sum_{j=1}^{g} c_j \omega_j = f(z) \exp(-c_k).$$

Мы показали, что функция f, определяемая равенством (4.6), является единицей (нигде не обращающейся в нуль голоморфной функцией), принадлежащей характеру χ_f, где

$$\chi_f(b_k) = \exp c_k \tag{4.7}$$

и

$$\chi_f(a_k) = \exp\left(-\sum_{j=1}^{g} c_j Z_{jk}\right). \tag{4.8}$$

Такой характер будет называться *несущественным* характером.

Лемма 4.4. *Любой дивизор a степени нуль является дивизором мультипликативной функции f.*

Доказательство. Имеем

$$a = \sum_{i=1}^{n} P_i - \sum_{j=1}^{n} Q_j,$$

где $P_i \neq Q_j$, $i, j = 1, \ldots, n$. Как легко видеть, можно предположить, что $n = 1$. Зафиксируем $z_0 \in U$ и для $z \in U$ определим

$$f(z) = \exp \int_{z_0}^{z} \tau_{P_1 Q_1},$$

где $\tau_{P_1 Q_1}$ есть дифференциал третьего рода, введенный в § 3. Так как $\tau_{P_1 Q_1}$ имеет целые вычеты, то функция f корректно определена. Ясно, что

$$(f) = P_1 - Q_1.$$

Следствие. *Любой дивизор a степени $2q-2$ является дивизором прим-дифференциала.*

Доказательство. Пусть b — канонический дивизор, $b = (\alpha)$. Если $a - b = 0$, то все доказано. В общем случае дивизор $a - b$ имеет степень нуль и, следовательно, является дивизором мультипликативной функции f. Поэтому $a = (f\alpha)$.

Теорема 4.5. *Любой характер χ является характером некоторой мультипликативной функции $f \neq 0$.*

Доказательство. Если χ — несущественный характер, то доказывать нечего. Далее, предположим, что χ — нормализованный характер. Для $z \in U$ рассмотрим при фиксированном $z_0 \in U$

$$h_1(z) = \sum_{g \in G} \frac{1}{gz - z_0} g'(z)^2 \chi(g)$$

и

$$h_2(z) = \sum_{g \in G} \frac{1}{gz - z_0} g'(z)^2.$$

Мы видели, что h_2 нормально сходится к автоморфной форме веса (-4). Так как $|\chi| = 1$, то h_1 нормально сходится к мультипликативной автоморфной форме веса (-4), принадлежащей характеру χ. Поэтому $f = h_1/h_2$ является мультипликативной функцией, принадлежащей характеру χ.

Чтобы закончить доказательство теоремы, докажем такую лемму.

Лемма 4.6. *Любой характер χ является произведением несущественного характера χ_1 и нормализованного характера χ_2.*

Доказательство. Положим

$$\chi(a_k) = \exp(s_k + it_k), \quad s_k,\ t_k \in \mathbf{R},$$

и

$$\chi(b_k) = \exp(u_k + iv_k), \quad u_k,\ v_k \in \mathbf{R},$$

для $k = 1, \ldots, g$. Чтобы построить такой несущественный характер χ_1, что $|\chi(g)| = |\chi_1(g)|$ для всех $g \in G$, мы должны так выбрать константы $c_k \in \mathbf{C}$, $c_k = \alpha_k + i\beta_k$, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, \ldots, g)$, что (сравниваем с (4.7) и (4.8))

$$|\exp c_k| = \exp \alpha_k = \exp u_k$$

и

$$\left|\exp\left(-\sum_{j=1}^{g} c_j Z_{jk}\right)\right| = \exp\left(-\sum_{j=1}^{g} \operatorname{Re}(c_j Z_{jk})\right) = \exp s_k,$$

для $k = 1, \ldots, g$.

Ясно, что мы потребуем, чтобы $\alpha_k = u_k$ для $k = 1, \ldots, g$. Напишем теперь $Z_{jk} = X_{jk} + iY_{jk}$, $X_{jk}, Y_{jk} \in \mathbf{R}$, и вспомним, что столбцы матрицы

$$(I, Z)$$

линейно независимы над $\mathbf{R}$. Поэтому столбцы матрицы $(Y_{jk}) = (Y)$ также линейно независимы над $\mathbf{R}$. В частности, Y есть невырожденная матрица. Но

$$\sum_{j=1}^{g} \operatorname{Re}(u_j + i\beta_j)(X_{jk} + iY_{jk}) = \sum_{j=1}^{g} (u_j X_{jk} - \beta_j Y_{jk}).$$

Поэтому мы должны решить систему

$$\sum_{j=1}^{g} \beta_j Y_{jk} = s_k + \sum_{j=1}^{g} u_j X_{jk}, \quad k = 1, \ldots, g.$$

Так как матрица Y невырожденна, то эта система имеет единственное решение.

Определим теперь $\chi_2 = \chi/\chi_1$.

Вспомним, что $D_0(M)$ обозначает группу дивизоров на M степени нуль. Вернемся к отображению

$$\varphi\colon D_0(M) \to J(M).$$

Предложение 4.7. (a) *Отображение*

$$\varphi\colon D_0(M) \to J(M) \tag{4.9}$$

является сюръективным гомоморфизмом.

(b) *Ядро отображения* φ *есть множество главных дивизоров.*

(c) *Пусть* K *— круг на* M. *Выберем точку* $z = (z_1, \ldots, z_g) \in K^g$. *Для* $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_g) \in K^g$ *положим*

$$\varphi(\zeta) = \sum_{j=1}^{g} \int_{z_j}^{\zeta_j} \omega \in \mathbf{C}^g,$$

где ω *— вектор-столбец нормализованных абелевых дифференциалов первого рода и где мы выбираем путь, соединяющий* z_j *с* ζ_j, *так, чтобы он целиком лежал в* K. *Тогда* φ *является корректно определенным голоморфным отображением*

$$\varphi\colon K^g \to \mathbf{C}^g. \tag{4.10}$$

Кроме того, можно так выбрать точку $z \in K^g$, *чтобы образ* φ *содержал окрестность нуля в* $\mathbf{C}^g$.

Доказательство. Утверждение (b) уже доказано. Ясно, что φ является гомоморфизмом. Покажем теперь, что сюръективность отображения φ из (4.9) является прямым следствием того факта, что образ отображения φ из (4.10) содержит окрестность нуля. Выберем $z \in K^g$ так, чтобы образ φ из (4.10) содержал окрестность нуля в $\mathbf{C}^g$. Пусть $\zeta \in \mathbf{C}^g$ — представитель произвольной точки из $J(M)$. Выберем такое положительное целое число N, что $\zeta/N \in U$. Тогда в силу (c) найдется такой дивизор a степени нуль, что $\varphi(a) = \zeta/N$. Поэтому $\varphi(Na) = \zeta$ и $Na \in D_0(M)$. Остается проверить пункт (c).

Вычислим детерминант отображения φ. Как и прежде, напишем

$$\omega_j = \varphi_j\, dw, \quad j = 1, \ldots, g,$$

где w — некоторая локальная координата на K. Тогда $\varphi(\zeta) = (\varphi^1(\zeta), \ldots, (\varphi^g(\zeta))$, где

$$\varphi^k(\zeta) = \sum_{j=1}^{g} \int_{z_j}^{\zeta_j} \omega_k, \quad k = 1, \ldots, g.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi^k}{\partial \zeta_j} = \varphi_k(\zeta_j), \quad j, k = 1, \ldots, g.$$

Значит, достаточно показать, что можно выбрать такую точку $z \in K^g$, что матрица

$$(\varphi_k(z_j))_{j, k=1, \ldots, g}$$

невырожденна. Это эквивалентно тому, что детерминант матрицы

$$(\varphi_k(\zeta_j))_{j, k=1, \ldots, g} \tag{4.11}$$

не равен тождественно нулю на K^g. Легко показать, что обращение в нуль детерминанта матрицы (4.11) не зависит от выбора базиса. Выберем такую точку $z_1 \in K$, что $\varphi_1(z_1) \neq 0$. Мы можем предположить, что $\varphi_1(z_1) = 1$. Вычитая из $\varphi_2, \ldots, \varphi_g$ функции, пропорциональные функции φ_1, можно также добиться того, что $\varphi_j(z_1) = 0$, $j = 2, \ldots, g$.

Выберем такую точку $z_2 \in K$, что $\varphi_2(z_2) \neq 0$, и опять предположим, что $\varphi_2(z_2) = 1$ и $\varphi_j(z_2) = 0$, $j = 3, \ldots, g$. Продолжая эту процедуру, мы для некоторого $z \in K^g$ приведем матрицу (4.11) к матрице

$$\begin{pmatrix} 1 & & & * \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & 1 \end{pmatrix},$$

которая, как легко видеть, невырожденна.

Из приведенного выше доказательства вытекает

Следствие. *Любой $\zeta \in J(M)$ является образом при отображении φ некоторого дивизора a степени нуль с носителем в K, т. е. дивизора вида*

$$a = \sum_{j=1}^{J} n_j x_j,$$

где $\sum_{j=1}^{J} n_j = 0$ *и* $x_j \in K$, $j = 1, \ldots, J$.

Лемма 4.8. *Пусть $f_j \neq 0$ $(j = 1, 2)$ — мультипликативная функция, принадлежащая характеру χ. Тогда $\varphi((f_1)) = \varphi((f_2))$.*

Доказательство. Дивизор (f_1/f_2) главный и, следовательно, по теореме Абеля лежит в ядре отображения φ.

Ввиду только что доказанной леммы мы можем рассматривать φ как гомоморфизм группы характеров G^* на якобиево многообразие,

$$\varphi\colon G^* \to J(M).$$

Лемма 4.9. *Если $f \neq 0$ — мультипликативная функция, то найдутся такие константы $c, c_1, \ldots, c_g$, что*

$$f(z) = c\exp\int_{z_0}^{z}\left(\sum_{j=1}^{J}\tau_{P_jQ_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j\right), \tag{4.12}$$

где z_0 — произвольная точка из U, в которой $f(z_0) \neq 0$ и $f(z_0) \neq \neq \infty$, и

$$(f) = \sum_{j=1}^{J} P_j - \sum_{j=1}^{J} Q_j, \tag{4.13}$$

причем $P_j \neq Q_k$, $j, k = 1, \ldots, j$.

Доказательство. Рассмотрим абелев дифференциал df/f. Это есть дифференциал третьего рода с простыми полюсами и целыми вычетами в точках носителя дивизора (f). В частности,

$$\operatorname{res}_p \frac{df}{f} = \operatorname{ord}_p f, \quad p \in M.$$

Поэтому

$$\frac{df}{f} - \sum_{j=1}^{J} \tau_{P_jQ_j}$$

является абелевым дифференциалом первого рода. Следовательно,

$$\frac{df}{f} = \sum_{j=1}^{J} \tau_{P_jQ_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j. \tag{4.14}$$

Утверждение (4.12) является простым следствием равенства (4.14).

Теорема 4.10. *Пусть $\chi \in G^*$. Тогда $\varphi(\chi) = 0$ в том и только в том случае, когда χ несуществен.*

Доказательство. Если характер χ несущественный, то найдется единица f, принадлежащая характеру χ. Так как f не имеет нулей и полюсов, то

$$\varphi(\chi) = \varphi((f)) = 0.$$

Далее, пусть χ — произвольный характер. Имеем $\chi = \chi_1\chi_2$, где χ_1 — несущественный характер, а χ_2 — нормализованный характер. Тогда, так как φ — гомоморфизм, то $\varphi(\chi) = 0$ в том

и только в том случае, когда $\varphi(\chi_2) = 0$. Поэтому мы можем предположить, что χ — нормализованный характер.

Выберем непостоянную функцию f, принадлежащую характеру χ. Мы можем предположить, что f задается равенством (4.12), причем $c = 1$. Поэтому $\varphi(\chi) = \varphi((f))$. Как и в доказательстве теоремы Абеля,

$$\varphi((f)) = \frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{b_k}\left(\frac{df}{f} - \theta\right)\right)_{k=1,\ldots,g},$$

где $\theta = \sum\limits_{j=1}^{g} c_j\omega_j$. Поэтому

$$\varphi((f)) = \frac{1}{2\pi i}\left(\log\left(\frac{f(a_k z)}{f(z)} - \int\limits_{b_k}\theta\right)\right)_{k=1,\ldots,g} =$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi i}\log\chi(a_k) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} c_j Z_{jk}\right)_{k=1,\ldots,g} =$$

$$= \left(\alpha_k - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} c_j Z_{jk}\right)_{k=1,\ldots,g},$$

где $\chi(a_k) = \exp(2\pi i\alpha_k)$ при подходящем выборе $\alpha_k \in \mathbf{R}$ $(k = 1, \ldots, g)$. Таким образом,

$$\varphi((f)) = \sum_{j=1}^{g}\alpha_j e^j - \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g} c_j Z^j. \tag{4.15}$$

Вычислим теперь для $k = 1, \ldots, g$

$$f(b_k z) = f(z)\exp\int\limits_{z}^{b_k z}\left(\sum_{j=1}^{J}\tau_{P_jQ_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j\right) =$$

$$= f(z)\exp\left(\sum_{j=1}^{J}\int\limits_{a_k^{-1}}\tau_{P_jQ_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j\int\limits_{a_k^{-1}}\omega_j = f(z)\exp(-c_k).\right.$$

Поэтому $\chi(b_k) = \exp c_k = \exp(2\pi i\beta_k)$, где $\beta_k \in \mathbf{R}$. Аналогично $(k = 1, \ldots, g)$,

$$f(a_k z) = f(z)\exp\int\limits_{z}^{a_k z}\left(\sum_{j=1}^{J}\tau_{P_jQ_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j\omega_j\right) =$$

$$= f(z) \exp\left(\sum_{j=1}^{J} \int_{b_k} \tau_{P_j Q_j} + \sum_{j=1}^{g} c_j \int_{b_k} \omega_j\right) =$$

$$= f(z) \exp\left(2\pi i \sum_{j=1}^{J} \int_{Q_j}^{P_j} \omega_k + \sum_{j=1}^{g} c_j \int_{b_k} \omega_j\right).$$

(Приведенная только что выкладка нам не понадобится.)

Предположим, что $\varphi((f)) = 0$. Тогда из (4.15) мы видим, что

$$\sum_{j=1}^{g} \alpha_j e^j - \sum_{j=1}^{g} \beta_j Z^j \in J(M).$$

Отсюда, так как α_j и β_j лежат в $\mathbf{R}$ ($j = 1, \ldots, g$) и векторы $e^1, \ldots, e^g$, $Z^1, \ldots, Z^g$ линейно независимы над $\mathbf{R}$, следует, что α_j и $\beta_j \in \mathbf{Z}$. Поэтому

$$\chi(a_k) = \chi(b_k) = 1.$$

Проблема обращения Якоби

Рассмотрим $M^{(g)}$, g-кратное симметрическое произведение поверхности M. Точками пространства $M^{(g)}$ являются неупорядоченные g-наборы точек поверхности M, т. е. положительные дивизоры степени g.

Мы можем рассматривать $M^{(g)}$ как $M^{(g)}/\mathcal{S}$, где $\mathcal{S}$ — группа перестановок множества из g элементов. К тому же g элементарных симметрических функций от локальных параметров на M являются локальными параметрами на $M^{(g)}$. Поэтому $M^{(g)}$ есть g-мерное комплексно аналитическое многообразие. Зафиксируем точку $P_0 \in M$. Если $(P_1, \ldots, P_g) \in M^{(g)}$, то рассмотрим

$$\varphi(P_1 + \ldots + P_g - gP_0).$$

Таким образом, мы получаем отображение $\varphi\colon M^{(g)} \to J(M)$.

Теорема 4.11. *Отображение*

$$\varphi\colon M^{(g)} \to J(M)$$

сюръективно.

Доказательство. Отображение φ сюръективно, если любой характер χ является характером дивизора вида

$$P_1 + \ldots + P_g - gP_0$$

(P_0 фиксирована; P_j, $j = 1, \ldots, g$, произвольны). Введем несколько понятий. Пусть a — дивизор на M, а χ — характер на G. Определим

$$l_\chi(a) = \{f;\ f \text{ — мультипликативная функция, принадлежащая характеру } \chi, \text{ и } (f) + a \geqslant 0\},$$

и

$$\dim_\chi a = \dim l_\chi(a).$$

Нам нужна

Теорема 4.12 (Риман — Рох). *Для любого дивизора a на M имеем*

$$\dim_\chi a = \deg a + 1 - g + \dim_{\chi^{-1}}(\omega - a),$$

где ω — канонический дивизор.

Покажем сначала, как использовать теорему Римана — Роха для мультипликативных функций, чтобы завершить

Доказательство теоремы 4.11. Имеем

$$\dim_\chi gP_0 = 1 + \dim_{\chi^{-1}}(\omega - gP_0) \geqslant 1.$$

Поэтому φ сюръективно. Кроме того, мы видим, что если $\varphi(P) = \varphi(Q)$, где P и $Q \in M^{(g)}$, то $\dim_\chi gP_0 > 1$ или (эквивалентно) $\dim_{\chi^{-1}}(\omega - gP_0) > 0$. Поэтому можно (но мы не будем этого делать) узнать, в какой мере отображение φ является взаимно однозначным.

Дадим теперь

Доказательство теоремы 4.12. Выберем мультипликативную функцию $g \neq 0$, принадлежащую характеру χ. Пусть $b = (g)$. Тогда $f \in l_\chi(a)$ в том и только в том случае, когда $f/g \in l(a + b)$. Поэтому $\dim_\chi a = \dim(a + b)$. Так как g^{-1} есть мультипликативная функция, принадлежащая характеру χ^{-1}, и $(g^{-1}) = -b$, то мы видим, что $\dim_{\chi^{-1}} a = \dim(a - b)$. Тогда, вспомнив, что $\deg b = 0$, мы получаем, что

$$\begin{aligned}\dim_\chi a &= \dim(a + b) = \\ &= \deg(a + b) + 1 - g + \dim(\omega - a - b) = \\ &= \deg a + 1 - g + \dim_{\chi^{-1}}(\omega - a).\end{aligned}$$

Замечания

Содержание этой главы является классическим. Приведенное здесь доказательство неравенства Римана — новое. Все результаты восходят к девятнадцатому столетию — к Риману, Вейерштрассу, Якоби.

Глава VII

ПРИЛОЖЕНИЯ К СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ

В этой главе мы докажем, наконец, теорему конечности Альфорса, равно как и ее количественный вариант — неравенство Берса о площадях. Эти две теоремы, вероятно, являются наиболее существенными результатами о структуре конечно порожденных клейновых групп. Мы изложим теорию функций на открытых поверхностях, основываясь на теореме Берса об аппроксимации. Мы получим, в частности, теоремы Бенке — Штейна, Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера. Затем теория функций используется для описания групп когомологий Эйхлера на открытых поверхностях. Как побочный результат этого описания мы получаем в случае групп конечного типа новое доказательство структурной теоремы для $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. В § 4 используется аппарат гл. 5 для того, чтобы показать, что теорема Берса об аппроксимации является почти точной, и чтобы дать еще одно описание групп когомологий для фуксовых групп второго рода.

В конце мы в качестве приложения результатов Бенке — Штейна показываем, что открытая риманова поверхность определяется с точностью до зеркального отражения кольцом голоморфных функций на ней. Комбинируя этот результат с теоремой Ис'са, получаем тот факт, что поле мероморфных функций (рассматриваемое как C-алгебра) определяет риманову поверхность.

§ 1. Теорема конечности Альфорса. Неравенство Берса о площадях.

Для любой римановой поверхности M через $\mathcal{A}_1^2(M)$ обозначается пространство квадратично интегрируемых голоморфных дифференциалов на M, а через $\mathcal{A}_2^1(M)$ — пространство интегрируемых квадратичных дифференциалов на M.

Предложение 1.1. *Если M имеет бесконечный род, то* $\dim \mathcal{A}_1^2(M) = \infty$.

Доказательство. Пусть A_0 — пространство квадратично интегрируемых гладких замкнутых дифференциалов (1-форм) на M.

Если ω_1 и $\omega_2 \in A_0$, то

$$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \iint_M \omega_1 \wedge \overline{{}^*\omega_2}$$

является скалярным произведением в A_0 и

$$\mathcal{A}_1^2(M) \subset A_0.$$

Так как M имеет бесконечный род, то для любого целого $g > 0$ можно найти $2g$ замкнутых кривых $a_1, \ldots, a_g$, $b_1, \ldots, b_g$ с матрицей пересечений

$$\begin{array}{c|cc} & a & b \\ \hline a & 0 & I \\ b & -I & 0 \end{array}$$

(Смотри, например, лемму 2.2 этой главы.) Пусть α_i — замкнутая 1-форма, индуцированная циклом a_i, а β_i — замкнутая 1-форма, индуцированная циклом b_i, $i = 1, \ldots, g$. Тогда

$$\int_{b_j} \alpha_i = \iint_M \beta_j \wedge \alpha_i = b_j \cdot a_i = -\delta_{ij}.$$

Но α_i имеет компактный носитель, и, следовательно, $\alpha_i \in A_0$. Так как элементы $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ линейно независимы, то мы заключаем, что $\dim A_0 \geqslant g$, и, так как $g > 0$ произвольно, то $\dim A_0 = \infty$.

Пусть A — пополнение пространства A_0. Это есть бесконечномерное гильбертово пространство, которое можно рассматривать как пространство измеримых квадратично интегрируемых замкнутых 1-форм. Пусть

B — гармонические 1-формы из A,

$C_0 = \{df;\ f$ — гладкая функция на M с компактным носителем$\}$

и

C — замыкание в A множества C_0.

Мы утверждаем, что

$$A = B \oplus C, \tag{1.1}$$

где $\oplus$ означает прямое произведение гильбертовых пространств.

Покажем сначала, что в (1.1) разложение является ортогональным. Если $\omega \in B$ и $\alpha \in C$, то $\alpha = \lim\limits_n \alpha_n$, причем $\alpha_n = df_n$, f_n — гладкая функция с компактным носителем D_n. Тогда

$$\langle \alpha_n, \omega \rangle = \iint_{D_n} \alpha_n \wedge \overline{{}^*\omega} = \iint_{D_n} df_n \wedge \overline{{}^*\omega} =$$

$$= \int_{\partial D_n} f_n^* \overline{\omega} - \iint_{D_n} f_n \, d\overline{{}^*\omega} = 0.$$

(Последнее равенство верно, так как форма $\overline{*\omega}$ также замкнута.) Поэтому

$$\langle \alpha, \omega \rangle = \lim_n \langle \alpha_n, \omega \rangle = 0.$$

Далее, покажем, что если $\omega \in A$ и ω ортогональна к C, то $\omega \in B$. Сделаем несколько предварительных наблюдений.

Все квадратично интегрируемые дифференциалы на M также образуют гильбертово пространство. Для любых двух квадратично интегрируемых дифференциалов α, β имеем

$$\langle \alpha, *\beta \rangle = \iint_M \alpha \wedge \overline{**\beta} = -\iint_M \alpha \wedge \overline{\beta} =$$

$$= -\iint_M *\alpha \wedge \overline{*\beta} = -\langle \alpha^*, \beta \rangle.$$

Кроме того, для любой $\omega \in A$

$$\langle *df, \omega \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad df \in C_0.$$

Это утверждение нужно проверить только для гладких форм ω. Выберем $D \subset M$ так, что D содержит носитель функции f. Тогда

$$\langle *df, \omega \rangle = \overline{\langle \omega, *df \rangle} = -\iint_M \overline{\omega} \wedge df =$$

$$= -\iint_D \overline{\omega} \wedge df = -\int_{\partial D} \overline{\omega} f + \iint_D d\overline{\omega} \wedge f = 0.$$

Предположим теперь, что $\omega \in A$ и

(1.2) $$\langle df, \omega \rangle = 0 \quad \text{для всех} \quad df \in C_0.$$

Тогда, кроме того,

$$\langle *df, \omega \rangle = 0 = \langle i *df, \omega \rangle.$$

В частности, для всех гладких функций f на M с компактным носителем (используем (1.2))

$$\langle df + i *df, \omega \rangle = 0.$$

Выберем на M круг K с локальной координатой z. Тогда

$$\omega = \varphi\, dz + \psi\, d\bar{z} \quad \text{в} \quad K,$$

и для f с носителем в K

$$0 = \langle df + i^* df, \omega \rangle = 2 \iint_K (f_z\, dz) \wedge (i\overline{\varphi}\, d\bar{z} - i\overline{\psi}\, dz) =$$

$$= 2i \iint_K f_z \overline{\varphi}\, dz \wedge d\bar{z}.$$

В силу леммы Вейля мы получаем, что функция $\bar{\varphi}$ гладкая и $\bar{\varphi}_z = 0$, т. е. $\varphi_{\bar{z}} = 0$, или, что то же самое, φ голоморфна в K. Аналогично, используя равенство

$$\langle df - i\,{}^*df,\ \omega\rangle = 0,$$

мы получаем, что ψ антиголоморфна в K. Поэтому ω гармонична в K. Так как $K \subset M$ произвольно, то мы показали, что из (1.2) вытекает включение $\omega \in B$.

Если $\omega \in B$, то

$$\omega + i^*\omega \in \mathcal{A}_1^2(M),$$

так как

$$\iint_M (\omega + i^*\omega) \wedge \overline{({}^*\omega - i\omega)} = \iint_M (\omega + i^*\omega) \wedge ({}^*\bar{\omega} + i\bar{\omega}) =$$
$$= 2\iint_M \omega \wedge {}^*\bar{\omega} < \infty,$$

и $\omega + i^*\omega$, как легко видеть, является голоморфной 1-формой. Мы показали, что $\dim \mathcal{A}_1^2(M) = \infty$, так как $\dim B = \infty$ (элементы $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_g$ пространства A проектируются на линейно независимые элементы пространства B).

Лемма 1.2. *Пусть G — фуксова группа, действующая на верхней полуплоскости U. Если U/G имеет сигнатуру $(g;\ \nu_1, \ldots, \nu_n)$, то для $q \geqslant 2$*

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(U, G) = (2q-1)(g-1) + \sum_{j=1}^{n} [q - q/\nu_j], \tag{1.3}$$

где $[q - q/\infty] = q - 1$.

Доказательство. Пусть ω — канонический дивизор на $\overline{U/G}$, т. е.

$$\omega = (\theta),$$

где θ — мероморфный абелев дифференциал на $\overline{U/G}$. Пусть

$$a = q\omega - \alpha^q.$$

Тогда $f \in l(a)$ (пространство дивизора a), если $f \in \mathcal{H}(\overline{U/G})$ (поле мероморфных функций на $\overline{U/G}$) и если

$$(f\theta^q) - \alpha^q = (f) + q(\theta) - \alpha^q = (f) + q\omega - \alpha^q \geqslant 0,$$

где α^q есть q-канонический дивизор ветвления, введенный в § 8 гл. III. Поэтому $l(a)$ представляет собой пространство мероморфных q-дифференциалов, дивизоры которых кратны дивизору α^q, и

$$l(a) \cong \mathcal{A}_q^\infty(U, G), \quad q \geqslant 2.$$

Вычисляем, используя теорему Римана—Роха,

$$\dim a = \deg a - g + 1 + \dim(\omega - a).$$

Далее,

$$\deg a = 2q(q-1) + \sum_{j=1}^{n} [q - q/\nu_j],$$

и

$$\deg(\omega - a) = (2-2q)(g-1) - \sum_{j=1}^{g} [q - q/\nu_j].$$

Мы утверждаем, что

$$\deg(\omega - a) < 0. \tag{1.4}$$

Так как $q \geqslant 2$, то нечего проверять, если $g > 1$. Если $g = 1$, то найдется j $(1 \leqslant j \leqslant n)$, для которого $\nu_j > 1$. Поэтому

$$[q - q/\nu_j] \geqslant [q/2] \geqslant 1,$$

и (1.4) проверено в этом случае. Если $g = 0$, то из неравенства

$$(\text{площадь } (U/G)) > 0$$

вытекает, что

$$\sum_{j=1}^{n} (1 - 1/\nu_j) > 2.$$

Поэтому

$$\sum_{j=1}^{n} \left[q - \frac{q}{\nu_j}\right] \geqslant \sum_{j=1}^{n} \left\{q - \frac{q}{\nu_j} - \frac{\nu_j - 1}{\nu_j}\right\} =$$

$$= (q-1) \sum_{j=1}^{n} \left(1 - \frac{1}{\nu_j}\right) > 2(q-1).$$

Из (1.4) мы получаем, что

$$\dim(\omega - a) = 0.$$

Это доказывает (1.3).

Замечания. (1) Равенство

$$\dim(\omega - a) = 0$$

может быть проверено другим способом. Вспомним обозначения § 8 гл. III:

$$\mathcal{A}_q^{\infty}(U, G) = \mathcal{A}_q(0) \cong l(a), \quad q \geqslant 2.$$

Далее, $f \in l(\omega - a)$ тогда и только тогда, когда

$$(f) + \omega - q\omega + \alpha^q = (f\theta^{1-q}) + \alpha^q \geqslant 0,$$

и, согласно лемме 8.6 гл. III, тогда и только тогда, когда

$$(f\theta^{1-q}) \geqslant \alpha^{1-q}.$$

Поэтому

$$l(\omega - a) \cong \mathcal{A}_{1-q}(0) = \{0\},$$

в силу леммы 8.7 гл. III.

