СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

СЕРИЯ ВЫПУСКАЕТСЯ ПОД ОБЩИМ РУКОВОДСТВОМ
РЕДАКЦИОННОЙ КОЛЛЕГИИ ЖУРНАЛА
«УСПЕХИ МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК»

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

М. А. КРАСНОСЕЛЬСКИЙ

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ТЕОРИИ НЕЛИНЕЙНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1956

11-5-4

Красносельский Марк Александрович.

Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений.

Редактор *М. М. Горячая.*

Техн. редактор *Н. А. Тумаркина.* Корректор *А. С. Бакулова.*

Сдано в набор 30/XI 1955 г. Подписано к печати 13/II 1956 г. Бумага 84×108/32. Физ. печ. л. 12,25. Условн. печ. л. 20,09. Уч.-изд. л. 20,73. Тираж 6000 экз. Т-01794. Цена книги 11 р. 35 к. Заказ № 813.

Государственное издательство технико-теоретической литературы
Москва, В-71, Б. Калужская, 15.

Министерство культуры СССР. Главное управление полиграфической промышленности. 4-я типография им. Евг. Соколовой.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

С рукописью настоящей книги (или с ее частями) знакомился ряд математиков. Автор пользуется случаем поблагодарить за ценные советы и различные замечания М. Г. и С. Г. Крейнов, Л. А. Люстерника, С. Г. Михлина, В. И. Соболева, Г. Е. Шилова и Л. Э. Эльсгольца. По рукописи книги изучали отдельные вопросы нелинейного функционального анализа мои ученики и сотрудники Я. Б. Рутицкий, Л. А. Ладыженский, А. И. Поволоцкий и И. А. Бахтин. Я рад отметить, что им принадлежит ряд страниц в предлагаемой читателю редакции книги.

Красносельский М. А.

ВВЕДЕНИЕ

1. Нелинейные уравнения появляются в многочисленных задачах современной физики и техники. Поэтому важность исследования таких уравнений не вызывает никаких сомнений.

Первое большое и серьезное исследование нелинейных интегральных уравнений содержалось в замечательной работе А. М. Ляпунова [44] по фигурам равновесия вращающейся жидкости. В несколько более общей форме результаты А. М. Ляпунова были получены затем Э. Шмидтом [72] и Л. Лихтенштейном [40].

Аналитические методы исследования нелинейных уравнений развивались в работах ряда математиков (П. С. Урысон [66], А. И. Некрасов [48], Гаммерштейн [13], Иглиш [23], Н. Н. Назаров [46] и другие). В частности, А. И. Некрасов и Н. Н. Назаров, пользуясь разложениями по малому параметру, изучили для некоторых операторов вопрос о структуре спектра, о количестве решений уравнений, аналитически зависящих от параметра.

В течение последних 25—30 лет появились и получили довольно широкое развитие топологические методы исследования нелинейных уравнений. Эти методы возникли в связи с теоремами существования решений, но в настоящее время нашли приложения в самых разнообразных задачах.

Первые доказательства теорем существования решений топологическими методами принадлежат Биркгофу и Келлогу [7]. Основная идея доказательства Биркгофа и Келлога была сформулирована Ю. Шаудером [71] в форме принципа неподвижной точки. Обобщение принципа Шаудера на случай преобразований линейных топологических (но не нормированных) пространств предложил А. Н. Тихонов [65].

Пользуясь принципами неподвижной точки (принцип Шаудера и принцип сжатых отображений), В. В. Немыцкий [49а—е] установил в ряде работ различные теоремы существования и единственности решений у интегральных уравнений. Теоремы В. В. Немыцкого давали более общие условия существования решений, чем некоторые теоремы, установленные ранее другими авторами аналитическим путем. Этот же метод применяли в дальнейшем к доказательству теорем существования решений у других классов нелинейных уравнений В. М. Дубровский [21], Н. С. Смирнов [61а], А. И. Гусейнов [19] и многие другие.

Существенный шаг вперед в развитии топологических методов доказательства теорем существования решений был сделан Ю. Шаудером и Ж. Лере [39], которые ввели новое понятие топологической степени некоторых отображений в банаховых пространствах.

Идея использования топологической степени отображений нашла развитие в работах Э. Роте [56], который показал (в основном для случая гильбертова пространства), что топологическая степень отображений обладает многими свойствами степени Брауэра — Хопфа отображений в конечномерном пространстве.

При помощи понятия степени новые теоремы существования решений были установлены Ж. Лере [38], Дольфом [20] и др. Новые теоремы установил также Э. Роте; следует заметить, что теоремы Роте следуют и из принципа Шаудера. Интересное исследование точек ветвления при помощи понятия степени было проведено Э. Кронин [35]. Некоторые новые приложения понятия степени были указаны автором (задача о точках бифуркации, изучение структуры спектра и др.).

Однако понятие топологической степени незаслуженно не нашло еще широкого распространения и применения.

В задаче о существовании собственных функций получили развитие два специальных «геометрических» метода (мы говорим здесь об общих методах, а не об исследовании конкретных уравнений).

Вариационный метод позволил доказать ряд теорем существования собственных функций у некоторых нелинейных интегральных уравнений М. Голомбу [17], Л. Лихтенштейну [40] и другим авторам. В частности, М. Голомб сформулировал общий принцип существования собственных функций у операторов Гаммерштейна с положительно определенным ядром. Затем было показано, что аналогичный метод применим для доказательства существования собственных функций у операторов Гаммерштейна с некоторыми не положительно определенными ядрами.

Важную роль в задачах о собственных функциях нелинейных операторов сыграли топологические методы, берущие свое начало от работ Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана, в которых даются оценки числа решений вариационных задач. Эти методы были развиты Л. Э. Эльсгольцем, С. В. Фроловым, А. И. Фетом и другими советскими математиками (см., например, [43], [68], [74]). В 1939 г. Л. А. Люстерник доказал теорему о существовании бесконечного множества собственных чисел для некоторых классов нечетных операторов, действующих в гильбертовом пространстве. Приложения (и дальнейшее развитие) теорема Л. А. Люстерника нашла в работах В. И. Соболева [63], Э. С. Цитланадзе [70] и др.

Другой геометрический подход к задаче о существовании собственных функций у нелинейных операторов предложил М. Г. Крейн. Разработанная им теория конусов в банаховых пространствах позволила М. А. Рутману исследовать некоторые классы монотонных положительных операторов (см. [34]). В дальнейшем методы теории конусов были применены и к исследованию немонотонных операторов, а также к доказательству теорем урысоновского типа о спектре положительных операторов.

2. Предположим, что мы рассматриваем задачу, связанную с изучением уравнения

$$\varphi = \lambda \mathbf{A}\varphi, \tag{1}$$

где $\mathbf{A}$ — некоторый нелинейный оператор. Задачу естественно считать корректно поставленной, если решение ее изменится «мало» при «малом» (в некотором смысле, зависящем от конкретной задачи) изменении оператора $\mathbf{A}$.

Пусть уравнению (1) поставлен в соответствие некоторый геометрический объект, причем соответствие таково, что «малому» изменению оператора $\mathbf{A}$ в уравнении (1) отвечает «малое» изменение геометрического объекта и, наоборот, «малому» изменению геометрического объекта отвечает «малое» изменение оператора $\mathbf{A}$. Тогда, очевидно, *каждая корректно поставленная задача для уравнения* (1) *должна формулироваться в терминах топологических инвариан-*

тов малых преобразований соответствующего геометрического объекта.

Естественным геометрическим объектом, который можно поставить в соответствие уравнению (1), является векторное поле $\Phi = \mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}$ ($\mathbf{I}$ — оператор тождественного преобразования) в банаховом пространстве, в котором действует оператор $\mathbf{A}$.

Как оказывается, единственным топологическим инвариантом гомотопных преобразований векторных полей вида $\Phi = \mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, рассматриваемых на границах ограниченных областей, является вращение поля (понятие вращения поля на границе области эквивалентно понятию Лере — Шаудера топологической степени отображения области).

Поэтому следует ожидать, что *каждая корректно поставленная задача для уравнения* (1) *должна найти естественную постановку в терминах вращения и наиболее простое решение при помощи понятия вращения.*

Так и оказывается. Большинство задач, возникающих при изучении нелинейных уравнений, можно формулировать для различных случаев в терминах вращения. При этом понятие вращения позволяет не только более просто установить известные ранее предложения, но и значительно их обобщить, а иногда понятие вращения позволяет решить новые задачи. Понятие вращения позволяет доказывать теоремы существования и единственности решений. Понятие вращения позволяет доказывать теоремы неединственности — теоремы ляпуновского типа о ветвлениях. Понятие вращения позволяет доказывать существование собственных функций, исследовать структуру множества собственных функций, исследовать спектр оператора, устанавливать непрерывность спектра и т. д. Понятие вращения позволило совсем просто решить задачу о существовании точек бифуркации — обосновать для ряда случаев линеаризацию в задаче о точках бифуркации. Понятие вращения оказывается удобным и при исследовании некоторых приближенных методов решения линейных и нелинейных уравнений.

Поэтому мы считаем, что *основу метода качественного исследования нелинейных уравнений дают топологические соображения.* При помощи методов топологии нужно искать ответ на принципиальные вопросы, связанные с изучением нелинейных уравнений.

Последние утверждения не следует, конечно, понимать как отрицающие роль других методов исследования. Более того, топологические методы приобретают силу только при разумном сочетании их с другими приемами.

3. Книга состоит из шести глав.

Первая глава носит вспомогательный характер. Предложения, излагаемые в этой главе, позволяют в последующих главах иллюстрировать общие теоремы примерами нелинейных интегральных уравнений с интегростепенными рядами А. М. Ляпунова, операторами П. С. Урысона и Гаммерштейна.

В первой главе (частью без доказательства) излагаются признаки непрерывности и полной непрерывности различных нелинейных интегральных операторов, признаки слабой непрерывности и дифференцируемости функционалов и т. д.

Более подробно (§ 2) изучен в первой главе оператор

$$\mathbf{f}\varphi(x) = f[x, \varphi(x)],$$

где $\mathbf{f}(x, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Оказывается, что этот оператор всегда непрерывен и ограничен, если он только действует из одного пространства L^{p_1} в другое L^{p_2}.

Как нам кажется, самостоятельный интерес представляют доказываемые в § 4 теоремы о расщеплении некоторых линейных операторов, действующих из L^q в L^p $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, в произведение двух сопряженных линейных операторов. Эти теоремы будут использованы в главе шестой.

Исследованиям Э. С. Цитланадзе слабо непрерывных функционалов посвящен параграф пятый.

Во второй главе излагается основной метод исследования — теория вращения вполне непрерывных векторных полей. В первых двух параграфах излагается теория Брауэра — Хопфа степени отображения на конечномерную сферу. Часть предложений этой теории приводится без доказательств; другая часть доказывается при помощи «нумерационных» соображений, связанных с изучением различных нумераций вершин симплициальных комплексов. В частности, во втором параграфе приводится простое доказательство теоремы

Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука о нечетности вращения нечетного векторного поля на сфере.

В третьем параграфе вводится понятие вращения вполне непрерывного векторного поля и доказывается, что вращение поля полностью определяет гомотопический класс полей.

Последний параграф главы посвящен вопросам вычисления вращения вполне непрерывных векторных полей. В первую очередь здесь излагаются теоремы Лере — Шаудера о вращении линейных и близких к линейным полей. В параграфе излагаются новые теоремы, например бесконечномерный аналог теоремы Л. А. Люстерника—Л. Г. Шнирельмана—К. Борсука и некоторые другие.

Глава третья посвящена теоремам существования и единственности решений.

В первом параграфе при помощи принципа сжатых отображений вводится понятие резольвенты нелинейного оператора и исследуются свойства резольвенты.

Во втором параграфе доказывается ряд теорем существования решений. Понятие резольвенты нелинейного оператора позволяет при этом исследовать уравнения и с не вполне непрерывными операторами.

В последнем параграфе главы доказывается сходимость метода академика Галеркина приближенного решения нелинейных (в частности, линейных) уравнений и устанавливается быстрота сходимости. В этом параграфе устанавливается также быстрота сходимости метода Галеркина при отыскании простых собственных чисел и функций линейных операторов, причем соответствующее исследование ведется при помощи нелинейных операторов.

Четвертая глава посвящена задаче о собственных функциях.

В первом параграфе приводятся общие теоремы о непрерывных ветвях собственных функций, о непрерывности спектра.

Во втором параграфе рассматривается задача о точках бифуркации. Понятие резольвенты нелинейного оператора позволяет исследовать не только вполне непрерывные операторы. Основной результат параграфа заключается в обосновании линеаризации в задаче о точках бифуркации для случая, когда дифференциал Фреше исследуемого оператора имеет нечетнократные (например, простые) собственные числа.

В третьем параграфе устанавливается существование непрерывных ветвей собственных функций для асимптотически линейных операторов.

Четвертый параграф посвящен рассмотрению особого случая, когда дифференциал Фреше исследуемого оператора имеет единицу собственным числом. Такой случай рассматривался впервые А. М. Ляпуновым (точки ветвления). Поэтому получаемые здесь теоремы мы называем теоремами ляпуновского типа.

В последнем параграфе изучается расположение спектра нелинейного оператора в окрестности точек бифуркации.

Пятая глава посвящена методам, связанным с теорией М. Г. Крейна конусов в банаховом пространстве.

Основным результатом главы является использование методов теории конусов для изучения положительных немонотонных операторов.

Использование топологических методов и, в частности, понятия вращения позволило исследовать структуру множества собственных функций положительных операторов. Оказалось, что они образуют непрерывные ветви. Для некоторых классов операторов удается исследовать и структуру множества собственных чисел, отвечающих положительным собственных функциям. Доказываемые на этом пути теоремы содержат, в частности, ряд предложений П. С. Урысона о спектре одного конкретного класса интегральных операторов [66].

В последней — шестой главе излагаются вариационно-топологические методы исследования нелинейных уравнений. В этой главе мы останавливаемся на тех же задачах, которые рассматривались в предыдущих главах.

При помощи общего принципа существования критической точки у некоторых функционалов в гильбертовом пространстве в первом параграфе доказываются различные теоремы существования решений. Затем показывается, как аналогичные утверждения могут быть доказаны и при помощи топологических принципов существования неподвижной точки.

Использование одновременно топологических и вариационных соображений позволяет (§ 2) для потенциальных операторов доказать более сильные утверждения о законности линеаризации в задаче о точках бифуркации, чем установленные в главе четвертой.

В третьем параграфе излагаются вариационные принципы существования континуумов собственных функций у нелинейных операторов.

В последнем параграфе доказывается теорема о существовании у некоторых потенциальных операторов счетного числа собственных значений, которым отвечают нормированные собственные функции. Эта теорема вытекает из оценки числа критических значений — минимумов и максимумов функционалов на множествах некоторых классов. Основной результат параграфа заключается в доказательстве устойчивости этих критических значений.

Во всей главе рассматриваются в качестве примеров уравнения Гаммерштейна с симметрическими ядрами (не ставя перед собой цели полного изучения этого уравнения, мы не останавливаемся подробно на выяснении свойств решений и собственных функций: их ограниченности, непрерывности и т. д.).

4. В книге нет систематического изложения важного раздела нелинейного функционального анализа — методов Л. А. Люстерника и Л. Г. Шнирельмана оценки числа критических точек на произвольных многообразиях, общей теории категорий и других инвариантов типа категории (см., например, [41д], [43], [68], [74]). Некоторое представление об этих методах можно получить по главе шестой, так как основные результаты параграфов второго и четвертого получены при помощи основной конструкции теории категорий — построения минимаксимальных значений функционалов.

Совершенно не изложены в книге интересные работы М. К. Гавурина [11] и других авторов об операторах с аналитическими нелинейностями.

Настоящая книга не имеет целью дать полное и систематическое изложение всех результатов, полученных в теории нелинейных интегральных уравнений, в настоящее время достаточно богатой интересными и содержательными фактами. В частности, в книге не нашли полного отражения интересные работы П. С. Урысона, А. И. Некрасова, Н. Н. Назарова и других математиков, проведенные аналитическими методами. Не нашли отражения также методы приближенного решения уравнений, разработанные Л. В. Канторовичем и его учениками. В книге в основном изложены факты, получаемые при помощи геометрических соображений. В числе других в книге изложены результаты исследований автора, проведенных в 1948—1953 гг. (часть этих результатов, в большинстве случаев без доказательств, была опубликована в ряде заметок, часть публикуется впервые).

Общая теория нелинейных операторных уравнений, развитая в книге, иллюстрируется различными интегральными уравнениями. Однако все факты этой теории применимы и к изучению всех тех краевых и граничных задач для дифференциальных уравнений, которые могут быть сведены, как это часто бывает, к уравнениям с вполне непрерывными (или только непрерывными) операторами.

ГЛАВА I

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

Чтобы применять для изучения заданного конкретного нелинейного интегрального оператора излагаемые в книге геометрические методы, нужно построить функциональное пространство, в котором этот оператор обладает «хорошими» свойствами: непрерывен, вполне непрерывен, дифференцируем и т. д.

Мы ограничимся рассмотрением в качестве примеров таких нелинейных операторов, для изучения которых достаточно применения пространства C непрерывных функций и пространства L^p функций, суммируемых с p-й степенью. Поэтому в настоящей главе мы приводим признаки непрерывности, полной непрерывности и ограниченности различных нелинейных операторов только для тех случаев, когда эти операторы действуют в пространстве C или в пространстве L^p.

Вопрос о получении достаточно общих признаков непрерывности и полной непрерывности нелинейных интегральных операторов в заданных конкретных функциональных пространствах первым поставил, повидимому, В. В. Немыцкий. Ему принадлежат и первые теоремы в этом направлении.

Вопрос о построении функционального пространства, в котором заданный конкретный оператор обладает теми или иными нужными свойствами, впервые рассматривался Ю. Шаудером. Вопрос этот в настоящее время еще мало изучен. Для интегральных операторов с существенно нестепенными (например, экспоненциальными) нелинейностями вопрос о построении пространства, в котором оператор вполне непрерывен изучался Я. Б. Рутицким и автором [35в]; полученные результаты используют теорию пространств Орлича и поэтому выходят за рамки настоящей книги.

§ 1. Основные понятия

Мы приводим здесь ряд основных определений и утверждений, используемых в дальнейшем. Однако дальнейшее изложение ведется в предположении, что читатель знаком с элементами линейного функционального анализа (например, в объеме первых пяти глав книги Л. А. Люстерника и В. И. Соболева [42]).

1. Операторы в банаховых пространствах. *Банаховым пространством* называют полное линейное нормированное пространство. Мы будем изучать операторы, действующие в вещественном банаховом пространстве E, т. е. в таком пространстве, в котором определено умножение элементов на вещественные числа. Последнее предположение не ограничивает общности рассмотрений, так как каждое комплексное линейное пространство можно рассматривать и как вещественное.

Будут рассматриваться также и операторы, действующие из одного банахова пространства E_1 в другое E_2: операторы с областью определения в E_1 и множеством значений в E_2.

Элементы банахова пространства (там, где это не будет приводить к недоразумениям) будем называть также точками или векторами. Нулевой вектор любого банахова пространства будем обозначать через θ.

Вектор $\varphi \in E$ $(\varphi \neq \theta)$ называется *собственным вектором* оператора $\mathbf{A}$, действующего в пространстве E, если найдется такое число λ, что

$$\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi.$$

Число λ при этом называется *собственным числом* оператора $\mathbf{A}$, *соответствующим* собственному вектору φ. О собственном векторе φ также говорят, что он соответствует собственному числу λ. Каждому собственному вектору оператора $\mathbf{A}$, очевидно, соответствует единственное собственное число. Обратное утверждение не всегда справедливо: одному и тому же собственному числу может соответствовать несколько или даже бесконечное множество собственных векторов. Например, каждому собственному числу линейного оператора соответствует подпространство собственных векторов.

Число, обратное собственному, называют *характеристическим*.

Оператор $\mathbf{A}$, действующий из пространства E_1 в пространство E_2, называют *непрерывным*, если он каждую сходящуюся (по норме в E_1) последовательность элементов преобразует также в сходящуюся (по норме в E_2) последовательность элементов. Оператор $\mathbf{A}$ называется *ограниченным*, если он каждое ограниченное (по норме) множество элементов преобразует в ограниченное множество.

Понятия непрерывности и ограниченности оператора независимы друг от друга. Приведем пример непрерывного, но не ограниченного функционала (оператора с множеством значений — вещественными числами) в пространстве l^2 числовых последовательностей $\varphi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$, в котором норма задается равенством

$$\|\varphi\| = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \xi_i^2\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определим этот функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ равенством

$$\mathbf{F}(\varphi) = \sum{}' (|\xi_i| - 1) \cdot i,$$

где сумма распространена на те значения индекса i, зависящие от φ, при которых $|\xi_i| \geqslant 1$. Для каждого элемента $\varphi \in l^2$ таких значений индекса будет конечное число. Непрерывность функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ в l^2 доказывается без труда. Функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ ограничен (равен нулю) на шаре $\|\varphi\| \leqslant 1$ и не ограничен на каждом шаре большего радиуса, чем единица.

Если оператор $\mathbf{A}$ *линеен*, т. е. аддитивен и однороден:

$$\mathbf{A}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\mathbf{A}\varphi + \mu\mathbf{A}\psi \qquad (\varphi, \psi \in E, \ \lambda, \ \mu \text{ — числа}),$$

то он непрерывен тогда и только тогда, когда он ограничен (см., например, [42]). Из последнего утверждения следует, что для линейного непрерывного оператора $\mathbf{A}$ можно указать такие числа $k \geqslant 0$, что для всех элементов $\varphi \in E$, на которых оператор $\mathbf{A}$ определен,

$$\|\mathbf{A}\varphi\| \leqslant k\,\|\varphi\|.$$

Наименьшее из чисел k, при которых выполняется последнее неравенство, называется *нормой* оператора $\mathbf{A}$ и обозначается через $\|\mathbf{A}\|$.

Наряду с *сильной* сходимостью элементов в E (сходимостью по норме) рассматривают *слабую* сходимость. Напомним, что последовательность $\varphi_n \in E$ $(n=1, 2, \ldots)$ называется *слабо сходящейся* к элементу $\varphi_0 \in E$, если для каждого линейного непрерывного функционала $\mathbf{L}$, заданного на E, последовательность чисел $\mathbf{L}(\varphi_n - \varphi_0)$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходится к нулю. Всюду в тексте, где употребляется без оговорок слово «сходимость», подразумевается сильная сходимость.

2. Пространства C и L^p (см. [42]). Пусть G — ограниченное замкнутое множество конечномерного евклидова пространства. Совокупность всех непрерывных вещественных функций на G образует банахово пространство C, если естественным образом определить операции сложения и умножения на числа и задать норму равенством

$$\|\varphi(x)\| = \max_{\varphi \in G} |\varphi(x)|.$$

При таком определении сильная сходимость, очевидно, равносильна равномерной сходимости.

Пусть теперь G — измеримое множество конечной или бесконечной меры. Мы будем предполагать (здесь и всюду в дальнейшем), что *мера непрерывна*, т. е. что каждое подмножество $G_1 \subset G$ конечной меры можно разбить на две части половинной меры. Совокупность всех функций, суммируемых на G с p-й степенью $(p \geqslant 1)$, образует банахово пространство L^p, если не различать функции, отличающиеся друг от друга только на множестве нулевой меры, и если определить норму равенством

$$\|\varphi(x)\| = \left\{ \int_G |\varphi(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}.$$

В дальнейшем часто будет использоваться *неравенство Гельдера*

$$\left| \int_G \varphi(x) \psi(x) \, dx \right| \leqslant \left\{ \int_G |\varphi(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}} \cdot \left\{ \int_G |\psi(x)|^q \, dx \right\}^{\frac{1}{q}},$$

где $\varphi(x) \in L^p$ $(p > 1)$, $\psi(x) \in L^q$, причем $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Числа p и q, связанные равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, называются *сопряженными*.

Скалярное произведение функций $\varphi(x)\in L^p$ и $\psi(x)\in L^q$ обозначается через (φ, ψ):

$$(\varphi, \psi)=\int\limits_G \varphi(x)\psi(x)\,dx.$$

Неравенство Гельдера можно записать в виде

$$|(\varphi, \psi)|\leqslant\|\varphi\|\cdot\|\psi\|,$$

где $\|\varphi\|$ — норма функции $\varphi(x)$ в L^p, а $\|\psi\|$ — норма функции $\psi(x)$ в L^q.

В случае $p=q=2$ неравенство Гельдера превращается в *неравенство Буняковского*.

Из неравенства Гельдера следует, что каждая функция $\psi(x)\in L^q$ задает на L^p линейный непрерывный функционал $\mathbf{L}(\varphi)$ равенством $\mathbf{L}(\varphi)=(\varphi, \psi)$. Оказывается, что такими функционалами исчерпываются все линейные непрерывные функционалы на L^p (см., например, [42]).

Пространство L^2 особенно важно для приложений, так как оно является гильбертовым пространством (см. [4], [42], [62]).

3. Вполне непрерывные операторы. Пусть E_1 и E_2 — банаховы пространства. Оператор $\mathbf{A}$, определенный на множестве $M\subset E_1$, с множеством значений в E_2 называется *компактным*, если из каждой ограниченной последовательности векторов $\varphi_n\in M$ $(n=1, 2, \ldots)$ можно выделить такую подпоследовательность φ_{n_i} $(i=1, 2, \ldots)$, что векторы $\mathbf{A}\varphi_{n_i}$ сходятся в E_2. Иначе говоря, оператор $\mathbf{A}$ компактен, если он каждое ограниченное множество преобразует в компактное.

Оператор $\mathbf{A}$ называется *вполне непрерывным*, если он непрерывен и компактен.

Пусть $\mathbf{A}_k$ $(k=1, 2, \ldots)$ — последовательность вполне непрерывных операторов, определенных на $M\subset E_1$ и действующих из E_1 в E_2. Пусть $\mathbf{A}$ — такой оператор, также определенный на M и действующий из E_1 в E_2, что $\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{A}_k\varphi\|$ стремится к нулю при $k\to\infty$ равномерно относительно векторов φ из любого ограниченного множества $M_1\subset M$. *Тогда оператор* $\mathbf{A}$ *вполне непрерывен.*

Это утверждение почти очевидно. Пусть, действительно, $\varphi_n\in M$ $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность, сходящаяся в E_1 к элементу $\varphi_0 \in M$. Тогда при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \|A\varphi_0 - A\varphi_n\| \leqslant$$
$$\leqslant \|A\varphi_0 - A_k\varphi_0\| + \lim_{n\to\infty} \|A_k\varphi_0 - A_k\varphi_n\| + \lim_{n\to\infty} \|A_k\varphi_n - A\varphi_n\| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \sup_{n=0,\,1,\,2,\,\ldots} \|A\varphi_n - A_k\varphi_n\|,$$

откуда в силу произвольности k

$$\lim_{n\to\infty} \|A\varphi_0 - A\varphi_n\| = 0.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ непрерывен. Пусть теперь задано число $\varepsilon > 0$. По предположению найдется такое число k, что $\|A\varphi - A_k\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$ $(\varphi \in M_1)$. Из этого неравенства следует, что каждая $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть множества A_kM_1 будет ε-сетью множества AM_1. Так как компактное множество A_kM_1 имеет конечную $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть, то множество AM_1 имеет тоже конечную ε-сеть. Значит, AM_1 компактно.

Перейдем к рассмотрению линейных вполне непрерывных операторов.

Отметим (см. [5a]), что *линейный вполне непрерывный оператор преобразует каждую слабо сходящуюся последовательность векторов в последовательность, сходящуюся сильно.*

Более подробно рассмотрим случай, когда $E_1 = E_2 = E$, т. е. случай, когда вполне непрерывный линейный оператор $\mathbf{A}$ действует в пространстве E. Для этого случая теория линейных вполне непрерывных операторов создана Ф. Риссом [55]. Важные обобщения теории Ф. Рисса на более широкие классы линейных операторов были получены С. М. Никольским [50]. Теория линейных вполне непрерывных операторов в линейных топологических пространствах развита Лере [86], а затем Альтманом [3].

Мы приведем без доказательств основные результаты теории Рисса; эти результаты в дальнейшем будут использованы. Теория Рисса, кроме [55], изложена в [5a], [69].

Если отличное от нуля число λ не является собственным числом линейного вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$, то оператор $\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I}$ осуществляет гомеоморфное преобразование E на себя (через $\mathbf{I}$ обозначается оператор тождественного преобразования).

Пусть λ — отличное от нуля собственное число линейного вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$. Обозначим через E_λ множество всех решений уравнений

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^n\varphi=\theta \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \tag{1.1}$$

Очевидно, уравнения (1.1) имеют отличные от θ решения, например, каждый собственный вектор оператора $\mathbf{A}$, соответствующий собственному числу λ, будет решением всех уравнений (1.1). E_λ является конечномерным подпространством, размерность которого называется *кратностью собственного числа* λ оператора $\mathbf{A}$. Собственное число λ оператора $\mathbf{A}$ называется *простым*, если E_λ одномерно.

Можно указать *такое наименьшее число* $n_0>0$, *что при* $n>n_0$ *каждое решение уравнения*

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^n\varphi=\theta$$

является одновременно и решением уравнения

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n_0}\varphi=\theta.$$

Введем обозначение

$$E^\lambda=(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})^{n_0}E.$$

Множество E^λ является подпространством пространства E.

При этом каждый элемент $\varphi\in E$ допускает единственное представление в виде

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2,$$

где $\varphi_1\in E_\lambda$, $\varphi_2\in E^\lambda$. Это позволяет ввести в рассмотрение два линейных непрерывных оператора $\mathbf{P}_\lambda$ и $\mathbf{P}^\lambda$, определив их равенствами

$$\mathbf{P}_\lambda\varphi=\varphi_1, \qquad \mathbf{P}^\lambda\varphi=\varphi_2. \tag{1.2}$$

Множества значений операторов $\mathbf{P}_\lambda$ и $\mathbf{P}^\lambda$ совпадают соответственно с E_λ и E^λ. Говорят, что $\mathbf{P}_\lambda$ является оператором проектирования на E_λ и соответственно оператор $\mathbf{P}^\lambda$ — оператором проектирования на E^λ.

Множество собственных чисел оператора образует его *спектр*. Спектр линейного вполне непрерывного оператора состоит не более чем из счетного множества чисел, имеющих только одно возможное предельное число — нуль.

Вопрос о существовании у произвольных линейных вполне непрерывных операторов собственных чисел представляет большие трудности. Существуют линейные вполне непрерывные операторы, не имеющие собственных чисел (например, интегральный оператор Вольтерра, порожденный непрерывным ядром, вполне непрерывен в пространстве C, но не имеет в этом пространстве собственных функций). Для частных, правда широких и важных, классов линейных вполне непрерывных операторов существование собственных векторов доказано. С теоремами существования собственных функций у положительных линейных операторов читатель встретится в главе V.

Полностью изучены *самосопряженные* линейные операторы, действующие в гильбертовом пространстве, т. е. такие линейные операторы $\mathbf{A}$, что для любых элементов φ, ψ пространства справедливо равенство

$$(\mathbf{A}\varphi,\ \psi) = (\varphi,\ \mathbf{A}\psi).$$

Каждый линейный вполне непрерывный самосопряженный оператор $\mathbf{A}$ представим (см. [4], [42], [62]) в виде

$$\mathbf{A}\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\varphi,\ e_i)\, e_i,$$

где λ_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ — собственные числа оператора $\mathbf{A}$, e_i $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ — соответствующие собственные векторы, причем

$$(e_i,\ e_j) = \delta_{ij} \qquad (i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где $\delta_{ii} = 1$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

4. Линейные интегральные операторы. Линейные интегральные операторы $\mathbf{A}$ вида

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \int_G K(x,\ y)\,\varphi(y)\,dy \tag{1.3}$$

при весьма широких предположениях относительно ядер $K(x,\ y)$ дают примеры вполне непрерывных операторов в различных функциональных пространствах.

Пусть G — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства. Рассмотрим оператор (1.3) в пространстве C непрерывных на G функций. Легко видеть, что оператор (1.3) вполне непрерывен, если ядро $K(x, y)$ $(x, y \in G)$ непрерывно. Действительно, в этом случае оператор A преобразует каждое ограниченное множество функций в множество функций, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных, которое в силу теоремы Арцеля компактно в C.

Однако оператор A будет вполне непрерывен в C и при более общих условиях. Достаточно, например, требовать, чтобы ядро $K(x, y)$ удовлетворяло следующим требованиям:

а) для каждого $x \in G$ функция $K(x, y)$ измерима и суммируема по y;

б) для каждого $x \in G$

$$\lim_{x_1 \to x} \int_G |K(x_1, y) - K(x, y)|\, dy = 0.$$

Общий вид линейного вполне непрерывного оператора в пространстве C нашел Радон [54].

Ниже мы не будем каждый раз перечислять ограничения накладываемые на ядро для того, чтобы порожденный этим ядром оператор (1.3) был вполне непрерывен в C. Будем говорить коротко, что ядро $K(x, y)$ *допустимо*, если оператор (1.3), порожденный этим ядром, вполне непрерывен в C.

В дальнейшем рассматриваются также линейные операторы (1.3), действующие из одного пространства L^{p_1} в другое L^{p_2} $(p_1, p_2 > 1)$. При этом предполагается, что G — измеримое множество конечной или бесконечной непрерывной меры.

Для случая $\operatorname{mes} G < \infty$ достаточным условием полной непрерывности оператора (1.3), действующего из L^{p_1} в L^{p_2}, является выполнение неравенства (см., например, [5a])

$$\int_G \int_G |K(x, y)|^{\max\left\{\frac{p_1}{p_1 - 1},\, p_2\right\}} dx\, dy < \infty.$$

В § 3 будут приведены условия полной непрерывности некоторых нелинейных интегральных операторов в пространстве C и в пространстве L^p.

§ 2. Оператор $\mathfrak{f}$

Говорят, что некоторая функция $f(s, u)$ двух переменных $-\infty < u < \infty$, $s \in G$ удовлетворяет *условиям Каратеодори* ([25], см. также [8]), если она непрерывна по u почти при всех $s \in G$ и измерима по s при всех значениях u. Через G здесь обозначено множество n-мерного пространства конечной или бесконечной меры.

Обозначим через $\mathfrak{f}$ оператор, заданный на совокупности вещественных функций на G равенством

$$\mathfrak{f} u(s) = f[s, u(s)],$$

где $f(s, u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори.

Этот нелинейный оператор играет фундаментальную роль в изучении широкого класса нелинейных интегральных уравнений. Нас будут в этом параграфе интересовать в основном свойства оператора $\mathfrak{f}$ для случая, когда он действует из одного пространства L^{p_1} в другое L^{p_2}. Оказывается, что непрерывность и ограниченность оператора $\mathfrak{f}$ вытекают уже из одного того факта, что $\mathfrak{f}$ действует из L^{p_1} в L^{p_2}.

1. Сходимость по мере.

Лемма 2.1 (В. В. Немыцкий [496]). *Пусть G — множество конечной меры. Тогда оператор $\mathfrak{f}$ преобразует каждую сходящуюся по мере последовательность функций*

$$u_1(s), \ u_2(s), \ \ldots \quad (s \in G) \tag{2.1}$$

в последовательность функций, также сходящуюся по мере.

Доказательство. Пусть последовательность (2.1) сходится по мере к функции $u_0(s)$.

Обозначим через G_k ($k = 1, 2, \ldots$) множество тех $s \in G$, для которых из неравенства

$$|u_0(s) - u| < \frac{1}{k}$$

следует:

$$|f[s, u_0(s)] - f(s, u)| < \varepsilon,$$

где ε — произвольное заданное положительное число.

Очевидно, $G_1 \subset G_2 \subset \ldots$

Из непрерывности функции $f(s, u)$ по u почти при всех $s \in G$ вытекает, что

$$\operatorname{mes} \bigcup_{k=1}^{\infty} G_k = \operatorname{mes} G,$$

откуда следует

$$\lim_{k \to \infty} \operatorname{mes} G_k = \operatorname{mes} G. \tag{2.2}$$

Пусть заданы положительные числа η и ε. Выберем число k_0 так, что

$$\operatorname{mes} G_{k_0} > \operatorname{mes} G - \frac{\eta}{2};$$

это возможно в силу (2.2). Через F_n обозначим множество тех точек $s \in G$, для которых

$$| u_0(s) - u_n(s) | < \frac{1}{k_0}.$$

Выберем теперь такое N, что для всех $n > N$

$$\operatorname{mes} F_n > \operatorname{mes} G - \frac{\eta}{2}.$$

Рассмотрим последовательность функций

$$\mathfrak{f}u_1(s) = f[s, u_1(s)], \qquad \mathfrak{f}u_2(s) = f[s, u_2(s)], \ \ldots$$

Через D_n обозначим множество тех точек $s \in G$, для которых

$$| f[s, u_0(s)] - f[s, u_n(s)] | < \varepsilon.$$

Очевидно,

$$G_{k_0} \cap F_n \subset D_n,$$

откуда следует, что

$$\operatorname{mes} D_n > \operatorname{mes} G - \eta.$$

Так как ε и η произвольны, то последним неравенством лемма доказана.

2. Непрерывность оператора $\mathfrak{f}$ [29ж].

Теорема 2.1. *Пусть оператор $\mathfrak{f}$ преобразует каждую функцию из L^{p_1} в функцию из L^{p_2} $(p_1, p_2 \geqslant 1)$ *). Тогда оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен.*

Доказательство. Пусть вначале $\operatorname{mes} G < \infty$.

Предположим, что $\mathfrak{f}\theta = \theta$, и покажем, что оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен в нуле θ пространства L^{p_1}. Допустим, что это не так. Тогда существует такая сильно сходящаяся к θ последовательность функций $\varphi_n(s) \in L^{p_1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\int_G |\mathfrak{f}\varphi_n(s)|^{p_2} ds > \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.3}$$

где α — некоторое положительное число. Будем считать при этом, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_G |\varphi_n(s)|^{p_1} ds < \infty. \tag{2.4}$$

Построим такие последовательности чисел ε_k, функций $\varphi_{n_k}(s)$ и множеств $G_k \subset G$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что выполнены условия:

a) $\varepsilon_{k+1} < \frac{1}{2}\varepsilon_k$,

b) $\operatorname{mes} G_k \leqslant \varepsilon_k$,

c) $\displaystyle\int_{G_k} |\mathfrak{f}\varphi_{n_k}(s)|^{p_2} ds > \frac{2}{3}\alpha$,

d) из $\operatorname{mes} D \leqslant 2\varepsilon_{k+1}$ для любого множества $D \subset G$ следует, что

$$\int_D |\mathfrak{f}\varphi_{n_k}(s)|^{p_2} ds < \frac{\alpha}{3}.$$

Построение последовательностей ε_k, $\varphi_{n_k}(s)$ и G_k $(k=1, 2, \ldots)$ будем проводить по индукции. Пусть $\varepsilon_1 = \operatorname{mes} G$, $\varphi_{n_1}(s) = \varphi_1(s)$, $G_1 = G$.

---

*) Нетрудно видеть, что оператор $\mathfrak{f}$ преобразует каждую функцию из L^{p_1} в функцию из L^{p_2}, если он преобразует функции из некоторого шара пространства L^{p_1} в функции из L^{p_2}.

Если ε_k, $\varphi_{n_k}(s)$ и G_k построены, то в качестве ε_{k+1} выберем такое число, чтобы было выполнено условие d), что возможно в силу абсолютной непрерывности интеграла

$$\int\limits_G |\mathfrak{f}\varphi_{n_k}(s)|^{p_2}\,ds.$$

При этом автоматически будет выполнено условие а), так как функция $\varphi_{n_k}(s)$ удовлетворяет условию с). В силу леммы 2.1 можно указать такое число n_{k+1} и множество $F_{k+1}\subset G$, что при $s\in F_{k+1}$

$$|\mathfrak{f}\varphi_{n_{k+1}}(s)|<\left(\frac{\alpha}{3\,\mathrm{mes}\,G}\right)^{\frac{1}{p_2}}, \tag{2.5}$$

причем

$$\mathrm{mes}\,G-\mathrm{mes}\,F_{k+1}<\varepsilon_{k+1}. \tag{2.6}$$

Пусть $G_{k+1}=G\setminus F_{k+1}$. Тогда из (2.6) следует выполнение для G_{k+1} условия b). Выполнение условия с) следует из (2.3) и (2.5):

$$\int\limits_{G_{k+1}} |\mathfrak{f}\varphi_{n_{k+1}}(s)|^{p_2}\,ds=$$
$$=\int\limits_G |\mathfrak{f}\varphi_{n_{k+1}}(s)|^{p_2}\,ds-\int\limits_{F_{k+1}} |\mathfrak{f}\varphi_{n_{k+1}}(s)|^{p_2}\,ds>\frac{2}{3}\alpha.$$

Введем в рассмотрение множества

$$D_k=G_k\setminus\bigcup_{i=k+1}^{\infty}G_i \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots).$$

В силу условий а) и b)

$$\mathrm{mes}\bigcup_{i=k+1}^{\infty}G_i\leqslant\sum_{i=k+1}^{\infty}\varepsilon_i<2\varepsilon_{k+1} \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots). \tag{2.7}$$

Определим функцию $\psi(s)$ равенством

$$\psi(s)=\begin{cases}\varphi_{n_k}(s), & \text{если } s\in D_k \quad (k=1,\ 2,\ \ldots),\\[2mm] 0, & \text{если } s\,\overline{\in}\,\bigcup\limits_{i-1}^{\infty}D_i.\end{cases} \tag{2.8}$$

Из условий c), d) и (2.7) следует:

$$\int\limits_{D_k} |\mathbf{f}\psi(s)|^{p_2}\,ds = \int\limits_{D_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(s)|^{p_2}\,ds \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{G_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(s)|^{p_2}\,ds - \int\limits_{G_k \setminus D_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(s)|^{p_2}\,ds > \frac{\alpha}{3} \qquad (2.9)$$

$$(k = 1,\ 2,\ \ldots)$$

В силу (2.4) $\psi \in L^{p_1}$ и по условию теоремы $\mathbf{f}\psi \in L^{p_2}$. С другой стороны, в силу (2.9) $\mathbf{f}\psi \overline{\in} L^{p_2}$, так как $D_i \cap D_j = 0$ при $i \neq j$ и, следовательно,

$$\int\limits_{G} |\mathbf{f}\psi(s)|^{p_2}\,ds \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{D_k} |\mathbf{f}\psi(s)|^{p_2}\,ds = \infty.$$

Полученное противоречие доказывает непрерывность оператора $\mathbf{f}$ в точке θ (в предположении, что $\mathbf{f}\theta = \theta$).

Перейдем к общему случаю. Докажем непрерывность оператора $\mathbf{f}$ в точке $u_0 \in L^{p_1}$. Введем в рассмотрение функцию

$g(s, u) = f[s, u_0(s) + u] - f[s, u_0(s)]$ $(s \in G,\ -\infty < u < \infty)$.

Оператор $\mathbf{g}$, порожденный функцией $g(s, u)$:

$$\mathbf{g}u(s) = g[s, u(s)],$$

будет удовлетворять условию $\mathbf{g}\theta = \theta$ и по уже доказанному будет непрерывен в точке θ. Но это и означает, что оператор $\mathbf{f}$ непрерывен в точке $u_0 \in L^{p_1}$.

Итак, в предположении, что $\operatorname{mes} G < \infty$, теорема доказана.

Пусть теперь $\operatorname{mes} G = \infty$.

Допустим снова, что оператор $\mathbf{f}$ не непрерывен. Без ограничения общности, как было показано выше, можно считать, что он разрывен в точке θ и что $\mathbf{f}\theta = \theta$.

Пусть тогда снова $\varphi_n(s) \in L^{p_1}$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ — такая последовательность функций, что

$$\int\limits_{G} |\mathbf{f}\varphi_n(s)|^{p_2}\,ds > \alpha \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \qquad (2.10)$$

где α — некоторое положительное число. При этом снова будем считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_{G} |\varphi_n(s)|^{p_1} ds < \infty. \tag{2.11}$$

Построим такие последовательности функций $\varphi_{n_k}(s)$ и множеств $D_k \subset G$ $(k = 1, 2, \ldots)$, что

a) $\operatorname{mes} D_k < \infty, \qquad D_i \cap D_j = 0$ при $i \neq j$;

b) $\displaystyle\int_{D_k} |\mathbf{f}\varphi_{n_k}(s)|^{p_2} ds > \frac{\alpha}{2} \qquad (k = 1, 2, \ldots).$

Это построение будем проводить по индукции. Пусть $\varphi_{n_1}(s) = \varphi_1(s)$. Множество D_1 можно построить в силу (2.10). Пусть $\varphi_{n_k}(s)$ и D_k уже построены. Множество $\bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i$ будет иметь по условию a) конечную меру. В силу доказанной непрерывности оператора $\mathbf{f}$ для случая $\operatorname{mes} G < \infty$ можно указать такой индекс n_{k+1}, что

$$\int_{\bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(s)|^{p_2} ds < \frac{\alpha}{2}. \tag{2.12}$$

При этом можно указать такое множество G_{k+1} конечной меры, что

$$\int_{G_{k+1}} |\mathbf{f}\varphi_{n_{k+1}}(s)|^{p_2} ds > \alpha. \tag{2.13}$$

Обозначим множество $G_{k+1} \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{k} D_i$ через D_{k+1}. Выполнение условия a) очевидно. Условие b) для функции $\varphi_{n_{k+1}}(s)$ выполняется в силу (2.12) и (2.13).

Определим снова функцию $\psi(s)$ равенством (2.8):

$$\psi(s) = \begin{cases} \varphi_{n_k}(s), & \text{если } s \in D_k \quad (k = 1, 2, \ldots), \\ 0, & \text{если } s \overline{\in} \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i. \end{cases}$$

В силу (2.11) $\psi \in L^{p_1}$ и по условию теоремы $\mathfrak{f}\psi \in L^{p_2}$. С другой стороны, в силу b) $\mathfrak{f}\psi \overline{\in} L^{p_2}$.

Полученное противоречие доказывает теорему.

3. Ограниченность оператора $\mathfrak{f}$ [29ж]. Напомним, что оператор называется ограниченным, если он каждое ограниченное по норме множество преобразует в множество ограниченное. Как мы уже отмечали в § 1, из непрерывности нелинейного оператора, вообще говоря, не следует его ограниченность.

Теорема 2.2. *Пусть оператор* $\mathfrak{f}$ *преобразует каждую функцию из* L^{p_1} *в функцию из* L^{p_2} $(p_1, p_2 \geqslant 1)$. *Тогда оператор* $\mathfrak{f}$ *ограничен.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{f}\theta = \theta$.

В силу теоремы 2.1 оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен в точке θ. Это значит, что найдется такое $r > 0$, что

$$\int_G |\mathfrak{f}\varphi(s)|^{p_2}\, ds \leqslant 1, \tag{2.14}$$

если

$$\int_G |\varphi(s)|^{p_1}\, ds \leqslant r^{p_1}.$$

Пусть теперь $u(s) \in L^{p_1}$ и

$$nr^{p_1} \leqslant \|u\|^{p_1} \leqslant (n+1)\, r^{p_1},$$

где n — целое число. Тогда можно разбить G на такие части $G_1, \ldots, G_{n+1}$, что

$$\int_{G_i} |u(s)|^{p_1}\, ds \leqslant r^{p_1} \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Тогда в силу (2.14)

$$\int_G |\mathfrak{f}u(s)|^{p_2}\, ds \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} \int_{G_i} |\mathfrak{f}u(s)|^{p_2}\, ds \leqslant n+1,$$

откуда

$$\|\mathfrak{f}u(s)\| = \left\{ \int_G |\mathfrak{f}u(s)|^{p_2}\, ds \right\}^{\frac{1}{p_2}} \leqslant \left[\left(\frac{\|u\|}{r} \right)^{p_1} + 1 \right]^{\frac{1}{p_2}}.$$

Теорема доказана.

4. Достаточные условия непрерывности оператора f.

Теорема 2.3. *Если оператор* f *действует из* L^{p_1} *в* L^{p_2} $(p_1, p_2 \geqslant 1)$, *то*

$$|f(s, u)| \leqslant a(s) + b\,|u|^{\frac{p_1}{p_2}}, \tag{2.15}$$

где b — *положительная постоянная*, $a(s) \in L^{p_2}$.

Доказательство. В силу теоремы 2.2 найдется положительное число b такое, что

$$\int\limits_G |f[s, u(s)]|^{p_2}\, ds \leqslant b^{p_2}$$

при

$$\int\limits_G |u(s)|^{p_1}\, ds \leqslant 1.$$

Определим функцию

$$\varphi(s, u) = \begin{cases} |f(s, u)| - b\,|u|^{\frac{p_1}{p_2}}, & \text{если} \quad |f(s, u)| > b\,|u|^{\frac{p_1}{p_2}}, \\ 0, & \text{если} \quad |f(s, u)| \leqslant b\,|u|^{\frac{p_1}{p_2}}. \end{cases}$$

Очевидно, если $\varphi(s, u) \neq 0$, то

$$|\varphi(s, u)|^{p_2} \leqslant |f(s, u)|^{p_2} - b^{p_2}|u|^{p_1}.$$

Рассмотрим какую-либо функцию $u(s) \in L^{p_1}$. Обозначим через $\tilde{G}$ множество тех $s \in G$, в которых $\varphi[s, u(s)] > 0$. Пусть $\int\limits_G |u(s)|^{p_1}\, ds = n + \varepsilon$, где n — целое число, а $0 \leqslant \varepsilon < 1$. Тогда множество $\tilde{G}$ можно разбить на такие $n+1$ части $G_1, G_2, \ldots, G_{n+1}$, что

$$\int\limits_{G_i} |u(s)|^{p_1}\, ds < 1 \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Тогда

$$\int\limits_G |f[s, u(s)]|^{p_2}\, ds = \sum_{i=1}^{n+1} \int\limits_{G_i} |f[s, u(s)]|^{p_2}\, ds \leqslant (n+1)\, b^{p_2}$$

и

$$\int\limits_{G} |\varphi[s, u(s)]|^{p_2} ds \leqslant \int\limits_{\tilde{G}} |f[s, u(s)]|^{p_2} ds - b^{p_2} \int\limits_{\tilde{G}} |u(s)|^{p_1} ds \leqslant$$

$$\leqslant (n+1) b^{p_2} - b^{p_2}(n+\varepsilon) \leqslant b^{p_2}. \qquad (2.16)$$

Обозначим через G_k $(k=1, 2, \ldots)$ такую последовательность вложенных друг в друга множеств конечной меры, что $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k$.

Так как почти при всех $s \in G$ функция $\varphi(s, u)$ непрерывна по u, то почти всюду на G можно определить последовательность функций $u_k(s)$ $(k=1, 2, \ldots)$ таких, что $u_k(s)=0$ при $s \overline{\in} G_k$ и

$$\varphi[s, u_k(s)] = \max_{-k \leqslant u \leqslant k} \varphi(s, u).$$

Очевидно, $u_k(s) \in L^{p_1}$. Положим

$$a(s) = \sup_{-\infty < u < \infty} \varphi(s, u) = \lim_{k \to \infty} \varphi[s, u_k(s)].$$

В силу (2.16) и теоремы Фату ([47], стр. 125)

$$\int\limits_{G} |a(s)|^{p_2} ds \leqslant \sup_{k} \int\limits_{G} |\varphi[s, u_k(s)|^{p_2} ds \leqslant b^{p_2}.$$

Значит, $a(s) \in L^{p_2}$.

Так как

$$a(s) = \sup_{-\infty < u < \infty} \varphi(s, u) \geqslant \sup_{-\infty < u < \infty} \left\{ |f(s, u)| - b|u|^{\frac{p_1}{p_2}} \right\},$$

то

$$|f(s, u)| \leqslant a(s) + b|u|^{\frac{p_1}{p_2}} \qquad (s \in G, \ -\infty < u < \infty).$$

Теорема доказана.

Эта теорема была доказана автором и без доказательства сформулирована в статье Я. Б. Рутицкого [5,а]. Приведенное изложение доказательства этой теоремы также принадлежит Я. Б. Рутицкому. М. М. Вайнберг в [10н] эту теорему доказал, следуя несколько иному плану.

Условие (2.15) очевидным образом обеспечивает действие оператора из L^{p_1} в L^{p_2}. Следовательно (в силу теоремы 2.1), оно является и достаточным условием непрерывности оператора $\mathbf{f}$.

Неравенство (2.15), как достаточное условие непрерывности оператора $\mathbf{f}$, действующего из L^{p_1} в L^{p_2} (для случая, когда $\operatorname{mes} G < \infty$), было указано впервые М. М. Вайнбергом *) (см., например, [1сж]). Это предложение М. М. Вайнберга является непосредственным следствием леммы 2.1 В. В. Немыцкого. Действительно, непрерывность оператора $\mathbf{f}$ в точке $u_0(s) \in L^{p_1}$ будет доказана, если мы покажем, что

$$\lim_{n\to\infty} \int_G |f[s, u_n(x)] - f[s, u_0(s)]|^{p_2} ds = 0$$

для любой последовательности функций $u_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$, сходящейся в L^{p_1} к $u_0(s)$. Последовательность функций под знаком интеграла в силу леммы В. В. Немыцкого сходится по мере к нулю. Для перехода к пределу под знаком интеграла в силу теоремы Витали [47] нужно, чтобы подинтегральные функции имели *равностепенно абсолютно непрерывные интегралы*, т. е., чтобы для любого $\varepsilon > 0$ можно было указать такое $\delta > 0$, что для любого множества $G_1 \subset G$ из $\operatorname{mes} G_1 < \delta$ следует:

$$\int_{G_1} |f[s, u_n(s)] - f[s, u_0(s)]|^{p_2} ds < \varepsilon \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

При выполнении (2.15) условие теоремы Витали следует из того, что функции $|u_n(s)|^{p_1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы, и из того, что

$$\begin{aligned} |f[s, u_n(s)] - f[s, u_0(s)]|^{p_2} &\leqslant \\ &\leqslant 2^{p_2}\{|f[s, u_n(s)]|^{p_2} + |f[s, u_0(s)]|^{p_2}\} \leqslant \\ &\leqslant 4^{p_2}\{2|a(s)|^{p_2} + |u_n(s)|^{p_1} + |u_0(s)|^{p_1}\}. \end{aligned}$$

---

*) Он же высказал гипотезу о том, что неравенство (2.15) необходимо для непрерывности оператора $\mathbf{f}$.

В. В. Немыцким, затем М. М. Вайнбергом и другими авторами были предложены и другие формы достаточных условий непрерывности оператора $\mathfrak{f}$, действующего из пространства L^{p_1} в пространство L^{p_2} (В. В. Немыцкий и М. М. Вайнберг дополнительно предполагали, что $\operatorname{mes} G < \infty$). Эти условия, конечно, вытекают и из теоремы 2.1.

Мы приведем один используемый ниже достаточный признак непрерывности и ограниченности оператора $\mathfrak{f}$.

Пусть непрерывная по u функция $f(s, u)$ $(s \in G, -\infty < u < \infty)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(s, u)| \leqslant \sum_{i=j}^{n} T_i(s)\,|u|^{\beta_i} + b\,|u|^{\beta_0},$$

где

$$T_i(s) \in L^{\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2\beta_i}}, \quad 0 \leqslant p_2\beta_i < p_1 \quad (i = 1, \ldots, n), \quad \beta_0 = \frac{p_1}{p_2}.$$

Тогда оператор $\mathfrak{f}$ действует из пространства L^{p_1} в пространство L^{p_2}, причем он непрерывен и ограничен.

Для доказательства справедливости этого признака достаточно в силу теорем 2.1 и 2.2 проверить, что оператор $\mathfrak{f}$ каждую функцию из L^{p_1} преобразует в функцию из L^{p_2}.

Пусть $\varphi(s) \in L^{p_1}$. Тогда

$$\left\{ \int_G |\mathfrak{f}\varphi(s)|^{p_2}\,ds \right\}^{\frac{1}{p_2}} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{n} \left\{ \int_G |T_i(s)|^{\frac{p_1 p_2}{p_1 - p_2\beta_i}}\,ds \right\}^{\frac{p_1 - p_2\beta_i}{p_1 p_2}} \cdot \|\varphi(s)\|^{\beta_i} + b\,\|\varphi(s)\|^{\beta_0} < \infty$$

и, таким образом, $\mathfrak{f}\varphi(s) \in L^{p_2}$.

Для приложений было бы удобно, если бы оператор $\mathfrak{f}$ был вполне непрерывен. Однако он компактен лишь в том случае, когда множество его значений есть о д и н фиксированный элемент пространства L^{p_2}. Покажем это.

Пусть $\varphi, \psi \in L^{p_1}$ — две функции, которые оператор $\mathfrak{f}$ преобразует в различные функции из L^{p_2}:

$$\int_G |\mathfrak{f}\varphi(s) - \mathfrak{f}\psi(s)|^{p_2}\,ds > 0.$$

Тогда можно указать такое число $\gamma > 0$, что на некотором множестве $G_0 \subset G$ конечной ненулевой меры

$$|\mathfrak{f}\varphi(s) - \mathfrak{f}\psi(s)| > \gamma \qquad (s \in G_0). \tag{2.17}$$

Построим последовательные разбиения множества G_0 на множества $G_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, где каждый индекс α_i принимает два значения: 1 и 2. Пусть

$$G_0 = G_1 \cup G_2; \qquad G_1 \cap G_2 = 0; \qquad \operatorname{mes} G_1 = \operatorname{mes} G_2 = \frac{1}{2} \operatorname{mes} G_0.$$

Затем построение множеств проводится по индукции так, чтобы

$$G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}} = G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1} \cup G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 2};$$
$$G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1} \cap G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 2} = 0;$$
$$\operatorname{mes} G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k} = \frac{1}{2^k} \operatorname{mes} G_0.$$

Пусть функции $h_k(s)$ определены равенствами

$$h_k(s) = \begin{cases} \varphi(s), & \text{если } s \in \bigcup\limits_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}} G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 1}, \\ \psi(s), & \text{если } s \in \bigcup\limits_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}} G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}, 2}, \\ 0, & \text{если } s \overline{\in} G_0. \end{cases}$$

Легко видеть, что $h_k(s) \in L^{p_1}$, причем $\|h_k\| \leqslant \|\varphi\| + \|\psi\|$. Рассмотрим разности $|h_k(s) - h_l(s)|$. Очевидно, при $k < l$

$$|h_k(s) - h_l(s)| = \begin{cases} |\varphi(s) - \psi(s)|, \text{ если } s \in F, \\ 0, \text{если } s \overline{\in} F, \end{cases}$$

где $F = \bigcup\limits_{\alpha_k \neq \alpha_l} G_{\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \ldots, \alpha_l}$. Но тогда

$$|\mathfrak{f}h_k(s) - \mathfrak{f}h_l(s)| = \begin{cases} |\mathfrak{f}\varphi(s) - \mathfrak{f}\psi(s)|, & \text{если } s \in F, \\ 0, & \text{если } s \overline{\in} F, \end{cases}$$

и в силу (2.17)

$$\|\mathfrak{f}h_k(s) - \mathfrak{f}h_l(s)\| =$$
$$= \left\{ \int\limits_G |\mathfrak{f}h_k(s) - \mathfrak{f}h_l(s)|^{p_2} ds \right\}^{\frac{1}{p_2}} > \gamma \left(\frac{1}{2} \operatorname{mes} G_0 \right)^{\frac{1}{p_2}}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что из ограниченной последовательности $h_k(s) \in L^{p_1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ нельзя выделить такую подпоследовательность $h_{k_i}(s)$, чтобы функции $\mathfrak{f}h_{k_i}(s)$ сходились в L^{p_2}. Таким образом, оператор $\mathfrak{f}$ не компактен.

Теоремы настоящего параграфа, как легко видеть из доказательств, используют непрерывность лебеговой меры n-мерных евклидовых пространств: каждое множество конечной меры можно разбить на две части половинной меры. Оказывается, что в случае, когда мера, заданная на некотором множестве, не обладает приведенным свойством лебеговой меры, теоремы настоящего параграфа могут оказаться неверными. Например, если положительна мера некоторых точек рассматриваемого множества, то оператор $\mathfrak{f}$ может действовать из некоторого шара пространства L^{p_1} в пространство L^{p_2}, однако все пространство L^{p_1} не преобразовывать в L^{p_2}; оператор $\mathfrak{f}$ может быть непрерывен, но не ограничен; неравенство (2.15) не будет необходимым условием того, что оператор $\mathfrak{f}$ действует из L^{p_1} в L^{p_2}. Однако и в последнем случае оператор $\mathfrak{f}$ непрерывен во всех внутренних точках той области пространства L^{p_1}, которую он преобразует в пространство L^{p_2}.

5. Пространство C. Пусть G — замкнутое ограниченное множество конечномерного евклидова пространства. Вероятно, для оператора $\mathfrak{f}$, определенного в пространстве C непрерывных на G функций, справедливы теоремы типа 2.1 и 2.2. Мы ниже будем ссылаться на следующее более простое утверждение, вытекающее из того, что функция, непрерывная на компактном множестве, равномерно непрерывна.

Теорема 2.3. *Пусть функция $f(x, u)$ непрерывна на топологическом произведении $G \times (-\infty < u < \infty)$. Тогда оператор $\mathfrak{f}$ действует в C, непрерывен и ограничен.*

§ 3. Нелинейные интегральные операторы

1. Оператор П. С. Урысона. Пусть $K(s, t, u)$ $(s, t \in G;$ $\infty < u < \infty)$ — заданная функция трех переменных. Нелинейный интегральный оператор

$$A\varphi(s) = \int_G K[s, t, \varphi(t)]\, dt \qquad (3.1)$$

называется *оператором П. С. Урысона.* Первые тонкие исследования уравнений с этим оператором были проведены П. С. Урысоном в [66a].

Пусть G — замкнутое ограниченное множество конечномерного пространства.

Ниже в ряде случаев мы будем предполагать, что оператор Урысона действует в пространстве C или в пространстве L^p и является вполне непрерывным оператором.

2. Оператор П. С. Урысона в пространстве C. При помощи теоремы Арцеля устанавливается следующий признак (В. В. Немыцкий) полной непрерывности оператора (3.1) в пространстве C.

Теорема 3.1. *Пусть функция $K(s, t, u)$ непрерывна по всем переменным в совокупности при $s, t \in G$, $|u| \leqslant a$. Тогда оператор* (3.1) *определен в шаре радиуса a пространства C и вполне непрерывен.*

Доказательство. Для любого $\varepsilon > 0$ в силу равномерной непрерывности функции $K(s, t, u)$ можно указать такое $\delta > 0$, что из $\rho(s_1, s_2) < \delta$ следует:

$$|K(s_1, t, u) - K(s_2, t, u)| < \frac{\varepsilon}{\operatorname{mes} G}$$

при всех $s_1, s_2, t \in G$, $|u| \leqslant a$. Пусть функция $\varphi(s)$ принадлежит шару T радиуса a пространства C. Тогда

$$|\mathbf{A}\varphi(s_1) - \mathbf{A}\varphi(s_2)| \leqslant \int_G |K[s_1, t, \varphi(t)] - K[s_2, t, \varphi(t)]|\, dt < \varepsilon.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}$ преобразует шар T в семейство равностепенно непрерывных функций.

Пусть функции $u_n(s) \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся в C, т. е. равномерно сходятся к некоторой функции $u_0(s)$. Из равномерной непрерывности функции $K(s, t, u)$ следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \max_{s, t \in G} |K[s, t, u_n(t)] - K[s, t, u_0(t)]| = 0,$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A}u_n - \mathbf{A}u_0\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \max_{s \in G} \left| \int_G \left\{ K[s, t, u_n(t)] - K[s, t, u_0(t)] \right\} dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \operatorname{mes} G \cdot \lim_{n\to\infty} \max_{s, t \in G} |K[s, t, u_n(t)] - K[s, t, u_0(t)]| = 0.$$

Таким образом, оператор **A** непрерывен в любой точке $u_0(s)$ пространства C. Осталось доказать компактность оператора **A**.

Пусть

$$\max_{s,\, t \in G;\, |u| \leqslant a} |K(s, t, u)| = M.$$

Тогда для любой функции $\varphi(s) \in T$

$$\max_{s \in G} |\mathbf{A}\varphi(s)| \leqslant \max_{s \in G} \int_G |K[s, t, \varphi(t)]| \, dt \leqslant M \operatorname{mes} G.$$

Выше было показано, что функции $\mathbf{A}(\varphi)$ при $\varphi \in T$ равностепенно непрерывны. Таким образом, выполнены условия теоремы Арцеля, и, следовательно, множество функций $\mathbf{A}\varphi\ (\varphi \in T)$ компактно в C.

Теорема доказана.

Наиболее общие достаточные условия полной непрерывности оператора (3.1) в пространстве C установлены Л. А. Ладыженским [3, a]. Приведем одну из его теорем.

Теорема. *Пусть функция* $K(s, t, u)$ $(s, t \in G, -\infty < u < \infty)$ *удовлетворяет условиям:*

a) $K(s, t, u)$ *непрерывна по* u *при всех* $s \in G$ *и почти при всех* $t \in G$ *и измерима по* t *при всех* $s \in G$, $-\infty < u < \infty$;

b) *каково бы ни было положительное число* a, *для каждого* $x \in G$

$$\int_G \sup_{|u| \leqslant a} |K(s, t, u)| \, dt < \infty$$

и

$$\lim_{\substack{\|h\| \to 0 \\ s+h \in G}} \int_G \sup_{|u| \leqslant a} |K(s+h, t, u) - K(s, t, u)| \, dt = 0.$$

Тогда оператор (3.1) *действует в* C *и вполне непрерывен.*

Общность этой теоремы характеризуется тем, что в случае линейного оператора она превращается в теорему Радона [54], условия которой не только достаточны для полной непрерывности оператора, но и необходимы.

3. Вспомогательные леммы. Перед тем, как перейти к доказательству достаточных условий полной непрерывности оператора Урысона в пространстве L^p, докажем одно вспомогательное утверждение [31a], представляющее и самостоятельный интерес.

Лемма 3.1. *Пусть B — некоторое множество конечной меры конечномерного евклидова пространства. Пусть функция $K(t, u)$ $(t \in B,\ a \leqslant u \leqslant b)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Пусть заданы произвольные $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$.*

Тогда найдутся такое замкнутое множество $B_0 \subset B$ и такая функция $K_0(t, u)$, непрерывная по совокупности переменных, что

$$\operatorname{mes}(B \setminus B_0) < \delta \quad и \quad |K(t, u) - K_0(t, u)| \leqslant \varepsilon \qquad (3.2)$$
$$(t \in B_0, \quad a \leqslant u \leqslant b).$$

Доказательство. Пусть заданы ε, $\delta > 0$. Покажем вначале, что найдутся такое $\alpha > 0$ и такое множество $B_1 \subset B$, что $\operatorname{mes}(B \setminus B_1) < \frac{1}{2}\delta$ и для всех $t \in B_1$

$$|K(t, u_1) - K(t, u_2)| \leqslant \varepsilon \qquad (3.3)$$

при $|u_1 - u_2| < \alpha$.

Пусть система чисел $\{u^{(j)}\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ плотна на сегменте $[a, b]$. Обозначим через $\nu(t)$ $(t \in B)$ верхнюю грань таких чисел $\nu \geqslant 0$, что при $|u^{(j_1)} - u^{(j_2)}| \leqslant \nu$ справедливо неравенство

$$|K(t, u^{(j_1)}) - K(t, u^{(j_2)})| \leqslant \varepsilon.$$

Так как почти при всех $t \in B$ функция $K(t, u)$ непрерывна по u, то функция $\nu(t)$ почти при всех $t \in B$ положительна.

Обозначим через M_β множество тех $t \in B$, в которых $\nu(t) \geqslant \beta$. Если мы покажем, что при любом β множество M_β измеримо, то этим будет доказана измеримость функции $\nu(t)$ *).

Введем в рассмотрение функцию $F(t)$ равенством

$$F(t) = \sup_{|u^{(i)} - u^{(j)}| < \beta} |K(t, u^{(i)}) - K(t, u^{(j)})|.$$

*) В других местах книги мы не останавливаемся на доказательстве измеримости функций и множеств, конструируемых в различных предположениях.

Эта функция, очевидно, измерима, так как она является верхней гранью последовательности измеримых функций. Обозначим через B_β измеримое множество тех $t \in B$, в которых $F(t) \leqslant \varepsilon$.

Если $t_0 \in B_\beta$, то, по определению функции $\nu(t)$, $\nu(t_0) \geqslant \beta$, т. е. $t_0 \in M_\beta$. Если $t_0 \in M_\beta$, то $\nu(t_0) \geqslant \beta$ и, тем более, $F(t_0) \leqslant \varepsilon$, т. е. $t_0 \in B_\beta$. Таким образом, множества M_β и B_β совпадают.

Измеримость функции $\nu(t)$ доказана.

Обозначим через G_k $(k = 1, 2, \ldots)$ множество тех $t \in B$, в которых $\nu(t) \geqslant \frac{1}{k}$. Очевидно, $G_k \subset G_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ и $\operatorname{mes} \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} G_k = \operatorname{mes} B$, в силу чего найдется такое k_0, что

$$\operatorname{mes}(B \setminus G_{k_0}) < \frac{\delta}{2}.$$

Обозначим множество G_{k_0} через B_1 и положим $\alpha = \frac{1}{k_0}$.

Пусть $|u_1 - u_2| < \alpha$. Обозначим через $\{u^{(j_1)}\}$ и $\{u^{(j_2)}\}$ последовательности чисел из $\{u^{(j)}\}$, сходящиеся соответственно к u_1 и u_2. Без ограничения общности можно считать, что для любой пары чисел $u^{(j_1)}$, $u^{(j_2)}$ из этих последовательностей

$$|u^{(j_1)} - u^{(j_2)}| < \alpha.$$

В силу доказанного выше, при $t \in B_1$

$$|K(t, u^{(j_1)}) - K(t, u^{(j_2)})| \leqslant \varepsilon.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу (при любом фиксированном $t \in B_1$), получим неравенство (3.3).

Разобьем теперь сегмент $[a, b]$ точками $a = u_1 < u_2 < \ldots$ $\ldots < u_n = b$ на части меньшей длины, чем α.

В силу теоремы Лузина о C-свойстве измеримой функции для каждой функции $K(t, u_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ найдется такое замкнутое множество $\overline{B}_i \subset B_1$, что

$$\operatorname{mes}(B_1 \setminus \overline{B}_i) < \frac{\delta}{2n} \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{3.4}$$

причем на $\overline{B}_i$ функция $K(t, u_i)$ непрерывна.

Обозначим через B_0 пересечение всех множеств $\overline{B}_i$. В силу (3.4)

$$\operatorname{mes}(B_1 \setminus B_0) = \operatorname{mes}\left(B_1 \setminus \bigcap_{i=1}^{n} \overline{B}_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \operatorname{mes}(B_1 \setminus \overline{B}_i) < \frac{\delta}{2},$$

и так как $\operatorname{mes}(B \setminus B_1) < \frac{\delta}{2}$, то

$$\operatorname{mes}(B \setminus B_0) < \delta.$$

Теперь мы уже можем определить функцию $K_0(t, u)$ ($t \in B$; $a \leqslant u \leqslant b$), непрерывную по совокупности переменных, существование которой утверждается в лемме.

Если u принадлежит сегменту $[u_i, u_{i+1}]$ ($i=1, 2, \ldots, n-1$), то это число можно записать в виде

$$u = mu_i + (1-m)\,u_{i+1},$$

где $0 \leqslant m \leqslant 1$.

Пусть

$$K_0(t, u) = mK(t, u_i) + (1-m)\,K(t, u_{i+1})$$
$$(t \in B_0,\ u = mu_i + (1-m)\,u_{i+1}).$$

Непрерывность функции $K_0(t, u)$ по совокупности переменных очевидна. Выполнение условия (3.2) проверяется непосредственно: если $t \in B_0$ и $u = mu_i + (1-m)\,u_{i+1}$, то в силу (3.3)

$$|K(t, u) - K_0(t, u)| \leqslant m\,|K(t, u) - K(t, u_i)| + (1-m)\,|K(t, u) - K(t, u_{i+1})| \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Лемма 3.2. *В условиях леммы* 3.1 *каждому* $\delta > 0$ *соответствует такое замкнутое множество* $B_0 \subset B$, *что* $\operatorname{mes}(B \setminus B_0) < \delta$ *и функция* $K(t, u)$ на $B_0 \times [a, b]$ *непрерывна по совокупности переменных* *).

---

*) Это утверждение является обобщением теоремы Н. Н. Лузина о C-свойстве измеримой функции. Отметим, что утверждение леммы сохраняет силу и в случае, когда u принимает значения из бесконечного интервала (или u принимает значения в n-мерном евклидовом пространстве).

Доказательство. Построим согласно лемме 3.1 последовательность замкнутых множеств $B_n \subset B$ ($n = 1, 2, \ldots$) и последовательность непрерывных по совокупности переменных $t \in B_n$, $a \leqslant u \leqslant b$ функций $K_n(t, u)$ так, что

$$\operatorname{mes}(B \setminus B_n) < \frac{\delta}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

и

$$|K(t, u) - K_n(t, u)| < \frac{1}{n} \qquad (t \in B_n;\ a \leqslant u \leqslant b;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $B_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Очевидно, $\operatorname{mes}(B \setminus B_0) < \delta$. На множестве $B_0 \times [a, b]$ последовательность функций $K_n(t, u)$ сходится к $K(t, u)$ равномерно. Значит, на $B_0 \times [a, b]$ функция $K(t, u)$ непрерывна.

Лемма доказана.

4. Оператор П. С. Урысона в пространстве L^p.

Теорема 3.2. *Пусть функция* $K(s, t, u)$ ($s, t \in G$; $-\infty < u < \infty$; G — *ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства*) *непрерывна по u и удовлетворяет неравенству*

$$|K(s, t, u)| \leqslant R(s, t)(a + b|u|^{\alpha}) \qquad (s, t \in G;\ -\infty < u < \infty)$$

и

$$\int\limits_G \int\limits_G |R(s, t)|^{\alpha+1}\, ds\, dt < \infty,$$

где $a, b > 0$; $\alpha > 0$.

Тогда оператор П. С. Урысона (3.1) *действует в пространстве L^p, где $p = \alpha + 1$, и является вполне непрерывным оператором.*

Доказательство. Введем обозначение

$$K_1(s, t, u) = K(s, t, u) - K(s, t, 0).$$

Легко проверить, что функция $K_1(s, t, u)$ удовлетворяет условиям теоремы 3.2, если им удовлетворяет функция $K(s, t, u)$. Если мы покажем, что оператор Урысона, определенный функцией $K_1(s, t, u)$, действует в L^p и вполне непрерывен, то этим будет доказана и полная непрерывность оператора Урысона, порожденного функцией $K(s, t, u)$.

Поэтому без ограничения общности можно считать, что в условиях доказываемой теоремы

$$K(s,\ t,\ 0) \equiv 0 \qquad (s,\ t \in G). \tag{3.5}$$

Мы ниже покажем, что оператор **A** (оператор (3.1)) преобразует единичный шар T пространства L^p в компактное множество $\mathbf{A}T \subset L^p$. Этим будет доказано, что оператор **A** преобразует шар T_1 любого радиуса $r_1 > 1$ в компактное множество пространства L^p. Действительно, пусть $\mathbf{A}T$ компактно в L^p. Для каждой функции $\varphi(s) \in T_1$ множество G можно разбить на n таких частей $G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_n$ $(n > r_1^p)$, что

$$\int_{G_i} |\varphi(s)|^p\, ds \leqslant 1 \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Тогда

$$\int_G K[s,\ t,\ \varphi(t)]\, dt = n \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} \int_{G_i} K[s,\ t,\ \varphi(t)]\, dt$$

и, так как по предположению

$$\int_{G_i} K[s,\ t,\ \varphi(t)]\, dt \in \mathbf{A}T \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

то $\frac{1}{n}\mathbf{A}\varphi$ принадлежит выпуклой оболочке компактного множества $\mathbf{A}T$, которая в свою очередь компактна.

Затем мы покажем, что оператор **A** непрерывен на T. Этим будет доказана непрерывность оператора **A** в любой точке $\varphi_0(s)$ пространства L^p. Действительно, пусть последовательность $\{\varphi_k(s)\}$ сходится к $\varphi_0(s)$ в L^p. Множество G можно разбить на такие части $G_1,\ G_2,\ \ldots,\ G_n$, что

$$\int_{G_i} |\varphi_0(s)|^p\, ds < \frac{1}{2} \qquad (i = 1,\ \ldots,\ n).$$

Без ограничения общности можно считать, что при всех $k = 1, 2, \ldots$

$$\left\{ \int_{G_i} |\varphi_k(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_{G_i} |\varphi_0(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}} + \left\{ \int_{G_i} |\varphi_0(s) - \varphi_k(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2} + \|\varphi_0 - \varphi_k\| < 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Так как при каждом i

$$\lim_{k \to \infty} \int_{G_i} |\varphi_0(s) - \varphi_k(s)|^p \, ds \leqslant \lim_{k \to \infty} \int_G |\varphi_0(s) - \varphi_k(s)|^p \, ds = 0,$$

то из непрерывности оператора $\mathbf{A}$ на T в силу (3.5) следует, что

$$\lim_{k \to \infty} \|\mathbf{A}\varphi_k - \mathbf{A}\varphi_0\| \leqslant$$

$$\sum_{i=1}^{n} \lim_{k \to \infty} \left\{ \int_G \left| \int_{G_i} [K[s, t, \varphi_k(t)] - K[s, t, \varphi_0(t)]] \, dt \right|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} = 0.$$

Таким образом, в дальнейшем мы будем доказывать только то, что оператор $\mathbf{A}$ действует из T в L^p и вполне непрерывен.

Определим функции $K_n(s, t, u)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ равенством

$$K_n(s, t, u) = \begin{cases} K(s, t, u) & \text{при } |u| \leqslant n, \\ K(s, t, -n)(n+1+u) & \text{при } -n \geqslant u \geqslant -n-1, \\ K(s, t, n)(n+1-u) & \text{при } n \leqslant u \leqslant n+1, \\ 0 & \text{при } |u| \geqslant n+1. \end{cases}$$

Каждая из этих функций порождает соответствующий оператор Урысона:

$$\mathbf{A}_n \varphi(s) = \int_G K_n[s, t, \varphi(t)] \, dt \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\varphi(s) \in T$. Обозначим через G_n множество тех точек $s \in G$, в которых $|\varphi(s)| \geqslant n$. Очевидно,

$$\operatorname{mes} G_n \leqslant \frac{1}{n^p} \int_{G_n} |\varphi(s)|^p\, ds \leqslant \frac{1}{n^p} \int_G |\varphi(s)|^p\, ds \leqslant \frac{1}{n^p}. \quad (3.6)$$

Пусть

$$\psi_n(s) = \begin{cases} n & \text{при } s \in G_n, \\ 0 & \text{при } s \overline{\in} G_n. \end{cases}$$

Так как $\psi_n(s) \leqslant |\varphi(s)|$ $(s \in G)$, то $\psi_n(s) \in T$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Пусть c — такая постоянная, что для всех функций $\varphi(s) \in T$

$$\left\{ \int_G [a + b|\varphi(t)|^\alpha]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dt \right\}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} < c.$$

Такая постоянная существует, так как

$$\int_G [a + b|\varphi(t)|^\alpha]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \int_G [a^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} + b^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} |\varphi(t)|^{\alpha+1}]\, dt \leqslant$$

$$\leqslant 2^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} [a^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} \operatorname{mes} G + b^{\frac{\alpha+1}{\alpha}}].$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. В силу абсолютной непрерывности интеграла

$$\int_G \int_G |R(s, t)|^{\alpha+1} ds\, dt$$

можно указать такое $\delta > 0$, что для любого множества $G' \subset G$ из $\operatorname{mes} G' < \delta$ следует, что

$$\int_G \int_{G'} |R(s, t)|^{\alpha+1} ds\, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3c}\right)^{\alpha+1}.$$

Пусть $n_0 > \left(\frac{1}{\delta}\right)^{\frac{1}{p}}$. Тогда в силу (3.6) для любой функции $\varphi(s) \in T$ при $n \geqslant n_0$ мера множеств G_n меньше δ и, следовательно,

$$\int_G \int_{G_n} |R(s, t)|^{\alpha+1} ds\, dt < \left(\frac{\varepsilon}{3c}\right)^{\alpha+1}.$$

Из последнего неравенства и условия теоремы вытекает, что

$$J_1 = \left\{ \int_G \left[\int_{G_n} |K[s, t, \varphi(t)]|\, dt \right]^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_G \left[\int_{G_n} R(s, t)(a + b\,|\varphi(t)|^{\alpha})\, dt \right]^{\alpha+1} ds \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}} \leqslant$$

$$\leqslant \left\{ \int_G \int_{G_n} |R(s, t)|^{\alpha+1} ds\, dt \right\}^{\frac{1}{\alpha+1}} \left\{ \int_{G_n} [a + b\,|\varphi(t)|^{\alpha}]^{\frac{\alpha+1}{\alpha}} dt \right\}^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Так как функции $\psi_n(s)$ также принадлежат шару T, то

$$J_2 = \left\{ \int_G \left[\int_{G_n} |K(s, t, n)|\, dt \right]^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \int_G \left[\int_{G_n} |K[s, t, \psi_n(t)]|\, dt \right]^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$J_3 = \left\{ \int_G \left[\int_{G_n} |K(s, t, -n)|\, dt \right]^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= \left\{ \int_G \left[\int_{G_n} |K[s, t, -\psi_n(t)]|\, dt \right]^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из трех последних неравенств вытекает, что при $n \geqslant n_0$ для любой функции $\varphi(s) \in T$

$$\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{A}_n\varphi\| = \left\{ \int_G \left| \int_G [K[s, t, \varphi(t)] - K_n[s, t, \varphi(t)]]\, dt \right|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant J_1 + J_2 + J_3 < \varepsilon.$$

Полученная оценка означает, что оператор **A** можно равномерно аппроксимировать на шаре T операторами $\mathbf{A}_n$ с любой заданной точностью. Поэтому, если мы покажем, что все операторы $\mathbf{A}_n$ действуют из T в L^p и вполне непрерывны, то этим будет полностью доказана теорема 3.2.

Ниже будет существенно использован тот факт, что функции $K_n(s, t, u)$ при $|u| \geqslant n+1$ тождественно обращаются в нуль.

Мы свели доказательство теоремы 3.2 к доказательству следующего более простого утверждения.

Пусть функция $K(s, t, u)$ $(s, t \in G; -\infty < u < \infty)$ *непрерывна по* u *почти при всех* $s, t \in G$ *и удовлетворяет неравенству*

$$|K(s, t, u)| \leqslant R(s, t) \qquad (s, t \in G; -\infty < u < \infty),$$

где

$$\int_G \int_G |R(s, t)|^p \, ds \, dt < \infty.$$

Пусть существует такое $a > 0$, *что при* $|u| \geqslant a$

$$K(s, t, u) \equiv 0 \qquad (s, t \in G).$$

Тогда оператор П. С. Урысона $\mathbf{A}$ *действует из* T *в* L^p *и вполне непрерывен.*

Доказательство непрерывности. Рассмотрим в множестве вещественных функций, определенных на топологическом произведении $\hat{G} = G \times G$, оператор $\mathfrak{f}$, заданный функцией $K(s, t, u)$:

$$\mathfrak{f}\psi(s, t) = K[s, t, \psi(s, t)].$$

Из неравенства, которому удовлетворяет функция $K(s, t, u)$, следует, что множество значений этого оператора будет лежать в $\hat{L}^p$ — в множестве функций, суммируемых на $\hat{G} = G \times G$ со степенью p. В силу теорем 2.1 и 2.2 оператор $\mathfrak{f}$ будет непрерывным и ограниченным оператором, действующим в $\hat{L}^p$.

Пусть $\varphi_n(s)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность функций, сходящаяся в L^p к некоторой функции $\varphi_0(s)$. Очевидно, последовательность функций двух переменных $\psi_n(s, t) = \varphi_n(t)$ при этом сходится в $\hat{L}^p$ к функции $\psi_0(s, t) = \varphi_0(t)$. Тогда из неравенства Гельдера и непрерывности оператора **f** следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{A}\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_0\| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_G \left| \int_G K[s, t, \varphi_n(t)]\,dt - \int_G K[s, t, \varphi_0(t)]\,dt \right|^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant (\mathrm{mes}\, G)^{\frac{p-1}{p}} \lim_{n\to\infty} \left\{ \int_G \int_G |K[s, t, \varphi_n(t)] - K[s, t, \varphi_0(t)]|^p\, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} =$$

$$= (\mathrm{mes}\, G)^{\frac{p-1}{p}} \lim_{n\to\infty} \|\mathbf{f}\psi_n - \mathbf{f}\psi_0\| = 0.$$

Непрерывность оператора **A** доказана.

Доказательство компактности. Пусть задано $\varepsilon > 0$. Из абсолютной непрерывности интеграла

$$\int_G \int_G |R(s, t)|^p\, ds\, dt$$

следует существование такого $\delta > 0$, что для любого множества $F \subset \hat{G}$ из $\mathrm{mes}\, F < \delta$ вытекает справедливость неравенства

$$\left\{ \int_F \int |K[s, t, \varphi(t)]|^p\, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2 (\mathrm{mes}\, G)^{\frac{1}{q}}} \qquad \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right) \tag{3.7}$$

для всех функций $\varphi(t)$.

В силу леммы (3.2) можно указать такое замкнутое множество $\hat{G}_0 \subset \hat{G}$, мера которого удовлетворяет неравенству

$$\mathrm{mes}\,(\hat{G} \setminus \hat{G}_0) < \delta, \tag{3.8}$$

что $K(s, t, u)$ непрерывна по совокупности всех переменных при $|u| \leqslant a$, $\{s, t\} \in \hat{G}_0$.

Пусть

$$M = \max_{\{s,\ t\} \in \hat{G}_0,\ |u| \leqslant a} |K(s, t, u)|. \tag{3.9}$$

Пусть $\hat{G}_1$ — открытое подмножество $\hat{G}$, содержащее $\hat{G}_0$ и такое, что

$$\operatorname{mes}(\hat{G}_1 \setminus \hat{G}_0) < \left[\frac{\varepsilon}{2M(\operatorname{mes} G)^{\frac{1}{q}}}\right]^p \qquad \left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right). \tag{3.10}$$

Определим на $\hat{G}\times(-\infty, \infty)$ непрерывную функцию $K_0(s, t, u)$, положив ее равной $K(s, t, u)$ на $\hat{G}_0\times[-a, a]$, равной нулю при $|u|\geqslant a$ и на $(\hat{G}\setminus\hat{G}_1)\times[-a, a]$, а затем продолжив ее непрерывно с сохранением максимума, так что

$$\max_{s,\, t\in G;\ -\infty<u<\infty} |K_0(s, t, u)| = M. \tag{3.11}$$

Так как функция $K_0(s, t, u)$ отлична от нуля только на компактном множестве, то она ограничена и равномерно непрерывна. Следовательно, оператор П. С. Урысона $\mathbf{A}_0$

$$\mathbf{A}_0\varphi(s) = \int_G K_0[s, t, \varphi(t)]\,dt$$

преобразует единичный шар T пространства L^p в множество функций, равномерно ограниченных и равностепенно непрерывных. В силу теоремы Арцеля это множество компактно в пространстве непрерывных функций и, тем более, в пространстве L^p.

Мы покажем, что для всех функций $\varphi(s)\in T$

$$\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{A}_0\varphi\| = \\ = \left\{\int_G\left|\int_G K[s, t, \varphi(t)]\,dt-\int_G K_0[s, t, \varphi(t)]\,dt\right|^p ds\right\}^{\frac{1}{p}}<\varepsilon. \tag{3.12}$$

Этим доказательство теоремы будет завершено, так как неравенство (3.12) означает, что оператор $\mathbf{A}$ можно на шаре T сколь угодно точно аппроксимировать компактным оператором $\mathbf{A}_0$.

Применяя неравенство Гельдера, получим:

$$\|A\varphi - A_0\varphi\| \leqslant (\operatorname{mes} G)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\hat{G}\setminus\hat{G}_0}\int |K[s, t, \varphi(t)]|^p \, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ (\operatorname{mes} G)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\hat{G}_1\setminus\hat{G}_0}\int |K_0[s, t, \varphi(t)]|^p \, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} +$$
$$+ (\operatorname{mes} G)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\hat{G}_0}\int |K[s, t, \varphi(t)] - K_0[s, t, \varphi(t)]|^p \, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (3.13)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.13) в силу (3.7) и (3.8) меньше чем $\frac{\varepsilon}{2}$. Второе слагаемое оценивается при помощи (3.10) и (3.11):

$$(\operatorname{mes} G)^{\frac{1}{q}} \left\{ \int\limits_{\hat{G}_1\setminus\hat{G}_0}\int |K_0[s, t, \varphi(t)]|^p \, ds\, dt \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$
$$\leqslant (\operatorname{mes} G)^{\frac{1}{q}} \cdot M \cdot [\operatorname{mes}(\hat{G}_1 \setminus \hat{G}_0)]^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Третье слагаемое равно нулю. Таким образом, неравенство (3.12) справедливо.

Теорема 3.2 доказана.

Доказанная теорема, дающая достаточные условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона в L^p, является частным случаем следующей более общей теоремы, установленной Л. А. Ладыженским и автором в [31a]:

Пусть функция $K(s, t, u)$ $(s, t \in G;\ -\infty < u < \infty)$ *удовлетворяет условиям*:

a) $K(s, t, u)$ *непрерывна по* u *почти при всех* $\{s, t\} \in \hat{G}$ *и измерима по* $\{s, t\}$ *при фиксированных значениях* u;

b) *для любой ограниченной измеримой функции* $\psi(s, t)$

$$\int\limits_G \int\limits_G |K[s, t, \psi(s, t)]| \, ds\, dt < \infty;$$

c) *для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *что для любого множества* $F \subset G$ *из* $\operatorname{mes} F < \delta$ *следует*:

$$\left\{\int_G \left[\int_F |K[s, t, \varphi(t)]\, dt|^p\, ds\right\}^{\frac{1}{p}} < \varepsilon$$

для всех функций $\varphi(t)$ *из единичного шара* T *пространства* L^p.

Тогда оператор П. С. Урысона **A** *действует в пространстве* L^p *и вполне непрерывен.*

5. Оператор Гаммерштейна. Более подробно изучен один частный класс операторов Урысона — так называемые *операторы Гаммерштейна* **A**:

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt. \tag{3.14}$$

Если обозначить через **B** линейный интегральный оператор, порожденный ядром $K(s, t)$:

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\varphi(t)\, dt, \tag{3.15}$$

то оператор (3.14) можно представить в виде $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{f}$. Общие признаки полной непрерывности оператора **A** можно получить, воспользовавшись следующим соображением (применявшимся еще Ф. Риссом, затем в теории нелинейных интегральных уравнений В. В. Немыцким и другими авторами):

пусть оператор **f** *действует из банахова пространства* E_1 *в банахово пространство* E_2, *причем он непрерывен и ограничен. Пусть линейный оператор* **B** *действует из* E_2 *в* E_1 *и вполне непрерывен. Тогда оператор* $\mathbf{A} = \mathbf{B}\mathbf{f}$ *действует в* E_1 *и вполне непрерывен.*

Объединяя теоремы § 2 о непрерывности и ограниченности оператора **f** с условиями полной непрерывности линейного интегрального оператора, легко получить различные признаки полной непрерывности оператора Гаммерштейна, действующего в пространстве C или каком-либо пространстве L^p.

Например, если ядро $K(s, t)$ определяет вполне непрерывный линейный оператор, действующий из L^{p_1} в L^{p_2}, а оператор $\mathfrak{f}$ действует из L^{p_2} в L^{p_1}, то оператор Гаммерштейна вполне непрерывен в L^{p_2}.

6. Интегростепенные ряды А. М. Ляпунова*). Пусть G — ограниченное замкнутое множество n-мерного пространства. Для простоты примем, что $\operatorname{mes} G = 1$.

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_\rho;\ \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_\rho$ — неотрицательные целые числа.

Пусть $K_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\, \beta_0, \ldots, \beta_\rho}(s, t_1, \ldots, t_\rho)$ — непрерывная функция от $\rho+1$ переменных $s, t_1, t_2, \ldots, t_\rho \in G$. Обозначим через $M_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\, \beta_0, \ldots, \beta_\rho}$ максимум ее абсолютной величины.

Интегростепенным членом порядка m относительно функции $\varphi(s)$ и порядка n относительно функции $\psi(s)$ называется выражение

$$L_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\, \beta_0, \ldots, \beta_\rho}(\varphi, \psi) =$$
$$= \int\limits_G \ldots \int\limits_G K_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\, \beta_0, \ldots, \beta_\rho}(s, t_1, \ldots, t_\rho)\, \varphi^{\alpha_0}(s)\, \varphi^{\alpha_1}(t_1) \ldots$$
$$\ldots \varphi^{\alpha_\rho}(t_\rho)\, \psi^{\beta_0}(s)\, \psi^{\beta_1}(t_1) \ldots \psi^{\beta_\rho}(t_\rho)\, dt_1 \ldots dt_\rho, \qquad (3.16)$$

если

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\rho = m, \quad \beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_\rho = n. \qquad (3.17)$$

Каждый интегростепенной член при любой фиксированной непрерывной функции $\psi(s)$ порождает в пространстве C непрерывный оператор, удовлетворяющий в каждом шаре условию Липшица.

Если в (3.16) $\alpha_0 = 0$, то оператор $L_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\, \beta_0, \ldots, \beta_\rho}$, порожденный интегростепенным членом, будет вполне непрерывным.

Интегростепенным рядом называется ряд, состоящий из членов вида (3.16):

$$L(\varphi, \psi) = \sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\, \beta_0, \ldots, \beta_\rho} L_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\, \beta_0, \ldots, \beta_\rho}(\varphi, \psi), \qquad (3.18)$$

где сумма распространена на всевозможные интегростепенные члены различных порядков.

---

*) Доказательства предложений, приводимых в настоящем пункте, читатель без труда проведет сам или найдет в книге Н. С. Смирнова [616]. [625]

Ниже будет предполагаться, что

$$\sum_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\ \beta_0, \ldots, \beta_\rho} M_{\alpha_0, \ldots, \alpha_\rho;\ \beta_0, \ldots, \beta_\rho} < \infty. \tag{3.19}$$

Функция $\varphi(s)$ в ряде (3.18) рассматривается как фиксированная. Пусть $|\psi(s)| \leqslant 1$. В этих условиях интегростепенной ряд порождает непрерывный оператор, определенный на единичном шаре T пространства C и действующий в C.

Без труда проверяется, что этот оператор будет вполне непрерывным, если во всех членах ряда (3.18) $\alpha_0 = 0$.

Если в интегростепенном ряде отсутствует член первого порядка относительно $\varphi(s)$ и нулевого порядка относительно $\psi(s)$, то в каждом шаре T_1 радиуса $r < 1$ ($\varphi \in T_1$, если $\|\varphi\| \leqslant r$) оператор L удовлетворяет условию Липшица в следующей форме:

$$\|L(\varphi_1, \psi) - L(\varphi_2, \psi)\| \leqslant a_r(\omega + \omega')\|\varphi_1 - \varphi_2\|, \tag{3.20}$$

где a_r — постоянная, зависящая только от r, и

$$\|\varphi_i\| = \max_{s \in G} |\varphi_i(s)| \leqslant \omega; \qquad \|\varphi_2\| \leqslant \omega; \qquad \|\psi\| \leqslant \omega'. \tag{3.21}$$

В случае, если в интегростепенном ряде (3.18) отсутствуют члены порядка 1 и 2 относительно функции $\varphi(s)$ и порядка нуль относительно функции $\psi(s)$, то оператор L удовлетворяет в каждом шаре T_1 радиуса $r < 1$ условию Липшица в более сильной, чем (3.20), форме

$$\|L(\varphi_1, \psi) - L(\varphi_2, \psi)\| \leqslant b_r(\omega^2 + \omega')\|\varphi_1 - \varphi_2\|. \tag{3.22}$$

§ 4. Расщепление линейных операторов [29м, н]

В настоящем параграфе мы используем элементарные сведения теории самосопряженных (эрмитовых) операторов в гильбертовом пространстве (см. [4] или [42], главу V).

1. Неравенство для моментов. Пусть $\mathbf{A}$ — положительный самосопряженный линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве, т. е. такой оператор, что

$$(\mathbf{A}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathbf{A}\psi) \qquad (\varphi, \psi \in D(\mathbf{A}))$$

и

$$(\mathbf{A}\varphi, \varphi) > 0 \qquad (\varphi \in D(\mathbf{A}),\ \|\varphi\| \neq 0),$$

где через $D(\mathbf{A})$ обозначена область определения оператора $\mathbf{A}$, Пользуясь спектральным разложением оператора **A**

$$\mathbf{A}=\int_0^\infty \lambda\, dE_\lambda,$$

скалярное произведение $(\mathbf{A}\varphi, \varphi)$ можно записать в виде

$$(\mathbf{A}\varphi, \varphi)=\int_0^\infty \lambda\, d\sigma(\lambda), \tag{4.1}$$

где $\sigma(\lambda)=(E_\lambda\varphi, \varphi)$ — неубывающая непрерывная справа функция с вариацией, равной (φ, φ).

Скалярные произведения $(\mathbf{A}^s\varphi, \varphi)$, где s — некоторое число, называют *моментами оператора* **A**. Мы их будем обозначать через a_s.

Аналогично (4.1) момент a_s имеет представление

$$a_s=\int \lambda^s\, d\sigma(\lambda). \tag{4.2}$$

Теорема 4.1 [29а]. *Пусть s — произвольное, а p и r — положительные числа. Тогда*

$$a_s^{p+r}\leqslant a_{s+r}^p a_{s-p}^r. \tag{4.3}$$

Доказательство. Очевидно, неравенство (4.3) нужно доказывать лишь для того случая, когда моменты a_{s+r} и a_{s-p} конечны. В этом случае конечен и момент a_s.

Применим неравенство Гельдера к интегралу (4.2), считая, что под знаком интеграла стоит произведение двух функций:

$$\lambda^s=\lambda^{\frac{p(s+r)}{p+r}}\cdot\lambda^{\frac{r(s-p)}{p+r}}.$$

Пусть

$$p_1>1;\ q_1>1;\ \frac{1}{p_1}+\frac{1}{q_1}=1.$$

Тогда

$$a_s=\int_0^\infty \lambda^s\, d\sigma(\lambda)\leqslant\left\{\int_0^\infty \lambda^{\frac{p(s+r)}{p+r}\cdot p_1}\, d\sigma(\lambda)\right\}^{\frac{1}{p_1}}\left\{\int_0^\infty \lambda^{\frac{r(s-p)}{p+r}q_1}\, d\sigma(\lambda)\right\}^{\frac{1}{q_1}}.$$

Полагая $p_1 = \frac{p+r}{p}$, $q_1 = \frac{p+r}{r}$, получим:

$$a_s \leqslant \left\{ \int_0^\infty \lambda^{s+r}\, d\sigma(\lambda) \right\}^{\frac{p}{p+r}} \cdot \left\{ \int_0^\infty \lambda^{s-p}\, d\sigma(\lambda) \right\}^{\frac{r}{p+r}}.$$

Возводя обе стороны последнего неравенства в степень $p+r$, получим:

$$a_s^{p+r} = a_{s+r}^p \cdot a_{s-p}^r.$$

Теорема доказана.

Отметим в заключение, что неравенство (4.3) позволяет установить следующий факт.

Имеет место неравенство [306]

$$a_{s_1}^{\alpha_1} \cdot a_{s_2}^{\alpha_2} \ldots a_{s_k}^{\alpha_k} \leqslant a_{p_1}^{\beta_1} \cdot a_{p_2}^{\beta_2}$$

при произвольных $s_1, \ldots, s_k, p_1, p_2$ *и положительных* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k, \beta_1, \beta_2$, *если*

$$p_1 < s_1, \ldots, s_k < p_2$$

и

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_k = \beta_1 + \beta_2, \quad \alpha_1 s_1 + \ldots + \alpha_k s_k = \beta_1 p_1 + \beta_2 p_2.$$

2. Расщепление линейного оператора, действующего в L^2. Пусть $\mathbf{A}$ — положительный самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве L^2 с областью определения $D(\mathbf{A})$. Из спектральной теории операторов вытекает возможность построения положительного самосопряженного оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — корня квадратного *) из оператора $\mathbf{A}$, т. е. такого оператора, что $D(\mathbf{A}) \subset D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$ и $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}) \subset D(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}})$, причем

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi = A\varphi \quad (\varphi \in D(\mathbf{A})). \tag{4.4}$$

---

*) Корень $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ из положительного оператора $\mathbf{A}$ определяется неоднозначно (см., например, [4]). Все утверждения, которые будут установлены ниже в настоящем параграфе, справедливы для **всех** корней (а не только положительных).

Если оператор **A** вполне непрерывен, то оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ также вполне непрерывен.

Возможность представления (4.4) будет ниже использована при исследовании операторов Гаммерштейна с симметрическими ядрами.

Если **A** — линейный интегральный вполне непрерывный оператор, определенный в L^2 симметрическим положительно определенным ядром $K(s, t)$ ($s, t \in G$, G — множество конечной или бесконечной меры евклидова пространства):

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

то для оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ можно указать явную форму.

Пусть $e_k(s)$ ($k = 1, 2, \ldots$) — нормированные собственные функции ядра $K(s, t)$, которым отвечают положительные собственные числа λ_k ($k = 1, 2, \ldots$):

$$K(s, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k e_k(s)\, e_k(t) \qquad (s, t \in G).$$

Тогда оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ определится формулой

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_k}\,(e_k, \varphi)\, e_k(s) \qquad (s \in G).$$

3. Расщепление оператора, действующего из L^q в L^p. Пусть теперь **A** — линейный оператор, действующий из пространства L^q в пространство L^p, где $p > 2$ $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Естественным обобщением равенства (4.4) является представление оператора **A** в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*, \tag{4.5}$$

где **H** и $\mathbf{H}^*$ — сопряженные операторы. Напомним, что операторы **H** и $\mathbf{H}^*$, действующие соответственно из L^2 в L^p и из L^q в L^2 $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, называются *сопряженными*, если

$$(\mathbf{H}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathbf{H}^*\psi) \qquad (\varphi \in L^2,\ \psi \in L^q).$$

Мы установим в этом пункте возможность представления некоторых операторов в форме (4.5).

Пусть q_0 — некоторое фиксированное число, $1 < q_0 < 2$. Пусть $\mathbf{A}$ — аддитивный и однородный оператор, определенный на всех функциях, заданных на множестве G конечной или бесконечной меры, суммируемых на G с одной из степеней q, где $q_0 \leqslant q \leqslant 2$. Мы будем в этом пункте предполагать, что оператор $\mathbf{A}$ обладает следующими свойствами:

a) оператор $\mathbf{A}$ преобразует каждую функцию из L^q в функцию из соответствующего L^p $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ q_0 \leqslant q \leqslant 2\right)$;

b) оператор $\mathbf{A}$, рассматриваемый как оператор, действующий из L^q в L^p $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ q_0 \leqslant q \leqslant 2\right)$, непрерывен;

c) оператор $\mathbf{A}$, рассматриваемый в L^2, — положительный самосопряженный оператор.

Примером оператора $\mathbf{A}$, удовлетворяющего условиям a), b), c), может служить линейный интегральный оператор

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt \tag{4.6}$$

с симметрическим положительно определенным ядром $K(s,t)$, удовлетворяющим условиям

$$\int_G \int_G K^2(s,\ t)\,ds\,dt < \infty \tag{4.7}$$

и

$$\int_G \int_G |K(s,\ t)|^{p_0}\,ds\,dt < \infty, \tag{4.8}$$

где $\frac{1}{p_0}+\frac{1}{q_0}=1$. Условия (4.7) и (4.8) при этом независимы в случае $\operatorname{mes} G = \infty$, а в случае $\operatorname{mes} G < \infty$ неравенство (4.7) следует из (4.8).

Для того чтобы показать, что оператор (4.6) обладает свойствами a) и b), достаточно проверить выполнение неравенства

$$\int_G \int_G |K(s,\ t)|^p\,ds\,dt < \infty \qquad (2 \leqslant p \leqslant p_0),$$

которое вытекает из (4.7) и (4.8), так как при $|K(s, t)| \leqslant 1$

$$|K(s, t)|^p \leqslant K^2(s, t),$$

а при $|K(s, t)| > 1$

$$|K(s, t)|^p < |K(s, t)|^{p_0}$$

и, следовательно,

$$|K(s, t)|^p \leqslant |K(s, t)|^{p_0} + K^2(s, t) \qquad (s, t \in G).$$

Выполнение свойства с) очевидно.