(2) Легко видеть, что в предположениях леммы

$$\dim \mathcal{A}_1^\infty(U, G) = g.$$

(3) Для малых значений q

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(U, G) = 0 \tag{1.5}$$

для U/G с некоторыми малыми сигнатурами, в частности для U/G с сигнатурой

$$(0; \nu_1, \nu_2, \nu_3), \quad \text{где} \quad \frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} < 1.$$

Важно знать, что (1.5) выполняется только для малых значений q. Это составляет содержание такого утверждения:

Следствие 1. *Пусть G — фуксова группа, действующая на U. Если U/G имеет конечный тип, то*

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(U, G) > 0 \tag{1.6}$$

для $q \geqslant 44$.

Доказательство. Пусть U/G имеет сигнатуру $(g; \nu_1, \ldots, \nu_n)$. Тогда, так как $n > 0$ при $g = 1$, то для $g \geqslant 1$ неравенство (1.6), как легко видеть, вытекает из (1.3). Поэтому предположим, что $g = 0$ и что выполняется (1.5). Таким образом,

$$\sum_{j=1}^{n} [q - q/\nu_j] = 2q - 1. \tag{1.7}$$

Но из следствия 2 теоремы 3.2 гл. II вытекает, что

$$2q - 1 = \sum_{j=1}^{n} [q(1 - 1/\nu_j)] \geqslant (q-1) \sum_{j=1}^{n} (1 - 1/\nu_j) \geqslant (q-1)(2 + 1/42).$$

Поэтому если выполняется (1.7), то

$$q \leqslant 43.$$

Замечание. Легко проверить, что для $q = 43$ и сигнатуры $(0; 2, 3, 7)$ выполняется (1.5).

Следствие 2. *Пусть Γ — клейнова группа, а Δ — инвариантное объединение компонент области разрывности группы Γ. Если*

Δ/Γ *имеет конечный тип, то*

$$2\pi \lim_{q\to\infty} \frac{1}{q} \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) = (\text{площадь } (\Delta/\Gamma)).$$

Доказательство. Пусть $\Delta_0 \subset \Delta$ — компонента области Δ с подгруппой стабильности Γ_0. Пусть G — фуксова модель группы Γ_0. Тогда

$$\mathcal{A}_q^\infty(U, G) \cong \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_0, \Gamma_0)$$

и

$$(\text{площадь } (U/G)) = (\text{площадь } (\Delta_0/\Gamma_0)).$$

Поэтому следствие вытекает из равенства (8.15) гл. III, равенства (1.3) этой главы и равенств (3.15) и (3.16) гл. II.

Теорема 1.3. *Если Γ — (неэлементарная) конечно порожденная клейнова группа с областью разрывности Ω, то любая компонента пространства Ω/Γ является римановой поверхностью конечного типа.*

Доказательство. Предположим, что Γ порождается N элементами. Так как отображение β^*: $\mathcal{A}_2^\infty(\Omega, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_2)$ инъективно, то из леммы 1.1 гл. V вытекает, что

$$\dim \mathcal{A}_2^\infty(\Omega, \Gamma) \leqslant \dim H^1(\Gamma, \Pi_2) \leqslant 3(N-1)$$

(Мы передоказали следствие теоремы 2.4 гл. V.) В частности,

$$\dim \mathcal{A}_2^1(\Omega, \Gamma) < \infty$$

(ввиду теоремы 2.1 гл. III).

Пусть S — компонента пространства Ω/Γ. Покажем, что

(1.8) $\qquad \dim \mathcal{A}_2^1(\pi^{-1}(S), \Gamma) < \infty \Leftrightarrow S$ конечного типа,

где π: $\Omega \to \Omega/\Gamma$ — естественная проекция.

Пусть $\bar{S}$ обозначает «наименьшую» поверхность без проколов, которая содержит S, и пусть S_0 обозначает множество неразветвленных точек поверхности S. Тогда S имеет конечный тип в том и только в том случае, когда

$$(\text{род } (S)) < \infty$$

и

$$\operatorname{card}(\bar{S} - S_0) < \infty.$$

Напомним, что $\mathcal{A}_1^2(S_0)$ обозначает гильбертово пространство квадратично интегрируемых абелевых дифференциалов на S_0. Заметим, что любой такой дифференциал продолжается до дифференциала на $\bar{S}$ и что

$$\mathcal{A}_1^2(S_0) = \mathcal{A}_1^2(\bar{S}).$$

Как и прежде, $\mathcal{A}_2^1(S_0)$ обозначает банахово пространство интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов на S_0. Легко проверить, что если $\beta \in \mathcal{A}_2^1(S_0)$, то β продолжается до мероморфного квадратичного дифференциала на $\overline{S}$, и что полюса дифференциала β в точках множества $\overline{S} - S_0$ могут быть только простыми. Обратно, если род $(\overline{S}) < \infty$ и если β — мероморфный квадратичный дифференциал на $\overline{S}$ с изолированными простыми полюсами в $\overline{S} - S_0$, то $\beta \in \mathcal{A}_2^1(S_0)$.

Совершенно ясно, что

$$\mathcal{A}_2^1(S_0) \cong \mathcal{A}_2^1(\pi^{-1}(S), \Gamma) \tag{1.9}$$

К тому же, если $\alpha_1 \in \mathcal{A}_1^2(S_0)$ и $\alpha_2 \in \mathcal{A}_1^2(S_0)$, то $\alpha_1\alpha_2 \in \mathcal{A}^1(S_0)$. Поэтому

$$\dim \mathcal{A}_1^2(S_0) \leqslant \dim \mathcal{A}_2^1(S_0) \tag{1.10}$$

Если S имеет конечный тип, то, согласно лемме 1.2, $\dim \mathcal{A}_2^1(\pi^{-1}(S), \Gamma) < \infty$. Если род $(S) = \infty$ то, согласно предложению 2.1, $\dim \mathcal{A}_1^2(S_0) = \infty$ и поэтому ввиду (1.10) и (1.9) $\dim \mathcal{A}_2^1(\pi^{-1}(S), \Gamma) = \infty$. Остается рассмотреть случай, когда род $(S) < \infty$, card $(\overline{S} - S_0) = \infty$. Зафиксируем три различные точки $\{x_1, x_2, x_3\} \subset \overline{S} - S_0$. Пусть θ — абелев дифференциал на $\overline{S}$. Рассмотрим пространство $l(a)$, где

$$a = 2(\theta) + x_1 + x_2 + x_3 + x,$$

$x \in \overline{S} - S_0$ и $x \neq x_k$, $k = 1, 2, 3$.

Имеем $f \in l(a)$ тогда и только тогда, когда

$$(f\theta^2) + x_1 + x_2 + x_3 + x \geqslant 0;$$

т. е. $l(a)$ канонически изоморфно пространству мероморфных дифференциалов на $\overline{S} - S_0$, особенностями которых могут быть только простые полюсы в точках $\{x_1, x_2, x_3, x\} \subset \overline{S} - S_0$. Теперь

$$\dim a \geqslant \deg a + 1 - g = 2(2g - 2) + 4 + 1 - g = 3g + 1 \geqslant 1.$$

Поэтому также и в этом случае $\dim \mathcal{A}_2^1(S_0) = \infty$. Таким образом, мы проверили (1.8), и доказательство теоремы закончено.

Замечания. (1) Мы еще не можем заключить, что в Ω/Γ имеется только конечное число компонент, так как на «трижды проколотой сфере» нет ненулевых интегрируемых квадратичных дифференциалов. Мы это покажем в приводимом ниже следствии.

(2) Мы завершили доказательство теоремы 3.2 гл. II.

Приводимые ниже результаты являются следствиями из доказанной выше теоремы и теоремы 3.4 гл. V.

Следствие 1. *Пусть* Γ — *клейнова группа, а* Δ — *инвариантное объединение компонент области разрывности группы* Γ. *Если* Γ *порождается* N *элементами, то* Δ/Γ *имеет конечный тип. Если* K — *число компонент пространства* Δ/Γ, *то*

$$(1.11)\qquad \sum_{j=1}^{K}\{(2q-1)(g_j-1)+\sum_{p\in S_j}[q-q/\nu(p)]\}\leqslant$$
$$\leqslant(2q-1)(N-1),\quad q\geqslant 2,$$

где $\Delta_1, \ldots, \Delta_K$ — *максимальное множество неэквивалентных компонент области* Δ, Γ_j — *подгруппа стабильности компоненты* Δ_j, g_j — *род поверхности* $\overline{\Delta_j/\Gamma_j}=S_j$, $j=1, \ldots, K$, *и* $\nu(p)$ — *число ветвления точки* $p\in S_j$.

Доказательство. Первое утверждение верно, так как $\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma)\geqslant 1$ при $q\geqslant 44$. Второе утверждение есть просто переформулировка того, что отображение β^* инъективно (теорема 3.4 гл. V).

Замечание. Из этого следствия вытекает теорема конечности Альфорса. Таким образом, мы завершили доказательство теоремы 2.3 гл. II.

Следствие 2 (первая теорема Берса о площадях). *Если* Ω — *область разрывности группы* Γ *и* Γ *порождается* N *элементами, то*

$$(\text{площадь } (\Omega/\Gamma))\leqslant 4\pi(N-1).$$

Доказательство. Разделим (1.11) на q и положим $q\to\infty$ или применим следствие 2 леммы 1.2.

Следствие 3. *Пусть* Γ *порождается* N *элементами, а* Ω/Γ *имеет* K *компонент.*

Тогда

(a) $K\leqslant 18(N-1)$,

(b) $K\leqslant 2(N-1)$, *если* Γ *не имеет элементов конечного порядка*

и

(c) $K\leqslant(N-1)$, *если группа* Γ *чисто локсодромическая.*

Замечания. (1) Знаменитая гипотеза Маскита состоит в том, что (b) верно для всех групп.

(2) Так как $(\text{площадь } (\Delta_j/\Gamma))\geqslant\pi/21$, то из следствия 2 мы непосредственно получаем, что $K\leqslant 84(N-1)$.

Доказательство следствия 3. (b) В этом случае $(\text{площадь } (\Delta_j/\Gamma))\geqslant 2\pi$.

(c) В этом случае (площадь $(\Delta_j/\Gamma)) \geqslant 4\pi$.

(a) Заметим, что

$$\dim \mathcal{A}_4^\infty(\Delta_j, \Gamma) + \dim \mathcal{A}_6^\infty(\Delta_j, \Gamma) \geqslant 1 \text{ для всех } j. \tag{1.12}$$

Чтобы проверить (1.12), достаточно рассмотреть случай $g_j = 0$, так как при $g_j \geqslant 1$ имеем $\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma) \geqslant 1$ для всех $q \geqslant 2$. Предположим, что Δ_j/Γ имеет сигнатуру

$$(0;\ \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n),$$

где, как обычно, $\nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots \leqslant \nu_n$. Если $n \geqslant 6$, то мы уже отмечали, что $\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta_j, \Gamma) > 0$ для всех $q \geqslant 2$. Поэтому мы рассмотрим только случай, когда $n \leqslant 5$, т. е. $3 \leqslant n \leqslant 5$. Так как при заданном n размерности не уменьшаются, когда число ветвления увеличивается, то в каждом случае надо проверить (1.12) для наименьших возможных сигнатур. В следующей таблице содержатся нужные результаты.

Сигнатура	$\dim \mathcal{A}_4^\infty(\Delta_j, \Gamma)$	$\dim \mathcal{A}_6^\infty(\Delta_j, \Gamma)$
(0; 2, 2, 2, 2, 2)	3	4
(0; 2, 2, 2, 3)	1	2
(0; 2, 3, 7)	0	1
(0; 2, 4, 5)	1	0
(0; 3, 3, 4)	0	1

Складывая неравенство (1.11) при $q = 4$ с неравенством (1.11) при $q = 6$, мы видим, что каждая компонента пространства Δ/Γ дает положительный вклад в левую часть неравенства (a). А правая часть есть, конечно, $18(N-1)$.

Для следующей группы результатов нам нужна теорема 5.1 гл. V. Усилим сначала следствие 3 этой теоремы.

Следствие 4. *Пусть* Γ — *конечно порожденная клейнова группа с инвариантной областью* Δ *и областью разрывности* Ω. *Тогда при* $q \geqslant 2$

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma) \leqslant \dim PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \leqslant 2 \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma). \tag{1.13}$$

Кроме того, если Δ (*связна и*) *односвязна, то*

$$\dim H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = 2 \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) + n, \tag{1.14}$$

где n — *число проколов на* Δ/Γ.

Доказательство. Первое равенство следует из того, что Ω/Γ имеет конечный тип и

$$PH_\Omega^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \subset PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}).$$

Равенство (1.14) является следствием теоремы Римана — Роха и теоремы 5.1 гл. V.

Следствие 5 (вторая теорема Берса о площадях). *Пусть* Γ — *конечно порожденная клейнова группа с инвариантной областью* Δ *и областью разрывности* Ω. *Тогда для* $q \geqslant 2$

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma) \leqslant 2 \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma), \tag{1.15}$$

и, следовательно,

$$(\text{площадь } (\Omega/\Gamma)) \leqslant 2\,(\text{площадь } (\Delta/\Gamma)). \tag{1.16}$$

Доказательство. Утверждение (1.15) вытекает из (1.13), а утверждение (1.16) получается, если (1.15) разделить на q и положить $q \to \infty$.

Следствие 6. *Пусть* Γ — *конечно порожденная клейнова группа с двумя инвариантными компонентами* Δ *и* Δ'. *Тогда область разрывности* Ω *равна* $\Delta \cup \Delta'$, *и каждая из компонент односвязна. Кроме того,* Δ/Γ *и* Δ'/Γ *имеют одинаковые сигнатуры.*

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned}(\text{площадь } (\Delta/\Gamma)) + (\text{площадь } (\Delta'/\Gamma)) &\leqslant \\ \leqslant (\text{площадь } (\Omega/\Gamma)) &\leqslant 2\,(\text{площадь } (\Delta/\Gamma)).\end{aligned} \tag{1.17}$$

Поэтому

$$(\text{площадь } (\Delta'/\Gamma)) \leqslant (\text{площадь } (\Delta/\Gamma)),$$

и по симметрии мы получаем равенство. Следовательно, $\Omega = \Delta \cup \Delta'$. Кроме того, предельное множество Λ содержится в замыкании компоненты Δ'. Поэтому дополнение к Δ в $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ связно. Следовательно, Δ односвязно.

Пусть n и n' — число проколов соответственно на Δ/Γ и Δ'/Γ. Используя аналогичное неравенству (1.17) неравенство для параболических форм, мы заключаем, что

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) = \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Delta', \Gamma), \tag{1.18}$$

и, следовательно, в силу (1.14) $n = n'$. Используя Δ и Δ', построим фуксовы модели группы Γ и получим группы G и G'. Так как Δ и Δ' односвязны, то $G \cong \Gamma \cong G'$. Поэтому все элементы конечного порядка в группе Γ имеют две неподвижные точки, одну — в Δ, а другую — в Δ'. Следовательно, остается проверить, что Δ/Γ и Δ'/Γ имеют одинаковый род. Так как обе эти поверхности имеют одну и ту же последовательность чисел ветвления, то равенство родов вытекает из (1.18).

Замечания. (1) Если Γ — клейнова группа с инвариантной компонентой Δ, то Γ конечно порождена тогда и только тогда, когда Δ/Γ имеет конечный тип. Если Δ/Γ имеет конечный тип, то, как и в фуксовом случае, мы получаем множество образующих

группы Г, используя ее элементы, которые отождествляют две стороны фундаментальной области для Г в Δ. Обратное является, конечно, частным случаем теоремы конечности.

(2) Аккола чисто топологическими методами получил результат, аналогичный следствию 6, для произвольных клейновых групп. Он показал, что если Δ и Δ' — инвариантные компоненты клейновой группы Г, то Δ и Δ' односвязны *и* любая другая компонента области разрывности группы Г является *атомом*, т. е. компонентой, подгруппа стабильности которой тривиальна. В силу теоремы Нильсена и Фенчела поверхности Δ/Γ и Δ'/Γ гомеоморфны даже в общем случае.

Напомним, что группы Шоттки определены в § 4 гл. I.

Следствие 7. *Если* Г — *конечно порожденная группа Шоттки с областью разрывности* Ω, *то для* $q \geqslant 2$

$$H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = \beta^*(\mathcal{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma)).$$

Доказательство. Пусть Ω/Γ имеет род g. Тогда из леммы 1.2 вытекает, что

$$\dim \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma) = (2q-1)(g-1).$$

Это есть в точности размерность пространства $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. Смотри лемму 1.1 гл. V.

Напомним, что клейнова группа называется *вырожденной*, если она имеет связную односвязную область разрывности.

Следствие 8. *Если* Г — *конечно порожденная вырожденная клейнова группа с областью разрывности* Ω, *то для* $q \geqslant 2$

$$\dim PH_\Omega^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = 2 \dim \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma).$$

Замечание. Последние два следствия показывают, что отображение Берса β^* может не быть сюръективным. Мы получили дополнительную информацию о сюръективности отображения Берса в теореме 6.2 гл. V и ее следствиях.

§ 2. Теория функций на открытых римановых поверхностях. Теорема Бенке — Штейна

Если M — риманова поверхность, то мы через $\mathcal{A}_2^1(M)$ обозначили пространство голоморфных интегрируемых квадратичных дифференциалов на M. Если X и Y — римановы поверхности, то мы будем писать

$$Y \subset\subset X,$$

если $\mathrm{Cl}\, Y$ (замыкание поверхности Y в X) является компактным подмножеством поверхности X и Y ограничена конечным числом

аналитических простых замкнутых кривых. (Это обозначение не является стандартным и будет использоваться только в этом параграфе.)

Теорема 2.1. *Пусть M — компактная риманова поверхность с проколами и $Y_0 \subset\subset Y_1 \subset\subset M$. Предположим, что каждая компонента множества $M - Y_0$ содержит какую-нибудь компоненту множества $M - Y_1$. Тогда $\mathcal{A}_2^1(Y_1)$ плотно в $\mathcal{A}_2^1(Y_0)$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что универсальная накрывающая поверхности M есть единичный круг Δ, так как этого всегда можно добиться, сделав на M проколы в трех или более точках, не лежащих в $\mathrm{Cl}\, Y_1$. Пусть $\pi\colon \Delta \to M$ — голоморфное универсальное накрывающее отображение с накрывающей группой Γ. Пусть $D_0 = \pi^{-1}(Y_0)$, $D_1 = \pi^{-1}(Y_1)$ и $\Lambda = \pi^{-1}(M - Y_1)$. Ясно, что Λ является множеством единственности для $\mathrm{Cl}\, \Delta - D_0$. Следовательно, в силу теоремы 1.1 гл. IV Λ является множеством аппроксимации для D_0. Пусть $f \in \mathcal{A}_2^1(Y_0)$. Поднимем f до формы из $\mathcal{A}_2^1(D_0, \Gamma)$, которую мы будем обозначать тем же символом. Мы можем предположить (ввиду теоремы 3.3 гл. III), что $f = \Theta_2 F$, причем $F \in \mathcal{A}_2^1(D_0)$. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Выберем $G \in \mathcal{A}_2(\Lambda)$ так, что

$$\iint\limits_{D_0} |F(z) - G(z)|\,|dz \wedge d\bar{z}| < \varepsilon.$$

Тогда также

$$\iint\limits_{D_0/\Gamma} |\Theta_2 F(z) - \Theta_2 G(z)|\,|dz \wedge d\bar{z}| < \varepsilon,$$

потому что Θ_2 является уменьшающим норму отображением. Так как $G \in \mathcal{A}_2(\Lambda) \subset \mathcal{A}_2^1(D_1)$, то $\Theta_2 G \in \mathcal{A}_2^1(D_1, \Gamma)$.

Следствие. *Любая голоморфная на $\mathrm{Cl}\, Y_0$ функция f может быть равномерно аппроксимирована на любом компактном подмножестве множества Y_0 функциями, голоморфными на Y_1.*

Доказательство. Пусть α — мероморфный квадратичный дифференциал на M с полюсами и нулями только в $M - \mathrm{Cl}\, Y_1$. Тогда $f\alpha \in \mathcal{A}_2^1(Y_0)$. Пусть K — компактное подмножество множества Y_0. Пусть ω_0 — такая фундаментальная область для Γ в D_0, что некоторая компонента k множества $\pi^{-1}(K)$ является компактным подмножеством области ω_0. Пусть $m = \min\{|\alpha(z)|;\ z \in k\} > 0$, $r =$ (расстояние от k до границы области ω_0) > 0. Если задано $\varepsilon > 0$, то мы так выберем $\beta \in \mathcal{A}_2^1(Y_1)$, что

$$\|f\alpha - \beta\|_{Y_0} < \varepsilon\,(2\pi m r^2).$$

Тогда β/α является голоморфной функцией на Y_1 и для $z \in k$

$$|f(z)-\beta/\alpha(z)| \leqslant \frac{1}{m}|f\alpha(z)-\beta(z)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi m r^2} \iint\limits_{|z-\zeta|<r} |f\alpha(\zeta)-\beta(\zeta)|\,|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2\pi m r^2} \iint\limits_{\omega_0} |f\alpha(\zeta)-\beta(\zeta)|\,|d\zeta \wedge d\bar{\zeta}| =$$
$$= \frac{1}{2\pi m r^2} \|f-\beta\alpha\|_{Y_0} = \varepsilon.$$

Остается построить дифференциал α.

Рассмотрим несколько случаев. Если род $M = 0$, то дифференциал α строится тривиально. Возьмем любой мероморфный квадратичный дифференциал $\alpha_1 \neq 0$ на M. Если α_1 имеет порядок $\nu_j \neq 0$ в $p_j \in \mathrm{Cl}\, Y_1$ $(j = 1, \ldots, n)$, то построим мероморфную (рациональную) функцию φ на M с порядком $-\nu_j$ в p_j и порядком нуль во всех остальных точках множества $\mathrm{Cl}\, Y_1$ (концентрируем избыток нулей или полюсов в $M - \mathrm{Cl}\, Y_1$). Положим $\alpha = \varphi\alpha_1$. Если род $M = 1$, то любой ненулевой (т. е. не равный тождественно нулю) голоморфный квадратичный дифференциал может быть взят в качестве α. Нам остался случай, когда род $M > 1$.

Без ограничения общности можно предположить, что M компактна. Пусть α_1 — некоторый ненулевой квадратичный голоморфный дифференциал на M. Пусть

$$(\alpha_1) = \sum_{j=1}^{k} n_j x_j, \quad n_j > 0, \ x_j \in M.$$

Рассмотрим параметрический круг $D \subset M - \mathrm{Cl}\, Y_1$. Выберем точку $x \in D$ и дивизор

$$a = \Big(\sum_{j=1}^{k} n_j\Big) x - (\alpha_1).$$

Пусть $\varphi(a)$ — образ дивизора a в якобиевом многообразии $J(M)$. В силу следствия из предложения 4.7 гл. VI можно найти такой дивизор b степени 0 с носителем в D, что $\varphi(b) = \varphi(a)$. Так как $\varphi(a - b) = 0$, то дивизор $a - b$ главный. Поэтому найдется мероморфная на M функция f с полюсом порядка n_j в любой точке $x_j \in M - D$. Положим

$$\alpha = f\alpha_1.$$

Доказательство следующей леммы стандартно и будет опущено (см., например, книгу Альфорса и Сарио).

Лемма 2.2. *Пусть M — открытая риманова поверхность. Тогда в ней найдется такая последовательность областей $\{Y_n\}$, что*

(1) *любая область Y_n ограничена аналитическими кривыми,*

(2) *любое замыкание $\mathrm{Cl}\, Y_n$ компактно,*

(3) $\mathrm{Cl}\, Y_n \subset Y_{n+1}$,

(4) $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} Y_n$,

(5) *Y_n односвязна относительно Y_{n+1} (т. е. $Y_{n+1} - Y_n$ не имеет компактных компонент).*

Кроме того, если $\{p_k\}$ — дискретная последовательность на M, то мы можем так выбрать последовательность $\{Y_n\}$, что $p_k \notin \mathrm{Cl}\, Y_n - Y_n$ для всех k и n.

Замечание. Утверждения (1), (2) и (3) означают, что $Y_n \subset\subset Y_{n+1}$.

Теорема 2.3 (Бенке — Штейн). *Пусть D — область в открытой римановой поверхности M. Если D односвязна относительно M, то любая голоморфная функция на D может быть равномерно аппроксимирована на компактных подмножествах области D голоморфными на M функциями.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что D ограничена конечным числом аналитических дуг, $\mathrm{Cl}\, D$ компактно и что задана функция f, голоморфная на $\mathrm{Cl}\, D$. Эту функцию надо равномерно аппроксимировать на $\mathrm{Cl}\, D$ голоморфными на M функциями.

Рассмотрим теперь нормальное исчерпывание $M = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} D_n$, удовлетворяющее условию леммы 2.2, причем $D = D_1$. Так как D_n односвязна относительно D_{n+1}, то любая голоморфная функция на $\mathrm{Cl}\, D_n$ может быть равномерно аппроксимирована на $\mathrm{Cl}\, D_n$ функциями, голоморфными на $\mathrm{Cl}\, D_{n+1}$. (Возьмем подходящую окрестность Y_0 множества $\mathrm{Cl}\, D_n$, множество $M = D_{n+1}$, «заклеенное» по своим граничным кривым, подходящую окрестность Y_1 множества $\mathrm{Cl}\, D_{n+1}$ и применим следствие теоремы 2.1.)

Возьмем функцию f на $\mathrm{Cl}\, D$ и зафиксируем $\varepsilon > 0$. Выберем такие $\varepsilon_j > 0$, что

$$\sum_{j=1}^{\infty} \varepsilon_j = \varepsilon.$$

Положим $f = f_1$. Для любого $j \geqslant 1$ и голоморфной на $\mathrm{Cl}\, D_j$ функции f_j найдем такую голоморфную на $\mathrm{Cl}\, D_{j+1}$ функцию f_{j+1}, что

$$|(f_{j+1} - f_j)(x)| < \varepsilon_j \quad \text{для} \quad x \in \mathrm{Cl}\, D_j.$$

Теперь для $x \in M$ получаем, что $x \in D_n$ при $n \geqslant m$. Положим

$$g(x) = f_m(x) + \sum_{n=m}^{\infty} (f_{n+1}(x) - f_n(x)).$$

Так как $|f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon_n$ для $x \in \mathrm{Cl}\, D_m \subset \mathrm{Cl}\, D_n$, то ряд нормально сходится на $\mathrm{Cl}\, D_n$. Поэтому g голоморфна на M. Для $x \in D$

$$|f(x) - g(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n = \varepsilon.$$

Это завершает доказательство теоремы Бенке — Штейна.

Наши следующие результаты — эта теоремы Вейерштрасса и Миттаг-Леффлера для открытых римановых поверхностей.

Лемма 2.4. *Пусть Y — компактная область на римановой поверхности M. Предположим, что Y ограничена аналитическими кривыми. Тогда для любой наперед заданной точки $p \in Y$ найдется функция f, аналитичная на $\mathrm{Cl}\, Y$, имеющая простой нуль в точке p и не имеющая других нулей в $\mathrm{Cl}\, Y$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что M компактна. Но тогда доказательство леммы есть приложение проблемы обращения Якоби. Аналогичная аргументация использовалась при доказательстве следствия из теоремы 2.1. Детали оставляем читателю.

Рассмотрим открытую область $W \subset W_0$, замыкание $\mathrm{Cl}\, W$ которой компактно и граница C которой состоит из конечного числа замкнутых аналитических кривых. Хорошо известно, что W может быть дополнена при помощи симметризации до замкнутой римановой поверхности $\hat{W}$. На $\hat{W}$ задано антиконформное преобразование j, которое оставляет любую точку множества C неподвижной. Если z — локальная координата в точке $p \in \hat{W}$, то можно выбрать локальную координату $\tilde{z}$ в точке $\tilde{p} = j(p) \in \hat{W}$ так, что в этих локальных координатах отображение j задается формулой $\tilde{z} = \bar{z}$. Если W имеет род p и ограничена q кривыми, то $\hat{W}$ имеет род $P = 2p + q - 1$.

Есть много способов проверить приведенные выше утверждения. Мы выберем один из них, который не стандартен, но теперь будет для нас совсем легким. Мы опять собираемся использовать описание группы $\pi_1(W)$.