Теорема 4.2. *Пусть оператор* $\mathbf{A}$ *обладает свойствами* a), b), c). *Тогда определенный в* L^2 *оператор* $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ *непрерывно действует из пространства* L^2 *в пространство* L^p, *где* p — *любое число, удовлетворяющее условию*

$$2 < p < p_0 \qquad \left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1\right).$$

Доказательство. Пусть $\varphi(s) \in L^2$. Обозначим через $G_n (n = 1, 2, \ldots)$ множество тех $s \in G$, в которых

$$2^{n-1} < |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s)| \leqslant 2^n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.9}$$

Так как $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi \in L^2$, то

$$\operatorname{mes} G_n \leqslant 4 \int\limits_{G_n} \frac{|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s)|^2}{2^{2n}} ds \leqslant \frac{4}{2^{2n}} \int\limits_G |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s)|^2 ds < \infty.$$

Пусть n — некоторое фиксированное число. Введем в рассмотрение функцию $h(s)$ равенством

$$h(s) = \begin{cases} \operatorname{sign} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s), & \text{если } s \in G_n, \\ 0 \quad , & \text{если } s \overline{\in} G_n. \end{cases}$$

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi, h)$:

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi, h) = \int\limits_G \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s) h(s) ds.$$

В силу левого неравенства (4.9)

$$2^{n-1}\operatorname{mes} G_n \leqslant \int_{G_n} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s) h(s)\, ds = (\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi,\ h). \tag{4.10}$$

Оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ самосопряжен, следовательно,

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi,\ h) = (\varphi,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h),$$

и по неравенству Буняковского

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi,\ h) \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h\| = \|\varphi\| \sqrt{(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} h)} = \\ = \|\varphi\| \cdot \sqrt{(\mathbf{A}h,\ h)}. \tag{4.11}$$

Так как $h(s) \in L^{q_0}$:

$$\|h\|_{q_0} = \left\{\int_G |h(s)|^{q_0} ds\right\}^{\frac{1}{q_0}} = (\operatorname{mes} G_n)^{\frac{1}{q_0}},$$

то $\mathbf{A}h \in L^{p_0}\left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1\right)$ по свойству а). Значит, скалярное произведение $(\mathbf{A}h,\ h)$ есть произведение функции $\mathbf{A}h$ из L^{p_0} и функции h из L^{q_0}. По неравенству Гельдера

$$(\mathbf{A}h,\ h) \leqslant \|\mathbf{A}h\|_{p_0} \cdot \|h\|_{q_0}$$

и по условию b)

$$(\mathbf{A}h,\ h) \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|h\|_{q_0}^2 = \|\mathbf{A}\|_0 (\operatorname{mes} G_n)^{\frac{2}{q_0}}, \tag{4.12}$$

где $\|\mathbf{A}\|_0$ — норма оператора $\mathbf{A}$, действующего из пространства L^{q_0} в пространство L^{p_0}.

В силу (4.10), (4.11) и (4.12)

$$2^{n-1}\operatorname{mes} G_n \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\mathbf{A}\|_0^{\frac{1}{2}} (\operatorname{mes} G_n)^{\frac{1}{q_0}},$$

откуда

$$\operatorname{mes} G_n \leqslant \frac{c}{2^{np_0}}, \tag{4.13}$$

где

$$c = (2\|\mathbf{A}\|_0^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|)^{p_0}.$$

Из правой части неравенства (4.9) и из неравенства (4.13) вытекает, что

$$\int\limits_{G_n} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds \leqslant \frac{c}{2^{(p_0-p)n}} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots). \qquad (4.14)$$

Через G_0 обозначим множество тех $s \in G$, в которых $|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)| \leqslant 1$. Так как $p>2$, то

$$|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p \leqslant |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^2 \qquad (s \in G_0)$$

и

$$\int\limits_{G_0} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds \leqslant \int\limits_{G} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^2 ds = (\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi) =$$
$$= (\mathbf{A}\varphi,\ \varphi) \leqslant \|\mathbf{A}\|\cdot\|\varphi\|^2. \qquad (4.15)$$

Утверждение теоремы теперь доказывается непосредственно:

$$\int\limits_{G} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds = \sum_{n=0}^{\infty} \int\limits_{G_n} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds$$

и из (4.14) и (4.15) следует:

$$\int\limits_{G} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds \leqslant \|\mathbf{A}\|\cdot\|\varphi\|^2 + c\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{(p_0-p)n}} =$$
$$= \|\mathbf{A}\|\cdot\|\varphi\|^2 + \frac{c}{2^{p_0-p}-1} < \infty.$$

Значит, $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi \in L^p$. При этом

$$\sup_{\varphi\in L^2}\frac{\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi\|_p}{\|\varphi\|_2} = \sup_{\|\varphi\|_2=1}\|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi\|_p \leqslant \left\{\|\mathbf{A}\| + \frac{2^{p_0}\|\mathbf{A}\|_0^{\frac{p_0}{2}}}{2^{p_0-p}-1}\right\}^{\frac{1}{p}}.$$

Теорема доказана.

Нам неизвестно, справедливо ли утверждение теоремы 4.2 при $p=p_0$.

Оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, рассматриваемый как оператор, действующий из L^2 в L^p, будем обозначать через $\mathbf{H}$. Сопряженный оператор $\mathbf{H}^*$ будет действовать тогда из пространства L^q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ в L^2. Каждая функция $\psi \in L^q$ порождает тогда в L^2 непрерывный линейный функционал $\mathbf{l}$:

$$\mathbf{l}(\varphi)=(\mathbf{H}^*\psi,\ \varphi)=(\psi,\ \mathbf{H}\varphi)=(\psi,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi) \qquad (\varphi \in L^2).$$

Пусть $\psi \in L^2 \cap L^q$. Так как оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, рассматриваемый в L^2, эрмитов, то в этом случае

$$\mathbf{l}(\varphi)=(\mathbf{H}^*\psi,\ \varphi)=(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\psi,\ \varphi) \qquad (\varphi \in L^2).$$

Значит,

$$\mathbf{H}^*\psi=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\psi \qquad (\psi \in L^2 \cap L^q).$$

Таким образом,

$$\mathbf{HH}^*\psi=\mathbf{A}\psi \qquad (\psi \in L^2 \cap L^q),$$

при этом в силу теоремы 4.2 $\mathbf{HH}^*\psi \in L^p$.

Множество $L^2 \cap L^q$ плотно в L^q: оно содержит, например, все ограниченные функции, отличные от нуля лишь на множествах конечной меры. Непрерывные операторы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{HH}^*$, действующие из L^q в L^p, принимают на $L^2 \cap L^q$ одинаковые значения. Следовательно,

$$\mathbf{HH}^*\psi=\mathbf{A}\psi \qquad (\psi \in L^q). \tag{4.16}$$

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 4.3. *Пусть оператор* $\mathbf{A}$ *обладает свойствами* a), b), c). *Тогда оператор* $\mathbf{A}$, *рассматриваемый на* L^q, *допускает расщепление, т. е. представление* (4.16), *где* $\mathbf{H}$ — *непрерывный оператор, действующий из* L^2 *в* L^p $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\ q_0<q\leqslant 2\right)$.

Замечание. Из представления (4.16) следует, что в условиях теоремы 4.3 оператор $\mathbf{A}$ действует из L^q в L^2.

Будем предполагать теперь, что оператор $\mathbf{A}$ обладает дополнительным свойством:

d) оператор $\mathbf{A}$, если его рассматривать в L^2, вполне непрерывен.

Если ядро $K(s, t)$ (или некоторая его итерация) интегрального оператора (4.6)

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\,\varphi(t)\,dt \tag{4.6}$$

удовлетворяет условию (4.7), то оператор $\mathbf{A}$ обладает свойством d).

Как это следует из спектральной теории операторов в гильбертовом пространстве, оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ при выполнении условий c) и d) будет вполне непрерывным в L^2.

Выясним, будет ли вполне непрерывным оператор $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, фигурирующий в представлении (4.16) и действующий из L^2 в L^p.

Лемма 4.1. *Пусть M — компактное в L^2 семейство функций, p-е степени $(p > 2)$ которых имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Тогда M включено в L^p и компактно в L^p.*

Доказательство. Пусть $\varphi \in M$. Обозначим через G_1 множество тех точек $s \in G$, в которых $|\varphi(s)| > 1$. Очевидно, $\operatorname{mes} G_1 < \infty$. Следовательно, по условию леммы

$$\int_{G_1} |\varphi(s)|^p\,ds < \infty.$$

Значит, и

$$\int_G |\varphi(s)|^p\,ds = \int_{G \setminus G_1} |\varphi(s)|^p\,ds + \int_{G_1} |\varphi(s)|^p\,ds \leqslant$$
$$\leqslant \int_{G \setminus G_1} |\varphi(s)|^2\,ds + \int_{G_1} |\varphi(s)|^p\,ds < \infty.$$

Таким образом, $M \subset L^p$.

Пусть R — некоторое положительное число. Через $\mathbf{T}_R$ обозначим оператор, определенный на функциях, заданных на G, равенством

$$\mathbf{T}_R\varphi(s) = \begin{cases} R \operatorname{sign}\varphi(s), & \text{если } |\varphi(s)| \geqslant R, \\ \varphi(s), & \text{если } |\varphi(s)| \leqslant R. \end{cases}$$

Покажем, что при достаточно большом R множество $\mathrm{T}_R M$ с любой заданной точностью аппроксимирует в L^p множество M. Тогда для доказательства компактности M в L^p достаточно будет показать, что в L^p компактно множество $\mathrm{T}_R M$ при любом R.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. В силу условий леммы можно указать такое $\delta > 0$, что для любого множества $F \subset G$ из $\operatorname{mes} F < \delta$ следует:

$$\int_F |\varphi(s)|^p \, ds < \varepsilon^p \qquad (\varphi \in M). \tag{4.17}$$

Так как множество M компактно в L^2, то найдется такое число m, что

$$\left\{ \int_G \varphi^2(s) \, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant m \qquad (\varphi \in M).$$

Положим

$$R = \frac{m}{\sqrt{\delta}}.$$

Обозначим через G_φ множество тех точек $s \in G$, в которых

$$|\varphi(s)| \geqslant R \qquad (\varphi \in M).$$

Тогда

$$R (\operatorname{mes} G_\varphi)^{\frac{1}{2}} \leqslant \sqrt{\int_{G_\varphi} \varphi^2(s) \, ds} \leqslant m,$$

откуда

$$\operatorname{mes} G_\varphi \leqslant \delta \qquad (\varphi \in M). \tag{4.18}$$

По определению, при $s \overline{\in} G_\varphi$

$$\mathrm{T}_R \varphi(s) - \varphi(s) = 0,$$

а при $s \in G_\varphi$

$$|\mathrm{T}_R \varphi(s) - \varphi(s)| < |\varphi(s)|.$$

Следовательно,

$$\left\{ \int_G |\mathrm{T}_R \varphi(s) - \varphi(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant \left\{ \int_{G_\varphi} |\varphi(s)|^p \, ds \right\}^{\frac{1}{p}}$$

и в силу (4.17) и (4.18)

$$\|\mathrm{T}_R\varphi - \varphi\|_p < \varepsilon \qquad (\varphi \in M).$$

Осталось показать, что множество $\mathrm{T}_R M$ при фиксированном (любом) R компактно в L^p.

Так как для любых функций φ_1, $\varphi_2 \in M$

$$\int_G |\mathrm{T}_R\varphi_1(s) - \mathrm{T}_R\varphi_2(s)|^2\, ds \leqslant \int_G |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|^2\, ds,$$

то каждая η-сеть $\psi_1, \ldots, \psi_k$ множества M в L^2 порождает также η-сеть $\mathrm{T}_R\psi_1, \ldots, \mathrm{T}_R\psi_k$ множества $\mathrm{T}_R M$ в L^2. Следовательно, множество $\mathrm{T}_R M$ компактно в L^2.

Теперь покажем, что η-сеть $\mathrm{T}_R\psi_1, \ldots, \mathrm{T}_R\psi_k$ множества $\mathrm{T}_R M$ в L^2 является одновременно γ-сетью множества $\mathrm{T}_R M$ в L^p, где

$$\gamma = (2R)^{1-\frac{2}{p}} \cdot \eta^{\frac{2}{p}}.$$

Пусть $\mathrm{T}_R\varphi \in \mathrm{T}_R M$. Найдется такая функция ψ_i, что

$$\int_G |\mathrm{T}_R\varphi(s) - \mathrm{T}_R\psi_i(s)|^2\, ds < \eta^2.$$

Тогда

$$\|\mathrm{T}_R\varphi - \mathrm{T}_R\psi_i\|_p = 2R\left\{\int_G \left|\frac{\mathrm{T}_R\varphi(s) - \mathrm{T}_R\psi_i(s)}{2R}\right|^p ds\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant$$

$$\leqslant 2R\left\{\int_G \left|\frac{\mathrm{T}_R\varphi(s) - \mathrm{T}_R\psi_i(s)}{2R}\right|^2 ds\right\}^{\frac{1}{p}} \leqslant (2R)^{1-\frac{2}{p}} \cdot \eta^{\frac{2}{p}} = \gamma.$$

Так как η можно выбрать сколь угодно малым, то и γ может быть сколь угодно мало. Следовательно, множество $\mathrm{T}_R M$ компактно в пространстве L^p.

Лемма доказана.

Теорема 4.4. *Пусть оператор* $\mathbf{A}$ *обладает свойствами a), b), c) и d). Тогда оператор* $\mathrm{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, *действующий из пространства* L^2 *в пространство* L^p, *вполне непрерывен* *).

*) Недавно М. М. Вайнберг (ДАН СССР 100, № 5, 1955) доказал эту теорему другим методом и для $p = p_0$.

Доказательство. Обозначим через T единичный шар пространства L^2. Множество M функций $\mathbf{H}\varphi = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi\ (\varphi \in T)$ компактно в L^2.

В силу леммы 4.1 для доказательства полной непрерывности оператора $\mathbf{H}$ достаточно показать, что p-е степени функций $\mathbf{H}\varphi\ (\varphi \in T)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем целое число n_0 так, что

$$(2\|\mathbf{A}\|_0^{\frac{1}{2}})^{p_0} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p_0-p)n}} = \frac{2^{p_0}\|\mathbf{A}\|_0^{\frac{p_0}{2}}}{(2^{p_0-p}-1)\,2^{(p_0-p)n_0}} < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (4.19)$$

Пусть

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2^{pn_0+1}}.$$

Тогда для любого множества $F \subset G$ из $\operatorname{mes} F < \delta$ следует, что

$$\int_F |\mathbf{H}\varphi(s)|^p\, ds < \varepsilon \qquad (\varphi \in T).$$

Для доказательства последнего неравенства, как и при доказательстве теоремы 4.2, введем в рассмотрение множества G_n тех точек $s \in G$, в которых выполняются неравенства (4.9). Тогда

$$\int_F |\mathbf{H}\varphi(s)|^p\, ds \leqslant \int_F 2^{n_0 p}\, ds + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_{G_n} |\mathbf{H}\varphi(s)|^p\, ds \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \int_{G_n} |\mathbf{H}\varphi(s)|^p\, ds$$

и в силу (4.13) и (4.19)

$$\int_F |\mathbf{H}\varphi(s)|^p\, ds \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + (2\|\mathbf{A}\|^{\frac{1}{2}})^{p_0} \sum_{n=n_0+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(p_0-p)n}} < \varepsilon.$$

Таким образом, функции $|\mathbf{H}\varphi(s)|^p$ $(\varphi \in T)$ имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы.

Теорема доказана.

Так как оператор, сопряженный вполне непрерывному, также вполне непрерывен, то и оператор $\mathbf{H}^*$ из представления (4.16), действующий из L^q в L^2, вполне непрерывен.

4. Интегральные операторы с ядрами, итерации которых суммируемы со степенью p_0. Пусть симметричное положительно определенное ядро $K(s, t)$ вполне непрерывного в L^2 линейного интегрального оператора

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\varphi(t)\,dt \tag{4.20}$$

удовлетворяет следующему условию: некоторая итерация

$$K_r(s, t) = \\ = \int_G \ldots \int_G K(s, t_1) K(t_1, t_2) \ldots K(t_{r-1}, t)\,dt_1\,dt_2 \ldots dt_{r-1}$$

суммируема с квадратом и со степенью p_0, т. е.

$$\int_G \int_G |K_r(s, t)|^{p_0}\,ds\,dt < \infty, \tag{4.21}$$

где $p_0 > 2$.

Обозначим через $\mathbf{A}_r$ интегральный оператор, порожденный ядром $K_r(s, t)$,

$$\mathbf{A}_r\varphi(s) = \int_G K_r(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

Этот оператор обладает свойствами a), b), c), d) предыдущего пункта. В частности, этот оператор действует из пространства L^q в пространство L^p $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1;\ 2 \leqslant p \leqslant p_0\right)$.

Возможно, что оператор $\mathbf{A}$ также обладает свойствами a), b), c), d), в силу чего он допускает представление (4.16). Нам этого показать не удалось.

Мы ограничимся здесь доказательством более слабых утверждений, которые, однако, будут достаточны для установления ряда новых теорем для уравнений с операторами

Гаммерштейна, у которых итерации ядер удовлетворяют условию (4.21).

Теорема 4.5. *Пусть r-я итерация $K_r(s, t)$ симметричного положительно определенного ядра $K(s, t)$ удовлетворяет условиям*

$$\int_G \int_G K_r^2(s, t)\,ds\,dt < \infty,$$

$$\int_G \int_G |K_r(s, t)|^{p_0}\,ds\,dt < \infty,$$

где $p_0 > 2$. Тогда оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, где $\mathbf{A}$ — оператор (4.20), *действует из L^2 в L^p $\left(где\ 2 \leqslant p < \frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}\right)$ и вполне непрерывен.*

Доказательство близко к доказательству теорем 4.2 и 4.4.

Пусть $\varphi(s) \in L^2$. Как и при доказательстве теоремы 4.2, обозначим через G_n $(n = 1, 2, \ldots)$ множество тех точек $s \in G$, в которых

$$2^{n-1} < |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)| \leqslant 2^n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.22}$$

и через G_0 множество $G \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$. Введем в рассмотрение функцию $h(s)$ равенством

$$h(s) = \begin{cases} \operatorname{sign} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s), & \text{если } s \in G_n, \\ 0, & \text{если } s \overline{\in} G_n, \end{cases}$$

где n — некоторое фиксированное число, $n \geqslant 1$.

Рассмотрим скалярное произведение $(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi, h)$. Очевидно,

$$2^{n-1} \operatorname{mes} G_n \leqslant (\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi, h). \tag{4.23}$$

Так как оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ самосопряжен, то $(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi, h) = (\varphi, \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h)$ и по неравенству Буняковского

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi, h) \leqslant \|\varphi\| \sqrt{(\mathbf{A}h, h)}. \tag{4.24}$$

Применим к моменту $(\mathbf{A}h,\ h)$ неравенство (4.3) в форме

$$(\mathbf{A}h,\ h)^r \leqslant (\mathbf{A}^r h,\ h)\,(h,\ h)^{r-1}.$$

Тогда неравенство (4.24) примет вид

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ h) \leqslant \|\varphi\|\,(\mathbf{A}^r h,\ h)^{\frac{1}{2r}}\,(h,\ h)^{\frac{r-1}{2r}}.$$

Так как $\mathbf{A}^r = \mathbf{A}_r$, а оператор $\mathbf{A}_r$ обладает свойством $\mathfrak{b}$), то

$$(\mathbf{A}^r h,\ h) \leqslant \|\mathbf{A}_r\|_0 \cdot \|h\|_{q_0}^2 = \|\mathbf{A}_r\|_0 (\operatorname{mes} G_n)^{\frac{2}{q_0}}$$
$$\left(\frac{1}{p_0} + \frac{1}{q_0} = 1\right).$$

Кроме этого,

$$(h,\ h) = \operatorname{mes} G_n.$$

Значит,

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ h) \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\mathbf{A}_r\|_0^{\frac{1}{2r}} (\operatorname{mes} G_n)^{\frac{1}{rq_0} + \frac{r-1}{2r}}.$$

Объединяя последнее неравенство и (4.23), получим:

$$2^{n-1} \operatorname{mes} G_n \leqslant \|\varphi\| \cdot \|\mathbf{A}_r\|_0^{\frac{1}{2r}} (\operatorname{mes} G_n)^{\frac{1}{rq_0} + \frac{r-1}{2r}},$$

откуда после несложных преобразований следует:

$$\operatorname{mes} G_n \leqslant \frac{c}{2^{\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2} \cdot n}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots), \tag{4.25}$$

где

$$c = \left(2\|\varphi\| \cdot \|\mathbf{A}_r\|_0^{\frac{1}{2r}}\right)^{\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}}.$$

Неравенство (4.25) аналогично неравенству (4.13), полученному при доказательстве теоремы 4.2.

Из неравенства (4.25) и правой части (4.22) вытекает, что

$$\int_{G_n} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds \leqslant \frac{c}{2^{\left[\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2} - p\right] n}} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.26}$$

Аналогично (4.15) получим

$$\int_{G_0} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\varphi\|^2.$$

Из последних неравенств следует, что

$$\int_G |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p ds \leqslant \|\mathbf{A}\| \cdot \|\varphi\|^2 + \frac{c}{2^{\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}-p} - 1} < \infty.$$

Значит, оператор $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует из L^2 в L^p.

Осталось доказать, что множество M функций $\mathbf{H}\varphi$ ($\varphi \in T$), где T — единичный шар пространства L^2, компактно в L^p. В силу леммы 4.1 для этого достаточно показать, что функции $|\mathbf{H}\varphi(s)|^p$ ($\varphi \in T$) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Доказательство этого утверждения проводится дословно так же, как доказательство теоремы 4.4.

Теорема доказана.

Утверждение теоремы 4.5 существенно слабее утверждения теорем 4.2 и 4.4, так как всегда

$$\frac{2p_0 r}{(r-1)p_0+2} < p_0.$$

Действительно, последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$2r < p_0(r-1)+2,$$

которое очевидно, так как $2 < p_0$.

Однако теорема 4.5 содержит положительное утверждение, так как всегда

$$\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2} > 2.$$

Действительно, последнее неравенство эквивалентно неравенству

$$rp_0 > (r-1)p_0+2,$$

которое снова очевидно, так как $2 < p_0$.

По оператору $\mathbf{H}$, существование которого установлено в теореме 4.5, обычным способом определяется сопряженный оператор $\mathbf{H}^*$, действующий из L^q в L^2 $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$ и также вполне непрерывный. Оператор $\mathbf{H}^*$ на элементах $\varphi \in L^q \cap L^2$ принимает те же значения, что и оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$. В силу этого непрерывный оператор $\mathbf{HH}^*$, действующий из L^q в L^p, принимает на элементах из $L^q \cap L^2$ те же значения, что и оператор $\mathbf{A}$.

Повидимому, в условиях теоремы 4.5 оператор $\mathbf{A}$ определен на всем L^q и совпадает с $\mathbf{HH}^*$.

5. Ядра, некоторые итерации которых ограничены. Ограничимся рассмотрением случая, когда $\operatorname{mes} G < \infty$ *).

Теорема 4.6 (М. Голомб, М. М. Вайнберг). *Пусть $K(s, t)$ — симметричное положительно определенное ядро, ограниченное почти всюду:*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s,\, t \in G} |K(s, t)| = K < \infty.$$

Тогда оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, где

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\, \varphi(t)\, dt,$$

обладает свойством

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s \in G} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s)| \leqslant \sqrt{K} \|\varphi\|.$$

Доказательство. Пусть $\varphi \in L^2$. Обозначим через G_1 множество тех $s \in G$, в которых

$$|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s)| > \sqrt{K} \cdot \|\varphi\|. \tag{4.27}$$

Через $h(s)$ обозначим функцию, определенную равенством

$$h(s) = \begin{cases} \operatorname{sign} \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s), & \text{если} \quad s \in G_1, \\ 0 \qquad\qquad\quad , & \text{если} \quad s \overline{\in} G_1. \end{cases}$$

---

*) Недавно А. И. Поволоцкий обобщил предложения этого пункта на случай $\operatorname{mes} G = \infty$.

В силу симметричности оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ и неравенства Буняковского

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ h) = (\varphi,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h) \leqslant \|\varphi\| \cdot \sqrt{(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}h)} = \|\varphi\| \sqrt{(\mathbf{A}h, h)}.$$

Но

$$(\mathbf{A}h,\ h) = \int\limits_{G_1}\int\limits_{G_1} K(s,\ t)\, h(s)\, h(t)\, ds\, dt \leqslant K(\operatorname{mes} G_1)^2$$

и, следовательно,

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ h) \leqslant \sqrt{K} \cdot \|\varphi\| \cdot \operatorname{mes} G_1. \tag{4.28}$$

Предположим, что $\operatorname{mes} G_1 > 0$. Тогда

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ h) = \int\limits_{G_1} |\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|\, ds > \sqrt{K} \cdot \|\varphi\| \cdot \operatorname{mes} G_1. \tag{4.29}$$

Неравенства (4.28) и (4.29) очевидным образом противоречивы.

Теорема доказана.

Замечание. В условиях теоремы 4.6 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует из L^2 непрерывно в каждое пространство L^p, $p > 2$. Так как функции $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi$ ($\varphi \in T$, T — единичный шар пространства L^2) равномерно ограничены, то функции $|\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)|^p$ ($\varphi \in T$) имеют равностепенно абсолютно непрерывные интегралы. Следовательно, в силу леммы 4.1 множество $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}T$ компактно в каждом L^p. Значит, оператор $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, действующий в условиях теоремы 4.6 из L^2 в любое L^p, вполне непрерывен.

Пусть $K(s,\ t)$ — симметричное положительно определенное ядро, некоторая итерация $K_r(s,\ t)$ которого почти всюду ограничена:

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s,\ t \in G} |K_r(s,\ t)| = K < \infty. \tag{4.30}$$

Так как по предположению $\operatorname{mes} G < \infty$, то ядро $K_r(s, t)$ суммируемо с любой степенью $p_0 > 0$. В силу теоремы 4.5 оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует в каждое пространство L^p, где

$$2 \leqslant p < \frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}.$$

Как легко видеть, выражение $\frac{2rp_0}{(r-1)p_0+2}$ при фиксированном r монотонно возрастает при возрастании p_0 и стремится к $\frac{2r}{r-1}$. Поэтому справедлива

Теорема 4.7. *Пусть* $K(s, t)$ — *симметричное положительно определенное ядро,* r*-я итерация которого удовлетворяет условию* (4.30). *Пусть*

$$2 \leqslant p < 2 + \frac{2}{r-1}.$$

Тогда оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ *действует из* L^2 *в* L^p *и является вполне непрерывным оператором.*

6. Ядра с собственными числами разных знаков. До сих пор мы рассматривали только положительно определенные ядра $K(s, t)$, т. е. такие ядра, которые можно представить в виде

$$K(s, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(s) \varphi_i(t), \tag{4.31}$$

где $\varphi_i(s)$ $(i = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированные собственные функции, а λ_i — положительные собственные числа.

Пусть теперь у симметричного ядра $L(s, t)$ есть конечное число отрицательных собственных чисел. Мы запишем такое ядро в следующем виде:

$$L(s, t) = -\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(s) \varphi_i(t) + \sum_{i=n+1}^{\infty} \lambda_i \varphi_i(s) \varphi_i(t), \tag{4.32}$$

где все числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \ldots$ положительны. Ядру $L(s, t)$ отнесем положительно определенное ядро $K(s, t)$, определенное формулой (4.31). Будем говорить при этом, что положительно определенное ядро $K(s, t)$ соответствует ядру $L(s, t)$.

Связь между ядрами $L(s, t)$ и $K(s, t)$ определяется равенством

$$K(s, t) = L(s, t) + 2\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \varphi_i(s) \varphi_i(t). \qquad (4.33)$$

Если ядро $L(s, t)$ суммируемо с квадратом, то и ядро $K(s, t)$ будет суммируемо с квадратом. Если ядро $L(s, t)$ суммируемо со степенью $p_0 > 2$, то ядро $K(s, t)$ в силу теоремы 4.2 будет суммируемо с любой степенью p, где $2 \leqslant p < p_0$. Поэтому справедлива

Теорема 4.8. *Пусть симметричное ядро* $L(s, t)$ *имеет конечное число отрицательных собственных чисел и суммируемо со степенями* 2 *и* $p_0 > 2$.

Тогда оператор $\mathbf{A}$, *порожденный ядром* (4.33), *допускает представление* (4.16).

В частности, в условиях теоремы 4.8 оператор $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ действует в каждое пространство L^p, где $2 \leqslant p < p_0$, и вполне непрерывен.

Аналогично обобщается на случай ядер с конечным числом отрицательных собственных чисел теорема 4.5 об операторах, определенных ядрами, итерации которых суммируемы со степенями 2 и p_0.

В заключение рассмотрим случай ограниченного (почти всюду) симметричного ядра $L(s, t)$. Так как все собственные функции ограниченного ядра ограничены, то ядро (4.33) также будет ограничено. Поэтому из теоремы 4.6 непосредственно следует

Теорема 4.9. *Пусть* $\operatorname{mes} G < \infty$. *Пусть симметричное ядро* $L(s, t)$ *имеет конечное число отрицательных собственных чисел и в существенном ограничено. Тогда найдется такое число* K_1, *что*

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s \in G} \left| \mathbf{A}^{\frac{1}{2}} \varphi(s) \right| \leqslant K_1 \|\varphi\|,$$

где

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

а ядро $K(s, t)$ *определено равенством* (4.33).

§ 5. Слабо непрерывные функционалы

1. Дифференцируемые функционалы. Пусть $\mathbf{F}$ — непрерывный функционал, определенный на пространстве L^p, где $p > 1$. Линейный непрерывный функционал $\mathbf{D}_\varphi \mathbf{F}$, определенный на L^p, называется *дифференциалом Фреше* функционала $\mathbf{F}$ в точке $\varphi \in L^p$, если приращение функционала $\mathbf{F}$ можно представить в виде

$$\mathbf{F}(\varphi + h) - \mathbf{F}(\varphi) = \mathbf{D}_\varphi \mathbf{F}(h) + \omega(\varphi, h),$$

причем

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\omega(\varphi, h)}{\|h\|} = 0. \tag{5.1}$$

Величина $\omega(\varphi, h)$ называется *остатком* дифференциала Фреше. Функционал $\mathbf{F}$ при этом называется *дифференцируемым* в точке φ.

Линейный функционал $\mathbf{D}_\varphi \mathbf{F}$ (в силу теоремы об общем виде линейного функционала в L^p) можно представить в виде

$$\mathbf{D}_\varphi \mathbf{F} h = (h, \varphi^*) \qquad (h \in L^p),$$

где

$$\varphi^* \in L^q, \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Оператор $\mathbf{\Gamma}$, определенный равенством

$$\mathbf{\Gamma}\varphi = \varphi^*,$$

называется *градиентом* функционала $\mathbf{F}$: $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{grad} \mathbf{F}$.

Градиент определен на тех элементах из L^p, на которых функционал $\mathbf{F}$ имеет дифференциал Фреше; множество значений оператора $\mathbf{\Gamma}$ включено в L^q. Градиент позволяет записать выражение для приращения функционала $\mathbf{F}$ в более удобной форме:

$$\mathbf{F}(\varphi + h) - \mathbf{F}(\varphi) = (h, \mathbf{\Gamma}\varphi) + \omega(\varphi, h) \qquad (h \in L^p). \tag{5.2}$$

Через T_r будем обозначать шар радиуса r в пространстве L^p, т. е. совокупность всех таких элементов $\varphi \in L^p$, у которых $\|\varphi\| \leqslant r$.

Говорят, что функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ *равномерно дифференцируем на шаре T_r*, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, что из $\|h\| < \delta$ следует:

$$\frac{|\omega(\varphi, h)|}{\|h\|} < \varepsilon \qquad (\varphi \in T_r).$$

Пусть $\mathbf{H}$ — линейный непрерывный оператор, действующий из пространства L^{p_1} в пространство L^p, а $\mathbf{F}$ — дифференцируемый функционал, заданный на L^p. Тогда функционал $\mathbf{FH}$:

$$\mathbf{FH}(\varphi) = \mathbf{F}(\mathbf{H}\varphi),$$

будет определен на L^{p_1}. В силу (5.2) приращение функционала $\mathbf{FH}$ можно записать в виде

$$\mathbf{FH}(\varphi + h) - \mathbf{FH}(\varphi) = (\mathbf{H}h, \quad \mathbf{\Gamma H}\varphi) + \omega(\mathbf{H}\varphi, \ \mathbf{H}h) \qquad (h \in L^{p_1}),$$

где $\mathbf{\Gamma} = \operatorname{grad} \mathbf{F}$ — оператор, действующий из пространства L^p в пространство L^q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Так как

$$\|h\| \geqslant \frac{\|\mathbf{H}h\|}{\|\mathbf{H}\|},$$

то в силу (5.1)

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{|\omega(\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}h)|}{\|h\|} \leqslant \|\mathbf{H}\| \lim_{\|\mathbf{H}h\| \to 0} \frac{|\omega(\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}h)|}{\|\mathbf{H}h\|} = 0.$$

Таким образом, дифференциал $\mathbf{D}_\varphi\mathbf{FH}$ функционала $\mathbf{FH}$ имеет вид

$$\mathbf{D}_\varphi \mathbf{FH}(h) = (\mathbf{H}h, \ \mathbf{\Gamma H}\varphi) = (h, \ \mathbf{H}^*\mathbf{\Gamma H}\varphi),$$

где сопряженный к $\mathbf{H}$ оператор $\mathbf{H}^*$ действует из пространства L^q в пространство L^{q_1} $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad \frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = 1\right)$.

Значит,

$$\operatorname{grad} \mathbf{FH} = \mathbf{H}^* (\operatorname{grad} \mathbf{F}) \mathbf{H}. \tag{5.3}$$

Последняя формула ниже будет применяться в случае, когда $p_1 = 2$; тогда $q_1 = 2$ и оператор $\operatorname{grad} \mathbf{FH}$ действует в L^2.

Приведем пример дифференцируемого функционала. Пусть $f(s, u)$ — функция, удовлетворяющая условиям Каратеодори. Пусть оператор $\mathbf{f}$, порожденный этой функцией, действует из пространства L^p в пространство L^q. Грубо говоря, это означает, что функция $f(s, u)$ — «подстепенная» в том смысле, что $f(s, u) = O\left(u^{\frac{p}{q}}\right)$.

Если оператор $\mathfrak{f}$ действует из L^p в L^q, то, как показано в § 2 настоящей главы, он будет непрерывным и ограниченным в том смысле, что нормы его значений (в L^q) на каждом ограниченном множестве из L^p равномерно ограничены.

Обозначим через $\mathbf{F}$ функционал, определенный равенством

$$\mathbf{F}(\varphi) = \int_G ds \int_0^{\varphi(s)} f(s, u)\, du.$$

По теореме о среднем значении интеграла и по неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}(\varphi)| &\leqslant \int |\varphi(s)| \cdot |f[s, \theta(s)\varphi(s)]|\, ds \leqslant \\ &\leqslant \|\varphi\|_p \cdot \|\mathfrak{f}(\theta\varphi)\|_q, \end{aligned} \tag{5.4}$$

где $0 \leqslant \theta(s) \leqslant 1$ *). Очевидно, $\theta(s)\varphi(s) \in L^p$ и $\|\theta\varphi\| \leqslant \|\varphi\|_p$. Так как оператор $\mathfrak{f}$ действует из L^p в L^q, то $\|f(\theta\varphi)\|_q < \infty$. Следовательно, в силу (5.4) функционал $\mathbf{F}$ определен на L^p.

Лемма 5.1. *Функционал* $\mathbf{F}$ *дифференцируем и градиентом его является оператор* $\mathfrak{f}$.

Доказательство. Приращение функционала $\mathbf{F}$ можно, пользуясь теоремой о среднем значении определенного интеграла, записать в виде

$$\mathbf{F}(\varphi + h) - \mathbf{F}(\varphi) = (h, \mathfrak{f}\varphi) + \omega(\varphi, h),$$

где

$$\omega(\varphi, h) = \int_G h(s) \{ f[s, \varphi(s) + \theta_h(s) \cdot h(s)] - f[s, \varphi(s)] \}\, ds,$$

причем $0 \leqslant \theta_h(s) \leqslant 1$ **).

*) Функция $\theta(s)$ будет измеримой, если, например, ее значения определять как наименьшие θ из $[0, 1]$, при которых справедлива формула о среднем значении определенного интеграла.

**) Относительно измеримости функции $\theta_h(s)$ см. предыдущую сноску.

Если $\|h(s)\|_p \to 0$, то и $\|\theta_h(s)\,h(s)\|_p \to 0$. Поэтому из неравенства Гельдера и непрерывности оператора $\mathbf{f}$ следует, что

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{|\omega(\varphi, h)|}{\|h\|_p} \leqslant \lim_{\|h\|\to 0} \|\mathbf{f}(\varphi + \theta_h h) - \mathbf{f}\varphi\|_q = 0.$$

Лемма доказана *).

Рассмотрим теперь функционал $\mathbf{FH}$:

$$\mathbf{FH}(\varphi) = \int_G ds \int_0^{\mathbf{H}\varphi(s)} f(s, u)\,du, \tag{5.5}$$

где $\mathbf{H}$ — непрерывный оператор, действующий из L^{p_1} в L^p. Этот функционал будет определен на L^{p_1}, причем в силу (5.3)

$$\operatorname{grad} \mathbf{FH} = \mathbf{H}^*\mathbf{fH}. \tag{5.6}$$

Оператор $\mathbf{H}^*\mathbf{fH}$ будет действовать из L^{p_1} в L^{q_1}. Особо важен случай, когда $p_1 = q_1 = 2$. В этом случае оператор $\mathbf{H}^*\mathbf{fH}$ действует в L^2.

Предоставляем читателю показать, что функционал $\mathbf{FH}$ равномерно дифференцируем в каждом шаре. Доказательство этого утверждения удобно провести, использовав тот факт, что каждый функционал с равномерно непрерывным градиентом равномерно дифференцируем.

2. Слабо непрерывные функционалы. Теоремы Э. С. Цитланадзе. Функционал $\mathbf{F}$, заданный на множестве M в банаховом пространстве E, называется *слабо непрерывным* на M, если значения его на каждой слабо сходящейся последовательности элементов из M образуют сходящуюся последовательность чисел. Примером слабо непрерывного функционала может служить функционал (5.5).

Каждый слабо непрерывный функционал ограничен на ограниченном множестве.

---

*) Утверждение этой леммы для частных случаев было использовано еще Гаммерштейном [13], Голомбом [17] и другими авторами. Широко применялась эта лемма в работах М. М. Вайнберга (см. [10д], а также [10т]). Приведенное доказательство леммы сообщил автору А. И. Поволоцкий летом 1950 г.

Дифференцируемые слабо непрерывные функционалы в регулярных банаховых пространствах с базисом были подробно изучены Э. С. Цитланадзе (см., например, [70к]), который установил основные теоремы о свойствах операторов-градиентов этих функционалов *). Нас будут интересовать ниже свойства операторов-градиентов функционалов, определенных в гильбертовом пространстве. В связи с этим мы ограничимся доказательством двух предложений Э. С. Цитланадзе для случая, когда E — гильбертово пространство.

Пусть $E_1 \subset E_2 \subset \ldots$ — последовательность конечномерных подпространств размерности соответственно $1, 2, \ldots$ гильбертова пространства E, обладающая тем свойством, что для каждого элемента $\varphi \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n_ε, что

$$\rho(\varphi, E_{n_\varepsilon}) = \inf_{\psi \in E_{n_\varepsilon}} \|\varphi - \psi\| < \varepsilon.$$

В этом случае, как легко видеть, каждому компактному множеству $M \subset E$ и любому числу $\varepsilon > 0$ можно поставить в соответствие такой номер n_ε, что при $n \geqslant n_\varepsilon$ для всех $\varphi \in M$ одновременно

$$\rho(\varphi, E_n) < \varepsilon. \tag{5.7}$$

Через $\mathbf{P}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ обозначим операторы ортогонального проектирования на соответствующие подпространства E_n. Операторы $\mathbf{Q}_n = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ будут операторами ортогонального проектирования на ортогональные дополнения в пространстве E к E_n. Условие (5.7) можно записать в форме

$$\|\mathbf{Q}_n\varphi\| < \varepsilon \qquad (\varphi \in M;\ n \geqslant n_\varepsilon). \tag{5.8}$$

Лемма 5.2. *Если* $\mathbf{F}$ — *слабо непрерывный функционал, заданный на шаре* $T_r \subset E$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *можно указать такое число* n_0, *зависящее только от* ε, *что при* $n \geqslant n_0$

$$|\mathbf{F}(\varphi + \mathbf{P}_n\psi) - \mathbf{F}(\varphi + \psi)| < \varepsilon \qquad (\varphi, \psi \in T_r).$$

*) См. также М. М. Вайнберг [10].

Доказательство. В предположении противного для некоторого $\alpha > 0$ можно указать такие последовательности элементов φ_n, $\psi_n \in T_r$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$|\mathbf{F}(\varphi_n + \mathbf{P}_n\psi_n) - \mathbf{F}(\varphi_n + \psi_n)| > \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots). \qquad (5.9)$$

Так как шар в гильбертовом пространстве слабо компактен, то без ограничения общности можно считать, что последовательности φ_n, ψ_n, $\mathbf{P}_n\psi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходятся соответственно к некоторым элементам φ, ψ, χ. Переходя к пределу в (5.9), получим:

$$|\mathbf{F}(\varphi + \chi) - \mathbf{F}(\varphi + \psi)| \geqslant \alpha,$$

откуда следует, что

$$\|\chi - \psi\| > 0.$$

С другой стороны, по условию (5.8)

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{Q}_n(\chi - \psi)\| = 0,$$

откуда следует, что

$$\|\psi - \chi\|^2 = (\psi - \chi, \psi - \chi) = \lim_{n \to \infty} (\mathbf{Q}_n\psi_n, \psi - \chi) =$$
$$= \lim_{n \to \infty} (\psi_n, \mathbf{Q}_n(\psi - \chi)) \leqslant r \lim_{n \to \infty} \|\mathbf{Q}_n(\psi - \chi)\| = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму.

Теорема 5.1. *Градиент* $\mathbf{\Gamma}$ *слабо непрерывного равномерно дифференцируемого на* T_r *функционала* $\mathbf{F}$ *компактен, т. е. преобразует* T_r *в компактное множество.*

Доказательство. Вначале отметим, что оператор $\mathbf{\Gamma}$ ограничен. Выпишем формулу (5.2) для приращения $\mathbf{F}(\varphi + \mu\mathbf{\Gamma}\varphi) - \mathbf{F}(\varphi)$, где μ — пока произвольное положительное число:

$$\mathbf{F}(\varphi + \mu\mathbf{\Gamma}\varphi) - \mathbf{F}(\varphi) = \mu\|\mathbf{\Gamma}\varphi\|^2 + \omega(\varphi, \mu\mathbf{\Gamma}\varphi). \qquad (5.10)$$

Так как функционал $\mathbf{F}$ равномерно дифференцируем, то можно указать такое $\delta > 0$, что из $\|h\| < \delta$ следует, что $|\omega(\varphi, h)| < \|h\|$. Положим

$$\mu = \frac{\delta}{\|\mathbf{\Gamma}\varphi\|}.$$

Тогда из (5.10) следует:

$$\delta\|\mathbf{\Gamma}\varphi\| \leqslant 2 \sup_{\varphi \in T_r} |\mathrm{F}(\varphi)| + \delta.$$

Полагая в формуле (5.2) $h = \mu \mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi$, где n — произвольный индекс, получим после деления на $\|h\|$:

$$\|\mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi\| = \frac{\mathrm{F}(\varphi + \mu \mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi) - \mathrm{F}(\varphi)}{\mu \|\mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi\|} - \frac{\omega(\varphi, \mu \mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi)}{\mu \|\mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi\|}. \tag{5.11}$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. В силу равномерной дифференцируемости $\mathbf{F}$ можно выбрать такое число $\mu > 0$, не зависящее ни от $\varphi \in T_r$, ни от n, что

$$\frac{\omega(\varphi, \mu \mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi)}{\mu \|\mathbf{Q}_n \mathbf{\Gamma}\varphi\|} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\varphi \in T_r). \tag{5.12}$$

В силу леммы 5.2 можно указать такое n_0, что при $n \geqslant n_0$

$$|\mathrm{F}(\varphi + \mu \mathbf{Q}_n \mathbf{F}\varphi) - \mathrm{F}(\varphi)| \leqslant \frac{\varepsilon^2 \mu}{2} \qquad (\varphi \in T_r). \tag{5.13}$$

Из неравенств (5.12) и (5.13) следует, что

$$\|\mathbf{Q}_{n_0} \mathbf{\Gamma}\varphi\| \leqslant \varepsilon \qquad (\varphi \in T_r).$$

Действительно, если $\|\mathbf{Q}_{n_0} \mathbf{\Gamma}\varphi\| > 0$, то в силу (5.11) и

$$\|\mathbf{Q}_{n_0} \mathbf{\Gamma}\varphi\| \leqslant \frac{1}{\mu\varepsilon} |\mathrm{F}(\varphi + \mu \mathbf{Q}_{n_0} \mathbf{\Gamma}\varphi) - \mathrm{F}(\varphi)| + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом, множество $\mathbf{\Gamma} T_r$ с точностью до произвольного $\varepsilon > 0$ может быть аппроксимировано компактным множеством $\mathbf{P}_{n_0} \mathbf{\Gamma} T_r$. Значит, само множество $\mathbf{\Gamma} T_r$ компактно. Теорема доказана.

Теорема 5.2. *Градиент* $\mathbf{\Gamma}$ *слабо непрерывного равномерно дифференцируемого на каждом шаре функционала преобразует каждую слабо сходящуюся последовательность элементов в сильно сходящуюся последовательность.*

Доказательство. Пусть последовательность $\varphi_n \in E$ $(n = 1, 2, \ldots)$ слабо сходится к элементу $\varphi \in E$. Допустим, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|\mathbf{\Gamma}\varphi_n - \mathbf{\Gamma}\varphi\| = \alpha > 0.$$

В силу компактности оператора $\mathbf{\Gamma}$ можно без ограничения общности считать, что последовательность $\mathbf{\Gamma}\varphi_n$ сходится сильно к некоторому элементу $\psi \in E$, причем $\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\| = \alpha$.

Из (5.2), полагая $h = \mu(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi)$, легко получить равенство

$$\frac{(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi, \mathbf{\Gamma}\varphi - \mathbf{\Gamma}\varphi_n)}{\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\|} =$$
$$= \frac{\mathbf{F}[\varphi + \mu(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi)] - \mathbf{F}[\varphi_n + \mu(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi)] - \mathbf{F}(\varphi) - \mathbf{F}(\varphi_n)}{\mu\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\|} -$$
$$- \frac{\omega[\varphi, \mu(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi)]}{\mu\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\|} + \frac{\omega[\varphi_n, \mu(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi)]}{\mu\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\|} \quad (n = 1, 2, \ldots). \quad (5.14)$$

Выбирая μ достаточно малым, можно добиться того, что

$$\frac{|\omega[\varphi, \mu(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi)]|}{\mu\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\|} < \varepsilon, \qquad \frac{|\omega[\varphi_n, \mu(\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi)]|}{\mu\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\|} < \varepsilon$$
$$(n = 1, 2, \ldots),$$

где ε — любое заданное число. Но тогда, переходя в (5.14) к пределу при $n \to \infty$, получим в силу слабой непрерывности функционала $\mathbf{F}$, что

$$\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\| \leqslant 2\varepsilon$$

и, так как ε может быть сколь угодно мало, то

$$\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \psi\| = 0.$$

Полученное противоречие доказывает, что

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \|\mathbf{\Gamma}\varphi_n - \mathbf{\Gamma}\varphi\| = 0.$$

Теорема доказана.

Из теоремы 5.2, в частности, вытекает, что градиент слабо непрерывного равномерно дифференцируемого функционала является вполне непрерывным оператором.

ГЛАВА II

ВРАЩЕНИЕ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ

Как мы уже указывали во введении, естественный путь изучения устойчивых свойств уравнения

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi,$$

где $\mathbf{A}$ — некоторый нелинейный оператор, заключается в изучении топологических инвариантов геометрических объектов, которые могут быть поставлены в соответствие изучаемому уравнению. Соответствие будет наиболее простым, если уравнению $\varphi = \mathbf{A}\varphi$ отнесено преобразование $\mathbf{A}$ или векторное поле $\varphi - \mathbf{A}\varphi$ в функциональном пространстве, в котором действует оператор $\mathbf{A}$. В этом случае, например, каждая теорема существования решения у уравнения эквивалентна теореме о существовании неподвижной точки при некотором преобразовании, либо теореме о существовании нулевого вектора у некоторого векторного поля.

В каждой конкретной задаче уравнение путем различных преобразований нужно привести к такому виду, чтобы соответственное векторное поле легко поддавалось изучению. Функциональное пространство, в котором следует рассматривать векторное поле, тоже выбирается в зависимости от конкретной задачи.

Первая задача, возникающая при изучении векторного поля, заключается в том, чтобы найти общие признаки существования нулевого вектора. Частные признаки существования нулевого вектора для векторных полей, рассматриваемых в выпуклых или звездных областях, дают различные принципы неподвижной точки (Шаудера, А. Н. Тихонова и др.). Лере и Шаудер обобщили понятие брауэровой степени отображения на некоторые классы отображений в банаховых пространствах; новое понятие позволило сформулировать более общие, чем известные ранее, признаки существования неподвижных точек.

Когда выяснилось, что степень является единственным инвариантом, сохраняющимся при гомотопных изменениях определенных классов векторных полей, то стало ясно, что она должна играть роль во всех задачах, связанных с устойчивыми свойствами уравнения. В качестве первого нового приложения автором совсем просто были получены теоремы о существовании непрерывных ветвей собственных функций у различных уравнений, был разобран вопрос о точках бифуркации и т. д.

В настоящей работе понятие Лере—Шаудера степени отображения заменено эквивалентным понятием вращения векторного поля.

В первом параграфе этой главы вводится понятие вращения конечномерного векторного поля. Ряд предложений теории Брауэра степени отображения на конечномерную сферу приводится без доказательства (полное изложение этой теории см. в [1]). Часть предложений доказывается при помощи «нумерационных» соображений. Мы предполагаем при этом, что читателю известны основные понятия комбинаторной топологии: полиэдр, симплекс, симплициальный комплекс, симплициальное разбиение, ориентация.

Второй параграф посвящен изложению элементарного доказательства теоремы Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука о нечетности вращения нечетного поля. Теорема эта будет использована в главах III и VI.

В последних параграфах рассматриваются векторные поля в банаховых пространствах. После введения понятия вращения доказывается для вполне непрерывных векторных полей в банаховых пространствах классификационная теорема, являющаяся обобщением теоремы Хопфа (для отображений сферы гильбертова пространства в себя теорема была установлена Э. Роте). Затем устанавливаются различные теоремы о вращении конкретных классов векторных полей.

§ 1. Векторное поле в конечномерном пространстве

1. Степень отображения. Пусть задано непрерывное симплициальное отображение Ψ n-мерного замкнутого*)

*) Не имеющего границы. Ниже рассматриваются полиэдры, являющиеся границами ограниченных областей $(n+1)$-мерного линейного пространства.

ориентированного полиэдра T на n-мерную ориентированную единичную сферу S^n, лежащую в $(n+1)$-мерном евклидовом пространстве R^{n+1}. Это значит, что существует такое симплициальное разбиение K полиэдра T и такое симплициальное разбиение K_1 сферы S^n, что при отображении Ψ каждый симплекс комплекса K аффинно преобразуется в некоторый симплекс комплекса K_1.

Выберем некоторый n-мерный симплекс Σ комплекса K_1 и рассмотрим все n-мерные симплексы комплекса K, которые при отображении Ψ переходят в Σ. Среди них s симплексов будут преобразовываться в Σ с сохранением ориентации, а t — с изменением ориентации на противоположную. Число $s-t$, оказывается, не зависит от выбора в комплексе K_1 n-мерного симплекса Σ. Это число называется *степенью симплициального отображения* Ψ.

Пусть теперь Ψ — произвольное непрерывное отображение T на сферу S^n. Оказывается, что степени всех симплициальных отображений, близких к отображению Ψ, одинаковы. Эту общую степень симплициальных отображений, близких к Ψ, называют *степенью непрерывного отображения* Ψ.

Пусть на T задано непрерывное $(n+1)$-мерное векторное поле Φ без нулевых векторов (в каждой точке $x\in T$ задан $(n+1)$-мерный вектор Φx). *Вращением векторного поля* Φ называется степень отображения Ψ:

$$\Psi x=\frac{\Phi x}{\|\Phi x\|}\qquad (x\in T)$$

полиэдра T на ориентированную сферу S^n.

Рассмотрение симплициальных отображений специального типа (на границу выпуклой оболочки системы $2n+2$ точек пространства R^{n+1} с координатами $\{\pm 1, 0, \ldots, 0\}$, $\{0, \pm 1, \ldots, 0\}, \ldots, \{0, 0, \ldots, \pm 1\}$) позволяет дать простое «нумерационное» определение вращения векторного поля. Нумерационное определение удобно при вычислении степени некоторых конкретных отображений — при определении вращения конкретных векторных полей.

2. Нумерации. Пусть каждой вершине n-мерного симплекса Σ поставлено в соответствие некоторое натуральное число. Систему из $n+1$ чисел, соответствующих вершинам симплекса Σ, будем выписывать в неубывающем порядке и называть *нумерацией* симплекса Σ. Нумерацию симплекса будем называть *вырожденной*, если хотя бы двум вершинам поставлено в соответствие одно и то же число.

Легко видеть, что нумерации всех граней симплекса Σ, порожденные невырожденной нумерацией симплекса Σ, будут невырождены. Если нумерация n-мерного симплекса Σ вырождена, то либо нумерации всех его $(n-1)$-мерных граней также вырождены, либо невырождены нумерации только двух его $(n-1)$-мерных граней.

Пусть K есть n-мерный симплициальный комплекс. Если каждой его вершине поставлено в соответствие натуральное число, то будем говорить, что осуществлена *нумерация N комплекса K*. Нумерация N естественным образом порождает нумерации всех симплексов комплекса K. Нумерацию N будем называть *вырожденной*, если на всех n-мерных симплексах она порождает вырожденную нумерацию.

Пусть K_1 — симплициальное подразделение комплекса K. Нумерация N_1 комплекса K_1 является *продолжением нумерации N*, если каждой вершине комплекса K_1 поставлен в соответствие один из номеров (по нумерации N) ее носителя *) в комплексе K. Очевидно, *продолжение вырожденной нумерации есть вырожденная нумерация*. Из леммы Шпернера, которую мы ниже доказываем, следует, что *продолжение невырожденной нумерации есть невырожденная нумерация*.

Лемма Шпернера. *Пусть Σ есть n-мерный симплекс с нумерацией* $1, 2, \ldots, n+1$. *При каждом продолжении этой нумерации на любое симплициальное разбиение K симплекса Σ нечетное число n-мерных симплексов комплекса K будет иметь нумерацию* $1, 2, \ldots, n+1$.

Доказательство. Утверждение леммы будем доказывать по индукции. Для нульмерного симплекса (точки) оно очевидно.

Пусть K — симплициальное разбиение симплекса Σ и пусть N — продолжение на комплекс K указанной в лемме нумерации симплекса Σ. Рассмотрим $(n-1)$-мерные симплексы комплекса K, на которых N порождает нумерацию $1, 2, \ldots, n$. Эти симплексы могут быть либо гранями двух n-мерных сим-

*) Носителем точки в комплексе K называется симплекс минимальной размерности комплекса K, содержащий эту точку.

плексов комплекса K, либо одного. В последнем случае симплекс с нумерацией $1, 2, \ldots, n$ должен лежать в грани S симплекса Σ, противоположной вершине, занумерованной числом $n+1$, так как в силу условий леммы в нумерации вершин комплекса K на каждой другой $(n-1)$-мерной грани симплекса Σ одно из чисел $1, 2, \ldots, n$ участвовать не может. Вершины грани S занумерованы числами $1, 2, \ldots, n$. По предположению индукции число $(n-1)$-мерных симплексов с нумерацией $1, 2, \ldots, n$ комплекса K, лежащих в S, нечетно. Таким образом, нечетно и число $(n-1)$-мерных граней n-мерных симплексов комплекса K с нумерацией $1, 2, \ldots, n$.

С другой стороны, четность числа n-мерных симплексов с невырожденной нумерацией в комплексе K совпадает с четностью числа $(n-1)$-мерных граней с нумерацией $1, 2, \ldots, n$ n-мерных симплексов (так как n-мерный симплекс с вырожденной нумерацией имеет четное число граней с нумерацией $1, 2, \ldots, n$ — нуль или две, а симплекс с нумерацией $1, 2, \ldots, n+1$ — одну такую грань).

Лемма доказана.

Нечетные числа $2k-1$ будем обозначать через a_k, а четные $2k$ — через b_k $(k=1, 2, \ldots)$.

Нумерацию симплекса назовем *допустимой*, если из каждой пары чисел a_k, b_k $(k=1, 2, \ldots)$ в ней участвует не более чем одно число, которое, впрочем, может встретиться в нумерации несколько раз. Нумерацию комплекса назовем *допустимой*, если она порождает допустимые нумерации на всех симплексах. Продолжение каждой допустимой нумерации будет, очевидно, допустимой нумерацией.

Одну нумерацию симплекса назовем *сопряженной* другой нумерации, если первая получается из второй заменой всех чисел a_k соответствующими числами b_k и, наоборот, всех чисел b_j соответствующими числами a_j.

3. Степень нумерации. Пусть L — некоторый ориентированный замкнутый n-мерный полиэдр, K — его триангуляция и N — допустимая нумерация комплекса K числами a_i и b_i $(i=1, \ldots, n+1)$.

Пусть Σ есть n-мерный симплекс комплекса K с невырожденной нумерацией N. Его вершины, которым приписан номер a_k или b_k, будем обозначать через z_k. Очевидно, индексы в обозначениях двух различных вершин симплекса Σ будут различны, причем будут принимать все значения от 1 до $n+1$. Через β_Σ обозначим число вершин симплекса Σ, которым в нумерации N приписаны четные числа. Отнесем симплексу Σ число γ_Σ, определяемое равенством

$$\gamma_\Sigma = (-1)^{\beta_\Sigma} \varepsilon (z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}), \tag{1.1}$$

где через $\varepsilon(z_1, z_2, \ldots, z_{n+1})$ обозначена ориентация симплекса с вершинами $z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}$. Число γ_Σ будем называть *весом* симплекса Σ.

Пусть нумерация $(n-1)$-мерного симплекса Δ невырождена. Тогда в обозначениях вершин этого симплекса индексы будут принимать все значения от 1 до $n+1$, кроме одного значения r. Через β_Δ снова обозначим число вершин симплекса Δ, которым приписаны четные числа в нумерации N. *Весом* грани Δ симплекса Σ назовем определяемое равенством

$$\gamma_\Delta^\Sigma = (-1)^{\beta_\Delta} \varepsilon (z_1, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_{n+1}), \tag{1.2}$$

где через $\varepsilon(z_1, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_{n+1})$ обозначена ориентация симплекса Δ, определяемая ориентацией симплекса Σ.

Каждый $(n-1)$-мерный симплекс Δ комплекса K имеет две противоположные ориентации, порожденные ориентациями двух n-мерных симплексов комплекса K, общей гранью которых он является. Если Δ — общая грань симплексов Σ с Σ', то

$$\gamma_\Delta^{\Sigma'} = -\gamma_\Delta^\Sigma. \tag{1.3}$$

Пусть Σ есть n-мерный симплекс с вырожденной нумерацией, в которой участвуют n различных чисел, $c_1, \ldots, c_n$. Одно из этих чисел повторится в нумерации два раза, т. е. нумерация симплекса имеет вид

$$c_1, \ldots, c_{k-1}, c_k, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_n.$$

Соответствующие вершины симплекса обозначим через $z_1, \ldots, z_k, \bar{z}_k, \ldots, z_n$. Симплекс Σ будет иметь две $(n-1)$-мерные грани с невырожденной нумерацией $c_1, \ldots, c_n$: грань Δ с вершинами $z_1, \ldots, z_k, \ldots, z_n$ и грань $\bar{\Delta}$ с вершинами $z_1, \ldots, \bar{z}_k, \ldots, z_n$. Как легко видеть,

$$\gamma_{\bar{\Delta}}^\Sigma = -\gamma_\Delta^\Sigma. \tag{1.4}$$

Пусть Σ есть n-мерный симплекс с невырожденной нумерацией $c_1, \ldots, c_{n+1}$ и вершинами $z_1, \ldots, z_{n+1}$. Рассмотрим его $(n-1)$-мерную грань Δ с вершинами $z_1, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_{n+1}$ и нумерацией $c_1, \ldots, c_{r-1}, c_{r+1}, \ldots, c_{n+1}$. Так как

$$\varepsilon(z_1, \ldots, z_{r-1}, z_{r+1}, \ldots, z_{n+1}) = \\ = (-1)^{r-1}\varepsilon(z_1, \ldots, z_{r-1}, z_r, z_{r+1}, \ldots, z_{n+1}),$$

а $\beta_\Sigma = \beta_\Delta$ при нечетном c_r и $\beta_\Sigma = \beta_\Delta + 1$ при четном c_r, то

$$\gamma_\Delta^\Sigma = (-1)^{c_r + r}\gamma_\Sigma. \qquad (1.5)$$

Рассмотрим все n-мерные симплексы комплекса K с одинаковой невырожденной нумерацией $c_1, \ldots, c_{n+1}$. Обозначим через $s(c_1, \ldots, c_{n+1})$ число симплексов с нумерацией $c_1, \ldots, c_{n+1}$ и положительным весом, а через $t(c_1, \ldots, c_{n+1})$ число симплексов с той же нумерацией, но с отрицательным весом. Число γ_N, определяемое равенством

$$\gamma_N = s(c_1, \ldots, c_{n+1}) - t(c_1, \ldots, c_{n+1}), \qquad (1.6)$$

будем называть *степенью нумерации* N.

Это определение будет оправдано, если мы покажем, что число $s(c_1, \ldots, c_{n+1}) - t(c_1, \ldots, c_{n+1})$ не зависит от выбора нумерации $c_1, \ldots, c_{n+1}$.

Докажем это. Так как от каждой невырожденной нумерации можно перейти к любой другой невырожденной нумерации конечным числом шагов, заменяя при каждом шаге одно из чисел нумерации сопряженным числом, то утверждение будет доказано, если мы покажем, что

$$s(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1}) - t(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1}) = \\ = s(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1}) - t(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1}). \qquad (1.7)$$

Симплекс с нумерацией $c_1, \ldots, c_{r-1}, c_{r+1}, \ldots, c_{n+1}$ может быть гранью n-мерных симплексов с нумерациями различных типов.

Во-первых, он может быть гранью одного из n-мерных симплексов с вырожденной нумерацией. В силу (1.4) число α таких граней с положительным весом будет равно числу таких граней с отрицательным весом.

Во-вторых, он может быть гранью симплекса с нумерацией $c_1, \ldots, c_{r-1}, a_r, c_{r+1}, \ldots, c_{n+1}$. В силу (1.5) при нечетном r число таких граней с положительным весом будет равно $s(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1})$, а с отрицательным весом $-t(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1})$.

В-третьих, он может быть гранью симплекса с нумерацией $c_1, \ldots, c_{r-1}, b_r, c_{r+1}, \ldots, c_{n+1}$. При нечетном r (снова в силу (1.5)) число таких граней с положительным весом равно $t(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1})$, а с отрицательном весом $-s(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1})$.

Таким образом, общее число $(n-1)$-мерных граней с нумерацией $c_1, \ldots, c_{r-1}, c_{r+1}, \ldots, c_{n+1}$ и положительным весом будет равно

$$\alpha + s(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1}) + t(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1}),$$

а число граней с той же нумерацией, но отрицательным весом будет равно

$$\alpha + t(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1}) + s(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1}).$$

Так как в силу (1.3) число $(n-1)$-мерных граней с рассматриваемой нумерацией, имеющих положительный вес, равно числу таких граней с отрицательным весом, то

$$\alpha + s(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1}) + t(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1}) =$$
$$= \alpha + t(c_1, \ldots, a_r, \ldots, c_{n+1}) + s(c_1, \ldots, b_r, \ldots, c_{n+1}),$$

откуда непосредственно следует (1.7).

Аналогично устанавливается справедливость равенства (1.7) при четном r.

4. Вращение векторного поля. Пусть на n-мерном замкнутом полиэдре L заданы $n+1$ непрерывные функции

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_{n+1}(x) \qquad (x \in G),$$

не обращающиеся ни в одной точке одновременно в нуль. Будем считать, что функции $\varphi_i(x)$ — это компоненты непрерывного векторного поля $\mathbf{\Phi}$, заданного на L.

В силу равномерной непрерывности на L функций $\varphi_i(x)$ найдутся такие числа $\alpha > 0$ и $\delta > 0$, что в каждой окрестности радиуса 2δ любой точки $x \in L$ по крайней мере одна из функций $\varphi_i(x)$ знакопостоянна и принимает значения, большие по абсолютной величине, чем α. Введем в рассмотрение замкнутые лебеговы множества

$$G_1,\ F_1;\ \ldots;\ G_{n+1},\ F_{n+1},$$

где F_i $(i=1, \ldots, n+1)$ — множество $x \in L$, в котором $\varphi_i(x) \geqslant \alpha$, G_i $(i=1, \ldots, n+1)$ — множество тех $x \in G$, в которых $\varphi_i(x) \leqslant -\alpha$. Множества F_i, G_i $(i=1, \ldots, n+1)$, очевидно, покрывают L. Через δ_1 обозначим наименьшее из расстояний между F_i и G_i $(i=1, \ldots, n+1)$. Пусть $\delta_0 = \min(\delta, \delta_1)$.

Построим достаточно мелкое (так, чтобы каждый симплекс имел диаметр не больше δ_0) симплициальное разбиение K полиэдра L и занумеруем его вершины, приписывая каждой вершине один из номеров a_k, где k — номера тех функций $\varphi_i(x)$, которые в рассматриваемой вершине имеют положительное значение и на всей звезде рассматриваемой вершины имеют неотрицательные значения, или один из номеров b_j, где j — номера тех функций $\varphi_i(x)$, которые на вершине принимают отрицательное значение и на звезде вершины неположительны. Напомним, что *звездой* вершины z симплициального комплекса K называется множество точек всех замкнутых симплексов комплекса K, одной из вершин которых является точка z. В частности, вершине z можно приписать один из номеров a_k, где k — номера тех F_i, которые покрывают звезду рассматриваемой вершины, или один из номеров b_j, где j — номера тех G_i, которые покрывают эту же звезду. О нумерации N, построенной указанным способом, будем говорить, что она п о р о ж д е н а векторным полем $\mathbf{\Phi}$. Нумерация N будет, очевидно, допустимой.

Степень нумерации N будем называть ***вращением*** поля $\mathbf{\Phi}$.

Чтобы это определение было оправдано, нужно показать, что различные нумерации, порожденные полем $\mathbf{\Phi}$, имеют одинаковую степень.

Рассмотрим вначале нумерации N_1 и N_2, порожденные полем $\mathbf{\Phi}$ на одном и том же симплициальном разбиении K полиэдра L. От одной нумерации, порожденной полем $\mathbf{\Phi}$, можно перейти к другой конечным числом шагов, заменяя при каждом шаге номер только одной вершины. В силу этого достаточно показать, что степени нумераций N_1 и N_2 одинаковы, предполагая, что есть только одна вершина, которой в нумерациях N_1 и N_2 приписаны различные номера c_1 и c_2. Числа c_1 и c_2 не могут быть сопряженными. Поэтому можно указать такие $n+1$ чисел, не содержащих c_1 и c_2, которые будут определять допустимую невырожденную нумерацию симплексов. Определяя по этим числам γ_{N_1} и γ_{N_2}, мы получим одно и то же число.

Пусть теперь N_1 и N_2 — нумерации, порожденные полем $\mathbf{\Phi}$ на различных симплициальных разбиениях K_1 и K_2 полиэдра L. Пусть симплициальное разбиение K полиэдра L является продолжением разбиений K_1 и K_2. Продолжим нумерации N_1 и N_2 на комплекс K, приписывая вершине наименьший из номеров ее носителя в комплексе K_1 (K_2). Полученные нумерации $\tilde{N}_1$ и $\tilde{N}_2$ будут иметь соответственно те же степени, что и нумерации N_1 и N_2. Выше мы показали, что $\gamma_{\tilde{N}_1} = \gamma_{\tilde{N}_2}$. Таким образом, и $\gamma_{N_1} = \gamma_{N_2}$.

5. Гомотопные векторные поля. Говорят, что векторные поля $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ *гомотопны* на L, если существует непрерывная по x, t $(n+1)$-мерная вектор-функция $\mathbf{X}(x, t)$ $(x \in L, 0 \leqslant t \leqslant 1)$, не принимающая нулевых значений и такая, что

$$\mathbf{X}(x, 0) = \mathbf{\Phi}x, \quad \mathbf{X}(x, 1) = \mathbf{\Psi}x \qquad (x \in L).$$

Так как для равномерно близких векторных полей можно строить общие, порожденные этими полями нумерации, то вращения гомотопных векторных полей одинаковы.

Справедливо и обратное утверждение (см., например, [1]).

Теорема Хопфа. *Пусть вращения векторных полей $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$, заданных на связном однородном полиэдре L, одинаковы. Тогда поля $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ гомотопны.*

Как мы уже указывали выше, вращение векторного поля $\mathbf{\Phi}$ совпадает со степенью некоторых симплициальных отображений на границу выпуклой оболочки Q системы $2n+2$ точек пространства R^{n+1} с координатами

$$\{\pm 1, 0, \ldots, 0\}, \{0, \pm 1, \ldots, 0\}, \ldots, \{0, 0, \ldots, \pm 1\}. \tag{1.8}$$

Пространство R^{n+1} считается при этом ориентированным так, что симплекс с вершинами $z_0 = \{0, 0, \ldots, 0\}$ и

$$z_1 = \{1, 0, \ldots, 0\}, z_2 = \{0, 1, \ldots, 0\}, \ldots \\ \ldots, z_{n+1} = \{0, 0, \ldots, 1\} \tag{1.9}$$

имеет ориентацию

$$\varepsilon(z_0, z_1, z_2, \ldots, z_{n+1}) = 1.$$

Пусть на полиэдре L задано векторное поле $\mathbf{\Phi}$ без нулевых векторов. Так как гомотопные векторные поля имеют одинаковое вращение и в нумерационном определении (как показано выше) и в определении, приведенном в пункте 1 (см., например, [1]), то мы ограничимся доказательством эквивалентности двух определений вращения для некоторого векторного поля Ψ, гомотопного векторному полю Φ.

Пусть K — достаточно мелкое симплициальное разбиение полиэдра L, а N — нумерация вершин комплекса K, порожденная полем Φ. Определим на L функции $\psi_1(x), \ldots, \psi_{n+1}(x)$. Если вершине z в нумерации N приписан номер a_k, то положим $\psi_k(z) = 1$; если этой вершине приписан номер b_k, то положим $\psi_k(z) = -1$; если вершине приписан номер, отличный и от a_k и от b_k, то положим $\psi_k(z) = 0$. Функции $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ мы определили по нумерации N на всех вершинах каждого симплекса из K. На другие точки симплексов продолжим эти функции линейно.

Функции $\psi_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n+1)$ определяют на L непрерывное векторное поле Ψ без нулевых векторов. Поле Ψ, как легко видеть, можно рассматривать как симплициальное отображение на границу выпуклой оболочки Q точек с координатами (1.8).

Векторное поле Ψ гомотопно полю Φ. Пусть, действительно, z — одна из вершин носителя в комплексе K точки $x \in L$ и пусть некоторая функция $\psi_{k_0}(x)$ (а значит, и функция $\varphi_{k_0}(x)$) в точке z принимает отличное от нуля значение. Тогда, по построению, функция $\psi_{k_0}(x)$ в точке x принимает значение того же знака, что и $\psi_{k_0}(z)$. Следовательно, $(1-t)\varphi_{k_0}(x) + t\psi_{k_0}(x) \neq 0$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Таким образом, векторы

$$(1-t)\Phi x + t\Psi x \qquad (x \in L;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

в нуль не обращаются, что и доказывает гомотопность полей Φ и Ψ.

Нумерацию N можно рассматривать как нумерацию, порожденную полем Ψ. Определим степень этой нумерации (т. е. вращение поля Ψ в нумерационном определении) по симплексам с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Такие симплексы при отображении Ψ переходят в симплекс $\overline{\Sigma}$ (грань «многогранника» Q) с вершинами (1.9). При этом симплексы с положительным весом преобразуются с сохранением ориентации, а симплексы с отрицательным весом — с изменением ориентации. Таким образом, разность количества симплексов комплекса K с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и положительным весом и количества симплексов с той же нумерацией, но с отрицательным весом равна разности между количеством симплексов комплекса K, переходящих с сохранением ориентации в симплекс $\overline{\Sigma}$, и количеством симплексов, переходящих в $\overline{\Sigma}$ с изменением ориентации. Это и означает, что «нумерационное» определение вращения векторного поля совпадает с определением, приведенным выше, в пункте 1.

6. Неподвижные точки. Пусть T — $(n+1)$-мерный ориентированный полиэдр, L — его граница. Пусть на T задано $(n+1)$-мерное непрерывное векторное поле Φ. Точки $x \in T$, в которых $\Phi x = 0$, будем называть *неподвижными точками* векторного поля Φ. Пусть поле Φ имеет только изолированные неподвижные точки, не лежащие на L.

Будем описывать вокруг каждой неподвижной точки $x_k \in T$ поля Φ сферы S_k^ε достаточно малых радиусов ε (так, чтобы ограничиваемые ими шары T_k^ε были полностью включены в T и не пересекались между собой). Векторные поля Φ_k^ε, индуцируемые полем Φ на сферах S_k^ε, при различных ε будут гомотопны, в силу чего их вращение будет одинаковым. Это вращение γ_k называют *индексом* неподвижной точки x_k поля Φ.

Образуем полиэдр T_1, взяв в T дополнение ко всем шарам T_k^ε и замкнув его. Поле Φ, очевидно, на T_1 не имеет неподвижных точек. Пусть K — достаточно мелкое симплициальное разбиение полиэдра T_1, а N — нумерация, порожденная на K полем Φ. Нумерация N будет вырожденной, так как она осуществлена лишь $(n+1)$-й парой чисел a_i, b_i. В каждом $(n+1)$-мерном симплексе, имеющем n-мерную грань с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$, будут две такие грани, причем вес их будет противоположным. В силу этого число n-мерных граней $(n+1)$-мерных симплексов комплекса K с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и положительным весом будет равно числу n-мерных граней с той же нумерацией и отрицательным весом. С другой стороны, каждый n-мерный симплекс является либо гранью одного $(n+1)$-мерного симплекса комплекса K — тогда он лежит на границе полиэдра T_1, — либо гранью двух $(n+1)$-мерных симплексов комплекса K — в этом случае два веса его будут иметь противоположные знаки.

Отсюда вытекает, что на границе полиэдра T_1 число симплексов с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и положительным весом совпадает с числом симплексов с той же нумерацией, но с отрицательным весом.

Граница полиэдра T_1 состоит из L и всех сфер S_k^ε, причем каждая сфера S_k^ε ориентирована противоположно тому, как она была ориентирована при определении индекса γ_k неподвижной точки x_k поля Φ. Число симплексов с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и положительным весом, лежащих на L, обозначим через s; число таких симплексов на каждой сфере S_k^ε обозначим через s_k ($k = 1, \ldots, r$). Число симплексов с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и отрицательным весом, лежащих на L, обозначим через t; число таких симплексов на каждой сфере S_k^ε обозначим через t_k ($k = 1, \ldots, r$).

Нами показано, что

$$s + \sum_{k=1}^{r} s_k = t + \sum_{k+1}^{r} t_k. \qquad (1.10)$$

Но каждый симплекс на сфере S_k^ε, рассматриваемой как часть границы T_1, имеет ориентацию, противоположную той, которая порождается на сфере S_k^ε, рассматриваемой как граница шара T_k^ε. Поэтому

$$\gamma_k = -(s_k - t_k) \qquad (k = 1, \ldots, r).$$

Таким образом, из (1.10) следует, что

$$s - t = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_r.$$

Сумма индексов неподвижных точек называется *алгебраическим числом* неподвижных точек. Последнее равенство означает, что *алгебраическое число неподвижных точек поля* Φ *на* T *равно вращению поля* Φ *на* L.

В частности, если вращение векторного поля Φ на L не равно нулю, то поле Φ в T обязательно имеет неподвижные точки.

Каждая теорема об отличии вращения поля от нуля является принципом неподвижной точки или, что то же, принципом существования решения у некоторого уравнения.

В связи с этим большой интерес представляют различные признаки отличия от нуля вращения векторного поля.

7. Лемма о произведении вращений. Пусть на n-мерном замкнутом полиэдре L задано нормированное непрерывное векторное поле Φ, $\|\Phi x\| = 1$ при $x \in L$. Пусть Ψ — непрерывное отображение сферы S^n на себя. Вращение векторного поля $\Psi\Phi$ на L определяется (см. [1]) по вращению поля Φ и вращению поля Ψ (степени отображения Ψ) формулой

$$\gamma_{\Psi\Phi} = \gamma_{\Psi} \cdot \gamma_{\Phi}. \tag{1.11}$$

§ 2. Вращение конкретных векторных полей

1. Теорема о еже. Пусть на n-мерном полиэдре L задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов. Обозначим через N нумерацию, порожденную полем Φ на некотором симплициальном разбиении K полиэдра L.

Рассмотрим на L также поле $-\Phi$. Нумерация N^*, образованная из N переходом к сопряженным числам, будет, очевидно, порождена полем $-\Phi$.

Определим вращение $\gamma_{-\Phi}$ поля $-\Phi$. Для этого рассмотрим n-мерные симплексы комплекса K с нумерацией $b_1, \ldots, b_{n+1}$ в нумерации N^*. В нумерации N эти симплексы были занумерованы числами $a_1, \ldots, a_{n+1}$. Вес каждого такого симплекса при переходе от нумерации N к нумерации N^* умножится на $(-1)^{n+1}$, так как номера всех вершин меняют свою четность. Определяя степень нумерации N по симплексам с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$, а нумерации N^* — по симплексам с нумерацией $b_1, \ldots, b_{n+1}$, получим, что $\gamma_{N^*} = (-1)^{n+1}\gamma_N$.

Таким образом,

$$\gamma_{-\Phi} = (-1)^{n+1}\gamma_{\Phi}. \tag{2.1}$$

Из этого равенства, в частности, следует, что *при четном n вращения полей Φ и $-\Phi$ различны* (если они отличны от нуля).

Пусть на L заданы два векторных поля Φ и Ψ с различным вращением. Тогда каждая непрерывная по обеим переменным вектор-функция $\mathbf{X}(x, t)$ $(x \in L;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{X}(x, 0) = \Phi x, \quad \mathbf{X}(x, 1) = \Psi x \qquad (x \in L),$$

принимает в некоторой точке $\{x, t\}$ нулевое значение, так как в противном случае поля $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ были бы гомотопны и вращение их было бы одинаково. Из этого рассуждения следует, что в некоторой точке $x \in L$ векторы $\mathbf{\Phi}x$ и $\mathbf{\Psi}x$ направлены противоположно (если вращения полей $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ различны). Действительно, в противном случае можно построить непрерывную вектор-функцию

$$\mathbf{X}(x, t) = (1 - t)\mathbf{\Phi}x + t\mathbf{\Psi}x \qquad (x \in L;\ 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

не обращающуюся в нуль.

В случае, если $n+1$ — нечетное число, то для любых двух непрерывных векторных полей $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$, вращение одного из которых отлично от нуля, на n-мерном полиэдре L найдется точка x, в которой векторы $\mathbf{\Phi}x$ и $\mathbf{\Psi}x$ коллинеарны.

Для случая, когда вращения полей $\mathbf{\Phi}$ и $\mathbf{\Psi}$ различны, рассматриваемое утверждение нами уже доказано. В случае же, если вращения полей одинаковы, то в силу (2.1) различны вращения полей $\mathbf{\Phi}$ и $-\mathbf{\Psi}$.

Частным случаем последнего утверждения является

Теорема о еже. *Пусть L — граница некоторой ограниченной области, содержащей точку θ — нуль нечетномерного линейного пространства R^{n+1}. Пусть* $\mathbf{\Phi}$ есть $(n+1)$-*мерное векторное поле на L. Тогда на L найдется точка x, в которой вектор $\mathbf{\Phi}x$ коллинеарен радиусу-вектору x точки x.*

Для доказательства нужно ввести в рассмотрение векторное поле $\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$, где $\mathbf{I}$ — оператор тождественного преобразования в R^{n+1}, и применить предыдущее утверждение. Вращение поля $\mathbf{I}$ равно единице и, следовательно, отлично от нуля.

2. Линейные векторные поля. Элементы $(n+1)$-мерного векторного пространства R^{n+1} мы будем ниже называть точками или векторами.

Пусть $\mathbf{I}$ — векторное поле, относящее каждой точке $x \in R^{n+1}$ вектор x. Тогда вращение поля $\mathbf{I}$ на каждой сфере с центром в θ равно единице. Поле $\mathbf{I}$ имеет на всем R^{n+1} только одну неподвижную точку — θ, индекс которой равен единице. Следовательно, вращение поля $\mathbf{I}$ на границе L каждого ограниченного открытого множества T пространства R^{n+1} равно единице, если $\theta \in T$, и равно нулю, если θ не принадлежит замыканию T.

Векторное поле $\mathbf{\Phi}$ назовем *линейным*, если оператор $\mathbf{\Phi}$ линеен. Абсолютная величина вращения каждого линейного векторного поля всегда равна единице. Точное значение вращения векторного линейного поля мы вычислим в § 3 непосредственно для бесконечномерного случая.

Рассмотрим один частный случай векторного поля, гомотопного линейному.

Пусть T — выпуклое ограниченное множество из R^{n+1}, содержащее θ. Пусть векторное поле $\mathbf{\Phi}$, заданное на T, удовлетворяет на границе L множества T условию:

$$x + \mathbf{\Phi}x \in T \qquad (x \in L).$$

Тогда поле $\mathbf{\Phi}$ на L гомотопно полю $-\mathbf{I}$ и имеет вращение $(-1)^{n+1}$, так как вектор-функция

$$\mathbf{X}(x, t) = (1-t)\mathbf{\Phi}x - tx \qquad (x \in L, \ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

ни в одной точке в нуль не обращается, а

$$\mathbf{X}(x, 0) = \mathbf{\Phi}x, \quad \mathbf{X}(x, 1) = -x \quad (x \in L).$$

Таким образом, вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на L при выполнении условия $x + \mathbf{\Phi}x \in T \, (x \in L)$ отлично от нуля, и, следовательно, поле $\mathbf{\Phi}$ имеет в T нулевые векторы. Это составляет содержание известного принципа Брауэра неподвижной точки, который обычно формулируют в несколько иной форме.

Теорема Брауэра. *Пусть непрерывное преобразование* $\mathbf{I} + \mathbf{\Phi}$ *преобразует ограниченное выпуклое тело* T *в себя. Тогда найдется такая точка* $x \in T$, *что* $\mathbf{\Phi}x = 0$.

Конечно, теорема Брауэра сохраняет силу, если T гомеоморфно ограниченному выпуклому телу (например, если T — ограниченная звездная область).

3. Симметричные нумерации на сфере. Допустимую нумерацию симплекса типа $a_{i_1}, b_{i_2}, a_{i_3}, b_{i_4}, \ldots$ (в которой четные и нечетные числа чередуются и первым стоит нечетное число) будем называть нумерацией *первого рода*; допустимую нумерацию типа $b_{j_1}, a_{j_2}, b_{j_3}, a_{j_4}, \ldots$ будем называть нумерацией *второго рода*. Остальные допустимые нумерации симплексов будем называть нумерациями *третьего рода*.

Каждая нумерация первого рода сопряжена некоторой нумерации второго рода, и наоборот, каждая нумерация второго рода сопряжена некоторой нумерации первого рода.

Допустимая нумерация симплекса порождает допустимые нумерации всех его граней. При этом среди нумераций $(n-1)$-мерных граней n-мерного симплекса число нумераций первого (второго) рода не более двух: оно равно единице тогда и только тогда, когда исходная нумерация n-мерного симплекса есть нумерация первого или второго рода.

Утверждение это проверяется простым подсчетом.

Лемма 2.1. *При продолжении допустимой нумерации n-мерного комплекса четность числа n-мерных симплексов с нумерациями первого (второго) рода не меняется.*

Доказательство. Утверждение леммы достаточно доказать для продолжения нумераций каждого n-мерного симплекса данного комплекса. Если нумерация симплекса первого рода, то утверждение совпадает с утверждением леммы Шпернера. Если нумерация симплекса второго или третьего рода, то при продолжении этой нумерации вообще не могут появиться симплексы с нумерациями первого рода.

Лемма доказана.

Пусть K — *симметричная триангуляция* n-мерной сферы S^n, т. е. такая триангуляция, что вместе со всяким ее симплексом Σ в нее входит симплекс Σ^*, расположенный симметрично симплексу Σ относительно центра сферы S^n. Допустимую нумерацию симметричной триангуляции сферы назовем *симметричной* относительно центра сферы нумерацией, если она порождает сопряженные нумерации у симметричных относительно центра сферы симплексов.

Теорема 2.1 [30a]. *При всякой симметричной относительно центра сферы нумерации симметричной триангуляции сферы S^n нечетное число n-мерных симплексов имеют нумерации первого рода.*

Доказательство. Утверждение теоремы будем доказывать по индукции. Для нульмерной сферы, т. е. пары точек, оно очевидно, так как в силу симметрии только одна из точек имеет нечетный номер. Будем предполагать, что утверждение теоремы справедливо для симметричных нумераций триангуляций $(n-1)$-мерной сферы, Пусть K — симметричная триангуляция сферы S^n и N — симметричная нумерация триангуляции K. Рассмотрим некоторый $(n-1)$-мерный экватор S^{n-1} сферы S^n.

Без ограничения общности можно считать, что экватор S^{n-1} полностью состоит из $(n-1)$-мерных симплексов комплекса K, так как, если мы докажем теорему в этом предположении, она будет справедлива и без него. Действительно, если S^{n-1} не состоит из симплексов комплекса K, то, построив симметричное симплициальное разбиение K_1 триангуляции K так, чтобы S^{n-1} состоял из симплексов комплекса K_1, и продолжив симметрично нумерацию N на K_1, мы получим нумерацию, в которой четность числа нумераций первого рода n-мерных симплексов будет совпадать в силу леммы 2.1 с четностью числа нумераций первого рода симплексов комплекса K.

Рассмотрим одну из замкнутых полусфер, на которые разбивает сферу S^n экватор S^{n-1}, и подсчитаем число лежащих на ней $(n-1)$-мерных симплексов комплекса K с нумерациями первого рода, считая каждый симплекс столько раз, гранью скольких n-мерных симплексов, лежащих в рассматриваемой полусфере, он является. Каждый $(n-1)$-мерный симплекс, лежащий в полусфере, является либо гранью двух n-мерных симплексов, лежащих в полусфере, либо гранью одного; в этом случае он лежит на экваторе S^{n-1}. В силу предположения индукции число $(n-1)$-мерных симплексов на S^{n-1} с нумерациями первого рода нечетно, следовательно, нечетно и общее подсчитываемое нами число $(n-1)$-мерных граней n-мерных симплексов комплекса K, лежащих в полусфере.

Так как n-мерные симплексы только с нумерациями первого и второго рода имеют нечетное число (одну) $(n-1)$-мерных граней с нумерациями первого рода, то четность числа n-мерных симплексов с нумерациями первого и второго рода совпадает с четностью числа $(n-1)$-мерных граней с нумерациями первого рода. Следовательно, в рассматриваемой полусфере лежит нечетное число n-мерных симплексов комплекса K с нумерациями первого и второго рода.

Но число n-мерных симплексов с нумерациями первого и второго рода на полусфере совпадает с общим числом n-мерных симплексов с нумерациями только первого рода на всей сфере S^n, так как симплексам с нумерациями второго рода, лежащим в одной полусфере, соответствуют во второй полусфере симметричные симплексы с нумерациями первого рода, и наоборот.

Итак, общее число n-мерных симплексов в комплексе K с нумерациями первого рода нечетно.

Теорема доказана.

Из теоремы 2.1, в частности, следует существование в каждой симметричной триангуляции с симметричной нумерацией симплекса с нумерацией первого рода. Отсюда вытекает, что симметричная нумерация симметричной триангуляции n-мерной сферы не может быть осуществлена менее чем $(2n+2)$ различными числами.

Пусть нумерация осуществлена только числами $a_1, b_1, \ldots$ $\ldots, a_{n+1}, b_{n+1}$. Тогда из теоремы 2.1 и определения степени нумерации следует

Теорема 2.2. *Степень симметричной относительно центра нумерации симметричной триангуляции сферы нечетна.*

Теорема 2.2, как мы увидим ниже, позволяет вычислить степень некоторых векторных полей.

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, можно доказать «нумерационное» утверждение, в некотором смысле являющееся обобщением теоремы 2.2.

Теорема 2.3 [29и]. *Пусть K — симметричное относительно r-мерного подпространства R, проходящего через центр, симплициальное разбиение n-мерной сферы S^n. Пусть в нумерации N комплекса K вершине, симметричной относительно R вершине с номером a_k или b_k $(k = 1, \ldots, r)$, приписан тот же номер, а вершине, симметричной вершине с номером a_j или b_j $(j = r+1, \ldots, n+1)$, приписан сопряженный номер.*

Тогда нумерация N_R, индуцированная нумерацией N на симплициальном разбиении сферы $S^n \cap R$, будет осуществлена числами $1, 2, \ldots, 2r$. При этом степени нумераций N_R и N будут иметь одинаковую четность.

4. Теорема Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука [43], [9]. Теорема, которую мы доказываем в этом пункте, сформулирована К. Борсуком и доказана им при помощи теории ретрактов. Утверждение этой теоремы эквивалентно основной лемме Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана доказательства теоремы о категории проективного пространства. В пункте 5 мы докажем эту эквивалентность.

Будем обозначать через x^* точку, симметричную точке x относительно центра сферы S^n.

Теорема 2.4. *Пусть на сфере S^n задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов, обладающее тем свойством, что в симметричных относительно центра точках векторы поля направлены неодинаково:*

$$\frac{\Phi x^*}{\|\Phi x^*\|} \neq \frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \qquad (x \in S^n).$$

Тогда вращение поля Φ нечетно.

Доказательство. Во-первых, заметим, что векторное поле Φ, рассматриваемое в доказываемой теореме, гомотопно векторному полю Ψ без нулевых векторов, обладающему свойством

$$\Psi x^* = -\Psi x \qquad (x \in S^n),$$

где векторы Ψx определяются равенством

$$\Psi x = \Phi x - \Phi x^* \qquad (x \in S^n).$$

Гомотопность полей Φ и Ψ следует из того, что вектор-функция

$$\mathrm{X}(x, t) = \Phi x - t\Phi x^* \qquad (x \in S^n, \ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

не принимает нулевых значений и

$$\mathrm{X}(x, 0) = \Phi x, \ \mathrm{X}(x, 1) = \Psi x \qquad (x \in S^n).$$

В силу гомотопности полей Φ и Ψ их вращения одинаковы. Так как поле Ψ нечетно, то оно порождает, в частности, и симметричные относительно центра сферы нумерации симметричных триангуляций сферы. Степени этих нумераций в силу теоремы 2.2 будут нечетны. Значит, вращение поля Ψ, а следовательно, и поля Φ нечетно.

Теорема доказана.

Теорема 2.3 позволяет [29и] аналогично исследовать вращение непрерывных векторных полей, симметричных относительно подпространств. Если считать, что «вращение» нульмерного векторного поля нечетно, то приводимую ниже теорему можно считать обобщением теоремы 2.4.

Обозначим через P оператор проектирования на r-мерное подпространство R, проходящее через центр сферы S^n.

Вектор $\bar{y}$ симметричен вектору y относительно R, если

$$\bar{y} = 2\mathbf{P}y - y.$$

Теорема 2.5. *Пусть на сфере S^n задано такое непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов, что и поле $\mathbf{P}\Phi$ не имеет на сфере $S^n \cap R$ нулевых векторов. Пусть в каждой точке $\bar{x} \in S^n$, симметричной точке $x \in S^n$ относительно подпространства R, вектор $\Phi\bar{x}$ поля Φ не направлен противоположно вектору, симметричному вектору Φx относительно подпространства R:*

$$\frac{\Phi\bar{x}}{\|\Phi\bar{x}\|} \neq \frac{\Phi x - 2\mathbf{P}\Phi x}{\|\Phi x - 2\mathbf{P}\Phi x\|} \qquad (x \in S^n).$$

Тогда вращение γ поля Φ имеет ту же четность, что и вращение поля $\mathbf{P}\Phi$ на $S^n \cap R$.

Теорема 2.4 К. Борсука обобщена А. И. Фетом [67] на случай векторных полей на сфере, симметричных относительно некоторой инволюции без неподвижных точек. Дальнейшее обобщение результатов А. И. Фета содержится в статье [29у], в которой вычислено вращение некоторых периодических векторных полей.

5. Замкнутые покрытия сферы. Изучение конечных покрытий полиэдров тесно связано с изучением вращений непрерывных векторных полей, определенных на этом полиэдре. Выясним эту связь на примере теоремы 2.4, которую мы сформулируем в несколько измененной форме, и теоремы о покрытиях, являющейся основной леммой Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана доказательства теоремы о категории проективного пространства.

Теорема 2.4′. *Пусть на $(n+1)$-мерном шаре T^{n+1} с границей S^n задано непрерывное векторное поле Φ без нулевых векторов на S^n, удовлетворяющее условию: в симметричных относительно центра точках x и x^* сферы S^n векторы поля направлены неодинаково*:

$$\frac{\Phi x^*}{\|\Phi x^*\|} \neq \frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \qquad (x \in S^n).$$

Тогда в шаре T^{n+1} есть неподвижные точки поля Φ.

Теорема 2.6 (о покрытиях сферы). *Пусть $F_1, \ldots, F_p$ — покрытие n-мерной сферы S^n замкнутыми* *множествами, каждое из которых не содержит симметричных относительно центра точек.*

Тогда количество p множеств в покрытии больше размерности сферы плюс единица: $p > n+1$.

Допустим, что утверждение теоремы 2.4′ неверно. Пусть Φ — непрерывное векторное поле, удовлетворяющее условиям теоремы 2.4′ и не имеющее нулевых векторов в шаре T^{n+1}, радиус которого будем считать равным единице.

Продолжим поле Φ на шар T_0^{n+1} радиуса 2, положив для $x \overline{\in} T^{n+1}$

$$\Phi x = \Phi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) - (\|x\| - 1)\,\Phi\left(\frac{x^*}{\|x^*\|}\right) \qquad (1 \leqslant \|x\| \leqslant 2),$$

где через $\|x\|$ обозначено расстояние от точки x до центра шара. Легко видеть, что поле Φ непрерывно и не имеет на T_0^{n+1} нулевых векторов. На S_0^n (границе шара T_0^{n+1}) поле Φ нечетно:

$$\Phi x^* = -\Phi x \qquad (\|x\| = 2).$$

Будем считать, что поле Φ определяет на T_0^{n+1} непрерывные функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ без общего нуля.

Рассмотрим $(n+1)$-мерную сферу S^{n+1}, экватором которой является сфера S_0^n, разбивающая S^{n+1} на две полусферы S_1^{n+1} и S_2^{n+1}. Пусть P — оператор, непрерывно отображающий S_1^{n+1} на T_0^{n+1} и оставляющий неподвижными все точки S_0^n. Определим на S^{n+1} непрерывные функции $\psi_1, \ldots$ $\ldots, \psi_{n+1}$ равенствами

$$\psi_i(y) = \begin{cases} \varphi_i(\mathrm{P}y) & y \in S_1^{n+1} \\ -\varphi_i(\mathrm{P}y^*) & y \in S_2^{n+1} \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n+1).$$

Пусть α — некоторое положительное число. Обозначим через $F_i\,(i = 1, \ldots, n+1)$ множество тех $y \in S^{n+1}$, в которых $\psi_i(y) \geqslant \alpha$, и через F_{n+2} замыкание множества

$$S^{n-1} \diagdown \bigcup_{i=1}^{n+1} F_i.$$

Функции ψ_i не имеют общего нуля и нечетны, следовательно, при достаточно малом α покрытие сферы S^{n+1} множествами $F_1, \ldots, F_{n+2}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.6. Число множеств в этом покрытии равно размерности сферы плюс единица, что противоречит теореме 2.6.

Таким образом, из справедливости теоремы 2.6 следует справедливость теоремы 2.4′.

Заметим, что в этом доказательстве теоремы 2.4′ для векторных полей на шаре с границей S^n мы использовали утверждение теоремы 2.6 для покрытий сферы S^{n+1}.

Допустим теперь, что неверно утверждение теоремы 2.6. Пусть $F_1, \ldots, F_{n+1}$ — покрытие сферы S^n замкнутыми множествами, удовлетворяющими условиям этой теоремы. Построим на T^{n+1} функции $\varphi_i(x)$, положив

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1 & x \in F_i \\ -1 & x^* \in F_i \end{cases} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

и продолжив их непрерывно по Урысону на весь шар, и функцию $\varphi_{n+1}(x)$, положив ее равной единице. Считая, что функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n+1}$ определяют компоненты вектора, получим на T^{n+1} непрерывное векторное поле Φ, удовлетворяющее условиям теоремы 2.4′, но не имеющее нулевых векторов.

Таким образом, из справедливости теоремы 2.4′ вытекает справедливость теоремы 2.6.

Так как теорема 2.4′ доказана, то доказана и теорема 2.6.

В главе VI теорема 2.6 будет использована в другой формулировке.

Теорема 2.7. *Пусть $F_1, \ldots, F_p$ — покрытие сферы S^n замкнутыми множествами, каждое F_i из которых представимо в виде суммы $F_i' + F_i''$ двух непересекающихся замкнутых множеств, симметричных друг другу относительно центра сферы. Тогда $p \geqslant n+1$.*

Доказательство. Непосредственное доказательство просто получается [50a] из нумерационной теоремы 2.1.

Пусть

$$\alpha = \max_{i=1, \ldots, p} \rho(F_i', F_i'').$$

Построим симметричное относительно центра симплициальное разбиение K сферы S^n с симплексами, диаметры которых меньше α. Вершине z комплекса K припишем номер a_i, если $z \in F'_i$, и номер b_i, если $z \in F''_i$, где i — такой наименьший номер множества покрытия, что $z \in F_i$. Полученная нумерация будет, очевидно, симметричной и допустимой. В силу теоремы 2.1 эта нумерация будет невырождена, т. е. она будет осуществлена не меньше чем $(2n+2)$ числами.

Теорема доказана.

Незначительное изменение доказательства приводит к более сильному утверждению: *в условиях теоремы 2.7 кратность покрытия не меньше* $n+1$, т. е. каждая точка S^n принадлежит не менее чем $(n+1)$-му множеству F_i.

Отметим, что для изучения специальных покрытий сферы могут быть применены и теоремы из [67] и [29н, у, х].

§ 3. Вполне непрерывные векторные поля

1. Конечномерная лемма. Пусть через L обозначена граница некоторой ограниченной области T $(n+2)$-мерного пространства E^{n+2}, в котором задана система координат $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}\}$. Мы предполагаем, что эта граница является полиэдром, т. е. допускает триангуляцию.

Пусть на L задано непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}$ без нулевых векторов, удовлетворяющее условию: $(n+2)$-я компонента вектора $\mathbf{\Phi}x$ в системе $\{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n+2}\}$ равна этой же компоненте самого вектора x.

Через E^{n+1} обозначим подпространство $\xi_{n+2}=0$. Очевидно, векторы поля $\mathbf{\Phi}$ на границе L_1 $(n+1)$-мерной области $T \cap E^{n+1}$ (мы предполагаем, что это пересечение не пусто) лежат в подпространстве E^{n+1}. Таким образом, можно говорить как о вращении поля $\mathbf{\Phi}$ на $(n+1)$-мерном полиэдре L, так и о вращении поля $\mathbf{\Phi}$ на n-мерном полиэдре L_1.

Лемма 3.1 [39]. *Вращения поля* $\mathbf{\Phi}$ *на* L *и* L_1 *одинаковы.*

Доказательство. Для доказательства построим нумерации N и N_1, порожденные полем $\mathbf{\Phi}$ на симплициальных разбиениях полиэдров L и L_1, и покажем, что степени этих нумераций одинаковы.

Пусть K — такое симплициальное достаточно мелкое разбиение полиэдра L, что L_1 состоит из n-мерных симплексов комплекса K. Пусть N — нумерация, порожденная на K полем $\mathbf{\Phi}$. Степень этой нумерации определим по симплексам с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+2}$. Все такие симплексы лежат в полупространстве $\xi_{n+2} \geqslant 0$. Как обычно, через $s(a_1, \ldots, a_{n+2})$ будем обозначать число симплексов с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+2}$ и положительным весом, а через $t(a_1, \ldots, a_{n+2})$ — с отрицательным весом. Через q обозначим число $(n+1)$-мерных симплексов комплекса K с нумерациями вида $a_1, \ldots, a_r, a_r, \ldots, a_{n+1}$ (состоящим из чисел $a_1, \ldots, a_{n+1}$, из которых одно повторяется), лежащих в полупространстве $\xi_{n+2} \geqslant 0$.

Подсчитаем число n-мерных граней с положительным весом и нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$ $(n+1)$-мерных симплексов комплекса K, лежащих в полупространстве $\xi_{n+2} \geqslant 0$. Это число будет равно $s(a_1, \ldots, a_{n+2}) + q$. Аналогично, число граней с той же нумерацией и отрицательным весом будет равно $t(a_1, \ldots, a_{n+2}) + q$.

С другой стороны, число n-мерных граней с рассматриваемой нумерацией и положительным весом равно $s_1(a_1, \ldots, a_{n+1}) + p$, где $s_1(a_1, \ldots, a_{n+1})$ — число n-мерных симплексов с нумерацией $a_1, \ldots, a_{n+1}$ и положительным весом, лежащих на L_1, а p — число n-мерных симплексов с той же нумерацией, являющихся гранью двух $(n+1)$-мерных симплексов, лежащих в полупространстве $\xi_{n+2} \geqslant 0$. Таким образом,

$$s(a_1, \ldots, a_{n+2}) + q = s_1(a_1, \ldots, a_{n+1}) + p.$$

Аналогично,

$$t(a_1, \ldots, a_{n+2}) + q = t_1(a_1, \ldots, a_{n+1}) + p.$$

Из последних двух равенств следует:

$$s(a_1, \ldots, a_{n+2}) - t(a_1, \ldots, a_{n+2}) = \\ = s_1(a_1, \ldots, a_{n+1}) - t_1(a_1, \ldots, a_{n+1}),$$

что означает равенство степеней нумераций, порожденных полем $\mathbf{\Phi}$ на симплициальных разбиениях полиэдров L и L_1. Лемма доказана.

2. Вращение вполне непрерывного векторного поля. Пусть L — граница ограниченной области T банахова пространства E. В пунктах 2—5 будем предполагать, что граница пересечения T с любым конечномерным подпространством является полиэдром.

Пусть на L задано векторное поле $\mathbf{\Phi}$: в каждой точке $x \in L$ задан вектор $\mathbf{\Phi}x$ этого же банахова пространства. Пусть оператор $\mathbf{\Phi}$ имеет вид $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$, где $\mathbf{F}$ — вполне непрерывный оператор, а $\mathbf{I}$ — оператор тождественного преобразования. Поле $\mathbf{\Phi}$ в этом случае будем называть *вполне непрерывным*.

Пусть вполне иепрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}$ не имеет на L нулевых векторов (неподвижных точек). В этом случае найдется такое положительное число α, что

$$\|\mathbf{\Phi}x\| > \alpha \qquad (x \in L). \tag{3.1}$$

Действительно, пусть существует такая последовательность $x_i \in L$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - \mathbf{F}x_i\| = 0.$$

Так как оператор $\mathbf{F}$ вполне непрерывен, то без ограничения общности можно считать, что элементы $\mathbf{F}x_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ образуют сходящуюся к некоторому элементу $y \in E$ последовательность (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности). Но тогда и последовательность x_i $(i = 1, 2, \ldots)$ сходится к y:

$$\lim_{i\to\infty} \|x_i - y\| \leqslant \lim_{i\to\infty} \|x_i - \mathbf{F}x_i\| + \lim_{i\to\infty} \|\mathbf{F}x_i - y\| = 0.$$

Следовательно, $y \in L$. При этом $\mathbf{F}y = y$. Значит, поле $\mathbf{\Phi}$ имеет на L нулевые векторы.

Следуя Лере и Шаудеру, выберем в E конечномерное подпространство E^{n+1}, аппроксимирующее с точностью до $\frac{\alpha}{3}$ компактное множество $\mathbf{F}L$ значений оператора $\mathbf{F}$ на L (множество концов векторов поля $\mathbf{\Phi}$ на L). В качестве E^{n+1} можно выбрать, например, линейную оболочку какой-либо конечной $\frac{\alpha}{3}$-сети компактного множества $\mathbf{F}L$. Пусть $\mathbf{P}_{n+1}$ — такой непрерывный оператор, определенный на $\mathbf{F}L$ с множеством значений в E^{n+1}, что

$$\|\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x - \mathbf{F}x\| < \frac{\alpha}{2} \qquad (x \in L). \tag{3.2}$$

Построение оператора $\mathbf{P}_{n+1}$ можно осуществить, следуя Лере и Шаудеру, например, следующим образом. Пусть $\frac{\alpha}{3}$-сеть множества $\mathbf{F}L$ состоит из элементов $y_i \in E^{n+1}$

($i=1, \ldots, k$). Оператор $\mathbf{P}_{n+1}$ определим формулой

$$\mathbf{P}_{n+1}z = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i(z)\, y_i}{\sum\limits_{i=1}^{k} \mu_i(z)} \qquad (z \in \mathbf{F}L), \tag{3.3}$$

где

$$\mu_i(z) = \begin{cases} \frac{\alpha}{2} - \|z - y_i\|, & \text{если } \|z - y_i\| \leqslant \frac{\alpha}{2} \\ 0, & \text{если } \|z - y_i\| \geqslant \frac{\alpha}{2} \end{cases} \quad (i = 1, \ldots, k).$$

Непрерывность оператора $\mathbf{P}_{n+1}$ очевидна. Выполнение условия (3.2) следует из того, что $\mathbf{P}_{n+1}z$ принадлежит выпуклой оболочке точек, находящихся от z на расстоянии меньшем чем $\frac{\alpha}{2}$.