Представим W как U/G, где U — верхняя полуплоскость, а G — фуксова группа, обязательно второго рода. Тогда G является свободной группой с $2p + q - 1$ образующими. Мы утверждаем, что G есть чисто гиперболическая группа. Ясно, что G не может содержать эллиптических элементов (так как $G \cong$

$\cong \pi_1(M)$) и не может содержать параболических элементов в силу следствия 1 теоремы 2.5 гл. II. Пусть Ω — область разрывности группы G. Так как Ω состоит из U, L (нижней полуплоскости) и отрезков на $\mathbf{R}$, то мы заключаем, что Ω связна. Ввиду теоремы конечности Альфорса и леммы 2.2 гл. II Ω/G есть единственная компактная риманова поверхность. Ясно, что она конформно эквивалентна $\hat{W}$. Кроме того, инволюция на $\hat{W}$ индуцируется антиконформным преобразованием $z \mapsto \bar{z}$, которое коммутирует с проекцией π: $\Omega \to \hat{W}$ (так как элементы группы G являются вещественными матрицами). Ясно, что граница C области W есть $(\mathbf{R} \cup \{\infty\} - \Lambda)/G$, где Λ — предельное множество группы G.

Остается вычислить род поверхности $\hat{W}$. Введем на $\mathrm{Cl}\, W$ триангуляцию, состоящую из i треугольников, j ребер внутри W, k ребер на C, l вершин внутри W и m вершин на C. Заметим, что $m = k$. На дубле $\hat{W}$ имеется очевидная триангуляция, которая продолжает данную триангуляцию. Характеристика Эйлера — Пуанкаре поверхности $\hat{W}$ равна

$$(2.1)\qquad 2 - 2P = 2i - (2j + k) + (2l + m) = \\ = 2(i - j + l) + (m - k) = 2(i - j + l).$$

Имеем теперь для W

$$H_0(W) \cong \mathbf{Z}, \quad H_1(W) \cong \mathbf{Z}^{2p+q-1}, \quad H_2(W) = \{0\},$$

так как W открыта. Поэтому характеристика Эйлера — Пуанкаре поверхности W есть

$$(2.2)\qquad 2 - 2p - q = i - (j + k) + (l + m) = \\ = (i - j + l) + (m - k) = (i - j + l).$$

(Тот факт, что W имеет род p и ограничена q кривыми, означает, что, прибавив q кругов, мы можем получить компактную риманову поверхность рода p. Пусть C_1 — компонента границы множества W. Если в определенной выше триангуляции C_1 содержит k_1 ребер, то $\mathrm{Cl}\, W$, к которому прибавлен круг, триангулируется путем прибавления k_1 треугольников, k_1 ребер и 1 вершины. Поэтому, кроме того,

$$(2.3)\qquad 2 - 2p = (i + k) - (j + 2k) + (l + k + q) = \\ = (i - j + l) + q.)$$

Комбинируя (2.1) и (2.2), получаем, что

$$2 - 2P = 2(i - j + l) = 4 - 4p - 2q,$$

или

$$P = 2p + q - 1.$$

Нам понадобится антилинейное отображение

$$\sim: \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, G) \to \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, G), \quad q \geqslant 1,$$

определяемое следующим образом: если $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, G)$, то

$$\sim\varphi(z) = \tilde{\varphi}(z) = \overline{\varphi(\bar{z})}, \quad z \in \Omega.$$

Отображение $\sim$ будет также рассматриваться как инволюция в пространстве голоморфных дифференциалов на $\hat{W}$. Заметим, что если $z \in \Omega \cap \mathbf{R}$, то $\tilde{\varphi}(z) = \overline{\varphi(z)}$.

Аналитический дифференциал на Cl W называется *дифференциалом Шоттки*, если его можно продолжить до аналитического дифференциала на $\hat{W}$.

Лемма 2.5. *Пространство S_a аналитических дифференциалов Шоттки, рассматриваемое как векторное пространство над* $\mathbf{R}$, *линейно порождается подпространствами S_r и iS_r, где S_r обозначает подпространство аналитических дифференциалов Шоттки, которые вещественны на C*

Доказательство. Пусть $\varphi \in S_a$. Положим

$$\theta_1 = \frac{\varphi + \tilde{\varphi}}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\varphi - \tilde{\varphi}}{2i}.$$

Тогда θ_1 и $\theta_2 \in S_r$, $\varphi = \theta_1 + i\theta_2$. Разложение единственно. Действительно, если $\varphi = \theta_1' + i\theta_2'$, то

$$\theta_1 - \theta_1' = i(\theta_2' - \theta_2).$$

Поэтому $\theta_1 - \theta_1'$ обращается в нуль на C и, следовательно, $\theta_1 = \theta_1'$. Аналогично, $\theta_2 = \theta_2'$.

Следствие. *Пространство S_r имеет над* $\mathbf{R}$ *размерность P.*

Доказательство. Ясно, что S_a имеет над $\mathbf{C}$ размерность P (следствие 2 из теоремы Римана — Роха).

Лемма 2.6. *В S_a имеется один и только один дифференциал с заданными периодами.*

Доказательство. Ранг первой группы гомологий поверхности W (с целыми коэффициентами) равен P. Так как $\dim S_a = P$, то мы должны показать, что линейное отображение, переводящее дифференциалы Шоттки в их периоды, является взаимно однозначным. Предположим, что $\omega \in S_a$ имеет нулевые периоды. Тогда $\omega = \theta_1 + i\theta_2 = df$, где f — голоморфная функция на Cl W и θ_1, $\theta_2 \in S_r$. Заметим, что $*df = -idf$. Вычислим

$\mathscr{L}^2$-норму дифференциала ω,

$$\|\omega\|^2 = \iint\limits_W \omega \wedge {}^*\overline{\omega} = \iint\limits_W df \wedge \overline{{}^*df} =$$

$$= \int\limits_C f\,\overline{{}^*df} - \int\limits_W f\,d(\overline{{}^*df}) = i\int\limits_C f\,\overline{df} - i\iint\limits_W f\,d^2\overline{f} =$$

$$= i\int\limits_C f(\theta_1 - i\theta_2) = i\iint\limits_W d[f(\theta_1 - i\theta_2)] = 0.$$

(Последнее равенство вытекает из того, что форма $f(\theta_1 - i\theta_2)$ замкнута.)

Лемма 2.7. *Пусть Y_1 и Y_2 — две компактные подобласти римановой поверхности, каждая из которых ограничена аналитическими кривыми. Предположим, что* $\mathrm{Cl}\,Y_1 \subset Y_2$ *и Y_1 односвязна относительно Y_2. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции f, которая голоморфна и не обращается в нуль на* $\mathrm{Cl}\,Y_1$, *на Y_2 найдется такая голоморфная и не обращающаяся в нуль функция g, что*

$$|(f/g) - 1| < \varepsilon$$

на $\mathrm{Cl}\,Y_1$.

Доказательство. Рассмотрим дифференциал df/f, периоды которого кратны $2\pi i$. Согласно лемме 2.6, на $\mathrm{Cl}\,Y_2$ найдется голоморфный дифференциал ω, который на циклах, лежащих в Y_1, имеет те же периоды, что и df/f, и все периоды которого сравнимы с нулем по модулю $2\pi i$. Зафиксируем точку $x_0 \in Y_1$. Тогда

$$h_0(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \left(\frac{df}{f} - \omega\right)$$

определяет голоморфную функцию на $\mathrm{Cl}\,Y_1$. Поэтому по теореме Бенке — Штейна (теорема 2.3) найдется функция h_1, голоморфная на Y_2, для которой

$$|h_0(x) - h_1(x)| < \log(1 + \varepsilon), \quad x \in \mathrm{Cl}\,Y_1.$$

Значит,

$$|e^{h_0 - h_1}(x) - 1| \leqslant e^{|h_0(x) - h_1(x)|} - 1 < \varepsilon, \quad x \in \mathrm{Cl}\,Y_1.$$

Но для $x \in \mathrm{Cl}\,Y_1$

$$e^{h_0 - h_1}(x) = \left(\exp\int\limits_{x_0}^{x} df/f\right)\left(\exp - \int\limits_{x_0}^{x}\omega\right)(\exp - h_1(x)) =$$

$$= f(x)\left(\exp - \int\limits_{x_0}^{x}\omega\right)(\exp - h_1(x)).$$

Так как все периоды дифференциала ω сравнимы с нулем по модулю $2\pi i$, то

$$e^{-\int_{x_0}^{x}\omega}\, e^{-h_1(x)}$$

определяет на Y_2 не обращающуюся в нуль голоморфную функцию $1/g$.

Теорема 2.8. *Пусть W — открытая риманова поверхность, а $\{p_k\}$ — дискретная последовательность на W. Если $\{\nu_k\}$ — последовательность положительных целых чисел, то на W найдется такая функция f, что f не равна нулю во всех точках, не принадлежащих последовательности $\{p_k\}$, и*

$$\operatorname{ord}_{p_k} f = \nu_k. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $\{Y_n\}$ — исчерпывание, описанное в лемме 2.2. Используя лемму 2.4, построим функцию g_n, которая голоморфна на $\operatorname{Cl} Y_n$ и обращается в нуль с кратностью ν_k только в тех точках p_k, которые лежат в Y_n. Эта последовательность не обязательно сходится. Поэтому мы построим модифицированную последовательность, которая будет сходиться. Мы утверждаем, что найдется такая последовательность $\{f_n\}$, что

i) f_n голоморфна в $\operatorname{Cl} Y_n$,

ii) $\operatorname{ord}_x f_n = \operatorname{ord}_x g_n$ для всех $x \in \operatorname{Cl} Y_n$ и

iii) $\left|\frac{f_{n+1}}{f_n} - 1\right| < \frac{1}{n^2}$ в $\operatorname{Cl} Y_n$ для $n = 1, 2, \ldots$.

Положим $f_1 = g_1$. Выбрав $f_1, \ldots, f_n$, заметим, что g_{n+1}/f_n голоморфна и не обращается в нуль в $\operatorname{Cl} Y_n$. Поэтому в силу леммы 2.7 найдется такая функция h_{n+1}, голоморфная и не обращающаяся в нуль в $\operatorname{Cl} Y_{n+1}$, что

$$\left|\frac{g_{n+1}}{f_n h_{n+1}} - 1\right| < \frac{1}{n^2} \text{ в } \operatorname{Cl} Y_n.$$

Положим $f_{n+1} = g_{n+1}/h_{n+1}$.

Пусть

$$f = \lim_{m\to\infty} f_m = f_n \prod_{n=m}^{\infty} \frac{f_{m+1}}{f_m}, \quad n \geqslant 1.$$

Это бесконечное произведение абсолютно сходится в силу (iii) в $\operatorname{Cl} Y_n$ для всех n (и, следовательно, во всех $\operatorname{Cl} Y_m$ для $m \leqslant n$) и, как легко видеть, удовлетворяет (2.4).

Следствие. *Если $f \neq 0$ — мероморфная функция на открытой римановой поверхности W, то на W найдутся такие голоморфные функции g и h, что $f = g/h$.*

Доказательство. Полюсы функции f образуют дискретное множество на W. Поэтому на W найдется такая голоморфная функция h, что

$$\operatorname{ord}_p h = \max\{-\operatorname{ord}_p f,\ 0\} \quad \text{для всех} \quad p \in W.$$

Положим $g = fh$ и заметим, что g голоморфна на W.

Теорема 2.9. *Пусть W — открытая риманова поверхность, а $\{p_k\}$ — дискретная последовательность на ней. Пусть z_k — локальная координата, обращающаяся в нуль в p_k, и*

$$\{a_{k,0},\ a_{k,1},\ \ldots,\ a_{k,j_k}\},\quad j_k \geqslant 0,\quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

есть множество констант. Тогда на W найдется голоморфная функция f, которая в точке p_k имеет разложение в ряд Тейлора

$$f(z_k) = \sum_{j=0}^{\infty} a_{k,j} z_k^j.$$

Доказательство. Из леммы 2.4 сразу следует, что в $\operatorname{Cl} Y_n$ найдется аналитическая функция g_n, имеющая заданные разложения в тех точках p_k, которые лежат в Y_n, и не обращающаяся в нуль в других точках множества Y_n. Как и прежде, мы должны найти модифицированную последовательность. Мы утверждаем, что найдется функция f_n, голоморфная на $\operatorname{Cl} Y_n$, имеющая заданные разложения в точках p_k, лежащих в Y_n, и удовлетворяющая неравенству

$$(2.5)\qquad |f_{n+1}(x) - f_n(x)| < \frac{1}{n^2},\quad x \in Y_n,\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots.$$

Положим $f_1 = g_1$ и предположим, что $f_1, \ldots, f_n$ уже определены. Пусть h_{n+1} — функция, которая аналитична в $\operatorname{Cl} Y_{n+1}$, обращается в нуль с кратностью $j_k + 1$ в точках p_k, лежащих в $\operatorname{Cl} Y_{n+1}$, и не обращается в нуль во всех других точках. Пусть M — максимум в Y_n функции $|h_{n+1}|$. Тогда $g_{n+1} - f_n$ аналитична в $\operatorname{Cl} Y_n$ и имеет в точке p_k порядок, больший или равный $j_k + 1$, если $p_k \in Y_n$. Следовательно,

$$\frac{g_{n+1} - f_n}{h_{n+1}}$$

голоморфна в Y_n, и по теореме 2.3 найдется такая голоморфная на $\operatorname{Cl} Y_{n+1}$ функция d_{n+1}, что

$$\left|\frac{g_{n+1} - f_n}{h_{n+1}} - d_{n+1}\right| < \frac{1}{Mn^2}$$

в $\operatorname{Cl} Y_n$. Положим $f_{n+1} = g_{n+1} - d_{n+1}h_{n+1}$. Тогда f_{n+1} имеет заданные разложения в точках, лежащих в Y_{n+1}, и удовлетворяет

(2.5). Поэтому ряд

$$f_n + \sum_{m=n}^{\infty} (f_{m+1} - f_m)$$

нормально сходится в $\mathrm{Cl}\, Y_n$, т. е. последовательность $\{f_n\}$ сходится и имеет в качестве предела искомую функцию.

Следствие. *Пусть W — открытая риманова поверхность, а $\{p_k\}$ — дискретное множество точек на ней. Пусть z_k — локальная координата, обращающаяся в нуль в p_k, и для $k = 1, 2, \ldots$*

$$\{a_{k,\, i(k)},\ a_{k,\, i(k)+1},\ \ldots,\ a_{k,\, j(k)}\}$$

есть множество констант, где $i(k)$ и $j(k)$ — целые числа, причем $j(k) \geqslant i(k)$. Тогда на W найдется мероморфная функция f, которая голоморфна и не равна нулю всюду, кроме точек последовательности $\{p_k\}$, и имеет разложение в ряд Лорана

$$f(z_k) = \sum_{j=i(k)}^{\infty} a_{k,\, j} z_k^j.$$

Доказательство. Взяв отношение двух функций типа описанных в теореме 2.8, построим функцию g, которая имеет во всех точках поверхности W тот же порядок, что и искомая функция. В силу теоремы 2.9 мы можем теперь построить на W голоморфную функцию h, у которой разложение в точке p_k совпадает с первыми $j(k) - i(k) + 1$ членами в разложении функции

$$\log \frac{\sum\limits_{j=i(k)}^{j(k)} a_{k,\, j} z_k^j}{g(z_k)},$$

где можно использовать любую ветвь логарифма. Положим $f = ge^h$.

Теорема 2.10. *Пусть $\{\gamma_i\}$ — базис гомологий открытой римановой поверхности W. Тогда на W найдется аналитический абелев дифференциал ω, который имеет на γ_i наперед заданные периоды π_i, $i = 1, 2, \ldots$.*

Доказательство. В лемме 2.6 утверждается, что существует голоморфный абелев дифференциал β_n, определенный на $\mathrm{Cl}\, Y_n$ и имеющий там требуемые периоды. Определим теперь по индукции новую последовательность дифференциалов ω_n. Положим $\omega_1 = \beta_1$. Предположим, что ω_n определен и имеет на $\mathrm{Cl}\, Y_n$ требуемые периоды. Заметим, что $\beta_{n+1} - \omega_n$ имеет нулевой период в Y_n, и поэтому $\beta_{n+1} - \omega_n = df_{n+1}$, причем f_{n+1} — голоморфная функция на Y_n. По теореме Бенке — Штей-

на можно найти такую голоморфную на Y_{n+1} функцию g_{n+1}, что

$$|f_{n+1}-g_{n+1}|<\frac{1}{(n+1)^2}$$

в Y_n. Положим $\omega_{n+1}=\beta_{n+1}-dg_{n+1}$ и $h_{n+1}=f_{n+1}-g_{n+1}$. Тогда $\omega_{n+1}-\omega_n=dh_{n+1}$ в Y_n, и мы определим ω в Y_n, положив

$$\omega=\omega_n+d\Big(\sum_{m=n+1}^{\infty}h_m\Big).$$

Сумма нормально сходится, и ω не зависит от n, так как

$$\omega=\lim_{n\to\infty}\omega_n.$$

Кроме того, ω имеет искомые периоды.

В дальнейшем мы через $\mathcal{A}(W)$ будем обозначать $\mathbf{C}$-алгебру голоморфных функций на (открытой) римановой поверхности W.

§ 3. Когомологии для открытых поверхностей. Дополнительное доказательство структурной теоремы для $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$

Пусть Γ — клейнова группа, а Δ есть Γ-инвариантное открытое подмножество области разрывности Ω группы Γ. Напомним, что $H^1(\Gamma, \mathscr{C}^\infty_{r,s}(\Delta))=\{0\}$ (теорема 3.2 гл. V). В этом параграфе мы покажем, что $H^1(\Gamma, \mathcal{A}_r(\Delta))=\{0\}$, если Δ/Γ не имеет компактных компонент.

Замечание. Заметим, что мы *не* предполагаем, что Δ есть инвариантное объединение компонент.

Мы покажем также, как можно из результатов этого и предыдущего параграфов получить новое доказательство структурной теоремы (теоремы 5.1 гл. V) для $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ в случае, когда Δ/Γ имеет конечный тип.

Пусть $r, s\in\mathbf{Z}$. Под гладким (r, s)-*дифференциалом* на римановой поверхности W мы понимаем такое сопоставление каждой локальной координате z на W функции $\mu(z)$, что

$$\mu(z)\,dz^r\,d\bar{z}^s$$

является конформным инвариантом. Если W реализована как открытый круг U, профакторизованный по действующей без неподвижных точек фуксовой группе G, то гладкие (r, s)-дифференциалы находятся во взаимно однозначном соответствии с элементами пространства $\mathscr{C}^\infty_{r,s}(U, G)$.

Лемма 3.1. *Пусть W — риманова поверхность конечного типа, т. е. компактная поверхность или компактная поверхность с про-*

колами). Пусть $X \subsetneq W$ — *область с компактным замыканием, ограниченная конечным числом аналитических замкнутых кривых. Если* μ — *гладкий* $(n, 1)$-*дифференциал на* $\mathrm{Cl}\, X$, *замыкании области* X (*т. е.* μ *определен в окрестности области* X), *то на* $\mathrm{Cl}\, X$ *найдется такой гладкий* n-*дифференциал* ν, *что* $\bar{\partial}\nu = \mu$.

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что W имеет в качестве универсальной накрывающей единичный круг U, так как этого всегда можно добиться, сделав на W проколы в трех точках, не лежащих в $\mathrm{Cl}\, X$. Выберем на $\mathrm{Cl}\, X$ не обращающийся в нуль голоморфный $(-1-n)$-дифференциал φ (тот факт, что такой дифференциал φ существует, вытекает из проблемы обращения Якоби (следствие предложения 4.7 гл. VI)). Аналогичная аргументация была уже использована при доказательстве следствия теоремы 2.1. (Другое построение см. в доказательстве леммы 3.2.)

Предположим, что лемма доказана при $n = -1$. Тогда $\varphi\mu$ является $(-1, 1)$-дифференциалом. Поэтому найдется такой (-1)-дифференциал ν, что $\bar{\partial}\nu = \varphi\mu$. Теперь $\bar{\partial}(\nu/\varphi) = \mu$ и ν/φ есть n-дифференциал. Поэтому остается случай, когда $n = -1$.

Рассмотрим пространство $A_2^1(W)$ интегрируемых голоморфных квадратичных дифференциалов на W. Это есть конечномерное (d-мерное) пространство, которое канонически изоморфно $\mathcal{A}_2^1(U, G)$, где G — накрывающая группа поверхности W. Пусть $\pi\colon U \to W$ — соответствующее накрывающее отображение и $U_0 = \pi^{-1}(X)$. Но $(-1, 1)$-дифференциал μ поднимается до (обобщенного) коэффициента Бельтрами (с $q = 2$) для G на U_0. Этот коэффициент мы также будем обозначать через μ. Выберем такой базис $(\varphi_1, \ldots, \varphi_d)$ пространства $\mathcal{A}_2^1(U, G)$ и такие $\{z_1, \ldots, z_d\} \subset U - U_0$, что $d \times d$-матрица

$$(\varphi_j(z_k))_{j,\, k=1,\, \ldots,\, d}$$

невырожденна. Выберем около точек z_k, $k = 1, \ldots, d$, такие круги $U_k \subset U - U_0$ площади A_k, что никакие две точки из

$$\bigcup_{k=1}^{d} U_k$$

не эквивалентны относительно G. Продолжим μ на U как коэффициент Бельтрами для G следующим образом. Положим $\mu = c_k$ (константа будет вскоре определена) на U_k. Продолжим μ по инвариантности на

$$\bigcup_{k=1}^{d} \Gamma U_k$$

и положим $\mu = 0$ на

$$U - U_0 - \bigcup_{k=1}^{d} \Gamma U_k.$$

Константы c_k, $k = 1, \ldots, d$, выберем так, что

$$l(\varphi) = \iint\limits_{U/G} \varphi(z)\,\mu(z)\,dz \wedge d\bar{z} = 0 \text{ для всех } \varphi \in \mathcal{A}_2^1(U, G).$$

Заметим, что при фиксированном j ($j = 1, \ldots, d$)

$$l(\varphi_j) = \iint\limits_{U_0/G} \varphi_j(z)\,\mu(z)\,dz \wedge d\bar{z} - 2i \sum_{k=1}^{d} c_k A_k \varphi_j(z_k).$$

Так как $A_k \neq 0$ ($k = 1, \ldots, d$), а матрица $(\varphi_j(z_k))$ невырожденна, то мы можем так выбрать константы $c_1, \ldots, c_d$, что $l(\varphi_j) = 0$ для $j = 1, \ldots, d$.

Зафиксируем теперь 3 различные точки a_1, a_2, a_3 на единичной окружности. Предположим, что a_j является неподвижной точкой гиперболического элемента $\gamma_j \in \Gamma$, $j = 1, 2, 3$. Пусть F — потенциал для μ, который обращается в нуль в a_j ($j = 1, 2, 3$). Тогда $\bar{\partial} F = \mu$, и F индуцирует нулевой коцикл, т. е.

$$\gamma_{-1}^* F = F \quad \text{для всех} \quad \gamma \in \Gamma.$$

Поэтому проекция потенциала F на W является искомым ν.

Лемма 3.2. *Пусть W — открытая риманова поверхность, а $\{x_1, x_2, \ldots\}$ — дискретная последовательность на W. Пусть ν — гладкий n-дифференциал на W. Предположим, что ν голоморфен вблизи любой точки x_j, $j = 1, 2, \ldots$. Если $(m_1, m_2, \ldots)$ — последовательность положительных целых чисел, то на W найдется такой голоморфный n-дифференциал φ, что* $\operatorname{ord}_{x_j}(\nu - \varphi) \geqslant m_j$, $j = 1, 2, \ldots$.

Доказательство. Выберем локальную координату z_j, обращающуюся в нуль в x_j, и напишем

$$\nu(z_j) = \Big(\sum_{i=0}^{\infty} a_{ji} z_j^i\Big)\,dz_j^n.$$

Выберем сначала такую голоморфную функцию g на W, что

$$g(z_j) = z_j + z_j^{m_j+2} + \sum_{i=m_j+3}^{\infty} c_{ji} z_j^i \text{ вблизи } x_j.$$

Заметим, что $(dg)^n$ есть мероморфный n-дифференциал, который регулярен в x_j, $j = 1, 2, \ldots$. Поэтому можно выбрать такую

голоморфную функцию f на W, что $\operatorname{ord}_x f = -\operatorname{ord}_x (dg)^n$, если dg мероморфен в x, и

$$f(z_j) = \sum_{i=0}^{m_j-1} a_{ji} z_j^i + \sum_{i=m_j}^{\infty} b_{ji} z_j^i \text{ вблизи } x_j.$$

Положим $\varphi = f(dg)^n$.

Лемма 3.3. *Пусть W — произвольная открытая риманова поверхность, а μ — гладкий $(n, 1)$-дифференциал на W. Тогда на W найдется такой гладкий n-дифференциал ν, что $\bar\partial\nu = \mu$.*

Доказательство. Разделив μ на n-ю степень нигде не обращающегося в нуль голоморфного абелева дифференциала, мы можем предположить, что $n = 0$. Тот факт, что такой дифференциал существует, устанавливается при помощи рассуждений, использованных при доказательстве предыдущей леммы.

Как и в лемме 2.2, выберем на W исчерпывание $\{Y_m\}$. Тогда по теореме Бенке — Штейна любая функция, голоморфная на Y_{m-1}, может быть равномерно аппроксирована на $\operatorname{Cl} Y_{m-2}$ функцией, голоморфной на Y_m $(m \geqslant 3)$. По индукции, начинающейся с $m \geqslant 3$, построим последовательность гладких функций f_m, определенных на Y_m, со следующими двумя свойствами:

$$\bar\partial f_m = \mu \quad \text{на} \quad Y_m \tag{3.1}$$

и

$$|f_m(x) - f_{m-1}(x)| < 2^{-m}, \quad x \in \operatorname{Cl} Y_{m-2}. \tag{3.2}$$

Покажем, что такая последовательность существует. Ввиду леммы 3.1 для любого m $(\geqslant 1)$ найдется такая определенная на $\operatorname{Cl} Y_m$ гладкая функция h_m, что $\bar\partial h_m = \mu$ на $\operatorname{Cl} Y_m$. Положим $f_2 = h_2$. Определив $f_2, \ldots, f_{m-1}$ для $m \geqslant 3$, мы должны построить f_m. Функции h_m и f_{m-1} обе являются гладкими на Y_{m-1} и $\bar\partial(h_m - f_{m-1}) = 0$ на Y_{m-1}. Поэтому существует такая голоморфная функция h на Y_m, что

$$|h_m(x) - f_{m-1}(x) - h(x)| < 2^{-m}, \quad x \in \operatorname{Cl} Y_{m-2}.$$

Положим $f_m = h_m - h$. Определим теперь ν. Если $z \in W$, то $z \in Y_m$ при достаточно большом m. Положим

$$\nu(z) = \lim_{k \to \infty} f_k(z).$$

Заметим, что

$$\nu(z) = f_{m+2}(z) + \sum_{k=m+2}^{\infty} (f_{k+1}(z) - f_k(z)). \tag{3.3}$$

Так как ввиду (3.2)

$$|f_{k+1}(z)-f_k(z)|<2^{-(k+1)},\ z\in Y_m\subset Y_{k-1},\quad k\geqslant m+1,$$

то сумма в (3.3) сходится равномерно в Y_m. Так как отдельные члены суммы голоморфны, то сумма также голоморфна. Поэтому ν является гладкой на Y_m и $\bar\partial\nu=\bar\partial f_{m+2}=\mu$ на Y_m.

Имеет место точная последовательность Г-модулей и Г-линейных отображений

$$0\to\mathcal{A}_r(\Delta)\xrightarrow{i}\mathscr{C}_r^\infty(\Delta)\xrightarrow{\bar\partial}\mathscr{C}_{r,1}^\infty(\Delta)\to 0. \tag{3.4}$$

Точность непосредственно вытекает из последней леммы и цепочки равенств $(\bar\partial(\gamma_r^*\mu)=\gamma_{r,1}^*(\bar\partial\mu))$. Соответствующая точная последовательность когомологий начинается с

$$0\to\mathcal{A}_r(\Delta,\Gamma)\to\mathscr{C}_r^\infty(\Delta,\Gamma)\to\mathscr{C}_{r,1}^\infty(\Delta,\Gamma)\xrightarrow{\delta_0^*}$$
$$\to H^1(\Gamma,\mathcal{A}_r(\Delta))\to H^1(\Gamma,\mathscr{C}_r^\infty(\Delta))\to\ldots. \tag{3.5}$$

Так как $H^1(\Gamma,\mathscr{C}_r^\infty(\Delta))=\{0\}$ ввиду теоремы 3.2 гл. V, то мы получаем такую теорему:

Теорема 3.4. *Пусть* Г—*клейнова группа, а* Δ *есть* Г-*инвариантное открытое подмножество ее области разрывности. Тогда для любого целого* r

$$H^1(\Gamma,\mathcal{A}_r(\Delta))\cong\frac{\mathscr{C}_{r,1}^\infty(\Delta,\Gamma)}{\bar\partial\mathscr{C}_r^\infty(\Delta,\Gamma)}.$$

Лемма 3.5. *Пусть* Г — *клейнова группа, а* Δ — *такое* Г-*инвариантное открытое подмножество ее области разрывности, что* Δ/Γ *является открытой римановой поверхностью. Пусть* $n\in\mathbf{Z}$. *Если* $\mu\in\mathscr{C}_{n,1}^\infty(\Delta,\Gamma)$, *то найдется такая функция* $\nu\in\mathscr{C}_n^\infty(\Delta,\Gamma)$, *что* $\bar\partial\nu=\mu$.

Доказательство. (Если Δ не содержит ни одной эллиптической точки группы Г, то эта лемма является частным случаем леммы 3.3.)

Мы утверждаем, что найдется такая функция $f\in\mathscr{C}_n^\infty(\Delta,\Gamma)$, что $\bar\partial f=\mu$ вблизи любой лежащей в Δ эллиптической неподвижной точки. Пусть $\{z_1,z_2,\ldots\}$ — максимальное множество неэквивалентных лежащих в Δ эллиптических неподвижных точек. Пусть γ_j — образующая группы Γ_{z_j}, $j=1,2,\ldots$. Построим такую функцию f_j, что

$$(\gamma_j)_n^* f_j=f_j \tag{3.6}$$

и

$$\bar{\partial} f_j = \mu \text{ вблизи } z_j. \tag{3.7}$$

Заметим, что можно предположить, что $z_j = 0$ и $\gamma_j(\zeta) = c\zeta$, $\zeta \in \mathbf{C}$ ($c^k = 1$ для некоторых $k \in \mathbf{Z}$). Действительно, если в этом частном случае f_0 является решением для μ_0, то для любого преобразования Мёбиуса A $A_n^* f_0$ является решением для $A_{n,1}^* \mu_0$. Чтобы проверить это, заметим, что если γ_0 порождает Γ_0, то $A^{-1}\gamma_0 A$ порождает $(A^{-1}\Gamma A)_{A^{-1}(0)}$. Кроме того,

$$(A^{-1}\gamma_0 A)_n^* (A_n^* f_0) = A_n^* f_0$$

и

$$\bar{\partial}(A_n f_0) = A_{n,1}^* \mu_0.$$

Решим теперь задачу в частном случае, когда $z_j = 0$, $\gamma_j(\zeta) = c\zeta$, $\zeta \in \mathbf{C}$. Так как задача локальна, то можно предположить, что μ имеет компактный носитель, лежащий в выделенной окрестности точки z_j (вспоминаем определение из § 8 гл. V). Положим (интегрирование по $\mathbf{C}$)

$$f_j(z) = \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}.$$

Ясно, что тогда f_j удовлетворяет (3.7). Чтобы проверить (3.6), вспомним, что $\mu(cz)\, c^n \bar{c} = \mu(z)$, $z \in \mathbf{C}$. Поэтому

$$\begin{aligned}
((\gamma_j)_n^* f_j)(z) &= f_j(cz) c^n = \frac{c^n}{2\pi i} \iint \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - cz} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\mu(c\zeta)}{c\zeta - cz} c^{n+1}\bar{c}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\mu(c\zeta)}{\zeta - z} c^n \bar{c}\, d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= \frac{1}{2\pi i} \iint \frac{\mu(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \wedge d\bar{\zeta} = \\
&= f_j(z).
\end{aligned}$$

Выберем теперь выделенную окрестность U_j точки z_j, $j = 1, 2, \ldots$. Пусть

$$U = \bigcup_j U_j.$$

Подберем такую гладкую функцию $\chi \in \mathscr{C}^\infty(\Delta, \Gamma)$, что $0 \leqslant \chi \leqslant 1$, $\chi = 1$ в окрестности точки z_j, $j = 1, 2, \ldots$ (поэтому $\chi = 1$ в окрестности точки γz_j, $\gamma \in \Gamma$), и что ее носитель лежит в ΓU. Тогда, если $z \in \Delta$, положим

$$f(z) = 0, \quad \text{если} \quad z \notin \Gamma U.$$

Если $z \in \Gamma U$, то найдется такое $\zeta \in U_j$ и такой элемент $\gamma \in \Gamma$, что $\gamma z = \zeta$. Положим

$$f(z) = f_j(\gamma z)\, \gamma'(z)^n\, \chi(z) = f_j(\zeta)\, \gamma'(z)^n\, \chi(z).$$

Заметим, что f корректно определена, так как если $\widetilde{\gamma}(z) = \zeta_1 \in U_k$ для некоторого $\widetilde{\gamma} \in \Gamma$ и некоторого положительного целого числа k, то $k = j$, $\zeta_1 = \gamma_j^m \zeta$ $(m \in \mathbf{Z})$ и $\widetilde{\gamma} = \gamma_j^m \cdot \gamma$. Поэтому

$$(\widetilde{\gamma}_m^* f_j)(z) = (\gamma_n^* \cdot (\gamma_j^m)_n^*)(f_j)(z) = (\gamma_n^* f_j)(z).$$

Ясно, что $f \in \mathscr{C}_n^\infty(\Delta, \Gamma)$ и $\overline{\partial} f = \mu$ вблизи любой лежащей в Δ эллиптической неподвижной точки.

Пусть $\mu_1 = \mu - \overline{\partial} f$. Тогда $\mu_1 \in \mathscr{C}_{n,1}^\infty(\Delta, \Gamma)$ и μ_1 обращается в нуль вблизи любой лежащей в Δ эллиптической неподвижной точки. Пусть $\pi\colon \Delta \to \Delta/\Gamma$ — естественная проекция. Определим на Δ/Γ $(n, 1)$-дифференциал $\widetilde{\mu}_1$ по формуле

$$\widetilde{\mu}_1(\pi z)\, \pi'(z)^n\, \overline{\pi'(z)} = \mu_1(z).$$

(Здесь мы отождествили дифференциал $\widetilde{\mu}_1$ с его коэффициентом в выделенной локальной координате на Δ/Γ.) Ясно, что $\widetilde{\mu}_1$ обращается в нуль вблизи точек ветвления пространства Δ/Γ. Ввиду леммы 3.3 на Δ/Γ существует такой n-дифференциал $\widetilde{\nu}_2$, что $\overline{\partial}\widetilde{\nu}_2 = \widetilde{\mu}_1$. Этот дифференциал голоморфен в точках ветвления и вблизи них на Δ/Γ. Положим $\widetilde{\nu}_1 = \widetilde{\nu}_2 - \varphi$, где φ — голоморфный дифференциал на Δ/Γ. Выберем (согласно лемме 2.2) такой дифференциал φ, что

$$\operatorname{ord}_{x_j} \widetilde{\nu}_1 \geqslant -[n(1 - 1/l_j)],$$

где $x_j = \pi(z_j)$ и $l_j = \operatorname{ord} \Gamma_{z_j}$.

Поднятие ν_1 дифференциала $\widetilde{\nu}_1$ на Δ в силу (8.10) гл. III принадлежит $\mathscr{C}_n^\infty(\Delta, \Gamma)$ и удовлетворяет равенству $\overline{\partial}\nu_1 = \mu_1$.

Положим теперь $\nu = \nu_1 + f$.

Комбинируя эту лемму с теоремой 3.4, получаем такой результат:

Теорема 3.6. *Пусть Γ — клейнова группа, а Δ есть Γ-инвариантное открытое подмножество ее области разрывности. Если Δ/Γ не имеет компактных компонент, то для любого $r \in \mathbf{Z}$*

$$H^1(\Gamma, \mathscr{A}_r(\Delta)) = \{0\}.$$

Следствие. *В предположениях теоремы любой класс когомологий $p \in H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$, $q \geqslant 1$, является классом когомологий Эйхлера некоторого интеграла $f \in \mathscr{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$.*

Покажем теперь, как вывести структурную теорему для $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ из результатов этого параграфа и результатов § 8 гл. V.

Предположим, что Δ — инвариантное объединение *компонент* клейновой группы Γ, причем Δ/Γ имеет конечный тип. Пусть $k = \dim \mathcal{A}_q(0)$, $q \geqslant 2$. Будем говорить, что $k+1$ дивизоров $\{d_1, \ldots, d_{k+1}\}$ *присвоены* $\mathcal{A}_q(0)$, если

$$0 = d_0 < d_1 < d_2 < \ldots < d_{k+1} \tag{3.8}$$

и если найдется такой базис $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_k\}$ пространства $\mathcal{A}_q(0)$, что

$$(\varphi_j) \geqslant \alpha^q + d_j \quad \text{и} \quad (\varphi_j) \not\geqslant \alpha^q + d \tag{3.9}$$

для всех таких дивизоров d, что

$$d_j < d < d_{j+1}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Выберем такие точки $x_j \in \overline{\Delta/\Gamma}$, что

$$d_j + x_j \leqslant d_{j+1} \tag{3.10}$$

для $j = 0, \ldots, k$.

Пусть E_j $(j = 1, \ldots, k)$ — строго параболический интеграл Эйхлера, полярный дивизор которого есть $\alpha^{1-q} - d_j - x_j$. Такой интеграл существует в силу теоремы 8.2 гл. V. Пусть $-d = d_k + x_k$, и пусть $\mathcal{E}^*_{1-q}(d)$ — пространство интегралов Эйхлера, линейно порожденное интегралами $E_1, \ldots, E_k$ и пространством $\mathcal{E}_{1-q}(0)$, а $P\mathcal{E}^*_{1-q}(d)$ — пространство, линейно порожденное интегралами $E_1, \ldots, E_k$ и пространством $P\mathcal{E}_{1-q}(0)$.

Заметим, что

$$\mathcal{E}_{1-q}(d) \supset \mathcal{E}^*_{1-q}(d) \quad \text{и} \quad P\mathcal{E}_{1-q}(d) \supset P\mathcal{E}^*_{1-q}(d).$$

Теорема 3.7. *Имеем (при указанных выше предположениях)*

$$H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \cong \mathcal{E}^*_{1-q}(d)$$

и

$$PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \cong P\mathcal{E}^*_{1-q}(d).$$

Доказательство. Если Δ/Γ не имеет компактных компонент, то пусть $\Delta_0 = \Delta$. Если $S = \Delta/\Gamma$ имеет компактные компоненты, то выберем по точке в каждой такой компоненте. Пусть S_0 есть S, проколотая в этих точках, а $\Delta_0 = \pi^{-1}(S_0)$, где $\pi: \Delta \to \Delta/\Gamma$ — естественная проекция. В любом случае $\overline{\Delta/\Gamma} = \overline{\Delta}/\Gamma$ является объединением конечного числа римановых поверхностей, а Δ_0/Γ — объединением конечного числа открытых поверхностей.

Изоморфизм из формулировки теоремы есть отображение периодов pd. Пусть $E \in \mathcal{E}^*_{1-q}(d)$. Предположим, что $\operatorname{pd} E = 0$. Без ограничения общности можно предположить, что E есть

мероморфная $(1-q)$-форма. Напишем

$$E=\sum_{i=0}^{k} c_i E_i, \tag{3.11}$$

где $c_i \in \mathbf{C}$, $c_0=1$, $E_0 \in \mathscr{E}_{1-q}(0)$. Пусть i — такое наибольшее целое число $\leqslant k$, что $c_i \neq 0$. Предположим, что $i>0$. Тогда $E\varphi_i$ является мероморфной 1-формой с полюсом порядка 1 в x_i (мы отождествляем $E\varphi_i$ с абелевым дифференциалом, который получается при проекции $E\varphi_i$ на $\overline{\Delta/\Gamma}$). Так как сумма вычетов 1-формы равна нулю, то мы заключаем, что $i=0$. Поэтому проекция интеграла E на $\overline{\Delta/\Gamma}$ голоморфна. Ввиду теоремы Римана — Роха или теоремы Гаусса — Бонне $E=0$. Поэтому pd — изоморфизм. Мы должны показать, что это линейное отображение сюръективно.

Пусть p — коцикл, представляющий класс когомологий из $H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$. Ввиду следствия из теоремы 3.6 найдется такой голоморфный на Δ_0 интеграл Эйхлера $\hat{E}_1$, что pd $\hat{E}_1=p$. В $\overline{\Delta}-\Delta_0$ имеется конечное число неэквивалентных точек. Интеграл Эйхлера $\hat{E}_1$ определяет главную часть в каждой из этих точек. Пусть $\mathscr{H}_1$ — эта конечная система главных частей, а l_1 — ассоциированный линейный функционал.

Пусть E_i^* — линейный функционал, ассоциированный с главной частью интеграла E_i, $i=1, \ldots, k$. Заметим, что

$$E_i^*(\varphi_j)=\varepsilon_i \delta_{ij} \text{ для } i=1, \ldots, k, \ j=1, \ldots, k,$$

причем $\varepsilon_i \neq 0$, $\varepsilon_i \in \mathbf{C}$. Поэтому $k \times k$-матрица

$$(E_i^*(\varphi_j)), \quad i, j=1, \ldots, k, \tag{3.12}$$

невырожденна, а $\{E_1^*, \ldots, E_k^*\}$ — линейно независимые линейные функционалы на $\mathscr{A}_q(0)$. В частности, можно выбрать такие константы b_j, $j=1, \ldots, k$, что

$$l_1=\sum_{j=1}^{k} b_j E_j^* \text{ на } \mathscr{A}_q(0).$$

Пусть $\mathscr{H}_2$ — конечная система главных частей интеграла $\hat{E}_2=\sum_{j=1}^{k} b_j E_j$ и $\mathscr{H}=\mathscr{H}_1-\mathscr{H}_2$. Линейный функционал l, ассоциированный с $\mathscr{H}$, равен нулю на $\mathscr{A}_q(0)$. Поэтому существует (следствие теоремы 8.2 гл. V) мероморфная $(1-q)$-форма $\hat{E}_3$, для которой $\mathscr{H}$ является полной системой главных частей. В частности, $\hat{E}_4=\hat{E}_1-\hat{E}_2-\hat{E}_3$ является голоморфным интегралом Эйхлера, и pd $(\hat{E}_2+\hat{E}_4)=$ pd $(\hat{E}_1-\hat{E}_3)=$ pd $\hat{E}_1$. Ясно, что $\hat{E}_1-\hat{E}_3=\hat{E}_2+\hat{E}_4 \in \mathscr{E}_{1-q}^*(d)$.

Так как для $E \in \mathscr{E}^*_{1-q}(d)$ включение $\mathrm{pd}\, E \in PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ справедливо тогда и только тогда, когда $E \in P\mathscr{E}^*_{1-q}(d)$, доказательство закончено.

Следствие 1. *Существуют такие дивизоры d, что при $q \geqslant 2$*

$$\mathrm{pd}\colon \mathscr{E}_{1-q}(d) \xrightarrow{\cong} H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$$

и

$$\mathrm{pd}\colon P\mathscr{E}_{1-q}(d) \xrightarrow{\cong} PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}).$$

Доказательство. Достаточно построить дивизоры $\{d_1, \ldots, d_{k+1}\}$, удовлетворяющие (3.8) и (3.9) и такие, что найдутся точки x_j $(j = 1, \ldots, k)$, для которых

$$d_j + x_j = d_{j+1}. \tag{3.10$'$}$$

Ясно, что такие дивизоры можно найти, так как с каждой компонентой пространства Δ/Γ можно работать отдельно.

Следствие 2. *Имеют место канонические изоморфизмы*

$$H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \cong \mathscr{A}_q(0)^* + \mathscr{E}_{1-q}(0)$$

и

$$PH^1_\Delta(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \cong \mathscr{A}_q(0)^* + P\mathscr{E}_{1-q}(0).$$

(Как обычно, $(\,-\,)^*$ обозначает двойственное к $(\,-\,)$ пространство.)

Это следствие есть (по существу) теорема 5.1 (или следствие теоремы 7.3) гл. V.

Приведем теперь еще несколько приложений результатов этого параграфа.

Лемма 3.8. *Пусть Γ — клейнова группа, а Δ — инвариантное объединение компонент ее области разрывности. Если Δ/Γ компактно (т. е. является объединением конечного числа компактных поверхностей), то для любого $r \in \mathbf{Z}$*

$$\left(\frac{\mathscr{C}^\infty_{r,1}(\Delta, \Gamma)}{\bar\partial \mathscr{C}^\infty_r(\Delta, \Gamma)}\right)^* \cong \mathscr{A}_{1-r}(\Delta, \Gamma) = \mathscr{A}_{1-r}(0),$$

где $(\,-\,)^*$ обозначает пространство непрерывных (в $\mathscr{L}^1$-норме) линейных функционалов на $(\,-\,)$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathscr{A}_{1-r}(0)$. Положим

$$l(\mu) = \iint\limits_{\Delta/\Gamma} \varphi\mu\, dz \wedge d\bar z, \quad \mu \in \mathscr{C}^\infty_{r,1}(\Delta, \Gamma). \tag{3.13}$$

Ясно, что l — корректно определенный линейный функционал на $\mathscr{C}^\infty_{r,1}(\Delta, \Gamma)$. Кроме того, если $\mu = \bar\partial\nu$, где $\nu \in \mathscr{C}^\infty_r(\Delta, \Gamma)$, то для

«стандартной» фундаментальной области ω группы Γ в Δ

$$l(\mu) = -\iint_{\omega} \bar{\partial}(\varphi\nu\, dz) = -\int_{\partial\omega} \varphi\nu\, dz = 0.$$

Далее, если $l = 0$, то

$$\operatorname{Re} l(\mu) = \iint_{\omega} \operatorname{Re}(-2i\varphi)\, \mu \frac{dz \wedge d\bar{z}}{-2i} = 0$$

для всех μ, которые вещественны на ω. Если $\operatorname{Re}(-2i\varphi)$ не равна нулю во внутренней точке z области ω (поэтому z не является эллиптической неподвижной точкой), то $\operatorname{Re}(-2i\varphi)$ имеет тот же самый знак в окрестности U точки z. Так как мы можем построить такую функцию $\mu \in \mathscr{C}^{\infty}_{r,1}(\Delta, \Gamma)$, что μ имеет носитель, лежащий в $U \cap \omega$, $\mu \geqslant 0$ на $U \cap \omega$ и $\mu(z) > 0$, то мы заключаем, что φ обращается в нуль на внутренности области ω, и, следовательно, $\varphi = 0$.

Наконец, пусть l — непрерывный (относительно $\mathscr{L}^1$-нормы) линейный функционал на $\mathscr{C}^{\infty}_{r,1}(\Delta, \Gamma)$, который обращается в нуль на $\bar{\partial}\mathscr{C}^{\infty}_{r}(\Delta, \Gamma)$. Тогда l однозначно продолжается до непрерывного линейного функционала на $\mathscr{L}^1(\omega)$. Поэтому найдется ровно одна такая функция $\varphi \in \mathscr{L}^{\infty}(\omega)$, что (3.13) выполняется для $\Delta/\Gamma = \omega$. Продолжим φ до однозначно определяемой измеримой автоморфной формы веса $-2(1-r)$. Тогда (3.13) выполняется для произвольной фундаментальной области. Кроме того, φ есть единственная «ограниченная» измеримая автоморфная форма с этим свойством. Пусть z — внутренняя точка некоторой фундаментальной области. Тогда из леммы Вейля и того, что l равен нулю на $\bar{\partial}\mathscr{C}^{\infty}_{r}(\Delta, \Gamma)$, вытекает, что φ голоморфна в окрестности точки z. Заметим, что любая точка в Δ, кроме точек некоторого дискретного множество $\mathscr{S}$, может быть превращена во внутреннюю точку некоторой фундаментальной области ω для Γ в Δ. Так как φ ограничена в окрестности любой точки пространства Δ, то точки множества $\mathscr{S}$ являются устранимыми особенностями формы φ. Поэтому $\varphi \in \mathscr{A}_{1-r}(0)$

Теорема 3.9 (двойственность Серра). *Пусть Δ — такое инвариантное объединение компонент клейновой группы Γ, что Δ/Γ компактно. Тогда для любого $r \in \mathbf{Z}$*

$$H^1(\Gamma, \mathscr{A}_r(\Delta)) \cong \mathscr{A}_{1-r}(\Delta, \Gamma).$$

Доказательство. Комбинируем предыдущую лемму с теоремой 3.4.

Следствие. *Для $r \geqslant 2$ имеем*

$$H^1(\Gamma, \mathscr{A}_r(\Delta)) = \{0\}.$$

Замечание. Предположим, что Δ — односвязная инвариантная компонента клейновой группы Γ и Δ/Γ компактно. При $q \geqslant 1$ следующая последовательность Γ-модулей является точной:

$$0 \to \Pi_{2q-2} \xrightarrow{i} \mathcal{A}_{1-q}(\Delta) \xrightarrow{\partial^{2q-1}} \mathcal{A}_q(\Delta) \to 0. \tag{3.14}$$

Соответствующая длинная последовательность когомологий начинается с

$$\begin{aligned} 0 \to \Pi_{2q-2}(\Gamma) \to \mathcal{A}_{1-q}(\Delta, \Gamma) \to \mathcal{A}_q(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \to \\ \to H^1(\Gamma, \mathcal{A}_{1-q}(\Delta)) \to H^1(\Gamma, \mathcal{A}_q(\Delta)) \to \ldots . \end{aligned} \tag{3.15}$$

Поэтому при $q \geqslant 2$ эта последовательность редуцируется (с точностью до изоморфизма) к последовательности

$$0 \to \mathcal{A}_q(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \to \mathcal{A}_q(\Delta, \Gamma) \to 0.$$

При $q = 1$ соответствующая последовательность будет получена путем рассмотрения некоторых гомоморфизмов в точной последовательности (3.15).

Для $q = 1$ перепишем (3.15):

$$\begin{aligned} 0 \to \mathbf{C} \to \mathbf{C} \xrightarrow{\partial_0^*} \mathcal{A}_1(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \mathbf{C}) \xrightarrow{i_1^*} H^1(\Gamma, \mathcal{A}_0(\Delta)) \to \\ \xrightarrow{\partial_1^*} H^1(\Gamma, \mathcal{A}_1(\Delta)) \to \ldots . \end{aligned}$$

Ясно, что образ отображения ∂_0^* равен $\{0\}$ Поэтому, чтобы получить точную последовательность

$$0 \to \mathcal{A}_1(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \mathbf{C}) \to \mathcal{A}_1(\Delta, \Gamma) \to 0,$$

достаточно показать, что образ отображения ∂_1^* равен $\{0\}$. Это вытекает из следующих фактов. Мы уже доказали (лемма 2.2 гл. VI), что $\dim H^1(\Gamma, \mathbf{C})$ четна. Так как $\varepsilon = \dim$ (образ ∂_1^*) $< \dim \mathcal{A}_0(\Delta, \Gamma) = 1$ и

$$2g - \dim H^1(\Gamma, \mathbf{C}) + \varepsilon = 0,$$

где $g = \dim \mathcal{A}_1(\Delta, \Gamma)$ (= род поверхности Δ/Γ), то мы получаем, что $\varepsilon = 0$.

Следствие из приводимой ниже леммы является интересным приложением приведенного выше утверждения.

Лемма 3.10. *Пусть Γ — клейнова группа с односвязной инвариантной компонентой Δ. Тогда следующая диаграмма коммутативна*:

$$\begin{array}{ccc} H^1(\Gamma, \mathcal{A}_0(\Delta)) & \xrightarrow{\partial_1^*} & H^1(\Gamma, \mathcal{A}_1(\Delta)) \\ \varphi_1 \uparrow \wr & & \varphi_2 \uparrow \wr \\ \dfrac{\mathscr{C}^\infty_{0,1}(\Delta, \Gamma)}{\bar\partial \mathscr{C}^\infty_0(\Delta, \Gamma)} & \xrightarrow{\partial^*} & \dfrac{\mathscr{C}^\infty_{1,1}(\Delta, \Gamma)}{\bar\partial \mathscr{C}^\infty_1(\Delta, \Gamma)} \end{array}$$

где отображение ∂_1^* есть индуцированное отображение из точной последовательности (3.15), *∂^* — отображение, индуцированное дифференцированием ∂ по z, а вертикальные отображения есть изоморфизмы из теоремы* 3.4.

(Эта лемма бессодержательна для открытых Δ/Γ, так как в этом случае все группы являются нулевыми.)

Доказательство. Вначале мы должны описать вертикальные изоморфизмы, т. е. отображение δ_0^* из (3.5). Это отображение совсем просто описать. Пусть $\mu \in \mathscr{C}_{0,1}^{\infty}(\Delta, \Gamma)$. Выберем такую гладкую функцию F, что $\bar{\partial} F = \mu$. Тогда $\varphi_1(\mu)$ является периодом функции F, т. е.

$$\varphi_1(\mu)_\gamma = \gamma_0^* F - F, \quad \gamma \in \Gamma.$$

Тогда

$$\partial_1^* \varphi_1(\mu)_\gamma = \partial(\varphi_1(\mu)_\gamma) = \varphi_2(\partial\mu)_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma,$$

так как

$$\gamma_1^*(\partial F) - \partial F = \varphi_2(\partial\mu)_\gamma, \quad \gamma \in \Gamma,$$

и

$$\bar{\partial}\partial F = \partial\bar{\partial} F = \partial_\mu.$$

Следствие. *В предложениях леммы $\partial^* = 0$. Следовательно, для любой функции $\mu \in \mathscr{C}_{0,1}^{\infty}(\Delta, \Gamma)$ найдется такая функция $\nu \in \mathscr{C}_1^{\infty}(\Delta, \Gamma)$, что*

$$\partial\mu = \bar{\partial}\nu.$$

Теорема 3.11. *Пусть Δ — такая односвязная инвариантная компонента клейновой группы Γ, что Δ/Γ есть открытая риманова поверхность. Тогда*

$$H^1(\Gamma, \mathbf{Z}) \cong \frac{\mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)^{-1}}{\exp \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)}, \tag{3.16}$$

где $\mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)^{-1} = \{f \in \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma);\ f(z) \neq 0$ для всех $z \in \Delta\}$ и $\exp \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma) = \{e^{2\pi i f};\ f \in \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)\}$.

Доказательство. Начнем с точной последовательности Γ-модулей (см. лемму 5.6)

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{i} \mathscr{A}_0(\Delta) \xrightarrow{\exp} \mathscr{A}_0(\Delta)^{-1} \to 1.$$

Соответствующая длинная точная последовательность когомологий начинается с

$$0 \to \mathbf{Z} \to \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma) \xrightarrow{\exp} \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)^{-1} \to$$
$$\to H^1(\Gamma, \mathbf{Z}) \to H^1(\Gamma, \mathscr{A}_0(\Delta)) \to \dots .$$

Так как, согласно теореме 3.6, $H^1(\Gamma, \mathcal{A}_0(\Delta)) = \{0\}$, то отсюда легко следует (3.16).

Высшие группы когомологий

Совершенно ясно, что (3.4) является тонкой резольвентой Г-модуля $\mathcal{A}_r(\Delta)$. Поэтому мы имеем

Теорема 3.12. *Пусть* Δ — *инвариантное объединение компонент клейновой группы* Г. *Тогда*

$$H^n(\Gamma, \mathcal{A}_r(\Delta)) = \{0\}, \quad r \in \mathbf{Z}, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad n \geqslant 2.$$

Для групп с односвязными инвариантными компонентами мы получаем больше.

Теорема 3.13. *Пусть* Г — *клейнова группа с односвязной инвариантной компонентой* Δ. *Тогда*

$$H^n(\Gamma, \Pi_{2q-2}) = \{0\}, \quad q \in \mathbf{Z}, \quad q \geqslant 2, \quad n \in \mathbf{Z}, \quad n \geqslant 2, \tag{3.17}$$

$$H^2(\Gamma, \mathbf{C}) = \{0\}, \quad \textit{если} \quad \Delta/\Gamma \textit{ открыта}, \tag{3.18}$$

и

$$H^2(\Gamma, \mathbf{C}) \cong \mathbf{C}, \quad \textit{если} \quad \Delta/\Gamma \textit{ замкнута}. \tag{3.19}$$

Доказательство. Начнем с точной последовательности (3.14). Индуцированная последовательность когомологий содержит члены

$$\ldots \to H^1(\Gamma, \mathcal{A}_q(\Delta)) \to H^2(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \to H^2(\Gamma, \mathcal{A}_{1-q}(\Delta)) \ldots.$$

Поэтому (3.17) легко вытекает из того, что $H^2(\Gamma, \mathcal{A}_{1-q}(\Delta)) = \{0\} = H^1(\Gamma, \mathcal{A}_q(\Delta))$. Второе равенство выполняется как для компактных, так и для некомпактных Δ/Γ. Аналогично выполняется (3.18). Чтобы доказать (3.19), заметим, что

$$H^2(\Gamma, \mathbf{C}) \cong \mathcal{A}_0(\Delta, \Gamma)/\partial_1^* H^1(\Gamma, \mathcal{A}_0(\Delta)) \cong \mathbf{C}.$$

§ 4. Теорема Берса об аппроксимации является почти точной

Пусть Г — клейнова группа с областью разрывности Ω, а Δ есть открытое Г-инвариантное подмножество области Ω. Рассмотрим метрику Пуанкаре λ_Δ множества Δ и соответствующие пространства ограниченных автоморфных форм и ограниченных интегралов Эйхлера. Заметим, что, вообще говоря, неверно, что

$$\lambda_\Omega | \Delta = \lambda_\Delta.$$

Однако, так как $\Delta \subset \Omega$, то

$$\lambda_\Omega \leqslant \lambda_\Delta \text{ на } \Delta.$$

Поэтому отображения ограничения

$$\mathcal{A}_q^p(\Omega, \Gamma) \to \mathcal{A}_q^p(\Delta, \Gamma), \quad qp \geqslant 2, \tag{4.1}$$

и

$$\mathcal{E}_{1-q}^b(\Omega, \Gamma) \to \mathcal{E}_{1-q}^b(\Delta, \Gamma), \quad q \geqslant 1, \tag{4.2}$$

непрерывны (на пространстве интегралов Эйхлера определяется соответствующая топология).