Определим на границе L_1 области $T \cap E^{n+1}$ пространства E^{n+1} оператор $\mathbf{\Phi}_{n+1}$, положив:

$$\mathbf{\Phi}_{n+1}x = x - \mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x \qquad (x \in L_1). \tag{3.4}$$

Непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}_{n+1}$ не будет иметь на L_1 нулевых векторов, так как в силу (3.1) и (3.2)

$$\|\mathbf{\Phi}_{n+1}x\| = \|x - \mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x\| \geqslant$$
$$\geqslant \|x - \mathbf{F}x\| - \|\mathbf{F}x - \mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x\| > \frac{\alpha}{2} \qquad (x \in L_1).$$

Если мы выберем другой непрерывный оператор $\mathbf{P}'_{n+1}$, удовлетворяющий условию (3.2), и построим поле $\mathbf{\Phi}'_{n+1}$:

$$\mathbf{\Phi}'_{n+1}x = x - \mathbf{P}'_{n+1}\mathbf{F}x \qquad (x \in L_1),$$

то поля $\mathbf{\Phi}_{n+1}$ и $\mathbf{\Phi}'_{n+1}$ будут гомотопны в E^{n+1}. Действительно, функция

$$\mathbf{X}(x, t) = t\mathbf{\Phi}'_{n+1}x + (1-t)\,\mathbf{\Phi}_{n+1}x \qquad (x \in L_1;\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

не принимает нулевых значений, так как

$$\|t\Phi'_{n+1}+(1-t)\Phi_{n+1}x\|\geqslant$$
$$\geqslant\|\Phi x\|-t\|\Phi'_{n+1}-\Phi x\|-(1-t)\|\Phi_{n+1}x-\Phi x\|=$$
$$=\|\Phi x\|-t\|\mathbf{P}'_{n+1}\mathbf{F}x-\mathbf{F}x\|-(1-t)\|\mathbf{P}_{n+1}\mathbf{F}x-\mathbf{F}x\|>\frac{\alpha}{2}$$
$$(x\in L_1;\ 0\leqslant t\leqslant 1).$$

Таким образом, вращение γ_{n+1} всех векторных полей Φ_{n+1} на L_1, определенных равенством (3.4), где оператор $\mathbf{P}_{n+1}$ удовлетворяет условию (3.2), будет одинаковым.

Рассмотрим теперь подпространство $E^{n+2}\supset E^{n+1}$ и построим описанным выше способом на границе L_2 области $T\cap E^{n+2}$ аппроксимирующее Φ поле Φ_{n+2}. Вращение поля Φ_{n+2} обозначим через γ_{n+2}.

Выше было показано, что для вычисления вращения γ_{n+2} можно произвольно выбирать оператор $\mathbf{P}_{n+2}$ (нужно только, чтобы он удовлетворял условию (3.2)). В частности, в качестве этого оператора можно выбрать $\mathbf{P}_{n+1}$. Но тогда поле Φ_{n+2} удовлетворяет условиям леммы 3.1. Значит,

$$\gamma_{n+2}=\gamma_{n+1}.$$

Следовательно, при последовательном увеличении числа измерений аппроксимирующего $\mathbf{F}L$ подпространства E^n число γ_n не меняется.

Пусть E^n и E^m — различные, не содержащиеся одно в другом подпространства, аппроксимирующие $\mathbf{F}L$, а γ_n и γ_m — определенные при помощи этих подпространств вращения полей Φ_n и Φ_m. Из того, что линейная оболочка подпространств E^n и E^m также аппроксимирует $\mathbf{F}L$, следует, что $\gamma_n=\gamma_m$.

Таким образом, число γ_n не зависит от выбора аппроксимирующего $\mathbf{F}L$ подпространства и не зависит от выбора оператора $\mathbf{P}_n$. Это число однозначно определяется самим полем Φ. Будем его называть *вращением* вполне непрерывного векторного поля Φ и обозначать через γ_Φ.

3. Гомотопные поля. Вполне непрерывные векторные поля Φ и Ψ без нулевых векторов на L называют *гомотопными*, если существует такой вполне непрерывный оператор $\mathbf{X}(x, t)$ $(x\in L,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$, заданный на топологическом произведении $L\times[0, 1]$, с множеством значений в E, что $x-\mathbf{X}(x, t)$ не обращается ни в одной точке в нуль и

$$x-\mathbf{X}(x, 0)=\Phi x, \quad x-\mathbf{X}(x, 1)=\Psi x \qquad (x\in L).$$

Легко видеть, что *вращения гомотопных вполне непрерывных векторных полей одинаковы.*

Непрерывный по обеим переменным оператор $\mathbf{X}(x, t)$ ($x\in L$, $0\leqslant t\leqslant 1$) будет, в частности, вполне непрерывным, если он при каждом фиксированном значении переменной t компактен и если он непрерывен по t ($0\leqslant t\leqslant 1$) равномерно относительно $x\in L$.

Пусть вполне непрерывное векторное поле $\Phi=\mathbf{I}-\mathbf{F}$, не имеющее на L нулевых векторов, имеет на L вращение γ. Тогда, как уже было показано, найдется такое $\alpha>0$, что

$$\|\Phi x\|>\alpha \qquad (x\in L).$$

Векторное поле $\Phi_1=\mathbf{I}-\mathbf{F}-\mathbf{F}_1$, где $\mathbf{F}_1$ — некоторый вполне непрерывный оператор, можно считать полученным при помощи возмущения поля Φ оператором $\mathbf{F}_1$.

Если выполнено условие

$$\|\mathbf{F}_1x\|<\alpha \qquad (x\in L),$$

то вращение поля Φ равно вращению поля Φ_1.

Для доказательства построим вполне непрерывный оператор

$$\mathbf{X}(x, t)=t\mathbf{F}_1x+\mathbf{F}x \qquad (x\in L;\ 0\leqslant t\leqslant 1).$$

Так как

$$\|\mathbf{X}(x, t)-x\|\geqslant\|x-\mathbf{F}x\|-t\|\mathbf{F}_1x\|>0 \quad (x\in L;\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

и

$$\mathbf{X}(x, 0)=\mathbf{F}(x),\ \mathbf{X}(x, 1)=\mathbf{F}_1x+\mathbf{F}x \qquad (x\in L),$$

то поля Φ и Φ_1 гомотопны, откуда и следует доказываемое утверждение.

4. Алгебраическое число неподвижных точек вполне непрерывного векторного поля. Пусть вполне непрерывное векторное поле Φ задано на замкнутой ограниченной области G банахова пространства E. Границу множества G обозначим через L.

Точки $x \in G$, в которых векторы поля равны нулю, называют *неподвижными точками* поля $\mathbf{\Phi}$.

Пусть x — изолированная неподвижная точка поля $\mathbf{\Phi}$, не лежащая на L, т. е. такая точка, в некоторой окрестности которой нет других неподвижных точек поля $\mathbf{\Phi}$. Будем описывать вокруг точки x сферы S^ε достаточно малых радиусов ε (так, чтобы ограничиваемые ими шары T^ε полностью лежали внутри G и чтобы в каждом из этих шаров не было других неподвижных точек поля $\mathbf{\Phi}$, кроме x).

Вращение полей $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$, индуцированных полем $\mathbf{\Phi}$ на сферах S^ε, будет, очевидно, одинаково при различных ε. Это вращение γ_x называется *индексом* неподвижной точки x векторного поля $\mathbf{\Phi}$.

Пусть поле $\mathbf{\Phi}$ имеет в G только изолированные неподвижные точки. Так как неподвижные точки вполне непрерывного поля $\mathbf{\Phi}$ образуют компактное множество, то из изолированности каждой неподвижной точки следует, что поле $\mathbf{\Phi}$ имеет к о н е ч н о е число неподвижных точек.

Пусть все неподвижные точки $x_1, \ldots, x_s$ поля $\mathbf{\Phi}$ лежат внутри G. Тогда сумма индексов $\gamma_{x_1} + \ldots + \gamma_{x_s}$ равна вращению $\gamma_{\mathbf{\Phi}}$ поля $\mathbf{\Phi}$ на L.

Для доказательства этого утверждения нужно провести через точки $x_1, \ldots, x_s$ конечномерное подпространство E^n, достаточно хорошо аппроксимирующее множество значений оператора $\mathbf{F} = \mathbf{I} - \mathbf{\Phi}$ на $G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} T_i$, где через T_i обозначены шары, ограниченные сферами S_i. Затем нужно построить на $E^n \cap \left(G \setminus \bigcup\limits_{i=1}^{s} T_i\right)$ векторное поле $\mathbf{\Phi}_n$ по формуле (3.4) и применить теорему об алгебраическом числе неподвижных точек конечномерного векторного поля (см. § 1, пункт 6).

Вращение $\gamma_{\mathbf{\Phi}}$ поля $\mathbf{\Phi}$ на L называется *алгебраическим числом неподвижных точек* поля $\mathbf{\Phi}$ в G.

Ясно, что для того, чтобы поле $\mathbf{\Phi}$ в G не имело неподвижных точек, необходимо, чтобы $\gamma_{\mathbf{\Phi}}$ было равно нулю.

5. Классификационная теорема. Пусть L — граница некоторой ограниченной ~~связной~~ области банахова пространства.

выпуклой

Теорема 3.1. *Вполне непрерывные векторные поля* Φ *и* Ψ *без нулевых векторов на* L *гомотопны, если их вращения одинаковы.*

Теорема эта для конечномерных пространств установлена Хопфом. Для отображений сферы гильбертова пространства на себя ее доказал Э. Роте.

Доказательство. Операторы $\mathbf{I}-\Phi$ и $\mathbf{I}-\Psi$ вполне непрерывны. Поэтому найдется такое $\alpha>0$, что

$$\|\Phi x\|>\alpha, \quad \|\Psi x\|>\alpha \qquad (x\in L). \tag{3.5}$$

Обозначим через E^n n-мерное подпространство, аппроксимирующее с точностью до $\frac{\alpha}{4}$ компактные множества $(\mathbf{I}-\Phi)L$ и $(\mathbf{I}-\Psi)L$.

Пусть $\mathbf{P}_n$ — оператор (3.3) шаудеровского проектирования множеств $(\mathbf{I}-\Phi)L$ и $(\mathbf{I}-\Psi)L$ на E^n, удовлетворяющий на этих множествах условию

$$\|\mathbf{P}_n y-y\|\leqslant\frac{\alpha}{2}. \tag{3.6}$$

Векторное поле Φ гомотопно полю $\Phi_n=\mathbf{I}-\mathbf{P}_n(\mathbf{I}-\Phi)$ (соответственно поле Ψ гомотопно полю $\Psi_n=\mathbf{I}-\mathbf{P}_n(\mathbf{I}-\Psi)$). Действительно, оператор

$$\mathbf{F}(x,\ t)=(1-t)(x-\Phi x)+t\mathbf{P}_n(x-\Phi x) \qquad (x\in L;\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

вполне непрерывен при каждом t и непрерывен по t равномерно относительно $x\in L$, т. е. вполне непрерывен на топологическом произведении L на сегмент $[0,\ 1]$. Кроме этого, $x-\mathbf{F}(x,\ t)$ в нуль не обращается, так как в силу (3.5) и (3.6)

$$\|x-\mathbf{F}(x,\ t)\|\geqslant\|\Phi x\|-t\|x-\Phi x-\mathbf{P}_n(x-\Phi x)\|\geqslant\frac{\alpha}{2}.$$

Таким образом, нам достаточно показать гомотопность полей Φ_n и Ψ_n.

Значения вполне непрерывных операторов $\mathbf{F}_1=\mathbf{I}-\Phi_n$ и $\mathbf{F}_2=\mathbf{I}-\Psi_n$ принадлежат конечномерному пространству E^n.

Пусть в E^n задана некоторая система n линейно независимых векторов $h_1,\ \ldots,\ h_n$. Тогда каждый элемент $y\in E^n$

однозначным образом представим в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i(y)\, h_i, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ — некоторые линейные функционалы на E^n.

Векторные поля $\mathbf{\Phi}_n$ и $\mathbf{\Psi}_n$, рассматриваемые на $L \cap E^n$, имеют одинаковое вращение. Поэтому в силу теоремы Хопфа найдется непрерывная по t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и по $x \in L \cap E^n$ нигде не обращающаяся в нуль вектор-функция $x - \mathbf{F}(x, t)$ такая, что

$$x - \mathbf{F}(x, 0) = \mathbf{\Phi}_n x, \quad x - \mathbf{F}(x, 1) = \mathbf{\Psi}_n x \qquad (x \in L \cap E^n). \tag{3.8}$$

Пусть $\hat{L}$ — топологическое произведение L на сегмент $[0, 1]$, т. е. совокупность пар $\{x, t\}$ $(x \in L,\ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, в которую внесена естественная топология. Обозначим через $\hat{L}_1$ замкнутое подмножество $\hat{L}$, состоящее из всех точек $\{x, 0\}$ и $\{x, 1\}$ $(x \in L)$ и из всех точек $\{x, t\}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$, а $x \in L \cap E^n$.

Определим на $\hat{L}_1$ непрерывные функции $\varphi_1(x, t), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x, t)$ равенством

$$\varphi_i(x, t) = \begin{cases} \mathbf{l}_i(\mathbf{F}_1 x) & \text{при} \quad t = 0, \quad x \in L, \\ \mathbf{l}_i(\mathbf{F}_2 x) & \text{при} \quad t = 1, \quad x \in L, \\ \mathbf{l}_i[\mathbf{F}(x, t)] & \text{при} \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad x \in L \cap E^n. \end{cases}$$

Очевидно, эти функции ограничены. Продолжим эти функции по Урысону на $\hat{L}$ с сохранением непрерывности и ограниченности; соответственные расширенные функции будем обозначать через $\hat{\varphi}_1(x, t), \ldots, \hat{\varphi}_n(x, t)$.

Определим на $\hat{L}$ оператор $\hat{\mathbf{F}}(x, t)$ равенством

$$\hat{\mathbf{F}}(x, t) = \sum_{i=1}^{n} \hat{\varphi}_i(x, t)\, h_i \qquad (x \in L,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Оператор $\hat{\mathbf{F}}(x, t)$ вполне непрерывен (более того, он конечномерен). При этом $\hat{\mathbf{F}}(x, 0) = \mathbf{F}_1 x$; $\hat{\mathbf{F}}(x, 1) = \mathbf{F}_2 x$, т. е.

$$x - \hat{\mathbf{F}}(x, 0) = \mathbf{\Phi}_n x, \qquad x - \hat{\mathbf{F}}(x, 1) = \mathbf{\Psi}_n x \qquad (x \in L).$$

Выражение $x - \hat{\mathbf{F}}(x, t)$ не обращается в нуль при $x \in L \cap E^n$ по условию, а на остальных точках $\hat{L}$ — в силу того, что векторы $\hat{\mathbf{F}}(x, t)$ и x линейно независимы при $x \overline{\in} L \cap E^n$.

Таким образом, мы показали, что поля $\mathbf{\Phi}_n$ и $\mathbf{\Psi}_n$ гомотопны.

Теорема доказана.

6. Корректность постановки задачи. При исследовании любой математической задачи постановку этой задачи естественно считать корректной, если «малые» (в каком-либо смысле) изменения в условиях задачи приводят к «малому» изменению решения задачи.

Пусть исследуется нелинейное уравнение

$$\varphi = \lambda \mathbf{A} \varphi, \tag{3.9}$$

где $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, действующий в некотором банаховом пространстве. Каждая задача, поставленная корректно в том смысле, что малое возмущение вполне непрерывным оператором оператора $\mathbf{A}$ приводит к малому изменению решения этой задачи, в силу теоремы 3.1 должна формулироваться в терминах вращения вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda \mathbf{A}$.

Таким образом, основные задачи, относящиеся к изучению уравнения (3.9) (существование и единственность решений, точки ветвления решений, существование собственных функций, структура спектра, вопросы о точках бифуркации, структура множества собственных функций и т. д.), должны найти естественные формулировки в терминах вращения векторных полей.

В этих естественных постановках соответствующие задачи должны получить простое решение.

Такой подход и применяется ниже к исследованию ряда вопросов нелинейного функционального анализа.

7. Продолжение вполне непрерывного векторного поля. Оператор $\mathbf{B}$ называют *конечномерным*, если он вполне непрерывен и множество его значений лежит в конечномерном подпространстве пространства E.

Лемма 3.2. *Пусть вполне непрерывный оператор* $\mathbf{A}$ *задан на ограниченном замкнутом множестве* $F \subset E$. *Тогда он допускает представление*

$$\mathbf{A}\varphi = \mathbf{A}_0\varphi + \mathbf{A}_1\varphi + \ldots + \mathbf{A}_n\varphi + \ldots \quad (\varphi \in F), \tag{3.10}$$

в котором все операторы $\mathbf{A}_n$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ *конечномерны и*

$$\|\mathbf{A}_n\varphi\| \leqslant \frac{\alpha}{2^n} \qquad (n=1, 2, \ldots), \tag{3.11}$$

где α — *фиксированное положительное число, которое может быть сколь угодно малым.*

Доказательство. Так как множество $\mathbf{A}F$ компактно, то, пользуясь формулой (3.3), можно каждому $\varepsilon > 0$ сопоставить такое конечномерное подпространство $E_\varepsilon \subset E$ и такой непрерывный на $\mathbf{A}F$ оператор $\mathbf{P}_\varepsilon$, что конечномерный оператор

$$\overline{\mathbf{A}}_\varepsilon\varphi = \mathbf{P}_\varepsilon\mathbf{A}\varphi \qquad (\varphi \in F)$$

удовлетворяет условиям

$$\overline{\mathbf{A}}_\varepsilon\varphi \in E_\varepsilon, \quad \|\overline{\mathbf{A}}_\varepsilon\varphi - \mathbf{A}\varphi\| < \varepsilon \qquad (\varphi \in F).$$

Отметим, что множество значений оператора $\overline{\mathbf{A}}_\varepsilon$ лежит в выпуклой оболочке множества значений оператора $\mathbf{A}$.

Пусть $\varepsilon = \frac{\alpha}{4}$. Оператор $\overline{\mathbf{A}}_{\frac{\alpha}{4}}$ обозначим через $\mathbf{A}_0$. Этот оператор будет конечномерен и будет удовлетворять условию

$$\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{A}_0\varphi\| < \frac{\alpha}{4} \qquad (\varphi \in F).$$

Построим теперь по индукции последовательность $\mathbf{A}_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ операторов, удовлетворяющих условиям леммы. Допустим, что операторы $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ (n может быть равно и единице) построены так, что

$$\|\mathbf{A}_i\varphi\| \leqslant \frac{\alpha}{2^i} \qquad (\varphi \in F;\ i=1, \ldots, n-1) \tag{3.12}$$

и

$$\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{A}_0\varphi - \mathbf{A}_1\varphi - \ldots - \mathbf{A}_{n-1}\varphi\| < \frac{\alpha}{2^{n+1}} \qquad (\varphi \in F). \tag{3.13}$$

Так как непрерывные операторы $\mathbf{A}_0, \mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_{n-1}$ ограничены и конечномерны, то оператор $\mathbf{B} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_1 - \ldots$ $\ldots - \mathbf{A}_{n-1}$ будет вполне непрерывен. Поэтому можно построить конечномерный оператор $\mathbf{A}_n$, обладающий свойством

$$\|\mathbf{A}_n\varphi - \mathbf{B}\varphi\| < \frac{\alpha}{2^{n+2}} \qquad (\varphi \in F),$$

т. е. такой оператор, что

$$\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{A}_0\varphi-\mathbf{A}_1\varphi-\ldots-\mathbf{A}_n\varphi\|<\frac{\alpha}{2^{n+2}}\qquad(\varphi\in F).$$

При этом

$$\|\mathbf{A}_n\varphi\|\leqslant\|\mathbf{B}\varphi\|+\|\mathbf{A}_n\varphi-\mathbf{B}\varphi\|<\frac{\alpha}{2^{n+1}}+\frac{\alpha}{2^{n+2}}<\frac{\alpha}{2^n}\quad(\varphi\in F).$$

Из справедливости (3.13) при всех n вытекает (3.10). Неравенства (3.12) совпадают с неравенствами (3.11).

Лемма доказана.

Лемма 3.3. *Пусть T — замкнутое выпуклое множество конечномерного банахова пространства E^n. Существует непрерывное преобразование* $\mathbf{P}$ *всего пространства E^n в T, оставляющее неподвижным все точки множества T.*

Доказательство. В случае, когда T состоит из одной точки, утверждение леммы очевидно.

Пусть T содержит по крайней мере две различные точки. Обозначим через Π гиперплоскость (не обязательно проходящую через нуль пространства E^n) минимальной размерности, содержащую множество T.

Пусть $\mathbf{P}_1$ — непрерывный линейный оператор проектирования пространства E^n на Π:

$$\mathbf{P}_1\varphi\in\Pi\qquad(\varphi\in E^n)$$

и

$$\mathbf{P}_1\varphi=\varphi\qquad(\varphi\in\Pi).$$

Оператор $\mathbf{P}_1$ может быть сконструирован, например, так. В конечномерное пространство E^n вводится евклидова норма. Через $\mathbf{P}_1$ обозначается оператор ортогонального проектирования на Π в смысле новой введенной нормы. Оператор $\mathbf{P}_1$ будет непрерывен и в смысле старой нормы, так как в конечномерных пространствах все нормы эквивалентны.

Гиперплоскость Π была построена так, что в T есть внутренние точки (если T рассматривать только в Π). Пусть x_0 — одна из таких внутренних точек. Обозначим через $\mathbf{P}_2$ оператор, действующий в Π, который оставляет неподвижными все точки выпуклого замкнутого множества T, а каждую точку $\varphi\overline{\in}\mathrm{T}$ преобразует в точку пересечения с границей T отрезка, соединяющего φ и x_0. Очевидна непрерывность оператора $\mathbf{P}_2$.

Оператор $\mathbf{P}=\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ непрерывен и оставляет неподвижными все точки T. Множество значений оператора $\mathbf{P}_2\mathbf{P}_1$ есть T. Лемма доказана.

Лемма 3.4. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *конечномерный оператор, определенный на ограниченном замкнутом множестве F банахова пространства E. Тогда существует непрерывное продолжение $\tilde{\mathbf{A}}$ оператора $\mathbf{A}$ на все E такое, что множество значений оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ лежит в замыкании T выпуклой оболочки значений оператора* $\mathbf{A}$.

Доказательство. Пусть множество значений оператора $\mathbf{A}$ лежит в n-мерном пространстве E^n. Тогда $T\subset E^n$. Введем в рассмотрение систему координат $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ в пространстве E^n. Тогда оператор $\mathbf{A}$ порождает n заданных на F непрерывных функций $f_i(x)=\xi_i(\mathbf{A}x)$ — координат точек $\mathbf{A}x$ ($i=1, \ldots, n$; $x\in F$). Каждую из функций $f_i(x)$ в силу известной теоремы П. С. Урысона можно непрерывно продолжить с сохранением максимума модуля на все пространство E. Продолженные функции $\overset{*}{f_i}(x)$ ($i=1, \ldots, n$), рассматриваемые как координаты элемента $\mathbf{A}^*x$, определяют в свою очередь оператор $\mathbf{A}^*$, который будет определен на всем E, будет конечномерен и будет на F принимать те же значения, что и оператор $\mathbf{A}$.

Пусть $\mathbf{P}$ — непрерывный оператор, существование которого вытекает из леммы 3.3.

Оператор $\tilde{\mathbf{A}}=\mathbf{P}\mathbf{A}^*$ будет определен на всем E. На F оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ принимает те же значения, что и оператор $\mathbf{A}$. Множество значений оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ лежит в T.

Лемма доказана.

Теорема 3.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *вполне непрерывный оператор, заданный на ограниченном замкнутом множестве F. Пусть T — замыкание выпуклой оболочки множества значений оператора* $\mathbf{A}$. *Пусть* ε — *заданное положительное число.*

Тогда существует такой вполне непрерывный оператор $\tilde{\mathbf{A}}$, определенный на всем пространстве E, который принимает на F те же значения, которые принимает оператор $\mathbf{A}$, причем для любой точки $x\in E$ справедливо неравенство

$$\rho(\tilde{\mathbf{A}}x, T)<\varepsilon, \tag{3.14}$$

Доказательство. В силу леммы 3.2 оператор $\mathbf{A}$ можно представить в виде ряда

$$\mathbf{A}\varphi = \mathbf{A}_0\varphi + \mathbf{A}_1\varphi + \ldots + \mathbf{A}_n\varphi + \ldots \quad (\varphi \in F), \tag{3.15}$$

в котором операторы $\mathbf{A}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ конечномерны и

$$\|\mathbf{A}_n\varphi\| < \frac{\alpha}{2^n} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.16}$$

где α — положительное число, которое мы подберем ниже.

Из (3.15) и (3.16) вытекает, что

$$\rho(\mathbf{A}_0\varphi, T) \leqslant \|\mathbf{A}_0\varphi - \mathbf{A}\varphi\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^n} = \alpha \qquad (\varphi \in F). \tag{3.17}$$

Будем обозначать через T_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ выпуклые оболочки множеств значений на F соответствующих операторов $\mathbf{A}_n$.

Из (3.17) следует, что расстояние от каждой точки $\varphi \in T_0$ до T не превышает α. Пусть, действительно,

$$\psi = t_1\mathbf{A}_0\varphi_1 + t_2\mathbf{A}_0\varphi_2 + \ldots + t_k\mathbf{A}_0\varphi_k,$$

где все t_i положительны и

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_k = 1.$$

Тогда

$$\Big\|\psi - \sum_{i=1}^{k} t_i\mathbf{A}\varphi_i\Big\| \leqslant \sum_{i=1}^{k} t_i\|\mathbf{A}_0\varphi_i - \mathbf{A}\varphi_i\| \leqslant \alpha\sum_{i=1}^{k} t_i = \alpha,$$

откуда и вытекает неравенство

$$\rho(\psi, T) \leqslant \alpha. \tag{3.18}$$

Из неравенства (3.16) следует, что для всех элементов $h \in T_n$ справедливо неравенство

$$\|h\| \leqslant \frac{\alpha}{2^n}. \tag{3.19}$$

Продолжим каждый оператор $\mathbf{A}_n$ по лемме 3.4 и обозначим соответствующие продолженные операторы через $\widetilde{\mathbf{A}}_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Из (3.19) следует, что

$$\|\widetilde{\mathbf{A}}_n\varphi\| \leqslant \frac{\alpha}{2^n} \qquad (\varphi \in E). \tag{3.20}$$

Из (3.18) следует, что

$$\rho(\tilde{\mathbf{A}}_0\varphi,\ T) \leqslant \alpha \qquad (\varphi \in E). \tag{3.21}$$

Оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ определим при помощи ряда

$$\tilde{\mathbf{A}}\varphi = \tilde{\mathbf{A}}_0\varphi + \tilde{\mathbf{A}}_1\varphi + \ldots + \tilde{\mathbf{A}}_n\varphi + \ldots \tag{3.22}$$

Ряд (3.22) в силу (3.20) равномерно сходится. Так как операторы $\mathbf{A}_n$ ($n = 0, 1, 2, \ldots$) непрерывны и конечномерны, то оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ вполне непрерывен. На элементах $\varphi \in F$ оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ принимает те же значения, что и оператор $\mathbf{A}$, так как на этих элементах одинаковы значения операторов $\mathbf{A}_n$ и $\tilde{\mathbf{A}}_n$.

В силу (3.20) и (3.21)

$$\rho(\tilde{\mathbf{A}}\varphi,\ T) \leqslant \|\tilde{\mathbf{A}}\varphi - \tilde{\mathbf{A}}_0\varphi\| + \rho(\tilde{\mathbf{A}}_0\varphi,\ T) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha}{2^n} + \alpha = 2\alpha \quad (\varphi \in E).$$

Последнее неравенство, если положить $\alpha < \frac{\varepsilon}{2}$, дает неравенство (3.14).

Теорема доказана.

Незначительные изменения рассуждений позволяют отказаться в теореме 3.2 от предположения о том, что множество F ограничено. При этом в формулировке теоремы о существовании продолжения на все пространство оператора $\mathbf{A}$ неравенство (3.14) сохранится.

Интересно выяснить, можно ли в условиях теоремы 3.2 вполне непрерывный оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ построить так, чтобы его значения принадлежали T?

Теорема 3.2 позволяет в ряде случаев предполагать без ограничения общности, что заданные на границах областей векторные поля определены и на всей области.

8. Возможность продолжения векторного поля без нулевого вектора. При применениях теории вращения векторных полей к доказательству существования решений у операторных уравнений основной интерес представляют теоремы, позволяющие по вращению векторного поля на границе области сделать заключение о существовании в области нулевых векторов поля.

Выше доказано, что поле имеет нулевые векторы, если вращение его на границе области отлично от нуля. Естественным образом возникает вопрос о том, нельзя ли в классе векторных полей, заданных на границе области и имеющих равное нулю вращение, выделить подкласс таких, которые при всех вполне непрерывных продолжениях на область имеют нулевые векторы. Отрицательный ответ на этот вопрос дает доказываемая в этом пункте теорема, условия которой ниже будут обобщены.

Пусть L — граница связной ограниченной области T банахова пространства E. Как и в пунктах 2—5, будем предполагать, что граница пересечения T с каждым конечномерным подпространством является полиэдром.

Теорема 3.3. *Пусть на L задано вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ с нулевым вращением. Тогда существует такое вполне непрерывное векторное поле $\tilde{\mathbf{\Phi}} = \mathbf{I} - \tilde{\mathbf{A}}$, определенное на $T + L$, которое не имеет нулевых векторов и которое на L совпадает с полем $\mathbf{\Phi}$.*

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1$ произвольное продолжение вполне непрерывного поля $\mathbf{\Phi}$ на $T + L$. Такое продолжение существует в силу теоремы 3.2.

Множество K нулевых векторов поля $\mathbf{\Phi}_1$ компактно, так как K — замкнутая часть компактного множества значений вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}_1$.

Обозначим через T_1 связную открытую часть области T, содержащую K и такую, что граница ее L_1 находится на положительном расстоянии от границы L области T:

$$\rho(L_1, L) = \inf_{x \in L_1, y \in L} \|x - y\| = \beta > 0. \tag{3.23}$$

Область T_1 можно построить, например, следующим образом. Каждой точке $\varphi \in K$ отнесем открытый шар G_φ с центром в точке φ и радиусом, равным $\frac{1}{2}\rho(\varphi, L)$. Из совокупности шаров G_φ выберем конечное покрытие $G_{\varphi_1}, \ldots, G_{\varphi_k}$ компактного множества K. Каждую пару точек φ_i, φ_j соединим ломаной, лежащей в области T. Через K_1 обозначим объединение всех ломаных и множества K. Для множества K_1 снова построим конечное покрытие из шаров. Объединение T_1 этих шаров, очевидно, связно и граница его удовлетворяет условию (3.23).

Вполне непрерывное векторное поле Φ_1 не имеет нулевых векторов на замкнутом ограниченном множестве $\overline{T} \setminus T_1$. Тем же способом, которым было доказано (3.1), можно показать, что существует такое $\alpha > 0$, что

$$\|\varphi - \mathrm{A}_1\varphi\| > \alpha \qquad (x \in \overline{T} \setminus T_1).$$

Построим (например, способом, изложенным в пункте 2 настоящего параграфа) такой непрерывный оператор $\mathbf{P}$ проектирования множества $\mathrm{A}_1(\overline{T} \setminus T_1)$ на некоторое конечномерное подпространство E, который удовлетворяет условию

$$\|\mathrm{A}_1 x - \mathbf{P}\mathrm{A}_1 x\| < \frac{\alpha}{2} \qquad (x \in \overline{T} \setminus T_1).$$

Определим теперь на $\overline{T} \setminus T_1$ оператор A_2:

$$\mathrm{A}_2 x = \frac{\rho(x, L_1)\,\mathrm{A}_1 x + \rho(x, L)\,\mathbf{P}\mathrm{A}_1 x}{\rho(x, L_1) + \rho(x, L)} \qquad (x \in \overline{T} \setminus T_1).$$

Оператор A_2 непрерывен, так как $\rho(x, L_1) + \rho(x, L) \neq 0$, и компактен, так как множество его значений лежит в выпуклой оболочке компактных множеств $\mathrm{A}_1(\overline{T} \setminus T_1)$, $\mathbf{P}\mathrm{A}_1(\overline{T} \setminus T_1)$.

Поле $\mathbf{I} - \mathrm{A}_2$ не имеет нулевых векторов на $\overline{T} \setminus T_1$, так как

$$\|x - \mathrm{A}_2 x\| = \left\| x - \mathrm{A}_1 x + \frac{\rho(x, L)}{\rho(x, L_1) + \rho(x, L)} (\mathbf{P}\mathrm{A}_1 x - \mathrm{A}_1 x) \right\| >$$
$$> \alpha - \|\mathbf{P}\mathrm{A}_1 x - \mathrm{A}_1 x\| > \frac{\alpha}{2} \qquad (x \in \overline{T} \setminus T_1).$$

Поэтому вращение поля $\mathbf{I} - \mathrm{A}_2$ на L_1 равно вращению поля $\mathbf{I} - \mathrm{A}_2$ на L. Но на L поле $\mathbf{I} - \mathrm{A}_2$ совпадает с полем $\mathbf{\Phi}$ и имеет нулевое вращение. Значит, вращение поля $\mathbf{I} - \mathrm{A}_2$ на L_1 равно нулю.

Мы построим продолжение поля $\mathbf{I} - \mathrm{A}_2$ на T_1 без нулевых векторов. Этим доказательство теоремы будет завершено. Проводимое ниже построение совпадает с заключительной частью доказательства теоремы 3.1.

Пусть в E^n задана система линейно независимых векторов $h_1, \ldots, h_n$. Тогда каждый элемент $y \in E^n$ однозначным образом представим в виде

$$y = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{l}_i(y)\, h_i,$$

где $\mathbf{l}_1, \ldots, \mathbf{l}_n$ — непрерывные линейные функционалы на E^n.

На L_1 поле $\mathbf{I}-\mathbf{A}_2$ совпадает с конечномерным полем $\mathbf{I}-\mathbf{PA}_1$. Поэтому вращение поля $\mathbf{I}-\mathbf{PA}_1$ на границе L_1 пересечения $T_1 \cap E^n$ будет равно вращению поля $\mathbf{I}-\mathbf{PA}_1$ на L_1 и, следовательно, будет равно нулю. Значит, существует непрерывное продолжение $\mathbf{I}-\mathbf{A}_3$ поля $\mathbf{I}-\mathbf{PA}_1$ на $T_1 \cap E^n$ без нулевых векторов. Оператор $\mathbf{A}_3$ будем считать определенным и на всей границе L_1, на которой он принимает те же значения, что и оператор $\mathbf{PA}_1$.

Обозначим через $m_i(y)$ непрерывные функции, определенные на $\overline{T}_1$ и являющиеся продолжением функций $\mathbf{l}_i(\mathbf{A}_3 x)$ $(i=1, \ldots, n)$. Пусть

$$\mathbf{A}_4 x = \sum_{i=1}^{n} m_i(x) h_i \qquad (x \in \overline{T}_1).$$

Оператор $\mathbf{A}_4$ непрерывен и конечномерен. Поле $\mathbf{I}-\mathbf{A}_4$ не имеет нулевых векторов, так как на $\overline{T}_1 \cap E^n$ оно совпадает с полем $\mathbf{I}-\mathbf{A}_3$, а при $x \overline{\in} E^n$ справедливо неравенство $x \neq \mathbf{A}_4 x$.

Теорема доказана.

9. Вращение поля на границе ограниченной области. Пусть теперь L — граница произвольной ограниченной связной области T. Пусть на L задано вполне непрерывное векторное поле $\Phi = \mathbf{I}-\mathbf{A}$ без нулевых векторов.

Рассмотрим некоторое вполне непрерывное продолжение $\Phi_1 = \mathbf{I}-\mathbf{A}_1$ (существующее в силу теоремы 3.2) поля Φ на T. Обозначим через L_1 границу связной области T_1, состоящей из конечного числа шаров, лежащих внутри T и содержащих все нулевые векторы поля Φ_1. Конструкция такой области T_1 была указана при доказательстве теоремы 3.3. Для полей на L_1 вращение поля определено в пункте 2.

Вращение γ поля Φ_1 на L_1 назовем вращением поля Φ на L.

Приведенное определение будет оправдано, если мы покажем, что оно не зависит ни от выбора продолжения, ни от выбора области T_1, и если будет показано, что оно совпадает с определением пункта 2 в случае, когда область T такова, что на ее границе вращение уже определено.

Для доказательства каждого из этих предложений можно переходить к аналогичным утверждениям для конечномерных случаев, рассматривая поля $\mathbf{I}-\mathbf{PA}_1$, где $\mathbf{P}$ — оператор проектирования на некоторое конечномерное подпространство.

Технические трудности при этом не возникают и рассуждения в основном совпадают с такими, которые проводились систематически в предыдущих пунктах параграфа.

Непосредственно из определения вытекает, что вращение γ_Φ поля $\Phi=\mathbf{I}-\mathbf{A}$ на границе L ограниченной связной области T обладает всеми свойствами вращения, доказанными выше для областей с границами частного вида. Напомним эти свойства.

Если вполне непрерывное поле Φ *имеет в области* T *конечное число нулевых векторов, то сумма их индексов равна вращению поля на* L.

Если вращение поля Φ *на* L *равно нулю, то существует вполне непрерывное продолжение векторного поля без нулевых векторов.*

Гомотопные на L *вполне непрерывные векторные поля имеют одинаковое вращение.*

В частности, из последнего предложения следует, что поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ и $\mathbf{I}-\mathbf{B}$ имеют на L одинаковое вращение, если

$$\|\mathbf{B}\varphi-\mathbf{A}\varphi\|<\|\varphi-\mathbf{A}\varphi\| \qquad (\varphi\in L).$$

§ 4. Принцип Лере — Шаудера

1. Общий принцип существования неподвижной точки. В предыдущем параграфе мы показали, что каждый признак отличия от нуля вращения векторного поля на границе некоторой области является одновременно достаточным признаком существования неподвижных точек у поля внутри области.

Этот общий признак (в несколько иной форме) существования неподвижных точек (нулевых векторов) у поля был предложен Лере и Шаудером.

Подчеркнем, что получаемые при помощи этого признака теоремы существования нулевых векторов у полей $\Phi=\mathbf{I}-\mathbf{F}$ или, что то же, теоремы существования решений у уравнений вида

$$x=\mathbf{F}x, \tag{4.1}$$

где $\mathbf{F}$ — вполне непрерывный оператор, есть теоремы, относящиеся к корректно поставленным задачам. Действительно, если вращение поля $\mathbf{I}-\mathbf{F}$ на границе некоторой области отлично от нуля, то будет отлично от нуля и вращение поля $\mathbf{I}-(\mathbf{F}+\mathbf{F}_1)$, где $\mathbf{F}_1$ — малый вполне непрерывный оператор, а это означает, что слабо возмущенное уравнение

$$x=\mathbf{F}x+\mathbf{F}_1x$$

также имеет решение. Под малостью оператора здесь понимается малость норм его значений.

В следующей главе мы покажем, более того, что для уравнения (4.1) остается справедливой теорема существования, если правую часть возмутить малым, достаточно гладким, но не обязательно вполне непрерывным оператором.

Э. Роте отметил, что при помощи принципа Лере—Шаудера можно доказывать не только теоремы существования, но и теоремы единственности.

Пусть, действительно, вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на границе L области G равно 1 или -1. Пусть, кроме этого, известно, что индекс каждой возможной неподвижной точки поля $\mathbf{\Phi}$ в области G имеет один и тот же знак. Тогда, очевидно, поле $\mathbf{\Phi}$ имеет в области G только одну неподвижную точку.

В силу изложенных соображений приобретают важность различные теоремы, позволяющие вычислять вращения конкретных векторных полей.

Таким теоремам и посвящен настоящий параграф.

2. Принцип Шаудера. Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, определенный на замкнутом шаре T банахова пространства E и преобразующий границу S шара T в T:

$$\mathbf{A}S\subset T.$$

Рассмотрим на S вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}=\mathbf{I}-\mathbf{A}$. Допустим, что оно на S не имеет нулевых векторов. Тогда это поле очевидным образом гомотопно вполне непрерывному векторному полю $\mathbf{I}$, вращение которого равно 1.

Следовательно, и вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на S равно 1. Значит, *поле $\mathbf{\Phi}$ имеет в шаре T по крайней мере одну неподвижную точку.*

Последнее утверждение и составляет известный принцип Шаудера.

Принципом Шаудера называют также следующее утверждение (см., например, [49г]): *если непрерывный оператор $\mathbf{A}$ преобразует выпуклое множество T банахова пространства* *в компактную часть множества T, то найдется такая точка $x \in T$, что $\mathbf{A}x = x$.*

Тонкое обобщение принципа Шаудера на некоторые классы непрерывных отображений выпуклых множеств в линейных топологических пространствах принадлежит А. Н. Тихонову [65].

3. Нечетные поля на сфере. Существенно более общий принцип неподвижной точки дает обобщение теоремы 2.4 Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука на вполне непрерывные векторные поля.

Теорема 4.1. *Пусть на сфере S банахова пространства E задано вполне непрерывное векторное поле $\Phi = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ без нулевых векторов, обладающее тем свойством, что в симметричных относительно центра сферы точках x и $-x$ векторы поля Φ направлены неодинаково:*

$$\frac{\Phi(-x)}{\|\Phi(-x)\|} \neq \frac{\Phi x}{\|\Phi x\|} \qquad (x \in S).$$

Тогда вращение на S поля Φ нечетно.

Доказательство. Рассмотрим векторные поля

$$\Phi_t x = \frac{1}{1+t}\Phi x - \frac{t}{1+t}\Phi(-x) \qquad (x \in S;\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

При каждом t поле Φ_t вполне непрерывно, так как

$$\Phi_t x = x - \left[\frac{1}{1+t}\mathbf{F}x - \frac{t}{1+t}\mathbf{F}(-x)\right] \qquad (x \in S;\quad 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

а оператор $\frac{1}{1+t}\mathbf{F}x - \frac{t}{1+t}\mathbf{F}(-x)$ вполне непрерывен, как разность двух вполне непрерывных операторов. Каждое поле Φ_t не имеет нулевых векторов, ибо из $\Phi_{t_0}x_0 = 0$ следует:

$$\Phi x_0 = t_0\Phi(-x_0),$$

что противоречит условию теоремы. Оператор-функция Φ_t равномерно непрерывна по t, так как

$$\|\Phi_{t_1}x - \Phi_{t_2}x\| \leqslant 2\,|t_1 - t_2| \sup_{y \in S} \|\Phi y\| \qquad (x \in S).$$

Через Ψ обозначим поле Φ_1:

$$\Psi x = \frac{1}{2}\Phi x - \frac{1}{2}\Phi(-x). \tag{4.2}$$

Так как $\Phi_0 = \Phi$, то нами показано, что поле Φ гомотопно полю Ψ. Следовательно, вращения полей Φ и Ψ одинаковы и нам достаточно доказать, что нечетно вращение поля Ψ.

Как это следует из (4.2), поле Ψ нечетно: оно обладает свойством

$$\Psi(-x) = -\Psi x \qquad (x \in S).$$

Для определения вращения поля Ψ аппроксимируем множество $(\mathrm{I} - \Psi) S$ подпространством E^n, причем для построения шаудеровского оператора проектирования P_n (см. § 3 настоящей главы, формулу (3.3)) выберем систему точек $y_1, \ldots, y_k, -y_1, \ldots, -y_k$, т. е. такую систему точек, в которой вместе с каждой точкой есть и симметричная ей. При этом оператор P_n будет, очевидно, нечетным на $(\mathrm{I} - \Psi) S$:

$$\mathrm{P}_n(-z) = -\mathrm{P}_n z \qquad (z \in (\mathrm{I} - \Psi) S).$$

В силу этого поле $\Psi_n = \mathrm{I} - \mathrm{P}_n(\mathrm{I} - \Psi)$ будет нечетным.

По определению, вращение вполне непрерывного поля Ψ равно вращению поля Ψ_n, рассматриваемого на конечномерной сфере $S \cap E^n$. По теореме 2.4 Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука это последнее вращение нечетно.

Теорема доказана.

Из общего принципа Лере — Шаудера и теоремы 4.1 непосредственно вытекает

Теорема 4.2. *Пусть на шаре $T \subset E$ задано вполне непрерывное векторное поле $\Phi = \mathrm{I} - \mathrm{F}$ без нулевых векторов на границе шара T — на сфере S. Пусть поле Φ на S удовлетворяет условию теоремы* 4.1. *Тогда поле Φ имеет в шаре T неподвижные точки, алгебраическое число которых нечетно.*

Иначе говоря, в условиях теоремы 4.2 уравнение

$$x = \mathrm{F}x$$

имеет в шаре T по крайней мере одно решение.

4. Векторные поля, близкие к линейным. Векторное поле $\mathrm{I} - \mathrm{F}$ будем называть *линейным*, если оператор F линеен.

В главе III мы часто будем пользоваться следствием теоремы 4.2.

Теорема 4.3 (о нулевом векторе поля, близкого к линейному). *Пусть* $\mathbf{A}$ — *вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве* E. *Пусть можно указать такой вполне непрерывный линейный оператор* $\mathbf{B}$, *что на сфере* S ($\|x\|=\rho$) *при некотором фиксированном* λ

$$\|\mathbf{A}x-\lambda\mathbf{B}x\|<\|x-\lambda\mathbf{B}x\| \qquad (x\in S). \tag{4.3}$$

Тогда уравнение

$$x=\mathbf{A}x$$

имеет в шаре $T(\|x\|\leqslant\rho)$ *по крайней мере одно решение.*

Доказательство. Покажем, что вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}$, определяемое равенством

$$\mathbf{\Phi}x=x-\mathbf{A}x \qquad (x\in S),$$

удовлетворяет условиям теоремы 4.2.

Действительно, если в некоторой паре точек x_0, $\overset{*}{x}_0=-x_0$ $(x_0\in S)$ векторы поля $\mathbf{\Phi}$ направлены одинаково, то найдется такое $\alpha>0$, что $\mathbf{\Phi}x_0=\alpha\mathbf{\Phi}x^*$, т. е.

$$(1+\alpha)x_0=\mathbf{A}x_0-\alpha\mathbf{A}\overset{*}{x}_0,$$

откуда

$$(1+\alpha)(x_0-\lambda\mathbf{B}x_0)=\mathbf{A}x_0-\lambda\mathbf{B}x_0-\alpha(\mathbf{A}\overset{*}{x}_0-\lambda\mathbf{B}\overset{*}{x}_0).$$

Полученное равенство противоречиво, так как в силу (4.3)

$$\|\mathbf{A}x_0-\lambda\mathbf{B}x_0-\alpha(\mathbf{A}\overset{*}{x}-\lambda\mathbf{B}\overset{*}{x}_0)\|<\|x_0-\lambda\mathbf{B}x_0\|+$$
$$+\alpha\|\overset{*}{x}_0-\lambda\mathbf{B}\overset{*}{x}_0\|=(1+\alpha)\|x_0-\lambda\mathbf{B}x_0\|.$$

Теорема доказана.

Отметим, что из (4.3) вытекает, что $\frac{1}{\lambda}$ не есть собственное число линейного оператора $\mathbf{B}$.

Теорема 4.3 фактически содержится в работе Лере и Шаудера.

Легко видеть, что поле $\mathbf{\Phi}$ при выполнении условия (4.3) гомотопно линейному полю $\mathbf{I}-\lambda\mathbf{B}$. В пункте 7 настоящего параграфа будет показано, что вращение линейного поля по абсолютной величине равно единице. Поэтому в условиях теоремы 4.3 вращение поля Φ на S также равно 1 или -1.

Можно указать примеры векторных полей, удовлетворяющих условиям теоремы 4.2, вращение которых на S равно любому заданному нечетному числу.

5. Векторные поля, симметричные относительно подпространства. Рассмотрим два банаховых пространства E_1 и E_2. Точки первого будем обозначать через x, второго — через y. Прямой суммой $E_1 \dot{+} E_2$ пространств E_1 и E_2 называется пространство $\hat{E}$ пар $z = \{x, y\}$ $(x \in E_1, y \in E_2)$ с естественно определенными операциями сложения и умножения на скаляр:

$$\lambda \{x_1, y_1\} + \mu \{x_2, y_2\} = \{\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2\}.$$

Для простоты пару $\{x, 0\}$ обозначают просто через x, а пару $\{0, y\}$ — через y, тогда пара $\{x, y\}$ запишется как $x + y$.

Норму в $\hat{E}$ можно ввести, например, равенством

$$\|x + y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\} \qquad (x \in E_1, y \in E_2)$$

или

$$\|x + y\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \qquad (x \in E_1, y \in E_2).$$

Будем в дальнейшем точку $x - y$ называть симметричной относительно пространства E_1 точке $x + y$.

Представление элемента $z \in \hat{E}$ в виде $z = x + y$ $(x \in E_1, y \in E_2)$, очевидно, однозначно. Через P_1 и P_2 обозначим операторы, определенные соответственно равенствами

$$\mathrm{P}_1 z = x, \qquad \mathrm{P}_2 z = y.$$

Вектор φ^*, симметричный относительно подпространства E_1 вектору φ, определится тогда равенством $\varphi^* = \mathrm{P}_1\varphi - \mathrm{P}_2\varphi$. Аналогично тому, как при помощи теоремы 2.4 была доказана теорема 4.1, при помощи теоремы 2.5 может быть доказано следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть на сфере $\hat{S} \subset \hat{E}$ задано такое вполне непрерывное векторное поле $\hat{\Phi}$ без нулевых векторов, что и поле $\Phi_1 = \mathrm{P}_1\hat{\Phi}$ не имеет нулевых векторов на сфере $\hat{S} \cap E_1$.*

Пусть в каждой точке $z^* \in \hat{S}$, *симметричной относительно пространства* E_1 *точке* $z \in \hat{S}$, *вектор* $\hat{\Phi} z^*$ *поля* $\hat{\Phi}$ *не направлен симметрично вектору* $\hat{\Phi} z$ *относительно пространства* E_2:

$$\frac{\hat{\Phi} z^*}{\|\hat{\Phi} z^*\|} \neq \frac{\mathbf{P}_2 \hat{\Phi} z - \mathbf{P}_1 \hat{\Phi} z}{\|\mathbf{P}_2 \hat{\Phi} z - \mathbf{P}_1 \hat{\Phi} z\|} \qquad (z \in \hat{S}).$$

Тогда вращение на $\hat{S}$ *поля* $\hat{\Phi}$ *имеет ту же четность, что и вращение на* $\hat{S} \cap E_1$ *поля* Φ_1.

6. Произведение вращений вполне непрерывных векторных полей. Снова рассмотрим два банаховых пространства E_1 и E_2. Пусть в прямой сумме $\hat{E} = E_1 \dot{+} E_2$ некоторым образом введена норма, совпадающая на E_1 и E_2 с нормами, определенными ранее.

Пусть на шаре $T_1 \subset E_1$ радиуса ρ_1 задано вполне непрерывное векторное поле Φ_1 без нулевых векторов на сфере S_1 (граница T_1) и с вращением на S_1, равным γ_1, а на шаре $T_2 \subset E_2$ радиуса ρ_2 — поле Φ_2 без нулевых векторов на S_2 (границе T_2) и с вращением на S_2, равным γ_2.

Определим на топологическом произведении $\hat{T} = T_1 \times T_2$, лежащем в пространстве $\hat{E}$, поле $\hat{\Phi}$ равенством

$$\hat{\Phi}(x+y) = \frac{\|x\|}{\rho_1} \Phi_1\left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x\right) + \frac{\|y\|}{\rho_2} \Phi_2\left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y\right) \tag{4.4}$$
$$(x \in T_1,\ y \in T_2).$$

Поле $\hat{\Phi}$ вполне непрерывно, так как оператор

$$\hat{\mathbf{F}}(x+y) = x + y - \hat{\Phi}(x+y) =$$
$$= \frac{\|x\|}{\rho_1}\left[\frac{\rho_1}{\|x\|} x - \Phi_1\left(\frac{\rho_1}{\|x\|} x\right)\right] + \frac{\|y\|}{\rho_2}\left[\frac{\rho_2}{\|y\|} y - \Phi_2\left(\frac{\rho_2}{\|y\|} y\right)\right]$$

вполне непрерывен.

Обозначим через $\hat{S}$ границу $\hat{T}$. $\hat{S}$ состоит из точек $x+y$ таких, что либо $x \in S_1$, либо $y \in S_2$, либо $x \in S_1$ и $y \in S_2$. Легко видеть, что поле $\hat{\Phi}$ не имеет на $\hat{S}$ нулевых векторов.

Теорема 4.5 (о произведении вращений). *Вращение на* $\hat{S}$ *поля* $\hat{\Phi}$, *определенного равенством* (4.4), *равно произведению* $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ *вращений поля* Φ_1 *на* S_1 *и поля* Φ_2 *на* S_2.

Доказательство. Вначале перейдем от полей $\mathbf{\Phi}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2$ к более простым.

Пусть $E_1^0 \subset E_1$ — конечномерное подпространство, аппроксимирующее с точностью до $\frac{\alpha}{4}$ множество $(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_1)T_1$, где

$$\alpha = \inf_{x \in S_1} \|\mathbf{\Phi}_1 x\| > 0.$$

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ шаудеровский оператор проектирования (см. § 3) множества $(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_1)T_1$ на E_1^0, удовлетворяющий условию

$$\|\mathbf{P}_n z - z\| < \frac{\alpha}{2} \qquad (z \in (\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_1)T_1).$$

Введем обозначение $\mathbf{\Phi}_1^0 = \mathbf{I} - \mathbf{P}_n(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_1)$. Тогда оператор-функция

$$\mathbf{F}_1(x, t) = (1-t)(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_1)x + t\mathbf{P}_n(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_1)x$$
$$(x \in T_1, \ 0 \leqslant t \leqslant 1)$$

будет вполне непрерывным оператором, причем

$$\mathbf{F}_1(x, 0) = x - \mathbf{\Phi}_1 x, \qquad \mathbf{F}_1(x, 1) = x - \mathbf{\Phi}_1^0 x.$$

Кроме этого, вектор-функция $\mathbf{F}_1(x, t)$ при $x \in S_1$ для всех t, $0 \leqslant t \leqslant 1$, отлична от x.

Вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}_1^0$ имеет на S_1 вращение γ_1, равное вращению поля $\mathbf{\Phi}_1$; при этом множество $(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_1^0)T_1$ лежит в конечномерном подпространстве E_1^0.

Аналогично можно построить на T_2 вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}_2^0$, которое имеет на S_2 вращение γ_2, равное вращению поля $\mathbf{\Phi}_2$ и такое, что множество $(\mathbf{I}-\mathbf{\Phi}_2^0)T_2$ лежит в некотором конечномерном подпространстве E_2^0. При этом можно предполагать, что существует вполне непрерывная оператор-функция $\mathbf{F}_2(y, t)$ $(y \in T_2, \ 0 \leqslant t \leqslant 1)$, принимающая при $y \in S_2$ значения, отличные от y, и такая, что

$$\mathbf{F}_2(y, 0) = y - \mathbf{\Phi}_2 y, \qquad \mathbf{F}_2(y, 1) = y - \mathbf{\Phi}_2^0 y \qquad (y \in T_2).$$

Построим вспомогательное векторное поле $\hat{\mathbf{\Phi}}_0$ на $\hat{S}$, определив его равенством, аналогичным (4.4):

$$\hat{\mathbf{\Phi}}_0(x+y) = \frac{\|x\|}{\rho_1}\mathbf{\Phi}_1^0\left(\frac{\rho_1}{\|x\|}x\right) + \frac{\|y\|}{\rho_2}\mathbf{\Phi}_2^0\left(\frac{\rho_2}{\|y\|}y\right) \quad (x+y \in \hat{S}).$$

Поля $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi}_0$ будут гомотопны, так как вполне непрерывная оператор-функция

$$\hat{\mathbf{F}}(x+y,\ t)=\frac{\|x\|}{\rho_1}\mathbf{F}_1\left(\frac{\rho_1}{\|x\|}x,\ t\right)+\frac{\|y\|}{\rho_2}\mathbf{F}_2\left(\frac{\rho_2}{\|y\|}y,\ t\right)$$
$$(x+y\in\hat{S},\ 0\leqslant t\leqslant 1)$$

не принимает на $\hat{S}$ значений, равных $x+y$, причем

$$\hat{\mathbf{F}}(x+y,\ 0)=(\mathbf{I}-\hat{\Phi})(x+y),\ \hat{\mathbf{F}}(x+y,\ 1)=(\mathbf{I}-\hat{\Phi}_0)(x+y).$$

Значит, вращения полей $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi}_0$ одинаковы. Таким образом, для доказательства теоремы достаточно показать, что вращение поля $\hat{\Phi}_0$ равно $\gamma_1\cdot\gamma_2$.

Множество $(\mathbf{I}-\hat{\Phi}_0)\hat{T}$ лежит в конечномерном пространстве $\hat{E}^0=E_1^0\dot{+}E_2^0$, так что для определения вращения поля $\hat{\Phi}_0$ достаточно рассматривать его только на подпространстве $\hat{E}^0$.

Определим на $\hat{S}\cap\hat{E}^0$ два векторных поля Ψ_1 и Ψ_2:

$$\Psi_1(x+y)=\frac{\|x\|}{\rho_1}\Phi_1^0\left(\frac{\rho_1}{\|x\|}x\right)+y,$$
$$\Psi_2(x+y)=\mu(x+y)\left\{\frac{\|y\|}{\rho_2}\Phi_2^0\left(\frac{\rho_2}{\|y\|}y\right)+x\right\},$$

где $\mu(x,\ y)$ — положительный нормирующий множитель, выбранный так, что $\Psi_2(x+y)\in\hat{S}$.

Множество значений оператора $\mathbf{I}-\Psi_1$ принадлежит E_1^0, поэтому его вращение на $\hat{S}\cap\hat{E}^0$ равно вращению на S_1, т. е. равно γ_1.

Аналогично вращение поля Ψ_2 равно γ_2.

В силу соотношения (1.11) из § 1 настоящей главы вращение на $\hat{S}\cap\hat{E}^0$ поля $\Psi_1\Psi_2$ равно $\gamma_1\cdot\gamma_2$. Но для всех $x+y\in\hat{S}\cap\hat{E}^0$

$$\Psi_1\Psi_2(x+y)=\mu(x,\ y)\ \hat{\Phi}^0(x+y), \tag{4.5}$$

так как

$$\Psi_1\Psi_2(x+y)=\Psi_1\left\{\mu(x,\ y)\left[\frac{\|y\|}{\rho_2}\Phi_2^0\left(\frac{\rho_2}{\|y\|}y\right)+x\right]\right\}=$$
$$=\mu(x,y)\left\{\frac{\|x\|}{\rho_1}\Phi_1^0\left(\frac{\rho_1}{\|x\|}x\right)+\frac{\|y\|}{\rho_2}\Phi_2\left(\frac{\rho_2}{\|y\|}y\right)\right\}.$$

Поля $\Psi_1\Psi_2$ и $\hat{\Phi}_0$ в силу (4.5) гомотопны и, следовательно, вращение на $\hat{S} \cap \hat{E}^0$ поля $\hat{\Phi}_0$ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. Тогда вращение поля $\hat{\Phi}_0$ на $\hat{S}$ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$, а значит, и вращение поля $\hat{\Phi}$ на $\hat{S}$ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

Теорема доказана.

Замечание. Так как у векторных полей $\hat{\Phi}$ и $\hat{\Phi}_0 = \Phi_1 + \Phi_2$ на $\hat{S}$ одна из отличных от нуля компонент ($\Phi_1 x$ или $\Phi_2 y$) одинакова, то поля $\hat{\Phi}_0$ и $\hat{\Phi}$ очевидным образом гомотопны. Значит, вращение поля $\hat{\Phi}_0$ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

Простейшее приложение теорема 4.5 находит при доказательстве теорем существования для систем уравнений, которые естественно назвать слабо связанными.

Мы ограничимся формулировкой общего утверждения.

Теорема о слабо связанных уравнениях. *Пусть задана система уравнений*

$$\left.\begin{aligned} \varphi &= \mathbf{A}\varphi + \varepsilon\mathbf{C}(\varphi, \psi), \\ \psi &= \mathbf{B}\psi + \varepsilon\mathbf{D}(\varphi, \psi), \end{aligned}\right\} \tag{4.6}$$

где **A**, **B**, **C**, **D** — *вполне непрерывные, вообще говоря нелинейные, операторы, действующие в банаховом пространстве E. Пусть на некоторой сфере $S \subset E$ векторные поля $\Phi_1 = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ и $\Phi_2 = \mathbf{I} - \mathbf{B}$ не имеют нулевых векторов и пусть вращения этих полей отличны от нуля.*

Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при всех ε, $|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0$, система (4.6) *имеет по крайней мере одно решение $\{\varphi, \psi\}$.*

Доказательство. Для доказательства нужно рассмотреть на множестве $\hat{T} = T \times T$ (где T — шар, границей которого является сфера S) пространства $\hat{E} = E \dotplus E$ вполне непрерывные векторные поля $\hat{\Phi}_t$, которые определены на элементах $\{\varphi, \psi\} \in \hat{E}$ ($\varphi, \psi \in E$) при $0 \leqslant t \leqslant 1$ равенством

$$\hat{\Phi}_t\{\varphi, \psi\} = \{\varphi - \mathbf{A}\varphi - \varepsilon t\mathbf{C}(\varphi, \psi), \ \psi - \mathbf{B}\psi - \varepsilon t \cdot \mathbf{D}(\varphi, \psi)\}.$$

Так как поля Φ_1 и Φ_2 на S не имеют нулевых векторов, то найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|\varphi - \mathbf{A}\varphi\| > \alpha, \qquad \|\psi - \mathbf{B}\psi\| > \alpha \qquad (\varphi, \psi \in S).$$

Так как операторы **C** и **D** компактны, то найдется такая постоянная $M > 0$, что

$$\|\mathbf{C}(\varphi, \psi)\| \leqslant M, \qquad \|\mathbf{D}(\varphi, \psi)\| \leqslant M \qquad (\varphi, \psi \in T).$$

Если $\varepsilon_0 < \frac{\alpha}{M}$, то при $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ векторы поля $\hat{\mathbf{\Phi}}_t$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ на границе $\hat{S}$ множества $\hat{T}$ очевидным образом не обращаются в нуль. Следовательно, поля $\hat{\mathbf{\Phi}}_t$ и $\hat{\mathbf{\Phi}}_0$ гомотопны. Значит, для доказательства существования решения у системы (4.6) остается заметить, что отлично от нуля вращение на $\hat{S}$ поля $\hat{\mathbf{\Phi}}_0$, которое в силу замечания к теореме 4.5 равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

Аналогичное утверждение можно сформулировать для случая, когда оператор **A** действует в одном пространстве Банаха E_1, а оператор **B** — в другом E_2. Тогда операторы **C** и **D** должны быть определены на прямой сумме $E_1 \dotplus E_2$ со значениями в E_1 для **C** и в E_2 для **D**.

Наиболее интересные приложения теорема 4.5 находит при вычислении индексов неподвижных точек (см. следующий пункт и § 4 главы IV).

7. Линейные поля. Пусть **A** — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в вещественном банаховом пространстве E.

Векторное поле $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}$ на каждой сфере $S \subset E$ с центром в θ будет нечетным. Если $\frac{1}{\lambda}$ не есть собственное число оператора **A**, то только θ будет неподвижной точкой поля $\mathbf{\Phi}$. Значит, на S поле $\mathbf{\Phi}$ не будет иметь нулевых векторов. В силу теоремы 4.1 вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на S будет нечетным.

Теорема 4.5 позволяет значительно полнее исследовать вращение вполне непрерывного линейного поля.

Теорема 4.6 (Лере и Шаудер). *Вращение вполне непрерывного линейного векторного поля* $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}$ *на сфере* S *равно* $(-1)^\beta$, *где* β — *сумма кратностей всех собственных чисел оператора* **A**, *того же знака, что* $\frac{1}{\lambda}$, *и больших по абсолютной величине, чем* $\left|\frac{1}{\lambda}\right|$.

Доказательство. Числа, обратные собственным числам, называются характеристическими. Обозначим через

E_1 прямую сумму всех инвариантных подпространств оператора $\mathbf{A}$, отвечающих характеристическим числам этого оператора, расположенным между λ и нулем. Размерность подпространства E_1 равна β. Подпространство E_1 также будет инвариантным подпространством для оператора $\mathbf{A}$.

Вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на $S_1 = S \cap E_1$ равно $(-1)^\beta$ в силу равенства (2.1) из § 2 настоящей главы, так как поле $\mathbf{\Phi}$ на S_1 гомотопно полю $-\mathbf{I}$.

Для доказательства этого факта рассмотрим вектор-функцию

$$\mathbf{F}(x, t) = (2t-1)x - \lambda t\mathbf{A}x \qquad (x \in S_1, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

которая на S_1 в нуль не обращается, так как при $0 < t < 1$ числа $\frac{t\lambda}{2t-1}$ не лежат в интервале $(0, \lambda)$, ибо неравенства

$$\frac{t}{2t-1} > 0, \qquad \frac{t}{2t-1} < 1, \qquad 0 < t < 1$$

противоречивы. Гомотопность на S_1 полей $\mathbf{\Phi}$ и $-\mathbf{I}$ следует из того, что

$$\mathbf{F}(x, 0) = -x, \qquad \mathbf{F}(x, 1) = \mathbf{\Phi}x \qquad (x \in S_1).$$

Через E_2 обозначим замыкание прямой суммы всех тех инвариантных подпространств оператора $\mathbf{A}$, которые не вошли в E_1. Подпространство E_2 будет также инвариантным для оператора $\mathbf{A}$. Вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на $S_2 = S \cap E_2$ равно 1, так как поле $\mathbf{\Phi}$ на S_2 гомотопно полю $\mathbf{I}$, что следует непосредственно из рассмотрения полей

$$\mathbf{\Phi}_t = \mathbf{I} - t\lambda\mathbf{A} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

которые не имеют на S_2 нулевых векторов.

Обозначим через T множество точек вида $x + y \in E$ $(x \in T_1, \quad y \in T_2)$. В силу теоремы 4.5 вращение поля $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}$ на границе T равно $(-1)^\beta$.

В замкнутой области T поле $\mathbf{\Phi}$ имеет только одну неподвижную точку 0. Индекс этой единственной неподвижной точки равен вращению поля $\mathbf{\Phi}$ на границе T, т. е. равен $(-1)^\beta$.

Но вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на сфере S тоже равно индексу единственной внутри сферы S неподвижной точки поля $\mathbf{\Phi}$, т. е. равно $(-1)^\beta$.

Теорема доказана.

Из теоремы 4.6 непосредственно следует, что вращение поля Φ на границе любой области, содержащей θ, также равно $(-1)^{\beta}$.

Комплексное банахово пространство можно рассматривать как вещественное. Каждое собственное число вполне непрерывного линейного оператора $\mathbf{A}$, действующего в таком пространстве, будет, очевидно, четнократным. Поэтому вращение линейного вполне непрерывного векторного поля в таком пространстве всегда равно 1.

Как мы уже отмечали, теорема 4.3 о нулевом векторе поля, близкого к линейному, непосредственно следует из теоремы 4.6, так как в условиях теоремы 4.3 исследуемое поле гомотопно линейному.

8. Вычисление индекса неподвижной точки. Пусть x_0 — изолированная неподвижная точка вполне непрерывного векторного поля Φ. В настоящем пункте мы приведем теорему, позволяющую в некоторых случаях вычислить индекс. Другие теоремы, позволяющие вычислить индекс, будут приведены в § 4 главы IV.

Отметим, кстати, что весьма подробное исследование индексов неподвижных точек было проведено недавно Э. Роте [56к, л] для случаев, когда рассматриваемое поле Φ потенциально (т. е. Φ есть оператор градиента некоторого функционала).

Говорят, что вполне непрерывное векторное поле $\Phi = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ *дифференцируемо* в точке x_0, если приращение $\mathbf{F}(x_0 + h) - \mathbf{F}x_0$ можно записать в виде

$$\mathbf{F}(x_0 + h) - \mathbf{F}x_0 = \mathbf{A}h + \omega(x_0, h),$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, а

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\|\omega(x_0, h)\|}{\|h\|} = 0. \tag{4.7}$$

Оператор $\mathbf{A}$ называют *производной Фреше* в точке x_0 нелинейного оператора $\mathbf{F}$, а выражение $\mathbf{A}h$ — *дифференциалом Фреше* этого оператора.

Лемма 4.1 [29д]. *Если оператор $\mathbf{F}$ вполне непрерывен, то и оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен.*

Доказательство. Если оператор $\mathbf{A}$ не вполне непрерывен, то множество $\mathbf{A}T$, где T — единичный шар пространства E, некомпактно. Значит, найдутся такое число $\delta > 0$

и такая последовательность элементов $h_i \in T$ $(i = 1, 2, \ldots)$, что

$$\|A(h_i - h_j)\| > \delta \qquad (i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots).$$

В силу (4.7) можно указать такое $\rho > 0$, что из $\|h\| \leqslant \rho$ следует:

$$\|F(x_0 + h) - Fx_0 - Ah\| < \frac{\delta}{3}\|h\|,$$

откуда

$$\|F(x_0 + \rho h_i) - F(x_0 + \rho h_j)\| \geqslant$$
$$\geqslant \rho\|Ah_i - Ah_j\| - \|F(x_0 + \rho h_i) - Fx_0 - \rho A h_i\| -$$
$$- \|F(x_0 + \rho h_j) - Fx_0 - \rho A h_j\| \geqslant \frac{\rho\delta}{3}$$
$$(i \neq j; \quad i, j = 1, 2, \ldots).$$

Но тогда из последовательности

$$F(x_0 + \rho h_1), \quad F(x_0 + \rho h_2), \ldots$$

нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что означает, что оператор F не вполне непрерывен.

Лемма доказана.

Теорема 4.7 (Лере и Шаудер). *Пусть x_0 — неподвижная точка вполне непрерывного векторного поля $\Phi = I - F$. Пусть единица не есть собственное число линейного оператора* A, *являющегося производной Фреше оператора* F *в точке x_0.*

Тогда x_0 является изолированной неподвижной точкой векторного поля Φ, причем индекс этой изолированной неподвижной точки равен $(-1)^\beta$, где β — сумма кратностей характеристических чисел оператора A, *лежащих на интервале* (0, 1).

Доказательство. Так как 1 не есть собственное число оператора A, то найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|A\varphi - \varphi\| \geqslant \alpha\|\varphi\|.$$

В силу (4.7) можно указать такое $\rho_0 > 0$, что из $\|\varphi\| < \rho_0$ следует:

$$\|F(x_0 + \varphi) - Fx_0 - A\varphi\| \leqslant \frac{\alpha}{2}\|\varphi\|.$$

Тогда на сферах S_ρ радиуса $\rho \leqslant \rho_0$ с центром в x_0 поле Φ не имеет нулевых векторов, так как

$$\|\mathbf{F}(x_0+\varphi)-(x_0+\varphi)\| \geqslant$$
$$\geqslant \|\mathbf{A}\varphi-\varphi\| - \|\mathbf{F}(x_0+\varphi)-x_0-\mathbf{A}\varphi\| \geqslant \frac{\alpha}{2}\|\varphi\|.$$

Значит, x_0 — изолированная неподвижная точка поля Φ.

Чтобы показать, что индекс неподвижной точки x_0 равен $(-1)^\beta$, достаточно в силу теоремы 4.6 показать, что на сфере S_{ρ_0} поле Φ гомотопно полю $\mathbf{I}-\mathbf{A}$. Последнее утверждение вытекает из того, что вполне непрерывные векторные поля

$$\Phi(\varphi,\ t) = t\,[x_0+\varphi-\mathbf{F}(x_0+\varphi)] +$$
$$+ (1-t)\,[x_0+\varphi-(x_0+\mathbf{A}\varphi)]$$

не имеют на S_{ρ_0} нулевых векторов при $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема доказана.

Как уже было показано, малое возмущение вполне непрерывным оператором вполне непрерывного векторного поля с ненулевым вращением дает снова вполне непрерывное векторное поле с ненулевым вращением. Поэтому при малом возмущении векторного поля Φ, удовлетворяющего условиям теоремы 4.7, внутри сферы S_{ρ_0} сохранится неподвижная точка. Однако эта неподвижная точка уже может стать не единственной внутри сферы S_{ρ_0}, она может быть даже не изолированной.

В некоторых случаях удается установить более точные предложения.

Пусть $\Phi = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ — вполне непрерывное векторное поле. Пусть в каждой точке x некоторого шара T оператор $\mathbf{F}$ имеет производную $\mathbf{A}_{(x)}$.

Производная $\mathbf{A}_{(x)}$ дает отображение шара T в пространство вполне непрерывных линейных операторов. Если это отображение непрерывно, то будем говорить, что поле Φ *непрерывно дифференцируемо*. Оператор $\mathbf{F}$ будем называть *непрерывно дифференцируемым*.

Теорема 4.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.7, *причем векторное поле* $\Phi = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ *непрерывно дифференцируемо в окрестности неподвижной точки* x_0. *Пусть* $\mathbf{F}_1$ — *непрерывно дифференцируемый в окрестности точки* x_0 *вполне непрерывный оператор.*

Тогда найдется такая окрестность T точки x_0 и такое число $\varepsilon_0 > 0$, что при всех $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0$ векторные поля $\mathbf{\Phi}_\varepsilon = \mathbf{I} - \mathbf{F} - \varepsilon \mathbf{F}_1$ имеют в T единственную неподвижную точку.

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}_{(x)}$ — производная Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке x. По условию теоремы единица не является собственным числом оператора $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{(x_0)}$. Это значит, что найдется такое $\beta > 0$, что

$$\|\mathbf{A}\varphi - \varphi\| \geqslant \beta \|\varphi\| \qquad (\varphi \in E). \tag{4.8}$$

Пусть норма линейного вполне непрерывного оператора $\mathbf{D}$ удовлетворяет условию

$$\|\mathbf{D}\| < \beta.$$

Тогда в силу (4.8) единица не будет собственным числом оператора $\mathbf{A} + \mathbf{D}$:

$$\|(\mathbf{A} + \mathbf{D})\varphi - \varphi\| \geqslant \|\mathbf{A}\varphi - \varphi\| - \|\mathbf{D}\varphi\| \geqslant (\beta - \|\mathbf{D}\|)\|\varphi\|.$$

Вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{D}$ будет, как легко проверить, гомотопно полю $\mathbf{I} - \mathbf{A}$, и, следовательно, вращение поля $\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{D}$ на каждой сфере будет такое же, как вращение поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Пусть T — шаровая окрестность неподвижной точки x_0, в которой нет других неподвижных точек поля $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ и такая, что

$$\|\mathbf{A}_{(x)} - \mathbf{A}\| < \frac{\beta}{2} \qquad (x \in T). \tag{4.9}$$

Возможность такого выбора шаровой окрестности T точки x вытекает из непрерывной дифференцируемости оператора $\mathbf{F}$.

Границу шара T обозначим через S. Так как на S поле $\mathbf{F}$ не имеет нулевых векторов, то найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|\mathbf{F}x - x\| > \alpha \qquad (x \in S).$$

Обозначим через $\mathbf{B}_{(x)}$ производную Фреше оператора $\mathbf{F}_1$ в точке $x \in T$. Без ограничения общности можно считать, что нормы линейных операторов $\mathbf{B}_{(x)}$ $(x \in T)$ равномерно ограничены некоторой постоянной $K > 0$ (шар T можно было выбирать с учетом равномерной ограниченности в нем норм операторов $\mathbf{B}_{(x)}$).

Пусть

$$M = \sup_{x \in T} \|\mathbf{F}_1 x\|.$$

Обозначим через ε_0 положительное число, меньшее чем $\frac{\alpha}{2M}$ и $\frac{\beta}{2K}$.

Тогда при $\varepsilon < \varepsilon_0$ поле $\mathbf{\Phi}_\varepsilon = \mathbf{I} - \mathbf{F} - \varepsilon\mathbf{F}_1$ гомотопно на S полю $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{F}$ и, следовательно, вращение его равно вращению поля $\mathbf{\Phi}$. Вращение на S поля $\mathbf{\Phi}$ равно индексу его единственной в T неподвижной точки x_0. По теореме 4.7 индекс неподвижной точки x_0 равен вращению γ на любой сфере линейного поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ (γ равно 1 или -1).

Таким образом, вращение поля $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ равно вращению поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

В силу общего принципа Лере—Шаудера поле $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ имеет в шаре неподвижные точки. Пусть y — некоторая из этих точек. Вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi}_\varepsilon = \mathbf{I} - \mathbf{F} - \varepsilon\mathbf{F}_1$ непрерывно дифференцируемо. Производная Фреше оператора $\mathbf{F} + \varepsilon\mathbf{F}_1$ равна $\mathbf{A}_{(y)} + \varepsilon\mathbf{B}_{(y)}$. Пусть $\mathbf{D} = \mathbf{A}_{(y)} - \mathbf{A}_{(x_0)} - \varepsilon\mathbf{B}_{(y)}$. Так как $\|\varepsilon\mathbf{B}_{(y)}\| < \frac{\beta}{2}$, то в силу (4.9)

$$\|\mathbf{D}\| \leqslant \|\mathbf{A}_{(y)} - \mathbf{A}\| + \|\varepsilon\mathbf{B}_{(y)}\| < \beta.$$

Значит, единица не является собственным числом оператора $\mathbf{A} + \mathbf{D} = \mathbf{A}_{(y)} + \varepsilon\mathbf{B}_{(y)}$.

Тогда по теореме 4.7 неподвижная точка y изолирована и ее индекс равен вращению поля $\mathbf{I} - (\mathbf{A}_{(y)} + \varepsilon\mathbf{B}_{(y)})$. Но поле $\mathbf{I} - (\mathbf{A}_{(y)} + \varepsilon\mathbf{B}_{(y)})$ гомотопно полю $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ и его вращение равно вращению поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Таким образом, все неподвижные точки поля $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ в T изолированы и индексы их γ одинаковы.

Неподвижные точки поля $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ в T образуют компактное замкнутое множество. Так как каждая точка этого множества изолирована, то всего неподвижных точек конечное число. Обозначим эти точки через $y_1, \ldots, y_s$.

Индексы γ этих точек одинаковы. Следовательно, сумма индексов будет равна $s\gamma$. Но, с другой стороны, мы установили, что вращение поля $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ на S, которое совпадает с суммой индексов, также равно γ.

Значит, $s = 1$.

Теорема доказана.

Из доказательства видно, что неподвижная точка поля $\mathbf{\Phi}_\varepsilon$ имеет своим пределом x_0, если $\varepsilon \to 0$. Иначе говоря, неподвижная точка в T непрерывно перемещается при изменении ε в интервале $(-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$.

Ниже мы будем пользоваться очевидным следствием из теоремы 4.8.

Следствие. *Пусть* $\mathbf{F}$ — *вполне непрерывный оператор, непрерывно дифференцируемый в окрестности точки* x_0, *являющейся решением уравнения*

$$\varphi = \lambda \mathbf{F} \varphi \tag{4.10}$$

при $\lambda = \lambda_0$, *причем* λ_0 *не является характеристическим числом производной Фреше в точке* x_0 *оператора* $\mathbf{F}$.

Тогда существует такая окрестность T *точки* x_0 *и такой интервал* $(\lambda_0 - \varepsilon_0, \lambda_0 + \varepsilon_0)$, *что при всех* λ *из этого интервала уравнение* (4.10) *в* T *имеет единственное решение* x_λ, *причем* x_λ *непрерывно зависит от* λ.

ГЛАВА III

ТЕОРЕМЫ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ

Настоящая глава преследует две цели.

Во-первых, мы хотим показать, как применять полученные в предыдущей главе общие принципы существования неподвижных точек к изучению конкретных классов уравнений.

Во-вторых, мы хотим показать, как применять понятия вращения вполне непрерывного векторного поля к исследованию уравнений с не вполне непрерывными операторами.

В § 1 при помощи принципа сжатых отображений вводится понятие резольвенты нелинейного оператора. Эта резольвента, как оказывается, обладает рядом свойств, аналогичных свойствам резольвенты линейного оператора.

В § 2 доказывается ряд теорем существования решений для нелинейных интегральных уравнений.

Топологические методы оказываются весьма удобными при исследовании некоторых приближенных методов решения уравнений. Последний параграф главы посвящен обоснованию сходимости методов типа метода Галеркина при приближенном решении линейных и нелинейных уравнений.

§ 1. Принцип сжатых отображений

1. Принцип сжатых отображений.

Теорема. *Пусть в шаре T банахова пространства E задан оператор* $\mathbf{A}$, *удовлетворяющий условию Липшица*

$$\|\mathbf{A}x_1-\mathbf{A}x_2\|\leqslant\alpha\|x_1-x_2\| \qquad (x_1,\ x_2\in T), \tag{1.1}$$

где $\alpha<1$.

Пусть оператор $\mathbf{A}$ *преобразует шар T в себя.*

Тогда уравнение

$$x=\mathbf{A}x \tag{1.2}$$

имеет в шаре T единственное решение x^*. Это решение может быть вычислено методом последовательных приближений по формуле

$$x_n = \mathbf{A}x_{n-1} \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{1.3}$$

где x_0 — произвольный элемент шара T. Быстрота сходимости процесса (1.3) *характеризуется неравенством*

$$\|x_n - x^*\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть $x_0 \in T$, а $x_1, x_2, \ldots$ — последовательность, определяемая равенством (1.3).

В силу (1.1) при любом целом m

$$\|x_{m+1} - x_m\| \leqslant \alpha\|x_m - x_{m-1}\| \leqslant \ldots \leqslant \alpha^m\|x_1 - x_0\|,$$

откуда следует, что

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leqslant \|x_{n+k} - x_{n+k-1}\| + \ldots + \|x_{n+1} - x_n\| \leqslant$$
$$\leqslant (\alpha^{n+k-1} + \ldots + \alpha^n)\|x_1 - x_2\|,$$

и, так как

$$\alpha^{n+k-1} + \alpha^{n+k-2} + \ldots + \alpha^n < \frac{\alpha^n}{1-\alpha},$$

то

$$\|x_{n+k} - x_n\| \leqslant \frac{\alpha^n}{1-\alpha}\|x_1 - x_0\| \tag{1.5}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots; \qquad k = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, последовательность $x_1, x_2, \ldots$ фундаментальна. Предел этой последовательности обозначим через x^*. Очевидно, $x^* \in T$.

Покажем, что x^* есть решение уравнения (1.2). В силу (1.1)

$$\|\mathbf{A}x^* - x^*\| \leqslant \|\mathbf{A}x^* - \mathbf{A}x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\| \leqslant$$
$$\leqslant \alpha\|x^* - x_n\| + \|x_{n+1} - x^*\|.$$

Каждое слагаемое в правой части последнего неравенства при возрастании n стремится к нулю. Значит, $\|\mathbf{A}x^* - x^*\| = 0$, т. е. $\mathbf{A}x^* = x^*$.

Единственность решения уравнения (1.2) доказывается совсем просто. Пусть x^* и x^{**} — два решения уравнения (1.2). Тогда в силу (1.1)

$$\|x^* - x^{**}\| = \|\mathbf{A}x^* - \mathbf{A}x^{**}\| \leqslant \alpha\|x^* - x^{**}\|,$$

откуда следует, что $\|x^* - x^{**}\| = 0$, т. е. $x^* = x^{**}$.

Для получения неравенства (1.4) достаточно перейти в (1.5) к пределу при $k \to \infty$.

Справедливость принципа сжатых отображений полностью доказана. Этот принцип (сформулированный С. Банахом) справедлив для операторов, действующих в полных метрических пространствах (не обязательно линейных).

Принцип сжатых отображений и доказанный в предыдущей главе принцип Шаудера по существу близки, но независимы друг от друга. Оба принципа являются частными случаями следующего принципа неподвижной точки [29т].

Пусть T — замкнутое ограниченное выпуклое множество банахова пространства E. Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — *операторы, определенные на T и удовлетворяющие условиям:*

a) $\mathbf{A}x + \mathbf{B}y \in T$ *при* $x, y \in T$.

b) *Оператор* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию* (1.1), *в котором* $\alpha < 1$.

c) *Оператор* $\mathbf{B}$ *вполне непрерывен.*

Тогда в T есть по крайней мере одна такая точка x^*, что

$$\mathbf{A}x^* + \mathbf{B}x^* = x^*.$$

2. Резольвента нелинейного оператора и ее свойства (см. общие теоремы о неявных функциях в банаховом пространстве [16], [18], [42], резольвента введена в [29д]).

Пусть оператор $\mathbf{D}$, определенный в банаховом пространстве E, удовлетворяет на шаре T радиуса ρ условию Липшица

$$\|\mathbf{D}\varphi_1 - \mathbf{D}\varphi_2\| \leqslant q \|\varphi_1 - \varphi_2\| \qquad (\varphi_1, \varphi_2 \in T), \tag{1.6}$$

где q — некоторое положительное число. Будем считать, что $\mathbf{D}\theta = \theta$. В этом случае уравнение

$$\varphi = \alpha \mathbf{D}\varphi + f \tag{1.7}$$

имеет в силу принципа сжатых отображений при $|\alpha| < \frac{1}{q}$ единственное в шаре T решение φ_0 при любом таком $f \in E$, что

$$\|f\| \leqslant (1 - |\alpha q|)\rho. \tag{1.8}$$

Действительно, при выполнении сформулированных условий оператор $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\varphi = \alpha \mathbf{D}\varphi + f$$

преобразует шар T в свою часть, так как

$$\|\mathbf{A}\varphi\| \leqslant |\alpha| \, \|\mathbf{D}\varphi - \mathbf{D}\theta\| + \|f\| \leqslant |\alpha q| \, \|\varphi\| + \|f\| \leqslant \rho \qquad (\varphi \in T),$$

и удовлетворяет условию Липшица с постоянной, меньшей единицы:

$$\|\mathbf{A}\varphi_1 - \mathbf{A}\varphi_2\| \leqslant |\alpha| \, \|\mathbf{D}\varphi_1 - \mathbf{D}\varphi_2\| \leqslant |\alpha q| \, \|\varphi_1 - \varphi_2\|.$$

Обозначим через $\mathbf{R}_\alpha$ оператор, относящий каждому элементу f, норма которого удовлетворяет условию (1.8), решение φ_0 соответствующего уравнения (1.7):

$$\mathbf{R}_\alpha f = \varphi_0.$$

Этот оператор будем называть *резольвентой* оператора $\mathbf{D}$.
По определению,

$$\mathbf{R}_\alpha f \equiv \alpha \mathbf{D}(\mathbf{R}_\alpha f) + f. \tag{1.9}$$

Из тождества (1.9) следует, что

$$\|\mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2\| \leqslant |\alpha| \, \|\mathbf{D}(\mathbf{R}_\alpha f_1) - \mathbf{D}(\mathbf{R}_\alpha f_2)\| + \|f_1 - f_2\| \leqslant$$
$$\leqslant |\alpha q| \, \|\mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2\| + \|f_1 - f_2\| \tag{1.10}$$

для любых f_1, f_2 таких, что

$$\|f_1\|, \ \|f_2\| \leqslant (1 - |\alpha q|)\rho.$$

Из (1.10) вытекает первое важное свойство резольвенты:

$$\|\mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2\| \leqslant \frac{1}{1 - |\alpha q|} \|f_1 - f_2\|. \tag{1.11}$$

В частности, последнее неравенство означает, что *резольвента $\mathbf{R}_\alpha$ является непрерывным оператором.*

Из (1.11) следует также, что

$$\|\mathbf{R}_\alpha f\| \leqslant \frac{\|f\|}{1 - |\alpha q|}.$$

Из тождества (1.9) вытекает, что

$$f_1 - f_2 = \mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2 - \alpha [\mathbf{D}(\mathbf{R}_\alpha f_1) - \mathbf{D}(\mathbf{R}_\alpha f_2)],$$

откуда

$$\|f_1 - f_2\| \leqslant (1 + |\alpha q|) \|\mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2\|,$$

т. е.

$$\|\mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2\| \geqslant \frac{1}{1 + |\alpha q|} \|f_1 - f_2\|. \tag{1.12}$$

Пусть заданы числа α и β, причем $|\alpha| < \frac{1}{q}$ и $|\beta| < \frac{1}{q}$. Тогда на элементах f таких, что

$$\|f\| \leqslant [1 - \max\{|\alpha q|, |\beta q|\}] \cdot \rho,$$

определены резольвенты $\mathbf{R}_\alpha$ и $\mathbf{R}_\beta$. При этом в силу тождества (1.9)

$$\mathbf{R}_\alpha f - \mathbf{R}_\beta f = \alpha [\mathbf{D}(\mathbf{R}_\alpha f) - \mathbf{D}(\mathbf{R}_\beta f)] + (\alpha - \beta)\mathbf{D}(\mathbf{R}_\beta f),$$

откуда

$$\|\mathbf{R}_\alpha f - \mathbf{R}_\beta f\| \leqslant |\alpha q| \cdot \|\mathbf{R}_\alpha f - \mathbf{R}_\beta f\| + |\alpha - \beta| \cdot \|\mathbf{D}(\mathbf{R}_\beta f)\|. \quad (1.13)$$

Очевидно, $\mathbf{R}_\alpha \theta = \theta$ при всех значениях параметра α, при которых резольвента имеет смысл. Поэтому в силу (1.6) и (1.11)

$$\|\mathbf{D}(\mathbf{R}_\beta f)\| = \|\mathbf{D}(\mathbf{R}_\beta f) - \mathbf{D}(\mathbf{R}_\beta \theta)\| \leqslant \leqslant q\|\mathbf{R}_\beta f - \mathbf{R}_\beta \theta\| \leqslant \frac{q}{1 - |\beta q|} \cdot \|f\|. \quad (1.14)$$

Объединяя (1.13) и (1.14), получим:

$$\|\mathbf{R}_\alpha f - \mathbf{R}_\beta f\| \leqslant \frac{q \cdot \|f\|}{(1 - |\alpha q|) \cdot (1 - |\beta q|)} |\alpha - \beta|. \quad (1.15)$$

Последнее неравенство означает, что *резольвента* $\mathbf{R}_\alpha$ *является непрерывной оператор-функцией параметра* α.

Тождество (1.9) можно переписать в виде

$$\mathbf{R}_\alpha f - f = \alpha \mathbf{D}(\mathbf{R}_\alpha f),$$

откуда в силу (1.14)

$$\|\mathbf{R}_\alpha f - f\| \leqslant \frac{|\alpha q|}{1 - |\alpha q|} \|f\|. \quad (1.16)$$

Мы установили ряд свойств резольвенты оператора $\mathbf{D}$ в предположении, что $\mathbf{D}\theta = \theta$. Этот случай в дальнейшем и будет в основном нас интересовать.

В случае, если $\mathbf{D}\theta \neq \theta$, резольвента $\mathbf{R}_\alpha$ будет определена в шаре

$$\|f + \alpha \mathbf{D}\theta\| \leqslant (1 - |\alpha q|)\rho.$$

Неравенства (1.11) и (1.12) сохранят свою силу. Неравенство (1.15) перейдет в неравенство

$$\|\mathbf{R}_\alpha f - \mathbf{R}_\beta f\| \leqslant \frac{q\|f\| + \|\mathbf{D}\theta\|}{(1 - |\alpha q|) \cdot (1 - |\beta q|)} |\alpha - \beta|, \quad (1.17)$$

справедливое для таких элементов f, что

$$\|f+\alpha\mathbf{D}0\|, \ \|f+\beta\mathbf{D}0\| \leqslant [1-\max\{|\alpha q|, \ |\beta q|\}]\rho.$$

Отметим еще одно очевидное свойство резольвенты нелинейного оператора: *резольвента* $\mathbf{R}_\alpha$ *нечетного оператора* $\mathbf{D}$ $(\mathbf{D}(-\varphi)=-\mathbf{D}\varphi)$ *будет нечетным оператором*: $\mathbf{R}_\alpha(-f)=-\mathbf{R}_\alpha f$.

3. Теоремы существования решений. Принцип сжатых отображений позволяет весьма просто доказывать многочисленные теоремы существования и единственности решений. Большое количество таких теорем для нелинейных интегральных уравнений содержится в работах В. В. Немыцкого.

Мы ограничимся двумя примерами.

Пусть оператор $\mathbf{D}$ *в некотором шаре* $\|\varphi\| \leqslant \rho$ *банахова пространства удовлетворяет условию Липшица с некоторой постоянной* q. *Тогда уравнение*

$$\varphi = \mu\mathbf{D}\varphi$$

при достаточно малых значениях параметра μ *имеет решения.*

Это утверждение непосредственно вытекает из принципа сжатых отображений. Применим это утверждение к исследованию уравнения П. С. Урысона $\varphi=\mu\mathbf{A}\varphi$, где

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\int_G K[s, t, \varphi(t)]\,dt$$

(G — замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства).

Предположим, что функция $K(s, t, u)$ непрерывна по совокупности переменных $s, t \in G, |u| \leqslant \rho$ (ρ — некоторое число) и имеет ограниченную частную производную по u:

$$\left|\frac{\partial K(s, t, u)}{\partial u}\right| \leqslant M \qquad (s, t \in G; |u| \leqslant \rho).$$

Оператор П. С. Урысона будет определен на шаре радиуса ρ пространства C непрерывных на G функций и будет удовлетворять условию Липшица

$$\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{A}\psi\| = \max_{s\in G}\left|\int_G \{K[s, t, \varphi(t)]-K[s, t, \psi(t)]\}\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant M\cdot\int_G |\varphi(t)-\psi(t)|\,dt \leqslant M\cdot \operatorname{mes} G\cdot\|\varphi-\psi\|.$$

Пусть, кроме этого,

$$\|\mathbf{A}\varphi\| \leqslant N \qquad (\|\varphi\| \leqslant \rho),$$

где N — некоторое число. Последнее условие будет, например, выполнено, если

$$\max_{s,\, t \in G;\ |u| \leqslant \rho} |K(s, t, u)| \leqslant \frac{N}{\operatorname{mes} G}.$$

Тогда уравнение $\varphi = \mu\mathbf{A}\varphi$ *будет иметь единственное в шаре* $\|\varphi\| \leqslant \rho$ *решение, если*

$$|\mu| \cdot M \cdot \operatorname{mes} G < 1, \quad |\mu| \cdot N \leqslant \rho.$$

Эта теорема принадлежит В. В. Немыцкому.

Рассмотрим теперь уравнение

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi + \mathbf{B}(\varphi, \psi), \tag{1.18}$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, действующий в банаховом пространстве E, а $\mathbf{B}(\varphi, \psi)$ — оператор, зависящий от функционального параметра ψ и действующий тоже в пространстве E.

Пусть оператор $\mathbf{B}(\varphi, \psi)$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\mathbf{B}(\varphi_1, \psi) - \mathbf{B}(\varphi_2, \psi)\| \leqslant q(\rho, \|\psi\|) \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|$$
$$(\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\| \leqslant \rho), \tag{1.19}$$

где

$$\lim_{\rho \to 0,\, \rho_1 \to 0} q(\rho, \rho_1) = 0. \tag{1.20}$$

Пусть, кроме этого,

$$\sup_{\|\varphi\| \leqslant \rho} \|\mathbf{B}(\varphi, \psi)\| \leqslant \mu(\|\psi\|) + \rho\nu(\rho), \tag{1.21}$$

где

$$\lim_{\rho_1 \to} \mu(\rho_1) = 0, \quad \lim_{\rho \to 0} \nu(\rho) = 0.$$

Примером уравнения (1.18) может служить уравнение А. М. Ляпунова, в котором $\mathbf{A}$ — линейный интегральный оператор, а $\mathbf{B}(\varphi, \psi)$ — интегростепенной ряд. Из неравенств, приведенных в § 3 главы I, следует, что условия (1.19) и (1.20) для интегростепенного ряда будут выполнены. Поэтому утверждение, которое мы приведем ниже, в частности, будет содержать теорему существования малых решений для уравнений А. М. Ляпунова с интегростепенными операторами.

Теорема 1.1. *Пусть 1 не принадлежит спектру линейного оператора* $\mathbf{A}$, *т. е. пусть оператор* $(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}$ *определен на всем* E *и ограничен.*

Тогда уравнение (1.18) *имеет при достаточно малой норме* $\|\psi\|$ *решение, единственное в некоторой окрестности* θ.

Доказательство. Для доказательства достаточно заменить уравнение (1.18) эквивалентным

$$\varphi = \mathbf{D}\varphi,$$

где

$$\mathbf{D}\varphi = (\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}(\varphi, \psi). \tag{1.22}$$

Оператор $\mathbf{D}$ удовлетворяет условию Липшица

$$\|\mathbf{D}\varphi_1 - \mathbf{D}\varphi_2\| \leqslant \tilde{q}\,\|\varphi_1-\varphi_2\| \qquad (\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\| \leqslant \rho),$$

в котором

$$\tilde{q} = \|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\|\, q(\rho,\ \|\psi\|).$$

В силу условия (1.20) можно указать такие числа ρ и ρ_1, что при $\|\psi\| \leqslant \rho_1$

$$\|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\| \cdot q(\rho,\ \|\psi\|) < 1.$$

В силу условия (1.21) числа ρ и ρ_1 можно выбрать одновременно и так, чтобы при $\|\varphi\| \leqslant \rho$, $\|\psi\| \leqslant \rho_1$

$$\|\mathbf{D}\varphi\| \leqslant \|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\| \cdot \|\mathbf{B}(\varphi,\ \psi)\| \leqslant \|(\mathbf{I}-\mathbf{A})^{-1}\| \cdot [\mu\|\psi\| + \rho\nu(\rho)] \leqslant \rho.$$

Таким образом, при $\|\psi\| \leqslant \rho_1$ в шаре $\|\varphi\| \leqslant \rho$ оператор $\mathbf{D}$ будет удовлетворять условиям принципа сжатых отображений. Следовательно, при этих условиях уравнение (1.22) в шаре $\|\varphi\| \leqslant \rho$ будет иметь единственное решение.

Теорема доказана.

Теорема 1.1 принадлежит А. М. Ляпунову, который, не ссылаясь формально на принцип сжатых отображений (этот принцип во времена А. М. Ляпунова еще не был сформулирован), фактически провел приведенные выше рассуждения применительно к случаю, когда $\mathbf{B}(\varphi,\ \psi)$ — интегростепенной ряд.

Теорему 1.1 естественно назвать нелокальной теоремой, так как в ней рассматриваются уравнения, близкие к линейным, в которых значение параметра не обязательно меньше наименьшего характеристического числа.

Другого рода нелокальные теоремы существования решений будут приведены ниже.

Теорема 1.1 может быть применена к исследованию спектра нелинейного оператора. Говорят, что спектр сплошной, если он содержит некоторый интервал.

Пусть φ_0 — *собственный вектор оператора* **A**, *которому отвечает собственное число* λ_0. *Пусть в точке* φ_0 *оператор* **A** *имеет дифференциал Фреше* $\mathbf{B}h$

$$\mathbf{A}(\varphi_0+h)-\mathbf{A}\varphi_0=\mathbf{B}h+\omega(\varphi_0, h),$$

причем остаток $\omega(\varphi_0, h)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|\omega(\varphi_0, h_1)-\omega(\varphi_0, h_2)\|\leqslant q(\rho)\cdot\|h_1-h_2\|$$
$$(\|h_1\|\leqslant\rho;\quad \|h_2\|\leqslant\rho),$$

где

$$\lim_{\rho\to 0} q(\rho)=0.$$

Если λ_0 *не принадлежит спектру линейного оператора* **B**, *то спектр оператора* **A** *сплошной.*

Для доказательства достаточно показать, что уравнение

$$\mathbf{A}\varphi=\lambda\varphi \tag{1.23}$$

имеет решения при всех значениях λ, достаточно близких к λ_0.

Перепишем уравнение (1.23) в виде

$$\lambda_0 h=\mathbf{B}h+\omega(\varphi_0, h)+\mu(\varphi_0+h), \tag{1.24}$$

где $h=\varphi-\varphi_0$, $\mu=\lambda-\lambda_0$. Легко усмотреть, что уравнение (1.24) — это уравнение вида (1.18), в котором роль функционального параметра ψ играет μ. Непосредственно проверяется выполнение условий (1.19) и (1.21).

Поэтому уравнение (1.24) имеет решения при достаточно малых μ.

Отметим, что при доказательстве попутно получается следующее утверждение: *если обозначить через* φ_λ *собственную функцию, соответствующую собственному значению* λ, *существование которой следует из теоремы* 1.1, *то*

$$\lim_{\lambda\to\lambda_0}\|\varphi_\lambda-\varphi_0\|=0.$$

Ниже для случая вполне непрерывных операторов будут получены утверждения о сплошности спектра при более слабых ограничениях.

4. Приближенное вычисление собственных чисел и функций возмущенного линейного оператора [29л]. В заключение параграфа покажем, как применить метод последовательных приближений, соответствующий принципу сжатых отображений, к приближенному вычислению собственных чисел и функций возмущенных линейных операторов. Излагаемый метод возникает на основе тех же соображений, которые выше привели нас, например, к теореме о сплошности спектра *).

Нам кажется небезинтересным подчеркнуть, что излагаемый метод дает пример использования *нелинейных* операторов для изучения *линейных* задач.

Пусть $\mathbf{A}$ — линейный вполне непрерывный оператор, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H. Пусть λ_0 — простое собственное число оператора $\mathbf{A}$, которому отвечает нормированный собственный вектор e_0:

$$\mathbf{A}e_0 = \lambda_0 e_0, \qquad \|e_0\| = 1.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 > 0$.

Введем в рассмотрение оператор $\mathbf{B}$ равенством

$$\mathbf{B}\varphi = \varphi - (\varphi, e_0)\, e_0 - \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi \qquad (\varphi \in H). \tag{1.25}$$

Лемма 1.1. *Оператор* (1.25) *имеет ограниченный обратный оператор.*

Доказательство. Оператор, относящий вектору $\varphi \in H$ вектор $(\varphi, e_0)\, e_0 + \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi$, вполне непрерывен, так как вполне непрерывен оператор $\mathbf{A}$. Поэтому в силу теории Ф. Рисса (см. § 1 главы I) для того, чтобы доказать утверждение леммы, достаточно доказать, что из

$$\varphi - (\varphi, e_0)\, e_0 - \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi = \theta \tag{1.26}$$

следует, что $\varphi = \theta$.

---

*) С другой стороны, излагаемый метод тесно связан с методом Ньютона приближенного решения нелинейных операторных уравнений, разработанным Л. В. Канторовичем и его учениками.

Из (1.26) вытекает, что

$$\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\right)^2\varphi=(\varphi,\ e_0)\left(\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\right)e_0=\theta.$$

Таким образом, элемент φ принадлежит инвариантному подпространству оператора $\mathbf{A}$, отвечающему собственному числу λ_0.

По предположению, λ_0 является простым собственным числом оператора $\mathbf{A}$. Следовательно, вектор φ коллинеарен собственному вектору e_0: $\varphi=ke_0$.

Подставляя полученное для φ выражение в (1.26), получим, что $k=0$.

Лемма доказана.

В случае, если оператор $\mathbf{A}$ самосопряжен (например, $\mathbf{A}$ — интегральный оператор с симметрическим ядром), то его, как известно, можно записать в виде

$$\mathbf{A}\varphi=\sum_i\lambda_i(\varphi,\ e_i)\,e_i+\lambda_0(\varphi,\ e_0)\,e_0,$$

где λ_i и e_i $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ — собственные числа и собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, отличные от λ_0 и e_0. Тогда

$$\mathbf{B}\varphi=\sum_i\left(1-\frac{\lambda_i}{\lambda_0}\right)(\varphi,\ e_i)\,e_i-(\varphi,\ e_0)\,e_0\qquad(\varphi\in H).\qquad(1.27)$$

В дальнейшем будут играть роль операторы $\mathbf{B}^{-1}$ и $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$. Их нормы для сокращения записи всюду будут обозначаться через α и β:

$$\alpha=\|\mathbf{B}^{-1}\|,\qquad\beta=\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\|.$$

Для случая, когда оператор $\mathbf{A}$ самосопряжен, операторы $\mathbf{B}^{-1}$ и $\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}$ также будут самосопряжены и определятся формулами

$$\mathbf{B}^{-1}\varphi=\sum_i\frac{\lambda_0}{\lambda_0-\lambda_i}(\varphi,\ e_i)\,e_i-(\varphi,\ e_0)\,e_0\qquad(\varphi\in H)\qquad(1.28)$$

и

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\varphi=\sum_i\frac{\lambda_0\lambda_i}{\lambda_0-\lambda_i}(\varphi,\ e_i)\,e_i-\lambda_0(\varphi,\ e_0)\,e_0\qquad(\varphi\in H).\qquad(1.29)$$

Так как норма самосопряженного оператора равна наибольшей абсолютной величине его собственных чисел, то нормы операторов (1.28) и (1.29) определяются собственными числами. Если обозначить через λ_- наибольшее из собственных чисел оператора $\mathbf{A}$, меньших чем λ_0, а через λ_+ — наименьшее из собственных чисел оператора $\mathbf{A}$, больших чем λ_0, то

$$\alpha = \|\mathbf{B}^{-1}\| = \max\left\{\frac{\lambda_0}{\lambda_0 - \lambda_-},\ \frac{\lambda_0}{\lambda_+ - \lambda_0},\ 1\right\}$$

и

$$\beta = \|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\| = \max\left\{\frac{\lambda_0|\lambda_-|}{\lambda_0 - \lambda_-},\ \frac{\lambda_0\lambda_+}{\lambda_+ - \lambda_0},\ \lambda_0\right\}.$$

Рассмотрим в плоскости $\{x, y\}$ кривые

$$y = f_1(x),\quad f_1(x) = \frac{1 - 2(\beta + 2\lambda_0)x - 2\lambda_0^2 x^2}{2\alpha\left(\frac{1}{\lambda_0} + x\right)} \tag{I}$$

и

$$y = f_2(x),\quad f_2(x) = \frac{x - (\beta + 2\lambda_0)x^2}{\alpha\left(\frac{1}{\lambda_0} + x\right)^2}. \tag{II}$$

Эти кривые при $x \geqslant 0$ имеют только одну точку пересечения. Действительно, абсциссы точек пересечения определяются уравнением

$$2\lambda_0^2 x^3 + 2\lambda_0 x^2 + \frac{2\beta + 5\lambda_0}{\lambda_0}x - \frac{1}{\lambda_0} = 0,$$

левая часть которого — возрастающая при $x \geqslant 0$ функция. Координаты точки пересечения кривых обозначим через x_s, y_s.

Первая из кривых — гипербола. Функция $f_1(x)$ при $x \geqslant 0$ монотонно убывает. Функция $f_2(x)$ возрастает при $0 \leqslant x < x_m$, где

$$x_m = \frac{1}{2\beta + 5\lambda_0},$$

и убывает при $x > x_m$, асимптотически приближаясь к значению $-\frac{\beta + 2\lambda_0}{\alpha}$. Нетрудно проверить, что

$$f_1(x_m) < f_2(x_m),$$

в силу чего

$$x_s < x_m.$$

В дальнейшем существенную роль будет играть положительная величина y_s, являющаяся функцией параметров λ_0, α, β: $y_s = y_s(\lambda_0, \alpha, \beta)$. Величину y_s можно найти графически, построив кривые (I) и (II). Грубую оценку снизу для y_s можно получить, заменяя это число значением функции $f_1(x)$ в точке x_m; при этом мы получим оценку

$$y_s > \frac{\lambda_0(2\beta + 3\lambda_0)}{4\alpha(\beta + 3\lambda_0)(2\beta + 5\lambda_0)}.$$

Функция $f_2(x)$ на интервале $(0, x_s)$ монотонно возрастает. Поэтому на интервале $(0, y_s)$ можно определить однозначную обратную к $f_2(x)$ функцию $g(y)$ со значениями в интервале $(0, x_s)$. Функцию $g(y)$ можно записать и в явном виде

$$x = g(y) = \frac{1 - \frac{2\alpha}{\lambda_0} y - \sqrt{1 - \frac{4\alpha}{\lambda_0}\left(3 + \frac{\beta}{\lambda_0}\right) y}}{2(\alpha y + \beta + 2\lambda_0)} \qquad (0 \leqslant y \leqslant y_s).$$

Перейдем теперь к изучению возмущенного оператора $\mathbf{K} = \mathbf{A} + \mathbf{D}$, где $\mathbf{D}$ — линейный оператор, действующий в H. Каждый собственный вектор оператора $\mathbf{K}$, отвечающий положительному собственному числу, будет определяться решением уравнения

$$\|\psi\| \mathbf{K}\psi - \psi = \theta. \tag{1.30}$$

При этом норма решения даст величину, обратную собственному числу.

Теорема 1.2. *Пусть норма линейного оператора* $\mathbf{D}$ *удовлетворяет условию*

$$\|\mathbf{D}\| < y_s.$$

Тогда решение ψ *уравнения* (1.30) *можно получить, находя последовательные приближения* ψ_n *по формуле*

$$\psi_n = \psi_{n-1} + \mathbf{B}^{-1}(\|\psi_{n-1}\| \mathbf{K}\psi_{n-1} - \psi_{n-1}), \tag{1.31}$$

если в качестве нулевого приближения ψ_0 *взять элемент* $\frac{1}{\lambda_0} e_0$.

Доказательство. Мы покажем, что в шаре $T \subset H$ некоторого радиуса ρ с центром в $\psi_0 = \frac{1}{\lambda_0} e_0$ оператор $\mathbf{C}$

$$\mathbf{C}\varphi = \varphi + \mathbf{B}^{-1}(\|\varphi\| \mathbf{K}\varphi - \varphi) \tag{1.32}$$

удовлетворяет условию Липшица

$$\|\mathbf{C}\varphi_1-\mathbf{C}\varphi_2\|\leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\| \qquad (\varphi_1,\varphi_2\in T)$$

с постоянной $q<1$ и что $\mathbf{C}T\subset T$. Тогда в силу принципа сжатых отображений уравнение $\psi=\mathbf{C}\psi$ имеет в T единственное решение, которое может быть получено последовательными приближениями. Это решение и будет, очевидно, решением уравнения (1.30).

Нам будет удобно отличное от (1.32) представление оператора $\mathbf{C}$.

Пусть

$$\varphi=\frac{1}{\lambda_0}e_0+h=\psi_0+h,$$

тогда

$$\mathbf{C}\varphi=(\|\psi_0+h\|-\|\psi_0\|)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}h+\|\varphi\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\varphi+\psi_0+\\+\frac{(\|\psi_0+h\|-\|\psi_0\|)(h,e_0)-(h,h)}{\|\psi_0+h\|+\|\psi_0\|}e_0. \quad (1.33)$$

Действительно, так как $\mathbf{B}e_0=-e_0$, то из (1.25) вытекает:

$$\varphi-\mathbf{B}^{-1}\varphi=(\varphi,e_0)e_0-\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}\varphi;$$

тогда в силу (1.32)

$$\mathbf{C}\varphi=\left(\|\varphi\|-\frac{1}{\lambda_0}\right)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}h+\|\varphi\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\varphi+\psi_0+\\+(h,e_0)e_0-\left(\|\varphi\|-\frac{1}{\lambda_0}\right)e_0,$$

а из последнего равенства вытекает (1.33), ибо

$$(h,e_0)-\|\varphi\|+\frac{1}{\lambda_0}=\frac{(h,e_0)(\|\psi_0+h\|-\|\psi_0\|)-(h,h)}{\|\psi_0+h\|+\|\psi_0\|}.$$

Пусть

$$\rho=g(\|\mathbf{D}\|) \quad (1.34)$$

и

$$\varphi_1=\psi_0+h_1, \qquad \varphi_2=\psi_0+h_2$$

— любые два элемента шара T радиуса ρ с центром в ψ_0. Из представления (1.33) оператора $\mathbf{C}$ следует, что

$$\|\mathbf{C}\varphi_1-\mathbf{C}\varphi_2\|\leqslant q\|\varphi_1-\varphi_2\|, \quad (1.35)$$

где

$$q=2(\beta+2\lambda_0)\rho+2\lambda_0^2\rho^2+2\left(\frac{1}{\lambda_0}+\rho\right)\alpha\|\mathbf{D}\|. \quad (1.36)$$

Справедливость (1.35) следует из трех цепочек очевидных неравенств. Во-первых,

$$\|(\|\psi_0+h_1\|-\|\psi_0\|)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}h_1-(\|\psi_0+h_2\|-\|\psi_0\|)\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}h_2\|\leqslant$$
$$\leqslant\big|\|\psi_0+h_1\|-\|\psi_0\|\big|\cdot\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}h_1-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}h_2\|+$$
$$+\big|\|\psi_0+h_1\|-\|\psi_0+h_2\|\big|\cdot\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}h_2\|\leqslant 2\beta\rho\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Во-вторых, так как $\|\varphi_1\|$, $\|\varphi_2\|\leqslant\frac{1}{\lambda_0}+\rho$, то

$$\Big\|\|\varphi_1\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\varphi_1-\|\varphi_2\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\varphi_2\Big\|\leqslant\|\varphi_1\|\cdot\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\varphi_1-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\varphi_2\|+$$
$$+\big|\|\varphi_1\|-\|\varphi_2\|\big|\cdot\|\mathbf{B}^{-1}\mathbf{D}\varphi_2\|\leqslant 2\alpha\left(\frac{1}{\lambda_0}+\rho\right)\|\mathbf{D}\|\cdot\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

В-третьих, так как

$$J_1=|\{(\|\psi_0+h_1\|-\|\psi_0\|)(h_1,\ e_0)-(h_1,\ h_1)\}-$$
$$-\{(\|\psi_0+h_2\|-\|\psi_0\|)(h_2,\ e_0)-(h_2,\ h_2)\}|\leqslant 4\rho\|\varphi_1-\varphi_2\|$$

и

$$J_2=\left|\frac{1}{\|\psi_0+h_1\|+\|\psi_0\|}-\frac{1}{\|\psi_0+h_2\|+\|\psi_0\|}\right|\leqslant\lambda_0^2\|\varphi_2-\varphi_1\|,$$

а

$$J_3=|(\|\psi_0+h_2\|-\|\psi_0\|)(h_2,\ e_0)-(h_2,\ h_2)|\leqslant 2\rho^2,$$

то

$$\left|\frac{(\|\psi_0+h_1\|-\|\psi_0\|)(h_1,e_0)-(h_1,h_1)}{\|\psi_0+h_1\|+\|\psi_0\|}-\right.$$
$$\left.-\frac{(\|\psi_0+h_2\|-\|\psi_0\|)(h_2,e_0)-(h_2,h_2)}{\|\psi_0+h_2\|+\|\psi_0\|}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{J_1}{\|\psi_0+h_1\|+\|\psi_0\|}+J_2\cdot J_3\leqslant(4\rho\lambda_0+2\rho^2\lambda_0^2)\|\varphi_1-\varphi_2\|.$$

Так так в (1.36) $\rho=g(\|\mathbf{D}\|)$, т. е. $\|\mathbf{D}\|=f_2(\rho)$, а по условию теоремы $\|\mathbf{D}\|<y_s$, то $\|\mathbf{D}\|<f_1(\rho)$, откуда следует:

$$q<2(\beta+2\lambda_0)\rho+2\lambda_0^2\rho^2+2\left(\frac{1}{\lambda_0}+\rho\right)\alpha f_1(\rho)=1.$$

Нам осталось показать, что $\mathbf{C}T \subset T$. Но это очевидно, так как в силу (1.33)

$$\|\mathbf{C}\varphi - \psi_0\| \leqslant \beta\rho^2 + \left(\frac{1}{\lambda_0} + \rho\right)^2 \alpha \|\mathbf{D}\| + 2\lambda_0\rho^2 =$$

$$= (\beta + 2\lambda_0)\rho^2 + \left(\frac{1}{\lambda_0} + \rho\right)^2 \alpha f_2(\rho) = \rho.$$

Теорема доказана.

В условиях теоремы 1.2 не обязательно в качестве нулевого приближения брать точно вектор $\psi_0 = \frac{1}{\lambda_0} e_0$, достаточно в качестве нулевого приближения взять любой вектор из шара радиуса ρ с центром в ψ_0.

§ 2. Применение топологических принципов неподвижной точки к доказательству теорем существования решений

1. Общая постановка задачи. Мы будем в этом параграфе рассматривать вопросы о существовании и единственности решений у интегральных уравнений вида

$$\varphi = \lambda \mathbf{A}\varphi, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}$ — интегральный оператор П. С. Урысона (в частном случае — оператор Гаммерштейна) или интегростепенной ряд А. М. Ляпунова.

Если удается найти такое функциональное пространство E, в котором оператор $\mathbf{A}$ действует и вполне непрерывен, то вопрос о существовании и единственности в E решений уравнения (2.1) эквивалентен вопросу о существовании и единственности неподвижной точки у вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \lambda\mathbf{A}$.

Такой путь был предложен, по существу, Биркгофом и Келлогом, которые и получили первые теоремы существования решений топологическим методом. В дальнейшем Ю. Шаудер сформулировал принцип о существовании неподвижной точки при непрерывном преобразовании выпуклого множества банахова пространства в свою компактную часть. Применение принципа сжатых отображений и принципа Шаудера позволило В. В. Немыцкому, а затем и другим авторам получить различные теоремы существования решений у нелинейных интегральных уравнений. Полученные на этом пути теоремы существования решений, как и теоремы, полученные непосредственным применением принципа сжатых отображений, естественно назвать локальными (относительно параметра λ), так как условия принципа Шаудера для преобразования $\mathbf{A}$ некоторого шара T будут выполнены лишь при значениях параметра λ, ограниченных по абсолютной величине некоторой постоянной.

Существенно новые теоремы были получены Лере и Шаудером при помощи принадлежащего им понятия топологической степени отображения (замененного у нас эквивалентным понятием вращения вполне непрерывного векторного поля). Теоремы существования, установленные затем при помощи теории Лере — Шаудера самим Лере, а позже Дольфом и др., носили уже существенно нелокальный характер. Однако эти теоремы соответствовали также рассмотрению полей, очевидным образом гомотопных линейным полям $\mathbf{I}-\lambda\mathbf{B}$, где λ — уже произвольное число, не принадлежащее спектру линейного вполне непрерывного оператора $\mathbf{B}$. Примером такой нелокальной теоремы может служить теорема 4.8 из предыдущей главы, следствие из которой дает общие условия сплошности спектра нелинейного оператора. В настоящем параграфе мы приведем новые примеры нелокальных теорем существования решений для конкретных классов нелинейных интегральных уравнений.

Теорема 4.1 главы II, являющаяся обобщением на банаховы пространства теоремы Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана — К. Борсука, позволяет доказать некоторые теоремы существования решений для уравнений, близких к нечетным, но не близких к линейным.

Наконец, в настоящем параграфе мы покажем, как при помощи, с одной стороны, топологических принципов неподвижной точки и, с другой, при помощи понятия резольвенты нелинейного оператора можно исследовать не вполне непрерывные векторные поля, близкие к вполне непрерывным.

2. Не вполне непрерывные векторные поля. Рассмотрим на границе L некоторой ограниченной области G банахова пространства E векторное поле $\mathbf{\Phi}=\mathbf{I}-\mathbf{A}-\varepsilon\mathbf{D}$, где $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, а $\mathbf{D}$ — оператор, удовлетворяющий условию Липшица

$$\|\mathbf{D}\varphi-\mathbf{D}\psi\|\leqslant q\|\varphi-\psi\| \tag{2.2}$$

в достаточно большой части пространства E.

При достаточно малых ε на AL будет определена резольвента $\mathbf{R}_\varepsilon$ оператора $\mathbf{D}$.

Рассмотрим на L векторное поле $\mathbf{\Psi}=\mathbf{I}-\mathbf{R}_\varepsilon\mathbf{A}$. Это поле будет вполне непрерывным, так как оператор $\mathbf{R}_\varepsilon\mathbf{A}$ вполне непрерывен. Если поле $\mathbf{\Phi}$ не имеет на L нулевых векторов, то и поле $\mathbf{\Psi}$ не имеет на L нулевых векторов, ибо из

$$\varphi=\mathbf{R}_\varepsilon\mathbf{A}\varphi$$

в силу соотношения (1.9) из предыдущего параграфа следует, что

$$\varphi=\mathbf{A}\varphi+\varepsilon\mathbf{D}\varphi.$$

Пусть поле $\mathbf{\Phi}_0=\mathbf{I}-\mathbf{A}$ не имеет на L нулевых векторов. Тогда найдется такое $\alpha>0$, что

$$\|\mathbf{\Phi}_0x\|>\alpha \qquad (x\in L).$$

Пусть ε выбрано так, что

$$\|\varepsilon\mathbf{D}x\|<\alpha \qquad (x\in L).$$

Тогда векторные поля $\mathbf{\Phi}_t=\mathbf{I}-\mathbf{A}-t\varepsilon\mathbf{A}$ при $0\leqslant t\leqslant 1$ не имеют на L нулевых векторов. Значит, и вполне непрерывные векторные поля $\mathbf{\Psi}_t=\mathbf{I}-\mathbf{R}_{t\varepsilon}\mathbf{A}$ не будут иметь на L нулевых векторов.

Вполне непрерывный оператор $\mathbf{R}_{t\varepsilon}\mathbf{A}$ в силу соотношения (1.17) из предыдущего параграфа равномерно непрерывен по t.

Таким образом, векторные поля $\mathbf{\Psi}_0=\mathbf{I}-\mathbf{A}$ и $\mathbf{\Psi}_1=\mathbf{I}-\mathbf{R}_\varepsilon\mathbf{A}$ гомотопны и, следовательно, их вращения на L одинаковы.

Полученный результат сформулируем в виде следующего принципа.

Пусть на области G задано вполне непрерывное векторное поле с ненулевым вращением на границе. Если это поле возмутить малым гладким оператором, то возмущенное поле будет иметь в G неподвижные точки.

Здесь под малым возмущением понимается возмущение таким оператором, который принимает значения достаточно малой нормы и который удовлетворяет условию Липшица с достаточно малой постоянной.

3. Нечетные интегростепенные ряды. Рассмотрим уравнение вида

$$\varphi=\mathbf{A}\varphi+\mathbf{B}\varphi+\mathbf{C}\varphi, \tag{2.3}$$

где $\mathbf{A}$ — линейный оператор, $\mathbf{B}$ — оператор, удовлетворяющий условию Липшица (2.2) с достаточно малым q, а $\mathbf{C}$ — вполне непрерывный оператор, удовлетворяющий условию

$$\|\mathbf{C}\varphi\| < \varepsilon$$

при $\|\varphi\| = \rho$, где ε и ρ — некоторые числа, которые будут определены ниже.

Примером уравнения (2.3) может служить уравнение с интегростепенным рядом А. М. Ляпунова, который рассматривался в теореме 1.1 предыдущего параграфа, возмущенным вполне непрерывным оператором $\mathbf{C}$.

В случае, если 1 не является собственным числом оператора $\mathbf{A}$, то принцип, сформулированный в предыдущем пункте, позволяет просто исследовать уравнение (2.3). Достаточно рассмотреть вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$, вращение которого на сфере радиусом ρ равно 1, если $\|(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\| \cdot \varepsilon < \rho$, и заметить, что векторное поле $\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ получено возмущением поля $\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{C}$ с помощью гладкого оператора $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$. Если ρ настолько велико, что резольвента оператора $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$ отображает шар радиусом ρ в свою часть, то уравнение (2.3) имеет решение.

Задача осложняется в случае, если 1 является собственным числом линейного оператора $\mathbf{A}$. В этом случае некоторые простые утверждения можно указать для нечетных интегростепенных рядов.

Пусть G — замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства. Без ограничения общности можно считать, что $\operatorname{mes} G = 1$.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi(s) = \mathbf{A}\varphi(s) + \mathbf{L}\varphi(s) + \varepsilon\mathbf{B}\varphi(s), \tag{2.4}$$

где $\mathbf{A}$ — линейный интегральный оператор, определенный допустимым ядром $K(s, t)$:

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\varphi(t)\,dt, \tag{2.5}$$

$\mathbf{L}$ — интегростепенной ряд А. М. Ляпунова (см. § 3 главы I) от одной функции $\varphi(s)$, состоящей только из членов нечетного порядка, так что

$$\mathbf{L}[-\varphi(s)] = -\mathbf{L}\varphi(s), \tag{2.6}$$

причем предполагается, что выполнены условия, обеспечивающие полную непрерывность оператора L в единичном шаре пространства C непрерывных на G функций (см. § 3 главы I); $\mathbf{B}$ — вполне непрерывный оператор, действующий в C (достаточно, чтобы он был определен на единичном шаре пространства C).

Уравнение (2.4) — это уравнение типа (2.3). Поэтому в случае, если 1 не есть собственное число оператора $\mathbf{A}$, уравнение (2.4) имеет решения при достаточно малых ε.

В случае, если оператор $\mathbf{L}$ вполне непрерывен и если на некоторой сфере S с центром в θ поле $\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{L}$ не имеет нулевых векторов (причем 1 может быть собственным числом линейного оператора $\mathbf{A}$), то в силу теоремы (4.1) предыдущей главы вращение поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{L}$ на S нечетно, так как поле нечетно. При малых ε вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{L}-\varepsilon\mathbf{B}$ гомотопно на S полю $\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{L}$. Значит, вращение на S поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{L}-\varepsilon\mathbf{B}$ тоже нечетно. Поэтому поле $\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{L}-\varepsilon\mathbf{B}$ внутри сферы S имеет неподвижные точки, а это означает, что уравнение (2.4) внутри S имеет по крайней мере одно решение.

В случае, если оператор $\mathbf{L}$ не вполне непрерывен, непосредственное применение теоремы (4.1) невозможно.

Как это следует из соотношения (3.10) главы I, оператор $\mathbf{L}$ удовлетворяет в каждом шаре радиусом $\rho < 1$ условию Липшица

$$\|\mathbf{L}\varphi_1 - \mathbf{L}\varphi_2\| \leqslant a \cdot \rho \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\| \quad (\|\varphi_1\|,\ \|\varphi_2\| \leqslant \rho), \tag{2.7}$$

где a — некоторая постоянная.

Будем предполагать, что

$$\rho < \frac{1}{2a}. \tag{2.8}$$

Тогда в силу (1.8) на элементах f, для которых

$$\|f\| \leqslant \frac{1}{2}\rho, \tag{2.9}$$

будет определена резольвента $\mathbf{R}$ оператора $\mathbf{L}$:

$$\mathbf{R}f \equiv \mathbf{L}(\mathbf{R}f) + f \qquad \left(\|f\| \leqslant \frac{1}{2}\rho\right).$$

Пусть

$$\rho_0 = \frac{\rho}{2\|\mathbf{A}\|}. \tag{2.10}$$

Тогда на шаре T радиуса ρ_0 будет определено вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{I}-\mathbf{RA}$. Так как оператор $\mathbf{L}$ нечетный, то нечетным будет оператор $\mathbf{R}$, а значит, нечетным будет и поле $\mathbf{I}-\mathbf{RA}$.

Теорема 2.1. *Пусть на некоторой сфере S радиуса $r \leqslant \frac{\rho_0}{2}$, где ρ_0 определено равенством* (2.10), *нелинейный оператор $\mathbf{A}+\mathbf{L}$ не имеет 1 собственным числом, т. е. пусть уравнение $\varphi = \mathbf{A}\varphi + \mathbf{L}\varphi$ не имеет на S решений.*

Тогда можно указать такое ε_0, что при всех ε $(|\varepsilon| \leqslant \varepsilon_0)$ уравнение (2.4) *имеет непрерывное на G решение $\varphi(s)$, причем*

$$\|\varphi(s)\| = \max_{s \in G} |\varphi(s)| < r.$$

Доказательство. Рассмотрим на S вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{I}-\mathbf{RA}$, где $\mathbf{R}$ — резольвента оператора $\mathbf{L}$. Это векторное поле не имеет на S нулевых векторов, ибо из

$$\varphi = \mathbf{RA}\varphi$$

следует, что

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi + \mathbf{L}\varphi.$$

Поле $\mathbf{I}-\mathbf{RA}$ нечетно, следовательно, в силу теоремы 4.1 главы II вращение его нечетно.

Пусть

$$\sup_{\|\varphi\| \leqslant r} \|\mathbf{B}\varphi\| = b.$$

Тогда при $\varepsilon \leqslant \frac{r}{2b}$ резольвента $\mathbf{R}$ будет определена на элементах $\mathbf{A}\varphi + \varepsilon\mathbf{B}\varphi$ $(\|\varphi\| \leqslant r)$, так как

$$\|\mathbf{A}\varphi + \varepsilon\mathbf{B}\varphi\| \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\|\rho_0}{2} + \varepsilon b < \frac{1}{2}\rho \qquad (\|\varphi\| \leqslant r).$$

Так как поле $\mathbf{I}-\mathbf{RA}$ не имеет нулевых векторов на S, то найдется такое $\alpha > 0$, что

$$\|\varphi - \mathbf{RA}\varphi\| > \alpha \quad (\varphi \in S).$$

Пусть

$$\varepsilon_0 < \min\left\{\frac{r}{2b}, \frac{\alpha}{2b}\right\}.$$

Рассмотрим вполне непрерывное поле $\mathbf{I}-\mathbf{R}(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B})$, где $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$. Это векторное поле гомотопно на S полю $\mathbf{I}-\mathbf{RA}$, так как в силу неравенства (1.11) из предыдущего параграфа

$$\|\mathbf{R}(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B})\varphi-\mathbf{RA}\varphi\|<\alpha.$$

Значит, вращение на S поля $\mathbf{I}-\mathbf{R}(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B})$ равно вращению поля $\mathbf{I}-\mathbf{RA}$, которое нечетно.

Таким образом, поле $\mathbf{I}-\mathbf{R}(\mathbf{A}+\varepsilon\mathbf{B})$ при $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_0$ имеет по крайней мере одну неподвижную точку φ такую, что $\|\varphi\|<r$. Функция $\varphi(s)$ и будет решением уравнения (2.4).

4. Уравнения, близкие к линейным. Локальные теоремы. Рассмотрим уравнение

$$\varphi=\lambda\mathbf{A}\varphi, \tag{2.11}$$

где $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Пусть T — шар радиуса ρ. При достаточно малых λ оператор $\lambda\mathbf{A}$, очевидно, преобразует T в свою часть (достаточно, чтобы оператор $\lambda\mathbf{A}$ преобразовывал границу шара T в T). Тогда в силу принципа Шаудера уравнение (2.11) имеет в шаре T решения. При изучении конкретных уравнений нужно определить те значения λ, при которых можно применить принцип Шаудера.

Приведем один пример. Рассмотрим уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(s)=\lambda\int_G K(s,\,t)\,f[t,\;\varphi(t)]\,dt, \tag{2.12}$$

где G — множество конечной меры.

Пусть вторая итерация симметричного ядра $K(s,\,t)$ — ограниченная функция. Пусть функция $f(t,u)$ удовлетворяет условию Каратеодори и неравенству

$$|f(t,\;u)|<M(t)\quad(t\in G,\;-a\leqslant u\leqslant a),$$

где $M(t)\in L^2$, a — некоторое положительное число.

Тогда уравнение (2.12) при малых λ имеет ограниченные решения.

Доказательство. Обозначим через $\mathbf{H}$ линейный интегральный оператор, определенный ядром $K(s,\,t)$. В силу теоремы 4.6 из главы I (см. сноску на стр. 60) найдется такая постоянная N, что

$$\operatorname*{vrai\,max}_{s \in G} |\mathbf{H}\varphi(s)| \leqslant N\|\varphi\| \qquad (\varphi \in L^2).$$

Обозначим через T_ρ шар радиуса ρ в пространстве L^2. Рассмотрим в этом шаре оператор $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\varphi = \frac{\lambda N\rho}{a}\mathbf{f}\left(\frac{a}{N\rho}\mathbf{H}\varphi\right),$$

где

$$|\lambda| \leqslant \frac{a}{N\sqrt{\int\limits_G M^2(s)\,ds}}.$$

Оператор $\mathbf{B}$ в силу теорем § 2 главы I будет вполне непрерывным. Этот оператор преобразует шар T_ρ в свою часть, так как

$$\|\mathbf{B}\varphi\| \leqslant \frac{|\lambda|N\rho}{a}\left\|\mathbf{f}\left(\frac{a}{N\rho}\mathbf{H}\varphi\right)\right\| \leqslant \rho \qquad (\|\varphi\| \leqslant \rho).$$

Значит, в силу принципа Шаудера найдется такое $\varphi \in T$, что

$$\varphi(s) = \frac{\lambda N\rho}{a}\mathbf{f}\left(\frac{a}{N\rho}\mathbf{H}\varphi(s)\right).$$

Умножая обе части последнего равенства на $\frac{a}{N\rho}$ и применяя к ним оператор $\mathbf{H}$, получим:

$$\frac{a}{N\rho}\mathbf{H}\varphi(s) = \lambda\mathbf{H}\mathbf{f}\left(\frac{a}{N\rho}\mathbf{H}\varphi(s)\right),$$

откуда следует, что ограниченная функция $\frac{a}{N\rho}\mathbf{H}\varphi(s)$ является решением уравнения (2.12).

5. Уравнения, близкие к линейным. Нелокальные теоремы. Соображения, приведенные при доказательстве теоремы 1.1, позволяют доказывать при помощи принципа Шаудера различные нелокальные теоремы. Более естественным, с нашей точки зрения, путем доказательства нелокальных теорем для уравнений, близких к линейным, является использование теоремы о нулевом векторе поля, близкого к линейному.

В качестве примера снова рассмотрим уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(s)=\int_G K(s,\ t)\,f[t,\ \varphi(t)]\,dt, \tag{2.13}$$

где G — некоторое измеримое множество n-мерного пространства.

Теорема. *Пусть ядро $K(s,\ t)$ удовлетворяет условию*

$$\int_G\int_G K^2(s,\ t)\,ds\,dt=k^2<\infty. \tag{2.14}$$

Пусть непрерывная по и функция двух переменных $f(t,\ u)$ $(t\in G;\ -\infty<u<\infty)$ удовлетворяет условию

$$|f(t,\ u)-\alpha u|\leqslant\beta\,|u|+\sum_{k=1}^{n}S_k(t)\,|u|^{1-p_k}+D(t), \tag{2.15}$$

где $S_k(t)\in L^{\frac{2}{p_k}}$ $(0<p_k<1;\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$, $D(t)\in L^2$, α и β — *константы.*

Пусть α не является характеристическим числом ядра $K(s,\ t)$.

Тогда, если β достаточно малó (например, $\beta=0$), то уравнение (2.13) *имеет суммируемое с квадратом решение.*

Доказательство. В силу теорем главы I оператор $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\int_G K(s,\ t)\,f[t,\ \varphi(t)]\,dt,$$

действует в L^2 и вполне непрерывен.

Через $\mathbf{B}$ обозначим линейный вполне непрерывный оператор, определенный ядром $K(s,\ t)$.

В силу (2.14) и (2.15)

$$\|\mathbf{A}\varphi-\alpha\mathbf{B}\varphi\|\leqslant k\,\Big\{\beta\|\varphi\|+M\sum_{i=1}^{n}\|\varphi\|^{1-p_i}+N\Big\}, \tag{2.16}$$

где

$$M=\max_{i=1,\ \ldots,\ n}\Big\{\int_G|S_i(t)|^{\frac{2}{p_i}}dt\Big\}^{\frac{p_i}{2}},\qquad N=\Big\{\int_G|D(t)|^2\,dt\Big\}^{\frac{1}{2}}.$$

Так как α не принадлежит спектру оператора $\mathbf{B}$, то найдется такое $\gamma > 0$, что

$$\|\varphi - \alpha\mathbf{B}\varphi\| \geqslant \gamma\|\varphi\|. \tag{2.17}$$

Пусть $\beta k < \gamma$. Выберем такое $\rho > 0$, что

$$(\gamma - \beta k)\rho > k\left(M\sum_{i=1}^{n}\rho^{1-p_i} + N\right);$$

тогда в силу (2.16) и (2.17) на сфере $S \subset L^2$ радиуса ρ

$$\|\mathbf{A}\varphi - \alpha\mathbf{B}\varphi\| \leqslant \beta k\rho + k\left(M\sum_{i=1}^{n}\rho^{1-p_i} + N\right) < \gamma\rho \leqslant \|\varphi - \alpha\mathbf{B}\varphi\|.$$

Таким образом, векторное поле $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3 из главы II и, следовательно, имеет неподвижную точку. Эта неподвижная точка и дает решение уравнения (2.13).

Аналогичные утверждения можно установить для уравнения (2.13), предполагая, что выполнены условия полной непрерывности оператора Гаммерштейна в другом функциональном пространстве.

Имеет место следующая теорема, которая проще всего доказывается с помощью теоремы 4.8 предыдущей главы.

Пусть G — замкнутое ограниченное множество. Пусть ядро $K(s, t)$ непрерывно по s и удовлетворяет условию

$$|K(s, t)| < S(t) \quad (s, t \in G),$$

где $S(t) \in L^2$.

Пусть непрерывная по обеим переменным функция $f(t, u)$ дважды дифференцируема по u, причем

a) $f(t, 0) \in L^2$;

в) $\left[\dfrac{\partial f(t, u)}{\partial u}\right]_{u=0} = g(t)$, *где $g(t)$ — ограниченная функция*;

c) $\left|\dfrac{\partial^2 f(t, u)}{\partial u^2}\right| < \varepsilon$ *при* $|u| < a$ *(a — постоянная), где ε — достаточно малое число.*

Пусть 1 *не есть собственное число ядра $K(s, t)\,g(t)$. Пусть* $\max|v_0(s)| < a$, *где $v_0(s)$ — решение уравнения*

$$v(s) = \int_G K(s, t)\,[g(t)\,v(t) + f(t, 0)]\,dt.$$

Тогда уравнение (2.13) *имеет решение, единственное в шаре радиуса а пространства С.*

Приведенные в этом пункте теоремы являются обобщением двух аналогичных теорем В. В. Немыцкого [49в], которые являются, по существу, локальными. Приведем одну из этих теорем.

Уравнение (2.13) *имеет суммируемое с квадратом решение, если выполняется условие* (2.14) *и если можно найти такую постоянную* α *и такую функцию* $S(t) \in L^2$, *что*

$$|f(t,\ u) - \alpha u - S(t)| < \frac{D}{\sqrt{\int\limits_G \int\limits_G K^2(s,t)\,ds\,dt}}$$

$$(t \in G,\quad -\infty < u < \infty), \tag{2.18}$$

где D — *некоторая постоянная, и если*

$$|f(t,\ u_1) - f(t,\ u_2)| \leqslant \frac{|u_1 - u_2|}{2\sqrt{\int\limits_G \int\limits_G K^2(s,\ t)\,ds\,dt}}$$

$$(t \in G,\quad -\infty < u < \infty). \tag{2.19}$$

При этом решение заключено в шаре радиуса D *вокруг решения линейного интегрального уравнения*

$$\varphi(s) = \alpha \int\limits_G K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_G K(s,\ t)\,S(t)\,dt.$$

В этой теореме предполагалось, что $\operatorname{mes} G < \infty$.

Уравнение (2.13) в силу первого из доказанных в настоящем пункте предложений имеет в L^2 решение и без выполнения условия (2.19), если α не есть характеристическое число ядра $K(s,\ t)$.

Покажем, что условия (2.18) и (2.19) позволяют оценить число α, участвующее в условии (2.18).

Так как

$$|\alpha|\,|u_1 - u_2| \leqslant |f(t,\ u_1) - \alpha u_1 - S(t)| + \\ + |f(t,\ u_2) - \alpha u_2 - S(t)| + |f(t,\ u_1) - f(t,\ u_2)|,$$

то в силу условий (2.18) и (2.19)

$$|\alpha| \cdot |u_1 - u_2| \leqslant \frac{4D + |u_1 - u_2|}{2\sqrt{\int\limits_G \int\limits_G K^2(s,\ t)\,ds\,dt}},$$

откуда, полагая $u_2 = 0$, получим:

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\int\limits_G \int\limits_G K^2(s, t)\, ds\, dt}} + \frac{2D}{|u_1| \sqrt{\int\limits_G \int\limits_G K^2(s, t)\, ds\, dt}}.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $u_1 \to \infty$, получим:

$$|\alpha| \leqslant \frac{1}{2} \left\{ \int\limits_G \int\limits_G K^2(s, t)\, ds\, dt \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Легко видеть, что между α и нулем нет характеристических чисел ядра $K(s, t)$, так как

$$\varphi(s) = \lambda \int\limits_G K(s, t)\, \varphi(t)\, dt$$

влечет (при помощи неравенства Буняковского)

$$|\lambda| \geqslant \left\{ \int\limits_G \int\limits_G K^2(s, t)\, ds\, dt \right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, в теореме В. В. Немыцкого $|\alpha|$ меньше половины наименьшей абсолютной величины характеристических чисел ядра $K(s, t)$.

§ 3. Сходимость метода Б. Г. Галеркина при приближенном решении нелинейных уравнений

Многие методы приближенного решения уравнений заключаются в построении точных решений уравнений, близких в некотором смысле к уравнению первоначальному.

Если переход к приближенному уравнению соответствует гомотопному переходу от векторного поля, отвечающего первоначальному уравнению, к векторному полю, отвечающему приближенному уравнению, то естественно к исследованию данного приближенного метода решения уравнений привлечь топологические соображения.

В настоящем параграфе мы исследуем с этой точки зрения применимость методов типа метода академика Б. Г. Галеркина (метод Ритца, метод наименьших квадратов, метод

Петрова и т. д.) к построению приближенных решений уравнений вида

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi,$$

где **A** — вполне непрерывный, вообще говоря нелинейный, оператор.

Многочисленные результаты, относящиеся к методу Ритца — Галеркина, были получены академиками Н. М. Крыловым и Н. Н. Боголюбовым (подробную библиографию см. в [36]) для различных классов линейных дифференциальных уравнений. Первые общие результаты о сходимости метода Галеркина были получены академиком М. В. Келдышем [27], работа которого основана на исследовании бесконечных определителей. В дальнейших работах Л. В. Канторовича [24], С. Г. Михлина [45] и Н. И. Польского [53] применялись методы функционального анализа; в этих последних работах, как правило, исследование сводилось к изучению линейных вполне непрерывных операторов.

Метод Галеркина применялся и для приближенного решешения некоторых конкретных нелинейных уравнений *).

Основные результаты настоящего параграфа без доказательств были опубликованы в [206].

1. Сходимость процесса. Пусть $L_1 \subset L_2 \subset \ldots \subset L_n \subset \ldots$ — такая последовательность конечномерных подпространств возрастающей размерности банахова пространства E, что множество $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} L_n$ плотно в E.

Линейный оператор **P**, действующий в пространстве E, называется *проекционным*, если

$$\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}.$$

Примером проекционного оператора может служить оператор ортогонального проектирования на некоторое подпространство в гильбертовом пространстве.

---

*) См. А. И. Лурье и А. И. Чекмарев, Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой, составленной из двух прямолинейных отрезков, Прикл. матем. и мех. 1, № 3 (1938); Д. Ю. Панов, О применении метода Б. Г. Галеркина для решения некоторых задач теории упругости, Прикл. матем. и мех. 3, № 2 (1939).

Пусть $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_n, \ldots$ — последовательность линейных проекционных операторов с равномерно ограниченными нормами

$$\|\mathbf{P}_n\| \leqslant K \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть при этом

$$\mathbf{P}_n E = L_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве E. Мы будем рассматривать уравнение

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi, \tag{3.1}$$

причем будем предполагать, что это уравнение имеет изолированное решение φ_0 ненулевого индекса (индекс решения φ_0 — это индекс неподвижной точки φ_0 векторного поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$). Если φ_0 — не единственное решение уравнения (3.1), то будем в дальнейшем предполагать, что все рассуждения проводятся для элементов из некоторого шара $T \subset E$, в котором кроме φ_0 уравнение (3.1) не имеет решений.

Если (3.1) — линейное уравнение, имеющее единственное решение φ_0, то индекс этого решения, как нам уже известно, равен 1 или —1.

Приближенным решением φ_n уравнения (3.1) будем называть решение уравнения

$$\varphi = \mathbf{P}_n \mathbf{A}\varphi. \tag{3.2}$$

Очевидно, $\varphi_n \in L_n$.

Нас будут интересовать следующие вопросы: существуют ли при достаточно больших n приближенные решения (существует ли такое n_0, что при $n \geqslant n_0$ уравнение (3.2) имеет в шаре T решения), сходятся ли при $n \to \infty$ приближенные решения к решению φ_0 уравнения (3.1) и, если сходятся, то какова быстрота этой сходимости?

Рассмотрим на T вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$. Это поле на границе S шара T не имеет нулевых векторов. Вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на S отлично от нуля — оно равно индексу единственной неподвижной точки φ_0 поля в шаре T.

Как это следует из определения вращения вполне непрерывного векторного поля, поле $\mathbf{I} - \mathbf{P}_n\mathbf{A}$ имеет на S то же вращение, что и поле $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ (при n, бóльших некоторого n_0).

Но вращение поля $\mathbf{I}-\mathbf{P}_n\mathbf{A}$ на S совпадает с вращением поля $\mathbf{I}-\mathbf{P}_n\mathbf{A}$ на $S\cap L_n$. Значит, вращение поля $\mathbf{I}-\mathbf{P}_n\mathbf{A}$ на $S\cap L_n$ отлично от нуля и, следовательно, поле $\mathbf{I}-\mathbf{P}_n\mathbf{A}$ на $T\cap L_n$ имеет неподвижные точки.

Таким образом, *уравнение* (3.2) *при* $n\geqslant n_0$ *имеет в* $T\cap L_n$ *решения* φ_n.

Пусть T_ε — шар радиуса ε (ε — сколь угодно малое положительное число) с центром в φ_0. Поле $\mathbf{\Phi}$ на множестве $T_1=\overline{T\setminus T_\varepsilon}$ не имеет нулевых векторов. Значит, найдется такое $\alpha>0$, что

$$\|\mathbf{\Phi}x\|\geqslant\alpha \qquad (x\in T_1).$$

Пусть n_0 — такое число, что подпространство L_{n_0} с точностью до $\frac{\alpha}{3K}$ (где $K\geqslant\|\mathbf{P}_n\|$, $n=1, 2,\ldots$) аппроксимирует компактное множество $\mathbf{A}T_1$. Тогда для каждого $x\in T_1$ найдется такой элемент $y\in L_{n_0}$, что

$$\|\mathbf{A}x-y\|\leqslant\frac{\alpha}{3K},$$

откуда при всех $n\geqslant n_0$

$$\|\mathbf{A}x-\mathbf{P}_n\mathbf{A}x\|\leqslant\|\mathbf{A}x-y\|+\|\mathbf{P}_n(\mathbf{A}x-y)\|\leqslant \\ \leqslant\frac{\alpha}{3K}+\frac{\alpha}{3}\leqslant\frac{2}{3}\alpha. \qquad (3.3)$$

Из неравенства (3.3) следует, что при $n\geqslant n_0$, $x\in T_1$

$$\|x-\mathbf{P}_n\mathbf{A}x\|\geqslant\|x-\mathbf{A}x\|-\|\mathbf{A}x-\mathbf{P}_n\mathbf{A}x\|\geqslant\frac{\alpha}{3}.$$

Последнее неравенство означает, что решение φ_n уравнения (3.2) при $n\geqslant n_0$ удовлетворяет условию

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|<\varepsilon.$$

Сформулируем полученный результат в виде теоремы.

Теорема 3.1. *Приближенные решения* φ_n *при* n, *бо́льших некоторого* n_0, *существуют.*

При $n\to\infty$ *приближенные решения* φ_n *сходятся к решению уравнения* (3.1).

2. Быстрота сходимости. При оценке быстроты сходимости приближенных решений φ_n естественно сравнивать эту быстроту с быстротой сходимости приближенных решений, полученных тем же методом для «уравнения» $\varphi = \varphi_0$, где φ_0 — решение уравнения (3.1). Иначе говоря, сходимость приближенных решений естественно сравнивать со сходимостью «ряда Фурье»:

$$\mathbf{P}\varphi_0 + (\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1)\varphi_0 + (\mathbf{P}_3 - \mathbf{P}_2)\varphi_0 + \ldots$$

Теорема 3.2. *Пусть оператор* $\mathbf{A}$ *имеет в точке* φ_0, *являющейся решением уравнения* (3.1), *производную Фреше* $\mathbf{B}$, *для которой* 1 *не является собственным числом. Тогда быстрота сходимости приближенных решений* φ_n *к* φ_0 *характеризуется неравенством*

$$\|\varphi_n - \varphi_0\| \leqslant (1 + \varepsilon_n)\|\mathbf{P}_n\varphi_0 - \varphi_0\|,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

Доказательство. В силу того, что

$$\varphi_0 = \mathbf{A}\varphi_0, \qquad \varphi_n = \mathbf{P}_n\varphi_n = \mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi_n,$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned}(\mathbf{I} - \mathbf{B})(\varphi_n - \varphi_0) + (\mathbf{B} - \mathbf{P}_n\mathbf{B})(\varphi_n - \varphi_0) + \\ + \mathbf{P}_n(\mathbf{B}\mathbf{P}_n - \mathbf{B})(\varphi_n - \varphi_0) - \mathbf{P}_n[\mathbf{A}\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_0 - \mathbf{B}(\varphi_n - \varphi_0)] = \\ = (\mathbf{I} - \mathbf{B})(\mathbf{P}_n\varphi_0 - \varphi_0) + (\mathbf{B} - \mathbf{P}_n\mathbf{B})(\mathbf{P}_n\varphi_0 - \varphi_0), \qquad (3.4)\end{aligned}$$

проверка которого заключается в раскрытии всех скобок и приведении подобных слагаемых.

Введем обозначения

$$\|(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}\| = R, \qquad \|\mathbf{B} - \mathbf{P}_n\mathbf{B}\| = \alpha_n, \qquad \|\mathbf{B}\mathbf{P}_n - \mathbf{B}\| = \beta_n.$$

В теории линейных вполне непрерывных операторов доказывается, что

$$\lim_{n \to \infty} \alpha_n = 0, \qquad \lim_{n \to \infty} \beta_n = 0.$$

Введем обозначение

$$\gamma_n = \frac{\|\mathbf{A}\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_0 - \mathbf{B}(\varphi_n - \varphi_0)\|}{\|\varphi_n - \varphi_0\|} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как $\mathbf{B}$ — это производная Фреше оператора $\mathbf{A}$, а в силу теоремы (3.1)

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n - \varphi_0\| = 0,$$

то

$$\lim_{n \to \infty} \gamma_n = 0.$$

Применяя к (3.4) оператор $(\mathbf{I}-\mathbf{B})^{-1}$ и оценивая правую и левую части, получим:

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|-R(\alpha_n+K\beta_n+K\gamma_n)\|\varphi_n-\varphi_0\|\leqslant \\ \leqslant\|\mathbf{P}\varphi_0-\varphi_0\|+R\alpha_n\|\mathbf{P}_n\varphi_0-\varphi_0\|,$$

откуда

$$\|\varphi_n-\varphi_0\|\leqslant(1+\varepsilon_n)\|\mathbf{P}_n\varphi_0-\varphi_0\|,$$

где

$$\varepsilon_n=\frac{R(2\alpha_n+K\cdot\beta_n+K\cdot\gamma_n)}{1-R(\alpha_n+K\beta_n+K\gamma_n)},$$

так что $\varepsilon_n\to 0$ при $n\to\infty$.

Теорема доказана.

Отметим, что данное выше обоснование сходимости процесса построения приближенных решений относится и к уравнениям в комплексном банаховом пространстве, так как каждое такое пространство можно рассматривать и как вещественное.

Предположим дополнительно, что оператор $\mathbf{A}$ в окрестности точки φ_0 непрерывно дифференцируем. Тогда, применяя теорему (4.8) из главы II, можно показать, что приближенное уравнение (3.2) при достаточно больших n будет иметь в T единственное решение.

В изложенную общую схему укладываются многие известные приближенные методы, которые определяются способом построения подпространств L_n и проекционных операторов $\mathbf{P}_n$. Рассмотрим некоторые из них.

3. Метод Б. Г. Галеркина. Пусть банахово пространство E обладает базисом $\{g_i\}$. Тогда каждый элемент $\varphi\in E$ однозначным образом представим сходящимся рядом

$$\varphi=\sum_{i=1}^{\infty}\mathrm{G}_i(\varphi)\,g_i,$$

где $\mathrm{G}_i(\varphi)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots)$ — непрерывные функционалы. Известно (см., например, [5]), что проекционные операторы $\mathbf{P}_n$, определенные равенством

$$\mathbf{P}_n\varphi=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{G}_i(\varphi)\,g_i \qquad (\varphi\in E),$$

имеют равномерно ограниченные нормы

$$\|\mathbf{P}_n\|\leqslant K \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Через L_n будем обозначать линейную оболочку первых n элементов базиса.

Решения φ_n уравнений $\varphi = \mathbf{P}_n \mathbf{A} \varphi$, где $\mathbf{P}_n$ — определенные выше операторы, называют *галеркинскими* приближенными решениями уравнения

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi. \tag{3.5}$$

Из теорем (3.1) и (3.2) непосредственно следует:

1. *Галеркинские приближенные решения* φ_n *уравнения* (3.5) *существуют при достаточно больших* n, *причем они сходятся к точному решению* φ_0 *уравнения* (3.5), *если* φ_0 — *изолированное решение ненулевого индекса.*

2. *Если в точке* φ_0 *оператор* $\mathbf{A}$ *имеет дифференциал Фреше, для которого* 1 *не является собственным числом, то быстрота сходимости характеризуется неравенством*

$$\|\varphi_n - \varphi_0\| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \cdot \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathbf{G}_i(\varphi_0) g_i \right\|,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ *при* $n \to \infty$.

4. Обобщение Г. И. Петрова [52]. Пусть в E заданы два базиса: $\{g_i\}$ и $\{f_i\}$. Каждый элемент $\varphi \in E$ представим тогда сходящимися рядами

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{G}_i(\varphi) g_i$$

и

$$\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{F}_i(\varphi) f_i.$$

Линейную оболочку элементов $g_1, \ldots, g_n$ обозначим через L_n. Линейную оболочку первых n элементов второго базиса обозначим через M_n. Через M^n обозначим замыкание линейной оболочки остальных элементов $f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$ второго базиса. Через $\mathbf{Q}_n$ обозначим проекционный оператор, определенный равенством

$$\mathbf{Q}_n \varphi = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i(\varphi) f_i \qquad (\varphi \in E).$$

Нормы операторов $\mathbf{Q}_n$ равномерно ограничены:

$$\|\mathbf{Q}_n\| \leqslant k \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Г. И. Петров предложил обобщение метода Галеркина для приближенного решения уравнения

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi + f,$$

где $\mathbf{A}$ — линейный вполне непрерывный оператор, для которого 1 не является собственным числом. Это обобщение заключается в том, что приближенное решение φ_n ищут в виде

$$\varphi_n = \sum_{i=1}^{n} c_i g_i,$$

где коэффициенты c_i определяют из уравнений

$$\mathbf{F}_j(\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_n - f) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{3.6}$$

Обоснование сходимости метода Петрова — Галеркина для одного частного случая было дано самим Г. И. Петровым. В общем случае обоснование было дано Н. И. Польским [5,6] в предположении, что выполнено условие

(А). Существует такое число $R > 0$, что для всех n, начиная с некоторого,

$$\|\varphi\| \leqslant R \left\| \sum_{i=1}^{n} \mathbf{F}_i(\varphi) f_i \right\| \qquad (\varphi \in L_n).$$

Обозначим через $\mathbf{D}_n$ оператор, определенный на L_n равенством

$$\mathbf{D}_n\varphi = \mathbf{Q}_n\varphi \qquad (\varphi \in L_n).$$

Условие (А) тогда можно записать в виде

$$\|\varphi\| \leqslant R \|\mathbf{D}_n\varphi\| \qquad (\varphi \in L_n),$$

откуда следует, что на M_n определен оператор $\mathbf{D}_n^{-1}$, причем

$$\|\mathbf{D}_n^{-1}\| \leqslant R.$$

В случае невыполнения условия (А) можно указать такие элементы φ_0, что приближенные решения Петрова — Галеркина для уравнения $\varphi = \varphi_0$ не сходятся.

Мы будем считать в дальнейшем, что условие (А) выполнено.

Рассмотрим уравнение

$$\varphi = \mathbf{A}\varphi, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{A}$ — теперь уже нелинейный вполне непрерывный оператор. Систему (3.6) будем писать в виде

$$\mathbf{F}_j(\varphi - \mathbf{A}\varphi) = 0 \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{3.8}$$

Если элемент $\varphi_n \in L_n$ является решением системы (3.8), то это эквивалентно тому, что

$$\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_n \in M^n. \tag{3.9}$$

Таким образом, отыскание приближенных решений методом Петрова — Галеркина эквивалентно отысканию таких элементов $\varphi_n \in L_n$, для которых справедливо (3.9).

Рассмотрим последовательность

$$g_1, \ldots, g_n, f_{n+1}, f_{n+2}, \ldots$$

При достаточно больших n эта последовательность является базисом. Действительно, в силу условия (А) каждый элемент $\varphi \in E$ однозначным образом представим в виде суммы двух элементов из L_n и M^n, а следовательно, и в виде

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{(n)}(\varphi) g_i + \sum_{i=n+1}^{\infty} \Phi_i^{(n)}(\varphi) f_i \qquad (\varphi \in E).$$

Определим проекционные операторы $\mathbf{P}_n$ равенством

$$\mathbf{P}_n\varphi = \sum_{i=1}^{n} \Phi_i^{(n)}(\varphi) g_i \qquad (\varphi \in E).$$

Тогда отыскание приближенных решений $\varphi_n \in L_n$ Петрова — Галеркина эквивалентно решению в L_n уравнения

$$\varphi = \mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi.$$

Действительно, если $\varphi_n = \mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi_n$, то, так как $\mathbf{P}_n\varphi_n = \varphi_n$,

$$\mathbf{P}_n(\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_n) = \theta,$$

т. е. $\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_n \in M^n$. Обратно, если $\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_n \in M^n$, то

$$\varphi_n - \mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi_n = \mathbf{P}_n(\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_n) = \theta.$$

Чтобы из теорем 3.1 и 3.2 сделать выводы о сходимости метода Петрова — Галеркина, нужно показать, что нормы операторов $\mathbf{P}_n$ равномерно ограничены. Это следует из того, что

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{D}_n^{-1}\mathbf{Q}_n,$$

откуда

$$\|\mathbf{P}_n\| \leqslant RK.$$

Таким образом, теоремы 3.1 и 3.2 описывают сходимость метода Петрова — Галеркина, если выполнено условие (A) Н. И. Польского.

5. Вычисление собственных чисел линейных операторов. Топологические соображения применимы и при исследовании сходимости метода Галеркина в задаче о вычислении собственных чисел и собственных функций линейных вполне непрерывных операторов.

Пусть L_n и $\mathbf{P}_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — подпространства и проекционные операторы, введенные в пункте 1.

Пусть линейный оператор $\mathbf{A}$ действует в вещественном банаховом пространстве E. Пусть μ_0 — положительное (для определенности) характеристическое число оператора $\mathbf{A}$, которому отвечает нечетномерное инвариантное подпространство.

Все рассуждения, проводимые в этом пункте, не относятся к комплексным пространствам, рассматриваемым как вещественные, — в таких пространствах все инвариантные подпространства, соответствующие собственным числам, четномерны.

Рассмотрим в E вполне непрерывное векторное поле

$$\Phi\varphi = \varphi - \|\varphi\|\mathbf{A}\varphi.$$

Вращение этого поля на сферах S_1 и S_2 радиусов $\mu_0+\varepsilon$ и $\mu_0-\varepsilon$ (ε — достаточно малое число) в силу теоремы 4.6 из главы II различно. Из определения вращения следует, что, начиная с некоторого n, зависящего от ε, вращение поля Φ_n,

$$\Phi_n\varphi = \varphi - \|\varphi\|\,\mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi \qquad (\varphi \in L_n),$$

на сферах $S_1 \cap L_n$ и $S_2 \cap L_n$ будет различно, в силу чего найдется такой элемент $\varphi_n \in L_n$, что

$$\varphi_n = \|\varphi_n\|\mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi_n,$$

причем

$$|\mu_0 - \|\varphi_n\|| < \varepsilon.$$

Это означает, что операторы $\mathbf{P}_n\mathbf{A}$ имеют характеристические числа, близкие к μ_0.

Значит, *методом Галеркина можно приближенно находить нечетнократные собственные числа линейных вполне непрерывных операторов.*

Отметим, что аналитические методы позволяют установить (см., например, [456]), что метод Галеркина применим для вычисления всех собственных чисел (не только нечетнократных) в случае комплексного банахова пространства.

Теорема 3.2 позволяет для случая банаховых пространств с дифференцируемой нормой установить быстроту сходимости метода Галеркина при вычислении простых собственных чисел линейных вполне непрерывных операторов.

Пусть E — вещественное гильбертово пространство.

Пусть λ_0 — простое собственное число линейного вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$. Через φ_0 обозначим соответствующий собственный вектор

$$\mathbf{A}\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0.$$

Пусть

$$\|\varphi_0\| = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Рассмотрим снова векторное поле $\varphi - \|\varphi\|\mathbf{A}\varphi$.

Производная Фреше $\mathbf{B}$ оператора $\|\varphi\|\mathbf{A}\varphi$ в точке φ_0 определится равенством

$$\mathbf{B}\varphi = \lambda_0^2(\varphi, \varphi_0)\varphi_0 + \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi,$$

так как

$$\|\varphi_0 + \varphi\|\mathbf{A}(\varphi_0 + \varphi) - \|\varphi_0\|\mathbf{A}\varphi_0 - \mathbf{B}\varphi =$$
$$= (\|\varphi_0 + \varphi\| - \|\varphi_0\|)\mathbf{A}\varphi + \left(\|\varphi_0 + \varphi\| - \|\varphi_0\| - \frac{(\varphi, \varphi_0)}{\|\varphi_0\|}\right)\mathbf{A}\varphi_0,$$

откуда следует, что

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\|\|\varphi_0 + \varphi\|\mathbf{A}(\varphi_0 + \varphi) - \|\varphi_0\|\mathbf{A}\varphi_0 - \mathbf{B}\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

В силу леммы 1.1 настоящей главы единица не является собственным числом оператора $\mathbf{B}$. Поэтому в силу теоремы 4.7 главы II точка φ_0 будет изолированной неподвижной точкой поля $\varphi - \|\varphi\|\mathbf{A}\varphi$, причем индекс этой неподвижной точки будет равен $+1$ или -1.

Решения φ_n уравнений $\varphi - \|\varphi\| \mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi = \theta$ будут собственными функциями операторов $\mathbf{P}_n\mathbf{A}$, которым отвечают собственные числа $\lambda_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|}$.

Из теоремы 3.2 следует

Теорема 3.3. *Простое собственное число λ_0 и соответствующая собственная функция φ_0 могут быть вычислены приближенно при помощи метода Галеркина заменой оператора* $\mathbf{A}$ *операторами* $\mathbf{P}_n\mathbf{A}$.

Быстрота сходимости приближенных собственных чисел λ_n и приближенных собственных функций φ_n к λ_0 и φ_0 характеризуется неравенствами

$$\left| \frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_0} \right| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \| \mathbf{P}_n\varphi_0 - \varphi_0 \|$$

и

$$\| \varphi_n - \varphi_0 \| \leqslant (1 + \varepsilon_n) \| \mathbf{P}_n\varphi_0 - \varphi_0 \|,$$

где $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Любопытно отметить, что оценки (3.10) и (3.11) не удалось получить без использования перехода к нелинейному уравнению $\varphi - \|\varphi\| \mathbf{A}\varphi = \theta$.

Повидимому, оценка быстроты сходимости приближенных собственных чисел, полученная в теореме 3.3 (для случая, когда отыскиваемое собственное число простое), справедлива и в общем случае кратных собственных чисел. Для общего случая, естественно, нужно искать аналитическое доказательство.

ГЛАВА IV

ЗАДАЧИ О СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

В настоящей главе исследуется ряд вопросов, связанных с собственными функциями нелинейных операторов.

В задачах техники и физики, приводящих к изучению нелинейных операторов $\mathbf{A}$, собственные функции возникают обычно как вторые решения уравнения $\mathbf{A}\varphi=\lambda\varphi$, существующие при некоторых избранных значениях параметра λ.

Первое нулевое решение в ряде задач очевидно. К задачам о существовании собственных функций — вторых решений приводят, например, многочисленные задачи механики, требующие отыскания форм потери устойчивости.

Обычно задача ставится так: рассматривается уравнение $\varphi=\mu\mathbf{A}\varphi$ с переменным параметром μ. При малых значениях параметра μ удается показать, что нулевое решение (предполагается, что $\mathbf{A}\theta=\theta$) единственно. При возрастании значений параметра μ, начиная с некоторого момента, в окрестности θ появляется ненулевое решение уравнения

$$\varphi=\mu\mathbf{A}\varphi.$$

Число μ_0 называется *точкой бифуркации*, если для любых ε, $\delta>0$ найдется характеристическое число μ оператора $\mathbf{A}$ такое, что $|\mu-\mu_0|<\varepsilon$, причем этому характеристическому числу отвечает по крайней мере одна собственная функция φ: $\varphi=\mu\mathbf{A}\varphi$, с нормой, меньшей δ.

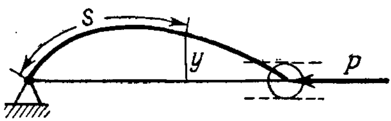
В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе прямолинейного стержня единичной длины и переменной жесткости $\rho(s)=\frac{1}{EJ}$ под воздействием силы P (см. чертеж). Как известно, прогиб $y(s)$ определяется решением дифференциального уравнения

$$y''(s)+P\rho(s)\,y(s)\sqrt{1-y'^2(s)}=0$$

при граничных условиях

$$y(0)=y(1)=0.$$

Введем обозначение $y''(s)=-\varphi(s)$. Очевидно, знание функ-



ции $\varphi(s)$ позволяет немедленно вычислить и прогиб $y(s)$. Если $y''(s)=-\varphi(s)$ и $y(0)=y(1)=0$, то *)

$$y(s)=\int_0^1 K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где $K(s,\ t)$ — функция Грина:

$$K(s,\ t)=\begin{cases} s(1-t) & \text{при} \quad s\leqslant t; \\ t(1-s) & \text{при} \quad s\geqslant t. \end{cases}$$

Производная $y'(s)$ определится равенством

$$y'(s)=\int_0^1 K'_s(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt,$$

где

$$K'_s(s,\ t)=\begin{cases} 1-t & \text{при} \quad s<t, \\ -t & \text{при} \quad s>t. \end{cases}$$

Для определения функции $\varphi(s)$ мы получаем, таким образом, нелинейное интегральное уравнение

$$\varphi(s)=P\rho(s)\int_0^1 K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt\sqrt{1-\left[\int_0^1 K'_s(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt\right]^2}.$$

*) См., например, [15].

Функцию $\rho(s)$ естественно считать положительной и непрерывной. Тогда без труда проверяется, что оператор **A**, определяемый правой частью этого уравнения,

$$\mathbf{A}\varphi(s) = P\rho(s)\int_0^1 K(s, t)\varphi(t)\,dt\cdot\sqrt{1-\left[\int_0^1 K_s'(s, t)\varphi(t)\,dt\right]^2}$$

действует в пространстве C непрерывных на сегменте $[0, 1]$ функций и при малых P удовлетворяет в единичном шаре этого пространства условиям принципа сжатых отображений. В силу этого при малых P рассматриваемое нелинейное интегральное уравнение имеет в единичном шаре пространства C единственное нулевое решение. Это означает, что при малых силах P стержень не изгибается. Однако при силах, бо́льших так называемой критической силы Эйлера, возникают прогибы. Критическая сила Эйлера и является первой точкой бифуркации.

Первоначальная задача, возникающая в теории собственных функций, — это задача о существовании точек бифуркации, об отыскании точек бифуркации.

Важную роль играют собственные значения. Второй вопрос *), возникающий в теории собственных функций, — это вопрос о структуре спектра, его дискретности или сплошности и т. д.

Третий важный вопрос — это вопрос о кратности спектра, вопрос о том, сколько собственных функций оператора соответствуют данному собственному числу.

Четвертый вопрос — это вопрос о структуре множества собственных функций.

Топологические методы, развитые в предыдущих главах, позволяют для различных классов операторов найти ответы на поставленные и другие аналогичные вопросы.

---

*) Для уравнения Гаммерштейна

$$\int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\,dt = \lambda\varphi(s)$$

с положительно определенным ядром и аналитической по u функцией $f(t, u)$ этот вопрос был подробно исследован в работах Н. Н. Назарова.

§ 1. Топологические принципы существования собственного вектора

1. Почти собственные векторы. Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, действующий в бесконечномерном банаховом пространстве E. Пусть L — граница некоторой ограниченной области из E, содержащей θ. Тогда *оператор* $\mathbf{A}$ *имеет на* L *«почти собственные» векторы*, т. е. каково бы ни было положительное число ε, всегда можно найти такое число λ_ε и такой элемент φ_ε, что

$$\|\mathbf{A}\varphi_\varepsilon - \lambda_\varepsilon\varphi_\varepsilon\| < \varepsilon. \qquad (1.1)$$

Для доказательства аппроксимируем компактное множество $\mathbf{A}L$ нечетномерным подпространством $E^n \subset E$ с точностью до $\frac{\varepsilon}{2}$ и построим такой шаудеровский (см. стр. 113) оператор проектирования $\mathbf{P}_n$ множества $\mathbf{A}L$ на E^n, что

$$\|\mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi - \mathbf{A}\varphi\| < \varepsilon \qquad (\varphi \in L). \qquad (1.2)$$

Оператор $\mathbf{P}_n\mathbf{A}$ на $L \cap E^n$ в силу теоремы о еже (см. § 2 главы II) будет иметь собственный вектор, который мы обозначим через φ_ε. Соответствующее собственное число обозначим через λ_ε:

$$\mathbf{P}_n\mathbf{A}\varphi_\varepsilon = \lambda_\varepsilon\varphi_\varepsilon.$$

Неравенство (1.1) следует непосредственно из (1.2).

Из существования почти собственных векторов следует теорема 1.1, установленная для векторных полей на сфере Биркгофом и Келлогом [4] и Э. Роте [56д] *).

Теорема 1.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *вполне непрерывный оператор, определенный на границе* L *ограниченной области, содержащей нуль* θ *пространства* E. *Пусть*

$$\|\mathbf{A}\varphi\| \geqslant a > 0 \qquad (\varphi \in L). \qquad (1.3)$$

Тогда оператор $\mathbf{A}$ *имеет на* L *по крайней мере один собственный вектор.*

---

*) См. также [10к], где этот результат получен для полей на границе выпуклой области.

Доказательство. Обозначим через $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$ такую последовательность почти собственных векторов оператора **A**, что

$$\|\mathbf{A}\varphi_n - \lambda_n\varphi_n\| < \frac{1}{n} \qquad (\varphi_n \in L;\ n = 1, 2, \ldots). \tag{1.4}$$

Так как оператор **A** компактен, то

$$\sup_{n=1, 2, \ldots} \|\mathbf{A}\varphi_n\| = b < \infty. \tag{1.5}$$

Пусть R и r — числа, определенные равенствами

$$R = \sup_{\varphi \in L} \|\varphi\|, \qquad r = \inf_{\varphi \in L} \|\varphi\|.$$

Очевидно, числа r и R положительны и конечны.

В силу (1.4) и (1.5)

$$|\lambda_n| \leqslant \frac{\|\lambda_n\varphi_n\|}{r} \leqslant \frac{1}{r}\|\mathbf{A}\varphi_n - \lambda_n\varphi_n\| + \frac{1}{r}\|\mathbf{A}\varphi_n\| \leqslant \frac{1}{r}\left(\frac{1}{n} + b\right).$$

С другой стороны, в силу (1.3) и (1.4)

$$|\lambda_n| \geqslant \frac{\|\lambda_n\varphi_n\|}{R} \geqslant \frac{1}{R}\|\mathbf{A}\varphi_n\| - \frac{1}{R}\|\mathbf{A}\varphi_n - \lambda_n\varphi_n\| \geqslant \frac{1}{R}\left(a - \frac{1}{n}\right).$$

Таким образом, можно выбрать сходящуюся к некоторому числу λ_0 подпоследовательность λ_{n_i}, причем

$$\frac{a}{R} \leqslant \lambda_0 \leqslant \frac{b}{r}.$$

Так как оператор **A** вполне непрерывен, то можно считать, что подпоследовательность индексов n_i выбрана так, что и элементы $\mathbf{A}\varphi_{n_i}$ сходятся к некоторому элементу $\psi \in E$.

Тогда сходится и последовательность элементов φ_{n_i} к элементу $\varphi_0 = \frac{1}{\lambda_0}\psi$, так как

$$\|\varphi_{n_i} - \varphi_0\| = \frac{1}{|\lambda_0|}\|\lambda_0\varphi_{n_i} - \psi\| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{|\lambda_0|}\{\|\lambda_0\varphi_{n_i} - \lambda_{n_i}\varphi_{n_i}\| + \|\lambda_{n_i}\varphi_{n_i} - \mathbf{A}\varphi_{n_i}\| + \|\mathbf{A}\varphi_{n_i} - \psi\|\}.$$

Значит, $\varphi_0 \in L$, причем из непрерывности оператора **A** следует, что

$$\mathbf{A}\varphi_0 = \lambda_0\varphi_0.$$

Теорема доказана.

2. Принцип сравнения двух векторных вполне непрерывных полей. Пусть на границе L некоторой области задано два вполне непрерывных векторных поля $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{A}_2$. Допустим, что в каждой точке $\varphi \in L$ векторы $\varphi - \mathbf{A}_1\varphi$ и $\varphi - \mathbf{A}_2\varphi$ не направлены противоположно. Тогда поля

$$\mathbf{\Phi}_t = \mathbf{I} - [t\mathbf{A}_1 + (1-t)\mathbf{A}_2],$$

не имеющие нулевых векторов при $0 \leqslant t \leqslant 1$, дают гомотопный переход от одного поля к другому. Значит, вращения полей $\mathbf{\Phi}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2$ одинаковы.

Таким образом, доказано, что *для вполне непрерывных полей $\mathbf{\Phi}_1$ и $\mathbf{\Phi}_2$ с различным вращением на L найдется на L такая точка, в которой векторы этих полей направлены противоположно.*

Последнее утверждение приводит к двум теоремам.

Теорема 1.2. *Пусть L — граница ограниченной области банахова пространства, содержащей 0. Пусть вращение вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ на L отлично от единицы.*

Тогда оператор $\mathbf{A}$ имеет на L по крайней мере один собственный вектор, которому соответствует положительное собственное число.

Теорема 1.3. *Пусть L — граница ограниченной области банахова пространства, не содержащей 0 вместе с некоторой окрестностью. Пусть вращение на L вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{\Phi} = \mathbf{I} - \mathbf{A}$ отлично от нуля.*

Тогда оператор $\mathbf{A}$ имеет на L по крайней мере один собственный вектор, которому соответствует положительное собственное число.

Доказательство. Рассмотрим в E вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{\Psi} = \mathbf{I}$. Вращение этого поля на границе каждой области, содержащей 0, равно 1. Поэтому в условиях теоремы 1.2 найдется точка $\varphi_0 \in L$ такая, что векторы φ_0 и $\varphi_0 - \mathbf{A}\varphi_0$ направлены противоположно:

$$-\mu\varphi_0 = \varphi_0 - \mathbf{A}\varphi_0 \qquad (\mu > 0),$$

откуда следует, что φ_0 — собственный вектор оператора $\mathbf{A}$, которому соответствует собственное число $1 + \mu > 0$.

В условиях теоремы 1.3 вращение поля $\Psi = \mathbf{I}$ на L равно нулю (так как поле внутри L не имеет неподвижных точек). Поэтому, если вращение поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ на L отлично от нуля, то также найдется вектор $\varphi_0 \in L$, направленный противоположно вектору $\varphi_0 - \mathbf{A}\varphi_0$.

Теоремы доказаны.

3. Собственные функции ненулевого индекса. *Индексом* собственного вектора φ_0 вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$, отвечающего ненулевому собственному числу λ_0, будем называть индекс неподвижной точки φ_0 вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$. Случай, когда φ_0 является неизолированным решением уравнения $\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi$, мы здесь не рассматриваем.

В предыдущей главе был указан случай (теорема 4.7), когда индекс неподвижной точки вычислялся по производной Фреше оператора, определяющего поле. В § 4 будут приведены примеры вычисления индекса при других условиях.

Скажем, что собственные векторы оператора $\mathbf{A}$ образуют в области $G \subset E$ *непрерывную ветвь*, проходящую через точку φ_0, если граница каждого ограниченного открытого множества, содержащего φ_0 и содержащегося в G, имеет непустое пересечение с множеством собственных векторов.

Теорема 1.4. *Пусть φ_0 — изолированный собственный вектор ненулевого индекса вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$, отвечающий собственному числу $\lambda_0 \neq 0$.*

Тогда можно указать такую область $G \subset E$, в которой собственные векторы оператора $\mathbf{A}$ образуют непрерывную ветвь, проходящую через φ_0.

Спектр оператора $\mathbf{A}$ в этом случае сплошной (содержит интервал).

Доказательство. Через G обозначим произвольную ограниченную область, не содержащую 0 и не содержащую отличных от φ_0 неподвижных точек вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$.

Пусть L_1 — граница области $G_1 \subset G$, содержащей φ_0. Так как вращение векторного поля на границе области равно сумме индексов неподвижных точек поля внутри области, то вращение поля $\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$ на L_1 равно индексу неподвижной точки φ_0 и, следовательно, отлично от нуля. Тогда в силу теоремы 1.3 на L оператор $\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$, а значит, и $\mathbf{A}$, имеет по крайней мере один собственный вектор.

Таким образом, собственные векторы образуют в G непрерывную ветвь.

Перейдем к доказательству второй части теоремы.

Векторное поле $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$ не имеет на L нулевых векторов. Поэтому найдется такое положительное число α, что

$$\left\|\varphi-\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi\right\|\geqslant\alpha \qquad (\varphi\in L).$$

Пусть

$$\sup_{\varphi\in L}\|\mathbf{A}\varphi\|=b.$$

Покажем, что тогда некоторый интервал полностью принадлежит спектру оператора $\mathbf{A}$. Действительно, если

$$\left|\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{\lambda_0}\right|<\frac{\alpha}{b},$$

то векторное поле $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}$ гомотопно полю $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$, так как оно получено возмущением последнего при помощи оператора $\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{A}$, для которого

$$\left\|\left(\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right)\mathbf{A}\varphi\right\|\leqslant\left|\frac{1}{\lambda_0}-\frac{1}{\lambda}\right|b<\alpha \qquad (\varphi\in L).$$

Значит, вращение на L поля $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}$ равно отличному от нуля вращению поля $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$. Тогда в силу принципа Лере — Шаудера поле $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}$ имеет в G неподвижную точку, а это и означает, что λ является точкой спектра (собственным числом) оператора $\mathbf{A}$.

Теорема доказана.

Рассуждения, которые мы провели выше, имеют существенный недостаток: они не позволили исследовать вопрос о количестве собственных векторов, соответствующих данному собственному числу.

Следствие из теоремы 4.8 главы II является более точным утверждением о структуре спектра. Сформулируем его в терминах собственных функций.

Теорема 1.5. *Пусть φ_0 — собственный вектор нелинейного вполне непрерывного оператора* **A**, *непрерывно дифференцируемого в окрестности точки φ_0.*

Пусть собственное число λ_0, соответствующее вектору φ_0, отлично от нуля и не является собственным числом производной Фреше оператора **A** *в точке φ_0.*

Тогда спектр оператора **A** *содержит некоторый интервал $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$, причем существует такая окрестность точки φ_0, что каждому λ из интервала $(\lambda_0 - \varepsilon, \lambda_0 + \varepsilon)$ в этой окрестности отвечает единственный собственный вектор φ_λ, причем φ_λ непрерывно зависит от λ.*

Примером оператора, непрерывно дифференцируемого в некотором шаре банахова пространства, как уже указывалось выше, может служить оператор П. С. Урысона

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int\limits_G K[s, t, \varphi(t)]\,dt$$

в пространстве C непрерывных на замкнутом ограниченном множестве G функций, если предположить, например, что функции $K(s, t, u)$ и $\frac{\partial}{\partial u} K(s, t, u)$ непрерывны по всем переменным при $s, t \in G$, $|u| \leqslant r$, где r — некоторое число.

Производная Фреше **B** оператора Урысона в точке φ_0 определится равенством

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int\limits_G \frac{\partial}{\partial u} K[s, t, \varphi_0(t)]\,\varphi(t)\,dt.$$

Вторым примером могут служить операторы Гаммерштейна

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int\limits_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\,dt,$$

если предположить, что ядро $K(s, t)$ допустимо, а функции $f(t, u)$ и $\frac{\partial}{\partial u} f(t, u)$ непрерывны. Производная Фреше в этом случае определится равенством

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K(s, t) \frac{\partial f[t, \varphi_0(t)]}{\partial u} \varphi(t)\,dt.$$

4. Малые собственные функции. Метод малых возмущений. Аналогично тому, как теорема 1.3 привела нас к доказательству теорем о непрерывных ветвях собственных векторов с нормами, достаточно большими, теоремы 1.1 и 1.2 приводят к различным утверждениям о существовании ветвей собственных векторов с малой нормой. Неудобство теорем 1.1 и 1.2 в доказательстве существования малых собственных функций заключается в том, что на основании этих теорем нельзя сделать заключений о значениях соответствующих собственных чисел, т. е. нельзя исследовать структуру спектра.

При исследовании структуры спектра оператора метод малых возмущений может применяться в трех вариантах.

Первый, более простой вариант неоднократно уже излагался. Он заключается в том, что вопрос о существовании собственных векторов, соответствующих собственным числам $\lambda_0 + \varepsilon$, рассматривается как задача о существовании по крайней мере одного нулевого вектора у возмущенного векторного поля $\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A} + \frac{\varepsilon}{(\lambda_0 + \varepsilon)\lambda_0}\mathbf{A}$ в области, не содержащей θ. В силу общих утверждений главы II мы получили на этом пути теорему 4.4: если φ_0 — собственная функция ненулевого индекса, то спектр содержит некоторый интервал.

Второй, более сложный вариант метода малых возмущений относится к задаче о малых собственных функциях.

Пусть $\mathbf{A}\theta = \theta$, причем известно, что при переходе λ через некоторое число $\lambda_0 \neq 0$ индекс неподвижной точки θ поля $\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}$ меняется. Пусть на границе L некоторого ограниченного открытого множества G, содержащего θ, поле $\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}$ не имеет нулевых векторов. Тогда и при значениях λ, близких к λ_0, поля $\mathbf{I} - \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}$ также не будут иметь на L нулевых векторов, причем вращение γ всех этих полей на L одинаково. Так как индекс неподвижной точки θ

полей $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}$ при $\lambda<\lambda_0$ и при $\lambda>\lambda_0$ будет различным, то при некоторых таких значениях λ этот индекс будет отличен от γ. Но это значит, что при этих значениях λ поле $\mathbf{I}-\frac{1}{\lambda}\mathbf{A}$ имеет в G нулевые векторы, отличные от 0. Эти нулевые векторы будут собственными векторами оператора $\mathbf{A}$.

Проведенное рассуждение позволяет доказывать существование собственных векторов, позволяет исследовать структуру спектра, однако не позволяет исследовать структуру множества собственных векторов. Поэтому ниже мы будем пользоваться другими соображениями.

Наиболее точные результаты удается получить на следующем пути.

Пусть $\mathbf{F}(x, t)$ $(x\in L,\ 0\leqslant t\leqslant 1)$ — вполне непрерывный оператор, определенный на топологическом произведении сегмента $[0, 1]$ на границу L некоторой ограниченной области $G\subset E$. Пусть вращения на L полей $\Phi_0 x = x-\mathbf{F}(x, 0)$ и $\Phi_1 x = x-\mathbf{F}(x, 1)$ различны. Тогда найдется такая точка $x\in L$ и такое число t, $0<t<1$, что

$$x=\mathbf{F}(x, t). \tag{1.6}$$

Если удается так сконструировать оператор $\mathbf{F}(x, t)$, что решение уравнения (1.6) дает собственную функцию исследуемого оператора, то изложенный метод позволяет доказывать теорему существования собственных векторов.

Этот метод ниже применяется при исследовании вполне непрерывных и не вполне непрерывных операторов.

§ 2. Законность линеаризации в задаче о точках бифуркации [29д]

1. Точки бифуркации. Рассмотрим в банаховом пространстве E уравнение

$$\varphi=\mu\mathbf{A}\varphi, \tag{2.1}$$

где $\mathbf{A}$ — непрерывный оператор, удовлетворяющий условию $\mathbf{A}\theta=\theta$.

Пусть $\mathbf{B}$ — производная Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке θ. Это значит, что оператор $\mathbf{A}$ представим в виде $\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{\Omega}$, причем оператор $\mathbf{\Omega}$ удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\varphi\|\to 0} \frac{\|\mathbf{\Omega}\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0. \tag{2.2}$$

Мы будем считать во всем параграфе, что линейный оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен. В частности, это всегда имеет место (как было показано в главе II), если вполне непрерывен оператор $\mathbf{A}$.

Лемма 2.1. *Пусть μ_0 не есть характеристическое число оператора $\mathbf{B}$. Тогда можно указать такой шар $T \subset E$ с центром в θ, в котором нет собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, которым соответствуют характеристические числа, близкие к μ_0.*

Доказательство. В условиях доказываемого утверждения оператор $(\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{B})^{-1}$ непрерывен. Пусть

$$|\mu-\mu_0| < \frac{1}{3\|(\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{B})^{-1}\|\cdot\|\mathbf{B}\|}. \tag{2.3}$$

Выберем $T \subset E$ так, чтобы из $\varphi \in T$ при выполнении условия (2.3) следовало

$$\|\mathbf{\Omega}\varphi\| \leqslant \frac{\|\varphi\|}{3|\mu|\cdot\|(\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{B})^{-1}\|}. \tag{2.4}$$

Пусть $\varphi \in T$ является решением уравнения (2.1), в котором μ удовлетворяет условию (2.3). Тогда в силу (2.3) и (2.4)

$$\begin{aligned}\|\varphi\| &\leqslant \|(\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{B})^{-1}\|\cdot\|\varphi-\mu_0\mathbf{B}\varphi\| \leqslant \\ &\leqslant |\mu-\mu_0|\cdot\|(\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{B})^{-1}\|\cdot\|\mathbf{B}\|\,\|\varphi\| + \\ &\qquad + |\mu|\cdot\|(\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{B})^{-1}\|\cdot\|\mathbf{\Omega}\varphi\| \leqslant \frac{2}{3}\|\varphi\|,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\|\varphi\| = 0$, т. е. $\varphi = \theta$.

Лемма доказана.

Из леммы 2.1 следует, что собственные векторы оператора $\mathbf{A}$ с малыми нормами могут соответствовать только характеристическим числам, достаточно близким к характеристическим числам линейного оператора $\mathbf{B}$.

Пусть μ_0 — точка бифуркации нелинейного оператора $\mathbf{A}$. Сама точка бифуркации может не быть характеристическим числом оператора $\mathbf{A}$. В случае линейных вполне непрерывных операторов точки бифуркации — это то же самое, что и характеристические числа.

В механике при отыскании точек бифуркации нелинейного оператора **A** задачу обычно линеаризуют: вместо оператора **A** рассматривают линейный оператор **B** (производную Фреше оператора **A** в точке θ), находят характеристические числа линейного оператора **B**, которые и считают точками бифуркации оператора **A**. Ф. С. Ясинский [78] пытался обосновать этот принцип линеаризации, однако допустил в своих рассуждениях ошибку (на работу Ф. С. Ясинского и на имеющуюся там ошибку наше внимание обратили А. Ю. Ишлинский и М. Г. Крейн). Для некоторых частных случаев законность линеаризации была показана Филоненко-Бородичем (в задаче об изгибе стержня постоянной жесткости и др.), А. И. Некрасовым, Н. Н. Назаровым *) аналитическими методами.

Оказывается, что линеаризация допустима не всегда.

Из леммы 2.1 следует, что точками бифуркации оператора **A** могут быть только характеристические числа оператора **B**. Однако некоторые из этих характеристических чисел могут и не быть точками бифуркации.

Пример. Рассмотрим в плоскости с прямоугольной системой координат $\{\xi_1, \xi_2\}$ оператор **A**, определенный равенством

$$\mathbf{A}\{\xi_1, \xi_2\} = \{\xi_1 - \xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2),\ \xi_2 + \xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2)\}.$$

Очевидно, оператор **B** при этом обращается в оператор **I** тождественного преобразования и будет иметь характери-

---

*) Н. Н. Назаров [46г] рассматривал общую задачу построения голоморфных относительно λ решений уравнения Гаммерштейна

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^1 K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt,$$

разлагая искомое решение в ряд по степеням (целым или дробным) $\lambda - \lambda_0$, где λ_0 — такое значение параметра, при котором решение уравнения Гаммерштейна известно. При этом в большинстве случаев предполагается, что известное решение $\varphi_0(s)$ нетривиально: $\varphi_0(s) \not\equiv 0$. Для некоторых случаев Н. Н. Назарову удается рассмотреть и задачу о точках бифуркации (в предположениях положительной определенности ядра $K(s, t)$, аналитичности функции $f(t, u)$ по u и при некоторых дополнительных ограничениях).

Метод разложения по степеням приращения параметра λ для отыскания собственных функций нелинейных интегральных уравнений с успехом впервые применил А. И. Некрасов в своих работах (см. [48]) по теории волн.

стическим числом единицу. Оператор **A** при этом совсем не имеет собственных векторов. Пусть, действительно, при некотором μ:

$$\xi_1 = \mu\xi_1 - \mu\xi_2(\xi_1^2 + \xi_2^2), \quad \xi_2 = \mu\xi_2 + \mu\xi_1(\xi_1^2 + \xi_2^2). \qquad (2.5)$$

Умножая первое из этих равенств на ξ_1, второе — на ξ_2 и складывая, получим $\xi_1^2 + \xi_2^2 = \mu(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, откуда следует, так как $\xi_1^2 + \xi_2^2 \neq 0$, что $\mu = 1$. Подставляя в (2.5) $\mu = 1$, получим, что $\xi_1 = \xi_2 = 0$.

Отметим, что в этом примере кратность характеристического числа оператора **B**, не являющегося точкой бифуркации оператора **A**, была четной. Ниже будет показано, что *каждое характеристическое число нечетной кратности оператора* **B** *является точкой бифуркации оператора* **A**.

2. Непрерывные ветви собственных векторов. Множество точек бифуркации оператора **A** дискретно, так как оно является частью дискретного множества характеристических чисел линейного вполне непрерывного оператора **B**. Пусть μ_0 — точка бифуркации оператора **A**. Пусть множество собственных векторов оператора **A**, отвечающих характеристическим числам из интервала $(\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon)$ (где ε — сколь угодно малое число), обладает тем свойством, что его пересечение с границей L каждого открытого множества, содержащего 0 и лежащего в шаре достаточно малого радиуса, непусто. Тогда будем называть это множество *непрерывной ветвью собственных векторов, отвечающей точке бифуркации* μ_0.

Из леммы 2.1 следует, что когда нормы собственных векторов из непрерывной ветви стремятся к нулю, то соответствующие характеристические числа стремятся к μ_0.

Обозначим через E_0 подпространство, состоящее из собственных векторов линейного оператора **B**, отвечающих характеристическому числу μ_0.

Если μ_0 *является точкой бифуркации оператора* **A**, *то множество* N *собственных векторов оператора* **A**, *которым соответствуют характеристические числа из интервала* $(\mu_0 - \varepsilon, \mu_0 + \varepsilon)$, *где* ε — *достаточно малое число, будет удовлетворять условию*

$$\lim_{\varphi \in N,\ \varphi} \frac{\rho(\varphi, E_0)}{\|\varphi\|} = 0. \qquad (2.6)$$

Пусть, действительно, $\varphi_n \in N$ $(n=1, 2, \ldots)$ — последовательность собственных векторов оператора $\mathbf{A}$: $\varphi_n = \mu_n \mathbf{A} \varphi_n$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 0,$$

и существует такое $\alpha > 0$, что

$$\frac{\rho(\varphi_n, E_0)}{\|\varphi_n\|} = \inf_{\psi \in E_0} \left\| \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} - \psi \right\| > \alpha \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Из леммы 2.1 следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n = \mu_0$. В силу полной непрерывности оператора $\mathbf{B}$ без ограничения общности можно считать, что векторы $\mathbf{B}\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ сходятся к некоторому вектору h. Тогда векторы $\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ сходятся к вектору $\mu_0 h$, так как

$$\lim_{n\to\infty} \left\| \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} - \mu_0 h \right\| \leqslant \lim_{n\to\infty} \mu_n \frac{\|\mathbf{A}\varphi_n - \mathbf{B}\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} + \\ + \lim_{n\to\infty} \mu_n \left\| \mathbf{B}\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} - h \right\| + \lim_{n\to\infty} |\mu_n - \mu_0| \cdot \|h\| = 0.$$

Очевидно, $\|h\| = \dfrac{1}{|\mu_0|}$. Так как оператор $\mathbf{B}$ непрерывен, то

$$h = \mu_0 \mathbf{B} h.$$

Значит, $h \in E_0$. Тогда при больших значениях n

$$\frac{\rho(\varphi_n, E_0)}{\|\varphi_n\|} \leqslant \left\| \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} - \mu_0 h \right\| < \alpha.$$

Мы пришли к противоречию.

Если, в частности, N является непрерывной ветвью собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, то (2.6) означает, что в точке 0 конечномерное подпространство E_0 «касательно» к этой ветви.

3. Случай вполне непрерывного оператора. Для простоты предположим вначале, что оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен. Рассмотрим тогда в пространстве E вполне непрерывные векторные поля

$$\Phi_\mu = \mathbf{I} - \mu \mathbf{A}. \tag{2.7}$$

Пусть μ_0 — характеристическое число нечетной кратности оператора **B**. Тогда в силу леммы 2.1 при любом фиксированном достаточно малом $\varepsilon > 0$ найдется такой шар T с центром в θ, в котором векторные поля $\Phi_{\mu_0-\varepsilon}$ и $\Phi_{\mu_0+\varepsilon}$ будут иметь нулевые векторы только в точке θ. Вращения этих полей на границе L любого открытого множества, содержащегося в T и содержащего θ, имеют в силу теоремы 4.7 из главы II различные знаки. Значит, поля $\Phi_{\mu_0-\varepsilon}$ и $\Phi_{\mu_0+\varepsilon}$ не могут быть гомотопны. Но тогда при некотором значении μ из интервала $(\mu_0-\varepsilon, \mu_0+\varepsilon)$ поле Φ_μ имеет на L нулевой вектор, а это означает, что на L есть собственный вектор оператора **A**, которому соответствует характеристическое число, близкое к μ_0.

Сформулируем полученное утверждение в виде теоремы.

Теорема 2.1. *Пусть* **A** — *вполне непрерывный оператор, имеющий в точке* θ *дифференциал Фреше* **B** *и удовлетворяющий условию* $\mathbf{A}\theta = \theta$.

Тогда каждое характеристическое число μ_0 *нечетной кратности линейного оператора* **B** *является точкой бифуркации оператора* **A**, *причем этой точке бифуркации соответствует непрерывная ветвь собственных векторов оператора* **A**.

4. Примеры. Как было выше показано, интегральные нелинейные операторы П. С. Урысона, Гаммерштейна, А. М. Ляпунова при достаточно широких предположениях имеют в нуле θ (пространств C или L^p) дифференциал Фреше **B** — линейный интегральный оператор:

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int\limits_G K_1(s, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{2.8}$$

Из теоремы 2.1 следует, что каждое характеристическое число нечетной кратности ядра $K_1(s, t)$ является точкой бифуркации соответствующего нелинейного интегрального оператора П. С. Урысона, Гаммерштейна или А. М. Ляпунова.

Примерами ядер, все собственные числа которых имеют кратность 1 (простые собственные числа), могут служить функции Грина краевых задач для уравнений Штурма — Лиувилля, осцилляционные ядра [14]. Как известно, наименьшее характеристическое число точечно положительного ядра также простое (более общую теорему М. Г. Крейна — М. А. Рутмана мы доказываем ниже, в главе V).

Как было показано во введении к настоящей главе, отыскание критических сил в задаче об изгибе стержня переменной жесткости $\rho(s)$ приводит к отысканию точек бифуркации нелинейного интегрального уравнения $\varphi = \mu \mathbf{A}\varphi$, где

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \rho(s)\sqrt{1 - \left[\int_0^1 K'_s(s, t)\varphi(t)\,dt\right]^2} \int_0^1 K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

причем

$$K(s, t) = \begin{cases} s(1-t) & \text{при} \quad s \leqslant t, \\ t(1-s) & \text{при} \quad s \geqslant t. \end{cases}$$

Оператор $\mathbf{A}$ действует в пространстве C и является вполне непрерывным оператором. Дифференциал Фреше $\mathbf{B}\varphi$ этого оператора в точке θ имеет вид

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \rho(s)\int_0^1 K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

что проверяется непосредственным подсчетом. Пусть, действительно,

$$\mathbf{B}_1\varphi(s) = \int_0^1 K'_s(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

тогда

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \mathbf{B}\varphi(s)\sqrt{1 - [\mathbf{B}_1\varphi(s)]^2}.$$

Оператор $\mathbf{B}_1$ непрерывен, так что

$$\|\mathbf{B}_1\varphi(s)\| \leqslant \|\mathbf{B}_1\| \cdot \|\varphi(s)\| = \|\mathbf{B}_1\| \cdot \max_{0 \leqslant s \leqslant 1} |\varphi(s)|.$$

Очевидно,

$$\|\mathbf{B}\varphi - \mathbf{A}\varphi\| \leqslant \|\mathbf{B}\varphi\| \cdot \|\mathbf{B}_1\varphi\|^2.$$

Из последнего неравенства и вытекает, что оператор $\mathbf{B}$ — это производная Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке θ.

Все характеристические числа линейного оператора $\mathbf{B}$ совпадают с собственными числами уравнения Штурма — Лиувилля $y''(s) + \lambda\rho(s)y(s) = 0$ с граничными условиями $y(0) = y(1) = 0$. Все собственные числа будут простыми, так что в силу теоремы 2.1 все они будут точками бифуркации нелинейного интегрального уравнения. Таким образом, критические силы в задаче об изгибе стержня переменной жесткости $\rho(s)$ могут быть определены по линейному дифференциальному уравнению $y'' = -\lambda\rho(s)y$.

5. Структура спектра. Как это следует из теории Рисса (см. главу I, § 1), у линейных вполне непрерывных операторов спектр всегда дискретен. У нелинейных операторов спектр тоже может быть дискретен; например (М. М. Вайнберг), дискретен спектр оператора

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_0^{2\pi} \sin s \cdot \sin t\,[\varphi(t) + \varphi^2(t)]\,dt.$$

Однако следует считать, что в «общем случае» спектр нелинейного оператора сплошной. Для операторов Гаммерштейна с симметричными ядрами и аналитическими нелинейностями Н. Н. Назаров доказал при весьма широких предположениях, что спектр заполняет интервалы.

В первом параграфе настоящей главы были указаны общие теоремы о заполнении спектром интервалов, вытекающие из топологических соображений. Приведем еще одну теорему *).

Теорема 2.2. *Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, имеющий в точке θ дифференциал Фреше $\mathbf{B}$ и удовлетворяющий условию $\mathbf{A}\theta = \theta$.*

Пусть μ_0 — характеристическое число нечетной кратности линейного оператора $\mathbf{B}$. Пусть на границе L некоторого ограниченного открытого множества G, содержащего θ, вполне непрерывное векторное поле $\Phi_{\mu_0} = \mathbf{I} - \mu_0\mathbf{A}$ не имеет нулевых векторов.

Тогда спектр оператора $\mathbf{A}$ сплошной.

Доказательство. Пусть γ — вращение поля Φ_{μ_0} на L. Выберем положительное число ε_0 так, чтобы поля

$$\Phi_{\mu_0+t\varepsilon_0} = \mathbf{I} - (\mu_0 + t\varepsilon_0)\,\mathbf{A}$$

при $-1 \leqslant t \leqslant 1$ не имели на L нулевых векторов. Вращение всех полей $\Phi_{\mu_0+t\varepsilon_0}$ $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$, очевидно, также будет равно γ.

---

*) См. также [49е, ж], [60].

При $t \neq 0$ точка θ будет изолированной неподвижной точкой поля $\mathbf{\Phi}_{\mu_0+t\varepsilon_0}$, причем индекс ее будет равен по абсолютной величине единице, а знак индекса будет различным при значениях t разного знака. Для определенности будем считать, что при $0 < t \leqslant 1$ этот индекс отличен от γ.

Так как вращение поля на L равно сумме индексов неподвижных точек, то в множестве G найдется для каждого t, $0 < t \leqslant 1$, еще по крайней мере одна неподвижная точка поля $\mathbf{\Phi}_{\mu_0+t\varepsilon}$, кроме θ. Это и означает, что все числа $\mu_0 + t\varepsilon_0$, $0 < t \leqslant 1$, будут принадлежать спектру оператора $\mathbf{A}$.

Теорема доказана.

В частности, условия теоремы 2.2 будут выполнены, если точка θ является изолированной неподвижной точкой поля $\mathbf{I} - \mu_0\mathbf{A}$. В § 4 доказаны теоремы, в которых даны признаки изолированности неподвижной точки. Эти теоремы, таким образом, можно рассматривать и как теоремы об условиях сплошности спектра.

Расположим характеристические числа нечетной кратности линейного оператора $\mathbf{B}$ в порядке возрастания

$$\ldots < \mu_{k-1} < \mu_k < \mu_{k+1} < \ldots$$

Пусть на границе L некоторого открытого множества, содержащего θ, вполне непрерывные векторные поля $\mathbf{\Phi}_\mu = \mathbf{I} - \mu\mathbf{A}$ не имеют нулевых векторов при всех μ из интервала (μ_{k-1}, μ_{k+1}).

Тогда один из интервалов (μ_{k-1}, μ_k) или (μ_k, μ_{k+1}) полностью принадлежит спектру оператора $\mathbf{A}$.

Утверждение это доказывается теми же рассуждениями, что и теорема 2.2.

Еще одно близкое утверждение вытекает из теоремы 2.2.

Пусть характеристическое число μ_k нечетной кратности оператора $\mathbf{B}$ есть изолированная точка спектра оператора $\mathbf{A}$. Тогда множество собственных векторов оператора $\mathbf{A}$, соответствующих характеристическому числу μ_k, образует непрерывную ветвь, пересекающую границу всех ограниченных открытых множеств, содержащих θ.

Иначе говоря, в этом случае непрерывная ветвь собственных векторов, отвечающих характеристическому числу μ_k, «выходит из θ и уходит в бесконечность».

6. Общий случай *). В § 1 главы III мы ввели понятие резольвенты $\mathbf{R}_\alpha$ нелинейного оператора $\mathbf{D}$, удовлетворяющего в некотором шаре $T_r \subset E$ условию Липшица

$$\|\mathbf{D}\varphi - \mathbf{D}\psi\| \leqslant q\|\varphi - \psi\| \qquad (\varphi, \psi \in T). \tag{2.9}$$

По определению, для тех f, на которых оператор $\mathbf{R}_\alpha$ определен,

$$\mathbf{R}_\alpha f = \alpha \mathbf{D} \mathbf{R}_\alpha f + f.$$

Мы будем здесь рассматривать случай, когда $\mathbf{D}\theta = \theta$. Тогда и $\mathbf{R}_\alpha \theta = \theta$ при всех значениях α.

Напомним некоторые установленные ранее утверждения о резольвенте для этого случая ($\mathbf{D}\theta = \theta$).

а) Резольвента $\mathbf{R}_\alpha$ определена при $|\alpha| < \frac{1}{q}$ в шаре радиуса $r(1 - |\alpha| q)$.

---

*) Под общим мы понимаем здесь случай, когда не вполне непрерывный оператор $\mathbf{A}$ в точке θ имеет вполне непрерывную производную Фреше. Этот случай для нас представляет интерес с той точки зрения, что он охватывает интегростепенные ряды А. М. Ляпунова. Отметим, впрочем, что излагаемый метод позволяет рассмотреть и случай, когда производная Фреше исследуемого оператора не является вполне непрерывным оператором, но имеет изолированную точку спектра, которой отвечает нечетномерное инвариантное подпространство.

Более того, излагаемый в настоящей главе топологический метод позволяет исследовать уравнения, в которые параметр λ входит нелинейно. Пусть непрерывный оператор $\mathbf{A}(\lambda, \varphi)$ определен в некоторой окрестности нуля θ подпространства E, причем производная Фреше оператора $\mathbf{A}(\lambda, \varphi)$ имеет вид $\lambda\mathbf{B}$, где линейный оператор $\mathbf{B}$ от значений параметра λ не зависит. Пусть характеристическое число λ_0 линейного оператора $\mathbf{B}$ нечетнократно (для простоты предположим, что оператор $\mathbf{A}$, а значит, и $\mathbf{B}$, вполне непрерывен). *Тогда решения* φ_λ *уравнения*

$$\varphi = \mathbf{A}(\lambda, \varphi), \tag{1}$$

отвечающие значениям параметра λ, *близким к* λ_0, *образуют в окрестности* θ *непрерывную ветвь, причем* $\lambda \to \lambda_0$, *когда* $\|\varphi_\lambda\| \to 0$.

Примером уравнения вида (1) может служить уравнение А. И. Некрасова [48] из теории волн тяжелой жидкости

$$\varphi(s) = \lambda \int_0^{2\pi} K(s, t) \frac{\sin\varphi(t)}{1 + \lambda \int\limits_0^t \sin\varphi(u)\,du}\,dt, \tag{2}$$

b) Справедливы неравенства

$$\|\mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2\| \leqslant \frac{1}{1-|\alpha| q}\|f_1 - f_2\| \qquad (2.10)$$
$$(\|f_1\|,\ \|f_2\| \leqslant r(1-|\alpha| q))$$

и

$$\|\mathbf{R}_\alpha f_1 - \mathbf{R}_\alpha f_2\| \geqslant \frac{1}{1+|\alpha| q}\|f_1 - f_2\| \qquad (2.11)$$
$$(\|f_1\|,\ \|f_2\| \leqslant r(1-|\alpha| q)).$$

c) Для элементов из шара радиуса

$$r \min(1-|\alpha| q,\ 1-|\beta| q)$$

справедливо неравенство

$$\|\mathbf{R}_\alpha f - \mathbf{R}_\beta f\| \leqslant \frac{q\|f\|}{(1-|\alpha| q)(1-|\beta| q)}|\alpha - \beta|. \qquad (2.12)$$

В частности, когда $\beta = 0$, неравенство (2.12) принимает вид

$$\|\mathbf{R}_\alpha f - f\| \leqslant \frac{|\alpha|\cdot q \cdot \|f\|}{1-|\alpha|\cdot q} \quad (\|f\| \leqslant r(1-|\alpha| q)). \qquad (2.13)$$

Рассмотрим нелинейный оператор $\mathbf{L}$ вида

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} + \mathbf{D}, \qquad (2.14)$$

где $\mathbf{D}$ — оператор, удовлетворяющий условию (2.9) в шаре T_r радиуса r, а $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный линейный оператор. Будем предполагать при этом, что $\mathbf{D}\theta = \theta$.

где

$$K(s, t) = \frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin ns \cdot \sin nt.$$

Можно показать, что оператор $\mathbf{A}(\lambda, \varphi)$, определенный правой частью уравнения (2), в некотором шаре пространства C будет вполне непрерывным. Производная Фреше оператора $\mathbf{A}(\lambda, \varphi)$ в точке θ будет иметь вид $\lambda\mathbf{B}$, где

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_0^{2\pi} K(s, t)\varphi(t)\,dt.$$

Все характеристические числа $3n$ ядра $K(s, t)$ нечетнократны. Следовательно, все они будут точками бифуркации для оператора $\mathbf{A}(\lambda, \varphi)$, т. е. при некоторых значениях параметра λ, близких к числам $3n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, уравнение (2) имеет ненулевые решения.

Нас будет интересовать вопрос о точках бифуркации оператора $\mathbf{L}$.

Для установления существования собственных векторов у оператора $\mathbf{L}$ на границе Γ некоторого открытого множества мы воспользуемся той же идеей, которая в простейшем варианте была использована при доказательстве теоремы 2.1. Мы так сконструируем на Γ два вполне непрерывных векторных поля различного вращения и непрерывную деформацию одного поля в другое, чтобы существование нулевого вектора при этой деформации было эквивалентно существованию собственного вектора у оператора $\mathbf{L}$ на Γ.

Пусть μ не является характеристическим числом линейного вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$. Тогда найдется такое число $\gamma > 0$, что

$$\|\psi - \mu\mathbf{A}\psi\| \geqslant \gamma\|\psi\|. \tag{2.15}$$

Рассмотрим вполне непрерывное поле $\mathbf{\Phi}$:

$$\mathbf{\Phi}\psi = \psi - \mathbf{R}_\mu(\mu\mathbf{A}\psi), \tag{2.16}$$

где $\mathbf{R}_\mu$ — резольвента оператора $\mathbf{D}$. Это поле можно рассматривать в силу а) в шаре радиуса $r(1-\mu\|\mathbf{A}\|\cdot q)$.

Пусть

$$q < \frac{\gamma}{|\mu|\gamma + \mu^2\|\mathbf{A}\|}. \tag{2.17}$$

Из этого неравенства следует, что $1-|\mu|q > 0$. Покажем, что в этом случае поле $\mathbf{\Phi}$ имеет в шаре T радиуса $\frac{r(1-|\mu|q)}{|\mu|\cdot\|\mathbf{A}\|}$ нулевой вектор только в точке θ и что поле $\mathbf{\Phi}$ на границе Γ каждого открытого множества, содержащего θ и содержащегося в шаре T, гомотопно полю $\mathbf{I}-\mu\mathbf{A}$.

Для этого рассмотрим поля

$$\mathbf{\Phi}_t\psi = \psi - [t\mathbf{R}_\mu(\mu\mathbf{A}\psi) + (1-t)\mu\mathbf{A}\psi] \qquad (\psi \in \Gamma) \tag{2.18}$$

и покажем, что при $0 \leqslant t \leqslant 1$ они не имеют на Γ нулевых векторов.

Из (2.18) следует:

$$\|\mathbf{\Phi}_t\psi\| \geqslant \|\psi - \mu\mathbf{A}\psi\| - \|\mathbf{R}_\mu(\mu\mathbf{A}\psi) - \mu\mathbf{A}\psi\|,$$

откуда в силу (2.15) и (2.13)

$$\|\mathbf{\Phi}_t\psi\| \geqslant \gamma\|\psi\| - \frac{\mu^2 q\|\mathbf{A}\|}{1-|\mu|q}\|\psi\| = \frac{\gamma - (|\mu|\gamma + \mu^2\|\mathbf{A}\|)q}{1-|\mu|q}\|\psi\|$$

и в силу (2.17)

$$\|\Phi_t\psi\| > 0 \qquad (\psi \in \Gamma,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Таким образом, вращение поля $\mathbf{\Phi}$ на Γ такое же, как и вращение поля $\mathbf{I}-\mu\mathbf{A}$.

Пусть μ_0 — характеристическое число оператора $\mathbf{A}$ нечетной кратности, а ε — некоторое достаточно малое положительное число. Если в интервале $(\mu_0-\varepsilon,\ \mu_0+\varepsilon)$ нет характеристических чисел оператора $\mathbf{A}$, отличных от μ_0, то вращения векторных полей $\mathbf{I}-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{A}$ и $\mathbf{I}-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{A}$ на Γ будут различны.