Предостережение. В этой главе интеграл Эйхлера на Ω будет называться *ограниченным*, если $\partial^{2q-1}F \in \mathcal{A}_q^\infty(\Omega, \Gamma)$. Это есть некоторое видоизменение определения, использовавшегося в гл V. Проверим (4.1). Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_q^p(\Omega, \Gamma)$, $1 \leqslant p < \infty$. Тогда в естественных обозначениях

$$\|\varphi\|_\Delta^p = \iint\limits_{\Delta/\Gamma} \lambda_\Delta(z)^{2-qp} |\varphi(z)^p \, dz \wedge d\bar{z}| \leqslant$$

$$\leqslant \iint\limits_{\Omega/\Gamma} \lambda_\Omega(z)^{2-qp} |\varphi(z)^p \, dz \wedge d\bar{z}| = \|\varphi\|_\Omega^p.$$

Утверждение (4.2) проверяется аналогично.

Имеют также место очевидные отображения

$$\alpha\colon \mathcal{E}_{1-q}^b(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}),$$

$$\beta^*\colon \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}).$$

Эти отображения не являются сюръективными. Мы интересуемся тем, когда они инъективны и каковы их ядра.

Выберем $2q - 1$ $(q \geqslant 2)$ различных точек $a_1, \ldots, a_{2q-1}$ в Λ, предельном множестве группы Γ. Для $z \in \mathbf{C}$, $z \neq a_j$, $\zeta \in \Omega$ положим

$$\varphi(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i} \frac{(z-a_1) \ldots (z-a_{2q-1})}{(\zeta-z)(\zeta-a_1) \ldots (\zeta-a_{2q-1})}$$

и

$$f(z, \zeta) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \varphi(z, \gamma\zeta) \gamma'(\zeta)^q.$$

Напомним, что для $z \in \Lambda - \{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}$ $f(z, \cdot) \in \mathcal{A}_q^1(\Omega, \Gamma)$.

Переформулируем следствие леммы 2.5 гл. V в таком виде:

Теорема 4.1. *Пусть* $q \geqslant 2$, *а* $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(\Delta, \Gamma)$. *Тогда* $\beta^*(\varphi) = 0$ *в том и только том случае, когда*

$$(f(z, \cdot), \varphi)_{q, \Gamma, \Delta} = 0$$

для всех $z \in \Lambda - \{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}$.

Следствие. *Отображение*

$$\beta^*\colon \mathcal{A}_2^\infty(\Delta, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_2)$$

инъективно, если Λ *является множеством единственности для* Δ.

Доказательство. Это непосредственно вытекает из только что сформулированной теоремы и теоремы 1.1 гл. IV.

В оставшейся части этого параграфа Γ есть (неэлементарная) фуксова группа, действующая на верхней полуплоскости U ($\Delta = U$). Мы по-прежнему обозначаем область разрывности и предельное множество соответственно через Ω и Λ.

Теорема 4.2. *При* $q \geqslant 2$ *следующая диаграмма коммутативна* (L — *нижняя полуплоскость*):

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A}_q^\infty(U, \Gamma) & \xrightarrow{\beta^*} & H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2}) \\ \downarrow J & & \uparrow \alpha \\ \mathcal{A}_q^\infty(L, \Gamma) & \xrightarrow{(\partial^{2q-1})} & \mathcal{C}_{1-q}^b(L, \Gamma) \end{array}$$

где $J\varphi(z) = c_q\overline{\varphi(\bar{z})}$, $z \in L$, (∂^{2q-1}) *обозначает дифференцирование, повторенное* $2q-1$ *раз, и* $c_q = (2q-2)!$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathcal{A}_q^\infty(U, \Gamma)$. Для $z \in \mathbf{C}$ рассмотрим

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i}\iint\limits_U \frac{(z-a_1)\ldots(z-a_{2q-1})}{(\zeta-z)(\zeta-a_1)\ldots(\zeta-a_{2q-1})}\lambda_U(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}\,d\zeta\wedge d\bar{\zeta}.$$

Пусть $\psi(z) = (\partial^{2q-1}F)(z)$, $z \in L$. Тогда в § 6 гл. V мы видели, что

$$\psi(z) = \frac{(2q-1)!}{2\pi i}\iint\limits_U \frac{\lambda_U(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\zeta)}}{(\zeta-z)^{2q}}\,d\zeta\wedge d\bar{\zeta}. \tag{4.3}$$

Ясно, что $\beta^*(\varphi) = \alpha(F|L)$. Поэтому достаточно показать, что $\psi(z) = c_q\overline{\varphi(\bar{z})}$, $z \in L$. Вспомним формулу воспроизведения (3.5) гл. III. Изменяя в (4.3) переменные, получим, что

$$\psi(z) = -\frac{(2q-1)!}{2\pi i}\iint\limits_L \frac{\lambda_U(\bar{\zeta})^{2-2q}\overline{\varphi(\bar{\zeta})}}{(\bar{\zeta}-z)^{2q}}\,d\zeta\wedge d\bar{\zeta} =$$

$$= -\frac{(2q-1)!}{2\pi i}\iint\limits_L \frac{\lambda_L(\zeta)^{2-2q}\overline{\varphi(\bar{\zeta})}}{(z-\bar{\zeta})^{2q}}\,d\zeta\wedge d\bar{\zeta}.$$

Вспоминая, что ядро Бергмана для нижней полуплоскости есть

$$k_L(z, \zeta) = \frac{1}{\pi(z-\bar{\zeta})^2},$$

мы видим, что

$$\frac{1}{(z-\bar{\zeta})^{2q}} = \pi^q k_L(z, \zeta)^q = \frac{2\pi}{i(2q-1)} K_L(z, \zeta).$$

Поэтому

$$\psi(z) = (2q-2)!\,\overline{\varphi(\bar{z})}.$$

Следствие 1. *Если* Γ — *фуксова группа первого рода, то при* $q \geqslant 2$ *отображения*

$$\alpha\colon \mathscr{E}^b_{1-q}(U, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$$

и

$$\beta^*\colon \mathscr{A}^\infty_q(U, \Gamma) \to H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$$

инъективны.

Доказательство. Только инъективность нуждается в проверке. Этот факт можно проверить так же, как и в доказательстве следствия 2 теоремы 6.2 гл. V.

Следствие 2. *Если* Γ — *второго рода, то для* $\psi \in \mathscr{A}^\infty_q(U, \Gamma)$, $q \geqslant 2$, *следующие утверждения эквивалентны*:

(1) $\beta^*(\psi) = 0$,

(2) $\alpha(F) = 0$, *где* $\partial^{2q-1}F = \psi$,

(3) $(f(z, \cdot), \psi)_{q, \Gamma, U} = 0$ *для всех* $z \in \Lambda - \{a_1, \ldots, a_{2q-1}\}$.

Следствие 3. *В следствии 2 при* $q = 2$ *приведенным выше трем условиям эквивалентно такое*:

(4) $(\varphi, \psi)_{q, \Gamma, U} = 0$ *для всех* $\varphi \in \mathscr{A}^1_2(U, \Gamma)$, *которые непрерывны и вещественны на* $\mathbf{R} - \Lambda$.

Доказательство. Предположим, что выполняется условие (4). Пусть $\varphi = \Theta_2 r$, где $r \in \mathscr{A}^1_2(\Omega)$. Тогда

$$\varphi = \varphi_1 + i\varphi_2,$$

где φ_1 и φ_2 непрерывны и вещественны на $\mathbf{R} - \Lambda$. Поэтому $(\varphi, \psi)_{2, \Gamma, U} = 0$ и выполняется условие (3).

Предположим теперь, что верно (1). Ввиду теоремы 4.1 и теоремы 1.1 гл. IV

$$(\varphi, \psi)_{2, \Gamma, \Omega} = 0$$

для всех $\varphi \in \mathscr{A}^1_2(\Omega, \Gamma)$, где мы полагаем ψ равным нулю вне U. В частности, это равенство верно для $\varphi \in \mathscr{A}^1_2(U, \Gamma)$, которые непрерывны и вещественны на $\mathbf{R} - \Lambda$ (так как такие φ очевидным образом продолжаются до элементов из $\mathscr{A}^1_2(\Omega, \Gamma)$).

Теперь нам легко дать

Доказательство теоремы 2.4 гл. IV. Выберем две различные точки a и $b \in \Lambda_0$, являющиеся неподвижными точками эллиптических элементов группы G. Легко проверить, что любая функция $\varphi \in \mathcal{A}_2(\Lambda)$, $\Lambda = \Lambda_0 \cup \Lambda_1$, является линейной комбинацией функций вида

$$g(\zeta) = \frac{1}{(\zeta - z)(\zeta - a)(\zeta - b)}, \quad z \in \Lambda - \{a, b\}.$$

К тому же при $z \notin U$ любая функция указанного вида лежит в $\mathcal{A}_2^1(U)$. Поэтому мы должны найти такую измеримую функцию μ на U, что функция

$$h(z) = \frac{(z-a)(z-b)}{2\pi i} \iint\limits_U \frac{\mu(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z)(z - b)} d\zeta \wedge d\bar{\zeta}$$

обращается в нуль на Λ, но не на всей нижней полуплоскости. Рассмотрим функцию μ вида $\mu = \lambda_U^{-2}\bar{\varphi}$, где $\varphi \in \mathcal{A}_2^\infty(U, \Gamma)$ и $\mu \in$ (ядро β^*). Для такой функции μ имеем

$$h(g(\zeta))\, g'(\zeta)^{-1} - h(\zeta) = 0, \quad \zeta \in \Lambda. \tag{4.4}$$

Если ζ — неподвижная точка гиперболического или эллиптического элемента, то $g'(\zeta) \neq 1$, и мы из (4.4) заключаем, что $h(\zeta) = 0$. Так как такие точки плотны в Λ, то $h \mid \Lambda = 0$.

Мы уже видели, что $\partial^3 (h \mid L)(z) = 2\overline{\varphi(\bar{z})}$, $z \in L$. Поэтому мы должны показать, что найдется $\varphi \neq 0$, для которого $\lambda^{-2}\bar{\varphi} \in$ (ядро β^*). Это очевидно, так как $\dim \mathcal{A}_2^\infty(U, G) = \infty$ и $\dim H^1(G, \Pi_2) < \infty$. То, что $\dim \mathcal{A}_2^\infty(U, G) = \infty$, вытекает из следующего факта. Пусть $\pi\colon \Omega \to \Omega/G$ — естественная проекция. Пусть φ — квадратичный дифференциал с простым полюсом в $\pi(z) \in \Omega/G$, где $z \in L$. Тогда φ поднимается до элемента пространства $\mathcal{A}_2^\infty(U, G)$.

Мы закончим этот параграф таким результатом:

Теорема 4.3. *Если Γ — конечно порожденная фуксова группа второго рода, то при $q \geqslant 2$*

$$\alpha\colon \mathcal{E}_{1-q}^b(U, \Gamma) \to PH_\Omega^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$$

и

$$\beta^*\colon \mathcal{A}_q^\infty(U, \Gamma) \to PH_\Omega^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$$

являются сюръективными отображениями.

Доказательство. Достаточно показать, что α сюръективно. Но любой класс $p \in PH_\Omega^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ задается посредством $\alpha(F)$, где $F \in \mathcal{E}_{1-q}^m(\Omega, \Gamma)$ и F регулярен всюду, кроме одной точки $z \in L$. Ясно, что $\partial^{2q-1}F \in \mathcal{A}_q^\infty(U, \Gamma)$.

§ 5. Теоремы об изоморфизме для колец голоморфных функций

Пусть X — риманова поверхность. Мы обозначили соответственно через $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{K}(X)$ кольцо голоморфных и поле мероморфных функций на X. Как $\mathcal{A}(X)$, так и $\mathcal{K}(X)$ являются $\mathbf{C}$-алгебрами, и если X открыта, то $\mathcal{K}(X)$ является (ввиду следствия теоремы 2.8) полем частных кольца $\mathcal{A}(X)$. Классический и легко доказываемый результат состоит в том, что $\mathcal{K}(X)$ для компактной поверхности X является полем алгебраических функций от одного переменного, т. е. алгебраическим расширением трансцендентного расширения поля $\mathbf{C}$ (см. следствие теоремы 5.11). Для компактных X, конечно, $\mathcal{A}(X) = \mathbf{C}$.

Любое нетривиальное голоморфное отображение

$$F\colon X \to Y$$

между двумя римановыми поверхностями индуцирует $\mathbf{C}$-мономорфизм

$$F^*\colon \mathcal{K}(Y) \to \mathcal{K}(X) \tag{5.1}$$

полей мероморфных функций на них, определяемый следующим образом:

$$(F^*f)(x) = f(F(x)), \quad f \in \mathcal{K}(Y), \quad x \in X, \tag{5.2}$$

т. е.

$$F^*f = f \circ F, \quad f \in \mathcal{K}(Y). \tag{5.2$'$}$$

Ясно, что

$$F^*\colon \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(X). \tag{5.3}$$

Цель этого параграфа состоит в том, чтобы показать, что эти гомоморфизмы (т. е. гомоморфизмы, определяемые посредством (5.2)) являются единственными нетривиальными морфизмами между кольцами голоморфных и полями мероморфных функций на римановых поверхностях.

Любой функции $f \in \mathcal{K}(X)$, $f \neq 0$, сопоставим *дивизор*

$$(f) = \sum_{p \in X} (\operatorname{ord}_p f)\, p$$

и заметим, что носитель дивизора (f) дискретен, но не обязательно конечен (если X некомпактна). Ясно, что для $f \in \mathcal{K}(X)$ имеем

$$f \in \mathcal{A}(X) \Leftrightarrow f \geqslant 0$$

при естественном упорядочении на дивизорах. Аналогично, для f_1 и f_2 из $\mathcal{K}(X)$

$$f_1/f_2 \in \mathcal{A}(X) \Leftrightarrow (f_1) \geqslant (f_2).$$

В частности, ненулевой элемент $f \in \mathcal{A}(X)$ является единицей (в $\mathcal{A}(X)$) тогда и только тогда, когда $(f) = 0$, т. е. когда его дивизор является пустым. Нам нужны некоторые факты о структуре идеалов кольца $\mathcal{A}(X)$.

Если $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}(X)$, то под *наибольшим общим делителем* (н. о. д.) функций из $\mathcal{S}$ мы подразумеваем такую функцию $d \in \mathcal{A}(X)$, что

$$(d) \leqslant (f) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{S},$$

и если $e \in \mathcal{A}(X)$ удовлетворяет неравенству

$$(e) \leqslant (f) \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{S},$$

то

$$(e) \leqslant (d). \tag{5.4}$$

Из определения немедленно вытекает, что наибольший общий делитель существует для любого непустого множества $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}(X)$ (надо просто взять такую функцию $d \in \mathcal{A}(X)$, что

$$(d) = \sum_{p \in X} (\min \{\operatorname{ord}_p f;\ f \in \mathcal{S}\})_p) \tag{5.5}$$

и что он единствен с точностью до единиц (если d_1 и d_2 — наибольшие общие делители для множества $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}(X)$, то $(d_1) = (d_2)$ ввиду (5.4) и поэтому $d_1/d_2 \in \mathcal{A}(X)$ и $d_2/d_1 \in \mathcal{A}(X)$).

Предложение 5.1. *Пусть $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$, и пусть $\{f_1, \ldots, f_n\} \subset \mathcal{A}(X)$, где X — открытая риманова поверхность. Пусть d есть* н. о. д. *множества $\{f_1, \ldots, f_n\}$. Тогда найдутся такие функции $e_j \in \mathcal{A}(X)$, $j = 1, \ldots, n$, что*

$$d = \sum_{j=1}^{n} e_j f_j.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда $n = 2$ и $d = 1$, т. е. когда f_1 и f_2 не имеют общих нулей. Согласно теореме 2.9, можно найти функцию $e_2 \in \mathcal{A}(X)$, у которой разложение в любом нуле p функции f_1 совпадает с разложением функции f_2^{-1} в p (относительно некоторой локальной координаты z, обращающейся в нуль в p) на первых $\operatorname{ord}_p f_1$ членах. Поэтому

$$(1 - e_2 f_2) \geqslant (f_1)$$

и, следовательно,

$$e_1 = \frac{1 - e_2 f_2}{f_1} \in \mathcal{A}(X).$$

Ясно, что в этом случае

$$1 = e_1 f_1 + e_2 f_2.$$

Далее, для $n = 2$ и произвольного d рассмотрим функции f_1/d и $f_2/d \in \mathcal{A}(X)$. Так как в предыдущем случае предложение доказано, то найдутся такие функции e_1 и $e_2 \in \mathcal{A}(X)$, что

$$1 = e_1 f_1/d + e_2 f_2/d.$$

Умножая на d, получаем требуемое утверждение.

Наконец, проведем индукцию для $n > 2$. Рассмотрим н. о. д. d_1 функций $f_1, \ldots, f_{n-1}$ и напишем

$$d_1 = \sum_{j=1}^{n-1} \tilde{e}_j f_j, \text{ где } \tilde{e}_j \in \mathcal{A}(X), \ j = 1, \ldots, n-1.$$

В силу (5.5) ясно что d является н.о.д. для d_1 и f_n. Поэтому

$$d = e_1 d_1 + e_n f_n, \quad \text{где} \quad e_1, e_n \in \mathcal{A}(X).$$

Положим $e_j = e\tilde{e}_j$, $j = 1, \ldots, n-1$.

Предложение 5.2. *Пусть M — идеал в $\mathcal{A}(X)$, где X — открытая риманова поверхность. Для M следующие условия эквивалентны:*

(a) *имеется ровно одна такая точка $x \in X$, что*

$$M = M(x) = \{f \in \mathcal{A}(X); \ f(x) = 0\},$$

(b) *имеется такой гомоморфизм* $\mathbf{C}$*-алгебр*

$$\varphi\colon \mathcal{A}(X) \to \mathbf{C},$$

что (*ядро* φ) $= M$,

и

(c) *M — главный и максимальный идеал.*

Доказательство. Покажем, что (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a).

(a) $\Rightarrow$ (b). Положим $\varphi(f) = f(x)$, $f \in \mathcal{A}(X)$.

(b) $\Rightarrow$ (c). Так как φ — гомоморфизм $\mathbf{C}$-алгебр, то $\varphi(1) = 1$. Поэтому φ сюръективен и

$$\mathcal{A}(X)/M \cong \mathbf{C}.$$

Так как $\mathbf{C}$ — поле, то M — максимальный идеал. Далее, заметим, что для любой точки $x \in X$ найдется такая функция $f_x \in \mathcal{A}(X)$, что

$$(f_x) = x.$$

Поэтому для заданных $x, y \in X$, $x \neq y$, найдутся такие функции e_x и $e_y \in \mathcal{A}(X)$, что

$$1 = e_x f_x + e_y f_y. \tag{5.6}$$

Из утверждения (5.6) вытекает, что имеется не более одной такой точки $x \in X$, что $\varphi(f_x) = 0$. Действительно, если $\varphi(f_x) = 0 =$

$= \varphi(f_y)$, где $x \neq y$, то мы имеем очевидное противоречие:

$$1 = \varphi(1) = \varphi(e_x)\,\varphi(f_x) + \varphi(e_y)\,\varphi(f_y) = 0.$$

Предположим теперь, что есть такая точка $x \in X$, что $\varphi(f_x) = 0$. Тогда

$$(\text{ядро } \varphi) = f_x \mathcal{A}(X) = M(x). \tag{5.7}$$

Действительно, если $f \in M(x)$, то $f/f_x \in \mathcal{A}(X)$ и

$$\varphi(f) = \varphi(f_x)\,\varphi(f/f_x) = 0.$$

Обратно, если $f \notin M(x)$, то $\operatorname{ord}_x f = 0$. Поэтому найдутся такие функции e_1 и $e_2 \in \mathcal{A}(X)$, что

$$1 = e_1 f + e_2 f_x.$$

Опять, если $f \in (\text{ядро } \varphi)$, то $\varphi(1) = 0$. Поэтому мы проверили (5.7). Остается показать, что точка x существует. Предположим, что $\varphi(f_x) \neq 0$ для всех $x \in X$. Если $f \in \mathcal{A}(X)$ — единица, то

$$1 = \varphi(1) = \varphi(f)\,\varphi(f^{-1}).$$

Поэтому $\varphi(f) \neq 0$. Если $f \in \mathcal{A}(X)$ и

$$(f) = \sum_{j=1}^{n} \nu_j x_j, \quad n \in \mathbf{Z},\ 0 < n < \infty, \tag{5.8}$$

то

$$f = u \prod_{j=1}^{n} f_{x_j}^{\nu_j},$$

где u — единица в $\mathcal{A}(X)$. Поэтому $\varphi(f) \neq 0$. Пусть $g \neq 0$ и $g \in (\text{ядро } \varphi)$. (Такая функция существует; иначе было бы $\mathcal{A}(X) \cong \mathbf{C}$. Это очевидное противоречие, так как $\mathbf{C}$ — поле, а $\mathcal{A}(X)$ — нет.) Тогда

$$(g) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu_i x_i. \tag{5.9}$$

Далее, если f — произвольная функция из ядра отображения φ, то она имеет бесконечно много общих нулей с g. Иначе н. о. д. d функций f и g имел бы конечное число нулей, и так как

$$d = e_1 f + e_2 g$$

для некоторых e_1 и e_2 из $\mathcal{A}(X)$, то d должен был бы лежать в ядре φ. Это противоречит предыдущему утверждению о том, что элементы с конечным числом нулей не лежат в ядре φ. Чтобы прийти к противоречию, заметим, что найдется такая функция $h \in \mathcal{A}(X)$, что $h(x_j) = j$, $j = 1, \ldots$. Ясно, что

$$h - \varphi(h) \in (\text{ядро } \varphi).$$

Так как $h - \varphi(h)$ имеет самое большее один общий нуль с g, то мы пришли к противоречию.

(c) $\Rightarrow$ (a). Мы имеем

$$M = g\mathcal{A}(X),$$

и пусть (g) задается равенством (5.9). Функция g не может быть единицей, так как иначе $M = \mathcal{A}(X)$. Поэтому найдется такая точка $x \in X$, что

$$x \leqslant (g).$$

Если есть также такой элемент $y \in X$, что

$$x + y \leqslant (g),$$

то

$$M \subset f_x f_y \mathcal{A}(X) \underset{\neq}{\subset} f_x \mathcal{A}(X) \underset{\neq}{\subset} \mathcal{A}(X).$$

Поэтому M не максимален. Единственность точки $x \in X$ очевидна, так как $\mathcal{A}(X)$ разделяет точки на X.

Следствие. *Если*

$$\varphi\colon \mathcal{A}(X) \to \mathbf{C}$$

есть гомоморфизм $\mathbf{C}$*-алгебр, то найдется ровно одна такая точка* $x \in X$, *что*

$$\varphi(f) = f(x), \quad f \in \mathcal{A}(X).$$

Доказательство. Ядро отображения φ состоит из всех функций, обращающихся в нуль в некоторой однозначно определяемой точке $x \in X$. Пусть $f \in \mathcal{A}(X)$. Тогда $f - \varphi(f) \in$ (ядро φ). Поэтому $(f - \varphi(f))(x) = 0$.

Замечания. (1) Все конечно порожденные идеалы кольца $\mathcal{A}(X)$ являются главными. Если I — идеал, порожденный функциями $f_1, \ldots, f_n$, то $d =$ н. о. д. $\{f_1, \ldots, f_n\} \in I$ ввиду предложения 5.1. Поэтому

$$d\mathcal{A}(X) \subset I.$$

Обратно,

$$f_j \in d\mathcal{A}(X), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Поэтому

$$I \subset d\mathcal{A}(X).$$

(2) Не всякий максимальный идеал является главным. Пусть $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — дискретная последовательность в X. Положим

$$I = \{f \in \mathcal{A}(X);\ \text{найдется такое}\ N > 0,\ N \in \mathbf{Z},\ \text{что}\ f(x_n) = 0\ \text{для всех}\ n > N\}.$$

Тогда I является собственным идеалом в $\mathcal{A}(X)$. Идеал I не максимален, так как $I \underset{\neq}{\subset} I'$, где

$$I' = \{f \in \mathcal{A}(X);\ \text{найдется такое } N > 0,\ N \in \mathbf{Z},\ \text{что } f(x_{2n}) = 0 \text{ для всех } n > N\}.$$

В силу леммы Цорна I содержится в максимальном идеале M. Идеал M не является главным, так как для всех $x \in X$ найдется такая функция $f \in \mathcal{A}(X)$, что $f(x) \neq 0$ и $f \in I \subset M$.

Теорема 5.3. *Пусть X и Y — открытые римановы поверхности, а*

$$F\colon \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(X)$$

— такой гомоморфизм колец голоморфных функций на них, что

(5.10) *ограничение гомоморфизма F на поле $\mathbf{C}$ констант является автоморфизмом σ поля $\mathbf{C}$, который оставляет на месте $i = \sqrt{-1}$,*

и

(5.11) *образ гомоморфизма F содержит по крайней мере одну непостоянную функцию.*

Тогда

(5.12) *F является мономорфизмом,*

(5.13) *σ является тождественным отображением*

и

(5.14) *имеется ровно одно голоморфное отображение*

$$F^*\colon X \to Y,$$

которое индуцирует F, т. е.

$$(Ff)(x) = f(F^*(x)), \quad f \in \mathcal{A}(Y), \quad x \in X.$$

Доказательство. Доказательство разбивается на несколько шагов.

(1) Для любых $x \in X$ и $f \in \mathcal{A}(Y)$ положим

$$\theta_x(f) = (Ff)(x).$$

Тогда

$$\sigma^{-1} \circ \theta_x\colon \mathcal{A}(Y) \to \mathbf{C}$$

является гомоморфизмом $\mathbf{C}$-алгебр. Ввиду следствия из предложения 5.2 найдется ровно одна такая точка $F^*(x) \in Y$, что

$$\sigma^{-1}((Ff)(x)) = f(F^*(x)), \quad f \in \mathcal{A}(Y), \quad x \in X,$$

т. е.

(5.15) $$(Ff)(x) = \sigma(f(F^*(x)), \quad f \in \mathcal{A}(Y), \quad x \in X.$$

(2) Если $\{y_n\} = \{F^*(x_n)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, — бесконечная состоящая из различных точек дискретная последовательность в Y, то по теореме Миттаг-Леффлера для римановых поверхностей (теорема 2.6) найдется такая функция $f \in \mathcal{A}(Y)$, что $f(y_n) = n$. Поэтому

$$(Ff)(x_n) = \sigma(f(F^*(x_n))) = \sigma(f(y_n)) = \sigma(n) = n,$$

т. е. $\{x_n\}$ дискретна в X.

(3) Пусть $K \subset X$. Тогда $\mathrm{Cl}\, F^*(K)$ компактно в Y, если K компактно в X. Действительно, иначе нашлась бы последовательность $y_n \in F^*(K)$, где $y_n = F^*(x_n)$, $x_n \in K$, $n = 1, 2, \ldots$, не имеющая предельных точек в Y. Тогда также $\{x_n\}$ дискретна в X. Так как K компактна, то это невозможно.

(4) Для любого $\beta \in \mathbf{C}$ найдется такая функция $f \in \mathcal{A}(Y)$ и такая точка $x \in X$, что

(i) $(Ff)(x) = \beta$,

(ii) Ff однолистна в окрестности точки x.

Действительно, как мы предположили, найдется такая функция $g \in \mathcal{A}(Y)$, что $Fg \notin \mathbf{C}$. Поэтому найдется такая точка $x \in X$, что Fg однолистна вблизи x. Если $(Fg)(x) = \alpha$, то $f = g + \sigma^{-1}(\beta - \alpha)$ обладает требуемыми свойствами.

(5) Автоморфизм σ тождествен на $\mathbf{C}$. Так как σ тождествен на $\mathbf{Q}[i]$ (рациональные числа, к которым присоединено i), а $\mathbf{Q}[i]$ плотно в $\mathbf{C}$, то достаточно показать, что σ непрерывен относительно обычной топологии на $\mathbf{C}$. Далее, σ аддитивен, а $\mathbf{C}$ является векторным пространством над $\mathbf{Q}$. Поэтому достаточно показать, что σ ограничен в окрестности нуля. Выберем такие $f \in \mathcal{A}(Y)$ и $x \in X$, что $(Ff)(x) = 0$ и f однолистна в окрестности U точки x. Можно предположить, что $\mathrm{Cl}\, U$ компактно в X. Так как $(Ff)(U)$ открыто и $0 \in (Ff)(U)$, то найдется такое $\delta > 0$, что если $|\alpha| < \delta$, то $\alpha \in (Ff)(U)$. Если σ^{-1} неограничен на любой окрестности нуля, то можно выбрать такую последовательность $\alpha_n \to 0$, что $\sigma^{-1}(\alpha_n) \to \infty$. Мы можем предположить, что $|\alpha_n| < \delta$ для всех n. Поэтому существует такая точка $x_n \in U$, что $(Ff)(x_n) = \alpha_n$. Если $y_n = F^*(x_n)$, то последовательность $\{y_n\}$ содержится в компактном множестве $\mathrm{Cl}\,(F^*(\mathrm{Cl}\, U))$. Поэтому последовательность $f(y_n)$ ограничена. Мы пришли к противоречию:

$$f(y_n) = f(F^*(x_n)) = \sigma^{-1}((Ff)(x_n)) = \sigma^{-1}(\alpha_n) \to \infty.$$

(6) Ясно, что F^* индуцирует F, так как мы можем теперь переписать (5.15) в виде

$$(Ff)(x) = f(F^*(x)), \qquad f \in \mathcal{A}(Y), \quad x \in X. \tag{5.16}$$

(7) Отображение F^* непрерывно. Так как X и Y удовлетворяют второй аксиоме счетности, то достаточно показать, что F^*

переводит сходящиеся последовательности в сходящиеся. Если это не так, то найдется такая сходящаяся последовательность $\{x_n\} \subset X$, где $x_n \to x$, что $F^*(x_n)$ не сходится к $F^*(x)$. Имеются две возможности:

(i) множество $\{F^*(x_n)\}$ конечно,

(ii) множество $\{F^*(x_n)\}$ бесконечно.

В каждом из этих случаев $\{F^*(x_n)\}$ не содержит ни одной дискретной подпоследовательности. Это ясно в случае (i). В случае (ii) это вытекает из (2) и того, что $x_n \to x$. Поэтому мы сможем выбрать такую подпоследовательность (обозначаемую теми же символами, что и раньше), что

$$x_n \to x \quad \text{и} \quad F^*(x_n) \to y \neq F^*(x).$$

Тогда найдется такая функция $f \in \mathcal{A}(Y)$, что $f(y) = 0$ и $f(F^*(x)) = 1$. Поэтому

$$f(F^*(x_n)) = (Ff)(x_n) \to (Ff)(x) = f(F^*(x)) = 1$$

и

$$f(F^*(x_n)) \to f(y) = 0.$$

(8) Отображение F^* голоморфно и нетривиально. Если F^* было бы отображением в точку, то в силу (5.16) $F(\mathcal{A}(Y)) = \mathbf{C}$. Чтобы показать, что F^* голоморфно, возьмем произвольную точку $x \in X$. Выберем такую точку $x' \in X$, что $F^*(x) \neq F^*(x')$. Найдется такая функция $f \in \mathcal{A}(Y)$, что $f(F^*(x)) = 0$, $f(F^*(x')) = 1$ и f однолистна в круге U около $F^*(x)$. Ясно, что $Ff \notin \mathbf{C}$. Ввиду (7) около x найдется такой круг V, что

$$F^*(V) \subset U \quad \text{и} \quad (Ff)(V) \subset f(U).$$

Поэтому $F^* = f^{-1} \circ Ff$ в V, и, следовательно, F^* — голоморфное отображение.

(9) Гомоморфизм F взаимно однозначен, так как F^* — нетривиальное голоморфное отображение.

(10) Отображение F^* однозначно, так как $\mathcal{A}(Y)$ разделяет точки в Y.

Доказательство теоремы закончено.

Пусть X и Y — открытые римановы поверхности с кольцами голоморфных функций $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{A}(Y)$. Гомоморфизм

$$F\colon \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(X)$$

называется *допустимым*, если F переводит поле констант в поле констант и если образ гомоморфизма F содержит по крайней мере одну непостоянную функцию. Гомоморфизм F называется *ориентированным*, если $F(i) = i$, и *неориентированным* в противном случае ($F(i) = -i$).

Теорема 5.3 описывает ориентированные допустимые гомоморфизмы. Любой неориентированный гомоморфизм F индуцируется антиголоморфным отображением F^* в том смысле, что

$$(Ff)(x) = \overline{f(F^*(x))}, \quad f \in \mathcal{A}(Y), \quad x \in X.$$

Следствие 1 (функториальные свойства операции *).
(a) *Пусть*

$$F\colon \mathcal{A}(X) \to \mathcal{A}(X)$$

есть тождественное отображение. Тогда

$$F^*\colon X \to X$$

также есть тождественное отображение.
(b) *Если*

$$\mathcal{A}(Z) \xrightarrow{G} \mathcal{A}(Y) \xrightarrow{F} \mathcal{A}(X)$$

— допустимые отображения, то отображение

$$\mathcal{A}(Z) \xrightarrow{F \circ G} \mathcal{A}(X)$$

также допустимо и

$$(F \circ G)^* = G^* \circ F^*.$$

Следствие 2. *Пусть X и Y — открытые римановы поверхности с кольцами голоморфных функций $\mathcal{A}(X)$ и $\mathcal{A}(Y)$, а*

$$F\colon \mathcal{A}(Y) \to \mathcal{A}(X)$$

— любой (сюръективный) кольцевой изоморфизм. Тогда имеется единственный гомеоморфизм

$$F^*\colon X \to Y,$$

который индуцирует F. Отображение F^* конформно, если $F(i) = i$, и антиконформно в противном случае.

Доказательство. Так как F^* единственно, то достаточно показать, что F допустимо. Действительно, тогда F^* и F^{-1*} будут взаимно обратными отображениями. Так как F — изоморфизм, то достаточно доказать, что он переводит константы в константы. Но это следует из того факта, что $f \in \mathcal{A}(Y)$ является константой тогда и только тогда, когда для любого $\alpha \in \mathbf{Q}[i]$ найдется такая функция $g \in \mathcal{A}(Y)$, что $f - \alpha = g^2$. (Ясно, что все элементы $f \in \mathbf{C}$ обладают этим свойством. Если $f \notin \mathbf{C}$, то выберем такую точку $y \in Y$, что $df(y) \neq 0$. Тогда функция $f - f(y)$ имеет в y нуль порядка 1 и, следовательно, не является квадратом голоморфной функции.)

Замечание. Приведенное выше следствие 2 показывает, что кольцо голоморфных функций на открытой римановой поверхности определяет риманову поверхность с точностью до зеркального отображения. Чтобы получить соответствующую теорему для поля мероморфных функций на открытой римановой поверхности, достаточно алгебраически охарактеризовать голоморфные функции в поле мероморфных функций.

Пусть K — произвольное поле. Под (*дискретным*) *нормированием* (*ранга* 1) на K мы понимаем такое отображение

$$v\colon K - \{0\} \to \mathbf{Z},$$

что для всех f и g из $K - \{0\}$

$$v(fg) = v(f) + v(g) \tag{5.17}$$

и

$$v(f+g) \geqslant \min\{v(f),\ v(g)\}. \tag{5.18}$$

Продолжим v на все поле K, положив $v(0) = \infty$. Заметим, что (5.17) и (5.18) по-прежнему справедливы.

Скажем, что нормирование v_1 *эквивалентно* нормированию v_2, если найдется такое $\nu \in \mathbf{Z}$, $\nu > 0$, что

$$v_1 = \nu v_2.$$

Замечание. Мы не определили отношение эквивалентности на нормированиях. Действительно, из того что «v_1 эквивалентно v_2», не вытекает, что «v_2 эквивалентно v_1».

Из нашего определения немедленно следует

Лемма 5.4. *Если v — нормирование на поле K, то для f и $g \in K$*

$$v(f+g) = \min\{v(f),\ v(g)\},$$

как только $v(f) \neq v(g)$

Доказательство. Без ограничения общности можно предположить, что $f \neq 0 \neq g$ и $v(f) < v(g)$.

Заметим сначала, что $v(1) = 0 = v(-1)$, так как для любого нечетного n имеем

$$v(1) = v(1^n) = nv(1)$$

и

$$v(-1) = v((-1)^n) = nv(-1).$$

Далее, заметим, что $v(-f) = v(f)$ для всех $f \in K$. (Если $f \in K$, то $v(-f) = v(-1)\,v(f) = v(f)$.) Вычисляем теперь

$$\begin{aligned} v(f) &= v(f+g-g) \geqslant \min\{v(f+g),\ v(-g)\} = \\ &= \min\{v(f+g),\ v(g)\} \geqslant \min\{\min\{v(f),\ v(g)\},\ v(g)\} = \\ &= \min\{v(f),\ v(g)\} = v(f). \end{aligned}$$

Поэтому наши неравенства являются на самом деле равенствами и, в частности,

$$v(f) = \min\{v(f+g),\ v(g)\} = v(f+g),$$

так как

$$v(g) > v(f).$$

На поле $\mathcal{K}(X)$ мероморфных функций на римановой поверхности X имеются некоторые очевидные нормирования. В следующей теореме утверждается, что других нормирований нет.

Теорема 5.5. *Пусть X — риманова поверхность с полем мероморфных функций $\mathcal{K}(X)$, а $x \in X$. Тогда*

$$v(f) = \operatorname{ord}_x f, \quad f \in \mathcal{K}(X), \tag{5.19}$$

является нормированием на $\mathcal{K}(X)$. Обратно, любое нетривиальное нормирование эквивалентно нормированию, определяемому равенством (5.19) *при некотором $x \in X$.*

Доказательство. Тот факт, что (5.19) определяет нормирование на $\mathcal{K}(X)$, проверяется тривиально. Поэтому остается показать, что верно обратное. Рассмотрим два случая:

Риманова поверхность X открыта. Нам нужны несколько лемм.

Лемма 5.6. *Пусть X — односвязная открытая риманова поверхность (следовательно, X эквивалентна или плоскости* **C**, *или верхней полуплоскости). Если $f \in \mathcal{A}(X)$ не имеет нулей, то найдется такая функция $F \in \mathcal{A}(X)$, что $f = e^F$.*

Доказательство. Дифференциал df/f замкнут и, следовательно, точен. Поэтому при фиксированном $z_0 \in X$

$$F_1(z) = \int_{z_0}^{z} df/f, \quad z \in X,$$

является корректно определенной голоморфной функцией на X, где путь интегрирования от z до z_0 произволен. Отсюда получаем, что

$$f(z) = f(z_0)\, e^{F_1(z)}.$$

Лемма 5.7. *Пусть X — открытая риманова поверхность, а*

$$v\colon \mathcal{K}(X) \to \mathbf{Z}$$

— нормирование поля мероморфных функций на ней. Тогда

$$v(f) \geqslant 0 \quad \text{для всех} \quad f \in \mathcal{A}(X).$$

Доказательство. Рассмотрим сначала частный случай, когда $X = \mathbf{C}$. Если $f \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$ не имеет нулей, то $f = e^F$, где $F \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$. Поэтому для любого $n \in \mathbf{Z}$, $n \neq 0$,

$$v(f) = nv(e^{F/n}).$$

Значит, $v(f)$ делится на любое целое число n и, следовательно, $v(f) = 0$.

Предположим теперь, что

$$v(z) = -\gamma < 0.$$

Для любого целого $p > 0$ найдется голоморфная функция p на $\mathbf{C}$, которая имеет в $j = 0, 1, 2, \ldots$ нуль порядка p^j и не имеет других нулей. Пусть

$$\delta = v(h).$$

Для любого $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$, положим

$$h_n(z) = \frac{h(z)}{\prod\limits_{j=0}^{n-1} (z-j)^{p^j}}.$$

Тогда

$$v(h_n) = \delta + \sum_{j=0}^{n-1} p^j \gamma, \tag{5.20}$$

так как для любой константы $\alpha \in \mathbf{C}$

$$v(z+\alpha) = \min\{v(z), v(\alpha)\} = -\gamma.$$

Заметим, что h_n имеет в $j = n, n+1, \ldots$ нуль порядка p^j и не имеет других нулей. Построим такую функцию f_n, что f_n имеет в $j = n, n+1, \ldots$ нуль порядка p^{j-n} и не имеет других нулей. Тогда $h_n/f_n^{p^n}$ является целой функцией без нулей и, следовательно, для некоторой функции $F \in \mathcal{A}(\mathbf{C})$

$$h_n = f_n^{p^n} e^F = (f_n e^{F/p^n})^{p^n}.$$

Поэтому $v(h_n)$ делится на p^n. Следовательно, из (5.20) вытекает, что

$$\delta + \gamma \frac{p^n - 1}{p-1} = p^n \delta_n,$$

где $\delta_n \in \mathbf{Z}$, т. е.

$$\frac{\delta}{p^n} + \frac{\gamma}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^n}\right) = \delta_n.$$

Так как до сих пор p было произвольно, то выберем его так, чтобы

$$p > 2\gamma + 1.$$

Для достаточно больших n ($n \geqslant N$) имеем

$$-\frac{1}{2} < \frac{\delta}{p^n} < \frac{1}{2}.$$

Но, кроме того,

$$0 < \frac{\gamma}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^n}\right) < \frac{\gamma}{p-1} < \frac{1}{2}.$$

Поэтому для достаточно больших n $\delta_n > 0$ и

$$\frac{\delta}{p^n} + \frac{\gamma}{p-1}\left(1 - \frac{1}{p^n}\right) = 0. \tag{5.21}$$

Положив в (5.21) $n \to \infty$, видим, что $\gamma = 0$. Это противоречие показывает, что

$$v(z) \geqslant 0$$

для любого нормирования v поля $\mathscr{K}(\mathbf{C})$.

Вернемся теперь к общей ситуации. Нам задано нормирование v поля $\mathscr{K}(X)$. Пусть $f \in \mathscr{A}(X)$, т. е.

$$f\colon X \to \mathbf{C}$$

является голоморфным отображением. Рассмотрим гомоморфизм

$$f^*\colon \mathscr{K}(C) \to \mathscr{K}(X),$$

определяемый равенством

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f, \quad \varphi \in \mathscr{K}(\mathbf{C}),$$

и нормирование

$$v^*(\varphi) = v(f^*(\varphi)), \qquad \varphi \in \mathscr{K}(\mathbf{C}),$$

определенное на $\mathscr{K}(\mathbf{C})$. Мы показали, что $v^*(z) > 0$. Поэтому

$$v^*(z) = v(f^*(z)) = v(z \circ f) = v(f) \geqslant 0.$$

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 5.5 для открытых поверхностей.

Пусть v — нормирование на $\mathscr{K}(X)$. Так как $v \geqslant 0$ на $\mathscr{A}(X)$, то $v(f) = 0$, если f является единицей в $\mathscr{A}(X)$. Действительно, если f — единица, то

$$v(f) \geqslant 0$$

и

$$v(f^{-1}) = v(1) - v(f) = -v(f) \geqslant 0.$$

Мы уже использовали тот факт, что для любой точки $x \in X$ найдется такая функция $f_x \in \mathscr{A}(X)$, что

$$(f_x) = x.$$

Мы утверждаем, что имеется не более одной такой точки $x \in X$, что

$$v(f_x) > 0.$$

Действительно, если r и $s \in \mathcal{A}(X)$ и не имеют общих нулей, то существуют такие t и $u \in \mathcal{A}(X)$, что

$$1 = tr + us.$$

Следовательно,

$$0 = v(1) \geqslant \min\{v(t) + v(r),\ v(u) + v(s)\} \geqslant \\ \geqslant \min\{v(r),\ v(s)\}.$$

Если есть такая точка $x \in X$, что $v(f_x) > 0$, то $v(f) = 0$ для всех таких $f \in \mathcal{A}(X)$, что $f(x) \neq 0$. Действительно, напишем снова

$$1 = tf + uf_x$$

для некоторых t и $u \in \mathcal{A}(X)$. Так как $v(1) = 0$, то мы видим, что $v(f) = 0$. (Конечно, также $v(t) = 0$.) Далее, если $f(x) = 0$, то определим

$$g = f/f_x^{\operatorname{ord}_x f},$$

и заметим, что $g(x) \neq 0$, $g \in \mathcal{A}(X)$. Поэтому

$$v(g) = 0 = v(f) - (\operatorname{ord}_x f)\, v(f_x).$$

Аналогичное равенство верно для $f \in \mathcal{K}(X)$, $f = f_1/f_2$, где $f_j \in \mathcal{A}(X)$, $j = 1, 2$. Поэтому

$$v(f) = v(f_1) - v(f_2) = v(f_x) \operatorname{ord}_x f.$$

Значит, v эквивалентно нормированию, определяемому равенством (5.19). Единственность точки x, конечно, очевидна.

Остается показать, что если $v(f_x) = 0$ для всех $x \in X$, то $v = 0$. Достаточно показать, что $v(f) = 0$ для всех $f \in \mathcal{A}(X)$. Пусть

$$(f) = \sum_{j=0}^{N} \nu_j x_j, \quad 0 \leqslant N \leqslant \infty.$$

Если $N < \infty$, то $f \Big/ \prod_{j=0}^{N} f_{x_j}^{\nu_j}$ является единицей в $\mathcal{A}(X)$. Следовательно,

$$v(f) = v\Big(\prod_{j=0}^{N} f_{x_j}^{\nu_j}\Big) = \sum_{j=0}^{N} \nu_j v(f_{x_j}) = 0.$$

Поэтому можно предположить, что $N=\infty$. Выберем такую функцию $h \in \mathcal{A}(X)$, что

$$(h)=\sum_{j=0}^{\infty}(j!-1)\,\nu_j x_j.$$

Для $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$, положим

$$h_n=\frac{fh}{\prod\limits_{j=0}^{n-1}(f_{x_j})^{j!\,\nu_j}}.$$

Заметим, что $h_n \in \mathcal{A}(X)$ и

$$(h_n)=\sum_{j=n}^{\infty} j!\,\nu_j x_j.$$

Пусть $g_n \in \mathcal{A}(X)$ — такая функция, что

$$(g_n)=\sum_{j=n}^{\infty}(j!/n!)\,\nu_j x_j.$$

Ясно, что тогда $h_n/g_n^{n!}$ является единицей кольца $\mathcal{A}(X)$. Поэтому

$$v(h_n)=n!\,v(g_n).$$

Следовательно,

$$v(h_n)=v(f)+v(h)$$

делится на $n!$ для всех $n \in \mathbf{Z}$, $n \geqslant 1$. Поэтому $v(f)+v(h)=0$. Так как $v(f) \geqslant 0$ и $v(h) \geqslant 0$, то мы заключаем, что $v(f)=0=v(h)$.

Риманова поверхность X замкнута. Нам понадобится некоторая информация о поле мероморфных функций на X.

Лемма 5.8. *Пусть X — компактная риманова поверхность, а $\{p_0, \ldots, p_n\}$ — множество $n+1$ различных точек на X. Существует такая функция $f \in \mathcal{K}(X)$, что f разделяет точки $p_0, \ldots, p_n$ и*

$$(df)(p_j) \neq 0, \quad j=0, \ldots, n.$$

Доказательство. Достаточно показать, что для любого k, $k=0, \ldots, n$, найдется такая функция $f_k \in \mathcal{K}(X)$, что

$$f_k(p_k)=1, \qquad df_k(p_k) \neq 0$$

и

$$f_k(p_j)=0=df_k(p_j), \qquad j \neq k, \quad j=0, \ldots, n.$$

Установив существование функций f_k, положим

$$f=\sum_{j=0}^{n}\lambda_j f_j,$$

где $\lambda_j \in \mathbf{C} - \{0\}$ — попарно различные константы (например, $\lambda_j = j + 1$, $j = 0, \ldots, n$).

Ясно, что достаточно рассмотреть случай $k = 0$. Пусть $p \in X$, $p \neq p_j$, $j = 0, \ldots, n$. Положим

$$a = -2p_1 + \ldots - 2p_n + mp,$$

где $m \in \mathbf{Z}$ настолько велико, что

$$\deg a > g \quad \text{и} \quad \deg a > 2g - 1, \qquad g = \text{род}\,(X).$$

Тогда

$$\dim a = \deg a + 1 - g > 1$$

и

$$\dim (a - p_0) = \deg a - g > 0.$$

Поэтому существует функция $g_0 \in l(a) - l(a - p_0)$,

$$(g_0) \geqslant 2p_1 + \ldots + 2p_n - mp$$

и

$$(g_0) \not\geqslant p_0 + 2p_1 + \ldots + 2p_n - mp,$$

или, что то же самое, g_0 имеет нуль порядка $\geqslant 2$ в p_j ($j = 1, \ldots, n$) и $0 \neq g_0(p_0) \neq \infty$. Если $dg_0(p_0) \neq 0$, то все доказано ($f_0 = g_0$). В противном случае построим такую функцию h_0, что

$$(h_0) \geqslant p_0 + 2p_1 + \ldots + 2p_n - (m + 1)\,p$$

и

$$(h_0) \not\geqslant 2p_0 + 2p_1 + \ldots + 2p_n - (m + 1)\,p,$$

и положим $f_0 = g_0 + h_0$.

Лемма 5.9. *Пусть X — компактная риманова поверхность, а $z \in \mathcal{K}(X)$ — произвольная непостоянная функция. Если $f \in \mathcal{K}(X)$, то найдутся такие рациональные функции r_j, $j = 1, \ldots, n$, что f удовлетворяет уравнению*

$$f^n + \sum_{j=1}^{n} r_j(z)\, f^{n-j} = 0, \tag{5.22}$$

где n — число нулей функции z.

Доказательство. Вспомним, что z осуществляет n-листное накрытие пространства $\mathbf{C} \cup \{\infty\}$ поверхностью X. Поэтому для любой точки $\zeta \in \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ на X найдется n таких точек $P_1, \ldots, P_n$, что $z(P_j) = \zeta$, $\zeta = 1, \ldots, n$. Определим симметрические функции

$$r_0(\zeta) = 1,$$

$$r_1(\zeta) = -f(P_1) - \ldots - f(P_n),$$

$$r_2(\zeta) = f(P_1) f(P_2) + f(P_1) f(P_3) + \ldots + f(P_{n-1}) f(P_n) =$$
$$= \sum_{\substack{i,\, j=1 \\ i<j}}^{n} f(P_i) f(P_j),$$
$$\vdots$$
$$r_\nu(\zeta) = (-1)^\nu \sum_{\substack{n_1, \ldots, n_\nu=1 \\ n_1<n_2<\ldots<n_\nu}}^{n} f(P_{n_1}) f(P_{n_2}) \ldots f(P_{n_\nu})$$
$$\vdots$$
$$r_n(\zeta) = (-1)^n f(P_1) \ldots f(P_n).$$

Легко видеть, что $r_j \in \mathscr{K}(\mathbf{C} \cup \{\infty\})$, т. е. r_j является рациональной функцией для любого $j = 0, \ldots, n$. Так как

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (f(z) - f(P_j)) = \sum_{j=0}^{n} r_j(z) f^{n-j},$$

то лемма доказана.

Теперь мы можем закончить доказательство теоремы 5.5 для компактных римановых поверхностей.

Пусть v — нетривиальное нормирование поля $\mathscr{K}(X)$. Так как группа $v(\mathscr{K}(X))$ не является нулевой, то она порождается элементом $\alpha > 0$. Поэтому можно предположить, что $\alpha = 1$. Тогда найдется такая функция $f \in \mathscr{K}(X)$, что $v(f) = 1$ (ясно, что $f \notin \mathbf{C}$). Заметим, что, если r — рациональная функция, то

$$v(r(f)) = \operatorname{ord}_0 r,$$

так как

$$r \circ f = \frac{\prod_{j=0}^{n} f - \alpha_j}{\prod_{j=0}^{m} f - \beta_j}, \quad \text{где} \quad \alpha_j, \beta_j \in \mathbf{C},$$

$$v(r \circ f) = \sum_{j=0}^{n} v(f - \alpha_j) - \sum_{j=0}^{m} v(f - \beta_j)$$

и

$$v(f - \lambda) = 0 \quad \text{при} \quad \lambda \neq 0, \quad \lambda \in \mathbf{C}.$$

Пусть $P_1, \ldots, P_n$ — нули функции f, и пусть $g \in \mathscr{K}(X)$ произвольна. Тогда g удовлетворяет уравнению

$$g^n + \sum_{j=0}^{n-1} r_j(f) g^j = 0,$$

где r_j — рациональные функции. Имеем

$$nv(g) \geqslant \min\{\operatorname{ord}_0 r_j + jv(g), \quad j = 0, \ldots, n-1\}.$$

Если $v(g) < 0$, то $\operatorname{ord}_0 r_j < 0$ для некоторого $j = 0, \ldots, n-1$. Так как $r_j(0)$ есть симметрическая функция от значений функции g в точках $P_1, \ldots, P_n$, то мы видим, что g должна иметь полюс в одной из точек $P_1, \ldots, P_n$. Аналогично, если $v(g) > 0$, то $v(g^{-1}) < 0$ и g должна иметь нуль в одной из точек $P_1, \ldots, P_n$. Мы заключаем, что $v(g) = 0$ всякий раз, когда $0 \neq g(P_j) \neq \infty$, $j = 1, \ldots, n$. Пусть g — любая функция, которая голоморфна в $P_1, \ldots, P_n$, принимает различные ненулевые значения в этих точках и дифференциал которой не обращается в нуль в этих точках. Можно предположить, что $v(g) \geqslant 0$ (иначе возьмем g^{-1}). Положим $g_j = g - g(P_j)$, $j = 1, \ldots, n$. Рассмотрим функцию

$$\frac{f}{\prod\limits_{j=1}^{n} g_j^{\operatorname{ord}_{P_j} f}},$$

голоморфную и не равную нулю в точках $P_1, \ldots, P_n$. Тогда

$$1 = v(f) = \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{ord}_{P_j} f)\, v(g_j).$$

Так как $v(g_j) \geqslant 0$, $\operatorname{ord}_{P_j} f \geqslant 1$, $j = 1, \ldots, n$, то при некотором $k = 1, \ldots, n$

$$v(g_k) = 1 = \operatorname{ord}_{P_k} f$$

и

$$v(g_j) = 0, \quad j \neq k, \quad j = 1, \ldots, n.$$

Наконец, пусть $h \in \mathscr{K}(X)$. Рассмотрим функцию

$$\frac{h}{\prod\limits_{j=1}^{n} g_j^{\operatorname{ord}_{P_j} h}},$$

на которой v принимает значение нуль. Тогда

$$v(h) = \sum_{j=1}^{n} (\operatorname{ord}_{P_j} h)\, v(g_j) = \operatorname{ord}_{P_k} h.$$

Теорема 5.10. *Пусть X и Y — римановы поверхности и*

$$F\colon \mathscr{K}(Y) \to \mathscr{K}(X)$$

— сюръективный изоморфизм между полями мероморфных функций на них. Пусть $F(i) = i$ и, если Y компактна, $F(\lambda) = \lambda$ для $\lambda \in \mathbf{C}$. Тогда существует такой единственный голоморфный

гомеоморфизм

$$F^*\colon X \to Y,$$

что

$$(Ff)(x) = f(F^*(x)), \quad f \in \mathscr{K}(Y), \quad x \in X.$$

Доказательство. Рассмотрим два случая.

Поверхность Y открыта. Заметим, что

$$F\colon \mathscr{A}(Y) \to \mathscr{A}(X),$$

так как иначе нашлась бы такая функция $f \in \mathscr{A}(Y)$, что $Ff \notin \mathscr{A}(X)$. Поэтому есть такая точка $p \in X$, что

$$\operatorname{ord}_p Ff < 0.$$

Определим нормирование v поля $\mathscr{A}(Y)$ по формуле

$$v(g) = \operatorname{ord}_p Fg, \quad g \in \mathscr{A}(Y).$$

Так как $v(f) < 0$, то мы получаем противоречие с теоремой 5.5 (на самом деле, для противоречия нужна только лемма 5.7). Так как любая мероморфная функция является отношением двух голоморфных функций, то утверждение теоремы вытекает из следствия 2 теоремы 5.3.

Поверхность Y замкнута. Пусть $x \in X$. Определим

$$v_x(g) = \operatorname{ord}_x g, \quad g \in \mathscr{K}(X).$$

Тогда, как и прежде

$$v_x^*(f) = v_x(Ff), \quad f \in \mathscr{K}(Y),$$

является нетривиальным нормированием на $\mathscr{K}(Y)$. Поэтому

$$v_x^* = v_{F^*(x)}$$

для единственной точки $F^*(x) \in Y$.

Рассуждения, аналогичные использованным при доказательстве теоремы 5.3, можно теперь применить, чтобы показать, что отображение F^* непрерывно, голоморфно и единственно. Так как те же рассуждения применимы к изоморфизму F^{-1}, то F^* — гомеоморфизм.

Замечания. (1) Имеется несколько очевидных обобщений доказанной выше теоремы. Одно из них состоит в том, что не предполагается, что $F(i) = i$. Можно также рассмотреть гомоморфизмы между полями $\mathscr{K}(Y)$ и $\mathscr{K}(X)$. Для открытых Y в этом случае надо потребовать, чтобы F переводил $\mathbf{C}$ в $\mathbf{C}$.