Рассмотрим векторные поля $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_t$:

$$\widetilde{\mathbf{\Phi}}_t\psi = \psi - \mathbf{R}_{\mu_0+(1-2t)\varepsilon}\{[\mu_0+(1-2t)\varepsilon]\,\mathbf{A}\psi\}, \tag{2.19}$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Они будут определены в силу а) на шарах радиуса r_t:

$$r_t = \frac{1-|\mu_0+(1-2t)\varepsilon|\,q}{|\mu_0+(1-2t)\varepsilon|\cdot\|\mathbf{A}\|}\,r \geqslant \frac{1-(|\mu_0|+\varepsilon)\,q}{(|\mu_0|+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{A}\|}\,r. \tag{2.20}$$

Мы будем рассматривать поля (2.19) в шаре T радиуса

$$\rho = \frac{1-(|\mu_0|+\varepsilon)\,q}{(|\mu_0|+\varepsilon)\cdot\|\mathbf{A}\|}\,r.$$

При этом будем считать, что

$$q(|\mu_0|+\varepsilon) < 1.$$

Легко видеть, что поля $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_t$ вполне непрерывны.

Пусть, кроме этого,

$$q < \frac{\|(\mathbf{I}-(\mu_0+\varepsilon)\,\mathbf{A})^{-1}\|^{-1}}{|\mu_0+\varepsilon|\cdot\|(\mathbf{I}-(\mu_0+\varepsilon)\,\mathbf{A})^{-1}\|^{-1}+(\mu_0+\varepsilon)^2\,\|\mathbf{A}\|} \tag{2.21}$$

и

$$q < \frac{\|(\mathbf{I}-(\mu_0-\varepsilon)\,\mathbf{A})^{-1}\|^{-1}}{|\mu_0-\varepsilon|\cdot\|(\mathbf{I}-(\mu_0-\varepsilon)\,\mathbf{A})^{-1}\|^{-1}+(\mu_0-\varepsilon)^2\|\mathbf{A}\|}. \tag{2.22}$$

Тогда, как было показано выше, поля $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_0$ и $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_1$ гомотопны на Γ соответственно полям $\mathbf{I}-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{A}$ и $\mathbf{I}-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{A}$, в силу чего их вращения на Γ различны.

Покажем теперь, что вектор-функция $\widetilde{\mathbf{\Phi}}_t\psi$ $(0 \leqslant t \leqslant 1;\ \psi \in T)$ непрерывна по t равномерно относительно $\psi \in T$.

Действительно,

$$\widetilde{\Phi}_{t_1}\psi - \widetilde{\Phi}_{t_2}\psi = \mathbf{J}_1\psi + \mathbf{J}_2\psi,$$

где

$$\mathbf{J}_1\psi = \mathbf{R}_{\mu_0+(1-2t_2)\varepsilon}\{[\mu_0+(1-2t_1)\varepsilon]\mathbf{A}\psi\} - \\ - \mathbf{R}_{\mu_0+(1-2t_1)\varepsilon}\{[\mu_0+(1-2t_1)\varepsilon]\mathbf{A}\psi\}$$

и

$$\mathbf{J}_2\psi = \mathbf{R}_{\mu_0+(1-2t_2)\varepsilon}\{[\mu_0+(1-2t_2)\varepsilon]\mathbf{A}\psi\} - \\ - \mathbf{R}_{\mu_0+(1-2t_2)\varepsilon}\{[\mu_0+(1-2t_1)\varepsilon]\mathbf{A}\psi\}.$$

В силу (2.12)

$$\|\mathbf{J}_1\psi\| \leqslant \frac{2\varepsilon\,|\mu_0+(1-2t_1)\varepsilon|\cdot\|\mathbf{A}\psi\|\cdot|t_1-t_2|\,q}{[1-|\mu_0+(1-2t_1)\varepsilon|\,q]\cdot[1-|\mu_0+(1-2t_2)\varepsilon|\,q]} \leqslant \\ \leqslant a_1|t_1-t_2|,$$

где

$$a_1 = \frac{2\varepsilon(|\mu_0|+\varepsilon)\|\mathbf{A}\|q)}{[1-(|\mu_0|+\varepsilon)q]^2}\rho.$$

В силу (2.10)

$$\|\mathbf{J}_2\psi\| \leqslant \frac{2\varepsilon\|\mathbf{A}\psi\|\cdot|t_1-t_2|}{1-|\mu_0+(1-2t_2)|\,q} \leqslant a_2|t_1-t_2|,$$

где

$$a_2 = \frac{2\varepsilon\|\mathbf{A}\|}{1-(|\mu_0|+\varepsilon)\,q}\rho.$$

Таким образом,

$$\|\widetilde{\Phi}_{t_1}\psi - \widetilde{\Phi}_{t_2}\psi\| \leqslant (a_1+a_2)\cdot|t_1-t_2| \qquad (\|\psi\|\leqslant\rho),$$

откуда и следует равномерная непрерывность по t.

Так как $\widetilde{\Phi}_0$ и $\widetilde{\Phi}_1$ не могут быть гомотопны, то на Γ найдется такая точка ψ_0, что при некотором t_0, $0<t_0<1$,

$$\widetilde{\Phi}_{t_0}\psi_0 = \theta.$$

Иначе говоря,

$$\psi_0 = \mathbf{R}_{\mu_0+(1-2t_0)\varepsilon}\{[\mu_0+(1-2t_0)\varepsilon]\mathbf{A}\psi_0\}.$$

По определению резольвенты оператора $\mathbf{D}$ последнее равенство означает, что

$$\psi_0 = [\mu_0+(1-2t_0)\varepsilon](\mathbf{A}\psi_0+\mathbf{D}\psi_0).$$

Нами доказано, что *собственные векторы оператора* $\mathbf{A}+\mathbf{D}$ *образуют в окрестности* θ *непрерывные ветви, если* *оператор* $\mathbf{A}$ *имеет характеристические числа нечетной кратности и если* q *достаточно мало.*

Наиболее интересен случай, когда оператор $\mathbf{D}$ удовлетворяет условию Липшица в следующей форме:

$$\|\mathbf{D}\varphi - \mathbf{D}\psi\| \leqslant q(\rho)\|\varphi - \psi\| \qquad (\|\varphi\|,\ \|\psi\| \leqslant \rho), \tag{2.23}$$

где

$$\lim_{\rho \to 0} q(\rho) = 0. \tag{2.24}$$

В этом случае, как легко видеть, доказанное выше утверждение допускает уточнение.

Теорема 2.3. *Пусть оператор* $\mathbf{L}$ ($\mathbf{L}\theta = \theta$) *представим в виде*

$$\mathbf{L} = \mathbf{A} + \mathbf{D},$$

где $\mathbf{A}$ — *линейный вполне непрерывный оператор, а оператор* $\mathbf{D}$ *удовлетворяет условиям* (2.23) *и* (2.24).

Тогда каждое характеристическое число нечетной кратности оператора $\mathbf{A}$ *будет точкой бифуркации оператора* $\mathbf{L}$. *Этой точке бифуркации соответствует в окрестности* θ *непрерывная ветвь собственных векторов оператора* $\mathbf{L}$.

Отметим, что утверждение теоремы 2.3 сохраняет силу и для случая, когда вполне непрерывный оператор $\mathbf{A}$ нелинеен. В этом случае точками бифуркации оператора $\mathbf{L}$ будут характеристические числа нечетной кратности производной Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке θ. В такой общей форме (являющейся также обобщением теоремы 2.1) утверждение о точках бифуркации доказывается аналогично. При этом, естественно, выкладка несколько усложняется.

7. Оператор А. М. Ляпунова. В качестве примера рассмотрим оператор А. М. Ляпунова (см. § 3 главы I) в пространстве функций, непрерывных на ограниченном замкнутом множестве G конечномерного пространства.

Как указано в § 3 главы I, этот оператор $\mathbf{L}$ можно представить в виде

$$\mathbf{L}\varphi = \mathbf{A}\varphi + \mathbf{D}(\varphi,\ \psi),$$

где

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt,$$

а оператор $\mathbf{D}$ удовлетворяет в единичном шаре пространства C условию Липшица (глава I, условие (3.20))

$$\|\mathbf{D}(\varphi_1;\ \psi)-\mathbf{D}(\varphi_2;\ \psi)\| \leqslant a(\omega+\omega')\|\varphi_1-\varphi_2\|,$$

где

$$\|\varphi_1\| \leqslant \omega, \quad \|\varphi_2\| \leqslant \omega, \quad \|\psi\| \leqslant \omega'.$$

Из утверждений предыдущего пункта следует, что при достаточно малых по норме ψ оператор Ляпунова имеет ветви собственных векторов, если ядро $K(s,\ t)$ имеет нечетнократные характеристические числа.

Если интегростепенной ряд А. М. Ляпунова не зависит от функционального параметра ψ, то для оператора $\mathbf{D}$ выполнены условия (2.23) и (2.24). В этом случае в силу теоремы 2.3 каждое характеристическое число нечетной кратности ядра $K(s,\ t)$ будет точкой бифуркации оператора $\mathbf{L}$, причем каждой такой точке бифуркации соответствует непрерывная ветвь собственных функций.

§ 3. Асимптотически линейные операторы [29г]

1. Асимптотические точки бифуркации. Соображения, аналогичные проведенным в предыдущем параграфе, позволяют исследовать множество собственных векторов для операторов, близких к линейным на элементах большой нормы.

Скажем, что нелинейный оператор $\mathbf{A}$, действующий в банаховом пространстве E, *асимптотически линеен*, если для некоторого линейного оператора $\mathbf{B}$

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty} \frac{\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{B}\varphi\|}{\|\varphi\|}=0. \tag{3.1}$$

Оператор $\mathbf{B}$ будем называть асимптотической производной оператора $\mathbf{A}$.

Лемма 3.1. *Пусть оператор* $\mathbf{A}$ *вполне непрерывен. Тогда и оператор* $\mathbf{B}$ *будет вполне непрерывным.*

Действительно, если $\mathbf{B}S$ — образ единичной сферы $S\subset E$ — не компактен, то найдутся такое число $\delta>0$ и такая последовательность $h_1,\ h_2,\ \ldots \in S$, что

$$\|\mathbf{B}(h_i-h_j)\| > \delta \qquad (i\neq j;\ i,\ j=1,\ 2,\ \ldots).$$

В силу (3.1) можно указать такое ρ_0, что

$$\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{B}\varphi\| \leqslant \frac{\delta}{3}\rho_0 \qquad (\|\varphi\|=\rho_0).$$

Тогда

$$\|\mathbf{A}(\rho_0 h_i)-\mathbf{A}(\rho_0 h_j)\| \geqslant \rho_0\|\mathbf{B}(h_i-h_j)\| - \|\mathbf{A}(\rho_0 h_i)-\rho_0\mathbf{B}h_i\| - \\ - \|\mathbf{A}(\rho_0 h_j)-\rho_0\mathbf{B}h_j\| > \frac{\delta}{3}\rho_0$$

и, следовательно, из последовательности $\mathbf{A}(\rho_0 h_i)$ $(i=1, 2, \ldots)$ нельзя выбрать сходящуюся подпоследовательность, что означает, что оператор $\mathbf{A}$ не вполне непрерывен.

Скажем, что μ_0 является *асимптотической точкой бифуркации* оператора $\mathbf{A}$, если для любого $\varepsilon>0$ можно указать такой шар T с центром в θ, что на границе Γ каждого ограниченного открытого множества, содержащего T, есть собственные векторы оператора $\mathbf{A}$, которым соответствуют характеристические числа из интервала $(\mu_0-\varepsilon,\ \mu_0+\varepsilon)$.

Совокупность собственных векторов образует при этом *непрерывную ветвь, уходящую в бесконечность.*

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *вполне непрерывный асимптотически линейный оператор.*

Тогда каждое характеристическое число нечетной кратности асимптотической производной $\mathbf{B}$ *оператора* $\mathbf{A}$ *будет асимптотической точкой бифуркации оператора* $\mathbf{A}$, *которой отвечает уходящая в бесконечность непрерывная ветвь собственных векторов.*

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon>0$.

Пусть μ_0 — характеристическое число нечетной кратности асимптотической производной $\mathbf{B}$ оператора $\mathbf{A}$. Можно считать, что на сегменте $[\mu_0-\varepsilon,\ \mu_0+\varepsilon]$ нет характеристических чисел оператора $\mathbf{B}$, отличных от μ_0. Операторы $[\mathbf{I}-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{B}]^{-1}$ и $[\mathbf{I}-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{B}]^{-1}$ будут поэтому ограничены, и найдется такое $\alpha>0$, что

$$\left.\begin{aligned} &\|\varphi-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{B}\varphi\| \geqslant \alpha\|\varphi\|,\\ &\|\varphi-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{B}\varphi\| \geqslant \alpha\|\varphi\| \qquad (\varphi\in E). \end{aligned}\right\} \tag{3.2}$$

Обозначим через T шар такого радиуса ρ, что при $\|\varphi\|\geqslant\rho$

$$\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{B}\varphi\| \leqslant \frac{\alpha}{2(|\mu_0|+\varepsilon)}\|\varphi\|. \tag{3.3}$$

Пусть Γ — граница ограниченного открытого множества, содержащего шар T. На Γ векторные поля $\varphi-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{A}\varphi$ и $\varphi-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{A}\varphi$ в силу (3.2) и (3.3) не имеют нулевых векторов и гомотопны соответственно полям $\varphi-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{B}\varphi$ и $\varphi-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{B}\varphi$. Вращение линейных вполне непрерывных векторных полей $\varphi-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{B}\varphi$ и $\varphi-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{B}\varphi$ различно в силу теоремы 4.6 главы II, так как μ_0 — характеристическое число нечетной кратности оператора $\mathbf{B}$. Тогда будут различными и вращения на Γ полей $\varphi-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{A}\varphi$ и $\varphi-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{A}\varphi$. Поэтому (см. стр. 189) найдется такая точка $\varphi_0\in\Gamma$, в которой векторы $\varphi_0-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{A}\varphi$ и $\varphi_0-(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{A}\varphi$ направлены противоположно. Значит, найдется такое $\beta>0$, что

$$\varphi_0-(\mu_0-\varepsilon)\mathbf{A}\varphi_0+\beta\varphi_0-\beta(\mu_0+\varepsilon)\mathbf{A}\varphi_0=0,$$

откуда

$$\varphi_0=\left(\mu_0+\frac{1-\beta}{1+\beta}\varepsilon\right)\mathbf{A}\varphi_0.$$

Таким образом, φ_0 является собственным вектором оператора $\mathbf{A}$, которому отвечает характеристическое число из сегмента $[\mu_0-\varepsilon,\ \mu_0+\varepsilon]$, так как $\left|\frac{1-\beta}{1+\beta}\right|<1$.

Теорема доказана.

Отметим, что кроме характеристических чисел оператора $\mathbf{B}$ оператор $\mathbf{A}$ не может иметь других асимптотических точек бифуркации. Характеристические числа четной кратности оператора $\mathbf{B}$ могут не быть асимптотическими точками бифуркации оператора $\mathbf{A}$.

В качестве примера рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\int_G K(s,\ t)f[t,\ \varphi(t)]\,dt, \tag{3.4}$$

где G — множество конечной или бесконечной меры.

Пусть ядро $K(s,\ t)$ $(s,\ t\in G)$ удовлетворяет условию

$$\int_G\int_G K^2(s,\ t)\,ds\,dt<\infty. \tag{3.5}$$

Пусть функция $f(t, u)$ определяет действующий в L^2 оператор $f u$, более того, удовлетворяет условию

$$|f(t, u)-u| \leqslant \sum_{k=1}^{n} S_k(t)\,|u|^{1-p_k}+D(t) \tag{3.6}$$

$$(t \in G, \ -\infty < u < \infty),$$

где

$$S_k(t) \in L^{\frac{2}{p_k}}, \quad 0 < p_k < 1 \quad (k=1, \ldots, n); \quad D(t) \in L^2.$$

Тогда каждое характеристическое число нечетной кратности ядра $K(s, t)$ будет асимптотической точкой бифуркации оператора (3.4), которой соответствует уходящая в бесконечность непрерывная ветвь собственных векторов.

Доказательство. В силу условия (3.5) оператор $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\varphi(s)=\int_G K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

действует в L^2 и вполне непрерывен. Оператор $\mathbf{f}\varphi(s)=f[s, \varphi(s)]$ при выполнении условия (3.6) будет непрерывным и ограниченным в L^2. Следовательно, оператор $\mathbf{A}=\mathbf{Bf}$, определенный равенством (3.4), действует в L^2 и вполне непрерывен.

Оператор $\mathbf{B}$ будет асимптотической производной оператора $\mathbf{A}$. Действительно, в силу (3.6)

$$\frac{\|\mathbf{B}\varphi-\mathbf{A}\varphi\|}{\|\varphi\|}=\frac{1}{\|\varphi\|}\left\{\int_G\left[\int_G K(s, t)\,[f[t, \varphi, (t)]-\varphi(t)]\,dt\right]^2 ds\right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\left\{\int_G\int_G K^2(s, t)\,ds\,dt\right\}^{\frac{1}{2}}}{\|\varphi\|}\left\{\sum_{k=1}^{n}\left[\int_G S_k^{\frac{2}{p_k}}(t)\,dt\right]^{\frac{p_k}{2}}\|\varphi\|^{1-p_k}+\right.$$

$$\left.+\left[\int_G D^2(t)\,dt\right]^{\frac{1}{2}}\right\}.$$

Таким образом, выполнены условия теоремы 3.1.

Теорема доказана.

2. Признак сплошности спектра. Предположим теперь, что вполне непрерывный оператор $\mathbf{A}(\mathbf{A}\theta=\theta)$ не только асимптотически линеен, но и дифференцируем в нуле θ пространства E. Через $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_1$ обозначим соответственно асимптотическую производную оператора и производную Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке θ. Операторы $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}_1$ в силу леммы 4.1 главы II и леммы 3.1 настоящей главы будут вполне непрерывны.

Простые рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 2.2, приводят к следующему утверждению.

Теорема 3.2. *Характеристическое число μ нечетной кратности одного из операторов $\mathbf{B}$ или $\mathbf{B}_1$ может быть изолированной точкой спектра оператора $\mathbf{A}$ только тогда, когда μ является характеристическим числом и оператора $\mathbf{B}$, и оператора $\mathbf{B}_1$.*

Если μ является характеристическим числом нечетной кратности только одного из операторов $\mathbf{B}_1$ или $\mathbf{B}$, то спектр оператора $\mathbf{A}$ содержит полностью интервал, одним концом которого является μ, а другим — одно из характеристических чисел оператора $\mathbf{B}$ или $\mathbf{B}_1$, отличных от μ.

Если один из операторов $\mathbf{B}$ или $\mathbf{B}_1$ не имеет характеристических чисел нечетной кратности, а второй имеет только одно такое характеристическое число μ, то спектр оператора $\mathbf{A}$ содержит полностью один из бесконечных интервалов $(-\infty, \mu)$ или (μ, ∞), за исключением, может быть, счетного числа точек. Множество этих исключительных значений не имеет конечных предельных точек.

Недавно А. И. Поволоцкий, используя изложенные выше методы, провел тщательный анализ нелинейных вполне непрерывных операторов $\mathbf{A}$, удовлетворяющих во всем пространстве или в его части условию

$$\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{B}\varphi\|\leqslant k\|\varphi\|, \tag{3.7}$$

где $\mathbf{B}$ — линейный вполне непрерывный оператор, k — постоянная. Такие операторы, как оказалось, при естественных предположениях имеют несвязные спектры, причем определенные связные компоненты спектра содержат интервалы. Собственные векторы операторов $\mathbf{A}$, удовлетворяющие условию (3.7), образуют непрерывные ветви; указываются условия, при выполнении которых непрерывные ветви собственных векторов оператора **A** расположены в банаховом пространстве «близко» к инвариантным подпространствам линейного оператора **B**, что, как оказывается, имеет место не всегда.

Основные результаты А. И. Поволоцкого изложены в его статье «О существовании несвязных спектров у нелинейных вполне непрерывных операторов» (ДАН **99**, № 3 (1954)).

§ 4. Теоремы типа ляпуновских

1. Индекс неподвижной точки. Пусть **A** — вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E. Пусть φ_0 — изолированная неподвижная точка вполне непрерывного векторного поля **I** — **A**. Мы будем предполагать ниже, что оператор **A** в точке φ_0 дифференцируем; производную Фреше оператора **A** в точке φ_0 обозначим через **B**.

Как было показано в главе II, индекс неподвижной точки поля **I** — **A** вычисляется просто в случае, если 1 не является собственным числом линейного оператора **B**. В настоящем пункте указываются случаи, когда индекс неподвижной точки φ_0 можно вычислить несмотря на то, что 1 есть собственное число оператора **B**.

Без ограничения общности можно считать, что $\varphi_0 = 0$, так как индекс неподвижной точки φ_0 поля **I** — **A** очевидным образом совпадает с индексом неподвижной точки 0 поля $\Phi\varphi = \varphi - [\mathbf{A}(\varphi + \varphi_0) - \varphi_0]$, причем производная Фреше оператора **A** в точке φ_0 и производная Фреше оператора $\mathbf{A}_1\varphi = \mathbf{A}(\varphi + \varphi_0) - \varphi_0$ в точке 0 совпадают.

Итак, пусть 0 — неподвижная точка вполне непрерывного векторного поля **I** — **A**. Пусть 1 есть собственное число линейного оператора **B**, являющегося производной Фреше в точке 0 оператора **A**.

Будем предполагать, что оператор **A** допускает представление

$$\mathbf{A}\varphi = \mathbf{B}\varphi + \mathbf{C}\varphi + \mathbf{D}\varphi \qquad (\varphi \in E), \tag{4.1}$$

где **C** и **D** — вполне непрерывные операторы, удовлетворяющие условиям:

а) Оператор **C** однороден:

$$\mathbf{C}(\lambda\varphi) = \lambda^k \mathbf{C}\varphi, \tag{4.2}$$

причем показатель k однородности больше единицы.

b) Оператор **C** удовлетворяет условию Липшица в следующей форме:

$$\|\mathbf{C}\varphi_1 - \mathbf{C}\varphi_2\| \leqslant q(\rho)\|\varphi_1 - \varphi_2\| \qquad (\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\| \leqslant \rho), \tag{4.3}$$

где

$$\varlimsup_{\rho \to 0} \frac{q(\rho)}{\rho^{k-1}} < \infty. \tag{4.4}$$

c) Оператор **D** удовлетворяет условию

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\|\mathbf{D}\varphi\|}{\|\varphi\|^k} = 0. \tag{4.5}$$

Приведем примеры интегральных операторов, допускающих представление (4.1), в котором операторы **D** и **C** удовлетворяют условиям a), b) и c).

Пример 1. Рассмотрим оператор П. С. Урысона

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K[s,\ t,\ \varphi(t)]\,dt, \tag{4.6}$$

где G — замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства.

Пусть функция $K(s,\ t,\ u)$ непрерывна по всем переменным и дважды непрерывно дифференцируема по u при всех $s,\ t \in G$ и $|u| \leqslant r$, где r — некоторое число. Пусть $K(s,\ t,\ 0) \equiv 0$.

Тогда оператор Урысона вполне непрерывен в шаре радиуса r пространства функций, непрерывных на G, и допускает представление (4.1), в котором

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G \frac{\partial K(s,\ t,\ 0)}{\partial u}\,\varphi(t)\,dt \tag{4.7}$$

и

$$\mathbf{C}\varphi(s) = \frac{1}{2}\int_G \frac{\partial^2 K(s,\ t,\ 0)}{\partial u^2}\,\varphi^2(t)\,dt. \tag{4.8}$$

Оператор **D** определим просто равенством $\mathbf{D} = \mathbf{A} - \mathbf{B} - \mathbf{C}$. Полная непрерывность операторов **B** и **C** очевидна.

Условие a) выполняется также очевидным образом, причем показатель однородности оператора **C** равен двум.

Условие b) выполняется, так как

$$|\mathbf{C}\varphi_1(s) - \mathbf{C}\varphi_2(s)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{2}\int\limits_G \left|\frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2}\right| \cdot |\varphi_1(t) + \varphi_2(t)| \cdot |\varphi_1(t) - \varphi_2(t)|\, dt,$$

откуда при $\|\varphi_1\|$, $\|\varphi_2\| \leqslant \rho$ следует:

$$\|\mathbf{C}\varphi_1 - \mathbf{C}\varphi_2\| \leqslant q(\rho)\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

где

$$q(\rho) = \max_{s,\, t \in G}\left|\frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2}\right| \cdot \operatorname{mes} G \cdot \rho.$$

Осталось проверить выполнение условия c). Так как $K(s, t, 0) \equiv 0$, то по формуле Тейлора

$$K(s, t, u) = \frac{\partial K(s, t, 0)}{\partial u}\, u + \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 K(s, t, \theta_u u)}{\partial u^2}\, u^2,$$

где $0 < \theta_u < 1$. Значит,

$$\mathbf{D}\varphi(s) = \frac{1}{2}\int\limits_G \left\{\frac{\partial^2 K[s, t, \theta_{\varphi(t)}\varphi(t)]}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2}\right\}\varphi^2(t)\, dt. \qquad (4.9)$$

Так как функция $\frac{\partial^2 K(s, t, u)}{\partial u^2}$ равномерно непрерывна по u при малых u, то для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое ρ, что

$$\left|\frac{\partial^2 K(s, t, u)}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2}\right| < \frac{2\varepsilon}{\operatorname{mes} G}$$

при $|u| \leqslant \rho$ $(s, t \in G)$. Следовательно, в силу (4.9) из $\|\varphi\| \leqslant \rho$ следует, что

$$\frac{\|\mathbf{D}\varphi\|}{\|\varphi\|^2} \leqslant \varepsilon,$$

откуда вытекает (4.5).

Представление (4.1) оператора П. С. Урысона целесообразно рассматривать, конечно, только тогда, когда оператор $\mathbf{C}$, определенный формулой (4.8), не есть тождественный нуль.

В случае, когда

$$\frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2} \equiv 0 \qquad (s, t \in G),$$

мы предположим дополнительно, что функция $K(s, t, u)$ имеет больше чем две непрерывные частные производные по u.

Пусть

$$\frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2} \equiv \ldots \equiv \frac{\partial^{k-1} K(s, t, 0)}{\partial u^{k-1}} \equiv 0 \qquad (s, t \in G),$$

причем $\frac{\partial^k K(s, t, u)}{\partial u^k}$ непрерывна на топологическом произведении $G \times G \times [-r, r]$ и не равна тождественно нулю. Оператор П. С. Урысона снова можно представить в виде (4.1), однако для определения оператора **C** вместо (4.8) нужно воспользоваться формулой

$$\mathbf{C}\varphi(s) = \frac{1}{k!} \int_G \frac{\partial^k K(s, t, 0)}{\partial u^k} \varphi^k(t)\, dt. \tag{4.10}$$

Выполнение условий a), b) и c) для операторов **C** и **D** проверяется так же, как это было сделано выше для случая

$$\frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2} \not\equiv 0.$$

Пример 2. Представление (4.1) в пространстве непрерывных функций допускает частный класс операторов П. С. Урысона — операторы Гаммерштейна

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt \tag{4.11}$$

(где G — снова ограниченное замкнутое множество n-мерного пространства) при выполнении следующих условий: ядро $K(s, t)$ допустимо, а функция $f(t, u)$ непрерывна вместе с двумя частными производными $\frac{\partial}{\partial u} f(t, u)$ и $\frac{\partial^2}{\partial u^2} f(t, u)$. При этом операторы **B** и **C** определяются аналогичными (4.7) и (4.8) формулами

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K(s, t) \frac{\partial f(t, 0)}{\partial u} \varphi(t)\, dt \tag{4.12}$$

и

$$\mathbf{C}\varphi(s) = \frac{1}{2} \int_G K(s, t) \frac{\partial^2 f(t, 0)}{\partial u^2} \varphi^2(t)\, dt. \tag{4.13}$$

В случае, если $\frac{\partial^2 f(t, 0)}{\partial u^2} \equiv 0$, как и в случае операторов Урысона, нужно предположить дополнительно, что функция $f(t, u)$ имеет по u производные более высокого, чем второй, порядка. Если

$$\frac{\partial^2 f(t, 0)}{\partial u^3} \equiv \ldots \equiv \frac{\partial^{k-1} f(t, 0)}{\partial u^k} \equiv 0 \qquad (s,\ t \in G),$$

а непрерывная функция $\frac{\partial^k f(t, u)}{\partial u^k}$ при $u = 0$ не обращается в тождественный нуль, то в представлении (4.1) оператора Гаммерштейна нужно положить:

$$\mathbf{C}\varphi(s) = \frac{1}{k!} \int_G K(s,\ t) \frac{\partial^k f(t, 0)}{\partial u^k} \varphi^k(t)\, dt. \qquad (4.14)$$

Пример 3. Рассмотрим интегростепенной ряд А. М. Ляпунова от одной функции, причем запишем его в виде (4.1):

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D},$$

где $\mathbf{B}$ — член первого порядка:

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K(s,\ t)\, \varphi(t)\, dt,$$

$\mathbf{C}$ — сумма интегростепенных членов второго порядка:

$$\mathbf{C}\varphi(s) = \int_G \int_G \{K_{11}(s, t_1)\, \varphi^2(t_1) + K_{12}(s, t_1, t_2)\, \varphi(t_1)\, \varphi(t_2)\}\, dt_1\, dt_2,$$

а $\mathbf{D}$ — сумма интегростепенных членов порядка, большего чем два.

Выполнение условий a), b), c) следует непосредственно из неравенств, приведенных в § 3 главы I.

Вернемся к рассмотрению абстрактного вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$, допускающего представление (4.1):

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}, \qquad (4.1)$$

в котором $\mathbf{B}$ — линейный оператор, а операторы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ удовлетворяют условиям a), b) и c).

Пусть 1 является собственным числом оператора $\mathbf{B}$. Тогда по теории Рисса (см. § 1 главы I, пункт 3) пространство E, в котором действует оператор $\mathbf{B}$, представимо в виде прямой суммы двух инвариантных для оператора **B** подпространств E_1 и E^1, из которых первое E_1 — это конечномерное инвариантное подпространство оператора **B**, отвечающее собственному числу, равному единице, а в подпространстве E^1 оператор **B** не имеет единицу собственным числом.

Каждый элемент $\varphi \in E$ представим однозначным образом в виде

$$\varphi = x + y, \tag{4.15}$$

где $x \in E_1$, $y \in E^1$. Представление (4.15) позволяет ввести в рассмотрение два проекционных оператора $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}^1$:

$$P_1\varphi = x, \qquad P^1\varphi = y.$$

Оператор $\mathbf{P}_1$ проектирует на подпространство E_1, а оператор $\mathbf{P}^1$ — на подпространство E^1. Оба проекционных оператора ограничены; обозначим бо́льшую из норм через a:

$$\|\mathbf{P}_1\| \leqslant a, \qquad \|\mathbf{P}^1\| \leqslant a. \tag{4.16}$$

Оператор **B**, рассматриваемый только на подпространстве E^1, не имеет, как уже было указано, собственным числом 1. Поэтому оператор $\mathbf{I} - \mathbf{B}$, если его рассматривать только на подпространстве E^1, имеет ограниченный обратный, т. е. существует такая положительная постоянная α, что

$$\|y - \mathbf{B}y\| \geqslant \alpha \|y\| \qquad (y \in E^1). \tag{4.17}$$

Теорема 4.1. *Пусть инвариантное подпространство E_1 состоит только из собственных векторов**) *оператора* **B**. *Пусть на единичной сфере S_1 подпространства E_1 векторное поле Φ_1,*

$$\Phi_1 y = -\mathbf{P}_1\mathbf{C}y, \tag{4.18}$$

не имеет нулевых векторов.

Тогда 0 является изолированной неподвижной точкой вполне непрерывного векторного поля $\Phi = \mathbf{I} - \mathbf{A}$, где оператор **A** *допускает представление* (4.1).

Индекс γ неподвижной точки 0 поля Φ равен произведению вращения γ_1 поля Φ_1 на S_1 на вращение γ_2 поля $\mathbf{I} - \mathbf{B}$ на единичной сфере S^1 пространства E^1.

---

*) Это предположение несущественно, и от него легко можно освободиться.

Доказательство. Пусть β — положительное число, удовлетворяющее неравенствам

$$1<\beta<k, \qquad 3\beta-k>2. \tag{4.19}$$

Обозначим через S_ρ сферу радиуса ρ в пространстве E_1 и через S^ρ сферу радиуса ρ^β в пространстве E^1. Через T_ρ обозначим множество точек $\varphi\in E$ вида $\varphi=x+y$, где $x\in E_1$, $\|x\|\leqslant\rho$ и $y\in E^1$, $\|y\|\leqslant\rho^\beta$. Через L_ρ обозначим границу T_ρ. Множества L_ρ при различных ρ заполняют все пространство E.

Определим в E вполне непрерывное векторное поле $\tilde{\mathbf{\Phi}}$:

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}\varphi=\varphi-\mathbf{BP}^1\varphi-(\mathbf{P}_1\varphi+\mathbf{P}_1\mathbf{CP}_1\varphi) \qquad (\varphi\in E). \tag{4.20}$$

Каждая точка $\varphi\in E$, отличная от 0, не является неподвижной точкой поля $\tilde{\mathbf{\Phi}}$. Действительно, если $\mathbf{P}^1\varphi\neq 0$, то

$$\mathbf{P}^1\tilde{\mathbf{\Phi}}\varphi=\mathbf{P}^1\varphi-\mathbf{P}^1\mathbf{BP}^1\varphi-\mathbf{P}^1\mathbf{P}_1(\varphi+\mathbf{CP}_1\varphi)=\mathbf{P}^1\varphi-\mathbf{BP}^1\varphi\neq 0.$$

Если же $\mathbf{P}_1\varphi\neq\theta$, то аналогично

$$\mathbf{P}_1\tilde{\mathbf{\Phi}}\varphi=\mathbf{P}_1\varphi-\mathbf{P}_1\mathbf{BP}^1\varphi-\mathbf{P}_1^2\mathbf{CP}_1\varphi=-\mathbf{P}_1\mathbf{CP}_1\varphi\neq 0.$$

В частности, векторное поле $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ не имеет нулевых векторов на L_ρ.

Рассмотрим на L_ρ векторное поле $\mathbf{\Psi}$:

$$\mathbf{\Psi}\varphi=-\frac{\|\mathbf{P}_1\varphi\|}{\rho}\mathbf{P}_1\mathbf{C}\left(\frac{\rho}{\|\mathbf{P}_1\varphi\|}\mathbf{P}_1\varphi\right)+\\ +\frac{\|\mathbf{P}^1\varphi\|}{\rho^\beta}(\mathbf{I}-\mathbf{B})\left(\frac{\rho^\beta}{\|\mathbf{P}^1\varphi\|}\mathbf{P}^1\varphi\right) \qquad (\varphi\in L_\rho).$$

Как это следует из теоремы 4.5 главы II, вращение поля $\mathbf{\Psi}$ на L_ρ равно произведению вращений поля $\mathbf{\Psi}$ на S_ρ и на S^ρ. Легко видеть, что на этих сферах поле $\mathbf{\Psi}$ совпадает соответственно с полями $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ и $\mathbf{I}-\mathbf{B}$. Действительно, если $\varphi\in S_1$, то $\mathbf{P}^1\varphi=0$, а $\mathbf{P}_1\varphi=\varphi$ и, следовательно, $\mathbf{\Psi}\varphi=$ $=-\left(\frac{\rho}{\|\varphi\|}\right)^{k-1}\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi$. Если же $\varphi\in E^1$, то $\mathbf{P}_1\varphi=0$, а $\mathbf{P}^1\varphi=\varphi$, и так как оператор $\mathbf{B}$ линеен, то $\mathbf{\Psi}\varphi=(\mathbf{I}-\mathbf{B})\varphi$.

Значит, вращение поля $\mathbf{\Psi}$ на L_ρ равно $\gamma_1\gamma_2$.

Поля $\mathbf{\Psi}$ и $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ на L_ρ имеют одинаковое вращение. Чтобы доказать это, покажем, что в каждой точке $\varphi\in L_\rho$ векторы $\mathbf{\Psi}\varphi$ и $\tilde{\mathbf{\Phi}}\varphi$ направлены не противоположно. Действительно, если векторы $\Psi\varphi$ и $\tilde{\Phi}\varphi$ направлены противоположно для некоторой точки $\varphi \in L_\rho$, то найдется такое положительное число μ, что $\Psi\varphi + \mu\tilde{\Phi}\varphi = \theta$.

Последнее равенство несложными преобразованиями приводится к виду

$$(\mu + 1)(\mathbf{P}^1\varphi - \mathbf{B}\mathbf{P}^1\varphi) - \left(\mu + \frac{\rho^{k-1}}{\|\mathbf{P}_1\varphi\|^{k-1}}\right)\mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi = \theta,$$

откуда следует, что

$$(\mathbf{I} - \mathbf{B})\mathbf{P}^1\varphi = \theta \tag{4.21}$$

и

$$\mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi = \theta. \tag{4.22}$$

Из (4.21) в силу (4.17) следует, что $\mathbf{P}^1\varphi = \theta$. Из (4.22) следует, что $\mathbf{P}_1\varphi = \theta$. Значит, $\varphi = 0$, а это противоречит тому, что $\varphi \in L_\rho$.

Таким образом, вращение поля $\tilde{\Phi}$ на L_ρ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

Введем в рассмотрение несколько постоянных. Пусть

$$b_1 = \min_{\varphi \in E_1, \|\varphi\| = 1} \|\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi\|, \qquad b_2 = \max_{\varphi \in E_1, \|\varphi\| = 1} \|\mathbf{C}\varphi\|. \tag{4.23}$$

Пусть ρ_1 — такое число, что при $\|\varphi_1\|, \|\varphi_2\| < 2\rho < \rho_1$

$$\|\mathbf{C}\varphi_1 - \mathbf{C}\varphi_2\| \leqslant \rho^{\frac{\beta+k}{2} - 1} \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\|. \tag{4.24}$$

Выбор такого ρ_1 возможен в силу условий (4.3) и (4.4). Будем считать при этом, что $\rho_1 < 1$.

Обозначим через $\tilde{\Phi}_1$ поле $\mathbf{I} - \mathbf{B} - \mathbf{C}$ и покажем, что вращение его на L_ρ при

$$\rho < \rho_0 = \min\left\{\frac{\rho_1}{2}, \left(\frac{a}{2^k a \cdot b_2}\right)^{\frac{1}{k-\beta}}, \left(\frac{b_1}{2a}\right)^{\frac{2}{3\beta - k - 2}}\right\} \tag{4.25}$$

равно вращению поля $\tilde{\Phi}$ и, следовательно, равно произведению $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

Чтобы доказать это, снова покажем, что ни в одной точке $\varphi \in L_\rho$ векторы $\tilde{\Phi}\varphi$ и $\tilde{\Phi}_1\varphi$ не направлены противоположно. Допустим, что это не так. Тогда найдутся такие $\varphi \in L_\rho$ и постоянная $\mu > 0$, что

$$\mu\tilde{\Phi}\varphi + \tilde{\Phi}_1\varphi = \theta.$$

Последнее равенство удобно переписать в следующей форме:

$$(1+\mu)(\mathbf{P}^1\varphi-\mathbf{B}\mathbf{P}^1\varphi)-\mathbf{C}\varphi-\mu\mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi=\theta. \tag{4.26}$$

Применяя к равенству (4.26) проекционный оператор $\mathbf{P}^1$, получим:

$$(1+\mu)(\mathbf{P}^1\varphi-\mathbf{B}\mathbf{P}^1\varphi)=\mathbf{P}^1\mathbf{C}\varphi,$$

откуда в силу (4.17) и (4.23)

$$\|\mathbf{P}^1\varphi\|\leqslant\frac{ab_2}{\alpha}\|\varphi\|^k. \tag{4.27}$$

Так как для всех $\varphi\in L_\rho$

$$\|\varphi\|\leqslant\|\mathbf{P}_1\varphi\|+\|\mathbf{P}^1\varphi\|\leqslant\rho+\rho^\beta<2\rho,$$

то из (4.27) следует, что

$$\|\mathbf{P}^1\varphi\|<\frac{2^k ab_2}{\alpha}\rho^k \tag{4.28}$$

и в силу (4.25)

$$\|\mathbf{P}^1\varphi\|<\frac{2^k ab_2}{\alpha}\rho^{k-\beta}\cdot\rho^\beta<\rho^\beta.$$

Таким образом, $\mathbf{P}^1\varphi\,\overline{\in}\,S^\rho$, так что $\mathbf{P}_1\varphi\in S_\rho$, т. е.

$$\|\mathbf{P}_1\varphi\|=\rho. \tag{4.29}$$

Применим теперь к равенству (4.26) проекционный оператор $\mathbf{P}_1$. Так как и $\mathbf{P}_1\mathbf{P}^1\varphi=0$ и $\mathbf{P}_1\mathbf{B}\mathbf{P}^1\varphi=0$, то

$$\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi+\mu\mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi=0,$$

откуда

$$(1+\mu)\mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi=-\mathbf{P}_1(\mathbf{C}\varphi-\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi). \tag{4.30}$$

Так как $\|\mathbf{P}_1\varphi\|=\rho$, то в силу (4.23)

$$\|(1+\mu)\mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi\|\geqslant(1+\mu)b_1\|\mathbf{P}_1\varphi\|^k>b_1\rho^k. \tag{4.31}$$

В силу (4.24) из $\|\mathbf{P}_1\varphi\|<2\rho$, $\|\varphi\|\leqslant\|\mathbf{P}_1\varphi\|+\|\mathbf{P}^1\varphi\|<2\rho$ следует

$$\|\mathbf{P}_1(\mathbf{C}\varphi-\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi)\|\leqslant a\cdot\|\mathbf{C}\varphi-\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi\|\leqslant$$

$$\leqslant a\rho^{\frac{\beta+k}{2}-1}\|\mathbf{P}^1\varphi\|\leqslant a\rho^{\frac{3\beta+k-2}{2}}. \tag{4.32}$$

Из (4.31) и (4.32) в силу (4.30) следует:

$$\frac{b_1}{a} < \rho^{\frac{3\beta-k-2}{2}},$$

что противоречит выбору ρ.

Таким образом, неверно допущение, что в некоторой точке $\varphi \in L_\rho$ векторы полей $\tilde{\mathbf{\Phi}}$ и $\tilde{\mathbf{\Phi}}_1$ направлены противоположно. Значит, вращение поля $\mathbf{\Phi}_1 = \mathbf{I} - \mathbf{B} - \mathbf{C}$ на L_ρ равно $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ (при $\rho < \rho_0$, где ρ_0 определено соотношением (4.25)).

Введем в рассмотрение еще одну постоянную. Пусть $d > 0$ — такое число, что

$$\|\varphi\| \geqslant d(\|\mathbf{P}_1\varphi\| + \|\mathbf{P}^1\varphi\|)\ ^{*)}. \tag{4.33}$$

Покажем, что при $\varphi \in L_\rho$

$$\|\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| > \tau\rho^k, \tag{4.34}$$

где

$$\tau = \min\left\{\frac{\alpha}{a}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right),\quad \frac{d \cdot b_1}{2}\right\}.$$

Действительно, если $\|\mathbf{P}^1\varphi\| = \rho^\beta$, то

$$\|\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| \geqslant \|(\mathbf{I} - \mathbf{B})\varphi\| - \|\mathbf{C}\varphi\| \geqslant \alpha\|\varphi\| - b_2\rho^k \geqslant \frac{\alpha}{a}\rho^\beta - b_2\rho^k =$$
$$= \left(\frac{\alpha}{a} - b_2\rho^{k-\beta}\right)\rho^\beta > \left(\frac{\alpha}{a} - b_2\rho^{k-\beta}\right)\rho^k,$$

а в силу (4.25)

$$\frac{\alpha}{a} - b_2\rho^{k-\beta} = \frac{\alpha}{a}\left(1 - \frac{ab_2}{\alpha}\rho^{k-\beta}\right) > \frac{\alpha}{a}\left(1 - \frac{1}{2^k}\right).$$

---

*) Существование такого числа d можно доказать, например, так. Введем в пространство E новую норму:

$$\|\varphi\|_1 = \|\mathbf{P}_1\varphi\| + \|\mathbf{P}^1\varphi\|.$$

Легко проверить, что в новой норме пространство остается полным. Пространство E с новой нормой обозначим через $\hat{E}$. Элемент $\varphi \in E$, если его рассматривать как элемент пространства $\hat{E}$, будем обозначать через $\hat{\varphi}$. Линейный оператор $\mathbf{R}\hat{\varphi} = \varphi$, действующий из $\hat{E}$ в E, будет непрерывным. Тогда, по известной теореме Банаха ([42], стр. 146) будет непрерывным и обратный оператор $\mathbf{R}^{-1}$:

$$\|\hat{\varphi}\|_1 = \|\mathbf{R}^{-1}\varphi\| \leqslant \frac{1}{d}\|\varphi\|,$$

откуда и следует (4.33).

Если же $\|\mathbf{P}^1\varphi\| < \rho^\beta$, то $\|\mathbf{P}_1\varphi\| = \rho$ и $\|\varphi - \mathbf{P}_1\varphi\| < \rho^\beta$. Тогда в силу (4.23) и (4.24)

$$\|\mathbf{P}_1\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| = \|\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi\| \geqslant \|\mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi\| - \|\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi - \mathbf{P}_1\mathbf{C}\mathbf{P}_1\varphi\| \geqslant$$
$$\geqslant b_1\|\mathbf{P}_1\varphi\|^k - a\rho^{\frac{\beta+k}{2}-1+\beta} = (b_1 - a\rho^{\frac{3\beta-k-2}{2}})\rho^k.$$

Но в силу (4.25)

$$b_1 - a\rho^{\frac{3\beta-k-2}{2}} = b_1\left(1 - \frac{a}{b_1}\rho^{\frac{3\beta-k-2}{2}}\right) > \frac{b_1}{2},$$

значит,

$$\|\mathbf{P}_1\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| > \frac{b_1}{2}\rho^k,$$

откуда в силу (4.33)

$$\|\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| > \frac{db_1}{2}\rho^k.$$

Перейдем, наконец, к рассмотрению основного интересующего нас поля $\mathbf{\Phi}_2 = \mathbf{I} - \mathbf{B} - \mathbf{C} - \mathbf{D}$.

В силу условия с) можно указать такое число $\bar{\rho} < \rho_0$, что при $\|\varphi\| \leqslant \bar{\rho}$

$$\|\mathbf{D}\varphi\| < \frac{\tau}{2^{k+1}}\|\varphi\|^k. \tag{4.35}$$

Тогда в шаре $\|\varphi\| \leqslant d\bar{\rho}^\beta$ поле $\mathbf{\Phi}_2$ не имеет неподвижных точек, отличных от 0. Действительно, пусть точка φ принадлежит некоторому L_ρ, причем $\|\varphi\| \leqslant d\bar{\rho}^\beta$. Тогда $\rho \leqslant \bar{\rho}$, так как при $\varphi \in L_\rho$ в силу (4.33)

$$d\bar{\rho}^\beta \geqslant \|\varphi\| \geqslant d(\|\mathbf{P}_1\varphi\| + \|\mathbf{P}^1\varphi\|) \geqslant d\rho^\beta.$$

Следовательно, $\|\varphi\| < 2\rho$. Используя теперь (4.34) и (4.35), получим:

$$\|\mathbf{\Phi}_2\varphi\| \geqslant \|\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| - \|\mathbf{D}\varphi\| \geqslant \tau\rho^k - \frac{\tau}{2^{k+1}}(2\rho)^k = \frac{\tau}{2}\rho^k.$$

Мы доказали первое основное утверждение теоремы: точка 0 является изолированной неподвижной точкой поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$.

Чтобы вычислить индекс этой неподвижной точки, покажем, что вращения полей $\mathbf{\Phi}_2$ и $\tilde{\mathbf{\Phi}}_1$ на некотором L_ρ одинаковы. Пусть ρ выбрано так, что $\|\varphi\| \leqslant a\rho^{\beta}$ при $\varphi \in L_\rho$. Тогда в каждой точке $\varphi \in L_\rho$ векторы $\mathbf{\Phi}_2\varphi$ и $\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi$ направлены не противоположно, ибо из

$$\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi + \mu\mathbf{\Phi}_2\varphi = \theta \qquad (\mu > 0)$$

следует:

$$(1+\mu)\|\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| = \mu\|\mathbf{D}\varphi\|,$$

в то время как

$$(1+\mu)\|\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| - \mu\|\mathbf{D}\varphi\| \geqslant \mu(\|\tilde{\mathbf{\Phi}}_1\varphi\| - \|\mathbf{D}\varphi\|) \geqslant \frac{\mu\tau}{2}\rho^k.$$

Значит, вращение поля $\mathbf{\Phi}_2$ на L_ρ равно произведению $\gamma_1 \cdot \gamma_2$. Значит, индекс неподвижной точки θ вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ равен $\gamma_1 \cdot \gamma_2$.

Теорема доказана.

Число γ_2 — это вращение линейного вполне непрерывного векторного поля, поэтому по абсолютной величине оно равно 1. Следовательно, абсолютная величина индекса $\gamma_1 \cdot \gamma_2$ неподвижной точки θ поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ определяется числом γ_1.

Укажем два случая, когда γ_1 можно вычислить.

2. Случай вещественного пространства. Всюду ниже мы предполагаем, что показатель k однородности оператора $\mathbf{C}$ — это целое число.

Если k — четное число, то поле $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ на сфере S_1 четно. Легко видеть, что тогда γ_1 — четное число, которое обязательно равно нулю, если E_1 — нечетномерное подпространство *).

Если k — нечетное число, то поле $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ нечетно и по теореме Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана—К. Борсука

---

*) Для определения вращения четного векторного поля, заданного на сфере, можно построить симметричную относительно центра сферы триангуляцию, симметричные вершины которой занумеровать одинаковыми числами. Симметричные симплексы будут иметь одинаковые нумерации. Если размерность сферы четна, то симметричные симплексы имеют нумерации с весами разных знаков, в силу чего степень нумерации будет равна нулю. Значит, *вращение четного поля на четномерной сфере равно нулю.* Если размерность сферы нечетна, то симметричные симплексы ориентированы одинаково и можно утверждать только, что вращение четного поля четно.

его вращение на S_1 нечетно. Точное вычисление γ_1 представляет значительные трудности.

В случае, если E_1 — одномерное пространство, вращение γ_1 вычисляется просто. Пусть φ_0 — единичный вектор, лежащий в E_1. Если векторы $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi_0$ и φ_0 направлены одинаково, то при четном k вращение γ_1 равно нулю, а при нечетном k — единице. Если векторы $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi_0$ и φ_0 направлены противоположно, то при четном k вращение также равно нулю, а при нечетном k вращение равно -1.

Основная трудность вычисления индекса неподвижной точки в условиях теоремы 4.1 заключается в конструировании оператора $\mathbf{P}_1$ проектирования на подпространство E_1 собственных векторов оператора $\mathbf{B}$, отвечающих собственному числу, равному 1.

Мы ограничимся в связи с этим рассмотрением интегральных операторов (П. С. Урысона, Гаммерштейна или А. М. Ляпунова) $\mathbf{A}$, действующих в пространстве E непрерывных функций, заданных на замкнутом ограниченном множестве G конечномерного пространства. При этом будем предполагать, что $\mathbf{A}\theta = \theta$ и оператор $\mathbf{A}$ в точке θ имеет производную Фреше $\mathbf{B}$, являющуюся линейным интегральным оператором

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{4.36}$$

где $K(s, t)$ — вещественное допустимое симметричное ядро.

В этом случае, как известно, каждое инвариантное подпространство оператора $\mathbf{B}$ состоит только из собственных векторов оператора $\mathbf{B}$.

Пусть E_1 — k-мерное подпространство. В нем можно выбрать k функций $e_1(s), \ldots, e_k(s)$ таких, что

$$\int_G e_i(s)\,e_j(s)\,ds = \delta_{ij} \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, k),$$

где $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$ и $\delta_{ii} = 1$. Оператор $\mathbf{P}_1$ можно записать формулой

$$\mathbf{P}_1\varphi = \sum_{i=1}^{k} e_i(s) \int_G \varphi(t)\,e_i(t)\,dt. \tag{4.37}$$

Действительно, оператор $\mathbf{P}_1$ линеен и действует из E в E_1. Легко проверяется, что оператор $\mathbf{P}_1$, определенный формулой (4.37), удовлетворяет условию $\mathbf{P}_1^2=\mathbf{P}_1$ и на элементах $\varphi\in E_1$ совпадает с оператором тождественного преобразования. Нужно только доказать, что $\mathbf{P}_1\varphi\equiv\theta$, если $\varphi\in E^1$. Как это следует из теории Рисса, каждый элемент $\varphi\in E^1$ представим в данном случае в виде

$$\varphi=\varphi_1-\mathbf{B}\varphi_1 \qquad (\varphi_1\in E^1).$$

Следовательно,

$$\mathbf{P}_1\varphi=\sum_{i=1}^{k} e_i(s)\left\{\int_G \varphi_1(t)\,e_i(t)\,dt-\int_G\int_G K(t_1,t)\,\varphi_1(t)\,e_i(t_1)\,dt\,dt_1\right\}.$$

Меняя в двойном интеграле порядок интегрирования и замечая, что

$$\int_G K(t_1,\ t)\,e_i(t_1)\,dt_1=e_1(t),$$

получим:

$$\int_G \varphi_1(t)\,e_i(t)\,dt-\int_G\int_G K(t_1,t)\,\varphi_1(t)e_i(t_1)\,dt\,dt_1=0\ \ (i=1,\ldots,k).$$

Значит, $\mathbf{P}_1\varphi(s)\equiv 0$.

Наиболее просто записывается оператор $\mathbf{P}_1$ в случае, когда собственному числу, равному единице, соответствует только одна собственная функция $e_0(s)$, т. е. когда подпространство E_1 одномерно. В этом случае

$$\mathbf{P}_1\varphi(s)=e_0(s)\int_G \varphi(t)\,e_0(t)\,dt.$$

Вращение γ_1 поля $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ на S_1 определится в этом случае знаком числа

$$a=\int_G [\mathbf{C}e_0(t)]\cdot e_0(t)\,dt.$$

Если, например, $\mathbf{A}$ — это оператор (4.6) П. С. Урысона, то в силу (4.10) формула для определения числа a примет вид

$$a=\frac{1}{k!}\int_G\int_G \frac{\partial^k K(s,t,0)}{\partial u^k}\,e_0^k(t)\,e_0(s)\,dt\,ds.$$

Если число a отлично от нуля, то 0 является в силу теоремы (4.1) изолированной неподвижной точкой поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}$. Индекс этой неподвижной точки равен нулю, если порядок однородности оператора $\mathbf{C}$ четен, и равен по абсолютной величине единице, если порядок однородности оператора $\mathbf{C}$ нечетен. Если $a>0$, то $\gamma_1=-1$, а если $a<0$, то $\gamma_1=1$.

Для случая, когда подпространство E_1 многомерно, приведем одно частное утверждение об индексе нулевого решения уравнения Гаммерштейна.

Пусть $\mathbf{A}$ — *оператор Гаммерштейна*;

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\int_G K(s,\ t)\,f[t,\ \varphi(t)]\,dt,$$

где G — замкнутое ограниченное множество конечномерного пространства. Пусть выполнены следующие условия:

a) *Ядро $K(s,\ t)$ допустимо и симметрично, причем* 1 *является собственным числом оператора* $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\varphi(s)=\int_G K(s,\ t)\,\varphi(t)\,dt.$$

b) *Функция $f(t,\ u)$ дифференцируема по u достаточное количество раз, причем $f(t,\ 0)\equiv 0$ и*

$$\frac{\partial f(t,0)}{\partial u}\equiv 1;\quad \frac{\partial^2 f(t,0)}{\partial u^2}\equiv\ldots\equiv\frac{\partial^{k-1} f(t,0)}{\partial u^{k-1}}\equiv 0\qquad (t\in G),$$

и непрерывная функция

$$g(t)=\frac{1}{k!}\,\frac{\partial^k f(t,0)}{\partial u^k}$$

принимает значения одного знака *).

Тогда, если k нечетно, то индекс неподвижной точки 0 *поля* $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ *по абсолютной величине равен единице.*

Доказательство. Условия теоремы, как указывалось в первом пункте настоящего параграфа (пример 2), обеспечивают представление (4.1) оператора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}=\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D},$$

---

*) Если среди собственных функций ядра $K(s,\ t)$, соответствующих собственному числу, равному единице, нет функций, тождественно обращающихся в нуль на некотором множестве положительной меры, то достаточно требовать, чтобы функция $g(t)$ не была тождественным нулем и не принимала значений разных знаков.

где

$$\mathbf{C}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\, g(t)\, \varphi^k(t)\, dt,$$

причем операторы $\mathbf{C}$ и $\mathbf{D}$ удовлетворяют условиям a), b) и c).

Через E_1 будем обозначать множество собственных векторов (функций) оператора $\mathbf{B}$, отвечающих собственному числу, равному единице. Пусть оператор $\mathbf{P}_1$ проектирования на подпространство E_1 определен формулой (4.37).

В силу теоремы 4.1 для вычисления индекса неподвижной точки θ поля $\mathbf{I} - \mathbf{A}$ нужно вычислить на единичной сфере S_1 пространства E_1 вращение поля $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$.

Рассмотрим вначале случай, когда

$$g(t) < 0 \qquad (t \in G).$$

В этом случае вращение поля $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ на S_1 равно единице.

Действительно, если поле $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ на S_1 имеет нулевой вектор, либо его вращение отлично от единицы, то найдутся точка $\varphi \in S_1$ и число $\mu \geqslant 0$ такие, что

$$-\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi + \mu\varphi = \theta. \tag{4.38}$$

Так как функции $e_1(s), \ldots, e_k(s)$ для построения оператора (4.37) выбирались не однозначно, то без ограничения общности можно считать, что $\varphi(s) = e_1(s)$. Таким образом, равенство (4.38) можно переписать в виде

$$-\sum_{i=1}^{k} e_i(s) \int_G [\mathbf{C}e_1(t)]\, e_i(t)\, dt + \mu e_1(s) = 0.$$

Умножая это равенство на $e_1(s)$ и интегрируя по G, получим:

$$\mu = \int_G \left\{ \int_G K(t, t_1)\, g(t_1)\, e_1^k(t_1)\, dt_1 \right\} e_1(t)\, dt. \tag{4.39}$$

Меняя в правой части порядок интегрирования и замечая, что

$$\int_G K(t, t_1)\, e_1(t)\, dt = e_1(t_1),$$

получим:

$$\mu = \int_G g(t_1)\, e_1^{k+1}(t_1)\, dt.$$

Из последнего равенства и отрицательности $g(t_1)$ следует, что $\mu < 0$. Мы пришли к противоречию.

В случае, если

$$g(t) > 0 \qquad (t \in G),$$

аналогичными рассуждениями показывается, что вращение поля $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ на S_1 равно вращению на S_1 поля $-\mathbf{I}$, т. е. равно 1, если подпространство E_1 четномерно, и равно -1, если E_1 нечетномерно.

3. Случай комплексного пространства. Каждое комплексное банахово пространство можно рассматривать как вещественное. При этом каждое инвариантное подпространство линейного оператора будет четномерным (так как вместе с каждым собственным вектором φ линейный оператор имеет собственный вектор $i\varphi$, отвечающий тому же собственному числу). Специфика комплексного пространства позволяет просто вычислить вращение поля $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ (см. теорему 4.1) для случая, когда пространство E_1 двумерно. Этот случай соответствует рассмотрению линейного оператора $\mathbf{B}$ с простым в комплексном пространстве собственным числом, равным единице.

Известно и легко видеть, что в указанном выше случае вращение поля $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ на единичной сфере S_1 пространства E_1 будет равно показателю однородности k оператора $\mathbf{C}$.

Таким образом, исследование поля $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ в случае, когда E_1 двумерно, сводится к выяснению того, отличен ли от нуля вектор $\mathbf{P}_1\mathbf{C}\varphi$, где φ — произвольный вектор пространства E_1.

В качестве примера выпишем условие того, что индекс неподвижной точки 0 векторного поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}$, где $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор А. М. Ляпунова, равен двум. Будем пользоваться обозначениями, введенными в примере 3, стр. 218.

Оператор $\mathbf{A}$ (поле $\mathbf{I}-\mathbf{A}$) будем рассматривать в пространстве комплексных непрерывных на G функций. Пусть $e(s)$ — единственная вещественная собственная функция вещественного симметричного ядра $K(s, t)$, отвечающая собственному числу, равному единице. В этом случае условие отличия от нуля функции $-\mathbf{P}_1 \mathbf{C}e$ (т. е. условие того, что абсолютная величина индекса нулевого решения уравнения $\varphi = \mathbf{A}\varphi$ равна двум) запишется в виде

$$\int\limits_G \int\limits_G \int\limits_G \{K_{11}(s,\ t_1)\, e^2(t_1) + K_{12}(s,\ t_1,\ t_2)\, e(t_1)\, e(t_2)\} \times \\ \times e(s)\, ds\, dt_1\, dt_2 \neq 0.$$

Тонкие теоремы об индексе особой точки для случая комплексного пространства установлены Э. Кронин [35].

4. Точки ветвления. Пусть неподвижная точка φ_0 вполне непрерывного непрерывно дифференцируемого векторного поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}$ имеет индекс, равный по абсолютной величине единице, причем производная Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке φ_0 не имеет единицу собственным числом. Как было показано еще в главе II, в этом случае возмущенное векторное поле $\varphi - \mathbf{A}\varphi - \varepsilon\mathbf{F}\varphi$ в некоторой окрестности точки φ_0 имеет единственную неподвижную точку, если число ε достаточно мало по абсолютной величине, а оператор $\mathbf{F}$ достаточно гладок (например, удовлетворяет условию Липшица в окрестности точки φ_0).

Предположим теперь, что единица является собственным числом производной Фреше оператора $\mathbf{A}$ в точке φ_0, являющейся изолированной неподвижной точкой поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}$.

Здесь могут встретиться различные случаи. Выше в настоящем параграфе показано, что индекс неподвижной точки может принимать в рассматриваемом случае различные значения γ. Поэтому возмущенные векторные поля $\mathbf{I}-\mathbf{A}-\mathbf{F}$ в окрестности точки φ_0 (при малых $\mathbf{F}$) будут иметь алгебраическое число γ неподвижных точек. Вопрос о том, какое будет число геометрически различных неподвижных точек, остается при этом открытым. Для получения ответа на этот вопрос требуются дополнительные исследования.

Точку φ_0 естественно назвать *точкой ветвления*, если при малых возмущениях $\varepsilon\mathbf{F}$ уравнение $\varphi = \mathbf{A}\varphi + \varepsilon\mathbf{F}\varphi$ имеет в окрестности φ несколько решений.

Вопрос о количестве этих различных решений и их построении для случая нелинейных интегральных уравнений аналитическими методами подробно изучен в работах А. М. Ляпунова [44], Э. Шмидта [72], Л. Лихтенштейна [40].

В более абстрактной форме различными методами эти же задачи решались Э. Кронин [35], Р. Бертлом [6] и др.

Метод А. М. Ляпунова — Э. Шмидта (а затем и других авторов) заключался в следующем.

Рассматривается уравнение $\varphi = \mathbf{A}\varphi$ и предполагается, что $\varphi_0 = \mathbf{A}\varphi_0$. Тогда решения уравнения $\varphi = \mathbf{A}\varphi + \mathbf{F}\varphi$ ищутся в виде $\varphi = \varphi_0 + h$. Для отыскания h получаем уравнение

$$h = \mathbf{A}(\varphi_0 + h) - \mathbf{A}\varphi_0 + \mathbf{F}(\varphi_0 + h). \tag{4.40}$$

Предположим, что оператор $\mathbf{A}$ в точке φ_0 имеет производную Фреше $\mathbf{B}$, у которой 1 является собственным числом, которому соответствует инвариантное подпространство E_1. По теории Рисса, пространство E представимо в виде прямой суммы E_1 и второго инвариантного для $\mathbf{B}$ подпространства E^1. Представление элемента $h \in E$ в виде

$$h = x + y \qquad (x \in E_1,\ y \in E^1)$$

определяет операторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}^1$ проектирования соответственно на E_1 и E^1:

$$\mathbf{P}_1 h = x, \qquad \mathbf{P}^1 h = y.$$

Операторы $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}^1$, как известно, коммутируют с $\mathbf{B}$.

Уравнение (4.40) может быть переписано в виде

$$h = \mathbf{B}h + \omega(h) \tag{4.41}$$

затем заменено эквивалентной системой

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_1\omega(x+y) = 0, \\ &y = \mathbf{B}y + \mathbf{P}^1\omega(x+y), \end{aligned} \tag{4.42}$$

где x и y отыскиваются соответственно в E_1 и E^1. В подпространстве E^1 оператор $\mathbf{B}$ не имеет 1 собственным числом, поэтому на E^1 определен оператор $\mathbf{F}y = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}y$. Система (4.42) поэтому может быть переписана в виде

$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_1\omega(x+y) = 0, \\ &y = \mathbf{F}\mathbf{P}^1\omega(x+y). \end{aligned} \tag{4.43}$$

Второе уравнение системы (4.43) при естественных предположениях при малых x имеет единственное малое решение y, зависящее от x: $y = \mathbf{R}(x)$, так как $\omega(h)$ состоит из членов высшего порядка малости и применим принцип сжатых отображений. Таким образом, решение уравнения (4.41) сводится к определению элемента $x \in E_1$ из уравнения

$$\mathbf{P}_1 \omega [x + \mathbf{R}(x)] = 0 \qquad (4.44)$$

и определению затем элемента y при помощи применения к x оператора $\mathbf{R}$.

Итак, возможность построения уравнения (4.41) определяется возможностью решить уравнение (4.44). Количество решений уравнения (4.44) определит количество решений уравнения (4.41). Уравнение (4.44) поэтому называется *уравнением разветвления.*

Уравнение разветвления — это уравнение в конечномерном пространстве E_1. Поэтому оно может быть записано в виде системы n уравнений с n неизвестными скалярными величинами, а затем исследовано методами теории функций. Наиболее простым является случай, когда E_1 одномерно; тогда уравнение разветвления представляет собой уравнение с одной числовой неизвестной.

Следует отметить, что фактическое построение уравнения разветвления сложно, так как оно требует предварительного построения оператора $\mathbf{R}$. Именно в связи с желанием избежать этой сложности нами и была предпринята попытка получить различные теоремы о точках бифуркации и т. д. методом непосредственного рассмотрения уравнения без перехода к уравнению разветвления.

§ 5. Расположение спектра в окрестности точки бифуркации

1. Множества $N^-_{\varepsilon,\delta}$ и $N^+_{\varepsilon,\delta}$. Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, действующий в банаховом пространстве E и удовлетворяющий условию $\mathbf{A}\theta = \theta$. Пусть отличное от нуля число μ_0 является точкой бифуркации для оператора $\mathbf{A}$. Без ограничения общности можно считать, что $\mu_0 > 0$.

Обозначим через $N^-_{\varepsilon,\delta}$ совокупность собственных векторов φ оператора $\mathbf{A}$: $\varphi = \mu \mathbf{A} \varphi$, норма которых не больше ε и которым соответствуют характеристические числа из интервала $(\mu_0 - \delta, \mu)$. Аналогично, $N^+_{\varepsilon,\delta}$ — совокупность собственных векторов, норма которых не больше ε и которым соответствуют характеристические числа из интервала $(\mu_0, \mu_0 + \delta)$.

2. Теорема о точках бифуркации. Пусть нелинейный вполне непрерывный оператор $\mathbf{A}(\mathbf{A}\theta=\theta)$ в точке θ имеет производную Фреше $\mathbf{B}$. Пусть μ_0 — характеристическое число оператора $\mathbf{B}$. В силу теоремы 4.7 из главы II индекс $\gamma(\mu)$ неподвижной точки θ поля $\mathbf{I}-\mu\mathbf{A}$ будет одинаков при всех $\mu<\mu_0$. Этот общий индекс обозначим через $\gamma(\mu_0-0)$. Аналогично через $\gamma(\mu_0+0)$ обозначим индекс неподвижной точки θ полей $\mathbf{I}-\mu\mathbf{A}$ при $\mu>\mu_0$ и близких к μ_0. Если θ будет изолированной точкой поля $\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{A}$, то ее индекс обозначим через $\gamma(\mu_0)$.

В § 2 настоящей главы исследовалась задача о точках бифуркации. В доказанных теоремах обосновывалась законность линеаризации для случаев, когда производная Фреше изучаемого оператора $\mathbf{A}$ имеет число μ_0 своим нечетнократным характеристическим числом. При этом условии числа $\gamma(\mu_0-0)$ и $\gamma(\mu_0+0)$ различны (и их произведение равно -1). Нетрудно видеть, что теорема о том, что μ_0 есть точка бифуркации, остается справедливой, если ее условия формулировать так:

$$\gamma(\mu_0-0)\neq\gamma(\mu_0+0),$$

не предполагая при этом, что оператор $\mathbf{A}$ дифференцируем.

Теоремы предыдущего параграфа позволяют исследовать вопрос о точках бифуркации и в том случае, когда

$$\gamma(\mu_0-0)=\gamma(\mu_0+0),$$

т. е. в случае, когда μ_0 имеет четную кратность.

Вначале докажем теоремы о точках бифуркации в терминах, не связанных с производной оператора $\mathbf{A}$.

Теорема 5.1. *Пусть θ — изолированная неподвижная точка вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{A}$ (θ — изолированное решение уравнения $\varphi=\mu_0\mathbf{A}\varphi$). Пусть*

$$\gamma(\mu_0-0)\neq\gamma(\mu_0).$$

Тогда найдутся такие ε, $\delta>0$, что множество $N^-_{\varepsilon,\delta}$ образует непрерывную ветвь в ε-окрестности точки θ, причем характеристические числа μ, соответствующие собственным векторам из $N^-_{\varepsilon,\delta}$, заполняют полностью некоторый интервал $(\mu_2,\mu_0)\subset(\mu_0-\delta,\mu_0)$.

Доказательство. Пусть $\gamma(\mu)=\gamma(\mu_0-0)$ при всех μ из $[\mu_1,\mu_0]$. В качестве ε выберем такое число, что в шаре T

радиуса ε с центром в точке θ векторные поля $\mathbf{I}-\mu_1\mathbf{A}$, $\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{A}$ не имеют отличных от θ неподвижных точек. Пусть $\delta=\mu_0-\mu_1$.

Покажем вначале, что $N^-_{\varepsilon,\delta}$ является непрерывной ветвью, т. е. покажем, что $N^-_{\varepsilon,\delta}\cap\Gamma\neq 0$, где Γ — граница произвольной области G, содержащей θ и лежащей внутри T. Рассмотрим для этого на Γ семейство векторных полей $\mathbf{\Phi}_\mu=\mathbf{I}-\mu\mathbf{A}$ $(\mu_1\leqslant\mu\leqslant\mu_0)$. Поля $\mathbf{\Phi}_{\mu_1}$ и $\mathbf{\Phi}_{\mu_0}$ имеют на Γ различное вращение, которое равно соответственно индексу $\gamma(\mu_1)$, $\gamma(\mu_0)$ единственной неподвижной точки θ, лежащей в области G. Поэтому поля $\mathbf{\Phi}_{\mu_1}$ и $\mathbf{\Phi}_{\mu_0}$ не могут быть гомотопны на Γ. Значит, при некотором $\mu\in(\mu_1, \mu_0)$ поле $\mathbf{\Phi}_\mu$ на Γ имеет нулевой вектор φ: $\varphi-\mu\mathbf{A}\varphi=\theta$. Точка φ будет принадлежать, следовательно, $N^-_{\varepsilon,\delta}$.

Обозначим через S границу шара T. Поле $\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{A}$ не имеет по предположению на S нулевых векторов. Поэтому найдется такое число $\alpha>0$, что

$$\|\varphi-\mu_0\mathbf{A}\varphi\|\geqslant\alpha \qquad (\varphi\in S).$$

Обозначим через μ_2 такое число, что $\mu_1<\mu_2<\mu_0$ и

$$\mu_0-\mu_2<\frac{\alpha}{\sup\limits_{\varphi\in S}\|\mathbf{A}\varphi\|}.$$

Тогда поля $\mathbf{\Phi}_\mu=\mathbf{I}-\mu\mathbf{A}$ $(\mu_2\leqslant\mu\leqslant\mu_0)$ гомотопны, так как они не имеют нулевых векторов на S, ибо

$$\|\varphi-\mu\mathbf{A}\varphi\|\geqslant\|\varphi-\mu_0\mathbf{A}\varphi\|-(\mu_0-\mu)\|\mathbf{A}\varphi\|\geqslant$$
$$\geqslant\alpha-(\mu_0-\mu_2)\sup_{\varphi\in S}\|\mathbf{A}\varphi\|>0.$$

Следовательно, поля $\mathbf{\Phi}_\mu$ $(\mu_2\leqslant\mu\leqslant\mu_0)$ имеют на S вращение, равное вращению $\gamma(\mu_0)$ поля $\mathbf{\Phi}\mu_0$.

Рассмотрим поле $\mathbf{\Phi}_\mu$ $(\mu_2\leqslant\mu\leqslant\mu_0)$ в шаре T. Это поле должно иметь, кроме θ, еще и другие нулевые векторы φ, так как в противном случае вращение на S было бы равно индексу $\gamma(\mu_0-0)$ точки θ. Точка φ будет собственным вектором оператора $\mathbf{A}$, которому соответствует характеристическое число μ.

Значит, интервал (μ_2, μ_0) полностью заполнен характеристическими числами оператора $\mathbf{A}$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 5.2. *Пусть* θ — *изолированная неподвижная точка вполне непрерывного векторного поля* $\mathbf{I}-\mu_0\mathbf{A}$. *Пусть*

$$\gamma(\mu_0)\neq\gamma(\mu_0+0).$$

Тогда найдутся такие ε, $\delta>0$, *что* $N^+_{\varepsilon,\delta}$ *образует непрерывную ветвь в* ε*-окрестности точки* θ, *причем характеристические числа* μ, *соответствующие собственным векторам* $\varphi\in N^+_{\varepsilon,\delta}$, *заполняют полностью некоторый интервал* $(\mu_0,\ \mu_2)\subset(\mu_0,\ \mu_0+\delta)$.

Из теорем 5.1 и 5.2 следует, что μ_0 является точкой бифуркации для оператора $\mathbf{A}$, если существуют и различны два из трех чисел

$$\gamma(\mu_0-0),\qquad\gamma(\mu_0),\qquad\gamma(\mu_0+0).$$

3. Дифференцируемый оператор. В этом пункте мы будем предполагать, что вполне непрерывный оператор $\mathbf{A}$ $(\mathbf{A}\theta=\theta)$ имеет в точке θ производную Фреше $\mathbf{B}$. Пусть μ_0 — характеристическое число оператора $\mathbf{B}$, причем инвариантное подпространство E_1, соответствующее характеристическому числу μ_0, состоит только из собственных векторов. Размерность подпространства E_1 обозначим через $\beta(\mu_0)$. Будем предполагать, что оператор $\mathbf{A}$ допускает представление (4.1) (стр. 214), причем выполнены условия a), b), c). Воспользуемся также обозначениями, введенными в § 4.

Из теорем 4.7 главы II и 4.1 главы IV вытекает, что

$$\gamma(\mu_0+0)=\gamma(\mu_0-0)(-1)^{\beta(\mu_0)}\tag{5.1}$$

и

$$\gamma(\mu_0)=\gamma(\mu_0-0)\gamma_1,\tag{5.2}$$

где γ_1 — вращение на единичной сфере S_1 подпространства E_1 векторного поля Φ_1:

$$\Phi_1 y=-\mathbf{P}_1\mathbf{C}y.$$

Равенство (5.2) имеет, конечно, смысл только в том случае, когда поле Φ_1 не имеет на S_1 нулевых векторов.

Уже известно (§ 2), что μ_0 будет точкой бифуркации, если $\beta(\mu_0)$ нечетно. Теоремы 5.1 и 5.2 позволяют в этом случае усилить предположения о точках бифуркации. В случае, когда $\beta(\mu_0)$ четно, теоремы 5.1 и 5.2 позволяют указать новые условия законности линеаризации в задаче о точках бифуркации.

Теорема 5.3. *Пусть* $|\gamma_1| \neq 1$. *Тогда* μ_0 *является точкой бифуркации, а спектр оператора* $\mathbf{A}$ *заполняет полностью два интервала* (μ_1, μ_0) *и* (μ_0, μ_2), *где* μ_1, μ_2 — *некоторые числа, удовлетворяющие условию* $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$.

Теорема 5.4. *Пусть* $\gamma_1 = -1$.

Тогда μ_0 *является точкой бифуркации.*

Если $\beta(\mu_0)$ *четно, то спектр оператора* $\mathbf{A}$ *полностью заполняет два интервала* (μ_1, μ_0) *и* (μ_0, μ_2), *где* μ_1, μ_2 — *некоторые числа, удовлетворяющие условию* $\mu_1 < \mu_0 < \mu_2$.

Если $\beta(\mu_0)$ *нечетно, то спектр оператора* $\mathbf{A}$ *полностью заполняет некоторый интервал* (μ_1, μ_0), *где* $\mu_1 < \mu_0$.

Теорема 5.5. *Пусть* $\beta(\mu_0)$ *нечетно и* $\gamma_1 = 1$.

Тогда спектр оператора $\mathbf{A}$ *полностью заполняет некоторый интервал* (μ_0, μ_2), где $\mu_0 < \mu_2$.

Доказательства всех этих теорем сводятся к проверке выполнения условий теорем 5.1 и 5.2. Интервалы (μ_1, μ_0) и (μ_0, μ_2) — это те интервалы, которые заполнены характеристическими числами оператора $\mathbf{A}$, соответствующими собственным векторам из непрерывных ветвей $N^-_{\varepsilon, \delta}$, $N^+_{\varepsilon, \delta}$.

В силу теорем 5.3—5.5 каждое предложение об индексе γ_1 можно формулировать как теорему о точках бифуркации и как теорему о расположении спектра. Так как получение таких формулировок не представляет труда, то мы ограничимся немногими примерами.

4. Примеры. Рассмотрим вначале оператор П. С. Урысона

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K[s, t, \varphi(t)]\, dt, \tag{5.3}$$

где G — замкнутое ограниченное множество конечномерного пространства. Относительно функции $K(s, t, u)$ будем предполагать, что она имеет $k+1$ непрерывные производные по u, причем

$$K(s, t, 0) \equiv \frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2} \equiv \frac{\partial^3 K(s, t, 0)}{\partial u^3} \equiv \ldots$$
$$\ldots \equiv \frac{\partial^{k-1} K(s, t, 0)}{\partial u^{k-1}} \equiv 0 \quad (s, t \in G).$$

Будем предполагать также, что $K'_u(s, t, 0)$ — симметричное ядро.

При этих условиях (см. § 4, пример 1) оператор (5.3) допускает представление (4.1).

Допустим, что μ_0 — простое характеристическое число линейного оператора $\mathbf{B}$,

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K'_u(s, t, 0)\,\varphi(t)\,dt,$$

которому соответствует собственная функция $e_0(s)$,

$$e_0(s) = \mu_0 \mathbf{B} e_0(s).$$

Тогда (см. стр. 227) индекс изолированной неподвижной точки θ оператора $\mathbf{A}$, рассматриваемого в пространстве непрерывных на G функций, определится числом

$$k!\,a = \int_G \int_G \frac{\partial^k K(s, t, 0)}{\partial u^k}\, e_0^k(t)\, e_0(s)\,dt\,ds, \tag{5.4}$$

которое предполагается отличным от нуля.

Если k четно, то $\gamma_1 = 0$ (см. стр. 228). В этом случае выполнены условия теоремы 5.3. Спектр оператора $\mathbf{A}$, состоящий из характеристических чисел, близких к μ_0, заполнит два интервала: (μ_1, μ_0) и (μ_0, μ_2). Например, это будет в случае, когда

$$\int_G \int_G \frac{\partial^2 K(s, t, 0)}{\partial u^2}\, e_u^2(t)\, e_0(s)\,dt\,ds \neq 0.$$

В большинстве прикладных задач у уравнения $\varphi = \mu\mathbf{A}\varphi$ ненулевые решения существуют либо при $\mu > \mu_0$, либо при $\mu < \mu_0$. Поэтому описанный выше случай не должен иметь места. Это значит, что в уравнениях, описывающих процессы, в которых вторые состояния (вторые решения) возможны, например, только при значениях параметра, бóльших некоторого критического μ_0, нелинейности должны быть, вообще говоря, такими, что $K''_{uu}(s, t, 0) \equiv 0$. Это замечание относится не только к уравнениям П. С. Урысона: *при разложении любого нелинейного оператора в ряд после линейного члена первым невырожденным должен быть, вообще говоря, член нечетного порядка.*

Если в (5.4) число k нечетно, то (см. стр. 228) в силу теорем 5.4 и 5.5 спектр оператора $\mathbf{A}$ заполняет интервал слева или справа от точки μ_0 в зависимости от знака интеграла (5.4). Если $a > 0$, то спектр заполняет интервал слева от μ_0, если $a < 0$, то справа.

В качестве второго примера рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt, \tag{5.5}$$

где G — снова ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства. Пусть симметричное ядро $K(s, t)$ допустимо, а функция $f(t, u)$ непрерывна по совокупности переменных вместе со своими производными по u до $(k+1)$-го порядка (см. § 4, пример 2), где k — нечетное число.

Пусть

$$f(t, 0) \equiv \frac{\partial^2 f(t, 0)}{\partial u^2} \equiv \frac{\partial^3 f(t, 0)}{\partial u^3} \equiv \ldots \equiv \frac{\partial^{k-1} f(t, 0)}{\partial u^{k-1}} \equiv 0 \qquad (t \in G)$$

и

$$\frac{\partial f(t, 0)}{\partial u} \equiv 1, \qquad \frac{\partial^k f(t, 0)}{\partial u^k} \equiv g(t).$$

Пусть μ_0 — характеристическое число нечетной кратности оператора

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\varphi(t)\, dt.$$

Тогда (см. конец пункта 3 предыдущего параграфа) $\gamma_1 = -1$, если $g(t) > 0$, и $\gamma_1 = 1$, если $g(t) < 0$. Из теорем 5.4 и 5.5 следует, что спектр оператора (5.5) заполнит полностью некоторый интервал слева от точки μ_0, если $g(t) > 0$, и справа от μ_0, если $g(t) < 0$.

Таким образом, в тех задачах, в которых вторые решения (собственные функции) должны появляться при $\mu > \mu_0$, разложение в ряд Тейлора функции $f(t, u)$ должно после линейного члена иметь следующий член нечетного порядка k, причем должно, вообще говоря, выполняться условие

$$\frac{\partial f(t, 0)}{\partial u} \frac{\partial^k f(t, 0)}{\partial u^k} < 0.$$

ГЛАВА V

СОБСТВЕННЫЕ ФУНКЦИИ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

В настоящей главе изучаются интегральные операторы, преобразующие неотрицательные функции в неотрицательные.

Первое серьезное исследование одного класса таких нелинейных интегральных операторов было проведено П. С. Урысоном [66] при помощи своеобразно применяемого метода последовательных приближений. Основные предложения П. С. Урысона о спектре положительных операторов в более общей форме доказываются в § 3 этой главы другим методом [29е], [31б, в].

Излагаемый в главе метод доказательства теорем существования собственных функций у положительных операторов берет свое начало от П. С. Александрова и Г. Хопфа [2]. Эти авторы указали, что с помощью топологической теоремы Брауэра о неподвижной точке весьма просто доказывается алгебраическая теорема Перрона о том, что каждая неособенная матрица с неотрицательными элементами имеет положительное собственное число, которому соответствует собственный вектор с неотрицательными координатами.

Теория М. Г. Крейна конусов в банаховом пространстве и принцип Шаудера неподвижной точки позволили М. А. Рутману получить топологическое доказательство теоремы Ентча (являющейся аналогом теоремы Перрона) о существовании положительного собственного числа, которому соответствует неотрицательная собственная функция у линейного интегрального оператора

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_a^b K(s, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

ядро которого точечно положительно.

Топологические соображения позволили М. А. Рутману изучить также некоторые классы нелинейных положительных монотонных вполне непрерывных операторов.

Позже было замечено [29д], что «конусные» соображения позволяют исследовать и широкие классы немонотонных положительных вполне непрерывных операторов. При этом методика доказательства теорем была упрощена.

Применение понятия вращения вполне непрерывного векторного поля позволило также исследовать структуру множества собственных векторов нелинейных операторов, изучаемых методами теории конусов. Как оказалось, собственные векторы, лежащие в конусе, образуют непрерывные ветви [29е].

§ 1. Теорема о собственном векторе

1. Конус в банаховом пространстве. Пусть E, — как обычно, вещественное банахово пространство.

Множество $M \subset E$ называется *выпуклым*, если вместе с каждыми двумя точками $x, y \in M$ этому множеству принадлежит полностью отрезок, соединяющий эти две точки, т. е.

$$\lambda x + (1 - \lambda) y \in M$$

при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Замкнутое выпуклое множество $K \subset E$ называется *конусом*, если выполнены условия:

a) Из $x \in K$ следует, что $tx \in K$ при всех $t \geqslant 0$.

b) Из каждой пары векторов (точек) $x, \; -x \in E$ по крайней мере один не лежит в K, если $x \neq \theta$.

Конус K позволяет ввести в E полуупорядоченность. Пишут $x \leqslant y$ или $y \geqslant x$, если $y - x \in K$. В частности, $x \geqslant \theta$, где θ — нуль пространства E, если $x \in K$. Легко проверяется, что знак $\leqslant$ обладает обычными свойствами знака $\leqslant$.

Ниже, рассматривая конкретные функциональные пространства E (непрерывных функций или функций, суммируемых с некоторой степенью p, $p \geqslant 1$), будем, как правило, выделять в них конус неотрицательных функций. Соотношение $\leqslant$ при этом приобретает простой смысл:

$$\varphi \leqslant \psi$$

тогда и только тогда, когда почти при всех значениях переменной t

$$\varphi(t) \leqslant \psi(t).$$

Отметим три утверждения, непосредственно следующих из определения конуса.

1. *Пусть $u \in E$, $x \in K$ и $x - \gamma u \overline{\in} K$, где γ — некоторое положительное число.*

Тогда из $x \geqslant tu$ следует, что $t < \gamma$.

Действительно, если $x - tu \in K$ и $\gamma \leqslant t$, то из выпуклости конуса и свойства а) следует, что

$$x - tu + \frac{t-\gamma}{\gamma} x \in K,$$

т. е.

$$\frac{t}{\gamma}(x - \gamma u) \in K,$$

что противоречит условию.

Множество векторов вида $x + u$, где $x \in K$, а u — некоторый фиксированный вектор, будем обозначать через $K + u$. Множество $K + u$ будет, очевидно, замкнутым.

2. *Если $-u \overline{\in} K$, то*

$$\rho(\theta, K + u) = \inf_{x \in K} \|x + u\| > 0.$$

Для доказательства этого утверждения достаточно заметить, что

$$\rho(\theta, K + u) = \rho(-u, K).$$

3. *Пусть u — такой вектор из E, что $-u \overline{\in} K$.*

Тогда для любого $x \in E$ можно указать такое $\gamma > 0$, что

$$x - \gamma u \overline{\in} K.$$

Действительно, если $x - nu \in K$ при всех $n = 1, 2, \ldots$, то вектор $-u$ принадлежит K, так как он является предельным для последовательности векторов $\frac{x}{n} - u \ (n = 1, 2, \ldots)$ из конуса K. Полученное противоречие доказывает утверждение 3.

2. Положительные операторы. Векторы $\varphi \in K$ будем называть *положительными векторами.*

Оператор $\mathbf{A}$, действующий в пространстве E (или в его части), будем называть *положительным*, если он преобразует положительные векторы в положительные.

Ниже через K_r обозначается множество положительных векторов с нормой, не превосходящей r. Множество K_r при любом r будет выпуклым, так как оно является пересечением двух выпуклых множеств: конуса K и шара T_r векторов с нормой, не превосходящей r.

Приведем наиболее простое утверждение о существовании собственного вектора у положительного вполне непрерывного оператора.

Лемма 1.1. *Пусть $\mathbf{A}$ — положительный вполне непрерывный оператор. Пусть для некоторого $r_0 > 0$*

$$\rho(\theta,\ \mathbf{A}K_{r_0}) = \inf_{x \in K_{r_0}} \|\mathbf{A}x\| > 0. \tag{1.1}$$

Тогда оператор $\mathbf{P}$ имеет в конусе K по крайней мере один собственный вектор x_0, $\|x_0\| = r_0$, которому соответствует положительное собственное число λ:

$$\mathbf{A}x_0 = \lambda x_0. \tag{1.2}$$

Доказательство. Определим на K_r оператор $\mathbf{B}$ равенством

$$\mathbf{B}x = \frac{r_0}{\|\mathbf{A}x\|}\mathbf{A}x \qquad (x \in K_{r_0}).$$

Как легко видеть, оператор $\mathbf{B}$ вполне непрерывен и отображает выпуклое множесто K_{r_0} в себя. В силу принципа Шаудера неподвижной точки найдется такой элемент $x_0 \in K_{r_0}$, что

$$\mathbf{B}x_0 = x_0.$$

Но это и означает, что имеет место равенство (1.2), в котором

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{A}x_0\|}{r_0} > 0,$$

причем $\|x_0\| = r_0$.

Лемма доказана.

В некоторых случаях бывает удобно несколько более общее утверждение Э. Роте.

Положительный вполне непрерывный оператор **A** *имеет собственный вектор* x_0, $\|x_0\| = r_0$, *если выполнено условие*

$$\inf_{x \in K,\ \|x\| = r_0} \|\mathbf{A}x\| > 0. \tag{1.3}$$

Доказательство этого утверждения следует из леммы 1.1, если рассмотреть вспомогательный оператор $\mathbf{A}_1$:

$$\mathbf{A}_1 x = \|x\| \,\mathbf{A}\left(\frac{r}{\|x\|} x\right) + (r_0 - \|x\|)\, u \qquad (x \in K_{r_0}),$$

где u — некоторый фиксированный элемент из конуса K. Достаточно заметить, что оператор $\mathbf{A}_1$ удовлетворяет условиям леммы 1.1 и что

$$\mathbf{A}_1 x = r_0 \mathbf{A} x$$

при $x \in K$, $\|x\| = r_0$.

Вернемся к рассмотрению оператора **A**, удовлетворяющего условиям леммы 1.1. Изменяя r в формулировке леммы, мы получим, что этот оператор **A** имеет собственные векторы любой нормы, не превышающей r_0. Естественно ожидать, что эти собственные векторы образуют непрерывную ветвь в том смысле, как это было определено в предыдущей главе. Для выяснения структуры множества собственных векторов мы установим вспомогательную геометрическую теорему ([29е], подробное доказательство опубликовано в [31б]), содержащую как частный случай лемму 1.1. Лемму 1.1 и простое доказательство ее мы привели, так как они выясняют простой геометрический смысл подобных утверждений.

Теорема 1.1. *Пусть* Γ — *граница открытого ограниченного множества* $G \subset E$, *внутренней точкой которого является* θ. *Пусть на* $\Gamma \cap K$ *определен положительный вполне непрерывный оператор* **A**, *причем*

$$\inf_{x \in \Gamma \cap K} \|\mathbf{A}x\| > 0. \tag{1.4}$$

Тогда оператор **A** *имеет на* $\Gamma \cap K$ *по крайней мере один собственный вектор* x_0:

$$\mathbf{A}x_0 = \lambda x_0,$$

которому соответствует положительное собственное число λ.

Доказательство. Рассмотрим вначале случай конечномерного E.

Оператор $\mathbf{A}$ по условию теоремы определен только на $\Gamma \cap K$. Построим такое непрерывное продолжение $\tilde{\mathbf{A}}$ оператора $\mathbf{A}$ на все Γ, что

$$\tilde{\mathbf{A}}\Gamma \subset K \tag{1.5}$$

и

$$\inf_{x \in \Gamma} \|\tilde{\mathbf{A}}x\| > 0. \tag{1.6}$$

Для конструирования оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ рассмотрим в линейном множестве R минимальной размерности, содержащем множество $\mathbf{A}(\Gamma \cap K)$, некоторую систему координат. Пусть n — размерность R. Тогда заданию оператора $\mathbf{A}$ эквивалентно задание на $\Gamma \cap K$ непрерывных функций $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ — компонент вектора $\mathbf{A}x$ в рассматриваемой системе координат. Продолжим по Урысону непрерывные функции $\varphi_1(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x)$ на все Γ. Мы получим непрерывное продолжение $\mathbf{A}_1$ оператора $\mathbf{A}$ на Γ, причем $\mathbf{A}_1\Gamma \subset R$. Пусть S — выпуклая оболочка множества $\mathbf{A}(\Gamma \cap K)$. Легко видеть, что $S \in K$ и $\rho(\theta, S) > 0$. Выберем в S некоторую внутреннюю точку u_0 и обозначим через $\mathbf{P}$ оператор, совпадающий с $\mathbf{I}$ на S и преобразующий каждую другую точку $z \in R$ в точку пересечения отрезка, соединяющего точки u_0 и z, с границей множества S. Оператор $\mathbf{P}$ будет непрерывен. Оператор $\tilde{\mathbf{A}} = \mathbf{P}\mathbf{A}_1$ будет, как нетрудно проверить, удовлетворять условиям (1.5) и (1.6).

Каждый собственный вектор x_0 оператора $\tilde{\mathbf{A}}$, которому соответствует положительное собственное число λ:

$$\tilde{\mathbf{A}}x_0 = \lambda x_0, \tag{1.7}$$

является собственным вектором и оператора $\mathbf{A}$, так как из (1.7) и $\tilde{\mathbf{A}}x_0 \in K$ следует, что $x_0 \in K$, а тогда $\tilde{\mathbf{A}}x_0 = \mathbf{A}x_0$.

Таким образом, для того чтобы завершить доказательство теоремы для конечномерного случая, достаточно показать, что оператор $\tilde{\mathbf{A}}$ имеет собственные векторы, которым соответствуют положительные собственные числа.

Допустим, что это не так.

Рассмотрим тогда на Γ непрерывное семейство непрерывных векторных полей

$$\Phi_t = \mathrm{I} - t\tilde{\mathrm{A}}. \tag{1.8}$$

Покажем, что при достаточно больших t векторные поля Φ_t выпускают направление u_0, где u_0 — любой фиксированный вектор из конуса. Действительно, предположим, что существует последовательность неограниченно возрастающих положительных чисел t_k $(k = 1, 2, \ldots)$, причем для каждого t_k найдется такой вектор $x_k \in \Gamma$, что

$$x_k - t_k\tilde{\mathrm{A}}x_k = \lambda_k u_0 \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

где $\lambda_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$. Выберем подпоследовательность x_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы последовательность $\tilde{\mathrm{A}}x_{k_i}$ сходилась к некоторому элементу v. Так как нормы элементов $\tilde{\mathrm{A}}x$ $(x \in \Gamma)$ ограничены снизу положительным числом, то $\|v\| \neq 0$. Из замкнутости конуса следует, что $v \in K$. Так как нормы векторов x_{k_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ равномерно ограничены, то v будет предельным вектором и для последовательности векторов

$$\tilde{\mathrm{A}}x_{k_i} - \frac{x_{k_i}}{t_{k_i}} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

В силу того, что

$$\tilde{\mathrm{A}}x_{k_i} - \frac{x_{k_i}}{t_{k_i}} = -\frac{\lambda_{k_i}}{t_{k_i}} u_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

мы, переходя к пределу, получим, что $v = -\lambda_0 u_0$, где $\lambda_0 > 0$. Но тогда $-u_0 \in K$ и $u_0 \in K$, что противоречит условию b) в определении конуса. Это противоречие доказывает, что векторные поля (1.8) при достаточно больших t выпускают направление u_0.

По допущению, поля Φ_t не имеют нулевых векторов и, следовательно, вращение их на Γ одинаково. Вычислим это вращение. С одной стороны, вращение равно нулю, так как мы доказали, что при достаточно больших t поля Φ_t выпускают некоторые направления. С другой стороны, абсолютная величина вращения равна единице, так как $\Phi_0 = \mathrm{I}$. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы для конечномерного случая.

Перейдем к случаю бесконечномерного E.

Пусть вполне непрерывный оператор $\mathbf{A}$, удовлетворяющий условию теоремы, не имеет на $\Gamma \cap K$ собственных векторов, которым отвечают положительные собственные числа.

Тогда найдется такое число $a > 0$, что

$$\|\mathbf{A}x - tx\| > a \qquad (x \in \Gamma \cap K, \quad 0 \leqslant t < \infty). \tag{1.9}$$

Действительно, предположив обратное, построим такую последовательность элементов $x_k \in \Gamma \cap K$ и такую последовательность чисел t_k, что

$$\|\mathbf{A}x_k - t_k x_k\| < \frac{1}{k} \qquad (K = 1, 2, \ldots).$$

Числа t_k удовлетворяют при этом неравенствам

$$\frac{1}{\|x_k\|}\left(\|\mathbf{A}x_k\| - \frac{1}{k}\right) < t_k < \frac{1}{\|x_k\|}\left(\|\mathbf{A}x_k\| + \frac{1}{k}\right),$$

откуда вытекает (так как числа $\|x_k\|$, $\|\mathbf{A}x_k\|$, $k = 1, 2, \ldots$, равномерно ограничены сверху и снизу положительными числами) возможность выбора такой последовательности индексов k_i $(i = 1, 2, \ldots)$, что числа t_{k_i} сходятся к некоторому числу $t_0 \neq 0$ и векторы $\mathbf{A}x_{k_i}$ сходятся к некоторому вектору v. Тогда последовательность x_{k_i} сходится к элементу $\frac{1}{t_0} v$, так как

$$\left\|x_{k_i} - \frac{v}{t_0}\right\| \leqslant \left\|x_{k_i} - \frac{\mathbf{A}x_{k_i}}{t_{k_i}}\right\| + \|\mathbf{A}x_{k_i}\| \cdot \left|\frac{1}{t_{k_i}} - \frac{1}{t_0}\right| + \frac{1}{t_0}\|\mathbf{A}x_{k_i} - v\|.$$

Вектор $\frac{1}{t_0} v \in \Gamma \cap K$ при этом является собственным вектором оператора $\mathbf{A}$.

Аппроксимируем оператор $\mathbf{A}$ на $\Gamma \cap K$ конечномерным *) непрерывным оператором $\mathbf{A}_1$ с точностью до $\frac{a}{2}$:

$$\|\mathbf{A}x - \mathbf{A}_1 x\| < \frac{a}{2} \qquad (x \in \Gamma \cap K), \tag{1.10}$$

удовлетворяя одновременно условию

$$\mathbf{A}_1(\Gamma \cap K) \subset K.$$

---

*) То-есть таким оператором, множество значений которого лежит в конечномерном подпространстве.

Возможность такой аппроксимации непосредственно вытекает, например, из шаудеровской конструкции аппроксимирующих конечномерных операторов (см. стр. 113).

Обозначим через E_1 конечномерное подпространство $\subset E$, содержащее $\mathbf{A}_1(\Gamma \cap K)$. Через K_1 обозначим пересечение $K \cap E_1$. Множество K_1 также будет конусом. Введем обозначение $G_1 = G \cap E_1$. Граница Γ_1 множества G_1 является частью Γ.

Из (1.9) и (1.10) следует неравенство

$$\|\mathbf{A}_1 x - tx\| \geqslant \|\mathbf{A}x - tx\| - \|\mathbf{A}_1 x - \mathbf{A}x\| > \frac{a}{2}$$
$$(x \in \Gamma_1 \cap K_1,\ 0 \leqslant t < \infty),$$

откуда вытекает, что оператор $\mathbf{A}_1$ не имеет на $\Gamma_1 \cap K_1$ собственных векторов, которым отвечают положительные собственные числа.

С другой стороны, оператор $\mathbf{A}_1$ имеет собственные векторы на $\Gamma_1 \cap K_1$, так как он удовлетворяет условию (1.4), причем его можно рассматривать в конечномерном пространстве E_1, а для конечномерного случая теорема доказана.

Таким образом, допущение, что оператор $\mathbf{A}$ не имеет на $\Gamma \cap K$ собственных векторов, приводит к противоречию.

Теорема доказана.

Приведенное доказательство основано на переходе к случаю конечномерного пространства. Естественно возникает вопрос о непосредственном доказательстве этой теоремы для случая бесконечномерного пространства.

Для получения такого доказательства заметим вначале, что в условиях теоремы 1.1 главы IV у оператора $\mathbf{A}$ существует на Γ собственный вектор, соответствующий положительному собственному числу. Действительно, в условиях этой теоремы вращение поля $\mathbf{I} - t\mathbf{A}$ при больших t равно нулю. Поэтому сформулированное усиление вытекает из теоремы 1.2 главы IV.

Допустим, что рассматриваемый оператор $\mathbf{A}$ определен на всем Γ и удовлетворяет условиям

$$\mathbf{A}x \in K, \quad \|\mathbf{A}x\| \geqslant a > 0 \qquad (x \in \Gamma).$$

Тогда найдется собственный вектор $\varphi_0 \in \Gamma$ оператора $\mathbf{A}$, которому соответствует положительное собственное число. Поэтому $\varphi_0 \gg 0$, и доказательство завершено.

Для применения указанного простого доказательства нужно уметь оператор $\mathbf{A}$, заданный только на $\Gamma \cap K$, продолжать соответствующим образом на все Γ. Тогда собственный вектор φ_0 продолженного оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ будет одновременно собственным вектором оператора $\mathbf{A}$, если $\varphi_0 \in \Gamma \cap K$.

В случае произвольного конуса построение оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ оказывается более сложным, чем приведенное в этом пункте доказательство теоремы 1.1. Это объясняется тем, что теорема 3.2 главы II не дает возможности непосредственно продолжить оператор $\mathbf{A}$ даже так, чтобы выполнялось одно условие: $\tilde{\mathbf{A}}\Gamma \subset K$.

В некоторых случаях, однако, построение оператора $\tilde{\mathbf{A}}$ осуществляется просто.

Пусть каждый элемент $u \in E$ представим в виде

$$u = \mathbf{P}_1 u + \mathbf{P}_2 u,$$

где $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ — непрерывные операторы, множество значений которых лежит в K, причем $\mathbf{P}_1 u = u$ и $\mathbf{P}_2 u = \theta$ при $u \in K$. Если K — конус неотрицательных функций (например, в C или L^p), то в качестве $\mathbf{P}_1$ можно рассмотреть оператор, относящий функции $u(s)$ функцию, принимающую те же значения, что и $u(s)$, в точках, где $u(s) \geqslant 0$, и равную нулю в остальных точках. Для указанных конусов (миниэдральных по терминологии М. Г. Крейна) в ряде случаев нужными свойствами обладает оператор

$$\tilde{\mathbf{A}} u = \mathbf{A}(\mathbf{P}_1 u) + \|\mathbf{P}_2 u\| \mathbf{A}(\mathbf{P}_2 u).$$

3. Ветви собственных векторов. Будем говорить, что собственные векторы оператора $\mathbf{A}$ образуют *непрерывную ветвь длины R*, если непусто пересечение множества собственных векторов с границей Γ каждого открытого множества, содержащего нуль θ пространства E и содержащегося в шаре $\|x\| \leqslant R_1$, где R_1 — любое положительное число, меньшее чем R.

Из теоремы 1.1 вытекает

Теорема 1.2. *Пусть положительный вполне непрерывный оператор* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию*

$$\rho(\theta, \mathbf{A}(\Gamma \cap K)) > 0, \tag{1.11}$$

где Γ — граница любого открытого множества F, содержащего θ и содержащегося вместе с Γ внутри шара $\|x\| < R$.

Тогда собственные векторы оператора $\mathbf{A}$ *образуют в конусе K непрерывную ветвь длины R.*

Это утверждение дает весьма грубые признаки существования собственных векторов. Оно не содержит даже общих признаков существования собственных векторов у линейных положительных операторов. В следующем параграфе будут установлены более тонкие утверждения.

Однако некоторые приложения теорема 1.2 находит.

Пример. Рассмотрим интегральный оператор Гаммерштейна

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt,$$

где G — некоторое замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства.

Пусть ядро $K(s, t)$ непрерывно и положительно,

$$K(s, t) \geqslant m > 0 \qquad (s, t \in G).$$

Пусть функция $f(t, u)$ $(t \in G,\ 0 \leqslant u < \infty)$ удовлетворяет условиям Каратеодори и неравенствам

$$au^p \leqslant f(t, u) \leqslant bu^p + c \qquad (t \in G,\ 0 \leqslant u < \infty).$$

Обозначим через $f_1(t, u)$ функцию, определенную равенством

$$f_1(t, u) = f(t, |u|) \qquad (t \in G,\ -\infty < u < \infty).$$

В силу теорем главы I оператор $\mathbf{A}_1$

$$\mathbf{A}_1\varphi(s) = \int_G K(s, t) f_1[t, \varphi(t)]\, dt$$

будет действовать в пространстве L^p и будет вполне непрерывным.

Так как на неотрицательных функциях $\varphi(s)$ из пространства L^p

$$\mathbf{A}_1\varphi = \mathbf{A}\varphi,$$

то оператор $\mathbf{A}$, рассматриваемый в конусе K положительных функций из L^p, вполне непрерывен.

Положительность оператора $\mathbf{A}$ очевидна.

Пусть Γ — граница некоторого открытого множества из L^p, содержащего шар $\|\varphi\| \leqslant r$. Тогда при $\varphi \in \Gamma \cap K$

$$\|\varphi\| > r$$

и

$$\|\mathbf{A}\varphi\| = \left\{ \int\limits_G \left[\int\limits_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt \right]^p ds \right\}^{\frac{1}{p}} > ma\,(\text{mes}\, G)^{\frac{1}{p}} r^p.$$

Таким образом, если $a > 0$, то выполнено условие (1.11), откуда следует теорема:

Положительные собственные функции интегрального оператора Гаммерштейна образуют (при перечисленных выше условиях) в L^p непрерывную ветвь бесконечной длины.