(2) Для замкнутых Y предположение о том, что изоморфизм F тождествен на поле констант, существенно. Пусть $Y = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$, и пусть $X = \mathbf{C}$. Если σ — любой автоморфизм поля $\mathbf{C}$, то σ тривиально продолжается на $\mathbf{C}(z)$, поле рациональных функций.

Ясно, что

$$\sigma\colon \mathscr{K}(Y) \to \mathscr{K}(X)$$

не может быть индуцировано никаким непрерывным отображением поверхности X в Y, если σ не непрерывен. На самом деле хорошо известно, что «почти все» компактные римановы поверхности одинакового рода имеют изоморфные поля функций.

(3) Несколько изменив рассуждения в доказательстве леммы 5.9, получаем такую теорему:

Теорема 5.11. *Пусть X — компактная риманова поверхность, а $z \in \mathscr{K}(X)$ — любая непостоянная мероморфная функция с n нулями. Найдется такая функция $f \in \mathscr{K}(X)$, что уравнение* (5.22) *n-й степени относительно z, которому удовлетворяет f, неприводимо.*

Из этой теоремы легко получить

Следствие. *Имеем*

$$\mathscr{K}(X) \cong \mathbf{C}(z)[f]/(P(z, f)),$$

где $P(z, f)$ — полином из (5.22), *т. е. $\mathscr{K}(X)$ является полем функций от одного переменного.*

Доказательство сформулированной выше теоремы (и ее следствия) можно найти в книге Спрингера. Читатель, который продвинулся так далеко, сможет без труда дать собственное доказательство.

Замечания

Теорема конечности принадлежит Альфорсу [А5—9]. На самом деле, Альфорс доказал теорему конечности в более слабой форме: если Γ конечно порождена, то любая компонента пространства Ω/Γ имеет конечный тип. Теорема в полном виде вытекает из обобщений теоремы Альфорса, полученных Гринбергом [Г10—8], Берсом [Б4—14] и Альфорсом [А5—12]. Неравенства площадей были впервые получены Берсом [Б4—15]. Результаты § 2 принадлежат Бенке и Штейну [БШ]. Однако наше доказательство теоремы об аппроксимации отлично от оригинального доказательства. Некоторые из результатов § 3 можно найти в [К12—12]. В § 3 мы также получили тот результат, что первая группа когомологий $H^1(M, \mathcal{O})$ открытой римановой поверхности с коэффициентами в пучке $\mathcal{O}$ ростков голоморфных функций равна нулю. Результаты § 4 принадлежат Берсу [Б4—12] и [Б4—20]. Предложение 5.1 принадлежит Хелмеру [Х4]. Свойства делимости голоморфных функций изучались также Хенриксеном [Х6]. Теорема 5.3 по существу принадлежит Берсу [Б4—1]. Она также имеется в работах Рудина [Р10—2], Накаи [Н1—1] и Кра [К12—1]. Теорема 5.5 является классической в случае компактных поверхностей и принадлежит Ис'са [И2] в случае открытых поверхностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

В этой библиографии представлены как некоторые недавние работы по клейновым группам и теории Тейхмюллера, так и стандартные учебники по теории римановых поверхностей. Ссылки как на работы по теории Тейхмюллера (модули римановых поверхностей), так и на работы по теории функций на римановых поверхностях также включены, так как имеется тесная связь между этими теориями и теорией клейновых групп. Этот список ни в коей мере не является полным. В нем скорее представлены работы и книги в этих областях, с которыми автор знаком. Классические работы, вообще говоря, не включены. Их можно найти в превосходной библиографии в книге Альфорса и Сарио.

Абикофф (Abikoff W.)

[A1] Some remarks on Kleinian groups, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).

Агард (Agard S. B.)

[A2] Distortion theorems for quasiconformal mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A1, **413** (1968)

Агард, Геринг (Agard S. B., Gehring F. W.)

[AГ] Angles and quasiconformal mappings, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1965), 1—21.

Аказа (Akaza T.)

[A3-1] Length of the singular set of Schottky group, *Kodai. Math. Sem. Rep.*, **15** (1963), 62—66.

[A3-2] Poincaré theta-series and singular sets of Schottky groups, *Nagoya Math. J.*, **24** (1964), 43—65.

[A3-3] Singular sets of some Kleinian groups, *Nagoya Math. J.*, **26** (1966), 127—143, and **29** (1967), 145—162.

[A3-4] Ahlfors conjecture on the singular set of some Kleinian group, *Tohoku Math. J.*, **22** (1970), 1—13.

Аккола (Accola R. D. M.)

[A4-1] Invariant domains for Kleinian groups, *Amer. J. Math.*, 88 (1966), 329—336.

[A4-2] On the number of automorphisms of a closed Riemann surface, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **131** (1968), 398—407.

[A4-3] Riemann surfaces with automorphism groups admitting partitions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 477—482.

[A4-4] On the problem of characterizing hyperelliptic Riemann surfaces in terms of vanishing theta nulls (to appear).

Альфорс (Ahlfors L. V.)

[A5-1] Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions, *Comment. Math. Helv.*, **24** (1950), 100—134.

[A5-2] On quasiconformal mappings, *J. Analyse Math.*, **3** (1953/4), 1—58. [Русский перевод: в сб. Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, М., 1961, 104—172.]

[A5-3] Some remarks on Teichmüller's space of Riemann surfaces, *Ann. of Math.*, **74** (1961), 171—191.
[A5-4] Curvature properties of Teichmüller space, *J. Analyse Math.*, **9** (1961), 161—176.
[A5-5] Teichmüller spaces, Proc. Int. Congr. Math., Stockholm, 1962, 3—9.
[A5-6] Quasiconformal reflections, Acta Math., **109** (1963), 291—301. [Русский перевод: в сб. *Математика*, 8:2 (1964), 103—111.]
[A5-7] Eine Bemerkung über Fuchssche Gruppen, *Math. Z.*, **84** (1964) 244—245.
[A5-8] Extension of quasiconformal mappings from two to three dimensions, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **51** (1964), 768—771.
[A5-9] Finitely generated Kleinian groups, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 413—429, and **87** (1965), 759.
[A5-10] Fundamental polyhedrons and limit point sets of Kleinian groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **55** (1966), 251—254.
[A5-11] Hyperbolic motions, *Nagoya Math. J.*, 29 (1967), 163—166.
[A5-12] Eichler integrals and Bers' area theorem, *Mich. Math. J.*, **15** (1968), 257—263.
(A5-13] The structure of a finitely generated Kleinian group, *Acta Math.*, **122** (1969), 1—17.
[A5-14] Remarks on the limit set of a finitely generated Kleinian group, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).
[A5-15] Лекции по квазиконформным отображениям, «Мир», М., 1969.

Альфорс, Берс (Ahlfors L. V., Bers L.)
[АБ] Riemann's mapping theorem for variable metrics, *Ann. of Math.*, **72** (1960), 385—404.

Альфорс, Вейл (Ahlfors L. V., Weill G.)
[АВ] A uniqueness theorem for Beltrami equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 13 (1962), 975—978.

Альфорс, Сарио (Ahlfors L. V., Sario L.)
[АС] Riemann surfaces, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1960.

Андреотти (Andreotti A.)
[А6] On a theorem of Torelli, *Amer. J. of Math.*, **80** (1958), 801—828.

Андреотти, Мейер (Andreotti A., Mayer A. L.)
[АМ] On period relations for abelian integrals on algebraic curves, *Annali Sc. Nor. Sup. Pisa*, **21** (1967), 189—238.

Бенке, Зоммер (Behnke H., Sommer F.)
[БЗ] Theorie der analytischen Funktionen einer komplexen Veränderlichen (second edition), Springer-Verlag, Berlin, 1962.

Бенке, Штейн (Behnke H., Stein K.)
[БШ] Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen, *Math. Ann.*, **120** (1948), 430—461.

Бердон (Beardon A. F.)
[Б1-1] The Hausdorff dimension of singular sets of properly discontinuous groups, *Amer. J. Math.*, 88 (1966), 722—736.
[Б1-2] The exponent of convergence of Poincaré series, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **18** (1968), 461—483.

Беренс (Behrens M.)
[Б2] The corona conjecture for a class of infinitely connected domains, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 387—391.

Берже (Berger M.)
[Б3] On the conformal equivalence of compact 2-dimensional manifolds, *J. Math. Mech.*, **19** (1969), 13—18.

Берс (Bers L.)

[Б4-1] On the ring of analytic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **54** (1948), 311—315.

[Б4-2] On a theorem of Mori and the definition of quasiconformality, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **84** (1957), 78—84.

[Б4-3] Spaces of Riemann surfaces, Proc. Int. Congr. Math., Cambridge, 1958, 349—361. [Русский перевод: в сб. Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, М., 1961, 80—90.]

[Б4-4] Simultaneous uniformization, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **66** (1960), 94—97. [Русский перевод: в сб. Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, М., 1961, 91—98.]

[Б4-5] Quasiconformal mappings and Teichmüller's theorem, Analytic Functions by R. Nevanlinna, et al., Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1960, 89—119. [Русский перевод: в сб. Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, М., 1961, 9—50.]

[Б4-6] Completeness theorems for Poincaré series in one variable, Proc. Internat. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 1960, 88—100.

[Б4-7] Holomorphic differentials as functions of moduli, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 206—210. [Русский перевод: в сб. Альфорс Л., Берс Л., Пространства римановых поверхностей и квазиконформные отображения, ИЛ, М., 1961, 99—103.]

[Б4-8] Uniformization by Beltrami equations, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **14** (1961), 215—228.

[Б4-9] The equivalence of two definitions of quasiconformality, *Comment. Math. Helv.*, **37** (1962), 148—154.

[Б4-10] Automorphic forms and general Teichmüller spaces, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minnesota, 1964, 109—113.

[Б4-11] An approximation theorem, *J. Analyse Math.*, **14** (1965), 1—4.

[Б4-12] Automorphic forms and Poincaré series for infinitely generated Fuchsian groups, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), 196—214.

[Б4-13] A non-standard integral equation with applications to quasiconformal mappings, *Acta Math.*, **116** (1966), 113—134.

[Б4-14] On Ahlfors' finiteness theorem, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 1078—1082.

[Б4-15] Inequalities for finitely generated Kleinian groups, *J. Analyse Math.*, **18** (1967), 23—**41**.

[Б4-16] On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups, I, *Ann. of Math.*, **91** (1970), 570—600.

[Б4-17] Extremal quasiconformal mappings, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).

[Б4-18] Universal Teichmüller space (to appear).

[Б4-19] On Eichler integrals with singularities, *Acta Math.*, **127** (1971), 11—22.

[Б4-20] L_1 approximation of analytic functions, *J. Indian Math. Soc.*, **34** (1970), N3—4, 193—201.

[Б4-21] Spaces of Kleinian groups, Lecture Notes in Mathematics, **155** Springer, Berlin, 1970, 9—34.

[Б4-22] On moduli of Riemann surfaces, Lectures at Forschunginstitut, für Mathematik, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich, Summer 1964 (not published).

Берс, Гринберг (Bers L., Greenberg L.)

[БГ] Isomorphisms between Teichmüller spaces, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).

Бёрлинг, Альфорс (Beurling A., Ahlfors L. V.)
[БА] The boundary correspondence under quasiconformal mappings, *Acta Math.*, **96** (1956), 125—142.
Бирман (Birman J. S.)
[Б5-1] Automorphisms of the fundamental group of a closed orientable 2-manifold, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **21** (1969), 351—354.
[Б5-2] On braid groups, *Comm. Pure. Appl. Math.*, **22** (1969), 41—72.
[Б5-3] Mapping class groups and their relationships to braid groups, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 213—238.
[Б5-4] Non-conjugate braids can define isotopic knots, *Comm. Pure Appl. Math.*, **22** (1969), 239—242.
[Б5-5] Abelian quotients of the mapping class group of a 2-manifold, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 147—150.
Брайт (Bright G. W.)
[Б6] Rational expressions of certain automorphic forms, *Mich. Math. J.*, **17** (1970), 129—137.
Вейль А. (Weil A.)
[В1] Remarks on cohomology of groups, *Ann. of Math.*, **80** (1964), 149—157.
Вейль Г. (Weyl H.)
[В2] Method of orthogonal projections in potential theory, *Duke Math. J.*, **7** (1940), 411—444.
Вермер (Wermer J.)
[В3-1] On algebras of continuous functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **4** (1953), 866—869.
[В3-2] Function rings and Riemann surfaces, *Ann. of Math.*, **67** (1958), 45—71. [Русский перевод: в сб. *Математика*, **3**:6 (1959), 47—77.]
[В3-3] Rings of analytic functions, *Ann. of Math.*, **67** (1958), 497—516.
[В3-4] Banach algebras and analytic functions, *Advances in Math.*, **1** (1961), 51—102.
Войчик, Зальцман (Voichick M., Zalcman L.)
[В4] Inner and outer functions on Riemann surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **16** (1965), 1200—1204.
Вяйсяля (Väisälä J.)
[В5] Removable sets for quasiconformal mappings, *J. Math. Mech.*, **19** (1968/69), 1—3.
Гамелин (Gamelin T. W.)
[Г1-1] Embedding Riemann surfaces in maximal ideal spaces, *J. Functional Analysis*, **2** (1968), 123—146.
[Г1-2] Localization of the corona problem, *Pacific J. Math.*, **34** (1970), N 1, 73—81.
Гамильтон (Hamilton R. S.)
[Г2] Extremal quasiconformal mappings with prescribed boundary values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **138** (1969), 399—406.
Ганнинг (Gunning R. C.)
[Г3-1] The structure of factors of automorphy, *Amer. J. Math.*, **78** (1956), 357—382. [Русский перевод: в сб. *Математика*, **2**:3 (1958), 25—46.]
[Г3-2] Factors of automorphy and other formal cohomology groups for Lie groups, *Ann. of Math.*, **69** (1959), 314—326, 734.
[Г3-3] The Eichler cohomology groups and automorphic forms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **100** (1961), 44—62.
[Г3-4] Special coordinate coverings of Riemann surfaces, *Math. Ann.*, **170** (1967), 67—86.
[Г3-5] Some non-abelian problems on compact Riemann surfaces, *Rice Univ. Studies*, **54** (1968), 39—48.

[Г3-6] Lectures on modular forms, Ann. of Math. Studies, **48**, Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1962. [Русский перевод: в сб. *Математика*, 8:6 (1964), 3—68.]

Ганнинг, Нарасимхан (Gunning R. C., Narasimhan R.)

[ГН] Immersion of open Riemann surfaces, *Math. Ann.*, **174** (1967), 103—108.

Ганнинг, Росси (Gunning R. C., Rossi H.)

[ГР1] Аналитические функции многих комплексных переменных, «Мир», М., 1969.

Гардинер (Gardiner F.)

[Г4-1] An analysis of the group operation in universal Teichmüller space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 471—486.

[Г4-2] Deformations of embeddings of Riemann surfaces in projective space, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).

Гарсиа (Garsia A. M.)

[Г5-1] Calculation of conformal parameters for some imbedded Riemann surfaces, *Pacific J. Math.*, **10** (1960), 121—165.

[Г5-2] Imbeddings of Riemann surfaces by canal surfaces, *Rend. Circ. Math. Palermo* (Sec. II), **9** (1960), 313—333.

[Г5-3] An embedding of closed Riemann surfaces in Euclidean space, *Comment. Math. Helv.*, 35 (1961), 93—110.

[Г5-4] On the conformal types of algebraic surfaces in Euclidean space, *Comment. Math. Helv.*, **37** (1962/3), 49—60.

Гарсиа, Родемич (Garsia A. M., Rodemich E.)

[ГР2] An imbedding of Riemann surfaces of genus one, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 193—204.

Гельфанд И. М.

[Г6] Automorphic functions and the theory of representations, Proc. Int. Congr. Math., Stockholm, 1962, 74—85.

Гельфанд И. М., Граев М. И., Пятецкий-Шапиро И. И.

[ГГП] Теория представлений и автоморфные функции, «Наука», М., 1966.

Геринг (Gehring F. W.)

[Г7-1] Quasiconformal mappings in space, *Bull. Amer. Math., Soc.*, **69** (1963), 146—164.

[Г7-2] Definitions for a class of plane quasiconformal mappings, *Nagoya Math. J.*, 29 (1967), 175—184.

[Г7-3] Extension theorems for quasiconformal mappings in n-space, *J. Analyse Math.*, **19** (1967), 149—169.

Глисон (Gleason A. M.)

[Г8] Finitely generated ideals in Banach algebras, *J. Math. Mech.*, **13** (1964), 125—132. [Русский перевод: в сб. *Математика*, 9:4 (1965) 119—127.]

Годеман (Godement R.)

[Г9] Séries de Poincaré et Spitzenformen, Sém. Henri Cartan, 10e année (1957/8, exposé 10).

Гринберг (Greenberg L.)

[Г10-1] Conformal transformations of Riemann surfaces, *Amer. J. Math.*, **82** (1960), 749—760.

[Г10-2] Discrete groups of motions, *Canad. J. Math.*, **12** (1960), 414—425.

[Г10-3] Discrete subgroups of the Lorenz groups, *Math. Scand.*, **10** (1962), 85—87.

[Г10-4] Maximal Fuchsian groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 69 (1963), 569—573.

[Г10-5] Fundamental polyhedra for Kleinian groups, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 433—441.

[Г10-6] Note on normal subgroups of the modular group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 1195—1198.
[Г10-7] Fundamental polygons for Fuchsian groups, *J. Analyse Math.*, **18** (1967), 99—105.
[Г10-8] On a theorem of Ahlfors and conjugate subgroups of Kleinian groups, *Amer. J. Math.*, 89 (1967), 56—68.
[Г10-9] Theorems of Selberg and Schur in prime characteristic (to appear).
[Г10-10] Commutator groups and algebras (to appear).
[Г10-11] A discrete group with no deformations whose abelianized group is free abelian (to appear).
[Г10-12] Discrete groups with dense orbits, Chapter IX of «Flows on Homogeneous Spaces», Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963. [Русский перевод: в сб. Ауслендер Г., Грин Л. и др. Потоки на однородных пространствах, «Мир», М., 1966, 132—156.)

Гринлиф, Рид (Greenleaf N., Read W.)
[ГР3] Positive holomorphic differentials on Klein surfaces, *Pacific J. Math.*, 32 (1970), 711—713.

Губер (Huber H.)
[Г11] Riemannsche Flächen von hyperbolischen Typus in euklidischen Raum, *Math. Ann.*, **139** (1959), 140—146.

Гурвиц (Hurwitz A.)
[Г12] Über algebraische Gebilde mit eindeutigen Transformationen in sich, *Math. Ann.*, 41 (1893), 403—442.

Де Лю, Миркил (deLeeuw K., Mirkil H.)
[ДМ] Algebras of differentiable functions on Riemann surfaces, *Ann. Inst. Fourier Grenoble*, **14** (1964), 145—162.

Дрезин (Drasin D.)
[Д1] Cusp forms and Poincaré series, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 356—365.

Дрезин, Эрл (Drasin D., Earle C. J.)
[ДЭ] On the boundedness of automorphic forms, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 (1968), 1039—1042.

Дюрен (Duren P. L.)
[Д2-1] Two inequalities involving elliptic functions, *Amer. Math. Monthly*, **70** (1963), 650—651.
[Д2-2] Distortion in certain conformal mappings of an annulus, *Mich. Math. J.*, **10** (1963), 431—441, and **11** (1964), 95.
[Д2-3] Schwarzian derivatives and mappings onto Jordan domains, *Ann. Fenn. Acad. Sci.*, Ser. A, **477** (1970), 1—11.

Евграфов М. А., Постников М. М.
[ЕП] Об одном свойстве метрики Тейхмюллера, *ДАН СССР*, **187** (1969), № 6, 1229—1231.

Еним (Jaenisch S.)
[Е1] The subset of piece-wise linear mappings is dense in the space of K-quasiconformal mappings of the plane, *Acta Math.*, **122** (1969), 265—272.

Зальцман (Zalcman L.)
[З1] Bounded analytic functions on domains of infinite connectivity, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **144** (1969), 241—269.

Зибнер (Sibner R. J.)
[З2-1] Hyperbolic generators for Fuchsian groups, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **17** (1966), 963—968.
[З2-2] Remarks on the Koebe Kreisnormierungsproblem, *Comment. Math. Helv.*, **43** (1968), 289—295.
[З2-3] Symmetric Fuchsian groups, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 1237—1259.
[З2-4] Domains bounded by analytic Jordan curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 61—63.

[32-5] «Uniformization» of infinitely connected domains. Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann of Math. Studies, **66** (1971).

Зигель (Siegel C. L.)

[33-1] Symplectic geometry, *Amer. J. Math.*, **65** (1943), 1—86.

[33-2] Some remarks on discontinuous groups, *Ann. of Math.*, **46** (1945), 708—718.

[33-3] Indefinite quadratische Formen und Funktionentheorie, *Math. Ann.*, **124** (1952), 364—387.

Иннис (Innis G. S., Jr.)

[И1] Some reproducing kernels for the unit disc, *Pacific J. Math.*, **14** (1964), 177—187.

Ис'са (Iss'sa H.)

[И2] On the meromorphic function field of a Stein variety, *Ann. of Math.*, **83** (1966), 34—46.

Какутани (Kakutani S.)

[К1] On rings of analytic functions, Proc. Michigan Conf. on Functions of a Complex Variable, 1953.

Келингос (Kelingos J. A.)

[К2] Boundary correspondence under quasiconformal mappings, *Mich. Math. J.*, **13** (1966), 235—249.

Келлехер (Kelleher J. J.)

[К3-1] Rings of meromorphic functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 54—58.

[К3-2] On isomorphisms of meromorphic function fields, *Canad. J. Math.*, **20** (1968), 1230—1241.

[К3-3] Rings of meromorphic functions on non-compact Riemann surfaces, *Canad. J. Math.*, **21** (1969), 284—300.

Келм (Kalme C.)

[К4-1] A note on the connectivity of components of Kleinian groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **137** (1969), 301—307.

[К4-2] Remarks on a paper by Lipman Bers, *Ann. of Math.*, **91** (1970), 601—606.

Кеннон (Cannon R. J., Jr.)

[К5] Quasiconformal structures and the metrization of 2-manifolds, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 135 (1969), 95—103.

Кёбе (Köebe P.)

[К6-1] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, Nachr. Acad. Wiss. Göttingen, 1907, 191—210 and 633—669.

[К6-2] Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven, *J. für reine und angew. Math.*, **138** (1910), 192—253.

Кин (Keen L.)

[К7-1] Canonical polygons for finitely generated Fuchsian groups, *Acta Math.*, **115** (1966), 1—16.

[К7-2] Intrinsic moduli on Riemann surfaces, *Ann. of Math.*, **84** (1966), 404—420.

[К7-3] An extremal length on a torus, *J. Analyse Math.*, 19 (1967), 203—206.

[К7-4] On Fricke moduli, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, 66 (1971).

Клейн (Klein F.)

[К8] Neue Beiträge zur Riemann'schen Funktionentheorie, *Math. Ann.*, **21** (1883), 141—218.

Клотц (Klotz T.)

[К9] Imbedding compact Riemann surfaces in 3-space, *Pacific J. Math.*, **11** (1961), 1035—1043.

Кнапп (Knapp A. W.)

[К10] Doubly generated Fuchsian groups, *Mich. Math. J.*, **15** (1968), 239—304.

Кнопп (Knopp M. I.)
[K11-1] Construction of automorphic forms on H-groups and supplementary Fourier series, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **103** (1962), 168—188.
[K11-2] On generalized abelian integrals of the second kind and modular forms of dimension zero, *Amer. J. Math.*, **86** (1964), 430—440.
[K11-3] Polynomial automorphic forms and non-discontinuous groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **123** (1966), 506—520.
[K11-4] Notes on automorphic functions: an entire automorphic form of positive dimension is zero, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **71B** (1967), 167—169.
[K11-5] A corona theorem for automorphic forms and related results, *Amer. J. Math.*, **91** (1969), 599—618.
[K11-6] Some new results on the Eichler cohomology of automorphic forms, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **80** (1974), № 4, 607—632.
Кра (Kra I.)
[K12-1] Maximal ideals in the algebra of holomorphic functions, *Mich. Math. J.*, **14** (1967), 83—88.
[K12-2] On the ring of holomorphic functions on an open Riemann surface, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **132** (1968), 231—244.
[K12-3] Cohomology of Kleinian groups, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **63** (1969), 655—660.
[K12-4] On cohomology of Kleinian groups, *Ann. of Math.*, **89** (1969), 533—556.
[K12-5] On cohomology of Kleinian groups. II, *Ann. of Math.*, **90** (1969), 575—589.
[K12-6] On Teichmüller spaces for finitely generated Fuchsian groups, *Amer. J. Math.*, **91** (1969) 67—74.
[K12-7] On affine and projective structures on Riemann surfaces, *J. Analyse Math.*, **22** (1969), 285—298.
[K12-8] Deformations of Fuchsian groups, *Duke Math. J.*, **36** (1969), 537—546.
[K12-9] Deformations of Fuchsian groups. II. *Duke Math. J.*, **38** (1971), № 3, 499—508.
[K12-10] Eichler cohomology and the structure of finitely generated Kleinian groups, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).
[K12-11] A generalization of a theorem of Poincaré, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **27** (1971), 299—302.
[K12-12] On cohomology of Kleinian groups. III, Singular Eichler integrals, *Acta Math.*, **127** (1971), 23—40.
Кравец (Kravetz S.)
[K13] On the geometry of Teichmüller spaces and the structure of their modular groups, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **278** (1959), 1—35.
Крушкаль С. Л.
[K14-1] К проблеме модулей римановых поверхностей, *ДАН СССР*, **183** (1968), № 4, 762—764.
[K14-2] Одна аппроксимационная теорема для аналитических функций и ее применения, *ДАН СССР*, **184** (1969), № 6, 1277—1280.
[K14-3] К вопросу о зависимости голоморфных дифференциалов от модулей римановых поверхностей, *ДАН СССР*, **189** (1969), № 3, 472—474.
Крюит, Лавринович (Kruyz J., Lawrynowicz J.)
[KЛ] Quasiconformal mappings of the unit disc with two invariant points, *Mich. Math. J.*, **14** (1967), 487—492.
Кубота (Kubota Y.)
[K15] On analytic mappings of a certain Riemann surface onto itself, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 73—84.

Курибаяси (Kuribayashi A.)
[К16] On analytic families of compact Riemann surfaces with non-trivial automorphisms, *Nagoya Math. J.*, 28 (1966), 119—165.
Курран (Curran P.)
[К17] Cohomology of F-groups, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 152 (1970), N 2, 609—621.
Ларчер (Larcher H.)
[Л1] A necessary and sufficient condition for a discrete group of linear fractional transformations to be discontinuous, *Duke Math. J.*, **30** (1963), 433—436.
Левитс (Lewittes J.)
[Л2-1] Riemann surface and the theta function, *Acta Math.*, **111** (1964), 37—61.
[Л2-2] Differentials and matrices on Riemann surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **139** (1969), 311—318.
Лётбехер (Leutbecher A.)
[Л3] Über spitzen diskontinuierlicher Gruppen von lineargebrochenen Transformationen, *Math. Z.*, **100** (1967), 183—200.
Ленг (Lang S.)
[Л4] Algebraic Functions, Benjamin, New York, 1967.
Ленер (Lehner J.)
[Л5-1] On the multipliers of the Dedeking modular functions, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **72B** (1968), 253—261.
[Л5-2] Automorphic integrals with preassigned periods, *J. Res. Nat. Bur. Standards*, **73B** (1969), 153—161.
[Л5-3] The Picard theorems, *Amer. Math. Monthly*, **76** (1969), 1005—1012.
[Л5-4] Automorphic integrals with preassigned period polynomials and the Eichler cohomology, Proc. Atlas Symposium № 2, «Computers in Number Theory».
[Л5-5] The Eichler cohomology of a Kleinian group, *Math. Ann.*, **192** (1971), N 1, 125—143.
[Л5-6] Discontinuous groups and automorphic functions, Mathematical Surveys, 18, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 1964.
[Л5-7] A short course in automorphic functions, Holt, New York, 1966.
Лехто (Lehto O.)
[Л6] A boundary value problem for conformal mappings, Современные проблемы теории аналитических функций (труды международной конференции в Ереване), «Наука», М., 1966, 216—218.
Лехто, Виртанен (Lehto O., Virtanen K. L.)
[ЛВ] On the existence of quasiconformal mappings with prescribed complex dilitations, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, **274** (1960).
Ли (Lee B.)
[Л7] On regularly branched three-sheeted covering Riemann surfaces, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **20** (1968), 170—185.
Линдон, Улман (Lyndon R. C., Ullman J. L.)
[ЛУ-1] Groups of elliptic linear fractional transformations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 1119—1124.
[ЛУ-2] Pairs of real 2×2 matrices that generate free products, *Mich. Math. J.*, **15** (1968), 161—166.
Ловентал (Lowenthal F.)
[Л8] Transitive subsemigroups of the Moebius group, *J. Math. Mech.*, **18**, (1968), 173—189.
Маккин, Зингер (McKean H. P., Jr., Singer I. M.)
[М3] Curvature and the Eigenvalues of the Laplacian, *J. Diff. Geom.*, **1** (1967), 43—69. [Русский перевод: в сб. *Математика*, **13:6** (1969), 138—161.]

Маклейн (MacLane S.)
[M1] Гомология, «Мир», М., 1966.
Мамфорд (Mumford D.)
[M2] Abelian quotients of the Techmüller modular group, *J. Analyse Math.*, **18** (1967), 227—244. [Русский перевод: в сб. *Математика*, **12**:6 (1968), 67—79.]
Марден (Marden A.)
[M3-1] On finitely generated Fuchsian groups, *Comment. Math. Helv.*, **42** (1967), 81—85.
[M3-2] On homotopic mappings of Riemann surfaces, *Ann. of Math.*, **90** (1969), 1—8.
[M3-3] An inequality for Kleinian groups, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).
[M3-4] The geometry of finitely generated Kleinian groups without torsion, *Ann. of Math.*, Ser. 2, **99** (1974), № 3, 383—462.
[M3-5] Isomorphisms between Fuchsian groups (to appear).
Марден, Ричардс, Родин (Marden A., Richards I., Rodin B.)
[MPP-1] On regions bounded by homotopic curves, *Pacific J. Math.*, **16** (1966), 337—339.
[MPP-2] Analytic self-mappings on Riemann surfaces, *J. Analyse Math.*, **18** (1967), 197—225.
Мартенс (Martens H. H.)
[M4-1] A new proof of Torelli's theorem, *Ann. of Math.*, **78** (1963), 107-111.
[M4-2] Torelli's theorem and generalization for hyperelliptic surfaces, *Comm. Pure Appl. Math.*, **16** (1963), 97—110.
[M4-3] An extended Torelli theorem, *Amer. J. Math.*, **87** (1965), 257—261.
[M4-4] On the varieties of special divisors on a curve, I and II, *J. Math.*, **227** (1967), 111—120, and **233** (1968), 89—100.
[M4-5] Remarks on Clifford's theorem (not published).
[M4-6] From the classical theory of Jacobian varieties (to appear).
Мартио (Martio C.)
[M5] On harmonic quasiconformal mappings, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A1, **425** (1969).
Маскит (Maskit B.)
[M6-1] A conjecture concerning planar coverings of surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 396—398.
[M6-2] Construction of Kleinian groups, Proc. Conf. on Complex Analysis, Minnesota, 1964, 281—296.
[M6-3] On Klein's combination theorem, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120** (1965), 499—509.
[M6-4] A theorem on planar covering surfaces with application to 3-manifolds, *Ann. of Math.*, **81** (1965), 341—355.
[M6-5] A characterization of Schottky groups, *J. Analyse Math.*, **19** (1967), 227—230.
[M6-6] On Klein's combination theorem, II, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **131** (1968), 32—39.
[M6-7] The conformal groups of a plane domain, *Amer. J. Math.*, **90** (1968), 718—722.
[M6-8] On a class of Kleinian groups, *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, Ser. A, **442** (1969).
[M6-9] On boundaries of Teichmüller spaces and on Kleinian groups, II, *Ann. of Math.*, **91** (1970), 607—639.
[M6-10] On Klein's combination theorem, III, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).
[M6-11] On Poincaré's theorem for fundamental polygons (to appear).
[M6-12] Self-maps of Kleinian groups, *Amer. J. Math.*, 93 (1971), № 3, 840—856.

Мейер (Mayer A.)
[M7] Special divisors and the Jacobian variety, *Math. Ann.*, **153** (1964), 163—167.
Мейс (Meis T.)
[M8] Minimale Blätterzahl der Konkretisierung einer Kompakten Riemannschen Fläche, Schr. Math. Inst. Münster, 1960.
Мейсон (Mason A. W.)
[M9] On a theorem of Leon Greenberg, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **23** (1969), 18—23.
Миклюков В. М.
[M10-1] Об ε-квазиконформных отображениях шара на шар, *ДАН СССР*, **187** (1969), № 4, 734—735.
[M10-2] Об устранимых особенностях квазиконформных отображений, *ДАН СССР*, **188** (1969), № 3, 525—527.
Милленштейн (Millenstein H. M.)
[M11] On cycloidal subgroups of the modular group, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **19** (1969), 164—176.
Мицумото (Mizumoto H.)
[M12] Periods of differentials and relative extremal length, II, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 399—404.
Накаи (Nakai M.)
[H1-1] On rings of analytic functions on Riemann surfaces, *Proc. Japan Acad.*, **39** (1963), 79—84.
[H1-2] Royden's map between Riemann surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **72** (1966), 1003—1005.
[H1-3] Harmonic differentials with prescribed singularities, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **131** (1968), 297—302.
Нарасимхан (Narasimhan R.)
[H2] Imbedding of open Riemann surfaces, *Nachr. Acad. Wiss. Göttingen*, Math.-Phys., Kl. 11, **7** (1960), 159—165.
Неванлинна (Nevanlinna R.)
[H3] Униформизация, ИЛ, М., 1955.
Нехари (Nehari Z.)
[H4-1] Schawarzian derivatives and schlicht functions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55 (1949), 545—551.
[H4-2] Conformal mappings, McGraw-Hill, New York, 1952.
Ниино (Niino K.)
[H5] On the family of analytic mappings between two ultrahyperelliptic surfaces, II, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **21** (1969), 491—495.
Нильсен (Nielsen J.)
[H6] Untersuchungen zur Topologie der geschlossenen zweiseitigen Flächen, *Acta Math.*, **50** (1927), 189—358.
Ньюмен (Newman M.)
[H7-1] Pairs of matrices generating discrete free groups and free products, *Mich. Math. J.*, **15** (1968), 155—160.
[H7-2] Maximal normal subgroups of the modular group, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **19** (1968), 1138—1144.
О'Бирн (O'Byrne B.)
[O] On Finsler geometry and applications to Teichmüller spaces, Advances in the theory of Riemann surfaces, *Ann. of Math. Studies*, **66** (1971),
Паршин А. Н.
[П1] Об одном обобщении якобиева многообразия, *Изв. АН СССР*, сер. матем., **30** (1966), № 1, 175—182.
Песин И. Н.
[П2] Отображения, квазиконформные в среднем, *ДАН СССР*, **187** (1969), № 2, 740—742.

Петерсон (Petersson H.)
[П3-1] Theorie der automorphen Formen beliebiger reeler Dimension und ihre Darstellung eine neuen Art Poincaréscher Reihen, *Math. Ann.*, **103** (1930), 369—436.
[П3-2] Sur analytischen Theorie der Grenzkreisgruppen, I and II, *Math. Ann.*, **115** (1937—38), 23—67, and 175—204.
[П3-3] Die linearen Relationen zwischen den ganzen Poincaréschen Reihen von reeler Dimension zur Modelgruppe, *Abh. Math. Sem. Hamb. Univ.*, **12** (1938), 415—472.
[П3-4] Über automorphe Formen mit Singularitäten in Diskontinuitätsgebeit, *Math. Ann.*, **129** (1955), 370—390.
Планкетт (Plunkett R. L.)
[П4] A topological proof of the continuity of the derivative of a function of a complex variable, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **65** (1959), 1—4.
Порселли, Коннел (Porcelli P., Connell E. H.)
[ПК] A proof of the power series expansion without Cauchy's formula, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **67** (1961), 177—181.
Пуанкаре (Poincaré H.)
[П5-1] Mémoire sur les groupes kleinéens, *Acta Math.*, **3** (1883), 49—92.
[П5-2] Sur l'uniformisation des fonctions analytiques, *Acta Math.*, **31** (1907), 1—64.
Раджесвара Рао (Rajeswara Rao K. V.)
[Р1-1] On certain algebras, *Mich. Math. J.*, **11** (1964), 231—235.
[Р1-2] Fuchsian groups of convergence type and Poincaré series of dimension 2, *J. Math. Mech.*, **18** (1969), 629—644.
[Р1-3] Reproducing formulas for Poincaré series of dimension 2 and application, Advances in the theory of Riemann surfaces, *Ann. of Math. Studies*, **66** (1971).
Радо (Rado T.)
[Р2] Über den Begriff der Riemannschen Fläche, Acta Szeged, **2** (1925), 101—121.
Раух (Rauch H. E.)
[Р3] A transcendental view of the space of algebraic Riemann surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **71** (1965), 1—39.
Раух, Фаркаш (Rauch H. E., Farkas H. M.)
[РФ-1] Relations between two kinds of theta constants on a Riemann surface, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **59** (1968), 52—55.
[РФ-2] Theta constants of two kinds on a compact Riemann surface of genus 2, *J. Analyse Math.*, **23** (1970), 381—407.
Резникофф (Resnikoff H. L.)
[Р4-1] On differential operators and automorphic forms, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124** (1966), 334—346.
[Р4-2] Non trivial cusp forms in several complex variables, *Rice Univ. Studies*, **54** (1968), 55—61.
[Р4-3] Supplement to «some remarks on Poincaré series», *Compos. Math.*, **21** (1969), 177—181.
[Р4-4] A differential equation for an Eisenstein series of genus two, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **65** (1970), 495—496.
[Р4-5] On singular automorphic forms in several complex variables, *Amer. J. Math.* (to appear).
[Р4-6] Generating some rings of modular forms in several complex variables by one element (to appear).
Реммерт (Remmert R.)
[Р5] Sur les espaces analytiques holomorphiquement séparables et holomorphiquement convexes, *C.R. Acad. Sci. Paris*, **243** (1956), 118—121.

Рейч, Стребел (Reich E., Strebel K.)
[РС] On quasiconformal mappings which keep the boundary points fixed, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **138** (1969), 211—222.
Рикман (Rickman S.)
[Р6-1] Boundary correspondence under quasiconformal mappings of Jordan domains, *J. Math. Mech.*, **18** (1968), 429—432.
[Р6-2] Quasiconformally equivalent curves, *Duke Math. J.*, **36** (1969), 387—400.
Ричардс (Richards I.)
[Р7-1] A criterion for rings of analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **128** (1967), 523—530.
[Р7-2] Axioms for analytic functions, *Advances in Math.*, 5 (1970), 311—338.
Родин (Rodin B.)
[Р8] On the span of a Riemann surface, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **76** (1970), 340—341.
Ройден (Royden H. L.)
[Р9-1] Rings of analytic functions on an open Riemann surface, Appl. Math. and Stat. Labs. Rep., 1, Stanford Univ., 1955.
[Р9-2] Rings of analytic and meromorphic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **83** (1956), 269—276.
[Р9-3] Rings of meromorphic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 9 (1958), 959—965.
[Р9-4] The boundary values of analytic and harmonic functions, Appl. Math. and Stat. Labs. Rep., 19, Stanford University, 1960.
[Р9-5] The boundary values of analytic functions, *Math. Z.*, **78** (1962), 1—24.
[Р9-6] Function algebras, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 281—298. [Русский перевод: в сб. *Математика*, 9:2 (1965), 98—114.]
[Р9-7] Algebras of bounded analytic functions on Riemann surfaces, *Acta Math.*, **114** (1965), 113—142.
[Р9-8] Function theory on compact Riemann surfaces, *J. Analyse Math.*, **18** (1967), 295—327.
[Р9-9] Report on the Teichmüller metric, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **65** (1970), 497—499.
[Р9-10] Automorphisms and isometries of Teichmüller space, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).
Рудин (Rudin W.)
[Р10-1] Analyticity and the maximum modulus principle, *Duke Math. J.*, **20** (1953), 449—457.
[Р10-2] An algebraic characterization of conformal equivalence, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **61** (1955), 543.
[Р10-3] Some theorems on bounded analytic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **78** (1955), 333—342.
Рюеди (Rüedy R.)
[Р11] Einbettungen Riemannscher Flächen in den dreidimensionalen euklidschen Raum, *Comment. Math. Helv.*, **43** (1968), 417—442.
Сах (Sah C. H.)
[С1] Groups related to compact Riemann surfaces, *Acta Math.*, **123** (1969), 13—42.
Сельберг (Selberg A.)
[С2] On discontinuous groups in higher-dimensional symmetric spaces, Contributions to function theory, Bombay (1960), 147—164. [Русский перевод: в сб. *Математика*, 6:3 (1962), 3—16.]
Сетарес (Sethares G. C.)
[С3] The extremal property of certain Teichmüller mappings, *Comment. Math. Helv.*, **43** (1968), 98—119.

Спрингер (Springer G.)
[C4] Введение в теорию римановых поверхностей, ИЛ, М., 1960.
Сребро (Srebro U.)
[C5] Groups of linear fractional transformations, *Duke Math. J.*, **34** (1967), 49—52.
Стаут (Stout E. L.)
[C6-1] Bounded holomorphic functions on finite Riemann surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **120** (1965), 255—285.
[C6-2] On some algebras of analytic functions on finite open Riemann surfaces, *Math. Z.*, **92** (1966), 366—379, and **95** (1967), 403—404.
[C6-3] Interpolation of finite open Riemann surfaces, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **18** (1967), 274—278.
Сучек (Souchek J.)
[C7] Rings of analytic functions, *Pacific J. Math.*, **33** (1970), 233—240.
Тейхмюллер (Teichmüller O.)
[T] Beweis der analytischen Abhängigkeit des Kronformen Moduls einer analytischen Ringflächenschar von der Parametern, *Deutsche Math.*, **7** (1944), 309—336.
Фаркаш (Farkas H. M.)
[Ф1-1] Special divisors and analytic subloci of Teichmüller space, *Amer. J. Math.*, 88 (1966), 881—901, and 89 (1967), 225.
[Ф1-2] Automorphisms of compact Riemann surfaces and the vanishing of theta constants, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 231—232.
[Ф1-3] Weierstrass points and analytic submanifolds of Teichmüller space, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **20** (1969), 35—38.
[Ф1-4] Theta constants, moduli, and compact Riemann surfaces, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **62** (1969), 320—325.
[Ф1-5] On the Schottky relation and its generalization to arbitrary genus, *Ann. of Math.*, **92** (1970), 57—86.
Фаркаш, Рауx (Farkas H. M., Rauch H. E.)
[ФР] Two kinds of theta constants and period relations on a Riemann surface, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, **62** (1969), 679—686.
Фаррел (Farrell O. J.)
[Ф2] On approximation to an analytic function by polynomials, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **40** (1934), 908—914.
Фенчел, Нильсен (Fenchel W., Nielsen J.)
[ФН] Treatise on Fuchsian groups (not published).
Флорак (Florack H.)
[Ф3] Reguläre und meromorphe Funktionen auf nicht geschlossenen Riemannschen Flächen, *Schr. Math. Inst. Univ. Munster*, **1** (1948).
Форд (Ford L.)
[Ф4] Автоморфные функции, ОНТИ, 1935.
Фукс (Fuchs W. H. J.)
[Ф5] Topics in the theory of Functions of One Complex Variable, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1967.
Харви (Harvey W. J.)
[X1-1] On Branch loci in Teichmüller space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **153** (1971), 387—399.
[X1-2] Spaces of Fuchsian groups and Teichmüller theory, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).
Хайаси (Hayashi K.)
[X2] Existence of maximal analytic functions on Riemann surfaces, *Kodai Math. Sem. Rep.*, **20** (1968), 314—317.
Хейнс (Heins M.)
[X3-1] Riemann surfaces of infinite genus, *Ann. of Math.*, 55 (1952), 296—317.

[Х3-2] Algebraic structure and conformal mapping, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **89** (1958), 267—276.
[Х3-3] Symmetric Riemann surfaces and boundary problems, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **14** (1965), 129—143.
Хелмер (Helmer O.)
[Х4] Divisibility properties of integral functions, *Duke Math. J.*, **6** (1940), 345—356.
Хелфенштейн (Helfenstein H. G.)
[Х5] Analytic maps between tori, *Bull. Amer., Math. Soc.*, **75** (1969), 857—859.
Хенриксен (Henriksen M.)
[Х6] On the ideal structure of the ring of entire functions, *Pacific. J. Math.*, **2** (1952), 179—184.
Холи, Шиффер (Hawley N. S., Schiffer M.)
[ХШ-1] Half-order differentials on Riemann surfaces, *Acta Math.*, **115** (1966), 199—236.
[ХШ-2] Riemann surfaces which are doubles of plane domains, *Pacific J. Math.*, **20** (1967), 217—222.
Хуссейни, Кнопп (Husseini S. Y., Knopp M. I.)
[ХК] Eichler cohomology and automorphic forms, *Ill. J. Math.*, **15** (1971), N 4, 565—577.
Цишанг (Zieschang H.)
[Ц] Über Automorphismen ebener diskontinuierlicher Gruppen, *Math. Ann.*, **166** (1966), 148—167.
Чарлап, Васкез (Charlap L. S., Vasquez A. T.)
[ЧВ-1] The cohomology of group extensions, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **69** (1963), 815—817.
[ЧВ-2] The cohomology of group extensions, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **124** (1966), 24—40.
Чукров (Chuckrow V.)
[Ч-1] Schottky groups and limits of Kleinian groups, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 139—141.
[Ч-2] On Schottky groups with applications to Kleinian groups, *Ann. of Math.*, **88** (1968), 47—61.
Шац (Schatz A.)
[Ш1] On the local behavior of homeomorphic solutions of Beltrami's equation, *Duke Math. J.*, **35** (1968), 289—306.
Шеретов В. Г.
[Ш2] Инвариантные пространства в пространстве Тейхмюллера, Пермь, *Уч. зап. ун-та*, 103 (1963), 156—159.
Шиллер (Schiller J.)
[Ш3] Moduli for special Riemann surfaces of genus 2, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **144** (1969), 95—113.
Шиллинг (Schilling O. F. G.)
[Ш4] Ideal theory on open Riemann surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 945—963.
Шимицу (Shimizu H.)
[Ш5] On discontinuous groups operating on the product of the upper half planes, *Ann. of Math.*, **77** (1963), 33—71. [Русский перевод: в сб. *Математика*, **10**:3 (1966), 126—164.]
Шимура (Shimura G).
[Ш6] Sur les intégrales attachées aux formes automorphes, *J. Math. Soc. Japan*, **11** (1959), 291—311. [Русский перевод: в сб. *Математика*, 9:3 (1965), 130—149.]
Шиффер, Холи (Schiffer M., Hawley N. S.)
[ШХ] Connections and conformal mapping, *Acta Math.*, **107** (1962), 175—274.

Эдвардс (Edwards R. E.)
[Э1] Algebras of holomorphic functions, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **7** (1957), 510—517.
Эйхлер (Eichler M.)
[Э2-1] Eine Verallgemeinerung der Abelschen Integrale, *Math. Z.*, **67** (1957), 267—298.
[Э2-2] Grenzkreisgruppen und kettenbruchartige Algorithmen, *Acta Arithmetica*, **11** (1965), 169—180.
Эллинг (Alling N. L.)
[Э3-1] The valuation theory of meromorphic function fields over open Riemann surfaces, *Acta Math.*, **110** (1963), 79—96.
[Э3-2] A proof of the corona conjecture for finite Riemann surfaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 110—112.
[Э3-3] Extensions of meromorphic function rings over non-compact Riemann surfaces, I and II, *Math. Z.*, 89 (1965), 273—299, and 93 (1966), 345—394.
[Э3-4] The valuation theory of meromorphic function fields, Proc. of symposia in Pure Math., 11, 1968, 8—29, Entire functions and related parts analysis.
[Э3-5] Real Banach algebras and non-orientable Klein surfaces I. *J. reine angew. Math.*, **241** (1970), 200—208.
Эллинг, Гринлиф (Alling N., Greenleaf N.)
[ЭГ] Klein surfaces and real algebraic function fields, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **75** (1969), 869—872.
Эрл (Earle C. J.)
[Э4-1] The Teichmüller space of an arbitrary Fuchsian group, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **70** (1964), 699—701.
[Э4-2] Teichmüller spaces of groups of the second kind, *Acta Math.*, **112** (1964), 91—97.
[Э4-3] A reproducing formula for integrable automorphic forms, *Amer. J. Math.*, 88 (1966), 867—870.
[Э4-4] The contractibility of certain Teichmüller spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 434—437.
[Э4-5] Reduced Teichmüller spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **126** (1967), 54—63.
[Э4-6] On holomorphic cross sections in Teichmüller spaces, *Duke Math. J.*, **36** (1969), 409—416.
[Э4-7] Some remarks on Poincaré series, *Compos. Math.*, **21** (1969), 167—176.
[Э4-8] On moduli of closed Riemann surfaces with symmetries, Advances in the theory of Riemann surfaces, Ann. of Math. Studies, **66** (1971).
Эрл, Иллс (Earle C. J., Eells J.)
[ЭИ-1] The diffeomorphism group of a compact Riemann surface, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73** (1967), 557—559.
[ЭИ-2] On the differential geometry of Teichmüller spaces, *J. Analyse Math.*, **19** (1967), 35—52.
[ЭИ-3] A fibre bundle description of Teichmüller theory, *J. Diff. Geom.*, 3 (1969), 19—43.
Эрл, Марден (Earle C. J., Marden A.)
[ЭМ-1] Projections to automorphic functions, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 19 (1968), 274—278.
[ЭМ-2] On Poincaré series with application to H^p spaces on Riemann surfaces, *Ill. J. Math.*, 13 (1969), 202—219.
Эрл, Шац (Earle C. J., Schatz A.)
[ЭШ] Teichmüller theory for surfaces with boundary, *J. Diff. Geom.*, 4 (1970), N 2, 169—185.

Юрческу (Jurchescu M.)
[Ю] Coherent sheaves on bordered Riemann surfaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **144** (1969), 557—563.
Ямагуси (Yamaguchi H.)
[Я-1] Regular operators and space of harmonic functions with finite Dirichlet integral on open Riemann surfaces, *J. Math. Kyoto Univ.*, 8 (1968), 169—198.
[Я-2] Holomorphic functions and open harmonic mapping, *J. Math. Kyoto Univ.*, 9 (1969), 381—391.

УКАЗАТЕЛЬ ОБОЗНАЧЕНИЙ

---

[1]) «Страница 0» означает стандартное обозначение или определение.

$(\,.\,,\,.\,)_q$ — спаривание (скалярное произведение) Петерсона для тривиальной группы 64

$\|\cdot\|_{q,\,p,\,G}$ — норма в пространстве p-интегрируемых q-форм 63

Θ_q — оператор, задаваемый рядом Пуанкаре 65

β_q — проекционный оператор 65

$\mathcal{A}_q^p(D)$ — банахово пространство p-интегрируемых голоморфных форм веса $(-2q)$ для тривиальной группы 64

$\mathcal{L}_q^p(D)$ — банахово пространство p-интегрируемых измеримых форм веса $(-2q)$ для тривиальной группы 64

$\mathcal{A}_q(\Delta, \Gamma)$ — векторное пространство голоморфных автоморфных форм на Δ веса $(-2q)$ для клейновой группы Γ 106

$\mathcal{A}_q^p(D, G)$ — банахово пространство p-интегрируемых голоморфных автоморфных форм на D веса $(-2q)$ для группы G 64

$\mathcal{L}_q^p(D, G)$ — банахово пространство p-интегрируемых измеримых автоморфных форм на D веса $(-2q)$ для группы G 63

A_q^* — оператор на функциях 63

$f_{p,\,q}^*$ — оператор на функциях 62

площадь (Δ/G) — площадь Пуанкаре фундаментальной области для G в Δ 50

$\mathcal{A}_q(d)$ — мероморфные автоморфные формы веса $(-2q)$, соответствующее дивизору d 85, 149

$\mathcal{A}_q(\Lambda)$ — пространство интегрируемых рациональных функций с полюсами в Λ 88, 94

$$\varphi(z, \zeta) = \varphi_{a_1, \ldots, a_{2q-1}}(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i}\,\frac{1}{\zeta - z}\prod_{j=1}^{2q-1}\frac{z-a_j}{\zeta-a_j} \quad 91,\ 115,\ 160$$

$$f(z, \zeta) = f_{a_1, \ldots, a_{2q-1}}(z, \zeta) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\varphi(z, \gamma\zeta)\,\gamma'(\zeta)^q \quad 115,\ 161$$

$$h(z, \zeta) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\gamma\in\Gamma}\frac{\gamma'(\zeta)^q}{z-\gamma\zeta} \quad 146$$

Π_{2q-2} — Γ-модуль полиномов степени $\leqslant 2q-2$ 102

$\mathcal{A}_q(\Delta)$ — Γ-модуль голоморфных функций 105

$\mathcal{C}_{r,\,s}^{\infty}$ — Γ-модуль гладких функций 105

$\mathcal{A}(\Gamma)$ — Γ-инварианты в Γ-модуле $\mathcal{A}$ 106

$H^n(\Gamma, \mathcal{A})$ — n-я группа когомологий группы Γ с коэффициентами в Γ-модуле $\mathcal{A}$ 106

$H^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ — группа когомологий Эйхлера 103

$PH_\Delta^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ — Δ-параболические классы когомологий 104

$PH^1(\Gamma, \Pi_{2q-2})$ — параболические классы когомологий 104

$H^1(\Gamma, Z)$ — группа целочисленных когомологий 246

$\mathcal{E}_{1-q}(d)$ — пространство мероморфных интегралов Эйхлера, у которых полярный дивизор кратен d 149

$P\mathcal{E}_{1-q}(d)$ — пространство мероморфных параболических интегралов Эйхлера, у которых полярный дивизор кратен d 149

$\mathscr{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ — пространство голоморфных интегралов Эйхлера 132
$P\mathscr{E}_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ — пространство параболических голоморфных интегралов Эйхлера 146
$\mathscr{E}^b_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ — пространство ограниченных интегралов Эйхлера 133
$\mathscr{E}^c_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ — пространство квазиограниченных интегралов Эйхлера 133
$\mathscr{E}^0_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ — пространство тривиальных интегралов Эйхлера 133
$\mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ — пространство мероморфных интегралов Эйхлера 146
$P\mathscr{E}^m_{1-q}(\Delta, \Gamma)$ — пространство параболических мероморфных интегралов Эйхлера 146
∂^{2q-1} — дифференцирование (по z), повторенное $2q-1$ раз 132
δ — кограничный оператор 105
β^* — отображение Берса 115
β — обращение отображения Берса 125
α — отображение периодов 136
$\mathscr{L}_{\Omega_1}$ — оператор на пространстве параболических форм 140
$\mathrm{Cl}\Delta$ — замыкание Δ 0
$\partial\Delta$ — граница Δ 0
$\overline{\Delta} = \Delta \cup \{$параболические вершины на $\Delta\}$ 85, 148
$\overline{\Delta/\Gamma} = \overline{\Delta}/\Gamma$ 45, 131
G^* — группа характеров фуксовой группы G 208
$D_0(M)$ — группа дивизоров на M степени нуль 198
$\Gamma(M)$ — группа периодов римановой поверхности M 197
$J(M)$ — якобиево многообразие римановой поверхности M 197
$a \cdot b$ — число пересечения циклов a и b 187
$\langle \omega, a \rangle = \int\limits_a \omega$ — спаривание между 1-формами и 1-циклами 183
$^*\omega$ — сопряженная к ω форма 181, 182
τ_{PQ} — мероморфный нормализованный абелев дифференциал с полюсами в P и Q 194
$\langle \omega_1, \omega_2 \rangle = \iint\limits_M \omega_1 \wedge \overline{^*\omega_2}$ — скалярное произведение в гильбертовом пространстве 1-форм 213
$\mathscr{A}^p_q(M)$ — банахово пространство p-интегрируемых голоморфных q-форм на римановой поверхности M 212
$\nu(p)$ — число ветвления точки p 46
S_a — пространство дифференциалов Шоттки 229
S_r — пространство дифференциалов Шоттки, вещественных на границе 229
$\exp A_0(\Delta, \Gamma) = \{e^{2\pi i f};\ f \in \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)\}$ 246
$\mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)^{-1} = \{f \in \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma);\ 1/f \in \mathscr{A}_0(\Delta, \Gamma)\}$ 246
$\mathrm{red\,ord}_P\, \varphi$ — редуцированный порядок автоморфной формы φ в точке P 82
$\mathrm{Aut}\, S$ — группа конформных преобразований римановой поверхности S 59

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

И. КРА

АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И КЛЕЙНОВЫ ГРУППЫ

Редактор Г. М. Цукерман
Художник М. М. Мержиевский
Художественный редактор В. И. Шаповалов
Технический редактор В. П. Сизова

Сдано в набор 3/III 1975 г. Подписано к печати 19/VIII 1975 г. Бумага кн. журн. $60\times90^1/_{16} = 9{,}25$ бум. л. Печ. л. 18,50. Уч.-изд. л. 16,36. Изд. № 1/7532
Цена 1 р. 85 к. Заказ 0748

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени Московская типография № 7 «Искра революции» Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли. Москва, К-1, Трехпрудный пер., 9

И. Кра

АВТОМОРФНЫЕ ФОРМЫ И КЛЕЙНОВЫ ГРУППЫ