4. Конус $K_{u_0, k}$. При изучении некоторых нелинейных операторов в пространствах C или L^p удобно рассматривать конусы, отличные от конуса неотрицательных функций. В настоящем пункте будут приведены такие теоремы о существовании непрерывных ветвей собственных векторов, доказательства которых используют конус K_ε специальной структуры. Конус K_ε рассматривался для доказательства других предложений М. Г. Крейном и М. А. Рутманом [34].

Пусть K — конус в банаховом пространстве E. Пусть $u_0 \in K$, $u_0 \neq 0$.

Для каждого элемента $u \in K$ рассмотрим совокупности $L(u)$, $N(u)$ таких чисел l, n, при которых справедливы соотношения

$$lu_0 \leqslant u \leqslant nu_0.$$

Из замкнутости конуса K вытекает, что множества $L(u)$, $N(u)$ замкнуты. При этом множество $L(u)$ (если оно непусто) ограничено сверху, а множество $N(u)$ — снизу. Пусть

$$l(u) = \max_{l \in L(u)} l, \qquad n(u) = \min_{n \in N(u)} n.$$

Обозначим через $K_{u_0, k}$, где $k \geqslant 1$, совокупность таких элементов $u \in E$, для которых $l(u) > 0$, $n(u) > 0$ и

$$n(u) \leqslant kl(u). \tag{1.12}$$

Покажем, что $K_{u_0, k}$ является конусом, если это множество пополнено нулевым элементом.

Пусть u_1, $u_2 \in K_{u_0, k}$. Тогда из

$$l(u_1)\,u_0 \leqslant u_1 \leqslant n(u_1)\,u_0, \qquad l(u_2)\,u_0 \leqslant u_2 \leqslant n(u_2)\,u_0$$

следует при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$

$$[\lambda l(u_1) + (1-\lambda)\,l(u_2)]\,u_0 \leqslant \lambda u_1 + (1-\lambda)\,u_2 \leqslant$$
$$\leqslant [\lambda n(u_1) + (1-\lambda)\,n(u_2)]\,u_0.$$

Значит,

$$l[\lambda u_1 + (1-\lambda)\,u_2] \geqslant \lambda l(u_1) + (1-\lambda)\,l(u_2)$$

и

$$0 < n[\lambda u_1 + (1-\lambda)\,u_2] \leqslant \lambda n(u_1) + (1-\lambda)\,n(u_2).$$

Из последних неравенств и (1.12) вытекает, что

$$\frac{n[\lambda u_1 + (1-\lambda)\,u_2]}{l[\lambda u_1 + (1-\lambda)\,u_2]} \leqslant \frac{\lambda n(u_1) + (1-\lambda)\,n(u_2)}{\lambda l(u_1) + (1-\lambda)\,l(u_2)} \leqslant k.$$

Таким образом, $\lambda u_1 + (1-\lambda)\,u_2 \in K_{u_0, k}$ при $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$. Значит, $K_{u_0, k}$ выпукло.

Замкнутость $K_{u_0, k}$ вытекает из того, что в соотношениях

$$l(u_n)\,u_0 \leqslant u_n \leqslant n(u_n)\,u_0 \qquad (u_n \in K_{u_0, k};\ n = 1, 2, \ldots)$$

можно по некоторой подпоследовательности перейти к пределу, если последовательность u_n сильно сходится.

Выполнение условий a), b) из определения конуса очевидно.

Если в пространстве C непрерывных на G функций рассмотреть совокупность положительных функций $\varphi(s)$, удовлетворяющих условию

$$\max_{s \in G} \varphi(s) \leqslant k \min_{s \in G} \varphi(s), \tag{1.13}$$

то она образует конус $K_{u_0, k}$, где $u_0(s) \equiv 1$. Аналогично в пространстве L^p конус $K_{u_0, k}$, где $u_0(s) \equiv 1$, образует совокупность функций $\varphi(s)$, для которых

$$\operatorname{vrai}\max_{s \in G} \varphi(s) \leqslant k \operatorname{vrai}\min_{s \in G} \varphi(s). \tag{1.14}$$

Пример 1. Рассмотрим интегральный оператор Гаммерштейна

$$A\varphi(s) = \int K(s, t)\,f[t, \varphi(t)]\,dt,$$

где G — замкнутое ограниченное множество n-мерного пространства. Будем предполагать, что ядро $K(s, t)$ допустимо и удовлетворяет условию

$$0 < m \leqslant K(s, t) \leqslant M < \infty \qquad (s, t \in G), \tag{1.15}$$

а непрерывная функция $f(t, u)$ $(t \in G,\ 0 \leqslant u < R)$ удовлетворяет условию*)

$$f(t, 0) \equiv 0, \quad f(t, u) \geqslant h(u) \quad (t \in G,\ 0 \leqslant u < R), \tag{1.16}$$

где $h(u)$ — неубывающая функция, равная нулю только при $u = 0$.

Оператор $\mathbf{A}$ будет при выполнении этих условий определен на множестве K_R функций с нормой, меньшей R, из конуса K неотрицательных функций пространства C непрерывных на G функций. Оператор $\mathbf{A}$ будет положительным и вполне непрерывным.

В силу (1.15) для любой функции $\varphi(s) \in K_R$

$$m \int_G f[t, \varphi(t)]\,dt \leqslant \mathbf{A}\varphi(t) \leqslant M \int_G f[t, \varphi(t)]\,dt,$$

т. е.

$$\frac{n(\mathbf{A}\varphi)}{l(\mathbf{A}\varphi)} \leqslant \frac{M}{m}.$$

Значит, оператор $\mathbf{A}$ положителен и относительно конуса $K_{u_0, \frac{M}{m}}$ $(u_0 \equiv 1)$.

Пусть Γ — граница открытого множества $F \subset C$, содержащего 0 вместе с его шаровой окрестностью радиуса r и лежащего вместе с Γ внутри шара радиуса R. Тогда для каждой функции $\varphi(s) \in \Gamma \cap K_{u_0, \frac{M}{m}}$ справедливо неравенство

$$\min_{s \in G} \varphi(s) \geqslant \frac{m}{M} \max_{s \in G} \varphi(s) \geqslant \frac{mr}{M},$$

---

*) Из доказательства видно, что достаточно требовать в (1.16) выполнения неравенства $f(t, u) \geqslant h(u)$ лишь на некотором множестве $G_1 \subset G$ положительной меры.

откуда в силу (1.15) и (1.16)

$$\|\mathbf{A}\varphi(s)\| = \max_{s\in G} \int\limits_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt \geqslant m \int\limits_G h[\varphi(t)]\, dt \geqslant$$

$$\geqslant mh\left(\frac{mr}{M}\right) \operatorname{mes} G \qquad \left(\varphi \in \Gamma \cap K_{u_0, \frac{M}{m}}\right).$$

Полученное неравенство является условием (1.4) теоремы 1.1.

В силу теоремы 1.1 оператор $\mathbf{A}$ имеет на $\Gamma \cap K_{u_0, \frac{M}{m}}$ по крайней мере одну собственную функцию.

Таким образом, *собственные функции интегрального оператора* $\mathbf{A}$ *образуют при выполнении условий* (1.15) *и* (1.16) *в конусе* K *непрерывных неотрицательных функций непрерывную ветвь длины* R.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор А. М. Ляпунова

$$L\varphi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_G \ldots \int\limits_G K_i(s, t_1, \ldots, t_i)\, u(t_1) \ldots u(t_i)\, dt_1 \ldots dt_i,$$

где G — замкнутое ограниченное множество конечномерного пространства.

Будем предполагать, что оператор L определен в единичном шаре пространства C (непрерывных на G функций) и вполне непрерывен (условия полной непрерывности см. в главе I). Кроме этого, будем предполагать, что все ядра $K_i(s; t_1, \ldots, t_i)$, не равные тождественно нулю, удовлетворяют условиям

$$0 < m_i \leqslant K_i(s, t_1, \ldots, t_i) \leqslant M_i < \infty \quad (s, t_1, \ldots, t_i \in G), \tag{1.17}$$

причем

$$\frac{M_i}{m_i} \leqslant k \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{1.18}$$

где $k < \infty$.

Пусть $\varphi(s)$ — неотрицательная функция, на которой определен оператор L, причем

$$\max_{s\in G} \mathbf{A}\varphi(s) = \mathbf{A}\varphi(s^*), \qquad \min_{s\in G} \mathbf{A}\varphi(s) = \mathbf{A}\varphi(s^{**}).$$

Тогда

$$\max_{s\in G} \mathbf{A}\varphi(s) = \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\dot G} \ldots \int\limits_{\dot G} K_i(s^*, t_1, \ldots, t_i)\,\varphi(t_1)\ldots\varphi(t_i)\,dt_1\ldots dt_i \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \frac{M_i}{m_i} \int\limits_{\dot G} \ldots \int\limits_{\dot G} K_i(s^{**}, t_1, \ldots, t_i)\,\varphi(t_1)\ldots\varphi(t_i)\,dt_1\ldots dt_i \leqslant$$

$$\leqslant k \min_{s\in G} \mathbf{A}\varphi(s).$$

Значит, оператор L положителен относительно конуса $K_{u_0,\,k}\,(u_0 \equiv 1)$.

Пусть снова Γ — граница открытого множества $F \subset C$, содержащего θ вместе с шаровой окрестностью радиуса r и лежащего вместе с Γ внутри единичного шара. Тогда для каждой функции $\varphi(s) \in \Gamma \cap K_{u_0,\,k}$ справедливо неравенство

$$\min_{s\in G} \varphi(s) \geqslant \frac{1}{k} \max_{s\in G} \varphi(s) \geqslant \frac{r}{k}.$$

откуда

$$\|L\varphi(s)\| =$$

$$= \max_{s\in G} \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\dot G} \ldots \int\limits_{G} K_i(s, t_1, \ldots, t_i)\,\varphi(t_1)\ldots\varphi(t_i)\,dt_1\ldots dt_i \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{i=1}^{\infty} m_i\left(\frac{r}{k}\operatorname{mes} G_i\right)^i \qquad \left(\varphi(s) \in \Gamma \cap K_{u_0,\,k}\right).$$

Полученное неравенство является условием (1.11) теоремы 1.2.

Таким образом, *собственные функции интегрального оператора Ляпунова образуют при выполнении условий* (1.17) *и* (1.18) *в конусе непрерывных неотрицательных функций непрерывную ветвь длины* 1.

§ 2. Операторы с монотонными минорантами [2е]

1. Построение операторов, близких к исследуемому. Вполне непрерывные положительные операторы, непосредственно удовлетворяющие условиям теоремы 1.2, не исчерпывают всех случаев, которые могут быть исследованы методами теории конусов. Это относится даже к линейным положительным операторам.

Общий путь установления существования собственных векторов для более широких классов положительных операторов заключается в следующем. Конструируются близкие к изучаемому оператору **A** операторы $\mathbf{A}_n$ так, что для них существование собственных векторов φ_n

$$\mathbf{A}_n \varphi_n = \lambda_n \varphi_n \tag{2.1}$$

доказывается просто. Ниже операторы $\mathbf{A}_n$ определяются равенством

$$\mathbf{A}_n \varphi = \mathbf{A}\left(\varphi + \frac{1}{n} v\right) \qquad (\varphi \in K;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.2}$$

где v — так подобранный вектор из конуса K, что операторы $\mathbf{A}_n (n = 1, 2, \ldots)$ удовлетворяют условиям теоремы 1.2.

Совершая в равенстве (2.1) предельный переход, получают теоремы о существовании собственных векторов у оператора **A**. Этот предельный переход оказывается возможным в случае, когда абсолютные величины собственных чисел λ_n в равенстве (2.1) равномерно ограничены снизу.

2. Монотонные операторы. Оператор **A**, действующий в пространстве E, полуупорядоченном при помощи конуса K, называется *монотонным*, если из $x \leqslant y \, (x, y \in E)$ следует:

$$\mathbf{A}x \leqslant \mathbf{A}y.$$

Монотонными операторами будут, например, все положительные линейные операторы.

Лемма 2.1. *Пусть* **A** — *монотонный положительный оператор. Пусть для некоторого вектора* u, *такого, что* $-u \overline{\in} K$, *выполняется соотношение*

$$c\mathbf{A}(tu) \gg tu \qquad (\delta \leqslant t < \gamma), \tag{2.3}$$

где $c > 0$, $\gamma > 0$, $\delta \geqslant 0$ — *заданные числа*). Пусть для вектора* $x \in K$ *одновременно выполнены соотношения*

$$x - \gamma u \overline{\in} K, \tag{2.4}$$

$$x \gg \alpha \mathbf{A}x \qquad (\alpha > 0), \tag{2.5}$$

$$x \gg \beta u \qquad (\beta > 0,\ \beta \geqslant \delta). \tag{2.6}$$

---

*) Важность условий типа (2.3) при установлении существования собственных функций у положительных монотонных операторов впервые была выяснена М. А. Рутманом в его кандидатской диссертации.

Тогда обязательно

$$\alpha \leqslant c. \tag{2.7}$$

Доказательство. В силу утверждения **1** из § 1 настоящей главы и (2.6) $\beta < \gamma$. Применяя к соотношению (2.6) оператор **A**, получим в силу (2.3)

$$\mathbf{A}x \gg \mathbf{A}(\beta u) \gg \frac{\beta}{c} u,$$

откуда в силу (2.5) следует:

$$x \gg \frac{\alpha}{c} \beta u. \tag{2.8}$$

В силу того же утверждения **1** из (2.8) следует, что

$$\frac{\alpha}{c} \beta < \gamma.$$

Применяя к (2.8) снова оператор **A**, получим в силу (2.5) и (2.6)

$$x \gg \left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 \beta u,$$

откуда в свою очередь вытекает, что

$$\left(\frac{\alpha}{c}\right)^2 \beta < \gamma.$$

Применяя n раз оператор **A**, аналогично установим, что

$$x \gg \left(\frac{\alpha}{c}\right)^n \beta u,$$

откуда вытекает неравенство

$$\left(\frac{\alpha}{c}\right)^n \beta < \gamma \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\frac{\alpha}{c} \leqslant 1.$$

Лемма доказана.

3. Однородные операторы. Оператор **B** называется однородным, если при всех вещественных t

$$\mathbf{B}(tx) \equiv t\,\mathbf{B}x.$$

Частным случаем однородного оператора является линейный.

Выяснение структуры множества собственных векторов однородного оператора (в частности, линейного) не представляет никаких трудностей: если вектор x является собственным вектором однородного оператора $\mathbf{B}$, то и все векторы tx являются собственными. В силу этих соображений для однородных операторов нужно доказывать только существование собственного вектора.

Теорема, которую мы ниже доказываем, для случая линейных операторов была установлена М. А. Рутманом.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{B}$ — *однородный положительный монотонный вполне непрерывный оператор, действующий в пространстве* E. *Пусть для некоторого элемента* $u = v - w$, *где* v, $w \in K$ *и* $-u \overline{\in} K$, *выполняется соотношение*

$$c\mathbf{B}^p u \geqslant u \qquad (c > 0), \tag{2.9}$$

где p — *некоторое положительное целое число.*

Тогда оператор $\mathbf{B}$ *имеет в конусе* K *собственный вектор* x_0,

$$x_0 = \mu_0 \mathbf{B} x_0,$$

причем характеристическое число μ_0 *удовлетворяет неравенству*

$$\mu_0 \leqslant \sqrt[p]{c}. \tag{2.10}$$

Доказательство. Мы будем доказывать существование у оператора $\mathbf{B}$ единичного собственного вектора x_0 ($\|x_0\| = 1$) в конусе K.

Обозначим через $\mathbf{B}_n$ операторы, определенные равенством

$$\mathbf{B}_n x = \mathbf{B}\left(x + \frac{v}{n}\right) \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.11}$$

Вектор $\mathbf{B}u$ отличен от θ и $-\mathbf{B}u \overline{\in} K$, так как в противном случае и $-\mathbf{B}^p u \in K$; тогда из (2.9) следует, что $-u \in K$, а это противоречит условиям теоремы. Из утверждения 2 § 1 настоящей главы следует тогда, что при любом $n = 1, 2, \ldots$

$$\rho\left(\theta,\ K + \frac{1}{n}\mathbf{B}u\right) > 0. \tag{2.12}$$

Так как

$$v = u + w \geqslant u,$$

то

$$\mathbf{B}_n x = \mathbf{B}\left(x + \frac{v}{n}\right) \geqslant \mathbf{B}\left(\frac{v}{n}\right) \geqslant \frac{1}{n}\mathbf{B}u,$$

а это значит, что

$$\mathbf{B}_n K \subset K + \frac{1}{n}\mathbf{B}u.$$

Из последнего включения и (2.12) следует, что положительные вполне непрерывные операторы $\mathbf{B}_n$ удовлетворяют условиям теоремы 1.1. При этом мы считаем, что через Γ обозначена единичная сфера пространства E. Значит, операторы $\mathbf{B}_n$ имеют в конусе K единичные собственные векторы x_n:

$$x_n = \mu_n \mathbf{B}_n x_n \qquad (\|x_n\| = 1;\ n = 1, 2, \ldots).$$

Последнее равенство удобнее писать в виде

$$x_n = \mu_n \mathbf{B}\left(x_n + \frac{v}{n}\right) \qquad (\|x_n\| = 1;\ n = 1, 2, \ldots), \tag{2.13}$$

откуда в силу монотонности оператора $\mathbf{B}$, с одной стороны, следует, что

$$x_n \geqslant \mu_n \mathbf{B} x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{2.14}$$

и с другой, что

$$x_n \geqslant \mu_n \mathbf{B}\left(\frac{v}{n}\right) \geqslant \frac{\mu_n}{n}\mathbf{B}u \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.15}$$

Применяя к соотношению (2.14) $p-1$ раз оператор $\mathbf{B}$, получим:

$$x_n \geqslant \mu_n^p \mathbf{B}^p x_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.16}$$

Применяя к соотношению (2.15) $p-1$ раз оператор $\mathbf{B}$ и используя последовательно соотношение (2.14), получим:

$$x_n \geqslant \frac{\mu_n^p}{n}\mathbf{B}^p u \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

откуда в силу (2.9) следует:

$$x_n \geqslant \frac{\mu_n^p}{cn} u \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.17}$$

Соотношения (2.9), (2.16) и (2.17) являются условиями (2.3), (2.5) и (2.6) леммы 2.1 для оператора $\mathbf{B}^p$. При этом x_n играет роль элемента x, $\alpha=\mu_n^p$, $\beta=\frac{\mu_n^p}{cn}$. Условие (2.4) выполнено также при некотором γ, так как в противном случае $-u\in K$.

Из леммы 2.1 следует, что

$$\mu_n^p\leqslant c \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots).$$

Это неравенство и полная непрерывность оператора $\mathbf{B}$ позволяют так выбрать подпоследовательность индексов n', что и числа $\mu_{n'}$ сходятся к некоторому числу μ_0 и векторы $\mathbf{B}\left(x_{n'}+\frac{v}{n'}\right)$ сходятся к некоторому элементу. Переходя в (2.13) к пределу по подпоследовательности индексов n', получим, что и элементы x'_n сходятся к некоторому элементу x_0, причем

$$x_0=\mu_0\mathbf{B}x_0,$$

где μ_0 удовлетворяет неравенству (2.10).

Теорема доказана.

Предоставляем читателю доказать аналогичную теорему для случая, когда оператор $\mathbf{B}$ однородный порядка $s>1$ ($\mathbf{B}(tx)\equiv t^s\mathbf{B}x$), предполагая, что u является внутренним элементом конуса K.

4. Линейные операторы. В этом и следующем пунктах мы доказываем ряд предложений М. Г. Крейна и М. А. Рутмана [34] о собственных функциях положительных линейных вполне непрерывных операторов. В качестве примера в этих пунктах будет рассмотрен линейный интегральный оператор Фредгольма $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\int_G K(s,\ t)\varphi(t)\,dt, \tag{2.18}$$

где G — ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства, а ядро $K(s,\ t)$ неотрицательно.

Оператор (2.18) будет, очевидно, положительным относительно конуса неотрицательных функций того функционального пространства, в котором он действует.

Пусть, например, ядро $K(s, t)$ допустимо (оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен в пространстве C непрерывных на G функций) и

$$\int_G K(s, t)\,dt > 0 \qquad (s \in G). \tag{2.19}$$

Тогда оператор (2.18) имеет в силу теоремы 2.1 неотрицательную собственную функцию. Действительно, в силу (2.19) выполнено условие теоремы 2.1, так как

$$c\mathbf{A}u \gg u,$$

где

$$u(s) \equiv 1 \qquad (s \in G), \qquad c = \max_{s \in G}\left\{\int_G K(s, t)\,dt\right\}^{-1}.$$

Более общее утверждение М. Г. Крейна—М. А. Рутмана гласит:

(А) *Пусть существует система точек* $s_1, \ldots, s_p$ *такая, что*

$$K(s_1, s_2)K(s_2, s_3)\ldots K(s_{p-1}, s_p)\cdot K(s_p, s_1) > 0. \tag{2.20}$$

Тогда оператор (2.18) *имеет неотрицательную собственную функцию.*

Для доказательства этого утверждения покажем, что оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1.

Из (2.20) очевидным образом вытекает, что ядро

$$K^{(p)}(s, t) = \int_G \ldots \int_G K(s, t_1)\ldots K(t_{p-1}, t)\,dt_1 \ldots dt_{p-1}$$

положительно в точке (s_1, s_1) топологического произведения $G \times G$. Обозначим через $G_1 \subset G$ такую замкнутую окрестность точки $s_1 \in G$, что $K^{(p)}(s, t) > 0$ при $s, t \in G_1$. Обозначим через $u(s)$ такую непрерывную неотрицательную функцию, что $u(s_1) > 0$, $u(s) = 0$ при $s \overline{\in} G_1$. Тогда

$$\mathbf{A}^p u(s) = \int_G K^{(p)}(s, t)\,u(t)\,dt > 0 \tag{2.21}$$

при $s \in G_1$, так как $K^{(p)}(s, s_1) u(s_1) > 0$. Из (2.21) следует, что найдется такое $c > 0$, при котором

$$c\mathbf{A}^p u(s) \gg u(s) \qquad (s \in G).$$

Полученное неравенство и является условием (2.9) теоремы 2.1.

Утверждение (А) доказано.

5. Линейные u_0-ограниченные операторы [316]. Линейный положительный оператор будем называть *u_0-ограниченным*, если существует такой элемент $u_0 \in K$, отличный от θ, что для любого $\varphi \in K$ ($\varphi \neq \theta$) найдутся натуральное число n и числа α, $\beta > 0$ такие, что

$$\alpha u_0 \ll \mathbf{A}^n \varphi \ll \beta u_0. \qquad (2.22)$$

Лемма 2.2. *Пусть элемент $\varphi_0 \in K$ ($\varphi_0 \neq \theta$) является собственным вектором u_0-ограниченного оператора.*

Тогда оператор $\mathbf{A}$ *будет φ_0-ограниченным.*

Доказательство. По определению u_0-ограниченности найдутся такие натуральное число p_0 и числа α, $\beta > 0$, что

$$\alpha_0 u_0 \ll \mathbf{A}^{p_0} \varphi_0 \ll \beta_0 u_0.$$

Так как $\mathbf{A}\varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$, где λ_0 — собственное число, то $\lambda_0 \neq 0$ и

$$\frac{\lambda_0^{p_0}}{\beta_0} \varphi_0 \ll u_0 \ll \frac{\lambda_0^{p_0}}{\alpha_0} \varphi_0. \qquad (2.23)$$

Пусть $\varphi \in K$ ($\varphi \neq \theta$). По определению u_0-ограниченности найдутся такие натуральное число n и числа α, β, что

$$\alpha u_0 \ll \mathbf{A}^n \varphi \ll \beta u_0.$$

Последние соотношения в силу (2.23) можно переписать в виде

$$\frac{\alpha\lambda_0^{p_0}}{\beta_0} \varphi_0 \ll \mathbf{A}^n \varphi \ll \frac{\beta\lambda_0^{p_0}}{\alpha_0} \varphi_0.$$

Лемма доказана.

Теорема 2.2. *Вполне непрерывный линейный u_0-ограниченный оператор* $\mathbf{A}$ *имеет в конусе K один и только один единичный собственный вектор φ_0.*

Доказательство. Покажем вначале, что существует не более одного такого положительного собственного числа, которому соответствует хотя бы один положительный собственный вектор.

Предположим противное. Пусть

$$\mathbf{A}\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \qquad \mathbf{A}\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2, \tag{2.24}$$

где λ_1, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, φ_1, $\varphi_2 \in K$, φ_1, $\varphi_2 \neq \theta$. Пусть для определенности $\lambda_1 > \lambda_2$.

Из (2.24) непосредственно вытекают соотношения

$$\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{A}(t\varphi_1) \geqslant t\varphi_1 \qquad (0 \leqslant t < \infty) \tag{2.25}$$

и

$$\varphi_2 \geqslant \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{A}\varphi_2. \tag{2.26}$$

В силу утверждения **3** (стр. 242) найдется такое $\gamma > 0$, что

$$\varphi_2 - \gamma\varphi_1 \overline{\in} K. \tag{2.27}$$

В силу u_0-ограниченности оператора **A** найдутся натуральные числа p_1, p_2 и положительные числа α_2, β_1 такие, что

$$\mathbf{A}^{p_1}\varphi_1 \leqslant \beta_1 u_0, \qquad \mathbf{A}^{p_2}\varphi_2 \geqslant \alpha_2 u_0,$$

откуда

$$\varphi_2 = \frac{1}{\lambda_2^{p_2}}\mathbf{A}^{p_2}\varphi_2 \geqslant \frac{\alpha_2}{\lambda_2^{p_2}}u_0 \geqslant \frac{\alpha_2}{\beta_1\lambda_2^{p_2}}\mathbf{A}^{p_1}\varphi_1 = \frac{\alpha_2\lambda_1^{p_1}}{\beta_1\lambda_2^{p_2}}\varphi_1. \tag{2.28}$$

Соотношения (2.25), (2.26), (2.27) и (2.28) являются соответственно условиями (2.3), (2.4), (2.5) и (2.6) леммы 2.1, где положено

$$u = \varphi_1, \qquad x = \varphi_2, \qquad \delta = 0, \qquad c = \frac{1}{\lambda_1}, \qquad a = \frac{1}{\lambda_2},$$

$$\beta = \frac{\alpha_2\lambda_1^{p_1}}{\beta_1\lambda_2^{p_2}}.$$

Из леммы 2.1 вытекает неравенство $\lambda_1 \leqslant \lambda_2$, что противоречит предположению.

Покажем теперь, что одно положительное число λ, которому отвечает положительный собственный вектор, существует. Для этого заметим, что оператор **A** удовлетворяет условию (2.9) теоремы 2.1, так как он u_0-ограничен. Условию (2.9) он удовлетворяет на элементе u_0.

Нам осталось показать, что собственному числу λ отвечает единственный единичный положительный собственный вектор. Пусть, действительно,

$$\mathbf{A}\psi_1 = \lambda\psi_1, \qquad \mathbf{A}\psi_2 = \lambda\psi_2,$$

причем линейная оболочка векторов ψ_1 и ψ_2 двумерна. Рассмотрим векторы вида $\psi_2 - t\psi_1$ $(0 \leqslant t < \infty)$. Все эти векторы отличны от 0 и являются собственными векторами оператора $\mathbf{A}$, отвечающими собственному числу λ. В силу **1** и **3** найдется такое t_0, что при $t \leqslant t_0$ векторы $\psi_2 - t\psi_1$ лежат в конусе, а при $t > t_0$ — вне конуса. В силу леммы 2.2 оператор $\mathbf{A}$ будет ψ_1-ограниченным. Значит, найдутся такое натуральное число p и такое положительное число α, что

$$\mathbf{A}^p(\psi_2 - t_0\psi_1) \gg \alpha\psi_1.$$

Последнее соотношение означает, что $\psi_2 - \left(t_0 + \frac{\alpha}{\lambda^p}\right)\psi_1 \in K$. Мы пришли к противоречию.

Теорема полностью доказана.

Теорема 2.3. *Пусть вполне непрерывный линейный u_0-ограниченный оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию: для любого элемента $\varphi \in E$ можно указать такое натуральное число p и такое число $l > 0$, что $l\,\mathbf{A}^p\varphi \leqslant u_0$.*

Тогда положительное собственное число λ_0 оператора $\mathbf{A}$, которому отвечает положительный собственный вектор φ_0, будет простым и бо́льшим по абсолютной величине остальных собственных чисел оператора $\mathbf{A}$.

Доказательство. Существование собственного числа λ_0 и положительного вектора φ_0 вытекает из теоремы 2.2.

Пусть λ_1 — собственное число оператора $\mathbf{A}$, отвечающее отличному от φ_0 собственному вектору φ_1. Без ограничения общности можно считать, что $-\varphi_1 \,\overline{\in}\, K$. Оператор $\mathbf{A}^2$ будет иметь собственные векторы φ_0 и φ_1, которым отвечают уже положительные собственные числа λ_0^2 и λ_1^2.

В силу леммы 2.2 оператор $\mathbf{A}$ будет φ_0-ограниченным. Пусть

$$\alpha\varphi_0 \leqslant \mathbf{A}^p\varphi \leqslant \beta\varphi_0.$$

Применяя к этому соотношению монотонный оператор $\mathbf{A}^p$, получим:

$$\alpha \mathbf{A}^p \varphi_0 \leqslant \mathbf{A}^{2p} \varphi \leqslant \beta \mathbf{A}^p \varphi_0,$$

откуда

$$\alpha \lambda_0^p \varphi_0 \leqslant (\mathbf{A}^2)^p \varphi \leqslant \beta \lambda_0^p \varphi_0.$$

Таким образом, оператор $\mathbf{A}^2$ также φ_0-ограничен.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}^2$ удовлетворяет условию теоремы 2.3: для любого элемента $\varphi \in E$ найдутся такое натуральное число p и такое положительное число l_1, что $l_1 \mathbf{A}^{2p} \varphi \leqslant \varphi_0$.

Действительно, из условия теоремы вытекает существование натурального числа p и положительного числа l таких, что $l\mathbf{A}^p \varphi \leqslant u_0$. Из этого соотношения и (2.23) вытекает, что

$$\frac{\alpha_0 l}{\lambda_0^{p_2}} \mathbf{A}^p \varphi \leqslant \varphi_0.$$

Применяя к последнему соотношению оператор $\mathbf{A}^p$, получим:

$$l_1 \mathbf{A}^{2p} \varphi \leqslant \varphi_0, \tag{2.29}$$

где $l_1 = \dfrac{\alpha_0 l}{\lambda_0^{p_2+p}}$.

В частности, если $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{1}{\lambda_0^{2p}} \mathbf{A}^{2p} \varphi_1$, то из (2,29) вытекает:

$$\varphi_0 \geqslant \beta \varphi_1, \tag{2.30}$$

где β — некоторое положительное число.

В силу **3** (стр. 242) найдется такое $\gamma > 0$, что

$$\varphi_0 - \gamma \varphi_1 \overline{\in} K. \tag{2.31}$$

Применим лемму 2.1 к оператору $\mathbf{A}^2$, полагая

$$u = \varphi_1, \quad x = \varphi_0, \quad c = \frac{1}{\lambda_1^2}, \quad \alpha = \frac{1}{\lambda_0^2}.$$

Соотношения (2.30) и (2.31) являются соответственно условиями (2.6) и (2.4) леммы 2.1. Условиями (2.3) и (2.5) являются равенства

$$\frac{1}{\lambda_1^2} \mathbf{A}^2 \varphi_1 = \varphi_1, \quad \frac{1}{\lambda_0^2} \mathbf{A}^2 \varphi_0 = \varphi_0.$$

В силу леммы 2.1 $\lambda_1^2 \leqslant \lambda_0^2$, т. е.

$$|\lambda_1| \leqslant \lambda_0.$$

Допустим, что $|\lambda_1| = \lambda_0$. Тогда линейная оболочка векторов φ_0 и φ_1 полностью состоит из собственных векторов φ_0-ограниченного оператора $\mathbf{A}^2$, отвечающих одному и тому же положительному собственному числу λ_0^2. В частности, положительный в силу (2.30) вектор $\varphi_0 - \beta\varphi_1$ будет собственным вектором оператора $\mathbf{A}^2$. Из теоремы 2.2 вытекает, что

$$\frac{\varphi_0 - \beta\varphi_1}{\|\varphi_0 - \beta\varphi_1\|} = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}.$$

Значит, в случае, если $|\lambda_1| = \lambda_0$, то

$$\frac{\varphi_1}{\|\varphi_1\|} = \frac{\varphi_0}{\|\varphi_0\|}.$$

Теорема доказана.

Мы рассматривали только вещественные собственные числа оператора $\mathbf{A}$. Утверждение теоремы 2.3 остается справедливым, если рассматривать и комплексные собственные числа оператора $\mathbf{A}$, рассматриваемого в комплексном расширении пространства E. Такие предложения для сильно положительных операторов (определение см. ниже) доказаны другим методом в [34].

Приведем два примера u_0-ограниченных операторов, удовлетворяющих условию теоремы 2.3.

Конус $K \subset E$ называется *телесным*, если он содержит внутренние точки.

Конус K неотрицательных функций в пространстве C является телесным: его внутренними элементами являются неотрицательные функции, отличные на всем G от нуля. В пространствах L^p конусы неотрицательных функций не являются телесными.

Положительный относительно телесного конуса K оператор $\mathbf{A}(\mathbf{A}K \subset K)$ называется *сильно положительным*, если для каждого $x \in K$ $(x \neq \theta)$ найдется такое натуральное $n = n(x)$, что $\mathbf{A}^n x$ является внутренним элементом конуса K.

Простейшим примером сильно положительного оператора в пространстве непрерывных функций, полуупорядоченном при помощи конуса K неотрицательных функций, может служить оператор

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\int_G K(s,\ t)\varphi(t)\,dt, \tag{2.32}$$

допустимое ядро которого удовлетворяет условию

$$0<m\leqslant K(s,\ t).$$

Действительно, в этом случае для любой функции $\varphi(s)$ из K

$$\min_{s\in G}\mathbf{A}\varphi(s)\geqslant m\int_G \varphi(t)\,dt,$$

откуда следует, что $\mathbf{A}\varphi(s)$ входит в K вместе со своей шаровой окрестностью радиуса $m\int\limits_G \varphi(t)\,dt$.

Более общим классом сильно положительных линейных операторов в пространстве непрерывных функций, полуупорядоченном при помощи конуса неотрицательных функций, являются операторы (2.32), порожденные (по терминологии М. Г. Крейна) ядрами $K(s,\ t)$ положительного типа.

Говорят, что неотрицательное допустимое ядро $K(s,\ t)$ — *ядро положительного типа*, если для всякой неотрицательной непрерывной функции $\varphi(s)$, не равной тождественно нулю, найдется такая итерация $K^{(n)}(s,\ t)$, что

$$\int_G K^{(n)}(s,\ t)\varphi(t)\,dt>0 \qquad (s\in G).$$

Отметим один признак [34] того, что ядро $K(s,\ t)$ имеет положительный тип: *для этого достаточно, чтобы для некоторой итерации ядра выполнялось условие*

$$K^{(n)}(s,\ s)>0 \qquad (s\in G).$$

Все сильно положительные операторы $\mathbf{A}$ *являются* u_0*-ограниченными операторами, где* u_0 *— любой внутренний элемент конуса* K.

Действительно, если $\mathbf{A}^p\varphi$ вместе с шаровой окрестностью радиуса ρ входит в K, то для всех $\psi\in E$

$$\mathbf{A}^p\varphi-\rho\frac{\psi}{\|\psi\|}\in K.$$

Если, в частности, $\psi = u_0$, то из последнего включения следует:

$$\frac{\rho}{\|u_0\|} \ll \mathbf{A}^p \varphi.$$

Так как u_0 — внутренний элемент K, то его шаровая окрестность некоторого радиуса ρ_0 входит в K. Отсюда вытекает, что

$$u_0 - \rho_0 \frac{\mathbf{A}^p \varphi}{\|\mathbf{A}^p \varphi\|} \in K, \tag{2.33}$$

т. е.

$$\mathbf{A}^p \varphi \ll \frac{\|\mathbf{A}^p \varphi\|}{\rho_0} u_0.$$

Сильно положительные операторы в силу (2.33) *удовлетворяют и условию теоремы* 2.3.

Так как операторы (2.32) с допустимыми ядрами положительного типа удовлетворяют условиям теоремы 2.3, то мы приходим к следующему утверждению.

(В) *Пусть* $K(s, t)$ — *допустимое ядро положительного типа.*

Тогда оператор Фредгольма (2.33) *имеет единственную положительную непрерывную собственную функцию. Этой собственной функции соответствует простое положительное собственное число, большее по абсолютной величине всех других собственных чисел оператора* (2.33).

В пространствах L^p конус неотрицательных функций, как уже отмечалось выше, не является телесным.

Примером u_0-ограниченного оператора $\mathbf{A}$ в пространстве L^p может служить линейный оператор (2.32) с неотрицательным ядром, некоторая итерация которого

$$K^{(n)}(s, t) = \int_G \ldots \int_G K(s, t_1) K(t_1, t_2) \ldots K(t_{n-1}, t)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_{n-1}$$

удовлетворяет условию

$$0 < m \leqslant K^{(n)}(s, t) \leqslant M < \infty \qquad (s, t \in G).$$

В качестве функции u_0, как легко проверить, в этом случае можно взять функцию, тождественно равную единице.

6. Монотонные миноранты. Будем говорить, что оператор $\mathbf{A}$ является *минорантой* оператора $\mathbf{B}$ на множестве $M \subset E$, если

$$\mathbf{B}x \gg \mathbf{A}x \qquad (x \in M). \tag{2.34}$$

Нас будет интересовать случай, когда $M = K_r$ (пересечение конуса K с шаром радиуса r с центром в θ), а оператор $\mathbf{A}$ — положительный монотонный оператор, удовлетворяющий условию (2.3) леммы 2.1. Условием (2.3) мы ниже будем пользоваться в следующей форме: для некоторого элемента $u \in E$, такого, что

$$-u \overline{\in} K, \qquad u = v - w \qquad (v,\ w \in K), \tag{2.35}$$

выполняется соотношение

$$c\mathbf{A}(t,\ u) \gg tu \qquad (0 \leqslant t < \gamma), \tag{2.36}$$

где γ — такое число, что $x - \gamma u \overline{\in} K$ при всех $x \in K_r$.

Оператор $\mathbf{A}$, фигурирующий в (2.34) и удовлетворяющий описанным выше требованиям, будем называть для сокращения речи просто *монотонной минорантой* оператора $\mathbf{B}$ на M.

Теорема 2.4. *Пусть* $\mathbf{B}$ — *положительный вполне непрерывный оператор с монотонной минорантой* $\mathbf{A}$ *на* K_r.

Тогда собственные векторы оператора $\mathbf{B}$ *образуют в конусе* K *непрерывную ветвь длиной* r.

Доказательство. Пусть Γ, как обычно, — граница открытого множества $F \subset E$, содержащего θ и лежащего в шаре радиуса меньше r.

Рассмотрим, как и при доказательстве теоремы 2.1, последовательность операторов $\mathbf{B}_n$:

$$\mathbf{B}_n x = \mathbf{B}\left(x + \frac{v}{n}\right) \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots),$$

где v — вектор из K, фигурирующий в разложении (2.35) элемента u.

Положительные вполне непрерывные операторы $\mathbf{B}_n$ будут при достаточно больших n определены на $\Gamma \cap K$ и будут удовлетворять условиям теоремы 1.1. Действительно, в силу (2.34) и (2.36)

$$\mathbf{B}_n x = \mathbf{B}\left(x + \frac{v}{n}\right) \geqslant \mathbf{A}\left(x + \frac{v}{n}\right) \geqslant \mathbf{A}\left(\frac{v}{n}\right) \geqslant$$
$$\geqslant \mathbf{A}\left(\frac{u}{n}\right) \geqslant \frac{1}{nc}\, u \qquad (x \in K),$$

откуда следует, что

$$\mathbf{B}_n (\Gamma \cap K) \subset K + \frac{u}{nc}$$

и

$$\rho(\theta,\ \mathbf{B}_n(\Gamma \cap K)) > 0.$$

Таким образом, операторы $\mathbf{B}_n$ (при достаточно больших n) имеют на $\Gamma \cap K$ собственные векторы u_n:

$$u_n = \mu_n \mathbf{B}_n u_n,$$

причем все $\mu_n > 0$. Последние равенства нам удобнее писать в виде

$$u_n = \mu_n \mathbf{B}\left(u_n + \frac{v}{n}\right). \tag{2.37}$$

Из (2.37) следует в силу (2.34), что, с одной стороны,

$$u_n \geqslant \mu_n \mathbf{A}\left(u_n + \frac{v}{n}\right) \geqslant \mu_n \mathbf{A} u_n \tag{2.38}$$

и, с другой —

$$u_n \geqslant \mu_n \mathbf{A}\left(u_n + \frac{v}{n}\right) \geqslant \mu_n \mathbf{A}\left(\frac{u}{n}\right) \geqslant \frac{\mu_n}{cn}\, u. \tag{2.39}$$

В силу леммы 2.1 из соотношений (2.36), (2.38) и (2.39) следует, что

$$\mu_n \leqslant c.$$

Последнее неравенство и полная непрерывность оператора $\mathbf{B}$ позволяют выбрать подпоследовательность индексов n' так, чтобы и числа $\mu_{n'}$ сходились к некоторому числу μ_0 и векторы $\mathbf{B}\left(u_{n'} + \frac{v}{n'}\right)$ сходились к некоторому вектору. Переходя в (2.37) к пределу по выбранной подпоследовательности индексов n', получим, что и векторы $u_{n'}$ сходятся к некоторому вектору $u_0 \in \Gamma \cap K$, причем

$$u_0 = \mu_0 \mathbf{B} u_0.$$

Таким образом, оператор **B** имеет на $\Gamma \cap K$ собственные векторы, которым отвечают положительные собственные числа.

Теорема доказана.

В приложениях теорема 2.4 удобна, когда монотонной минорантой является линейный положительный оператор. Даже в случаях, когда оператор **B** сам удовлетворяет требованиям, предъявляемым к монотонной миноранте, часто удобнее конструировать для него монотонную линейную миноранту, чем изучать непосредственно оператор **B**.

В приводимых ниже примерах через G обозначено ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства. Все рассуждения проводятся для пространства C непрерывных на G функций, полуупорядоченного при помощи конуса K неотрицательных непрерывных функций. Через v обозначается функция, равная тождественно единице на G.

Пример 1. Рассмотрим интегральный оператор П. С. Урысона

$$\mathbf{B}u(s) = \int_G B[s,\ t,\ u(t)]\,dt, \tag{2.40}$$

где $B(s,\ t,\ u)$ $(s,\ t \in G,\ 0 \leqslant u \leqslant r)$ — неотрицательная непрерывная по всем переменным функция. Будем предполагать, что

$$B(s,\ t,\ 0) \equiv 0 \qquad (s,\ t \in G).$$

Очевидно, оператор **B** положителен и вполне непрерывен на K_r.

Пусть $A(s,\ t,\ u)$ $(s,\ t \in G,\ 0 \leqslant u \leqslant r)$ — *такая неотрицательная непрерывная по всем переменным функция, что*

$$B(s,\ t,\ u) \geqslant A(s,\ t,\ u) \qquad (s,\ t \in G,\ 0 \leqslant u \leqslant r)$$

(*откуда, в частности, следует, что* $A(s,\ t,\ 0) \equiv 0$), *причем*:

а) *из* $u_1 < u_2$ *следует, что*

$$A(s,\ t,\ u_1) \leqslant A(s,\ t,\ u_2) \qquad (s,\ t \in G);$$

b) *производная* $K_0(s, t) = A'_u(s, t, 0)$ *положительна, непрерывна и*

$$\frac{A(s, t, u)}{u} \to K_0(s, t)$$

при $u \to 0$ *равномерно относительно* $s, t \in G$.

Тогда неотрицательные собственные функции оператора П. С. Урысона образуют непрерывную ветвь длиной r.

Для доказательства этого утверждения нужно рассмотреть линейный строго положительный оператор

$$\mathbf{A}u(s) = c \int_G K_0(s, t)\, u(t)\, dt,$$

который при достаточно малых c является монотонной минорантой на K_r для оператора (2.40), и применить теорему 2.4.

Оператор (2.40) изучался П. С. Урысоном [66] при более жестких ограничениях, наложенных на неотрицательную функцию $B(s, t, u)$. Эти ограничения позволили провести более подробное исследование оператора (2.40). В частности, в предположениях П. С. Урысона (см. следующий параграф) собственные числа оператора (2.40) образуют на вещественной оси интервал, причем *каждому собственному числу отвечает единственная неотрицательная собственная функция*.

Пример 2. Рассмотрим интегральный оператор Гаммерштейна

$$\mathbf{B}u(s) = \int_G K(s, t)\, f[t, u(t)]\, dt. \qquad (2.41)$$

Будем предполагать, что ядро $K(s, t)$ и функция $f(t, u)$ удовлетворяют условиям, обеспечивающим полную непрерывность оператора $\mathbf{B}$ в пространстве C.

Пусть функция $f(t, u)$ *удовлетворяет условию*

$$f(t, u) \geqslant \alpha u \qquad (t \in G;\ 0 \leqslant u \leqslant r), \qquad (2.42)$$

где α *и* r — *некоторые положительные числа.*

Пусть ядро $K(s, t)$ *неотрицательно и для некоторой системы точек* $s_1, s_2, \ldots, s_p$

$$K(s_1, s_2) \cdot K(s_2, s_3) \ldots K(s_{p-1}, s_p) K(s_p, s_1) > 0. \quad (2.43)$$

Тогда неотрицательные непрерывные собственные функции оператора (2.41) *образуют непрерывную ветвь длиной* r.

Для доказательства нужно рассмотреть линейный оператор

$$\mathbf{A}u(s) = \alpha \int_G K(s, t) u(t) dt,$$

который является монотонной минорантой для оператора (2.41), и применить теорему 2.4.

Пример 3. Рассмотрим интегральный оператор А. М. Ляпунова

$$\mathbf{B}u(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_G \ldots \int_G K_n(s, t_1, \ldots, t_n) u(t_1) \ldots u(t_n) dt_1 \ldots dt_n. \quad (2.44)$$

Будем предполагать, что выполнены условия, обеспечивающие полную непрерывность оператора $\mathbf{B}$ в единичном шаре пространства C.

Пусть все ядра $K_n(s, t_1, \ldots, t_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ *неотрицательны, а ядро* $K_1(s, t)$ *удовлетворяет условию* (2.43).

Тогда неотрицательные собственные функции оператора (2.44) *образуют в* C *непрерывную ветвь длиной* 1.

Доказательство, как и в предыдущих примерах, основано на применении теоремы 2.4.

§ 3. Урысоновские теоремы о спектре

1. Замкнутость множества собственных векторов. Пусть $\mathbf{A}$ — вполне непрерывный оператор, заданный на множестве $M \subset E$.

Лемма 3.1. *Если множество* M *замкнуто и не содержит элемент* θ, *то множество* N *всех собственных векторов* $\varphi \in M$ *оператора* $\mathbf{A}$ *замкнуто.*

Доказательство. Пусть $\varphi_n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — сходящаяся к некоторому элементу $\varphi_0 \in M$ последовательность собственных векторов оператора **A**:

$$\mathbf{A}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{3.1}$$

Так как оператор **A** непрерывен, то элементы $\mathbf{A}\varphi_n$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходятся к $\mathbf{A}\varphi_0$. Без ограничения общности можно считать, что числа λ_n имеют одинаковый знак (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности). Из (3.1) вытекает, что числа $|\lambda_n|$ сходятся к числу $\frac{\|A\varphi_0\|}{\|\varphi_0\|}$. Значит, и числа λ_n сходятся к некоторому числу λ_0. Переходя в (3.1) к пределу при $n \to \infty$, получим, что $\mathbf{A}\varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$.

Таким образом, элемент φ_0 также является собственным вектором оператора **A**.

Лемма доказана.

Рассмотрим теперь множество N_1 собственных векторов φ оператора **A**, принадлежащих замкнутому ограниченному множеству M $(\theta \overline{\in} M)$ и отвечающих собственным числам из некоторого сегмента $[\alpha, \beta]$, не содержащего число нуль. Пусть $\varphi_n \in M$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — такая последовательность собственных векторов оператора **A**,

$$\mathbf{A}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3.1}$$

что $\alpha \leqslant \lambda_n \leqslant \beta$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Выберем подпоследовательность φ_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ так, чтобы числа λ_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ сходились к некоторому числу λ_0, $\alpha \leqslant \lambda_0 \leqslant \beta$, а векторы $\mathbf{A}\varphi_{n_i}$ — к некоторому элементу $\lambda_0 \varphi_0$. Из (3.1) вытекает, что векторы φ_{n_i} $(i = 1, 2, \ldots)$ сходятся тогда к φ_0. Из непрерывности оператора **A** следует при этом, что $\mathbf{A}\varphi_0 = \lambda_0 \varphi_0$, т. е. φ_0 является собственным вектором оператора **A**.

Мы доказали, что множество N_1 компактно.

Так как при

$$\mathbf{A}\varphi_1 = \lambda_1 \varphi_1, \qquad \mathbf{A}\varphi_2 = \lambda_2 \varphi_2$$

справедливо неравенство

$$|\lambda_1 - \lambda_2| \leqslant \frac{|\lambda_1| \cdot \|\varphi_1 - \varphi_2\| + \|\mathbf{A}\varphi_1 - \mathbf{A}\varphi_2\|}{\|\varphi_1\|},$$

то *собственное число оператора* **A** *на множестве* $N \subset M$ *собственных векторов является непрерывной функцией.*

Из последнего утверждения вытекает

Лемма 3.2. *Совокупность F собственных значений (спектр) вполне непрерывного оператора* **A**, *определенного на ограниченном замкнутом множестве M, не содержащем θ, образует замкнутое множество, если к ней присоединить число нуль.*

Отметим также, что собственные числа вполне непрерывного оператора **A**, заданного на ограниченном замкнутом множестве M, не содержащем θ, по абсолютной величине ограничены сверху, так как из $\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi$ следует, что

$$\lambda = \frac{\|\mathbf{A}\varphi\|}{\|\varphi\|} \leqslant \frac{\sup\limits_{\varphi \in M} \|\mathbf{A}\varphi\|}{\inf\limits_{\varphi \in M} \|\varphi\|}.$$

Теорема 3.1 (В. В. Немыцкий) [49ж]. *Пусть вполне непрерывный оператор* **A** *определен на всем пространстве E.*

Тогда его спектр образует множество типа F_σ.

Для доказательства нужно рассмотреть спектр оператора **A** как объединение множеств F_n собственных чисел из сегмента $\left[\frac{1}{n}, n\right]$, отвечающих собственным функциям из множеств M_n $(n = 1, 2, \ldots)$, каждое из которых состоит из элементов, норма которых удовлетворяет неравенству

$$\frac{1}{n} \leqslant \|\varphi\| \leqslant n.$$

Каждое F_n в силу леммы 3.2 замкнуто, откуда и вытекает утверждение теоремы.

2. Заполнение позитивным спектром интервала. В главе IV были указаны примеры нелинейных операторов, спектр которых содержит полностью некоторый интервал. Здесь мы докажем теоремы о заполнении спектром интервалов для некоторых положительных операторов. В дальнейшем мы будем называть *позитивным спектром* положительного оператора **A** совокупность тех его собственных чисел, которым соответствуют положительные собственные векторы.

Вначале установим одну теорему общего характера.

Теорема 3.2. *Пусть некоторое множество N собственных векторов вполне непрерывного оператора* **A** *образует непрерывную ветвь бесконечной длины, причем собственные числа стремятся к пределам λ_0 и λ_∞, когда нормы собственных векторов из ветви стремятся соответственно к нулю или бесконечности.*

Тогда спектр оператора **A** *содержит полностью интервал* $(\lambda_0, \lambda_\infty)$, *кроме, может быть, точки нуль.*

Доказательство. Допустим, что некоторое отличное от нуля число λ_0 из интервала $(\lambda_0, \lambda_\infty)$ не является собственным числом оператора **A**, которому соответствует собственный вектор из N.

Число λ_0 разбивает прямую $(-\infty, \infty)$ вещественных чисел на две части. Одна из этих частей J_1 содержит число λ_∞, а вторая J_2 — число λ_0.

Обозначим через F_1 множество тех собственных векторов оператора **A** из ветви N, которым отвечают собственные числа из J_1. Через F_2 обозначим множество остальных собственных векторов оператора **A** и элемент 0. Множества F_1 и F_2 содержат все собственные векторы оператора **A** из N.

Рассуждения, аналогичные доказательству леммы 3.1, показывают, что множества F_1 и F_2 замкнуты. При этом множество F_1 находится на положительном расстоянии от элемента 0; нормы элементов множества F_2 равномерно ограничены.

Покажем, что расстояние между множествами F_1 и F_2 положительно. Пусть, в предположении противного, существуют две такие последовательности собственных векторов φ_i и ψ_i:

$$\mathbf{A}\varphi_i = \lambda_i\varphi_i, \quad \mathbf{A}\psi_i = \mu_i\psi_i \qquad (i = 1, 2, \ldots),$$

что $\lambda_i < \lambda_0$, $\mu_i > \lambda_0$ $(i = 1, 2, \ldots)$ и

$$\lim_{i\to\infty} \|\varphi_i - \psi_i\| = 0. \tag{3.2}$$

Нормы векторов одной последовательности ограничены сверху, нормы векторов другой последовательности — снизу. В силу (3.2) можно считать, что нормы всех элементов φ_i, ψ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ ограничены сверху и снизу положительными числами. Тогда числа

$$|\lambda_i| = \frac{\|\mathbf{A}\varphi_i\|}{\|\varphi_i\|}, \quad |\mu_i| = \frac{\|\mathbf{A}\psi_i\|}{\|\psi_i\|} \qquad (i = 1, 2, \ldots)$$

ограничены сверху, в силу чего можно считать, что λ_i и μ_i сходятся соответственно к числам $\bar{\lambda}$ и $\bar{\mu}$, причем $\bar{\lambda} \leqslant \lambda_0$, $\bar{\mu} \geqslant \lambda_0$ (в противном случае можно перейти к подпоследовательностям). Одно из чисел $\bar{\lambda}$, $\bar{\mu}$ отлично от нуля. Пусть это будет $\bar{\mu}$. Можно считать, что векторы $\mathbf{A}\psi_i$ $(i = 1, 2, \ldots)$ сходятся к некоторому $\bar{\mu}\psi_0$. Число $\bar{\mu}$ отлично от нуля, поэтому векторы ψ_i сходятся к вектору ψ_0. Из (3.2) следует, что и векторы φ_i сходятся к вектору ψ_0. Таким образом, пересечение замкнутых множеств F_1 и F_2 непусто. Мы пришли к противоречию.

Значит,

$$\rho(F_1, F_2) = \inf_{\varphi \in F_1, \ \psi \in F_2} \|\varphi - \psi\| = \alpha > 0. \tag{3.3}$$

Обозначим через G ограниченное открытое множество, образованное объединением всех шаров радиуса $\frac{\alpha}{2}$ с центрами в точках множества F_2. Через Γ обозначим границу множества G.

Очевидно, пересечение $\Gamma \cap F_2$ пусто. В силу (3.3) пусто и пересечение $\Gamma \cap F_1$. Значит, на Γ нет собственных векторов оператора $\mathbf{A}$ из N, т. е. N не является непрерывной ветвью бесконечной длины.

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

В качестве примера применения теоремы 3.2 рассмотрим оператор Гаммерштейна

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt \tag{3.4}$$

с допустимым ядром, удовлетворяющим условию

$$0 < m \leqslant K(s, t) \leqslant M < \infty,$$

и непрерывной по обеим переменным функцией $f(t, u)$ $(t \in G, \ 0 \leqslant u < \infty)$, удовлетворяющей при всех $u \geqslant 0$ неравенству

$$f(t, u) \geqslant h(u) \quad (t \in G), \tag{3.5}$$

где $h(u)$ — такая неотрицательная неубывающая функция, равная нулю только при $u=0$, что

$$\lim_{u\to\infty} \frac{h(u)}{u} = \infty, \tag{3.6}$$

и при малых u удовлетворяющая неравенству

$$f(t,\ u) \leqslant g(u) \qquad (t \in G), \tag{3.7}$$

где

$$\lim_{u\to+0} \frac{g(u)}{u} = 0. \tag{3.8}$$

При перечисленных условиях позитивный спектр оператора (3.4) *состоит из всего бесконечного интервала* $(0,\ \infty)$.

Оператор (3.4) определен на конусе неотрицательных функций пространства C непрерывных на G функций. Этот оператор, очевидно, вполне непрерывен и положителен. Положительные собственные функции оператора (3.4), как было показано на стр. 252 (пример 1), образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.

Сформулированное утверждение будет в силу теоремы 3.2 доказано, если мы покажем, что собственные числа оператора стремятся к бесконечности, когда нормы положительных собственных функций безгранично возрастают, и что собственные числа стремятся к нулю, когда нормы положительных собственных функций убывают к нулю.

Пусть $\varphi(s)$ — положительная собственная функция оператора (3.4): $\mathbf{A}\varphi(s)=\lambda\varphi(s)$. Пусть $\|\varphi(s)\|=\rho$, $\varphi(s_0)=\rho$, где s_0 — некоторая точка множества G. Тогда

$$\lambda\varphi(s) = \int_G K(s,\ t) f[t,\ \varphi(t)]\, dt \geqslant$$
$$\geqslant \frac{m}{M}\int_G K(s_0,\ t) f[t,\ \varphi(t)]\, dt = \lambda \frac{m}{M}\varphi(s_0),$$

откуда

$$\varphi(s) \geqslant \frac{m}{M}\varphi(s_0) = \frac{m}{M}\rho \qquad (s \in G).$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{1}{\rho}\int_G K(s_0,\ t) f[t,\ \varphi(t)]\, dt \geqslant \frac{m\cdot \operatorname{mes} G}{\rho} h\left(\frac{m}{M}\rho\right). \tag{3.9}$$

Из (3.9) и (3.6) вытекает, что $\lambda\to\infty$, когда $\rho\to\infty$.

Аналогично при малых ρ

$$\lambda = \frac{1}{\rho}\int\limits_G K(s_0, t) f[t, \varphi(t)]\,dt \leqslant \frac{M}{\rho}\int\limits_G g[\varphi(t)]\,dt. \qquad (3.10)$$

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. В силу (3.8) можно указать такое ρ_0, что $g(u) \leqslant \varepsilon u$ при $u < \rho_0$. Тогда при $\rho < \rho_0$ из (3.10) следует:

$$\lambda \leqslant \frac{\varepsilon M}{\rho}\int\limits_G \varphi(t)\,dt \leqslant \varepsilon M \operatorname{mes} G.$$

Так как число ε может быть сколь угодно малым, то из последнего неравенства вытекает, что $\lambda \to 0$, когда $\rho \to 0$.

3. Границы позитивного спектра.

Лемма 3.3. *Пусть положительный оператор* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbf{B}\varphi \gg \mathbf{A}\varphi \qquad (\varphi \in K), \qquad (3.11)$$

где $\mathbf{B}$ — *линейный* u_0-*ограниченный вполне непрерывный оператор. Пусть число* λ *принадлежит позитивному спектру оператора* $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi \in K.$$

Тогда $\lambda \leqslant \lambda_{\mathbf{B}}$, *где* $\lambda_{\mathbf{B}}$ — *собственное число оператора* $\mathbf{B}$, *которому отвечает положительная собственная функция.*

Доказательство. Пусть φ_0 — положительный собственный вектор оператора $\mathbf{B}$. В силу теоремы 2.2 других (с точностью до нормы) положительных векторов оператор $\mathbf{B}$ не имеет. В силу леммы 2.2 из предыдущего параграфа оператор $\mathbf{B}$ будет φ_0-ограниченным. Следовательно, для любого $\varphi \in K$ найдутся такое натуральное число p и такое положительное число β, что

$$\mathbf{B}^p\varphi \leqslant \beta\varphi_0. \qquad (3.12)$$

Пусть теперь φ — собственный вектор оператора $\mathbf{A}$: $\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi$. В силу (3.11) и (3.12)

$$\varphi = \frac{1}{\lambda}\mathbf{A}\varphi \ll \frac{1}{\lambda}\mathbf{B}\varphi \ll \frac{1}{\lambda^2}\mathbf{B}^2\varphi \ll \ldots \ll \frac{1}{\lambda^p}\mathbf{B}^p_\varphi \ll \frac{\beta}{\lambda^p}\varphi_0. \qquad (3.13)$$

Применим лемму 2.1 из предыдущего параграфа к оператору **B**, полагая

$$c = \frac{1}{\lambda}, \quad a = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{B}}}, \quad \delta = 0,$$

а γ — достаточно большое число и считая, что $u = \varphi$, $x = \varphi_0$. Условие (2.11) леммы 2.1 вытекает из (3.11):

$$\frac{1}{\lambda} \mathbf{B}(t\varphi) \geqslant \frac{t}{\lambda} \mathbf{A}\varphi = t\varphi.$$

Условие (2.12) леммы 2.1 выполняется всегда при больших γ в силу утверждения 3 (стр. 242). Условие (2.13) совпадает с равенством $\varphi_0 = \frac{1}{\lambda_{\mathbf{B}}} \mathbf{B}\varphi_0$. Условие (2.14) совпадает с (3.13).

В силу леммы 2.1 справедливо неравенство $\lambda \leqslant \lambda_{\mathbf{B}}$. Лемма доказана.

Аналогичными рассуждениями с использованием леммы 2.1 доказывается

Лемма 3.4. *Пусть положительный оператор* **A** *удовлетворяет условию*

$$\mathbf{A}\varphi \geqslant \mathbf{Q}\varphi \qquad (\varphi \in K), \tag{3.14}$$

где **Q** — *линейный* u_0*-ограниченный вполне непрерывный оператор. Пусть число* λ *принадлежит позитивному спектру оператора* **A**:

$$\mathbf{A}\varphi = \lambda\varphi, \qquad \varphi \in K.$$

Тогда $\lambda \geqslant \lambda_{\mathbf{Q}}$, *где* $\lambda_{\mathbf{Q}}$ — *собственное число оператора* **Q**, *которому отвечает положительная собственная функция.*

Теорема 3.3 [316]. *Пусть вполне непрерывный оператор* **A** *удовлетворяет условию*

$$\mathbf{Q}\varphi \leqslant \mathbf{A}\varphi \leqslant \mathbf{B}\varphi \qquad (\varphi \in K), \tag{3.15}$$

где **Q**, **B** — *линейные вполне непрерывные* u_0*-ограниченные операторы. Пусть оператор* **Q** *является производной Фреше оператора* **A** *в точке* 0:

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{Q}\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Пусть оператор **A** *асимптотически линеен, причем*

$$\lim_{\|\varphi\| \to \infty} \frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{B}\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Тогда позитивный спектр оператора **A** *состоит из интервала* $(\lambda_{\mathbf{B}}, \lambda_{\mathbf{Q}})$ *и, возможно, самих чисел* $\lambda_{\mathbf{B}}$, $\lambda_{\mathbf{Q}}$.

Доказательство. В силу (3.15) выполнены условия лемм 3.3 и 3.4. Следовательно, позитивный спектр оператора **A** содержится в сегменте $[\lambda_{\mathbf{B}}, \lambda_{\mathbf{Q}}]$.

В силу (3.15) оператор **Q** является на всем конусе монотонной минорантой оператора **A**. Следовательно, в силу теоремы 2.4 положительные собственные функции оператора **A** образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.

Мы покажем ниже, что собственные числа оператора **A** стремятся к пределам $\lambda_{\mathbf{Q}}$ и $\lambda_{\mathbf{B}}$, когда нормы положительных собственных функций стремятся соответственно к нулю и бесконечности. Тогда из теоремы 3.2 будет следовать, что позитивный спектр заполняет интервал $(\lambda_{\mathbf{B}}, \lambda_{\mathbf{Q}})$.

Пусть $\varphi_n \in K$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность собственных векторов оператора **A**:

$$\mathbf{A}\varphi_n = \lambda_n\varphi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = 0$. Без ограничения общности можно считать, что векторы $\mathbf{Q}\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ сходятся к некоторому вектору h, а числа λ_n — к числу λ_0, которое в силу лемм 3.3 и 3.4 удовлетворяет неравенствам

$$\lambda_{\mathbf{Q}} \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\mathbf{B}}.$$

Тогда элементы $\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ будут сходиться к $\dfrac{1}{\lambda_0}h$, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} - \frac{1}{\lambda_0}h\right\| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\left\|\mathbf{Q}\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|} - h\right\| + \\ + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda_n}\frac{\|\mathbf{A}\varphi_n - \mathbf{Q}\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} + \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{\lambda_n} - \frac{1}{\lambda_0}\right|\cdot\|h\| = 0.$$

Очевидно, $\|h\| = \lambda_0$. В силу непрерывности оператора **Q**

$$\mathbf{Q}h = \lambda_0 h.$$

Таким образом, число λ_0 должно в силу теоремы 2.3 предыдущего параграфа совпадать с $\lambda_{\mathbf{Q}}$.

Пусть теперь $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi_n\| = \infty$. Снова будем считать, что векторы $\mathbf{B}\dfrac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ сходятся к некоторому вектору h, а числа

λ_n — к некоторому числу λ_0. Элементы $\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ будут при этом сходиться к вектору $\frac{1}{\lambda_0}h$, так как

$$\left\|\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}-\frac{h}{\lambda_0}\right\|\leqslant\frac{1}{\lambda_n}\frac{\|\mathbf{A}\varphi_n-\mathbf{B}\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|}+\frac{1}{\lambda_n}\left\|\mathbf{B}\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}-h\right\|+\\+\left|\frac{1}{\lambda_n}-\frac{1}{\lambda_0}\right|\cdot\|h\|.$$

Очевидно, $\|h\|=\lambda_0$. В силу непрерывности оператора $\mathbf{B}$

$$\mathbf{B}h=\lambda_0 h.$$

Таким образом, число λ_0 должно в силу теоремы 2.3 совпадать с числом $\lambda_{\mathbf{B}}$.

Теорема доказана.

Аналогично доказывается

Теорема 3.4. *Пусть вполне непрерывный оператор* $\mathbf{A}$ *удовлетворяет условию*

$$\mathbf{Q}\varphi\leqslant\mathbf{A}\varphi\leqslant\mathbf{B}\varphi\qquad(\varphi\in K),$$

где $\mathbf{Q}$, $\mathbf{B}$ — *линейные вполне непрерывные* u_0*-ограниченные операторы. Пусть оператор* $\mathbf{B}$ *является производной Фреше оператора* $\mathbf{A}$ *в точке* θ. *Пусть оператор асимптотически линеен, причем*

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty}\frac{\|\mathbf{A}\varphi-\mathbf{Q}\varphi\|}{\|\varphi\|}=0.$$

Тогда позитивный спектр оператора $\mathbf{A}$ *состоит из интервала* $(\lambda_{\mathbf{B}},\lambda_{\mathbf{Q}})$ *и, возможно, чисел* $\lambda_{\mathbf{B}}$, $\lambda_{\mathbf{Q}}$.

4. Нелинейные u_0-вогнутые операторы [316]. Положительный монотонный оператор $\mathbf{A}$ будем называть *u_0-вогнутым*, если найдется такой элемент $u_0\in K$, что для любого $\varphi\in K$ $(\varphi\neq\theta)$

$$\mu u_0\leqslant A\varphi\leqslant\nu u_0,\tag{3.16}$$

где положительные числа μ, ν зависят, вообще говоря, от φ, и если для каждого элемента $\varphi\geqslant\gamma u_0$, где γ больше нуля, при всех t из любого сегмента $[a, b]$ $(0<a<b<1)$ справедливо соотношение

$$\mathbf{A}(t\varphi)\geqslant(1+\eta)t\mathbf{A}\varphi,\tag{3.17}$$

где положительное число η зависит от элемента φ и чисел a, b.

Теорема 3.5. *Пусть* $\mathbf{A}$ — u_0-*вогнутый оператор. Пусть*

$$\mathbf{A}\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, \qquad \mathbf{A}\varphi_2 = \lambda_2\varphi_2,$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$.

Тогда $\varphi_1 \ll \varphi_2$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть

$$\varphi_2 - \varphi_1 \bar{\in} K. \tag{3.18}$$

В силу u_0-вогнутости (свойство (3.17)) оператора $\mathbf{A}$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$ выполняется соотношение

$$\frac{1}{\lambda_1}\mathbf{A}(t\varphi_1) \gg \frac{1}{\lambda_1} t\mathbf{A}\varphi_1 = t\varphi_1. \tag{3.19}$$

В силу условия (3.16) найдутся такие μ_2, ν_1, что $\mathbf{A}\varphi_2 \gg \mu_2 u_0$, $\mathbf{A}\varphi_1 \ll \nu_1 u_0$. Из этих соотношений следует:

$$\varphi_2 = \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{A}\varphi_2 \gg \frac{\mu_2}{\lambda_2}u_0 \gg \frac{\mu_2}{\nu_1\lambda_2}\mathbf{A}\varphi_1 = \frac{\mu_2\lambda_1}{\nu_1\lambda_2}\varphi_1. \tag{3.20}$$

Применим лемму 2.1 из предыдущего параграфа, полагая

$$\varphi_1 = u, \qquad \varphi_2 = x, \qquad \delta = 0, \qquad \gamma = 1, \qquad c = \frac{1}{\lambda_1},$$

$$\alpha = \frac{1}{\lambda_2}, \qquad \beta = \frac{\mu_2\lambda_1}{\nu_1\lambda_2}.$$

Условие (2.11) леммы 2.1 совпадает с (3.19), условие (2.12) — с (3.18), условие (2.13) — с равенством $\varphi_2 = \frac{1}{\lambda_2}\mathbf{A}\varphi_2$, условие (2.13) с соотношением (3.20).

В силу леммы 2.1

$$\frac{1}{\lambda_2} \leqslant \frac{1}{\lambda_1}.$$

Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Теорема 3.6. *Пусть* $\mathbf{A}$ — u_0-*вогнутый оператор. Тогда уравнение*

$$\mathbf{A}\varphi = \lambda_0\varphi \qquad (\lambda_0 > 0)$$

не может иметь в конусе K *более одного отличного от* θ *решения.*

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Пусть

$$\mathbf{A}\varphi_1 = \lambda_0\varphi_1, \qquad \mathbf{A}\varphi_2 = \lambda_0\varphi_2,$$

где $\varphi_1, \varphi_2 \in K$, $\varphi_1 \neq \varphi_2$, $\varphi_1 \neq \theta$, $\varphi_2 \neq 0$. Из двух элементов $\varphi_1 - \varphi_2$ и $\varphi_2 - \varphi_1$ по крайней мере один не принадлежит конусу K. Пусть для определенности $\varphi_2 - \varphi_1 \overline{\in} K$. Тогда, очевидно, найдется такое $\gamma < 1$, что

$$\varphi_2 - \gamma\varphi_1 \overline{\in} K. \tag{3.21}$$

В силу u_0-вогнутости оператора

$$\mu_1 u_0 \leqslant \mathbf{A}\varphi_1 \leqslant \nu_1 u_0, \qquad \mu_2 u_0 \leqslant \mathbf{A}\varphi_2 \leqslant \nu_2 u_0,$$

откуда

$$\varphi_2 = \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi_2 \geqslant \frac{\mu_2}{\lambda_0} u_0 \geqslant \frac{\mu_2}{\nu_1\lambda_0}\mathbf{A}\varphi_1 = \frac{\mu_2}{\nu_1}\varphi_1 = \delta\varphi_1. \tag{3.22}$$

Из последнего соотношения следует, что $\delta < \gamma$, так как в противном случае

$$\varphi_2 - \gamma\varphi_1 = \varphi_2 - \delta\varphi_1 + (\delta - \gamma)\varphi_1 \in K,$$

что противоречит (3.21).

Так как оператор $\mathbf{A}$ u_0-вогнут и $\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi_1$, то

$$\varphi_1 \geqslant \frac{\mu_1}{\lambda_0} u_0.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{(1+\eta)\lambda_0}\mathbf{A}(t\varphi_1) \geqslant \frac{t}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi_1 = t\varphi_1 \tag{3.23}$$

при $\delta \leqslant t \leqslant \gamma$.

Применим лемму 2.1 из предыдущего параграфа, полагая

$$u = \varphi_1, \qquad x = \varphi_2, \qquad c = \frac{1}{(1+\eta)\lambda_0}, \qquad \alpha = \frac{1}{\lambda_0}.$$

Условие (2.11) леммы 2.1 выполнено в силу (3.23); условие (2.12) леммы 2.1 совпадает с (3.21); условие (2.13) вытекает из равенства $\varphi_2 = \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi_2$; последнее условие (2.13) совпадает с (3.22).

В силу леммы 2.1

$$\frac{1}{\lambda_0} \leqslant \frac{1}{\lambda_0(1+\eta)}.$$

Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Перейдем к рассмотрению вполне непрерывных u_0-вогнутых операторов.

Каждый u_0-вогнутый оператор является сам для себя монотонной минорантой. Действительно, из определения u_0-вогнутого оператора вытекает, что

$$c\mathbf{A}(tu_0) \gg tu_0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ c > 0).$$

Тогда при любом $\gamma > 1$, тем более,

$$c\gamma\mathbf{A}(tu_0) \gg tu_0 \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Но и при $1 \leqslant t \leqslant \gamma$ в силу монотонности оператора $\mathbf{A}$

$$c\gamma\mathbf{A}(tu_0) \gg c\gamma\mathbf{A}u_0 \gg \gamma u_0 \gg tu_0.$$

Из теоремы 2.4 предыдущего параграфа следует тогда

Лемма 3.5. *Положительные собственные векторы u_0-вогнутого вполне непрерывного оператора образуют непрерывную ветвь бесконечной длины.*

Теорема 3.7. *Позитивный спектр u_0-вогнутого вполне непрерывного оператора образует некоторый интервал.*

Доказательство. Покажем вначале, что собственные числа, отвечающие положительным собственным векторам оператора $\mathbf{A}$, стремятся к некоторому пределу λ_0, когда нормы собственных векторов стремятся к нулю.

Через λ_0 обозначим supremum позитивного спектра оператора $\mathbf{A}$. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Выберем в позитивном спектре число $\bar{\lambda}$, удовлетворяющее неравенству $\lambda_0 - \bar{\lambda} < \varepsilon$. В силу теоремы 3.6 уравнение $\mathbf{A}\varphi = \bar{\lambda}\varphi$ имеет в конусе K единственное отличное от θ решение $\bar{\varphi}$. В силу теоремы 3.7 все положительные собственные векторы φ оператора $\mathbf{A}$, которым отвечают собственные числа, меньшие $\bar{\lambda}$, удовлетворяют соотношению $\varphi \gg \bar{\varphi}$, т. е. лежат в множестве $K + \bar{\varphi}$. В силу утверждения **2** (стр. 242)

$$\rho(\theta,\ K+\bar{\varphi}) = \rho_0 > 0.$$

Значит, все положительные собственные векторы, которым отвечают собственные числа, меньшие чем $\bar{\lambda}$, имеют нормы, большие чем ρ_0. Так как число ε может быть сколь угодно малым, то при стремлении норм положительных собственных функций к нулю собственные числа сходятся к λ_θ.

Проведенные рассуждения доказывают, что само число λ_θ не может принадлежать позитивному спектру оператора $\mathbf{A}$, так как в противном случае в качестве $\bar{\lambda}$ можно было бы взять λ_θ.

Аналогичными рассуждениями показывается, что при безграничном возрастании норм положительных собственных функций собственные числа сходятся к числу λ_∞, являющемуся infimum'ом позитивного спектра. При этом само число λ_∞ также не принадлежит позитивному спектру.

В силу леммы 3.5 положительные собственные векторы оператора образуют непрерывную ветвь бесконечной длины. Поэтому из теоремы 3.2 вытекает, что позитивный спектр оператора $\mathbf{A}$ заполняет полностью интервал $(\lambda_\infty, \lambda_\theta)$.

Теорема доказана.

В некоторых случаях можно указать, чему равны числа λ_θ и λ_∞.

Теорема 3.8. *Пусть вполне непрерывный u_0-вогнутый оператор $\mathbf{A}$ имеет в точке θ производную Фреше $\mathbf{B}$. Тогда для всех элементов $\varphi \in K$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{B}\varphi \gg \mathbf{A}\varphi.$$

Если при этом оператор $\mathbf{B}$ u_0-ограничен, то число λ_θ, фигурирующее в формулировке теоремы 3.7, совпадает с собственным числом $\lambda_{\mathbf{B}}$ оператора $\mathbf{B}$, отвечающим единственному положительному собственному вектору оператора $\mathbf{B}$.

Доказательство. Докажем первое утверждение теоремы.

Пусть вначале $\varphi \gg \gamma u_0$, где $\gamma > 0$. Представим тогда элемент $\mathbf{B}\varphi - \mathbf{A}\varphi$ в виде

$$\mathbf{B}\varphi - \mathbf{A}\varphi = \mathbf{B}\varphi - n\mathbf{A}\frac{\varphi}{n} + n\mathbf{A}\frac{\varphi}{n} - \mathbf{A}\varphi \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Так как

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\mathbf{B}\varphi - n\mathbf{A}\frac{\varphi}{n}\right\| = \|\varphi\| \lim_{n\to\infty}\frac{\left\|\mathbf{B}\frac{\varphi}{n} - \mathbf{A}\frac{\varphi}{n}\right\|}{\left\|\frac{\varphi}{n}\right\|} = 0,$$

то элемент $\mathbf{B}\varphi - \mathbf{A}\varphi$ является предельным для последовательности элементов $n\mathbf{A}\frac{\varphi}{n} - \mathbf{A}\varphi$ $(n = 1, 2, \ldots)$, каждый из которых в силу u_0-вогнутости оператора $\mathbf{A}$ принадлежит K. Значит, и $\mathbf{B}\varphi - \mathbf{A}\varphi \in K$, т. е. $\mathbf{B}\varphi \gg \mathbf{A}\varphi$.

Пусть теперь φ — произвольный элемент из K. Для элементов $\varphi + \frac{u_0}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ справедливость соотношений

$$\mathbf{B}\left(\varphi + \frac{u_0}{n}\right) \gg \mathbf{A}\left(\varphi + \frac{u_0}{n}\right) \tag{3.24}$$

доказана, так как $\varphi + \frac{u_0}{n} \gg \frac{u_0}{n}$. Переходя в (3.24) к пределу при $n \to \infty$, получим $\mathbf{B}\varphi \gg \mathbf{A}\varphi$.

Перейдем к доказательству второго утверждения теоремы.

Пусть $\varphi_n \in K$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — такая последовательность положительных собственных векторов оператора $\mathbf{A}$,

$$\mathbf{A}\varphi_n = \lambda_n \varphi_n \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

что

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_n\| = 0.$$

Как было показано при доказательстве теоремы 3.7, собственные числа λ_n при этом сходятся к некоторому положительному числу λ_θ. Без ограничения общности можно считать, что векторы $\mathbf{B}\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся к некоторому вектору $\lambda_\theta \psi_0$, — в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности. Тогда векторы $\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходятся к вектору ψ_0, так как

$$\left\|\psi_0 - \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\| \leqslant \frac{1}{\lambda_\theta}\left\|\lambda_\theta\psi_0 - \mathbf{B}\frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}\right\| + \frac{1}{\lambda_\theta}\frac{\|\mathbf{B}\varphi_n - \mathbf{A}\varphi_n\|}{\|\varphi_n\|} + \left|\frac{\lambda_n}{\lambda_\theta} + 1\right|.$$

Вектор ψ_0 положителен, так как положительны все φ_n.

Из непрерывности оператора $\mathbf{B}$ вытекает, что $\mathbf{B}\psi_0 = \lambda_\theta\psi_0$. Значит, $\lambda_\theta = \lambda_{\mathbf{B}}$.

Теорема доказана.

Аналогичными рассуждениями доказывается

Теорема 3.9. *Пусть* $\mathbf{A}$ — u_0-*вогнутый вполне непрерывный оператор. Пусть* $\mathbf{Q}$ — *такой линейный вполне непрерывный оператор, что*

$$\lim_{\|\varphi\|\to\infty} \frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{Q}\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Тогда для всех элементов $\varphi \in K$ *справедливо соотношение*

$$\mathbf{Q}\varphi \leqslant \mathbf{A}\varphi.$$

Если при этом оператор $\mathbf{Q}$ u_0-*ограничен, то число* λ_∞, *фигурирующее в формулировке теоремы* 3.7, *совпадает с собственным числом* $\lambda_{\mathbf{Q}}$ *оператора* $\mathbf{Q}$, *отвечающим единственному нормированному положительному собственному вектору оператора* $\mathbf{Q}$.

Если оператор $\mathbf{Q}$ *не имеет положительных собственных чисел, которым отвечают положительные собственные векторы, то число* λ_∞, *фигурирующее в формулировке теоремы* 3.7, *равно нулю.*

5. u_0-монотонные операторы. Условие (3.17) u_0-вогнутости оператора $\mathbf{A}$ используется лишь при доказательстве теоремы 3.6. В остальных теоремах использовано более простое неравенство

$$\mathbf{A}(t\varphi) \geqslant t\mathbf{A}\varphi \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{3.25}$$

Пусть $\mathbf{A}(t\varphi) \neq t\mathbf{A}\varphi$ при $0<t<1$, тогда теорема 3.6 сохраняет силу, если условие (3.17) заменить условием (3.25) и предположением, что для любых φ_1, $\varphi_2 \in K$ таких, что $\varphi_1 \geqslant \gamma_1 u_0$, $\varphi_2 \geqslant \gamma_2 u_0$, из $\varphi_1 \geqslant \varphi_2$ ($\varphi_1 \neq \varphi_2$) следует:

$$\mathbf{A}\varphi_1 - \mathbf{A}\varphi_2 \geqslant \varkappa u_0, \tag{3.26}$$

где γ_1, γ_2, $\varkappa$ — некоторые положительные числа, зависящие от φ_1, φ_2.

Доказательство проведем от противного. Допустим, что $\mathbf{A}\varphi_1 = \lambda_0\varphi_1$, $\mathbf{A}\varphi_2 = \lambda_0\varphi_2$ и $\varphi_1 \neq \varphi_2$. Обозначим через k такое наибольшее положительное число, что $\varphi_1 \geqslant k\varphi_2$. Без ограничения общности можно считать, что $k < 1$. Из условия (3.26) следует, что

$$\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}\varphi_1 \geqslant \frac{1}{\lambda_0}\mathbf{A}(k\varphi_2) + \frac{\varkappa}{\lambda_0}u_0 \geqslant k\varphi_2 + \frac{\varkappa}{\lambda_0}u_0.$$

В силу (3.16) $\mathbf{A}\varphi_2 \geqslant \nu u_0$, где $\nu > 0$. Тогда

$$\varphi_1 \geqslant k\varphi_2 + \frac{\varkappa}{\nu\lambda_0}\mathbf{A}\varphi = \left(k + \frac{\varkappa}{\nu}\right)\varphi_2,$$

а это неравенство противоречит максимальности k.

Операторы, удовлетворяющие вместо условия (3.17) условиям (3.25) и (3.26), естественно назвать *u_0-монотонными*. Для u_0-монотонных операторов справедливы все утверждения, доказанные выше для u_0-вогнутых операторов.

Мы исследовали операторы, определенные во всем конусе и во всем конусе удовлетворяющие условиям u_0-вогнутости или u_0-монотонности. Та часть предложений, в которых не играло роли поведение оператора на бесконечности, сохранит, очевидно, силу, если оператор u_0-вогнут или u_0-монотонен в пересечении конуса с некоторым шаром.

Оператор

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \rho(s)\sqrt{1 - \left[\int_0^1 K_s'(s, t)\varphi(t)\,dt\right]^2}\int_0^1 K(s, t)\varphi(t)\,dt$$

из задачи о продольном изгибе тонких стержней, рассмотренный в предыдущей главе, положителен в пересечении некоторого шара пространства непрерывных функций с конусом неотрицательных функций. Оказывается, что он не будет u_0-вогнутым ни при каком выборе функции $u_0(s)$. Однако он будет u_0-монотонным, если положить $u_0(s) = \rho(s)s(1-s)$. Это позволяет из теорем настоящего параграфа сделать ряд выводов о том, как меняется первая форма потери устойчивости при изменении нагрузки для задачи о продольном изгибе стержня (И. А. Бахтин и М. А. Красносельский, К задаче о продольном изгибе стержней переменной жесткости, ДАН **105**, № 4 (1955)).

6. Непрерывная зависимость от параметра. Как было выяснено выше, у u_0-вогнутых и у u_0-монотонных вполне непрерывных операторов совокупности собственных векторов, лежащих в конусе, образуют непрерывные ветви, причем в силу теорем единственности каждому собственному числу из позитивного спектра соответствует единственный собственный вектор из конуса. Позитивный спектр рассмотренных операторов заполняет некоторый интервал $(\alpha, \beta) \subset (0, \infty)$.

Естественным дополнением предложений предыдущих пунктов является теорема о непрерывной зависимости собственного вектора от соответствующего ему собственного числа.

Теорема 3.10. *Положительные собственные векторы $\varphi(\lambda)$ u_0-вогнутых и u_0-монотонных операторов непрерывно зависят от собственного значения λ ($\mathbf{A}\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$) в том смысле, что при $\alpha < \lambda_0 < \beta$*

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \|\varphi(\lambda) - \varphi(\lambda_0)\| = 0.$$

Утверждение этой теоремы непосредственно вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.6. *Пусть N — совокупность всех собственных векторов вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$, лежащих в замкнутом ограниченном множестве $T \subset E$, не содержащем θ. Пусть Δ — совокупность собственных значений оператора $\mathbf{A}$, соответствующих собственным векторам, лежащим в T. Пусть, наконец, каждому $\lambda \in \Delta$ соответствует единственный собственный вектор $\varphi(\lambda)$ из T ($\mathbf{A}\varphi(\lambda) = \lambda\varphi(\lambda)$).*

Тогда собственные векторы $\varphi(\lambda)$ непрерывно зависят от λ на всем Δ, кроме, быть может, точки $\lambda = 0$.

Доказательство. Если утверждение леммы неверно, то найдется такая последовательность $\lambda_n \in \Delta$, сходящаяся к отличному от нуля $\lambda_0 \in \Delta$, что

$$\|\varphi(\lambda_n) - \varphi(\lambda_0)\| > \alpha,$$

где α — некоторое положительное число. Так как оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен, то без ограничения общности можно считать, что $\mathbf{A}\varphi(\lambda_n)$ сильно сходятся к некоторому элементу $\lambda_0\psi$. Но тогда из равенств

$$\mathbf{A}\varphi(\lambda_n) = \lambda_n\varphi(\lambda_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

видно, что элементы $\varphi(\lambda_n)$ сходятся к ψ, причем

$$\mathbf{A}\psi = \lambda_0\psi.$$

В силу условия леммы $\psi = \varphi(\lambda_0)$. Следовательно,

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi(\lambda_n) - \varphi(\lambda_0)\| = 0.$$

Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

7. Теоремы П. С. Урысона. В качестве примера рассмотрим оператор П. С. Урысона

$$\mathbf{A}\varphi(s)=\int_a^b K[s,\ t,\ \varphi(t)]\,dt. \tag{3.27}$$

Доказываемые ниже предложения принадлежат П. С. Урысону [66].

Будем предполагать, следуя Урысону, что функция $K(s, t, u)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) $K(s, t, 0)\equiv 0 \quad (a\leqslant s,\ t\leqslant b)$;

b) функция $K(s, t, u)$ обладает ограниченной положительной производной $K'_u(s, t, u)$:

$$0<K'_u(s,\ t,\ u)\leqslant M<\infty \qquad (a\leqslant s,\ t\leqslant b;\ 0\leqslant u<\infty);$$

c) производная $K'_u(s, t, u)$ монотонно убывает при возрастании значений u $(u\geqslant 0)$ при всех s, $t\in[a, b]$. При этом, если $u_1<u_2$, то разность $K'_u(s, t, u_1)-K'_u(s, t, u_2)$ имеет положительный infimum относительно s, $t\in[a, b]$.

Мы будем изучать положительные собственные функции оператора (3.27). Поэтому не играет роли, какие значения принимает функция $K(s, t, u)$ при отрицательных значениях u. Нам будет удобно считать, что

$$K(s,\ t,\ -u)=-K(s,\ t,\ u)\ (a\leqslant s,\ t\leqslant b;\ -\infty<u<\infty).$$

Из b) вытекает, что функция $K(s, t, u)$ непрерывна по u при всех s, $t\in[a, b]$ $(-\infty<u<\infty)$. Эта функция удовлетворяет неравенству

$$|K(s,\ t,\ u)|\leqslant M\cdot|u| \qquad (a\leqslant s,\ t\leqslant b;\ -\infty<u<\infty).$$

Из этого неравенства в силу теоремы 3.2 главы I вытекает, что оператор $\mathbf{A}$ действует в пространстве L^2 и вполне непрерывен. Очевидна положительность оператора $\mathbf{A}$.

(А) *При выполнении условий* a), b), c) *оператор* $\mathbf{A}$ u_0-*вогнут, где* u_0 — *функция, тождественно равная на* $[a, b]$ *единице.*

Доказательство. Монотонность оператора $\mathbf{A}$ следует из того, что функция $K(s, t, u)$ при возрастании u $(u\geqslant 0)$ монотонно возрастает, так как ее производная по u положительна.

Покажем, что оператор $\mathbf{A}$ удовлетворяет условию (3.16). Пусть $\varphi(s) \in K$.

Так как при всех $u \geqslant 0$

$$K(s, t, u) \leqslant Mu \qquad (a \leqslant s, t \leqslant b),$$

то

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_a^b K[s, t, \varphi(t)]\,dt \leqslant M \int_a^b \varphi(t)\,dt,$$

т. е. $\mathbf{A}\varphi \leqslant \nu u_0$, где $\nu = M \int_a^b \varphi(t)\,dt$.

Так как $\varphi \neq \theta$, то найдется такое положительное число α, что множество G_1 тех $s \in [a, b]$, в которых $\varphi(s) > \alpha$, имеет положительную меру. Тогда при $t \in G_1$ в силу монотонного возрастания функции $K(s, t, u)$ и монотонного убывания функции $K'_u(s, t, u)$

$$K[s, t, \varphi(t)] \geqslant K(s, t, \alpha) \geqslant$$
$$\geqslant K'_u(s, t, \alpha) \cdot \alpha \geqslant \alpha \cdot \inf_{a \leqslant s, t \leqslant b} K'_u(s, t, \alpha) > 0,$$

откуда

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_a^b K[s, t, \varphi(t)]\,dt \geqslant$$
$$\geqslant \int_{G_1} K[s, t, \varphi(t)]\,dt \geqslant \alpha \cdot \operatorname{mes} G_1 \cdot \inf_{a \leqslant s, t \leqslant b} K'_u(s, t, \alpha),$$

т. е. $\mathbf{A}\varphi \geqslant \mu u_0$, где

$$\mu = \alpha \operatorname{mes} G_1 \inf_{a \leqslant s, t \leqslant b} K'_u(s, t, \alpha).$$

Пусть заданы числа $0 < a_1 < b_1 < 1$, $\gamma > 0$. Ниже мы используем тот факт, что

$$\inf [K(x, y, tu) - tK(x, y, u)] = m > 0, \tag{3.28}$$

где infimum распространен на все $x, y \in [a, b]$, $u \geqslant \gamma$, $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$.

Для доказательства (3.28) представим разность

$$\Delta = K(x, y, tu) - tK(x, y, u)$$

в виде

$$\Delta = \int_0^{tu} K'_u(x, y, u)\,du - t\int_0^{u} K'_u(x, y, u)\,du =$$
$$= t\int_0^{u} [K'_u(x, y, tu) - K'_u(x, y, u)]\,du.$$

Обозначим через γ_1 такое положительное число, что $\gamma_1 < \gamma$ и $b_1\gamma < \gamma_1$. Так как производная $K'_u(x, y, u)$ убывает при возрастании u, то

$$\Delta \geqslant a_1 \int_{\gamma_1}^{\gamma} [K'_u(x, y, b_1 u) - K'_u(x, y, u)]\,du \geqslant$$
$$\geqslant a_1 \int_{\gamma_1}^{\gamma} [K'_u(x, y, b_1\gamma) - K'_u(x, y, \gamma_1)]\,du =$$
$$= a_1(\gamma - \gamma_1)[K'_u(x, y, b_1\gamma) - K'_u(x, y, \gamma_1)].$$

Из последнего соотношения следует (3.28) в силу c).

Покажем теперь, что оператор **А** удовлетворяет условию (3.17).

Пусть $\varphi(x) \succcurlyeq \gamma u_0$ $(\gamma > 0)$. Это значит, что $\varphi(x) \geqslant \gamma$ при всех $x \in [a, b]$. Тогда в силу (3.28) найдется такое $m > 0$, что

$$K[x, y, t\varphi(y)] - tK[x, y, \varphi(y)] \geqslant m \quad (a \leqslant x,\ y \leqslant b)$$

при $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$. Пусть

$$\eta = \frac{m\cdot(b-a)}{b_1 M\cdot\int_a^b \varphi(x)\,dx}.$$

Тогда при $a_1 \leqslant t \leqslant b_1$

$$\mathbf{A}[t\varphi(x)] - t\mathbf{A}\varphi(x) =$$
$$= \int_a^b \{K[x, y, t\varphi(y)] - tK[x, y, \varphi(y)]\}\,dy \geqslant$$
$$\geqslant m\cdot(b-a) \geqslant m\cdot(b-a)\frac{t}{b_1}\cdot\frac{\mathbf{A}\varphi(x)}{M\int_a^b \varphi(x)\,dx},$$

т. е.

$$\mathbf{A}(t\varphi) - t\mathbf{A}\varphi \gg t\eta\mathbf{A}\varphi,$$

что и означает выполнение условия (3.17).

Предложение (A) доказано.

Так как оператор $\mathbf{A}$ вполне непрерывен и u_0-вогнут, то из теорем 3.5, 3.6 и 3.7 вытекают следующие предложения.

(B) *Пусть выполнены условия* a), b), c).

Тогда позитивный спектр оператора (3.27) (*оператора* $\mathbf{A}$) *образует некоторый интервал* $(\lambda_\infty, \lambda_\theta)$. *Каждому собственному числу* λ *из позитивного спектра отвечает единственная положительная собственная функция* $\varphi(x)$ *оператора* $\mathbf{A}$. *Если* $\varphi_1(x)$ *и* $\varphi_2(x)$ — *две положительные собственные функции оператора* $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\varphi_1(x) = \lambda_1\varphi_1(x), \qquad \mathbf{A}\varphi_2(x) = \lambda_2\varphi_2(x),$$

то из $\lambda_1 < \lambda_2$ *следует, что*

$$\varphi_1(x) \geqslant \varphi_2(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

(C) *Пусть функция* $K(x, y, u)$, *кроме условий* a), b), c), *удовлетворяет условию*

d) *Функция* $K'_u(x, y, u)$ *в точке* $u = 0$ *непрерывна по* u *равномерно относительно* $x, y \in [a, b]$.

Тогда фигурирующее в формулировке предложения (B) *число* λ_θ *совпадает с наибольшим положительным собственным числом* u_0-*ограниченного линейного оператора*

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \int_a^b K_u(x, y, 0)\,\varphi(y)\,dy. \tag{3.29}$$

Доказательство. Функция $K'_u(x, y, 0)$ в силу свойства c) удовлетворяет неравенству

$$0 < m \leqslant K'_u(x, y, 0) \leqslant M < \infty \qquad (a \leqslant x, \ y \leqslant b),$$

откуда (см. стр. 268) следует, что оператор (3.29) u_0-ограничен, где u_0 — функция, тождественно равная на $[a, b]$ единице.

Покажем, что оператор (3.29) является производной Фреше оператора (3.27) в точке θ. Тогда из леммы 3.6 получим доказываемое утверждение.

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу условия d) можно указать такое $\delta > 0$, что при $u \leqslant \delta$

$$\left| K(x, y, u) - K'_u(x, y, 0)\, u \right| \leqslant \varepsilon u. \tag{3.30}$$

Пусть $\varphi(x) \in L^2$. Обозначим через $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ функции, определенные равенствами

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x) & \text{при } |\varphi(x)| \leqslant \delta, \\ 0 & \text{при } |\varphi(x)| > \delta \end{cases}$$

и

$$\varphi_2(x) = \varphi(x) - \varphi_1(x).$$

Из (3.30) вытекает, что

$$\frac{\| \mathbf{A}\varphi_1 - \mathbf{B}\varphi_1 \|}{\| \varphi \|} \leqslant \frac{\| \mathbf{A}\varphi_1 - \mathbf{B}\varphi_1 \|}{\| \varphi_1 \|} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{\| \varphi_1 \|} \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b | \varphi_1(y) |\, dy \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \varepsilon \cdot (b - a). \tag{3.31}$$

Как было уже отмечено, функция $K(x, y, u)$ удовлетворяет неравенству

$$| K(x, y, u) | \leqslant M \cdot | u | \qquad (a \leqslant x,\ y \leqslant b,\ -\infty < u < \infty)$$

и, так как $K'_u(x, y, 0) \leqslant M$, то

$$| K(x, y, u) - K'_u(x, y, 0)\, u | \leqslant 2M \cdot | u |$$
$$(a \leqslant x,\ y \leqslant b,\ -\infty < u < \infty).$$

Поэтому при $| u | > \delta$

$$| K(x, y, u) - K'_u(x, y, 0)\, u | \leqslant \frac{2M}{\delta} u^2.$$

В силу последнего неравенства

$$\frac{\| \mathbf{A}\varphi_2 - \mathbf{B}\varphi_2 \|}{\| \varphi \|} \leqslant \frac{\| \mathbf{A}\varphi_2 - \mathbf{B}\varphi_2 \|}{\| \varphi_2 \|} \leqslant \frac{2M}{\delta \| \varphi_2 \|} \left\{ \int_a^b \left[\int_a^b \varphi_2^2(y)\, dy \right]^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \frac{2M \sqrt{b - a}}{\delta} \| \varphi_2 \| \leqslant \frac{2M \sqrt{b - a}}{\delta} \| \varphi \|. \tag{3.32}$$

Так как

$$K[x,\ y,\ \varphi(y)] \equiv K[x,\ y,\ \varphi_1(y)] + K[x,\ y,\ \varphi_2(y)]$$
$$(a \leqslant x,\ y \leqslant b),$$

то $\mathbf{A}\varphi = \mathbf{A}\varphi_1 + \mathbf{A}\varphi_2$, откуда

$$\frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{B}\varphi\|}{\|\varphi\|} \leqslant \frac{\|\mathbf{A}\varphi_1 - \mathbf{B}\varphi_1\|}{\|\varphi\|} + \frac{\|\mathbf{A}\varphi_2 - \mathbf{B}\varphi_2\|}{\|\varphi\|}.$$

В силу (3.31) и (3.32)

$$\lim_{\|\varphi\| \to 0} \frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{B}\varphi\|}{\|\varphi\|} \leqslant \varepsilon(b-a).$$

Число ε может быть сколь угодно мало. Поэтому из последнего неравенства вытекает, что

$$\lim_{\|\varphi\| \to} \frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{B}\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0.$$

Предложение (C) доказано.

(D) *Пусть функция $K(x,\ y,\ u)$, кроме условий* a), b), c), удовлетворяет условию.

e) *При безграничном возрастании и функция $K'_u(x,\ y,\ u)$ равномерно (относительно $x,\ y \in [a,\ b]$) стремится к функции $Q(x,\ y)$, которая либо тождественно равна нулю, либо является ядром, порождающим u_0-ограниченный линейный оператор* $\mathbf{Q}$:

$$\mathbf{Q}\varphi(x) = \int_a^b Q(x,\ y)\varphi(y)\,dy. \tag{3.33}$$

Тогда фигурирующее в формулировке предложения (B) *число λ_∞ совпадает с нулем, если $Q(x,\ y) = 0$, и с наибольшим положительным числом оператора* (3.33), *если этот оператор u_0-ограничен.*

Доказательство. В силу леммы 3.7 достаточно показать, что

$$\lim_{\|\varphi\| \to \infty} \frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{Q}\varphi\|}{\|\varphi\|} = 0. \tag{3.34}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$. Тогда в силу условия e) можно указать такое $\rho > 0$, что при $|u| \geqslant \rho$

$$\left|K'_u(x,\ y,\ u) - Q(x,\ y)\right| < \varepsilon. \tag{3.35}$$

Оценим разность $K(x, y, u) - Q(x, y)u$. В силу условия b) при $|u| \leqslant \rho$ выполняется неравенство

$$|K(x, y, u) - Q(x, y)u| \leqslant 2M\rho. \tag{3.36}$$

При $u > \rho$

$$\begin{aligned}
&|K(x, y, u) - Q(x, y)u| \leqslant \\
&\leqslant |K(x, y, u) - K(x, y, \rho\operatorname{sign} u) - Q(x, y)(u - \rho\operatorname{sign} u)| + \\
&\qquad + |K(x, y, \rho\operatorname{sign} u) - Q(x, y)\rho\operatorname{sign} u| \leqslant \\
&\leqslant |K'_u[x, y, \rho + \theta(x, y, u)(|u| - \rho)] - Q(x, y)|(|u| - \rho) + 2M\rho,
\end{aligned}$$

где $0 < \theta(x, y, u) < 1$. В силу (3.35)

$$|K'_u[x, y, \rho + \theta(x, y, u)(|u| - \rho)] - Q(x, y)| < \varepsilon.$$

Таким образом, при $|u| > \rho$

$$|K(x, y, u) - Q(x, y)u| < \varepsilon(|u| - \rho) + 2M\rho. \tag{3.37}$$

Из (3.36) и (3.37) вытекает, что при всех u справедливо неравенство

$$\begin{aligned}
&|K(x, y, u) - Q(x, y)u| \leqslant \\
&\qquad \leqslant \varepsilon|u| + 2M\rho \quad (a \leqslant x,\ y \leqslant b).
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Пусть $\varphi(x) \in L^2$. Применяя неравенство Буняковского и (3.38), получим:

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{Q}\varphi\| = \\
&\quad = \left\{ \int_a^b \left| \int_a^b \{K[x, y, \varphi(y)] - Q(x, y)\varphi(y)\}\, dy \right|^2 dx \right\}^{\frac{1}{2}} \leqslant \\
&\quad \leqslant \varepsilon (b - a)^{\frac{1}{2}} \int_a^b |\varphi(y)|\, dy + 2M\rho\,(b - a)^{\frac{3}{2}} \leqslant \\
&\quad \leqslant \varepsilon (b - a)\,\|\varphi\| + 2M\rho\,(b - a)^{\frac{3}{2}},
\end{aligned}$$

откуда вытекает, что

$$\lim_{\|\varphi\| \to \infty} \frac{\|\mathbf{A}\varphi - \mathbf{Q}\varphi)}{\|\varphi\|} \leqslant \varepsilon(b - a).$$

Число ε может быть сколь угодно мало. Поэтому из последнего неравенства следует (3.34).

Предложение (D) доказано.

Отметим, что теоремы о спектре оператора П. С. Урысона

$$A\varphi(x) = \int_G K[x, y, \varphi(y)]\,dy, \tag{3.39}$$

установленные выше, сохраняют силу при более слабых ограничениях, чем приведенные в настоящем пункте условия П. С. Урысона. Это объясняется тем, что оператор (3.39) u_0-вогнут при широких предположениях, содержащих условия П. С. Урысона как весьма частный случай.

Для случаев, когда оператор (3.39) действует в пространстве C или в L^p, основные условия u_0-вогнутости заключаются [31в] в возрастании при фиксированных x, $y \in G$ функций $K(x, y, u)$ и убывании функции $\frac{1}{u} K(x, y, u)$ при возрастании u $(u > 0)$.

Для исследования оператора П. С. Урысона в этих более общих предположениях может быть применен и метод Урысона последовательных приближений (как это показал И. Бахтин *)).

Мы исследовали в настоящем пункте оператор Урысона, показав, что он u_0-вогнут. Нетрудно показать, что для исследования этого оператора можно было бы использовать и понятие u_0-монотонного оператора.

---

*) Труды семинара по функциональному анализу, Воронеж, вып. 3 (печатается).

ГЛАВА VI

ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Методы исследования нелинейных уравнений, излагаемые в настоящей главе, тесно связаны с топологическими соображениями.

Вариационные методы применимы для изучения уравнений с такими операторами, которые являются градиентами некоторых функционалов, — такие операторы называют *потенциальными*. Кроме этого, вариационные методы применимы для изучения уравнений с операторами, в различных смыслах эквивалентными потенциальным.

В главе рассматриваются задачи, которые изучались в предыдущих главах при помощи топологических соображений.

Первый параграф посвящен вариационному принципу существования решений. Оказывается, что этот вариационный принцип в определенном смысле близок к одному специальному принципу неподвижной точки, вытекающему из отличия от нуля вращения некоторого вполне непрерывного векторного поля. В качестве приложений общих принципов существования решений у операторных уравнений рассматриваются уравнения с операторами Гаммерштейна.

Второй основной параграф главы содержит принцип линеаризации в задаче о точках бифуркации для потенциальных вполне непрерывных операторов. Для таких операторов удается задачу о точках бифуркации решить полностью. Применяемый метод существенно использует идеи теории категорий Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана.

В третьем параграфе устанавливаются два принципа существования собственных векторов. Основной результат параграфа заключается в доказательстве существования континуумов собственных векторов у операторов, являющихся градиентами слабо непрерывных функционалов. В вариационных методах собственные векторы появляются как критические точки функционалов, рассматриваемых на поверхностях уровня других функционалов. Значения функционалов в критических точках называют критическими значениями. Поэтому вопросы о собственных векторах тесно связаны с изучением критических значений функционалов. В последнем параграфе главы изучаются критические точки четных функционалов. Доказывается, что у таких функционалов существует счетное число критических значений, обладающих свойством устойчивости при малых возмущениях функционалами, не обладающими свойством четности.

Во всей главе используются элементы теории вполне непрерывных самосопряженных операторов (см., например, [4] или [42]).

§ 1. Теоремы существования решений *)

1. Общий принцип. Вариационный метод доказательства теорем существования решений у некоторого уравнения

$$\Gamma\varphi = \theta \tag{1.1}$$

состоит из следующих двух шагов:

a) конструируется такой оператор Γ_1, являющийся градиентом функционала $\Phi(\varphi)$, заданного в некотором функциональном пространстве, что решение уравнения (1.1) эквивалентно решению уравнения

$$\Gamma_1\varphi = \theta; \tag{1.2}$$

b) для функционала $\Phi(\varphi)$ доказывается существование такой точки φ_0, в которой он принимает свое наибольшее или наименьшее значение.

Если точка φ_0 найдена, то, очевидно, в этой точке градиент Γ_1 принимает нулевое значение θ. Это означает, что φ_0 является решением уравнения (1.2). Но, по предположению, разрешимость уравнения (1.2) эквивалентна разрешимости уравнения (1.1). Значит, уравнение (1.1) имеет решение.

Для того чтобы применить описанный вариационный метод к доказательству теорем существования решений у заданных

---

*) В настоящем параграфе излагается с небольшими изменениями содержание статьи [20].

конкретных классов нелинейных уравнений, нужно иметь достаточно широкий набор нелинейных операторов, являющихся градиентами просто исследуемых функционалов. Для тех примеров, которые будут иллюстрировать доказываемый ниже общий принцип существования решений, мы используем дифференцируемый функционал (5.5) из главы I, заданный в пространстве L^2. Кроме того, мы используем тот факт, что самосопряженный оператор $\mathbf{A}$, действующий в вещественном гильбертовом пространстве H, является градиентом квадратичного функционала

$$\Phi(\varphi)=\frac{1}{2}(\mathbf{A}\varphi,\ \varphi),$$

так как

$$\Phi(\varphi+h)-\Phi(\varphi)=(h,\ \mathbf{A}\varphi)+\frac{1}{2}(\mathbf{A}h,\ h).$$

Перейдем к рассмотрению вопроса о том, какие функционалы в некоторой точке обязательно принимают свое наименьшее (или наибольшее) значение.

Лемма 1.1. *Пусть функционал* $\Phi(\varphi)$, *определенный на шаре* T_ρ $(\|\varphi\|\leqslant\rho)$ *гильбертова пространства* H, *допускает представление*

$$\Phi(\varphi)=\beta(\varphi,\varphi)+\mathbf{F}(\varphi), \tag{1.3}$$

где число β *неотрицательно, а функционал* $\mathbf{F}(\varphi)$ *слабо непрерывен.*

Тогда найдется точка $\varphi_0\in T_\rho$, *в которой функционал* $\Phi(\varphi)$ *принимает свое наименьшее на* T_ρ *значение*:

$$\Phi(\varphi_0)=\min_{\|\varphi\|\leqslant\rho}\Phi(\varphi).$$

В доказательстве нуждается лишь случай, когда $\beta>0$. Пусть

$$\varphi_n\in T_\rho \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

— минимизирующая функционал $\Phi(\varphi)$ последовательность:

$$\lim_{n\to\infty}\Phi(\varphi_n)=\inf_{\|\varphi\|\leqslant\rho}\Phi(\varphi).$$

Так как шар T_ρ слабо компактен, то без ограничения общности можно считать, что последовательность φ_n $(n=1,\ 2,\ \ldots)$ сходится слабо к некоторому элементу $\varphi_0\in T_\rho$, причем нормы $\|\varphi_n\|$ $(n=1, 2, \ldots)$ сходятся к некоторому числу a (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности).

Переходя в неравенстве

$$|(\varphi_n, \varphi_0)| \leqslant \|\varphi_n\| \cdot \|\varphi_0\|$$

к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\|\varphi_0\| \leqslant a. \tag{1.4}$$

Равенство

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(\varphi_n) = \inf_{\|\varphi\| \leqslant \rho} \Phi(\varphi)$$

можно переписать в форме

$$\beta a^2 + \mathrm{F}(\varphi_0) = \inf_{\|\varphi\| \leqslant \rho} \Phi(\varphi),$$

откуда

$$\beta a^2 + \mathrm{F}(\varphi_0) \leqslant \Phi(\varphi_0) = \beta \|\varphi_0\|^2 + \mathrm{F}(\varphi_0)$$

и

$$a \leqslant \|\varphi_0\|.$$

Объединяя последнее неравенство с (1.4), получим:

$$a = \lim_{n \to \infty} \|\varphi_n\| = \|\varphi_0\|.$$

Поэтому

$$\Phi(\varphi_0) = \min_{\|\varphi\| \leqslant \rho} \Phi(\varphi).$$

Лемма доказана.

Заметим, что построенная при доказательстве леммы последовательность φ_n $(n=1, 2, \ldots)$ сходится к φ_0 не только слабо, но и сильно, так как

$$\lim_{n \to \infty} \|\varphi_0 - \varphi_n\|^2 = \lim_{n \to \infty} [\|\varphi_0\|^2 + \|\varphi_n\|^2 - 2(\varphi_n, \varphi_0)] = 0.$$

Функционал $\Phi(\varphi)$, определенный на всем вещественном гильбертовом пространстве H, назовем *возрастающим*, если

$$\lim_{\|\varphi\| \to \infty} \Phi(\varphi) = +\infty.$$

Отметим, что слабо непрерывные функционалы не могут быть возрастающими, так как на любой сфере S_ρ $(\|\varphi\| = \rho)$ со сколь угодно большим радиусом ρ можно указать, например, такую последовательность элементов φ_n $(n=1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\varphi_n)=\Phi(\theta).$$

В качестве такой последовательности можно взять элементы

$$\varphi_n=\rho e_n \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

где $e_n \in H$ $(n=1, 2, \ldots)$ — некоторая ортонормированная система.

Теорема 1.1. *Пусть возрастающий функционал* $\Phi(\varphi)$ *представим в виде*

$$\Phi(\varphi)=\beta(\varphi, \varphi)+\mathbf{F}(\varphi),$$

где число β *положительно, а функционал* $\mathbf{F}$ *слабо непрерывен.*

Тогда найдется такая точка $\varphi_0 \in H$, *в которой функционал* $\Phi(\varphi)$ *принимает свое наименьшее на* H *значение.*

Если при этом функционал $\Phi(\varphi)$ *в точке* φ_0 *дифференцируем, то его градиент в точке* φ_0 *равен нулю.*

Доказательство. Так как функционал $\Phi(\varphi)$ возрастающий, то можно указать такое $\rho>0$, что $\Phi(\varphi)>\Phi(\theta)$ при $\|\varphi\|>\rho$.

В силу леммы 1.1 в шаре T_ρ найдется точка φ_0, в которой функционал принимает наименьшее на T_ρ значение. Это значение будет наименьшим и на всем H, т. е. точка φ_0 будет точкой абсолютного минимума функционала $\Phi(\varphi)$.

Пусть $\Phi(\varphi_0+h)-\Phi(\varphi_0)=(\Gamma\varphi_0, h)+\omega(\varphi_0, h)$. Допустим, что $\Gamma\varphi_0 \neq 0$. Положив тогда $h=-\gamma\Gamma\varphi_0$, где положительное число γ выбрано так, что

$$|\omega(\varphi_0, h)|<\frac{\|\Gamma\varphi_0\|}{2}\|h\|=\frac{\gamma}{2}\|\Gamma\varphi_0\|^2,$$

мы приходим к противоречивому неравенству

$$\Phi(\varphi_0+h)=\Phi(\varphi_0)-\gamma\|\Gamma\varphi_0\|^2+\omega(\varphi_0, h)<\Phi(\varphi_0).$$

Теорема доказана.

2. Теоремы существования решений для уравнений Гаммерштейна с положительно определенными ядрами. В этом пункте будем рассматривать уравнение

$$\varphi(x)=\int_G K(x, y)f[y, \varphi(y)]\,dy, \tag{1.5}$$

где G — множество конечной или бесконечной меры с положительно определенным ядром $K(x, y)$, порождающим линейный оператор

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \int_G K(x, y)\varphi(y)\,dy. \tag{1.6}$$

Относительно функции $f(x, u)$ $(x \in G, -\infty < u < \infty)$ будем предполагать, что она удовлетворяет условиям Каратеодори. Через $\mathbf{f}$, как обычно, будем обозначать оператор, определенный на вещественных функциях равенством

$$\mathbf{f}\varphi(x) = f[x, \varphi(x)].$$

Уравнение (1.5) может быть переписано в виде

$$\varphi = \mathbf{A}\mathbf{f}\varphi. \tag{1.7}$$

Допустим, что оператор (1.6) действует из пространства L^q в пространство L^p $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\quad p \geqslant 2\right)$ и представим в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*, \tag{1.8}$$

где $\mathbf{H}$ — линейный вполне непрерывный оператор, действующий из L^2 в пространство L^p, а $\mathbf{H}^*$ — оператор, сопряженный $\mathbf{H}$ и действующий из L^q в L^2. Условия представимости оператора (1.6) в виде (1.8) получены в § 4 главы I (теоремы 4.3 и 4.4). Пусть оператор $\mathbf{f}$ действует из L^p в L^q, тогда он будет и непрерывен и ограничен. При этих предположениях рассмотрение уравнения (1.7) в пространстве L^p эквивалентно рассмотрению уравнения

$$\psi = \mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}\psi \tag{1.9}$$

в пространстве L^2 в том смысле, что каждому решению $\psi \in L^2$ уравнения (1.9) соответствует решение $\mathbf{H}\psi \in L^p$ уравнения (1.7) и, наоборот, каждому решению $\varphi \in L^p$ уравнения (1.7) соответствует решение $\mathbf{H}^*\mathbf{f}\varphi \in L^2$ уравнения (1.8).

Оператор $\mathbf{I}-\mathbf{H}^*\mathbf{fH}$ является (см. стр. 82) градиентом функционала

$$\Phi(\varphi)=\frac{1}{2}(\varphi, \varphi)-\int\limits_G dx \int\limits_0^{\mathbf{H}\varphi(x)} f(x, u)\,du, \tag{1.10}$$

определенного в L^2.

Для того чтобы из теоремы 1.1 сделать заключение о существовании решения у уравнения (1.9), а значит и у основного уравнения (1.7), нужно найти условия, при которых функционал (1.10) будет возрастающим. Такое условие было указано Гаммерштейном *):

$$\int\limits_0^u f(x, u)\,du \leqslant \frac{a}{2}u^2+b(x)|u|^{2-\gamma}+c(x) \tag{1.11}$$

$$(x \in G, \ -\infty < u < \infty),$$

где $0<\gamma<2$, $b(x) \in L^{\frac{2}{\gamma}}$, $c(x) \in L$, а число a удовлетворяет неравенству $a<\frac{1}{\lambda_0}$, где λ_0 — наибольшее собственное число ядра.

---

*) Гаммерштейн [13], а вслед за ним и многие другие авторы применяли при доказательстве теорем существования решений у уравнения (1.7) метод, отличный от изложенного. Этот метод заключался в том, что функционал (1.10) рассматривался вначале на конечномерных подпространствах возрастающей размерности n, на которых он имеет критические точки φ_n, затем из последовательности выбиралась подпоследовательность, сходящаяся в некотором смысле к элементу φ_0, наконец доказывалось, что $\mathbf{H}\varphi_0$ является решением уравнения (1.7).

Аналогичный метод рассмотрения вначале функционалов на конечномерных подпространствах с последующим переходом к пределу применялся и в задачах о собственных функциях (М. Голомб, М. М. Вайнберг и др.). Такой метод, по нашему мнению, отличается громоздкостью, но не дает никаких дополнительных результатов по сравнению с теми, которые вытекают из непосредственного рассмотрения функционалов в пространстве L^2. Первые теоремы с использованием функционала в L^2 без перехода к конечномерным подпространствам были доказаны, повидимому, Голомбом.

При выполнении условия (1.11) функционал (1.10) возрастает, так как

$$\Phi(\varphi) \geqslant \frac{1}{2}(\varphi, \varphi) - \frac{a}{2}\int_G |\mathbf{H}\varphi(x)|^2\,dx - \\ - \int_G b(x)\,|\mathbf{H}\varphi(x)|^{2-\gamma}\,dx - \int_G c(x)\,dx \geqslant \\ \geqslant \frac{1 - a\lambda_0}{2}(\varphi, \varphi) - b(\varphi, \varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}} - c,$$

где

$$b = \left\{\int_G |b(x)|^{\frac{2}{\gamma}}\,dx\right\}^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \lambda_0^{1-\frac{\gamma}{2}}, \qquad c = \int_G c(x)\,dx.$$

Мы пришли к следующему утверждению.

Теорема 1.2. *Пусть оператор* (1.6) *допускает представление* (1.8). *Пусть оператор* $\mathfrak{f}$ *действует из* L^p *в* L^q. *Пусть выполнено условие* (1.11).

Тогда уравнение (1.5) *имеет по крайней мере одно решение в* L^p.

Условия теоремы 1.2, в частности, выполнены, если функция $f(x, u)$ кроме условия (1.11) удовлетворяет неравенству

$$|f(x, u)| \leqslant a(x) + b\,|u|^{p-1} \qquad (a(x) \in L^q,\ b > 0),$$

а положительно определенное ядро $K(x, y)$ удовлетворяет условиям

$$\int_G\int_G K^2(x, y)\,dx\,dy < \infty.$$

$$\int_G\int_G |K(x, y)|^{p+\varepsilon}\,dx\,dy < \infty,$$

где ε — некоторое неотрицательное число, которое может быть равно нулю в случае $p = 2$.

Аналогичным путем устанавливается

Теорема 1.3. *Пусть оператор* $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, *где* $\mathbf{A}$ *определен равенством* (1.6), *действует из* L^2 *в* L^p *и вполне* *непрерывен* (см. теоремы 4.5 и 4.7 главы I). *Пусть оператор* $\mathbf{f}$ *действует из пространства* L^p *в* $L^2 \cap L^q$. *Пусть выполнено условие* (1.11).

Тогда уравнение (1.5) *имеет по крайней мере одно решение.*

Появление дополнительного условия (оператор $\mathbf{f}$ действует из L^p в L^2) объясняется следующими соображениями. Дословно так же, как и в условиях теоремы 1.2, доказывается, что имеет решение уравнение $\psi = \mathbf{H}^* \mathbf{f} \mathbf{H} \psi$, эквивалентное уравнению $\varphi = \mathbf{H}\mathbf{H}^* \mathbf{f}\varphi$. Чтобы перейти от последнего уравнения к уравнению $\varphi = \mathbf{A}\mathbf{f}\varphi$, нужно знать, что на элементе $\mathbf{f}\varphi$ оператор $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ принимает то же значение, которое принимает оператор $\mathbf{A}$. Но операторы $\mathbf{H}\mathbf{H}^*$ и $\mathbf{A}$ принимают на $L^2 \cap L^q$ одинаковые значения (см. стр. 75). Поэтому мы дополнительно требуем, чтобы $\mathbf{f}\varphi \in L^2$.

Возможно, что дополнительное условие в теореме 1.3 является лишним.

В заключение пункта приведем еще одно утверждение.

Теорема 1.4. *Пусть* $\operatorname{mes} G < \infty$. *Пусть ядро* $K(x, y)$ *ограничено. Пусть функция* $f(x, u)$ *удовлетворяет условию* (1.11). *Пусть для каждой ограниченной функции* $\varphi(x)$

$$\int_G |f[x, \varphi(x)]|^p \, dx < \infty,$$

где p — *некоторое фиксированное число*, $p > 1$.

Тогда уравнение (1.5) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение.*

Доказательство теоремы 1.4 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 1.2 (при этом используется теорема 4.6 из главы I).

3. Теоремы существования решений для уравнений Гаммерштейна с симметричными ядрами, у которых конечно число отрицательных собственных чисел. Пусть гильбертово пространство H является ортогональной суммой двух подпространств H_1 и H_2, первое из которых конечномерно. Элементы подпространства H_1 будем обозначать через φ, элементы H_2 — через ψ. Каждый элемент $\chi \in H$ тогда единственным образом представим в виде

$$\chi = \varphi + \psi \qquad (\varphi \in H_1, \ \psi \in H_2).$$

Пусть $\mathbf{H}_1$ — линейный оператор, действующий в H_1, $\mathbf{H}_2$ — линейный оператор, действующий в H_2. Через $\mathbf{H}=\mathbf{H}_1\oplus\mathbf{H}_2$ будем обозначать ортогональную сумму операторов $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$:

$$\mathbf{H}(\varphi+\psi)=\mathbf{H}_1\varphi+\mathbf{H}_2\psi.$$

Пусть α — некоторое число из сегмента $[0,1]: 0\leqslant\alpha\leqslant 1$. Через F_α будем обозначать множество таких элементов $\varphi+\psi$, для которых $\|\varphi\|^2\geqslant(1-\alpha)\|\psi\|^2$.

В дальнейшем будет использована

Лемма 1.2. *Пусть оператор* $\mathbf{H}_1$ *имеет в* H_1 *ограниченный обратный, т. е. при некотором* $q>0$

$$\|\mathbf{H}_1\varphi\|\geqslant q\|\varphi\| \qquad (\varphi\in H_1). \tag{1.12}$$

Тогда для всех элементов $\chi=\varphi+\psi$ *из* F_α *справедливо неравенство*

$$\|\mathbf{H}(\varphi+\psi)\|\geqslant q\sqrt{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}\|\varphi+\psi\|. \tag{1.13}$$

Доказательство. Если $\varphi+\psi\in F_\alpha$, то $\|\varphi\|^2\geqslant$ $\geqslant(1-\alpha)\|\psi\|^2$, откуда

$$\|\varphi\|^2=\frac{1}{2-\alpha}[(1-\alpha)\|\varphi\|^2+\|\varphi\|^2]\geqslant\frac{1-\alpha}{2-\alpha}(\|\varphi\|^2+\|\psi\|^2)=$$
$$=\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\|\varphi+\psi\|^2.$$

Следовательно,

$$\|\mathbf{H}(\varphi+\psi)\|^2=\|\mathbf{H}_1\varphi\|^2+\|\mathbf{H}_2\varphi\|^2\geqslant\|\mathbf{H}_1\varphi\|^2\geqslant q^2\|\varphi\|^2\geqslant$$
$$\geqslant q^2\frac{1-\alpha}{2-\alpha}\|\varphi+\psi\|^2.$$

Лемма доказана.

Ниже мы будем предполагать, что операторы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ самосопряжены и положительно определены (самосопряженный оператор $\mathbf{H}$ *положительно определен* в H, если $(\mathbf{H}\varphi,\varphi)\geqslant 0$ при всех $\varphi\in H$). Оператор $\mathbf{H}$ при этом также будет самосопряжен и положительно определен. Если оператор $\mathbf{H}_1$ положительно определен, то в качестве числа q, фигурирующего в условии (1.12), можно взять наименьшее собственное число λ_0 оператора $\mathbf{H}_1$. Тогда неравенство (1.13) перепишется в виде

$$\|\mathbf{H}(\varphi+\psi)\|\geqslant\lambda_0\sqrt{\frac{1-\alpha}{2-\alpha}}\|\varphi+\psi\| \qquad (\varphi+\psi\in F_\alpha). \tag{1.14}$$

Обозначим через $\mathbf{J}$ оператор, определенный равенством

$$\mathbf{J}(\varphi+\psi)=\varphi-\psi \qquad (\varphi \in H_1,\ \psi \in H_2).$$

Нам в дальнейшем понадобятся следующие неравенства:

$$(\mathbf{J}(\varphi+\psi),\ \varphi+\psi) \leqslant \|\varphi+\psi\|^2 \qquad (\varphi+\psi \in H)$$

и

$$(\mathbf{J}(\varphi+\psi),\ \varphi+\psi) < -\frac{\alpha}{2-\alpha}\|\varphi+\psi\|^2 \qquad (\varphi+\psi \overline{\in} F_\alpha). \tag{1.15}$$

Первое из этих неравенств очевидно. Второе следует из того, что $\|\varphi\|^2 < (1-\alpha)\|\psi\|^2$ при $\varphi+\psi \overline{\in} F_\alpha$, откуда

$$\|\varphi\|^2-\|\psi\|^2 = -\frac{\alpha}{2-\alpha}\|\varphi\|^2+\frac{2}{2-\alpha}\|\varphi\|^2-\|\psi\|^2 <$$
$$< -\frac{\alpha}{2-\alpha}\|\varphi\|^2+\frac{2(1-\alpha)}{2-\alpha}\|\psi\|^2-\|\psi\|^2 = -\frac{\alpha}{2-\alpha}\|\varphi+\psi\|^2.$$

Снова рассмотрим уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(x)=\int\limits_G L(x,\ y) f[y,\ \varphi(y)]\,dy, \tag{1.16}$$

где G — множество конечной или бесконечной меры. Будем предполагать, что ядро $L(x,\ y)$ симметрично и имеет конечное число отрицательных собственных чисел. Через $K(x,\ y)$ обозначим соответствующее $L(x,\ y)$ положительно определенное ядро (см. главу I, § 4, пункт 6). Пусть

$$\mathbf{A}\varphi(x)=\int\limits_G K(x,\ y)\varphi(y)\,dy. \tag{1.17}$$

Через H_1 обозначим линейную оболочку собственных функций оператора $\mathbf{A}$ (ядра $L(x,\ y)$), отвечающих отрицательным собственным числам ядра $L(x,\ y)$. Через H_2 обозначим ортогональное дополнение к H_1 в $H=L^2$. Подпространства H_1 и H_2 будут инвариантными подпространствами оператора $\mathbf{A}$.

Оператор $\mathbf{H}=\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, рассматриваемый только на H_1, обозначим через $\mathbf{H}_1$. Оператор $\mathbf{H}$, рассматриваемый только на H_2, обозначим через $\mathbf{H}_2$. Если для оператора $\mathbf{H}$ написать неравенство (1.14), то роль числа λ_0 в этом неравенстве будет играть $\sqrt{|\lambda_-|}$, где λ_- — наименьшее по абсолютной величине отрицательное собственное число ядра $L(x,\ y)$.

Уравнение (1.16) может быть переписано в виде

$$\chi + \mathbf{JAf}\chi = \theta. \tag{1.18}$$

Допустим, что линейный оператор (1.17) допускает представление

$$\mathbf{A} = \mathbf{HH}^*, \tag{1.19}$$

где $\mathbf{H}$ — линейный вполне непрерывный оператор, действующий из L^2 в пространство L^p. Условия представимости оператора в форме (1.19) были найдены в главе I (теорема 4.8). Пусть оператор $\mathbf{f}$ действует из L^p в L^q. При этих предположениях оператор $\mathbf{H}^*\mathbf{fH}$ будет действовать в L^2.

Если φ — это решение уравнения

$$\mathbf{J}\varphi + \mathbf{H}^*\mathbf{fH}\varphi = \theta, \tag{1.20}$$

то функция $\chi = \mathbf{H}\varphi$ — решение уравнения (1.18). Уравнение (1.20) сводится к уравнению (1.18), если к (1.20) применить оператор $\mathbf{JH}$ и ввести обозначение $\chi = \mathbf{H}\varphi$.

Оператор $\mathbf{\Gamma} = -\mathbf{J} - \mathbf{H}^*\mathbf{fH}$ является градиентом функционала

$$\Phi(\varphi) = -\frac{1}{2}(\mathbf{J}\varphi, \varphi) - \int_G dx \int^{\mathbf{H}\varphi(x)} f(x, u)\, du, \tag{1.21}$$

определенного в L^2 и представимого в виде

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{2}(\varphi, \varphi) + \mathbf{F}_1(\varphi),$$

где $\mathbf{F}_1(\varphi)$ — слабо непрерывный функционал:

$$\mathbf{F}_1(\varphi) = \frac{1}{2}(-\mathbf{J}\varphi - \varphi, \varphi) - \int_G dx \int_0^{\mathbf{H}\varphi(x)} f(x, u)\, du.$$

Таким образом, для того чтобы из теоремы 1.1 сделать заключение о существовании решения у уравнения (1.20), а значит, и у основного уравнения (1.18), нужно найти условия, при которых функционал (1.21) будет возрастающим.

В качестве такого достаточного условия можно требовать выполнения неравенства

$$-\int_0^u f(x, u)\,du \geqslant au^2 - b(x)\,|u|^{2-\gamma} - c(x) \qquad (1.22)$$

$$(x \in G, \quad -\infty < u < \infty),$$

где $0 < \gamma < 2$, $b(x) \in L^{\frac{2}{\gamma}}$, $c(x) \in L$, а число a удовлетворяет неравенству $a\,|\lambda_-| > 1$, где λ_- — наименьшее по абсолютной величине отрицательное собственное число ядра $L(s, t)$.

Так как $a\,|\lambda_-| > 1$, то можно выбрать такое число α, $0 < \alpha < 1$, что

$$\beta = a\,|\lambda_-|\,\frac{1-\alpha}{2-\alpha} - \frac{1}{2} > 0. \qquad (1.23)$$

Пусть выполнено условие (1.22). Тогда для любой функции $\varphi(x) \in L^2$ будет выполняться неравенство

$$\Phi(\varphi) \geqslant -\frac{1}{2}(\mathbf{J}\varphi, \varphi) + a\int_G |\mathbf{H}\varphi(x)|^2\,dx - \\ - \int_G b(x)\,|\mathbf{H}\varphi(x)|^{2-\gamma}\,dx - \int_G |c(x)|\,dx \geqslant \\ \geqslant -\frac{1}{2}(\mathbf{J}\varphi, \varphi) + a(\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}\varphi) - b(\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}\varphi)^{\frac{2-\gamma}{2}} - c,$$

где

$$b = \left\{\int_G |b(x)|^{\frac{2}{\gamma}}\,dx\right\}^{\frac{\gamma}{2}}, \qquad c = \int_G c(x)\,dx.$$

Пусть $\varphi \overline{\in} F_\alpha$, где число α удовлетворяет неравенству (1.23). Тогда из (1.15) следует, что

$$\Phi(\varphi) \geqslant \frac{\alpha}{2(2-\alpha)}(\varphi, \varphi) - b\,\|A\|^{1-\frac{\gamma}{2}}(\varphi, \varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}} - c,$$

откуда

$$\lim_{\varphi \overline{\in} F_\alpha,\ \|\varphi\| \to \infty} \Phi(\varphi) = \infty.$$

Пусть теперь $\varphi \in F_\alpha$. Тогда в силу леммы 1.3 и (1.23)

$$\Phi(\varphi) \geqslant -\frac{1}{2}(\varphi, \varphi) + a\,|\lambda_-|\,\frac{1-\alpha}{2-\alpha}(\varphi, \varphi) - b\,\|A\|^{1-\frac{\gamma}{2}}(\varphi, \varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}} - c =$$

$$= \beta(\varphi, \varphi) - b\,\|A\|^{1-\frac{\gamma}{2}}(\varphi, \varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}} - c,$$

откуда

$$\lim_{\varphi \in F_\alpha,\ \|\varphi\| \to \infty} \Phi(\varphi) = \infty.$$

Таким образом, функционал (1.21) является возрастающим функционалом.

Мы пришли к следующему предложению.

Теорема 1.5. *Пусть* $L(x, y)$ — *такое симметричное ядро с конечным числом отрицательных собственных чисел, что оператор* (1.17), *порожденный соответствующим* $L(x, y)$ *положительно определенным ядром* $K(x, y)$, *допускает представление* (1.19). *Пусть оператор* $\mathfrak{f}$ *действует из пространства* L^p *в пространство* L^q. *Пусть выполнено условие* (1.22).

Тогда уравнение (1.16) *имеет по крайней мере одно решение.*

В силу предложений главы I условия теоремы 1.5 будут выполнены, если симметричное ядро $L(x, y)$, имеющее конечное число отрицательных собственных чисел, удовлетворяет условиям

$$\int_G \int_G L^2(x, y)\,dx\,dy < \infty, \quad \int_G \int_G |L(x, y)|^{p+\varepsilon}\,dx\,dy < \infty,$$

где ε — некоторое неотрицательное число, которое может быть равно нулю в случае, когда $p = 2$, и если функция $f(x, u)$ кроме (1.22) удовлетворяет неравенству

$$|f(x, u)| \leqslant a(x) + b\,|u|^{p-1} \qquad (a(x) \in L^p,\ b > 0).$$

В заключение пункта сформулируем еще одну теорему которая доказывается аналогично теореме 1.5 с использованием теоремы 4.9 главы I.

Теорема 1.6. *Пусть* $\operatorname{mes} G < \infty$. *Пусть симметричное ядро ограничено и имеет конечное число отрица-*

тельных собственных чисел. Пусть выполнено условие (1.22). *Пусть для каждой ограниченной функции* $\varphi(x)$

$$\int\limits_G |f[x, \varphi(x)]|^p \, dx < \infty,$$

где p $(p > 1)$ — *фиксированное число.*

Тогда уравнение (1.16) *имеет по крайней мере одно ограниченное решение.*

Доказательство теорем 1.5 и 1.6 отличается от доказательства аналогичных утверждений предыдущего пункта, в которых рассматривались уравнения с положительно определенными ядрами. Это объясняется тем, что функционал (1.10) имел «возрастающее» слагаемое $\frac{1}{2}(\varphi, \varphi)$; поэтому для того, чтобы функционал (1.10) был возрастающим, нужно было только лишь наложить условие (1.11), при выполнении которого второе слагаемое функционала (1.10) не убывает слишком быстро. В функционале же (1.21) возрастающих слагаемых нет, так как — $(\mathbf{J}\varphi, \varphi)$ убывает на подпространстве H_1, а второе слагаемое не может быть возрастающим, так как оно является слабо непрерывным функционалом *). Поэтому доказательство возрастания функционала (1.21) при выполнении условия (1.22) усложняется: в одной части пространства H оно вытекает из возрастания одного слагаемого, во второй — из возрастания второго. Доказательство существенно использует конечномерность H_1 — в противном случае второе слагаемое функционала (1.21) не могло бы возрастать *) на H_1.

4. Топологический принцип. Теоремы типа 1.2—1.6 могут быть доказаны и при помощи топологических принципов неподвижной точки.

Пусть на границе S некоторой ограниченной области T, содержащей нуль θ банахова пространства E, задано вполне

*) Для слабо непрерывных функционалов в бесконечномерных пространствах, как легко видеть, справедливы своеобразные принципы минимума и максимума

$$\sup_{\|\varphi\| \leqslant a} \Phi(\varphi) = \sup_{\|\varphi\| = a} \Phi(\varphi)$$

и

$$\inf_{\|\varphi\| \leqslant a} \Phi(\varphi) = \inf_{\|\varphi\| = a} \Phi(\varphi).$$

непрерывное векторное поле $\mathbf{I}-\mathbf{B}$. Пусть оператор $\mathbf{B}$ не имеет на S собственных векторов, отвечающих собственным числам, не меньшим чем 1. Тогда вращение этого векторного поля отлично от нуля, так как оно гомотопно полю $\mathbf{I}$ (чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть поля $\mathbf{I}-t\mathbf{B}$, $0 \leqslant t \leqslant 1$). Следовательно, поле $\mathbf{I}-\mathbf{B}$ при продолжении на всю область T имеет по крайней мере один нулевой вектор.

В случае, когда T — шар, сформулированный принцип неподвижной точки может быть получен при помощи принципа Шаудера.

Из сформулированного принципа вытекает удобный в приложениях более частный принцип неподвижной точки.

Теорема 1.7. *Пусть в ограниченной области T, лежащей в гильбертовом пространстве H и содержащей нуль 0 этого пространства, задан вполне непрерывный оператор $\mathbf{B}$. Пусть для всех $\varphi \in S$, где S — граница T, выполняется неравенство*

$$(\mathbf{B}\varphi, \varphi) \leqslant (\varphi, \varphi). \tag{1.24}$$

Тогда уравнение

$$\varphi = \mathbf{B}\varphi$$

имеет в области T по крайней мере одно решение *)

*) Изложенные в книге общие теоремы применимы и к исследованию систем уравнений. Для этого достаточно правыми частями уравнений определить оператор в соответствующем пространстве вектор-функций.

Если, в частности, ядра $K_i(x, y)$ $(i=1, \ldots, n)$ симметричны, то вариационные методы позволяют доказывать (см., например, [10т]) теоремы существования решений у систем

$$\varphi_i(x) = \lambda \int_G K_i(x, y) f_i[y, \varphi_1(y), \ldots, \varphi_n(y)]\, dy \qquad (i=1, \ldots n). \quad (*)$$

При этом приходится предполагать, что существует такая функция $F(x, z_1, \ldots, z_n)$, что

$$f_i(x, z_1, \ldots, z_n) = \frac{\partial}{\partial z_i} F(x, z_1, \ldots, z_n) \qquad (i=1, \ldots, n). \quad (**)$$

Доказываемые на этом пути теоремы (как и для случая одного уравнения) нелокальны относительно параметра λ: в них λ может принимать значения из полубесконечного интервала.

А. И. Поволоцкий в статье «Нелокальные теоремы существования решений у систем нелинейных интегральных уравнений»

Доказательство. Допустим, что утверждение теоремы неверно. Тогда вращение вполне непрерывного поля $\mathbf{I}-\mathbf{B}$ на S равно нулю. Из сформулированного выше принципа неподвижной точки следует, что оператор $\mathbf{B}$ имеет на S собственный вектор φ_0, которому отвечает собственное число $\lambda_0 > 1$. Тогда

$$(\mathbf{B}\varphi_0, \varphi_0) = \lambda_0(\varphi_0, \varphi_0) > (\varphi_0, \varphi_0),$$

что противоречит (1.24).

Теорема доказана.

Мы будем применять теорему 1.7 для случая, когда T — шар.

При помощи теоремы 1.7 могут быть доказаны все предложения пункта 2, если условие (1.11) заменить следующим:

$$u f(x, u) \leqslant au^2 + b(x)\,|u|^{2-\gamma} + c(x) \qquad (1.25)$$
$$(x \in G, -\infty < u < \infty),$$

где $0 < \gamma < 2$, $b(x) \in L^{\frac{2}{\gamma}}$, $c(x) \in L$, а число a удовлетворяет неравенству $a < \frac{1}{\lambda_0}$, где λ_0 — наибольшее положительное собственное число ядра $K(x, y)$.

В качестве примера докажем аналог теоремы 1.2.

Будем предполагать, что выполнены все условия этой теоремы, только условие (1.11) заменено условием (1.25).

При доказательстве теоремы 1.2 было показано, что существование решения у уравнения (1.5) вытекает из существования в L^2 решения у уравнения $\varphi = \mathbf{B}\varphi$, где

$$\mathbf{B} = \mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}.$$

Существование решения у уравнения $\varphi = \mathbf{B}\varphi$ в силу теоремы 1.7 будет доказано, если мы покажем, что на сфере $S \subset L^2$ некоторого радиуса ρ выполняется условие

$$(\mathbf{B}\varphi, \varphi) < (\varphi, \varphi).$$

(ДАН **99**, № 6 (1954)) показал, что теорема 1.7 позволяет доказать нелокальные теоремы существования решений у систем (*), близкие к получаемым вариационными методами, но с освобождением от весьма ограничительного условия (**).

Локальные относительно λ теоремы существования решений для систем (*) могут быть получены при помощи принципа сжатых отображений и принципа Шаудера (см., например, [10в]).

Пусть ρ — такое положительное число, что

$$a\lambda_0\rho^2 + b\lambda_0^{1-\frac{\gamma}{2}}\rho^{2-\gamma} + c < \rho^2,$$

где

$$b = \left\{\int_G |b(x)|^{\frac{2}{\gamma}} dx\right\}^{\frac{\gamma}{2}}, \qquad c = \int_G c(x)\,dx.$$

Тогда при $\|\varphi\| = \rho$

$$(\mathbf{B}\varphi, \varphi) = (\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi, \varphi) = (\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}\varphi) =$$
$$= \int_G f[x, \mathbf{H}\varphi(x)] \cdot \mathbf{H}\varphi(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant a\int_G |\mathbf{H}\varphi(x)|^2 dx + \int_G b(x)\,|\mathbf{H}\varphi(x)|^{2-\gamma} dx + \int_G c(x)\,dx \leqslant$$
$$\leqslant a(\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}\varphi) + b(\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}\varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}} + c = a(\mathbf{A}\varphi, \varphi) + b(\mathbf{A}\varphi, \varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}} + c \leqslant$$
$$\leqslant a\lambda_0\rho^2 + b\lambda_0^{1-\frac{\gamma}{2}}\rho^{2-\gamma} + c < \rho^2 = (\varphi, \varphi),$$

т. е. выполнено условие (1.24).

Предложения пункта 3 также могут быть доказаны при помощи теоремы 1.7, если в условии (1.22) интеграл в левой части неравенства заменить произведением $\frac{1}{2} f(x, u) \cdot u$.

§ 2. Принцип линеаризации в задачах о точках бифуркации [29п]

1. Функционалы, близкие к квадратичным. Будем говорить, что функционал $\Phi(\varphi)$, определенный в некоторой окрестности нуля θ вещественного гильбертова пространства H, *близок к квадратичному* $\frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать такое $\delta > 0$, что при $\|\varphi\| < \delta$ справедливо неравенство

$$\left|\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)\right| \leqslant \varepsilon\|\varphi\|^2.$$

Лемма 2.1. *Пусть* $\mathbf{\Gamma}$ $(\mathbf{\Gamma}\theta = \theta)$ — *нелинейный оператор, являющийся градиентом функционала* $\Phi(\varphi)$ $(\Phi(\theta) = 0)$, *определенного в некоторой окрестности нуля* 0 *гильбертова пространства* H. *Пусть оператор* $\mathbf{\Gamma}$ *имеет в точке* 0 *производную Фреше* $\mathbf{B}$.

Тогда функционал $\Phi(\varphi)$ *близок к квадратичному* $\frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)$.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$.

Так как оператор в точке 0 имеет производную Фреше $\mathbf{B}$, то найдется такое число $\delta > 0$, что при $\|\varphi\| < \delta$ выполняется неравенство

$$\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \mathbf{B}\varphi\| \leqslant \varepsilon \|\varphi\|. \tag{2.1}$$

Рассмотрим функцию

$$f(t) = \Phi(t\varphi) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

где φ — фиксированный элемент, норма которого меньше δ. Справедливо равенство

$$f'(t) = (\varphi, \mathbf{\Gamma}(t\varphi)),$$

так как

$$\lim_{h \to} \frac{f(t+h) - f(t) - hf'(t)}{h} =$$

$$= \|\varphi\| \lim_{\|h\varphi\| \to 0} \frac{\Phi(t\varphi + h\varphi) - \Phi(t\varphi) - (h\varphi, \mathbf{\Gamma}(t\varphi))}{\|h\varphi\|} = 0.$$

Поэтому

$$\Phi(\varphi) = f(1) - f(0) = \int_0^1 f'(t)\,dt = \int_0^1 (\varphi, \mathbf{\Gamma}(t\varphi))\,dt.$$

Тогда

$$\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi) = \int_0^1 (\mathbf{\Gamma}(t\varphi), \varphi)\,dt - (\mathbf{B}\varphi, \varphi)\int_0^1 t\,dt =$$

$$= \int_0^1 (\mathbf{\Gamma}(t\varphi) - \mathbf{B}(t\varphi), \varphi)\,dt$$

и, так как $\|t\varphi\| \leqslant \|\varphi\| < \delta$, то в силу (2.1)

$$\left|\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)\right| \leqslant \int_0^1 \|\mathbf{\Gamma}(t\varphi) - \mathbf{B}(t\varphi)\| \cdot \|\varphi\|\,dt \leqslant \varepsilon\|\varphi\|^2.$$

Лемма доказана.

В дальнейшем мы будем предполагать, что оператор $\mathbf{B}$, фигурирующий в условиях леммы 2.1, самосопряжен, т. е. будем предполагать, что

$$(\mathbf{B}\varphi, \psi) = (\varphi, \mathbf{B}\psi) \qquad (\varphi, \psi \in H).$$

Выясним характер последнего ограничения.

Введем в рассмотрение функцию

$$f_{\varphi, \psi}(t, s) = \Phi(t\varphi + s\psi) \qquad (0 \leqslant t, s \leqslant 1).$$

Нетрудно видеть, что

$$\frac{\partial f_{\varphi, \psi}(t, s)}{\partial t} = (\mathbf{\Gamma}(t\varphi + s\psi), \varphi), \qquad \frac{\partial f_{\varphi, \psi}(t, s)}{\partial s} = (\mathbf{\Gamma}(t\varphi + s\psi), \psi)$$

и

$$\frac{\partial^2 f_{\varphi, \psi}(0, 0)}{\partial s\, \partial t} = (\mathbf{B}\psi, \varphi), \qquad \frac{\partial^2 f_{\varphi, \psi}(0, 0)}{\partial t\, \partial s} = (\mathbf{B}\varphi, \psi).$$

Таким образом, самосопряженность оператора $\mathbf{B}$ означает, что для всех функций $f_{\varphi, \psi}(t, s)$ $(\varphi, \psi \in H;\ \|\varphi\|, \|\psi\| < \delta)$ выполнено условие

$$\frac{\partial^2 f_{\varphi, \psi}(0, 0)}{\partial s\, \partial t} = \frac{\partial^2 f_{\varphi, \psi}(0, 0)}{\partial t\, \partial s}.$$

В частности, самосопряженность оператора $\mathbf{B}$ будет обеспечена, если оператор $\mathbf{\Gamma}$ будет иметь производную Фреше не только в точке θ, но и в некоторой окрестности этой точки, причем производная Фреше будет непрерывно (по норме операторов) зависеть от точки φ окрестности θ. Действительно, в этом случае обе смешанные производные

$$\frac{\partial^2 f_{\varphi, \psi}(t, s)}{\partial s\, \partial t}, \qquad \frac{\partial^2 f_{\varphi, \psi}(t, s)}{\partial t\, \partial s}$$

при малых t, s будут непрерывны по совокупности переменных, что обеспечивает их равенство.

2. Лемма Л. А. Люстерника. Л. А. Люстернику принадлежит следующий *принцип критической точки*:

Пусть φ_0 — точка экстремума функционала $\Phi_1(\varphi)$ на поверхности уровня функционала $\Phi_2(\varphi)$. Тогда градиенты функционалов Φ_1 и Φ_2 в точке φ_0 коллинеарны.

Мы используем ниже утверждение этого принципа для одного частного вида функционала Φ_2.

Лемма 2.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *линейный самосопряженный оператор. Через* S *обозначим поверхность, задаваемую уравнением*

$$(\mathbf{A}\varphi, \varphi) = c,$$

где c — *отличное от нуля число. Пусть вещественный функционал* $\Phi(\varphi)$ *принимает в точке* $\varphi_0 \in S$ *свое наибольшее на* S *значение*:

$$\Phi(\varphi) \leqslant \Phi(\varphi_0) \qquad (\varphi \in S).$$

Пусть функционал $\Phi(\varphi)$ *в точке* φ_0 *дифференцируем, т. е. приращение функционала представимо в виде*

$$\Phi(\varphi_0 + h) - \Phi(\varphi_0) = (\mathbf{\Gamma}\varphi_0, h) + \omega(\varphi_0, h),$$

где

$$\lim_{\|h\| \to 0} \frac{\omega(\varphi_0, h)}{\|h\|} = 0,$$

а $\mathbf{\Gamma}\varphi_0$ — *некоторый вектор из* H.

Тогда найдется такое число λ, *что*

$$\mathbf{\Gamma}\varphi_0 = \lambda \mathbf{A}\varphi_0.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда вектор

$$g = \mathbf{\Gamma}\varphi_0 - \frac{(\mathbf{\Gamma}\varphi_0, \mathbf{A}\varphi_0)}{(\mathbf{A}\varphi_0, \mathbf{A}\varphi_0)} \mathbf{A}\varphi_0$$

будет отличен от θ. Очевидно, $(g, \mathbf{A}\varphi_0) = 0$, откуда вытекает, что

$$(\mathbf{\Gamma}\varphi_0, g) = (g, g) > 0.$$

Рассмотрим элементы ψ_α вида

$$\psi_\alpha = \sqrt{\frac{c}{c + \alpha^2 (\mathbf{A}g, g)}} (\varphi_0 + \alpha g),$$

где

$$\alpha < \frac{|c|}{2|(\mathbf{A}g, g)|}, \qquad \alpha^2 < \frac{|c|}{2|(\mathbf{A}g, g)|}.$$

Отметим, что из последних неравенств вытекают следующие оценки:

$$\frac{1}{2} < \sqrt{\frac{|c|}{c + \alpha^2 (\mathbf{A}g, g)}} < 2 \qquad (2.2)$$

и

$$\left|\sqrt{\frac{c}{c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)}}-1\right|=$$

$$=\frac{\alpha^2|(\mathbf{A}g,\ g)|}{|c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)|\left[\sqrt{\frac{c}{c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)}}+1\right]}<\frac{2\alpha^2|(\mathbf{A}g,\ g)|}{|c|}<\alpha. \tag{2.3}$$

Элементы ψ_α принадлежат S, так как

$$(\mathbf{A}\varphi_0+\alpha\mathbf{A}g,\ \varphi_0+\alpha g)=$$
$$=(\mathbf{A}\varphi_0,\ \varphi_0)+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)=c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g),$$

откуда

$$(\mathbf{A}\psi_\alpha,\ \psi_\alpha)=\frac{c}{c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)}(\mathbf{A}\varphi_0+\alpha\mathbf{A}g,\ \varphi_0+\alpha g)=c.$$

Введем обозначение $h_\alpha=\psi_\alpha-\varphi_0$ и оценим $\|h_\alpha\|$. Очевидно,

$$\|h_\alpha\|\leqslant\alpha\sqrt{\frac{c}{c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)}}\|g\|+$$
$$+\left|\sqrt{\frac{c}{c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)}}-1\right|\cdot\|\varphi_0\|,$$

откуда в силу (2.2) и (2.3)

$$\|h_\alpha\|<(2\|g\|+\|\varphi_0\|)\,\alpha. \tag{2.4}$$

Теперь оценим $(\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0,\ h_\alpha)$. Так как

$$(\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0,\ h_\alpha)=\left|\sqrt{\frac{c}{c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)}}-1\right|(\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0,\ \varphi_0)+$$
$$+\alpha\sqrt{\frac{c}{c+\alpha^2(\mathbf{A}g,\ g)}}\cdot\|g\|^2,$$

то в силу (2.2) и (2.3)

$$(\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0,\ h_\alpha)>\frac{\alpha}{2}\|g\|^2-\frac{2\alpha^2|(\mathbf{A}g,g)|}{|c|}|(\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0,\ \varphi_0)|. \tag{2.5}$$

Значение функционала $\Phi(\varphi)$ в точке ψ_α можно представить в виде

$$\Phi(\psi_\alpha)=\Phi(\varphi_0)+(\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0,\ h_\alpha)+\omega(\varphi_0,\ h_\alpha),$$

причем можно указать такое $\delta > 0$, что при $\|h_\alpha\| < \delta$

$$|\omega(\varphi_0, h_\alpha)| \leqslant \frac{\|g\|^2}{4(2\|g\|+\|\varphi_0\|)}\|h_\alpha\| \leqslant \frac{\|g\|^2}{4}\alpha. \tag{2.6}$$

Неравенство $\|h_\alpha\| < \delta$ в силу (2.4) очевидным образом выполняется, если

$$\alpha < \frac{\delta}{2\|g\|+\|\varphi_0\|}.$$

Пусть теперь число α, кроме наложенных ранее ограничений, удовлетворяет еще неравенству

$$\alpha < \frac{|c|\cdot\|g\|^2}{8\,|(\mathbf{A}g, g)(\mathbf{\Gamma}\varphi_0, \varphi_0)|}.$$

Тогда в силу (2.5) и (2.6)

$$\Phi(\psi_\alpha) > \Phi(\varphi_0) + \frac{\alpha}{2}\|g\|^2 - \frac{2\alpha^2|(\mathbf{A}g, g)\cdot(\mathbf{\Gamma}\varphi_0, \varphi_0)|}{|c|} - \frac{\|g\|^2}{4}\alpha =$$

$$= \Phi(\varphi_0) + \left[\frac{\|g\|^2}{4} - \frac{2\alpha\,|(\mathbf{A}g, g)\cdot(\mathbf{\Gamma}\varphi_0, \varphi_0)|}{|c|}\right]\alpha > \Phi(\varphi_0).$$

Таким образом, в точке φ_0 функционал $\Phi(\varphi)$ не принимает наибольшее на S значение. Мы *пришли к противоречию*. Лемма доказана.

Утверждение леммы 2.2 вытекает из сформулированного выше общего принципа Л. А. Люстерника, если положить $\Phi_1(\varphi) = \Phi(\varphi)$, $\Phi_2(\varphi) = (\mathbf{A}\varphi, \varphi)$, так как градиентом квадратичного функционала $(\mathbf{A}\varphi, \varphi)$ является оператор $2\mathbf{A}$.

Если в условиях леммы 2.2 оператор $\mathbf{A}$ обратим, то утверждение леммы означает, что φ_0 — это собственный вектор оператора $\mathbf{A}^{-1}\mathbf{\Gamma}$. Если оператор $\mathbf{A}$ — оператор $\mathbf{I}$ тождественного преобразования, то поверхность $(\mathbf{A}\varphi, \varphi) = c$ будет обычной сферой, а утверждение леммы будет означать, что оператор $\mathbf{\Gamma}$ имеет собственный вектор φ_0.

Отметим также, что утверждение леммы 2.2 сохраняет силу, если функционал $\Phi(\varphi)$ в точке φ_0 принимает не наибольшее, а наименьшее на S значение (для доказательства достаточно заметить, что вектор $-\mathbf{\Gamma}\varphi$ будет градиентом функционала $-\Phi(\varphi)$, который в точке φ_0 принимает уже наибольшее значение).

3. Существование одной точки бифуркации. Напомним, что число μ_0 называлось точкой бифуркации (глава IV) нелинейного оператора $\mathbf{\Gamma}$, если для любых η, $\delta > 0$ можно указать такой собственный вектор φ, отвечающий характеристическому числу μ, $\varphi = \mu\mathbf{\Gamma}\varphi$, что

$$\|\varphi\| < \delta, \quad |\mu - \mu_0| < \eta.$$

Легко видеть, что $\mu_0 \neq 0$ будет точкой бифуркации оператора $\mathbf{\Gamma}$, если для любых ε, $\delta > 0$ можно указать такой собственный вектор φ, отвечающий собственному числу λ, $\mathbf{\Gamma}\varphi = \lambda\varphi$, что $\|\varphi\| < \delta$; $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, где $\lambda_0 = \frac{1}{\mu_0}$.

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathbf{\Gamma}$ $(\mathbf{\Gamma}\theta = \theta)$ — *нелинейный вполне непрерывный оператор, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала* $\mathbf{\Phi}(\varphi)$ $(\mathbf{\Phi}(\theta) = 0)$. *Пусть оператор* $\mathbf{\Gamma}$ *имеет в нуле* θ *пространства* H *производную Фреше* $\mathbf{B}$, *являющуюся самосопряженным вполне непрерывным оператором.*

Тогда наименьшее положительное характеристическое число оператора $\mathbf{B}$ *будет точкой бифуркации оператора* $\mathbf{\Gamma}$.

Доказательство. Обозначим через λ_0 наибольшее положительное собственное число оператора $\mathbf{B}$, через H_0 — подпространство собственных векторов оператора $\mathbf{B}$, отвечающих собственному числу λ_0. Через H_1 обозначим ортогональное дополнение к H_0 в H. Через $\mathbf{P}_0$ и $\mathbf{P}_1$ будем обозначать операторы ортогонального проектирования соответственно на подпространства H_0 и H_1. Через ν обозначим наибольшее из отличных от λ_0 положительных собственных чисел оператора $\mathbf{B}$; если λ_0 — единственное положительное собственное число оператора $\mathbf{B}$, то пусть $\nu = 0$.

Как известно, каждый самосопряженный вполне непрерывный оператор $\mathbf{B}$ допускает представление

$$\mathbf{B}\varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i (\varphi, e_i) e_i,$$

где e_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — полная ортонормированная система собственных векторов оператора $\mathbf{B}$, а λ_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — собственные числа. Из приведенного представления вытекает неравенство

$$(\mathbf{B}\mathbf{P}_1\varphi, \varphi) \leqslant \nu \|\mathbf{P}_1\varphi\|^2 \qquad (\varphi \in H),$$

которым мы ниже будем пользоваться без ссылок.

Функционал $\Phi(\varphi)$ в силу леммы 2.1 близок к квадратичному $\frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)$. Обозначим через ρ такое число, меньшее чем δ, что при $\|\varphi\| \leqslant \rho$

$$\left|\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)\right| \leqslant \varepsilon_1 (\varphi, \varphi) \tag{2.7}$$

и

$$\|\mathbf{\Gamma}\varphi - \mathbf{B}\varphi\| \leqslant \varepsilon_2 \|\varphi\|, \tag{2.8}$$

где числа ε_1 и ε_2 удовлетворяют неравенствам

$$\varepsilon_1 < \frac{\lambda_0 - \nu}{4},$$

$$\varepsilon_2 < \lambda_0 \sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_1}{\lambda_0 - \nu}}, \qquad \varepsilon_2 + (\|\mathbf{B}\| + \lambda_0)\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\lambda_0 - \nu}} < \varepsilon.$$

Тогда для любого элемента $\varphi \in H_0$, норма которого меньше ρ, в силу (2.7)

$$\Phi(\varphi) \geqslant \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi) - \left|\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)\right| \geqslant \left(\frac{\lambda_0}{2} - \varepsilon_1\right)(\varphi, \varphi).$$

Обозначим через T шар радиуса ρ и через S — сферу этого же радиуса. Из предыдущего неравенства вытекает, что

$$\sup_{\varphi \in T} \Phi(\varphi) \geqslant \left(\frac{\lambda_0}{2} - \varepsilon_1\right)\rho^2. \tag{2.9}$$

Так как функционал $\Phi(\varphi)$ по предположению слабо непрерывен, то он принимает свое наибольшее значение в некоторой точке φ_0 шара T.

В силу (2.9)

$$\Phi(\varphi_0) \geqslant \left(\frac{\lambda_0}{2} - \varepsilon_1\right)\rho^2.$$

С другой стороны, в силу (2.7)

$$\Phi(\varphi_0) \leqslant \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi_0, \varphi_0) + \left|\Phi(\varphi_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi_0, \varphi_0)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\lambda_0}{2}\|\mathbf{P}_0\varphi_0\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{P}_1\varphi_0\|^2 + \varepsilon_1\rho^2.$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\lambda_0}{2} - \varepsilon_1\right)\rho^2 \leqslant \varepsilon_1\rho^2 + \frac{\lambda_0}{2}\|\mathbf{P}_0\varphi_0\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\mathbf{P}_1\varphi_0\|^2.$$

Из этого неравенства и равенства

$$\|\varphi_0\|^2 = \|\mathbf{P}_0\varphi_0\|^2 + \|\mathbf{P}_1\varphi_0\|^2$$

после несложной выкладки получаем оценки для $\|\mathbf{P}_0\varphi_0\|^2$ и $\|\mathbf{P}_1\varphi_0\|^2$:

$$\|\mathbf{P}_0\varphi_0\|^2 \geqslant \rho^2 - \frac{4\varepsilon_1\rho^2}{\lambda_0 - \nu} \tag{2.10}$$

и

$$\|\mathbf{P}_1\varphi_0\|^2 \leqslant \frac{4\varepsilon_1\rho^2}{\lambda_0 - \nu}. \tag{2.11}$$

Из (2.10) следует, что

$$\|\mathbf{B}\varphi_0\|^2 \geqslant \|\mathbf{B}\mathbf{P}_0\varphi_0\|^2 = \lambda_0^2\|\mathbf{P}_0\varphi_0\|^2 \geqslant \lambda^2\rho^2 - \frac{4\varepsilon_1\lambda_0^2\rho^2}{\lambda_0 - \nu}$$

и в силу (2.8)

$$\|\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0\| \geqslant \|\mathbf{B}\varphi_0\| - \|\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0 - \mathbf{B}\varphi_0\| \geqslant$$
$$\geqslant \lambda_0\rho\sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_1}{\lambda_0 - \nu}} - \varepsilon_2\|\varphi_0\| \geqslant \rho\left\{\lambda_0\sqrt{1 - \frac{4\varepsilon_1}{\lambda_0 - \nu}} - \varepsilon_2\right\} > 0.$$

Функционал $\Phi(\varphi)$ принимает в точке φ_0 максимальное на T значение. Градиент $\boldsymbol{\Gamma}$ этого функционала в точке φ_0 принимает отличное от 0 значение. Значит, точка φ_0 не может быть внутренней точкой шара T. Таким образом, $\|\varphi_0\| = \rho$ и $\varphi_0 \in S$.

Из леммы 2.2 вытекает, что вектор φ_0 является собственным вектором оператора $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0 = \lambda\varphi_0.$$

Так как наименьшее характеристическое число μ_0 оператора $\boldsymbol{\Gamma}$ равно $\frac{1}{\lambda_0}$, то доказательство теоремы будет закончено, если мы покажем, что $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$. Это неравенство непосредственно следует из (2.8) и (2.11):

$$|\lambda - \lambda_0| = \frac{\|\lambda\varphi_0 - \lambda_0\varphi_0\|}{\rho} \leqslant \frac{\|\boldsymbol{\Gamma}\varphi_0 - \mathbf{B}\varphi_0\|}{\rho} + \frac{\|\mathbf{B}\varphi_0 - \lambda_0\varphi_0\|}{\rho} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_2 + \frac{\|\mathbf{B}\mathbf{P}_1\varphi_0 - \lambda_0\mathbf{P}_1\varphi_0\|}{\rho} \leqslant \varepsilon_2 + (\|\mathbf{B}\| + \lambda_0)\frac{\|\mathbf{P}_1\varphi_0\|}{\rho} \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon_2 + (\|\mathbf{B}\| + \lambda_0)\frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\lambda_0 - \nu}} < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание. *В условиях теоремы* 2.1 *наибольшее отрицательное характеристическое число оператора* $\mathbf{B}$ *также будет точкой бифуркации оператора* $\mathbf{\Gamma}$.

Для доказательства достаточно заметить, что абсолютная величина наибольшего отрицательного характеристического числа оператора $\mathbf{B}$ будет наименьшим положительным характеристическим числом оператора $\mathbf{B}_1 = -\mathbf{B}$, который является производной Фреше оператора $\mathbf{\Gamma}_1 = -\mathbf{\Gamma}$, являющегося в свою очередь градиентом функционала $\Phi_1(\varphi) = -\Phi(\varphi)$. Сформулированное утверждение вытекает из того, что точки бифуркации оператора $\mathbf{\Gamma}$ могут быть получены изменением знака у точек бифуркации оператора $\mathbf{\Gamma}_1$.

4. Вспомогательные леммы. Во всем пункте мы будем рассматривать слабо непрерывный функционал $\Phi(\varphi)$, равномерно дифференцируемый на шаре $T \subset H$ радиуса ρ, границей которого является сфера S.

Приращение функционала $\Phi(\varphi)$ будем записывать в обычной форме

$$\Phi(\varphi + h) - \Phi(\varphi) = (\mathbf{\Gamma}\varphi, h) + \omega(\varphi, h),$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — градиент функционала $\Phi(\varphi)$. Будем предполагать, что оператор $\mathbf{\Gamma}$ непрерывен на T.

Из того, что функционал $\Phi(\varphi)$ равномерно дифференцируем на T, вытекает, как легко видеть, существование такой неубывающей непрерывной функции $\delta = \delta(\varepsilon)$, равной нулю только при $\varepsilon = 0$, что из $\|h\| \leqslant \delta$ следует равномерно относительно $\varphi \in T$

$$|\omega(\varphi, h)| \leqslant \varepsilon \|h\|.$$

Введем обозначение

$$\mathbf{D}\varphi = \mathbf{\Gamma}\varphi - \frac{(\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi)}{(\varphi, \varphi)}\varphi \qquad (\varphi \in S).$$

Очевидно, $(\mathbf{D}\varphi, \varphi) = 0$ $(\varphi \in S)$.

Пусть

$$l = \sup_{\varphi \in S} \|\mathbf{D}\varphi\|, \quad m = \sup_{\varphi \in S,\ \psi \in T} |(\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi) + (\psi, \mathbf{D}\varphi)|.$$

Введем в рассмотрение операторы $\varkappa(t, \varphi)(0 \leqslant t \leqslant 1, \varphi \in S)$ равенством

$$\varkappa(t, \varphi) = \frac{\varphi + t\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi}{\|\varphi + t\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi\|}\rho,$$

где вещественный функционал $\mathbf{a}(\varphi)$ определен равенством

$$\mathbf{a}(\varphi) = \min\left\{\frac{1}{2l}\delta\left(\frac{\|\mathbf{D}\varphi\|}{4}\right), \frac{\rho}{2l}, \frac{\rho^2}{4m}\right\}. \tag{2.12}$$

Лемма 2.3. *Справедливо неравенство*

$$\Phi[\varkappa(t, \varphi)] \geqslant \Phi(\varphi) + \frac{t\mathbf{a}(\varphi)}{4}\|\mathbf{D}\varphi\|^2.$$

Доказательство. Для сокращения записи нам будут удобны следующие обозначения:

$$g = t\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi, \qquad h = \varkappa(t, \varphi) - \varphi = \frac{\varphi + g}{\|\varphi + g\|}\rho - \varphi.$$

Пусть $\|\varphi\| = \rho$. Тогда $\|\varphi + g\| \geqslant \rho$, так как вектор g ортогонален вектору φ, и

$$\|\varphi + g\| - \rho = \frac{\|g\|^2}{\|\varphi + g\| + \rho} \leqslant \frac{1}{\rho}\|g\|^2. \tag{2.13}$$

Из (2.13) и (2.12) следует, что

$$\|h\| = \frac{\|\rho g + (\rho - \|\varphi + g\|)\varphi\|}{\|\varphi + g\|} \leqslant \frac{\rho\|g\| + (\|\varphi + g\| - \rho)\rho}{\|\varphi + g\|} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{\rho\|g\| + \|g\|^2}{\rho} \leqslant 2\|g\| \leqslant \delta\left(\frac{\|\mathbf{D}\varphi\|}{4}\right). \tag{2.14}$$

Из определения оператора $\mathbf{D}$ вытекает, что $\mathbf{\Gamma}\varphi = \mathbf{D}\varphi + \frac{1}{\rho^2}(\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi)\varphi$. Подставляя это выражение в $(\mathbf{\Gamma}\varphi, h)$ и учитывая, что $(g, \varphi) = (\mathbf{D}\varphi, \varphi) = 0$, получим:

$$(\mathbf{\Gamma}\varphi, h) = \frac{\rho}{\|\varphi + g\|}(\mathbf{D}\varphi, g) + \left(\frac{\rho}{\|\varphi + g\|} - 1\right)(\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi) =$$
$$= \frac{\rho - \|\varphi + g\|}{\|\varphi + g\|}\{(\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi) + (\mathbf{D}\varphi, g)\} + (\mathbf{D}\varphi, g),$$

откуда в силу (2.12) и (2.13)

$$|(\mathbf{\Gamma}\varphi, h) - (\mathbf{D}\varphi, g)| \leqslant \frac{m}{\rho^2}\|g\|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \frac{m}{\rho^2}t\mathbf{a}^2(\varphi)\|\mathbf{D}\varphi\|^2 \leqslant \frac{t\mathbf{a}(\varphi)}{4}\|\mathbf{D}\varphi\|^2. \tag{2.15}$$

Из (2.14) вытекает, что

$$|\omega(\varphi, h)| \leqslant \frac{\|\mathbf{D}\varphi\|}{4}\|h\| \leqslant \frac{\|\mathbf{D}\varphi\|}{2}\|g\| =$$
$$= \frac{ta(\varphi)}{2}\|\mathbf{D}\varphi\|^2. \quad (2.16)$$

Рассмотрим приращение

$$\Phi[\varkappa(t, \varphi)] - \Phi(\varphi) = (\Gamma\varphi, h) + \omega(\varphi, h) =$$
$$= ta(\varphi)\|\mathbf{D}\varphi\|^2 + \{(\Gamma\varphi, h) - (\mathbf{D}\varphi, g)\} + \omega(\varphi, h).$$

В силу (2.15) и (2.16)

$$\Phi[\varkappa(t, \varphi)] - \Phi(\varphi) \geqslant$$
$$\geqslant ta(\varphi)\|\mathbf{D}\varphi\|^2 - \frac{ta(\varphi)}{4}\|\mathbf{D}\varphi\|^2 - \frac{ta(\varphi)}{2}\|\mathbf{D}\varphi\|^2 = \frac{ta(\varphi)}{4}\|\mathbf{D}\varphi\|^2.$$

Лемма доказана.

Оператор $\varkappa(1, \varphi)$ будем обозначать через $\varkappa$.

Пусть на сфере S задан класс N компактных множеств F, каждое из которых преобразуется оператором $\varkappa$ в множество $\varkappa F$, также принадлежащее классу N.

Определим на N вещественный функционал $\hat{\Phi}(F)$ равенством

$$\hat{\Phi}(F) = \min_{\varphi \in F} \Phi(\varphi).$$

Значения функционала $\hat{\Phi}(F)$ ограничены сверху, так как функционал $\Phi(\varphi)$ ограничен на S. Пусть

$$c = \sup_{F \subset N} \hat{\Phi}(F).$$

Лемма 2.4. *Найдется такая последовательность элементов* $\varphi_n \in \bigcup_N F \subset S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, *что*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(\varphi_n) = c$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{D}\varphi_n\| = 0.$$

Доказательство. Лемму будем доказывать от противного.

Если утверждение леммы неверно, то найдутся такие числа α, $\beta > 0$, что для всех тех $\varphi \in \bigcup\limits_{N} F$, для которых $|\Phi(\varphi) - c| < \beta$, справедливо неравенство

$$\|\mathbf{D}\varphi\| > \alpha.$$

Обозначим через F_0 такое множество из N, что

$$\hat{\Phi}(F_0) = \min_{\varphi \in F_0} \Phi(\varphi) > c - \frac{\delta\alpha^2}{4},$$

где

$$\delta < \min\left\{\frac{1}{2l}\,\delta\left(\frac{\alpha}{4}\right),\ \frac{\rho}{2l},\ \frac{\rho^2}{4m}\right\} \leqslant \mathbf{a}(\varphi).$$

Через L обозначим множество тех $\varphi \in F_0$, в которых

$$\Phi(\varphi) < c + \beta.$$

Рассмотрим множество $\varkappa F_0$. По предположению, множество $\varkappa F_0$ принадлежит классу N. Значит,

$$\hat{\Phi}(\varkappa F_0) \leqslant c.$$

С другой стороны, в силу леммы 2.3 и для точек $\varphi \in F_0 \setminus L$

$$\Phi(\varkappa\varphi) \geqslant \Phi(\varphi) \geqslant c + \beta > c$$

и для точек $\varphi \in L$

$$\Phi(\varkappa\varphi) \geqslant \Phi(\varphi) + \frac{\mathbf{a}(\varphi)}{4}\|\mathbf{D}\varphi\|^2 > c - \frac{\delta\alpha^2}{4} + \frac{\mathbf{a}(\varphi)}{4}\alpha^2 \geqslant c,$$

так как $\mathbf{a}(\varphi) \geqslant \delta$ для тех точек $\varphi \in S$, в которых $\|\mathbf{D}\varphi\| \geqslant \alpha$. Следовательно,

$$\hat{\Phi}(\varkappa F_0) > c.$$

Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Лемма 2.5. *Пусть* $\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$ — *такая слабо сходящаяся последовательность точек сферы* S, *что*

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{D}\varphi_n\| = 0,$$

причем последовательность векторов $\Gamma\varphi_n (n = 1, 2, \ldots)$ *сходится сильно к некоторому вектору* ψ, *отличному от* θ.

Тогда последовательность $\varphi_n (n=1, 2, \ldots)$ *сходится сильно к своему слабому пределу* φ_0, *причем* φ_0 *принадлежит* S *и является собственным вектором оператора* $\mathbf{\Gamma}$: $\mathbf{\Gamma}\varphi_0 = \lambda\varphi_0$.

Доказательство. В условиях леммы последовательность чисел $(\mathbf{\Gamma}\varphi_n, \varphi_n) (n=1, 2, \ldots)$ сходится к некоторому числу $\lambda\rho^2$. Так как

$$\lim_{n\to\infty} (\mathbf{\Gamma}\varphi_n, \varphi_n)^2 = \rho^2 \lim_{n\to\infty} \{(\mathbf{\Gamma}\varphi_n, \mathbf{\Gamma}\varphi_n) - (\mathbf{D}\varphi_n, \mathbf{\Gamma}\varphi_n)\} = \rho^2\|\psi\|^2,$$

то $|\lambda|\rho = \|\psi\|$. Переходя к пределу в равенстве

$$\varphi_n = \frac{\rho^2}{(\mathbf{\Gamma}\varphi_n, \varphi_n)}\mathbf{\Gamma}\varphi_n - \frac{\rho^2}{(\mathbf{\Gamma}\varphi_n, \varphi_n)}\mathbf{D}\varphi_n,$$

получим $\varphi_0 = \frac{1}{\lambda}\psi$. Из непрерывности оператора $\mathbf{\Gamma}$ следует, что $\psi = \mathbf{\Gamma}\varphi_0$.

Лемма доказана.

5. Нестягиваемые множества. Множество F, лежащее в метрическом пространстве R, называют *стягиваемым в R в точку* $\varphi_0 \in R$, если существует такая непрерывная по совокупности переменных оператор-функция $\mathbf{U}(t, \varphi)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1, \varphi \in F)$ с множеством значений в R, что

$$\mathbf{U}(0, \varphi) \equiv \varphi, \quad \mathbf{U}(1, \varphi) \equiv \varphi_0 \qquad (\varphi \in F).$$

В противном случае множество F называют *нестягиваемым в* R.

В качестве простейшего примера нестягиваемого в себе множества можно рассмотреть конечномерную сферу S. Приведем элементарное доказательство.

Для простоты будем считать, что S — это единичная сфера n-мерного евклидова пространства. Единичный шар этого пространства обозначим через T.

Допустим, что сфера S стягиваема в себе в точку φ_0. Пусть $\mathbf{U}(t, \varphi)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1, \varphi \in S)$ — функция, фигурирующая в определении стягиваемого множества. Рассмотрим оператор $\mathbf{A}$, определенный на шаре T формулой

$$\mathbf{A}\varphi = \begin{cases} -\mathbf{U}\left(1 - \|\varphi\|, \dfrac{\varphi}{\|\varphi\|}\right) & \text{при } \|\varphi\| > 0, \\ -\varphi_0 & \text{при } \|\varphi\| = 0, \end{cases}$$

Непрерывность оператора $\mathbf{A}$ очевидна. Оператор $\mathbf{A}$ преобразует шар T в свою часть. В силу теоремы Брауэра найдется такая точка $\psi \in T$, что $\mathbf{A}\psi = \psi$. Так как $\|\mathbf{A}\varphi\| = 1\ (\varphi \in T)$, то $\psi \in S$. Тогда $\psi = \mathbf{A}\psi = -\mathbf{U}(0, \psi) = -\psi$. Мы пришли к противоречию.

Понятие вращения векторного поля позволяет доказать, что граница S любого ограниченного открытого множества T n-мерного пространства нестягиваема в себе. Для доказательства будем считать, что нуль пространства лежит в T. Тогда из стягиваемости S в себе в точку $\varphi_0 \in S$ вытекает, что на S гомотопны векторное поле $\Phi_1\varphi = \mathbf{U}(0, \varphi) = \varphi$ и поля Φ_2 параллельных векторов $\Phi_2\varphi = \varphi_0$, вращения которых очевидным образом различны (единица и нуль).

Будем говорить, что множество F_1 получено *непрерывной деформацией* $\mathbf{U}$ из множества $F \subset R$, если существует такой непрерывный по совокупности переменных оператор $\mathbf{U}(t, \varphi)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1,\ \varphi \in F)$ со значениями в R, что $\mathbf{U}(0, \varphi) \equiv \varphi\ (\varphi \in F)$, а множество значений оператора $\mathbf{U}(1, \varphi)$ есть множество F_1.

Непосредственно из определений вытекает, что *каждое множество F_1, полученное непрерывной деформацией из нестягиваемого множества, будет в свою очередь нестягиваемым.*

Приведенные выше определения тесно связаны с созданной Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом теорией категорий, развитой в последние годы Л. Э. Эльсгольцем, С. В. Фроловым, Э. С. Цитланадзе, А. И. Фетом и другими советскими математиками. По терминологии Л. А. Люстерника стягиваемые в точку множества называются множествами *первой категории.* Нестягиваемые множества разбиваются на классы множеств различной категории, большей чем единица. Читатель, знакомый с теорией категорий, заметит, что рассматриваемые в настоящем параграфе нестягиваемые множества имеют категорию, равную двум.

Пусть H_1 — конечномерное подпространство гильбертова пространства H. Обозначим через $\mathbf{P}_1$ оператор ортогонального проектирования на H_1 и через $\mathbf{P}_2$ оператор ортогонального проектирования на ортогональное дополнение H_2 к H_1 в H. Ниже мы будем рассматривать классы множеств в метрическом пространстве R, состоящем из тех точек пространства H, проекция которых на подпространство H отлична от нуля.

Лемма 2.6. *Каждая сфера S_1 радиуса ρ подпространства H_1 с центром в нуле пространства H нестягиваема в R.*

Доказательство. Действительно, если бы сфера S была стягиваема в R в точку φ_0, то можно было бы построить такой непрерывный оператор $\mathbf{U}(t, \varphi)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi \in S_1)$, что

$$\mathbf{U}(0, \varphi) \equiv \varphi, \qquad \mathbf{U}(1, \varphi) \equiv \varphi_0 \qquad (\varphi \in S_1),$$

где φ_0 — некоторый элемент из R: $\|\mathbf{P}_1\varphi_0\| > 0$. Очевидно аналогичными свойствами будет обладать и оператор

$$\mathbf{U}_1(t, \varphi) = \rho \frac{\mathbf{P}_1\mathbf{U}(t, \varphi)}{\|\mathbf{P}_1\mathbf{U}(t, \varphi)\|} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1, \ \varphi \in S).$$

Но тогда сфера S_1 стягиваема в себе в точку $\rho \dfrac{\mathbf{P}_1\varphi_0}{\|\mathbf{P}_1\varphi_0\|}$. Мы пришли к противоречию.

Лемма доказана.

Через H_0 ниже обозначается подпространство (ненулевой размерности) подпространства H_1.

Лемма 2.7. *Пусть компактное множество F лежит в R. Пусть множество $\mathbf{P}_1F$ не имеет общих точек с H_0. Тогда F стягиваемо в R.*

Доказательство. Пусть φ_0 — некоторая точка подпространства H_0, $\|\varphi_0\| = 1$.

Определим на F оператор $\mathbf{U}(t, \varphi)$ равенством

$$\mathbf{U}(t, \varphi) = \begin{cases} 2t\varphi_0 + \varphi - 2t(\varphi, \varphi_0)\varphi_0 & \text{при } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}, \\ \varphi_0 + 2(1-t)[\varphi - (\varphi, \varphi_0)\varphi_0] & \text{при } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1. \end{cases}$$

Непрерывность оператора $\mathbf{U}(t, \varphi)$ по совокупности переменных очевидна. Множество значений этого оператора лежит в R, так как при $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2}$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{U}(t, \varphi) = 2t[1 - (\varphi, \varphi_0)]\varphi_0 + \mathbf{P}_1\varphi \neq \theta \qquad (\varphi \in F)$$

и при $\frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1$

$$\mathbf{P}_1\mathbf{U}(t, \varphi) = 2(1-t)\mathbf{P}_1\varphi + [1 - 2(1-t)(\varphi, \varphi_0)]\varphi_0 \neq \theta \qquad (\varphi \in F).$$

Так как

$$\mathbf{U}(0, \varphi) \equiv \varphi, \qquad \mathbf{U}(1, \varphi) \equiv \varphi_0 \qquad (\varphi \in F),$$

то множество F стягиваемо в R в точку φ_0.

Лемма доказана.

6. Основная теорема.

Теорема 2.2. *Пусть* $\mathbf{\Gamma}$ ($\mathbf{\Gamma}\theta = \theta$) — *нелинейный вполне непрерывный оператор, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала* $\Phi(\varphi)$ ($\Phi(\theta) = \theta$), *равномерно дифференцируемого в некоторой окрестности точки* θ. *Пусть оператор* $\mathbf{\Gamma}$ *имеет в точке* θ *производную Фреше* $\mathbf{B}$, *являющуюся вполне непрерывным самосопряженным оператором.*

Тогда каждое характеристическое число линейного оператора $\mathbf{B}$ *является точкой бифуркации нелинейного оператора* $\mathbf{\Gamma}$.

Доказательство. Пусть λ_0 — отличное от нуля собственное число самосопряженного оператора $\mathbf{B}$. Пусть заданы положительные числа ε и δ. Покажем, что оператор $\mathbf{\Gamma}$ имеет такой собственный вектор φ_0, отвечающий собственному числу λ: $\mathbf{\Gamma}\varphi_0 = \lambda\varphi_0$, что выполнены неравенства

$$\|\varphi_0\| < \delta \tag{2.17}$$

и

$$|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon. \tag{2.18}$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda_0 > 0$ (см. замечание к теореме 2.1).

Введем вначале некоторые обозначения.

Обозначим через H_0 подпространство собственных векторов оператора $\mathbf{B}$, отвечающих собственному числу λ_0. Через H_1 обозначим подпространство, являющееся линейной оболочкой всех собственных векторов оператора $\mathbf{B}$, отвечающих собственным числам, не меньшим чем λ_0. Очевидно, $H_0 \subset H_1$. Через H_2 обозначим ортогональное дополнение в H к H_1. Через $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ и $\mathbf{P}_2$ будем обозначать операторы ортогонального проектирования на соответствующие подпространства H_0, H_1 и H_2.

Пусть μ — наибольшее собственное число оператора B Можно считать, что $\mu > \lambda_0$, так как в случае $\mu = \lambda_0$ утвер ждение теоремы 2.2 содержится в утверждении теоремы 2.1 Пусть ν — наибольшее из положительных собственных чисе оператора **B**, меньших чем λ_0. Если оператор **B** не имее положительных собственных чисел, меньших чем λ_0, т пусть $\nu = 0$.

Из представления самосопряженного линейного оператор (стр. 322) вытекают неравенства, которыми мы ниже буде пользоваться без ссылок:

$$(\mathbf{B}\varphi, \varphi)\begin{cases} \leqslant \mu(\varphi, \varphi) & \text{при } \varphi \in H, \\ \geqslant \lambda_0(\varphi, \varphi) & \text{при } \varphi \in H_1, \\ \leqslant \nu(\varphi, \varphi) & \text{при } \varphi \in H_2, \\ = \lambda_0(\varphi, \varphi) & \text{при } \varphi \in H_0 \end{cases}$$

и $\|\mathbf{B}\varphi\| \geqslant \lambda_0\|\varphi\|$ при $\varphi \in H_1$.

Через R, как и в предыдущем пункте, будем обозначат множество тех $\varphi \in H$, у которых $\|\mathbf{P}_1\varphi\| > 0$.

Так как функционал $\Phi(\varphi)$ близок в силу леммы 2. к квадратичному $\frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)$, то найдется такое $\rho < \delta$, чт при $0 < \|\varphi\| < \rho$

$$\left|\Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi)\right| < \varepsilon_1(\varphi, \varphi) \tag{2.1}$$

и

$$\|\Gamma\varphi - \mathbf{B}\varphi\| < \varepsilon_2\|\varphi\|, \tag{2.2}$$

где

$$\varepsilon_1 < \frac{\lambda_0 - \nu}{4}, \qquad \varepsilon_2 < \frac{\lambda_0}{2}\sqrt{\frac{\lambda_0 - \nu}{\mu - \nu} - \frac{4\varepsilon_1}{\mu - \nu}}, \qquad 4\varepsilon_1 + \varepsilon_2 < \varepsilon. \tag{2.2}$$

Через S обозначим сферу радиуса ρ пространства H Через S_1 — сферу того же радиуса пространства H_1.

Рассмотрим множество M всех компактных множес $F \subset S$, нестягиваемых в R. На M определим функционал $\hat{\Phi}($ равенством (как в пункте 4)

$$\hat{\Phi}(F) = \min_{\varphi \in F} \Phi(\varphi).$$

Через c обозначим число, определяемое (как в пункте 4) равенством

$$c = \sup_{F \in M} \hat{\Phi}(F).$$

Первый этап доказательства. Оценим разность $c - \frac{\lambda_0}{2}\rho^2$.

В силу леммы 2.6 сфера S_1 принадлежит M. Так как

$$\min_{\varphi \in S_1} \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi) = \frac{\lambda_0}{2}\rho^2,$$

то из (2.19) вытекает, что

$$\begin{aligned} \hat{\Phi}(S_1) &= \min_{\varphi \in S_1} \Phi(\varphi) \geqslant \\ &\geqslant \min_{\varphi \in S_1} \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi) - \max_{\varphi \in S_1} \left| \Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi) \right| > \\ &> \left(\frac{\lambda_0}{2} - \varepsilon_1\right)\rho^2, \end{aligned}$$

откуда

$$c - \frac{\lambda_0}{2}\rho^2 > -\varepsilon_1\rho^2. \tag{2.22}$$

Пусть теперь $F \in M$. Тогда в силу леммы 2.7 в множестве F есть по крайней мере одна такая точка φ, что $\mathbf{P}_1\varphi \in H_0$. Это значит, что элемент φ представим в виде $\varphi = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1 \in H_0$, $\psi_2 \in H_2$. В силу (2.19)

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &\leqslant \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi) + \left| \Phi(\varphi) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi, \varphi) \right| < \\ &< \frac{\lambda_0}{2}\|\psi_1\|^2 + \frac{\nu}{2}\|\psi_2\|^2 + \varepsilon_1\rho^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_0}{2} + \varepsilon_1\right)\rho^2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\hat{\Phi}(F) = \min_{\varphi \in F} \Phi(\varphi) < \left(\frac{\lambda_0}{2} + \varepsilon_1\right)\rho^2,$$

откуда

$$c - \frac{\lambda_0}{2}\rho^2 \leqslant \varepsilon_1\rho^2. \tag{2.23}$$

Второй этап доказательства. Обозначим через N совокупность тех множеств F из M, на которых функционал $\hat{\Phi}(F)$ принимает значения, большие чем $\left(\frac{\lambda_0}{2}-\varepsilon_1\right)\rho^2$. В силу (2.22) такие множества существуют.

Через $\tilde{S}$ обозначим часть сферы S, состоящую из тех точек φ, у которых

$$\|\mathbf{P}_1\varphi\|^2 > \left(\frac{\lambda_0-\nu}{\mu-\nu}-\frac{4\varepsilon_1}{\mu-\nu}\right)\rho^2.$$

Покажем, что каждое множество F из N является частью $\tilde{S}$. Действительно, если для некоторого $\varphi\in F$

$$\|\mathbf{P}_1\varphi\|^2 \leqslant \left(\frac{\lambda_0-\nu}{\mu-\nu}-\frac{4\varepsilon_1}{\mu-\nu}\right)\rho^2,$$

то в силу (2.19)

$$\begin{aligned}
\Phi(\varphi) &\leqslant \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi,\ \varphi)+\left|\Phi(\varphi)-\frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi,\ \varphi)\right| \leqslant \\
&\leqslant \frac{\nu}{2}\|\mathbf{P}_2\varphi\|^2+\frac{\mu}{2}\|\mathbf{P}_1\varphi\|^2+\varepsilon_1\rho^2 \leqslant \\
&\leqslant \frac{\nu}{2}(\rho^2-\|\mathbf{P}_1\varphi\|^2)+\frac{\mu}{2}\|\mathbf{P}_1\varphi\|^2+\varepsilon_1\rho^2 \leqslant \\
&\leqslant \left(\frac{\nu}{2}+\varepsilon_1\right)\rho^2+\frac{\mu-\nu}{2}\left(\frac{\lambda_0-\nu}{\mu-\nu}-\frac{4\varepsilon_1}{\mu-\nu}\right)\rho^2=\left(\frac{\lambda_0}{2}-\varepsilon_1\right)\rho^2,
\end{aligned}$$

откуда

$$\hat{\Phi}(F)=\min_{\varphi\in F}\Phi(\varphi)\leqslant\left(\frac{\lambda_0}{2}-\varepsilon_1\right)\rho^2$$

и, следовательно, $F\bar{\in}N$.

Оператор $\varkappa(t,\ \varphi)$ $(0\leqslant t\leqslant 1,\ \ \varphi\in F)$, определенный на стр. 326, очевидным образом непрерывен по совокупности переменных. Если $F\in N$, то в силу леммы 2.3 значения $\varkappa(t,\ \varphi)$ $(0\leqslant t\leqslant 1,\ \varphi\in F)$ будут лежать в $\tilde{S}$ и, тем более, в R. Значит, этот оператор будет осуществлять непрерывную деформацию в R множества $F\subset N$ в множество $F_1=\varkappa(1,\ F)=\varkappa F$. Множество $\varkappa F$ будет нестягиваемым в R вместе с множеством F. В силу той же леммы 2.3

$$\hat{\Phi}(\varkappa F)=\min_{\varphi\in F}\Phi(\varkappa\varphi)\geqslant\min_{\varphi\in F}\Phi(\varphi)=\hat{\Phi}(F)>\left(\frac{\lambda_0}{2}-\varepsilon_1\right)\rho^2.$$

Значит, $\varkappa F\in N$.

Таким образом, N является совокупностью таких нестягиваемых в R множеств $F \subset S$, каждое из которых оператором $\varkappa$ преобразуется снова в множество из N.

Очевидно,

$$c = \sup_{F \in M} \hat{\Phi}(F) = \sup_{F \in N} \hat{\Phi}(F).$$

Третий этап доказательства. В силу леммы 2.4 найдется последовательность таких элементов $\varphi_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \Phi(\varphi_n) = c$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{D}\varphi_n \| = 0.$$

Так как шар в гильбертовом пространстве слабо компактен и оператор $\mathbf{\Gamma}$ вполне непрерывен, то без ограничения общности можно считать, что последовательность $\varphi_n (n=1, 2, \ldots)$ слабо сходится к некоторому элементу φ_0 и последовательность $\mathbf{\Gamma}\varphi_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сильно сходится к некоторому элементу ψ (в противном случае можно перейти к подпоследовательности).

Из слабой непрерывности функционала $\Phi(\varphi)$ и (2.22) вытекает, что

$$\Phi(\varphi_0) = c > \left(\frac{\lambda_0}{2} - \varepsilon_1\right)\rho^2.$$

Элементы φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ принадлежат некоторым множествам из N. Значит, $\varphi_n \in \tilde{S}$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е.

$$\| \mathbf{P}_1\varphi_n \|^2 > \left(\frac{\lambda_0 - \nu}{\mu - \nu} - \frac{4\varepsilon_1}{\mu - \nu}\right)\rho^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{2.24}$$

Из (2.20) и (2.24) вытекает, что

$$\| \mathbf{\Gamma}\varphi_n \| \geqslant \| \mathbf{B}\varphi_n \| - \| \mathbf{\Gamma}\varphi_n - \mathbf{B}\varphi_n \| \geqslant \| \mathbf{B}\mathbf{P}_1\varphi_n \| - \varepsilon_2\rho \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\lambda_0}{2} \| \mathbf{P}_1\varphi_n \| - \varepsilon_2\rho > \left(\frac{\lambda_0}{2} \sqrt{\frac{\lambda_0 - \nu}{\mu - \nu} - \frac{4\varepsilon_1}{\mu - \nu}} - \varepsilon_2\right)\rho.$$

Переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получим:

$$\| \psi \| \geqslant \left(\frac{\lambda_0}{2} \sqrt{\frac{\lambda_0 - \nu}{\mu - \nu} - \frac{4\varepsilon_1}{\mu - \nu}} - \varepsilon_2\right)\rho > 0.$$

В силу леммы 2.5 вектор φ_0 будет принадлежать S и будет собственным вектором оператора $\mathbf{\Gamma}$: $\mathbf{\Gamma}\varphi_0 = \lambda\varphi_0$.

Условие (2.17) выполнено в силу того, что $\|\varphi_0\| = \rho$, а $\rho < \delta$.

Четвертый этап доказательства. Из (2.20) следует, что

$$\|\mathbf{B}\varphi_0 - \lambda\varphi_0\| = \|\mathbf{B}\varphi_0 - \mathbf{\Gamma}\varphi_0\| < \varepsilon_2\rho,$$

откуда

$$|(\mathbf{B}\varphi_0 - \lambda\varphi_0,\ \varphi_0)| \leqslant \|\mathbf{B}\varphi_0 - \lambda\varphi_0\| \cdot \|\varphi_0\| < \varepsilon_2 \cdot \rho^2. \tag{2.25}$$

Из (2.22) и (2.23) вытекает, что

$$\left| c - \frac{\lambda_0}{2}\rho^2 \right| \leqslant \varepsilon_1\rho^2,$$

откуда в силу (2.19)

$$(\mathbf{B}\varphi_0 - \lambda_0\varphi_0,\ \varphi_0)| \leqslant 2\left|\Phi(\varphi_0) - \frac{1}{2}(\mathbf{B}\varphi_0,\ \varphi_0)\right| + \\ + 2\left| c - \frac{\lambda_0}{2}\rho^2 \right| < 4\varepsilon_1\rho^2. \tag{2.26}$$

Из (2.25) и (2.26) следует справедливость (2.18):

$$|\lambda - \lambda_0| = \frac{1}{\rho^2}|(\mathbf{B}\varphi_0 - \lambda\varphi_0,\ \varphi_0) - (\mathbf{B}\varphi_0 - \lambda_0\varphi_0,\ \varphi_0)| < \varepsilon_2 + 4\varepsilon_1 < \varepsilon.$$

Теорема 2.2 полностью доказана.

В главе IV было доказано, что точками бифуркации вполне непрерывного оператора $\mathbf{A}$ могут быть только характеристические значения его производной Фреше $\mathbf{B}$ в нуле θ. Таким образом, теорема 2.2 полностью решает задачу о точках бифуркации для потенциальных вполне непрерывных операторов, дифференцируемых в точке θ.

7. Пример. В качестве примера мы установим теорему о точках бифуркации оператора Гаммерштейна

$$\mathbf{A}\varphi(x) = \int_G K(x,\ y) f[y,\ \varphi(y)]\, dy. \tag{2.27}$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi(\varphi) = \int_G dx \int_0^{\mathbf{H}\varphi(x)} f(x,\ u)\, du, \tag{2.28}$$

где G — множество конечной меры. Будем предполагать, что $\mathbf{H}$ — линейный вполне непрерывный оператор, определенный на функциях из L^2 и преобразующий их в ограниченные функции:

$$\operatorname{vrai}\max|\mathbf{H}\varphi(x)| \leqslant \sqrt{k}\|\varphi\| \qquad (\varphi \in L^2),$$

где $\sqrt{k}$ — некоторое положительное число. Все эти условия будут выполнены, если $\mathbf{H}$—корень квадратный из линейного интегрального оператора, порожденного непрерывным положительно определенным ядром $K(x, y)$ (см. теорему 4.6 главы I). Будем предполагать, что $f(x, 0) \equiv 0$ и что для каждой ограниченной функции $\varphi(x)$

$$\int_G |f[x, \varphi(x)]|^q dx < \infty,$$

где q — некоторое фиксированное число, $q > 1$. Последнее условие, очевидно, будет выполнено, если функция $f(x, u)$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x, u)| \leqslant b(x) + g(u) \qquad (x \in G, \ -\infty < u < \infty), \qquad (2.29)$$

где $b(x) \in L^q$, а $g(u)$ — неотрицательная непрерывная функция.

При перечисленных предположениях функционал (2.28) будет определен на всем L^2, будет слабо непрерывен и равномерно дифференцируем в каждом шаре (см. § 5 главы I). Градиентом функционала (2.28) будет вполне непрерывный оператор $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}^*$ — линейный оператор, действующий из L^q в пространство L^2 и являющийся сопряженным оператором к оператору $\mathbf{H}$, рассматриваемому как оператор, действующий из L^2 в L^q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Если функция $f(x, u)$ удовлетворяет условию (2.29) только для значений u из некоторого сегмента $[-a, a]$, то функционал (2.28) будет определен в шаре радиуса $\frac{a}{\sqrt{k}}$, в этом шаре будет равномерно дифференцируем, причем оператор градиента $\mathbf{\Gamma}$ также будет иметь вид $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}$. Чтобы в этом убедиться, достаточно рассмотреть в L^2 функционал

$$\Phi_1(\varphi) = \int_G dx \int_0^{\mathbf{H}\varphi(x)} f_1(x, u)\, du,$$

где

$$f_1(x,\ u)=\begin{cases} f(x,\ u) & \text{при}\quad |u|\leqslant\alpha,\\ f(x,\ \alpha\,\mathrm{sign}\,u) & \text{при}\quad |u|\geqslant\alpha.\end{cases}$$

Функционал $\Phi_1(\varphi)$ будет определен и дифференцируем на всем L^2 и на шаре T радиуса $\frac{\alpha}{\sqrt{k}}$ принимать те же значения, что и функционал (2.28).

Предположим теперь дополнительно, что функция $f(x,\ u)$ имеет производную $f'_u(x,\ 0)$, причем выражение

$$\frac{1}{\Delta u}f(x,\ \Delta u)-f'_u(x,\ 0)$$

стремится к нулю при $\Delta u\to 0$ равномерно относительно $x\in G$. При этом предположении оператор $\mathbf{\Gamma}=\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}$ в точке θ будет иметь производную Фреше $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\varphi(x)=\mathbf{H}^*[f'_u(x,\ 0)\,\mathbf{H}\varphi(x)].$$

Пусть, действительно, задано $\varepsilon>0$. По предположению, можно указать такое $\delta>0$, что при $|\Delta u|<\delta$

$$|f(x,\ \Delta u)-\Delta u\,f'_u(x,\ 0)|\leqslant\frac{\varepsilon|\Delta u|}{\sqrt{k}\,\|\mathbf{H}^*\|\,(\mathrm{mes}\,G)^{\frac{1}{q}}}$$

при всех $x\in G$. Пусть $h\in L^2$, $\|h\|<\frac{\delta}{\sqrt{k}}$. Тогда почти при всех $x\in G$ справедливо неравенство

$$|\mathbf{H}h(x)|<\delta,$$

откуда вытекает справедливость почти при всех $x\in G$ неравенства

$$|f[x,\ \mathbf{H}h(x)]-\mathbf{H}h(x)\,f'_u(x,\ 0)|\leqslant\frac{\varepsilon|\mathbf{H}h(x)|}{\sqrt{k}\,\|\mathbf{H}^*\|\,(\mathrm{mes}\,G)^{\frac{1}{q}}}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon\|h\|}{\|\mathbf{H}^*\|\,(\mathrm{mes}\,G)^{\frac{1}{q}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\|\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}h(x)+\mathbf{B}h(x)\|}{\|h(x)\|}\leqslant\frac{\|\mathbf{H}^*\|\cdot\|\mathbf{f}\mathbf{H}h(x)-\mathbf{H}h(x)\cdot f'_u(x,\ 0)\|}{\|h(x)\|}\leqslant\varepsilon,$$

Из последнего неравенства вытекает, что

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}h - \mathbf{B}h\|}{\|h\|} = 0.$$

Непосредственно проверяется, что оператор **B** самосопряжен:

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}\varphi, \psi) &= \left(\mathbf{H}^*[f'_u(x, 0)\mathbf{H}\varphi(x)], \psi(x)\right) = \\ &= \left(f'_u(x, 0)\mathbf{H}\varphi(x), \mathbf{H}\psi(x)\right) = \\ &= \int_G \mathbf{H}\varphi(x)\mathbf{H}\psi(x) f'_u(x, 0)\,dx = (\varphi, \mathbf{B}\psi).\end{aligned}$$

Из теоремы 2.2 вытекает

Лемма 2.8. *Каждое ненулевое характеристическое число самосопряженного оператора* **B** *является точкой бифуркации нелинейного оператора* **Г**.

Покажем, что каждая точка бифуркации оператора **Г** является точкой бифуркации оператора (2.27), рассматриваемого в пространстве ограниченных функций.

Пусть заданы ε, $\delta > 0$.

Пусть μ_0 — точка бифуркации оператора **Г**. Тогда найдется такая собственная функция $\varphi(x)$ оператора **Г**, отвечающая характеристическому числу μ: $\mu\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi = \varphi$, что $\|\varphi\| < \frac{\delta}{\sqrt{k}}$ и $|\mu - \mu_0| < \varepsilon$. Функция $\psi = \mathbf{H}\varphi$ будет собственной функцией оператора $\mathbf{H}\mathbf{H}^*\mathbf{f}$, т. е. оператора (2.27), отвечающей тому же характеристическому числу μ, так как

$$\mu\mathbf{H}\mathbf{H}^*\mathbf{f}\psi = \mathbf{H}(\mu\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi) = \mathbf{H}\varphi = \psi.$$

При этом

$$\operatorname{vrai\,max}|\psi(x)| = \operatorname{vrai\,max}|\mathbf{H}\varphi(x)| \leqslant \sqrt{k}\|\varphi\| < \delta.$$

Покажем теперь, что ненулевые собственные (и, конечно, характеристические) числа у операторов **B** и

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_1\varphi(x) &= \mathbf{H}\mathbf{H}^*[f'_u(x, 0)\varphi(x)] = \\ &= \int_G K(x, y) f'_u(y, 0)\varphi(y)\,dy, \qquad (2.30)\end{aligned}$$

рассматриваемых соответственно в пространстве L^2 и в пространстве ограниченных функций, одинаковы.

Нужно показать вначале, что оператор (2.30) действует в пространстве ограниченных функций. По условию найдется такое $l > 0$, что

$$|f(x, l) - lf'_u(x, 0)| \leqslant l,$$

откуда вытекает, что $f'_u(x, 0) \in L^q$, так как

$$|f'_u(x, 0)| \leqslant \frac{1}{l}|f(x, l)| + \frac{1}{l}|f(x, l) - lf'_u(x, 0)| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{l}|f(x, l)| + 1.$$

Если $\varphi(x)$ — ограниченная функция (даже функция из L^q, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\Big)$, то

$$|\mathbf{B}_1\varphi(x)| = \left|\int\limits_G K(x, y) f'_u(y, 0)\varphi(y)\,dy\right| \leqslant \\ \leqslant k\int\limits_G |f'_u(y, 0)\varphi(y)|\,dy,$$

где $k = \operatorname{vrai\,max}|K(x, y)|$.

Если $\varphi \in L^2$ — собственная функция оператора $\mathbf{B}$: $\mathbf{H}^*[f'_u(x, 0)\mathbf{H}\varphi(x)] = \lambda\varphi(x)$ $(\lambda \neq 0)$, то ограниченная функция $\psi = \mathbf{H}\varphi$, отличная от 0, будет собственной функцией оператора (2.30), отвечающей тому же собственному числу. Если, наоборот, ограниченная функция $\psi(x)$ — собственная функция оператора $\mathbf{B}_1 : \mathbf{H}\mathbf{H}^*[f'_u(x, 0)\psi(x)] = \lambda\psi(x)$ $(\lambda \neq 0)$, то функция $\varphi = \frac{1}{\lambda}\mathbf{H}^*[f'_u(x, 0)\psi(x)]$ будет собственной функцией оператора $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{B}\varphi(x) = \mathbf{H}^*\left\{f'_u(x, 0)\mathbf{H}\left[\frac{1}{\lambda}\mathbf{H}^*[f'_u(x, 0)\psi(x)]\right]\right\} = \\ = \mathbf{H}^*[f'_u(x, 0)\psi(x)] = \lambda\varphi(x).$$

Таким образом, из леммы 2.8 вытекает, что все ненулевые характеристические числа оператора (2.30) будут точками бифуркации оператора (2.27).

Сформулируем полученное утверждение в виде теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть ядро $K(x, y)$ оператора Гаммерштейна* (2.27) *ограничено и положительно определено. Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна по и почти при всех*

$x \in G$ *для значений* u *из некоторого сегмента* $[-\alpha, \alpha]$ *и удовлетворяет условиям*

$$f(x, 0) \equiv 0, \quad |f(x, u)| \leqslant b(x) \qquad (x \in G, \ |u| \leqslant \alpha),$$

где $b(x) \in L^q$ $(q > 1)$. *Пусть существует производная* $f'_u(x, 0)$, *причем выражение*

$$\frac{1}{\Delta u} f(x, \Delta u) - f'_u(x, 0)$$

стремится при $\Delta u \to 0$ *к нулю равномерно относительно* $x \in G$.

Тогда все ненулевые характеристические числа линейного интегрального оператора (2.30) *будут точками бифуркации нелинейного интегрального оператора* (2.27) *в пространстве ограниченных функций, а значит, и в любом* L^p.

Другие конкретные признаки существования точек бифуркации у оператора (2.30) можно получить, объединяя признаки представимости линейного оператора $\mathbf{F}$, порожденного ядром $K(x, y)$, в виде $\mathbf{F} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*$, где $\mathbf{H}$ действует из L^2 в L^p, а $\mathbf{H}^*$ — из L^q в L^2 $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$, с признаками существования у оператора $\mathbf{f}$, действующего из L^p в L^q, производной Фреше в точке θ.

§ 3. Теоремы существования собственных функций

Выше для различных классов нелинейных операторов топологическими методами, методами теории конусов и вариационными методами задача о существовании собственных функций уже исследовалась. В большинстве полученных предложений содержались не только утверждения о существовании собственных функций, но и утверждения о характере совокупностей соответствующих собственных чисел (точки бифуркации, структура спектра и т. д.). В частности, для потенциальных операторов, дифференцируемых в нуле гильбертова пространства, была полностью решена задача о точках бифуркации.

В этом параграфе мы будем интересоваться только фактом существования собственных функций. Вариационные соображения, как оказывается, позволяют доказывать общие теоремы. Соответствующий метод был предложен Л. Лихтенштейном [40] и Голомбом [17]. Затем он был развит в работах Л. А. Люстерника [41], В. И. Соболева [63], в ряде работ Э. Роте [56], в исследованиях М. М. Вайнберга (см. [10р], где дана библиография), Э. С. Цитланадзе (см., например, [70к], Я. Б. Рутицкого [57] и др.

Ниже доказаны новые теоремы. Показано, что из одного факта потенциальности оператора вытекает, что у него есть континуум различных собственных векторов. Было бы интересно выяснить, образуют ли эти собственные векторы непрерывные ветви в окрестности нуля гильбертова пространства.

1. Вариационный принцип.

Теорема 3.1. *Пусть функционал $\Phi(\varphi)$ определен на шаре T_{ρ_0} $(\|\varphi\| \leqslant \rho_0)$ гильбертова пространства H, слабо непрерывен и дифференцируем на T_{ρ_0}.*

Тогда в каждом T_ρ $(0 < \rho \leqslant \rho_0)$ оператор Γ — градиент функционала $\Phi(\varphi)$ — имеет континуум собственных векторов.

Доказательство. Если на каждой сфере S_ρ $(\|x\| = \rho)$ при $\rho \leqslant \rho_0$ есть собственные векторы оператора Γ, то утверждения теоремы доказаны. Поэтому достаточно рассмотреть случай, когда на некоторой сфере S_{ρ_1} $(0 < \rho_1 \leqslant \rho_0)$ нет собственных векторов оператора Γ.

Так как на S_{ρ_1} нет собственных векторов оператора Γ, то минимум m и максимум M функционала $\Phi(\varphi)$ на T_{ρ_1} различны (в противном случае градиент функционала принимает на всем T_{ρ_1} нулевые значения). Без ограничения общности можно считать, что $m < \Phi(\theta)$. Через φ_0 обозначим точку минимума функционала $\Phi(\varphi)$; она будет, очевидно, внутренней точкой шара T_{ρ_1}. В точке φ_0 значение градиента равно нулю.

Рассмотрим функционалы $\Phi_\gamma(\varphi) = \gamma(\varphi, \varphi) + \Phi(\varphi)$ на шаре T_{ρ_1} при значениях γ из полуинтервала

$$\Delta = \left[0, \frac{\Phi(\theta) - m}{\|\varphi_0\|^2}\right).$$

Каждый из этих функционалов в силу леммы 1.1 принимает в некоторой точке $\varphi_\gamma \in T_{\rho_1}$ свое минимальное значение. Так как

$$\Phi_\gamma(\theta) = \Phi(\theta) > m + \gamma\|\varphi_0\|^2 = \Phi_\gamma(\varphi_0) \geqslant \Phi_\gamma(\varphi_\gamma),$$

то все точки φ_γ отличны от θ.

Покажем, что все точки φ_γ при $\gamma \in \Delta$ будут внутренними точками шара T_{ρ_1}. Действительно, если некоторый элемент φ_γ лежит на сфере S_{ρ_1}, то в силу леммы 2.2 (Л. А. Люстерника) градиент $\frac{\gamma}{2}\varphi_\gamma + \mathbf{\Gamma}\varphi_\gamma$ функционала $\mathbf{\Phi}_\gamma(\varphi)$ в точке φ_γ коллинеарен вектору φ_γ.

$$\frac{\gamma}{2}\varphi_\gamma + \mathbf{\Gamma}\varphi_\gamma = \lambda\varphi_\gamma,$$

т. е. на S_{ρ_1} есть собственный вектор оператора $\mathbf{\Gamma}$, что противоречит предположению.

Во внутренних точках шара, являющихся точками абсолютного минимума функционала на шаре, градиент принимает нулевое значение. Поэтому

$$\mathbf{\Gamma}\varphi_\gamma = -\frac{\gamma}{2}\varphi_\gamma \qquad (\gamma \in \Delta).$$

Теорема доказана.

Заметим, что в условиях теоремы 3.1 спектр оператора $\mathbf{\Gamma}$ (совокупность собственных значений) заполняет полностью некоторый интервал, если оператор $\mathbf{\Gamma}$ не имеет собственных векторов любой нормы.

Применение теоремы 3.1 к исследованию конкретных уравнений состоит в конструировании такого слабо непрерывного функционала в пространстве L^2, по собственным функциям которого можно построить собственные функции рассматриваемого уравнения.

Приводимые ниже теоремы 3.2 и 3.3, называемые нами соответственно теоремой Голомба и теоремой М. М. Вайнберга, были доказаны авторами при помощи более слабого утверждения, чем содержащееся в теореме 3.1. Поэтому эти авторы без дополнительных условий установили существование лишь счетного числа собственных функций; в теоремах 3.2 и 3.3 утверждения усилены: без дополнительных условий доказано существование континуума собственных функций.

2. Теорема М. Голомба. Для доказательства существования собственных функций у оператора Гаммерштейна

$$\mathbf{B}\varphi(s) = \int_G K(s, t) f[t, \varphi(t)]\, dt \tag{3.1}$$

применим доказанный в теореме 3.1 принцип.

Оператор (3.1) можно записать в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{Af}, \tag{3.2}$$

где

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\varphi(t)\,dt. \tag{3.3}$$

Теорема 3.2 (Голомба *)). *Если* $\mathbf{A}$ — *самосопряженный положительно определенный вполне непрерывный оператор, действующий в* L^2, *а* $\mathbf{f}$ *является градиентом некоторого функционала, определенного в* L^2, *то оператор* $\mathbf{Af}$ *имеет не менее континуума собственных функций.*

Доказательство. Если $\mathbf{f}$ — градиент функционала $\Phi(\varphi)$, то оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ будет градиентом слабо непрерывного функционала $\Phi[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi]$. В силу этого оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ будет иметь не менее континуума собственных векторов.

Пусть φ — собственный вектор оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$:

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi = \lambda\varphi.$$

Применим к последнему равенству оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ и введем обозначение $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi = \psi$. Тогда

$$\mathbf{Af}\psi = \lambda\psi.$$

Значит, каждый вектор $\psi = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi$, где φ — собственный вектор оператора $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$, будет собственным вектором оператора $\mathbf{B} = \mathbf{Af}$.

Теорема доказана.

Если в условиях теоремы 3.2 оператор $\mathbf{A}$ имеет нуль собственным числом, то утверждение теоремы сохраняется. Для доказательства функционал $\Phi[\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi]$ нужно рассматривать в этом случае не на всем пространстве H, а на под-

---

*) Голомб доказывал эту теорему в предположении непрерывности градиента. В работе [10н] М. М. Вайнберг указал, что это предположение несущественно.

пространстве H_1, ортогональном собственным векторам оператора $\mathbf{A}$, соответствующим собственному числу, равному нулю.

Как следует из леммы 5.1 главы I (стр. 81), оператор $\mathbf{f}$ является градиентом некоторого функционала, определенного на L^2, если оператор $\mathbf{f}$ действует в L^2. Таким образом, мы получаем теорему, доказанную М. М. Вайнбергом.

Теорема 3.3 (М. М. Вайнберг). *Если $\mathbf{A}$ — самосопряженный положительно определенный вполне непрерывный оператор, а оператор $\mathbf{f}$ действует в L^2, то оператор Гаммерштейна имеет не менее континуума собственных функций.*

Замечание. Если в условиях теорем 3.2 и 3.3 функция $f(t, u)$ удовлетворяет условию

$$f(t, u)\cdot u > 0 \qquad (t \in G,\ u \neq 0), \tag{3.4}$$

то оператор $\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ ни в одной точке подпространства H_1, отличной от θ, не обращается в нуль, так как

$$(\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ \varphi) = (\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi) =$$
$$= \int_G f[s,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)]\,\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi(s)\,ds > 0 \quad (\varphi(s) \neq \theta).$$

Таким образом, в условиях теоремы 3.3 при выполнении дополнительного условия (3.4) оператор (3.1) имеет собственные функции на каждом эллипсоиде

$$(\mathbf{A}^{-1}\varphi,\ \varphi) = c \qquad (0 < c < \infty).$$

При этом все собственные числа положительны, так как из $\mu\varphi = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi$ после скалярного умножения на φ следует, что

$$\mu = \frac{(\mathbf{f}\mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi,\ \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}\varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}.$$

3. Обобщение теоремы Голомба. Требование, чтобы оператор $\mathbf{f}$ действовал в пространстве L^2, является весьма ограничительным, Действительно, при выполнении этого условия (как показано в § 2 главы I) функция $f(t, u)$

«подлинейна» в том смысле, что она удовлетворяет неравенству

$$|f(t, u)| \leqslant a(t) + b|u| \quad (t \in G, \ -\infty < u < \infty).$$

Теорема Голомба допускает простое обобщение, которое позволяет расширить класс рассматриваемых нелинейностей (при сохранении предположения о неограниченности ядра).

Теорема 3.4. *Пусть оператор* (3.3) *представим в виде*

$$\mathbf{A} = \mathbf{H}\mathbf{H}^*, \tag{3.5}$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{A}^{\frac{1}{2}}$ — *линейный вполне непрерывный оператор, действующий из пространства* L^2 *в некоторое пространство* L^p $(p > 2)$, *а* $\mathbf{H}^*$ — *сопряженный* $\mathbf{H}$ *оператор, действующий соответственно из пространства* L^q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$ *в* L^2. *Пусть оператор* $\mathbf{f}$ *действует из пространства* L^p *в* L^q.

Тогда оператор (3.2) *имеет не менее континуума собственных функций.*

Доказательство. В силу леммы 5.1 главы I (стр. 81) оператор $\mathbf{f}$ является градиентом некоторого функционала $\mathbf{F}$, определенного на L^p. Тогда оператор $\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}$ будет градиентом слабо непрерывного функционала $\mathbf{F}\mathbf{H}$, определенного на L^2.

Следовательно, оператор $\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}$ будет иметь не менее континуума собственных функций. Каждая функция $\mathbf{H}\varphi$, где φ — собственная функция оператора $\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}$, будет собственной функцией оператора $\mathbf{H}\mathbf{H}^*\mathbf{f} = \mathbf{A}\mathbf{f}$.

Теорема доказана.

Приложения теоремы 3.4 к исследованию конкретных уравнений требуют возможности представления операторов в форме (3.5). В связи с этой задачей и возник ряд теорем о расщеплении линейных операторов, которым посвящен § 4 главы I.

Объединяя утверждения § 4 главы I с теоремой 3.4, можно сформулировать различные условия существования собственных функций у операторов Гаммерштейна, в которых на ядра или их итерации будут наложены ограничения, обеспечивающие возможность расщепления оператора.

4. Ядра с конечным числом отрицательных собственных чисел. Первые теоремы о существовании счетного числа собственных функций у операторов Гаммерштейна с ядрами, у которых конечное число отрицательных собственных чисел, вариационными методами установил М. М. Вайнберг ([10г, д] и др.).

Следует указать, что в многочисленных случаях такие операторы значительно более полно могут быть исследованы методами, изложенными выше. Например, если оператор достаточно гладок (имеет производную Фреше в нуле банахова пространства, в котором он действует), то могут быть применены теоремы о точках бифуркации.

Ряд теорем о собственных функциях операторов Гаммерштейна с неопределенными ядрами был указан в статье А. И. Поволоцкого и автора [32], другие предложения были указаны Ю. Г. Борисовичем *). Здесь доказываются более общие теоремы.

Будем пользоваться здесь обозначениями пункта 3 § 1 настоящей главы.

Лемма 3.1. *Пусть* $z_n \in H$ $(n=1, 2, \ldots)$ — *слабо сходящаяся к* $z_0 \in H$ *последовательность. Пусть*

$$(\mathbf{J}z_n, z_n) \geqslant c \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

где c — *некоторое число.*

Тогда $(\mathbf{J}z_0, z_0) \geqslant c$.

Доказательство. Запишем каждый элемент z_n в виде

$$z_n = x_n + y_n \qquad (x_n \in H_1,\ y_n = H_2,\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Так как H_1 конечномерно, то $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$.

Значит, элементы y_n слабо сходятся к y_0 и, следовательно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \|y_n\| \geqslant \|y_0\|.$$

Тогда

$$\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2 \geqslant \lim_{n\to\infty} \|x_n\|^2 - \varlimsup_{n\to\infty} \|y_n\|^2 = \\ = \varliminf_{n\to\infty} (\|x_n\|^2 - \|y_n\|^2) \geqslant c.$$

Лемма доказана.

---

*) В работах «Об оценке количества критических точек функционалов» (ДАН СССР **101**, № 2, 1955) и «К вопросу об устойчивости критических значений» (ДАН СССР, **104**, № 2, 1955).

Утверждение леммы означает, что множества T_c, состоящие из тех φ, для которых $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) \geqslant c$, слабо замкнуты.

Теорема 3.5. *Пусть* Γ — *градиент слабо непрерывного функционала* $\Phi(\varphi)$, *возрастающего* *) *в* F_0:

$$\lim_{\|\varphi\| \to \infty,\ \varphi \in F_0} \Phi(\varphi) = +\infty.$$

Тогда оператор $\mathbf{J\Gamma}$ *имеет в каждом* T_c *континуум собственных векторов.*

Если в T_c *оператор* $\mathbf{\Gamma}$ *не принимает нулевых значений, то на каждом гиперболоиде* $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c_1$ $(c_1 \geqslant c)$ *есть собственный вектор оператора* $\mathbf{J\Gamma}$.

Доказательство. Рассмотрим вначале последнее утверждение теоремы: пусть $\|\mathbf{\Gamma}\varphi\| > 0$ при $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) \geqslant c_0$.

Пусть φ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — последовательность, минимизирующая на T_c $(c \geqslant c_0)$ функционал $\Phi(\varphi)$. Так как значения функционала на T_c неограниченно возрастают при возрастании норм аргумента, то последовательность φ_n ограничена. Ее можно считать слабо сходящейся (в противном случае можно перейти к подпоследовательности) к некоторому элементу φ_0. В силу леммы 3.1 $\varphi_0 \in T_c$.

Точка φ_0 — точка минимума функционала $\Phi(\varphi)$ на T_c. Если бы она была внутренней точкой T_c, то градиент принимал бы на ней нулевое значение, что противоречит предположению. Поэтому точка φ_0 лежит на гиперболоиде $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c$.

В силу леммы 2.2 Л. А. Люстерника $\mathbf{\Gamma}\varphi_0 = \lambda\mathbf{J}\varphi_0$, где λ — некоторое число, откуда

$$\mathbf{J\Gamma}\varphi_0 = \lambda\varphi_0,$$

т. е. на гиперболоиде $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c$ есть собственный вектор оператора $\mathbf{J\Gamma}$.

Осталось рассмотреть случай, когда на некотором гиперболоиде $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c_1$ $(c_0 \leqslant c_1)$ нет собственных векторов оператора $\mathbf{J\Gamma}$.

Обозначим через $f(u)$ $(0 \leqslant u < \infty)$ такую неотрицательную монотонно возрастающую функцию, которая имеет поло-

*) Условие возрастания можно заменить менее ограничительным, но менее удобным условием: при больших u

$$\sup_{\|\varphi\| \leqslant u,\ \varphi \in F} \Phi(u) < \lim_{t \to \infty} \inf_{\|\varphi\| > t,\ \varphi \in F} \Phi(\varphi).$$

жительную производную и при больших значениях u удовлетворяет неравенству

$$f(u^2) \leqslant \inf_{\varphi \in F_0,\ \|\varphi\| \geqslant u} \Phi(\varphi).$$

Можно, например, положить $f(u) = \frac{u-1}{u+1}$.

Функционалы

$$\Phi_\alpha(\varphi) = -\alpha f[(\mathbf{J}\varphi, \varphi)] + \Phi(\varphi) \qquad (0 < \alpha < 1)$$

будут растущими в F_0, так как из очевидного неравенства

$$(\mathbf{J}\varphi, \varphi) \leqslant (\varphi, \varphi)$$

и монотонности функции $f(u)$ следует, что для элементов $\varphi \in F_0$ с достаточно большой нормой

$$\Phi_\alpha(\varphi) \geqslant (1-\alpha)\Phi(\varphi).$$

Пусть

$$\varphi_n = x_n + y_n \qquad (x_n \in H_1,\ y_n = H_2,\ n = 1, 2, \ldots)$$

— последовательность, минимизирующая на T_{c_1} функционал $\Phi_\alpha(\varphi)$:

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_\alpha(\varphi_n) = \inf_{(\mathbf{J}\varphi, \varphi) \geqslant c_1} \Phi_\alpha(\varphi).$$

Последовательность φ_n ограничена. Поэтому без ограничения общности можно считать, что она слабо сходится к некоторому элементу $\varphi_0 = x_0 + y_0$ $(x_0 \in H_1,\ y_0 \in H_2)$, причем

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0,$$

и существует предел a норм $\|y_n\|$. В силу леммы 3.1 $\varphi_0 \in T_{c_1}$. Очевидно,

$$\|y_0\| \leqslant a.$$

Равенство

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_\alpha(\varphi_n) = \inf_{(\mathbf{J}\varphi, \varphi) \geqslant c_1} \Phi_\alpha(\varphi)$$

можно переписать в виде

$$-\alpha f(\|x_0\|^2 - a^2) + \Phi(\varphi_0) = \inf_{(\mathbf{J}\varphi, \varphi) \geqslant c_1} \Phi_\alpha(\varphi),$$

откуда

$$-\alpha f(\|x_0\|^2 - a^2) + \Phi(\varphi_0) \leqslant$$
$$\leqslant \Phi_\alpha(\varphi_0) = -\alpha f(\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2) + \Phi(\varphi_0),$$

т. е.

$$f(\|x_0\|^2 - \|y_0\|^2) \leqslant f(\|x_0\|^2 - a^2)$$

и $\|y_0\| \geqslant a$. Следовательно, $\|y_0\| = a$ и последовательность φ_n сильно сходится к φ_0.

Поэтому точка φ_0 является точкой абсолютного минимума функционала $\Phi_\alpha(\varphi)$ на T_{c_1}.

Если $(\mathbf{J}\varphi_0, \varphi_0) = c_1$, то в силу леммы 2.2 Л. А. Люстерника градиент функционала $\Phi_\alpha(\varphi)$ в точке φ_0 коллинеарен градиенту функционала $\mathbf{J}\varphi$, φ. Так как

$$\operatorname{grad} \Phi_\alpha(\varphi) = -\frac{\alpha}{2} f'[(\mathbf{J}\varphi, \varphi)]\, \mathbf{J}\varphi + \mathbf{\Gamma}\varphi$$

и

$$\operatorname{grad}(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = \frac{1}{2}\mathbf{J}\varphi,$$

то это значит, что

$$-\frac{\alpha}{2} f'[(\mathbf{J}\varphi_0, \varphi_0)]\, \mathbf{J}\varphi_0 + \mathbf{\Gamma}\varphi_0 = \lambda \mathbf{J}\varphi_0,$$

откуда

$$\mathbf{J\Gamma}\varphi_0 = \left\{\frac{\alpha}{2} f'[(\mathbf{J}\varphi_0, \varphi_0)] + \lambda\right\}\varphi_0,$$

т. е. на гиперболоиде $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c_1$ есть собственный вектор оператора $\mathbf{J\Gamma}$, что противоречит предположению.

Значит, точка φ_0 является внутренней точкой T_{c_1}. Поэтому градиент в этой точке принимает нулевое значение:

$$-\frac{\alpha}{2} f'[(\mathbf{J}\varphi_0, \varphi_0)]\, \mathbf{J}\varphi_0 + \mathbf{\Gamma}\varphi_0 = 0,$$

т. е.

$$\mathbf{J\Gamma}\varphi_0 = \frac{\alpha}{2} f'[(\mathbf{J}\varphi_0, \varphi_0)]\, \varphi_0.$$

Из этого равенства вытекает, что φ_0 — собственный вектор оператора $\mathbf{J\Gamma}$, отвечающий собственному значению $\frac{\alpha}{2} f'[(\mathbf{J}\varphi_0, \varphi_0)]$. При различных α собственные векторы будут различные.

Теорема доказана.

Рассматривая в теореме 3.5 собственные функции оператора $\mathbf{J\Gamma}$, лежащие в различных T_c, убеждаемся в существовании собственных функций сколь угодно большой нормы. Без труда доказывается, что существуют собственные функции сколь угодно малой нормы, если функционал $\Phi(\varphi)$ неотрицателен и принимает нулевое значение только в точке θ. Для существования собственных функций сколь угодно малой нормы в условиях теоремы 3.5 достаточно требовать выполнения неравенства

$$(\Gamma\varphi, \varphi) > 0$$

при $(\varphi, \varphi) > 0$.

Теорема 3.5 непосредственно применяется к исследованию оператора

$$\mathbf{B}\psi(s) = \int_G L(s, t) f[t, \psi(t)]\, dt \tag{3.6}$$

с симметричным ядром, у которого конечное число отрицательных собственных значений.

Пусть $K(s, t)$ — соответствующее $L(s, t)$ положительно определенное ядро (см. главу I, § 4, пункт 6) и

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \int_G K(s, t)\varphi(t)\, dt. \tag{3.7}$$

Оператор $\mathbf{A}$ (см. главу I, § 4) в ряде случаев представим в виде $\mathbf{A} = \mathbf{HH}^*$, где вполне непрерывный оператор $\mathbf{H}$ действует из L^2 в пространство L^p, причем в L^2 оператор $\mathbf{H}$ коммутирует с $\mathbf{J}$.

Если оператор $\mathbf{f}$ действует из L^p в L^q, то оператор $\Gamma = \mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}$ является градиентом некоторого функционала $\mathbf{F}(\mathbf{H}\varphi)$ (см. ниже (3.8)). Поэтому теорема 3.5 может быть применена к доказательству существования собственных функций у оператора $\mathbf{JH}^*\mathbf{fH}$. Применяя к этим собственным функциям оператор $\mathbf{H}$, получим собственные функции оператора (3.6), представимого в виде $\mathbf{B} = \mathbf{HJH}^*\mathbf{f}$. Заметим при этом, что в силу леммы 1.3 оператор $\mathbf{H}$ преобразует собственные функции оператора $\mathbf{JH}^*\mathbf{fH}$ с большой нормой в собственные функции оператора (3.6), также имеющие большую норму.

Осталось наложить на $f(s, u)$ ограничение, при котором функционал $\mathbf{F}(\mathbf{H}\varphi)$, где $\mathbf{F}(\varphi)$ определен равенством

$$\mathbf{F}[\varphi(s)] = \int\limits_G ds \int\limits_0^{\varphi(s)} f(s, u)\, du, \tag{3.8}$$

был бы возрастающим в F_0.

Пусть функция $f(s, u)$ удовлетворяет условию

$$f(s, u) \cdot \operatorname{sign} u \geqslant \alpha |u| - b(s) |u|^{1-\gamma} - c(s), \tag{3.9}$$

где $\alpha > 0$, $0 < \gamma \leqslant 1$, $b(s) \in L^{\frac{2}{\gamma}}$, $c(s) \in L^2$.

Тогда

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}\varphi) \geqslant \alpha \int\limits_G |\mathbf{H}\varphi(s)|^2 ds - \frac{1}{2-\gamma} \int\limits_G b(s) |\mathbf{H}\varphi(s)|^{2-\gamma} ds - \\ - \int\limits_G c(s) |\mathbf{H}\varphi(s)|\, ds. \tag{3.10}$$

В силу леммы 1.3 первого параграфа главы найдется такое число $\beta > 0$ (просто выражающееся через наименьшее по абсолютной величине отрицательное собственное число ядра $L(s, t)$), что при $\varphi \in F_0$

$$\int\limits_G |\mathbf{H}\varphi(s)|^2 ds \geqslant \beta(\varphi, \varphi). \tag{3.11}$$

Поэтому из (3.10) следует:

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}\varphi) \geqslant \alpha\beta(\varphi, \varphi) - b(\varphi, \varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}} - c(\varphi, \varphi)^{\frac{1}{2}} \tag{3.12}$$
$$(\varphi \in F_0),$$

где

$$b = \frac{1}{2-\gamma} \left\{ \int\limits_G |b(s)|^{\frac{2}{\gamma}} ds \right\}^{\frac{\gamma}{2}} \cdot \|\mathbf{H}\|^{2-\gamma}, \quad c = \left\{ \int\limits_G c^2(s)\, ds \right\}^{\frac{1}{2}} \cdot \|\mathbf{H}\|.$$

Из (3.12) вытекает, что функционал $\mathbf{FH}$ в F_0 является возрастающим.

Из условия (3.9) вытекает также, что найдется такое $c_0 \geqslant 0$, что при $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) \geqslant c_0$

$$(\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi) = (\mathbf{H}^*\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi, \varphi) = (\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi, \mathbf{H}\varphi) > 0. \tag{3.13}$$

Действительно, из (3.9) вытекает, что

$$(\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi,\ \mathbf{H}\varphi)\geqslant$$
$$\geqslant \alpha(\mathbf{H}\varphi,\ \mathbf{H}\varphi)-\int\limits_G b(s)\,|\,\mathbf{H}\varphi(s)\,|^{2-\gamma}\,ds-\int\limits_G c(s)\,|\,\mathbf{H}\varphi(s)\,|\,ds,$$

откуда в силу (3.11)

$$(\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi,\ \mathbf{H}\varphi)\geqslant\alpha\beta(\varphi,\ \varphi)-b_1(\varphi,\ \varphi)^{1-\frac{\gamma}{2}}-c(\varphi,\ \varphi)^{\frac{1}{2}} \quad (\varphi\in F_0), \tag{3.14}$$

где

$$b_1=\left\{\int\limits_G|\,b(s)\,|^{\frac{2}{\gamma}}\,ds\right\}^{\frac{\gamma}{2}}\cdot\|\mathbf{H}\|^{2-\gamma},\qquad c=\left\{\int\limits_G c^2(s)\,ds\right\}^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{H}\|.$$

Пусть c_0 — такое положительное число, что при $\rho^2\geqslant c_0$

$$\alpha\beta\rho^2-b_1\rho^{2-\gamma}-c\rho>0.$$

Тогда из $(\mathbf{J}\varphi,\ \varphi)\geqslant c_0$ следует, что $\rho^2=(\varphi,\ \varphi)\geqslant c_0$ и в силу (3.14)

$$(\mathbf{f}\mathbf{H}\varphi,\ \mathbf{H}\varphi)>0.$$

Заметим, что неравенство (3.13) справедливо при всех $\varphi\neq 0$, если

$$f(s,\ u)\cdot u>0 \qquad (s\in G,\ u\neq 0). \tag{3.15}$$

Проведенные выше рассуждения и теорема 3.5 приводят к следующему утверждению.

Теорема 3.6. *Пусть симметричное ядро* $L(s,\ t)$ *оператора* (3.6) *имеет конечное число отрицательных собственных чисел и удовлетворяет условиям*

$$\int\limits_G\int\limits_G L^2(s,\ t)\,ds\,dt<\infty,$$
$$\int\limits_G\int\limits_G|\,L(s,\ t)\,|^{p+\varepsilon}\,ds\,dt<\infty \qquad (p>2), \tag{3.16}$$

где ε — *некоторое положительное число* *). *Пусть оператор* $\mathbf{f}$ *действует из* L^p *в* L^q $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\right)$, *а функция* $f(s,\ u)$ *удовлетворяет условию* (3.9).

*) Из одной новой теоремы М. М. Вайнберга (см. сноску на стр. 69) следует, что можно положить $\varepsilon=0$.

Тогда оператор (3.6) *имеет континуум собственных функций, среди которых есть функции со сколь угодно большой нормой.*

Если выполнено дополнительное условие (3.15), *то оператор* (3.6) *имеет собственные функции* $\varphi(s, c)$ *на каждом гиперболоиде* $(\mathbf{JA}^{-1}\varphi, \varphi) = c$, причем

$$\lim_{c\to 0} \|\varphi(s, c)\| = 0, \qquad \lim_{c\to\infty} \|\varphi(s, c)\| = \infty.$$

Если оператор $\mathbf{f}$ *действует в* L^2, *то вместо условий* (3.16) *достаточно требовать, чтобы ядро* $L(s, t)$ *определяло в* L^2 *вполне непрерывный оператор.*

Аналогичное утверждение можно установить для того случая, когда условиям типа (3.15) удовлетворяет некоторая итерация ядра $L(s, t)$.

В заключение параграфа приведем еще одну теорему.

Теорема 3.7. *Пусть* $\operatorname{mes} G < \infty$. *Пусть симметричное ядро* $L(s, t)$ *имеет конечное число отрицательных собственных чисел и ограничено. Пусть функция* $f(s, u)$ *удовлетворяет условию*

$$f(s, u)\cdot u > 0 \qquad (s \in G,\ 0 < |u| \leqslant m), \tag{3.17}$$

где m — *некоторое положительное число. Пусть найдется такое* $q > 1$, *что*

$$\int_G |f[s, u(s)]|^q\, ds < \infty \tag{3.18}$$

при $|u(s)| \leqslant m$ $(s \in G)$.

Тогда оператор Гаммерштейна (3.6) *имеет континуум собственных функций, среди которых есть функции со сколь угодно малой нормой.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$f_1(s, u) = \begin{cases} f(s, u) & \text{при } |u| \leqslant m, \\ f(s, m \operatorname{sign} u) + \alpha(u - m \operatorname{sign} u) & \text{при } |u| \geqslant m. \end{cases} \tag{3.19}$$

Оператор $\mathbf{f}_1$, порожденный функцией $f_1(s, u)$, очевидно, действует из пространства L^p в L^q $\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1\right)$.

Рассмотрим оператор $\mathbf{JH^*f_1H}$, где

$$\mathbf{A}\varphi(s) = \mathbf{HH^*}\varphi(s) = \int\limits_G K(s, t)\varphi(t)\,dt,$$

а $K(s, t)$ — положительно определенное ядро, соответствующее ядру $L(s, t)$. Оператор $\mathbf{JH^*fH}$ имеет, как это следует из доказательства теоремы 3.5, собственные функции φ сколь угодно малой нормы. Функции $\psi = \mathbf{H}\varphi$ будут собственными функциями для оператора $\mathbf{JHH^*f_1}$:

$$\mathbf{JHH^*f_1}\,\psi = \int\limits_G L(s, t) f_1[t, \psi(t)]\,dt. \tag{3.20}$$

В силу теоремы 4.9 из главы I найдется такое число $\gamma > 0$, что

$$\operatorname{vrai\,max} |\mathbf{H}\varphi(s)| \leqslant \gamma \|\varphi\|.$$

Таким образом, оператор (3.20) имеет собственные функции со сколь угодно малым vrai max. Пусть $\psi(x)$ — собственная функция оператора (3.20), причем

$$\operatorname{vrai\,max} |\psi(s)| \leqslant m.$$

Тогда в силу (3.19) функция $\psi(s)$ будет собственной и для оператора $\mathbf{JHH^*f}$, т. е. для оператора (3.6).

Теорема доказана.

§ 4. Устойчивые критические точки четных функционалов [29р]

1. Теорема Л. А. Люстерника. Л. А. Люстерник, изучая четные положительные функционалы в гильбертовом пространстве, обнаружил [41г] замечательный факт: на каждой сфере такие функционалы имеют не менее счетного числа критических точек. Иначе говоря, градиент четного функционала имеет на сфере не менее счетного числа собственных векторов.

Теорема Л. А. Люстерника явилась обобщением того факта, что квадратичный слабо непрерывный функционал имеет счетную систему критических точек.

Результат Л. А. Люстерника в дальнейшем обобщался различными авторами, причем наиболее существенные результаты были получены В. И. Соболевым [63] и Э. С. Цитланадзе [70]. Первый из них освободился от предположения Л. А. Люстерника об однородности функционала, второй обобщил теорему на случай функционалов, заданных в регулярных банаховых пространствах с базисом и с дифференцируемой нормой. Э. С. Цитланадзе провел также тонкое исследование случая совпадения критических значений функционалов. Л. А. Люстерник, В. И. Соболев и Э. С. Цитланадзе предполагали, что градиент рассматриваемого функционала вполне непрерывен и удовлетворяет условию Липшица. М. М. Вайнберг показал [10г], что второе предположение является лишним.

В перечисленных исследованиях существенно использовалась четность функционала. Это свойство позволяло переходить к исследованию функционала на проективных пространствах, полученных отождествлением симметричных относительно центра точек сферы. Для оценки же количества критических точек функционалов на проективных пространствах применялась теория категорий Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана.

Автор предложил [29к] доказательство теоремы Л. А. Люстерника, не использующее перехода к проективным пространствам, основанное на применении нового топологического инварианта — рода множества. Это доказательство тоже существенно использовало четность функционала.

Оценка количества критических точек функционалов — это одновременно оценка количества собственных векторов градиента функционала. Поэтому теоремы о количестве критических точек функционалов являются усилениями теорем о существовании собственных векторов у потенциальных операторов.

В настоящем параграфе развивается метод, использующий идеи некоторых работ Л. А. Люстерника, который позволяет установить существование счетного числа критических значений у четного функционала, обладающих свойством устойчивости — они не исчезают при малых возмущениях нечетными функционалами. Отметим, что наши критические значения отличны, вообще говоря, от тех критических значений, которые определяются в теории Л. А. Люстерника.

2. Род множества *). Пусть S — единичная сфера в гильбертовом пространстве H. Точку, симметричную относительно центра 0 сферы S точке φ, будем обозначать через $-\varphi$. Через F^* будем обозначать множество, расположенное симметрично относительно 0 множеству F. Компактное множество $F \subset S$ будем называть *множеством первого рода* $(r(F) = 1)$, если каждая связная компонента множества $F \cup F^*$ не содержит ни одной пары симметричных точек φ и $-\varphi$.

Произвольное компактное множество $F \subset S$ будем называть *множеством рода* n $(r(F) = n)$, если его можно покрыть n множествами первого рода и нельзя покрыть $n-1$ множеством первого рода.

Теорему 2.7 из главы II можно тогда формулировать так: *род n-мерной сферы равен* $n+1$. Отсюда вытекает, что *сфера гильбертова бесконечномерного пространства содержит подмножества любого конечного рода.*

В дальнейшем рассматриваются такие множества F, которые вместе с каждой точкой φ содержат симметричную точку $-\varphi$.

Непрерывное преобразование $\mathbf{B}$ множества $F \subset S$ в множество $\mathbf{B}F$ на S назовем *допустимым*, если оно нечетно, т. е. если при применении его симметричные точки переходят снова в симметричные.

Лемма 4.1. *Пусть* $\mathbf{B}$ — *нечетное преобразование компактного множества* $F \subset S$:

$$\mathbf{B}(-\varphi) = -\mathbf{B}\varphi \qquad (\varphi \in F),$$

причем $\mathbf{B}F \subset S$.

Тогда

$$r(F) \leqslant r(\mathbf{B}F).$$

---

*) Читатель, знакомый с теорией категорий Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана, усмотрит, что род множества на сфере совпадает с категорией образа множества в проективном пространстве, полученном отождествлением симметричных относительно центра точек сферы.

Понятие рода аналогично вводится [29к] для произвольных многообразий, на которых задана симметрия (инволюция). В общем случае род множества F дает оценку снизу для категории образа множества F в многообразии, полученном из основного склеиванием симметричных точек. Род множеств изучен в работах Ю. Г. Борисовича (см. сноску на стр. 348).

Доказательство. Пусть вначале $r(\mathbf{B}F)=1$. Тогда и $r(F)=1$.

Действительно, если род множества F не равен 1, то в S найдется пара точек φ и $-\varphi$, которая принадлежит некоторой связной компоненте F_1 множества F. Тогда связное множество $\mathbf{B}F_1$, которое является частью множества $\mathbf{B}F$, содержит пару симметричных точек $\mathbf{B}\varphi$ и $-\mathbf{B}\varphi$. Следовательно, $r(\mathbf{B}F)>1$, что противоречит допущению.

Пусть $r(\mathbf{B}F)=n$. Это значит, что множество $\mathbf{B}F$ можно покрыть n множествами $D_1, \ldots, D_n$ первого рода. Прообразы $H_1, \ldots, H_n$ множеств $D_1, \ldots, D_n$ ($\mathbf{B}H_i=D_i$; $i=1, 2, \ldots, n$), покрывают F. По доказанному выше

$$r(H_i)=1 \qquad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Значит,

$$r(F)\leqslant n.$$

Лемма доказана.

3. Классы M_k. Пусть $\mathbf{B}$ — нечетное непрерывное преобразование $(k-1)$-мерной сферы S^{k-1} в S, т. е. преобразование, переводящее симметричные относительно центра сферы точки в точки, тоже симметричные относительно центра. Без ограничения общности дальнейших рассуждений можно считать, что S^{k-1} — единичная сфера k-мерного евклидова пространства R^k с системой координат $\{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$.

Лемма 4.2. *Род множества* $\mathbf{B}S^{k-1}$ *не меньше* k.

Утверждение этой леммы непосредственно вытекает из леммы 4.1, так как род сферы S^{k-1} равен k. Последнее утверждение, как мы уже указывали, непосредственно вытекает из теоремы 2.6 главы II.

Через M_k будем обозначать класс таких компактных множеств, принадлежащих S, которые являются множествами вида $\mathbf{B}S^{k-1}$, где $\mathbf{B}$ — нечетный оператор. В силу леммы 4.2 в каждый класс M_k $(k=1, 2, \ldots)$ могут входить множества, род которых не меньше k. Однако могут быть множества рода k, которые не входят в класс M_k.

Лемма 4.3. *Каждое множество* $\mathbf{B}S^{k-1}$ *класса* M_k *является подмножеством некоторого множества из класса* M_{k+1}.

Доказательство. Пусть $\{\xi_1, \ldots, \xi_k, \xi_{k+1}\}$ — ортогональная система координат $(k+1)$-мерного евклидова пространства R^{k+1}. Пусть S^k — единичная сфера из пространства R^{k+1}, S^{k-1} — экватор сферы S^k, определенный уравнением $\xi_{k+1}=0$. Каждый элемент x пространства R^{k+1} можно единственным образом представить в виде

$$x=x_1+\xi_{k+1}e_{k+1},$$

где x_1 — элемент k-мерного подпространства $\xi_{k+1}=0$, а e_{k+1} — орт $(k+1)$-й координатной оси.

Множество $\mathbf{B}S^{k-1}$ является компактным множеством сферы $S\subset H$. Следовательно, можно указать такое конечномерное подпространство $L\subset H$, что

$$\rho(\varphi,\ L)<\frac{1}{4}\qquad(\varphi\in\mathbf{B}S^{k-1}).\tag{4.1}$$

Пусть h_0 — единичный элемент пространства H, ортогональный подпространству L.

Определим на S^k оператор $\widetilde{\mathbf{B}}$ равенством

$$\widetilde{\mathbf{B}}x=\frac{\|x_1\|\mathbf{B}\dfrac{x_1}{\|x_1\|}+\xi_{k+1}\;{}_0}{\left\|\|x_1\|\mathbf{B}\dfrac{x_1}{\|x_1\|}+\xi_{k+1}h_0\right\|}\qquad(x=x_1+\xi_{k+1}e_{k+1}\in S^k).$$

Нечетность оператора $\widetilde{\mathbf{B}}$ очевидна. Для доказательства его непрерывности нужно только проверить, что знаменатель в формуле, определяющей $\widetilde{\mathbf{B}}$, не обращается в нуль.

В силу (4.1) каждому $x\in S^k$ отвечает такой элемент $\psi\in L$, $(\psi,\ h_0)=0$, что

$$\left\|\|x_1\|\mathbf{B}\frac{x_1}{\|x_1\|}-\psi\right\|<\frac{1}{4}.$$

Следовательно, при $|\xi_{k+1}|\geqslant\frac{1}{2}$

$$\left\|\|x_1\|\mathbf{B}\frac{x_1}{\|x_1\|}+\xi_{k+1}h_0\right\|\geqslant|\xi_{k+1}|\cdot\left\|h_0+\frac{\psi}{\xi_{k+1}}\right\|-\left\|\|x_1\|\mathbf{B}\frac{x_1}{\|x_1\|}-\psi\right\|>$$
$$>|\xi_{k+1}|-\frac{1}{4}\geqslant\frac{1}{4}.$$

Если же $|\xi_{k+1}|<\frac{1}{2}$, то $\|x_1\|=\sqrt{1-\xi_{k+1}^2}>\frac{\sqrt{3}}{2}$, следовательно,

$$\left\|\|x_1\|\mathbf{B}\frac{x_1}{\|x_1\|}+\xi_{k+1}h_0\right\|\geqslant\|x_1\|\cdot\left\|\mathbf{B}\frac{x_1}{\|x_1\|}\right\|-|\xi_{k+1}|>\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}.$$

Таким образом, $\widetilde{\mathbf{B}}S^k\in M_{k+1}$.

Оператор $\tilde{\mathbf{B}}$ на S^{k-1} принимает те же значения, что и оператор $\mathbf{B}$. Поэтому

$$\mathbf{B}S^{k-1} = \tilde{\mathbf{B}}S^{k-1} \subset \tilde{\mathbf{B}}S^{k}.$$

Лемма доказана.

Важное свойство классов M_k $(k = 1, 2, \ldots)$ характеризуется следующим простым утверждением.

Лемма 4.4. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *непрерывное нечетное преобразование сферы* S *в себя. Пусть* $F \in M$. *Тогда* $\mathbf{A}F$ *также принадлежит* M_k.

Доказательство. Пусть $F = \mathbf{B}S^{k-1}$, *где* $\mathbf{B}$ — нечетное преобразование S^{k-1} в S. Преобразование $\mathbf{B}_1 = \mathbf{AB}$ также будет переводить S^{k-1} в S, будет непрерывным и нечетным, следовательно, $\mathbf{A}F = \mathbf{AB}S^{k-1} \in M_k$.

Лемма доказана.

4. След деформации. Пусть множество $F \subset S$ стянуто в S непрерывной деформацией $\mathbf{U}$ в точку $\varphi_0 \in S$. Это значит, что известен непрерывный оператор $\mathbf{U}(t, \varphi)$, *определенный* при $0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi \in F$, принимающий значения из S и удовлетворяющий условиям

$$\mathbf{U}(0, \varphi) \equiv \varphi, \qquad \mathbf{U}(1, \varphi) \equiv \varphi_0 \qquad (\varphi \in F).$$

Множество $\mathbf{U}(F)$ значений оператора $\mathbf{U}(t, \varphi)$ $(0 \leqslant t \leqslant 1$, $\varphi \in F)$ называют следом деформации множества F в точку. Ниже будет использована следующая простая лемма.

Лемма 4.5. *Пусть* $\mathbf{U}(F)$ — *след непрерывной деформации в точку* φ_0 *множества* $F \in M_k$.

Тогда $\mathbf{U}(F) \cup [\mathbf{U}(F)]^* \in M_{k+1}$.

Доказательство. Воспользуемся обозначениями, принятыми при доказательстве леммы 4.3.

Пусть $F = \mathbf{B}S^{k-1}$. Определим на S^k оператор $\tilde{\mathbf{B}}$ равенством

$$\tilde{\mathbf{B}}x = \begin{cases} \mathbf{U}\left(|\xi_{k+1}|, \mathbf{B}\dfrac{x_1}{\|x_1\|}\operatorname{sign}\xi_{k+1}\right)\operatorname{sign}\xi_{k+1} & \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{при} & \|x_1\| \neq 0,\ |\xi_{k+1}| < 1, \\ \varphi_0 \operatorname{sign}\xi_{k+1} \quad \text{при} & \|x_1\| = 0,\ |\xi_{k+1}| = 1, \end{cases}$$

где

$$\operatorname{sign}\xi = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \xi \geqslant 0, \\ -1 & \text{при} \quad \xi < 0. \end{cases}$$

Непрерывность и нечетность оператора $\tilde{\mathbf{B}}$ проверяются без труда.

Ясно, что множество $\tilde{\mathbf{B}}S^k \in M_{k+1}$ совпадает с множеством $\mathbf{U}(F) \cup [\mathbf{U}(F)]^*$.

Лемма доказана.

5. Четные функционалы. Функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ будем называть гладким, если он равномерно дифференцируем на шаре T. Градиент функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ будем обозначать через $\mathbf{\Gamma}$. Напомним, что равномерная дифференцируемость функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ на шаре T означает, что приращение функционала может быть представлено в виде

$$\mathbf{F}(\varphi + h) - \mathbf{F}(\varphi) = (\mathbf{\Gamma}\varphi,\ h) + \omega(\varphi,\ h),$$

где $\frac{1}{\|h\|}\omega(\varphi,\ h)$ стремится к нулю при $\|h\| \to 0$ равномерно относительно $\varphi \in T$.

Будем рассматривать слабо непрерывные гладкие функционалы $\mathbf{F}(\varphi)$, определенные на шаре T и удовлетворяющие дополнительным условиям:

a) функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ четен на S:

$$\mathbf{F}(-\varphi) = \mathbf{F}(\varphi) \qquad (\varphi \in S);$$

b) функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ неотрицателен:

$$\mathbf{F}(\varphi) \geqslant 0 \qquad (\varphi \in T)$$

и принимает нулевое значение только в нуле θ пространства H;

c) если $\mathbf{\Gamma}$ — градиент функционала $\mathbf{F}(\varphi)$, то $\mathbf{\Gamma}\varphi \neq \theta$ при $\varphi \neq \theta$ и $\mathbf{\Gamma}\theta = \theta$.

Воспользуемся обозначениями, введенными в пункте 4 из § 2 настоящей главы (см. стр. 325). Пусть

$$\mathbf{D}\varphi = \mathbf{\Gamma}\varphi - \frac{(\mathbf{\Gamma}\varphi,\ \varphi)}{(\varphi,\ \varphi)}\varphi \qquad (\varphi \in S)$$

и

$$\varkappa(t,\ \varphi) = \frac{\varphi + t\mathbf{a}(\varphi)\,\mathbf{D}\varphi}{\|\varphi + t\mathbf{a}(\varphi)\,\mathbf{D}\varphi\|}\rho,$$

где функционал $\mathbf{a}(\varphi)$ определен равенством (2.12) (стр. 326).

Из условия a) вытекает, что оператор $\mathbf{D}$ нечетен. Поэтому при выполнении условия a) нечетен и оператор $\varkappa(t,\ \varphi)$.

6. Сепарабельность пространства. Во всем параграфе исследуются функционалы $\mathbf{F}(\varphi)$, заданные в гильбертовом пространстве, т. е. в сепарабельном унитарном пространстве. Возникает естественный вопрос о том, справедливы *ли* все полученные результаты для функционалов, определенных в несепарабельных унитарных пространствах. Оказывается, что этот вопрос не имеет смысла, так как в несепарабельных унитарных пространствах нет слабо непрерывных функционалов, удовлетворяющих условию $\mathfrak{b}$). Докажем это.

Пусть H_1 — несепарабельное унитарное пространство, в котором определена ортонормальная система $\{e_\alpha\}$, где индекс α пробегает некоторое несчетное множество. Допустим, что на единичном шаре T_1 пространства H_1 определен слабо непрерывный функционал $\mathbf{F}(\varphi)$, принимающий на единичной сфере S_1 положительные значения. Тогда все числа $\mathbf{F}(e_\alpha)$ будут положительными. Следовательно, можно будет указать такую последовательность индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ $\ldots, \alpha_n, \ldots$, что

$$\mathbf{F}(e_{\alpha_i}) > \varepsilon_0 \qquad (i = 1, 2, \ldots), \tag{4.2}$$

где ε_0 — некоторое положительное число.

Обозначим через H сепарабельное гильбертово пространство, являющееся линейной оболочкой последовательности элементов $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \ldots$ Функционал $\mathbf{F}(\varphi)$, рассматриваемый на единичном шаре T пространства H, также будет слабо непрерывен.

Через L_n $(n = 1, 2, \ldots)$ будем обозначать линейные оболочки конечного числа ортогональных элементов $e_{\alpha_1}, e_{\alpha_2}, \ldots, e_{\alpha_n}$. Через $\mathbf{P}_n$ обозначим операторы ортогонального проектирования на соответствующие подпространства L_n $(n = 1, 2, \ldots)$. В силу леммы 5.2 из главы I (стр. 83) можно указать такое k, что при $n > k$

$$|\mathbf{F}(\mathbf{P}_n e_{\alpha_i}) - \mathbf{F}(e_{\alpha_i})| < \frac{\varepsilon_0}{2} \qquad (i = 1, 2, \ldots).$$

Из этого неравенства и из (4.2) вытекает, что

$$|\mathbf{F}(0)| = |\mathbf{F}(\mathbf{P}_k e_{\alpha_{k+1}})| \geqslant$$
$$\geqslant |\mathbf{F}(e_{\alpha_{k+1}})| - |\mathbf{F}(e_{\alpha_{k+1}}) - \mathbf{F}(\mathbf{P}_k e_{\alpha_{k+1}})| > \frac{\varepsilon_0}{2}.$$

Таким образом, $\mathbf{F}(0) \neq 0$ и условие $\mathfrak{b}$) не выполняется,

7. Критические числа функционала. Рассмотрим функционал

$$\hat{\mathrm{F}}(F) = \inf_{\varphi \in F} \mathrm{F}(\varphi)$$

на множествах класса $M_k (k = 1, 2, \ldots)$.

Верхнюю грань c_k значений функционала $\hat{\mathrm{F}}$ на M_k будем называть критическим числом функционала $\mathrm{F}(\varphi)$. Это определение ниже будет оправдано. Очевидна положительность критических чисел функционала $\mathrm{F}(\varphi)$, принимающего на S только положительные значения.

Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Из определения числа c_{k+1} следует, что найдется такое множество $F_1 \in M_{k+1}$, что

$$\hat{\mathrm{F}}(F_1) > c_{k+1} - \varepsilon.$$

Множество F_1, очевидно, содержит некоторое подмножество $F_0 \in M_k$. Для этого подмножества

$$\hat{\mathrm{F}}(F_0) = \inf_{\varphi \in F_0} \mathrm{F}(\varphi) \geqslant \inf_{\varphi \in F_1} \mathrm{F}(\varphi) = \hat{\mathrm{F}}(F_1) > c_{k+1} - \varepsilon.$$

Значит,

$$c_k = \sup_{F \in M_k} \hat{\mathrm{F}}(F) \geqslant \hat{\mathrm{F}}(F_0) > c_{k+1} - \varepsilon.$$

Так как ε произвольно, то

$$c_k \geqslant c_{k+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots). \tag{4.3}$$

Лемма 4.6. *Справедливо равенство*

$$\lim_{k \to \infty} c_k = 0.$$

Доказательство. Пусть ε — заданное положительное число.

Обозначим через $E_n (n = 1, 2, \ldots)$ такую последовательность вложенных друг в друга подпространств гильбертова пространства H, что

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n} = H.$$

Через P_n $(n = 1, 2, \ldots)$ обозначим операторы ортогонального проектирования на соответствующие подпространства E_n.

Тогда из леммы 5.2 главы I (стр. 83) следует существование такого k_0, что

$$|\mathbf{F}(\varphi) - \mathbf{F}(\mathbf{P}_{k_0}\varphi)| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (\varphi \in T). \tag{4.4}$$

Обозначим через ρ радиус такой шаровой окрестности нуля 0 пространства H, что при $\|\varphi\| \leqslant \rho$

$$\mathbf{F}(\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Тогда в силу (4.4) для всех таких элементов $\varphi \in T$, что $\|\mathbf{P}_{k_0}\varphi\| \leqslant \rho$,

$$\mathbf{F}(\varphi) \leqslant |\mathbf{F}(\varphi) - \mathbf{F}(\mathbf{P}_{k_0}\varphi)| + \mathbf{F}(\mathbf{P}_{k_0}\varphi) < \varepsilon. \tag{4.5}$$

Каждое компактное множество F, состоящее из таких точек φ, что $\mathbf{F}(\varphi) \geqslant \varepsilon$, будет в силу (4.5) при проектировании оператором $\mathbf{P}_{k_0}$ на E_{k_0} попадать в шаровой слой $\rho < \|\varphi\| \leqslant 1$ пространства E_{k_0}. Так как шаровой слой в k_0-мерном пространстве можно представить в виде суммы k_0 замкнутых множеств первого рода, то и само множество F можно представить в виде суммы k_0 множеств первого рода. Значит, множество F будет иметь род, не больший чем k_0.

В силу леммы 4.2 род каждого множества класса M_k $(k > k_0)$ не меньше чем $k_0 + 1$. Значит, на каждом множестве из классов M_k $(k > k_0)$ есть точки, в которых значения функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ меньше чем ε. Следовательно, на множествах из M_k $(k > k_0)$ значения функционала $\hat{\mathbf{F}}$ не больше чем ε, откуда при $k > k_0$

$$c_k \leqslant \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Из леммы 4.6 и из положительности чисел c_k немедленно вытекает

Теорема 4.1. *Слабо непрерывный гладкий функционал, удовлетворяющий условиям* a), b), c), *имеет счетное число различных критических чисел* c_k $(k = 1, 2, \ldots)$.

8. Критические точки функционала. Точку $\varphi \in S$ называют критической точкой функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ на сфере S, если

$$\mathbf{\Gamma}\varphi - (\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi)\varphi = 0,$$

т. е. если φ является собственным вектором градиента $\mathbf{\Gamma}$ функционала $\mathbf{F}(\varphi)$.

Значения функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ в критических точках назовем, по определению, критическими значениями функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ на сфере S.

Определение критических чисел c_k, данное выше, оправдывает

Теорема 4.2. *Пусть* $\mathbf{F}(\varphi)$ — *слабо непрерывный гладкий функционал, удовлетворяющий условиям* a), b), c).

Тогда каждое критическое число c_k ($k=1, 2, \ldots$) *является критическим значением функционала* $\mathbf{F}(\varphi)$ на S,

Доказательство. Пусть $\varkappa = \varkappa(1, \varphi)$ — оператор, определенный на стр. 326. Так как функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ четен на S, то оператор

$$\mathbf{D}\varphi = \mathbf{\Gamma}\varphi - (\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi)\varphi \qquad (\varphi \in S)$$

нечетен на S. Следовательно, нечетен и оператор $\varkappa$. Поэтому оператор $\varkappa$ преобразует множества класса M_k в множества того же класса.

В силу леммы 2.4 из § 2 настоящей главы найдется последовательность элементов $\varphi_n \in S$ ($n=1, 2, \ldots$) таких, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(\varphi_n) = c_k$$

и

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{D}\varphi_n\| = 0.$$

Функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ слабо непрерывен, оператор $\mathbf{\Gamma}$ в силу теоремы 5.1 Э. С. Цитланадзе (стр. 84) сильно непрерывен и шар T слабо компактен. Поэтому можно считать, что последовательность φ_n слабо сходится к некоторому элементу $\varphi_0 \in T$, причем

$$\mathbf{F}(\varphi_0) = c_k, \tag{4.6}$$

а последовательность $\mathbf{\Gamma}\varphi_n$ ($n=1, 2, \ldots$) сильно сходится к элементу $\mathbf{\Gamma}\varphi_0$ (в противном случае мы перешли бы к подпоследовательности).

Из (4.6) и условия b) вытекает, что $\varphi_0 \neq \theta$. Из условия c) тогда следует, что $\mathbf{\Gamma}\varphi_0 \neq \theta$. Следовательно, мы находимся в условиях леммы 2.5 из § 2, из которой вытекает, что $\varphi_0 \in S$ и что

$$\mathbf{\Gamma}\varphi_0 = (\mathbf{\Gamma}\varphi_0, \varphi_0)\varphi_0.$$

Значит, φ_0 — критическая точка функционала $\mathbf{F}(\varphi)$, которой в силу (4.6) соответствует критическое значение c_k.

Теорема доказана.

Из теорем 4.1 и 4.2 следует

Теорема 4.3 (Л. А. Люстерника). *Слабо непрерывный гладкий на шаре T функционал $\mathbf{F}(\varphi)$, удовлетворяющий условиям* a), b) *и* c), *имеет на сфере S не менее чем счетное число различных критических точек, которым соответствуют различные критические значения функционала.*

При доказательстве теорем 4.1—4.3 существенно было использовано условие a). Четность функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ на всем шаре T использована не была. Следует, однако, отметить, что в случае, когда H бесконечномерно, из четности слабо непрерывного функционала на сфере вытекает его четность на всем шаре: $\mathbf{F}(-\varphi)=\mathbf{F}(\varphi)$ при $\varphi \in T$. Это замечание вытекает из того факта, что каждый внутренний элемент шара T является слабым пределом некоторой последовательности элементов сферы S.

9. Множества R_a. Через R_a обозначим лебегово множество тех элементов $\varphi \in S$, в которых $\mathbf{F}(\varphi) > a$. Через $k(a)$ $(0 < a)$ будем обозначать такое натуральное число, что

$$c_{k(a)} > a, \qquad c_{k(a)+1} \leqslant a.$$

Пусть

$$m = \sup_{\varphi \in S} \mathbf{F}(\varphi).$$

Через N_a $(0 < a < m)$ обозначим класс всех компактных множеств, полученных непрерывной деформацией в R_a множеств из $M_{k(a)}$. Естественно, что множества класса N_a состоят из точек, принадлежащих множеству R_a.

Классы N_a непусты, так как из самого определения числа $k(a)$ вытекает, что в классе $M_{k(a)}$ найдется множество F такое, что $\hat{\mathbf{F}}(F) = \min_{\varphi \in F} \mathbf{F}(\varphi) > a$. Это множество будет принадлежать классу N_a.

Лемма 4.7. *Множества класса N_a нестягиваемы в точку в R_a.*

Доказательство. Пусть множество $F_1 \in N_a$ получено непрерывной деформацией в R_a из множества $F \in M_{k(a)}$. Если множество F_1 в R_a стягиваемо в точку, то F также стягиваемо в точку. Поэтому достаточно показать, что в R_a нестягиваемы в точку все множества $F \in M_{k(a)}$, $F \subset R_a$.

Допустим, что множество $F \in M_{k(a)}$ стягиваемо в R_a в точку при помощи непрерывной деформации $\mathbf{U}$. Тогда $\mathbf{U}(F) \subset R_a$, где $\mathbf{U}(F)$ — след деформации $\mathbf{U}$. Из четности функционала $\mathbf{F}$ вытекает, что и $[\mathbf{U}(F)]^* \subset R_a$, т. е.

$$F_0 = \mathbf{U}(F) \cup [\mathbf{U}(F)]^* \subset R_a. \tag{4.7}$$

В силу леммы 4.5 $F_0 \in M_{k(a)+1}$. Значит,

$$\hat{\mathbf{F}}(F_0) = \min_{\varphi \in F_0} \mathbf{F}(\varphi) \leqslant c_{k(a)+1}.$$

Следовательно, на F_0 (а значит, и на $\mathbf{U}(F)$) есть точки φ_0, в которых $\mathbf{F}(\varphi_0) \leqslant c_{k(a)+1}$. Так как $c_{k(a)+1} \leqslant a$, то $\varphi_0 \overline{\in} R_a$ и F_0 не лежит полностью в R_a. Последнее утверждение противоречит (4.7).

Значит, F нестягиваемо в R_a.

Лемма доказана.

Введем в рассмотрение функцию $d(a)$ равенством

$$d(a) = \sup_{F \in N_a} \hat{\mathbf{F}}(F).$$

Непосредственно из определения следует, что

$$d(a) > a > 0 \qquad (0 < a < m). \tag{4.8}$$

Теорема 4.4. *Каждое число $d(a)$ является критическим значением функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ на S.*

Доказательство. Рассмотрим на S оператор $\varkappa(t, \varphi)$, определенный на стр. 326:

$$\varkappa(t, \varphi) = \frac{\varphi + t\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi}{\|\varphi + t\mathbf{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi\|} \qquad (\varphi \in S,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Без труда проверяется, что этот оператор непрерывен по совокупности переменных. В силу леммы 2.3 (стр. 326) $\mathbf{F}[\varkappa(t, \varphi)]$ не убывает при возрастании t. Поэтому $\varkappa(t, \varphi) \in R_a$ при $\varphi \in R_a$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Так как

$$\varkappa(0, \varphi) \equiv \varphi, \quad \varkappa(1, \varphi) \equiv \varkappa\varphi \qquad (\varphi \in R_a),$$

то $\varkappa(t, \varphi)$ осуществляет непрерывную деформацию в R_a каждого множества $F \subset R_a$ в множество $\varkappa F \subset R_a$. Поэтому, если $F \in N_a$, то и $\varkappa F \in N_a$.

В силу леммы 2.4 (стр. 327) найдется такая слабо сходящаяся к некоторому элементу φ_0 последовательность элементов $\varphi_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{F}(\varphi_n) = d(a)$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \| \mathbf{D}\varphi_n \| = 0.$$

Последовательность $\mathbf{\Gamma}\varphi_n$ сильно сходится, причем в силу леммы 4.8 (которую мы доказываем ниже) к отличному от θ элементу. Из леммы 2.5 (стр. 328) тогда вытекает, что $\varphi_0 \in S$, причем

$$\mathrm{F}(\varphi_0) = d(a)$$

и

$$\mathbf{\Gamma}\varphi_0 = (\mathbf{\Gamma}\varphi_0, \varphi_0)\varphi_0.$$

Точка φ_0, таким образом, является критической точкой функционала $\mathrm{F}(\varphi)$ на S, которой соответствует критическое значение $d(a)$.

Теорема доказана.

Лемма 4.8. *Функция* $\gamma(a)$, *определенная равенством*

$$\gamma(a) = \inf_{\varphi \in R_a} \| \mathbf{\Gamma}\varphi \|,$$

при $0 < a < m$ *принимает положительные значения.*

Доказательство. В предположении противного существует последовательность таких точек $\varphi_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$, что

$$\mathrm{F}(\varphi_n) \geqslant a, \quad \lim_{n \to \infty} \| \mathbf{\Gamma}\varphi_n \| = 0. \tag{4.9}$$

Без ограничения общности можно считать, что последовательность слабо сходится к некоторому элементу $\varphi_0 \in T$. Тогда из слабой непрерывности функционала $\mathrm{F}(\varphi)$ вытекает, что $\mathrm{F}(\varphi_0) \geqslant a$, откуда в силу условия b) следует, что $\varphi_0 \neq \theta$. Из условия c) вытекает тогда, что $\mathbf{\Gamma}\varphi_0 \neq \theta$. Последнее неравенство противоречит (4.9), так как оператор $\mathbf{\Gamma}$ в силу теоремы Э. С. Цитланадзе (стр. 85) сильно непрерывен и преобразует слабо сходящуюся к φ_0 последовательность точек φ_n в сильно сходящуюся к $\mathbf{\Gamma}\varphi_0$ последовательность $\mathbf{\Gamma}\varphi_n$.

Лемма доказана.

10. Существование различных значений $d(a)$.

Теорема 4.5. *Справедливо равенство*

$$\lim_{a\to 0} d(a) = 0.$$

Доказательство. Пусть задано число $\varepsilon > 0$. Обозначим через h_0 такой единичный элемент пространства H, что

$$\mathbf{F}(th_0) < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1). \tag{4.10}$$

Существование элемента h_0 доказывается просто. Если бы такого элемента не существовало, то можно было бы построить ортонормированную последовательность h_i $(i=1, 2, \ldots)$ и числовую последовательность t_i, $-1 \leqslant t_i \leqslant 1$ $(i=1, 2, \ldots)$ такие, что

$$\mathbf{F}(t_i h_i) \geqslant \frac{\varepsilon}{4} \qquad (i = 1,\ 2,\ \ldots).$$

Так как последовательность $t_i h_i$ $(i = 1,\ 2,\ \ldots)$ слабо сходится к 0, из последнего неравенства и слабой непрерывности функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ вытекало бы, что $\mathbf{F}(0) \geqslant \frac{\varepsilon}{4}$, что противоречит ограничениям a), b), c), наложенным на функционал $\mathbf{F}(\varphi)$.

Без ограничения общности можно считать, что h_0 лежит в одном из подпространств E_n, введенных в рассмотрение на стр. 364 при доказательстве леммы 4.6 (мы сохраняем ниже эти обозначения).

В силу леммы 5.2 (стр. 83) можно указать такой номер n_0, что

$$|\mathbf{F}(\mathbf{P}_{n_0}\psi) - \mathbf{F}(\psi)| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (\psi \in T), \tag{4.11}$$

причем $h_0 \in E_{n_0}$. Через S_0 ниже будем обозначать пересечение $E_{n_0} \cap S$.

Из (4.11) немедленно вытекает, что

$$\|\mathbf{P}_{n_0}\varphi\| \neq 0 \qquad (\varphi \in R_\varepsilon),$$

так как

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}_{n_0}\varphi) \geqslant \mathbf{F}(\varphi) - |\mathbf{F}(\varphi) - \mathbf{F}(\mathbf{P}_{n_0}\varphi)| > \frac{3}{4}\varepsilon \qquad (\varphi \in R_\varepsilon). \tag{4.12}$$

Рассмотрим множество Q элементов $\psi \in S$ вида

$$\psi = \frac{(1-t)\varphi + t\mathbf{P}_{n_0}\varphi}{\|(1-t)\varphi + t\mathbf{P}_{n_0}\varphi\|} \qquad (\varphi \in R_\varepsilon,\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Пусть

$$\delta = \frac{1}{2}\min\{\min_{\varphi \in S_0} \mathbf{F}(\varphi),\ \inf_{\psi \in Q} \mathbf{F}(\psi)\}.$$

Покажем, что $\delta > 0$.

Так как $\min\limits_{\varphi \in S_0} \mathbf{F}(\varphi)$ — это минимум положительной функции на конечномерной сфере, то достаточно показать, что

$$\inf_{\psi \in Q} \mathbf{F}(\psi) > 0.$$

В предположении противного существуют последовательности элементов $\varphi_n \in R_\varepsilon$ и чисел $t_n \in [0,\ 1]$ $(n = 1,\ 2,\ \ldots)$ такие, что

$$\mathbf{F}\left\{\frac{(1-t_n)\varphi_n + t_n\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n}{\|(1-t_n)\varphi_n + t_n\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n\|}\right\} < \frac{1}{n} \qquad (n = 1,\ 2,\ \ldots). \tag{4.13}$$

Можно считать, что последовательность элементов

$$\psi_n = \frac{(1-t_n)\varphi_n + t_n\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n}{\|(1-t_n)\varphi_n + t_n\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n\|} \qquad (n=1,\ 2,\ \ldots)$$

слабо сходится (так как можно перейти к подпоследовательности) к некоторому элементу ψ_0. Из (4.13) и из слабой непрерывности функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ вытекает, что $\mathbf{F}(\psi_0) = 0$ и, следовательно, $\psi_0 = 0$. Раз последовательность ψ_n сходится слабо к 0, то последовательность $\mathbf{P}_{n_0}\psi_n$ сходится к 0 сильно, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} \|\mathbf{P}_{n_0}\psi_n\| = \lim_{n\to\infty} \frac{\|\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n\|}{\|(1-t_n)\varphi_n + t_n\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n\|} = 0. \tag{4.14}$$

Так как $\|(1-t_n)\varphi_n + t_n\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n\| \leqslant 1$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, то из (4.14) следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n\| = 0$. Из непрерывности $\mathbf{F}(\varphi)$ следует:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{F}(\mathbf{P}_{n_0}\varphi_n) = 0,$$

что противоречит (4.12).

Покажем, что $d(a) \leqslant \varepsilon$ при $a < \delta$. Этим теорема будет доказана.

Если $d(a) > \varepsilon$, то в N_a есть по крайней мере одно множество $F \subset R_\varepsilon$. Это множество в силу леммы 4.7 будет нестягиваемо в точку в R_ε и, тем более, в R_δ. Поэтому неравенство $d(a) \leqslant \varepsilon$ будет доказано, если мы покажем, что каждое компактное множество $F \subset R_\varepsilon$ стягиваемо в R_δ в точку.

Пусть $F \subset R_\varepsilon$.

Определим вначале непрерывную деформацию $\mathbf{U}(t, \varphi)$ множества F и некоторое множество F_1 формулой

$$\mathbf{U}(t, \varphi) = \frac{(1-t)\varphi + t\mathbf{P}_{n_0}\varphi}{\|(1-t)\varphi + t\mathbf{P}_{n_0}\varphi\|} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ \varphi \in F),$$

в силу которой

$$\mathbf{U}(0, F) \equiv F, \qquad \mathbf{U}(1, F) = F_1.$$

Непрерывность оператор-функции $\mathbf{U}(t, \varphi)$ очевидна. Число δ было так определено, что

$$\mathbf{F}[\mathbf{U}(t, \varphi)] > \delta \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1,\ \varphi \in F),$$

т. е. F_1 получено непрерывной деформацией в R_δ из множества F. Если будет доказано, что F_1 в R_δ стягиваемо в точку, то этим будет показано, что и F стягиваемо в R_δ в точку.

Множество F_1 состоит из элементов вида

$$\chi = \frac{\mathbf{P}_{n_0}\varphi}{\|\mathbf{P}_{n_0}\varphi\|} \qquad (\varphi \in E).$$

Значит,

$$F_1 \subset S_0 = E_{n_0} \cap S.$$

Покажем, что $h_0 \overline{\in} F_1$. Действительно, если $h_0 \in F_1$, то найдется такой элемент $\varphi \in F$, что

$$\mathbf{P}_{n_0}\varphi = \|\mathbf{P}_{n_0}\varphi\| h_0.$$

Из (4.10) тогда следует, что

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}_{n_0}\varphi) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Последнее неравенство противоречит (4.12).

Таким образом, множество E_1 не покрывает полностью онечномерную сферу S_0. Тогда, как известно, F_1 непреывной деформацией на S_0 можно стянуть в точку. Так ак $S_0 \subset R_\delta$, то это значит, что F_1 стягиваемо в точку в R_δ. Теорема доказана.

Из теоремы 4.5 и из положительности чисел $d(a)$ $0 < a < m$) немедленно вытекает, что есть бесконечное оличество различных значений функций $d(a)$.

Так как каждое значение функции $d(a)$ $(0 < a < m)$ в силу теоремы 4.4 является критическим значением функционала $\mathbf{F}(\varphi)$ на сфере S, то мы приходим снова к утверждению теоремы Л. А. Люстерника. Было бы интересно исследовать, в каком соотношении находятся критические значения c_k и значения функции $d(a)$ (которых, повидимому, тоже только счетное число).

Значения функции $d(a)$ — это те критические значения функционала $\mathbf{F}(\varphi)$, устойчивость которых будет доказана.

11. Норма функционала. Через $\mathbf{F}_0(\varphi)$ ниже обозначается фиксированный гладкий слабо непрерывный на T функционал, удовлетворяющий условиям a), b), c). Через c_k $(k = 1, 2, \ldots)$ обозначаются критические числа функционала $\mathbf{F}_0(\varphi)$, определенные в пункте 7 настоящего параграфа.

Будет исследован вопрос о существовании критических значений возмущенных функционалов вида $\mathbf{F}_0(\varphi) + \mathbf{G}(\varphi)$, где возмущение $\mathbf{G}(\varphi)$ — гладкий функционал, малый в некотором смысле. Для характеристики малости функционала $\mathbf{G}(\varphi)$ введем в рассмотрение его норму $\|\mathbf{G}(\varphi)\|$ равенством

$$\|\mathbf{G}(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in S} |\mathbf{G}(\varphi)| + \sup_{\varphi \in S} \|\boldsymbol{\Gamma}_1\varphi\|,$$

где $\boldsymbol{\Gamma}_1$ — градиент функционала $\mathbf{G}(\varphi)$. Очевидно, гладкие функционалы имеют конечную норму.

Отметим, что $\|\mathbf{G}(\varphi)\|$ может быть определена и другим эквивалентным способом:

$$\|\mathbf{G}(\varphi)\| = \sup_{\varphi \in T} |\mathbf{G}(\varphi)| + \sup_{\varphi \in T} \|\boldsymbol{\Gamma}_1\varphi\|, \tag{4.15}$$

так как

$$\sup_{\varphi \in T} |\mathbf{G}(\varphi)| = \sup_{\varphi \in S} |\mathbf{G}(\varphi)|$$

и

$$\sup_{\varphi \in T} \|\boldsymbol{\Gamma}_1\varphi\| = \sup_{\varphi \in S} \|\boldsymbol{\Gamma}_1\varphi\|,$$

ибо (см. примечание на стр. 313) для функционалов $|\mathbf{G}(\varphi)|$, $\|\mathbf{\Gamma}_1\varphi\|$, как и для всех слабо непрерывных функционалов в бесконечномерном пространстве, справедлив принцип максимума модуля: верхняя грань абсолютных значений слабо непрерывного функционала на шаре T равна верхней границе абсолютных значений этого функционала на сфере S, ограничивающей шар T.

Справедливость сформулированного принципа максимума модуля вытекает из того, что для каждой точки $\varphi \in T$ можно указать слабо сходящуюся к φ последовательность $\varphi_n \in S$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

12. Устойчивость заданного критического значения.

Теорема 4.6. *Каждое фиксированное критическое значение $d(a)$, $0 < a < m$, функционала $\mathbf{F}_0(\varphi)$ устойчиво, т. е. каждому $\varepsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что при*

$$\|\mathbf{G}(\varphi)\| < \delta$$

функционал

$$\mathbf{F}(\varphi) = \mathbf{F}_0(\varphi) + \mathbf{G}(\varphi)$$

имеет на S по крайней мере одно критическое значение c, удовлетворяющее условию

$$|c - d(a)| \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. Число $\varepsilon > 0$ будем считать заданным. Без ограничения общности можно предполагать, что оно удовлетворяет неравенству

$$\varepsilon < d(a) - a.$$

Пусть положительное число δ удовлетворяет трем неравенствам:

$$d(a) - 3\delta > a, \tag{4.16}$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2}, \tag{4.17}$$

$$\delta < \gamma(a), \tag{4.18}$$

где $\gamma(a)$ — положительное число, определенное в лемме 4.8). Первое из этих неравенств непротиворечиво в силу (4.8).

Пусть $\|\mathbf{G}(\varphi)\| < \delta$. В силу (4.15) это значит, что

$$\sup_{\varphi \in T} |\mathbf{G}(\varphi)| < \delta \tag{4.19}$$

и

$$\sup_{\varphi \in T} \|\mathbf{\Gamma}_1 \varphi\| < \delta. \tag{4.20}$$

Градиент функционала $\mathbf{F}(\varphi) = \mathbf{F}_0(\varphi) + \mathbf{G}(\varphi)$ обозначим через $\mathbf{\Gamma}$. Построим (см. стр. 325) по оператору $\mathbf{\Gamma}$ операторы

$$\mathbf{D}\varphi = \mathbf{\Gamma}\varphi - (\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi)\varphi \qquad (\varphi \in S)$$

$$\varkappa\varphi = \frac{\varphi + \mathrm{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi}{\|\varphi + \mathrm{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi\|} \qquad (\varphi \in S).$$

Выберем в классе N_a (построенном по четному функционалу $\mathbf{F}_0(\varphi)$) такое множество F_0, что

$$\hat{\mathbf{F}}_0(F_0) > d(a) - \delta. \tag{4.21}$$

Обозначим через N последовательность множеств вида

$$F_n = \varkappa^n F_0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Рассмотрим оператор

$$\varkappa(t, \varphi) = \frac{\varphi + t\mathrm{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi}{\|\varphi + t\mathrm{a}(\varphi)\mathbf{D}\varphi\|} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1, \ \varphi \in S).$$

Как уже неоднократно отмечалось, функции $\mathbf{F}[\varkappa(t, \varphi)]$ при фиксированных φ не убывают при возрастании t.

Легко видеть, что

$$\varkappa(1, F_n) = \varkappa F_n = F_{n+1} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Поэтому

$$\hat{\mathbf{F}}(F_{n+1}) = \min_{\varphi \in F_n} \mathbf{F}(\varkappa\varphi) \geqslant \min_{\varphi \in F_n} \mathbf{F}(\varphi) = \hat{\mathbf{F}}(F_n) \geqslant \ldots \hat{\mathbf{F}}(F_0)$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots)$$

и в силу (4.21)

$$\mathbf{F}[\varkappa(t, \varphi)] \geqslant \hat{\mathbf{F}}(F_0) \geqslant \min_{\varphi \in F_0} \mathbf{F}_0(\varphi) - \sup_{\varphi \in T} |\mathbf{G}(\varphi)| \geqslant$$
$$\geqslant d(a) - 2\delta \tag{4.22}$$
$$(\varphi \in F_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

откуда в силу (4.16) и (4.19)

$$\mathbf{F}_0[\varkappa(t, \varphi)] \geqslant \mathbf{F}[\varkappa(t, \varphi)] - |\mathbf{G}(\varphi)| \geqslant d(a) - 3\delta > a \tag{4.23}$$
$$(\varphi \in F_n;\ n = 0, 1, 2, \ldots;\ 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

Оператор $\varkappa(t, \varphi)$ осуществляет непрерывную деформацию множеств F_n в соответствующие множества F_{n+1} ($n = 0, 1, 2, \ldots$). При этом в силу (4.23) деформация происходит в множестве R_a тех точек $\varphi \in S$, в которых $\mathrm{F}_0(\varphi) > a$. Следовательно, все множества F_n принадлежат классу N_a. Значит,

$$\hat{\mathrm{F}}_0(F_n) = \min_{\varphi \in F_n} \mathrm{F}_0(\varphi) \leqslant d(a) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

откуда в силу (4.19) и (4.17)

$$\hat{\mathrm{F}}(F_n) = \min_{\varphi \in F_n} \{\mathrm{F}_0(\varphi) + \mathbf{G}(\varphi)\} < d(a) + \varepsilon \tag{4.24}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots).$$

С другой стороны, из (4.22) и (4.17) вытекает, что

$$\hat{\mathrm{F}}(F_n) > d(a) - 2\delta > d(a) - \varepsilon. \tag{4.25}$$

Из самого определения N вытекает, что оператор $\varkappa$ преобразует множества класса N в множества этого же класса. Следовательно, можно применить лемму 2.4 из § 2 (стр. 327). В силу этой леммы найдется такая слабо сходящаяся последовательность элементов $\varphi_n \in S$ ($n = 1, 2, \ldots$), что

$$\lim_{n \to \infty} \mathrm{F}(\varphi_n) = c \tag{4.26}$$

и

$$\lim_{n \to \infty} \|\mathbf{D}\varphi_n\| = 0,$$

где

$$c = \sup_{n=1, 2, \ldots} \hat{\mathrm{F}}(F_n) = \sup_{n=1, 2, \ldots} \{\min_{\varphi \in F_n} \mathrm{F}(\varphi)\}.$$

В силу (4.24) и (4.25)

$$d(a) - \varepsilon < c \leqslant d(a) + \varepsilon.$$

Покажем, пользуясь леммой 2.5, что c является критическим значением функционала $\mathrm{F}(\varphi)$. Этим доказательство теоремы будет завершено.

Для применения леммы 2.5 из § 2 (стр. 328) нужно показать, что сильно сходящаяся последовательность $\mathbf{\Gamma}\varphi_n$ (так как оператор $\mathbf{\Gamma}$ сильно непрерывен) имеет своим пределом элемент, отличный от θ. Для этого достаточно показать, что из (4.26) вытекает неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty} \|\mathbf{\Gamma}\varphi_n\| > 0.$$

Мы докажем более сильное неравенство

$$\inf \|\mathbf{\Gamma}\varphi\| > 0, \tag{4.27}$$

где infimum распространен на все такие $\varphi \in S$, что $\mathbf{F}_0(\varphi) \geqslant a$.

Действительно, при $\mathbf{F}_0(\varphi) \geqslant a$ в силу (4.20) и леммы 4.8

$$\|\mathbf{\Gamma}\varphi\| \geqslant \|\mathbf{\Gamma}_0\varphi\| - \|\mathbf{\Gamma}_1\varphi\| \geqslant \gamma(a) - \delta,$$

откуда в силу (4.18) вытекает (4.27).

Теорема доказана.

13. Основная теорема.

Теорема 4.7. *Пусть* $\mathbf{F}_0(\varphi)$ — *гладкий слабо непрерывный на* T *функционал, удовлетворяющий условиям* a), в), с).

Тогда каждому натуральному n *отвечает такое* $\delta > 0$, *что каждый функционал вида*

$$\mathbf{F}(\varphi) = \mathbf{F}_0(\varphi) + \mathbf{G}(\varphi)$$

имеет на S *не менее* n *критических значений, если гладкий слабо непрерывный функционал* $\mathbf{G}(\varphi)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|\mathbf{G}(\varphi)\| < \delta.$$

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — такие положительные числа, что $d(a_1) < d(a_2) < \ldots < d(a_n)$. Выберем число ε так, чтобы сегменты

$$\Delta_i = [d(a_i) - \varepsilon,\ d(a_i) + \varepsilon] \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

между собой не пересекались.

По числу ε в силу теоремы 4.6 можно выбрать для каждого $d(a_i)$ такое число δ_i, что при $\|\mathbf{G}(\varphi)\| < \delta_i$ функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ имеет по крайней мере одно критическое число c_i в сегменте Δ_i. Пусть

$$\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n\}.$$

Тогда при $\|\mathbf{G}(\varphi)\| < \delta$ в каждом сегменте Δ_i $(i = 1, \ldots, n)$ будет критическое число функционала $\mathbf{F}(\varphi)$.

Теорема доказана.

Возникает естественный вопрос о том, нельзя ли указать в условиях теоремы 4.7 такое δ, что при $\|\mathbf{G}(\varphi)\| < \delta$ возмущенный функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ будет иметь обязательно бесконечное число различных критических значений. Отрицательный ответ на этот вопрос вытекает из рассмотрения квадратичного слабо непрерывного функционала

$$\mathbf{F}_0(\varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\varphi, e_n)^2 \qquad (\varphi \in T),$$

где e_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — ортонормированная система. Числа $\frac{1}{n^2}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ — критические значения функционала $\mathbf{F}_0(\varphi)$. Каково бы ни было $\delta > 0$, можно указать такое k, что функционал

$$\mathbf{G}(\varphi) = -\sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} (\varphi, e_n)^2$$

имеет норму, меньшую чем δ. Возмущенный функционал

$$\mathbf{F}(\varphi) = \mathbf{F}_0(\varphi) + \mathbf{G}(\varphi) = \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{n^2} (\varphi, e_n)^2$$

будет вырожденным квадратичным функционалом и будет иметь только конечное число критических значений.

14. Замечания. А. В построениях параграфа критические числа можно было бы заменить критическими числами, определяемыми при помощи минимаксимальных соображений на классах множеств фиксированного рода (на множествах определенной категории при переходе к проективному пространству), если бы получила положительное решение следующая проблема.

Доказать, что род каждого компактного множества F $(F = F^*)$ меньше рода множества $\mathbf{U}(F) \cup [\mathbf{U}(F)]^*$, где $\mathbf{U}(F)$ — след непрерывной деформации на S множества F в точку.

Для читателей, знакомых с теорией категорий Л. А. Люстерника — Л. Г. Шнирельмана, сформулируем указанную проблему в других терминах.

Пусть F' — множество категории n проективного (конечномерного или бесконечномерного) пространства Π, *полученного склеиванием симметричных относительно центра точек сферы* S. *Через* F *обозначим множество всех таких точек сферы* S, *которые являются прообразом точек из* F'. *Пусть* $F_1 = \mathrm{U}(F)$ — *след непрерывной деформации в* S *множества* F *в точку. Через* F_1' *обозначим образ множества* F_1 *в проективном пространстве* П. *Доказать, что* $\mathrm{kat}\, F_1' > \mathrm{kat}\, F'$.

Б. Все проведенные выше рассуждения применимы и к конечномерному случаю. Однако о количестве критических значений функционала, являющихся значениями функции $d(a)$, ничего сказать не удается. Могут быть случаи, когда такое значение только одно (например, функционал, принимающий на S одно значение).

В конечномерном случае поведение функционалов внутри шара не играет никакой роли. Несущественна также положительность значений на сфере возмущаемого функционала.

В. Построения параграфа можно перенести на случай пространств L^p $(p > 1)$ и на более общие классы банаховых пространств с базисом.

Г. В качестве класса N_a можно было рассматривать совокупность всех нестягиваемых в R_a множеств.

15. Нечетные операторы Гаммерштейна. В качестве примера приложения доказанных выше теорем можно рассмотреть оператор Гаммерштейна $\mathbf{HH^*f}$ с положительно определенным ядром. Как было выяснено в предыдущих параграфах, функции $\mathbf{H}\varphi$, где φ — собственные функции градиента $\mathbf{H^*fH}$ некоторого слабо непрерывного функционала $\mathbf{FH}$, будут собственными функциями оператора $\mathbf{HH^*f}$.

Для того чтобы применить полученные выше теоремы о четных функционалах, достаточно, чтобы функционал

$$\mathbf{F}(\mathbf{H}\varphi) = \int\limits_G ds \int\limits_0^{\mathbf{H}\varphi(s)} f(s,\ u)\, du$$

был четным, неотрицательным и принимал значение нуль только в θ и чтобы оператор $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{H^*fH}$ удовлетворял условию $\|\mathbf{\Gamma}\varphi\| \neq 0$ при $\varphi \neq \theta$.

Все эти условия, очевидно, выполняются в случае, если

$$f(s,\ -u) = -f(s,\ u) \qquad (s \in G,\ -\infty < u < \infty) \tag{4.28}$$

и

$$f(s, u) \cdot u > 0 \qquad (s \in G, \ |u| > 0). \qquad (4.29)$$

Таким образом, *в условиях теорем существования собственных функций у операторов Гаммерштейна с положительно определенными ядрами собственные функции образуют не менее чем счетное множество на каждом эллипсоиде*

$$\|\mathbf{H}^{-1}\varphi\| = c,$$

если выполнены дополнительно условия (4.28) *и* (4.29).

Возможности применения теоремы Л. А. Люстерника — В. И. Соболева к задаче о собственных функциях оператора Гаммерштейна и условия (4.28) и (4.29) были впервые указаны В. И. Соболевым [63б].

16. Критические точки на гиперболоиде. Воспользуемся обозначениями пункта 3 из § 1 настоящей главы.

Так как гиперболоид $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c$ $(c > 0)$ содержит конечномерную сферу, лежащую в n-мерном пространстве H_1, то род гиперболоида не меньше n. Можно показать, что род равен n.

Применив метод, развитый в настоящем параграфе, можно показать [29к], [32], что любой слабо непрерывный равномерно дифференцируемый в каждом шаре функционал $\mathbf{F}(\varphi)$ имеет на каждом гиперболоиде $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c$ $(c > 0)$ не менее $2n$ критических точек, если он четен, его градиент $\mathbf{\Gamma}$ удовлетворяет условию

$$(\mathbf{\Gamma}\varphi, \varphi) > 0 \quad \text{при} \quad (\mathbf{J}\varphi, \varphi) > 0$$

и если

$$\lim_{\|\varphi\| \to \infty, \ (\mathbf{J}\varphi, \varphi) > 0} \mathbf{F}(\varphi) = +\infty.$$

Утверждение сформулированной теоремы эквивалентно существованию на гиперболоиде $(\mathbf{J}\varphi, \varphi) = c$ $(c > 0)$ не менее $2n$ геометрически различных собственных векторов оператора $\mathbf{J\Gamma}$.

Ряд теорем о критических значениях четных функционалов на гиперболоидах доказан Ю. Г. Борисовичем (см. сноску на стр. 348).

17. Связь с задачей о точках бифуркации. Читатель братил, повидимому, внимание на тот факт, что построения настоящего параграфа близки к построениям, которые проводились в § 2 при доказательстве законности линеаризации в задаче о точках бифуркации потенциальных операторов.

Близкие рассуждения позволяют доказывать и теоремы о точках бифуркации для некоторых непотенциальных операторов. Приведем без доказательства две теоремы из [32].

Теорема 4.8. *Пусть оператор* $\mathbf{\Gamma}$ ($\mathbf{\Gamma}\theta = \theta$) — *нелинейный вполне непрерывный оператор, являющийся градиентом слабо непрерывного функционала* $\mathbf{F}(\varphi)$ ($\mathbf{F}(\theta) = 0$), *определенного в гильбертовом пространстве* H.

Пусть оператор $\mathbf{\Gamma}$ *имеет в нуле* θ *пространства* H *производную Фреше* $\mathbf{B}$, *являющуюся самосопряженным положительно определенным оператором. Пусть* $\mathbf{J}$ — *унитарный оператор, коммутирующий с* $\mathbf{B}$ *и такой, что оператор* $\mathbf{JB}$ *имеет конечное число положительных собственных чисел.*

Тогда наименьшее положительное собственное число оператора $\mathbf{JB}$ *будет точкой бифуркации нелинейного оператора* $\mathbf{J\Gamma}$.

Теорема 4.9. *Если в условиях теоремы* 4.8 *функционал* $\mathbf{F}(\varphi)$ *равномерно дифференцируем в некоторой окрестности точки* θ, *то все положительные собственные числа оператора* $\mathbf{JB}$ *будут точками бифуркации оператора* $\mathbf{J\Gamma}$.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Александров П. С. Комбинаторная топология. Гостехиздат, 1947.
2. Александров П. С. и Хопф. Topologie. Berlin, Springer, 1935.
3. Альтман (Altman M.). On linear functional equations in locally convex linear topological spaces. Studia Math. **13** (1953).
4. Ахиезер Н. И. и Глазман И. М. Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Гостехиздат, 1950.
5. Банах С. а) Курс функціонального аналізу. Київ, 1948;

   б) Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs application aux équations intégrales. Fund. Math. **3** (1922).
6. Бертл Р. (Bartl Robert G.). Singular points of functional équations. Trans. Amer. Math. Soc. **75**, № 2 (1953).
7. Биркгоф и Келлог (Birkhoff and Kellog). Inwariant points in function space. Trans. Amer. Math. Soc. **23** (1922).
8. Бокштейн М. Ф. Теоремы существования и единственности решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Ученые зап. МГУ **15** (1939), 3—72.
9. Борсук К. (Borsuk K.). Drei Sätze über die n-dimensionale euklidische Sphär. Fund. Math. **20** (1933).
10. Вайнберг М. М. а) Существование собственных функций у одного класса нелинейных интегральных уравнений. ДАН **46**, № 2 (1945).

    б) Об одной теореме Гаммерштейна для нелинейных интегральных уравнений. Ученые зап. МГУ, вып. 100 (1946).

    в) О непрерывности некоторых операторов специального вида. ДАН **73**, № 2 (1950).

    г) О собственных элементах одного класса нелинейных операторов. ДАН **75**, № 5 (1950).

    д) К вариационной теории собственных значений нелинейных интегральных уравнений. ДАН **80**, № 3 (1950).

    е) Теоремы существования собственных значений для одного класса нелинейных интегральных уравнений. Ученые зап. Моск. обл. пединститута **15**, вып. 1 (1950).

    ж) Теоремы существования для систем нелинейных интегральных уравнений. Ученые зап. Моск. обл. пединститута **18**, Труды кафедр физмата, вып. 2 (1951).

    з) Существование собственных функций у нелинейных интегральных уравнений с непозитивными ядрами. ДАН **78**, № 6 (1951).

и) О слабой непрерывности функционалов и их градиентов. ДАН **78**, № 5 (1951).

к) О неподвижных направлениях некоторых вполне непрерывных операторов. ДАН **83**, № 6 (1952).

л) К вопросу о вариационной теории собственных значений для нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **30** 1 (1952).

м) О неподвижных направлениях произведения некоторых операторов. ДАН **85**, № 2 (1952).

н) О некоторых вариационных принципах в теории операторных уравнений. УМН **7**, вып. 2 (1952).

о) Некоторые вопросы дифференциального исчисления в линейных пространствах. УМН **7**, вып. 4 (1952).

п) Существование собственных функций у нелинейных интегральных операторов с непозитивными ядрами и у произведения самосопряженного и потенциального операторов. Матем. сб. **32**, 3 (1953).

р) О структуре одного оператора. ДАН **92**, № 2 (1953).

с) О гиперболоидах и условном экстремуме некоторых функционалов в гильбертовом пространстве. УМН **9**, вып. 2 (1954).

т) Вариационная теория собственных функций нелинейных интегральных и других операторов. Труды Моск. матем. о-ва **3** (1954).

у) Потенциальные операторы и вариационная теория нелинейных операторных уравнений. Диссертация, М., МГУ, 1954. Автореферат, УМН **10**, вып. 3 (1955).

11. Гаврин М. К. Аналитические методы исследования нелинейных функциональных преобразований. Ученые зап. ЛГУ сер. матем. **19** (1950).
12. Галеркин Б. Г. Стержни и пластинки. Вестник инженеров **19** (1915).
13. Гаммерштейн А. (Hammerstein A.). Nichtlineare Integralgleichungen nebst Anwendungen. Acta Mathematica **54** (1929).
14. Гантмахер Ф. и Крейн М. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. Гостехиздат, 1950.
15. Гильберт Д. и Курант Р. Методы математической физики I, М., 1952.
16. Гильдебрандт и Гревс (Hildebrandt T. H. et Graves L. M.). Implicit functions and their differentials in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1927).
17. Голомб М. (Golomb M.). Zur Theorie der nichtlinearen Integralgleichungen, Integralgleichungssysteme und allgemeinen Funktionalgleichungen. Math. Zeitschrift **39** (1934).
18. Гревс Л. (Graves L. M.). Implicit functions and differential equations in general analysis. Trans. Amer. Math. Soc. **29** (1929).
19. Гусейнов А. И. Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных сингулярных уравнений. Матем. сб. **20**, № 2 (1947).

20. Дольф С. (Dolph C. L.). Nonlinear integral equations of the Hammerstein type. Trans. Amer. Math. Soc. **60**, № 2 (1949).
21. Дубровский В. М. О некоторых нелинейных интегральных уравнениях. Ученые зап. МГУ **30** (1939).
22. Ентч Р. (Jentzsch R). Über Integralgleichungen mit positiven Kern. Journal für reine und angew. Math. **141** (1912).
23. Иглиш Р. (Iglisch R.) а) Poissonische Differentialgleichung und nichtlineare Integralgleichungen. Math. Ann. **101** (1929).
б) Zur Theorie der Schwingungen. Monatshefte für Math. und Phys. **37** (1930); **39** (1931), **42** (1933).
в) Existenz- und Eindeutigkeitssätze bei nichtlinearen Integralgleichungen. Math. Ann. **108** (1933).
г) Zur Theorie der reellen Verweigungen von Lösungen nichtlinearer Integralgleichungen. Journal für die reine und angew. Math. **164** (1931).
24. Канторович Л. В. а) К общей теории приближенных методов анализа. ДАН **60**, № 6 (1948).
б) Функциональный анализ и прикладная математика. УМН **3**, вып. 28 (1948).
25. Каратеодори (Carathéodory). Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig und Berlin, 1918.
26. Каччополи (Caccioppoli). Un theorema generale sull'esistenza di elementi uniti in una transformazione funzionale. Rend. Accad. Lincei **11** (1930).
27. Келдыш М. В. О методе Б. Г. Галеркина для решения краевых задач. Известия АН СССР, сер. матем. **6** (1942).
28. Колмогоров А. Н. Über Kompaktheit der Funktionenmengen bei der Konvergenz im Mittel. Gött. Nachr., 1931, 60--63.
29. Красносельский М. А. а) Об одном принципе неподвижной точки для вполне непрерывных операторов в функциональных пространствах. ДАН **73**, № 1 (1950).
б) Применение метода Галеркина к решению нелинейных уравнений. ДАН **73**, № 6 (1950).
в) Об одном топологическом методе в задаче о собственных функциях нелинейных операторов. ДАН **74**, № 1 (1950).
г) Собственные функции нелинейных операторов, асимптотически близких к линейным. ДАН **74**, № 2 (1950).
д) Исследования по нелинейному функциональному анализу. Диссертация, Киев (1950).
е) Операторы с монотонными минорантами. ДАН **76**, № 4 (1951).
ж) Непрерывность одного оператора. ДАН **77**, № 2 (1951).
з) К задаче о точках бифуркации. ДАН **79**, № 3 (1951).
и) Векторные поля, симметричные относительно подпространства. Доклады АН УССР, № 1 (1951).
к) Об оценке числа критических точек функционалов. УМН **7**, вып. 2 (1952).
л) Приближенное вычисление собственных чисел и функций возмущенных операторов. Доклады АН УССР, № 3 (1952).
м) Расщепление линейных операторов, действующих из одного пространства в другое. ДАН **82**, № 3 (1952).

н) Свойства корня из линейного интегрального оператора. ДАН **88**, № 5 (1953).

о) Новые теоремы существования решений у нелинейных уравнений. ДАН **88**, № 6 (1953).

п) Применение вариационных методов в задаче о точках бифуркации. Матем. сб. **33**, № 1 (1953).

р) Об устойчивости критических точек четных функционалов. ДАН **97**, № 6 (1954).

с) О некоторых задачах нелинейного анализа. УМН **9**, вып. 3 (1954).

т) Два замечания к методу последовательных приближений. УМН **10**, вып. 1 (1955).

у) О вычислении вращения векторного поля на конечномерной сфере. ДАН **101**, № 3 (1955).

ф) Устойчивость критических значений четных функционалов на сфере. Матем. сб. **37**, № 2 (1955).

х) О специальных покрытиях конечномерной сферы. ДАН **102**, № 6 (1955).

30. Красносельский М. А. и Крейн С. Г. а) Об одном доказательстве теоремы о категории проективного пространства. Украинский математический журнал **1**, № 2 (1949).

б) Об итерационном процессе с *минимальными* невязками. Матем. сб. **31**, 2 (1952).

31. Красносельский М. А. и Ладыженский Л. А. а) Условия полной непрерывности оператора П. С. Урысона. Труды Моск. матем. о-ва **3** (1954).

б) Структура спектра положительных неоднородных операторов. Труды Моск. матем. о-ва **3** (1954).

в) Условия u_0-вогнутости интегрального оператора П. С. Урысона. Труды семинара по функциональному анализу, Воронежский университет, вып. 3 (печатается).

32. Красносельский М. А. и Поволоцкий А. И. К вариационным методам в задаче о точках бифуркации. ДАН **91**, № 1 (1953).

33. Красносельский М. А. и Рутицкий Я. Б. а) К теории пространств Орлича. ДАН **81**, № 4 (1951).

б) Линейные интегральные операторы, действующие в пространствах Орлича. ДАН **85**, № 1 (1952).

в) Дифференцирование нелинейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича. ДАН **89**, № 4 (1953).

г) О линейных функционалах в пространствах Орлича. ДАН **97**, № 4 (1954).

д) Об одном способе построения функций, эквивалентных дополнительным к заданным. Труды Воронежского гос. университета **33** (1954).

е) Общая теория пространств Орлича. Труды семинара по функциональному анализу, Воронежский университет, вып. 1 (1955).

ж) Линейные интегральные операторы в пространствах Орлича. Труды семинара по функциональному анализу. Воронежский университет, вып. 2 (печатается).

34. Крейн М. Г. и Рутман М. А. Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха. УМН, вып. 23 (1948).

35. Кронин (Cronin J). a) The existence of multiple solutions of elliptic differential equations. Trans. Amer. Math. Soc. **68**, № 1 (1950).

б) Branch points of solutions of equations in Banach space. Trans. Amer. Math. Soc. **69**, № 2 (1950).

в) Analitic functional mappings. Annals of Math. **58**, № 1 (1953).

36. Крылов Николай Митрофанович. Библиография. Москва, 1945.

37. Ладыженский Л. А. а) Условия полной непрерывности интегрального оператора П. С. Урысона в пространстве непрерывных функций. ДАН **97**, № 5 (1954).

б) Об одном классе нелинейных уравнений. Труды семинара по функциональному анализу, Воронежский университет, вып. 2 (печатается).

38. Лере (Lerey J.) a) Théorie des sillages es des prouves. Journal de Math. pures et appliquées **12** (1933).

б) Valeurs propres et vecteurs propres d'un endomorphisme complètement continu d'un espace vectoriel à voisinages convexes. Acta Univ. Szeged **12** (1950).

39. Лере Ж. и Шаудер Ю. Топология и функциональные уравнения. УМН **1**, № 3—4 (1946).

40. Лихтенштейн Л. (Lichtenstein L.). Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearer Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen nebst Anwendungen. Berlin, 1931.

41. Люстерник Л. А. a) Topológische Grundlagen der allgemeinen Eigenverttheorie. Monatsheft für Math. und Phys. **37** (1) (1930).

б) Об условных экстремумах функционалов. Матем. сб. **41**, 3 (1934).

в) Основные понятия функционального анализа. УМН, вып. 1 (1936).

г) Об одном классе нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. Известия АН СССР, сер. матем., № 3 (1939).

д) Топология и вариационное исчисление. УМН, вып. 2 (1946).

е) Топология функциональных пространств и вариационное исчисление в целом. Труды ин-та им. Стеклова, Москва, **19** (1947)

42. Люстерник Л. А. и Соболев В. И. Элементы функционального анализа. Гостехиздат, 1951.

43. Люстерник Л. А. и Шнирельман Л. Г. Топологические методы в вариационных задачах и их приложения к дифференциальной геометрии поверхностей. УМН 2, № 1 (1947).

44. Ляпунов А. М. Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogéne douée d'un mouvement de rotation, Premiére partie. Etude générale du probléme. Записки Академии наук, С.-Петербург, 1906, 1—225.

45. Михлин С. Г. а) О сходимости метода Галеркина. ДАН **61**, № 2 (1948).

б) Проблема минимума квадратичного функционала. Гостехиздат, 1952.

46. Назаров Н. Н. а) К теории нелинейных интегральных уравнений. Труды САГУ, Ташкент **17** (1937).

б) К вопросу о существовании решения нелинейных интегральных уравнений. Бюлл. САГУ **22**, № 6 (1937).

в) Об одном классе нелинейных однородных интегральных уравнений. Труды САГУ, Ташкент **28** (1939).

г) Нелинейные интегральные уравнения типа Гаммерштейна. Труды САГУ, Ташкент **33** (1941).

д) Некоторые вопросы теории спектров нелинейных интегральных уравнений. Труды Института математики и механики АН УзССР, Ташкент **4** (1948). В этом выпуске имеется полная библиография работ Н. Н. Назарова.

47. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. Гостехиздат, 1950.

48. Некрасов А. И. Точная теория волн установившегося вида на поверхности тяжелой жидкости. Гостехиздат, 1951.

49. Немыцкий В. В. а) Sur les équations integrales non-linéaires. C. R. Acad. Sci. **196** (1933).

б) Теоремы существования и единственности для нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **41**, 3 (1934).

в) Об одном классе нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **41**, 4 (1934).

г) Метод неподвижной точки в анализе. УМН, вып. 1 (1936).

д) I. Нелинейные интегральные уравнения, сравнимые с линейными. II. Общее нелинейное интегральное уравнение. ДАН **15** (1937).

е) Некоторые вопросы структуры спектра нелинейных вполне непрерывных операторов. ДАН **80**, № 2 (1951).

ж) Структура спектра нелинейных вполне непрерывных операторов. Матем. сб. **33**, № 3 (1953). Исправления к работе в Матем. сб. **35**. № 1 (1954).

50. Никольский С. М. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. ИАН, сер. матем. № 7 (1943).

51. Перрон О. (Perron O). Jacobischer Kettenbrüchalgorithmus. Math. Ann. **64** (1907).

52. Петров Г. И. Применение метода Галеркина к задаче об устойчивости течения вязкой жидкости. Прикладн. матем. и механика **4**, № 3 (1940).

53. Польский Н. И. а) Про збіжність методу Б. Г. Гальоркіна. Доклады АН УРСР, № 6 (1949).

б) Некоторые обобщения метода Б. Г. Галеркина. ДАН **86**, № 3 (1952).

54. Радон (Radon I.). О линейных функциональных преобразованиях и функциональных уравнениях, работа 1919 г., русский перевод в УМН, вып. 1 (1936).

55. Рисс Ф. (Riesz F.). О линейных функциональных уравнениях, работа 1918 г., русский перевод в УМН, вып. 1 (1936).

56. Роте Э. (Rotte Erich). а) Über Abbildungsklassen von Kougeln des Hilbertschen Ráumes. Compositio Math. **4** (1936).

б) Über den Abbildungsgrad bei Abbildungen von Kugeln des Hilbertschen Ráumes. Compositio Math. **5** (1937).

в) Zur Theorie der topologische Ordnung und der Vektorfel des in Banachschen Ràumen. Compositio Math. **5** (1937).

г) Topological proofs of uniqueness theorems in the theory of differential and integral equations. Bulletin of the Math. Soc. **45**, № 8 (1939).

д) On non-negative functional Transformations. Amer. Journal of Math. **66**, № 2 (1944).

е) Gradient mappings in Hilbert space. Ann. of Math. **47** (1946).

ж) Gradient mappings and éxtrema in Banach spaces. Duke Math. Journal **15** (1948).

з) Completely continuons scalars and variational methods. Ann. of Math. **49** (2) (1948).

и) Weak topology and non-linear integral equations. Trans. of Amer. Math. Soc. **66** (1949).

к) A relation between the type number of a critical point and the index of the corresponding field of gradient vectors. Math. Nachr. **4** (1951).

л) Leray — Schauder index and Morse type numbers in Hilbert space. Ann. of Math. **55**, № 3 (1952).

57. Рутицкий Я. Б. а) Про один нелінійний оператор, що діе в просторах Орліча. Доповіді АН УРСР, № 3 (1952)

б) Об одном свойстве вполне непрерывных линейных интегральных операторов, действующих в пространствах Орлича. УМН **11**, вып. 1 (1956).

58. Рутман М. А. а) Об одном специальном классе вполне непрерывных операторов. ДАН **58**, № 9 (1938).

б) О линейных вполне непрерывных операторах, оставляющих инвариантным некоторый конус. Матем. сб. **8** (50) (1940).

59. Салехов Г. С. Теоремы существования решений нелинейных интегральных уравнений. Изв. Казанского физ.-матем. о-ва **9** (1937).

60. Семенов М. П. К вопросу о структуре спектра нелинейных операторов. Труды семинара по функциональному анализу, Воронежский университет, вып. 1 (1955).

61. Смирнов В. И. Курс высшей математики, т. V, Гостехиздат 1947.

62. Смирнов Н. С. а) Теорема существования решения нелинейных интегральных уравнений. ДАН **3** (1936).

б) Введение в теорию нелинейных интегральных уравнений. ОНТИ, 1936.

63. Соболев В. И. а) О собственных элементах некоторых нелинейных операторов. ДАН **31**, № 8 (1941).

б) Об одном нелинейном интегральном уравнении. ДАН **71**, № 5 (1950).

64. Соболев С. Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Издание Ленинградского университета, 1950.
65. Тихонов А. Н. Ein Fixpunktsatz. Math. Ann. **111** (1935).
66. Урысон П. С. а) Об одном типе нелинейных интегральных уравнений. Матем. сб. **31** (1936).

б) Труды по топологии и другим областям математики, 1, Гостехиздат, 1951, стр. 45—77.

67. Фет А. И. а) Обобщение теоремы Люстерника — Шнирельмана о покрытиях сфер и некоторых связанных с ней теорем. ДАН **95**, № 6 (1954).

б) Инволюционные отображения и покрытия сфер. Труды семинара по функциональному анализу, Воронежский университет, вып. 1 (1955).

68. Фролов С. В. и Эльсгольц Л. Э. Нижняя граница числа критических значений функции, заданной на многообразии. Матем. сб. **42** (1935).
69. Халилов З. И. Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах. Баку, 1949.
70. Цитланадзе Э. С. а) Некоторые вопросы собственных значений для нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. ДАН **53**, № 4 (1946).

б) Некоторые вопросы условного экстремума и вариационной теории собственных значений. ДАН **56**, № 1 (1947).

в) К вопросу о собственных значениях нелинейных вполне непрерывных операторов в гильбертовом пространстве. ДАН **57**, № 9 (1947).

г) Доказательство принципа критической точки для условного экстремума в пространстве типа (B). Сообщения АН ГССР, № 1—2 (1947).

д) Об интегральных уравнениях типа Лихтенштейна. Сообщения АН ГССР, № 6 (1947).

е) О некоторых вариационных задачах для слабо непрерывных функционалов в гильбертовом пространстве. Труды Тбилисского госпединститута им. Пушкина **4** (1947).

ж) Об одном классе нелинейных функциональных уравнений. Сообщения АН ГССР, № 2 (1949).

з) Некоторые вопросы теории нелинейных операторов и вариационного исчисления в пространствах типа Банаха. УМН **5**, вып. 4 (38) (1950).

и) О дифференцировании функционалов. Матем. сб. **29**, № 1 (1951).

к) Некоторые задачи вариационного исчисления в функциональных пространствах. Диссертация, МГУ, 1950.

л) К вариационной теории собственных значений нелинейных операторов в гильбертовом пространстве. Труды Института физики и математики АН Азербайджанской ССР **4—5** (1952).

м) Некоторые вопросы теории нелинейных операторов, порожденных дифференциалом Фреше в пространстве Гильберта и их приложения. Труды Института физики и математики АН Азербайджанской ССР **4—5** (1952).

н) Теоремы существования точек минимакса в пространствах Банаха и их приложения. Труды Моск. матем. о-ва **2** (1952).

71. Шаудер Ю. (Schauder J.). Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen. Studia Math. **2** (1930).
72. Шмидт Э. (Schmidt E.). Zur Theorie der linearen und nichtlinearen Integralgleichungen, III Theil, Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichungen und die Verzweigung iherer Lösungen. Math. Ann. **65** (1908), 370—399.
73. Эльсгольц Л. Э. а) Оценка числа критических точек. УМН **5**, вып. 6 (1951).

б) Теория инвариантов, дающих оценку числа критических точек непрерывной функции, заданной на многообразии. Матем. сб. **5** (1939).

74. Ясинский Ф. С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней, Гостехиздат, 1952, приложение IV, 125—129.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Опечатки

Стр.	Строка	Напечатано	Следует читать	По чьей вине
57	1 сн.	[616]	[626]	Тип.
116	2 сн.	связной	выпуклой	Авт.
200	11 св.	(dt)	dt	Тип.

Зак. 813.